

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITE DE YAOUNDE I THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES
CENTRE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORIALE EN
SCIENCES, TECHNOLOGIE ET
GEOSCIENCES



FACULTY OF SCIENCE
POSTGRADUATE SCHOOL OF
SCIENCE, TECHNOLOGY AND
GEOSCIENCE

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMA-
TION DOCTORIALE EN
MATHEMATIQUES, INFORMATIQUES,
BIOINFORMATIQUES ET APPLICATIONS

RESEARCH AND POSTGRADUATE
TRAINING UNIT FOR
MATHEMATICS, COMPUTER
SCIENCES AND APPLICATIONS

LABORATOIRE D'ANALYSE ET APPLICATION
LABORATORY OF ANALYSIS AND APPLICATION

EQUATIONS D'EINSTEIN-VLASOV EN SYMETRIE T^2 AVEC CHAMP SCALAIRE NON LINEAIRE

Thèse présentée en vue de l'obtention du Doctorat /Ph.D de Mathématiques

Option : Analyse

Spécialité : Equations aux Dérivées Partielles

Par :

LASSIYE TCHUANI ALEX'S CONSTANTIN

Master en Mathématiques

Matricule:05S244

Sous la direction de :

Pr TEGANKONG David

Maître de conférences

Université de Yaoundé I

Et de :

Pr NOUTCHEGUEME Norbert

Professeur

Université de Yaoundé I



Année académique 2019-2020

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie
REPUBLIC OF CAMEROON
Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES
CENTRE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORIALE EN
SCIENCES, TECHNOLOGIE ET
GEOSCIENCES



FACULTY OF SCIENCE
POSTGRADUATE SCHOOL OF
SCIENCE, TECHNOLOGY AND
GEOSCIENCE

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMA-
TION DOCTORIALE EN
MATHEMATIQUES, INFORMATIQUES,
BIOINFORMATIQUES ET APPLICATIONS

RESEARCH AND POSTGRADUATE
TRAINING UNIT FOR
MATHEMATICS, COMPUTER
SCIENCES AND APPLICATIONS

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
LABORATOIRE D'ANALYSE ET
APPLICATION

MATHEMATICS DEPARTMENT
LABORATORY OF ANALYSIS AND
APPLICATION

ATTESTATION DE CORRECTION

Nous soussignés, Pr **NNANG** Hubert M, Pr **AYISSI** Raoul D, Pr **TAKOU** Etienne, Pr **TADMON** Calvin, Pr **TEGANKONG** David, Pr Norbert **NOTCHEGUEME**, membres du jury de la thèse de doctorat/Ph.D présentée par **LASSIYE TCHUANI** Alex's Constantin, Matricule **05S244**, thèse intitulé e: « **EQUATIONS D'EINSTEIN-VLASOV EN SYMETRIE T² AVEC CHAMP SCALAIRE NON LINEAIRE** » et soutenue en vue de l'obtention du diplôme de DOCTORAT Ph.D en mathématiques le **31 Août 2020**, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance en vue de l'amélioration de la qualité de ce travail, ont été effectuées.

En foi de quoi la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Président

Pr. NNANG

Examineur(s)

AYISSI

E. TAKOU

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Déclaration sur l'honneur	iii
Resumé	iv
Abstract	v
Introduction	1
1 ÉQUATIONS	6
1.1 Cadre géométrique	6
1.2 Équations	8
1.3 Symétrie T^2	11
1.4 Présentation des équations dans les deux directions	13
1.4.1 Équations dans la direction passée	13
1.4.2 Équations dans la direction future	20
2 EXISTENCE LOCALE DANS LA DIRECTION PASSÉE	30
2.1 Estimations a priori	30
2.1.1 Estimations sur R , R_t et R_θ	31
2.1.2 Estimations sur μ , A , τ et ϕ ainsi que leurs dérivées de premier ordre	34
2.1.3 Estimation des quantités de torsion	40
2.2 Les itérées dans la direction passée	43
2.2.1 Construction des itérées dans la direction passée	43
2.2.2 Théorème d'existence locale	49

3	EXISTENCE LOCALE DANS LA DIRECTION FUTURE	57
3.1	Estimations a priori	57
3.1.1	Décroissance de l'énergie	57
3.1.2	Estimation de $\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu}$	61
3.1.3	Majoration du champ scalaire ϕ	63
3.1.4	Majoration des composantes de la métrique	64
3.1.5	Estimation de la composante α suivant la variable spatiale	66
3.1.6	Estimation des quantités de torsion	67
3.2	Estimations cône lumière	71
3.2.1	Estimations cône lumière relatives à Υ et $\frac{\alpha t}{\alpha}$	72
3.2.2	Estimation de α_θ ainsi que les dérivées premières de ϕ	75
3.3	Les itérées dans la direction future	86
3.3.1	Construction des itérées dans la direction future	87
3.3.2	Estimation des itérées	90
3.3.3	Théorème d'existence locale	104
4	EXISTENCE GLOBALE	111
4.1	Existence globale dans la direction passée	111
4.2	Existence globale dans la direction future	116
4.2.1	Estimation des dérivées premières de f	118
4.2.2	Estimation des dérivées d'ordre supérieur à 2	124
4.2.3	Théorème d'existence globale	127
	Conclusion	127
	Bibliographie	129
	ANNEXE	133

Dédicace

À

Wilfran, Nathan, Joyce, Johan et Ethan Lassiye
mon épouse Gaelle Monthe Wondji
ma maman Monthe Bernadette
la mémoire de papa.

Remerciements

L'aboutissement d'un travail de thèse ne saurait se concrétiser que par la Grâce Divine et aux efforts conjugués des uns et des autres. Ceci m'amène à penser à ceux qui m'ont soutenu dans mon initiative à la recherche jusqu'à la rédaction de cette thèse, d'une quelconque manière que ce soit. Ainsi, je tiens à manifester ma gratitude à l'endroit de :

- Professeur David Tegankong, enseignant chercheur à l'École Normale Supérieure de Yaoundé. Professeur, seuls de simples mots ne sauront suffir pour manifester mon remerciement à votre endroit. Votre attitude à mon endroit : disponibilité sans borne, partage sans limite de vos idées, vos interrogations, le cadre de recherche, la remotivation à chaque fois que je désespérais etc. C'est avec un très grand plaisir que j'exprime ma profonde reconnaissance et ma très grande admiration à votre endroit.
- Professeur Norbert Noutchequeme, pour ces échanges qui ont été d'un apport inestimable.
- Tous les enseignants du département de Mathématiques de la faculté des sciences de l'Université de Yaoundé I qui, à travers les échanges, notamment pendant les séminaires, m'ont beaucoup édifié.
- Tous les enseignants du département de Mathématiques de l'École Normale Supérieure de l'Université de Yaoundé I, qui m'ont très vite adopté, et qui n'ont cessé de m'encourager.
- Mes camarades de promotion dont la collaboration a été fructueuse.
- Mes amis, en particulier : Wilson, Bertrand, Julie, Christian.
- Ma famille, qui m'a été d'un support sans faille pendant toutes ces années. Mes connaissances et toutes les relations qui ont participé de quelque manière que ce soit à l'aboutissement de la présente thèse.

Déclaration sur l'honneur

Le présent travail est une oeuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie

Signature du candidat

Resumé

En relativité générale, les équations d'Einstein pour un espace temps peuvent se voir comme une équation d'évolution, dont les données initiales, la métrique et la deuxième forme fondamentale sur une hypersurface de genre $\ll espace \gg$ satisfont les équations de contraintes. Un théorème d'existence pour les équations non linéaires n'est pas aisé à établir, d'où le couplage des équations d'Einstein aux équations de Vlasov-champ scalaire. Nous étudions en symétrie T^2 l'existence locale puis globale dans le passé, ensuite dans le futur des solutions des équations d'Einstein dont les sources sont engendrées par une fonction de distribution des particules et un champ scalaire. Nous utilisons respectivement les coordonnées d'aires dans le futur et les coordonnées conformes dans la direction passée. Partant du fait qu'il y'a certaines matières qui ne sont pas prises en compte, à l'instar de la matière noire et l'énergie sombre qui représentent par ailleurs plus de deux tiers de la matière totale disponible dans l'Univers, nous supposons que le champ scalaire est non linéaire.

Mots clés : Relativité générale, équations d'Einstein, équation de Vlasov, champ scalaire, symétrie T^2 .

Abstract

We study in this work, the local and uniqueness of solutions of the non-linear Einstein-Vlasov scalar field system with T^2 symmetry, in contracting direction and the expanding direction. We use the conformal coordinates and areal coordinates respectively in contracting and expanding direction. So, we prove in the case of cosmological models for the Einstein-Vlasov-scalar field system with T^2 symmetry, that the solutions exist globally in the past and the future. The sources of the equations are generated by a distribution function and a scalar field, subject to the Vlasov and the wave equations respectively. Starting from the fact that some matter are not taken into account, in the expanding of Universe. We add dark and dark energy, which represents more than two thirds of the total available matter of the Universe. That we model we non linear scalar Field and potential.

Keywords : General relativity ; Einstein equations ; Vlasov equation ; Scalar field ; T^2 -symmetry.

Introduction

La relativité générale, formulée par le physicien Albert Einstein en 1915, est sans doute l'une des théories les plus fascinantes de la physique moderne, elle associe l'éloquence d'une formulation géométrique des lois de la gravité à une capacité exorbitante de description des phénomènes gravitationnels de l'Univers. S'appuyant sur elle, le modèle cosmologique standard parvient à expliquer les observations cosmologiques, qu'il s'agisse de la nucléosynthèse, du fond diffus cosmologique, de la structure de l'Univers, ou encore de phénomènes proprement relativistes comme les effets de lentille gravitationnelle etc. Elle parvient à donner une description cohérente de l'Univers depuis la genèse à savoir le Big-Bang et les premières "graines" des structures jusqu'aux galaxies que nous observons de nos jours. Dans les investigations mathématiques en Relativité Générale, l'un des problèmes principaux est d'établir l'existence et l'unicité des solutions aussi bien locales que globales des équations d'Einstein sans source ou couplées à divers champs de matières à l'instar des champs scalaires, des matières fluides chargées ou non, ou des particules évoluant avec ou sans collisions décrites par l'équation de Boltzman et l'équation de Vlasov respectivement (Cf [A1]). Elle affirme que l'ensemble des interactions physiques, gravitationnelles ou non-gravitationnelles s'exerçant dans l'Univers, sont directement reliées à la géométrie de celui-ci (Cf [HEL]), notamment à sa courbure, selon les équations d'Einstein. Ce lien a entraîné depuis un peu plus d'un siècle déjà, un fort intérêt tant des physiciens que des mathématiciens pour des questions liées à la relativité générale.

Les motivations relatives à cette thèse sont vues sous deux angles, du point de vue physique et du point de vue mathématique. À la fin des années 1990, les satellites et les télescopes ont permis des mesures très précises des supernovæ distantes et du rayonnement fossile micro-onde. Plusieurs caractéristiques observées, notamment l'accélération de l'expansion de l'Univers, conduisent à supposer qu'il existe effectivement une sorte d'énergie (baptisée énergie sombre), dont une des caractéristiques principales serait d'avoir une pression négative, qui la fait se comporter comme une force gravitationnelle répulsive. Du fait de sa nature répulsive, l'énergie sombre a tendance à accélérer l'expansion de l'Univers

(Voir [AR]), qui à une modélisation différente de la gravitation, intitulée champ scalaire ϕ . L'observation de l'accélération de l'expansion de l'Univers avec ses implications est un authentique problème de Physique fondamentale. Celui-ci nous contraint à reconsidérer l'ensemble des hypothèses menant à la construction du modèle standard de la cosmologie. Partant du fait qu'il y a certaines matières qui ne sont pas prises en compte, à l'instar de la matière noire qui représente par ailleurs près du tiers de la matière totale disponible dans l'Univers, nous ajoutons le potentiel V qui vérifie d'après de très récentes observations de la NASA (Voir [Rh], [Rh1]) les conditions suivantes $V(0) > 0$; $V'(0) = 0$; $V''(0) > 0$. La matière a été invoquée pour expliquer le fait que les galaxies demeurent proches les unes des autres, malgré le fait que l'Univers soit en expansion. Dans ce travail, la question de l'existence globale des solutions des équations d'Einstein avec matière (Vlasov et champ scalaire) est notre préoccupation. Le cas pratique ici est l'étude de l'existence de la solution suivant une symétrie pour affaiblir les hypothèses géométriques. A ce titre, beaucoup d'auteurs ont enrichi la littérature, notamment en symétrie de surface [R], [TN], [T1]; en symétrie de Gowdy avec champ scalaire [NM], [T], en symétrie T^2 , sans source [BCIM], [C], avec constante cosmologique Λ , ([A], [ARW], [S], [TN], [W]). Tout récemment, [RK] et [NR] ont obtenu de formidables résultats sur la censure cosmique sans cheveux. Ce faisant, apportent une avancée significative sur la conjecture sur la structure des singularités gravitationnelles. Les modèles possédant un sous-groupe d'isométries tridimensionnelles agissant simplement et transitivement sur les hypersurfaces du genre temps sont de Bianchi, et ceux possédant un groupe d'isométries agissant sur des hypersurfaces du genre temps mais ne possédant pas de sous-groupe agissant transitivement sur les hypersurfaces sont de Kantowski-Sachs : en effet son sous-groupe agit transitivement sur une hypersurface à symétrie avec les coordonnées périodiques (θ, x, y) . Dans le cadre de ce travail, l'espace temps est en symétrie T^2 , dans ce cas d'espèce ; les solutions sont telles que la métrique et les champs de matière (Vlasov et champ scalaire) sont supposés invariant transitivement suivant les directions x et y . Cette notion est davantage spécifiée dans [A], [LS], [ARW], [W], et [Rh]. Les équations d'Einstein où les inconnues sont la première et la seconde forme fondamentale g_t et k_t respectivement, d'hypersurface spatiale (Σ_t) qui feuilletent l'espace-temps. Les équations d'Einstein sont regardées comme l'évolution dans le temps du triplet $(\Sigma_t; g_t; k_t)$. L'existence locale est bien établie dans les deux directions avant l'existence globale. Nous formulons le problème de données initiales pour les équations d'Einstein-Vlasov avec champ scalaire non linéaire. Nous établissons l'existence d'un feuilletage global par les surfaces de niveau de la fonction d'aire R des surfaces de symétrie, de sorte que chaque feuille induit une hypersurface initiale.

Il existe une solution maximale pour les équations d'Einstein. Désormais, nous savons d'après [FCB] qui en 1952 a montré que si les données initiales du problème de Cauchy pour les équations d'Einstein vérifient les équations de contraintes, alors on peut toujours trouver un espace temps solution des équations d'Einstein contenant une hyper-surface dont la première forme fondamentale et la seconde forme fondamentale s'accordent avec les données initiales. Plus précisément, l'espace temps en relativité générale est décrit par une variété Lorentzienne $(M; g)$ de dimension 4 satisfaisant les équations d'Einstein qui sont au nombre de 10, couplé si nécessaire avec une équation appropriée de matière ; dans notre cas de figure ici, il s'agit de l'équation de Vlasov et celle d'un champ scalaire non linéaire pour lesquelles, il existe un unique difféomorphisme avec la classe des espaces temps globalement hyperboliques. On appelle cette solution, le développement maximal de Cauchy pour les données initiales. On étudie en dynamique globale des plasmas relativistes, l'évolution à très grande vitesse d'un type de particules chargées, lesquelles évoluent sous l'action de leur propre champ de gravitation représenté par le tenseur métrique inconnu $g = (g_{\alpha\beta})$. Le tenseur métrique g est assujéti aux équations d'Einstein, la fonction f est assujéti à l'équation de Vlasov (pour plus de précision [V], [A]) tandis que le champ scalaire ϕ est assujéti à une équation aux dérivées partielles d'ordre deux (équation d'onde), communément appelée équation de Klein-Gordon, qui s'obtient du fait des lois de conservation qui permettent de trouver une étroite relation entre le D'Alembertien de ϕ et la dérivée du potentiel. Il s'agit d'un phénomène physique auto-entretenu et un tel milieu s'appelle en terme relativiste un "plasma". Ces types de phénomènes prévalent en particulier dans le cas des particules évoluant à très grande vitesse à l'instar des particules massives de gaz ionisés dans des milieux à très haute température comme par exemple les vents solaires, les galaxies nébuleuses et les réacteurs en fusion. L'équation de Vlasov exprime le fait que le nombre de particules est constant, ce qui se traduit par le fait que la dérivée de Lie de la fonction f de distribution des particules doit être nulle. L'étude mathématique de ce système avait été initiée par G. Rein et A.D. Rendall [RR] en 1992 dans le contexte du problème de Cauchy. D Tegankong [T1] a obtenu les solutions du système d'Einstein-Vlasov en symétrie de surface avec champ scalaire et aussi avec un critère de continuation de solutions et dans [T2], en 2014, il a été établi l'existence globale dans la direction future en symétrie de Gowdy. Dans la présente investigation, nous travaillons avec une hypothèse de symétrie qui, ajoute les quantités de torsion, ce qui rend d'avantage complexe la métrique. En plus d'établir l'existence globale dans la direction future, nous le faisons également lorsque les solutions convergent vers les singularités initiales (dans la direction passée). La fonction R prend toutes valeurs positives. Nos hypothèses imposent

seulement que le gradient de R soit continu et que les coefficients métriques soient dans un espace suffisamment régulier. Les raisons pour lesquelles nous considérons les équations d'Einstein avec champ scalaire et en présence d'un potentiel sont multiples, entre autre.

- En cosmologie, l'énergie sombre ou énergie noire (dark energy en anglais) est une forme d'énergie hypothétique emplissant uniformément tout l'Univers et dotée d'une pression négative, qui la fait se comporter comme une force gravitationnelle répulsive. L'existence de l'énergie sombre est nécessaire pour expliquer diverses observations astrophysiques, notamment l'accélération de l'expansion de l'Univers détectée au tournant du *XXI*e siècle
- Les observations astrophysiques ont mis en évidence le fait que, même en présence d'un corps matériel, les ondes gravitationnelles peuvent se propager dans l'espace à la vitesse de la lumière, exactement comme les ondes électromagnétiques. L'outil mathématique pour modéliser ce phénomène est d'introduire un champ scalaire ϕ dans les sources du champ de gravitation.
- La matière noire ne doit pas être confondue avec l'énergie sombre qui, contrairement à l'énergie sombre, ne remplit pas uniformément l'Univers et qui interagit normalement (forces attractives) avec la gravitation, ne doit par conséquent pas être négligé que l'on modélise avec le potentiel V .

Les propriétés mathématiques des solutions spatialement homogènes des équations d'Einstein couplées à différents types de champ scalaire et de matière ordinaire ont été étudiées dans les travaux [Re, Re1]. La composition de la densité de l'Univers met en évidence une matière et une énergie qui se seraient produites de façon considérable après le Big-Bang appelée matière noire et énergie sombre représentant un peu plus de six septième de la répartition de la densité d'énergie de l'Univers après exploitation des premières données obtenues par le satellite Planck que l'on modélise à l'aide du potentiel. Notre travail est reparti sur quatre chapitres et organisé de la manière suivante

Le premier chapitre qui est constitué de quatre sections à savoir

- la première consiste à préciser le cadre géométrique, d'une manière générale dans lequel nous allons travailler.
- à la deuxième section de ce premier chapitre, nous décrivons le système d'équations qui va faire l'objet de nos investigations.
- dans cette section, on définit la symétrie T^2 , hypothèse de symétrie considérée ici dans le cadre de ce travail.
- Enfin, dans cette partie, nous présentons nos équations dans la direction passée en utilisant les coordonnées conformes d'une part (ce type de coordonnées est justifié

dans $[A]$) et d'autre part, nos équations dans la direction future en utilisant les coordonnées d'aires (Voir $[BCIM]$, $[S]$, $[W]$). Il est à noter qu'à chacune de ces directions, toutes les équations de contraintes et d'évolution qui en découlent sont explicitées, ainsi que les équations auxiliaires. Les équations d'évolution notamment celles en ϕ sont les conséquences d'une loi de conservation permettant ainsi d'établir le lien entre son d'Alembertien et la dérivée du potentiel. L'équation de Vlasov découle du fait que la dérivée de Lie de f est nulle conséquence de conservation le long de la géodésique.

Au deuxième chapitre nous allons :

- majorer les composantes de la métrique et du champ scalaire ainsi que leurs dérivées de premier ordre dans un intervalle de temps fini. C'est ce que l'on appelle estimation a priori (ou théorème de sortie de tout compact) d'une part
- d'autre part, à l'aide d'un procédé itératif, obtenir un théorème d'existence de solution locale et d'unicité de solution dans la direction passée en montrant que le support suivant la pseudo-impulsion de la fonction de distribution est borné, pour le faire, nous utilisons le système caractéristique de l'équation de Vlasov.

Ensuite au troisième chapitre, nous

- obtenons un théorème d'existence locale et d'unicité de solution dans la direction future, à la différence que les approches ici ne seront pas les mêmes que dans la direction passée; nous allons utiliser la monotonie de l'énergie,
- utilisons par conséquent l'inégalité d'énergie associée avec les estimations cône lumière afin d'avoir nos majorations a priori,
- montrons que ces itérées sont uniformément convergentes, et que leurs limites sont uniques solutions de notre système.

Enfin, le dernier chapitre a pour but d'établir un théorème d'existence globale aussi bien dans la direction passée que dans la direction future. Pour le faire ;

- nous majorons les dérivées d'ordre supérieure des fonctions inconnues,
- nous utilisons également la récurrence forte pour contrôler les dérivées d'ordre supérieures à deux de ces inconnues afin de parachever le travail.

ÉQUATIONS

La formulation de la théorie de la relativité générale est en premier lieu géométrique ; l'objet géométrique au coeur de cette théorie étant l'espace-temps qui s'appuie essentiellement sur la géométrie Riemannienne. D'où la nécessité de commencer par spécifier quelques notions relatives à la géométrie riemannienne, ensuite clarifier la notion de symétrie T^2 . Enfin, nous allons écrire nos équations. Dans ce chapitre, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

1.1 Cadre géométrique

Définition 1.1. *Une variété lorentzienne est un couple (\mathcal{M}, \bar{g}) , où \mathcal{M} est une variété différentielle de classe C^∞ de dimension $n + 1$, et \bar{g} est un champ de formes bilinéaires symétriques de signature $(n; 1)$ sur \mathcal{M} . (i.e on a le signe $+$, n fois et le signe $-$ une fois ou inversement.)*

En particulier, le tenseur \bar{g} est non-dégénéré. Il est également possible de considérer des variétés ayant un ordre plus bas de régularité (par exemple C^2), mais nous conserverons l'hypothèse C^∞ par souci de simplification. La définition d'un espace-temps se déduit alors de celle d'une variété Lorentzienne comme suit :

Définition 1.2. *Une variété lorentzienne (\mathcal{M}, \bar{g}) est un espace-temps si \mathcal{M} est une variété orientée, et s'il existe un champ de vecteurs X tangent à \mathcal{M} tel que $\bar{g}(X, X)$ est négatif en tout point de \mathcal{M} .*

Un tel champ de vecteur est dit "de genre temps" ; il garantit l'existence d'une orientation globale sur (\mathcal{M}, \bar{g}) , distinguant une partie "future" et "passée" des cônes isotropes pour \bar{g} de chaque espace tangent à \mathcal{M}

Définition 1.3. *Soit (\mathcal{M}, \bar{g}) une variété lorentzienne orientée de type temps. Soit M une hypersurface spatiale sur (\mathcal{M}, \bar{g}) . Soit $i : M \rightarrow \mathcal{M}$ une injection et N un vecteur unitaire*

orienté du champ de vecteur temporaire, tel que $\forall p \in M$, $\bar{g}(N_p, i_* v) = 0$, pour tout $v \in T_p M$. La seconde forme fondamentale de M est un champ de 2-tenseurs covariant k sur M défini par

$$k(u, v) = \bar{g}(\bar{D}_{i_* u} N, i_* v)$$

$\forall u, v \in T_p M$, où (\bar{D}) est la connexion de Levi-Civita de (\mathcal{M}, \bar{g}) .

Nous précisons dans le cadre de notre travail la notion de régularité de la manière suivante.

Définition 1.4. Soit $\mathbb{I} \subseteq]0; +\infty[$ un intervalle, et $(t, \theta) \in \mathbb{I} \times S^1$.

1. $f \in C^1(\mathbb{I} \times S^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3)$ est dite régulière si f est périodique en θ de période 2π , $f \geq 0$ et $\text{supp} f(t, \theta, \dots, \dots)$ est uniformément compact en θ et localement uniforme en t .
2. $\phi \in C^2(\mathbb{I} \times S^1)$ est dite régulière si, $\phi(t, \theta + 2\pi) = \phi(t, \theta)$ de plus, $\phi(t, \theta)$ est uniformément compact en θ et localement uniforme en t .
3. Toute composante $\chi \in (\mathbb{I} \times S^1)$ de la métrique est une fonction dite régulière ou lisse si, $\chi(t, \theta + 2\pi) = \chi(t, \theta)$ et $\partial_t \chi, \partial_\theta \chi \in C^1(\mathbb{I} \times S^1)$.

Dans la suite, l'espace-temps d'Einstein sera modélisé par une 4-variété M (que nous supposerons régulière) munie d'une métrique lorentzienne g , ie de signature $(-; +; +; +)$. Nous adopterons la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Les indices grecques désigneront les indices variant de 0 à 3, les lettres latines de 1 à 3.

Une hypersurface de M est une sous-variété $M' \hookrightarrow M$ de codimension 1. Elle est dite de genre espace, ou spatiale, si la métrique induite $\gamma := i^* g$ (où $i : M' \hookrightarrow M$) est riemannienne, ie définie positive.

Définition 1.5. Un ensemble de données initiales pour les équations d'Einstein est un triplet $(\Sigma; h; K)$ tel que :

- $(\Sigma; K)$ est une variété Riemannienne complète.
- K est un $(0; 2)$ tenseur symétrique.
- $(\Sigma; h; K)$ satisfait aux équations de contrainte.

Définition 1.6. $(\mathcal{M}; g)$ est une solution du problème aux données initiales $(\Sigma; h; K)$ lorsque :

- $(\mathcal{M}; g)$ est une variété lorentzienne satisfaisant les équations d'Einstein.
- Il existe un prolongement $\psi : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$ tel que
 - h est le pull-back de la métrique induite sur $\psi(\Sigma)$
 - K est le pull-back de la deuxième forme fondamentale.

On dit alors que $(\mathcal{M}; g)$ est le développement de $(\Sigma; h; K)$

Définition 1.7. Une surface de Cauchy est une hypersurface Σ de (\mathcal{M}, g) tel que :

- Σ est de type espace.
- Toute courbe (sans extension) causale intersecte Σ une et une seule fois.

Un espace-temps qui admet une surface de Cauchy est dit globalement hyperbolique.

En particulier, il existe des données initiales pour lesquelles le développement de Cauchy maximal est maximal uniquement dans la classe des espaces-temps globalement hyperboliques, et admet une extension en tant que variété lorentzienne (cf Reissner-Nordström, Kerr).

La coordonnée locale est $(x^\mu) = (t; x^i)$ avec $x^0 = t$ coordonnée temporelle et les coordonnées spatiales $(x^i)_{1 \leq i \leq 3}$.

Nous précisons que dans ce travail, le modèle utilisé est un gaz auto-gravitationnel évoluant sans collision, constitué des particules de même masse que l'on suppose égale à 1.

(p^μ) est le moment des particules, les quantités $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ sont conservées tout au long des géodésiques impliquant que l'espace des particules est une sous variété de dimension 7 du fibré tangent TM noté $PM = \{g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -1; p^0 > 0\}$.

En coordonnées locales $(t; x^i; p^i)$ sur PM

$$p^0 = \sqrt{-g^{00}} \sqrt{1 + g_{ab}p^a p^b + 2g_{0a}p^0 p^b}$$

PM est une sous-variété de l'espace tangent TM de la variété espace temps M .

1.2 Équations

Soit $\mathcal{P} \subset TM$ l'hyperboloïde de masse constituée de l'ensemble des vecteurs de direction temporelle. f la fonction de distribution des particules, une fonction définie positive sur cet hyperboloïde de masse. L'équation de Vlsosov se déduit du fait que f se préserve le long de la géodésique. Nous avons alors la dérivée de Lie de f suivant le champ de vecteurs X ($[Re]$, $[Rh]$, $[Rh1]$)

$$\mathcal{L}_X f = 0 \quad \text{avec} \quad X = (p^\mu; -\Gamma^i_{\nu\gamma} p^\nu p^\gamma) \quad (1.1)$$

d'où l'équation de Vlasov en coordonnées locales

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^i_{\nu\gamma} p^\nu p^\gamma \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0 \quad (1.2)$$

$$\Gamma_{\nu\gamma}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\eta}(g_{\nu\eta,\gamma} + g_{\eta\gamma,\nu} - g_{\nu\gamma,\eta})$$

étant les coefficients de Christoffel.

L'espace temps en relativité générale est la donnée d'une variété Lorentzienne $(M; g)$ de dimension 4 satisfaisant :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

qui décrit l'interaction entre la géométrie de l'espace-temps représentée par le tenseur d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

et son contenu matériel représenté par le tenseur impulsion énergie ,

$$T_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}^f + T_{\mu\nu}^{\phi} \quad (1.5)$$

avec :

$$T_{\alpha\beta}^f = - \int_{\mathbb{R}^3} f p_{\alpha} p_{\beta} |g|^{1/2} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_0} \quad (1.6)$$

$$T_{\alpha\beta}^{\phi} = \nabla_{\alpha}\phi \nabla_{\beta}\phi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(\nabla_{\sigma}\phi \nabla^{\sigma}\phi + 2V(\phi)) \quad (1.7)$$

étant respectivement les tenseurs en Vlasov et en champ scalaire

$$\text{avec } f := f(t, \theta, x, y, p^1, p^2, p^3) \text{ et } \phi := \phi(t, \theta)$$

où $p_{\alpha} = g_{\alpha\sigma}p^{\sigma}$ et $|g|$ est le module du déterminant de la métrique $(g_{\alpha\beta})$. Le tenseur de Ricci et la courbure scalaire sont données respectivement par

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu,\lambda\nu}^{\lambda} \quad (1.8)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\eta} - \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu}^{\eta} \quad (1.10)$$

Nous énonçons à présent le lemme suivant :

Lemme 1.1. $\phi = \phi(t, \theta)$ vérifie

$$\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}\phi = V'(\phi). \quad (1.11)$$

Preuve : Partant de l'identité de Bianchi, on a :

$$\nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \nabla^{\mu}T_{\mu\nu}^{\phi} + \nabla^{\mu}T_{\mu\nu}^f = 0$$

$$\text{or } \mathcal{L}_X f = 0 \Rightarrow \nabla^{\mu}T_{\mu\nu}^f = 0 \text{ au vu des travaux de [Re], [Re2], [LS]}$$

ainsi

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^\phi = 0 \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla^\mu T_{\mu\nu}^\phi = 0 &\Rightarrow \nabla^\mu (\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - g_{\mu\nu} V(\phi)) = 0 \\ &\Rightarrow \nabla^\mu (\nabla_\mu \phi) \nabla_\nu \phi + \nabla_\mu \phi \nabla^\mu (\nabla_\nu \phi) - \frac{1}{2} \nabla^\mu (g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi + 2g_{\mu\nu} V(\phi)) = 0 \\ &\Rightarrow \square_g \phi \nabla_\nu \phi + \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} \nabla^\mu (g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi + 2g_{\mu\nu} V(\phi)) = 0. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \nabla^\mu (\nabla^\sigma \phi \nabla_\sigma \phi) &= g_{\mu\nu} \nabla^\mu (\nabla^\sigma \phi) \nabla_\sigma \phi + g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \phi (\nabla^\mu \nabla_\sigma \phi) \\ &= (\nabla_\nu \nabla^\sigma \phi) \nabla_\sigma \phi + (\nabla^\sigma \phi) (\nabla_\nu \nabla_\sigma \phi) \\ &= (\nabla_\nu \nabla^\sigma \phi) \nabla_\sigma \phi + g^{\sigma\lambda} \nabla_\lambda \phi (\nabla_\nu g^{\sigma\mu} \nabla_\mu \phi) \\ &= \nabla_\sigma \phi (\nabla_\nu \nabla^\sigma \phi) + \delta_\mu^\lambda \nabla_\lambda \phi (\nabla_\nu \nabla^\mu \phi) \\ &= \nabla_\mu \phi (\nabla_\nu \nabla^\mu \phi) + \nabla_\lambda \phi (\nabla_\nu \nabla^\lambda \phi) \\ &= 2 \nabla_\mu \phi (\nabla_\nu \nabla^\mu \phi) \end{aligned}$$

On a donc $\square_g \phi \nabla_\nu \phi + \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \nabla_\nu \phi - \nabla_\mu \phi (\nabla_\nu \nabla^\mu \phi) - \nabla^\mu (g_{\mu\nu} V(\phi)) = 0$.

Ainsi $\square_g \phi \nabla_\mu \phi = \nabla^\mu (g_{\mu\nu} V(\phi))$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \nabla^\mu (g_{\mu\nu} V(\phi)) &= g^{\mu\sigma} \nabla_\sigma (g_{\mu\nu} V(\phi)) = g_{\mu\nu} \nabla^\mu V(\phi) \\ &= \nabla_\nu V(\phi) \\ &= \nabla_\nu \phi \left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \right) = \nabla_\nu \phi V'(\phi). \end{aligned}$$

De ce fait : $\square_g \phi \nabla_\lambda \phi = \nabla_\lambda \phi V'(\phi) \iff (\square_g \phi - V'(\phi)) \nabla_\sigma \phi = 0$.

i.e $\square_g \phi - V'(\phi) = 0$ ou $\nabla_\sigma \phi = 0$. Considérons l'ensemble ouvert suivant

$$\Pi = \{(t, \theta) \in (t_0; t_i] \times S^1 / \square_g \phi(t, \theta) - V'(\phi(t, \theta)) \neq 0\}. \quad (1.13)$$

Alors sur Π , $\nabla_\sigma \phi = 0$. Ainsi $\nabla^\sigma \nabla_\sigma \phi = 0$ i.e $\square_g \phi = 0$, or nous avons par hypothèse en $t = t_0$, $V'(\phi_0) = 0$ d'où la contradiction en $t = t_0$.

Supposons dans la suite que $t \neq t_0$ signifie que, $\nabla_\sigma \phi = 0$ alors ϕ est une constante. Par conséquent Π est un ensemble vide d'où :

$$\square_g \phi(t, \theta) = V'(\phi(t, \theta)).$$

On procède de même dans la direction passée en remplaçant (1.13) par

$$\Pi = \{(t, \theta) \in (t_-; t_0] \times S^1 / \square_g \phi(t, \theta) - V'(\phi(t, \theta)) \neq 0\}$$

▪

Ainsi, le système d'équations Einstein-Vlasov-champ scalaire est donné par : (1.2) – (1.3), (1.11)

$$\begin{cases} p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\gamma}^i p^\nu p^\gamma \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0, \\ G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \\ \nabla^\alpha \nabla_\alpha \phi = V'(\phi). \end{cases}$$

1.3 Symétrie T^2

Dans cette section, nous considérons le système d'équations d'Einstein-Vlasov en symétrie T^2 avec champ scalaire (EVSFS en symétrie T^2) aussi bien dans la direction passée (i.e évoluant vers les singularités initiales) en utilisant les coordonnées conformes pour le faire ; que dans la direction future en utilisant les coordonnées d'aires. L'existence de telles coordonnées étant justifiées par H. Andréasson, G. Rien et A. Rendall ([A], [R], [Re2]). Il est question pour nous, de considérer une solution de *EV SFS* ayant des données initiales contenues sur une hypersurface compacte (Ceci pour contourner les problèmes de singularités) ([ARW], [Rh2]).

Il faut remarquer que pour les variétés présentant des symétries, il existe un système de coordonnées particulier, basé sur les champs de vecteurs de Killing, qui permet d'exprimer une constante du mouvement le long des géodésiques. Or, dans notre cas de figure, une variété présentant des symétries est isomorphe à un groupe de Lie, et cette symétrie entraîne une invariance du lagrangien sous l'action de ce même groupe de Lie. C'est cette constatation qui a permis à Poincaré de réécrire le théorème d'Euler-Lagrange en terme d'action de groupe de Lie, et plus précisément en terme d'action co-adjointe de l'algèbre de Lie sur son algèbre duale. Pour plus de précision à ce sujet (Cf [RJ]). D'où la nécessité de spécifier la notion de symétrie T^2 objet de ce travail. Ainsi, dans le cadre de ce travail, l'hypersurface initiale est le tore en dimension 3, T^3 avec les coordonnées (θ, x, y) toutes périodiques. Les champs de matières sont supposés invariants par la translation suivant les directions de x et y . Compte tenu des identifications périodiques impliquées, ces solutions admettent un groupe de symétrie de dimension 2 isomorphe au tore $T^2 = S^1 \times S^1$ en dimension 2, on parle alors d'espace temps en symétrie T^2 . (Cf [LS], [ARW], [Re3], [NR] [W]) .

L'algèbre de Lie en symétrie T^2 est engendrée par deux champs de vecteurs commutatifs X et Y en tout temps t en coordonnées d'aires et pour tout R en coordonnées conformes et on a

$$\begin{aligned} t^2 &= g(X, X)g(Y, Y) - (g(X, Y))^2 \quad \text{en coordonnées d'aire} \\ R^2 &= g(X, X)g(Y, Y) - (g(X, Y))^2 \quad \text{en coordonnées conformes} \end{aligned}$$

ces vecteurs X et Y sont des vecteurs de Killing (vecteurs sur lesquels les géodésiques sont conservées) qui commutent partout et sont non nuls.

L'espace temps étant symétrique de symétrie T^2 , on définit les quantités de torsion (Cf $[S]$, $[T]$, $[T1]$, $[TN]$, $[W]$) de la manière suivante :

$$J = \epsilon_{abcd} X^a Y^b \nabla^c X^d; \quad K = \epsilon_{abcd} X^a Y^b \nabla^c Y^d. \quad (1.14)$$

Le cadre géométrique est une variété différentielle espace-temps munie d'une métrique Riemannienne. C'est à dire la métrique est invariante sous l'action effective du groupe de Lie $T^2 = S^1 \times S^1$. Cet espace-temps admet comme surface de Cauchy (Spatial) le tore $T^3 = T^2 \times S^1$ qui n'est rien d'autre que le groupe des isométries formé des orbites des particules.

En coordonnées d'aires, on les normalise de sorte que l'élément d'aire du groupe des orbites soit proportionnel au temps. Ce qui justifie le choix de la métrique en coordonnées d'aires qui se met sous la forme (Cf $[TN]$, $[W]$) :

$$ds^2 = e^{2(\tau-\mu)}(-\alpha dt^2 + d\theta^2) + e^{2\mu}[dx + A dy + (G + AH)d\theta]^2 + e^{-2\mu}t^2[dy + Hd\theta]^2 \quad (1.15)$$

où τ , μ , A , α , H , et G sont les fonctions dépendant de θ et t périodiques en θ de période 2π .

Les quantités de torsion sont reliées à la métrique en coordonnées d'aire par :

$$J = -\frac{te^{-2\tau-4\mu}}{\sqrt{\alpha}}(G_t + AH_t), \quad K = AJ - \frac{t^3 e^{-2\tau}}{\sqrt{\alpha}}H_t. \quad (1.16)$$

Sur un espace temps en symétrie T^2 , il est possible de définir une fonction R (fonction d'aires des orbites des particules) comme suit : si p est un point de l'espace temps, alors $R(p)$ est égal à la surface des orbites de l'ensemble des actions sur T^2 contenant le point p , on parle de coordonnées conformes. (Pour plus d'explications à ce propos, on peut se référer aussi à ($[ARW]$, $[NM]$, $[Rh]$, $[Re3]$, $[NR]$). Dans la suite, nous aurons besoin de la définition suivante. En coordonnées conformes, la métrique est sous la forme ($[ARW]$, $[LTN]$)

$$ds^2 = e^{2(\tau-\mu)}(-dt^2 + d\theta^2) + e^{2\mu}[dx + A dy + (G + AH)d\theta]^2 + e^{-2\mu}R^2[dy + Hd\theta]^2 \quad (1.17)$$

où τ , μ , A , R , H , et G sont les fonctions dépendant de θ et t périodiques en θ de période 2π .

En coordonnées conformes les quantités de torsion sont reliées aux composantes de la métrique par

$$J = -Re^{-2\tau-4\mu}(G_t + AH_t), \quad K = AJ - R^3e^{-2\tau}H_t. \quad (1.18)$$

1.4 Présentation des équations dans les deux directions

Nous allons dans un premier temps établir les équations dans la direction passée et dans un second temps, dans la direction future.

1.4.1 Équations dans la direction passée

Dans la base canonique usuelle $\{dt; d\theta; dx; dy\}$, de l'espace $\mathbb{R}^+ \times S \times \mathbb{R}^2$, la métrique (1.17) est sous la forme :

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} -e^{2(\tau-\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{2\tau}}{e^{2\mu}} + \left(\frac{G+AH}{e^{-\mu}}\right)^2 + \frac{(RH)^2}{e^{2\mu}} & \frac{(G+AH)}{e^{-2\mu}} & \frac{A(G+AH)}{e^{-2\mu}} + \frac{R^2H}{e^{2\mu}} \\ 0 & e^{2\mu}(G+AH) & e^{2\mu} & Ae^{2\mu} \\ 0 & e^{2\mu}A(G+AH) + \frac{R^2H}{e^{2\mu}} & Ae^{2\mu} & \frac{R^2}{e^{2\mu}} + e^{2\mu}A^2 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

. Son inverse est donné par

$$M^{i,j} = \begin{pmatrix} -e^{-2(\tau-\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(\tau-\mu)} & -Ge^{-2(\tau-\mu)} & -He^{-2(\tau-\mu)} \\ 0 & -Ge^{-2(\tau-\mu)} & \frac{A^2}{R^2}e^{2\mu} + e^{-2\mu} + G^2e^{-2(\tau-\mu)} & HGe^{-2(\tau-\mu)} - \frac{A}{R^2}e^{2\mu} \\ 0 & -He^{-2(\tau-\mu)} & HGe^{-2(\tau-\mu)} - \frac{A}{R^2}e^{2\mu} & \frac{e^{2\mu}}{R^2} + H^2e^{-2(\tau-\mu)} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Nous aurons besoin des tenseurs impulsion énergie (1.6)–(1.7). D'où les lemmes suivants.

Lemme 1.2. Soient $\phi = \phi(t, \theta)$ une fonction régulière (voir la définition (1.4)) sur $I \times \mathbb{R}$ où $I \subseteq]0, +\infty[$, μ , A , R et τ quatre fonctions régulières sur $I \times \mathbb{R}$, les composantes non

nulles du tenseur impulsion-énergie en ϕ sont

$$T_{00}^\phi(t, \theta) = \frac{1}{2}(\phi_t^2 + \phi_\theta^2) + e^{2(\tau-\mu)}V(\phi), \quad (1.21)$$

$$T_{01}^\phi = \phi_t\phi_\theta = T_{10}^\phi, \quad (1.22)$$

$$T_{11}^\phi = \frac{1}{2}(\phi_t^2 + \phi_\theta^2) - e^{2(\tau-\mu)}V(\phi), \quad (1.23)$$

$$T_{12}^\phi = T_{13}^\phi + \frac{1}{2}e^{-2\tau}HR^2(\phi_t^2 - \phi_\theta^2 - 2V(\phi)) = T_{21}^\phi, \quad (1.24)$$

$$T_{13}^\phi = \frac{1}{2}e^{-2(\tau-2\mu)}(G + AH)(\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - e^{2\mu}(G + AH)V(\phi) = T_{31}^\phi \quad (1.25)$$

$$T_{22}^\phi = \frac{1}{2}(\phi_t^2 - \phi_\theta^2)e^{-2(\tau-2\mu)} - e^{2\mu}V(\phi), \quad (1.26)$$

$$T_{33}^\phi(t, \theta) = \frac{e^{-2(\tau-\mu)}}{2}(R^2e^{-2\tau} + e^{2\mu}A^2)(\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - R^2(e^{-2\mu} + e^{2\mu}\frac{A^2}{R^2})V(\phi), \quad (1.27)$$

$$T_{23}^\phi = \frac{1}{2}Ae^{-2(\tau-2\mu)}(\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - Ae^{2\mu}V(\phi) = T_{32}^\phi. \quad (1.28)$$

Preuve :

$$T_{\alpha\beta}^\phi = \nabla_\alpha\phi\nabla_\beta\phi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\nabla_\sigma\phi\nabla^\sigma\phi - g_{\alpha\beta}V(\phi),$$

$$\begin{aligned} \text{or } \nabla_\sigma\phi\nabla^\sigma\phi &= g^{\sigma\nu}\nabla_\sigma\phi\nabla_\nu\phi = g^{00}(\nabla_0\phi)^2 + g^{11}(\nabla_1\phi)^2 \\ &= -e^{-2(\tau-\mu)}\phi_t^2 + e^{-2(\tau-\mu)}\phi_\theta^2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} T_{00}^\phi &= \phi_t^2 - \frac{1}{2}g_{00}(-e^{-2(\tau-\mu)}\phi_t^2 + e^{-2(\tau-\mu)}\phi_\theta^2) - g_{00}V(\phi) \\ &= \phi_t^2 + \frac{1}{2}e^{2(\tau-\mu)}(-e^{-2(\tau-\mu)}\phi_t^2 + e^{-2(\tau-\mu)}\phi_\theta^2) + e^{2(\tau-\mu)}V(\phi) \\ &= \phi_t^2 + \frac{1}{2}[-(\phi_t^2 - \phi_\theta^2)] + e^{2(\tau-\mu)}V(\phi) \\ &= \frac{1}{2}(\phi_t^2 + \phi_\theta^2) + e^{2(\tau-\mu)}V(\phi). \end{aligned}$$

De même ;

$$\begin{aligned} T_{01}^\phi &= \nabla_t\phi\nabla_\theta\phi - \frac{1}{2}g_{01}\nabla_\sigma\phi\nabla^\sigma\phi - g_{01}V(\phi) \\ &= \phi_t\phi_\theta, \\ T_{11}^\phi &= \nabla_\theta\phi\nabla_\theta\phi - \frac{1}{2}g_{11}\nabla_\sigma\phi\nabla^\sigma\phi - g_{11}V(\phi) \\ &= \frac{1}{2}(\phi_t^2 + \phi_\theta^2) - e^{2(\tau-\mu)}V(\phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{22}^\phi &= \nabla_x \phi \nabla_x \phi - \frac{1}{2} g_{22} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - g_{22} V(\phi) \\
&= \frac{1}{2} e^{-2(\tau-2\mu)} (\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - e^{2\mu} V(\phi), \\
T_{33}^\phi &= \nabla_y \phi \nabla_y \phi - \frac{1}{2} g_{33} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - g_{33} V(\phi) \\
&= -\frac{1}{2} (e^{2\mu} A^2 + e^{-2\mu} R^2) (-e^{-2(\tau-\mu)} \phi_t^2 + e^{-2(\tau-\mu)} \phi_\theta^2) \\
&\quad - (e^{2\mu} A^2 + e^{-2\mu} R^2) V(\phi), \\
T_{23}^\phi &= \nabla_x \phi \nabla_y \phi - \frac{1}{2} g_{23} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - g_{23} V(\phi) \\
&= -\frac{1}{2} A e^{2\mu} (e^{-2(\tau-\mu)} (-\phi_t^2 + \phi_\theta^2) - A e^{2\mu} V(\phi)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{12}^\phi &= \nabla_x \phi \nabla_x \phi - \frac{1}{2} g_{12} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - g_{12} V(\phi) \\
&= \frac{1}{2} e^{-2(\tau-2\mu)} (G + AH) (\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - e^{2\mu} (G + AH) V(\phi) \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{-2\tau} H R^2 (\phi_t^2 - \phi_\theta^2 - V(\phi)) \\
&= T_{13}^\phi + \frac{1}{2} e^{-2\tau} H R^2 (\phi_t^2 - \phi_\theta^2 - V(\phi)).
\end{aligned}$$

Toutes les autres composantes sont nulles. En effet, pour $k \in \{1; 2; 3\}$, $z \in \{x, y\}$, $g_{0k} = 0$ et $\nabla_z \phi = 0$. D'où

$$T_{0k}^\phi = \nabla_t \phi \nabla_z \phi - \frac{1}{2} g_{0k} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi - g_{0k} V(\phi) = 0$$

▪

Pour les composantes de $T_{\alpha\beta}^f$ en f , afin de simplifier les calculs, nous introduisons une nouvelle variable (v^α) définie par :

$$(v^0)^2 = e^{2(\tau-\mu)} (p^0)^2, \quad (1.29)$$

$$(v^1)^2 = e^{2(\tau-\mu)} (p^1)^2, \quad (1.30)$$

$$(v^2)^2 = e^{2\mu} [(G + AH)p^1 + p^2 + Ap^3]^2, \quad (1.31)$$

$$(v^3)^2 = R^2 e^{-2\mu} (Hp^1 + p^3)^2. \quad (1.32)$$

Lemme 1.3. *Étant donné les changements de variables v^0 , v^1 , v^2 , v^3 définis par (1.29), (1.30), (1.31), (1.32), nous avons*

$$v^0 = \sqrt{1 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
p_\eta p^\eta = -1 &\Leftrightarrow g_{\eta\kappa} p^\kappa p^\eta = -1 \\
&\Leftrightarrow g_{00}(p^0)^2 = (-1 - g_{ij} p^i p^j) \text{ car } g_{0j} = 0 \\
&\Leftrightarrow g_{00}(p^0)^2 + g_{11}(p^1)^2 + 2g_{12}p^2p^1 + 2g_{13}p^1p^3 + g_{22}(p^2)^2 + g_{33}(p^3)^2 + 2g_{23}p^2p^3 = -1 \\
&\Leftrightarrow e^{2(\tau-\mu)}(e^{-(\tau-\mu)}v^0)^2 - e^{2(\tau-\mu)}(e^{-(\tau-\mu)}v^1)^2 - e^{2\mu}(e^{-\mu}v^2 - \frac{Ae^\mu}{R}v^3)^2 \\
&\quad - (e^{-2\mu}R^2 + e^{2\mu}A^2) \left(\frac{e^\mu}{R}v^3\right)^2 - 2Ae^{2\mu}(e^{-2\mu}R^2 + e^{2\mu}A^2) \left(\frac{e^\mu}{R}v^2v^3\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow (v^0)^2 - (v^1)^2 - e^{2\mu} \left(e^{-2\mu}(v^2)^2 + \frac{A^2}{R^2}e^{2\mu}(v^3)^2 - 2\frac{A}{R}v^2v^3\right) \\
&\quad - (e^{-2\mu}R^2 + e^{2\mu}A^2) \left(\frac{e^{2\mu}}{R^2}(v^3)^2\right) - 2Ae^{2\mu}(e^{-\mu}v^2 - \frac{e^\mu A}{R}v^3) \left(\frac{e^\mu}{R}v^3\right) = 1 \\
&\Leftrightarrow (v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - \frac{A^2}{R^2}e^{4\mu}(v^3)^2 + 2\frac{A}{R}v^2v^3e^{2\mu} - (v^3)^2 - \frac{A^2}{R^2}e^{4\mu}(v^3)^2 \\
&\quad - 2\frac{A}{R}e^\mu v^2v^3 + \frac{A^2}{R^2}e^{4\mu}(v^3)^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow (v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2 = 1 \\
&\text{i.e } v^0 = \pm \sqrt{1 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}
\end{aligned}$$

or comme $v^0 = e^{\tau-\mu}p^0$, et $p^0 > 0$ on a finalement $v^0 = \sqrt{1 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}$. ■

Lemme 1.4. Soient $f = f(t, \theta, v)$ une fonction régulière (Cf définition (1.4)) sur $I \times \mathbb{R}^2$ où $I \subseteq]0, +\infty[$, μ , A , R et τ quatre fonctions régulières sur $I \times \mathbb{R}$, alors :

$$T_{00}^f(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{2(\tau-\mu)}v^0 f(t, \theta, v)dv, \quad (1.33)$$

$$T_{01}^f(t, \theta) = T_{10}^f(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{2(\tau-\mu)}\frac{(v^1)^2}{v^0} f(t, \theta, v)dv, \quad (1.34)$$

$$T_{02}^f(t, \theta) = T_{20}^f(t, \theta) = - \int_{\mathbb{R}^3} e^\tau f(t, \theta, v)v^2dv \quad (1.35)$$

$$T_{03}^f(t, \theta) = T_{30}^f(t, \theta) = - \int_{\mathbb{R}^3} (Ae^\tau v^2 + e^{\tau-2\mu}Rv^3) f(t, \theta, v)dv \quad (1.36)$$

$$T_{11}^f(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{2(\tau-\mu)}\frac{(v^1)^2}{v^0} f(t, \theta, v)dv, \quad (1.37)$$

$$T_{12}^f(t, \theta) = T_{21}^f(t, \theta) = - \int_{\mathbb{R}^3} e^\tau \frac{v^1v^2}{v^0} f(t, \theta, v)dv, \quad (1.38)$$

$$T_{13}^f(t, \theta) = T_{31}^f(t, \theta) = -e^{\tau-\mu} \int_{\mathbb{R}^3} (Ae^\mu v^1v^2 + Re^{-\mu}v^1v^3) f(t, \theta)dv, \quad (1.39)$$

$$T_{22}^f = \int_{\mathbb{R}^3} e^{2\mu} f(t, \theta, v) \frac{(v^1)^2}{v^0} dv, \quad (1.40)$$

$$T_{23}^f = \int_{\mathbb{R}^3} (Ae^{2\mu}(v^2)^2 + Rv^2v^3) f(t, \theta, v) \frac{v^2v^3}{v^0} dv, \quad (1.41)$$

$$T_{33}^f = \int_{\mathbb{R}^3} (Ae^\mu v^2 + Re^{-\mu}v^3)^2 f(t, \theta, v) \frac{dv}{v^0}. \quad (1.42)$$

Preuve : Nous savons que $T_{\alpha\beta}^f = -\int_{\mathbb{R}^3} f p_\alpha p_\beta |g|^{1/2} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_0}$, par ailleurs au vu de (1.19),

$$|g|^{1/2} = |R| e^{2(\tau-\mu)} = Re^{2(\tau-\mu)}.$$

De plus

$$\begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\tau+\mu} & 0 & 0 \\ -Ge^{-\tau+\mu} & e^{-\mu} & -Ae^{2\mu}R^{-1} \\ -He^{-\tau+\mu} & 0 & e^\mu R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

et

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = J_{ac} \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{bmatrix}$$

avec

$$|J_{ac}| = \begin{vmatrix} e^{(\tau-\mu)} & 0 & 0 \\ 0 & e^\mu & Ae^\mu \\ 0 & 0 & e^{-\mu}R \end{vmatrix} = |R| e^{(\tau-\mu)}.$$

$$|g|^{1/2} \frac{dp}{p_0} = Re^{2(\tau-\mu)} \frac{dP}{p_0} = Re^{2(\tau-\mu)} \frac{dv}{Re^{\tau-\mu}(-e^{2(\tau-\mu)})e^{-\tau+\mu}v^0} = -\frac{dv}{v^0}.$$

De ce qui précède, on a donc

$$\begin{aligned} T_{00}^f(t, \theta) &= -\int_{\mathbb{R}^3} f p_0 p_0 |g|^{1/2} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_0} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} f v_0 e^{\tau-\mu} e^{2(\tau-\mu)} R \frac{dv^1 dv^2 dv^3}{Re^{\tau-\mu}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{2(\tau-\mu)} v^0 f(t, \theta, v) dv. \end{aligned}$$

Par ailleurs $p_1 = g_{1\eta}p^\eta = g_{11}p^1 + g_{12}p^2 + g_{13}p^3 = e^{\tau-\mu}v^1$.

$$\begin{aligned} T_{01}^f(t, \theta) &= - \int_{\mathbb{R}^3} f p_0 p_1 |g|^{1/2} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_0} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} e^{2(\tau-\mu)} v^1 f(t, \theta, v) dv, \\ T_{11}^f(t, \theta) &= - \int_{\mathbb{R}^3} f p_1 p_1 |g|^{1/2} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_0} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} e^{2(\tau-\mu)} R e^{2(\tau-\mu)} \frac{(v^1)^2}{-e^{2(\tau-\mu)} R e^{(\tau-\mu)} e^{-\tau+\mu} v^0} f(t, \theta, v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{2(\tau-\mu)} \frac{(v^1)^2}{v^0} f(t, \theta, v) dv. \end{aligned}$$

On obtient de même (1.35) – (1.36), (1.38) – (1.39) et pour $j; k \in \{2; 3\}$, on a :

$$\begin{aligned} T_{jk}^f &= - \int_{\mathbb{R}^3} p_j p_k |g|^{1/2} f(t, \theta, v) \frac{dv}{p_0} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} p_j p_k f(t, \theta, v) \frac{dv}{v^0}. \end{aligned}$$

d'où (1.40) – (1.41), (1.42) Ce qui achève la preuve. ■

Ainsi, les quantités matières sont alors (Voir [ARW], [T2], [W]) :

$$\rho(t, \theta) = -g^{00} T_{00} = \int_{\mathbb{R}^3} v^0 f(t, \theta, v) dv + \frac{1}{2} e^{-2(\tau-\mu)} (\phi_t^2 + \phi_\theta^2) + V(\phi), \quad (1.44)$$

$$J_1(t, \theta) = -g^{00} T_{01} = \int_{\mathbb{R}^3} v^1 f(t, \theta, v) dv - e^{-2(\tau-\mu)} \phi_t \phi_\theta, \quad (1.45)$$

$$J_k(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} v^k f(t, \theta, v) dv, \quad k \in \{2; 3\} \quad (1.46)$$

$$P_1(t, \theta) = g^{11} T_{11} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(v^1)^2}{v^0} f(t, \theta, v) dv + \frac{1}{2} e^{-2(\tau-\mu)} (\phi_t^2 + \phi_\theta^2) - V(\phi), \quad (1.47)$$

$$P_2(t, \theta) = e^{-2\mu} T_{22} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(v^2)^2}{v^0} f(t, \theta, v) dv + \frac{1}{2} e^{-2(\tau-\mu)} (\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - V(\phi), \quad (1.48)$$

$$P_3(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(v^3)^2}{v^0} f(t, \theta, v) dv + \frac{1}{2} e^{-2(\tau-\mu)} (\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - V(\phi), \quad (1.49)$$

$$S_{jk}(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v^j v^k}{v^0} f(t, \theta, v) dv \quad j \neq k. \quad (1.50)$$

Remarque 1.1. On vérifie par calcul que

$$T_{33} = A^2 e^{2\mu} P_2 + 2ARS_{23} + R^2 e^{-2\mu} P_3.$$

Nous introduisons

$$\Gamma = G_t + AH_t \quad (1.51)$$

quantité de torsion en relation avec les composantes de la métrique.

La fonction de distribution des particules est quantifiée par $f = f(t, \theta, x, y, p) = f(x^\nu, p)$ avec $\nu \in \{0; 1; 2; 3\}$. On pose $p = (p^1, p^2, p^3)$, considérons le champ de vecteur $X = (p^i, -\Gamma_{\alpha\beta}^i p^\alpha p^\beta)$, la dérivée de Lie suivant ce champ de vecteur est nul et on a :

$$\begin{aligned} L_X f = 0 &\iff \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{dp^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0 \\ &\iff \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^i}{p^0} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{1}{p^0} \Gamma_{\alpha\beta}^i p^\alpha p^\beta \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Nous utilisons le lemme (1.5) ainsi que les travaux de Weaver, ([ARW], page 7), pour avoir les équations d'évolution et les équations auxiliaires. Pour les équations d'évolution, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.5. *Le champ scalaire $\phi = \phi(t, \theta)$ vérifie l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} \phi_{tt} - \phi_{\theta\theta} &= -\frac{\phi_t R_t}{R} - 4\mu_\theta H^2 R^2 e^{-2\tau} \phi_\theta - e^{-2(\tau-\mu)} V'(\phi) \\ &+ \phi_\theta \left[\frac{R_\theta}{R} + 2A_\theta H(G - R) - \mu_\theta (G + AH)^2 e^{-2(\tau-2\mu)} \right]. \end{aligned}$$

Preuve : Voir annexe (4.3).■

Les changements précédents (1.29) – (1.30) – (1.31) – (1.32) ainsi que (1.43) dans (1.52), (voir aussi [ARW]) pour écrire l'équation de Vlasov.

Nous nous référons essentiellement à ([A]) pour écrire nos équations de contraintes.

Équation de Vlasov

$$\begin{aligned} (1.52) \iff &\left[(\tau_\theta - \mu_\theta) v^0 + (\tau_t - \mu_t) v^1 + \mu_\theta \frac{(v^2)^2}{v^0} + \left(\mu_\theta - \frac{R_\theta}{R} \right) \frac{(v^3)^2}{v^0} - \frac{A_\theta}{R} e^{2\mu} \frac{v^2 v^3}{v^0} \right] \frac{\partial f}{\partial v^1} \\ &+ e^{-\tau} (e^{2\tau} \Gamma v^2 + RH_t v^3) \frac{\partial f}{\partial v^1} - \frac{v^1}{v^0} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \left[\mu_t v^2 + \mu_\theta \frac{v^1 v^2}{v^0} \right] \frac{\partial f}{\partial v^2} \\ &+ \left[\left(\frac{R_t}{R} - \mu_t \right) v^3 + \left(\mu_\theta - \frac{R_\theta}{R} \right) \frac{v^1 v^3}{v^0} + \frac{e^{2\mu} v^2}{R} (A_t + A_\theta \frac{v^1}{v^0}) \right] \frac{\partial f}{\partial v^3} = \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Équations de Contraintes

$$\begin{aligned} \mu_t^2 + \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(A_t^2 + A_\theta^2) + \frac{R_{\theta\theta}}{R} - \frac{\tau_t R_t}{R} - \frac{\tau_\theta R_\theta}{R} \\ = -\frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 - \frac{e^{-2\tau}}{4}H_t^2 - e^{2(\tau-\mu)}\rho, \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$2\mu_t\mu_\theta + \frac{e^{4\mu}}{2R^2}A_tA_\theta + \frac{R_{t\theta}}{R} - \frac{\tau_t R_\theta}{R} - \frac{\tau_\theta R_t}{R} = e^{2(\tau-\mu)}J_1. \quad (1.55)$$

Équations d'évolution

$$\begin{aligned} \mu_{tt} - \mu_{\theta\theta} = \frac{\mu_\theta R_\theta}{R} - \frac{\mu_t R_t}{R} + \frac{e^{4\mu}}{2R^2}(A_t^2 - A_\theta^2) + \frac{e^{4\mu-2\tau}}{2}\Gamma^2 \\ + \frac{e^{4\mu-2\tau}}{2}(\rho - P_1 + P_2 - P_3), \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$A_{tt} - A_{\theta\theta} = \frac{A_t R_t}{R} - \frac{A_\theta R_\theta}{R} + 4(A_\theta\mu_\theta - A_t\mu_t) + R^2 e^{-2\tau}\Gamma H_t + 2e^{2(\tau-2\mu)}S_{23}, \quad (1.57)$$

$$\tau_{tt} - \tau_{\theta\theta} = \mu_\theta^2 - \mu_t^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(A_t^2 - A_\theta^2) - \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 - \frac{3R^2}{4e^{2\tau}}H_t^2 - e^{2(\tau-\mu)}P_3, \quad (1.58)$$

$$R_{tt} - R_{\theta\theta} = Re^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1) + \frac{Re^{-2\tau+4\mu}}{2}\Gamma^2 + \frac{R^3 e^{-2\tau}}{2}H_t^2, \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \phi_{tt} - \phi_{\theta\theta} = -\frac{\phi_t R_t}{R} - 4\mu_\theta H^2 R^2 e^{-2\tau}\phi_\theta - e^{-2(\tau-\mu)}V'(\phi) \\ + \phi_\theta \left[\frac{R_\theta}{R} + 2A_\theta H(G - R) - \mu_\theta(G + AH)^2 e^{-2(\tau-2\mu)} \right]. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Équations auxiliaires

$$\partial_\theta(Re^{-2\tau+4\mu}\Gamma) = -2Re^\tau J_2, \quad (1.61)$$

$$\partial_t(Re^{-2\tau+4\mu}\Gamma) = 2Re^\tau S_{12}, \quad (1.62)$$

$$\partial_\theta(R^3 e^{-2\tau} H_t) + Re^{-2\tau+4\mu} A_\theta \Gamma = -2R^2 e^{\tau-2\mu} J_3, \quad (1.63)$$

$$\partial_t(R^3 e^{-2\tau} H_t) + Re^{-2\tau+4\mu} A_t \Gamma = 2R^2 e^{\tau-2\mu} S_{13}. \quad (1.64)$$

1.4.2 Équations dans la direction future

Dans cette section, nous énonçons dans un premier temps quelques lemmes afin d'écrire par la suite les équations en coordonnées d'aires dans la direction future, pour ce fait la

métrique est donnée par (1.15) et nous aurons besoin de faire quelques changements de variables. En notant V le vecteur tangent à la géodésique. Nous avons :

$$v_2 = g(V; \frac{\partial}{\partial x}), \quad (1.65)$$

$$\nabla_{Vg}(V; \frac{\partial}{\partial x}) = g(\nabla_V V; \frac{\partial}{\partial x}) + g(\frac{\partial}{\partial x}; \nabla_V V). \quad (1.66)$$

Utilisant la géodésique et les équations de KILLING.

Nous paramétrons l'*hyperbolode* de masse \mathcal{P} par les coordonnées $(t, \theta, x, y, v_1; v_2, v_3)$. La fonction de distribution f dépend de $(t, \theta, x, y, v_1; v_2, v_3)$. Pour simplifier les écritures, on notera $f = f(t, \theta, x, y, v_1; v_2, v_3)$.

Avec ces définitions, nous avons la relation sur l'*hyperbolode* de masse $v_\mu v^\mu = -1$. De ce fait, on a :

$$\begin{aligned} v_\mu v^\mu = -1 &\iff g^{\mu\sigma} v_\mu v_\sigma = -1 \\ &\iff g^{00}(v_0)^2 + g^{11}(v_1)^2 + g^{22}(v_2)^2 + 2g^{23}v_2v_3 + g^{33}(v_3)^2 = -1 \\ &\iff v_0^2 + g_{00}g^{11}v_1^2 + g_{00}g^{22}v_2^2 + 2g_{00}g^{23}v_2v_3 + g_{00}g^{33}v_3^2 = -g_{00} \end{aligned} \quad (1.67)$$

or

$$g_{00}g^{11} = -\alpha, \quad g_{00}g^{22} = -\alpha e^{2(\tau-2\mu)} - \alpha e^{2\tau} \frac{A^2}{t^2}, \quad g_{00}g^{23} = -\alpha A e^{2\tau} t^{-2}, \quad g_{00}g^{33} = -\alpha e^{2\tau} t^{-2}.$$

Ainsi, (1.67) devient alors

$$(v_0)^2 - \alpha v_1^2 - \alpha e^{2(\tau-2\mu)} v_2^2 + \alpha A^2 t^{-2} e^{2\tau} v_2^2 - \alpha t^{-2} e^{2\tau} v_3^2 + 2\alpha A t^{-2} e^{2\tau} v_2 v_3 = -g_{00}, \quad (1.68)$$

et $v = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ est temporel, i.e $v^0 > 0$. On a finalement :

$$v_0 = -\sqrt{\alpha e^{2(\tau-\mu)} + \alpha v_1^2 + \alpha e^{2(\tau-2\mu)} v_2^2 + \alpha t^{-2} e^{2\tau} (v_3 - A v_2)^2} \quad (1.69)$$

Remarque 1.2. On peut constater que

$$\begin{aligned} (1.69) &\iff v_0 = -\sqrt{\alpha e^{2(\tau-\mu)}} \sqrt{1 + e^{-2(\tau-\mu)} v_1^2 + e^{-2\mu} v_2^2 + t^{-2} e^{2\mu} (v_3 - A v_2)^2} \\ &\iff -\alpha^{-1/2} e^{-(\tau-\mu)} v_0 = \sqrt{1 + g^{11} v_1^2 + g^{22} v_2^2 + g^{33} (v_3 - A v_2)^2} \\ &\Rightarrow \alpha^{-1} e^{-2(\tau-\mu)} v_0^2 = 1 + g^{11} v_1^2 + g^{22} v_2^2 + g^{33} (v_3 - A v_2)^2 \end{aligned}$$

en contractant et en utilisant le fait que $v_0 v^0 = -1$, on a finalement $v^0 = \sqrt{1 + \delta^{ij} v^i v^j}$ avec δ^{ij} étant le symbole de Kronecker.

Les vecteurs v^σ , $\sigma \in \{0; 1; 2; 3\}$ sont liés aux composantes p^σ , en effet :

$$\begin{aligned}
g_{\sigma\zeta} p^\sigma p^\zeta = -1 &\Leftrightarrow g_{00}(p^0)^2 + g_{11}(p^1)^2 + g_{22}(p^2)^2 + g_{33}(p^3)^2 + 2g_{12}p^1p^2 + 2g_{13}p^1p^3 \\
&+ 2g_{23}p^2p^3 = -1 \\
&\Leftrightarrow -\alpha e^{2(\tau-\mu)}(p^0)^2 + (e^{2(\tau-\mu)} + e^{2\mu}(G + AH)^2 + H^2t^2e^{-2\mu})g_{11}(p^1)^2 \\
&+ 2e^{2\mu}(G + AH)p^1p^2 + e^{2\mu}(p^2)^2 \\
&+ 2(e^{2\mu}A(A + GH) + e^{-2\mu}t^2H)p^1p^3 + 2Ae^{2\mu}p^2p^3 + (A^2e^{2\mu} + t^2e^{-2\mu})(p^3)^2 = -1 \\
&\Leftrightarrow -\alpha e^{2(\tau-\mu)}(p^0)^2 + e^{2(\tau-\mu)}(p^1)^2 + e^{2\mu}[(G + AH)(p^1) + p^2 + Ap^3]^2 \\
&+ t^2e^{-2\mu}[Hp^1 + p^3]^2 = -1.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$1 + e^{2(\tau-\mu)}(p^1)^2 + e^{2\mu}[(G + AH)(p^1) + p^2 + Ap^3]^2 + t^2e^{-2\mu}[Hp^1 + p^3]^2 = \alpha e^{2(\tau-\mu)}(p^0)^2.$$

Comme $1 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = (v^0)^2$, on obtient les relations

$$(v^0)^2 = \alpha e^{2(\tau-\mu)}(p^0)^2, \quad (1.70)$$

$$(v^1)^2 = e^{2(\tau-\mu)}(p^1)^2, \quad (1.71)$$

$$(v^2)^2 = e^{2\mu}[(G + AH)p^1 + p^2 + Ap^3]^2, \quad (1.72)$$

$$(v^3)^2 = t^2e^{-2\mu}(Hp^1 + p^3)^2. \quad (1.73)$$

Nous avons par la suite :

$$\begin{bmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^{-1/2}e^{-\tau+\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\tau+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -Ge^{-\tau+\mu} & e^{-\mu} & -Ae^{2\mu}t^{-1} \\ 0 & -He^{-\tau+\mu} & 0 & e^{\mu}t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}. \quad (1.74)$$

Le Jacobien pour le passage $\begin{bmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v^0 \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$ est donné par $Jac(\widetilde{M}) = t^{-1}e^{-\tau+\mu}$.

Dans la base canonique usuelle $\{dt; d\theta; dx; dy\}$, la métrique (1.15) est sous la forme :

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} -\alpha e^{2(\tau-\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{2\tau}}{e^{2\mu}} + \frac{(G+AH)^2}{e^{-\mu}} + \frac{(tH)^2}{e^{2\mu}} & \frac{(G+AH)}{e^{-2\mu}} & \frac{A(G+AH)}{e^{-2\mu}} + \frac{t^2H}{e^{2\mu}} \\ 0 & e^{2\mu}(G + AH) & e^{2\mu} & Ae^{2\mu} \\ 0 & e^{2\mu}A(G + AH) + \frac{t^2H}{e^{2\mu}} & Ae^{2\mu} & \frac{t^2}{e^{2\mu}} + e^{2\mu}A^2 \end{pmatrix}. \quad (1.75)$$

Son déterminant est $|M_{i,j}| = -\alpha t^2 e^{4(\tau-\mu)}$ et sa matrice inverse est donnée par

$$M^{i,j} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-2(\tau-\mu)}}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(\tau-\mu)} & -Ge^{-2(\tau-\mu)} & -He^{-2(\tau-\mu)} \\ 0 & -Ge^{-2(\tau-\mu)} & \frac{A^2}{t^2}e^{2\mu} + e^{-2\mu} + G^2e^{-2(\tau-\mu)} & HGe^{-2(\tau-\mu)} - \frac{A}{t^2}e^{2\mu} \\ 0 & -He^{-2(\tau-\mu)} & HGe^{-2(\tau-\mu)} - \frac{A}{t^2}e^{2\mu} & \frac{e^{2\mu}}{t^2} + H^2e^{-2(\tau-\mu)} \end{pmatrix}.$$

C'est dans cette base que nous allons travailler dans cette direction.

Le tenseur impulsion-énergie

Lemme 1.6. Soient $\phi = \phi(t, \theta)$ une fonction régulière sur $I \times \mathbb{R}$ où $I \subseteq]0, +\infty[$, μ , α et τ trois fonctions régulières sur $I \times \mathbb{R}$, et $f = f(t, \theta, v_1, v_2, v_3)$ une fonction régulière sur $I \times S^1 \times \mathbb{R}^3$. Les composantes non nulles du tenseur impulsion-énergie sont :

$$T_{00} = 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f |v_0| dv_1 dv_2 dv_3 + \frac{1}{2}(\phi_t^2 + \alpha\phi_\theta^2) + \alpha e^{2(\tau-\mu)} V(\phi), \quad (1.76)$$

$$T_{01} = T_{10} = -8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f v_1 dv_1 dv_2 dv_3 + \phi_t \phi_\theta, \quad (1.77)$$

$$T_{11} = 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{v_1^2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 + \frac{1}{2\alpha}(\phi_t^2 + \alpha\phi_\theta^2) - e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \\ + (e^{2\mu}(G + AH)^2 + H^2 t^2 e^{-2\mu})(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2 - \alpha e^{2(\tau-\mu)} V(\phi)), \quad (1.78)$$

$$T_{12} = 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{v_1 v_2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \\ + \frac{1}{2\alpha}(e^{-2(\tau-2\mu)}(G + AH)(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2) - e^{2\mu}(G + AH)V(\phi)), \quad (1.79)$$

$$T_{13} = 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{v_1 v_3}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 + \frac{1}{2\alpha}(e^{-2(\tau-2\mu)}A(G + AH) + e^{-2\tau}Ht^2)(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2) \\ - (e^{2\mu}A(G + AH) + e^{-2\tau}Ht^2)V(\phi), \quad (1.80)$$

$$T_{22} = 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{v_2^2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 + \frac{1}{2\alpha}(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2)e^{-2(\tau-2\mu)} - e^{2\mu}V(\phi), \quad (1.81)$$

$$T_{23} = 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{v_2 v_3}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 + \frac{1}{2\alpha}A(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2)e^{-2(\tau-2\mu)} - Ae^{2\mu}V(\phi), \quad (1.82)$$

$$T_{33} = 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{v_3^2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \\ + \frac{1}{2\alpha}(e^{-2\tau}t^2 + e^{-2(\tau-2\mu)}A^2)(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2) - (e^{-2\mu}t^2 + A^2e^{2\mu})V(\phi). \quad (1.83)$$

Preuve : On sait que $T_{\zeta\sigma} = T_{\zeta\sigma}^f + T_{\zeta\sigma}^\phi$ où $T_{\zeta\sigma}^f$ et $T_{\zeta\sigma}^\phi$ sont respectivement les tenseurs impulsion en f et ϕ .

Par définition $T_{\zeta\sigma}^f = \int_{\mathbb{R}^3} f p_\zeta p_\sigma \sqrt{|g|} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{-p_0}$, pour simplifier les écritures, nous posons $dp^1 dp^2 dp^3 = dp$ et $dv^1 dv^2 dv^3 = dv$ nous avons en utilisant les relations (1.70) – (1.71) – (1.72) – (1.73), le jacobien de passage de dp à dv est donné par $t^{-1} e^{-\tau+\mu}$. Ainsi, on obtient par calcul

$$p_0 = g_{00} p^0 \quad \text{et} \quad v^0 = -\sqrt{\alpha} e^{\tau-\mu} v_0.$$

D'où

$$\begin{aligned} T_{00}^f &= \int_{\mathbb{R}^3} f p_0 p_0 \sqrt{|g|} \frac{dp}{-p_0} = - \int_{\mathbb{R}^3} f p_0 t \sqrt{\alpha} e^{2(\tau-\mu)} dp \\ &= \alpha e^{2(\tau-\mu)} \int_{\mathbb{R}^3} f v^0 dv = \alpha e^{2(\tau-\mu)} \rho^f, \\ T_{11}^f &= \int_{\mathbb{R}^3} f (p_1)^2 \sqrt{|g|} \frac{dp}{p_0} = - \int_{\mathbb{R}^3} (p_1)^2 f \sqrt{\alpha} t e^{2(\tau-\mu)} \frac{e^{-\tau+\mu}}{-\sqrt{\alpha} e^{\tau-\mu} v^0} \frac{dv}{t} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{(p_1)^2}{v^0} dv \quad \text{or,} \quad p_1 = e^{\tau-\mu} v^1 + e^\mu (G + AH) v^2 + H t e^{-\mu} v^3 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{(e^{\tau-\mu} v^1 + e^\mu (G + AH) v^2 + H t e^{-\mu} v^3)^2}{v^0} dv, \\ T_{11}^f &= e^{2(\tau-\mu)} P_1^f + e^{2\mu} (G + AH)^2 P_2^f + H^2 t^2 e^{-2\mu} P_3^f + 2(e^\tau (G + AH) S_{12}^f) \\ &+ 2(e^{\tau-2\mu} S_{13}^f + H t (G + AH) S_{23}^f). \end{aligned} \tag{1.84}$$

Par ailleurs $p_2 = g_{22} p^2 + g_{21} p^1 + g_{23} p^3 = e^\mu v^2$, ce qui nous permet d'avoir par la suite ;

$$\begin{aligned} T_{22}^f &= \int_{\mathbb{R}^3} f (p_2)^2 \sqrt{|g|} \frac{dp}{-p_0} = \int_{\mathbb{R}^3} f (p_2)^2 \sqrt{|g|} e^{-2(\tau-\mu)} \frac{dp}{t \sqrt{\alpha} v^0} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f e^{2\mu} (v^2)^2 \sqrt{\alpha} t e^{2(\tau-\mu)} dv}{t \sqrt{\alpha} v^0} = e^{2\tau} P_2^f. \end{aligned} \tag{1.85}$$

Également

$$\begin{aligned} p_3 &= g_{31} p^1 + g_{32} p^2 + g_{33} p^3 = A e^\mu v^2 + t e^{-\mu} v^3, \quad \text{ainsi} \\ T_{33}^f &= \int_{\mathbb{R}^3} f (p_3)^2 \sqrt{|g|} \frac{dp}{-p_0} = \int_{\mathbb{R}^3} f (p_3)^2 \frac{dv}{v^0} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f (A e^\mu v^2 + t e^{-\mu} v^3)^2}{v^0} dv \\ &= A^2 e^{2\mu} P_2^f + t^2 e^{-2\mu} P_3^f + 2 A t S_{23}^f. \end{aligned} \tag{1.86}$$

Il faut souligner que les équations relatives à la pression sont données par

$$\rho_i^f = \int_{\mathbb{R}^3} f v^i dv.$$

Par ailleurs le moment et le courant des particules sont respectivement

$$P_i^f = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(v^i)^2}{v^0} dv, \text{ avec } i, j \in \{1; 2; 3\} \text{ et } S_{ij}^f = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f v^i v^j}{v^0} dv.$$

Partant du fait que $\frac{\sqrt{|g|}}{-p_0} dp = \frac{dv}{v^0}$, on a

$$\begin{aligned} S_{23}^f &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f v^2 v^3}{v^0} dv = \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{v^2 v^3 \sqrt{|g|}}{-p_0} dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{e^{-\mu} p_2 (-At^{-1} e^{\mu} p_2 + e^{\mu} t^{-1} p_3) \sqrt{|g|}}{-p_0} dp. \end{aligned} \quad (1.87)$$

En utilisant (1.86) et (1.87), nous avons

$$P_3 = \frac{e^{2\mu}}{t^2} [T_{33} + A^2 T_{22} - 2AS_{23}]. \quad (1.88)$$

On écrit également

$$\begin{aligned} S_{12}^f &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f v^2 v^1}{v^0} dv = \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{v^2 v^1 \sqrt{|g|}}{-p_0} dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{(e^{-\tau+\mu} p_1 - Ge^{-\tau+\mu} p_2 - e^{-\tau+\mu} H p_3) e^{-\mu} p_2 \sqrt{|g|}}{-p_0} dp \\ &= e^{-\tau} T_{12}^f - Ge^{-\tau} T_{22}^f - He^{-\tau} T_{23}^f, \end{aligned} \quad (1.89)$$

$$\begin{aligned} S_{13}^f &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f v^3 v^1}{v^0} dv = \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{v^3 v^1 \sqrt{|g|}}{-p_0} dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{(e^{-\tau+\mu} p_1 - Ge^{-\tau+\mu} p_2 - e^{-\tau+\mu} H p_3) (-At^{-1} e^{-\mu} p_2 + t^{-1} e^{-\mu} p_3) \sqrt{|g|}}{-p_0} dp \\ &= \frac{e^{-\tau+\mu}}{t} (-AT_{12}^f + T_{13}^f + AGT_{22}^f + (AH + G)T_{23}^f - HT_{33}^f). \end{aligned} \quad (1.90)$$

En utilisant (1.85) – (1.86), (1.87), (1.89) et (1.90), on obtient :

$$P_1 = e^{-2(\tau-\mu)} [T_{11} - 2GT_{12} - 2HT_{13} + G^2 T_{22} + 2HGT_{23} + H^2 T_{33}]. \quad (1.91)$$

Nous calculons ensuite les composantes en $T_{\zeta\sigma}^\phi$.

$$T_{\zeta\sigma}^\phi = \nabla_\zeta \phi \nabla_\sigma \phi - \frac{1}{2} g_{\zeta\sigma} \nabla_\omega \phi \nabla^\omega \phi - g_{\zeta\sigma} V(\phi).$$

$$\begin{aligned} Or \quad \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi &= g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma \phi \nabla_\nu \phi = g^{00} (\nabla_0 \phi)^2 + g^{11} (\nabla_1 \phi)^2 \\ &= -\alpha^{-1} e^{-2(\tau-\mu)} \phi_t^2 + e^{-2(\tau-\mu)} \phi_\theta^2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} T_{00}^\phi &= \phi_t^2 - \frac{1}{2} g_{00} (-\alpha^{-1} e^{-2(\tau-\mu)} \phi_t^2 + e^{-2(\tau-\mu)} \phi_\theta^2) - g_{00} V(\phi) \\ &= \phi_t^2 + \frac{1}{2} \alpha e^{2(\tau-\mu)} (-\alpha^{-1} e^{-2(\tau-\mu)} \phi_t^2 + e^{-2(\tau-\mu)} \phi_\theta^2) + \alpha e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \\ &= \phi_t^2 + \frac{1}{2\alpha} [-\alpha(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2)] + \alpha e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \\ &= \frac{1}{2} (\phi_t^2 + \alpha\phi_\theta^2) + \alpha e^{2(\tau-\mu)} V(\phi). \end{aligned}$$

On procède de la même façon et on obtient

$$\begin{aligned} T_{01}^\phi &= \phi_t \phi_\theta, \\ T_{11}^\phi &= \frac{1}{2\alpha} [(\phi_t^2 + \alpha\phi_\theta^2) + (e^{2\mu}(G + AH)^2 + H^2 t^2 e^{-2\mu})(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2 - \alpha e^{2(\tau-\mu)} V(\phi))] - e^{2(\tau-\mu)} V(\phi), \\ T_{12}^\phi &= \frac{1}{2\alpha} e^{-2(\tau-2\mu)} (G + AH)(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2) - e^{2\mu} (G + AH) V(\phi), \\ T_{12}^\phi &= \frac{1}{2\alpha} (e^{-2(\tau-2\mu)} A(G + AH) + e^{-2\tau} H t^2)(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2) - (e^{2\mu}(G + AH) + e^{-2\mu} H t^2) V(\phi), \\ T_{22}^\phi &= \frac{1}{2\alpha} (\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2) e^{-2(\tau-2\mu)} - e^{2\mu} V(\phi), \\ T_{23}^\phi &= \frac{1}{2\alpha} A(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2) e^{-2(\tau-2\mu)} - A e^{2\mu} V(\phi), \\ T_{33}^\phi &= \frac{1}{2\alpha} (e^{-2\tau} t^2 + e^{-2(\tau-2\mu)} A^2)(\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2) - (e^{-2\mu} t^2 + A^2 e^{2\mu}) V(\phi). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du lemme. ■

Remarque 1.3. Les quantités matières ainsi que les densités sont composées de deux parties, une en f et l'autre en ϕ exprimées par :

$$\begin{aligned} \rho^\phi &= \frac{1}{2\alpha} (\phi_t^2 + \alpha\phi_\theta^2) e^{-2(\tau-\mu)} + V(\phi), \\ \rho_1^\phi &= \frac{1}{2\alpha} \phi_t \phi_\theta, \\ P_1^\phi &= \frac{1}{2\alpha} (\phi_t^2 + \alpha\phi_\theta^2) e^{-2(\tau-\mu)} - V(\phi), \\ P_2^\phi &= \frac{1}{2\alpha} (\phi_t^2 - \alpha\phi_\theta^2) e^{-2(\tau-\mu)} - V(\phi) = P_3^\phi. \end{aligned}$$

Tout comme dans la direction passée, l'argument ayant permis d'obtenir l'équation (1.52) reste valable dans la direction future et, en utilisant les changements (1.70) –

(1.71) – (1.72) – (1.73) ainsi que (1.74) dans (1.52), l'équation de Vlasov .

Nous nous référons à [S], p.19 – 20 , d'une part et utilisons le lemme 1.6 d'autre part pour avoir les équations de contraintes.

Lemme 1.7. *Le champ scalaire $\phi = \phi(t, \theta)$ vérifie l'équation*

$$\begin{aligned} \phi_{tt} - \alpha\phi_{\theta\theta} &= \left[\frac{\alpha_\theta}{2} + (2A_\theta H(G-1) - \alpha\mu_\theta(G+AH)^2)\alpha e^{-2(\tau-2\mu)} - 4\mu_\theta H^2 t^2 \alpha e^{-2\tau} \right] \phi_\theta \\ &+ \left(\frac{\alpha_t}{2\alpha} - \frac{1}{t} \right) \phi_t - \alpha e^{-2(\tau-2\mu)} V'(\phi). \end{aligned}$$

Preuve : (Cf. Annexe (4.4)) .

Ce lemme nous permet d'avoir l'équation d'onde en ϕ . Nous nous référons à [T2], p20 – 21, [ARW], d'une part, calculons les parties en ϕ d'autre part et utilisons le lemme 1.7, enfin pour avoir les équations d'évolution. Les travaux faits dans [S] et [ARW] nous permettent d'avoir les équations auxiliaires. D'où le système :

L'équation de Vlasov dans la direction future

$$\begin{aligned} &\left[-\tau_\theta - \mu_\theta + \frac{\alpha_\theta}{2\alpha} \sqrt{\alpha} v^0 - (\tau_t - \mu_t) v^1 + \sqrt{\alpha} \frac{e^{2\mu} A_\theta}{t} \frac{v^2 v^3}{v^0} - \sqrt{\alpha} \frac{\mu_\theta}{v^0} ((v^3)^2 - (v^2)^2) \right] \frac{\partial f}{\partial v_1} \\ &+ \left[\frac{\sqrt{\alpha} e^{2\tau}}{t^3} (K - AJ)(v_3 - Av_2) + \frac{\sqrt{\alpha} e^{2\tau-4\mu}}{t} Jv_2 \right] \frac{\partial f}{\partial v_1} \\ &+ \left[\mu_t v^2 + \sqrt{\alpha} \mu_\theta \frac{v^1 v^2}{v^0} \right] \frac{\partial f}{\partial v_2} + \frac{\partial v_0}{\partial v_1} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ &+ \left[\left(\frac{1}{t} - \mu_t \right) v^3 - \sqrt{\alpha} \mu_\theta \frac{v^1 v^3}{v^0} + e^{2\mu} \frac{v^2}{t} (A_t + \sqrt{\alpha} A_\theta \frac{v^1}{v^0}) \right] \frac{\partial f}{\partial v_3} = \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Les équations de contraintes

$$\begin{aligned} \frac{\tau_t}{t} &= \mu_t^2 + \alpha\mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4t^2} (A_t^2 + \alpha A_\theta^2) + \frac{\alpha e^{2\tau-4\mu}}{4t^2} J^2 + \frac{\alpha e^{2\tau} (K - AJ)^2}{4t^4} \\ &+ 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f |v_0| dv_1 dv_2 dv_3 + \frac{1}{2} ((\phi_t)^2 + \alpha(\phi_\theta)^2) + \alpha e^{2(\tau-\mu)} V(\phi), \end{aligned} \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_t}{\alpha} &= \frac{-\alpha e^{2\tau-4\mu}}{t} J^2 - 16\pi \alpha^{\frac{3}{2}} e^{2(\tau-\mu)} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(1 + e^{-2\mu} v_2^2 + e^{2\mu} t^2 (v_3 - Av_2)^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \\ &- \frac{\alpha e^{2\tau}}{t^3} (K - AJ)^2 - 2\alpha t e^{2(\tau-\mu)} V(\phi), \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$\frac{\tau_\theta}{t} = 2\mu_t \mu_\theta + \frac{e^{4\mu}}{2t^2} A_t A_\theta - \frac{\alpha_\theta}{2t\alpha} - 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f v_1 dv_1 dv_2 dv_3 + \phi_t \phi_\theta. \quad (1.95)$$

Où J et K sont données par (1.16).

Les équations d'évolution

$$\begin{aligned}
\tau_{tt} - \alpha\tau_{\theta\theta} &= \frac{\alpha\theta\tau_\theta}{2} + \frac{\tau_t\alpha_t}{2\alpha} - \frac{\alpha_\theta^2}{4\alpha} + \frac{\alpha_{\theta\theta}}{2} - \mu_t^2 + \alpha\mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4t^2}(A_t^2 - \alpha A_\theta^2) - \frac{\alpha e^{2\tau-4\mu}}{4t^2}J^2 \\
&\quad - 3\frac{\alpha e^{2\tau}}{4t^2}(K - AJ)^2 - 8\pi\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}e^{2\tau}}{t^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(v_3 - Av_2)^2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \\
&\quad - \frac{1}{2}((\phi_t)^2 - \alpha(\phi_\theta)^2) + \alpha e^{2(\tau-\mu)}V(\phi), \tag{1.96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{tt} - \alpha\mu_{\theta\theta} &= \frac{-\mu_t}{t} + \frac{\alpha\theta\mu_\theta}{2} + \frac{\alpha_t\mu_t}{2\alpha} + \frac{e^{4\mu}}{2t^2}(A_t^2 - \alpha A_\theta^2) + \frac{\alpha e^{2\tau-4\mu}}{4t^2}J^2 \\
&\quad + 8\pi\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}e^{2(\tau-\mu)}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(1 + 2e^{-2\mu}v_2^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \\
&\quad + 2\alpha e^{2(\tau-\mu)}V(\phi), \tag{1.97}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{tt} - \alpha A_{\theta\theta} &= \frac{A_t}{t} + \frac{\alpha_t A_t}{2\alpha} + \frac{e^{4\mu}}{2t^2}(A_t^2 - \alpha A_\theta^2) - 4(A_t\mu_t - \alpha A_\theta\mu_\theta) + \frac{\alpha e^{2\tau-4\mu}}{t^2}J(K - AJ) \\
&\quad + \frac{\alpha_\theta A_\theta}{2} + 16\pi\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}e^{2(\tau-\mu)}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(v_2(v_3 - Av_2))}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3, \tag{1.98}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{tt} - \alpha\phi_{\theta\theta} &= \left(\frac{\alpha_\theta}{2} + [2A_\theta H(G - 1) - \mu_\theta(G + AH)^2]\alpha e^{-2(\tau-2\mu)} - 4\mu_\theta H^2 t^2 \alpha e^{-2\tau}\right)\phi_\theta \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_t}{2\alpha} - \frac{1}{t}\right)\phi_t - \alpha e^{2(\tau-\mu)}V'(\phi). \tag{1.99}
\end{aligned}$$

Les équations auxiliaires

$$\partial_\theta[e^{-2\tau}\alpha^{-1/2}e^{4\mu}\Gamma] = -2e^\tau\rho_2, \tag{1.100}$$

$$\partial_t[e^{-2\tau}t\alpha^{-1/2}e^{4\mu}\Gamma] = 2t\alpha^{1/2}e^\tau S_{12}, \tag{1.101}$$

$$\partial_\theta[e^{-2\tau}\alpha^{-1/2}(Ae^{4\mu}\Gamma + t^2H_t)] = -2e^\tau A\rho_2 - 2te^{\tau-2\mu}\rho_3, \tag{1.102}$$

$$\partial_t[e^{-2\tau}\alpha^{-1/2}(Ae^{4\mu}\Gamma + t^2H_t)] = 2t\alpha^{1/2}e^\tau(AS_{12} + te^{-2\mu}S_{13}). \tag{1.103}$$

Où Γ est définie par (1.51). Nous notons :

$$S_{12} = -16\pi\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{fv_1v_2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3, \quad (1.104)$$

$$\rho_2 = 16\pi\alpha \int_{\mathbb{R}^3} fv_2 dv_1 dv_2 dv_3, \quad (1.105)$$

$$S_{13} = -16\pi\alpha \int_{\mathbb{R}^3} \frac{fv_1v_3}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3, \quad (1.106)$$

$$\rho_3 = 16\pi\alpha \int_{\mathbb{R}^3} fv_3 dv_1 dv_2 dv_3. \quad (1.107)$$

EXISTENCE LOCALE DANS LA DIRECTION PASSÉE

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'existence des solutions des équations lorsqu'on converge vers les singularités initiales. Nous considérons les données initiales en $t = t_0 > 0$ et définissons :

$f(t_0, \theta, v) = f_0(\theta, v) \equiv f^\circ$, $\phi(t_0, \theta) = \phi_0(\theta) \equiv \phi^\circ$, $\phi_t(t_0, \theta) = \dot{\phi}(\theta)$ et pour toute composante χ de la métrique $\chi(t_0, \theta) = \chi_0(\theta) \equiv \chi^\circ$ et $\chi_t(t_0, \theta) = \dot{\chi}(\theta)$.

Par ailleurs, pour toutes quantités positives A et B , on notera $A \lesssim B$ pour dire qu'il existe un réel strictement positif C tel que $A \leq CB$.

Nous commençons par établir les estimations a priori en utilisant notamment les estimations cône lumière, puis, nous allons construire les itérées, ensuite nous allons montrer que ces itérées convergent (sont de Cauchy dans un espace de Banach) et enfin, nous allons montrer que les limites de ces itérées sont les solutions des équations. Nous introduisons les nouveaux champs de vecteurs suivants

$$\begin{aligned}\partial_\sigma &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t + \partial_\theta), & \partial_\lambda &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t - \partial_\theta), & F_\sigma &:= \partial_\sigma F := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t F + \partial_\theta F) \\ F_\lambda &:= \partial_\lambda F := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t F - \partial_\theta F)\end{aligned}$$

pour toute fonction F de variables t et θ .

2.1 Estimations a priori

On a dans ce chapitre et les chapitres qui suivent des inégalités portant sur une fonction et sa dérivée. Pour faire face à ce type de problème, nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 2.1 (Gx). *Lemme de Gronwall*

Soient $\psi, y \in L^1([a, b], \mathbb{R}^+)$ deux fonctions continues et vérifiant

$$\exists c \geq 0, \quad \forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c + \int_a^b \psi(s)y(s)ds$$

alors

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq c \exp\left(\int_a^b \psi(s)ds\right).$$

2.1.1 Estimations sur R , R_t et R_θ

Nous allons commencer par montrer que le gradient de R est temporel, ensuite, nous allons montrer que les dérivées partielles premières de R sont bornées.

Lemme 2.2. *Pour tout $t \in (t_-, t_0)$, $0 < t_- < t_0$ et $\theta \in S^1$, $R(t, \theta)$ vérifie les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\partial_\theta R_\sigma &= 2\tau_\sigma R_\sigma - 2R\mu_\sigma^2 - \frac{e^{4\mu}}{2R^2}A_\sigma^2 - Re^{2(\tau-\mu)}(\rho - J_1) \\ &\quad - \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 - \frac{R^2e^{-2\tau}}{4}H_t^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\partial_\theta R_\lambda &= -2\tau_\lambda R_\lambda + 2R\mu_\lambda^2 + \frac{e^{4\mu}}{2R^2}A_\lambda^2 + Re^{2(\tau-\mu)}(\rho + J_1) \\ &\quad + \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 + \frac{R^2e^{-2\tau}}{4}H_t^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Avec H_t et Γ définis respectivement par (1.18) et (1.51).

Preuve : Nous avons $\partial_\theta R_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\theta(R_t + R_\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(R_{t\theta} + R_{\theta\theta})$, et en additionnant (1.54) et (1.55), nous avons :

$$\begin{aligned} &(\mu_t + \mu_\theta)^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(A_t + A_\theta)^2 + \frac{R_{\theta\theta} + R_{t\theta}}{R} - \frac{\tau_t R_t + \tau_\theta R_\theta}{R} - \frac{\tau_\theta R_\theta + \tau_\theta R_t}{R} \\ &= e^{2(\tau-\mu)}(J_1 - \rho) - \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 - \frac{e^{-2\tau}}{4}H_t^2, \\ i.e \quad &(\mu_t + \mu_\theta)^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(A_t + A_\theta)^2 + \frac{R_{\theta\theta} + R_{t\theta}}{R} - \frac{(\tau_t + \tau_\theta)(R_t + R_\theta)}{R} \\ &= e^{2(\tau-\mu)}(J_1 - \rho) - \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 - \frac{e^{-2\tau}}{4}H_t^2, \\ i.e \quad &R_{\theta\theta} + R_{t\theta} = (\tau_t + \tau_\theta)(R_t + R_\theta) - R(\mu_t + \mu_\theta)^2 - \frac{e^{4\mu}}{4R}(A_t + A_\theta)^2 \\ &\quad - Re^{2(\tau-\mu)}(\rho - J_1) - \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}R\Gamma^2 - \frac{Re^{-2\tau}}{4}H_t^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \partial_\theta R_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_t + \tau_\theta)(R_t + R_\theta) - \frac{1}{\sqrt{2}}R(\mu_t + \mu_\theta)^2 - \frac{e^{4\mu}}{4R\sqrt{2}}(A_t + A_\theta)^2 - \frac{R}{\sqrt{2}}e^{2(\tau-\mu)}(\rho - J_1) \\ &\quad - \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4\sqrt{2}}R\Gamma^2 - \frac{Re^{-2\tau}}{4\sqrt{2}}H_t^2, \end{aligned}$$

$$i.e \sqrt{2}\partial_\theta R_\sigma = 2\tau_\sigma R_\sigma - 2R\mu_\sigma^2 - Re^{2(\tau-\mu)}(\rho - J_1) - \frac{e^{4\mu}}{2R}A_\sigma^2 - R\left(\frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4R}\Gamma^2 + \frac{Re^{-2\tau}}{4}H_t^2\right).$$

De même, en faisant la différence de (1.54) et (1.55), on obtient (2.2). ■

Ce résultat nous permet d'énoncer le lemme suivant.

Lemme 2.3. *Pour tout $t \in (t_-, t_0)$ et $\theta \in S^1$, $\nabla R(t, \theta)$ est temporel i.e $g(\nabla R, \nabla R) < 0$.*

Preuve : Posons

$$\mathfrak{h}_1 = \frac{e^{4\mu}}{2R}A_\sigma^2 + R\mu_\sigma^2 + R(e^{2(\tau-\mu)}(\rho - J_1) + \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 + \frac{R^2e^{-2\tau}}{4}H_t^2), \quad (2.3)$$

$$\mathfrak{h}_2 = R\mu_\lambda^2 + \frac{e^{4\mu}}{2R}A_\lambda^2 + R(e^{2(\tau-\mu)}(\rho + J_1) + \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 + \frac{R^2e^{-2\tau}}{2\sqrt{2}}H_t^2). \quad (2.4)$$

En nous référant à (1.44) et (1.45), on a $\rho \geq |J_1|$ (car $V(\phi) \geq 0$) et comme $R > 0$, il s'en suit que \mathfrak{h}_1 et \mathfrak{h}_2 sont positives. Ainsi, d'après l'égalité (2.1) on a :

$$\partial_\theta R_\sigma = \sqrt{2}\tau_\sigma R_\sigma - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathfrak{h}_1, \quad (2.5)$$

$$i.e \partial_\theta R_\sigma < \sqrt{2}\tau_\sigma R_\sigma; \quad (2.6)$$

et d'après (2.2), on a

$$\partial_\theta R_\lambda = -\sqrt{2}\tau_\lambda R_\lambda + \mathfrak{h}_2 > -\sqrt{2}\tau_\lambda R_\lambda. \quad (2.7)$$

Supposons que $R_\sigma(t_1, \theta_1) = 0$ pour un $\theta_1 \in S^1$ et $t_1 \in (t_-; t_0)$. Alors $R_\sigma(t_1, \theta_1 + 2\pi) = 0$, à cause de la périodicité de R en θ . En utilisant l'inégalité (2.6), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_\theta R_\sigma}{R_\sigma} < \sqrt{2}\tau_\sigma &\Rightarrow [\ln|R_\sigma|]_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} < \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} \sqrt{2}\tau_\sigma d\theta \\ &\Rightarrow \ln \left| \frac{R_\sigma(t, \theta_1 + 2\pi)}{R_\sigma(t, \theta_1)} \right| < \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} \sqrt{2}\tau_\sigma d\theta \\ &\Rightarrow R_\sigma(t_1, \theta_1 + 2\pi) < |R_\sigma(t, \theta_1)| \exp \left(\int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} \sqrt{2}\tau_\sigma d\theta \right) \end{aligned}$$

$$0 = R_\sigma(t_1, \theta_1 + 2\pi) < R_\sigma(t_1, \theta_1) e^{\sqrt{2} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} \tau_\sigma(t_1, \tilde{\theta}) d\tilde{\theta}} = 0$$

ce qui est absurde. On conclut que $R_\sigma(t, \theta) \neq 0$ sur $]t_1, t_0[\times S^1$. On procède de manière similaire sur (2.7) pour conclure que $R_\lambda \neq 0$. D'où R_σ et R_λ ont chacun un signe constant. En intégrant l'équation (2.5) entre θ_0 et θ_1 , on a :

$$R_\sigma(t_1, \theta_1) = R_\sigma(t_1, \theta_0) e^{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \tau_\sigma(t, \tilde{\theta}) d\tilde{\theta}} - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \mathfrak{h}_1(t, \tilde{\theta}) e^{\int_{\tilde{\theta}}^{\theta} \tau_\sigma(t, s) ds} d\tilde{\theta}. \quad (2.8)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha R \partial_\beta R &= g^{00} R_t^2 + g^{11} R_\theta^2 = -e^{-2(\tau-\mu)} R_t^2 + e^{-2(\tau-\mu)} R_\theta^2 \\ &= -2e^{-2(\tau-\mu)} R_\sigma R_\lambda \end{aligned}$$

qui est soit strictement positif, soit strictement négatif. Or la première possibilité n'est pas envisageable car, comme R est continue et périodique suivant θ , $R(t, \theta)$ admet au moins un extremum en un point $\theta_1 \in S^1$ i.e $\partial_\theta R(t, \theta_1) = 0$, et alors

$$(g^{00} R_t^2 + g^{11} R_\theta^2)(t, \theta_1) = g^{00} R_t^2(t, \theta_1) < 0 \quad (2.9)$$

On conclut que $g^{\alpha\beta} \partial_\alpha R \partial_\beta R$ est partout négative pour tout $\theta \in S^1$..

Remarque 2.1. De l'inégalité (2.9), en utilisant les composantes de (1.19) et (1.20). On en déduit que

$$R_t^2 > -g_{00} g^{11} R_\theta^2 = R_\theta^2 \quad \text{i.e} \quad |R_t| > |R_\theta| \quad (2.10)$$

Nous allons par la suite, établir que R_t et R_θ sont bornés.

Lemme 2.4. Pour tout $t \in (t_-, t_0)$ et $\theta \in S^1$, R est C^1 borné.

Preuve : Par le choix de notre direction (direction passée), on suppose que $R_t > 0$. L'équation d'évolution (1.59) peut encore s'écrire

$$2\partial_\sigma R_\lambda = 2\partial_\lambda R_\sigma = R e^{2(\tau-\mu)} (\rho - P_1) + \frac{R e^{-2\tau+4\mu}}{2} \Gamma^2 + \frac{R^3 e^{-2\tau}}{2} H_t^2. \quad (2.11)$$

Comme $\rho > P_1$, alors $\partial_\sigma R_\lambda > 0$

Considérons un point (t, θ) de l'hypersurface $t = t_0$, et la courbe caractéristique $s \mapsto (t + s; \theta - s)$ générée par ∂_λ , ceci pour tout $s > 0$, en faisant un changement de variable sur cette courbe caractéristique $s' = t + s$ i.e $\theta - s = \theta + t - s'$, on obtient alors un nouvel paramétrage de la forme $s \mapsto (s, t + \theta - s)$. Ainsi :

$$\frac{d}{ds} R_\sigma(s, \theta + t - s) = (\partial_t R_\sigma - \partial_\theta R_\sigma)(s, \theta + t - s) = \sqrt{2} \partial_\lambda R_\sigma(s, \theta + t - s) \geq 0.$$

Après intégration sur $[t, t_0]$ où $t \in (t_-, t_0]$, nous avons

$$R_\sigma(t, \theta) \leq R_\sigma(t_0, \theta + t - t_0). \quad (2.12)$$

De même, nous avons

$$R_\lambda(t, \theta) \leq R_\lambda(t_0, \theta - t + t_0). \quad (2.13)$$

(2.12) et (2.13) nous permettent d'avoir

$$R_\sigma(\hat{t}, \hat{\theta}) \leq \sup_{\theta \in S^1} R_\sigma(t_0, \theta) \quad \text{et} \quad R_\lambda(\hat{t}, \hat{\theta}) \leq \sup_{\theta \in S^1} R_\lambda(t_0, \theta)$$

pour tout $\hat{t} \leq t_0$ et pour tout $\hat{\theta}$. Et comme, $\sqrt{2}R_t = R_\sigma + R_\lambda$, nous avons par conséquent :

$$\sqrt{2}R_t(t, \theta) \leq R_\sigma(t_0, \theta + t - t_0) + R_\lambda(t_0, \theta - t + t_0) \leq \sup_{\theta \in S^1} (R_\sigma + R_\lambda)(t_0, \theta),$$

ce qui nous permet de conclure que R_t est borné dans la direction passée. On en déduit de (2.10) que R_θ est aussi borné dans la direction passée. On conclut que R est C^1 borné.

▪

2.1.2 Estimations sur μ , A , τ et ϕ ainsi que leurs dérivées de premier ordre

Nous voulons dans ce paragraphe borner A_t , μ_t , μ_θ , A_θ , ϕ_t et ϕ_θ dans la direction passée. Pour le faire, nous allons procéder par l'estimation cône-lumière .

Nous nous référons à ([A]) et [BCIM]) pour donner une idée sur la construction de la carte relative à ces types d'équations d'évolution. On considère une base de variété Lorentzienne (\mathcal{N}, ν) où \mathcal{N} est une variété de dimension 2 correspondant au développement passé des coordonnées conformes de $(h, k, f^\circ, \phi^\circ)$ ayant pour métrique :

$$\nu := -dt^2 + d\theta^2$$

et on considère une famille de variétés $(\mathbb{R}^2, d_{(t,\theta)})$ et $(\mathbb{R}^2, \tilde{d}_{(t,\theta)})$ avec :

$$d_{(t,\theta)} = R(t, \theta)d\mu^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R(t, \theta)}dA^2, \quad \tilde{d}_{(t,\theta)} = R(t, \theta)d\phi^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R(t, \theta)}dA^2$$

et nous définissons les cartes :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{N} &\rightarrow \mathbb{R}^2 & \tilde{\Psi} : \mathcal{N} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, \theta) &\mapsto \Psi(t, \theta) = (\mu(t, \theta), A(t, \theta)); & (t, \theta) &\mapsto \tilde{\Psi}(t, \theta) = (\phi(t, \theta), A(t, \theta)). \end{aligned}$$

Utilisant les produits scalaires relatifs aux vecteurs tangents de ces cartes, nous avons par exemple :

$$\begin{aligned} \langle \Psi_t, \Psi_\theta \rangle &= d_{ab} \Psi_t^a \Psi_\theta^b = R\mu_t \mu_\theta + \frac{e^{4\mu}}{4R(t, \theta)} A_t A_\theta, \\ \langle \tilde{\Psi}_t, \tilde{\Psi}_\theta \rangle &= d_{ab} \tilde{\Psi}_t^a \tilde{\Psi}_\theta^b = R\phi_t \phi_\theta + \frac{e^{4\mu}}{4R(t, \theta)} A_t A_\theta. \end{aligned}$$

La dérivée covariante compatible avec ν est notée D et l'action de D est exprimée comme suit :

$$D_\alpha \Psi_\gamma^a = \partial_\alpha \Psi_\gamma^a + \Gamma_{bc}^a \Psi_\gamma^b \Psi_\alpha^c - \Gamma_{\alpha\gamma}^\kappa \Psi_\kappa^a,$$

et

$$D_\alpha \tilde{\Psi}_\gamma^a = \partial_\alpha \tilde{\Psi}_\gamma^a + \Gamma_{bc}^a \tilde{\Psi}_\gamma^b \tilde{\Psi}_\alpha^c - \Gamma_{\alpha\gamma}^\kappa \tilde{\Psi}_\kappa^a,$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\mu}^\mu &= 0, \quad \Gamma_{\mu A}^\mu = 0, \quad \Gamma_{AA}^\phi = \Gamma_{AA}^\mu = -\frac{e^{4\mu}}{2R^2}, \quad \Gamma_{\mu\phi}^\mu = 0 \\ \Gamma_{AA}^A &= 0, \quad \Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0, \quad \Gamma_{\mu A}^A = 2, \quad \Gamma_{\mu\mu}^A = 0, \quad \Gamma_{\phi\mu}^\phi = 2. \end{aligned}$$

D étant compatible avec ν et non avec $d_{(t,\theta)}$ et $\tilde{d}_{(t,\theta)}$, nous avons :

$$D_\gamma d_{(ab)} = R_\gamma (\delta_a^\mu \delta_b^\mu - \frac{e^{4\mu}}{4R^2} \delta_a^A \delta_b^A), \quad D_\gamma \tilde{d}_{(ab)} = R_\gamma (\delta_a^\phi \delta_b^\phi - \frac{e^{4\mu}}{4R^2} \delta_a^A \delta_b^A).$$

L'opérateur d'onde est défini par $\square := \nu_{\alpha\gamma} D_\alpha D_\gamma$ et les équations d'évolution pour A, ϕ et μ prennent la forme :

$$\square \mu = \frac{\mu_t R_t}{R} - \frac{\mu_\theta R_\theta}{R} + \frac{1}{2} e^{2(\tau-\mu)} (\rho - P_1 + P_2 - P_3) + \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{2} \Gamma^2, \quad (2.14)$$

$$\square A = -\frac{A_t R_t}{R} + \frac{A_\theta R_\theta}{R} + 2R e^{2(\tau-2\mu)} S_{23} + R^2 e^{-2\tau} \Gamma H_t, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \square \phi &= -\frac{\phi_t R_t}{R} - 4\mu_\theta H^2 R^2 e^{-2\tau} \phi_\theta - e^{-2(\tau-\mu)} V'(\phi) \\ &\quad + \phi_\theta \left[\frac{R_\theta}{R} + 2A_\theta H(G - R) - \mu_\theta (G + AH)^2 e^{-2(\tau-2\mu)} \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A présent, nous définissons le "tenseur impulsion-énergie" pour les cartes Ψ et $\tilde{\Psi}$,

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\alpha\gamma} &= \langle \Psi_\alpha + \tilde{\Psi}_\alpha, \Psi_\gamma + \tilde{\Psi}_\gamma \rangle - \frac{1}{2} \nu_{\alpha\gamma} \nu^{\delta\beta} (\langle \Psi_\delta, \Psi_\beta \rangle - \langle \tilde{\Psi}_\delta, \tilde{\Psi}_\beta \rangle) \\ &= \frac{e^{4\mu}}{4R^2} A_\alpha A_\gamma + \frac{1}{2} \nu_{\alpha\gamma} [R(\mu_t^2 - \mu_\theta^2) + \frac{e^{4\mu}}{4R^2} (A_t^2 - A_\theta^2) + R(\phi_t^2 - \phi_\theta^2)] \\ &\quad + R\mu_\alpha \mu_\gamma + R\phi_\alpha \phi_\gamma + \delta_\alpha^t \delta_\gamma^t \phi^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Nous trouvons alors que $X = \tilde{T}_{tt}$ et $Y = \tilde{T}_{t\theta}$, avec $\nu_{tt} = -1$, $\nu_{t\theta} = 0$, δ_α^t étant le symbole de Kronecker. Les fonctions impliquées dans l'argument du cône-lumière sont des fonctions quadratiques constituées des dérivées premières de μ , ϕ et A définies par :

$$X = \frac{1}{2}R(\mu_t^2 + \mu_\theta^2) + \frac{e^{4\mu}}{8R}(A_t^2 + A_\theta^2) + \frac{1}{2}[R(\phi_t^2 + \phi_\theta^2) + \phi^2], \quad (2.18)$$

$$Y = R\mu_t\mu_\theta + \frac{e^{4\mu}}{4R}A_tA_\theta + R\phi_t\phi_\theta. \quad (2.19)$$

En utilisant les équations d'évolution (1.56) et (1.57) nous avons :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda(X + Y) &= -\frac{1}{2}R_\sigma \left(\mu_t^2 - \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(-A_t^2 + A_\theta^2) + \phi_t^2 - \phi_\theta^2 \right) \\ &\quad - Re^{2(\tau-\mu)}\phi_\sigma V'(\phi) + \frac{R}{2}\mu_\sigma (e^{-2\tau+4\mu}\Gamma^2 + e^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1 + P_2 - P_3)) \\ &\quad + \frac{e^{4\mu}}{2R}A_\sigma(R^2e^{2(\mu-\tau)}\Gamma H_t + 2Re^{2(\tau-\mu)}S_{23}) + \phi\phi_\lambda, \end{aligned} \quad (2.20)$$

et

$$\begin{aligned} \partial_\sigma(X - Y) &= -\frac{1}{2}R_\lambda \left(\mu_t^2 - \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(-A_t^2 + A_\theta^2) + \phi_t^2 - \phi_\theta^2 \right) \\ &\quad - Re^{2(\tau-\mu)}\phi_\lambda V'(\phi) + \frac{R}{2}\mu_\lambda (e^{-2\tau+4\mu}\Gamma^2 + e^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1 + P_2 - P_3)) \\ &\quad + \frac{e^{4\mu}}{2R}A_\lambda(R^2e^{2(\mu-\tau)}\Gamma H_t + 2Re^{2(\tau-\mu)}S_{23}) + \phi\phi_\sigma. \end{aligned} \quad (2.21)$$

En intégrant ces équations sur les courbes caractéristiques respectives $t \mapsto (t, \theta - t_0 + t)$ et $t \mapsto (t, \theta + t_0 - t)$, partant d'un point (t_1, θ) vers l'hypersurface $t = t_0$ nous avons après addition :

$$\begin{aligned} X(t_1, \theta) &= \frac{1}{2}(X + Y)(t_0, \theta - (t_0 - t_1)) + \frac{1}{2}(X - Y)(t_0, \theta + t_0 - t_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} [\chi_1(s, \theta - (s - t_1)) + \chi_2(s, \theta + s - t_1)] ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} [(\mu_\sigma \zeta_1)(t_0, \theta - (t_0 - t_1)) + (\mu_\lambda \zeta_1)(t_0, \theta + t_0 - t_1)] ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} \left[\left(\frac{e^{4\mu}}{2R} A_\sigma \zeta_2 \right)(t_0, \theta - (t_0 - t_1)) + \left(\frac{e^{4\mu}}{2R} A_\lambda \zeta_2 \right)(t_0, \theta + t_0 - t_1) \right] ds; \end{aligned} \quad (2.22)$$

où

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{1}{2}R_\sigma \left(\mu_t^2 - \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(-A_t^2 + A_\theta^2) + \phi_t^2 - \phi_\theta^2 \right) \\ &\quad - \frac{R_t}{\sqrt{2}}\phi_t^2 + \frac{R_\theta}{\sqrt{2}}\phi_\theta^2 + \phi\phi_\lambda - R\phi_\sigma e^{2(\tau-\mu)}V'(\phi), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \chi_2 &= -\frac{1}{2}R_\lambda \left(\mu_t^2 - \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(-A_t^2 + A_\theta^2) + \phi_t^2 - \phi_\theta^2 \right) \\ &\quad - \frac{R_t}{\sqrt{2}}\phi_t^2 + \frac{R_\theta}{\sqrt{2}}\phi_\theta^2 + \phi\phi_\sigma - R\phi_\lambda e^{2(\tau-\mu)}V'(\phi), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\zeta_1 = \frac{R}{2} \left(e^{-2\tau+4\mu}\Gamma^2 + e^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1 + P_2 - P_3) \right), \quad (2.25)$$

$$\zeta_2 = R^2 e^{2(\mu-\tau)}\Gamma H_t + 2R e^{2(\tau-\mu)}S_{23}. \quad (2.26)$$

Partant du fait que $V(\phi) > 0$, (*Cf.*[*Ri*]) et vu (1.44), (1.47), (1.48), (1.49) et (1.50), on a :

$$\begin{aligned} \rho - P_1 - P_2 - P_3 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{v^0} ((v^0)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 - (v^3)^2) f dv \\ &\quad + 4V(\phi) - e^{-2(\tau-\mu)}(\phi_t^2 - \phi_\theta^2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f}{v^0} dv + 4V(\phi) - e^{-2(\tau-\mu)}(\phi_t^2 - \phi_\theta^2). \end{aligned}$$

i.e

$$P_1 + P_2 + P_3 \leq \rho + e^{-2(\tau-\mu)}(\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - 4V(\phi) \leq \rho + e^{-2(\tau-\mu)}\phi_t^2,$$

et

$$P_2 + P_3 \leq \rho - P_1 + e^{-2(\tau-\mu)}(\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - 4V(\phi).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} 2|S_{23}| &= 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v^2 v^3|}{v^0} f(t, \theta, v) dv \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(v^2)^2 + (v^3)^2}{v^0} f(t, \theta, v) dv \\ &\leq P_2 + P_3 - e^{-2(\tau-\mu)}(\phi_t^2 - \phi_\theta^2) + 2V(\phi) \\ &\leq \rho - P_1 - 2V(\phi) \leq \rho - P_1. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} |\zeta_2| &\leq R e^{2(\tau-\mu)}|S_{23}| + R^2 e^{2(\mu-\tau)}|\Gamma H_t| \leq R e^{2(\tau-\mu)}|S_{23}| + \frac{1}{2}R^2 e^{-2\tau}(e^{4\mu}\Gamma^2 + H_t^2) \\ &\leq \frac{1}{2}R e^{2(\tau-\mu)}|\rho - P_1| + \frac{1}{2}R^2 e^{-2\tau}(e^{4\mu}\Gamma^2 + H_t^2). \end{aligned} \quad (2.27)$$

De plus

$$\begin{aligned}\rho - P_1 - P_2 + P_3 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f}{v^0} [1 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^1)^2 - (v^2)^2 + (v^3)^2] dv + 2V(\phi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f}{v^0} [1 + 2(v^3)^2] dv + 2V(\phi) \geq 0.\end{aligned}$$

Par la suite, on a

$$P_2 - P_3 \leq \rho - P_1.$$

On en déduit alors que :

$$0 \leq \rho - P_1 + P_2 - P_3 \leq 2(\rho - P_1)$$

et

$$\zeta_1 \leq \frac{R}{2} [2e^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1) + e^{-2\tau+4\mu}\Gamma^2]. \quad (2.28)$$

D'autre part, comme

$$\rho - P_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f}{v^0} [1 + (v^2)^2 + (v^3)^2] dv + 2V(\phi) \geq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f}{v^0} (v^2)^2 dv$$

et $e^{2(\tau-\mu)}P_2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{2(\tau-\mu)}(v^2)^2}{v^0} dv + \frac{1}{2}(\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - e^{2(\tau-\mu)}V(\phi)$, on a

$$e^{2(\tau-\mu)}P_2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{2(\tau-\mu)}(v^2)^2}{v^0} dv + \frac{1}{2}\phi_t^2 \leq e^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1) + \frac{1}{2}\phi_t^2. \quad (2.29)$$

Pour tout $t \in (t_-, t_0)$, l'équation (2.11) nous permet d'avoir :

$$R_\sigma(t_0, \theta + t_0 - t) - R_\sigma(t, \theta) = \frac{1}{2} \int_t^{t_0} [Re^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1) + \frac{Re^{-2\tau}}{2}(e^{4\mu}\Gamma^2 + R^2H_t^2)](s, \theta + t_0 - s) ds \quad (2.30)$$

$$R_\lambda(t_0, \theta - t_0 + t) - R_\lambda(t, \theta) = \frac{1}{2} \int_t^{t_0} [Re^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1) + \frac{Re^{-2\tau}}{2}(e^{4\mu}\Gamma^2 + R^2H_t^2)](s, \theta - t_0 + s) ds \quad (2.31)$$

Il s'en suit de la section précédente au vu de l'inégalité (2.1.1) que les quantités des membres de la droite des égalités (2.30) et (2.31) sont uniformément bornées. Par conséquent, sur (t_-, t_0) au vu des inégalités (2.27) et (2.28), on peut conclure que

$$\int_t^{t_0} \zeta_1(s, \theta \pm (t_0 - s)) ds \quad \text{et} \quad \int_t^{t_0} |\zeta_2|(s, \theta \pm (t_0 - s)) ds \quad (2.32)$$

sont uniformément bornés.

La relation (2.18) nous permet d'avoir les six inégalités suivantes.

$$|\mu_\sigma| = \sqrt{\frac{1}{2}(\mu_t + \mu_\theta)^2} \leq \sqrt{\mu_t^2 + \mu_\theta^2} \leq \sqrt{\frac{2X}{R}}, \quad |\mu_\lambda| \leq \sqrt{\frac{2X}{R}},$$

$$\frac{e^{2\mu}}{2R}|A_\lambda| = \frac{e^{2\mu}}{2R}\sqrt{\frac{1}{2}(A_t - A_\theta)^2} \leq \frac{e^{2\mu}}{2R}\sqrt{A_t^2 + A_\theta^2} \leq \sqrt{\frac{2X}{R}} \quad \text{et} \quad \frac{e^{4\mu}}{2R}|A_\sigma| \leq \sqrt{\frac{2X}{R}},$$

$$\int_{t_1}^{t_0} (R\phi_\sigma^2 + \phi^2)e^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1)(s, \theta + s - t)ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} X(t, \theta), \quad (2.33)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} (R\phi_\lambda^2 + \phi^2)e^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1)(s, \theta - s + t)ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} X(t, \theta). \quad (2.34)$$

Et aussi comme R est C^1 borné, d'après (2.32), nous avons respectivement :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_0} (\mu_\sigma \zeta_1)(s, \theta + s - t)ds &\leq \int_{t_1}^{t_0} \sqrt{\frac{2X}{R}} \zeta_1(s, \theta + s - t)ds \\ &\leq \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X(t, \theta)}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_0} (\mu_\lambda \zeta_1)(s, \theta - s + t)ds &\leq \int_{t_1}^{t_0} \sqrt{\frac{2X}{R}} \zeta_1(s, \theta - s + t)ds \\ &\leq \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X(t, \theta)}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_0} \left(\frac{e^{4\mu}}{2R}|A_\sigma \zeta_2|\right)(s, \theta + s - t)ds &\leq \int_{t_1}^{t_0} \sqrt{\frac{2X}{R}} |\zeta_2|(s, \theta + s - t)ds \\ &\leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X(t, \theta)}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_0} \left(\frac{e^{4\mu}}{2R}|A_\lambda \zeta_2|\right)(s, \theta - s + t)ds &\leq \int_{t_1}^{t_0} \sqrt{\frac{2X}{R}} |\zeta_2|(s, \theta - s + t)ds \\ &\leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X(t, \theta)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Les inégalités de (2.33) à (2.34) nous permettent d'avoir :

$$\int_{t_1}^{t_0} \chi_1(s, \theta + s - t)ds \leq C \int_{t_1}^{t_0} X(s, \theta)ds, \quad (2.39)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \chi_2(s, \theta - s + t)ds \leq C \int_{t_1}^{t_0} X(s, \theta)ds. \quad (2.40)$$

L'égalité (2.22) nous permet d'avoir

$$\sup_{\theta \in S^1} X(t_1, \theta) \leq C \sup_{(\theta, t) \in S^1 \times [t_-, t_0]} X(t, \theta) + C \int_{t_1}^{t_0} \sup_{\theta \in S^1} X(s, \theta)ds. \quad (2.41)$$

Pour la suite, nous nous inspirons de la deuxième étape de [A]. L'idée c'est de considérer un sous-intervalle $[\varepsilon_1; \varepsilon_0] \subset [t_1; t_0]$ pour lequel $\sup_{\theta \in S^1} X(s, \theta)$ est croissante lorsque $s \rightarrow \varepsilon_1$, et chercher une borne supérieure de X dans cet intervalle, on a alors :

$$\sup_{[\varepsilon_1; \varepsilon_0] \times S^1} X(.,.) \leq \sup_{S^1} X(\varepsilon_1, .).$$

On applique le lemme de Grownvall sur $[\varepsilon_1; \varepsilon_0]$ et on déduit la borne supérieure de $\sup_{S^1} X(\varepsilon_1, .)$ dû au fait que R demeure borné. On réitère le même procédé, et on conclut que $\sup_{S^1} X$ est uniformément borné sur $[t_-, t_0]$.

$$X \text{ borné} \Rightarrow R, \mu_t, \mu_\theta, \mu, A_t, A_\theta, \phi_t, \phi_\theta, \text{ et } \phi \quad (2.42)$$

sont bornées. On en déduit que A est borné. Pour borner τ ainsi que ses dérivées premières, nous utilisons une approche similaire, l'équation (1.58) nous permet d'avoir les équations équivalentes ci-dessous

$$2\partial_\lambda \tau_\sigma = \mu_\theta^2 - \mu_t^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(A_t^2 - A_\theta^2) - \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 - \frac{3R^2 e^{-2\tau}}{4}H_t^2 - e^{2(\tau-\mu)}P_3, \quad (2.43)$$

$$2\partial_\sigma \tau_\lambda = \mu_\theta^2 - \mu_t^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(A_t^2 - A_\theta^2) - \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 - \frac{3R^2 e^{-2\tau}}{4}H_t^2 - e^{2(\tau-\mu)}P_3. \quad (2.44)$$

On intègre (2.43) et (2.44) le long des courbes caractéristiques $t \mapsto \theta \pm (t_0 - t)$, on utilise le fait que A, ϕ, μ sont C^1 bornés, pour en déduire que τ_λ et τ_σ sont bornés. Comme $\tau_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_\sigma + \tau_\lambda)$ et $\tau_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_\sigma - \tau_\lambda)$, on peut donc conclure que τ est C^1 borné.

2.1.3 Estimation des quantités de torsion

Dans cette section, il est question de contrôler le tenseur impulsion-énergie. Le fait de borner le support de f est une étape significative dans cette tâche. Nous procédons comme [ARW], [W]. Posons

$$Q(t) := \sup\{|v| : \exists (s, \theta) \in [t_-, t_0] \times S^1 \text{ tel que } f(s, \theta, v) \neq 0, t_- < t \leq t_0\} \quad (2.45)$$

Une solution de l'équation de Vlasov (1.53) est donnée par :

$$f(t, \theta, v) = f_0(\Theta(t_0, t, \theta, v), V(t_0, t, \theta, v)) := f^\circ(\Theta(t_0, t, \theta, v), V(t_0, t, \theta, v)), \quad (2.46)$$

où $V = (V^1, V^2, V^3)$.

Remarque 2.2. La relation (2.46) nous permet d'avoir $\|f\|_\infty \leq \|f^\circ\|_\infty$.

Lemme 2.5. Les quantités de torsion H et G sont C^1 , et les quantités matières sont bornées sur $[t_-, t_0] \times S^1$.

Preuve : En effet, Θ et $V = (V^1, V^2, V^3)$ sont les solutions du système caractéristique suivant

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{ds} = \frac{V^1}{V^0}, & (2.47) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dV^1}{ds} = -(\tau_\theta - \mu_\theta)V^0 - (\tau_s - \mu_s)V^1 + \mu_\theta \frac{(V^2)^2}{V^0} - \left(\mu_\theta - \frac{R_\theta}{R}\right) \frac{(V^3)^2}{V^0} \\ + \frac{A_\theta}{R} e^{2\mu} \frac{V^2 V^3}{V^0} - e^{-\tau} (e^{2\tau} \Gamma V^2 + R H_s V^3), & (2.48) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dV^2}{ds} = -\mu_s V^2 - \mu_\theta \frac{V^1 V^2}{V^0}, & (2.49) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dV^3}{ds} = -\left(\frac{R_s}{R} - \mu_t\right) V^3 + \left(\mu_\theta - \frac{R_\theta}{R}\right) \frac{V^1 V^3}{V^0} - \frac{e^{2\mu} V^2}{R} (A_s + A_\theta \frac{V^1}{V^0}), & (2.50) \end{cases}$$

système caractéristique associé à l'équation de Vlasov (1.53) avec $\Theta(t, t, x, v) = \theta$ et $V(t, t, x, v) = v$.

Nous définissons également Q^j , $j \in \{1, 2, 3\}$ par

$$Q^j(t) := \sup\{|v^j| : \exists (s, \theta) \in [t_-, t_0] \times S^1 \text{ tel que } f(s, \theta, v^k) \neq 0, k \neq j, t_- < t \leq t_0\}. \quad (2.51)$$

Si $Q(t)$ définie par (2.45) peut être contrôlé, nous obtiendrons directement, partant des équations (1.44) et (1.50), les estimations des quantités de torsion ρ , J_k , P_k et S_{jk} , $j, k \in \{1, 2, 3\}$ $j \neq k$. Par ailleurs

$$\frac{dV^2}{V^2} = \left(-\mu_s - \frac{V^1}{V^0} \mu_\theta\right) ds. \quad (2.52)$$

En intégrant cette égalité (2.52) sur $[t_-, t]$, nous avons :

$$V^2(t) \leq |V^2(t_-)| \exp\left(\int_{t_-}^t \left|\mu_s + \frac{V^1}{V^0} \mu_\theta\right| ds\right). \quad (2.53)$$

Nous utilisons l'égalité (2.50) et l'inégalité (2.53) puis appliquons le lemme de Gronwall pour le contrôle de V^3

$$V^3(t) \leq C(t) \exp\left(\int_{t_-}^t \left|\frac{R_s}{R} - \mu_s + \left(-\mu_\theta + \frac{R_\theta}{R}\right) \frac{V^1}{V^0}\right| ds\right) \quad (2.54)$$

où $C(t) = \sup_{\theta \in S^1} \left|\frac{e^{2\mu} V^2}{R} (A_t + A_\theta \frac{V^1}{V^0})\right|(t, \theta)$. $|\frac{V^1}{V^0}|$, $|\mu_t|$ $|\mu_\theta|$ sont bornés, on peut donc en déduire en utilisant les équations relatives à dV^2/ds et dV^3/ds que $e^\mu V^2$, $Ae^\mu V^2 + Re^{-\mu} V^3$

sont bornés. Ceci nous permet de conclure que V^2 et V^3 sont bornés, par conséquent Q^2 et Q^3 sont aussi bornés. Pour borner Q , il suffit de borner Q^1 . Comme Q^2 et Q^3 sont bornés, nous utilisons l'équation (1.50) pour estimer $|S_{12}|$ et $|S_{13}|$ à l'aide de Q^1 . Utilisant le fait que R est borné par rapport à sa donnée sur l'hypersurface initiale, et du fait que Γ et H_t sont les invariants de l'équation caractéristique, alors dV^1/ds est borné par $C(t)Q^1(t)$, où $C(t)$ est une fonction de t et de τ , μ , A ainsi que leurs dérivées premières qui sont toutes bornées sur $[t_-, t_0)$. Nous obtenons de l'équation caractéristique relative à V^1 , l'équation différentielle (2.48) et on a :

$$|V^1(t)| \leq |V^1(t_0)| + C(t) \int_t^{t_0} [Q^1(s) + \sup_{\theta} \Gamma(s, \theta) + \sup_{\theta} H_t(s, \theta)] ds.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} |V^1(t)| &\leq |Q^1(t_0)| + C(t) \int_t^{t_0} [Q^1(s) + \sup_{\theta} \Gamma(s, \theta) + \sup_{\theta} H_t(s, \theta)] ds, \quad t < t_0, \\ i.e \quad Q^1(t) &\leq |Q^1(t_0)| + C(t) \int_t^{t_0} [Q^1(s) + \sup_{\theta} \Gamma(s, \theta) + \sup_{\theta} H_t(s, \theta)] ds, \quad t < t_0. \end{aligned} \quad (2.55)$$

En utilisant les équations auxiliaires (1.61) et (1.62), on a :

$$\partial_{\lambda}(Re^{-2\tau+4\mu}\Gamma) = \sqrt{2}Re^{\tau}(S_{12} - J_2), \quad (2.56)$$

$$\partial_{\sigma}(Re^{-2\tau+4\mu}\Gamma) = \sqrt{2}Re^{\tau}(S_{12} + J_2). \quad (2.57)$$

En intégrant (2.56) – (2.57) sur la courbe caractéristique $t \mapsto (t, \theta \pm (t_0 - t_1))$, on a :

$$\sup_{\theta} \Gamma(t, \theta) \leq \Gamma(t_0, \theta) + C \int_t^{t_0} [1 + Q^1(s)] ds, \quad t_- \leq t_1 < t < t_0. \quad (2.58)$$

De manière analogue, en utilisant la remarque (2.2) et le système (2.47) – (2.50), on obtient

$$\sup_{\theta} H_t(t, \theta) \leq |H_t|(t_0, \theta) + C \int_t^{t_0} [1 + Q^1(s) + \sup_{\theta} |\Gamma|(s, \theta)] ds, \quad t_- \leq t_1 < t < t_0, \quad (2.59)$$

en additionnant (2.55), (2.58) et (2.59) puis, en appliquant le lemme de Gronwall, on a le contrôle de H_t , Γ , et $Q^1(t)$ par une quantité dépendant de $Q^1(t_0)$. Comme la fonction de distribution sur la surface initiale f° est à support compact, il s'en suit que $Q^1(t_0)$ est borné par une constante positive. H_t , Γ étant bornées, on a H et G bornées. De plus, $|V^k| \leq V^0$, $k = 1, 2, 3$ et V^0 dépend des V^k . Nous avons ρ borné ainsi que toutes autres quantités matières. Et en utilisant l'équation auxiliaire (1.61), comme toutes les quantités matières sont bornées, on en déduit que H_θ et G_θ sont bornés. ■

2.2 Les itérées dans la direction passée

Dans cette partie et dans la suite, nous considérons que dans la direction passée $t \in]t_-; t_0)$, $t_0 > t_- > 0$. Pour toute fonction

$$h(t, \theta) \equiv h, \quad h_t \equiv \dot{h}, \quad h_\theta \equiv h'$$

2.2.1 Construction des itérées dans la direction passée

Pour écrire nos itérées dans cette direction, nous commençons par poser

$$\begin{aligned} F_\sigma &:= \partial_\sigma F := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t F + \partial_\theta F) := \hat{F}, \\ F_\lambda &:= \partial_\lambda F := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t F - \partial_\theta F) := \check{F}. \end{aligned}$$

Pour toute composante de la métrique χ , ϕ et f , on définit les suites $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme

$$\chi_0(t, \theta) \equiv \chi^\circ(\theta), \quad \phi_0(t, \theta) \equiv \phi^\circ(\theta), \quad f_0(t, \theta) \equiv f^\circ(\theta),$$

qui sont les données initiales et pour tout entier $n \geq 1$

$$\chi_n(t_0, \theta) \equiv \chi^\circ(\theta), \quad \phi_n(t_0, \theta) \equiv \phi^\circ(\theta), \quad f_n(t_0, \theta) \equiv f^\circ(\theta)$$

Nous réécrivons le système (2.47) – (2.50) en remplaçant R , τ , μ , A , α' , τ' , μ' , A' respectivement par R_{n-1} , τ_{n-1} , μ_{n-1} , A_{n-1} , $\underline{\alpha}_{n-1}$, $\underline{\tau}_{n-1}$, $\underline{\mu}_{n-1}$, \underline{A}_{n-1} . Posons

$$\begin{aligned} \Xi_{n-1} &= \left[\frac{V^1}{V^0}; \Xi_n^1; \Xi_n^2; \Xi_n^3 \right] \quad \text{où} \\ \Xi_{n-1}^1 &= -(\underline{\tau}_{n-1} - \underline{\mu}_{n-1})V^0 - (\check{\tau}_{n-1} - \check{\mu}_{n-1})V^1 - e^{-\tau_{n-1}}(e^{2\mu_{n-1}}\Gamma_{n-1}V^2 + R_{n-1}\check{H}_{n-1}V^3) \\ &\quad - \frac{e^{2\mu_{n-1}}\underline{A}_{n-1}V^2V^3}{R_{n-1}V^0} - \left(\underline{\mu}_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}}\right)\frac{(V^3)^2 - (V^2)^2}{V^0}, \\ \Xi_{n-1}^2 &= -\check{\mu}_{n-1}V^2 - \frac{\underline{\mu}_{n-1}V^1V^2}{V^0}, \\ \Xi_{n-1}^3 &= -\left(\frac{\check{R}_{n-1}}{R_{n-1}} - \check{\mu}_{n-1}\right)V^3 + \left(\underline{\mu}_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}}\right)\frac{V^1V^3}{V^0} - \frac{e^{2\mu_{n-1}}}{R_{n-1}}\left(\check{A}_{n-1} + \underline{A}_{n-1}\frac{V^1}{V^0}\right)V^2, \end{aligned}$$

et définissons par $(\Theta_n; V_n)(s, t, \theta, V^1, V^2, V^3)$ avec $(t \leq t_0)$ la solution du système caractéristique

$$\frac{d}{ds}((\Theta, V)_n) = \Xi_{n-1}(s, t, \Theta, V), \quad (2.60)$$

avec pour données initiales $(\Theta_n, V_n)(t_0, t_0, \theta, V^1, V^2, V^3) = (\theta, v)$. Nous définissons $f_n(t, \theta, V^1, V^2, V^3)$ par

$$f_n(t, \theta, V^1, V^2, V^3) = f^\circ((\Theta_n, V_n)(t_0, \theta, V^1, V^2, V^3)), \quad (2.61)$$

où f_n est la solution de l'équation

$$\begin{aligned} & \left[(\mathcal{I}_{n-1} - \underline{\mu}_{n-1})v^0 + (\check{\tau}_{n-1} - \check{\mu}_{n-1})v^1 + \underline{\mu}_{n-1} \frac{(v^2)^2}{v^0} + (\underline{\mu}_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}}) \frac{(v^3)^2}{v^0} - \frac{A_{n-1}}{R_{n-1}} e^{2\mu_{n-1}} \frac{v^2 v^3}{v^0} \right] \frac{\partial f_n}{\partial v^1} \\ & + \left[e^{-\tau_{n-1}} (e^{2\tau_{n-1}} \Gamma_{n-1} v^2 + R_{n-1} \check{H}_{n-1} v^3) \right] \frac{\partial f_n}{\partial v^1} + \left[\check{\mu}_{n-1} v^2 + \underline{\mu}_{n-1} \frac{v^1 v^2}{v^0} \right] \frac{\partial f_n}{\partial v^2} - \frac{\partial f_n}{\partial t} \\ & + \left[\left(\frac{\check{R}_{n-1}}{R_{n-1}} - \check{\mu}_{n-1} \right) v^3 + \left(\underline{\mu}_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}} \right) \frac{v^1 v^3}{v^0} + \frac{e^{2\mu_{n-1}} v^2}{R_{n-1}} (\check{A}_{n-1} + \underline{A}_{n-1} \frac{v^1}{v^0}) \right] \frac{\partial f_n}{\partial v^3} = \frac{v^1}{v^0} \frac{\partial f_n}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Nous utilisons les équations (2.1) – (2.2) du lemme 2.2 :

$$\begin{aligned} \partial_\theta \hat{R}_n &= \hat{\tau}_{n-1} \hat{R}_{n-1} - R_{n-1} \hat{\mu}_{n-1}^2 - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4R_{n-1}^2} \hat{A}_{n-1}^2 \\ & - R_{n-1} e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} (\rho_n - J_{n,1}) \\ & - \frac{e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}}}{4} \Gamma_{n-1}^2 - \frac{R_{n-1}^2 e^{-2\tau_{n-1}}}{4} \check{H}_{n-1}^2, \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta \check{R}_n &= -\check{\tau}_{n-1} \check{R}_{n-1} + R_{n-1} \check{\mu}_{n-1}^2 + \\ & \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4R_{n-1}^2} \check{A}_{n-1}^2 + R_{n-1} e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} (\rho_n + J_{n,1}) \\ & + \frac{e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}}}{4} \Gamma_{n-1}^2 + \frac{R_{n-1}^2 e^{-2\tau_{n-1}}}{4} \check{H}_{n-1}^2. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Nous définissons à présent $\rho_n, \rho_{k,n}, P_{k,n}, k \in \{1; 2; 3\}$ qui s'expriment comme ρ, ρ_k, P_k , en remplaçant $f, R, \dot{\phi}, \phi', \dot{A}, \mu, \tau, \dot{\mu}, \dot{\tau}$ dans leurs expressions respectivement par $f_n, R_{n-1}, \check{\phi}_{n-1}, \underline{\phi}_{n-1}, \check{A}_{n-1}, \mu_{n-1}, \tau_{n-1}, \check{\mu}_{n-1}, \check{\tau}_{n-1}$.

On définit également X_n et Y_n en nous inspirant des relations (2.18) – (2.19) par :

$$X_n = \frac{1}{2} R_n (\check{\mu}_n^2 + \underline{\mu}_n^2) + \frac{e^{4\mu_n}}{8R_n} (\check{A}_n^2 + \underline{A}_n^2) + \frac{1}{2} \left[R_n (\check{\phi}_n^2 + \underline{\phi}_n^2) + \phi_n^2 \right], \quad (2.64)$$

$$Y_n = R_n \check{\mu}_n \underline{\mu}_n + \frac{e^{4\mu_n}}{4R_n} \check{A}_n \underline{A}_n + R_n \check{\phi}_n \underline{\phi}_n. \quad (2.65)$$

On pose $Z_n = X_n + Y_n$, et $\tilde{Z}_n = X_n - Y_n$, on a alors

$$Z_n = R_n \hat{\mu}_n^2 + \frac{e^{4\mu_n}}{4R_n} \hat{A}_n^2 + R_n \hat{\phi}_n^2 + \frac{1}{2} \phi_n^2, \quad (2.66)$$

$$\tilde{Z}_n = R_n \check{\mu}_n^2 + \frac{e^{4\mu_n}}{4R_n} \check{A}_n^2 + R_n \check{\phi}_n^2 + \frac{1}{2} \phi_n^2. \quad (2.67)$$

Nous définissons également

$$\mathfrak{h}_n, \tilde{\mathfrak{h}}_n, \chi_n, \tilde{\chi}_n, \zeta_n, \tilde{\zeta}_n, \hat{Z}_n \text{ et } \check{Z}_n \quad (2.68)$$

comme dans les relations

(2.3), (2.4), (2.23), (2.24), (2.25), (2.26), (2.21) et (2.20) en remplaçant respectivement $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \chi_1, \chi_2, \zeta_1, \zeta_2, \partial_\sigma Z$ et $\partial_\lambda \tilde{Z}$ ainsi que $R, \dot{\phi}, \phi', \dot{A}, A', \mu, \tau, \dot{\mu}, \dot{\tau}, \mu', \tau', \rho, P_k, (k \in \{1; 2; 3\})$ dans leurs expressions respectivement par $\mathfrak{h}_n, \tilde{\mathfrak{h}}_n, \chi_n, \tilde{\chi}_n, \zeta_n, \tilde{\zeta}_n, \hat{Z}_n, \check{Z}_n, R_{n-1}, \check{\phi}_{n-1}, \phi_{n-1}, \check{A}_{n-1}, A_{n-1}, \mu_{n-1}, \tau_{n-1}, \check{\mu}_{n-1}, \check{\tau}_{n-1}, \underline{\mu}_{n-1}, \underline{\tau}_{n-1}, \rho_n, P_{k,n}, (k \in \{1; 2; 3\})$.

(2.64) – (2.65) – (2.66) – (2.67) nous permettent d'avoir

$$\partial_\lambda Z_n := \check{Z}_n = \chi_{n-1} + \check{\mu}_{n-1} \zeta_{n-1} + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \check{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_{n-1}, \quad (2.69)$$

$$\partial_\sigma \tilde{Z}_n := \hat{Z}_n = \tilde{\chi}_{n-1} + \hat{\mu}_{n-1} \zeta_{n-1} + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \hat{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_{n-1}. \quad (2.70)$$

Les équations auxiliaires (1.61) – (1.62) – (1.63) – (1.64) nous permettent d'écrire

$$\partial_\lambda (R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} \Gamma_n) = -\sqrt{2} R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (J_{2,n} - S_{12,n}), \quad (2.71)$$

$$\partial_\sigma (R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} \Gamma_n) = -\sqrt{2} R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (J_{2,n} + S_{12,n}), \quad (2.72)$$

$$\partial_\lambda (R_n^3 e^{-2\tau_n} \dot{H}_n) + \partial_\lambda A_n \times R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} \Gamma_n = -\sqrt{2} R_{n-1}^2 e^{\tau_{n-1} - 2\mu_{n-1}} (J_{3,n} - S_{13,n}), \quad (2.73)$$

$$\partial_\sigma (R_n^3 e^{-2\tau_n} \dot{H}_n) + \partial_\sigma A_n \times R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} \Gamma_n = -\sqrt{2} R_{n-1}^2 e^{\tau_{n-1} - 2\mu_{n-1}} (J_{3,n} + S_{13,n}). \quad (2.74)$$

Après avoir écrit nos itérées, nous énonçons les lemmes suivants

Lemme 2.6. *Pour tout entier naturel n non nul R_n est de classe C^1 et bornée sur $(t; \theta) \in [t_-; t_0[\times S^1$.*

Preuve : Nous utilisons les nouvelles définitions (2.68) et la relation (2.8) pour avoir

$$\hat{R}_n(t_1, \theta_1) = \hat{R}_n(t_1, \theta_0) e^{\int_{\theta_0}^{\theta_1} \hat{\tau}_n(t, \vartheta) d\vartheta} - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \mathfrak{h}_n(t, \vartheta) e^{\int_{\vartheta}^{\theta} \hat{\tau}_{n-1}(t, s) ds} d\vartheta. \quad (2.75)$$

Par la suite, au vu de (2.1.1), considérons les solutions d'équation d'Einstein Vlasov Champ scalaire en symétrie T^2 et l'existence d'un intervalle $[t_-; t_0[$ où $t_0 > 0$: Soit $(t; \theta) \in [t_-; t_0[\times S^1$. Alors

$$\sqrt{2} \check{R}_n(t, \theta) \leq \sup_{\theta \in S^1} (\hat{R}_{n-1} + \check{R}_{n-1})(t_0, \theta).$$

De manière analogue on borne \underline{R}_n exactement en remplaçant R' par \underline{R}_n dans (2.10). ■

Lemme 2.7. *Soit n un entier naturel non nul, alors ϕ_n , μ_n et A_n sont C^1 - bornés sur $[t_-; t_0[\times S^1$.*

Preuve : Nous procédons de manière similaire aux relations (2.27), (2.28) et (2.29), pour établir

$$\zeta_n \leq \frac{R_{n-1}}{2} [2e^{2(\tau_{n-1}-\mu_{n-1})}(\rho_n - P_{1;n}) + e^{-2\tau_{n-1}+4\mu_{n-1}}\Gamma_{n-1}^2], \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\zeta}_n| &\leq R_{n-1}e^{2(\tau_{n-1}-\mu_{n-1})}|S_{23,n-1}| + R_{n-1}^2 e^{2(\mu_{n-1}-\tau_{n-1})}|\Gamma_{n-1}\dot{H}_{n-1}| \\ &\leq R_{n-1}e^{2(\tau_{n-1}-\mu_{n-1})}|S_{23,n-1}| + \frac{1}{2}R_{n-1}^2 e^{-2\tau_{n-1}}(e^{4\mu_{n-1}}\Gamma_{n-1}^2 + \dot{H}_{n-1}^2), \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$e^{2(\tau_n-\mu_n)}P_{2;n} \leq \int_{\mathbb{R}^3} f_n \frac{e^{2(\tau_{n-1}-\mu_{n-1})}(v^2)^2}{v^0} dv + \frac{1}{2}\dot{\phi}_{n-1}^2 \leq e^{2(\tau_{n-1}-\mu_{n-1})}(\rho_n - P_{1;n}) + \frac{1}{2}\dot{\phi}_{n-1}^2. \quad (2.78)$$

Au vu de (2.33), (2.34) ainsi que (2.66) et (2.67), il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\int_t^{t_0} \hat{\phi}_n e^{2(\tau_n-\mu_n)} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} X_n(t, \theta), \quad (2.79)$$

$$\int_t^{t_0} \check{\phi}_n e^{2(\tau_n-\mu_n)} \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} X_n(t, \theta). \quad (2.80)$$

Par la suite, comme R_n est C^1 - borné et au vu des notations (2.68) ainsi que les relations (2.35), (2.36), (2.37), (2.38) nous avons respectivement :

$$\int_{t_1}^{t_0} (\hat{\mu}_n \zeta_n)(s, \theta + s - t) ds \leq \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X_n(t, \theta)}, \quad (2.81)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} (\check{\mu}_n \zeta_n)(s, \theta - s + t) ds \leq \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X_n(t, \theta)}, \quad (2.82)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} |\hat{A}_n \tilde{\zeta}_n|\right)(s, \theta + s - t) ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X_n(t, \theta)}, \quad (2.83)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} |\check{A}_n \tilde{\zeta}_n|\right)(s, \theta - s + t) ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X_n(t, \theta)}, \quad (2.84)$$

avec $t_- \leq t_1 \leq t_0$.

Les inégalités (2.79) et (2.80), ainsi que les notations (2.68), (2.66) et (2.67) nous permettent d'avoir

$$\int_{t_1}^{t_0} \chi_n(s, \theta + s - t) ds \leq C \int_{t_1}^{t_0} X_n(s, \theta) ds, \quad (2.85)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \tilde{\chi}_n(s, \theta - s + t) ds \leq C \int_{t_1}^{t_0} X_n(s, \theta) ds. \quad (2.86)$$

En procédant comme pour établir (2.41) les inégalités de (2.81) et (2.86) nous permettent d'avoir

$$\sup_{\theta \in S^1} X_n(t_1, \theta) \leq C \sup_{(\theta, t) \in S^1 \times [t_-, t_0]} X_n(t, \theta) + C \int_{t_1}^{t_0} \sup_{\theta \in S^1} X_n(s, \theta) ds. \quad (2.87)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall à (2.87) on obtient

$$\sup_{\theta \in S^1} X_n(t_1, \theta) \leq C \exp \left(\int_{t_1}^{t_0} X_n(s, \theta) ds \right). \quad (2.88)$$

Ceci nous permet d'en déduire par induction $\sup_{\theta \in S^1} X_n$ borné et par conséquent, d'après (2.64), $\check{\mu}_n, \underline{\mu}_n, \check{A}_n, \underline{A}_n, \check{\phi}_n, \underline{\phi}_n$ sont bornés. ■

Lemme 2.8. *Soit n un entier naturel non nul, alors τ_n est C^1 borné sur $[t_-; t_0] \times S^1$.*

Preuve : Pour le contrôle de τ_n on va s'y prendre en intégrant sur la courbe caractéristique $s \mapsto (s, t + \theta - s)$ comme fait sur (2.43) mais sur

$$\hat{\tau}_n = \check{\tau}_n = \hat{\mu}_{n-1} \check{\mu}_{n-1} + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4R_{n-1}^2} \hat{A}_{n-1} \check{A}_{n-1} - \frac{e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}}}{4} \Gamma_{n-1}^2 - \frac{3R_{n-1}^2 e^{-2\tau_{n-1}}}{4} \check{H}_{n-1}^2 - e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} P_{3,n}. \quad (2.89)$$

On intègre le long de la courbe caractéristique l'égalité (2.89) et on utilise les inégalités (2.77); (2.76); (2.79), et le fait que A_n, ϕ_n, μ_n sont C^1 bornés, pour en déduire que $\check{\tau}_n$ et $\hat{\tau}_n$ sont bornés, par la suite on a τ_n, C^1 borné. ■

Lemme 2.9. *Soit n un entier naturel non nul, alors $\rho_n, P_{k;n}$ sont bornés sur $[t_-; t_0] \times S^1$, avec $k \in \{1; 2; 3\}$.*

Preuve : La preuve s'inspire du procédé de la section 2.1.3 (du lemme 2.5). Nous posons

$$Q_n(t) := \sup\{ |v| : \exists (s, \theta) \in [t_-, t_0] \times S^1 \text{ tel que } f_n(s, \theta, v) \neq 0, t_- < t \leq t_0 \} \quad (2.90)$$

$(\Theta_n, V^1, V^2, V^3)$ solution du système caractéristique suivant

$$\begin{cases} \frac{d\Theta_n}{ds} = \frac{V^1}{V^0} \end{cases} \quad (2.91)$$

$$\begin{cases} \frac{dV^1}{ds} = -(\tau_{n-1} - \underline{\mu}_{n-1})V^0 - (\check{\tau}_{n-1} - \check{\mu}_{n-1})V^1 + \underline{\mu}_{n-1} \frac{(V^2)^2}{V^0} - \left(\underline{\mu}_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}} \right) \frac{(V^3)^2}{V^0} \\ + \frac{A_{n-1}}{R_{n-1}} e^{2\mu_{n-1}} \frac{V^2 V^3}{V^0} - e^{-\tau_{n-1}} (e^{2\tau_{n-1}} \Gamma_{n-1} V^2 + R_{n-1} \check{H}_{n-1} V^3) \end{cases} \quad (2.92)$$

$$\begin{cases} \frac{dV^2}{ds} = -\check{\mu}_{n-1} V^2 - \underline{\mu}_{n-1} \frac{V^1 V^2}{V^0} \end{cases} \quad (2.93)$$

$$\begin{cases} \frac{dV^3}{ds} = - \left(\frac{\check{R}_{n-1}}{R_{n-1}} - \check{\mu}_{n-1} \right) V^3 + \left(\underline{\mu}_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}} \right) \frac{V^1 V^3}{V^0} - \frac{e^{2\mu_{n-1}} V^2}{R_{n-1}} \left(\hat{A}_{n-1} \frac{V^1}{V^0} \right) \end{cases} \quad (2.94)$$

de l'équation aux dérivées partielles (2.61),

avec $\Theta_n(t_0, t_0, x, v) = \theta$ et $V(t_0, t_0, x, v) = v$. De plus (2.61) nous permet d'avoir $\|f_n\|_\infty \leq \|f^\circ\|_\infty$. Nous définissons également Q_n^j , $j \in \{1, 2, 3\}$ par

$$Q_n^j(t) := \sup\{|v^j| : \exists(s, \theta) \in [t_-, t_0] \times S^1 \text{ tel que } f_n(s, \theta, v^k) \neq 0, k \neq j, t_- < t \leq t_0\}. \quad (2.95)$$

Si $Q_n(t)$ est contrôlé, nous obtenons directement les estimations des quantités de torsion ρ_n , $J_{k,n}$, $P_{k;n}$ et $S_{jk;n}$, $j, k \in \{1, 2, 3\}$ $j \neq k$. Par ailleurs en intégrant l'égalité (2.93), nous avons :

$$V^2(t) \leq |V^2(t_-)| \exp\left(\int_{t_-}^t \left| \check{\mu}_{n-1} + \frac{V^1}{V^0} \underline{\mu}_{n-1} \right| ds\right). \quad (2.96)$$

Nous utilisons l'inégalité (2.94) et l'égalité (2.96) puis appliquons le lemme de Gronwall pour avoir

$$V^3(t) \leq C(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \left| \frac{\check{R}_{n-1}}{R_{n-1}} - \check{\mu}_{n-1} + \left(-\underline{\mu}_{n-1} + \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}}\right) \frac{V^1}{V^0} \right| ds\right) \quad (2.97)$$

où $C(t) = \sup_{\theta \in S^1} \left| \frac{e^{2\mu_{n-1} V^2}}{R_{n-1}} \left(\check{A}_{n-1} + \underline{A}_{n-1} \frac{V^1}{V^0} \right) (t, \theta) \right|$, $|\frac{V^1}{V^0}|$, $|\mu_{n-1}|$ et $|\underline{\mu}_{n-1}|$ sont bornés. On déduit en utilisant les équations (2.93) – (2.94) que

$$e^{\mu_{n-1} V^2}, \quad A_{n-1} e^{\mu_{n-1} V^2} + R_{n-1} e^{-\mu_{n-1} V^3}$$

sont bornés. Ceci nous permet de conclure que V^2 et V^3 sont bornés. Par conséquent Q_n^2 et Q_n^3 sont aussi bornés. Pour borner Q_n , il suffit de borner Q_n^1 . Partant des équations auxiliaires relatives aux itérées (2.72) et (2.73), nous pouvons en déduire que les quantités de torsion Γ_n et \dot{H}_n sont bornées. En effet, comme Q_n^2 et Q_n^3 sont bornés, nous remplaçons dans l'égalité (1.50) en remplaçant f par f_n la quantité de torsion ainsi que les composantes de la métrique pour estimer $|S_{12;n}|$ et $|S_{13;n}|$ à l'aide de Q_n^1 . Utilisant le fait que R_n est borné par rapport à sa donnée sur l'hypersurface initiale, et allant du fait que Γ_n et \dot{H}_n sont les invariants de l'équation caractéristique alors dV^1/ds peut être borné par $C(t)Q_n^1(t)$, où $C(t)$ est une fonction de t , τ_{n-1} , μ_{n-1} , A_{n-1} ainsi que de leurs dérivées premières qui sont tous bornés sur $[t_-, t_0]$. Nous obtenons de l'équation caractéristique relative à V^1 ,

$$\sup |V^1(t)| \leq |Q_n^1(t_0)| + C(t) \int_{t_0}^t [Q_n^1(s) + \sup_{\theta} \Gamma_n(s, \theta) + \sup_{\theta} \dot{H}_n(s, \theta)] ds, \quad (2.98)$$

$$\sup_{\theta} \Gamma_n(t, \theta) \leq \Gamma_n(t_0, \theta) + C \int_{t_0}^t [1 + Q_n^1(s)] ds, \quad (2.99)$$

$$\sup_{\theta} \dot{H}_n(t, \theta) \leq |\dot{H}_n|(t_0, \theta) + C \int_{t_0}^t [1 + Q_n^1(s) + \sup_{\theta} |\Gamma_n|(s, \theta)] ds, \quad (2.100)$$

Avec $t_- < t_1 < t < t_0$. En additionnant (2.98), (2.99) et (2.100), puis en appliquant le lemme de Gronwall, nous avons $Q_n^1(t)$ borné.

Comme la fonction de distribution sur la surface initiale f_0 est à support compact, il s'en suit que $Q_n^1(t_0)$ est borné par une constante positive. Ensuite, nous utilisons l'inégalité de Gronwall relativement à $Q_n^1(t)$ pour conclure que $Q_n^1(t)$ est borné sur $]t_-, t_0]$. De plus, $|V^k| \leq V^0$, $k = 1, 2, 3$ et V^0 dépend des V^k , nous avons ρ_n borné ainsi que toutes autres quantités matières. ■

Pour la norme L^∞ définie par $\|\cdot\|$, de tout ce qui précède, on déduit qu'il existe une constante $C(t) > 0$ dépendant des données initiales tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mu_n\|, \|R_n\|, \|A_n\|, \|\phi_n\|, \|\tau_n\|, \|\check{\mu}_n\|, \|\underline{\mu}_n\|, \|p_{1,n}\|, \|p_{2,n}\|, \|p_{3,n}\|, \|\rho_n\| \\ \|\check{A}_n\|, \|\check{R}_n\|, \|\check{A}_n\|, \|\check{\phi}_n\|, \|\check{\tau}_n\|, \|\check{\phi}_n\|, \|\check{\tau}_n\|, \|S_{21,n}\|, \|S_{23,n}\|, \|S_{31,n}\| \end{array} \right\} \leq C(t) \quad (2.101)$$

2.2.2 Théorème d'existence locale

Proposition 2.1. *Soit un sous-ensemble compact $[t_2; t_0] \subset [t_1; t_0]$ dans lequel les itérées précédentes (2.101) sont bornées, alors elles sont uniformément convergentes pour la norme L^∞ .*

Preuve : Soit $t \in [t_2; t_0]$. Utilisant (2.64) – (2.65), on a

$$\begin{aligned} X_{n+1} - X_n &= \frac{1}{2} (R_{n+1} - R_n) (\check{\mu}_{n+1}^2 + \underline{\mu}_{n+1}^2 + \check{\phi}_{n+1}^2 + \underline{\phi}_{n+1}^2) \\ &+ \frac{1}{2} R_n \left[(\check{\mu}_{n+1} - \check{\mu}_n)(\check{\mu}_{n+1} + \check{\mu}_n) + (\check{\phi}_{n+1} - \check{\phi}_n)(\check{\phi}_{n+1} + \check{\phi}_n) \right] \\ &+ \frac{1}{2} R_n \left[(\underline{\mu}_{n+1} - \underline{\mu}_n)(\underline{\mu}_{n+1} + \underline{\mu}_n) + (\underline{\phi}_{n+1} - \underline{\phi}_n)(\underline{\phi}_{n+1} + \underline{\phi}_n) \right] \\ &+ \frac{e^{4\mu_{n+1}}}{8R_{n+1}} [(\check{A}_{n+1} - \check{A}_n)(\check{A}_{n+1} + \check{A}_n) + (\underline{A}_{n+1} - \underline{A}_n)(\underline{A}_{n+1} + \underline{A}_n)] \\ &+ \left(\frac{e^{4\mu_{n+1}}}{8R_{n+1}} - \frac{e^{4\mu_n}}{8R_n} \right) (\check{A}_n^2 + \underline{A}_n^2) + \frac{1}{2} (\phi_{n+1} - \phi_n)(\phi_{n+1} + \phi_n). \end{aligned} \quad (2.102)$$

En utilisant (2.66) – (2.67) l'égalité (2.102) s'écrit encore

$$\begin{aligned} X_{n+1} - X_n &= (R_{n+1} - R_n) (\hat{\mu}_{n+1}^2 + \check{\mu}_{n+1}^2 + \hat{\phi}_{n+1}^2 + \check{\phi}_{n+1}^2) \\ &+ R_n \left[(\hat{\mu}_{n+1} - \hat{\mu}_n)(\hat{\mu}_{n+1} + \hat{\mu}_n) + (\hat{\phi}_{n+1} - \hat{\phi}_n)(\hat{\phi}_{n+1} + \hat{\phi}_n) \right] \\ &+ \frac{1}{2} R_n \left[(\check{\mu}_{n+1} - \check{\mu}_n)(\check{\mu}_{n+1} + \check{\mu}_n) + (\check{\phi}_{n+1} - \check{\phi}_n)(\check{\phi}_{n+1} + \check{\phi}_n) \right] \\ &+ \frac{e^{4\mu_{n+1}}}{4R_{n+1}} [(\hat{A}_{n+1} - \hat{A}_n)(\hat{A}_{n+1} + \hat{A}_n) + (\check{A}_{n+1} - \check{A}_n)(\check{A}_{n+1} + \check{A}_n)] \\ &+ \left(\frac{e^{4\mu_{n+1}}}{8R_{n+1}} - \frac{e^{4\mu_n}}{4R_n} \right) (\hat{A}_n^2 + \check{A}_n^2) + \frac{1}{2} (\phi_{n+1} - \phi_n)(\phi_{n+1} + \phi_n). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Posons

$$W_{n+1}(t) = (X_{n+1} - X_n)(t) + (Y_{n+1} - Y_n)(t) \text{ et } \tilde{W}_{n+1}(t) = (X_{n+1} - X_n)(t) - (Y_{n+1} - Y_n)(t).$$

On exprime

$$\partial_\lambda(W_{n+1} + \tilde{W}_{n+1}) \text{ et } \partial_\sigma(W_{n+1} - \tilde{W}_{n+1}). \quad (2.104)$$

En utilisant (2.103), on a

$$\begin{aligned} \partial_\lambda W_{n+1} &= \partial_\lambda[(X_{n+1} - X_n) + (Y_{n+1} - Y_n)] = \chi_n - \chi_{n-1} - (\check{\mu}_n - \check{\mu}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1}) \\ &+ \left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \right) (\check{A}_n - \check{A}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1}) + F_n, \end{aligned} \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \tilde{W}_{n+1} &= \partial_\sigma[(X_{n+1} - X_n) - (Y_{n+1} - Y_n)] = \tilde{\chi}_n - \tilde{\chi}_{n-1} - (\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1})(\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1}) \\ &+ \left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \right) (\hat{A}_n - \hat{A}_{n-1})(\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1}) + \tilde{F}_n. \end{aligned} \quad (2.106)$$

où

$$\begin{aligned} F_n &= -\hat{\mu}_n \zeta_{n-1} - \hat{\mu}_{n-1} \zeta_n - 2\hat{\mu}_{n-1} \zeta_{n-1} + \frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} \hat{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_n \\ &+ \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \hat{A}_n \tilde{\zeta}_n + \frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} \hat{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_{n-1} \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \hat{A}_n \tilde{\zeta}_n + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \hat{A}_n \tilde{\zeta}_{n-1}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n &= -\check{\mu}_n \zeta_{n-1} - \check{\mu}_{n-1} \zeta_n - 2\check{\mu}_{n-1} \zeta_{n-1} + \frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} \check{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_n \\ &+ \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \check{A}_n \tilde{\zeta}_n + \frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} \check{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_{n-1} \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \check{A}_n \tilde{\zeta}_n + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \check{A}_n \tilde{\zeta}_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

En intégrant les égalités (2.105) – (2.106) entre t_2 et t_0 sur les courbes caractéristiques $t \mapsto (t; \gamma^\pm(t))$ où $\gamma^\pm(t) = \theta \pm (t_0 - t)$ pour tout $(t; \theta) \in [t_2; t_0] \times S^1$, puis en additionnant on obtient

$$\begin{aligned} (W_{n+1} + \tilde{W}_{n+1})(t_2, \theta) &= \frac{1}{2} [W_{n+1}(t_0, \gamma^-(t_1)) + \tilde{W}_{n+1}(t_0, \gamma^+(t_2))] \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_0} [(\chi_n - \chi_{n-1})(s, \gamma^-(s)) + (\tilde{\chi}_n - \tilde{\chi}_{n-1})(s, \gamma^+(s))] ds \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_0} [(\hat{\mu}_n \zeta_n - \hat{\mu}_{n-1} \zeta_{n-1})(t_0, \gamma^-(s)) + (\check{\mu}_n \zeta_n - \check{\mu}_{n-1} \zeta_{n-1})(t_0, \gamma^+(s))] ds \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_0} \left[\left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} \hat{A}_n \tilde{\zeta}_n - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \hat{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_{n-1} \right) (t_0, \gamma^-(s)) \right] ds \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_0} \left[\left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} \check{A}_n \tilde{\zeta}_n - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \check{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_{n-1} \right) (t_0, \gamma^+(s)) \right] ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_0} [F_n(t_0, \gamma^+(s)) + F_n(t_0, \gamma^-(s))] ds, \end{aligned} \quad (2.109)$$

ce qui donne par la suite

$$\begin{aligned}
(X_{n+1} - X_n)(t_1, \theta) &= \frac{1}{4} [W_{n+1}(t_0, \gamma^-(t_1)) + \tilde{W}_{n+1}(t_0, \gamma^+(t_1))] \\
&- \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} [(\chi_n - \chi_{n-1}(s, \gamma^-(s))) + (\tilde{\chi}_n - \tilde{\chi}_{n-1})(s, \gamma^+(s))] ds \\
&- \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} [(\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1})(t_0, \gamma^-(s))] ds \\
&- \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} [(\check{\mu}_n - \check{\mu}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1})(t_0, \gamma^+(s))] ds \\
&- \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} \left[\left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \right) (\hat{A}_n - \hat{A}_{n-1})(\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1})(t_0, \gamma^-(s)) \right] ds \\
&- \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} \left[\left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \right) (\check{A}_n - \check{A}_{n-1})(\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1})(t_0, \gamma^+(s)) \right] ds \\
&+ \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} [F_n(t_0, \gamma^+(s)) + F_n(t_0, \gamma^-(s))] ds. \tag{2.110}
\end{aligned}$$

Partant de (2.60) et (2.61), on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{ds} ((\Theta, V)_{n+1} - (\Theta, V)_n) \right| (s, t, \theta, v) &= |\Xi_n - \Xi_{n-1}| (s, t, \theta, v) \\
&\lesssim |X_n - X_{n-1}| (s, t, \theta) + (|F_n| + |\tilde{F}_n|)(s, \theta), \\
|(\Theta, V)_{n+1} - (\Theta, V)_n| (t_0, t, \theta, v) &\leq |(\Theta, V)_{n+1} - (\Theta, V)_n| (t_0, t, \theta, v) \\
&+ C \int_t^{t_0} (|\Xi_n - \Xi_{n-1}| + |F_n| + |\tilde{F}_n|)(s) ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(f_{n+1} - f_n)(t)| &\leq |\partial_{(\theta, v)} f_0| |(\Theta, V)_{n+1} - (\Theta, V)_n| (t_0, t, \theta, v) \\
&\leq |\partial_{(\theta, v)} f_0| \int_t^{t_0} |\Xi_n - \Xi_{n-1}| (s) ds + C \int_t^{t_0} (|F_n| + |\tilde{F}_n|)(s) ds \\
&\lesssim \int_t^{t_0} (|X_n - X_{n-1}| + |F_n| + |\tilde{F}_n|) ds. \tag{2.111}
\end{aligned}$$

La relation (2.111) nous permet d'avoir

$$\|\rho_{n+1} - \rho_n\| \leq C |W_n| + \int_t^{t_0} |X_n - X_{n-1}| ds. \tag{2.112}$$

De plus $|P_{k;n}|, |S_{k;n}|, |j_{k;n}| \leq |\rho_n|$, de manière analogue à (2.112), on a

$$\|P_{k;n+1} - P_{k;n}\|; \|j_{k;n+1} - j_{k;n}\|; \|S_{k;n+1} - S_{k;n}\| \leq C \left[|W_n| + \int_t^{t_0} |X_n - X_{n-1}| ds \right]. \tag{2.113}$$

Par la suite, nous utilisons le même procédé comme celui utilisé pour établir (2.35) – (2.36) – (2.37) – (2.38), en utilisant (2.32) *ainsi que* (2.103) pour avoir

$$\left| \int_{t_1}^{t_0} (\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1})(s, \gamma^+(s)) ds \right| \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{|X_n - X_{n-1}|(t, \theta)}, \quad (2.114)$$

$$\left| \int_{t_1}^{t_0} (\check{\mu}_n - \check{\mu}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1})(s, \gamma^-(s)) ds \right| \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{|X_n - X_{n-1}|(t, \theta)}, \quad (2.115)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \left[\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_n} \right] |\hat{A}_n - \hat{A}_{n-1}| |\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1}|(s, \gamma^+(s)) ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} |X_n - X_{n-1}|(t, \theta), \quad (2.116)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \left[\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \right] |\check{A}_n - \check{A}_{n-1}| |\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1}|(s, \gamma^-(s)) ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} |X_n - X_{n-1}|(t, \theta), \quad (2.117)$$

avec $t_- \leq t_1 \leq t_0$, et C dépendant de $t_0 - t_1$.

Utilisant (2.71) – (2.72), nous avons

$$\begin{aligned} \partial_\lambda [R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} (\Gamma_n - \Gamma_{n-1}) + \Gamma_{n-1} (R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} - R_{n-1} e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}})] = \\ -2R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (J_{2,n} - J_{2,n-1} + S_{12,n-1} - S_{12,n}) - (J_{2,n-1} - S_{12,n-1}) (R_n e^{\tau_n} - R_{n-1} e^{\tau_{n-1}}), \end{aligned} \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} \partial_\sigma [R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} (\Gamma_n - \Gamma_{n-1}) + \Gamma_{n-1} (R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} - R_{n-1} e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}})] = \\ -2R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (J_{2,n} - J_{2,n-1} + S_{12,n} - S_{12,n-1}) - (J_{2,n-1} + S_{12,n-1}) (R_n e^{\tau_n} - R_{n-1} e^{\tau_{n-1}}). \end{aligned} \quad (2.119)$$

En additionnant (2.118) et (2.119) on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t [R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} (\Gamma_n - \Gamma_{n-1}) + \Gamma_{n-1} (R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} - R_{n-1} e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}})] = \\ -2R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (J_{2,n} - J_{2,n-1} + S_{12,n} - S_{12,n-1}) - J_{2,n-1} (R_n e^{\tau_n} - R_{n-1} e^{\tau_{n-1}}). \end{aligned} \quad (2.120)$$

En intégrant suivant t , on obtient

$$\begin{aligned} |R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} (\Gamma_n - \Gamma_{n-1}) + \Gamma_{n-1} (R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} - R_{n-1} e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}})|(t, \theta) \leq \\ \int_t^{t_0} [2R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (|J_{2,n} - J_{2,n-1}| + |S_{12,n} - S_{12,n-1}|) + J_{2,n-1} |R_n e^{\tau_n} - R_{n-1} e^{\tau_{n-1}}|] (s, \theta) ds. \end{aligned} \quad (2.121)$$

(2.113) et (2.121) permettent de déduire que

$$|\Gamma_n - \Gamma_{n-1}| \lesssim \int_{t_1}^{t_0} |X_n - X_{n-1}|(s) ds. \quad (2.122)$$

Par ailleurs, les inégalités (2.85) et (2.86), les estimations (2.32), (2.112), (2.113), (2.122) ainsi que les notations (2.68), (2.66), et (2.67) nous permettent d'avoir

$$\left| \int_{t_1}^{t_0} [\chi_n - \chi_{n-1}](s, \theta + s - t) ds \right| \leq C \int_{t_1}^{t_0} |X_n - X_{n-1}|(s, \theta) ds, \quad (2.123)$$

$$\left| \int_{t_1}^{t_0} [\tilde{\chi}_n - \tilde{\chi}_{n-1}](s, \theta + s - t) ds \right| \leq C \int_{t_1}^{t_0} |X_n - X_{n-1}|(s, \theta) ds. \quad (2.124)$$

En utilisant les inégalités (2.114) – (2.115) – (2.116) – (2.117), (2.123) – (2.124), nous avons en combinant avec (2.110),

$$\sup_{\theta \in S^1} |X_{n+1} - X_n|(t_1, \theta) \leq C \sup_{(\theta, t) \in S^1 \times [t_-, t_0]} |X_{n+1} - X_n|(t, \theta) + C \int_{t_1}^{t_0} \sup_{\theta \in S^1} |X_n - X_{n-1}|(s, \theta) ds, \quad (2.125)$$

et par induction, on a

$$\left| \sup_{\theta \in S^1} X_{n+1}(t_1, \theta) - \sup_{\theta \in S^1} X_n(t_1, \theta) \right| \leq \left| C^{n+2} \frac{(t_0 - t)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \text{ pour } n \in \mathbb{N}, t \in [t_1; t_0]. \quad (2.126)$$

Or la série $\left\{ \frac{(t_0 - t)^{n+1}}{(n+1)!} \right\}_n$ converge, donc la suite $\left(\frac{(t_0 - t)^{n+1}}{(n+1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro, par conséquent la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans le Banach L^∞ .

D'autre part, utilisant (2.25) – (2.26), on a

$$\begin{aligned} \zeta_{n+1} - \zeta_n &= e^{2(\tau_{n+1} - \mu_{n+1})} [\rho_{n+1} - \rho_n - (P_{1,n+1} - P_{1,n}) + P_{2,n+1} - P_{2,n} - (P_{3,n+1} - P_{3,n})] \\ &\quad + [(e^{\tau_{n+1}} - e^{\tau_n})(e^{\tau_{n+1}} + e^{\tau_n})e^{-2\mu_{n+1}} + e^{2\tau_n}(e^{-2\mu_{n+1}} - e^{-2\mu_n})] [\rho_n - P_{1,n} + P_{2,n} - P_{3,n}] \\ &\quad + \frac{R_{n+1}}{2} e^{-2\tau_{n+1} + 4\mu_{n+1}} \Gamma_{n+1}^2 - \frac{R_n}{2} e^{-2\tau_n + 4\mu_n} \Gamma_n^2, \end{aligned} \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{n+1} - \tilde{\zeta}_n &= R_{n+1}^2 e^{-2(\tau_{n+1} + \mu_{n+1})} \{ \Gamma_{n+1} (\check{H}_{n+1} - \check{H}_n) + \check{H}_n (\Gamma_{n+1} - \Gamma_n) \} \\ &\quad + 2R_{n+1}^2 e^{-2(\tau_{n+1} + \mu_{n+1})} (S_{23,n+1} - S_{23,n}) + 2S_{23,n} (R_{n+1}^2 e^{-2(\tau_{n+1} + \mu_{n+1})} - R_n^2 e^{-2(\tau_n + \mu_n)}) \\ &\quad + \check{H}_n \Gamma_n (R_{n+1}^2 e^{-2(\tau_{n+1} + \mu_{n+1})} - R_n^2 e^{-2(\tau_n + \mu_n)}). \end{aligned} \quad (2.128)$$

Or

$$\Gamma_{n+1} - \Gamma_n = (\check{G}_{n+1} - \check{G}_n) + (A_{n+1} \check{H}_{n+1} - A_n \check{H}_n). \quad (2.129)$$

Par la suite, (2.122) et (2.129) permettent d'avoir

$$\| \underline{G}_{n+1} - \underline{G}_n \|, \| \underline{H}_{n+1} - \underline{H}_n \| \leq C \| X_{n+1} - X_n \| \quad (2.130)$$

(2.102) permet d'avoir

$$\| R_{n+1} - R_n \|, \| \check{\mu}_{n+1} - \check{\mu}_n \|, \| \check{A}_{n+1} - \check{A}_n \|, \| \phi_{n+1} - \phi_n \| \leq C \| X_{n+1} - X_n \| \quad (2.131)$$

(2.112), (2.113), (2.126), (2.127), (2.128), (2.129), nous permettent d'avoir

$$\|S_{23,n+1}-S_{23,n}\|, \|\rho_{n+1}-\rho_n\|, \|P_{1,n+1}-P_{1,n}\|, \|P_{2,n+1}-P_{2,n}\|, \|P_{3,n+1}-P_{3,n}\| \leq C\|X_{n+1}-X_n\|. \quad (2.132)$$

En outre, en utilisant (2.89) on obtient

$$\begin{aligned} |\hat{\tau}_{n+1} - \hat{\tau}_n| &= |\hat{\mu}_n \check{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1} \check{\mu}_{n-1} + \frac{e^{4\mu_n}}{4R_n^2} \hat{A}_n \check{A}_n - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4R_{n-1}^2} \hat{A}_{n-1} \check{A}_{n-1} \\ &+ \frac{e^{-2\tau_{n-1}+4\mu_{n-1}}}{4} \Gamma_{n-1}^2 - \frac{e^{-2\tau_n+4\mu_n}}{4} \Gamma_n^2 + \frac{3R_{n-1}^2 e^{-2\tau_{n-1}}}{4} \dot{H}_{n-1}^2 - \frac{3R_n^2 e^{-2\tau_n}}{4} \dot{H}_n^2 \\ &+ e^{2(\tau_{n-1}-\mu_{n-1})} P_{3,n} - e^{2(\tau_n-\mu_n)} P_{3,n+1} = \partial_\lambda \partial_\sigma (\tau_{n+1} - \tau_n) \\ &\lesssim |X_{n+1} - X_n| + |P_{3,n+1} - P_{3,n}| \text{ d'après (2.103), (2.113)}. \end{aligned} \quad (2.133)$$

En intégrant sur les courbes caractéristiques γ_n^\pm à deux reprises, on a d'après (2.131) et (2.132)

$$\|\tau_{n+1} - \tau_n\| \leq C\|X_{n+1} - X_n\|. \quad (2.134)$$

De plus, pour $\theta \in S^1$, $t \in [t_2; t_0)$, on a

$$\nu_{n+1}(t, \theta) - \nu_n(t, \theta) = \int_t^{t_0} (\underline{\nu}_n(s, \theta) - \underline{\nu}_{n+1}(s, \theta)) ds, \quad (2.135)$$

ν étant μ ou A , en utilisant l'équation (2.102), on a

$$|\nu_{n+1}(t, \theta) - \nu_n(t, \theta)| = \left| \int_t^{t_0} (\underline{\nu}_{n+1}(s, \theta) - \underline{\nu}_n(s, \theta)) ds \right| \lesssim \int_t^{t_0} |X_{n+1}(s, \theta) - X_n(s, \theta)| ds. \quad (2.136)$$

D'où

$$|A_{n+1}(t, \theta) - A_n(t, \theta)|, |\mu_{n+1}(t, \theta) - \mu_n(t, \theta)| \lesssim \int_t^{t_0} |X_{n+1}(s, \theta) - X_n(s, \theta)| ds.$$

Par ailleurs d'après (2.130), on a

$$|G_{n+1}(t, \theta) - G_n(t, \theta)| = \left| \int_t^{t_0} (G_{n+1}(s, \theta) - G_n(s, \theta)) ds \right| \lesssim \left| \int_t^{t_0} (X_{n+1}(s, \theta) - X_n(s, \theta)) ds \right|, \quad (2.137)$$

$$|H_{n+1}(t, \theta) - H_n(t, \theta)| = \left| \int_t^{t_0} (H_{n+1}(s, \theta) - H_n(s, \theta)) ds \right| \lesssim \left| \int_t^{t_0} (X_{n+1}(s, \theta) - X_n(s, \theta)) ds \right|. \quad (2.138)$$

Partant de (2.126), (2.131), (2.132), (2.134), (2.136), (2.137), (2.138), on en déduit les convergences uniformes pour la norme L^∞ suivantes

$$\mu_n \rightarrow \mu, R_n \rightarrow R, A_n \rightarrow A, \phi_n \rightarrow \phi, \tau_n \rightarrow \tau, H_n \rightarrow H, G_n \rightarrow G, f_n \rightarrow f. \quad (2.139)$$

Ce qui achève la preuve. ■

Remarque 2.3. *Considérons donc $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'itérées avec χ_n pouvant être*

$$\alpha_n, A_n, \tau_n, \mu_n, \phi_n, f_n, H_n, G_n.$$

La suite $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ étant bornée, du fait d'être à support compact, on peut donc extraire une sous suite $(\chi_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge (simplement) vers χ . La suite $(\chi'_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée d'après (2.101), on peut donc extraire une sous suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\chi'_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que (w_n) converge uniformément vers $\underline{\chi}$*

$$\chi_{\psi(n)} \rightarrow \chi \text{ et } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\chi'_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \underline{\chi} \quad (2.140)$$

et on a $\chi' = \underline{\chi}$, car $\chi'_n(t_0) \rightarrow \underline{\chi}(t_0)$, quand $n \rightarrow +\infty$. De même $\ddot{\chi}_n = \dot{\chi}_n$, pour tout entier naturel $n > 0$. On en déduit d'après le théorème de la limite uniforme de fonctions dérivables que

$$\mu'_n \rightarrow \mu', R'_n \rightarrow R', A'_n \rightarrow A', \phi'_n \rightarrow \phi', \tau'_n \rightarrow \tau', H'_n \rightarrow H', G'_n \rightarrow G'. \quad (2.141)$$

$$\dot{\mu}_n \rightarrow \dot{\mu}, \dot{R}_n \rightarrow \dot{R}, \dot{A}_n \rightarrow \dot{A}, \dot{\phi}_n \rightarrow \dot{\phi}, \dot{\tau}_n \rightarrow \dot{\tau}, \dot{H}_n \rightarrow \dot{H}, \dot{G}_n \rightarrow \dot{G}. \quad (2.142)$$

On déduit que $A, R, \tau, \mu, H, G, \phi, f$ sont les solutions du système (1.53) – (1.54) – (1.55), (1.56) – (1.60).

Remarque 2.4. *L'unicité de la limite découle de la séparabilité de l'espace L^∞ .*

En effet, soit

$$\chi_k = (f_k; R_k; \mu_k; A_k; \tau_k; G_k; H_k; \phi_k)_{k=1;2}$$

deux solutions régulières pour le problème de Cauchy du système (1.53) – (1.54) – (1.55), (1.56) – (1.60) ayant les mêmes données initiales

$$(f^\circ, \mu^\circ, R^\circ, A^\circ, \tau^\circ, H^\circ, G^\circ, \phi^\circ) \text{ à } t = t_0.$$

En utilisant l'identité du parallélogramme, on a

$$\begin{aligned} \|\chi_2 - \chi_1\|^2 &= \|(\chi_n - \chi_2) - (\chi_n - \chi_1)\|^2 \\ &= 2(\|\chi_n - \chi_2\|^2 + \|\chi_n - \chi_1\|^2) - 2 \left\| \chi_n - \frac{\chi_2 + \chi_1}{2} \right\|^2 \\ &\leq 2(\|\chi_n - \chi_2\|^2 + \|\chi_n - \chi_1\|^2) - 2 \inf_{\chi \in \{\chi_1; \chi_2\}} \|\chi_n - \chi\|^2. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Par hypothèse de séparabilité, si on suppose que $\chi_1 \neq \chi_2$, alors il existe un voisinage \mathcal{V}_1 de χ_1 et un voisinage \mathcal{V}_2 de χ_2 tel que $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$ or par définition de limites il existe donc n_1 et n_2 deux entiers naturels tels que

$$(\forall n \geq n_1, \chi_n \in \mathcal{V}_1) \text{ et } (\forall n \geq n_2, \chi_n \in \mathcal{V}_2) \text{ au vu de. (2.143)}$$

Mais alors $\chi_{\max\{n_1; n_2\}+1} \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$. Ce qui est absurde, donc $\chi_1 = \chi_2$.

De (2.143) on a

$$\begin{cases} f_2(s) = f_1(s); R_2(s) = R_1(s); \mu_2(s) = \mu_1(s); A_2(s) = A_1(s) \\ \tau_2(s) = \tau_1(s); G_2(s) = G_1(s); H_2(s) = H_1(s); \phi_2(s) = \phi_1(s), t_- \leq s \leq t_0. \end{cases}$$

De tout ce qui précède à partir de la proposition (2.1), on a le théorème.

Théorème 2.1. (*Existence et unicité locale*)

Soit $f^0 \in C^1(S^1 \times \mathbb{R}^3)$ avec

$$f^0 \geq 0. f^0(\theta + 2\pi, v) = f^0(\theta, v), (\theta, v) \in S^1 \times \mathbb{R}^3$$

et

$$W_0 := \sup\{|v|, (\theta, v) \in \text{supp} f^0\} < \infty.$$

Soient les fonctions régulières $\bar{R}, \bar{\tau}, \bar{\mu}, \bar{A}, \bar{H}, \bar{G}, \bar{\phi}$ et

$$f^\circ, \mu^\circ, R^\circ, A^\circ, \tau^\circ, H^\circ, G^\circ, \phi^\circ \in C^2(S^1).$$

Alors, il existe une unique solution régulière

$$(f, \mu, R, A, \tau, H, G, \phi)$$

du système d'équations d'Einstein-Vlasov avec champ scalaire non linéaire dans direction passée en symétrie T^2 (1.53) – (1.54) – (1.55), (1.56) – (1.60) avec

$$(f, \mu, R, A, \tau, H, G, \phi)(t_0) = (f^\circ, \mu^\circ, R^\circ, A^\circ, \tau^\circ, H^\circ, G^\circ, \phi^\circ).$$

sur un intervalle de temps $]T; t_0]$ avec $T = \max\{t_1, t_2\}$.

EXISTENCE LOCALE DANS LA DIRECTION FUTURE

Dans ce chapitre, nous nous préoccupons d'établir l'existence locale dans la direction future. Nous allons préalablement établir les estimations a priori.

3.1 Estimations a priori

Nous allons dans un premier temps, évaluer la monotonie de l'énergie qui va jouer un rôle important pour l'estimation des composantes de la métrique, du champ scalaire, la fonction de distribution et les quantités de torsion.

3.1.1 Décroissance de l'énergie

Nous avons l'énergie partant de l'équation de contrainte (1.93) définie par la relation

$$\begin{aligned} E_{g;K;f;\phi} &= \int_{S^1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left\{ \mu_t^2 + \alpha \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4t^2} (A_t^2 + \alpha A_\theta^2) + \frac{\alpha e^{2\tau-4\mu}}{4t^2} J^2 + \frac{\alpha e^{2\tau} (K - AJ)^2}{4t^4} \right\} d\theta \\ &+ 8\pi \int_{S^1} \left(\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f |v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \\ &+ \int_{S^1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} (\phi_t)^2 + \sqrt{\alpha} (\phi_\theta)^2 \right) + \sqrt{\alpha} e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \right) d\theta. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Cette expression peut se décomposer en plusieurs parties comportant les g , K , f , et ϕ , ainsi

$$E_g = \int_{S^1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left\{ \mu_t^2 + \alpha \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4t^2} (A_t^2 + \alpha A_\theta^2) \right\} d\theta, \quad (3.2)$$

$$E_k = \int_{S^1} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left\{ \frac{\alpha e^{2\tau-4\mu}}{4t^2} J^2 + \frac{\alpha e^{2\tau}(K-AJ)^2}{4t^4} \right\} d\theta, \quad (3.3)$$

$$E_f = 8\pi \int_{S^1} \left(\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f |v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta, \quad (3.4)$$

$$E_\phi = \int_{S^1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} (\phi_t)^2 + \sqrt{\alpha} (\phi_\theta)^2 \right) + \sqrt{\alpha} e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \right) d\theta. \quad (3.5)$$

Lemme 3.1. *Pour tout $t \geq t_0$, on a*

$$\frac{dE_{g;K;f;\phi}}{dt} \leq 0. \quad (3.6)$$

Preuve : En utilisant l'équation (1.93), on a

$$\begin{aligned} \frac{dE_{g;K;f;\phi}}{dt} &= - \int_{S^1} \frac{\tau_t}{t^2 \sqrt{\alpha}} d\theta - \frac{1}{2} \int_{S^1} \frac{\alpha_t \tau_t}{t \alpha \sqrt{\alpha}} d\theta - \int_{S^1} \frac{\tau_{tt}}{t \sqrt{\alpha}} d\theta \\ &= -\frac{1}{t} E_{g;K;f;\phi} - \frac{1}{2} \int_{S^1} \frac{\alpha_t \tau_t}{t \alpha \sqrt{\alpha}} d\theta - \int_{S^1} \frac{\tau_{tt}}{t \sqrt{\alpha}} d\theta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Or, nous avons d'après (1.96)

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \frac{\tau_{tt}}{t \sqrt{\alpha}} d\theta &= \int_{S^1} \left(\frac{\sqrt{\alpha} \tau_{\theta\theta}}{t} + \frac{\alpha_\theta \tau_\theta}{2t \sqrt{\alpha}} + \frac{\tau_t \alpha_t}{2\alpha t \sqrt{\alpha}} - \frac{\alpha_\theta^2}{4\alpha \sqrt{\alpha}} - \frac{\mu_t^2}{t \sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha} \mu_\theta^2}{t} \right) d\theta \\ &+ \int_{S^1} \left(\frac{\alpha_{\theta\theta}}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{e^{4\mu}}{4\sqrt{\alpha} t^3} (A_t^2 - \alpha A_\theta^2) - \frac{\sqrt{\alpha} e^{2\tau-4\mu}}{4t^3} J^2 \right) d\theta \\ &+ \int_{S^1} \left(-3 \frac{\sqrt{\alpha} e^{2\tau}}{4t^5} (K-AJ)^2 - 8\pi \frac{\alpha^{\frac{3}{2}} e^{2\tau}}{t^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(v_3 - Av_2)^2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \\ &- \int_{S^1} \left(\frac{1}{2t \sqrt{\alpha}} (\phi_t^2 - \alpha \phi_\theta^2) + \frac{\sqrt{\alpha}}{2t} e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \right) d\theta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Par ailleurs, pour des raisons de périodicité, nous avons :

$$\int_{S^1} \frac{\alpha \tau_{\theta\theta}}{t \sqrt{\alpha}} d\theta = -\frac{1}{2t} \int_{S^1} \frac{\alpha_\theta \tau_\theta}{\sqrt{\alpha}} d\theta \text{ et } \int_{S^1} \frac{\alpha_{\theta\theta}}{2\sqrt{\alpha}} d\theta = \frac{1}{2} \int_{S^1} \frac{\alpha_\theta^2}{2\alpha \sqrt{\alpha}} d\theta. \quad (3.9)$$

En remplaçant (3.9) dans (3.8), nous avons par la suite

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{g;K;f;\phi}}{dt} &= -\frac{1}{t} \int_{S^1} \left[\frac{\mu_t^2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{e^{4\mu}}{4t^2} \left(\frac{A_t^2}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha} A_\theta^2 \right) + \frac{\sqrt{\alpha} e^{2\tau-4\mu}}{4t^2} J^2 \right] d\theta \\
&- \frac{1}{t} \int_{S^1} \left[\frac{\alpha e^{2\tau}}{4t^3} (K - AJ)^2 + 8\pi \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f|v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right] d\theta \\
&- \frac{1}{t} \int_{S^1} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} (\phi_t^2 + \alpha \phi_\theta^2) + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \right) d\theta \\
&- \int_{S^1} \left[\frac{\mu_t^2}{t\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha} e^{2\tau-4\mu}}{4t^3} J^2 + \frac{3\alpha e^{2\tau}}{4t^5} (K - AJ)^2 \right] d\theta \\
&- \int_{S^1} \left(8\pi \frac{\alpha^{\frac{3}{2}} e^{2\tau}}{t^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(v_3 - Av_2)^2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \\
&- \int_{S^1} \left(\frac{1}{2t\sqrt{\alpha}} (\phi_t^2 - \alpha \phi_\theta^2) + \frac{\sqrt{\alpha}}{2t} e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \right) d\theta \\
&= - \int_{S^1} \left[\frac{2}{t} \left(\frac{\mu_t^2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{e^{4\mu}}{4t^2} \sqrt{\alpha} A_\theta^2 \right) \right. \\
&+ \frac{\sqrt{\alpha}}{2t^3} e^{2\tau-4\mu} J^2 + \frac{\sqrt{\alpha} e^{2\tau} (K - AJ)^2}{t^5} \\
&- \frac{1}{t} \int_{S^1} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} (\phi_t^2 + \alpha \phi_\theta^2) + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \right) d\theta \\
&+ 8\pi \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{f|v_0|}{t^2} + \frac{\alpha e^{2\tau} f(v_3 - Av_2)^2}{t^4 |v_0|} \right) dv_1 dv_2 dv_3 \Big] d\theta. \\
&- \int_{S^1} \left(\frac{1}{2t\sqrt{\alpha}} (\phi_t^2 - \alpha \phi_\theta^2) + \frac{\sqrt{\alpha}}{2t} e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \right) d\theta \\
&- \int_{S^1} \left(8\pi \frac{\alpha^{\frac{3}{2}} e^{2\tau}}{t^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(v_3 - Av_2)^2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \\
&- \int_{S^1} \left(\frac{1}{2t\sqrt{\alpha}} (\phi_t^2 - \alpha \phi_\theta^2) + \frac{\sqrt{\alpha}}{2t} e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \right) d\theta;
\end{aligned}$$

ce qui nous permet après calcul d'avoir ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{g;K;f;\phi}}{dt} &= \int_{S^1} \left[\frac{\alpha_\theta \tau_\theta}{2t\sqrt{\alpha}} - \frac{\mu_t^2}{t\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}\mu_\theta^2}{t} + \frac{e^{4\mu}}{4t^3\sqrt{\alpha}} (A_t^2 - \alpha A_\theta^2) - \frac{\sqrt{\alpha}e^{2\tau-4\mu}}{4t^3} J^2 \right] d\theta \\
&- \frac{1}{t} \int_{S^1} \left[\frac{\alpha_\theta \tau_\theta}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}e^{2\tau}}{4t^2} (K - AJ)^2 + 8\pi \frac{\alpha}{t^3} \int_{\mathbb{R}^3} f|v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right] d\theta \\
&- \frac{1}{t} \int_{S^1} \left[\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} (\phi_t^2 - \alpha \phi_\theta^2) - \frac{\sqrt{\alpha}}{2} e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) - \frac{\alpha_t \tau_t}{2t\alpha\sqrt{\alpha}} \right] d\theta \\
&- \int_{S^1} \left[\frac{\mu_t^2}{t\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}e^{2\tau-4\mu}}{4t^3} J^2 + \frac{\sqrt{\alpha}\mu_\theta^2}{t} + \frac{3\alpha e^{2\tau}}{4t^5} (K - AJ)^2 \right] d\theta - \\
&\frac{1}{t} \int_{S^1} \left(8\pi \frac{\alpha^{\frac{3}{2}} e^{2\tau}}{t^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(v_3 - Av_2)^2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} (\phi_t^2 + \alpha \phi_\theta^2) + \frac{\sqrt{\alpha}}{2} e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) \right) d\theta.
\end{aligned}$$

Enfin, après simplification, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{dE_{g;K;f;\phi}}{dt} &= - \int_{S^1} \left(\frac{2}{t} \frac{\mu_t^2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\phi_t^2}{t\sqrt{\alpha}} + \frac{e^{4\mu}}{2t^3} \sqrt{\alpha} A_\theta^2 + \frac{3\sqrt{\alpha}}{4t^3} e^{2\tau-4\mu} J^2 + \frac{\sqrt{\alpha}e^{2\tau}(K - AJ)^2}{t^5} \right) d\theta \\
&- \int_{S^1} \left[8\pi \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{f|v_0|}{t^2} + \frac{\alpha e^{2\tau} f(v_3 - Av_2)^2}{t^4 |v_0|} \right) dv_1 dv_2 dv_3 \right] d\theta \leq 0. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

D'où le résultat attendu. ■

Lemme 3.2. *L'énergie $E_{g,K,f,\phi}$ est bornée sur $]t_0; t_i]$, et il existe un nombre réel, \tilde{E}° satisfaisant*

$$\tilde{E}^\circ = \lim_{t \downarrow t_0} \tilde{E}(t), \quad \text{où } E_{g,K,f,\phi} = \tilde{E}. \quad (3.11)$$

Preuve : En identifiant les termes des équations (3.2) – (3.3) – (3.4) – (3.5) dans (3.10), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} E_g &\geq \int_{S^1} \left(\frac{2}{t} \frac{\mu_t^2}{\sqrt{\alpha}} + \frac{e^{4\mu}}{2t^2} \sqrt{\alpha} A_\theta^2 \right) d\theta, \quad \frac{1}{t} E_k \geq \int_{S^1} \left(\frac{3\sqrt{\alpha}}{4t^3} e^{2\tau-4\mu} J^2 + \frac{\sqrt{\alpha}e^{2\tau}(K - AJ)^2}{t^5} \right) d\theta, \\
\frac{2}{t} E_f &\geq \int_{S^1} \left[8\pi \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{f|v_0|}{t^2} + \frac{\alpha e^{2\tau} f(v_3 - Av_2)^2}{t^4 |v_0|} \right) dv_1 dv_2 dv_3 \right] d\theta, \quad \frac{2}{t} E_\phi \geq \int_{S^1} \left(\frac{\phi_t^2}{t\sqrt{\alpha}} \right) d\theta.
\end{aligned}$$

Or

$$E_g, E_k, E_f, E_\phi \leq \tilde{E} \leq \tilde{E}^\circ$$

d'où $d\tilde{E}/dt \geq -6\tilde{E}^\circ/t$. Donc, pour tout $t_k \in]t_0, t_i]$,

$$\tilde{E}(t_k) \leq \tilde{E}(t_i) + \int_{t_k}^{t_i} \frac{6\tilde{E}(s)}{s} ds. \quad (3.12)$$

En appliquant le lemme de Gronwall a cette inégalité (3.12), nous obtenons

$$\tilde{E}(t_k) \leq \tilde{E}(t_i) \left(\frac{t_i}{t_k} \right)^6, \quad (3.13)$$

pour tout $t_k \in]t_0, t_i]$. Par conséquent, $\tilde{E}(t_k) \leq \tilde{E}(t_i)(t_i/t_0)^4$ sur $(t_0, t_i]$. Cette majoration et la monotonie de \tilde{E} assurent l'existence de \tilde{E}° ainsi définie. ■

3.1.2 Estimation de $\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu}$

Dans cette section, il est question pour nous d'exploiter les propriétés de monotonies pour les équations de contrainte. Nous avons tout d'abord, le lemme suivant.

Lemme 3.3. *Pour tout nombre réel b , et pour tout $t \in (t_0; t_i]$; $\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu}$ est monotone temporellement sur $(t_0; t_i] \times S^1$.*

Preuve : En utilisant les équations (1.93) et (1.94), $t^{b^2/8}\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu}$ est monotone suivant t

$$\begin{aligned} \partial_t(t^{b^2/8}\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu}) &= b^2/8t^{b^2/8-1}\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu} + t^{b^2/8}\frac{\alpha_t}{2\sqrt{\alpha}}e^{2\tau+b\mu} + t^{b^2/8}\sqrt{\alpha}(2\tau_t + b\mu_t)e^{2\tau+b\mu} \\ &= t^{b^2/8}\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu} \left(\frac{b^2}{8t} + \frac{\alpha_t}{2\alpha} + 2\tau_t + b\mu_t \right) \\ &= t^{b^2/8}\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu} \left\{ \frac{b^2}{8t} - 8\pi\alpha^{3/2}e^{2(\tau-\mu)} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(1 + e^{-2\tau}v_2^2 + e^{2\tau}t^2(v_3 - Av_2)^2)f}{|v_0|} dv \right\} \\ &+ t^{b^2/8}\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu} \left\{ \phi_t^2 t + \phi_\theta^2 \alpha t + e^{2(\tau-\mu)}V(\phi)\alpha t + 16\pi\sqrt{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} f|v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right\} \\ &+ t^{b^2/8}\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu} \left\{ 2t\mu_t^2 + b\mu_t + \alpha\mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{2t}(A_t^2 + \alpha A_\theta^2) \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } |v_0|^2 &= \alpha e^{2(\tau-\mu)} [1 + e^{-2(\tau-\mu)}v_1^2 + e^{-2\mu}v_2^2 + t^2 e^{2\mu}(v_3 - Av_2)^2] \\ 2|v_0| &- \frac{\alpha e^{2(\tau-\mu)}(1 + e^{-2\tau}v_2^2 + 2e^{2\tau}t^2(v_3 - Av_2)^2)}{|v_0|} \\ &= 2 \frac{\alpha\sqrt{\alpha}e^{2(\tau-\mu)} + 2\alpha e^{2(\tau-2\mu)}v_2^2 + 2\alpha e^{2\tau}t^2(v_3 - Av_2)^2}{V_0} \\ &- \frac{\alpha e^{2(\tau-\mu)} + \alpha e^{2\tau}t^2(v_3 - Av_2)^2 + e^{2(\tau-2\mu)}v_2^2}{|v_0|} = \frac{v_0^2 + \alpha v_1^2}{|v_0|}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi } \partial_t(t^{b^2/8}\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu}) &= t^{b^2/8}\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu} \left\{ 2t \left[\left(\mu_t + \frac{b}{4t}\right)^2 + \alpha\mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4t^2}(A_t^2 + \alpha A_\theta^2) \right] \right\} \\
&+ t^{b^2/8}\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu} \left\{ 8\pi\sqrt{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} f(|v_0| + \frac{\alpha v_1^2}{|v_0|}) dv_1 dv_2 dv_3 \right\} \\
&+ t^{b^2/8}\sqrt{\alpha}e^{2\tau+b\mu} \{\phi_t^2 t + \alpha\phi_\theta^2 t\} \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

(3.14) nous permet d'achever la preuve. ■

Par le choix arbitraire des champs de Killing, nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.4. *Pour tout nombre réel strictement positif r , et pour tout réel λ :*

$$\alpha^{\frac{r}{2}} e^{2r\tau+\lambda\mu} A^2$$

est borné sur $(t_0; t_i] \times S^1$.

Preuve : En considérant les champs de Killing X et Y . Posons les changements de variables

$$\begin{aligned}
\tilde{X} &= Y, \\
\tilde{Y} &= -X.
\end{aligned}$$

Ce changement de variable n'affecte pas la forme de la métrique (voir $[Rh]$), ainsi en utilisant cette nouvelle notation avec tilde, nous avons les nouvelles fonctions métriques suivantes

$$\begin{aligned}
e^{2\tilde{\mu}} &= e^{2\mu} A^2 + t^2 e^{-2\mu}, \\
e^{2\tilde{\mu}} \tilde{A} &= -A e^{2\mu}, \\
\tilde{\alpha} &= \alpha, \\
\tilde{\alpha} e^{2(\tilde{\tau}-\tilde{\mu})} &= \alpha e^{2(\tau-\mu)}.
\end{aligned}$$

Soit $q < r$, en utilisant les équations précédentes, il s'en suit que

$$\tilde{\alpha}^{q/2} e^{2q\tilde{\tau}+2(1-q)\tilde{\mu}} = \alpha^{q/2} e^{2q\tau} (e^{2(1-q)\mu} A^2 + t^2 e^{-2(1+q)\mu}). \tag{3.15}$$

Comme les composantes de la métrique avec tilde satisfont les mêmes équations pour la même valeur de t et d'après le lemme (3.3)

$$\alpha^{\frac{r-q}{2}} e^{2(r-q)\tau+(\lambda-2(1-q))\mu}. \tag{3.16}$$

Ainsi

$$\alpha^{\frac{r}{2}} e^{2r\tau+\lambda\mu} A^2 = \tilde{\alpha}^{\frac{r}{2}} e^{2q\tilde{\tau}+2(1-q)\tilde{\mu}} - \alpha^{\frac{q}{2}} e^{2qr} t^2 e^{-2\mu(\frac{1-q}{q})} A^2 = \tilde{\alpha}^{\frac{r}{2}} e^{2q\tilde{\tau}+2(1-q)\tilde{\mu}} - (\sqrt{\alpha} e^{2r} t^{\frac{2}{q}} e^{-2\mu(1-q)})^q A^2 \tag{3.17}$$

est bornée, et en multipliant par le premier terme du membre de droite de l'équation (3.15), on obtient l'estimation désirée. ■

La quantité $\sqrt{\alpha}e^\tau$ va jouer un rôle intéressant dans la suite de notre analyse. Pour simplifier les écritures, définissons β par

$$e^\beta = \sqrt{\alpha}e^\tau. \quad (3.18)$$

3.1.3 Majoration du champ scalaire ϕ

Dans cette section, nous allons donner une estimation du champ scalaire.

Lemme 3.5. *le champ scalaire ϕ est borné sur $[t_0; t_i] \times S^1$.*

Preuve : Soient $\theta_1, \theta_2 \in S^1$ et $t \in [t_0; t_i)$, on a

$$\begin{aligned} |\phi(t, \theta_2) - \phi(t, \theta_1)| &= \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \phi_\theta(t, \theta) d\theta \right| = \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\alpha^{1/4}} \alpha^{1/4} \phi_\theta(t, \theta) d\theta \right| \\ &\leq \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(t, \theta) d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\alpha} \phi_\theta^2(t, \theta) d\theta \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(t, \theta) - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(t_0, \theta) &= \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(s, \theta) \right) ds \\ &= \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_s}{\alpha \sqrt{\alpha}}(s, \theta) \right) ds \quad (\text{or } \frac{\alpha_s}{\alpha} \leq 0 \leq \tau_s) \\ &\leq \int_{t_0}^t s \left(\frac{\tau_s}{2\sqrt{\alpha}s}(s, \theta) \right) ds \quad (\text{d'après (1.93) et (1.94)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(t, \theta) d\theta &\leq \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_i} s \int_{S^1} \left(\frac{\tau_s}{2\sqrt{\alpha}s}(s, \theta) \right) d\theta ds + \int_{S^1} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(t_0, \theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{4} E(t_0)(t^2 - t_0^2) + \tilde{C} \leq \frac{1}{4} \tilde{E}^\circ(t^2 - t_0^2) + \tilde{C} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ensuite, partant du fait que $\sqrt{\alpha}$ est décroissante, en effet, d'après (1.94), $\frac{\alpha_s}{\alpha} \leq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{\alpha} = \frac{\alpha_t}{2\sqrt{\alpha}} \leq 0 &\Rightarrow \sqrt{\alpha} \text{ est décroissante} \\ &\Rightarrow \sqrt{\alpha(t)} \leq \sqrt{\alpha(t_0)} \leq \sqrt{\alpha^\circ}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\left| \int_{S^1} \phi(t, \theta) d\theta \right| &= \left| \int_{t_0}^t \int_{S^1} \phi_s(s, \theta) d\theta ds + \int_{S^1} \phi(t_0, \theta) d\theta \right| \\
&\leq \int_{t_0}^t \left(\int_{S^1} |\phi_s(s, \theta)| d\theta \right) ds + C \\
&\leq \int_{t_0}^t \left(\int_{S^1} \sqrt{\alpha} \frac{1}{\alpha} \phi_s^2(s, \theta) d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{S^1} \sqrt{\alpha}(s, \theta) d\theta \right)^{1/2} ds + C \\
&\leq \int_{t_0}^t \left(\int_{S^1} \frac{2\tau_t}{t\sqrt{\alpha}}(s, \theta) d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{S^1} \sqrt{\alpha}(s, \theta) d\theta \right)^{1/2} ds \\
&\quad + C \quad \text{d'après (1.93)} \\
&\leq C(t) \sqrt{2(\tilde{E}^\circ)^{1/2}} + C \leq \tilde{C}(t), \tag{3.21}
\end{aligned}$$

où $\tilde{C}(t)$ est une fonction de t uniformément bornée. Par ailleurs, nous avons

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\alpha} \phi_\theta^2(t, \theta) d\theta \leq \int_{S^1} \sqrt{\alpha} \phi_\theta^2(t, \theta) d\theta \leq \int_{S^1} \frac{2\tau_t}{t\sqrt{\alpha}}(t, \theta) d\theta \leq 2\tilde{E}_0, \quad \text{voir (3.21)}$$

D'où pour tout $\theta_1, \theta_2 \in S^1$, nous avons : $|\phi(t, \theta_2) - \phi(t, \theta_1)| \leq C(t)$ d'après (3.19) – (3.21)

$$2\pi \max_{\theta \in S^1} \phi(t, \theta) = \int_{S^1} \phi(t, \theta) d\theta + \int_{S^1} (\max_{\theta \in S^1} \phi(t, \theta) - \phi(t, \theta)) d\theta, \tag{3.22}$$

$$2\pi \min_{\theta \in S^1} \phi(t, \theta) = \int_{S^1} \phi(t, \theta) d\theta + \int_{S^1} (\min_{\theta \in S^1} \phi(t, \theta) - \phi(t, \theta)) d\theta, \tag{3.23}$$

ce qui nous permet de borner ϕ . ■

3.1.4 Majoration des composantes de la métrique

En utilisant l'équation (1.95), nous dérivons l'équation (3.18)

$$\begin{aligned}
e^\beta = \sqrt{\alpha} e^\tau &\Rightarrow \beta_\theta e^\beta = \frac{\alpha_\theta}{2\sqrt{\alpha}} e^\tau + \tau_\theta \sqrt{\alpha} e^\tau \\
&\Leftrightarrow \beta_\theta \sqrt{\alpha} e^\tau = \frac{\alpha_\theta}{2\sqrt{\alpha}} e^\tau + \tau_\theta \sqrt{\alpha} e^\tau \\
&\Leftrightarrow \beta_\theta = \frac{\alpha_\theta}{2\alpha} + \tau_\theta. \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Nous obtenons en remplaçant (1.95) dans (3.24)

$$\beta_\theta = 2t \left(\mu_t \mu_\theta + \frac{e^{4\mu}}{4t^2} A_t A_\theta \right) - 8\pi \sqrt{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} f v_1 dv_1 dv_2 dv_3 + t \phi_t \phi_\theta. \tag{3.25}$$

En partant des estimations énergétiques obtenues au lemme 3.1 on a le lemme suivant.

Lemme 3.6. $\int_{S^1} |\beta_\theta| d\theta$, $\int_{S^1} |\mu_\theta| d\theta$, $\int_{S^1} e^{2\mu} |A_\theta| d\theta$, et $\int_{S^1} |\phi_\theta| d\theta$ sont uniformément bornés sur $]t_0; t_i]$.

Preuve : partant de l'égalité (3.25) et en utilisant (1.93), nous obtenons

$$\frac{|\beta_\theta|}{t} \leq \frac{\tau_t}{t\sqrt{\alpha}}, \quad (3.26)$$

et en intégrant, nous obtenons pour $t \in [t_0; t_i]$, $\int_{S^1} |\beta_\theta| d\theta \leq t\tilde{E}(t) \leq t\tilde{E}_0$ du fait de l'équation relative sur l'énergie (3.1) et la borne sur $E_{g,K,f,\phi}$.

Pour tout $\theta_1, \theta_2 \in S^1$, on a

$$|\beta(t; \theta_1) - \beta(t; \theta_2)| = \left| \int_{\theta_1}^{\theta_2} \beta_\theta d\theta \right| \leq \int_{S^1} |\beta_\theta| d\theta \leq t\tilde{E}_0. \quad (3.27)$$

Ensuite, en utilisant les équations de contraintes (1.93) et (1.94), on a :

$$\begin{aligned} \beta_t &= t \left(\mu_t^2 + \alpha\mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4t} (A_t^2 + \alpha A_\theta^2) + \frac{1}{2} (\phi_t^2 + \alpha\phi_\theta^2) \right) \\ &\quad - \frac{\alpha e^{2\tau-4\mu}}{4t} J^2 - \alpha e^{2\tau} \frac{(K-AJ)^2}{4t^3} + 8\pi\alpha\sqrt{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(v^1)^2}{|v^0|} dv^1 dv^2 dv^3. \end{aligned} \quad (3.28)$$

De cette relation, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \beta(t; \theta) d\theta - \int_{S^1} \beta(t_0; \theta) d\theta &= \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} \left(\int_{S^1} \beta(s; \theta) d\theta \right) ds \\ &= \int_{t_0}^t \int_{S^1} s\sqrt{\alpha} \left[\frac{\mu_s^2}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}\mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4s} \left(\frac{A_s^2}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}A_\theta^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_s^2}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}\phi_\theta^2 \right) \right] ds d\theta \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{S^1} s\sqrt{\alpha} \left[8\pi\alpha \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{(v^1)^2}{|v^0|} dv - \sqrt{\alpha} \frac{e^{2\tau-4\mu}}{4t^2} J^2 - \sqrt{\alpha} \frac{(K-AJ)^2}{4t^3} e^{2\tau} \right] ds d\theta \\ &\leq \int_{t_0}^t \int_{S^1} s\sqrt{\alpha} \left[\frac{\mu_s^2}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}\mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4s} \left(\frac{A_s^2}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}A_\theta^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_s^2}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}\phi_\theta^2 \right) \right] ds d\theta \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{S^1} s\sqrt{\alpha} \left[\alpha \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{(v^1)^2}{|v^0|} dv + \sqrt{\alpha} \frac{e^{2\tau-4\mu}}{4s^2} J^2 + \sqrt{\alpha} \frac{(K-AJ)^2}{4s^3} e^{2\tau} \right] ds d\theta \\ &\leq \sup_{S^1} \sqrt{\alpha}(t_0; \cdot) \int_{t_0}^t s\tilde{E}(s) ds \leq C_1 \int_{t_0}^t s\tilde{E}(t_0) ds = C_1 \tilde{E}(t_0) \frac{t^2 - t_0^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dans l'inégalité précédente (3.29), on utilise pour un premier temps, le fait que $|v^1| \leq |v^0|$ et pour un second temps le fait que la fonction α est décroissante suivant t et $C_1 = \sup_{S^1} \sqrt{\alpha}(t_0; \cdot)$

Nous pouvons maintenant contrôler β lui-même. En posant $C_2 = \int_{S^1} \beta(t_0; \theta) d\theta$, nous

utilisons l'inégalité (3.29) pour avoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}C_1\tilde{E}(t_0)(t^2 - t_0^2) &\geq \int_{S^1} \beta(t; \theta)d\theta \\ &= \sup_{\theta \in S^1} \beta + \int_{S^1} (\beta - \max_{\theta \in S^1} \beta)d\theta. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.27), on obtient

$$\frac{1}{2}\tilde{E}(t_0)(t^2 - t_0^2) + C_2 \geq \sup_{\theta \in S^1} \beta - t\tilde{E}(t_0). \quad (3.30)$$

Cette inégalité (3.30), permet le contrôle de β sur $S^1 \times [t_0; t_i]$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{S^1} |\mu_t|(t, \theta)d\theta &\leq \left(\int_{S^1} \sqrt{\alpha} \frac{1}{\alpha} \mu_t^2(s, \theta)d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{S^1} \sqrt{\alpha}(s, \theta)d\theta \right)^{1/2} ds + C \\ &\leq \int_{t_0}^t \left(\int_{S^1} \frac{2\tau_t}{t\sqrt{\alpha}}(s, \theta)d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{S^1} \sqrt{\alpha}(s, \theta)d\theta \right)^{1/2} ds \\ &\quad + C \quad \text{d'après (1.93)} \\ &\leq C(t)\sqrt{2}(\tilde{E}^\circ)^{1/2} + C \leq \tilde{C}(t). \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \int_{S^1} e^{2\mu}|A_\theta|(t, \theta)d\theta &\leq \left(\int_{S^1} \sqrt{\alpha} \frac{1}{\alpha} e^{2\mu} A_\theta^2(s, \theta)d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{S^1} \sqrt{\alpha} e^{2\mu}(s, \theta)d\theta \right)^{1/2} ds + C \\ &\leq \left(\int_{S^1} \frac{2\tau_t}{t\sqrt{\alpha}}(s, \theta)d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{S^1} \sqrt{\alpha} e^{2\mu}(s, \theta)d\theta \right)^{1/2} ds + C \\ &\leq \left(\int_{S^1} \frac{2\tau_t}{t\sqrt{\alpha}}(s, \theta)d\theta \right)^{1/2} \left(\int_{S^1} \alpha(s, \theta)d\theta \right)^{1/4} \left(\int_{S^1} e^{4\mu}(s, \theta)d\theta \right)^{1/4} ds \\ &\leq C(t)\sqrt{2}(\tilde{E}^\circ)^{1/2} + C \leq \tilde{C}(t). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les arguments avancés pour le contrôle de ϕ , (3.22) – (3.23) restent valables et permettent de borner μ et A .

D'après (3.18) on a $\beta = \frac{1}{2}l n \alpha + \tau$ bornée, or α est bornée d'où τ est bornée. ■

3.1.5 Estimation de la composante α suivant la variable spatiale

Dans cette section, nous nous proposons de borner $\min_{\theta \in S^1} \alpha(t, \cdot)$. Pour le faire, nous allons utiliser la valeur moyenne de $|v_1|$.

Lemme 3.7. $\min_{\theta \in S^1} \alpha(t, \theta)$ est uniformément bornée sur $]t_0; t_i]$.

Preuve : En utilisant la définition de $E_{g,K,f,\phi}$, nous avons

$$8\pi \|f\|_{L^1(S^1, L^1_{\mathbb{R}^3}(v_0 dv))} \leq t\tilde{E}^\circ \quad (3.33)$$

i.e

$$8\pi \int_{S^1} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f|v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \leq tE_{g,K,f,\phi}. \quad (3.34)$$

Nous avons par la suite

$$\int_{S^1} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f\sqrt{\alpha}|v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \leq \frac{tE_{g,K,f,\phi}}{8\pi}, \quad (3.35)$$

$$\sqrt{\min_{\theta \in S^1} \alpha(t, \cdot)} \int_{S^1} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f|v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \leq \frac{tE_{g,K,f,\phi}}{8\pi}, \quad (3.36)$$

$$\sqrt{\min_{\theta \in S^1} \alpha(t, \cdot)} \leq \frac{tE_{g,K,f,\phi}}{8\pi\delta}. \quad (3.37)$$

Ici $\delta = \min_{\theta \in S^1} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f|v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta$ nous utilisons la borne inférieure établie au lemme (3.2) pour obtenir l'inégalité (3.37). ■

Comme corollaire relatif à ce lemme, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 3.1. *Il existe $\bar{\theta} \in S^1$ tel que $\alpha(t, \bar{\theta})$ est borné dans $]t_0; t_i]$.*

Preuve : Supposons M une borne de $\min_{\theta \in S^1} \alpha$. Supposons que pour tout $\theta \in S^1$, $\alpha(t, \theta)$ est non borné. Par hypothèse, pour tout θ , il existe un $t^*(\theta)$, pour lequel $\alpha(t^*(\theta), \theta) > 2M$ et par continuité, il existe un intervalle ouvert $I_\theta =]\theta - \delta_\theta, \theta + \delta_\theta[$ tel que

$$\forall \theta \in I_\theta, \alpha(t^*(\theta), \theta') > M.$$

Considérons la réunion $\bigcup_{\theta \in S^1} I_\theta$. C'est un recouvrement ouvert de S^1 et par compacité, on peut extraire un sous recouvrement fini de cette famille. Considérons $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, ($n \in \mathbf{N}^*$) tels que $S^1 = \bigcup_{0 \leq k \leq n} I_{\theta_k}$ et posons $T = \min_{0 \leq k \leq n} t^*(\theta_k)$. Comme α est croissante quand t décroît, il s'en suit que $\alpha(T, \theta) > M$ pour tout $\theta \in S^1$. D'où la contradiction avec la définition de M . ■

3.1.6 Estimation des quantités de torsion

Partant de la section précédente, nous pouvons désormais donner une estimation sur le contrôle de $\sqrt{\alpha}e^{\tau+b\mu}$.

Le corollaire 3.1 donne une estimation précise sur le produit scalaire des champs de Killing.

Lemme 3.8. *Pour tout nombre réel r et b , $e^{r\beta+b\mu}A$ est uniformément borné sur $(t_0; t_i] \times S^1$.*

Preuve : D'après le corollaire 3.1 et le lemme 3.4, nous avons $e^{r\beta+b\mu}A$ borné sur $]t_0; t_i] \times \{\bar{\theta}\}$. Par conséquent, nous avons :

$$e^{r\beta+b\mu}A(t, \theta) - e^{r\beta+b\mu}A(t, \bar{\theta}) = \int_{\bar{\theta}}^{\theta} (e^{r\beta+b\mu}A(r\beta_{\theta} + b\mu_{\theta}) + e^{r\beta+(b-2)\mu}e^{2\mu}A_{\theta}) d\theta. \quad (3.38)$$

D'où l'inégalité

$$\begin{aligned} e^{r\beta+b\mu}|A(t, \theta)| &\leq e^{r\beta+b\mu}|A(t, \bar{\theta})| + \left| \int_{\bar{\theta}}^{\theta} (e^{r\beta+b\mu}|A(|r\beta_{\theta}| + |b\mu_{\theta}|)) d\theta \right| \\ &\quad + \left| \int_{\bar{\theta}}^{\theta} (e^{r\beta+(b-2)\mu}e^{2\mu}A_{\theta}) d\theta \right|. \end{aligned} \quad (3.39)$$

D'après le lemme 3.6

$$e^{\beta(t, \bar{\theta})+b\mu(t, \bar{\theta})} \leq B e^{B'+|b|B'}. \quad (3.40)$$

Utilisant le fait que $e^{r\beta+b\mu}A(t, \bar{\theta})$ est borné, nous obtenons par conséquent au vu de (3.32) :

$$|e^{r\beta+b\mu}A(t, \theta)| \leq B + \exp \left\{ \int_{\bar{\theta}}^{\theta} e^{r\beta+b\mu}|A(|r\beta_{\theta}| + |b\mu_{\theta}|)d\theta \right\} \quad (3.41)$$

avec $B > 0$, et nous pouvons conclure en utilisant l'inégalité de Gronwall et le lemme (3.6) une fois de plus que

$$|e^{r\beta+b\mu}A(t, \theta)| \leq B \int_{\bar{\theta}}^{\theta} (|r\beta_{\theta}| + |b\mu_{\theta}|)d\theta. \quad (3.42)$$

Ici $B = e^{(r\beta+b\mu)(t, \bar{\theta})}$. ■

Lemme 3.9. *La quantité $\int_t^{t_i} \max_{\theta \in S^1} [e^{2\beta-4\mu}J^2](s, \theta)ds$ est uniformément bornée sur $]t_0; t_i]$.*

Preuve : Partant de l'équation auxiliaire (1.100) ainsi que (1.104), on a

$$\partial_{\theta}[e^{-2\tau}\alpha^{-1/2}e^{4\mu}\Gamma] = -2e^{\tau}\rho_2 \Rightarrow t|\partial_{\theta}J| \leq 2|e^{\tau}\rho_2|. \quad (3.43)$$

$$\text{Or } \rho_2 = 16\pi\alpha \int_{\mathbb{R}^3} f v_2 dv_1 dv_2 dv_3 = 16\pi e^{-\tau} \int_{\mathbb{R}^3} (\sqrt{\alpha}e^{2\mu}\sqrt{\alpha}e^{\tau-2\mu}f v_2) dv_1 dv_2 dv_3,$$

$$\begin{aligned} t \int_{S^1} J_{\theta} d\theta &= 16\pi \int_{S^1} \left(\alpha e^{\tau} \int_{\mathbb{R}^3} f v_2 dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \\ &= 16\pi \int_{S^1} \left(\sqrt{\alpha}e^{2\mu} \int_{\mathbb{R}^3} e^{\tau-2\mu} v_2 f dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \\ &\leq 16\pi \int_{S^1} \left(\sqrt{\alpha}e^{2\mu} \int_{\mathbb{R}^3} |v_0| f dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \quad \text{d'après (1.69),} \end{aligned} \quad (3.44)$$

ce qui donne

$$16\pi \int_{S^1} J_\theta d\theta \leq 2 \left| \int_{S^1} 8\pi \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{t} e^{2\mu} \int_{\mathbb{R}^3} |v_0| f dv_1 dv_2 dv_3 \right) \right| \leq C\tilde{E} \lesssim \tilde{E}^\circ. \quad (3.45)$$

D'après le lemme 3.6 et les inégalités (3.40), (3.45), il existe une constante M tel que

$$|J(s, \theta)| \leq M + |J(s, \bar{\theta})|, \quad (3.46)$$

$$e^{2\beta-4\mu} \leq e^{6M} e^{2\beta-4\mu} \beta(s, \bar{\theta}). \quad (3.47)$$

Donc, en utilisant (3.46) – (3.47) nous avons

$$\int_t^{t_i} \max_{\theta \in S^1} [e^{2\beta-4\mu} J^2] (s, \theta) ds \leq \int_t^{t_i} e^{6M} [e^{2\beta-4\mu} (J^2 + 2M|J| + M^2)] (s, \bar{\theta}) ds. \quad (3.48)$$

Utilisant le fait que $2|J| \leq J^2 + 1$ ainsi que le lemme 3.8, nous avons :

$$\int_t^{t_i} \max_{\theta \in S^1} [e^{2\beta-4\mu} J^2] (s, \theta) ds \leq B + B' \int_t^{t_i} \max_{\bar{\theta} \in S^1} [e^{2\beta-4\mu} J^2] (s, \bar{\theta}) ds, \quad (3.49)$$

B et B' étant deux constantes strictement positives. Par ailleurs, l'équation (1.94) entraîne l'inégalité suivante

$$\frac{\alpha_t}{\alpha} \leq -\frac{\alpha e^{2\tau-4\mu}}{t} J^2, \text{ or } e^{2\beta-4\mu} = \alpha e^{2\tau-4\mu}. \quad (3.50)$$

Donc $\frac{\alpha_t}{\alpha} \leq -\frac{e^{2\beta-4\mu}}{t} J^2$.

En intégrant, nous obtenons

$$\int_t^{t_i} [e^{2\beta-4\mu} J^2] (s, \theta) ds \leq t_i \ln \frac{\alpha(t, \bar{\theta})}{\alpha(t_i, \bar{\theta})} \quad (3.51)$$

qui est borné d'après le corollaire 3.1, et le membre de gauche de la relation (3.49) est uniformément borné grâce à la majoration faite à la relation (3.45). ■

Nous avons également le lemme suivant.

Lemme 3.10. *Pour tout $t > t_0$, la quantité $\int_t^{t_i} \max_{\theta \in S^1} [e^{2\beta} (K - AJ)^2] (s, \theta) ds$ est uniformément bornée sur $]t_0, t_i]$.*

Preuve : Nous avons

$$\partial_\theta (e^\beta (K - AJ)) = \beta_\theta e^\beta (K - AJ) + e^\beta (K_\theta - A_\theta J - AJ_\theta),$$

et utilisons ensuite les équations auxiliaires (1.104) et (1.106), on remplace les dérivées par rapport à θ , K_θ et J_θ en fonction des quantités matières. La relation (1.51) dans la relation (1.16) substituée dans l'équation auxiliaire (1.101), permet d'avoir

$$\partial_\theta K = e^\tau A t \rho_2 + 2t^2 e^{\tau-2\mu} \rho_3 \quad (3.52)$$

et en s'y prenant de la même manière qu'au procédé pour avoir (3.43) et (3.44) on contrôle donc K_θ .

Ainsi, nous avons

$$e^\beta (K - AJ)(t, \theta) - e^\beta (K - AJ)(t, \bar{\theta}) = \int_{\bar{\theta}}^\theta e^\beta [\beta_\theta (K - AJ) + (K_\theta - A_\theta J - AJ_\theta)](t, \theta') d\theta'. \quad (3.53)$$

D'où l'inégalité

$$\begin{aligned} e^\beta |K - AJ|(t, \theta) &\leq e^\beta |K - AJ|(t, \bar{\theta}) \\ &+ \int_{\bar{\theta}}^\theta [|\beta_\theta| |K - AJ| e^\beta + e^{\beta-2\mu} |J| e^{2\mu} |A_\theta|] d\theta' \\ &+ \int_{\bar{\theta}}^\theta [e^\beta |K_\theta| + A e^\beta |J_\theta|] d\theta' \\ &\leq e^\beta |K - AJ|(t, \bar{\theta}) + \int_{\bar{\theta}}^\theta 16\pi e^\beta \int_{\mathbb{R}^3} f |v_3| dv_1 dv_2 dv_3 d\theta' \\ &+ \int_{\bar{\theta}}^\theta [|\beta_\theta| |K - AJ| e^\beta + e^{\beta-2\mu} |J| e^{2\mu} |A_\theta|] d\theta' \\ &+ \int_{\bar{\theta}}^\theta \left[16\pi e^\beta A \int_{\mathbb{R}^3} f |v_2| dv_1 dv_2 dv_3 \right] d\theta'. \end{aligned} \quad (3.54)$$

En utilisant les lemmes précédents 3.6 et 3.8, ainsi que la loi de conservation, et le fait que le support de f en v_3 et v_2 est borné, nous obtenons

$$\begin{aligned} e^\beta |K - AJ|(t, \theta) &\leq e^\beta |K - AJ|(t, \bar{\theta}) \\ &+ \int_{\bar{\theta}}^\theta |\beta_\theta| |K - AJ| e^\beta d\theta' \\ &+ C \max_{\theta \in S^1} [e^{\beta-2\mu} |J(t, \cdot)|] + D, \end{aligned} \quad (3.55)$$

où

$$C = \sup_{\theta \in S^1} |e^{2\mu} A_\theta| \quad \text{et} \quad D = \sup_{\theta \in S^1} \left| \int_{\bar{\theta}}^\theta \left[16\pi e^\beta A \int_{\mathbb{R}^3} f |v_2| dv_1 dv_2 dv_3 + e^{\beta-2\mu} |J| e^{2\mu} |A_\theta| \right] d\theta' \right|$$

Nous appliquons à présent le lemme de Gronwall, et nous obtenons

$$e^\beta |K - AJ|(t, \theta) \leq \{e^\beta |K - AJ|(t, \bar{\theta}) + B \max_{\theta \in S^1} (e^{\beta-2\mu} |J(t, \cdot)|) + C\} \left[1 + e^{\int_{\bar{\theta}}^\theta |\beta_\theta| d\theta'} \right]. \quad (3.56)$$

Par la suite, nous pouvons conclure en intégrant l'équation (1.94) et utiliser le lemme 3.9 pour borner le terme contenant J . ■

Corollaire 3.2. *Les quantités de torsion H et G sont bornées.*

Preuve : En effet

$$|H_t| = \frac{|K - AJ|}{t^3 \sqrt{\alpha}} e^{2\tau}.$$

Ainsi, $|H(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t \frac{|K - AJ|}{t^3 \sqrt{\alpha}} e^{2\tau} ds \right| + |H^0|.$ (3.57)

Et comme $|\Gamma| = |J| \sqrt{\alpha} e^{2\tau-4\mu}$, on contrôle G de manière similaire à (3.57). ■

3.2 Estimations cône lumière

Dans ce paragraphe, nous utilisons les estimations cône-lumière pour établir que les dérivées premières de μ , ϕ et A sont bornées.

Pour le faire, nous rappelons la forme quadratique

$$\Upsilon = \mu_t^2 + \alpha \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4t^2} (A_t^2 + \alpha A_\theta^2). \quad (3.58)$$

Nous définissons aussi

$$\Upsilon^\times = 2\sqrt{\alpha} (\mu_t \mu_\theta + \frac{e^{4\mu}}{4t^2} A_t A_\theta), \quad (3.59)$$

$$\phi_\zeta = \phi_t + \sqrt{\alpha} \phi_\theta, \quad (3.60)$$

$$\phi_\xi = \phi_t - \sqrt{\alpha} \phi_\theta, \quad (3.61)$$

et également les variables suivantes $\partial_\xi = \partial_t - \sqrt{\alpha} \partial_\theta$ et $\partial_\zeta = \partial_t + \sqrt{\alpha} \partial_\theta$.

On remarque que $\phi_t^2 + \alpha \phi_\theta^2 = \frac{1}{2} (\phi_\xi^2 + \phi_\zeta^2)$.

Remarque 3.1. *Les équations de contraintes (1.93) – (1.95) sont équivalentes à*

$$\begin{aligned} \frac{\tau_t}{t} &= \Upsilon + \frac{\alpha e^{2\tau-4\mu}}{4t^2} J^2 + \frac{\alpha e^{2\tau} (K - AJ)^2}{4t^4} + \bar{\rho}, \\ \frac{\alpha_t}{\alpha} &= \frac{-\alpha e^{2\tau-4\mu}}{t} J^2 - \frac{\alpha e^{2\tau}}{t^3} (K - AJ)^2 - (\bar{\rho} - \bar{\rho}_1), \\ \sqrt{\alpha} \frac{\tau_\theta}{t} &= 2\Upsilon - \frac{\alpha_\theta \sqrt{\alpha}}{2t\alpha} - \frac{1}{2} \rho_1, \end{aligned}$$

où $\bar{\rho} = 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \rho$ et $\bar{P}_1 = 16\pi e^{2(\tau-\mu)} \alpha \frac{\sqrt{\alpha}}{t} P_1$.

Cette nouvelle formulation des équations de contraintes a pour but d'écrire plus simplement les équations.

3.2.1 Estimations cône lumière relatives à Υ et $\frac{\alpha_t}{\alpha}$

Lemme 3.11. *Pour tout $t \in (t_0, t_i]$ et $\theta \in S^1$, nous avons*

$$|\partial_\xi(\Upsilon + \Upsilon^\times)| \leq \left| \frac{\alpha_t}{\alpha} \right| \left(\frac{\Upsilon}{t} + \frac{1}{2t} + 2\Upsilon \right) + \frac{3\Upsilon}{t}, \quad (3.62)$$

$$|\partial_\varsigma(\Upsilon - \Upsilon^\times)| \leq \left| \frac{\alpha_t}{\alpha} \right| \left(\frac{\Upsilon}{t} + \frac{1}{2t} + 2\Upsilon \right) + \frac{3\Upsilon}{t}. \quad (3.63)$$

Preuve : Nous dérivons $\Upsilon + \Upsilon^\times$ et $\Upsilon - \Upsilon^\times$ par rapport à ξ et ς respectivement et nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_\xi(\Upsilon + \Upsilon^\times) &= -\frac{2}{t}(\mu_t^2 + \frac{e^{4\mu}}{4t^2}\alpha A_\theta^2) + \frac{\alpha_t}{\alpha}(\Upsilon + \Upsilon^\times) - \frac{\Upsilon^\times}{t} \\ &\quad + 2(\mu_t + \sqrt{\alpha}\mu_\theta) \left(\frac{e^{\beta-4\mu}}{2t^2} J^2 \right) \\ &\quad + 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}e^{\beta-4\mu}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(1 + 2e^{-2\mu}v_2^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 + 2e^{2(\beta-\mu)}V(\phi) \\ &\quad + \frac{e^{4\mu}}{4t^2}(A_t + \sqrt{\alpha}A_\theta) \left(\frac{e^{\beta-4\mu}}{t^2} J(K - AJ) \right) \\ &\quad + 16\pi \frac{\sqrt{\alpha}e^{2\beta-4\mu}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{fv_2(v_3 - Av_2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \end{aligned} \quad (3.64)$$

et

$$\begin{aligned} \partial_\varsigma(\Upsilon - \Upsilon^\times) &= -\frac{2}{t}(\mu_t^2 + \frac{e^{4\mu}}{4t^2}\alpha A_\theta^2) + \frac{\alpha_t}{\alpha}(\Upsilon - \Upsilon^\times) + \frac{\Upsilon^\times}{t} \\ &\quad + 2(\mu_t - \sqrt{\alpha}\mu_\theta) \left(\frac{e^{\beta-4\mu}}{2t^2} J^2 \right) \\ &\quad + 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}e^{\beta-4\mu}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(1 + 2e^{-2\mu}v_2^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 + 2e^{2(\beta-\mu)}V(\phi) \\ &\quad + \frac{e^{4\mu}}{4t^2}(A_t - \sqrt{\alpha}A_\theta) \left(\frac{e^{\beta-4\mu}}{t^2} J(K - AJ) \right) \\ &\quad + 16\pi \frac{\sqrt{\alpha}e^{2\beta-4\mu}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{fv_2(v_3 - Av_2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Nous définissons T_1 et T_2 par

$$T_1 = \frac{e^{\beta-4\mu}}{2t^2} J^2 + 8\pi \frac{\sqrt{\alpha} e^{\beta-4\mu}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(1 + 2e^{-2\mu} v_2^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 + 2e^{2(\beta-\mu)} V(\phi), \quad (3.66)$$

$$T_2 = \frac{e^{\beta-4\mu}}{t^2} J(K - AJ) + 16\pi \frac{\sqrt{\alpha} e^{2\beta-4\mu}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f v_2 (v_3 - A v_2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3. \quad (3.67)$$

En utilisant l'équation (1.94), on obtient :

$$|T_1| \leq \left| \frac{\alpha_t}{2t\alpha} \right|, \quad (3.68)$$

$$|T_2| \leq \left| \frac{\alpha_t}{2\alpha} \right|. \quad (3.69)$$

De ce qui précède, nous avons finalement les relations (3.62) et (3.63). ■

Remarque 3.2. Pour contrôler Υ , nous avons besoin de contrôler l'intégrale de $\left| \frac{\alpha_t}{\alpha} \right|$ c'est-à-dire $\ln \alpha$. En considérant le membre de droite de l'équation (1.94), les deux termes de la quantité de torsion sont bornés d'après les lemmes (3.9) et (3.10), donc il nous reste le dernier terme contenant la fonction de distribution f . Or, nous savons que le support de f en v_2 et v_3 est borné. Nous devons donc estimer son support par rapport à v_1 . L'approche appropriée ici, serait de donner une estimation $\left| \frac{\alpha_t}{\alpha} \right|$ dépendant du support de f en v_1 , ensuite, nous utiliserons le système caractéristique de l'équation de Vlasov pour contrôler cette fonction.

Cette stratégie a été développée par Andreasson [A] et adaptée par D. Tegankong [T] en symétrie de Gowdy avec champ scalaire. Nous nous inspirons de leurs approches et définissons les fonctions suivantes

$$u_1 = \sqrt{\alpha} v_1, \quad (3.70)$$

$$\bar{u}_1(t) = \sup \{ |u_1| / \exists (s, \theta, v_2, v_3) \in [t, t_i] \times S^1 \times \mathbb{R}^2 / f(s, \theta, v_1, v_2, v_3) \neq 0 \}, \quad (3.71)$$

$$\bar{v}_2(t) = \sup \{ |v_2| / \exists (s, \theta, v_1, v_3) \in [t, t_i] \times S^1 \times \mathbb{R}^2 / f(s, \theta, v_1, v_2, v_3) \neq 0 \}, \quad (3.72)$$

$$\bar{v}_3(t) = \sup \{ |v_3| / \exists (s, \theta, v_1, v_2) \in [t, t_i] \times S^1 \times \mathbb{R}^2 / f(s, \theta, v_1, v_2, v_3) \neq 0 \}, \quad (3.73)$$

$$\psi(t) = \max \left(\sup_{\theta \in S^1} \Upsilon(t, \cdot) + \bar{u}_1^2(t); 2 \right), \quad (3.74)$$

$$\Lambda(t) = \psi(t) + \chi(t), \quad \text{où } \chi(t) = \sup_{\theta \in S^1} (|\phi_\xi| + |\phi_\varsigma|)(t, \theta), \quad (3.75)$$

$$N(t, \theta) = \int_{t_0}^t \sqrt{\alpha}(s, \theta) ds. \quad (3.76)$$

Lemme 3.12. *Pour tout $t \in (t_0, t_i]$ et $\theta \in S^1$, on a*

$$-\frac{\alpha_t}{\alpha}(t, \theta) \leq C(t) + D(1 + \ln \bar{u}_1^2) \quad (3.77)$$

où $C(t)$ est une constante strictement positive et dépendant du temps et $D > 0$ étant aussi une constante.

Preuve : Comme $\frac{\alpha_t}{\alpha}(t, \theta) \leq 0$, nous avons $|\frac{\alpha_t}{\alpha}(t, \theta)| = -\frac{\alpha_t}{\alpha}(t, \theta)$ que nous allons borner. Posons

$$B(t, \theta) = 16\pi e^{2\beta-2\mu} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(1 + e^{-2\mu}v_2^2 + t^2 e^{2\mu}(v_3 - Av_2)^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3. \quad (3.78)$$

L'expression (1.94) devient

$$-\frac{\alpha_t}{\alpha} = \frac{\alpha e^{2\tau-4\mu}}{t} J^2 + \frac{\alpha e^{2\tau}}{t^3} (K - AJ)^2 + \sqrt{\alpha} B.$$

Compte tenu des lemmes 3.8, 3.9 et 3.10, on a

$$\left| \frac{\alpha_t}{\alpha}(t, \theta) \right| \leq C(t) + B(t, \theta). \quad (3.79)$$

D'après (1.69),

$$|v_0| \geq \sqrt{\alpha e^{2(\tau-\mu)} + \alpha v_1^2} = e^{\beta-\mu} \sqrt{1 + e^{-2\beta+2\mu} u_1^2},$$

car $\alpha e^{2\tau} = e^{2\beta}$. Ainsi

$$\begin{aligned} B(t, \theta) &\leq 16\pi e^{2\beta-2\mu} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(1 + e^{-2\mu}v_2^2 + t^{-2} e^{2\mu}(v_3 - Av_2)^2)}{e^{\beta-\mu} \sqrt{1 + e^{-2\beta+2\mu} u_1^2}} dv_1 dv_2 dv_3, \\ &\leq 16\pi e^{\beta-\mu} \|f_0\| \left(1 + e^{-2\mu}(\bar{v}_2)^2 + \frac{e^{2\mu}}{t^2} (\bar{v}_3 + |A|\bar{v}_2)^2 \right) 4\bar{v}_2 \bar{v}_3 \int_{-\bar{u}_1}^{\bar{u}_1} \frac{du_1}{\sqrt{1 + e^{-2\beta+2\mu} u_1^2}} \\ &\leq 16\pi e^{\beta-\mu} \|f_0\| \left(1 + e^{-2\mu}(\bar{v}_2)^2 + \frac{e^{2\mu}}{t^2} (\bar{v}_3 + |A|\bar{v}_2)^2 \right) 4\bar{v}_2 \bar{v}_3 \\ &\quad \times 2 \left(e^{\beta-\mu} \ln \left(\bar{u}_1 + \sqrt{e^{2\beta-2\mu} + u_1^2} \right) + e^{-1} \right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Par conséquent, en utilisant les lemmes 3.7 et 3.8, il s'en suit d'après l'inégalité (3.79) qu'il existe une fonction strictement positive intégrable suivant t , $C(t)$ bornée et une constante $D > 0$; d'où l'estimation (3.77). ■

3.2.2 Estimation de α_θ ainsi que les dérivées premières de ϕ

Lemme 3.13. *Pour tout $t \in (t_0, t_i]$ et $\theta \in S^1$, nous avons*

$$\begin{aligned} \chi(t) &\leq C + C(t) \int_{t_0}^t \left[\chi(s)(1 + \bar{u}_1 \ln \bar{u}_1 + \ln \bar{u}_1(s)) + \sup_{\theta \in S^1} \Upsilon(s)(\chi(s))^2 \right] ds \\ &\quad + 2C' \max_{\bar{t} \in \{t_0, t\}} |V(\phi(\bar{t}, \theta))|, \end{aligned} \quad (3.81)$$

où $\chi(t)$ est définie dans (3.75) et Υ par (3.58).

Preuve : Nous avons, en dérivant par rapport à ξ et ς respectivement, les quantités ϕ_ς et ϕ_ξ , et en utilisant l'équation (1.99),

$$\begin{aligned} \partial_\xi \phi_\varsigma &= (\partial_t - \sqrt{\alpha} \partial_\theta)(\phi_t + \sqrt{\alpha} \phi_\theta) = \phi_{tt} + \frac{\alpha_t}{2\sqrt{\alpha}} \phi_\theta + \sqrt{\alpha} \phi_{t\theta} - \sqrt{\alpha} \phi_{\theta t} - \sqrt{\alpha} \left(\frac{\alpha_\theta \phi_\theta}{2\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha} \phi_{\theta\theta} \right) \\ &= \phi_{tt} - \alpha \phi_{\theta\theta} + \frac{\alpha_t}{2\sqrt{\alpha}} \phi_\theta - \frac{\alpha_\theta}{2} \phi_\theta \\ &= \frac{\alpha_t}{2\alpha} \phi_\varsigma - \frac{1}{t} \phi_t - e^{2\beta-2\mu} V'(\phi) \\ &\quad + \alpha(2A_\theta H(G-1) - 2\mu_\theta(G+AH))^2 e^{-2(\tau-2\mu)} - 4\mu_\theta H^2 t^2 e^{-2\tau} \phi_\theta. \end{aligned} \quad (3.82)$$

On montre en procédant de manière similaire et en utilisant encore l'équation (1.99), que

$$\begin{aligned} \partial_\varsigma \phi_\xi &= \frac{\alpha_t}{2\alpha} \phi_\xi - \frac{1}{t} \phi_t - e^{2\beta-2\mu} V'(\phi) \\ &\quad + \alpha(2A_\theta H(G-1) - 2\mu_\theta(G+AH))^2 e^{-2(\tau-2\mu)} - 4\mu_\theta H^2 t^2 e^{-2\tau} \phi_\theta. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Ensuite, nous intégrons les équations (3.82) et (3.83) le long de la courbe intégrale correspondant aux vecteurs champs ∂_ξ et ∂_ς sur $t = t_0$ au point $(t, \theta) \in]t_0, t_i] \times S^1$, pour obtenir

$$\begin{aligned} \phi_\varsigma(t, \theta) &= \phi_\varsigma(t_0, \theta - (N(t) - t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{\alpha_s}{2\alpha} \phi_\varsigma(s, \theta - (N(s) - t_0)) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t [\alpha(2A_\theta H(G-1) - 2\mu_\theta(G+AH))^2 e^{-2(\tau-2\mu)}] \phi_\theta(s, \theta - (N(s) - t_0)) ds \\ &\quad - \int_{t_0}^t (4\alpha\mu_\theta H^2 s^2 e^{-2\tau} \phi_\theta + \frac{\phi_s}{s} + e^{2\beta-2\mu} V'(\phi))(s, \theta - (N(s) - t_0)) ds, \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \phi_\xi(t, \theta) &= \phi_\xi(t_0, \theta + (N(t) - t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{\alpha_s}{2\alpha} \phi_\xi(s, \theta + (N(s) - t_0)) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t [\alpha(2A_\theta H(G-1) - 2\mu_\theta(G+AH))^2 e^{-2(\tau-2\mu)}] \phi_\theta(s, \theta + (N(s) - t_0)) ds \\ &\quad - \int_{t_0}^t (4\alpha\mu_\theta H^2 s^2 e^{-2\tau} \phi_\theta + \frac{\phi_s}{s} + e^{2\beta-2\mu} V'(\phi))(s, \theta + (N(s) - t_0)) ds. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Comme d'après le lemme 3.12, $\frac{|\alpha_t|}{\alpha}$ est borné par une fonction de $\ln(1 + \bar{u}_1^2)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta \in S^1} |\phi_\zeta|(t, \theta) &\leq \sup_{\theta \in S^1} |\phi_\zeta(t_0, \theta)| + \int_{t_0}^t C(s) [\sup_{\theta \in S^1} |\phi_\zeta|(s, \theta) \ln(1 + \bar{u}_1^2(s)) \\
&+ \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\phi_s(s, \theta)| + \sup_{\theta \in S^1} e^{2\beta-2\mu} |V'(\phi)|(s, \theta)] ds + \sup_{\theta \in S^1} \kappa(t, \theta) \\
&\leq C + \int_{t_0}^t C(s) [\sup_{\theta \in S^1} |\phi_\zeta|(s, \theta) \ln(1 + \bar{u}_1^2(s)) \\
&+ \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\phi_s(s, \theta)] ds + \tilde{C} \left| \int_{t_0}^t \phi_s(s, \theta) V'(\phi(s, \theta)) ds \right| + \sup_{\theta \in S^1} \kappa(t, \theta) \\
&\leq C + \int_{t_0}^t C(s) [\sup_{\theta \in S^1} |\phi_\xi|(s, \theta) \ln(1 + \bar{u}_1^2(s)) + \sup_{\theta \in S^1} \kappa(t, \theta) \\
&+ \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\phi_s(s, \theta)] ds + \tilde{C} \sup_{\theta \in S^1} |V(\phi(t, \theta))|, \tag{3.86}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta \in S^1} |\phi_\xi|(t, \theta) &\leq \sup_{\theta \in S^1} |\phi_\xi(t_0, \theta)| + \int_{t_0}^t C(s) [\sup_{\theta \in S^1} |\phi_u|(s, \theta) \ln(1 + \bar{u}_1^2(s)) \\
&+ \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\phi_s(s, \theta)| + \sup_{\theta \in S^1} e^{2\beta-2\mu} |V'(\phi)|(s, \theta)] ds + \sup_{\theta \in S^1} \tilde{\kappa}(t, \theta) \\
&\leq C + \sup_{\theta \in S^1} \tilde{\kappa}(t, \theta) + \int_{t_0}^t C(s) [\sup_{\theta \in S^1} |\phi_\xi|(s, \theta) \ln(1 + \bar{u}_1^2(s)) \\
&+ \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\phi_s(s, \theta)] ds + \tilde{C} \left| \int_{t_0}^t \phi_s(s, \theta) V'(\phi(s, \theta)) ds \right| \\
&\leq C + \sup_{\theta \in S^1} \tilde{\kappa}(t, \theta) + \int_{t_0}^t C(s) [\sup_{\theta \in S^1} |\phi_\xi|(s, \theta) \ln(1 + \bar{u}_1^2(s)) \\
&+ \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\phi_s(s, \theta)] ds + \tilde{C} \sup_{\theta \in S^1} |V(\phi(t, \theta))|, \tag{3.87}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\kappa(t, \theta) &= \int_{t_0}^t \alpha [(2A_\theta H(G-1) - 2\mu_\theta(G + AH)^2) e^{-2(\tau-2\mu)} - 4\mu_\theta H^2 s^2 e^{-2\tau}] \\
&\cdot \phi_\theta(s, \theta - (N(s) - t_0)) ds, \tag{3.88}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\kappa}(t, \theta) &= \int_{t_0}^t \alpha [(2A_\theta H(G-1) - 2\mu_\theta(G + AH)^2) e^{-2(\tau-2\mu)} - 4\mu_\theta H^2 s^2 e^{-2\tau}] \\
&\times \phi_\theta(s, \theta + (N(s) - t_0)) ds \tag{3.89}
\end{aligned}$$

A présent, nous allons contrôler $\kappa(t, \theta)$ et $\tilde{\kappa}(t, \theta)$. Le lemme 3.1, et l'estimation de β permettent de contrôler ϕ_θ , A_θ , $e^{-2(\tau-2\mu)}$ et μ_θ d'une part, d'autre part, comme

$$(K - AJ)^2 \lesssim \bar{E}^\circ \quad \text{et} \quad K - AJ = -\frac{t^3 e^{-2\tau}}{\sqrt{\alpha}} H_t,$$

cette relation permet de borner H_t et donc H , pour contrôler G , nous utilisons les équations (1.100) – (1.103) qui vont permettre d'avoir une estimation de $\Gamma = G_t + AH_t$. Il reste donc à contrôler S_{13} , S_{12} , ρ_2 et ρ_3 . On a

$$\begin{aligned}\sqrt{\alpha}\tilde{S}_{1k} &= \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{v^1 v^k}{v^0} dv \quad k \in \{2; 3\} \\ &\leq \|f_0\|_{\infty} \bar{v}_k \int_{\mathbb{R}} \sup |v^1| \frac{dv^1}{\sqrt{1 + (v^1)^2}} \\ &\leq C\bar{u}_1 \ln(\bar{u}_1).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$|\kappa(t, \theta)| \leq C \int_{t_0}^t C\bar{u}_1 \ln(\bar{u}_1)(s, \theta - (N(s) - t_0)) ds, \quad (3.90)$$

$$|\tilde{\kappa}(t, \theta)| \leq C \int_{t_0}^t C\bar{u}_1 \ln(\bar{u}_1)(s, \theta + (N(s) - t_0)) ds \quad (3.91)$$

On additionne les équations (3.86), (3.87), (3.90) et (3.91) et on obtient (3.81). ■

Dans la suite, nous nous proposons de borner ψ ce qui va assurer le contrôle de Υ .

Lemme 3.14. *Pour tout $t \in (t_0, t_i]$ et $\theta \in S^1$, nous avons :*

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^2(t) &\leq B + \int_{t_0}^t (C(s) + B \ln(1 + \bar{u}_1^2(s))) \bar{u}_1^2(s) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t (B\Upsilon + B\bar{u}_1^2) ds + \int_{t_0}^t \bar{u}_1^2 \varrho(s) ds,\end{aligned} \quad (3.92)$$

où B est une constante positive non nulle, $C(s)$ et $\varrho(s)$ étant des constantes positives dépendantes de s .

Preuve : Le système caractéristique (2.47) – (2.50) de l'équation de Vlasov nous donne :

$$\begin{aligned}\frac{du_1^2}{ds} &= 2u_1 \frac{du_1}{ds} = 2u_1 \left(\frac{\alpha_s}{2\sqrt{\alpha}} v_1 + \sqrt{\alpha} \frac{dv_1}{ds} \right) \\ &= \frac{\alpha_s}{\alpha} u_1^2 + \frac{2\sqrt{\alpha} u_1}{v_0} (e^{2\beta-2\mu} (\beta_\theta - \mu_\theta) + e^{2\beta-4\mu} (\beta_\theta - 2\mu_\theta) v_2 \\ &\quad + \frac{e^{2\beta}}{t^2} (v_3 - Av_2) [(v_3 - Av_2)\beta_\theta - A_\theta v_2] \\ &\quad + \frac{2e^{2\beta} u_1}{t} \left(\frac{(K - AJ)(v_3 - Av_2)}{t^2} + e^{-4\mu} Jv_2 \right).\end{aligned} \quad (3.93)$$

Par intégration, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|u_1^2(t_0) - u_1^2(t)| &= \left| \int_t^{t_0} \left(\frac{\alpha_t}{\alpha} u_1^2 + \frac{2\sqrt{\alpha}u_1}{v_0} (e^{2\beta-2\mu}(\beta_\theta - \mu_\theta) + e^{2\beta-4\mu}(\beta_\theta - 2\mu_\theta)v_2 \right. \right. \\
&\quad + \frac{e^{2\beta}}{s^2} (v_3 - Av_2)[(v_3 - Av_2)\beta_\theta - A_\theta v_2] \\
&\quad \left. \left. + \frac{2e^{2\beta}u_1}{s} \left(\frac{(K - AJ)(v_3 - Av_2)}{s^2} + e^{-4\mu} Jv_2 \right) \right) ds \right|. \tag{3.94}
\end{aligned}$$

Nous allons estimer un à un les termes du membre de droite de l'équation (3.94).

Le premier terme est majoré de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \left| \frac{\alpha_s}{\alpha} u_1^2 \right| ds &\leq \int_{t_0}^t \left| \frac{\alpha_s}{\alpha} \bar{u}_1^2 \right| ds \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t ((C(s) + D \ln(1 + \bar{u}_1^2(s))) \bar{u}_1^2(s) ds \right|. \tag{3.95}
\end{aligned}$$

La majoration du second terme du membre de droite de (3.94) va se faire en utilisant l'équation (3.25) et on obtient : $\sqrt{\alpha}|\beta_\theta| \leq B\Upsilon + D\bar{u}_1^2$, où D et B sont des constantes positives qui dépendent de t et f .

Par ailleurs, la définition (3.58) de Υ nous permet d'avoir les inégalités suivantes

$$\sqrt{\alpha}|\mu_\theta| \leq \sqrt{\Upsilon}, \tag{3.96}$$

$$\sqrt{\alpha} \frac{e^{2\mu}|A_\theta|}{t} \leq 2\Upsilon + 1/2\sqrt{\Upsilon}. \tag{3.97}$$

Comme $e^{2\beta-2\mu}$, $e^{2\beta}A$, le support de f en v_2 et v_3 ainsi que β_θ sont bornés, nous utilisons le fait que $|u_1| \leq |u_0|$, pour avoir suivant l'équation caractéristique l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_0}^t \frac{2\sqrt{\alpha}u_1}{v_0} \left(e^{2\beta-2\mu}(\beta_\theta - \mu_\theta) + e^{2\beta-4\mu}(\beta_\theta - 2\mu_\theta)v_2 + \frac{e^{2\beta}}{s^2} (v_3 - Av_2)[(v_3 - Av_2)\beta_\theta - A_\theta v_2] \right) ds \right| \\
\leq B + \left| \int_{t_0}^t (D\Upsilon + E\bar{u}_1^2) ds \right|, \tag{3.98}
\end{aligned}$$

B , D et E étant des constantes strictement positives dépendant des données initiales.

Concernant le dernier terme de la relation (3.94), nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^t \frac{2e^{2\beta}u_1}{s^3} \left(\frac{(K - AJ)(v_3 - Av_2)}{s^2} + e^{-4\mu} Jv_2 \right) ds \\
&\leq \int_{t_0}^t \frac{2e^\beta \bar{u}_1}{t_0^3} \left(\max_{\theta \in S^1} e^\beta |K - AJ|(s, \cdot) (\bar{v}_3 + |A|\bar{v}_2) + e^{\beta-2\mu} \bar{v}_2 \left(\max_{\theta \in S^1} e^{\beta-2\mu} |J|(s, \cdot) \right) \right) ds. \tag{3.99}
\end{aligned}$$

En utilisant les lemmes 3.8 et 3.10, l'inégalité $2a \leq a^2 + 1$, et en remplaçant respectivement \bar{u}_1 , $\max_{\theta \in S^1} e^\beta |K - AJ|(t, \cdot)$ et $\max_{\theta \in S^1} e^{\beta-2\mu} |J|(t, \cdot)$ par leurs carrés respectifs, nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \frac{2e^{2\beta} u_1}{s^3} \left(\frac{(K - AJ)(v_3 - Av_2)}{s^2} + e^{-4\mu} Jv_2 \right) ds \\ & \leq B + \left| \int_{t_0}^t u_1^2 \varrho(s) ds \right|, \end{aligned} \quad (3.100)$$

où B est une constante et $\varrho(t)$ est une fonction strictement positive dont l'intégrale est uniformément bornée. En utilisant (3.95), (3.98) et (3.100), nous avons par conséquent (3.92), une majoration de \bar{u}_1 d'où le résultat. ■

Dans la suite, nous allons trouver une borne supérieure à ψ . Pour le faire, nous allons utiliser les équations (3.62) et (3.63) pour contrôler $\Upsilon(t)$. De ce fait, nous énonçons le lemme suivant.

Lemme 3.15. *Soit $(t, \theta) \in (t_0; t_i] \times S^1$, nous avons*

$$\Lambda(t) \leq C + C(t) \int_{[t_0; t]} (\Lambda(s))^3 \ln \Lambda(s) ds, \quad (3.101)$$

où $\Lambda(t)$ est définie en (3.75).

Preuve : Nous allons dans un premier temps, utiliser les équations (3.62) et (3.63) que nous allons intégrer le long des courbes suivant les champs de Killing ∂_ξ , ∂_ς en (t, θ) ; en additionnant les équations obtenues, pour avoir

$$\begin{aligned} \Upsilon(t, \theta) & \leq C_1 + \int_{t_0}^t \left| \frac{\alpha_s}{\alpha} \right| \left(\left(\frac{\Upsilon}{2s} + \frac{1}{2s} + \Upsilon \right) + \frac{3\Upsilon}{2s} \right) (s, \theta - N(s) + t_0) ds, \\ & + \int_{t_0}^t \left| \frac{\alpha_s}{\alpha} \right| \left(\left(\frac{\Upsilon}{2s} + \frac{1}{2s} + g \right) + \frac{3\Upsilon}{2s} \right) (s, \theta + N(s) - t_0) ds, \end{aligned} \quad (3.102)$$

où C_1 est une constante positive dépendant de Υ sur l'hypersurface initiale qui est une quantité finie pour des raisons de compacité. Par la suite, nous utilisons la relation (3.77) et prenons le maximum de $\theta \in S^1$,

$$\max_{\theta \in S^1} \Upsilon(t, \theta) \leq C_2 + \int_{t_0}^t (C(s) + B \ln(1 + \bar{u}_1^2(s))) \max_{\theta \in S^1} \Upsilon(s, \theta) ds, \quad (3.103)$$

C_2 étant une constante positive et $C(t)$ une fonction positive dont l'intégrale est bornée. En combinant (3.92) et (3.103), nous déduisons

$$\psi(t) \leq C_3 + \int_{t_0}^t \varrho(s) \psi(s) \ln \psi(s) ds \quad (3.104)$$

avec $C_3 > 0$ et $\varrho(s)$ est une fonction positive dont l'intégrale est uniformément bornée.

$$\varrho(s, \theta) = -2se^{2(\beta-\mu)} \left(2V(\phi) + 16\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1 + e^{-2\mu}v_2^2 + e^{2\mu}t^2(v_3 - Av_2)^2}{|v_0|} dv \right).$$

En multipliant l'inégalité (3.104) par $\varrho \ln \psi$ on obtient

$$\psi(t)\varrho(t)\ln\psi(t) \leq \left(B + \int_{t_0}^t \varrho(s)\psi(s)\ln\psi(s)ds \right) \varrho(t)\ln\psi(t), \quad (3.105)$$

puis en majorant le terme de droite de (3.105) on obtient

$$\psi(t)\varrho(t)\ln\psi(t) \leq \left(B + \int_{t_0}^t \varrho(s)\psi(s)\ln\psi(s)ds \right) \varrho(t)\ln \left(B + \int_{t_0}^t \varrho(s)\psi(s)\ln\psi(s)ds \right). \quad (3.106)$$

En divisant de par et d'autre par

$$\left(B + \int_{t_0}^t \varrho(s)\psi(s)\ln\psi(s)ds \right) \ln \left(B + \int_{t_0}^t \varrho(s)\psi(s)\ln\psi(s)ds \right),$$

nous avons

$$\frac{\varrho\psi\ln\psi}{\left(B + \int_{t_0}^t \varrho(s)\psi(s)\ln\psi(s)ds \right) \ln \left(B + \int_{t_0}^t \varrho(s)\psi(s)\ln\psi(s)ds \right)} \leq \varrho. \quad (3.107)$$

En utilisant l'intégrale classique

$$\int \frac{U'}{U \ln U} = \int \frac{\frac{U'}{U}}{\ln U} = \ln |\ln U| + Cste,$$

qu'on applique sur l'inégalité (3.107) pour avoir finalement l'inégalité suivante

$$\chi(s) + \psi(s)\chi^2(s) \leq \Lambda(s) + \Lambda^3(s) \lesssim \Lambda^3(s) \quad \text{car } \Lambda(s), \Lambda^2(s) \leq \Lambda^3(s). \quad (3.108)$$

Ainsi, en additionnant (3.104) et (3.81) puis en utilisant (3.108) on obtient (3.101). ■

Proposition 3.1. α_θ et τ_θ sont bornés sur $]t_0; t_i] \times S^1$.

Preuve : D'après la relation (1.95), nous avons :

$$\left| \frac{\tau_\theta}{t} + \frac{\alpha_\theta}{2t\alpha} \right| = \left| 2\mu_t\mu_\theta + \frac{e^{4\mu}}{2t^2}A_tA_\theta - 8\pi \frac{\sqrt{\alpha}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f v_1 dv_1 dv_2 dv_3 + \phi_t\phi_\theta \right|. \quad (3.109)$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{\alpha}\tau_\theta}{t} + \frac{\alpha_\theta}{2t\sqrt{\alpha}} \right| &= \left| 2\sqrt{\alpha}\mu_t\mu_\theta + \frac{e^{4\mu}}{2t^2}\sqrt{\alpha}A_tA_\theta - 8\pi \frac{\alpha}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f v_1 dv_1 dv_2 dv_3 + \sqrt{\alpha}\phi_t\phi_\theta \right| \\ &\leq \mu_t^2 + \alpha\mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{t^2}(A_t^2 + \alpha A_\theta^2) + 8\pi \frac{\alpha}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f v_1 dv_1 dv_2 dv_3 \\ &\quad + \frac{1}{2}(\phi_t^2 + \alpha\phi_\theta^2). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Or, nous avons

$$\frac{\alpha}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f v_1 dv_1 dv_2 dv_3 \leq \frac{\alpha}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f |v_0| dv_1 dv_2 dv_3.$$

Ainsi

$$\int_{S^1} \left| \frac{\tau_\theta}{t} + \frac{\alpha_\theta}{2t\alpha} \right| d\theta \leq \int_{S^1} \frac{\tau_t}{t\sqrt{\alpha}} d\theta \leq \tilde{E}^\circ. \quad (3.111)$$

Par ailleurs, nous utilisons l'équation de contrainte (1.94) et nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_t}{\alpha} &= -16\pi\alpha^{\frac{1}{2}} e^{2(\beta-\mu)} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(1 + \alpha e^{-2\beta} v_2^2 + (\alpha)^{-1} e^{2\beta} t^2 (v_3 - Av_2)^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \\ \frac{-e^{2\beta-4\mu}}{t} J^2 &- \frac{e^{2\beta}}{t^3} (K - AJ)^2 - 2te^{2(\beta-\mu)} V(\phi). \end{aligned} \quad (3.112)$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{\alpha_s}{\alpha}(\theta, s) ds &= \int_{t_0}^t \left[-16\pi\alpha^{\frac{1}{2}} e^{2(\beta-\mu)} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(1 + \alpha e^{-2\beta} v_2^2 + (\alpha)^{-1} e^{2\beta} t^2 (v_3 - Av_2)^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^t \left[\frac{-e^{2\beta-4\mu}}{s} J^2 - \frac{e^{2\beta}}{s^3} (K - AJ)^2 - 2se^{2(\beta-\mu)} V(\phi) \right] (\theta, s) ds, \end{aligned}$$

par la suite

$$\begin{aligned} \ln \frac{\alpha(t, \theta)}{\alpha(t_0, \theta)} &= \int_{t_0}^t \left[-16\pi\alpha^{\frac{1}{2}} e^{2(\beta-\mu)} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(1 + \alpha e^{-2\beta} v_2^2 + (\alpha)^{-1} e^{2\beta} s^2 (v_3 - Av_2)^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \right] ds \\ &+ \int_{t_0}^t \left[\frac{-e^{2\beta-4\mu}}{s} J^2 - \frac{e^{2\beta}}{s^3} (K - AJ)^2 - 2e^{2(\beta-\mu)} V(\phi) \right] (\theta, s) ds. \end{aligned}$$

Nous définissons les variables nouvelles suivantes

$$\hat{v}^0 = -e^{-\beta+\mu} v_0, \quad (3.113)$$

$$\hat{v}^1 = \sqrt{\alpha} e^{-\beta+\mu} v_1, \quad (3.114)$$

$$\hat{v}^2 = e^{-\beta} v_2, \quad (3.115)$$

$$\hat{v}^3 = \frac{e^\mu}{t} (v_3 - Av_2). \quad (3.116)$$

Ainsi, on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_\theta}{\alpha}(t, \theta) &= -2t \int_{t_0}^t [\phi_\theta V'(\theta) + 2(\beta_\theta - \mu_\theta)] e^{2\beta-4\mu} ds - \int_{t_0}^t \frac{2e^{2\beta}}{s^3} (K - AJ)^2 \beta_\theta ds + \frac{\alpha_\theta}{\alpha}(t_0, \theta) \\ &- \int_{t_0}^t \left[\frac{(\beta_\theta - 2\mu_\theta) J^2 + J_\theta J}{s} (2e^{2\beta-4\mu}) + \frac{2e^{2\beta}}{s^3} (K - AJ)(K_\theta - A_\theta J - AJ_\theta) \right] ds \\ &- \int_{t_0}^t \left[4t(\beta_\theta - \mu_\theta) e^{2\beta-2\mu} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(1 + (\hat{v}^2)^2 + (\hat{v}^3)^2)}{\hat{v}^0} d\hat{v}^1 d\hat{v}^2 d\hat{v}^3 \right] ds. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Ici, les \hat{v}^η , $\eta \in \{0; 1; 2; 3\}$ sont définis par les relations (3.113) – (3.116).

Cette égalité (3.117) nous permet d'avoir l'inégalité

$$|\alpha_\theta| \leq D' + \int_t^{t_i} |\alpha_\theta(s)| \varrho(s) ds. \quad (3.118)$$

Ici, $D' > 0$ est une constante dépendant des données initiales et $\varrho(t)$ est une fonction positive bornée sur $]t_0, t_i]$. Nous utilisons l'inégalité de Gronwall, pour avoir finalement

$$|\alpha_\theta(t)| \leq D'' e^{(\int_t^{t_i} \varrho(s) ds)}. \quad (3.119)$$

Enfin, nous utilisons l'équation (1.95) pour borner τ_θ . ■

Le système caractéristique relatif à l'équation de Vlasov (1.92) est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Theta}{ds} = -\frac{\partial V_0}{\partial V_1}, \\ \frac{dV^1}{ds} = -(\tau_\theta - \mu_\theta + \frac{\alpha_\theta}{2\alpha})\sqrt{\alpha}V^0 - (\tau_t - \mu_t)V^1 - e^{-\tau}(e^{2\mu}\Gamma V^2 + tH_t V^3) \\ \quad - \sqrt{\alpha} \frac{e^{2\mu} A_\theta}{t} \frac{V^2 V^3}{V^0} - \sqrt{\alpha} \frac{\mu_\theta}{V^0} ((V^3)^2 - (V^2)^2), \\ \frac{dV^2}{ds} = -\mu_t V^2 - \sqrt{\alpha} \mu_\theta \frac{V^1 V^2}{V^0}, \\ \frac{dV^3}{ds} = -\left(\frac{1}{s} - \mu_t\right) V^3 + \sqrt{\alpha} \mu_\theta \frac{V^1 V^3}{V^0} - \frac{e^{2\mu}}{s} \left(A_t + \sqrt{\alpha} A_\theta \frac{V^1}{V^0}\right) V^2. \end{array} \right. \quad (3.120)$$

Lemme 3.16. *Soit $\Theta(s) = \Theta(s, t, \theta, v)$ et $V^k(s) = V^k(s, t, \theta, v)$, $k = 1, 2, 3$ une solution du système caractéristique (3.120). Posons ∂ étant comme soit ∂_t , soit ∂_θ , soit ∂_v et définissons*

$$\Psi = \alpha^{-1/2} \partial \Theta, \quad (3.121)$$

$$\begin{aligned} Z^1 &= \partial V^1 + \left(\frac{\tau_t V^0}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\mu_t V^0}{\sqrt{\alpha}} \frac{(V^0)^2 - (V^1)^2 + (V^2)^2 - (V^3)^2}{(V^0)^2 - (V^1)^2} \right) \partial \Theta \\ &\quad + \left(\mu_\theta \frac{V^1((V^2)^2 - (V^3)^2)}{(V^0)^2 - (V^1)^2} - \frac{A_t e^{2\mu}}{\sqrt{\alpha} t} \frac{V^0 V^2 V^3}{(V^0)^2 - (V^1)^2} \right) \partial \Theta \\ &\quad + \left(A_\theta \frac{V^1 V^2 V^3}{(V^0)^2 - (V^1)^2} \right) \partial \Theta, \end{aligned} \quad (3.122)$$

$$Z^2 = \partial V^2 + V^2 \mu_\theta \partial \Theta, \quad (3.123)$$

$$Z^3 = \partial V^3 - \left(V^3 \mu_\theta - \frac{e^{2\mu}}{s} A_\theta \right) \partial \Theta. \quad (3.124)$$

Alors, on obtient une matrice $M = \{a_{\varsigma v}\}$, $\varsigma, v = 0, 1, 2, 3$ telle que

$$\Omega := (\Psi, Z^1, Z^2, Z^3)^T$$

satisfait

$$\frac{d\Omega}{ds} = M\Omega, \quad (3.125)$$

et les éléments de la matrice $a_{\zeta\nu} = a_{\zeta\nu}(s, \Theta(s), V^k(s))$ sont tous uniformément bornés sur $[t_0, T[$

Preuve : Nous allons illustrer cela avec les termes Z^2 et Z^3

$$\begin{aligned} \frac{dZ^2}{ds} &= \frac{d}{ds}(\partial V^2 + V^2 \mu_\theta \partial \Theta) \\ &= \partial \left(\frac{dV^2}{ds} \right) + \frac{dV^2}{ds} \mu_\theta \partial \Theta \\ &\quad + V^2 \left(\mu_{t\theta} + \mu_{\theta\theta} \frac{d\Theta}{ds} \right) \partial \Theta + V^2 \mu_\theta \partial \left(\frac{d\Theta}{ds} \right). \end{aligned} \quad (3.126)$$

A présent, en utilisant les équations 1 et 3 du système (3.120) pour remplacer $d\Theta/ds$ et dV^2/ds , les quantités de membre de droite de la relation (3.126) deviennent alors

$$\begin{aligned} &\partial \left(-\mu_t V^2 - \sqrt{\alpha} \mu_\theta \frac{V^1 V^2}{V^0} \right) + \left(-\mu_t V^2 - \sqrt{\alpha} \mu_\theta \frac{V^1 V^2}{V^0} \right) \mu_\theta \partial \Theta \\ &+ V^2 \left(\mu_{t\theta} + \mu_{\theta\theta} \sqrt{\alpha} \frac{V^1}{V^0} \right) \partial \Theta + V^2 \mu_\theta \left(\frac{\alpha_\theta V^1}{2\sqrt{\alpha} V^0} \partial \Theta + \sqrt{\alpha} \partial \left(\frac{V^1}{V^0} \right) \right). \end{aligned}$$

En dérivant le premier terme suivant ∂ , nous trouvons que toutes les dérivées secondes et les termes contenant α_θ s'annulent. Ensuite, comme

$$-\sqrt{\alpha} \mu_\theta \partial \left(\frac{V^1 V^2}{V^0} \right) + \sqrt{\alpha} \mu_\theta V^2 \partial \left(\frac{V^1}{V^0} \right) = -\sqrt{\alpha} \mu_\theta \frac{V^1}{V^0} \partial V^2 \quad (3.127)$$

nous avons

$$\frac{dZ^2}{ds} = \left(-\mu_t V^2 - \sqrt{\alpha} \mu_\theta \frac{V^1 V^2}{V^0} \right) \mu_\theta \partial \Theta - \left(\mu_t + \sqrt{\alpha} \mu_\theta \frac{V^1}{V^0} \right) \partial V^2. \quad (3.128)$$

On obtient immédiatement

$$\frac{dZ^2}{ds} = - \left(\mu_t + \sqrt{\alpha} \mu_\theta \frac{V^1}{V^0} \right) Z^2.$$

De même,

$$\begin{aligned} \frac{dZ^3}{ds} &= \frac{d}{ds}(\partial V^3 - (V^3 \mu_\theta - \frac{e^{2\mu}}{s} V^2 A_\theta) \partial \Theta) \\ &= \partial \left(\frac{dV^3}{ds} \right) - \frac{dV^3}{ds} \mu_\theta \partial \Theta - V^3 \left(\mu_{t\theta} + \mu_{\theta\theta} \sqrt{\alpha} \frac{V^1}{V^0} \right) \partial \Theta \\ &\quad - V^3 \mu_\theta \partial \left(\frac{d\Theta}{ds} \right) + \frac{d}{ds} \left(\frac{e^{2\mu}}{s} \right) V^2 A_\theta \partial \Theta + \frac{dV^2}{ds} \frac{e^{2\mu}}{s} A_\theta \partial \Theta \\ &\quad + V^2 \left(A_{t\theta} + A_{\theta\theta} \frac{d\Theta}{ds} \right) \frac{e^{2\mu}}{s} \partial \Theta + \frac{e^{2\mu}}{s} A_\theta V^2 \partial \left(\frac{d\Theta}{ds} \right). \end{aligned} \quad (3.129)$$

En utilisant les équations 1, 3 et 4 du système (3.120), on substitue $d\Theta/ds$, dV^2/ds et dV^3/ds et on a

$$\begin{aligned} & \partial \left[-\left(\frac{1}{s} - \mu_t\right)V^2 + \sqrt{\alpha}\mu_\theta \frac{V^1V^3}{V^0} - \frac{e^{2\mu}}{s}(A_t + \sqrt{\alpha}A_\theta \frac{V^1}{V^0})V^2 \right] \\ & + \left[-\left(\frac{1}{s} - \mu_t\right)V^2 + \sqrt{\alpha}\mu_\theta \frac{V^1V^3}{V^0} - \frac{e^{2\mu}}{s}(A_t + \sqrt{\alpha}A_\theta \frac{V^1}{V^0})V^2 \right] \mu_\theta \partial\Theta \\ & - V^3(\mu_{t\theta} + \mu_{\theta\theta}\sqrt{\alpha}\frac{V^1}{V^0})\partial\Theta - V^3\mu_\theta \partial \left(\sqrt{\alpha}\frac{V^1}{V^0} \right) + \frac{2\mu_t}{s}V^2A_\theta\partial\Theta e^{2\mu} \\ & - \frac{1}{s^2}e^{2\mu}V^2A_\theta\partial\Theta + (-\mu_tV^2 - \sqrt{\alpha}\mu_\theta\frac{V^1V^2}{V^0})\frac{e^{2\mu}}{s}A_\theta\partial\Theta \\ & + \frac{e^{2\mu}}{s}V^2(A_{t\theta} + A_{\theta\theta}\sqrt{\alpha})\partial\Theta + \frac{e^{2\mu}}{s}V^2A_\theta\partial \left(\sqrt{\alpha}\frac{V^1}{V^0} \right). \end{aligned}$$

En dérivant le premier terme suivant ∂ , nous trouvons que toutes les dérivées secondes et les termes contenant α_θ s'annulent. Par ailleurs, comme

$$-\sqrt{\alpha}\mu_\theta \partial \left(\frac{V^1V^3}{V^0} \right) + \sqrt{\alpha}\mu_\theta V^3 \partial \left(\frac{V^1}{V^0} \right) = -\sqrt{\alpha}\mu_\theta \frac{V^1}{V^0} \partial V^3, \quad (3.130)$$

nous avons, le premier terme du membre de droite de l'égalité (3.129) qui devient

$$\begin{aligned} & -\partial \left(\frac{1}{s} - \mu_t \right) V^3 - \left(\frac{1}{s} - \mu_t \right) \partial V^3 - \partial \left[\frac{e^{2\mu}}{s} \left(A_t + \sqrt{\alpha}A_\theta \frac{V^1}{V^0} \right) \right] V^2 \\ & - \frac{e^{2\mu}}{s} \left(A_t + \sqrt{\alpha}A_\theta \frac{V^1}{V^0} \right) \partial V^2 - \left(\frac{1}{s} - \mu_t \right) V^3 \mu_\theta \partial\Theta - \frac{e^{2\mu}}{s} \left(A_t + \sqrt{\alpha}A_\theta \frac{V^1}{V^0} \right) V^2 \mu_\theta \partial\Theta \\ & - V^3 \left(\mu_t + \mu_\theta \sqrt{\alpha} \frac{V^1}{V^0} \right) \partial\Theta + \frac{2\mu_t}{s} V^2 A_\theta e^{2\mu} \partial\Theta. \end{aligned}$$

On va faire recours ici à l'équation d'évolution (1.98) et utiliser aussi le fait que

$$\begin{aligned} \partial \left(\frac{e^{2\mu}}{s} \right) &= -\frac{1}{s^2}e^{2\mu} + 2\partial\mu \frac{e^{2\mu}}{s} \\ &= -\left(\frac{1}{s} - \mu_t\right)\frac{e^{2\mu}}{s} + \left(\mu_t + 2\mu_\theta \frac{d\Theta}{ds}\right)\frac{e^{2\mu}}{s}, \end{aligned}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{1}{s} - \mu_t\right)\partial V^3 + \left(\frac{1}{s} - \mu_t\right)(V^3\mu_\theta - \frac{e^{2\mu}}{s}A_\theta)\partial\Theta \\ & - \frac{e^{2\mu}}{s}(A_t + \sqrt{\alpha}A_\theta \frac{V^1}{V^0})\partial V^2 - \frac{e^{2\mu}}{s}(A_t + \sqrt{\alpha}A_\theta \frac{V^1}{V^0})V^2\mu_\theta\partial\Theta \\ & = -\left(\frac{1}{s} - \mu_t\right)Z^2 - \frac{e^{2\mu}}{s}(A_t + \sqrt{\alpha}A_\theta \frac{V^1}{V^0})Z^3. \end{aligned}$$

On obtient par le même procédé

$$\frac{dZ^3}{ds} = a_{30}\Psi + a_{32}Z^2 + a_{33}Z^3 \quad \text{avec } a_{31} = 0,$$

avec a_{32} contenant le terme $\frac{1}{s} - \mu_t$, a_{33} contenant l'expression $\frac{e^{2\mu}}{s}(A_t + \sqrt{\alpha}A_\theta \frac{V^1}{V^0})$.

On a donc l'application $(\partial\Theta, \partial V^k) \mapsto (\Psi, Z^k)$ qui est inversible. Il s'en suit que les éléments de la matrice a_{2k} , $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (ici, seul a_{22} est non nul) et a_{3k} , $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ (ici, seul a_{31} est nul) sont uniformément bornés sur $]t_0, T]$. Les calculs pour les autres termes se font de façon analogue. Pour le terme Z^1 , nous allons recourir aux équations d'évolution (1.97), (1.98) et (1.99). Ainsi, l'élément de la matrice a_{10} va contenir τ_θ et $\alpha_\theta/2\alpha$, mais qui se combinent et s'écrivent sous la forme de la dérivée de β . Les dérivées des termes $e^{-\tau}\Gamma$ et $e^{-\tau}H_t$ apparaissent également. Pour contrôler ces quantités, nous utilisons les équations auxiliaires, pour estimer les dérivées de $e^{-\tau}H_t$. Nous utilisons (1.102) et (1.103), et pour $e^{-\tau}\Gamma$ on se réfère à (1.100) et (1.101), par exemple, on utilise (1.100) pour contrôler $\partial_\theta(e^{-\tau}\Gamma)$, comme suit

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(e^{-\tau}\Gamma) = -2e^{\tau+\beta-4\mu}J_\theta - e^{\tau-\beta-4\mu}\Gamma \frac{\partial}{\partial\theta}(e^{-\beta+4\mu}), \quad (3.131)$$

et toutes les composantes du côté droit de cette équation (3.131) ont été bornées précédemment. ■

Le lemme 3.16 nous permet directement d'en déduire que $|\Omega|$ est borné uniformément sur $[t_0, t_i]$. Cependant, comme le système (3.121) – (3.124) est inversible et ses coefficients uniformément bornés, nous pouvons conclure que les $|\partial V^k|$, avec $k \in \{1, 2, 3\}$ sont également uniformément bornés.

Lemme 3.17. *Le système d'équations caractéristique (3.120), s'écrit encore*

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{ds} &= \sqrt{\alpha} \frac{V^0}{V^1} \\ \frac{dV^1}{ds} &= \frac{V^0}{\Theta} + \frac{\sqrt{\alpha}e^{2\tau}}{t^3}(K - AJ)(V^3 - AV^2) + \frac{\sqrt{\alpha}e^{2\tau-4\mu}}{t}JV^2 \\ \frac{dV^2}{ds} &= -\mu_t V^2 - \sqrt{\alpha}\mu_\theta \frac{V^1V^2}{V^0} \\ \frac{dV^3}{ds} &= -\left(\frac{1}{s} - \mu_t\right)V^3 + \sqrt{\alpha}\mu_\theta \frac{V^1V^3}{V^0} - \frac{e^{2\mu}}{s}\left(A_t + \sqrt{\alpha}A_\theta \frac{V^1}{V^0}\right)V^2 \end{cases} \quad (3.132)$$

Preuve : L'équation 1 du système (3.120) d'une part, se reformule

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial v_1} &= \frac{-\partial\sqrt{\alpha e^{2(\tau-\mu)} + \alpha v_1^2 + \alpha e^{2(\tau-2\mu)}v_2^2 + \alpha t^{-2}e^{2\tau}(v_3 - Av_2)^2}}{\partial v_1} \\ &= \frac{-2\alpha v_1}{2\sqrt{\alpha e^{2(\tau-\mu)} + \alpha v_1^2 + \alpha e^{2(\tau-2\mu)}v_2^2 + \alpha t^{-2}e^{2\tau}(v_3 - Av_2)^2}} \\ &= \alpha \frac{v_1}{v_0} = \alpha \frac{g_{11}v^1}{g_{00}v^0} = \alpha \frac{g_{11}v^1}{-\sqrt{\alpha}g_{11}v^0} = -\sqrt{\alpha} \frac{v^1}{v^0}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_0}{\partial \theta} &= \frac{-\partial \sqrt{\alpha e^{2(\tau-\mu)} + \alpha v_1^2 + \alpha e^{2(\tau-2\mu)} v_2^2 + \alpha t^{-2} e^{2\tau} (v_3 - Av_2)^2}}{\partial \theta} \\
&= \frac{-\partial(\sqrt{\alpha} e^{\tau-\mu})}{\partial \theta} \sqrt{1 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2} \\
&\quad - \sqrt{\alpha} e^{\tau-\mu} \frac{\partial \sqrt{1 + e^{-2(\tau-\mu)} (v_1)^2 + e^{-2\mu} (v_2)^2 + t^{-2} e^{2\mu} (v_3 - Av_2)^2}}{\partial \theta} \\
&= -(\tau_\theta - \mu_\theta + \frac{\alpha_\theta}{2\alpha}) \sqrt{\alpha} v^0 - \sqrt{\alpha} e^{\tau-\mu} \frac{\partial \sqrt{1 + e^{-2(\tau-\mu)} (v_1)^2 + e^{-2\mu} (v_2)^2 + \frac{e^{2\mu}}{t^2} (v_3 - Av_2)^2}}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

En contractant, on a finalement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_0}{\partial \theta} &= -(\tau_\theta - \mu_\theta + \frac{\alpha_\theta}{2\alpha}) \sqrt{\alpha} v^0 - (\tau_t - \mu_t) v^1 \\
&\quad + \sqrt{\alpha} \frac{e^{2\mu} A_\theta}{t} \frac{v^2 v^3}{v^0} - \sqrt{\alpha} \frac{\mu_\theta}{v^0} ((v^3)^2 - (v^2)^2). \tag{3.134}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a $J = -\frac{te^{-2\tau+4\mu}}{\sqrt{\alpha}}(G_t + AH_t) = -\frac{te^{-2\tau+4\mu}}{\sqrt{\alpha}}\Gamma$ et $K = AJ - t^3 \frac{e^{-2\tau}}{\sqrt{\alpha}} H_t$ d'où en contractant, on obtient

$$\sqrt{\alpha} \frac{e^{2\tau}}{t^3} (K - AJ)(v_3 - Av_2) + \sqrt{\alpha} \frac{e^{2\tau-4\mu}}{t} J v_2 = e^{-\tau} (e^{2\mu} \Gamma v^2 + t H_t v^3). \tag{3.135}$$

(3.202), (3.134) et (3.135) nous permettent d'avoir (3.132) ■

3.3 Les itérées dans la direction future

Dans cette section et dans la suite, nous considérons que pour toute composante de la métrique $\nu := \nu(t, \theta)$, $t \in]t_0; T)$, $T > t_0 > 0$, $\theta \in S^1$. Nous utilisons de nouveau la notation $A \lesssim B$ pour dire que $A \leq CB$ avec $C > 0$. Adoptons les notations $\nu_\theta := \nu'$ et $\nu_t := \dot{\nu}$.

$f(t, \theta, v) = f_0(\Theta(t_0, t, \theta, v); V(t_0, t, \theta, v))$. $(\Theta; V)$ solution du système caractéristique de

l'équation de Vlasov et redéfini en utilisant les nouvelles notations de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Theta}{ds} = -\frac{\partial V_0}{\partial V_1}, \\ \frac{dV^1}{ds} = -(\tau' - \mu' + \frac{\alpha'}{2\alpha})\sqrt{\alpha}V^0 - (\dot{\tau} - \dot{\mu})V^1 - e^{-\tau}(e^{2\mu}\Gamma V^2 + t\dot{H}V^3) \\ \quad - \sqrt{\alpha}\frac{e^{2\mu}A'}{t}\frac{V^2V^3}{V^0} - \sqrt{\alpha}\frac{\mu'}{V^0}((V^3)^2 - (V^2)^2), \\ \frac{dV^2}{ds} = -\dot{\mu}V^2 - \sqrt{\alpha}\mu'\frac{V^1V^2}{V^0}, \\ \frac{dV^3}{ds} = -\left(\frac{1}{s} - \dot{\mu}\right)V^3 + \sqrt{\alpha}\mu'\frac{V^1V^3}{V^0} - \frac{e^{2\mu}}{s}\left(\dot{A} + \sqrt{\alpha}A'\frac{V^1}{V^0}\right)V^2. \end{array} \right. \quad (3.136)$$

3.3.1 Construction des itérées dans la direction future

Soulignons ici que la remarque 2.3 assure le fait qu'on peut directement remplacer les dérivées des inconnues par les itérées des dérivées.

Nous utilisons le système (3.120) en remplaçant α , τ , μ , A , α' , τ' , μ' , A' respectivement par α_{n-1} , τ_{n-1} , μ_{n-1} , A_{n-1} , α'_{n-1} , τ'_{n-1} , μ'_{n-1} , A'_{n-1} . Posons

$$\Xi_{n-1}(s, t, \theta, V) = \left[-\frac{\partial V_0}{V_1}; \Xi_{n-1}^1; \Xi_{n-1}^2; \Xi_{n-1}^3 \right] \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \Xi_{n-1}^1 &= -(\tau'_{n-1} - \mu'_{n-1} + \frac{\alpha'_{n-1}}{2\alpha_{n-1}})\sqrt{\alpha_{n-1}}V^0 - (\dot{\tau}_{n-1} - \dot{\mu}_{n-1})V^1, \\ &\quad - \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}}\mu'_{n-1}}{V^0}((V^2)^2 - (V^3)^2) + \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}}A'_{n-1}}{sV^0}e^{2\mu_{n-1}}V^2V^3, \\ \Xi_{n-1}^2 &= -\dot{\mu}_{n-1}V^2 - \sqrt{\alpha_{n-1}}\mu'_{n-1}\frac{V^1V^2}{V^0}, \\ \Xi_{n-1}^3 &= -\left(\frac{1}{s} - \dot{\mu}_{n-1}\right)V^3 - \sqrt{\alpha_{n-1}}\mu'_{n-1}\frac{V^1V^3}{V^0} - \frac{e^{2\mu_{n-1}}}{s}\left(\dot{A}_{n-1} + \sqrt{\alpha_{n-1}}A'_{n-1}\frac{V^1}{V^0}\right)V^2. \end{aligned}$$

Soit $(\Theta_n; V_n)(s, t, \theta, V^1, V^2, V^3)$ la solution du système caractéristique $\frac{d}{ds}(\Theta_n, V_n) = \Xi_{n-1}(s, t, \Theta, V)$ avec pour données initiales $(\Theta_n, V_n)(t_0, t, \theta, V^1, V^2, V^3) = (\theta, v)$ et définissons $f_n(t, \theta, V^1, V^2, V^3)$ par

$$f_n(t, \theta, V^1, V^2, V^3) = f_0((\Theta_n, V_n)(t_0, \theta, V^1, V^2, V^3)) \quad (3.138)$$

où f_n est la solution de l'équation

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + (\tau'_{n-1} - \mu'_{n-1} + \frac{\alpha'_{n-1}}{2\alpha_{n-1}}) \sqrt{\alpha_{n-1}} v^0 + (\dot{\tau}_{n-1} - \dot{\mu}_{n-1}) v^1 \right] \frac{\partial f_n}{\partial v_1} \\
&+ \left[\frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} \mu'_{n-1}}{v^0} ((v^2)^2 - (v^3)^2) - \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} A'_{n-1}}{s v^0} e^{2\mu_{n-1}} v^2 v^3 \right] \frac{\partial f_n}{\partial v_1} \\
&+ \left[\dot{\mu}_{n-1} v^2 + \sqrt{\alpha_{n-1}} \mu'_{n-1} \frac{v^1 v^2}{v^0} \right] \frac{\partial f_n}{\partial v_2} + \frac{\partial v_0}{\partial v_1} \frac{\partial f_n}{\partial \theta} - \frac{\partial f_n}{\partial t} \\
&+ \left[\left(\frac{1}{t} - \dot{\mu}_{n-1} \right) v^3 - \sqrt{\alpha_{n-1}} \mu'_{n-1} \frac{v^1 v^3}{v^0} + e^{2\mu_{n-1}} \frac{v^2}{t} (\dot{A}_{n-1} + \sqrt{\alpha_{n-1}} A'_{n-1} \frac{v^1}{v^0}) \right] \frac{\partial f_n}{\partial v_3}
\end{aligned} \tag{3.139}$$

avec $f_n(t_0) = f^0$. Définissons $\rho_n, \rho_{k,n}, P_{k,n}, k \in \{1; 2; 3\}$ qui s'expriment comme ρ, ρ_k, P_k , en remplaçant $f, \alpha, \dot{\phi}, \phi', \dot{A}, A', \mu, \tau, \dot{\mu}, \dot{\tau}, \mu', \tau'$ dans leurs expressions respectivement par $f_n, \alpha_{n-1}, \dot{\phi}_{n-1}, \phi'_{n-1}, \dot{A}_{n-1}, A'_{n-1}, \mu_{n-1}, \tau_{n-1}, \dot{\mu}_{n-1}, \dot{\tau}_{n-1}, \mu'_{n-1}, \tau'_{n-1}$. Nous définissons également $\Upsilon_n, \Upsilon_n^\times, \phi_{\zeta_n}$ et ϕ_{ξ_n} en remplaçant respectivement $\Upsilon, \Upsilon^\times, \phi_\zeta$ et ϕ_ξ dans les relations (3.58), (3.59), (3.60) et (3.61).

Posons

$$\tilde{\Upsilon}_n = \Upsilon_n + \dot{\phi}_n^2 + \alpha_n \phi_n'^2 \tag{3.140}$$

$$\tilde{\Upsilon}_n^\times = \Upsilon_n^\times + 2\sqrt{\alpha_n} \dot{\phi}_n \phi_n'. \tag{3.141}$$

Utilisant le lemme 1.6 ainsi que les équations de contraintes (1.93) – (1.94) – (1.95) et la preuve du lemme 3.11, nous définissons $\alpha_n, A_n, J_n, K_n, \tau_n, \mu_n$, et ϕ_n solutions du système

$$\dot{\tau}_n = t\Upsilon_n + \frac{\alpha_n e^{2\tau_n - 4\mu_n}}{4t} J_n^2 + \frac{\alpha_n e^{2\tau_n} (K_n - A_n J_n)^2}{4t^3} + \alpha_n e^{2(\tau_n - \mu_n)} \rho_n, \tag{3.142}$$

$$\frac{\dot{\alpha}_n}{\alpha_n} = \frac{-\alpha_n e^{2\tau_n - 4\mu_n}}{t} J_n^2 - \alpha_n \frac{e^{2\tau_n} (K_n - A_n J_n)^2}{t^3} + \sqrt{\alpha_n} (\rho_n - P_{1;n}), \tag{3.143}$$

$$\tau_n' = t\Upsilon_n^\times - \frac{\alpha_n'}{2\alpha_n} - \sqrt{\alpha_n} \rho_{1;n}. \tag{3.144}$$

En procédant de la même façon dans la preuve du lemme 3.13 en remplaçant chaque composante de la métrique ν par ν_{n-1} dans les équations (3.82) – (3.83), on obtient

$$\begin{aligned}\partial_{\xi_{n-1}}\phi_{\varsigma_n} &= \left(\frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{2\alpha_{n-1}} - \frac{1}{2t} + \Upsilon_{n-1}\right)\phi_{\varsigma_{n-1}} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2t} + \Upsilon_{n-1}\right)\phi_{\xi_{n-1}} - e^{2\beta_{n-1}-2\mu_{n-1}}V'(\phi_{n-1}),\end{aligned}\quad (3.145)$$

$$\begin{aligned}\partial_{\varsigma_{n-1}}\phi_{\xi_n} &= \left(\frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{2\alpha_{n-1}} - \frac{1}{2t} - \Upsilon_{n-1}\right)\phi_{\xi_{n-1}} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2t} - \Upsilon_{n-1}\right)\phi_{\varsigma_{n-1}} - e^{2\beta_{n-1}-2\mu_{n-1}}V'(\phi_{n-1}).\end{aligned}\quad (3.146)$$

Ici

$$\begin{aligned}\Upsilon_{n-1} &= \alpha_{n-1}(2A'_{n-1}H_{n-1}(G_{n-1} - 1) - 2\mu'_{n-1}(G_{n-1} + A_{n-1}H_{n-1})^2e^{-2(\tau_{n-1}-2\mu_{n-1})} \\ &\quad - 4\mu'_{n-1}H_{n-1}^2t^2e^{-2\tau_{n-1}}).\end{aligned}\quad (3.147)$$

A présent, nous définissons $\tilde{\Upsilon}_n$ et $\check{\Upsilon}_n$ qui vérifient

$$\tilde{\Upsilon}_n = \Upsilon_n + \Upsilon_n^\times, \quad \check{\Upsilon}_n = \Upsilon_n - \Upsilon_n^\times \quad (3.148)$$

comme dans les relations (3.58) et (3.59) qui sont solutions de

$$\begin{cases} \partial_{\xi_{n-1}}\tilde{\Upsilon}_n = \left(\frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} - \frac{1}{2t}\right)\tilde{\Upsilon}_{n-1} - \frac{1}{2t}\check{\Upsilon}_{n-1} + a_{n-1}^+, \\ \partial_{\varsigma_{n-1}}\check{\Upsilon}_n = \frac{1}{2t}\tilde{\Upsilon}_{n-1} + \left(\frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} - \frac{1}{2t}\right)\check{\Upsilon}_{n-1} + a_{n-1}^-, \end{cases}\quad (3.149)$$

$$\quad (3.150)$$

où

$$\begin{aligned}a_{n-1}^+ &= \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4t^2}A_{\varsigma_{n-1}} \left[\frac{e^{2\beta_{n-1}-4\mu_{n-1}}}{t^2}J_{n-1}(K_{n-1} - A_{n-1}J_{n-1}) + 2\sqrt{\alpha_{n-1}}\bar{S}_{23,n-1} \right] \\ &\quad + 2\mu_{\varsigma_{n-1}} \left[\frac{e^{\beta_{n-1}-4\mu_{n-1}}}{2t^2}J_{n-1}^2 + \sqrt{\alpha_{n-1}}(\tilde{\rho}_{n-1} - \tilde{P}_{1,n-1} + \tilde{P}_{2,n-1} - \tilde{P}_{3,n-1}) \right] \\ &\quad - \frac{2}{t}(\dot{\mu}_{n-1}^2 + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4t^2}\alpha_{n-1}A_{n-1}'^2) + \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}},\end{aligned}\quad (3.151)$$

l'expression de a^- s'écrit de manière analogue à a^+ , en remplaçant ς_{n-1} par ξ_{n-1} . Nous utilisons également (1.101) – (1.103) et la relation (1.16) pour avoir

$$\partial_\theta J_{n+1} = -2te^{\beta_n}\rho_{2,n}, \quad (3.152)$$

$$\partial_\theta K_{n+1} = -2e^{\tau_n}A\rho_{2,n} - 2te^{\tau_n-2\mu_n}\rho_{3,n}, \quad (3.153)$$

$$\partial_t K_{n+1} = 2t^2e^{\beta_n}(A_n S_{12,n} + te^{-2\mu_n}S_{13,n}). \quad (3.154)$$

A présent, nous introduisons les quantités suivantes pour établir certaines estimations comme aux lemmes (3.13) et (3.15) inspirées des relations (3.70) – (3.76).

$$u_{n;1} = \sqrt{\alpha_n} v_1 \quad (3.155)$$

$$\bar{u}_{n;1}(t) = \sup \{ u_{n;1} / \exists (s, \theta, v_2, v_3) \in [t, t_i] \times S^1 \times \mathbb{R}^3 / f_n(s, \theta, v_2, v_3) \neq 0 \}, \quad (3.156)$$

$$\psi_n(t) = \max \left(\sup_{\theta \in S^1} \Upsilon_n(t, \cdot) + \bar{u}_{n;1}^2(t); 2 \right), \quad (3.157)$$

$$\Lambda_n(t) = \psi_n(t) + \chi_n(t), \quad \text{où } \chi_n(t) := \sup_{\theta \in S^1} (\phi_{\xi_n} + \phi_{\zeta_n})(t), \quad (3.158)$$

$$D_n(t) = \sup \{ \|\partial_\theta f_n(s)\|; t_0 \leq s \leq t, \text{ pour tout } t \in [t_0; T] \}, \quad (3.159)$$

$$N_n(t, \theta) = \int_{t_0}^t \sqrt{\alpha_n}(s, \theta) ds. \quad (3.160)$$

3.3.2 Estimation des itérées

Dans cette section, nous montrons que toutes les itérées définies ci-haut peuvent se contrôler à l'aide des données initiales. Pour le faire, nous évaluons la monotonie et le comportement de l'énergie relatif aux équations liant ces itérées bien inspiré par le travail fait dans [JLS], et utilisons cette monotonie ainsi que les estimations a priori pour contrôler nos itérées. On a alors dans un premier temps le théorème suivant

Théorème 3.1. *Considérons les données initiales $\mu^\circ, \tau^\circ, \alpha^\circ, A^\circ, \phi^\circ, K^\circ, J^\circ$ ainsi que $\dot{\alpha}, \dot{\mu}, \dot{\tau}, \dot{A}, \dot{\phi}$ vérifiant les équations (3.142) – (3.146), (3.149) – (3.150). Alors*

$$\mathcal{E}_n(t) \lesssim \mathcal{E}_0, \quad (3.161)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(t) &= \int_{S^1} \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \left\{ \Upsilon_n + \frac{\alpha_n e^{2\tau_n - 4\mu_n}}{4t^2} J_n^2 + \frac{\alpha_n e^{2\tau_n} (K_n - A_n J_n)^2}{4t^4} \right\} d\theta \\ &\quad + 8\pi \int_{S^1} \left(\frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f_n |v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \\ &\quad + \int_{S^1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \dot{\phi}_n^2 + \sqrt{\alpha_n} \phi_n'^2 \right) + \sqrt{\alpha_n} e^{2(\tau_n - \mu_n)} V(\phi_n) \right) d\theta, \end{aligned} \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\circ &= \int_{S^1} \frac{1}{\sqrt{\alpha^\circ}} \left\{ (\dot{\mu}^\circ)^2 + \sqrt{\alpha^\circ} \dot{\mu}'^2 + \frac{e^{4\mu^\circ}}{4t_0^2} (\dot{A}^{\circ 2} + \sqrt{\alpha^\circ} \dot{A}'^2) \right\} d\theta \\ &\quad + \int_{S^1} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^\circ}} (\dot{\phi}^\circ)^2 + \sqrt{\alpha^\circ} \dot{\phi}'^2 \right) + \sqrt{\alpha^\circ} e^{2(\tau^\circ - \mu^\circ)} V(\phi^\circ) + \frac{\alpha^\circ e^{2\tau^\circ - 4\mu^\circ}}{4t_0^2} J^{\circ 2} \right) d\theta \\ &\quad + 8\pi \int_{S^1} \left(\frac{1}{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} f^\circ |v_0| dv_1 dv_2 dv_3 + \frac{\alpha^\circ e^{2\tau^\circ} (K^\circ - A^\circ J^\circ)^2}{32\pi t_0^4} \right) d\theta. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_n}{dt} &= - \int_{S^1} \frac{\dot{\tau}_n}{t^2 \sqrt{\alpha_n}} d\theta - \frac{1}{2} \int_{S^1} \frac{\dot{\alpha}_n \dot{\tau}_n}{t \alpha_n \sqrt{\alpha_n}} d\theta - \int_{S^1} \frac{\ddot{\tau}_n}{t^2 \sqrt{\alpha_n}} d\theta \\ &= -\frac{1}{t} \mathcal{E}_n - \frac{1}{2} \int_{S^1} \frac{\dot{\alpha}_n \dot{\tau}_n}{t \alpha_n \sqrt{\alpha_n}} d\theta - \int_{S^1} \frac{\ddot{\tau}_n}{t^2 \sqrt{\alpha_n}} d\theta.\end{aligned}$$

Or, d'après (3.143) en remplaçant les termes par leurs itérées respectives, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{S^1} \frac{\frac{d\tau_n}{dt}}{t^2 \sqrt{\alpha_n}} d\theta &= \int_{S^1} \left(\frac{\sqrt{\alpha_n} \frac{\partial \tau'_n}{\partial \theta}}{t} + \frac{\alpha'_n \tau'_n}{2t \sqrt{\alpha_n}} + \frac{\dot{\tau}_n \dot{\alpha}_n}{2\alpha_n t \sqrt{\alpha_n}} - \frac{\alpha_n'^2}{4\alpha_n \sqrt{\alpha_n}} - \frac{\dot{\mu}_n^2}{t \sqrt{\alpha_n}} + \frac{\sqrt{\alpha_n} \mu_n'^2}{t} \right) d\theta \\ &+ \int_{S^1} \left(\frac{\frac{\partial \alpha'_n}{\partial \theta}}{2\sqrt{\alpha_n}} + \frac{e^{4\mu_n}}{4\sqrt{\alpha_n} t^3} (\dot{A}_n^2 - \alpha_n A_n'^2) - \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\tau_n - 4\mu_n}}{4t^3} J_n^2 \right) d\theta \\ &+ \int_{S^1} \left(-3 \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\tau_n}}{4t^4} (K_n - A_n J_n)^2 - 8\pi \frac{\alpha_n^{\frac{3}{2}} e^{2\tau_n}}{t^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n(v_3 - Av_2)^2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \\ &- \int_{S^1} \left(\frac{1}{2t \sqrt{\alpha_n}} (\dot{\phi}_n^2 - \alpha_n \phi_n'^2) + \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2t} e^{2(\tau_n - \mu_n)} V_n(\phi_n) \right) d\theta.\end{aligned}\quad (3.164)$$

Par ailleurs, pour des raisons de périodicité, nous avons

$$\int_{S^1} \frac{\alpha_n \frac{\partial \tau'_n}{\partial \theta}}{t \sqrt{\alpha_n}} d\theta = -\frac{1}{2t} \int_{S^1} \frac{\alpha'_n \tau'_n}{\sqrt{\alpha_n}} d\theta \text{ et } \int_{S^1} \frac{\frac{\partial \alpha'_n}{\partial \theta}}{2\sqrt{\alpha_n}} d\theta = \frac{1}{2} \int_{S^1} \frac{\alpha_n'^2}{2\alpha_n \sqrt{\alpha_n}} d\theta.\quad (3.165)$$

En remplaçant (3.165) dans (3.164) nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_n}{dt} &= -\frac{1}{t} \int_{S^1} \left[\frac{\dot{\mu}_n^2}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{e^{4\mu_n}}{4t^2} \left(\frac{\dot{A}_n^2}{\sqrt{\alpha_n}} + \sqrt{\alpha_n} A_n'^2 \right) + \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\tau_n - 4\mu_n}}{4t^2} J_n^2 \right] d\theta \\ &- \frac{1}{t} \int_{S^1} \left[\frac{\alpha_n e^{2\tau_n}}{4t^3} (K_n - A_n J_n)^2 + 8\pi \frac{\alpha_n^{\frac{1}{2}}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f_n |v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right] d\theta \\ &- \int_{S^1} \left[\frac{\dot{\mu}_n^2}{t \sqrt{\alpha_n}} + \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\tau_n - 4\mu_n}}{4t^3} J_n^2 + \frac{3\alpha_n e^{2\tau_n}}{4t^4} (K_n - A_n J_n)^2 \right] d\theta \\ &- \int_{S^1} \left(8\pi \frac{\alpha_n^{\frac{3}{2}} e^{2\tau_n}}{t^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n(v_3 - A_n v_2)^2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \\ &= - \int_{S^1} \left[\frac{2}{t} \left(\frac{\dot{\mu}_n^2}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{e^{4\mu_n}}{4t^2} \sqrt{\alpha_n} A_n'^2 \right) \right. \\ &+ \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2t^3} e^{2\tau_n - 4\mu_n} J_n^2 + \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\tau_n} (K_n - A_n J_n)^2}{t^4} \\ &\left. + 8\pi \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{f_n |v_0|}{t^2} + \frac{\alpha_n e^{2\tau_n} f_n(v_3 - A_n v_2)^2}{t^4 |v_0|} \right) dv_1 dv_2 dv_3 \right] d\theta,\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'avoir ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_n}{dt} &= \int_{S^1} \left[\frac{\alpha'_n \tau'_n}{2t\sqrt{\alpha_n}} - \frac{\dot{\mu}_n^2}{t\sqrt{\alpha_n}} + \frac{\sqrt{\alpha_n} \mu_n'^2}{t} + \frac{e^{4\mu_n}}{4t^3 \sqrt{\alpha_n}} \left(\dot{A}_n^2 - \alpha_n A_n'^2 \right) - \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\tau_n - 4\mu_n}}{4t^3} J_n^2 \right] d\theta \\
&- \frac{1}{t} \int_{S^1} \left[\frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\tau_n}}{4t^2} (K_n - A_n J_n)^2 + 8\pi \frac{\alpha_n}{t^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_n |v_0| dv_1 dv_2 dv_3 \right] d\theta \\
&- \frac{1}{t} \int_{S^1} \left[\frac{\alpha'_n \tau'_n}{2\sqrt{\alpha_n}} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha_n}} (\dot{\phi}_n^2 - \alpha_n \phi_n'^2) - \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2} e^{2(\tau_n - \mu_n)} V(\phi_n) - \frac{\dot{\alpha}_n \dot{\tau}_n}{2t\alpha_n \sqrt{\alpha_n}} \right] d\theta \\
&- \int_{S^1} \left[\frac{\dot{\mu}_n^2}{t\sqrt{\alpha_n}} + \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\tau_n - 4\mu_n}}{4t^3} J_n^2 + \frac{\sqrt{\alpha_n} \mu_n'^2}{t} + \frac{3\alpha_n e^{2\tau_n}}{4t^4} (K_n - A_n J_n)^2 \right] d\theta \\
&- \int_{S^1} \left(8\pi \frac{\alpha_n^{\frac{3}{2}} e^{2\tau_n}}{t^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n (v_3 - A_n v_2)^2}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta \\
&- \int_{S^1} \left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_n}} (\dot{\phi}_n^2 + \alpha_n \phi_n'^2) + \frac{\sqrt{\alpha_n}}{2} e^{2(\tau_n - \mu_n)} V(\phi_n) \right) d\theta.
\end{aligned}$$

Après davantage de simplifications, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_n}{dt} &= - \int_{S^1} \left(\frac{2}{t} \frac{\dot{\mu}_n^2}{\sqrt{\alpha_n}} + \frac{\dot{\phi}_n^2}{t\sqrt{\alpha_n}} + \frac{e^{4\mu_n}}{2t^2} \sqrt{\alpha_n} A_n'^2 + \frac{3\sqrt{\alpha_n}}{4t^3} e^{2\tau_n - 4\mu_n} J_n^2 + \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\tau_n} (K_n - A_n J_n)^2}{t^4} \right) d\theta \\
&- \int_{S^1} \left[8\pi \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{f_n |v_0|}{t^2} + \frac{\alpha_n e^{2\tau} f(v_3 - A_n v_2)^2}{t^4 |v_0|} \right) dv_1 dv_2 dv_3 \right] d\theta \leq 0. \tag{3.166}
\end{aligned}$$

Et comme \mathcal{E}_n est décroissante en temps, pour tout $t \in [t_0; t_i]$, on a (3.161). ■

Ce théorème nous donne la possibilité d'énoncer une série de lemmes pour contrôler nos inconnues du système (3.142) – (3.146), (3.149) – (3.150).

Remarque 3.3. *De ce qui précède, nous pouvons dire d'après le théorème (3.1) que la quantité \mathcal{E}_n est décroissante temporellement et l'expression (3.143) nous permet de dire que α_n est également décroissante suivant t , car $\rho_n \geq P_{1;n}$.*

Pour prouver l'existence locale, on va établir respectivement que

- le support de la fonction de distribution f_n est borné,
- les quantités f_n , μ_n , τ_n , α_n , ϕ_n , K_n et J_n sont uniformément bornées ainsi que leurs dérivées suivant θ ,
- et enfin que ces itérées convergent.

Lemme 3.18. $\min_{\theta \in S^1} \alpha_n(t; \cdot)$ est uniformément borné sur $[t_0; t_i]$.

Preuve : Partant de la définition de \mathcal{E}_n , nous avons

$$8\pi \int_{S^1} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f_n |v^0| dv^1 dv^2 dv^3 \right) d\theta \leq t\mathcal{E}_n \quad (3.167)$$

par ailleurs comme $\sqrt{\alpha_n}|v_1| \leq |v_0|$, au vu de (1.69), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f_n \sqrt{\alpha_n} |v_1| dv_1 dv_2 dv_3 \right) d\theta &\leq \frac{t\mathcal{E}_n}{8\pi} \lesssim \frac{t\mathcal{E}^\circ}{8\pi}, \\ \sqrt{\min_{\theta \in S^1} \alpha_n} \int_{S^1} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f_n |v^0| dv^1 dv^2 dv^3 \right) d\theta &= \frac{t\mathcal{E}_n}{8\pi} \lesssim \frac{t\mathcal{E}^\circ}{8\pi}, \\ \sqrt{\min_{\theta \in S^1} \alpha_n} &\leq \frac{t\mathcal{E}_n}{8\pi\delta} \lesssim \frac{t\mathcal{E}^\circ}{8\pi\delta}, \end{aligned} \quad (3.168)$$

ce qui achève la preuve. ■

Nous définissons dans la suite l'expression suivante

$$\beta_n = \tau_n + \frac{\ln \alpha_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.169)$$

En dérivant (3.169) et en utilisant (3.144) nous avons

$$\beta'_n = \frac{2t}{\sqrt{\alpha}} \Upsilon_n^\times - \sqrt{\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f_n |v_1| dv^1 dv^2 dv^3 \right). \quad (3.170)$$

Lemme 3.19. *Les quantités $\int_{S^1} |\beta'_n| d\theta$, $\int_{S^1} |\mu'_n| d\theta$, $\int_{S^1} |\phi'_n| d\theta$, $\int_{S^1} |K'_n| d\theta$, $\int_{S^1} |J'_n| d\theta$ sont bornés.*

Preuve : Comme $\alpha_n(t)$ et $\mathcal{E}_n(t)$ sont décroissants, nous avons de par la définition de \mathcal{E}_n ,

$$\int_{S^1} |\beta'_n| d\theta \leq t\mathcal{E}_n \lesssim t\mathcal{E}^\circ, \quad (3.171)$$

$$\int_{S^1} |\mu'_n| d\theta \leq \frac{\sqrt{\mathcal{E}_n}}{\alpha_n} \lesssim \frac{\sqrt{\mathcal{E}^\circ}}{(\min_{S^1} \alpha_n)^{1/4}} \quad (3.172)$$

$$\int_{S^1} |e^{2\mu_n} A'_n| d\theta \leq \frac{\sqrt{2t\mathcal{E}_n}}{(\min_{S^1} \alpha_n)^{1/4}} \lesssim \frac{\sqrt{2t\mathcal{E}^\circ}}{(\min_{S^1} \alpha_n)^{1/4}} \quad (3.173)$$

$$\int_{S^1} |\phi'_n| d\theta \leq \frac{\sqrt{2\mathcal{E}_n}}{(\min_{S^1} \alpha_n)^{1/4}} \lesssim \frac{\sqrt{2\mathcal{E}^\circ}}{(\min_{S^1} \alpha_n)^{1/4}} \quad (3.174)$$

$$\begin{aligned} (3.152) \text{ implique } t \int_{S^1} J'(t; \theta) d\theta &= -2t \int_{S^1} e^{\beta_n} \rho_n d\theta \\ &\leq 2t \int_{S^1} 8\pi \left[\frac{\sqrt{\alpha_n}}{t} e^{2\mu_n} \int_{\mathbb{R}^3} |v^0| f_n dv \right] \lesssim \mathcal{E}^\circ \end{aligned} \quad (3.175)$$

$$(3.153) \text{ implique } t \int_{S^1} K'(t; \theta) d\theta \lesssim \mathcal{E}^\circ \quad (3.176)$$

■

Lemme 3.20. *Pour tous réels r et b , $e^{r\beta_n+b\mu_n} A_n$ est borné sur $(t_0; t_i] \times S^1$.*

Preuve : Soit $\bar{\theta} \in S^1$ fixé.

On a α_n borné sur $]t_0; t_i] \times \{\bar{\theta}\}$, (voir (3.168)) ce qui entraîne que $e^{r\beta_n+b\mu_n} A_n$ est borné sur $]t_0; t_i] \times \{\bar{\theta}\}$. Nous intégrons suivant θ , $e^{r\beta_n+b\mu_n} A_n$, pour avoir

$$\begin{aligned} e^{r\beta_n+b\mu_n} A_n(t, \hat{\theta}) &= (e^{r\beta_n+b\mu_n} A_n)(t, \bar{\theta}) + \int_{\bar{\theta}}^{\hat{\theta}} (e^{r\beta_n+b\mu_n} A_n(r\beta'_n + b\mu'_n) + e^{r\beta_n+(b-2)\mu_n} e^{2\mu_n} A'_n) d\theta, \\ |e^{r\beta_n+b\mu_n} A_n(t, \hat{\theta})| &\leq \left| (e^{r\beta_n+b\mu_n} A_n)(t, \bar{\theta}) \right| + \left| \int_{\bar{\theta}}^{\hat{\theta}} (e^{r\beta_n+b\mu_n} A_n(r\beta'_n + b\mu'_n) + e^{r\beta_n+(b-2)\mu_n} e^{2\mu_n} A'_n) d\theta \right| \\ &\leq C + \left| \int_{\bar{\theta}}^{\hat{\theta}} (e^{r\beta_n+b\mu_n} |A_n| (|r\beta'_n| + |b\mu'_n|)) d\theta \right|. \end{aligned}$$

Ici C contient l'expression $|(e^{r\beta_n+b\mu_n} A_n)(t, \bar{\theta})|$ et les majorations du lemme (3.19), par la suite, en utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$|e^{r\beta_n+b\mu_n} A_n(t, \hat{\theta})| \leq C e^{|\int_{\bar{\theta}}^{\hat{\theta}} (r\beta'_n + b\mu'_n) d\theta|}. \quad (3.177)$$

On obtient ainsi le résultat.■

Lemme 3.21. *L'expression*

$$\int_{t_0}^t \sup_{S^1} [e^{2\beta_n-4\mu_n} J_n^2] (s, \theta) ds$$

est bornée sur $[t_0; t_i]$.

Preuve : La preuve s'inspire du lemme (3.20), qui nous permet d'avoir

$$\int_{t_0}^t [e^{2\beta_n-4\mu_n} J_n^2] (s, \theta) ds \leq \int_{t_0}^t e^C [e^{2\beta_n-4\mu_n} J_n^2 + 2C|J_n| + C^2] (s, \bar{\theta}) ds. \quad (3.178)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \sup_{S^1} [e^{2\beta_n-4\mu_n} J_n^2] (s, \theta) ds &\leq \int_{t_0}^t \sup_{S^1} \int_{\bar{\theta}}^{\theta} [e^{2\beta_n-4\mu_n} J_n^2 (2\beta'_n - 4\mu'_n)] (s, \check{\theta}) d\check{\theta} ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \sup_{S^1} [e^{2\beta_n-4\mu_n} J_n^2] (s, \bar{\theta}) ds. \end{aligned} \quad (3.179)$$

Pour finir, on applique le lemme de Gronwall à l'inégalité (3.179).■

Lemme 3.22. *L'expression*

$$\int_{t_0}^t \sup_{S^1} [e^{2\beta_n(s,\theta)}(K_n - A_n J_n)^2](s, \theta) ds \quad (3.180)$$

est bornée sur $]t_0; t_i]$

Preuve : En intégrant suivant θ , $[e^{\beta_n}(K_n - A_n J_n)]'$ de $(t, \bar{\theta})$ à $(t, \hat{\theta})$. $\bar{\theta}, \hat{\theta} \in S^1$ fixés tel que $\bar{\theta} < \hat{\theta}$, on a

$$\begin{aligned} [e^{\beta_n}(K_n - A_n J_n)](t, \hat{\theta}) &\leq [e^{\beta_n}|K_n - A_n J_n|](t, \bar{\theta}) + \left| \int_{\bar{\theta}}^{\hat{\theta}} [e^{\beta_n}|K_n - A_n J_n| \right. \\ &\quad \left. + e^{\beta_n} \int_{\mathbb{R}^3} f_n |v_2| dv + e^{\beta_n} A_n \int_{\mathbb{R}^3} f_n |v_2| dv + e^{\beta_n - 2\mu_n} |J_n| e^{2\mu_n} |A'_n|](t, \check{\theta}) d\check{\theta} \right| \\ &\leq [e^{\beta_n}|K_n - A_n J_n^2|](t, \bar{\theta}) + C' \\ &\quad + C \sup_{S^1} (e^{\beta_n - 2\mu_n} |J_n| + \left| \int_{\bar{\theta}}^{\hat{\theta}} e^{\beta_n} |K_n - A_n J_n| |\beta'_n| d\check{\theta} \right|). \end{aligned} \quad (3.181)$$

Ici $C' = [\int_{S^1} (\int_{\mathbb{R}^3} f_n dv) d\theta](\sup(v_2 e^{\beta_n} + v_3 A_n e^{\beta_n}))$. En utilisant le lemme de Gronwall, on a

$$\begin{aligned} [e^{\beta_n}(K_n - A_n J_n)](t, \hat{\theta}) &\leq e^{\left| \int_{\bar{\theta}}^{\hat{\theta}} |\beta'_n| d\theta \right|} [(e^{\beta_n}(K_n - A_n J_n)](t, \bar{\theta}) \\ &\quad + C' + C \sup_{S^1} (e^{\beta_n - 2\mu_n} |J_n|)]. \\ D'o \sup_{S^1} C [(K_n - A_n J_n)](t, \hat{\theta}) &\leq e^{\left| \int_{\bar{\theta}}^{\hat{\theta}} |\beta'_n| d\theta \right|} [(e^{\beta_n}(K_n - A_n J_n)](t, \bar{\theta}) \\ &\quad + C' + C \sup_{S^1} (e^{\beta_n - 2\mu_n} |J_n|)]. \end{aligned} \quad (3.182)$$

Par conséquent comme

$$\begin{aligned} &2e^{\beta_n} |K_n - A_n J_n|(s, \check{\theta}) C \sup_{S^1} e^{\beta_n - 2\mu_n} |J_n| \\ &\leq e^{2\beta_n} (K_n - A_n J_n)^2(s, \check{\theta}) + C^2 \sup_{S^1} e^{2\beta_n - 4\mu_n} J_n^2(s, \check{\theta}), \end{aligned} \quad (3.183)$$

on a

$$\begin{aligned} \int_t^{t_i} \sup_{S^1} (e^{\beta_n}(K_n - A_n J_n)^2)(s, \bar{\theta}) ds &\leq e^{2C} \int_t^{t_i} e^{2\beta_n(s, \hat{\theta})} (K_n - A_n J_n)^2(s, \hat{\theta}) ds \\ &\quad + 2C' (e^{\beta_n} |K_n - A_n J_n|)(s, \hat{\theta}) \\ &\quad + 2(e^{\beta_n} |K_n - A_n J_n|)(s, \hat{\theta}) C \sup_{S^1} (e^{\beta_n - 2\mu_n} |J_n|) \\ &\quad + C' + C \sup_{S^1} (e^{(\beta_n - 2\mu_n)} |J_n|)^2. \end{aligned} \quad (3.184)$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on a

$$\begin{aligned} & \int_t^{t_i} \sup_{S^1} (e^{\beta_n} (K_n - A_n J_n)^2 (s, \theta)) ds \\ & \leq \int_t^{t_i} \max_{S^1} e^C (e^{2\beta_n - 4\mu_n} (J_n^2 + 2|J_n| + C^2) (s, \bar{\theta})) ds, \end{aligned} \quad (3.185)$$

qui est borné d'après le lemme précédent, le lemme 3.21. ■ Dans la suite, nous allons contrôler $\dot{\tau}_n$, $\dot{\mu}_n$ et \dot{A}_n pour le faire, nous allons borner Υ_n .

Proposition 3.2. *Les fonctions μ_n , A_n , et ϕ_n sont bornées ainsi que leurs dérivées de premier ordre sur $]t_0; t_i] \times S^1$.*

Preuve : Pour la preuve, nous allons utiliser les expressions Υ_n , Υ_n^\times , ϕ_{ξ_n} , ϕ_{ς_n} . Nous avons

$$\begin{aligned} (\partial_t \pm \sqrt{\alpha_{n-1}} \partial_\theta) (\Upsilon_n \mp \Upsilon_n^\times) &= -\frac{2}{t} (\dot{\mu}_{n-1}^2 + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4t^2} \alpha_{n-1} A'_{n-1}{}^2) + \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} (\Upsilon_{n-1} \mp \Upsilon_{n-1}^\times) \pm \frac{\Upsilon_{n-1}^\times}{t} \\ &+ 2(\dot{\mu}_{n-1} \mp \sqrt{\alpha_{n-1}} \mu'_{n-1}) \left(\frac{e^{\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{2t^2} J_{n-1}^2 + 2e^{2(\beta_{n-1} - \mu_{n-1})} V(\phi_{n-1}) \right) \\ &+ 8\pi \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} e^{\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n (1 + 2e^{-2\mu_{n-1}} v_2^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \\ &+ \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4t^2} (\dot{A}_{n-1} - \sqrt{\alpha_{n-1}} A'_{n-1}) \left(\frac{e^{\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{t^2} J_{n-1} (K_{n-1} - A_{n-1} J_{n-1}) \right) \\ &+ 16\pi \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} e^{2\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n v_2 (v_3 - A_{n-1} v_2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \end{aligned} \quad (3.186)$$

Soit $(t_k; \theta_k) \in]t_0; t_i] \times S^1$ un point arbitraire. On considère γ_n^\pm la courbe intégrale de $t \mapsto t \pm \sqrt{\alpha_{n-1}} \theta$ partant de $(t_k; \theta_k)$ vers la surface $t = t_i$. Soit (t_i, θ_\pm) l'extrémité de la courbe intégrale γ_n^\pm sur la surface $t = t_i$. Alors, on a :

$$\int_{\gamma_n^-} (\partial_t - \sqrt{\alpha_{n-1}} \partial_\theta) (\Upsilon_n + \Upsilon_n^\times) + \int_{\gamma_n^+} (\partial_t + \sqrt{\alpha_{n-1}} \partial_\theta) (\Upsilon_n - \Upsilon_n^\times) = \int_{\gamma_n^-} L_{n-1}^+ + \int_{\gamma_n^+} L_{n-1}^-, \quad (3.187)$$

où

$$\begin{aligned} L_{n-1}^\mp &= -\frac{2}{t} (\dot{\mu}_{n-1}^2 + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4t^2} \alpha_{n-1} A'_{n-1}{}^2) + \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} (\Upsilon_{n-1} \mp \Upsilon_{n-1}^\times) \pm \frac{\Upsilon_{n-1}^\times}{t} \\ &+ 2(\dot{\mu}_{n-1} \mp \sqrt{\alpha_{n-1}} \mu'_{n-1}) \left[\frac{e^{\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{2t^2} J_{n-1}^2 + 2e^{2(\beta_{n-1} - \mu_{n-1})} V(\phi_{n-1}) \right] \\ &+ 8\pi \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} e^{\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n (1 + 2e^{-2\mu_{n-1}} v_2^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \\ &+ \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4t^2} (\dot{A}_{n-1} \mp \sqrt{\alpha_{n-1}} A'_{n-1}) \left[\frac{e^{\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{t^2} J_{n-1} (K_{n-1} - A_{n-1} J_{n-1}) \right] \\ &+ 16\pi \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} e^{2\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n v_2 (v_3 - A_{n-1} v_2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3. \end{aligned} \quad (3.188)$$

Par ailleurs, on a $|\Upsilon_n^\times| \leq \Upsilon_n$, l'égalité (3.187) devient alors

$$\begin{aligned} \Upsilon_n(t_k; \theta_k) &= \frac{1}{2} [\Upsilon_n(t_i; \theta_+) - \Upsilon_n^\times(t_i; \theta_+) + \Upsilon_n(t_i; \theta_-) - \Upsilon_n^\times(t_i; \theta_-)] \\ &\quad - \int_{\gamma_{n-1}^+} L_{n-1}^- - \int_{\gamma_{n-1}^-} L_{n-1}^+ \\ &\leq \Upsilon_n(t_i; \theta_+) + \Upsilon_n(t_i; \theta_-) + \frac{1}{2} \left[\int_{\gamma_{n-1}^+} |L_{n-1}^-| + \int_{\gamma_{n-1}^-} |L_{n-1}^+| \right] \end{aligned} \quad (3.189)$$

En considérant l'expression L_{n-1}^\mp , définie par (3.188). Les termes qui sont entre les crochets de la relation (3.189), et au vu de (3.143), on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{2t\alpha_{n-1}} \right| &= \left[\frac{e^{\beta_{n-1}-4\mu_{n-1}}}{2t^2} J_{n-1}^2 + 2e^{2(\beta_{n-1}-\mu_{n-1})} V(\phi_{n-1}) \right] \\ &\quad + 8\pi \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} e^{\beta_{n-1}-4\mu_{n-1}}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n(1 + 2e^{-2\mu_{n-1}} v_2^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3, \end{aligned} \quad (3.190)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{2t\alpha_{n-1}} \right| &\geq \left| \frac{e^{\beta_{n-1}-4\mu_{n-1}}}{t^2} J_{n-1} (K_{n-1} - A_{n-1} J_{n-1}) \right| \\ &\quad + 16\pi \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} e^{2\beta_{n-1}-4\mu_{n-1}}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n v_2 (v_3 - A_{n-1} v_2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3. \end{aligned} \quad (3.191)$$

Cependant

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_{n-1} \pm \sqrt{\alpha_{n-1}} \mu'_{n-1} + \frac{e^{2\mu_{n-1}}}{2t} (\dot{A}_{n-1} \pm \sqrt{\alpha_{n-1}} A'_{n-1}) &\leq (\dot{\mu}_{n-1} \pm \sqrt{\alpha_{n-1}} \mu'_{n-1})^2 \\ &\quad + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4t^2} (\dot{A}_{n-1} \pm \sqrt{\alpha_{n-1}} A'_{n-1})^2 + \frac{1}{2} \\ &\leq 2(\Upsilon_{n-1} + \Upsilon_{n-1}^\times) + \frac{1}{2} \leq 4\Upsilon_{n-1} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On a par la suite

$$|L_{n-1}^\pm| \leq \left| \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right| \left(2\Upsilon_{n-1} + \frac{2\Upsilon_{n-1}}{t} + \frac{1}{4t} \right) + \frac{3\Upsilon_{n-1}}{t} \quad (3.192)$$

Les deux premiers termes de $\left| \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right|$ ont été traités aux lemmes 3.21 et 3.22. Nous évaluons le troisième terme

$$B_n(t, \theta) = 16\pi e^{2\beta_{n-1}-2\mu_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n(1 + e^{-2\mu_{n-1}} v_2^2 + t^{-2} e^{2\mu_{n-1}} (v_3 - A_{n-1} v_2)^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3. \quad (3.193)$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
B_n(t, \theta) &\leq 16\pi e^{2\beta_{n-1}-2\mu_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n(1 + e^{-2\mu_{n-1}}v_2^2 + t^{-2}e^{2\mu_{n-1}}(v_3 - A_{n-1}v_2)^2)}{e^{\beta_{n-1}-\mu_{n-1}}\sqrt{1 + e^{-2\beta_{n-1}+2\mu_{n-1}}u_1^2}} du_1 dv_2 dv_3, \\
&\leq 16\pi e^{\beta_{n-1}-\mu_{n-1}} \|f_0\|_\infty \left(1 + e^{-2\mu_{n-1}}\bar{v}_2 + \frac{e^{2\mu_{n-1}}}{t^2}(\bar{v}_3 + |A_{n-1}|\bar{v}_2)\right) \bar{v}_2 \bar{v}_3 \\
&\quad \times \int_{-\bar{u}_1}^{\bar{u}_1} \frac{du_1}{\sqrt{1 + e^{-2\beta_{n-1}+2\mu_{n-1}}u_1^2}} \\
&\leq 16\pi e^{\beta_{n-1}-\mu_{n-1}} \|f_0\|_\infty \left(1 + e^{-2\mu_{n-1}}\bar{v}_2^2 + \frac{e^{2\mu_{n-1}}}{t^2}(\bar{v}_3 + |A_{n-1}|\bar{v}_2)\right) \bar{v}_2 \bar{v}_3 \\
&\quad \times 2 \left(e^{\beta_{n-1}-\mu_{n-1}} \ln \left(\bar{u}_1 + \sqrt{e^{2\beta_{n-1}-2\mu_{n-1}} + u_1^2}\right) + e^{-1}\right). \tag{3.194}
\end{aligned}$$

Ensuite, nous utilisons les lemmes 3.19 et 3.20, puis les inégalités (3.189), (3.192) et (3.194) pour avoir

$$\begin{aligned}
\sup_{S^1} \Upsilon_n(t_k, \theta) &\leq \int_{t_0}^{t_k} C \left\{ [e^{-1} + \ln \max(\bar{u}_1; e^{\beta_{n-1}-\mu_{n-1}})] \left(2\Upsilon_{n-1} + \frac{2\Upsilon_{n-1}}{t_0} + \frac{1}{4t_0}\right) + \frac{3\Upsilon_{n-1}}{t_0} \right\} dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_k} \left[\frac{\sup_{S^1} [e^{2\beta_{n-1}(t,\theta)-4\mu_{n-1}(t,\theta)} J_{n-1}^2(t, \theta)]}{t} \left(2\Upsilon_{n-1} + \frac{2\Upsilon_{n-1}}{t_0} + \frac{1}{4t_0}\right) \right] dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_k} \frac{\sup_{S^1} [e^{2\beta_{n-1}(t,\theta)} (K_{n-1} - A_{n-1}J_{n-1})^2(t, \theta)]}{t^3} \left(2\Upsilon_{n-1} + \frac{2\Upsilon_{n-1}}{t_0} + \frac{1}{4t_0}\right) dt \\
&\quad + \sup_{S^1} \Upsilon_n(t_0, \theta). \tag{3.195}
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
(u_1(t_k, \theta_k))^2 &\leq (\bar{u}_1(t_0))^2 + C \int_{t_0}^{t_k} \left\{ \sup_{S^1} [e^{2\beta_{n-1}-4\mu_{n-1}} (J_{n-1}(t, \theta))^2] \right. \\
&+ \sup_{S^1} \frac{[e^{2\beta_{n-1}} ((K_{n-1} - A_{n-1} J_{n-1})(t, \theta))^2]}{t^3} \\
&+ (e^{-1} + e^{\beta_{n-1}-\mu_{n-1}} \ln(\sup_{S^1} \{\bar{u}_1; e^{\beta_{n-1}-\mu_{n-1}}\})) (\bar{u}_1(t))^2 \\
&+ (\Upsilon_{n-1} + \bar{u}_1^2 + 1) \left\{ \sup_{S^1} e^{2\beta_{n-1}-2\mu_{n-1}} + (\sup_{S^1} e^{2\beta_{n-1}-2\mu_{n-1}}) \bar{v}_2^2 \right. \\
&+ \frac{[\sup_{S^1} e^{\beta_{n-1}} \bar{v}_3 + \sup_{S^1} (e^{\beta_{n-1}} |A_{n-1}| \bar{v}_2)]^2}{t_0^2} \\
&+ \frac{[\sup_{S^1} e^{\beta_{n-1}-\mu_{n-1}} \bar{v}_3 + \sup_{S^1} (e^{\beta_{n-1}-\mu_{n-1}} |A| \bar{v}_2)] \bar{v}_2}{t_0} \\
&+ \frac{[\sup_{S^1} e^{\beta_{n-1}} \bar{v}_3 + \sup_{S^1} (e^{\beta_{n-1}} |A| \bar{v}_2)] \max_{[0,1]} (e^{\beta_{n-1}} (K_{n-1} - A_{n-1} J_{n-1}))}{t_f} \\
&\left. + \frac{\sup_{S^1} (e^{\beta_{n-1}-2\mu_{n-1}}) \sup_{S^1} (e^{\beta_{n-1}-2\mu_{n-1}} |J_{n-1}|) \bar{v}_2}{t} \right\} dt. \tag{3.196}
\end{aligned}$$

En utilisant les relations (3.190)–(3.191) ainsi que les lemmes 3.21 et 3.22, nous contrôlons les termes de droite de l'inégalité (3.196).

Dans la suite, nous énonçons une suite de lemmes qui vont permettre d'achever la preuve de la proposition.

Lemme 3.23. *Pour tout $t \in (t_0, t_i]$ et $\theta \in S^1$, nous avons*

$$\begin{aligned}
\chi_n(t) &\leq C + C(t) \int_{t_0}^t \left[\chi_{n-1}(s) (1 + \bar{u}_{n-1,1} \ln \bar{u}_1 + \ln \bar{u}_{n-1,1}(s)) + \sup_{\theta \in S^1} \Upsilon_{n-1}(s) (\chi_{n-1}(s))^2 \right] ds \\
&+ 2C' \max_{\bar{t} \in \{t_0, t\}} |V(\phi_{n-1}(\bar{t}, \theta))|, \tag{3.197}
\end{aligned}$$

où $\chi_n(t)$ est défini comme à la relation (3.75) en remplaçant ξ et ς par ξ_n et ς_n respectivement.

Preuve : Nous partons des équations (3.145) et (3.146) que nous intégrons le long de la courbe caractéristique correspondant aux vecteurs champs $\partial_{\xi_{n-1}}$ et $\partial_{\varsigma_{n-1}}$ sur $t = t_0$ au

point $(t, \theta) \in]t_0, t_i) \times S^1$, pour obtenir

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_n}(t, \theta) &= \phi_{\zeta_n}(t_0, \theta - (N_{n-1}(t) - t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{2\alpha_{n-1}} \phi_{\zeta_{n-1}}(s, \theta - (N_{n-1}(s) - t_0)) ds \\
&+ \int_{t_0}^t [\alpha_{n-1}(2A'_{n-1}H_{n-1}(G_{n-1} - 1) - 2\mu'_{n-1}(G_{n-1} + A_{n-1}H_{n-1})^2 e^{-2(\tau_{n-1} - 2\mu_{n-1})})] \\
&\times \phi'_{n-1}(s, \theta - (N_{n-1}(s) - t_0)) ds \\
&- \int_{t_0}^t (4\alpha_{n-1}\mu'_{n-1}H_{n-1}^2 s^2 e^{-2\tau_{n-1}} \phi'_{n-1} \\
&+ \frac{\dot{\phi}_{n-1}}{s} + e^{2\beta_{n-1} - 2\mu_{n-1}} V'(\phi_{n-1}))(s, \theta - (N_{n-1}(s) - t_0)) ds, \tag{3.198}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{\xi_n}(t, \theta) &= \phi_{\xi_n}(t_0, \theta + (N_{n-1}(t) - t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{2\alpha_{n-1}} \phi_{\xi_{n-1}}(s, \theta + (N_{n-1}(s) - t_0)) ds \\
&+ \int_{t_0}^t [\alpha_{n-1}(2A'_{n-1}H_{n-1}(G_{n-1} - 1) - 2\mu'_{n-1}(G_{n-1} + A_{n-1}H_{n-1})^2 e^{-2(\tau_{n-1} - 2\mu_{n-1})})] \\
&\times \phi'_{n-1}(s, \theta + (N_{n-1}(s) - t_0)) ds \\
&- \int_{t_0}^t (4\alpha_{n-1}\mu'_{n-1}H_{n-1}^2 s^2 e^{-2\tau_{n-1}} \phi'_{n-1} \\
&+ \frac{\dot{\phi}_{n-1}}{s} + e^{2\beta_{n-1} - 2\mu_{n-1}} V'(\phi_{n-1}))(s, \theta + (N_{n-1}(s) - t_0)) ds. \tag{3.199}
\end{aligned}$$

Comme d'après l'inégalité (3.194) et les lemmes 3.21 et 3.22, $\left| \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right|$ est majoré par l'expression $\ln(1 + \bar{u}_{n-1,1}^2)$, en nous inspirant de (3.86), nous avons

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta \in S^1} |\phi_{\zeta_n}(t, \theta)| &\leq \sup_{\theta \in S^1} |\phi_{\zeta_n}(t_0, \theta)| + \int_{t_0}^t C(s) [\sup_{\theta \in S^1} |\phi_{\zeta_{n-1}}(s, \theta)| \ln(1 + \bar{u}_{n-1,1}^2(s)) \\
&+ \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\dot{\phi}_{n-1}(s, \theta)| + e^{2\beta_{n-1} - 2\mu_{n-1}} |V'(\phi_{n-1})|] ds + \kappa_{n-1}(t, \theta) \\
&\leq C + \int_{t_0}^t C(s) [\sup_{\theta \in S^1} |\phi_{\zeta_{n-1}}(s, \theta)| \ln(1 + \bar{u}_{n-1,1}^2(s)) \\
&+ \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\dot{\phi}_{n-1}(s, \theta)|] ds + \tilde{C} \left| \int_{t_0}^t \dot{\phi}_{n-1}(s, \theta) V'(\phi_{n-1}(s, \theta)) ds \right| + \kappa_{n-1}(t, \theta) \\
&\leq C + \int_{t_0}^t C(s) [\sup_{\theta \in S^1} |\phi_{\xi_{n-1}}(s, \theta)| \ln(1 + \bar{u}_{n-1,1}^2(s)) + \kappa_{n-1}(t, \theta) \\
&+ \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\dot{\phi}_{n-1}(s, \theta)|] ds + \tilde{C} |V(\phi_{n-1}(t, \theta)) - V(\phi_{n-1}(t_0, \theta))|, \tag{3.200}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta \in S^1} |\phi_{\xi_n}|(t, \theta) &\leq \sup_{\theta \in S^1} |\phi_{\xi_n}(t_0, \theta)| + \int_{t_0}^t C(s) \left[\sup_{\theta \in S^1} |\phi_{n-1}|(s, \theta) \ln(1 + \bar{u}_{n-1,1}^2(s)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\dot{\phi}_{n-1}(s, \theta)| + e^{2\beta_{n-1} - 2\mu_{n-1}} |V'(\phi_{n-1})| \right] ds + \tilde{\kappa}_{n-1}(t, \theta) \\
&\leq C + \tilde{\kappa}_{n-1}(t, \theta) + \int_{t_0}^t C(s) \left[\sup_{\theta \in S^1} |\phi_{\xi_{n-1}}|(s, \theta) \ln(1 + \bar{u}_{n-1,1}^2(s)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\dot{\phi}_{n-1}(s, \theta)| \right] ds + \tilde{C} \left| \int_{t_0}^t \dot{\phi}_{n-1}(s, \theta) V'(\phi_{n-1}(s, \theta)) ds \right| \\
&\leq C + \tilde{\kappa}_{n-1}(t, \theta) + \int_{t_0}^t C(s) \left[\sup_{\theta \in S^1} |\phi_{\xi_{n-1}}|(s, \theta) \ln(1 + \bar{u}_{n-1,1}^2(s)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{s} \sup_{\theta \in S^1} |\dot{\phi}_{n-1}(s, \theta)| \right] ds + \tilde{C} |V(\phi_{n-1}(t, \theta)) - V(\phi_{n-1}(t_0, \theta))|, \quad (3.201)
\end{aligned}$$

où κ_{n-1} et $\tilde{\kappa}_{n-1}$ sont définis respectivement comme dans les relations (3.88) et (3.89) en remplaçant les composantes de la métrique A , τ , μ , α , G , H , A_θ , μ_θ , ainsi que ϕ_θ et ϕ_t par A_{n-1} , τ_{n-1} , μ_{n-1} , α_{n-1} , G_{n-1} , H_{n-1} , A'_{n-1} , μ'_{n-1} , ϕ'_{n-1} , $\dot{\phi}_{n-1}$. L'estimation de $\kappa_{n-1}(t, \theta)$ et $\tilde{\kappa}_{n-1}(t, \theta)$ se fait de manière similaire à celle de $\kappa(t, \theta)$ et $\tilde{\kappa}(t, \theta)$ fait au lemme 3.1 et l'estimation de β_{n-1} permet de contrôler

$$\phi'_{n-1}; A'_{n-1}, e^{-2(\tau_{n-1} - 2\mu_{n-1})} \text{ et } \mu'_{n-1}.$$

D'autre part, comme

$$(K_{n-1} - A_{n-1}J_{n-1})^2 \lesssim \mathcal{E}^\circ \text{ et } K_{n-1} - A_{n-1}J_{n-1} = -\frac{t^3 e^{-2\tau_{n-1}}}{\sqrt{\alpha_{n-1}}} \dot{H}_{n-1},$$

cette relation permet de borner \dot{H}_{n-1} et donc H_{n-1} . Pour contrôler G_{n-1} , nous utilisons les équations (1.100) – (1.103) mais en remplaçant $\Gamma = G_t + AH_t$ par $\Gamma_{n-1} = \dot{G}_{n-1} + A_{n-1}\dot{H}_{n-1}$ qui vont permettre d'avoir une estimation de $\Gamma_{n-1} = \dot{G}_{n-1} + A_{n-1}\dot{H}_{n-1}$ dès que $\bar{S}_{n-1,13}$, $\bar{S}_{n-1,12}$, $\bar{\rho}_{n-1,2}$ et $\bar{\rho}_{n-1,2}$ seront bornées. Il reste donc à contrôler $\bar{S}_{n-1,13}$, $\bar{S}_{n-1,12}$, $\bar{\rho}_{n-1,2}$ et $\bar{\rho}_{n-1,2}$. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha_{n-1,2}} S_{n-1,1k} &= \int_{\mathbb{R}^3} f_n \frac{v^1 v^k}{v^0} dv \quad k \in 2; 3 \\
&\lesssim \|f_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \sup |v^1| \frac{dv^1}{\sqrt{1 + (v^1)^2}} \\
&\leq C \bar{u}_{n-1,1} \ln(\bar{u}_{n-1,1}). \quad (3.202)
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$|\kappa_{n-1}(t, \theta)| \leq C \int_{t_0}^t C \bar{u}_{n-1,1} \ln(\bar{u}_{n-1,1})(s, \theta - (N_{n-1}(s) - t_0)) ds, \quad (3.203)$$

$$|\tilde{\kappa}_{n-1}(t, \theta)| \leq C \int_{t_0}^t C \bar{u}_{n-1,1} \ln(\bar{u}_{n-1,1})(s, \theta + (N_{n-1}(s) - t_0)) ds. \quad (3.204)$$

On additionne les équations (3.200), (3.201), (3.203) et (3.204) et on obtient la relation (3.197). ■

Lemme 3.24. *Pour tout $t \in [t_0, t_i]$ et $\theta \in S^1$, nous avons*

$$\Lambda_n(t; \theta) \leq C + C(t) \int_{[t_0, t]} (\Lambda_{n-1}(s; \theta))^3 \ln(\Lambda_{n-1}(s; \theta)) ds. \quad (3.205)$$

Preuve : Nous utilisons les relations (3.194) et (3.197) pour avoir

$$\psi_n(t) \leq B + \int_{t_0}^t \varrho_{n-1}(s) \psi_{n-1}(s) \ln(\psi_{n-1}(s)) ds \quad (3.206)$$

où B est une constante positive dépendant des données initiales et

$$\begin{aligned} \varrho_{n-1}(s) = & -2se^{2\beta_{n-1}-\mu_{n-1}} 2V(\phi_{n-1}) \\ & - 2se^{2\beta_{n-1}-\mu_{n-1}} 16\pi \left(\frac{\sqrt{\alpha_{n-1}}}{t} \int_{\mathbb{R}^3} f_n \frac{1 + e^{-2\mu_{n-1}} v_2^2 + e^{2\mu_{n-1}} t^2 (v_3 - A_{n-1} v_2)^2}{|v_0|} dv \right). \end{aligned}$$

De plus

$$\chi_{n-1}(s) + \psi_{n-1}(s) \chi_{n-1}^2(s) \leq \Lambda_{n-1}(s) + \Lambda_{n-1}^3(s) \lesssim \Lambda_{n-1}^3(s) \quad \text{car } \Lambda_{n-1}(s), \Lambda_{n-1}^2(s) \leq \Lambda_{n-1}^3(s). \quad (3.207)$$

En additionnant (3.197) et (3.206) et en utilisant (3.207) nous obtenons le résultat. ■

Lemme 3.25. $\partial_t f_n, \partial_\theta f_n$ sont bornés sur $]t_0, t_i] \times S^1$.

Preuve : En effet, on pose $z = t$ ou θ on a

$$\frac{\partial f_n}{\partial z} = \frac{\partial f_0}{\partial \theta_n} \frac{\partial \Theta_n}{\partial z} + \frac{\partial f_0}{\partial v_n} \frac{\partial V_n}{\partial z} \quad (3.208)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Theta_n}{ds} = \frac{V_n^1 \sqrt{\alpha_{n-1}}}{V^0}, \end{array} \right. \quad (3.209)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_n^1}{ds} = -(\tau'_{n-1} - \mu'_{n-1} + \frac{\alpha'_{n-1}}{2\alpha_{n-1}}) \sqrt{\alpha_{n-1}} V^0 - (\dot{\tau}_{n-1} - \dot{\mu}_{n-1}) V_n^1 \\ - \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} \mu'_{n-1}}{V^0} ((V_n^2)^2 - (V_n^3)^2) + \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} A'_{n-1}}{s V^0} e^{2\mu_{n-1}} V_n^2 V_n^3, \end{array} \right. \quad (3.210)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_n^2}{ds} = -\dot{\mu}_{n-1} V_n^2 - \sqrt{\alpha_{n-1}} \mu'_{n-1} \frac{V_n^1 V_n^2}{V^0}, \end{array} \right. \quad (3.211)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_n^3}{ds} = -\left(\frac{1}{s} - \dot{\mu}_{n-1}\right) V_n^3 + \sqrt{\alpha_{n-1}} \mu'_{n-1} \frac{V_n^1 V_n^3}{V^0} - \frac{e^{2\mu_{n-1}}}{s} \left(\dot{A}_{n-1} + \sqrt{\alpha_{n-1}} A'_{n-1} \frac{V_n^1}{V^0}\right) V_n^2. \end{array} \right. \quad (3.212)$$

Par la suite, en considérant

$$\Theta_n(s) = \Theta_n(s, t, \theta, v) \text{ et } V_n^k(s) = V_n^k(s, t, \theta, v), \quad k \in \{1, 2, 3\}$$

solution du système caractéristique (3.209) – (3.212), posons ∂ étant soit ∂_t , ∂_θ , ou ∂_{v^k} et définissons

$$\begin{aligned} \Psi_n &= \alpha_{n-1}^{-1/2} \partial \Theta_n, \\ Z_n^1 &= \partial V_n^1 + \left(\frac{\dot{\tau}_{n-1} V^0}{\sqrt{\alpha_{n-1}}} - \frac{\dot{\mu}_{n-1} V^0}{\sqrt{\alpha_{n-1}}} \frac{(V^0)^2 - (V_n^1)^2 + (V_n^2)^2 - (V_n^3)^2}{(V^0)^2 - (V_n^1)^2} \right) \partial \Theta_n \\ &\quad + \left(\mu'_{n-1} \frac{V_n^1 ((V_n^2)^2 - (V_n^3)^2)}{(V^0)^2 - (V_n^1)^2} - \frac{\dot{A}_{n-1} e^{2\mu_{n-1}}}{\sqrt{\alpha_{n-1}} t} \frac{V^0 V_n^2 V_n^3}{(V^0)^2 - (V_n^1)^2} \right) \partial \Theta_n \\ &\quad + \left(A_\theta \frac{V_n^1 V_n^2 V_n^3}{(V^0)^2 - (V_n^1)^2} \right) \partial \Theta_n, \\ Z_n^2 &= \partial V_n^2 + V_n^2 \mu'_{n-1} \partial \Theta_n, \\ Z_n^3 &= \partial V_n^3 - (V_n^3 \mu'_{n-1} - \frac{e^{2\mu_{n-1}}}{s} A'_{n-1}) \partial \Theta_n. \end{aligned}$$

Alors, on obtient une matrice $M_n = \{a_{\varsigma v}^n\}$, ($\varsigma, v \in \{0, 1, 2, 3\}$) tel que

$$\Omega_n := (\Psi_n, Z_n^1, Z_n^2, Z_n^3)^T,$$

satisfait

$$\frac{d\Omega_n}{ds} = M_{n-1} \Omega_n,$$

et les éléments de la matrice $a_{\varsigma v}^n = a_{\varsigma v}(s, \Theta_n(s), V_n^k(s))$. En particulier, on a

$$\begin{aligned} \frac{dZ_n^2}{ds} &= a_{22}^{n-1} Z_n^2, \\ \frac{dZ_n^3}{ds} &= a_{30}^{n-1} \Psi_n + a_{32}^{n-1} Z_n^2 + a_{33}^{n-1} Z_n^3. \end{aligned}$$

La composante a_{30}^{n-1} s'exprime en fonction de $\frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \cdot a_{33}^{n-1}$ dépend de $-\frac{1}{s} + \dot{\mu}_{n-1}$ et la composante a_{32}^{n-1} contient $\frac{e^{2\mu_{n-1}}}{s} (\dot{A}_{n-1} + \sqrt{\alpha_{n-1}} A'_{n-1} \frac{V_n^1}{V_0^1})$ qui sont tous uniformément bornés sur $[t_0, t_i)$, et toutes ces composantes sont contrôlées. Pour le terme Z_n^1 , nous utilisons les équations (3.142) – (3.144) et les équations (3.149) – (3.150)

On a l'application $(\partial\Theta_n, \partial V_n^k) \mapsto (\Psi_n, Z_n^k)$ qui est inversible. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{ds} \partial_\theta(\Theta, V)_{n+1}(s, t, \theta, v) \right| &= |\partial_\theta(\Theta, V)_{n+1}(s, t, \theta, v) \partial_\theta \Xi_n(s, \Theta(s, t, \theta, v), V(s, t, \theta, v))| \\ &\leq |(\Theta, V)_{n+1}(s, t, \theta, v^1, v^2, v^3)| (C(s) + \Lambda_n(s)). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $(s, \theta, v^1, v^2, v^3) \in \text{supp} f_{n+1}(t) \cup \text{supp} f_n(t)$, on applique le lemme de Gronwall et on obtient

$$|\partial_\theta(\Theta, V)_{n+1}(t_0, t, \theta, v^1, v^2, v^3)| \leq \exp \left\{ \int_{t_0}^t |(C(s) + \Lambda_n(s))| ds \right\}.$$

La relation (3.208) nous permet ainsi le contrôle de la dérivée de f_n car les composantes a_{cv}^{n-1} sont bornées. On en déduit (voir (3.159)) alors que

$$\|\partial_\theta f_{n+1}(t)\| = \|\partial_{(\theta, v)}(\Theta, V)_{n+1}(t_0, t, \theta, v^1, v^2, v^3) f_0((\Theta, V)_{n+1}(t_0, t, \theta, v^1, v^2, v^3))\|.$$

$$\|\partial_\theta f_{n+1}(t)\| \leq \|\partial_{(\theta, v)} f_0\| \exp \left(\int_{t_0}^t C(s) (D_n(s) + \Lambda_n(s)) ds \right) \quad (3.213)$$

d'où le résultat attendu. ■

Les lemmes 3.23 et 3.24 permettent de borner $\mu_n, \alpha_n, A_n, \tau_n, \phi_n, G_n, H_n, f_n$ et les lemmes 3.24 et 3.25 permettent de contrôler

$$\dot{\mu}_n, \dot{\alpha}_n, \dot{A}_n, \dot{\tau}_n, \dot{\phi}_n, \dot{H}_n, \mu'_n, \alpha'_n, A'_n, \tau'_n, \phi'_n, \dot{G}_n, f'_n.$$

ce qui achève la preuve de la proposition. ■

3.3.3 Théorème d'existence locale

Proposition 3.3. *Soit $[t_0; T^*] \subset [t_0; T]$ un sous ensemble compact dans lequel nos estimations précédentes sont vérifiées. Alors dans cet intervalle, ces itérées convergent uniformément.*

Preuve : Soit $t \in [t_0; T^*]$; nous définissons

$$\begin{aligned} F_n(t) &:= \sup \{ \|(f_{n+1} - f_n)(t)\| + \|(\phi_{n+1} - \phi_n)(t)\| + \|(\alpha_{n+1} - \alpha_n)(t)\| \\ &+ \|(\mu_{n+1} - \mu_n)(t)\| + \|(\dot{A}_{n+1} - \dot{A}_n)(t)\| + \|(\tau_{n+1} - \tau_n)(t)\| \\ &+ \|(G_{n+1} - G_n)(t)\| + \|(\dot{H}_{n+1} - \dot{H}_n)(t)\|; t_0 \leq t \leq T^* \}, \end{aligned} \quad (3.214)$$

où, pour toute fonction $h := h(\cdot, \theta)$

$$\| (h_{n+1} - h_n)(t) \| = \| (h_{n+1} - h_n)(t) \|_\infty + \| (\dot{h}_{n+1} - \dot{h}_n)(t) \|_\infty + \| (h'_{n+1} - h'_n)(t) \|_\infty.$$

Pour simplifier les écritures, pour toute fonction $h := h(\cdot, \theta)$ nous posons

$$\partial_n^\pm h = (\partial_t \pm \sqrt{\alpha_n} \partial_\theta) h = h^{\{\pm\}}.$$

En procédant de manière analogue à la preuve de la proposition (3.2), et en utilisant (3.145) – (3.146) nous avons

$$\begin{aligned} & \partial_n^\pm (\bar{\Upsilon}_{n+1} \mp \bar{\Upsilon}_{n+1}^\times) - \partial_{n-1}^\pm (\bar{\Upsilon}_n \mp \bar{\Upsilon}_n^\times) = -\frac{2}{t} (\dot{\mu}_n^2 - \dot{\mu}_{n-1}^2 + \frac{e^{4\mu_n}}{4t^2} \alpha_n A_n'^2 - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4t^2} \alpha_{n-1} A_{n-1}'^2) \\ & - \frac{\dot{\alpha}_n}{\alpha_n} (\bar{\Upsilon}_n \mp \bar{\Upsilon}_n^\times) + \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} (\bar{\Upsilon}_{n-1} \mp \bar{\Upsilon}_{n-1}^\times) \pm \left(\frac{\bar{\Upsilon}_n^\times}{t} - \frac{\bar{\Upsilon}_{n-1}^\times}{t} \right) - \frac{2}{t} (\dot{\phi}_n^2 - \dot{\phi}_{n-1}^2) \\ & + 2(\phi_n^{\{\pm\}} \bar{\Upsilon}_n - \phi_{n-1}^{\{\pm\}} \bar{\Upsilon}_{n-1}) \quad \text{ici } \bar{\Upsilon}_{n-1} \text{ est définie par (3.147)} \\ & + 2\mu_n^{\{\pm\}} \left(\frac{e^{\beta_n - 4\mu_n}}{2t^2} J_n^2 + 2e^{2(\beta_n - \mu_n)} V(\phi_n) \right) \\ & + 8\pi \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{\beta_n - 4\mu_n}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_{n+1}(1 + 2e^{-2\mu_n} v_2^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \\ & - 2\mu_{n-1}^{\{\pm\}} \left(\frac{e^{\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{2t^2} J_{n-1}^2 + 2e^{2(\beta_{n-1} - \mu_{n-1})} V(\phi_{n-1}) \right) \\ & + 8\pi \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} e^{\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n(1 + 2e^{-2\mu_{n-1}} v_2^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \\ & + \frac{e^{4\mu_n}}{4t^2} A_n^{\{\pm\}} \left(\frac{e^{\beta_n - 4\mu_n}}{t^2} J_n (K_n - A_n J_n) \right) \\ & + 16\pi \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\beta_n - 4\mu_n}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_{n+1} v_2 (v_3 - A_n v_2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \\ & - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4t^2} A_{n-1}^{\{\pm\}} \left[\frac{e^{\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{t^2} J_{n-1} (K_{n-1} - A_{n-1} J_{n-1}) \right. \\ & \left. + 16\pi \frac{\sqrt{\alpha_{n-1}} e^{2\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_n v_2 (v_3 - A_{n-1} v_2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3 \right], \end{aligned} \tag{3.215}$$

$$\begin{aligned} & \partial_n^\pm (\bar{\Upsilon}_{n+1} \mp \bar{\Upsilon}_{n+1}^\times) - \partial_{n-1}^\pm (\bar{\Upsilon}_n \mp \bar{\Upsilon}_n^\times) = -\frac{2}{t} (\dot{\mu}_n^2 - \dot{\mu}_{n-1}^2 + \frac{e^{4\mu_n}}{4t^2} \alpha_n A_n'^2 - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4t^2} \alpha_{n-1} A_{n-1}'^2) \\ & - \frac{\dot{\alpha}_n}{\alpha_n} (\bar{\Upsilon}_n - \bar{\Upsilon}_{n-1} \mp (\bar{\Upsilon}_n^\times - \bar{\Upsilon}_{n-1}^\times)) + \left(\frac{\dot{\alpha}_n}{\alpha_n} - \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right) (\bar{\Upsilon}_{n-1} \mp \bar{\Upsilon}_{n-1}^\times) \pm \left(\frac{\bar{\Upsilon}_n^\times}{t} - \frac{\bar{\Upsilon}_{n-1}^\times}{t} \right) \\ & - \frac{2}{t} (\dot{\phi}_n^2 - \dot{\phi}_{n-1}^2) + 2\phi_n^{\{\pm\}} (\bar{\Upsilon}_n - \bar{\Upsilon}_{n-1}) + 2(\phi_n^{\{\pm\}} - \phi_{n-1}^{\{\pm\}}) \bar{\Upsilon}_{n-1} \\ & + 2\mu_n^{\{\pm\}} (T_n^1 - T_{n-1}^1) + 2(\mu_n^{\{\pm\}} - \mu_{n-1}^{\{\pm\}}) T_{n-1}^1 \\ & + \frac{e^{4\mu_n}}{4t^2} A_n^{\{\pm\}} (T_n^2 - T_{n-1}^2) + \frac{T_{n-1}^2}{4t^2} (e^{4\mu_n} - e^{4\mu_{n-1}}), \end{aligned} \tag{3.216}$$

$$\begin{aligned} \text{où } T_n^1 &= \frac{e^{2\beta_n - 4\mu_n}}{2t^2} J_n^2 + 2e^{2(\beta_n - \mu_n)} V(\phi_n) \\ &\quad + 8\pi \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\beta_n - 4\mu_n}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_{n+1}(1 + 2e^{-2\mu_n} v_2^2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3, \end{aligned} \quad (3.217)$$

$$\begin{aligned} T_n^2 &= \frac{e^{2\beta_n - 4\mu_n}}{t^2} J_n(K_n - A_n J_n) \\ &\quad + 16\pi \frac{\sqrt{\alpha_n} e^{2\beta_n - 4\mu_n}}{2t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f_{n+1} v_2 (v_3 - A_n v_2)}{|v_0|} dv_1 dv_2 dv_3. \end{aligned} \quad (3.218)$$

En utilisant (3.143), on a

$$|T_n^1 - T_{n-1}^1| \leq \frac{1}{2t} \left| \frac{\dot{\alpha}_n}{\alpha_n} - \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right| \quad \text{et} \quad |T_n^2 - T_{n-1}^2| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\dot{\alpha}_n}{\alpha_n} - \frac{\dot{\alpha}_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \right|. \quad (3.219)$$

Soit $(t_k, \theta_k) \in [t_0; t_i] \times S^1$, $t_i < T^*$ un point arbitraire. On considère γ_n^\pm la courbe intégrale de $t \mapsto t \pm \sqrt{\alpha_{n-1}} \theta$ partant de $(t_k; \theta_k)$ vers la surface $t = t_i$. Soit (t_i, θ_\pm) l'extrémité de la courbe intégrale $\gamma_n^\pm \cup \gamma_{n+1}^\pm$ sur la surface $t = t_0$. Alors, on a

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_n^- \cup \gamma_{n+1}^-} [\partial_n^-(\bar{\Upsilon}_{n+1} + \bar{\Upsilon}_{n+1}^\times) - \partial_{n-1}^-(\bar{\Upsilon}_n + \bar{\Upsilon}_n^\times)] + \\ &\int_{\gamma_n^+ \cup \gamma_{n+1}^+} [\partial_n^+(\bar{\Upsilon}_{n+1} - \bar{\Upsilon}_{n+1}^\times) - \partial_{n-1}^+(\bar{\Upsilon}_n - \bar{\Upsilon}_n^\times)] = \\ &\int_{\gamma_n^- \cup \gamma_{n+1}^-} \tilde{L}_n^+ + \int_{\gamma_n^+ \cup \gamma_{n+1}^+} \tilde{L}_n^-, \end{aligned} \quad (3.220)$$

où \tilde{L}_n^\pm est définie par le membre de droite de l'égalité (3.216)

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_{n+1}^-} [\partial_n^-(\bar{\Upsilon}_{n+1} - \bar{\Upsilon}_n + \bar{\Upsilon}_{n+1}^\times - \bar{\Upsilon}_n^\times)] + \int_{\gamma_n^- \cup \gamma_{n+1}^-} (\partial_n^- - \partial_{n-1}^-)(\bar{\Upsilon}_n + \bar{\Upsilon}_n^\times) + \\ &\int_{\gamma_{n+1}^+} [\partial_n^+(\bar{\Upsilon}_{n+1} - \bar{\Upsilon}_n + \bar{\Upsilon}_{n+1}^\times - \bar{\Upsilon}_n^\times)] + \int_{\gamma_n^+ \cup \gamma_{n+1}^+} (\partial_n^+ - \partial_{n-1}^+)(\bar{\Upsilon}_n + \bar{\Upsilon}_n^\times) \\ &= \int_{\gamma_n^- \cup \gamma_{n+1}^-} \tilde{L}_n^+ + \int_{\gamma_n^+ \cup \gamma_{n+1}^+} \tilde{L}_n^-, \end{aligned} \quad (3.221)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_{n+1}^-} \partial_n^-(\bar{\Upsilon}_{n+1} - \bar{\Upsilon}_n) + \int_{\gamma_{n+1}^+} \partial_n^+(\bar{\Upsilon}_{n+1} - \bar{\Upsilon}_n) = - \int_{\gamma_n^- \cup \gamma_{n+1}^-} (\partial_n^- - \partial_{n-1}^-)(\bar{\Upsilon}_n + \bar{\Upsilon}_n^\times) \\ &\quad - \int_{\gamma_{n+1}^+} [\partial_n^+(\bar{\Upsilon}_{n+1}^\times - \bar{\Upsilon}_n^\times)] - \int_{\gamma_n^+ \cup \gamma_{n+1}^+} (\partial_n^+ - \partial_{n-1}^+)(\bar{\Upsilon}_n + \bar{\Upsilon}_n^\times) \\ &\quad + \int_{\gamma_n^- \cup \gamma_{n+1}^-} \tilde{L}_n^+ + \int_{\gamma_n^+ \cup \gamma_{n+1}^+} \tilde{L}_n^-. \end{aligned} \quad (3.222)$$

(3.222) devient alors

$$\begin{aligned}
(\bar{\Upsilon}_{n+1} - \bar{\Upsilon}_n)(t_k, \theta_k) &= \frac{1}{2} [\bar{\Upsilon}_{n+1} - \bar{\Upsilon}_n](t_0, \theta_+) - (\bar{\Upsilon}_{n+1}^\times - \bar{\Upsilon}_n^\times)(t_0, \theta_+) - \\
\frac{1}{2} \left[\int_{\gamma_n^- \cup \gamma_{n+1}^-} (\partial_n^- - \partial_{n-1}^-)(\bar{\Upsilon}_n + \bar{\Upsilon}_n^\times) \right] &+ \frac{1}{2} [\bar{\Upsilon}_{n+1} - \bar{\Upsilon}_n](t_0, \theta_-) - (\bar{\Upsilon}_{n+1}^\times - \bar{\Upsilon}_n^\times)(t_0, \theta_-) - \\
\frac{1}{2} \left[\int_{\gamma_n^+ \cup \gamma_{n+1}^+} (\partial_n^+ - \partial_{n-1}^+)(\bar{\Upsilon}_n + \bar{\Upsilon}_n^\times) \right] &+ \frac{1}{2} \left[\int_{\gamma_n^- \cup \gamma_{n+1}^-} \tilde{L}_n^+ + \int_{\gamma_n^+ \cup \gamma_{n+1}^+} \tilde{L}_n^- \right]. \quad (3.223)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
|\tilde{L}_n^\pm| \leq \left(\frac{2}{t} + \frac{|\dot{\alpha}_n|}{|\alpha_n|} \right) (\bar{\Upsilon}_n - \bar{\Upsilon}_{n-1}) &+ \left| \frac{|\dot{\alpha}_n|}{|\alpha_n|} - \frac{|\dot{\alpha}_{n-1}|}{|\alpha_{n-1}|} \right| (\bar{\Upsilon}_n^\times \pm \bar{\Upsilon}_{n-1}^\times) + \\
\left| \frac{|\dot{\alpha}_n|}{|\alpha_n|} (\bar{\Upsilon}_{n-1}^\times + \bar{\Upsilon}_n^\times) \right| &+ |\phi_n^{\{\pm\}}| |\bar{\Upsilon}_n - \bar{\Upsilon}_{n-1}| + 2|\bar{\Upsilon}_{n-1}| \phi_n^{\{\pm\}} - \phi_{n-1}^{\{\pm\}}. \quad (3.224)
\end{aligned}$$

Les relations (3.188)–(3.190)–(3.192)–(3.194) de la preuve de la proposition 3.2 assurent le fait que les composantes du côté droit de l'inégalité (3.224) en dehors de $(\bar{\Upsilon}_n - \bar{\Upsilon}_{n-1})$ sont bornées, et au vu de (3.149)–(3.150), (3.223), on a alors

$$(\bar{\Upsilon}_{n+1} - \bar{\Upsilon}_n)(t_k, \theta_k) \leq C + C' \int_{t_0}^{t_k} (\bar{\Upsilon}_n - \bar{\Upsilon}_{n-1}) dt. \quad (3.225)$$

Par ailleurs, en utilisant les itérées dans (1.104)–(1.105) et au vu de (3.202), on a

$$\begin{aligned}
\text{pour } j, l \in \{1; 2; 3\}; \quad |\rho_{l,n} - \rho_{l,n-1}|, |S_{lj,n} - S_{lj,n-1}|, |P_{l,n} - P_{l,n-1}| &\lesssim \\
16\pi \|f_{n+1} - f_n\|_{(L^1(\mathbb{R}^3(dv)))} + \|f_0\|_\infty |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \bar{u}_{n,1} \ln(\bar{u}_{n,1}). &\quad (3.226)
\end{aligned}$$

Ainsi, au vu de (3.138) et en appliquant le théorème de la valeur moyenne à (3.213) on a

$$|(f_{n+1} - f_n)(t)| \leq C |\partial_{(\theta,v)} f_0| \int_{t_0}^t F_{n-1}(s) ds \quad (3.227)$$

En utilisant (3.152)–(3.154) on a

$$|J_{n+1} - J_n|(t) = 2t \left| \int_{t_0}^t (e^{\beta_n} S_{12,n} - e^{\beta_{n-1}} S_{12,n-1}) ds \right|, \quad (3.228)$$

$$\begin{aligned}
|K_{n+1} - K_n|(t) \leq 2t^2 \left| \int_{t_0}^t [e^{\beta_n} A_n S_{12,n} - e^{\beta_{n-1}} A_{n-1} S_{12,n-1}] ds \right| & \\
+ 2t^3 \left| \int_{t_0}^t [e^{\beta_n} e^{-2\mu_n} S_{13,n} - e^{\beta_{n-1}} e^{-2\mu_{n-1}} S_{13,n-1}] ds \right| &\quad (3.229)
\end{aligned}$$

La relation (3.179) de la preuve du lemme 3.21 nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t [e^{2\beta_n - 4\mu_n} J_n^2 - e^{2\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}} J_{n-1}^2](s, \theta) ds &= \int_{t_0}^t \int_{\bar{\theta}}^{\theta} [e^{2\beta_n - 4\mu_n} J_n^2 (2\beta'_n - 4\mu'_n) \\ - e^{2\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}} J_{n-1}^2 (2\beta'_{n-1} - 4\mu'_{n-1})](s, \acute{\theta}) d\acute{\theta} ds &+ \int_{t_0}^t [e^{2\beta_n - 4\mu_n} J_n^2 - e^{2\beta_{n-1} - 4\mu_{n-1}} J_{n-1}^2](s, \bar{\theta}) ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \int_{t_0}^t [e^{4\mu_n} \Gamma_n^2 - e^{4\mu_{n-1}} \Gamma_{n-1}^2](s, \theta) ds &\leq \int_{t_0}^t \int_{\bar{\theta}}^{\theta} |e^{4\mu_n} \Gamma_n^2 (2\beta'_n - 4\mu'_n) \\ - e^{4\mu_{n-1}} \Gamma_{n-1}^2 (2\beta'_{n-1} - 4\mu'_{n-1})|(s, \acute{\theta}) d\acute{\theta} ds &+ \int_{t_0}^t [e^{4\mu_n} \Gamma_n^2 - e^{4\mu_{n-1}} \Gamma_{n-1}^2](s, \bar{\theta}) ds. \end{aligned}$$

En nous inspirant de la preuve du lemme 3.22, on a

$$\begin{aligned} |e^{\beta_n} (K_n - A_n J_n) - e^{\beta_{n-1}} (K_{n-1} - A_{n-1} J_{n-1})|(t, \theta) &\leq |e^{\beta_n} (K_n - A_n J_n) \\ &- e^{\beta_{n-1}} (K_{n-1} - A_{n-1} J_{n-1})|(t, \bar{\theta}) \\ + \int_{\bar{\theta}}^{\theta} [|e^{\beta_n} - e^{\beta_{n-1}}| |\beta'_n (K_n - A_n J_n)| + e^{\beta_{n-1}} |\beta'_n (K_n - A_n J_n) - \beta'_{n-1} (K_{n-1} - A_{n-1} J_{n-1})|](t, \acute{\theta}) d\acute{\theta}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } |\dot{H}_n - \dot{H}_{n-1}|(t, \theta) \leq e^{\tau_n} |\dot{H}_{n-1}|(e^{-\tau_n} - e^{-\tau_{n-1}}) + F_n(t, \theta).$$

$$\text{Donc } \int_{t_0}^t |\dot{H}_n - \dot{H}_{n-1}|(s, \theta) ds \leq \int_{t_0}^t [e^{\tau_n} |\dot{H}_{n-1}|(e^{-\tau_n} - e^{-\tau_{n-1}}) + F_n](s, \theta) ds.$$

On a ainsi

$$|H_n - H_{n-1}|(t, \theta) \lesssim \int_{t_0}^t F_n(s, \theta) ds.$$

En outre, en prenant l'égalité (3.28) combinée avec les équations (3.142) – (3.143)

$$|\dot{\beta}_n - \dot{\beta}_{n-1}| = \left| t(\bar{\Upsilon}_n - \bar{\Upsilon}_{n-1}) + (\Gamma_n - \Gamma_{n-1}) + (\dot{H}_n - \dot{H}_{n-1}) + 8\pi(P_{1,n}^f - P_{1,n-1}^f) \right|. \quad (3.230)$$

Dans la suite, en additionnant (3.225) – (3.227) – (3.228) – (3.229) et (3.230), on a

$$F_n(t) \leq C \int_{t_0}^t (F_n(s) + F_{n-1}(s)) ds; \quad n \geq 1. \quad (3.231)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall à (3.231), on a $F_n(t) \leq C \int_{t_0}^t F_{n-1}(s) ds$; et par induction on obtient finalement

$$F_n(t) \leq C^{m+1} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad t \in [t_0, T^*]. \quad (3.232)$$

On en déduit que $F_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ car la série $\left\{ C^{n+1} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On conclut au vu de (3.214), et du fait que L^∞ est un espace de Banach, pour la norme L^∞ , que

$$\alpha_n \rightarrow \alpha, \quad A_n \rightarrow A, \quad \mu_n \rightarrow \mu, \quad \tau_n \rightarrow \tau, \quad \phi_n \rightarrow \phi, \quad f_n \rightarrow f, \quad H_n \rightarrow H, \quad G_n \rightarrow G.$$

$$\alpha'_n \rightarrow \alpha', \quad A'_n \rightarrow A', \quad \mu'_n \rightarrow \mu', \quad \tau'_n \rightarrow \tau', \quad \phi'_n \rightarrow \phi', \quad H'_n \rightarrow H', \quad G'_n \rightarrow G'$$

et

$$\dot{\alpha}_n \rightarrow \dot{\alpha}, \quad \dot{A}_n \rightarrow \dot{A}, \quad \dot{\mu}_n \rightarrow \dot{\mu}, \quad \dot{\tau}_n \rightarrow \dot{\tau}, \quad \dot{\phi}_n \rightarrow \dot{\phi}, \quad \dot{H}_n \rightarrow \dot{H}, \quad \dot{G}_n \rightarrow \dot{G}.$$

Ce qui nous permet de déduire que $f, \tau, \mu, \alpha, A, G, H, \phi$ sont solutions du système (1.92) – (1.99).

À présent, pour l'unicité de solution, soit

$$\xi_k = (f_k; R_k; \mu_k; A_k; \tau_k; G_k; H_k; \phi_k)_{k=1;2}$$

deux solutions régulières pour le problème de Cauchy du système (1.92) – (1.99) ayant les mêmes données initiales

$$(f^\circ, \mu^\circ, R^\circ, A^\circ, \tau^\circ, H^\circ, G^\circ, \phi^\circ) \text{ à } t = t_0.$$

Utilisant le fait que ξ_k est solution du système complet (1.92) – (1.99), on procède de manière similaire à la façon dont on a établi la convergence des itérées pour avoir

$$\mathfrak{J}(t) \leq C \int_{t_0}^t \mathfrak{J}(s) ds,$$

avec

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(t) &:= \sup\{\|(f_1 - f_2)(s)\| + \|(\phi_1 - \phi_2)(s)\| + \|(\alpha_1 - \alpha_2)(s)\| \\ &+ \|(\mu_1 - \mu_2)(s)\| + \|(A_1 - A_2)(s)\| + \|(\tau_1 - \tau_2)(s)\| \\ &+ \|(G_1 - G_2)(s)\| + \|(H_1 - H_2)(s)\|; t_0 \leq s \leq T^*\}. \end{aligned} \quad (3.233)$$

On en déduit $\mathfrak{J}(t) = 0$, Pour $t \in [t_0; T^*]$. Ce qui implique,

$$f_2 = f_1; \quad \alpha_2 = \alpha_1; \quad \mu_2 = \mu_1; \quad A_2 = A_1; \quad \tau_2 = \tau_1; \quad G_2 = G_1; \quad H_2 = H_1; \quad \phi_2 = \phi_1.$$

■

De la proposition 3.3, on a le résultat suivant.

Théorème 3.2. (*Existence et unicité locale*)

Soit $f^0 \in C^1(S^1 \times \mathbb{R}^3)$ avec

$$f^0 \geq 0. \quad f^0(\theta + 2\pi, v) = f^0(\theta, v), \quad (\theta, v) \in S^1 \times \mathbb{R}^3$$

et

$$W_0 := \sup\{|v|, (\theta, v) \in \text{supp} f^0\} < \infty.$$

Soient les fonctions régulières $\bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{\mu}, \bar{A}, \bar{H}, \bar{G}, \bar{\phi}$

$$\text{et } f^\circ, \mu^\circ, \alpha^\circ, A^\circ, \tau^\circ, H^\circ, G^\circ, \phi^\circ \in C^2(S^1).$$

Alors, il existe une unique solution régulière $(f, \mu, \alpha, A, \tau, H, G, \phi)$, du système d'équations d'Einstein-Vlasov avec champ scalaire non linéaire dans direction future en symétrie T^2 , (1.92) – (1.99) avec

$$(f, \mu, \alpha, A, \tau, H, G, \phi)(t_0) = (f^\circ, \mu^\circ, R^\circ, A^\circ, \tau^\circ, H^\circ, G^\circ, \phi^\circ)$$

sur un intervalle de temps $[t_0; T^*[$.

EXISTENCE GLOBALE

Dans ce chapitre, cette fois-ci, nous allons aborder la question d'existence globale dans les deux directions. Dans un premier temps dans la direction passée, et ensuite dans la direction future.

4.1 Existence globale dans la direction passée

Dans cette section, nous allons montrer que les dérivées d'ordre supérieures (secondes) des composantes de la métrique ainsi que celles de ϕ sont bornées, ce qui va permettre d'avoir les hypothèses du critère de continuation qu'on va utiliser pour établir l'existence globale. Nous énonçons une série de lemmes pour atteindre notre but

Lemme 4.1. *Les dérivées secondes de R en (t, θ) , R_{tt} , $R_{t\theta}$ et $R_{\theta\theta}$ sont bornées sur $]t_-, t_0] \times S^1$.*

Preuve : D'après la première section 2.1 sur les estimations a priori du chapitre 2, les composantes de la métrique ainsi que leurs dérivées premières sont bornées, les quantités de matières et les quantités de torsion également, les équations (1.54), (1.55) et (1.59) nous permettent d'exprimer $R_{t\theta}$ et $R_{\theta\theta}$ en fonction de R , τ , A , ϕ , μ , (et leurs dérivées premières) Γ , H_t , ρ , J_1 qui sont toutes bornées. Par conséquent $R_{t\theta}$ et $R_{\theta\theta}$ sont aussi bornés en tout point $t \in (t_-, t_0]$.

De (1.59) on déduit que R_{tt} est borné. ■

Lemme 4.2. *Les dérivées secondes de ϕ en t et θ , ϕ_{tt} , $\phi_{t\theta}$ et $\phi_{\theta\theta}$ sont bornées sur $]t_-, t_0] \times S^1$.*

Preuve : L'équation (1.60) est équivalente à

$$2\partial_\sigma\partial_\lambda\phi = -\frac{(\phi_t - \phi_\theta)}{2R}(R_t + R_\theta) + \frac{(\phi_\theta + \phi_t)}{2R}(R_\theta - R_t) + L\phi_\theta - 2e^{-2(\tau-\mu)}V'(\phi), \quad (4.1)$$

avec $L = 2A_\theta H(G - R) - \mu_\theta[(G + AH)^2 e^{4\mu} + 4H^2 R^2] e^{-2\tau}$.

De cette relation (4.1), nous avons

$$\begin{aligned} 2\partial_\sigma \partial_\lambda \phi_\theta &= \frac{\phi_\sigma \partial_\lambda R_\theta}{2R} - \frac{\phi_\lambda \partial_\sigma R_\theta}{2R} + 2(\tau_\theta - \mu_\theta) V'(\phi) e^{-2(\tau-\mu)} - \phi_\theta V''(\phi) e^{-2(\tau-\mu)} \\ &\quad - \frac{R_\theta}{R^2} (R_\lambda \phi_\sigma - \phi_\lambda R_\sigma) - \frac{R_\sigma \partial_\lambda \phi_\theta}{2R} + \frac{R_\lambda \partial_\sigma \phi_\theta}{2R} + L_\theta \phi_\theta + L \phi_{\theta\theta}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nous posons

$$\mathcal{L} = \frac{\phi_\sigma \partial_\lambda R_\theta}{2R} - \frac{\phi_\lambda \partial_\sigma R_\theta}{2R} + 2(\tau_\theta - \mu_\theta) V'(\phi) e^{-2(\tau-\mu)} - \phi_\theta V''(\phi) e^{-2(\tau-\mu)} - \frac{R_\theta}{R^2} (R_\lambda \phi_\sigma - \phi_\lambda R_\sigma),$$

et (4.2) devient

$$2\partial_\sigma \partial_\lambda \phi_\theta = \mathcal{L} - \frac{R_\sigma \partial_\lambda \phi_\theta}{2R} + \frac{R_\lambda \partial_\sigma \phi_\theta}{2R}. \quad (4.3)$$

Nous supposons sans nuire à la généralité dans la suite que,

$$V(\phi) = V_0 e^{\phi^2}, \text{ donc } V''(\phi) = 2V(\phi) + 2\phi V'(\phi)$$

se contrôle. Ainsi, la quantité \mathcal{L} se contrôle car composée des éléments qu'on a borné précédemment. Nous intégrons l'équation (4.3) le long des courbes caractéristiques respectivement $s \mapsto \theta + s - t_0$, et $s \mapsto \theta - s + t_0$ avec $t_- \leq s \leq t_0$, ensuite, on applique l'inégalité de Gronwall pour borner

$$\sup_{\theta \in S^1} (|\partial_\sigma \phi_\theta| + |\partial_\lambda \phi_\theta|).$$

En effet, posant $E = \partial_\theta(R\phi_\lambda)$, et $F = \partial_\theta(R\phi_\sigma)$ par calcul, on obtient :

$$\phi_{t\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2R} (E + F) - \frac{R_\theta}{R} \phi_t, \quad (4.4)$$

$$\phi_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2R} (-E + F) - \frac{R_\theta}{R} \phi_t. \quad (4.5)$$

En utilisant (1.60) une fois de plus, on obtient

$$\begin{aligned} E_\sigma &= \frac{1}{2} \left[R_{\theta\theta} - \frac{R_\theta^2}{R} - LR_\theta - \frac{R_t R_\theta}{R} \right] \phi_t + \frac{1}{2} [-R_{t\theta} + LR_\theta + RL_\theta] \phi_\theta + \frac{1}{2} \left(R_\lambda - \frac{L}{\sqrt{2}} \right) E \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(R_\sigma + \frac{L}{\sqrt{2}} \right) F + \left\{ [R(\tau_\theta - \mu_\theta) - \frac{R_\theta}{2}] V'(\theta) - \frac{\phi_\theta}{2} V''(\theta) \right\}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} F_\lambda &= \frac{1}{2} \left[-R_{\theta\theta} - \frac{R_\theta^2}{R} - LR_\theta - \frac{R_t R_\theta}{R} \right] \phi_t + \frac{1}{2} [R_{t\theta} + LR_\theta + RL_\theta] \phi_\theta + \frac{1}{2} \left(-R_\lambda + \frac{L}{\sqrt{2}} \right) F \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(R_\sigma + \frac{L}{\sqrt{2}} \right) E + \left\{ [R(\tau_\theta - \mu_\theta) - \frac{R_\theta}{2}] V'(\theta) - \frac{\phi_\theta}{2} V''(\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

En intégrant le long des courbes intégrales $t \mapsto \theta \pm (t - t_1)$ en partant d'un point (t_1, θ) , $\theta \in S^1$ et $t_- < t_1 < t_0$. Les égalités (4.6) – (4.7), on obtient

$$E(t_1, \theta) = E(t_0, \theta + t_1 - t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} \left(a + b + \left(R_\lambda - \frac{L}{\sqrt{2}} \right) E + \left(R_\sigma + \frac{L}{\sqrt{2}} \right) F \right) (t_1, \theta + s - t_1) ds, \quad (4.8)$$

$$F(t_1, \theta) = F(t_0, \theta - t_1 + t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} \left(e + b - \left(R_\sigma + \frac{L}{\sqrt{2}} \right) E + \left(-R_\lambda + \frac{L}{\sqrt{2}} \right) F \right) (t_1, \theta - s + t_1) ds, \quad (4.9)$$

où

$$a = \left[R_{\theta\theta} - \frac{R_\theta^2}{R} - LR_\theta - \frac{R_t R_\theta}{R} \right] \phi_t + [-R_{t\theta} + LR_\theta + RL_\theta] \phi_\theta,$$

$$b = \left[R(\tau_\theta - \mu_\theta) - \frac{R_\theta}{2} \right] V'(\theta) - \frac{\phi_\theta}{2} V''(\theta),$$

$$e = \left[-R_{\theta\theta} - \frac{R_\theta^2}{R} - LR_\theta - \frac{R_t R_\theta}{R} \right] \phi_t + [R_{t\theta} + LR_\theta + RL_\theta] \phi_\theta.$$

En posant et en majorant $M(t) = \sup_{\theta \in S^1} (|E| + |F|)(t, \theta)$, puis en additionnant (4.8) et (4.9), on obtient

$$M(t) \leq M(t_0) + \int_{t_1}^{t_0} \left[\sup_{\theta \in S^1} |(max(a; e) + b)(s, \theta)| + \sup_{\theta \in S^1} \left(\frac{|L|}{\sqrt{2}} + |R_\sigma| + |R_\lambda| \right) (s, \theta) \right] M(s) ds. \quad (4.10)$$

Pour finir, on applique l'inégalité de Gronwall à (4.10), ce qui nous permet donc de borner $|\phi_{t\theta}|$ et $|\phi_{\theta\theta}|$. Nous utilisons enfin l'équation (1.60) pour borner $|\phi_{tt}|$. ■

Lemme 4.3. *Les dérivées secondes de A , μ et τ en (t, θ) sont bornées sur $]t_-, t_0] \times S^1$.*

Preuve : Nous écrivons les équations d'évolution en μ , (1.56) et A , (1.57) sous la forme

$$\begin{aligned} \mu_{tt} - \mu_{\theta\theta} &= \frac{(R_\theta - R_t)}{2R} (\mu_\theta + \mu_t) - \frac{(R_\theta - R_t)}{2R} (\mu_t - \mu_\theta) \\ &+ \frac{e^{4\mu}}{2R^2} (A_t - A_\theta)(A_t + A_\theta) + \frac{e^{4\mu-2\tau}}{2} \Gamma^2 + \frac{e^{4\mu-2\tau}}{2} \kappa, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} A_{tt} - A_{\theta\theta} &= \frac{(R_t - R_\theta)}{2R} (A_\theta + A_t) - \frac{(R_\theta + R_t)}{2R} (A_t - A_\theta) \\ &- 2(A_t - A_\theta)(\mu_\theta + \mu_t) - 2(A_\theta + A_t)(\mu_t - \mu_\theta) \\ &+ R^2 e^{-2\tau} \Gamma H_t + 2e^{2(\tau-2\mu)} S_{23}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où $\kappa = \rho - P_1 + P_2 - P_3$. En dérivant (4.11) et (4.12) par rapport à θ , nous avons

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \partial_\sigma \mu_\theta &= L_1 + \frac{R_\lambda}{2R} \partial_\sigma \mu_\theta - \frac{R_\sigma}{2R} \partial_\lambda \mu_\theta + \frac{e^{4\mu}}{2R^2} (A_\lambda \partial_\sigma A_\theta + A_\sigma \partial_\lambda A_\theta) \\ &\quad + e^{4\mu-2\tau} \Gamma \Gamma_\theta + \frac{e^{4\mu-2\tau}}{2} \kappa_\theta, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \partial_\sigma A_\theta &= L_2 + \frac{R_\lambda}{2R} \partial_\sigma A_\theta - \frac{R_\sigma}{2R} \partial_\lambda A_\theta - 2\mu_\sigma \partial_\lambda A_\theta - 2A_\lambda \partial_\sigma \mu_\theta - 2\mu_\lambda \partial_\sigma A_\theta \\ &\quad + 2R e^{-4\mu+2\tau} (S_{23})_\theta + R^2 e^{-2\tau} (\Gamma H_t)_\theta - 2A_\sigma \partial_\lambda \mu_\theta, \end{aligned} \quad (4.14)$$

avec

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{R_\theta}{2R^2} R_\lambda \mu_\sigma + \frac{\mu_\sigma}{2R} \partial_\lambda R_\theta + \frac{R_\lambda \mu_\lambda}{2R} R_\theta - \frac{\mu_\lambda}{2R} \partial_\lambda R_\theta \\ &\quad + \left(2\mu_\theta - \frac{R_\theta}{R} \right) \frac{e^{4\mu}}{R^2} + \frac{1}{2} e^{4\mu-2\tau} \left[(2\mu_\theta - \tau_\theta)(\Gamma^2 + \kappa) + \frac{\kappa_\theta}{2} \right], \\ L_2 &= -\frac{R_\theta}{2R^2} R_\lambda A_\sigma + \frac{A_\sigma}{2R} \partial_\lambda R_\theta + \frac{R_\sigma A_\lambda}{2R^2} R_\theta - \frac{A_\lambda}{2R} \partial_\sigma R_\theta \\ &\quad + (R_\theta R - \tau_\theta R^2) \Gamma H_t e^{-2\tau} + [R_\theta + 2(\tau_\theta - 2\mu_\theta)R] e^{2(\tau-2\mu)} S_{23}. \end{aligned}$$

Ici, L_1 et L_2 sont uniquement fonction de Γ , H_t , κ , S_{23} des dérivées premières de μ , A et τ , des premières et secondes dérivées de R qui sont par ailleurs bornés d'après les étapes du chapitre 2 et les lemmes précédents 4.1, 4.2. En intégrant les équations (4.13) et (4.14) le long des courbes caractéristiques de la surface initiale, nous obtenons en utilisant le lemme de Gronwall,

$$\sup_{\theta \in S^1} (|\partial_\sigma \mu_\theta| + |\partial_\lambda \mu_\theta| + |\partial_\sigma A_\theta| + |\partial_\lambda A_\theta|)$$

borné. Comme R est borné par R_0 et sous l'hypothèse que les intégrales des termes Γ_θ , $H_{t\theta}$, κ_θ et $(S_{23})_\theta$ sont bornées. En utilisant les équations auxiliaires (1.61) et (1.63), on déduit immédiatement que les quantités Γ_θ et $H_{t\theta}$ sont bornées. Pour borner les dérivées des quantités de matière κ_θ et $(S_{23})_\theta$, nous utilisons les variables introduites par Glassey et Strauss [GS] pour résoudre les équations de Maxwell-Vlasov. Nous allons nous en inspirer pour borner une composante des quantités des matières, en intégrant (4.13) suivant la variable auxiliaire λ l'expression contenant ρ_θ .

$$\frac{1}{4} \int_t^{t_0} \int_{\mathbb{R}^3} [e^{2(\tau-\mu)} v^0 \partial_\theta f](s, \theta - (s-t), v) dv ds, \quad (4.15)$$

avec $t \in]t_-, t_0]$, et $v = (v^1, v^2, v^3)$. Ensuite, on définit les variables auxiliaires suivantes

$$W = \sqrt{2} \partial_\lambda = \partial_t - \partial_\theta, \quad Z = \partial_t - \frac{v^1}{v^0} \partial_\theta.$$

Alors, ∂_t et ∂_θ sont exprimés en fonction de W et Z par

$$\partial_\theta = \frac{v^0}{v^0 + v^1}(Z - W), \quad (4.16)$$

$$\partial_t = \frac{v^0}{v^0 + v^1}\left(Z + \frac{v^1}{v^0}W\right). \quad (4.17)$$

Ensuite, $[Wf](s, \theta - (s-t), v) = \partial_s[f(s, \theta - (s-t), v)]$, et en utilisant l'équation de Vlasov, nous avons

$$[Zf](s, \theta - (s-t), v) = [-\Xi \cdot \nabla_v f](s, \theta - (s-t), v),$$

où $\Xi = (\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3)$, avec

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= (\tau_\theta - \mu_\theta)v^0 + (\tau_t - \mu_t)v^1 + \mu_\theta \frac{(v^2)^2}{v^0} + \left(\mu_\theta - \frac{R_\theta}{R}\right) \frac{(v^3)^2}{v^0} \\ &\quad - \frac{A_\theta}{R} e^{2\mu} \frac{v^2 v^3}{v^0} + e^{-\tau} (e^{2\tau} \Gamma v^2 + R H_t v^3), \\ \Xi_2 &= \mu_t v^2 + \mu_\theta \frac{v^1 v^2}{v^0}, \\ \Xi_3 &= \left(\frac{R_t}{R} - \mu_t\right) v^3 + \left(\frac{R_\theta}{R} - \mu_\theta\right) \frac{v^1 v^3}{v^0} + \frac{e^{2\mu} v^2}{R} (A_t + A_\theta \frac{v^1}{v^0}). \end{aligned}$$

En utilisant (4.16), nous pouvons évaluer l'intégrale de Zf en utilisant une intégration par partie (en s pour les termes en W en utilisant (4.17) et en v pour les termes en Z). Ce qui nous permet de conclure que ce terme est borné puisqu'on a établi déjà que $Q(t)$ est uniformément borné. Ainsi, l'intégrale de la quantité de matière est bornée et pour la suite, on utilise l'inégalité de Gronwall. Nous obtenons de ces faits que $|\partial_\sigma \mu_\theta|$, $|\partial_\lambda \mu_\theta|$, $|\partial_\sigma A_\theta|$ et $|\partial_\lambda A_\theta|$, et par conséquent $|\mu_{\theta\theta}|$, $|\mu_{t\theta}|$, $|A_{\theta\theta}|$, et $|A_{t\theta}|$. Par ailleurs, les équations d'évolution (1.57) et (1.56) nous permettent de borner $|\mu_{tt}|$ et $|A_{tt}|$. Les équations auxiliaires nous permettent de conclure que les dérivées secondes de X et Y sont bornées. De plus, partant de l'équation (1.58), on a

$$2\tau_\sigma \tau_\lambda = -2\mu_\sigma \mu_\lambda + \frac{e^{4\mu}}{2R^2} A_\sigma A_\lambda - \phi_\sigma \phi_\lambda + e^{2(\tau-\mu)} V(\phi) - \frac{e^{-2(\tau-\mu)}}{4} \Gamma^2 - 3R^2 \frac{e^{-2\tau}}{4} H_t^2 - e^{2(\tau-\mu)} P_3^f. \quad (4.18)$$

En différentiant l'équation (4.18), on obtient

$$\partial_\lambda \partial_\sigma \tau_\theta = L_3 - \partial_\sigma(\mu_\theta) \mu_\lambda - \mu_\sigma \partial_\lambda(\mu_\theta) - \partial_\sigma(\phi_\theta) \phi_\lambda - \phi_\sigma \partial_\lambda(\phi_\theta) + \frac{e^{4\mu}}{4R^2} [\partial_\sigma(A_\theta) A_\lambda + A_\sigma \partial_\lambda(A_\theta)], \quad (4.19)$$

où

$$\begin{aligned} L_3 &= \left(\frac{2\mu_\theta}{R^2} - \frac{R_\theta}{R^3}\right) e^{4\mu} A_\sigma A_\lambda + [2(\tau_\theta - \mu_\theta) V(\theta)] e^{2(\tau-\mu)} + \frac{1}{2} [(\tau_\theta - 2\mu_\theta) \Gamma^2 - \Gamma_\theta \Gamma] e^{-2(\tau-2\mu)} \\ &\quad - \frac{3}{2} [(R_\theta R - \tau_\theta R^2) H_t^2 + H_{t\theta} H_t R^2] e^{-2\tau} - [2(\tau_\theta - \mu_\theta) P_3^f + P_{3,\theta}^f] e^{2(\tau-\mu)} + \phi_\theta V'(\phi) e^{2(\tau-\mu)}. \end{aligned}$$

En intégrant suivant $t \mapsto \theta \pm (t - t_0)$ l'équation (4.19) comme tous les termes du membre de droit de cette égalité sont bornées, on en déduit que

$$\sup_{\theta \in S^1} [(|\partial_\sigma \tau_\theta| + |\partial_\lambda \tau_\theta|)(\cdot, \theta)]$$

est borné et par conséquent $|\tau_{t\theta}|$, $|\tau_{\theta\theta}|$ et l'équation d'évolution (1.58) nous permet de borner $|\tau_{tt}|$. ■

Les dérivées secondes des composantes de la métrique de ϕ , de f et des quantités de torsion sont bornées en utilisant les méthodes similaires que celles utilisées précédemment aux lemmes 4.1, 4.2 et 4.3. Ce qui nous permet d'en déduire que les solutions du système (1.53) – (1.60) s'étendent à $-\infty$ en coordonnées conformes. Les arguments géométriques développés dans [A], [BCIM], ([W]), nous permettent d'en déduire l'existence des solutions en coordonnées d'aires, et on a le théorème suivant.

Théorème 4.1. *Soit $(T^3, \mu^\circ; \dot{\mu}, \tau^\circ, \dot{\tau}, A^\circ, \dot{A}, f^\circ, \phi^\circ, \dot{\phi}, G^\circ, H^\circ, \dot{G}, \dot{H})$ les données initiales régulières satisfaisant les équations de contraintes (1.54) – (1.55) et la métrique définie comme plus haut (1.19). Soit de plus (g, f, ϕ) la solution régulière locale correspondant aux données initiales dans l'intervalle maximal d'existence $]t_-, t_0]$. Alors il existe un espace temps globalement hyperbolique (M, g, f, ϕ) tels que*

1. $M = [0, t_0[\times T^3$
2. (g, f, ϕ) satisfait EVSFS en coordonnées d'aires
3. (M, g, f, ϕ) est isométriquement isomorphe au développement globalement hyperbolique maximal des données initiales

$$(T^3, \mu^\circ; \dot{\mu}, \tau^\circ, \dot{\tau}, A^\circ, \dot{A}, f^\circ, \phi^\circ, \dot{\phi}, G^\circ, H^\circ, \dot{G}, \dot{H}).$$

4.2 Existence globale dans la direction future

Dans cette section, nous allons établir l'existence globale en coordonnées d'aires qui va consister à contrôler les dérivées d'ordre supérieures des composantes de la métrique ainsi que celles des sources (f et ϕ). Des variables définies (3.113) – (3.114) – (3.115) – (3.116), nous avons $\hat{v}^0 = \sqrt{1 + (\hat{v}^1)^2 + (\hat{v}^2)^2 + (\hat{v}^3)^2}$ et le support de f est borné. Soit $Q = (s, \sigma, w_1, w_2, w_3)$, $R = (t, \theta, v_1, v_2, v_3)$ et $S = (t, \theta, \hat{v}^1, \hat{v}^2, \hat{v}^3)$. Posons $Q^0 = s$, $Q^1 = \sigma$, $Q^{j+i} = w_i$, avec $j \in \{0, 1, 2\}$ et $i \in \{1, 2, 3\}$. De façon analogue pour les coordonnées R et S . Le but est de borner $\partial f / \partial R^j$. Pour le faire, nous énonçons tout d'abord ce lemme.

Lemme 4.4. *Le déterminant du Jacobien de la transformation $(t, \theta, v_1, v_2, v_3) \mapsto (s, \sigma, w_1, w_2, w_3)$ vaut 1 sur $(s_0, s_i] \times S^1 \times \mathbb{R}^3$. Avec $s_0 = t_0$, $w_2 = v_2$, $w_3 = v_3$, $\partial\theta/\partial s = -\partial v_0/\partial v_1$, $\theta(s_i, \sigma, w_1, w_2, w_3) = \sigma$ et $v_1(s_i, \sigma, w_1, w_2, w_3) = w_1$.*

Preuve : Le déterminant du Jacobien de cette transformation est $\eta = \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} \frac{\partial v_1}{\partial w_1} - \frac{\partial\theta}{\partial w_1} \frac{\partial v_1}{\partial\sigma}$. Sur $\{s_i\} \times S^1 \times \mathbb{R}^3$, $\eta = 1$, et sur $(s_0, s_i] \times S^1 \times \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \eta_s &= \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial s} \right) \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} \frac{\partial v_1}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial\theta}{\partial s} \right) \frac{\partial v_1}{\partial\sigma} \frac{\partial v_1}{\partial w_1} + \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} \right) \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} \frac{\partial\theta}{\partial w_1} \\ &+ \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} \right) \frac{\partial v_1}{\partial w_1} - \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial s} \right) \frac{\partial\theta}{\partial w_1} \frac{\partial v_1}{\partial\sigma} - \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial\theta}{\partial s} \right) \frac{\partial v_1}{\partial w_1} \frac{\partial v_1}{\partial\sigma} \\ &- \frac{\partial\theta}{\partial w_1} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial w_1}{\partial s} \right) \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} - \frac{\partial\theta}{\partial w_1} \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} \right) \frac{\partial v_1}{\partial\sigma}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

comme $\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial\theta}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{\partial v_1}{\partial s} \right) = 0$, il s'en suit que $\eta_s = 0$. ■

Proposition 4.1. *Les dérivées secondes de μ , ϕ et A sont bornées sur $]t_0; t_i] \times S^1$.*

Preuve : Posons

$$E^1 = \frac{1}{2} \left[(\mu_{tt})^2 + \alpha(\mu_{\theta t})^2 + \frac{e^{4\mu}}{4t^2} \{ (A_{tt})^2 + \alpha(A_{\theta t})^2 \} \right], \quad E_\phi^1 = \frac{1}{2} [(\phi_{tt})^2 + \alpha(\phi_{\theta t})^2] \quad (4.21)$$

$$P^1 = \sqrt{\alpha} \left(\mu_{tt}\mu_{\theta t} + \frac{e^{4\mu}}{4t^2} A_{tt}A_{\theta t} \right), \quad P_\phi^1 = \sqrt{\alpha}\phi_{tt}\phi_{\theta t} \quad (4.22)$$

Nous avons $P^1 + p_\phi^1 \leq E^1 + E_\phi^1$. On obtient

$$(\partial_t \mp \sqrt{\alpha}\partial_\theta)(E^1 \pm P^1 + E_\phi^1 \pm P_\phi^1) = L_\pm + L_\pm^\phi, \quad (4.23)$$

avec

$$L_\pm = \frac{\alpha_t}{\alpha} (E^1 \pm P^1) \mp \frac{P^1}{t} \chi + (\mu_{tt} \pm \sqrt{\alpha}\mu_{t\theta}) \tilde{\chi} - \frac{1}{t} (\mu_{tt}^2 + \frac{e^{4\mu}}{4t^2} \alpha A_{t\theta}^2), \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} L_\pm^\phi &= \frac{\alpha_t}{\alpha} (E_\phi^1 \pm P_\phi^1) + \left(\frac{\alpha_t}{\alpha} - \frac{1}{t} \right) (\phi_{tt}^2 \mp P_\phi^1) \\ &+ (\phi_{tt} \mp \sqrt{\alpha}\phi_{\theta t}) \left[\left(\frac{\alpha_{tt}}{2\alpha} + \frac{1}{t^2} - \alpha e^{2(\tau-\mu)} V''(\phi) + \frac{\alpha_t}{t\alpha} \right) \phi_t + \left(\frac{\alpha_{\theta t}}{2} - \frac{\alpha_\theta \alpha_t}{2\alpha} \right) \phi_\theta \right] \\ &+ (\phi_{tt} \mp \sqrt{\alpha}\phi_{\theta t}) [2(\mu_t - \tau_t) e^{2(\tau-\mu)} V'(\phi)], \end{aligned} \quad (4.25)$$

où χ et $\tilde{\chi}$ dépendent uniquement des dérivées premières des composantes de la métrique. Considérons $\max_{\theta \in S^1} E_\phi^1(t, \theta)$, et choisissons un point arbitraire $(t_k, \theta_k) \in]t_0, t_i] \times S^1$. Soit γ_\pm

la courbe intégrale de $\partial_t \pm \sqrt{\alpha} \partial_\theta$ partant des points (t_k, θ_k) vers l'hypersurface $t = t_i$. Prenons les extrémités de la courbe $\gamma_\pm(t; \theta_\pm)$ sur la surface $t = t_i$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^-} (\partial_t - \sqrt{\alpha} \partial_\theta)(E_\phi^1 + P_\phi^1) + \int_{\gamma^+} (\partial_t + \sqrt{\alpha} \partial_\theta)(E_\phi^1 - P_\phi^1) &= \int_{\gamma^-} L_+^\phi + \int_{\gamma^+} L_-^\phi, \\ \int_{\gamma^-} (\partial_t - \sqrt{\alpha} \partial_\theta)(E^1 + P^1) + \int_{\gamma^+} (\partial_t + \sqrt{\alpha} \partial_\theta)(E^1 - P^1) &= \int_{\gamma^-} L_+ + \int_{\gamma^+} L_-. \end{aligned}$$

Nous avons

$$E_\phi^1(t_k, \theta_k) = \frac{1}{2} \left\{ E_\phi^1(t_i, \theta_+) - P_\phi^1(t_i, \theta_+) + E_\phi^1(t_i, \theta_-) + P_\phi^1(t_i, \theta_-) - \int_{\gamma^-} L_+ - \int_{\gamma^+} L_- \right\}. \quad (4.26)$$

Par ailleurs, nous avons

$$|L_\pm| \leq \left| \frac{\alpha_t}{\alpha} \right| (16E_\phi^1 + (4|\alpha_t| + \frac{2}{t_0})6E_\phi^1). \quad (4.27)$$

D'où en nous inspirant (comme dans la démonstration de la proposition A dans [Re]) et en considérant les maxima sur S^1 , nous obtenons

$$\max_{\theta \in S^1} (E_\phi^1(t_k, \theta) + E_1(t_k, \theta)) \leq \check{C} + \int_{t_k}^{t_i} \max_{\theta \in S^1} (E_\phi^1(t, \theta) + E_1(t, \theta)) \xi(t) dt \quad (4.28)$$

\check{C} étant une constante positive et $\xi(t)$ une fonction positive bornée sur $]t_0, t_i]$. $\max_{\theta \in S^1} (E_\phi^1(t_k, \theta) + E_1(t, \theta))$ est bornée en utilisant l'inégalité de Gronwall et le fait que $\max_{\theta \in S^1} (E_\phi^1(t_k, \theta) + E_1(t, \theta))$ soit bornée sur $]t_0, t_i]$ nous permet d'en déduire qu'il en est de même pour μ_{tt} , $\mu_{t\theta}$, A_{tt} , $A_{t\theta}$, ϕ_{tt} et $\phi_{t\theta}$ sur $]t_0, t_i] \times S^1$. En utilisant les équations d'évolution (1.97), (1.98) et (1.99) , on en déduit également que $\mu_{\theta\theta}$, $A_{\theta\theta}$ et $\phi_{\theta\theta}$ sont bornés. ■

Corollaire 4.1. *Les dérivées secondes de J , K et β sont bornées sur $]t_0, t_i] \times S^1$. τ_{tt} et $\tau_{t\theta}$ sont bornées sur $]t_0, t_i] \times S^1$.*

Corollaire 4.2. *Les dérivées secondes de α à savoir α_{tt} , $\alpha_{\theta t}$ et $\alpha_{\theta\theta}$ sont bornées sur $]t_0, t_i] \times S^1$.*

Dans la suite, nous allons borner les dérivées d'ordre supérieure à 2 des composantes de la métrique.

4.2.1 Estimation des dérivées premières de f

En présence de la fonction f inconnue de l'équation de Vlasov, il est nécessaire de considérer le système caractéristique en parallèle avec les estimations cône lumière pour

les composantes de la métrique.

La fonction inconnue f s'écrit à l'aide de la solution du système caractéristique

$$s \mapsto (\Theta(s, t, \theta, v^1, v^2, v^3), V(s, t, \theta, v^1, v^2, v^3))$$

passant par (θ, v^1, v^2, v^3) pour $s = t$. Nous avons

$$f(t, \theta, v^1, v^2, v^3) = f_0(\Theta(s, t, \theta, v^1, v^2, v^3), V(s, t, \theta, v^1, v^2, v^3)),$$

solution du système caractéristique (3.120).

Pour parvenir à notre objectif, nous allons progressivement, établir d'autres estimations sur le support de f en v^2 et v^3 dans (\mathcal{M}, g) du fait de la compacité de la surface de Cauchy, en utilisant les expressions de $\frac{dV^2}{ds}$ et $\frac{dV^3}{ds}$. Le plus difficile et volumineux est de pouvoir contrôler V^1 .

Lemme 4.5. *Considérons les solutions d'équation d'Einstein -Vlasov-Champ scalaire en symétrie T^2 et l'existence d'un intervalle $[t_0; T]$, où $t_0 > 0$. Soit $t \in [t_0, T]$, alors, il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement des solutions tels que si (Θ, V) est une solution du système (3.120) avec pour donnée initiale $(\Theta(t_0), V(t_0))$ tel que $[t, \Theta(t), V(t)]$ est contenu dans le support de f , alors*

$$|V^2(s)| + |V^3(s)| \leq Cs^{-1}. \quad (4.29)$$

Preuve : Nous utilisons $\frac{dV^2}{ds} = -\mu_t V^2 - \sqrt{\alpha}\mu_\theta \frac{V^1 V^2}{V^0}$, pour avoir

$$|V^2(t)| \leq |V^2(t_0)| \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left[|\mu_s(s)| + \sqrt{\alpha(s)} |\mu_\theta(s)| \frac{V^1(s)}{V^0(s)} \right] ds \right\}. \quad (4.30)$$

De même, nous prenons l'expression de $\frac{dV^3}{ds}$, qui contient les composantes qui se contrôlent avec Υ . On obtient

$$\left| \frac{dV^3}{ds} \right| \leq \left| - \left(\frac{1}{s} - \mu_s \right) + \sqrt{\alpha}\mu_\theta \frac{V^1}{V^0} - \frac{e^{2\mu}}{s} (A_s(s) + C(s)) \right| ds,$$

où $C(s)$ est la quantité à droite de l'inégalité de (2.49). On a par la suite

$$|V^3(t)| \leq |V^3(t_0)| \exp \left\{ \int_{t_0}^t \left| - \left(\frac{1}{s} - \mu_s \right) + \sqrt{\alpha}\mu_\theta \frac{V^1}{V^0} - \frac{e^{2\mu}}{s} (A_s + C(s)) \right| ds \right\}. \quad (4.31)$$

En additionnant (4.30) et (4.31) on obtient le résultat. ■

Lemme 4.6. *Considérons les solutions d'équation d'Einstein Vlasov Champ scalaire en symétrie T^2 et l'existence d'un intervalle $[t_0; T]$, où $t_0 > 0$. Soit $t \in [t_0, T]$, alors, il existe deux constantes $C > 0$ et $D(t) > 0$ dépendant uniquement des solutions tels que si (Θ, V) est une solution du système (3.120) avec pour donnée initiale $(\Theta(t_0), V(t_0))$ tel que $[t, \Theta(t), V(t)]$ est contenu dans le support de f , alors*

$$|V^1(t)|^2 \leq C + D(t) \int_{t_0}^t [(V^1(s))^2 + \sup_{\theta} (\Upsilon(s, \theta) + \chi(s, \theta))] ds. \quad (4.32)$$

Υ et χ sont définis respectivement par (3.58) et (3.75).

Preuve : L'équation différentielle pour V^1 relatif à l'équation de Vlasov s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dV^1}{ds} &= -(\tau_{\theta} - \mu_{\theta} + \frac{\alpha_{\theta}}{2\alpha})\sqrt{\alpha}V^0 - (\tau_s - \mu_s)V^1 \\ &- \sqrt{\alpha}\frac{e^{2\mu}A_{\theta}}{s}\frac{V^2V^3}{V^0} - \sqrt{\alpha}\frac{\mu_{\theta}}{V^0}((V^3)^2 - (V^2)^2) \\ &- e^{-\tau}(e^{2\mu}\Gamma V^2 + sH_s V^3). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nous allons expliciter en cinq termes la partie située à droite de l'équation (4.33) que nous allons analyser séparément. En utilisant les équations de contrainte pour les expressions de τ_{θ} et τ_t , nous obtenons

$$\frac{d(V^1(s))^2}{ds} = 2V^1(s)\frac{dV^1(s)}{ds} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5, \quad (4.34)$$

où

$$\begin{aligned} T_1 &= -2V^1(s) \left[s\alpha e^{2(\tau-\mu)} \int_{\mathbb{R}^3} (v^1V^0 + v^0V^1)f(s, \theta, v)dv^1dv^2dv^3 \right], \\ T_2 &= -2V^1(s)[s\Upsilon V^1 + 2s\Upsilon^{\times}V^0 - \sqrt{\alpha}\mu_{\theta}V^0 - \mu_t V^1], \\ T_3 &= -2V^1(s) \left[\frac{\sqrt{\alpha}\mu_{\theta}}{V^0}((V^3)^2 - (V^2)^2) - \frac{e^{2\mu}A_{\theta}}{s}\frac{V^2V^3}{V^0} \right], \\ T_4 &= -2s(V^1(s))^2\frac{e^{2\tau}}{4}[e^{2\mu}\Gamma^2 + s^2H_t^2] - 2V^1(s)[e^{-\tau}(e^{2\mu}\Gamma V^2(s) + sH_t V^3(s))], \\ T_5 &= -V^1(s) [s(\phi_{\theta}^2 + \alpha\phi_{\theta}^2) + 2sV(\phi)e^{2(\tau-\mu)}] V^2 - 2V^1(s)s\alpha e^{2(\tau-\mu)}\phi_{\theta}\phi_t V^0. \end{aligned}$$

Estimons dans un premier temps T_1 . Pour le faire, nous allons le décomposer en deux

$$T_1 = T_1^- + T_1^+ = -2sV^1(s)e^{2(\beta-\mu)}(I^- + I^+), \quad (4.35)$$

avec

$$\begin{aligned} I^- &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^0 (v^1V^0 + v^0V^1)f(s, \theta, v)dv^1dv^2dv^3, \\ I^+ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{\infty} (v^1V^0 + v^0V^1)f(s, \theta, v)dv^1dv^2dv^3. \end{aligned}$$

Considérons deux cas de figures, le cas où $V^1(s) > 0$ et le cas où $V^1(s) < 0$. Dans l'intervalle de temps où $V^1(s)$ est positif, I^+ est positif et le noyau de I^- peut se contrôler comme suit

$$\begin{aligned} v^1V^0 + v^0V^1 &= \frac{(v^1)^2(V^0)^2 - (v^0)^2(V^1)^2}{v^1V^0 - v^0V^1} \\ &= \frac{(v^1)^2(1 + (V^2)^2 + (V^3)^2)}{v^1V^0 - v^0V^1} + \frac{(v^1)^2(1 + (v^2)^2 + (v^3)^2)}{v^1V^0 - v^0V^1}. \end{aligned}$$

Le second terme est positif dès que $V^1(s) > 0$ et $v^1 < 0$, et du fait que T_1 est positif. Pour le deuxième terme, on a

$$\frac{(v^1)^2(1 + (V^2)^2 + (V^3)^2)}{|v^1|V^0 - v^0V^1} \leq \frac{|v^1|(1 + (V^2)^2 + (V^3)^2)}{V^1} \quad (4.36)$$

Dans l'expression de T_1 , nous avons établi au lemme 3.6 que, $2s\alpha e^{2(\tau-\mu)} = 2se^{2(\beta-\mu)} \leq C(s)$. Ainsi, dans l'intervalle où $V^1(s) \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} T_1 &\leq T_1^- \leq \|f_0\|_\infty C(s) V^1(s) \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \frac{|v^1|(1 + (V^2)^2 + (V^3)^2)(s)}{V^1(s)} dv^1 du \\ &\leq \|f_0\|_\infty C(s) \gamma(s) \int_0^{\bar{v}^1} v^1 dv^1 \leq C(s) (\bar{v}^1)^2, \end{aligned} \quad (4.37)$$

avec $\gamma(s) = 1 + (V^2)^2 + (V^3)^2$. Dans l'intervalle où $V^1(s) < 0$, nous constatons que T_1^- est négatif donc n'est pas une préoccupation. Pour contrôler T_1^+ dans cet intervalle, nous allons utiliser la même approche comme faite lors du contrôle de T_1^- , et on a

$$T_1 \leq T_1^+ \leq C(s) (\bar{v}^1)^2. \quad (4.38)$$

A présent, nous allons nous appesantir sur T_2 . Nous allons une fois de plus, considérer deux cas de figure, à savoir le cas où $V^1(s) > 0$ et $V^1(s) < 0$. Sans nuire à la généralité, supposons que $V^1(s) > 0$. L'expression de T_2 peut s'écrire $T_2 = T_2^p + T_2^r$ (p pour partie principale et r pour le reste) où

$$\begin{aligned} T_2^p &= -2(V^1(s))^2 \left[[s(\mu_t + \alpha\mu_\theta)^2 - (\mu_t + \alpha\mu_\theta)] + \frac{e^{4\mu}}{4s} (A_t + \alpha A_\theta)^2 \right] \\ T_2^r &= 2(V^0(s) - V^1(s))V^1(s) \left[\sqrt{\alpha}\mu_\theta - 2s\sqrt{\alpha}\mu_t\mu_\theta - \frac{e^{4\mu}}{2s} A_t A_\theta \right]. \end{aligned}$$

Pour T_2^r , nous avons directement

$$\begin{aligned} |T_2^r| &\leq \frac{2(1 + (V^2)^2 + (V^3)^2)V^1(s)}{V^0 + V^1} \sqrt{\alpha} \left| \mu_\theta - 2s\sqrt{\alpha}\mu_t\mu_\theta - \frac{e^{4\mu}}{2s} A_t A_\theta \right| \\ &\leq (s+1)\gamma(s)\psi(s), \end{aligned} \quad (4.39)$$

comme $\sqrt{v} \leq v$. Quant'à l'estimation de T_2^p , nous partons du fait que, pour $s \geq t_0 > 0$, on a

$$sa^2 - a \geq -\frac{1}{4s} \geq -\frac{1}{4t_0}, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (4.40)$$

Comme le terme contenant A dans l'expression de T_2^p est négatif, l'inégalité précédente (4.40) nous permet d'avoir

$$T_2^p \leq \frac{1}{2t_0}(V^1(s))^2 \leq C(\bar{v}^1(s))^2. \quad (4.41)$$

Pour le cas où $V^1(s) < 0$, on procède de même. Pour faire l'estimation, nous combinons (4.39) et (4.41) pour avoir

$$T_2 \leq T_2^p + |T_2^r| \leq C((\bar{v}^1(s))^2 + C(s)\psi(s)). \quad (4.42)$$

Ensuite, pour l'estimation de T_3 , nous avons

$$|T_3| \leq \gamma(s) \frac{|V^1(s)|}{V^0} \sqrt{\alpha} \left| \mu_\theta + \frac{e^{2\mu}}{s} A_\theta \right| \leq C(s)\psi(s).$$

Le contrôle de T_4 se fait en utilisant les données relatives aux quantités de torsion H_t , G , Γ et en utilisant les lemmes 3.9, 3.10 et la relation (3.135)

$$|T_4| \leq C\gamma(s) \sup_\theta \left(\frac{e^{-\tau}}{2} (e^{2\mu}\Gamma + sH_s)^2 \right) (\bar{v}^1(s))^2 \leq C\gamma(s)(\bar{v}^1(s))^2. \quad (4.43)$$

Pour finir, nous traitons le terme T_5 qui est l'expression utilisant le champ scalaire. Considérons sur un intervalle de temps où $V^1(s) > 0$, décomposons T_5 en deux parties, une partie principale notée T_5^p et une partie résiduelle notée T_5^r , $T_5 = T_5^p + T_5^r$ avec

$$\begin{aligned} T_5^p &= -2(V^1(s))^2 [s(\phi_t + \sqrt{\alpha}\phi_\theta)^2 - (\phi_t + \sqrt{\alpha}\phi_\theta) + 2sV(\phi)e^{2(\tau-\mu)}], \\ T_5^r &= 2[V^0(s) - V^1(s)] (\sqrt{\alpha}\phi_\theta - 2s\sqrt{\alpha}\phi_\theta\phi_t). \end{aligned}$$

Pour T_5^r , on a

$$\begin{aligned} |T_5^r| &\leq \frac{2(1 + (V^2)^2 + (V^3)^2)V^1(s)}{V^0 + V^1} \sqrt{\alpha} |\sqrt{\alpha}\phi_\theta - 2s\sqrt{\alpha}\phi_\theta\phi_t| \\ &\leq (s+1)\gamma(s)\chi(s). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Pour l'estimation de T_5^p , on utilise la relation (4.40) pour obtenir

$$T_5^p \leq \frac{1}{2t_0}(V^1(s))^2 \leq C(\bar{v}^1(s))^2 \quad (4.45)$$

En utilisant le même argument que celui dans l'estimation de T_2^p , on contrôle ainsi T_5^p . ■
Nous allons utiliser les mêmes démarches que celles employées dans $[A]$, $[ARW]$ $[Re]$.

Proposition 4.2. *Les dérivées premières $(\partial_{v^k} f, k \in \{1; 2; 3\})$ sont bornées sur $]t_0, t_i] \times S^1 \times \mathbb{R}^3$.*

Preuve : Dans un premier temps, posons $z = t$, ou θ , $v = (v^1, v^2, v^3)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f_0}{\partial \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial z}$$

D'après les lemmes 3.17, 4.5, 4.6, $\partial \Theta$ et V sont bornés. Par ailleurs le système caractéristique (3.132) a pour solutions $\Theta(s, t, \theta, v)$, $V(s, t, \theta, v)$, avec $\Theta(t, t, \theta, v) = \theta$, $V(t, t, \theta, v) = v$. Pour contrôler les dérivées premières de f , il suffit d'assurer le contrôle de $\partial \Theta$ et des ∂V^k . Ici, ∂ est défini comme étant la dérivée première suivant t , θ ou v^k , $k \in \{1, 2, 3\}$. Les équations d'évolution pour $\partial \Theta$ et des ∂V^k proviennent du système caractéristique (3.132). Pour la suite, nous allons utiliser un argument géométrique qui nous sera important dans la suite de notre démarche. Soit donc $\gamma(u, \lambda)$ une famille de géodésique à deux paramètres, i.e, pour chaque paramètre λ fixé, la courbe $u \mapsto \gamma(u, \lambda)$ est une géodésique. Définissons le champ de vecteur $Y := \gamma_\lambda(u, 0)$. Ce champ de vecteurs satisfait l'équation de la géodésique (ou l'équation de Jacobi) (pour plus de précision, voir l'exemple dans [HE])

$$\frac{D^2 Y}{Du^2} = R_{Y\gamma'} \gamma', \quad (4.46)$$

où D/Du est la dérivée covariante, R étant le tenseur de courbure de Riemann, et $\gamma' := \gamma_u(u, 0)$. Le tenseur d'Einstein étant ainsi relié au tenseur de courbure. Par ailleurs, comme le tenseur d'Einstein est proportionnel au tenseur impulsion-énergie qui s'est contrôlé précédemment, il nous reste au vu de la relation (4.46) (avec $Y = \partial \Theta$), à nous appesantir sur les combinaisons linéaires en $\partial \Theta$ et ∂V^k satisfaisant les équations dont les composantes sont bornées.

Par la suite, nous allons montrer d'une part que $\partial f / \partial R^k$ est borné. La première étape consiste à établir que la quantité ci dessous est bornée

$$\frac{\partial f}{\partial S^j} = \frac{\partial f}{\partial Q^k} \frac{\partial Q^k}{\partial S^j}$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial Q^k}$ est constant le long de la géodésique (voir [W]), nous allons borner dans cette étape $\frac{\partial Q^k}{\partial S^j}$. Comme les déterminants de $\frac{\partial S}{\partial R}$ et $\frac{\partial S}{\partial Q}$ sont bornés à l'instant initial; le déterminant de $\frac{\partial S^l}{\partial Q^j}$ l'est également, on a suffisamment d'arguments pour borner $\frac{\partial S^l}{\partial Q^j}$. Soient a, b, c et d quatre indices prenant des valeurs de 1 à 4. Cherchons à contrôler $\frac{\partial S^a}{\partial Q^b}$ sous l'hypothèse d'après ([W]) que $\frac{\partial S^0}{\partial Q^l}$ et $\frac{\partial S^l}{\partial Q^0}$ sont bornés. On pose $F_b^a = \Pi_c^a \frac{\partial S^c}{\partial Q^b}$ avec Π_b^a

ainsi que son inverse étant bornés. nous nous referons à [ARW] et nous avons le système

$$t_s = 1, \quad (4.47)$$

$$\theta_s = \frac{\sqrt{\alpha}\hat{v}^1}{\hat{v}^0} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_s^1 &= -(\beta_\theta - \mu_\theta)\sqrt{\alpha}\hat{v}^0 - (\beta_t - \mu_t - \frac{\alpha_t}{2\alpha})\hat{v}^1 - \sqrt{\alpha}\mu_\theta \frac{(\hat{v}^3)^2 - (\hat{v}^2)^2}{\hat{v}^0} \\ &+ \frac{\sqrt{\alpha}e^{2\mu}}{t}A_\theta \frac{(\hat{v}^2)^2(\hat{v}^3)^2}{\hat{v}^0} - \frac{e^{\beta-2\mu}}{t}J\hat{v}^2 - \frac{e^\beta}{t^3}(K - AJ)\hat{v}^3, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\hat{v}_s^2 = -\mu_t\hat{v}^2 - \sqrt{\alpha}\mu_\theta \frac{\hat{v}^1\hat{v}^2}{\hat{v}^0}, \quad (4.50)$$

$$\hat{v}_s^3 = (\mu_t - \frac{1}{t})\hat{v}^3 + \sqrt{\alpha}\mu_\theta \frac{\hat{v}^1\hat{v}^3}{\hat{v}^0} - \frac{e^{2\mu}}{t}(A_t\hat{v}^2 + \sqrt{\alpha}A_\theta \frac{\hat{v}^1\hat{v}^2}{\hat{v}^0}) \quad (4.51)$$

On a $(t_s, \theta_s, \hat{v}_s^k)$ qui sont les coordonnées dans l'espace temps de MinKowski. En utilisant les transformations de Lorentz inhomogènes $x^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha x^\beta + a^\alpha$ où a^α est un quadrivecteur constant. Λ_β^α est un tenseur (1; 1) constant vérifiant

$$\Lambda_\gamma^\alpha \Lambda_\delta^\beta = \eta_{\gamma\delta}, \quad \text{avec } \eta_{\gamma\delta}$$

étant les composantes spatiales de la métrique de Minkowski. Les F_b^a représentent les éléments d'une matrice orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$. Les Π_b^a étant tels que $\Pi_c^a \frac{\partial S^c}{\partial Q^b} = \int \Lambda_c^a \partial S^c / \partial Q^b ds$. On définit ainsi le groupe de transformations de Poincaré(Cf[L]).

Ceci montre que $\partial F_b^a / \partial s = \Lambda_c^a \partial S^c / \partial Q^b$, avec Λ_c^a borné. (Les équations d'évolution (1.97), (1.98) et (1.104) nous permettent d'annuler les termes qu'on ne contrôle pas pendant les calculs). Par conséquent, nous avons donc, $\partial F_b^a / \partial s = \Lambda_c^a (\Pi^{-1})_d^c F_b^d$, ce qui nous permet de borner F_b^a par conséquent $\partial S^a / \partial Q^b$.

D'autre part, partant de la relation suivante

$$\frac{\partial f}{\partial R^j} = \frac{\partial f}{\partial S^k} \frac{\partial S^k}{\partial R^j} \quad (4.52)$$

on en déduit que $\partial f / \partial R^j$ est borné. ■

4.2.2 Estimation des dérivées d'ordre supérieur à 2

En utilisant le chapitre 2, le paragraphe précédent 4.2.1, nous étudions les dérivées d'ordre supérieur à 2, qui sera la dernière étape de notre démarche.

Proposition 4.3. *Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Alors toutes les dérivées d'ordre k des composantes de la métrique, les dérivées d'ordre k de la fonction de distribution et les dérivées d'ordre k du champ scalaire sont bornées.*

Preuve : Pour établir cette preuve, nous allons procéder par récurrence forte. Nous considérons un entier naturel n tel que $2 \leq n$. Nous supposons que toutes les dérivées d'ordre $k \leq n$ de μ , α , τ , ϕ , A , J et K sont bornées excepté $\partial^n \tau / \partial \theta^n$ et $\partial^n \alpha / \partial \theta^n$. Supposons en plus que les dérivées de $\partial S / \partial Q$ d'ordre $n - 1$ sont bornées. Soit

$$F_{(n)b_1 \dots b_n}^a = \frac{\partial^n S^a}{\partial Q^{b_1} \dots \partial Q^{b_n}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial^{n-1} \Gamma^a}{\partial \theta^{n-1}} \frac{\partial \theta}{\partial Q^{b_1}} \dots \frac{\partial \theta}{\partial Q^{b_n}}, \quad (4.53)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma^1 &= -\sqrt{\alpha}, \\ \Gamma^2 &= (\tau_t - \mu_t) \hat{v}^0 + \mu_t \frac{(\hat{v}^3)^2 - (\hat{v}^2)^2}{(\hat{v}^0)^2} + (\mu_t \frac{\hat{v}^1}{\hat{v}^0} - \sqrt{\alpha} \mu_\theta) \hat{v}^1 \frac{(\hat{v}^3)^2 - (\hat{v}^2)^2}{(\hat{v}^0)^2 - (\hat{v}^1)^2} \\ &\quad - \frac{e^{2\mu}}{t} \left[A_t \frac{\hat{v}^2 \hat{v}^3}{\hat{v}^0} + (A_t \frac{\hat{v}^1}{\hat{v}^0} - \sqrt{\alpha} A_\theta) \frac{\hat{v}^1 \hat{v}^2 \hat{v}^3}{(\hat{v}^0)^2 - (\hat{v}^1)^2} \right], \\ \Gamma^3 &= \sqrt{\alpha} \mu_\theta \hat{v}^2, \\ \Gamma^4 &= -\sqrt{\alpha} \mu_\theta \hat{v}^3 + \frac{e^{2\mu}}{t} \sqrt{\alpha} A_\theta \hat{v}^2. \end{aligned}$$

Nous procédons comme à la proposition 4.1. Nous intégrons $\partial_s F_{(n)b_1 \dots b_n}^a$ le long de la géodésique suivant la direction spatiale, ce qui nous permet de borner $\frac{\partial^n S^a}{\partial Q^{b_1} \dots \partial Q^{b_n}}$, ensuite $\partial^n \alpha / \partial \theta^n$ et finalement $\partial^n f / (\partial R^{j_1} \dots \partial R^{j_n})$. Dans la suite, nous utilisons les équations d'évolution pour établir que $\partial^n \tau / \partial \theta^n$ est borné. Nous cherchons à borner la dérivée d'ordre $n + 1$ de α , à l'exception de $\partial^{n+1} \alpha / \partial \theta^{n+1}$. Enfin, nous bornons la dérivée d'ordre $n + 1$ de A , ϕ et μ en utilisant n fois l'argument du cône-lumière, avec

$$\begin{aligned} E_{mr}^n \pm P_{mr}^n &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial^{n-1} \mu_{tt}}{\partial \theta^m \partial t^r} \pm \sqrt{\alpha} \frac{\partial^{n-1} \mu_{t\theta}}{\partial \theta^m \partial t^r} \right)^2 + \left(\frac{\partial^{n-1} \phi_{tt}}{\partial \theta^m \partial t^r} \pm \sqrt{\alpha} \frac{\partial^{n-1} \phi_{t\theta}}{\partial \theta^m \partial t^r} \right)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{e^{4\mu}}{8t^2} \left(\frac{\partial^{n-1} A_{tt}}{\partial \theta^m \partial t^r} \pm \sqrt{\alpha} \frac{\partial^{n-1} A_{t\theta}}{\partial \theta^m \partial t^r} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Le choix des entiers naturels m et r est tel qu'on ait $m + r = n - 1$.

Nous allons expliciter la preuve pour ϕ , en prenant ici $r = 0$ et donc $m = n - 1$. On rappelle la notation suivante $\partial^\pm = \partial_t \pm \sqrt{\alpha} \partial_\theta$. On a

$$\begin{aligned} \partial^\pm [\partial_\theta^{n-1} \phi_t \mp \partial_\theta^{n-1} (\sqrt{\alpha} \phi_\theta)] &= \partial_\theta^{n-1} \phi_{tt} \pm \sqrt{\alpha} \partial_\theta^n \phi_\theta \mp \partial_\theta^{n-1} \left[\frac{\alpha_t}{2\alpha} \sqrt{\alpha} \phi_\theta + \sqrt{\alpha} \phi_{t\theta} \right] \\ -\sqrt{\alpha} \partial_\theta^n (\sqrt{\alpha} \phi_\theta) &= \partial_\theta^{n-1} \phi_{tt} \mp \frac{\alpha_t}{2\alpha} \partial_\theta^{n-1} (\sqrt{\alpha} \phi_\theta) \mp \frac{(n-1)\alpha_\theta}{2\alpha} \sqrt{\alpha} \partial_\theta^{n-1} \phi_t \\ &\quad - \partial_\theta^{n-1} [\sqrt{\alpha} \partial_\theta (\sqrt{\alpha} \phi_\theta)] + \frac{(n-1)\alpha_\theta}{2\alpha} \sqrt{\alpha} \partial_\theta^{n-1} (\sqrt{\alpha} \phi_\theta) \\ &\quad \mp \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \phi_\theta \partial_\theta^{n-1} \left(\frac{\alpha_t}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\partial_\theta^{n-1}[\phi_{tt} - \sqrt{\alpha}\partial_\theta(\sqrt{\alpha}\phi_\theta)] &= \partial_\theta^{n-1}\left[\phi_{tt} - \alpha\phi_{\theta\theta} - \frac{\alpha_\theta}{2}\phi_\theta\right] \\
(\text{d'après l'équation (1.99)}) &= \partial_\theta^{n-1}\left[\left(-\frac{1}{t} + \frac{\alpha_t}{2\alpha}\right)\phi_t + L\phi_\theta - \alpha e^{2(\tau-\mu)}V'(\phi)\right] \\
&= -\frac{1}{t}\partial_\theta^{n-1}\phi_t + \frac{\alpha_t}{2\alpha}\partial_\theta^{n-1}\phi_t + \frac{1}{2}\phi_t\partial_\theta^{n-1}\left(\frac{\alpha_t}{\alpha}\right) + \phi_\theta\partial_\theta^{n-1}L \\
(\text{hypothèse sur V}) &+ L\partial_\theta^n\phi - \partial_\theta^{n-1}(2\alpha\phi e^{2(\tau-\mu)}V(\phi)),
\end{aligned}$$

avec

$$L = [2A_\theta H(G-1) - \mu_\theta(G+AH)^2]\alpha e^{-2(\tau-2\mu)} - 4\mu_\theta H^2 t^2 \alpha e^{-2\tau}.$$

On introduit à présent $\mathcal{D}_n^\pm := [\partial_\theta^{n-1}\phi_t \pm \partial_\theta^{n-1}(\sqrt{\alpha}\phi_\theta)]^2$

$$\begin{aligned}
\mp \frac{2}{t}\partial_\theta^{n-1}(\sqrt{\alpha}\phi_\theta)[\partial_\theta^{n-1}\phi_t \mp \partial_\theta^{n-1}(\sqrt{\alpha}\phi_\theta)] &= \frac{1}{2t}[\mathcal{D}_n^\mp - \mathcal{D}_n^\pm] + \frac{2}{t}[\partial_\theta^{n-1}(\sqrt{\alpha}\phi_\theta)]^2 \\
&\leq \frac{1}{2t}[\mathcal{D}_n^\mp - \mathcal{D}_n^\pm] + \frac{1}{t}[\mathcal{D}_n^+ + \mathcal{D}_n^-].
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\partial_\pm \mathcal{D}_n^\mp &\leq \frac{\alpha_t}{\alpha}\mathcal{D}_n^\mp \mp \left(\frac{(n-1)\alpha_\theta}{\sqrt{\alpha}} + L\right)\mathcal{D}_n^\mp - \frac{2}{t}\partial_\theta^{n-1}(\phi_\theta)(\partial_\theta^{n-1}(\phi_t) \mp \partial_\theta^{n-1}(\sqrt{\alpha}\phi_\theta)) \\
&+ \frac{1}{2}\phi_t\partial_\theta^{n-1}\left(\frac{\alpha_t}{\alpha}\right) + \phi_\theta\partial_\theta^{n-1}(L) + L\partial_\theta^{n-1}(\phi_\theta) - 2\partial_\theta^{n-1}(\phi)V\alpha e^{2(\tau-\mu)} - 2\phi\partial_\theta^{n-1}(V\alpha e^{2(\tau-\mu)}) \\
&\lesssim \left(\frac{\alpha_t}{\alpha} \mp \frac{(n-1)\alpha_\theta}{\sqrt{\alpha}} + L\right)\mathcal{D}_n^\mp + \frac{1}{t}[\mathcal{D}_n^+ + \mathcal{D}_n^-] + \mathcal{R},
\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{R} := \sup_{\theta \in S^1} \left| \frac{1}{2}\phi_t\partial_\theta^{n-1}\left(\frac{\alpha_t}{\alpha}\right) + \phi_\theta\partial_\theta^{n-1}(L) + L\partial_\theta^{n-1}(\phi_\theta) - 2\partial_\theta^{n-1}(\phi)V\alpha e^{2(\tau-\mu)} - 2\phi\partial_\theta^{n-1}(V\alpha e^{2(\tau-\mu)}) \right|.$$

Posons

$$\hat{\mathcal{D}}_n^\mp := \sup_{\theta \in S^1} [\mathcal{D}_n^\mp(\cdot, \theta)] \text{ et } \hat{\mathcal{D}}_n = \hat{\mathcal{D}}_n^\mp + \hat{\mathcal{D}}_n^\pm.$$

Par la suite, on a

$$\partial^\pm \hat{\mathcal{D}}_n^\mp \lesssim \left(\frac{\alpha_t}{\alpha} \mp \frac{(n-1)\alpha_\theta}{\sqrt{\alpha}} + L\right)\hat{\mathcal{D}}_n^\mp + \mathcal{R} + \frac{1}{t}[\hat{\mathcal{D}}_n^+ + \hat{\mathcal{D}}_n^-].$$

En intégrant, on obtient alors pour $t_0 \leq t \leq t_i$

$$\hat{\mathcal{D}}_n(t) \lesssim \hat{\mathcal{D}}_n(t_0) + \int_{t_0}^t \left[\left(\frac{\alpha_s}{\alpha} \mp \frac{(n-1)\alpha_\theta}{\sqrt{\alpha}} + L + \frac{2}{s}\right)\hat{\mathcal{D}}_n + \mathcal{R} \right](s) ds. \quad (4.55)$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall à (4.55), on obtient :

$$\hat{\mathcal{D}}_n(t) \lesssim \left(\hat{\mathcal{D}}_n(t_0) + \int_{t_0}^t \mathcal{R}(s) ds \right) \exp \left[\int_{t_0}^t \left| \frac{\alpha_s}{\alpha}(s) \mp \frac{(n-1)\alpha_\theta}{\sqrt{\alpha}}(s) + L(s) + \frac{2}{s} \right| ds \right] \quad (4.56)$$

On en déduit par induction et par hypothèse de récurrence que $\hat{\mathcal{D}}_n(t)$ est borné ce qui permet d'en déduire que les dérivées d'ordre $n+1$ de ϕ sont bornées. Finalement, les équations d'évolution nous permettent de borner $\partial_t^{n-1}\phi_{tt}$ et de conclure que les dérivées d'ordre $n+1$ de β et τ sont bornées, à l'exception de $\partial^{n+1}\tau/\partial\theta^{n+1}$. Enfin, les équations auxiliaires permettent de conclure que les dérivées d'ordre $n+1$ de J et K sont bornées. Ainsi, (4.54) et (4.78) nous permettent d'achever la preuve. ■

4.2.3 Théorème d'existence globale

De tout ce qui précède, il en découle le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Soit $(\mathcal{M}; g; f; \phi)$ le développement maximal de Cauchy pour les données initiales pour le système d'équations d'Einstein-Vlasov-Champ scalaire (EVSFS) en symétrie T^2 . Alors M admet un revêtement par les hypersurfaces symétriques compactes de rayon d'aires constant. Les rayons d'aires de ces hypersurfaces prennent toutes les valeurs de l'intervalle $]t_0; +\infty)$.*

Preuve : Soit $T > t_0$, supposons par l'absurde que les rayons d'aires de ces hypersurfaces prennent les valeurs dans un intervalle maximal $]t_0; T[$. Considérons l'hypersurface $t = T$, comme nous avons établis aux lemmes précédents que le support de la fonction de distribution f est bornée ainsi que ϕ et les composantes de la métrique, et qu'elles sont de classe C^∞ , il s'en suit un prolongement de la métrique g jusqu'à T : Par conséquent, il existe un certains $\epsilon > 0$ indépendant de t_0 , tel que $\{T\} \times S^1$ soit contenu dans le développement de Cauchy de toute surface de Cauchy dans $]T; T + \epsilon[\times S^1$. Ce qui contredit le fait que le développement de Cauchy n'est pas prolongeable à $\{T\} \times S^1$. Par conséquent $T = +\infty$. ■

Remarque 4.1. *Puisque toutes les composantes de la métrique g , la fonction de distribution f (le champ de Vlasov), le champ scalaire ϕ et leurs dérivées de tout ordre sont uniformément bornés, le développement maximal de Cauchy ne peut pas être restreint à l'hypersurface $t = T$. Par conséquent, (M, g) admet un feuilletage global par les coordonnées d'aires avec la coordonnée temps t prenant toute valeur de l'intervalle $]t_0; +\infty[$.*

Conclusion générale

Dans ce travail, nous nous sommes appesanti , sur le problème de Cauchy pour les équations d'Einstein-Vlasov avec champ scalaire (EVSFS). Ce travail fédère les intérêts d'au moins quatre grandes théories dont l'importance n'est plus à démontrer. À savoir, la théorie de la relativité générale d'Einstein, la théorie cinétique des gaz, la géométrie pseudo-riemannienne (lorentzienne) et l'analyse des équations aux dérivées partielles (EDP). Nous avons établi un théorème d'existence et d'unicité locale dans deux directions en symétrie T^2 : dans le cas où les solutions convergent vers les singularités initiales (direction passée), nous avons utilisé les coordonnées conformes, et dans la direction future, les coordonnées d'aires . Ainsi que l'existence globale dans ces deux mêmes directions. Le couplage à l'équation de Vlasov avait pour but d'étudier la description de l'évolution temporelle de la fonction f de distribution des particules de masse normalisée à 1 et chargé dans un plasma ou un faisceau de particules en négligeant des effets de collisions binaires. Ces phénomènes sont pratiquement les mêmes qu'on observe dans l'univers entre les galaxies et les amas de galaxies. Du fait des observations et de la quête de la compréhension des phénomènes astrophysiques, notamment sur la composition de l'univers, éventuellement la présence de la matière noire et sur le fait que l'univers est en expansion accélérée ; on y associe le potentiel et le champ scalaire qui modélisent respectivement la matière noire et l'expansion accélérée.

Dans la direction passée, nous avons commencé par présenter les équations. Pour ce faire, nous avons utilisé les coordonnées conformes. Pour établir l'existence locale, nous sommes préalablement partis des estimations a priori en passant, entre autres par des estimations cône-lumière. Ensuite, nous avons construit nos itérées à partir des équations. A partir de ces itérées, nous avons montré qu'elles sont de Cauchy, car contrôlées par une série absolument convergente, ce qui nous a permis d'en déduire que ces itérées sont uniformément convergentes. Et pour finir dans la direction passée, nous avons établi un théorème d'existence globale. Ce faisant, nous étendons les résultats de M. Weaver [W]. Cette partie à par ailleurs fait l'objet d'une publication et d'un article soumis.

Dans la direction future, après la présentation des équations en coordonnées d'aires, nous utilisons cette fois-ci l'inégalité d'énergie, les estimations cône-lumière, pour aboutir aux estimations a priori. Par la, nous construisons nos itérées. Partant de cela, nous montrons que ces itérées sont uniformément convergentes. Tout ce travail fait, nous établissons un théorème d'existence locale. Pour terminer, nous avons un théorème d'existence globale (critère de continuation). Il faut noter que l'inégalité de Gronwall a joué un rôle clé tout au long de notre travail. Ce faisant, on étend ainsi le travail de Berger et Al[BCIM], qui l'avaient fait sans source et celui de Smulevici [S], qui avait couplé avec l'équation de Vlasov. L'ajout du champ scalaire non seulement, apporte une équation aux dérivées partielles du second ordre supplémentaire, mais également, rend davantage complexe la partie matérielle des équations d'Einstein. Également, l'apport du champ scalaire a permis de généraliser les travaux faits dans ce sens avec constante cosmologique Λ . On généralise ainsi par la même occasion, le travail fait par Tegankong [T2], qui avait considéré cette fois-ci les quantités de torsion nulles, travaillant ainsi en symétrie de Gowdy. Dans la direction future, les résultats nous ont permis de soumettre un article et ont ouvert la brèche pour un deuxième article en cours.

En perspective, une étude de la dépendance continue des solutions en fonction des données initiales, du comportement asymptotique et de la complétude géodésique des solutions est envisageable. Une étude numérique pourrait aussi être entreprise. Le fait de prendre le potentiel $V(\phi) = V_0 e^{\phi^2}$, est un cas particulier bien que judicieux, on pourra aussi songer à le généraliser. Nous pourrions en plus, coupler notre système à l'équation de Maxwell en symétrie T^2 comme fait dans [NP] en symétrie sphérique. L'éventualité de se lancer à une étude statique à l'instar du travail fait dans [NT], [NP] peut aussi faire objet de réflexion.

En somme, partant du fait que le phénomène de l'accélération de l'expansion de l'Univers nous contraint à reconsidérer les hypothèses menant à la construction du modèle standard de la cosmologie, un accent sur la corrélation entre gravité et la mécanique quantique ne pourrait-elle pas être levé dans les jours à venir ? Par ailleurs, ne serait-il pas nécessaire de voir une conjecture à propos de la nature de la singularité de l'espace temps concernant notre cas de figure ?

Bibliographie

- [A] H. Andreasson, Global foliations of matter spacetimes with Gowdy symmetry. *Comm.Math.Phys.*206, pp.337 – 365, (2003).
- [A1] H. Andreasson, The Einstein-Vlasov system/Kinetic Theory, *Living Rev. Relativity*, 5, 7, (2014).
- [AR] H. Andreasson, H. Ringstrom, Proof of the cosmic no-hair conjecture in the T^3 –Gowdy symmetric Einstein-Vlasov setting. arXiv :1306.6223v1[*gr – qc*], 26 Jun 2013.
- [ARW] H. Andreasson, A. D. Rendall, and M. Weaver, Existence of CMC and constant areal time foliations in T^2 -symmetric spacetimes with Vlasov matter, *Comm. Partial Differential Equations*, 29, no.1 – 2, pp.237 – 262, (2004).
- [BCIM] B.K. Berger, P. Chrusciel, J. Isenberg and V. Moncrief, Global foliations of vacuum spacetimes with T^2 isometry, *Ann. Phys.* 260, 117 – 148, (1997).
- [C] P. T. Chrusciel, On space-times with $U(1) \times U(1)$ symmetric compact Cauchy horizons, *Ann. Phys.* 202, 100 – 150, (1990).
- [CB] Y. Choquet-Bruhat, Théorème global d’unicité pour les solutions des équations d’Einstein. *Bulletin de la S. M.F.*, tome 96 p.181 – 192, (1968).
- [CB1] Y Choquet-Bruhat, Problème de Cauchy pour le système intégro différentiel d’Einstein-Liouville, *Ann. Inst. Fourier* 21, 181 – 201, (1971).
- [CB2] Y Choquet-Bruhat, Beginnings of the Cauchy problem. arXiv :1410.3490v1 [*gr – qc*], 13 Oct (2014).
- [CBG] Y. Choquet-Bruhat and R. Geroch, Global aspects of the Cauchy problem in general relativity, *Comm.Math.Phys.*14, 344 – 357, (1969).
- [FCB] Y. Foures, Y. Choquet-Bruhat, Théorème d’existence pour certains systèmes d’équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Mathematica*, 88 : 141 – 225, (1952).
- [HE] Hawking ; S.Ellis G, The large scale structure of spacetime. Cambridge University Press, Cambridge, (1973).
- [HEL] Hobson, M., G. Efstathiou, and A. Lasenby, *Relativité Générale*, de boeck, Bruxelles, (2010).

- [GX] X. Gourdon, Les maths en tête. Analyse.Mathématiques pour les MP, page 371/Lemme Gronwall. pdf. <http://math.univ-lyon1.fr>, (2008).
- [JLS] J. Luk, R. M. Strain. Strichartz estimates and moment bounds for the relativistic Vlasov-Maxwell system II. Continuation criteria in the 3D case. arXiv :1406.0169v1 [*math.AP*], 1 Jun (2014).
- [L] J. Larena. Champs scalaires en cosmologie : discussions sur les principes d'équivalence et cosmologique. Thèse doctorat. Université Paris VII-DENIS DIDEROT. (2007).
- [LTN] A.T. Lassiye, D. Tegankong, N. Noutchegueme. The Einstein-Vlasov-Scalar field system with Gowdy or T^2 symmetry in contracting direction. *Acta Math Vietnam Vol44p501 – 518*, (2018).
- [LS] G Lefolch Philippe G. and J. Smulevici, Global geometry of T^2 -symmetric spacetimes with weak regularity. arXiv :1006.2933v2 [*gr – qc*]9 sep (2010).
- [NA] A. Nangue Système d'Einstein avec constante cosmologique couplé à quelques matières. Thèse de phd. UY1, (2017).
- [NM] M. Naarita. On the existence of global solutions for T^3 -Gowdy spacetimes with stringy matter. arXiv :gr-qc /0210088v1 25 Oct 2002.
- [NP] P. Noundjeu. Global Static Solutions of the Spherically Symmetric Vlasov-Einstein-Maxwell (VEM) System for Low Charge. *Advances in Pure Mathematics*, 3, 121 – 126 <http://dx.doi.org/10.4236/apm.2013.31016>, (2013).
- [NR] E. Nungesser and A. D. Rendall, Strong cosmic censorship for solutions of the Einstein-Maxwell field equations with polarized Gowdy symmetry.*Class. Quantum Grav.* 26 105019 (12pp), (2009).
- [NT] P. Noundjeu and D. Tegankong, The Cylindrical Symmetry Einstein-Vlasov System with Charged Particles in Expansion. *Acta Math Vietnam* 41 : 695 – 709, (2016).
- [P] S. Pocchiola, Equations de contraintes de la relativité générale. Preprint gr-qc/011081, (2009).
- [R] G. Rein , The Vlasov-Einstein system with surface symmetry Habilitation thesis, Munich. (1995).
- [Re] A. D. Rendall, An introduction of the Einstein-Vlasov system. *Mathematics of gravitation*, part I, (Warsaw,), 35 – 68, Banach Center Publ. 41 part I, Polish. Acad. Sci, Warsaw, (1997).
- [Re1] A.D. Rendall, Accelerated cosmological expansion due to a scalar field whose potential has a positive lower bound, *Class. Quantum Grav*, 21, 2445 – 2454, (2004).
- [Re2] A. D. Rendall , The Einstein-Vlasov system In Cruscuel P.T. and Friedrich H. (eds.) *The Einstein equations and the large scale behavior of gravitational fields*. Birkhauser, Basel. (2004).

- [Re3] A. D. Rendall, *Partial Differential Equations in General Relativity* (Oxford : Oxford University Press) , (2008).
- [Rh] H. Ringstrom, Asymptotic expansions close to the singularity in Gowdy spacetimes. *Class. Quantum Grav.* 21 p.305 – 322, (2004).
- [Rh1] H. Ringstrom, Future stability of the Einstein-non-linear scalar field system. <https://people.kth.se/hansr/invgnls.pdf> *Invent. Math* 173, PP123 – 208, (2008).
- [Rh2] H. Ringstrom, *The Cauchy problem in General Relativity* (ESI Lectures in Mathematics and Physics)-European Mathematical Society, (2009).
- [Rh3] H. Ringstrom, On the stability and topology of the Universe. Summer school, Zakopane KTH, RIT Stockholm.(june 30, 2013.)
- [RK] K. Radermacher, On the cosmic no-hair conjecture in T^2 - symmetry non-linear scalar field spacetimes.arXiv : 1712. 01801v1 [*gr – qc*] 5 Dec (2017).
- [RJ] Robert T. Jantzen, *Geodesics on the torus and other surfaces of revolution clarified using undergraduate physics tricks with bonus : Nonrelativistic and relativistic kepler problems*, (2010).
- [RR] G.Rein and A.D. Rendall, Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein system with small initial data, *Comm. Math. Phys.* 150, 561 – 583, (1992).
- [S] J. Smulevici, On the area of the symmetry orbits of cosmological spacetimes with toroidal or hyperbolic symmetry Preprint arXiv :0904.0806v1 [*gr – qc*] 6 April (2009).
- [TN] S. B. Tchapnda and N. Noutcheueme, The surface-symmetric Einstein-Vlasov system with cosmological constant, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 138, pp. 514 – 553, (2005).
- [T1] D. Tegankong, Cosmological solutions of the Einstein-Vlasov-scalar field system. *Journ.Hyperb.Diff.Eq.* Vol 1, No.4, 691 – 624, (2005).
- [T] D. Tegankong, Global existence and future asymptotic behaviour for solutions of the Einstein-Vlasov-scalar field system with surface symmetry *Class. Quantum Grav.* 22 2381 – 91, (2005).
- [T2] D. Tegankong, The Einstein-Vlasov scalar field system with Gowdy symmetry in the expanding direction. *Classical Quantum Gravity* 31, no. 15, 155008, 18. MR 3233262, (2014).
- [TNR] D. Tegankong, N. Noutcheueme and A.D. Rendall, Local existence and continuation criteria for solutions of the Einstein-Vlasov-scalar field system with hyperbolic symmetry *Journ.Hyperb.Diff.Eq.* Vol 1, No.4, 691 – 624, (2004).
- [TR] D. Tegankong and A. D. Rendall, On the nature of initial singularities for solutions of the Einstein-Vlasov-scalar field system with surface symmetry, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*141, pp. 547 – 562, (2006).

-
- [V] A. Vlasov, On the vibrational properties of an electron gas. Journal of experimental and theoretical physics. Vol 8, . *p.* 291, (1938).
- [W] M. Weaver , On the area of the symmetry orbits in T^2 -symmetric spacetimes with Vlasov matter, Classical Quantum Gravity, 21, *pp.*1079 – 1097, (2004).
- [WS] S. Wollman, An Existence and Uniqueness Theorem for the Vlasov-Maxwell System. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. *XXXVII*, 457462, (1984).

ANNEXE

Annexe 4.1. *Les coefficients de Christoffel dans la direction passée*

Les coefficients de Christoffel dans la direction passée sont :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \tau_t - \mu_t, & \Gamma_{00}^1 &= \tau_\theta - \mu_\theta, \\
\Gamma_{11}^0 &= \tau_t - \mu_t + [(G + AH)(\mu_t(G + AH) + G_t + A_tH + AH_t)]e^{-2(\tau-2\mu)} \\
&+ e^{-2\tau}HR(H_tR + HR_t - RH\mu_t), \\
\Gamma_{11}^1 &= \tau_\theta - \mu_\theta + e^{-2(\tau-2\mu)}(\mu_\theta(G + AH)^2 + (G_\theta + A_\theta H + AH_\theta)(G + AH)) \\
&+ e^{-2\tau}RH*, h + *(RH_\theta + HR_\theta - \mu_\theta HR) - e^{-2(\tau-2\mu)}G\mu_\theta(G + AH), \\
\Gamma_{22}^0 &= \mu_t e^{-2(\tau-2\mu)}, & \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 &= \mu_t(G + AH)e^{-2(\tau-2\mu)} + \frac{1}{2}(G_t + A_tH + AH_t)e^{-2(\tau-2\mu)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\sigma}(-\partial_\sigma g_{22}) = -\frac{1}{2}g^{11}(\partial_\theta g_{22}) = -\mu_\theta e^{-2(\tau-2\mu)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -e^{-2(\tau-2\mu)}(\mu_\theta(G + AH) + \frac{1}{2}HA_\theta),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^0 &= \Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2}[e^{-2(\tau-2\mu)}(A_t(G + AH) + A(G_t + A_tH + AH_t) + 2\mu_tA(G + AH)) \\
&+ e^{-2\mu}(2RR_tH + H_tR^2 - 2\mu_tHR^2)], \\
\Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = -e^{-2(\tau-2\mu)}\left[\frac{A_\theta}{2} + A\mu_\theta + AHA_\theta\right] + R^2H\mu_\theta e^{-2\tau}, \\
\Gamma_{23}^0 &= \frac{1}{2}(A_t + 2A\mu_t)e^{-2(\tau-2\mu)}; & \Gamma_{23}^1 &= -\frac{1}{2}(A_\theta + 2A\mu_\theta)e^{-2(\tau-2\mu)}, \\
\Gamma_{33}^0 &= e^{-2\tau}(R(R_t - R\mu_t) + Ae^{4\mu}(A\mu_t + A_t)), \\
\Gamma_{33}^1 &= \mu_\theta R^2 e^{-2\tau} - Ae^{-2(\tau-2\mu)}(A\mu_\theta + A_\theta).
\end{aligned}$$

Annexe 4.2. *Les coefficients de Christoffel dans la direction future*

Les coefficients de Christoffel dans cette direction sont :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \tau_t - \mu_t + \frac{\alpha_t}{2\alpha}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{\alpha_\theta}{2} + (\tau_\theta - \mu_\theta)\alpha, \\
\Gamma_{11}^0 &= \frac{\tau_t - \mu_t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}[(G + AH)(\mu_t(G + AH) + G_t + A_tH + AH_t)]e^{-2(\tau-2\mu)} \\
&+ \frac{1}{\alpha}e^{-2\tau}Ht(H_t t + H - tH\mu_t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \tau_\theta - \mu_\theta + e^{-2(\tau-2\mu)}(\mu_\theta(G + AH)^2 + (G_\theta + A_\theta H + AH_\theta)(G + AH)) \\
&\quad + e^{-2\tau}tH(tH_\theta - \mu_\theta Ht) - e^{-2(\tau-2\mu)}G\mu_\theta(G + AH), \\
\Gamma_{22}^0 &= \frac{\mu_t}{\alpha}e^{-2(\tau-2\mu)}; \quad \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = \mu_t \frac{G + AH}{\alpha}e^{-2(\tau-2\mu)} + \frac{1}{2\alpha}(G_t + A_t H + AH_t)e^{-2(\tau-2\mu)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\sigma}(-\partial_\sigma g_{22}) = -\frac{1}{2}g^{11}(\partial_\theta g_{22}) = -\mu_\theta e^{-2(\tau-2\mu)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -e^{-2(\tau-2\mu)}(\mu_\theta(G + AH) + \frac{1}{2}HA_\theta), \\
\Gamma_{13}^0 &= \Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2\alpha}[e^{-2(\tau-2\mu)}(A_t(G + AH) + A(G_t + A_t H + AH_t) + 2\mu_t A(G + AH)) \\
&\quad + e^{-2\mu}(2tH + H_t t^2 - 2\mu_t Ht^2)], \\
\Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = -e^{-2(\tau-2\mu)}\left[\frac{A_\theta}{2} + A\mu_\theta + AHA_\theta\right] + t^2 H\mu_\theta e^{-2\tau}, \\
\Gamma_{23}^0 &= \frac{1}{2\alpha}(A_t + 2A\mu_t)e^{-2(\tau-2\mu)}, \quad \Gamma_{23}^1 = -\frac{1}{2}(A_\theta + 2A\mu_\theta)e^{-2(\tau-2\mu)}, \\
\Gamma_{33}^0 &= \frac{e^{-2\tau}}{\alpha}(t(1 - t\mu_t) + Ae^{4\mu}(A\mu_t + A_t)), \\
\Gamma_{33}^1 &= \mu_\theta t^2 e^{-2\tau} - Ae^{-2(\tau-2\mu)}(A\mu_\theta + A_\theta).
\end{aligned}$$

Annexe 4.3. Nous avons

$$\begin{aligned}
\Box_g \phi = V'(\phi) &\Leftrightarrow \nabla_\alpha(\nabla^\alpha \phi) = V'(\phi) \\
&\Leftrightarrow \nabla_\alpha \cdot \nabla_\beta \phi g^{\alpha\beta} = V'(\phi) \\
&\Leftrightarrow \nabla_\alpha(\nabla_\beta \phi)g^{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \phi_\sigma g^{\alpha\beta} = V'(\phi) \\
&\Leftrightarrow \phi_{tt}g^{00} + \phi_{\theta\theta}g^{11} - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \phi_\sigma g^{\alpha\beta} = V'(\phi) \\
&\Leftrightarrow \phi_{tt}g^{00} + \phi_{\theta\theta}g^{11} = \phi_t(\Gamma_{\alpha\beta}^0 g^{\alpha\beta}) + \phi_\theta(\Gamma_{\alpha\beta}^1 g^{\alpha\beta}) + V'(\phi) \\
\phi_{tt}g^{00} + \phi_{\theta\theta}g^{11} &= \phi_t(\Gamma_{00}^0 g^{00} + \Gamma_{11}^0 g^{11} + 2\Gamma_{12}^0 g^{12} + 2\Gamma_{13}^0 g^{13} + \Gamma_{22}^0 g^{22} + 2\Gamma_{23}^0 g^{23} + \Gamma_{33}^0 g^{33}) \\
&\quad + \phi_\theta(\Gamma_{00}^1 g^{00} + \Gamma_{11}^1 g^{11} + 2\Gamma_{12}^1 g^{12} + 2\Gamma_{13}^1 g^{13} + \Gamma_{22}^1 g^{22} + 2\Gamma_{23}^1 g^{23} + \Gamma_{33}^1 g^{33}) \\
&\quad + V'(\phi).
\end{aligned}$$

Ensuite, en remplaçant les coefficients de Christoffel, puis en contractant et enfin en simplifiant, on obtient le résultat.

Annexe 4.4. Nous procédons comme à l'annexe précédent (4.3), ce qui nous permet en utilisant (1.12), d'avoir

$$\begin{aligned}
\phi_{tt}g^{00} + \phi_{\theta\theta}g^{11} &= \phi_t(\Gamma_{00}^0 g^{00} + \Gamma_{11}^0 g^{11} + 2\Gamma_{12}^0 g^{12} + \Gamma_{22}^0 g^{22} + 2\Gamma_{13}^0 g^{13} + 2\Gamma_{23}^0 g^{23} + \Gamma_{33}^0 g^{33}) \\
&\quad + \phi_\theta(\Gamma_{00}^1 g^{00} + \Gamma_{11}^1 g^{11} + 2\Gamma_{12}^1 g^{12} + 2\Gamma_{13}^1 g^{13} + \Gamma_{22}^1 g^{22} + 2\Gamma_{23}^1 g^{23} + \Gamma_{33}^1 g^{33}) \\
&\quad + V'(\phi)
\end{aligned} \tag{4.57}$$

en remplaçant les coefficients de Christoffel ainsi que les composantes de la métrique et en multipliant l'équation (4.57) par g_{00} , on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi_{tt} &- \left(\frac{\alpha_t}{2\alpha} + \tau_t - \mu_t\right)\phi_t - \left(\frac{\alpha_\theta}{2} + (\tau_\theta - \mu_\theta)\alpha\right)\phi_\theta - \alpha\phi_{\theta\theta} + (\tau_t - \mu_t)\phi_t \\
&+ e^{-2(\tau-2\mu)}(G + AH)[\mu_t(G + AH) + G_t + AH_t + A_tH]\phi_t + e^{-2\tau}Ht(tH_t + H - Ht\mu_t)\phi_t \\
&+ \phi_\theta\alpha(\tau_\theta - \mu_\theta) + e^{-2(\tau-2\mu)}(-AH^2A_\theta - HA_\theta G)\phi_\theta + \alpha H^2\mu_\theta t^2 e^{-2\tau}\phi_\theta \\
&- Ge^{-2(\tau-2\mu)}(G + AH)[2\mu_t(G + AH) + G_t + AH_t + A_tH]\phi_t \\
&+ \alpha e^{-2(\tau-2\mu)}(-AH^2A_\theta - HA_\theta G)\phi_\theta + \alpha H^2\mu_\theta t^2 e^{-2\tau}\phi_\theta
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
&- 2\alpha G\mu_\theta e^{-2(\tau-2\mu)}(G + AH)\phi_\theta \\
&- Ge^{-2(\tau-2\mu)}(G_t + A_tH + AH_t + 2\mu_t(G + AH))\phi_t + \alpha HA_\theta e^{-2(\tau-2\mu)}\phi_\theta \\
&- He^{-2(\tau-2\mu)}\phi_t((2\mu_tA + A_t)(G + AH) + A(G_t + A_tH + AH_t)) \\
&- He^{-2\tau}(2tH + t^2H_t - 2\mu_tHt^2)\phi_t \\
&+ \alpha e^{-2(\tau-2\mu)}H(A_\theta + 2A\mu_\theta(G + AH) + 2AA_\theta H)\phi_\theta \\
&+ 2\alpha t^2 H^2\mu_\theta e^{-2\tau}\phi_\theta + \left(\frac{A^2}{t^2}e^{4\mu} + 1 + G^2e^{-2(\tau-2\mu)}\right)\phi_t\mu_t - \alpha\left(\frac{A^2}{t^2}e^{4\mu} + 1 + G^2e^{-2(\tau-2\mu)}\right)\phi_\theta\mu_\theta \\
&+ (HGe^{-2(\tau-2\mu)}(A_t + 2\mu_tA) - \frac{A}{t^2}e^{4\mu}(A_t + 2\mu_tA))\phi_t \\
&- \alpha(A_\theta + 2\mu_\theta A)(HGe^{-2(\tau-2\mu)} - \frac{A}{t^2}e^{4\mu})\phi_\theta \\
&+ \left[\frac{1}{t^2}e^{4\mu}(A_t + \mu_tA)A + H^2(A_t + \mu_tA)Ae^{-2(\tau-2\mu)} + \frac{1}{t}(1 - t\mu_t) + H^2e^{-2\tau}t(1 - t\mu_t)\right]\phi_t \\
&+ \left(\alpha\mu_\theta - \frac{A}{t^2}e^{4\mu}(A_\theta + AH_\theta)\alpha\right)\phi_\theta \\
&+ (e^{-2\tau}H^2\alpha\mu_\theta t^2 - H^2A(A_\theta + A\mu_\theta)e^{-2(\tau-2\mu)})\phi_\theta \\
&= -\alpha e^{2(\tau-\mu)}V'(\phi).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Après simplification de (4.59), nous avons par la suite

$$\begin{aligned}
\phi_{tt} - \alpha\phi_{\theta\theta} &= \frac{\alpha_t}{2\alpha}\phi_t + \frac{\alpha_\theta}{2}\phi_\theta - \frac{1}{t} + \mu_t - \frac{e^{4\mu}}{t^2}(A_t + \mu_t A)A + \frac{Ae^{4\mu}}{t^2}(A_t + 2\mu_t A) - \mu_t - \frac{A^2}{t^2}e^{4\mu}\mu_t \\
&+ e^{-2(\tau-2\mu)} \{-\mu_t(G + AH)^2 - (G + AH)(G_t + A_t H + AH_t)\} \phi_t \\
&+ e^{-2(\tau-2\mu)} \{G(G_t + A_t H + AH_t + 2\mu_t(G + AH)) - H^2(A_t + \mu_t A)A - G^2\mu_t\} \phi_t \\
&+ e^{-2(\tau-2\mu)} \{H(A_t(G + AH) + A(G_t + A_t H + AH_t) + 2\mu_t A(G + AH))\} \phi_t \\
&- e^{-2(\tau-2\mu)} \{HG(A_t + 2\mu_t A)A\} \phi_t \\
&+ e^{-2\tau} \{H^2 t^2 \mu_t - H^2 t - t^2 H H_t + 2H^2 t + t^2 H H_t - 2\mu_t H^2 t^2 - H^2 t + t^2 H^2 \mu_t\} \phi_t \\
&+ \alpha e^{-2(\tau-2\mu)} \{AH^2 A_\theta + H A_\theta G - 2G\mu_\theta(G + AH) - 2AH^2 A_\theta\} \phi_\theta \\
&+ \alpha e^{-2(\tau-2\mu)} \{G^2 \mu_\theta + (A_\theta + 2\mu_\theta A)HG + H^2 A(A_\theta + 2A\mu_\theta)\} \phi_\theta \\
&+ \left(\frac{A}{t^2} e^{4\mu}(A_\theta + A\mu_\theta) - \mu_\theta - (A_\theta + 2\mu_\theta) \frac{A}{t^2} e^{4\mu} + \frac{A^2}{t^2} \mu_\theta e^{4\mu} + \mu_\theta \right) \phi_\theta \\
&+ e^{-2\tau} \{-H^2 t^2 \mu_\theta - 2t^2 H^2 \mu_\theta - H^2 t^2 \mu_\theta\} \phi_\theta - \alpha e^{2(\tau-\mu)} V'(\phi). \tag{4.60}
\end{aligned}$$

En simplifiant d'avantage l'égalité (4.60), on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\phi_{tt} - \alpha\phi_{\theta\theta} &= \left[\frac{\alpha_\theta}{2} + (2A_\theta H(G - 1) - \alpha\mu_\theta(G + AH)^2)\alpha e^{-2(\tau-2\mu)} - 4\mu_\theta H^2 t^2 \alpha e^{-2\tau} \right] \phi_\theta \\
&+ \left(\frac{\alpha_t}{2\alpha} - \frac{1}{t} \right) \phi_t - \alpha e^{2(\tau-\mu)} V'(\phi).
\end{aligned}$$

The Einstein-Vlasov-Scalar Field System with Gowdy or T^2 Symmetry in Contracting Direction

Alex Lassiye Tchuani¹ · David Tegankong² · Norbert Noutchequeme¹

Received: 29 August 2017 / Revised: 4 January 2018 / Accepted: 5 January 2018
© Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology (VAST) and Springer Nature Singapore Pte Ltd. 2018

Abstract We prove in the case of cosmological models for the Einstein-Vlasov-scalar field system with Gowdy symmetry, that the solutions exist globally in the past. The sources of the equations are generated by a distribution function and a scalar field, subject to the Vlasov and the wave equations respectively. The result is generalized for the case of T^2 symmetry. Using previous results, we deduce geodesic completeness.

Keywords Einstein · Vlasov · Scalar field · Gowdy symmetry · T^2 symmetry · Hyperbolic differential equations · Global existence · Geodesic completeness

Mathematics Subject Classification (2010) 83C20 · 83C22 · 34B05

1 Introduction

The question of global existence solutions of Einstein equations with matter or not is very important in general relativity. Here, for long, the practice has been to study existence of solutions under symmetry assumptions. Spacetimes with Gowdy or T^2 symmetry have received much attention by different authors for many years, see [1, 3, 8, 11, 15] and the references therein.

✉ David Tegankong
dtegancong@yahoo.fr

Alex Lassiye Tchuani
tchuanifils@yahoo.fr

Norbert Noutchequeme
nmouth@justice.com

¹ Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Yaounde 1, P.O. Box 812, Yaounde, Cameroon

² Department of Mathematics, ENS, University of Yaounde 1, P.O. Box 47, Yaounde, Cameroon

In this paper, we prove past global existence, with respect to a geometrically defined time, for Einstein equations coupled to the Vlasov and non-linear wave equations. In the surface symmetry case with the Vlasov and linear scalar field, we have shown in [12] (without any restriction on the data) and [13] global existence in the past time direction. The symmetry assumption here is the Gowdy and T^2 one, and thereby we extend respectively Andréasson's result in [1] and Smulevici's one in [11] for the Vlasov case. Andréasson's result was the first result to provide a global foliation in the contracting and expanding direction of a spacetime containing both matter and gravitational waves. In that paper, Andréasson generalized in the two time directions (contracting and expanding) the Moncrief result for the vacuum case. His method of proof is inspired by a result in [3] for vacuum spacetimes admitting a T^2 isometry group acting on T^3 space-like surfaces. Gowdy spacetimes are a special case of these spacetimes. Andréasson proves that $T^3 \times \mathbb{R}$ spacetimes with Gowdy symmetry admit global foliations by conformal coordinates in the contracting direction.

We extend the result in [1] by introducing a scalar field. It can be seen as a step towards certain questions of physical interest. In recent years, cosmological models with accelerated expansion have become a very active research topic in response to astronomical observations [10]. The easiest way to obtain models with accelerated expansion is to introduce a positive cosmological constant (see [2] and the references therein). A more sophisticated and generalized way is to introduce a scalar field with non-vanishing potential. This is our case.

There are three types of time coordinates which have been studied in the inhomogeneous Einstein-Vlasov system case: constant mean curvature, areal, and conformal. A constant mean curvature time coordinate t is one where each hypersurface of constant time has constant mean curvature and on each hypersurface of this kind the value of t is the mean curvature of that slice. In the case of areal coordinates, the time coordinate is a function of the area of the surfaces of symmetry. In some papers of the relevant literature, it is taken to be proportional to the area. In the case of conformal coordinates, the metric is conformally flat on the manifold Q which is the quotient of spacetime by the symmetry group. Q is a two-dimensional Lorentzian manifold.

Now consider the past maximal globally hyperbolic development of data on an initial hypersurface with Gowdy or T^2 symmetry (which includes plane symmetry). Using conformal coordinates and geometrical arguments as in [1, 3], we prove that along any past inextendible timelike curve, the time coordinate $R = t$, which is the area of the symmetry orbits, tends to a constant value $R_0 = 0$, independent of the choice of the curve. This was also proved in the case of T^2 -symmetric spacetimes with only the Vlasov matter by Weaver in [15] with results generalized later in some direction by Smulevici in [11]. Conformal coordinates have advantages for the simplification of estimations of solutions. By a long chain of geometrical arguments as in [3], one deduces the global foliations in the past time direction of the spacetime by areal coordinates system.

Now, we recall the formulation of the Einstein-Vlasov-scalar field system. The spacetime is a four-dimensional manifold M , with local coordinates $(x^\lambda) = (t, x^i)$ on which $x^0 = t$ denotes the time and (x^i) the space coordinates. Greek indices always run from 0 to 3, and Latin ones from 1 to 3. On M , a Lorentzian metric g is given with signature $(-, +, +, +)$. We consider a self-gravitating collisionless gas and restrict ourselves to the case where all particles have the same rest mass $m \geq 0$, and move forward in time. We denote by (p^λ) the momenta of the particles. The conservation of the quantity $g_{\lambda\beta} p^\lambda p^\beta$ requires that the phase space of the particle is the seven-dimensional submanifold

$$PM = \{g_{\lambda\beta} p^\lambda p^\beta = -m^2; p^0 > 0\}$$

of TM which is coordinatized by (t, x^i, p^i) . The energy-momentum tensor is given by

$$T_{\lambda\beta} = - \int_{\mathbb{R}^3} f p_\lambda p_\beta |g|^{1/2} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p^0} + \nabla_\lambda \phi \nabla_\beta \phi - \left[\frac{1}{2} \nabla_\nu \phi \nabla^\nu \phi + V(\phi) \right] g_{\lambda\beta} \tag{1.1}$$

where the distribution function of the particles is a non-negative real-valued function denoted by f and defined on PM , $p_\lambda = g_{\lambda\beta} p^\beta$, $|g|$ denotes the modulus of determinant of the metric g , a scalar field ϕ is a real-valued C^∞ function on M , and $V \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ is a function such that $V(0) = V_0 > 0$, $V'(0) = 0$ and $V''(0) > 0$ (see [9]).

The Einstein field equations

$$R_{\lambda\beta} - \frac{1}{2} R g_{\lambda\beta} = 8\pi T_{\lambda\beta} \tag{1.2}$$

should be coupled to the Vlasov equation (matter equation for f) and to the wave equation (matter equation for ϕ), which are respectively

$$\partial_t f + \frac{p^i}{p^0} \partial_{x^i} f - \frac{1}{p^0} \Gamma_{\beta\gamma}^i p^\beta p^\gamma \partial_{p^i} f = 0 \tag{1.3}$$

$$\nabla^\lambda \nabla_\lambda \phi - V'(\phi) = 0. \tag{1.4}$$

As a consequence, the energy-momentum tensor is divergence-free since the Bianchi identities imply that $\nabla^\lambda G_{\lambda\beta} = 0$ where $G_{\lambda\beta} = R_{\lambda\beta} - \frac{1}{2} R g_{\lambda\beta}$ and the contribution of f to the energy-momentum tensor is divergence-free [4].

The outline of the paper follows in the large that of [1]. In Section 2, we present the equations in Gowdy symmetry with conformal coordinates. The main theorem is formulated in Section 3. The proof of the theorem is based on a series of estimations using a light-cone argument. These are important to obtain bounds on the field components, the matter terms, and their derivatives. In Section 4, we extend the previous results for the T^2 -symmetry case.

2 The Gowdy Case

We refer to [1, 7], or [8] for details on the notion of Gowdy symmetry. There are several choices of spacetime manifolds compatible with Gowdy symmetry. Here, we restrict our attention to the T^3 case. Spacetimes admitting a T^2 isometry group acting on T^3 space-like surfaces are more general than the Gowdy spacetimes: both families admit two commuting killing vectors, but in the Gowdy case the additional condition is that the twists are zero. The dynamics of the matter is governed by the Vlasov and the non-linear wave equations. The Vlasov equation models a collisionless system of particles which follow the geodesics of spacetime. We now consider a solution of the Einstein-Vlasov-scalar field system where all unknowns are invariant under this symmetry. We write the system in conformal coordinates. The circumstances under which coordinates of this type exist are discussed in [2] and the references therein. In such coordinates, the metric g takes the form

$$ds^2 = -e^{2(\mu-U)} dt^2 + e^{2(\mu-U)} d\theta^2 + e^{2U} (dx + Ady)^2 + R^2 e^{-2U} dy^2, \tag{2.1}$$

where μ , U , R , and A are unknown real functions of t and θ variables. R is periodic in θ with period 1. Here, the timelike coordinate t locally labels spatial hypersurfaces of the spacetime. The scalar field is a function of t and θ . Using the results of [1], the complete Einstein-Vlasov-scalar field system can be written in the following form:

The Einstein-matter constraint equations:

$$U_t^2 + U_\theta^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2} (A_t^2 + A_\theta^2) + \frac{R_{\theta\theta}}{R} - \frac{\mu_t R_t}{R} - \frac{\mu_\theta R_\theta}{R} = -e^{2(\mu-U)} \rho, \tag{2.2}$$

$$2U_t U_\theta + \frac{e^{4U}}{2R^2} A_t A_\theta - \frac{R_{t\theta}}{R} - \frac{\mu_t R_\theta}{R} - \frac{\mu_\theta R_t}{R} = e^{2(\mu-U)} J_1. \tag{2.3}$$

The Einstein-matter evolution equations:

$$U_{tt} - U_{\theta\theta} = \frac{U_\theta R_\theta}{R} - \frac{U_t R_t}{R} + \frac{e^{4U}}{2R^2} (A_t^2 - A_\theta^2) + \frac{1}{2} e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1 + P_2 - P_3), \tag{2.4}$$

$$A_{tt} - A_{\theta\theta} = \frac{A_t R_t}{R} - \frac{A_\theta R_\theta}{R} + 4(A_\theta U_\theta - A_t U_t) + 2R e^{2\mu-4U} S_{23}, \tag{2.5}$$

$$R_{tt} - R_{\theta\theta} = R e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1), \tag{2.6}$$

$$\mu_{tt} - \mu_{\theta\theta} = U_\theta^2 - U_t^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2} (A_t^2 - A_\theta^2) - e^{2(\mu-U)} P_3 - \frac{A^2}{R^2} e^{2(\mu+U)} P_2 - \frac{2A}{R} e^{2\mu} S_{23} \tag{2.7}$$

$$\phi_{tt} - \phi_{\theta\theta} = -\frac{R_t}{R} \phi_t + \frac{R_\theta}{R} \phi_\theta - e^{2(\mu-U)} V'(\phi). \tag{2.8}$$

The Vlasov equation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{v^1}{v^0} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \left[(\mu_\theta - U_\theta) v^0 + (\mu_t - U_t) v^1 - \frac{e^{2U} A_\theta v^2 v^3}{R v^0} \right. \\ \left. + \frac{U_\theta}{v^0} ((v^3)^2 - (v^2)^2) - \frac{R_\theta}{R} \frac{(v^3)^2}{v^0} \right] \frac{\partial f}{\partial v^1} - \left[U_\theta \frac{v^1 v^2}{v^0} + U_t v^2 \right] \frac{\partial f}{\partial v^2} \\ - \left[\left(\frac{R_t}{R} - U_t \right) v^3 - \left(U_\theta - \frac{R_\theta}{R} \right) \frac{v^1 v^3}{v^0} + \frac{e^{2U} v^2}{R} \left(A_t + A_\theta \frac{v^1}{v^0} \right) \right] \frac{\partial f}{\partial v^3} = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Since all the particles have proper mass m , the variables v^α are related to the canonical momentum variables p^α by the relations

$$v^0 = e^{\mu-U} p^0, \quad v^1 = e^{\mu-U} p^1, \quad v^2 = e^U p^2 + A e^U p^3, \quad v^3 = R e^{-U} p^3,$$

so that

$$v^0 = \sqrt{m^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2}.$$

Remark 2.1 If $m > 0$ then $p^0 > 0$ and $v^0 > 0$.

Case $m = 0$: let I be the maximal existence interval of solution $s \mapsto (x^\alpha(s), p^\alpha(s))$ of the geodesic equations

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = p^\alpha; \quad \frac{dp^\alpha}{ds} = -\Gamma_{\beta\lambda}^\alpha p^\beta p^\lambda. \tag{2.10}$$

Take $s_0 \in I$ such that $p_0^0 = \sqrt{g^{00}(s_0, \theta(s_0))} \sqrt{g_{ij}(s_0, \theta(s_0)) p_0^i p_0^j} > 0$. Then since

$$\tilde{p} = (p^1, p^2, p^3) \mapsto p^0 = \sqrt{g^{00}(s_0, \theta(s_0))} \sqrt{g_{ij}(s_0, \theta(s_0)) p^i p^j}$$

is continuous on $\tilde{p}_0 = (p_0^1, p_0^2, p_0^3)$, we can find a neighborhood W of \tilde{p}_0 such that

$$(\tilde{p} \in W) \Rightarrow \left(p^0 > \frac{p_0^0}{2} > 0 \right).$$

Finally, either $m > 0$ or $m = 0$, we have $p^0 > 0$, i.e., $v^0 > 0$.

The matter terms are then defined by

$$\begin{aligned} \rho(t, \theta) &= -g^{00}T_{00}(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \theta, v)v^0 dv + \frac{1}{2}e^{-2(\mu-U)}(\phi_t^2 + \phi_\theta^2) + V(\phi), \\ J_1(t, \theta) &= -g^{11}T_{01}(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \theta, v)v^1 dv - e^{-2(\mu-U)}\phi_t\phi_\theta, \\ P_1(t, \theta) &= g^{11}T_{11}(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \theta, v)\frac{(v^1)^2}{v^0} dv + \frac{1}{2}e^{-2(\mu-U)}(\phi_t^2 + \phi_\theta^2) - V(\phi), \\ P_2(t, \theta) &= e^{-2U}T_{22}(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \theta, v)\frac{(v^2)^2}{v^0} dv + \frac{1}{2}e^{-2(\mu-U)}(\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - V(\phi), \\ P_3(t, \theta) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \theta, v)\frac{(v^3)^2}{v^0} dv + \frac{1}{2}e^{-2(\mu-U)}(\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - V(\phi), \\ S_{23}(t, \theta) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \theta, v)\frac{v^2v^3}{v^0} dv, \end{aligned}$$

and

$$T_{33}(t, \theta) = A^2e^{2U}P_2 + R^2e^{-2U}P_3 + 2ARS_{23}.$$

We prescribe initial data at time $t = t_0 > 0$:

$$\begin{aligned} f(t_0, \theta, v) &= f_0(\theta, v), \quad \mu(t_0, \theta) = \mu_0(\theta), \quad \mu_t(t_0, \theta) = \mu_1(\theta), \\ R(t_0, \theta) &= R_0(\theta), \quad R_t(t_0, \theta) = R_1(\theta), \quad U(t_0, \theta) = U_0(\theta), \quad U_t(t_0, \theta) = U_1(\theta), \\ A(t_0, \theta) &= A_0(\theta), \quad A_t(t_0, \theta) = A_1(\theta), \quad \phi(t_0, \theta) = \phi_0(\theta), \quad \phi_t(t_0, \theta) = \phi_1(\theta) \end{aligned}$$

3 The Main Theorem

We begin this important section by specifying the regularity properties and the local in time existence result which we require.

Definition 3.1 Let $I \subset]0, \infty[$ be an interval and $(t, \theta) \in I \times \mathbb{R}$.

- a) $f \in C^\infty(I \times \mathbb{R}^2)$ is regular if $f(t, \theta + 1, v) = f(t, \theta, v)$ for $(t, \theta, v) \in I \times \mathbb{R}^2$, $f \geq 0$ and $\text{supp} f(t, \theta, \cdot)$ is compact uniformly in θ and locally uniformly in t .
- b) μ (or R, U, A) $\in C^2(I \times \mathbb{R})$ is regular, if $\mu(t, \theta + 1) = \mu(t, \theta)$.
- c) ρ (or P_k, J) $\in C^1(I \times \mathbb{R})$ ($k = 1, 2, 3$) is regular, if $\rho(t, \theta + 1) = \rho(t, \theta)$.
- d) $\phi \in C^2(I \times \mathbb{R})$ is regular, if $\phi(t, \theta + 1) = \phi(t, \theta)$.

Theorem 3.2 Given initial data for (1.1)–(1.4), there is a maximal globally hyperbolic development (M, g, f, ϕ) of the data which is unique up to isometry.

The proof is as in [5, 6]. This important result (which is a local existence in time solution for an associated hyperbolic system) will be used in this paper. However, it does not yield any conclusion concerning global existence in time directions. Our attention is concentrated only on the existence of global solutions in the past time direction for any initial data. This is an extension of Choquet’s result for the hyperbolic system.

Remark 3.3 (M, g, f, ϕ) is unique up to isometry means that if (M', g', f', ϕ') is another maximal globally hyperbolic development, then there is a diffeomorphism $\varphi : M \rightarrow M'$

such that $\varphi^*g' = g, \varphi^*f' = f, \varphi^*\phi' = \phi$ and $\varphi \circ i = i',$ where i and i' are the embeddings of T^3 into M and M' respectively.

Theorem 3.4 *Let $(T^3, \mu_0, \mu_1, A_0, A_1, U_0, U_1, f_0, \phi_0, \phi_1)$ be regular initial data that satisfy the constraints (2.2)–(2.3) where the metric is coordinatized as in (2.1). Let (g, f, ϕ) be the local regular solution that corresponds to the initial data and $]T, t_0[$ be the maximal interval of existence. There exists a globally hyperbolic spacetime (M, g, f, ϕ) such that*

- (i) $M = [0, t_0[\times T^3,$
- (ii) (g, f, ϕ) satisfies the Einstein-Vlasov-scalar field system in areal coordinates,
- (iii) (M, g, f, ϕ) is isometrically diffeomorphic to the maximal globally hyperbolic development of the initial data $(T^3, \mu_0, \mu_1, A_0, A_1, U_0, U_1, f_0, \phi_0, \phi_1).$

In order to extend the local existence in time to the global existence, it is sufficient to obtain uniform bounds on the field components, the distribution function, the scalar field, and all their derivatives on a finite time interval $[t_1, t_2)$ on which the local solution exists. This means that the past maximal development of initial data in terms of conformal coordinates has $t \rightarrow -\infty$ as long as R stays bounded away from zero, and using geometrical arguments as in [1], we have a proof of the theorem.

Let us introduce the null vector fields $\partial_\tau := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t - \partial_\theta), \partial_\xi := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t + \partial_\theta).$ Then $F_\tau := \frac{1}{\sqrt{2}}(F_t - F_\theta)$ and $F_\xi := \frac{1}{\sqrt{2}}(F_t + F_\theta)$ for any function F of variables t and $\theta.$

Step 1 Monotonicity of R and bounds on its first derivatives.

After some calculation, the constraints (2.2) and (2.3) give respectively

$$\sqrt{2}\partial_\theta R_\xi = -Re^{2(\mu-U)}(\rho - J_1) - 2RU_\xi^2 - \frac{e^{4U}}{2R}A_\xi^2 + 2\mu_\xi R_\xi, \tag{3.1}$$

$$\sqrt{2}\partial_\theta R_\tau = Re^{2(\mu-U)}(\rho + J_1) + 2RU_\tau^2 + \frac{e^{4U}}{2R}A_\tau^2 - 2\mu_\tau R_\tau. \tag{3.2}$$

Since $|J_1| \leq \rho$ and $R > 0,$ it follows from (3.1) and (3.2) that

$$\partial_\theta R_\xi < \sqrt{2}\mu_\xi R_\xi, \tag{3.3}$$

$$\partial_\theta R_\tau > -\sqrt{2}\mu_\tau R_\tau. \tag{3.4}$$

If $R_\xi(t, \theta) = 0$ for some $t \in]t_1, t_0[$ and $\theta \in \mathbb{R},$ then by the periodicity of R with respect to θ and Gronwall’s lemma applied on (3.3), $0 = R_\xi(t, \theta + 1) < R_\xi(t, \theta)\exp(\int_\theta^{\theta+1} \sqrt{2}\mu_\xi) = 0,$ a contradiction. Thus, $R_\xi \neq 0$ on $]t_1, t_0[\times S^1.$

Similarly, (3.4) yields the same assertion for $R_\tau.$ This implies that the quantities R_ξ, R_τ have each a definite sign. It follows that the quantity $g^{\alpha\beta}\partial_{x^\alpha}R\partial_{x^\beta}R = g^{00}R_t^2 + g^{11}R_\theta^2 = -\frac{1}{2}e^{2(\mu-U)}R_\xi R_\tau$ does not change sign (it is strictly positive or strictly negative). Since R is periodic and continuous in $\theta,$ there must exist points where $R_\theta = 0,$ hence the quantity above is negative everywhere ($g^{00}R_t^2 < 0).$ Thus, ∇R is timelike. This means that R_t is non zero everywhere. Our choice of time corresponds to contracting T^2 orbits so that $R_t > 0$ and $|R_\theta| < R_t.$

Next, we show that R_t and $|R_\theta|$ are bounded into the past. Using (2.6) and the fact that $\rho \geq p_1,$

$$\partial_\tau R_\xi = \frac{R}{2}e^{2(\mu-U)}(\rho - P_1) \geq 0 \tag{3.5}$$

and

$$\partial_\xi R_\tau = \frac{R}{2} e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1) \geq 0. \tag{3.6}$$

It follows that if we start at any point (t_0, θ_0) on the initial surface, we obtain

$$\frac{d}{ds} R_\xi(s, \theta + t - s) = \partial_t R_\xi - \partial_\theta R_\xi = \sqrt{2} \partial_\tau R_\xi(s, r + t - s) \geq 0.$$

After integration on $[t, t_0]$,

$$R_\xi(t, \theta) \leq R_\xi(t_0, \theta + t - t_0).$$

Similarly,

$$R_\tau(t, \theta) \leq R_\tau(t_0, \theta - t + t_0).$$

These yield

$$\sqrt{2} R_t(t, \theta) \leq R_\xi(t_0, \theta + t - t_0) + R_\tau(t_0, \theta - t + t_0) \leq \sup_{\theta \in S^1} (R_\xi + R_\tau)(t_0, \theta).$$

We conclude that R_t is bounded into the past and $|R_\theta|$ is also bounded. Consequently, R is uniformly bounded to the past of the initial surface.

Step 2 Bounds on U, A, μ, ϕ , and their first derivatives.

We use the light-cone argument and Gronwall's lemma in this step. The functions involved in this case are quadratic and defined by

$$X = \frac{1}{2} R(U_t^2 + U_\theta^2) + \frac{e^{4U}}{8R} (A_t^2 + A_\theta^2) + \frac{1}{2} R(\phi_t^2 + \phi_\theta^2) + \phi^2, \tag{3.7}$$

$$Y = R U_t U_\theta + \frac{e^{4U}}{4R} A_t A_\theta + R \phi_t \phi_\theta. \tag{3.8}$$

Using (2.4), (2.5), and (2.8) we find

$$\begin{aligned} \partial_\tau(X + Y) &= -\frac{1}{2} R_\tau \left(U_t^2 - U_\theta^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2} (-A_t^2 + A_\theta^2) \right) + \left(\frac{R_\tau}{2} - \frac{R_t}{\sqrt{2}} \right) \phi_t^2 \\ &\quad + \left(\frac{R_\tau}{2} + \frac{R_\theta}{\sqrt{2}} \right) \phi_\theta^2 + 2\phi\phi_\tau - \frac{R}{\sqrt{2}} (\phi_t + \phi_\theta) e^{2(\mu-U)} V'(\phi) \\ &\quad + \frac{R}{2} U_\xi e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1 + P_2 - P_3) + \frac{e^{2U}}{2R} A_\xi e^{2(\mu-U)} S_{23}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

and

$$\begin{aligned} \partial_\xi(X - Y) &= -\frac{1}{2} R_\tau \left(U_t^2 - U_\theta^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2} (-A_t^2 + A_\theta^2) \right) + \left(\frac{R_\xi}{R} - \frac{R_t}{\sqrt{2}} \right) \phi_t^2 \\ &\quad + \left(\frac{R_\xi}{R} - \frac{R_\theta}{\sqrt{2}} \right) \phi_\theta^2 + 2\phi\phi_\xi - \frac{R}{\sqrt{2}} (\phi_t - \phi_\theta) e^{2(\mu-U)} V'(\phi) \\ &\quad + \frac{R}{2} U_\tau e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1 + P_2 - P_3) + \frac{e^{2U}}{2R} A_\tau e^{2(\mu-U)} S_{23}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Integrating each of the above equations along null paths starting at (t_1, θ) and ending at the initial t_0 -surface, and adding the results we obtain

$$\begin{aligned}
 X(t_1, \theta) &= \frac{1}{2}(X + Y)(t_0, \theta - (t_0 - t_1)) + \frac{1}{2}(X - Y)(t_0, \theta + (t_0 - t_1)) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} [K_1(s, \theta - (s - t_1)) + K_2(s, \theta + (s - t_1))] ds \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} [(U_\xi T_1)(s, \theta - (s - t_1)) + (U_\tau T_1)(s, \theta + (s - t_1))] ds \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} \left[\left(\frac{e^{2U}}{2R} A_\xi T_2 \right) (s, \theta - (s - t_1)) + \left(\frac{e^{2U}}{2R} A_\tau T_2 \right) (s, \theta + (s - t_1)) \right] ds,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

where

$$\begin{aligned}
 K_1 &= -\frac{1}{2} R_\tau \left(U_t^2 - U_\theta^2 + \frac{e^{4U}}{R^2} (-A_t^2 + A_\theta^2) - \phi_t^2 - \phi_\theta^2 \right) \\
 &\quad - \frac{R_t}{\sqrt{2}} \phi_t^2 + \frac{R_\theta}{\sqrt{2}} \phi_\theta^2 + 2\phi\phi_\tau - \frac{R}{\sqrt{2}} (\phi_t + \phi_\theta) e^{2(\mu-U)} V'(\phi), \\
 K_2 &= -\frac{1}{2} R_\xi \left(U_t^2 - U_\theta^2 + \frac{e^{4U}}{R^2} (-A_t^2 + A_\theta^2) - \phi_t^2 - \phi_\theta^2 \right) \\
 &\quad - \frac{R_t}{\sqrt{2}} \phi_t^2 - \frac{R_\theta}{\sqrt{2}} \phi_\theta^2 + 2\phi\phi_\xi - \frac{R}{\sqrt{2}} (\phi_t - \phi_\theta) e^{2(\mu-U)} V'(\phi), \\
 T_1 &= \frac{R}{2} e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1 + P_2 - P_3), \\
 T_2 &= e^{2(\mu-U)} S_{23}.
 \end{aligned}$$

From the expression of the matter terms and the fact that $V(\phi) > 0$, we deduce that

$$\rho - P_1 - P_2 - P_3 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{v^0} f dv - e^{-2(\mu-U)} (\phi_t^2 - \phi_\theta^2) + 4V(\phi),$$

i.e.,

$$P_1 + P_2 + P_3 \leq \rho + e^{-2(\mu-U)} \phi_t^2$$

and

$$P_2 + P_3 \leq \rho - P_1 + e^{-2(\mu-U)} (\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - 4V(\phi).$$

In another way

$$2|S_{23}| \leq P_2 + P_3 - e^{-2(\mu-U)} (\phi_t^2 - \phi_\theta^2) + 2V(\phi),$$

therefore

$$|T_2| = e^{2(\mu-U)} |S_{23}| \leq \frac{1}{2} e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1). \tag{3.12}$$

Since $\rho - P_1 - P_2 + P_3 \geq 0$ (i.e., $P_2 - P_3 \leq \rho - P_1$) and $\rho - P_1 + P_2 - P_3 \geq 0$, we deduce that

$$0 \leq \rho - P_1 + P_2 - P_3 \leq 2(\rho - P_1)$$

and

$$T_1 \leq R e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1). \tag{3.13}$$

In another way for $k = 2, 3$,

$$e^{2(\mu-U)} P_k \leq e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1) + \frac{1}{2} \phi_t^2. \tag{3.14}$$

Without loss of generality, choosing $V(\phi)$ such that $V(\phi) = V_0 \exp(\phi^2)$, we obtain

$$|\phi_\xi e^{2(\mu-U)} V'(\phi)| = 2|\phi_\xi \phi| e^{2(\mu-U)} V(\phi) \leq \frac{1}{2}(\phi_\xi^2 + \phi^2) e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1)$$

and

$$|\phi_\tau e^{2(\mu-U)} V'(\phi)| = 2|\phi_\tau \phi| e^{2(\mu-U)} V(\phi) \leq \frac{1}{2}(\phi_\tau^2 + \phi^2) e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1).$$

For any $t \in (t_1, t_0)$, Eqs. (3.5) and (3.6) give respectively after integration

$$R_\xi(t_0, \theta + t_0 - t) - R_\xi(t, \theta) = \frac{1}{2} \int_t^{t_0} [R e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1)](s, \theta + s - t) ds, \tag{3.15}$$

$$R_\tau(t_0, \theta - t_0 + t) - R_\tau(t, \theta) = \frac{1}{2} \int_t^{t_0} [R e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1)](s, \theta - s + t) ds. \tag{3.16}$$

It follows from Step 1 that the right hand sides of the two equalities (3.15), (3.16) are uniformly bounded. Consequently, on (t_1, t_0) , we obtain from (3.12), (3.13) the uniform bound of

$$\int_t^{t_0} T_1(s, \theta \pm (s - t)) ds; \quad \int_t^{t_0} |T_2|(s, \theta \pm (s - t)) ds$$

and (for some constant C) the estimations

$$\int_t^{t_0} \left[\frac{1}{2}(\phi_\xi^2 + \phi^2) R e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1) \right](s, \theta + s - t) ds \leq C \sup_{[t_1, t_0]} X(t, \theta), \tag{3.17}$$

$$\int_t^{t_0} \left[\frac{1}{2}(\phi_\tau^2 + \phi^2) R e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1) \right](s, \theta - s + t) ds \leq C \sup_{[t_1, t_0]} X(t, \theta). \tag{3.18}$$

We can deduce that

$$\int_{t_1}^{t_0} |U_\xi| T_1(s, \theta - s + t_1) ds \leq \int_{t_1}^{t_0} 2\sqrt{\frac{X}{R}} T_1(s, \theta - s + t_1) ds \leq C \sup_{[t_1, t_0]} \sqrt{X(t, \theta)}, \tag{3.19}$$

$$\int_{t_1}^{t_0} |U_\tau| T_1(s, \theta + s - t_1) ds \leq \int_{t_1}^{t_0} 2\sqrt{\frac{X}{R}} T_1(s, \theta + s - t_1) ds \leq C \sup_{[t_1, t_0]} \sqrt{X(t, \theta)}, \tag{3.20}$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{e^{2U}}{2R} |A_\xi| |T_2|(s, \theta - s + t_1) ds \leq \int_{t_1}^{t_0} 2\sqrt{\frac{X}{R}} |T_2|(s, \theta - s + t_1) ds \leq C \sup_{[t_1, t_0]} \sqrt{X(t, \theta)}, \tag{3.21}$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{e^{2U}}{2R} |A_\tau| |T_2|(s, \theta + s - t_1) ds \leq \int_{t_1}^{t_0} 2\sqrt{\frac{X}{R}} |T_2|(s, \theta + s - t_1) ds \leq C \sup_{[t_1, t_0]} \sqrt{X(t, \theta)}, \tag{3.22}$$

$$\int_{t_1}^{t_0} |K_1|(s, \theta - s + t_1) ds \leq C \int_{t_1}^{t_0} X(s, \theta) ds + C \sup_{[t_1, t_0]} \sqrt{X(t, \theta)}, \tag{3.23}$$

$$\int_{t_1}^{t_0} |K_2|(s, \theta + s - t_1) ds \leq C \int_{t_1}^{t_0} X(s, \theta) ds + C \sup_{[t_1, t_0]} \sqrt{X(t, \theta)}. \tag{3.24}$$

So the identity (3.11) now implies

$$\begin{aligned} \sup_{\theta} X(t, \theta) &\leq 4 \sup_{\theta} X(t_0, \theta) + C \sup_{[t_1, t_0] \times S^1} \sqrt{X(t, \theta)} \\ &\quad + C \sup_{[t_1, t_0] \times S^1} X(t, \theta) + C \int_{t_1}^{t_0} \sup_{\theta} X(s, \theta) ds. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Using Gronwall’s lemma, we conclude as in Step 2 of [1] that $\sup_{\theta} X(s, \theta)$ is uniformly bounded on (t_1, t_0) , leading to bounds on $U, A, \phi, V(\phi)$, and their first derivatives. The bounds on μ and its first derivatives are obtained in a similar way since (2.7) can be written as

$$\partial_{\tau} \mu_{\xi} = U_{\theta}^2 - U_t^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2} (A_t^2 - A_{\theta}^2) - e^{2(\mu-U)} \left(P_3 + \frac{A^2}{R^2} e^{4U} P_2 + \frac{2A}{R} e^{2U} S_{23} \right) \tag{3.26}$$

or equivalently

$$\partial_{\xi} \mu_{\tau} = U_{\theta}^2 - U_t^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2} (A_t^2 - A_{\theta}^2) - e^{2(\mu-U)} \left(P_3 + \frac{A^2}{R^2} e^{4U} P_2 + \frac{2A}{R} e^{2U} S_{23} \right). \tag{3.27}$$

Using inequalities (3.12), (3.14) and the fact that the integral along null paths for the quantity $Re^{2\mu-2U}(\rho - P_1)$ is bounded to the past of the initial surface, we conclude that the integrals along the null paths for the matter terms in the right hand sides of (3.26)–(3.27) are bounded since A, U, ϕ , and their first derivatives are bounded. We obtain that $|\mu_{\xi}|$ and $|\mu_{\tau}|$ are bounded, and therefore $\mu_t = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mu_{\tau} + \mu_{\xi}), \mu_{\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mu_{\tau} + \mu_{\xi})$, and μ are bounded.

Step 3 Bound on the support of the momentum.

A solution f to the Vlasov equation is given by

$$f(t, \theta, v) = f_0(\Theta(t_0, t, \theta, v), V(t_0, t, \theta, v)),$$

where Θ and V are solutions to the characteristic system

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{ds} &= \frac{V^1}{V^0}, \\ \frac{dV^1}{ds} &= -(\mu_{\theta} - U_{\theta})V^0 - (\mu_t - U_t)V^1 + U_{\theta} \frac{(V^2)^2}{V^0} - \left(U_{\theta} - \frac{R_{\theta}}{R} \right) \frac{(V^3)^2}{V^0} + \frac{A_{\theta}}{R} e^{2U} \frac{V^2 V^3}{V^0}, \\ \frac{dV^2}{ds} &= -U_t V^2 - U_{\theta} \frac{V^1 V^2}{V^0}, \\ \frac{dV^3}{ds} &= -\left(\frac{R_t}{R} - U_t \right) V^3 + \left(U_{\theta} - \frac{R_{\theta}}{R} \right) \frac{V^1 V^3}{V^0} - \frac{e^{2U}}{R} \left(A_t + A_{\theta} \frac{V^1}{V^0} \right) V^2, \end{aligned}$$

with $\Theta(t, t, x, v) = \theta$ and $V(t, t, x, v) = v$. Since $\|f\|_{\infty} \leq \|f_0\|_{\infty}$, the control of

$$Q(t) := \sup \left\{ |v| : \exists (s, \theta) \in [t, t_0] \times S^1 : f(t, \theta, v) \neq 0 \right\}$$

and previous steps give bounds on the matter quantities $\rho, P_k, (k = 1, 2, 3)$ and S_{23} . The distribution function has compact support on the initial surface and therefore $V^k(t_0), k = 1, 2, 3$ is bounded. Since $|V^k| \leq V^0, k = 1, 2, 3$, the Gronwall lemma applied to the characteristic system gives uniform bounds on $|V^k(t)|$ and it follows that $Q(t)$ is uniformly bounded on $(t_1, t_0]$.

Step 4 Bounds on the second-order derivatives of R and ϕ .

From previous steps, the field components and all their first derivatives are bounded, and the matter quantities are all bounded. We deduce respectively from (2.2), (2.3), and (2.6) the uniform bound of $R_{\theta\theta}, R_{t\theta}$, and R_{tt} as long as R stays bounded away from zero.

Let $B = \partial_\theta(R\phi_\tau)$ and $D = \partial_\theta(R\phi_\xi)$, then

$$\phi_{t\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2R}(B + D) - \frac{R_\theta}{R}\phi_t \tag{3.28}$$

and

$$\phi_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2R}(-B + D) - \frac{R_\theta}{R}\phi_t. \tag{3.29}$$

After some calculations and using (3.28), (3.29),

$$\begin{aligned} B_\xi = \frac{1}{2} & \left[\left(R_{\theta\theta} - \frac{R_\theta^2}{R} \right) \phi_t + \left(\frac{R_t R_\theta}{R} - R_{t\theta} \right) \phi_\theta + \frac{R_\xi}{R} B - \frac{R_\tau}{R} D \right] \\ & - \left[\left(\mu_\theta - U_\theta + \frac{R_\theta}{2} \right) V'(\phi) + \frac{1}{2} \phi_\theta V''(\phi) \right] e^{2\mu-2U} \end{aligned} \tag{3.30}$$

and

$$\begin{aligned} D_\tau = -\frac{1}{2} & \left[\left(R_{\theta\theta} - \frac{R_\theta^2}{R} \right) \phi_t + \left(\frac{R_t R_\theta}{R} - R_{t\theta} \right) \phi_\theta + \frac{R_\xi}{R} B - \frac{R_\tau}{R} D \right] \\ & - \left[\left(\mu_\theta - U_\theta + \frac{R_\theta}{2} \right) V'(\phi) + \frac{1}{2} \phi_\theta V''(\phi) \right] e^{2\mu-2U}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Integrating (3.30)–(3.31) along null paths starting at (t_1, θ) and ending at the initial t_0 –surface, we obtain

$$B(t_1, \theta) = B(t_0, \theta + t_1 - t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} \left(a - b + \frac{R_\xi}{R} B - \frac{R_\tau}{R} D \right) (t_1, \theta + s - t_1) ds \tag{3.32}$$

$$D(t_1, \theta) = D(t_0, \theta - t_1 + t_0) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} \left(-a - b - \frac{R_\xi}{R} B + \frac{R_\tau}{R} D \right) (t_1, \theta - s + t_1) ds. \tag{3.33}$$

We take the supremum in θ of the absolute values of each equation and add the results to obtain

$$K(t) \leq K(t_0) + \int_t^{t_0} \left[\sup_{\theta \in S^1} |(a+b)(s, \theta)| + \sup_{\theta \in S^1} \left(\frac{|R_\xi| + |R_\tau|}{R} \right) (s, \theta) K(s) \right] ds, \tag{3.34}$$

where $K(t) = \sup_{\theta \in S^1} (|B| + |D|)(t, \theta)$ and

$$\begin{aligned} a(t, \theta) &= \left(R_{\theta\theta} - \frac{R_\theta^2}{R} \right) \phi_t + \left(\frac{R_t R_\theta}{R} - R_{t\theta} \right) \phi_\theta, \\ b(t, \theta) &= \left[\left(\mu_\theta - U_\theta + \frac{R_\theta}{2} \right) V'(\phi) + \frac{1}{2} \phi_\theta V''(\phi) \right] e^{2\mu-2U}. \end{aligned}$$

We deduce from (3.34) the Gronwall lemma and previous steps that $K(t)$ is bounded since R stays bounded away from zero. This proves from (3.28)–(3.29) that $\phi_{t\theta}, \phi_{\theta\theta}$ are uniformly bounded. The uniformly bound of ϕ_{tt} follows from the evolution equation (2.8).

Step 5 Bounds on the first-order derivatives of matter quantities and second-order derivatives of the field components.

Since the second-order derivatives of R and ϕ are bounded, one follows the techniques developed in [1] (Step 4) to bound first-order derivatives of f and second-order derivatives

of U , A , and μ . There is a minor change on the term $k_\theta = \partial_\theta(\rho - P_1 + P_2 - P_3)$ where $\partial_\theta V(\phi)$ appears and is bounded by previous steps.

Step 6 Bounds on higher order derivatives and completion of the proof.

The method described above can be used for obtaining bounds on higher derivatives as well. Hence, we have uniform bounds on the functions R , U , A , μ , f , ϕ , and all their derivatives on the interval $(t, t_0]$ if R stays bounded away from zero. This implies that the solution extends to $t \rightarrow -\infty$ in conformal coordinates. The proof of the theorem is complete using the geometrical arguments developed in [1, 3].

4 The T^2 Symmetry Case

We consider now a solution of the Einstein-Vlasov-scalar field system where all unknowns are invariant under the T^2 -symmetry with the twists different from zero (cf. [11, 15]). In conformal coordinates, the metric g takes the form

$$ds^2 = -e^{2(\mu-U)} dt^2 + e^{2(\mu-U)} d\theta^2 + e^{2U} [dx + Ady + (G + AH)d\theta]^2 + R^2 e^{-2U} (dy + Hd\theta)^2; \tag{4.1}$$

where μ , U , R , A , H , and G are unknown real functions of t and θ variables, periodic in θ with period 1.

Using the results of [15] or [11], the complete Einstein-Vlasov-scalar field system (1.2)–(1.4) can be written in the following form:

The Einstein-matter constraint equations:

$$U_t^2 + U_\theta^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2} (A_t^2 + A_\theta^2) + \frac{R_{\theta\theta}}{R} - \frac{\mu_t R_t}{R} - \frac{\mu_\theta R_\theta}{R} = -\frac{e^{-2(\mu-2U)}}{4} \Gamma^2 - \frac{e^{-2\mu}}{4} H_t^2 - e^{2(\mu-U)} \rho, \tag{4.2}$$

$$2U_t U_\theta + \frac{e^{4U}}{2R^2} A_t A_\theta - \frac{R_{t\theta}}{R} - \frac{\mu_t R_\theta}{R} - \frac{\mu_\theta R_t}{R} = e^{2(\mu-U)} J_1. \tag{4.3}$$

The Einstein-matter evolution equations:

$$U_{tt} - U_{\theta\theta} = \frac{U_\theta R_\theta}{R} - \frac{U_t R_t}{R} + \frac{e^{4U}}{2R^2} (A_t^2 - A_\theta^2) + \frac{e^{-2(\mu-2U)}}{2} \Gamma^2 + \frac{1}{2} e^{2(-\mu+2U)} (\rho - P_1 + P_2 - P_3), \tag{4.4}$$

$$A_{tt} - A_{\theta\theta} = \frac{A_t R_t}{R} - \frac{A_\theta R_\theta}{R} + 4(A_\theta U_\theta - A_t U_t) + 2R e^{2\mu-4U} S_{23} + R^2 e^{-2\mu} \Gamma H_t, \tag{4.5}$$

$$R_{tt} - R_{\theta\theta} = R e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1) + \frac{e^{-2(\mu-2U)}}{2} R \Gamma^2 + \frac{e^{-2\mu}}{2} R^3 H_t^2, \tag{4.6}$$

$$\mu_{tt} - \mu_{\theta\theta} = U_\theta^2 - U_t^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2} (A_t^2 - A_\theta^2) - e^{2(\mu-U)} P_3 - \frac{A^2}{R^2} e^{2(\mu+U)} P_2 - \frac{2A}{R} e^{2\mu} S_{23} - \frac{e^{-2(\mu-2U)}}{4} R \Gamma^2 - \frac{3e^{-2\mu}}{4} R^2 H_t^2. \tag{4.7}$$

$$\phi_{tt} - \phi_{\theta\theta} = E(t, \theta)\phi_t + F(t, \theta)\phi_\theta - e^{2(\mu-U)} V'(\phi). \tag{4.8}$$

The auxiliary equations:

$$\partial_\theta (R e^{-2(\mu-2U)} \Gamma) = -2R e^\mu J_2 \tag{4.9}$$

$$\partial_t (R e^{-2(\mu-2U)} \Gamma) = 2R e^\mu S_{12} \tag{4.10}$$

$$\partial_\theta (R^3 e^{-2\mu} H_t) + R e^{-2(\mu-2U)} A_\theta \Gamma = -2R^2 e^{\mu-2U} J_3 \tag{4.11}$$

$$\partial_t (R^3 e^{-2\mu} H_t) + R e^{-2(\mu-2U)} A_t \Gamma = 2R^2 e^{\mu-2U} S_{13}. \tag{4.12}$$

The Vlasov equation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{v^1}{v^0} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \left[(\mu_\theta - U_\theta)v^0 + (\mu_t - U_t)v^1 - \frac{e^{2U} A_\theta}{R} \frac{v^2 v^3}{v^0} + \frac{U_\theta}{v^0} ((v^3)^2 + (v^2)^2) \right. \\ \left. - \frac{R_\theta}{R} \frac{(v^3)^2}{v^0} + e^{-\mu} (e^{2\mu} \Gamma v^2 + R H_t v^3) \right] \frac{\partial f}{\partial v^1} - \left[U_\theta \frac{v^1 v^2}{v^0} + U_t v^2 \right] \frac{\partial f}{\partial v^2} \\ + \left[\left(\frac{R_t}{R} - U_t \right) v^3 + \left(U_\theta - \frac{R_\theta}{R} \right) \frac{v^1 v^3}{v^0} + \frac{e^{2U} v^2}{R} \left(A_t + A_\theta \frac{v^1}{v^0} \right) \right] \frac{\partial f}{\partial v^3} = 0, \quad (4.13) \end{aligned}$$

where $\Gamma = G_t + A H_t$,

$$J_k = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \theta, v) v^k dv, \quad k \in \{2, 3\},$$

$$S_{ij} = \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \theta, v) \frac{v^i v^j}{v^0} dv, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}; \quad i \neq j,$$

$$\begin{aligned} E(t, \theta) = -\frac{R_t}{R} + (R^2 H_t H + R_t H_t H) e^{-2\mu} \\ + (2U_t G^2 + 2AGH U_t + GG_t + A_t H G + A H_t G) e^{-2\mu+4U}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} F(t, \theta) = \frac{R_\theta}{R} + (R^2 H_\theta H - R R_\theta H^2 + 2R_\theta H^2 - 5R^2 H^2 U_\theta) e^{-2\mu} \\ + (G^2 U_\theta + A A_\theta H^2 + G G_\theta + 4A U_\theta H G - 2A H U_\theta + A H_\theta G \\ + A G_\theta H + A_\theta H G + A^2 H H_\theta + A^2 H^2 U_\theta) e^{-2\mu+4U}. \end{aligned}$$

Step 7 Monotonicity of R and bounds on its first derivatives

Using the constraint (4.2) and (4.3), the extra non-negative term $\frac{e^{-2\mu+4U}}{4} R \Gamma^2 + \frac{R^2 e^{-2\mu}}{4} R H_t^2$ adds to the right hand side of each relation (3.1) and (3.2). The same method as in Step 1 follows.

Step 8 Bounds on U, A, μ , and their first derivatives.

Define

$$X = \frac{1}{2} R (U_t^2 + U_\theta^2) + \frac{e^{4U}}{4R^2} (A_t^2 + A_\theta^2); \quad Y = R U_t U_\theta + \frac{e^{4U}}{4R} A_t A_\theta.$$

Following Step 2, relations (3.9) and (3.10) are respectively replaced by

$$\begin{aligned} \partial_\tau (X + Y) = -\frac{1}{2} R_\xi \left(U_t^2 - U_\theta^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2} (-A_t^2 + A_\theta^2) \right) + \frac{e^{2U}}{2R} A_\xi R^2 e^{2(\mu+U)} \Gamma H_t \\ - \frac{R}{2} U_\xi \left(e^{-2\mu+4U} \Gamma^2 + e^{2(\mu-U)} (\rho - P_1 + P_2 - P_3) \right) + A_\xi e^{2\mu} S_{23}. \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \partial_\xi(X - Y) = & -\frac{1}{2}R_\tau \left(U_t^2 - U_\theta^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2}(-A_t^2 + A_\theta^2) \right) + \frac{e^{2U}}{2R} A_\tau R^2 e^{2(\mu+U)} \Gamma H_t \\ & - \frac{R}{2} U_\tau \left(e^{-2\mu+4U} \Gamma^2 + e^{2(\mu-U)}(\rho - P_1 + P_2 - P_3) \right) + A_\tau e^{2\mu} S_{23}. \end{aligned}$$

After integration and summation, we obtain relation (3.11) with

$$\begin{aligned} K_1 = & -\frac{1}{2}R_\tau \left(U_t^2 - U_\theta^2 + \frac{e^{4U}}{R^2}(-A_t^2 + A_\theta^2) \right), \\ K_2 = & -\frac{1}{2}R_\xi \left(U_t^2 - U_\theta^2 + \frac{e^{4U}}{R^2}(-A_t^2 + A_\theta^2) \right), \\ T_1 = & \frac{R}{2} e^{2(\mu-U)}(\rho - P_1 + P_2 - P_3) + \frac{R}{2} e^{-2\mu+4U} \Gamma^2, \\ T_2 = & e^{2(\mu-U)} S_{23} + R^2 e^{2(\mu-U)} \Gamma H_t; \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} T_1 \leq & R e^{2(\mu-U)}(\rho - P_1) + \frac{R}{2} e^{-2\mu+4U} \Gamma^2, \\ |T_2| \leq & \frac{1}{2} e^{2(\mu-U)}(\rho - P_1) + \frac{R^2}{2} e^{2(\mu-U)}(\Gamma^2 + H_t^2). \end{aligned}$$

Consequently, relations (3.15) and (3.16) are respectively replaced by

$$\begin{aligned} R_\xi(t_0, \theta + t_0 - t) - R_\xi(t, \theta) = & \frac{1}{2} \int_t^{t_0} [R e^{2(\mu-U)}(\rho - P_1) \\ & + \frac{R e^{-2\mu}}{2} (e^{4U} \Gamma^2 + R^2 H_t^2)](s, \theta + t_0 - s) ds, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} R_\tau(t_0, \theta - t_0 + t) - R_\tau(t, \theta) = & \frac{1}{2} \int_t^{t_0} [R e^{2(\mu-U)}(\rho - P_1) \\ & + \frac{R e^{-2\mu}}{2} (e^{4U} \Gamma^2 + R^2 H_t^2)](s, \theta - t_0 + s) ds. \end{aligned} \tag{4.15}$$

This permits as in Step 2 to obtain bounds on A , U , and their first derivatives. The bounds of μ and its first derivatives follow from relations (3.26) or (3.27) replaced by

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mu_\xi = & U_\theta^2 - U_t^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2}(A_t^2 - A_\theta^2) - \frac{e^{-2\mu+4U}}{4} R \Gamma^2 - \frac{3R^2 e^{-2\mu}}{4} H_t^2 \\ & - e^{2(\mu-U)} P_3 - \frac{A^2}{R^2} e^{2(\mu+U)} P_2 - \frac{2A}{R} e^{2\mu} S_{23}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} \partial_\xi \mu_\tau = & U_\theta^2 - U_t^2 + \frac{e^{4U}}{4R^2}(A_t^2 - A_\theta^2) - \frac{e^{-2\mu+4U}}{4} R \Gamma^2 - \frac{3R^2 e^{-2\mu}}{4} H_t^2 \\ & - e^{2(\mu-U)} P_3 - \frac{A^2}{R^2} e^{2(\mu+U)} P_2 - \frac{2A}{R} e^{2\mu} S_{23}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Under the assumption $|\phi_t| \leq |\phi_\theta|$, we deduce that

$$e^{2(\mu-U)} P_k \leq e^{2(\mu-U)}(\rho - P_1) + \frac{1}{2} e^{2(-\mu+U)}(\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - 3V(\phi) \leq e^{2(\mu-U)}(\rho - P_1) \tag{4.18}$$

Using inequalities (3.12), (4.18) and the fact that the right hand sides of (4.14), (4.15) are bounded (Step 7), we conclude that the integral along null paths for the matter terms in the right hand sides of (4.16), (4.17) are bounded since A , U , A_t , A_θ , U_t , U_θ are bounded. We obtain that $|\mu_\xi|$ and $|\mu_\tau|$ are bounded and therefore μ_t and μ_θ are bounded.

Step 9 Bounds on G , H , their derivatives, and the support of the momentum.

Consider the characteristic system associated to the Vlasov equation (4.13). It is analogous to the one in Step 3, except the term $-e^{-\mu}(e^{2\mu}\Gamma V^2 + RH_t V^3)$ which is added in the second hand of the second equation $\frac{dV^1}{ds}$ of the system. Since $|V^k| < V^0, k = 1, 2, 3$, the integration and Gronwall’s lemma applied respectively to the third and fourth equations of this system give with previous Steps (7 and 8) uniform bounds of $|V^k(t)|, k = 2, 3$ on (t, t_0) . So, we can conclude that $\text{Sup}\{|V^2|+|V^3|+1 : \exists(s, r, v^1) \in [0, t] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \text{ with } f(s, r, v) \neq 0\}$ is also uniformly bounded. Now, define $Q^1(t) = \text{Sup}\{|V^1| + 1 : \exists(s, r, v^2, v^3) \in [0, t] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \text{ with } f(s, r, v) \neq 0\}$. Now integrate the second equation of the characteristic system and use Steps 7 and 8 and the fact that $|V^k| < V^0, |V^k| < C$ to obtain

$$Q^1(t) \leq Q^1(t_0) + C \int_{t_1}^{t_0} [Q^1(s) + \sup_{\theta} |\Gamma|(s, \theta) + \sup_{\theta} |H_t|(s, \theta)] ds. \tag{4.19}$$

Add and subtract respectively auxiliary equations (4.9)–(4.10) to obtain

$$\begin{aligned} \partial_{\xi}(Re^{-2(\mu-2U)}\Gamma) &= 2Re^{\mu}(S_{12} - J_2), \\ \partial_{\tau}(Re^{-2(\mu-2U)}\Gamma) &= 2Re^{\mu}(S_{12} + J_2). \end{aligned}$$

Integrating along null paths and previous steps give

$$\sup_{\theta} |\Gamma|(t, \theta) \leq \sup_{\theta} |\Gamma|(t_0, \theta) + C \int_{t_1}^{t_0} [1 + Q^1(s)] ds. \tag{4.20}$$

Analogously, (4.11)–(4.12) give

$$\sup_{\theta} |H_t|(t, \theta) \leq \sup_{\theta} |H_t|(t_0, \theta) + C \int_{t_1}^{t_0} [1 + Q^1(s) + \sup_{\theta} |\Gamma|(s, \theta)] ds. \tag{4.21}$$

Adding (4.19)–(4.21) and applying Gronwall’s lemma give uniform bounds on H_t, Γ , and $Q^1(t)$. Then H, G_t , and G are bounded. From (4.11), we deduce bounds on $H_{t\theta}$ and then on H_{θ} . Consequently, (4.9) gives bounds on $G_{t\theta}$ and then on G_{θ} . We deduce respectively from (4.12) and (4.10) the bounds on H_{tt} and G_{tt} . Since $Q^1(t)$ and V^k are bounded, the integral terms of the matter quantities are also bounded.

Step 10 Bounds on ϕ and its first derivatives.

Define

$$M = \frac{1}{2}R(\phi_t^2 + \phi_{\theta}^2) + \frac{R}{2}\phi^2; \quad N = R\phi_t\phi_{\theta}.$$

After some calculation and using (4.8), we obtain

$$\begin{aligned} \partial_{\tau}(M + N) &= \frac{R_{\tau}}{R}(M + N) - R\phi_{\xi}(E\phi_t + F\phi_{\theta} + e^{2(\mu-U)}V'(\phi)) + R\phi_{\tau}\phi, \\ \partial_{\xi}(M - N) &= \frac{R_{\xi}}{R}(M - N) - R\phi_{\tau}(E\phi_t + F\phi_{\theta} + e^{2(\mu-U)}V'(\phi)) + R\phi_{\xi}\phi. \end{aligned}$$

Integrating these along null paths and adding results give

$$\begin{aligned} M(t_1, \theta) &= \frac{1}{2}(M + N)(t_0, \theta - (t_0 - t_1)) + \frac{1}{2}(M - N)(t_0, \theta + (t_0 - t_1)) \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_0} [R\phi_{\xi}(E\phi_t + F\phi_{\theta})(s, \theta - (s - t_1)) + R\phi_{\tau}(E\phi_t + F\phi_{\theta})(s, \theta + (s - t_1))] ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_0} [(R\phi_{\xi}e^{2(\mu-U)}V'(\phi) - R\phi_{\tau}\phi)(s, \theta - (s - t_1)) \\ &\quad + (R\phi_{\tau}e^{2(\mu-U)}V'(\phi) - R\phi_{\xi}\phi)(s, \theta - (s - t_1))] ds. \end{aligned}$$

Following previous Steps 7, 8, and 9, we have

$$\sup_{\theta} M(t, \theta) \leq \sup_{\theta} M(t_0, \theta) + C \int_{t_1}^{t_0} \sup_{\theta} M(s, \theta) ds. \tag{4.22}$$

We deduce by Gronwall’s lemma the uniform bounded of $\sup_{\theta} M(t, \theta)$ which leads to the bounds of $\phi, \phi_t, \phi_{\theta}$, and $V(\phi)$.

Step 11 Following Steps 4, 5, and 6, ones obtains with minor changes, bounds on the first-order derivatives of matter quantities, second and higher order derivatives of field components and matter quantities.

We conclude this section by the following theorem:

Theorem 4.1 *Let $(T^3, \mu_0, \mu_1, A_0, A_1, U_0, U_1, G_0, G_1, H_0, H_1, f_0, \phi_0, \phi_1)$ be regular initial data that satisfy the constraint equations (4.2)–(4.3) where the metric is coordinatized as in (4.1). Let (g, f, ϕ) be the local regular solution that corresponds to the initial data and $]T, t_0[$ be the maximal interval of existence. There exists a globally hyperbolic spacetime (M, g, f, ϕ) such that*

- (i) $M = [0, t_0[\times T^3$,
- (ii) (g, f, ϕ) satisfies the Einstein-Vlasov-scalar field system in areal coordinates,
- (iii) (M, g, f, ϕ) is isometrically diffeomorphic to the maximal globally hyperbolic development of the initial data $(T^3, \mu_0, \mu_1, A_0, A_1, U_0, U_1, G_0, G_1, H_0, H_1, f_0, \phi_0, \phi_1)$.

5 Geodesic Completeness

Consider a solution $s \mapsto (x^{\alpha}(s), p^{\alpha}(s))$ of the trajectory equations (2.10) which exists on the maximal interval $I =]s_-, s_+[$. Since particles are future pointing, we have $\frac{dt}{ds} = p^0 > 0$. We can then parameterize the trajectory by the time coordinate $t \in I$ and obtain the system:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{p^i}{p^0}; \quad \frac{dp^i}{dt} = -\Gamma^i_{\beta\gamma} \frac{p^{\beta} p^{\gamma}}{p^0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Since $\text{supp} f$ is compact, the right hand side of the previous system is linearly bounded in p^i with respect to the two directions of time (see [14] for the future direction). Thus, $t(s_{\pm}) = \pm\infty$. Now, due to the inequality $\frac{dt}{ds} = p^0 \leq C$, one obtains by integration

$$\int_0^s dt \leq C \int_0^s ds' \text{ i.e., } t(s) - t(0) \leq Cs.$$

Thus, $s_{\pm} = \pm\infty$, and $I = \mathbb{R}$. We conclude that geodesics are complete for the Einstein-Vlasov-scalar field system with Gowdy or T^2 symmetry.

Acknowledgements Comments of the anonymous referee are gratefully acknowledged by the authors.

References

1. Andréasson, H.: Global foliations of matter spacetimes with Gowdy symmetry. *Comm. Math. Phys.* **206**(2), 337–365 (1999)

2. Andréasson, H., Rein, G., Rendall, A.D.: On the Einstein-Vlasov system with hyperbolic symmetry. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **124**(3), 529–549 (2003)
3. Berger, B.K., Chruściel, P., Isenberg, J., Moncrief, V.: Global foliations of vacuum spacetimes with T^2 isometry. *Ann. Phys.* **260**(1), 117–148 (1997)
4. Ehlers, J. In: Israel, W. (ed.): *A Survey of General Relativity Theory Astrophysics and Cosmology*, pp. 1–125. Reidel, Dordrecht (1973)
5. Choquet-Bruhat, Y.: Problème de Cauchy pour le système intégral-différentiel d'Einstein-Liouville. *Ann. Inst. Fourier* **21**(3), 181–201 (1971)
6. Choquet-Bruhat, Y., Geroch, R.: Global aspects of the Cauchy problem in general relativity. *Comm. Math. Phys.* **14**, 329–335 (1969)
7. Chruściel, P.T.: On space-times with $U(1) \times U(1)$ symmetric compact Cauchy surfaces. *Ann. Phys.* **202**(1), 100–150 (1990)
8. Gowdy, R.H.: Vacuum spacetimes with two-parameter spacelike isometry groups and compact invariant hypersurfaces: topologies and boundary conditions. *Ann. Phys.* **83**, 203–241 (1974)
9. Ringström, H.: Future stability of the Einstein non-linear scalar field system. *Invent. Math.* **173**(1), 123–208 (2008)
10. Straumann, N.: On the cosmological constant problems and the astronomical evidence for a homogeneous energy density with negative pressure. In: Duplantier, B., Rivasseau, V. (eds.) *Vacuum Energy-Renormalization, Poincaré Seminar*. Birkhauser, Basel (2002)
11. Smulevici, J.: On the area of the symmetry orbits of cosmological spacetimes with toroidal or hyperbolic symmetry. *Anal. PDE.* **4**(2), 191–245 (2011)
12. Tegankong, D.: On the area of the symmetry orbits of the Einstein-Vlasov-scalar field system with plane and hyperbolic symmetry. *J. Inform. Math. Sci.* **5**(3), 131–142 (2013)
13. Tegankong, D., Rendall, A.D.: On the nature of initial singularities for solutions of the Einstein-Vlasov-scalar field system with surface symmetry. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **141**(3), 547–562 (2006)
14. Tegankong, D.: The Einstein-Vlasov-scalar field system with Gowdy symmetry in the expanding direction. *Classical Quantum Gravity* **31**, 18pp (2014)
15. Weaver, M.: On the area of the symmetry orbits in T^2 symmetric spacetimes with Vlasov matter. *Classical Quantum Gravity* **21**(4), 1079–1097 (2004)

Local existence in T^2 symmetry contracting direction for the Einstein-Vlasov system with scalar field

A. T. Lassiye¹ and D. Tegankong²

¹ Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Yaounde 1,
PO Box 812, Yaounde, Cameroon

e-mail : ltchuani@gmail.com/ tchuanifils@yahoo.fr

²Department of Mathematics, Advanced Teacher Training College,
University of Yaounde 1, PO Box 47, Yaounde Cameroon

e-mail : dtegangkong@yahoo.fr

Abstract

The Einstein-Vlasov-scalar field system (EVSFS) describes the evolution of self-gravitating collisionless matter and scalar waves within the context of general relativity. We prove in the case of contracting T^2 symmetry, a local in time existence theorem in the case of cosmological models for this system. The sources of the equations are generated by a distribution function and a scalar field, subject to the Vlasov and the wave equations respectively.

Keywords: General relativity; Einstein equations; Vlasov equation; Scalar field; T^2 symmetry; conformal coordinates; local existence.

MSC2020: 83C05, 83C20, 35A01, 35A02, 35L40, 35L45, 35Q83.

1 Introduction

The question of global existence solutions of Einstein equations with matter or not is very important in the mathematical study of general relativity. An essential tool in an investigation of this type is a local in time existence theorem. In this paper a theorem of this kind is proved for one particular choice of matter model such as collision-less matter described by the Vlasov equation and a scalar field for the cosmological case.

In [10] local in time cosmological solutions of the Einstein Vlasov system with massless scalar field in surface symmetry written in areal coordinates is obtained. These result is adapted here in the case of T^2 symmetry with nonlinear

scalar field in the passed direction in conformal coordinates. There are several reasons why it is of interest to look at the case of a scalar field (cf [10] and references therein). Spacetimes with T^2 symmetry have received much attention by different authors for last years. For example in [3], [9] and [11], global existence result was proved in the case of Einstein-Vlasov system using fundamental local existence in time result of Choquet in [5]. There are three types of time coordinates which have been studied in the inhomogeneous Einstein-Vlasov system case : constant mean curvature, areal and conformal. A constant mean curvature time coordinate t is one where each hypersurface of constant time has constant mean curvature and on each hypersurface of this kind the value of t is the mean curvature of that slice. In the case of areal coordinates the time coordinate is a function of (or is taken to be proportional to) the area of the surfaces of symmetry. In the case of conformal coordinates the metric is conformally flat on a two-dimensional Lorentzian manifold which is the quotient of spacetime by the symmetry group. The time coordinate $R = t$ is the area of the symmetry orbits. Conformal coordinates has advantages to simplify estimations of solutions. By a long chain of geometrical arguments as in [4], ones deduce the local foliations in the past time direction of the spacetime by areal coordinates system.

The paper proceeds as follows. In section 2, we present in T^2 symmetry the system in conformal coordinates. Section 3 is devoted to a priori estimations of unknowns functions and their derivatives. Section 4 deals on local in time existence of solution based on Picard's iterations.

Let us now recall the formulation of the Einstein-Vlasov-scalar field system. The spacetime is a four-dimensional manifold M , with local coordinates $(x^\lambda) = (t, x^i)$ on which $x^0 = t$ denotes the time and (x^i) the space coordinates. Greek indices always run from 0 to 3, and Latin ones from 1 to 3. On M , a Lorentzian metric g is given with signature $(-, +, +, +)$. We consider a self-gravitating collision-less gas and restrict ourselves to the case where all particles have the same rest mass $m = 1$, and move forward in time. We denote by (p^λ) the momenta of the particles. The conservation of the quantity $g_{\lambda\beta}p^\lambda p^\beta$ requires that the phase space of the particle is the seven-dimensional sub-manifold

$$PM = \{g_{\mu\eta}p^\mu p^\eta = -1; p^0 > 0\}$$

of TM which is coordinatized by (t, x^i, p^i) . The energy-momentum tensor is given by

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^f + T_{\mu\nu}^\phi \quad (1.1)$$

with:

$$T_{\alpha\beta}^f = - \int_{\mathbb{R}^3} f p_\alpha p_\beta |g|^{1/2} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{p_0} \quad (1.2)$$

$$T_{\alpha\beta}^\phi = \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi + 2V(\phi)) \quad (1.3)$$

where the distribution function of the particles is a non-negative real-valued function denoted by f defined on PM . $p_\lambda = g_{\lambda\beta}p^\beta$, $|g|$ denotes the modulus

of determinant of the metric g . A scalar field ϕ is a real-valued C^∞ function on M with nonlinear potential $V \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ which satisfies $V(0) = V_0 > 0$, $V'(0) = 0$ and $V''(0) > 0$ (see [8]). On PM we have

$$p^0 = \sqrt{-g^{00}} \sqrt{1 + g_{ab} p^a p^b}$$

The Einstein field equations are given by

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

where $R_{\mu\nu}$ and R are respectively the Ricci tensor and scalar curvature of metric g . The Einstein field equations are coupled to the Vlasov equation (matter equation for f) and to the wave equation (matter equation for ϕ), which are respectively

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\gamma}^i p^\nu p^\gamma \frac{\partial f}{\partial p^i} = 0 \quad (1.5)$$

$$\nabla^\lambda \nabla_\lambda \phi = V'(\phi). \quad (1.6)$$

Equation (1.6) is a consequence of the divergence-free of the energy-momentum tensor due to the Bianchi identities and since the contribution of f to the energy-momentum tensor is divergence-free.

2 Equations

We refer to [1] for details on the notion of T^2 symmetry. There are several choices of spacetime manifolds compatible with T^2 symmetry. We restrict our attention to the T^3 case. Space-times admitting a T^2 isometry group acting on T^3 space-like surfaces are more general than the T^2 space-times: both families admit two commuting Killing vectors. We consider the case where all unknowns are invariant under the T^2 symmetry with the twists different from zero ([9], [11]). The dynamics of the matter is governed by the Vlasov and the non-linear wave equations. The Vlasov equation models a collision-less system of particles which follow the geodesics of spacetime.

We now consider a solution of the Einstein-Vlasov-scalar field system where all unknowns are invariant under this symmetry. We write the system in conformal coordinates. The circumstances under which coordinates of this type exist are discussed in [1] and references therein. In such coordinates, the metric g takes the form (cf [1], [9], [7])

$$ds^2 = e^{2(\tau-\mu)}(-dt^2 + d\theta^2) + e^{2\mu}[dx + A dy + (G + AH)d\theta]^2 + e^{-2\mu} R^2 [dy + H d\theta]^2 \quad (2.1)$$

where μ , τ , R , G , H and A are unknown real functions of t and θ variables. R is periodic in θ with period 2π . The timelike coordinate t locally labels spatial hypersurfaces of the spacetime. The scalar field is a real function of t and θ . Let us introduce new quantities

$$J = -R e^{-2\tau-4\mu}(G_t + AH_t), \quad K = AJ - R^3 e^{-2\tau} H_t, \quad \Gamma = G_t + AH_t. \quad (2.2)$$

Using the results of [7] and [9], the complete EVSFS can be written in the following form :

The Vlasov equation

$$\begin{aligned} & \left[(\tau_\theta - \mu_\theta)v^0 + (\tau_t - \mu_t)v^1 + \mu_\theta \frac{(v^2)^2}{v^0} + \left(\mu_\theta - \frac{R_\theta}{R}\right) \frac{(v^3)^2}{v^0} - \frac{A_\theta}{R} e^{2\mu} \frac{v^2 v^3}{v^0} \right] \frac{\partial f}{\partial v^1} \\ & + e^{-\tau} (e^{2\tau} \Gamma v^2 + R H_t v^3) \frac{\partial f}{\partial v^1} - \frac{v^1}{v^0} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \left[\mu_t v^2 + \mu_\theta \frac{v^1 v^2}{v^0} \right] \frac{\partial f}{\partial v^2} - \frac{\partial f}{\partial t} \\ & + \left[\left(\frac{R_t}{R} - \mu_t \right) v^3 + \left(\mu_\theta - \frac{R_\theta}{R} \right) \frac{v^1 v^3}{v^0} + \frac{e^{2\mu} v^2}{R} (A_t + A_\theta \frac{v^1}{v^0}) \right] \frac{\partial f}{\partial v^3} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

The Einstein-matter constraint equations

$$\begin{aligned} \mu_t^2 + \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2} (A_t^2 + A_\theta^2) + \frac{R_{\theta\theta}}{R} - \frac{\tau_t R_t}{R} - \frac{\tau_\theta R_\theta}{R} \\ = -\frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4} \Gamma^2 - \frac{e^{-2\tau}}{4} H_t^2 - e^{2(\tau-\mu)} \rho \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$2\mu_t \mu_\theta + \frac{e^{4\mu}}{2R^2} A_t A_\theta + \frac{R_{t\theta}}{R} - \frac{\tau_t R_\theta}{R} - \frac{\tau_\theta R_t}{R} = e^{2(\tau-\mu)} J_1 \quad (2.5)$$

The Einstein-matter evolution equations

$$\begin{aligned} \mu_{tt} - \mu_{\theta\theta} &= \frac{\mu_\theta R_\theta}{R} - \frac{\mu_t R_t}{R} + \frac{e^{4\mu}}{2R^2} (A_t^2 - A_\theta^2) + \frac{e^{4\mu-2\tau}}{2} \Gamma^2 \\ &+ \frac{e^{4\mu-2\tau}}{2} (\rho - P_1 + P_2 - P_3) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$A_{tt} - A_{\theta\theta} = \frac{A_t R_t}{R} - \frac{A_\theta R_\theta}{R} + 4(A_\theta \mu_\theta - A_t \mu_t) + R^2 e^{-2\tau} \Gamma H_t + 2R e^{2(\tau-2\mu)} S_{23} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \tau_{tt} - \tau_{\theta\theta} &= \mu_\theta^2 - \mu_t^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2} (A_t^2 - A_\theta^2) - \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4} \Gamma^2 - \frac{3R^2 e^{-2\tau}}{4} H_t^2 \\ &- e^{2(\tau-\mu)} P_3 - \frac{2A}{R} e^\tau S_{23} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$R_{tt} - R_{\theta\theta} = R e^{2(\tau-\mu)} (\rho - P_1) + \frac{R e^{-2\tau+4\mu}}{2} \Gamma^2 + \frac{R^3 e^{-2\tau}}{2} H_t^2 \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \phi_{tt} - \phi_{\theta\theta} &= \phi_\theta [-4\mu_\theta H^2 R^2 e^{-2\tau} + \frac{R_\theta}{R} + 2A_\theta H (G - R)] \\ &- \mu_\theta (G + AH)^2 e^{-2(\tau-2\mu)} - \frac{\phi_t R_t}{R} - e^{-2(\tau-\mu)} S_{13} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Auxiliary equations

$$\partial_\theta (R e^{-2\tau+4\mu} \Gamma) = -2R e^\tau J_2 \quad (2.11)$$

$$\partial_t (R e^{-2\tau+4\mu} \Gamma) = 2R e^\tau S_{12} \quad (2.12)$$

$$\partial_\theta (R^3 e^{-2\tau} H_t) + R e^{-2\tau+4\mu} A_\theta \Gamma = -2R^2 e^{\tau-2\mu} J_3 \quad (2.13)$$

$$\partial_t (R^3 e^{-2\tau} H_t) + R e^{-2\tau+4\mu} A_t \Gamma = 2R^2 e^{\tau-2\mu} S_{13}. \quad (2.14)$$

Since all the particles have proper mass 1, the new variables v^λ are related to the canonical momentum variables p^λ by relations :

$$(v^0)^2 = e^{2(\tau-\mu)}(p^0)^2; \quad (v^1)^2 = e^{2(\tau-\mu)}(p^1)^2; \\ (v^2)^2 = e^{2\mu}[(G + AH)p^1 + p^2 + Ap^3]^2; \quad (v^3)^2 = R^2 e^{-2\mu}(Hp^1 + p^3)^2; \quad \text{so that}$$

$$v^0 = \sqrt{1 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2} > 0$$

The matter terms are then defined by:

$$\rho(t, \theta) = -g^{00}T_{00} = \int_{\mathbb{R}^3} v^0 f(t, \theta, v) dv + \frac{1}{2} e^{-2(\tau-\mu)} (\phi_t^2 + \phi_\theta^2) + V(\phi) \quad (2.15)$$

$$J_1(t, \theta) = -g^{11}T_{01} = \int_{\mathbb{R}^3} v^1 f(t, \theta, v) dv - e^{-2(\tau-\mu)} \phi_t \phi_\theta \quad (2.16)$$

$$J_k(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} v^k f(t, \theta, v) dv, \quad k \in \{2, 3\} \quad (2.17)$$

$$P_1(t, \theta) = g^{11}T_{11} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(v^1)^2}{v^0} f(t, \theta, v) dv + \frac{1}{2} e^{-2(\tau-\mu)} (\phi_t^2 + \phi_\theta^2) - V(\phi) \quad (2.18)$$

$$P_2(t, \theta) = e^{-2\mu}T_{22} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(v^2)^2}{v^0} f(t, \theta, v) dv + \frac{1}{2} e^{-2(\tau-\mu)} (\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - V(\phi) \quad (2.19)$$

$$P_3(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(v^3)^2}{v^0} f(t, \theta, v) dv + \frac{1}{2} e^{-2(\tau-\mu)} (\phi_t^2 - \phi_\theta^2) - V(\phi) \quad (2.20)$$

$$S_{jk}(t, \theta) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v^j v^k}{v^0} f(t, \theta, v) dv, \quad j \neq k. \quad (2.21)$$

and

$$T_{33} = A^2 e^{2\mu} P_2 + 2ARS_{23} + R^2 e^{-2\mu} P_3$$

We prescribe initial data at time $t = t_0 > 0$ by

$$(f, R, \tau, \mu, A, H, G, \phi)(t_0) = (\overset{\circ}{f}, \overset{\circ}{R}, \overset{\circ}{\tau}, \overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{H}, \overset{\circ}{G}, \overset{\circ}{\phi}) \text{ and } (\dot{R}, \dot{\tau}, \dot{\mu}, \dot{A}, \dot{H}, \dot{G}, \dot{\phi})(t_0) = (\bar{R}, \bar{\tau}, \bar{\mu}, \bar{A}, \bar{H}, \bar{G}, \bar{\psi}), \text{ where } \bar{R} = R_t, \dots$$

Let us now remind some regularity definitions which are necessary in the next sections.

Definition 2.1 *Let $I \subseteq]0; +\infty[$ be an interval and $(t, \theta) \in I \times S^1$.*

1. $f \in C^1(I \times S^1 \times \mathbb{R}^3)$ is regular if $f(t, \theta + 2\pi, v) = f(t, \theta, v)$, $f \geq 0$ and $\text{supp}f(t, \theta, \dots, \dots)$ is uniformly compact in θ and locally uniformly compact in t .
2. $\phi \in C^2(I \times S^1)$ is regular if $\phi(t, \theta + 2\pi) = \phi(t, \theta)$.
3. Each component $\chi \in C^2(I \times S^1)$ of metric is regular if $\chi(t, \theta + 2\pi) = \chi(t, \theta)$ and $\partial_t \chi, \partial_\theta \chi \in C^1(I \times S^1)$.
4. ρ (or P_k, J_k, S_{jk}) $\in C^1(I \times S^1)$ is regular if $\rho(t, \theta + 2\pi) = \rho(t, \theta)$.

3 Estimations

In order to obtain local existence in time solution, it is necessary to obtain a priori estimations and uniform bounds on the field components, the distribution function, the scalar field and all their derivatives on a finite time interval $[t_1, t_2]$ on which the local solution can exist. The method and results obtained here are similar to those in [7] and [1].

Let us introduce the null vector fields

$$\partial_\sigma := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t + \partial_\theta) \text{ and } \partial_\lambda := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t - \partial_\theta).$$

For any function F of variables t and θ , set

$$F_\sigma := \partial_\sigma F := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t F + \partial_\theta F) := \hat{F} \text{ and } F_\lambda := \partial_\lambda F := \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t F - \partial_\theta F) := \check{F}.$$

Step 1 Monotonicity of R and bounds on its first derivatives.

After some calculation, the constraints equations (2.4) and (2.5) give respectively

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\partial_\theta R_\sigma &= 2\tau_\sigma R_\sigma - 2R\mu_\sigma^2 - \frac{e^{4\mu}}{2R^2}A_\sigma^2 - Re^{2(\tau-\mu)}(\rho - J_1) \\ &\quad - \frac{R}{4}e^{-2\tau+4\mu}\Gamma^2 - \frac{R^3e^{-2\tau}}{4}H_t^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\partial_\theta R_\lambda &= -2\tau_\lambda R_\lambda + 2R\mu_\lambda^2 + \frac{e^{4\mu}}{2R^2}A_\lambda^2 + Re^{2(\tau-\mu)}(\rho + J_1) \\ &\quad + \frac{R}{4}e^{-2\tau+4\mu}\Gamma^2 + \frac{R^3e^{-2\tau}}{4}H_t^2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

It follows from (2.15) and (2.16), that $\rho \geq |J_1|$ (in fact $V(\phi) \geq 0$) and also $R > 0$, so

$$\partial_\theta R_\sigma = \sqrt{2}\tau_\sigma R_\sigma - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathfrak{h}_1 < \sqrt{2}\tau_\sigma R_\sigma \quad (3.3)$$

$$\partial_\theta R_\lambda = -\sqrt{2}\tau_\lambda R_\lambda + \mathfrak{h}_2 > -\sqrt{2}\tau_\lambda R_\lambda \quad (3.4)$$

where

$$\mathfrak{h}_1 = \frac{e^{4\mu}}{2R}A_\sigma^2 + R\mu_\sigma^2 + R \left[e^{2(\tau-\mu)}(\rho - J_1) + \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 + \frac{R^2e^{-2\tau}}{4}H_t^2 \right] \quad (3.5)$$

$$\mathfrak{h}_2 = R\mu_\lambda^2 + \frac{e^{4\mu}}{2R}A_\lambda^2 + R \left[e^{2(\tau-\mu)}(\rho + J_1) + \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 + \frac{R^2e^{-2\tau}}{2\sqrt{2}}H_t^2 \right] \quad (3.6)$$

As in [7], we obtain after integration,

$$\sqrt{2}R_t(t, \theta) \leq R_\sigma(t_0, \theta + t - t_0) + R_\lambda(t_0, \theta - t + t_0) \leq \sup_{\theta \in S^1} (R_\sigma + R_\lambda)(t_0, \theta). \quad (3.7)$$

and deduce that R_t is bounded into the past and $|R_\theta|$ is also bounded. Consequently, R is uniformly bounded to the past of the initial surface.

Step 2 Bounds on μ , A , τ , ϕ and their first derivatives.

We use the light-cone argument and Gronwall's lemma in this step. The functions involved in this case are quadratic and defined by

$$X = \frac{1}{2}R(\mu_t^2 + \mu_\theta^2) + \frac{e^{4\mu}}{8R}(A_t^2 + A_\theta^2) + \frac{1}{2}[R(\phi_t^2 + \phi_\theta^2) + \phi^2] \quad (3.8)$$

$$Y = R\mu_t\mu_\theta + \frac{e^{4\mu}}{4R}A_tA_\theta + R\phi_t\phi_\theta \quad (3.9)$$

Using (2.6) – (2.7) and (2.10) we find respectively after a lengthy calculation that

$$\begin{aligned} \partial_\lambda(X + Y) &= -\frac{1}{2}R_\sigma \left(\mu_t^2 - \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(-A_t^2 + A_\theta^2) + \phi_t^2 - \phi_\theta^2 \right) \\ &\quad - Re^{2(\tau-\mu)}\phi_\sigma V'(\phi) + \frac{R}{2}\mu_\sigma \left(e^{-2\tau+4\mu}\Gamma^2 + e^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1 + P_2 - P_3) \right) \\ &\quad + \frac{e^{4\mu}}{2R}A_\sigma(R^2e^{2(\mu-\tau)}\Gamma H_t + 2Re^{2(\tau-\mu)}S_{23}) + \phi\phi_\lambda \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

and

$$\begin{aligned} \partial_\sigma(X - Y) &= -\frac{1}{2}R_\lambda \left(\mu_t^2 - \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(-A_t^2 + A_\theta^2) + \phi_t^2 - \phi_\theta^2 \right) \\ &\quad - Re^{2(\tau-\mu)}\phi_\lambda V'(\phi) + \frac{R}{2}\mu_\lambda \left(e^{-2\tau+4\mu}\Gamma^2 + e^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1 + P_2 - P_3) \right) \\ &\quad + \frac{e^{4\mu}}{2R}A_\lambda(R^2e^{2(\mu-\tau)}\Gamma H_t + 2Re^{2(\tau-\mu)}S_{23}) + \phi\phi_\sigma \quad . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Integrating each of the above equations along null paths $t \mapsto (t, \theta - t_0 + t)$ and $t \mapsto (t, \theta + t_0 - t)$ starting at (t_1, θ) and ending at the initial t_0 -surface, and adding the results we obtain

$$\begin{aligned} X(t_1, \theta) &= \frac{1}{2}(X + Y)(t_0, \theta - (t_0 - t_1)) + \frac{1}{2}(X - Y)(t_0, \theta + t_0 - t_1) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} [\chi_1(s, \theta - (s - t_1)) + \chi_2(s, \theta + s - t_1)] ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} \left[\left(\frac{e^{4\mu}}{2R} A_\sigma \zeta_2 \right)(s, \theta - (s - t_1)) + \left(\frac{e^{4\mu}}{2R} A_\lambda \zeta_2 \right)(s, \theta + s - t_1) \right] ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_0} \left[(\mu_\sigma \zeta_1)(s, \theta - (s - t_1)) + (\mu_\lambda \zeta_1)(s, \theta + s - t_1) \right] ds \quad (3.12) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\chi_1 &= -\frac{1}{2}R_\sigma \left(\mu_t^2 - \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(-A_t^2 + A_\theta^2) + \phi_t^2 - \phi_\theta^2 \right) \\ &\quad - \frac{R_t}{\sqrt{2}}\phi_t^2 + \frac{R_\theta}{\sqrt{2}}\phi_\theta^2 + \phi\phi_\lambda - R\phi_\sigma e^{2(\tau-\mu)}V'(\phi)\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\chi_2 &= -\frac{1}{2}R_\lambda \left(\mu_t^2 - \mu_\theta^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(-A_t^2 + A_\theta^2) + \phi_t^2 - \phi_\theta^2 \right) \\ &\quad - \frac{R_t}{\sqrt{2}}\phi_t^2 + \frac{R_\theta}{\sqrt{2}}\phi_\theta^2 + \phi\phi_\sigma - R\phi_\lambda e^{2(\tau-\mu)}V'(\phi)\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\zeta_1 = \frac{R}{2} \left(e^{-2\tau+4\mu}\Gamma^2 + e^{2(\tau-\mu)}(\rho - P_1 + P_2 - P_3) \right) \quad (3.15)$$

$$\zeta_2 = R^2 e^{2(\mu-\tau)}\Gamma H_t + 2R e^{2(\tau-\mu)}S_{23} \quad (3.16)$$

It follows from Step 1 and Step 2 of [7], the uniform bound of

$$\int_t^{t_0} \zeta_1(s, \theta \pm (t_0 - s)) ds \quad \text{and} \quad \int_t^{t_0} |\zeta_2|(s, \theta \pm (t_0 - s)) ds \quad (3.17)$$

Using Step 8 of [7], we conclude that $\sup_{S^1} X$ is uniformly bounded on (t_1, t_0) , leading to bounds on μ , A , ϕ , $V(\phi)$ and their first derivatives. The bounds of τ and its first derivatives are obtained in a similar way since (2.8) can be written as

$$2\partial_\sigma\tau_\lambda = 2\partial_\lambda\tau_\sigma = \mu_\theta^2 - \mu_t^2 + \frac{e^{4\mu}}{4R^2}(A_t^2 - A_\theta^2) - \frac{e^{-2\tau+4\mu}}{4}\Gamma^2 - \frac{3R^2e^{-2\tau}}{4}H_t^2 - e^{2(\tau-\mu)}P_3 \quad (3.18)$$

The integrals along the null paths for the matter terms in the right hand side of (3.18) is bounded since A , μ , ϕ and their first derivatives are bounded. We obtain that τ_λ and τ_σ are bounded, and therefore

$$\tau_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_\sigma + \tau_\lambda), \quad \tau_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_\sigma - \tau_\lambda) \quad \text{and} \quad \tau \text{ are bounded.}$$

Step 3 Bounds on G , \mathring{H} their derivatives and the support of the momentum. A solution f to the Vlasov equation is given by

$$f(t, \theta, v) = f_0(\Theta(t_0, t, \theta, v), V(t_0, t, \theta, v)) := \overset{\circ}{f}(\Theta(t_0, t, \theta, v), V(t_0, t, \theta, v)),$$

where Θ and V are solutions to the characteristic system

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{ds} = \frac{V^1}{V^0} \\ \frac{dV^1}{ds} = -(\tau_\theta - \mu_\theta)V^0 - (\tau_s - \mu_s)V^1 - \mu_\theta \frac{(V^2)^2}{V^0} + \left(\mu_\theta - \frac{R_\theta}{R}\right) \frac{(V^3)^2}{V^0} \\ \quad + \frac{A_\theta}{R} e^{2\mu} \frac{V^2 V^3}{V^0} - e^{-\tau} (e^{2\tau} \Gamma V^2 + R H_s V^3) \\ \frac{dV^2}{ds} = -\mu_s V^2 - \mu_\theta \frac{V^1 V^2}{V^0} \\ \frac{dV^3}{ds} = \left(\frac{R_s}{R} - \mu_s\right) V^3 + \left(\mu_\theta - \frac{R_\theta}{R}\right) \frac{V^1 V^3}{V^0} + \frac{e^{2\mu} V^2}{R} (A_s + A_\theta \frac{V^1}{V^0}) \end{cases}$$

with $\Theta(t_0, t, \theta, v) = \theta$ and $V(t_0, t, \theta, v) = v$. Since $\|f\|_\infty \leq \|\overset{\circ}{f}\|_\infty$, the control of

$$Q(t) := \sup\{|v| : \exists (s, \theta) \in [t, t_0] \times S^1 ; f(s, \theta, v) \neq 0\} \quad (3.19)$$

gives directly using equations (2.15) – (2.21), bounds of ρ , J_k , P_k et S_{jk} , $j, k \in \{1, 2, 3\}$ $j \neq k$.

Besides

$$\frac{dV^2}{V^2} = (-\mu_s - \frac{V^1}{V^0}\mu_\theta)ds \quad (3.20)$$

After integration on $[t_-; t]$, (3.20) gives

$$V^2(t) \leq |V^2(t_-)| \exp\left(\int_{t_-}^t \left|\mu_s + \frac{V^1}{V^0}\mu_\theta\right| ds\right). \quad (3.21)$$

The last equation of the previous system gives

$$V^3(t) \leq C(t) \exp\left(\int_{t_-}^t \left|\frac{R_s}{R} - \mu_s + \left(-\mu_\theta + \frac{R_\theta}{R}\right) \frac{V^1}{V^0}\right| ds\right) \quad (3.22)$$

where $C(t) = \sup_{\theta \in S^1} \left|\frac{e^{2\mu} V^2}{R} (A_t + A_\theta \frac{V^1}{V^0})\right|(t, \theta)$, $|\frac{V^1}{V^0}|$, $|\mu_t|$ and $|\mu_\theta|$ are all bounded.

Let us define also

$$Q^j(t) := \sup\{|v^j| : \exists (s, \theta) \in [t, t_0] \times S^1; f(s, \theta, v^k) \neq 0, k \neq j\}. \quad (3.23)$$

Consequently V^2 , V^3 , Q^2 , Q^3 are bounded. Now, for $j = 1$ in (3.23) one obtains from the second equation of previous system :

$$|V^1(t)| \leq |V^1(t_0)| + C(t) \int_t^{t_0} [Q^1(s) + \sup_\theta \Gamma(s, \theta) + \sup_\theta H_t(s, \theta)] ds \quad (3.24)$$

Add and subtract respectively auxiliary equations (2.11) – (2.12) to obtain

$$\partial_\lambda (Re^{-2\tau+4\mu}\Gamma) = \sqrt{2}Re^\tau(S_{12} - J_2) \quad (3.25)$$

$$\partial_\sigma (Re^{-2\tau+4\mu}\Gamma) = \sqrt{2}Re^\tau(S_{12} + J_2) \quad (3.26)$$

Integrating along null paths and using previous steps give

$$\sup_\theta \Gamma(t, \theta) \leq \Gamma(t_0, \theta) + C \int_t^{t_0} [1 + Q^1(s)] ds \quad t_1 < t < t_0 \quad (3.27)$$

Analogously, (2.13) and (2.14) give

$$\sup_\theta H_t(t, \theta) \leq |H_t|(t_0, \theta) + C \int_t^{t_0} [1 + Q^1(s) + \sup_\theta |\Gamma|(s, \theta)] ds \quad t_1 < t < t_0 \quad (3.28)$$

Adding (3.24), (3.27), (3.28) and applying Gronwall's lemma give uniform bounds on H_t , Γ and $Q^1(t)$. Since $Q^1(t)$ and V^k are bounded, the integral terms of the matter quantities are also bounded. We deduce from (2.2) that G_t , and K are bounded. Therefore H and G are bounded. From (2.13), we deduce bounds on $H_{t\theta}$ and then on H_t . Consequently (2.11) gives bounds on $G_{\theta t}$ and then on G_θ . We deduce respectively from (2.14) and (2.13) the bounds of H_{tt} and G_{tt} .

4 Local Existence

In this section, we prove using an iteration the local existence and uniqueness of solutions of the EVSFS.

For all component χ of the metric g , we define the iterates $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ with first terms

$$\chi_0(t, \theta) \equiv \overset{\circ}{\chi}(\theta), \quad \phi_0(t, \theta) \equiv \overset{\circ}{\phi}(\theta), \quad f_0(t, \theta) \equiv \overset{\circ}{f}(\theta)$$

and

$$\chi_n(t_0, \theta) \equiv \overset{\circ}{\chi}(\theta), \quad \phi_n(t_0, \theta) \equiv \overset{\circ}{\phi}(\theta), \quad f_n(t_0, \theta) \equiv \overset{\circ}{f}(\theta)$$

Consider the previous characteristic system where $R, R_\theta, \tau_\theta, \mu_\theta, A_\theta$ are respectively replaced by

$R_{n-1}, \underline{R}_{n-1}, \underline{\tau}_{n-1}, \underline{\mu}_{n-1}, \underline{A}_{n-1}$. In what follows, $\check{R}_{n-1}, \check{\tau}_{n-1}, \check{\mu}_{n-1}, \check{A}_{n-1}, \check{H}_{n-1}, \dots$ replace respectively $(R_{n-1})_t, (\tau_{n-1})_t, (\mu_{n-1})_t, (A_{n-1})_t, (H_{n-1})_t, \dots$. Let

$$\begin{aligned} \Xi_n &= \left[\frac{V^1}{V^0}; \Xi_n^1; \Xi_n^2; \Xi_n^3 \right] \quad \text{where} \\ \Xi_{n-1}^1 &= -(\underline{\tau}_{n-1} - \underline{\mu}_{n-1})V^0 - (\check{\tau}_{n-1} - \check{\mu}_{n-1})V^1 - e^{-\tau_{n-1}}(e^{2\mu_{n-1}}\Gamma_{n-1}V^2 + R_{n-1}\check{H}_{n-1}V^3) \\ &\quad + \frac{e^{2\mu_{n-1}}\underline{A}_{n-1}}{R_{n-1}} \frac{V^2V^3}{V^0} - (\underline{\mu}_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}}) \frac{(V^3)^2}{V^0} + \underline{\mu}_{n-1} \frac{(V^2)^2}{V^0}; \\ \Xi_{n-1}^2 &= -\check{\mu}_{n-1}V^2 - \underline{\mu}_{n-1} \frac{V^1V^2}{V^0}; \\ \Xi_{n-1}^3 &= \left(\frac{\check{R}_{n-1}}{R_{n-1}} - \check{\mu}_{n-1} \right) V^3 + (\underline{\mu}_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}}) \frac{V^1V^3}{V^0} + \frac{e^{2\mu_{n-1}}}{R_{n-1}} \left(\check{A}_{n-1} + \underline{A}_{n-1} \frac{V^1}{V^0} \right) V^2 \end{aligned}$$

Define $(\Theta_n, V_n)(s, t, \theta, V^1, V^2, V^3)$ with $(t \leq t_0)$ a solution of the characteristic system

$$\frac{d}{ds} ((\Theta, V)_n) = \Xi_{n-1}(s, t, \Theta, V) \quad (4.1)$$

with initial data $(\Theta_n, V_n)(t, t, \theta, V^1, V^2, V^3) = (\theta, v)$ and

$$f_n(t, \theta, V^1, V^2, V^3) = f^\circ((\Theta_n, V_n)(t_0, \theta, V^1, V^2, V^3)) \quad (4.2)$$

where f_n is the solution of

$$\begin{aligned} &\left[(\underline{\tau}_{n-1} - \underline{\mu}_{n-1})v^0 + (\check{\tau}_{n-1} - \check{\mu}_{n-1})v^1 + \underline{\mu}_{n-1} \frac{(v^2)^2}{v^0} + (\underline{\mu}_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}}) \frac{(v^3)^2}{v^0} - \frac{\underline{A}_{n-1}}{R_{n-1}} e^{2\mu_{n-1}} \frac{v^2v^3}{v^0} \right] \frac{\partial f_n}{\partial v^1} \\ &\quad - \frac{v^1}{v^0} \frac{\partial f_n}{\partial \theta} + \left[\check{\mu}_{n-1}v^2 + \underline{\mu}_{n-1} \frac{v^1v^2}{v^0} \right] \frac{\partial f_n}{\partial v^2} - \frac{\partial f_n}{\partial t} - \left[e^{-\tau_{n-1}}(e^{2\tau_{n-1}}\Gamma_{n-1}v^2 + R_{n-1}\check{H}_{n-1}v^3) \right] \frac{\partial f_n}{\partial v^1} \\ &\quad - \left[\left(\frac{\check{R}_{n-1}}{R_{n-1}} - \check{\mu}_{n-1} \right) v^3 + \left(\underline{\mu}_{n-1} - \frac{R_{n-1}}{R_{n-1}} \right) \frac{v^1v^3}{v^0} + \frac{e^{2\mu_{n-1}}v^2}{R_{n-1}} (\check{A}_{n-1} + \underline{A}_{n-1} \frac{v^1}{v^0}) \right] \frac{\partial f_n}{\partial v^3} = 0 \end{aligned}$$

Also, using (3.1) – (3.2):

$$\begin{aligned}\partial_\theta \hat{R}_n &= \hat{\tau}_{n-1} \hat{R}_{n-1} - R_{n-1} \hat{\mu}_{n-1}^2 - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4R_{n-1}^2} \hat{A}_{n-1}^2 \\ &\quad - R_{n-1} e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} (\rho_n - J_{n,1}) \\ &\quad - \frac{e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}}}{4} \Gamma_{n-1}^2 - \frac{R_{n-1}^2 e^{-2\tau_{n-1}}}{4} \check{H}_{n-1}^2\end{aligned}\quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}\partial_\theta \check{R}_n &= -\check{\tau}_{n-1} \check{R}_{n-1} + R_{n-1} \check{\mu}_{n-1}^2 + \\ &\quad \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4R_{n-1}^2} \check{A}_{n-1}^2 + R_{n-1} e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} (\rho_n + J_{n,1}) \\ &\quad + \frac{e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}}}{4} \Gamma_{n-1}^2 + \frac{R_{n-1}^2 e^{-2\tau_{n-1}}}{4} \check{H}_{n-1}^2\end{aligned}\quad (4.4)$$

Define also $\rho_n, \rho_{k,n}, P_{k,n}, k \in \{1; 2; 3\}$ in the same way as ρ, ρ_k, P_k , where $f, R, \phi_t, \phi_\theta, A_t, \mu, \tau, \mu_t, \tau_t$ are respectively replaced by $f_n, R_{n-1}, \check{\phi}_{n-1}, \underline{\phi}_{n-1}, \check{A}_{n-1}, \mu_{n-1}, \tau_{n-1}, \check{\mu}_{n-1}, \check{\tau}_{n-1}$.

We define X_n and Y_n like (3.8) – (3.9) by:

$$X_n = \frac{1}{2} R_n (\check{\mu}_n^2 + \underline{\mu}_n^2) + \frac{e^{4\mu_n}}{8R_n} (\check{A}_n^2 + \underline{A}_n^2) + \frac{1}{2} \left[R_n (\check{\phi}_n^2 + \underline{\phi}_n^2) + \phi_n^2 \right] \quad (4.5)$$

$$Y_n = R_n \check{\mu}_n \underline{\mu}_n + \frac{e^{4\mu_n}}{4R_n} \check{A}_n \underline{A}_n + R_n \check{\phi}_n \underline{\phi}_n \quad (4.6)$$

Let $Z_n = X_n + Y_n$, and $\check{Z}_n = X_n - Y_n$, therefore

$$Z_n = R_n \hat{\mu}_n^2 + \frac{e^{4\mu_n}}{4R_n} \hat{A}_n^2 + R_n \hat{\phi}_n^2 + \frac{1}{2} \phi_n^2 \quad (4.7)$$

$$\check{Z}_n = R_n \check{\mu}_n^2 + \frac{e^{4\mu_n}}{4R_n} \check{A}_n^2 + R_n \check{\phi}_n^2 + \frac{1}{2} \phi_n^2. \quad (4.8)$$

Now, define

$$\mathfrak{h}_n, \check{\mathfrak{h}}_n, \chi_n, \check{\chi}_n, \zeta_n, \check{\zeta}_n, \hat{Z}_n, \check{Z}_n \quad (4.9)$$

using (3.5), (3.6), (3.13), (3.14), (3.15)₂, (3.16), (3.11) and (3.10) with

$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \chi_1, \chi_2, \zeta_1, \zeta_2, \partial_\sigma Z$ et $\partial_\lambda \check{Z}$ and

$R, \phi_t, \phi_\theta, A_t, A_\theta, \mu, \tau, \mu_t, \tau_t, \mu', \tau_\theta, \rho, P_k, (k \in \{1; 2; 3\})$

respectively replaced by $\mathfrak{h}_n, \check{\mathfrak{h}}_n, \chi_n, \check{\chi}_n, \zeta_n, \check{\zeta}_n, \hat{Z}_n, \check{Z}_n,$

$R_{n-1}, \check{\phi}_{n-1}, \underline{\phi}_{n-1}, \check{A}_{n-1}, \underline{A}_{n-1}, \mu_{n-1}, \tau_{n-1}, \check{\mu}_{n-1}, \check{\tau}_{n-1}, \underline{\mu}_{n-1}, \underline{\tau}_{n-1}, \rho_n, P_{k,n}, (k \in \{1; 2; 3\}).$

From (4.5) – (4.8) we deduce

$$\partial_\lambda Z_n := \check{Z}_n = \chi_{n-1} + \check{\mu}_{n-1} \zeta_{n-1} + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \check{A}_{n-1} \check{\zeta}_{n-1} \quad (4.10)$$

$$\partial_\sigma \check{Z}_n := \hat{Z}_n = \check{\chi}_{n-1} + \hat{\mu}_{n-1} \zeta_{n-1} + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \hat{A}_{n-1} \check{\zeta}_{n-1} \quad (4.11)$$

From auxiliary equations (2.11) – (2.14) we obtain

$$\partial_\lambda(R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} \Gamma_n) = -\sqrt{2} R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (J_{2,n} - S_{12,n}) \quad (4.12)$$

$$\partial_\sigma(R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} \Gamma_n) = -\sqrt{2} R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (J_{2,n} + S_{12,n}) \quad (4.13)$$

$$\partial_\lambda(R_n^3 e^{-2\tau_n} \check{H}_n) + (\partial_\lambda A_n) R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} \Gamma_n = -\sqrt{2} R_{n-1}^2 e^{\tau_{n-1} - 2\mu_{n-1}} (J_{3,n} - S_{13,n}) \quad (4.14)$$

$$\partial_\sigma(R_n^3 e^{-2\tau_n} \check{H}_n) + (\partial_\sigma A_n) R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} \Gamma_n = -\sqrt{2} R_{n-1}^2 e^{\tau_{n-1} - 2\mu_{n-1}} (J_{3,n} + S_{13,n}) \quad (4.15)$$

Now we proceed for (4.3)–(4.4) the same way as we did for step 1 to establish the inequality (3.7) and obtain the following analogous inequality:

$$\sqrt{2} \check{R}_n(t, \theta) \leq \sup_{\theta \in S^1} (\hat{R}_{n-1} + \check{R}_{n-1})(t_0, \theta). \quad (4.16)$$

Using this last inequality (4.16), we deduce that $R_n, \check{R}_n, \underline{R}_n$ are C^1 – bounded. Proceeding as in step 2 we have

$$\zeta_n \leq \frac{R_{n-1}}{2} [2e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} (\rho_n - P_{1;n}) + e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}} \Gamma_{n-1}^2] \quad (4.17)$$

$$|\check{\zeta}_n| \leq R_{n-1} e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} |S_{23,n-1}| + R_{n-1}^2 e^{2(\mu_{n-1} - \tau_{n-1})} |\Gamma_{n-1} \check{H}_{n-1}|$$

i.e

$$|\check{\zeta}_n| \leq R_{n-1} e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} |S_{23,n-1}| + \frac{1}{2} R_{n-1}^2 e^{-2\tau_{n-1}} (e^{4\mu_{n-1}} \Gamma_{n-1}^2 + \check{H}_{n-1}^2) \quad (4.18)$$

$$e^{2(\tau_n - \mu_n)} P_{2;n} \leq \int_{\mathbb{R}^3} f_n \frac{e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} (v^2)^2}{v^0} dv + \frac{1}{2} \check{\phi}_{n-1}^2 \leq e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} (\rho_n - P_{1;n}) + \frac{1}{2} \check{\phi}_{n-1}^2. \quad (4.19)$$

Without lost of generality, we choose $V(\phi_n) = V_0 \exp(\phi_n^2)$ such that

$$\int_t^{t_0} \hat{\phi}_n e^{2(\tau_n - \mu_n)} \frac{dV(\phi_n)}{d\phi_n} ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} X_n(t, \theta), \quad (4.20)$$

$$\int_t^{t_0} \check{\phi}_n e^{2(\tau_n - \mu_n)} \frac{dV(\phi_n)}{d\phi_n} ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} X_n(t, \theta), \quad (4.21)$$

Using bounds of R_n and notation (4.9), we have respectively:

$$\int_{t_1}^{t_0} (\hat{\mu}_n \zeta_n)(s, \theta + s - t) ds \leq \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X_n(t, \theta)} \quad (4.22)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} (\check{\mu}_n \zeta_n)(s, \theta - s + t) ds \leq \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X_n(t, \theta)} \quad (4.23)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} |\hat{A}_n \check{\zeta}_n| \right) (s, \theta + s - t) ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X_n(t, \theta)} \quad (4.24)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} |\check{A}_n \zeta_n| \right) (s, \theta - s + t) ds \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{X_n(t, \theta)} \quad (4.25)$$

with $t_- \leq t_1 \leq t_0$.

From (4.20) and (4.21), we obtain

$$\int_{t_1}^{t_0} \chi_n(s, \theta + s - t) ds \leq C \int_{t_1}^{t_0} X_n(s, \theta) ds + C \sup_{\theta} \sqrt{X_n(t, \theta)} \quad (4.26)$$

$$\int_{t_1}^{t_0} \tilde{\chi}_n(s, \theta - s + t) ds \leq C \int_{t_1}^{t_0} X_n(s, \theta) ds + C \sup_{\theta} \sqrt{X_n(t, \theta)} \quad (4.27)$$

Therefore

$$\begin{aligned} \sup_{\theta \in S^1} X_n(t_1, \theta) &\leq C \sup_{(\theta, t) \in S^1 \times [t_-, t_0]} X_n(t, \theta) + C \int_{t_1}^{t_0} \sup_{\theta \in S^1} X_n(s, \theta) ds \\ &\quad + 4 \sup_{\theta \in S^1} X_n(t_0, \theta) + C \sup_{(\theta, t) \in S^1 \times [t_-, t_0] \times S^1} \sqrt{X_n(t, \theta)} \end{aligned} \quad (4.28)$$

and by Gronwall's inequality (4.28) gives bounds of X_n . Consequently from (4.5), $\check{\mu}_n, \underline{\mu}_n, \check{A}_n, \underline{A}_n, \check{\phi}_n, \underline{\phi}_n$ are bounded.

Now from (3.18), we deduce that

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_n = \check{\tau}_n &= \hat{\mu}_{n-1}^2 - \check{\mu}_{n-1}^2 + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4R_{n-1}^2} \hat{A}_{n-1}^2 - \check{A}_{n-1}^2 - \frac{e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}}}{4} \Gamma_{n-1}^2 \\ &\quad - \frac{3R_{n-1}^2 e^{-2\tau_{n-1}}}{4} \check{H}_{n-1}^2 - e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} P_{3,n} \end{aligned} \quad (4.29)$$

After integrating (4.29) along null paths, using (4.18), (4.17), (4.20) and also the fact that A_n, ϕ_n, μ_n are C^1 bounded, we deduce that $\check{\tau}_n$ and $\hat{\tau}_n$ are bounded. Consequently τ_n is C^1 -bounded.

To bound $\rho_n, P_{k;n}$, we use the same approach like step 3. Let us define first

$$Q_n(t) := \sup\{|v| : \exists(s, \theta) \in [t, t_0] \times S^1; f_n(s, \theta, v) \neq 0\} \quad (4.30)$$

where $\Theta_n(t, t, x, v) = \theta$ and $V_n(t, t, x, v) = v$ are solutions of the characteristic system associated to the Vlasov equation (4.2). Let $Q_n^j, j \in \{1, 2, 3\}$ defined by

$$Q_n^j(t) := \sup\{|v^j| : \exists(s, \theta) \in [t, t_0] \times S^1 \text{ such that } f_n(s, \theta, v^k) \neq 0, k \neq j\} \quad (4.31)$$

Using Gronwall's inequality like in 3.22 we have

$$V^3(t) \leq C(t) \exp \left(\int_{t_0}^t \left| \frac{\check{R}_{n-1}}{R_{n-1}} - \check{\mu}_{n-1} + \left(-\underline{\mu}_{n-1} + \frac{\underline{R}_{n-1}}{R_{n-1}} \right) \frac{V^1}{V^0} \right| ds \right) \quad (4.32)$$

where $C(t) = \sup_{\theta \in S^1} \left| \frac{e^{2\mu_{n-1}} V^2}{R_{n-1}} \left(\check{A}_{n-1} + \underline{A}_{n-1} \frac{V^1}{V^0} \right) (t, \theta) \right|, \left| \frac{V^1}{V^0} \right|, |\mu_{n-1}|$ and $|\underline{\mu}_{n-1}|$ are bounded.

We can deduce from $\frac{dV^2}{ds}$ and $\frac{dV^3}{ds}$ that

$$e^{\mu_{n-1}} V^2, A_{n-1} e^{\mu_{n-1}} V^2 + R_{n-1} e^{-\mu_{n-1}} V^3$$

are bounded and also Q_n^2, Q_n^3 . Using the similar approach like (3.27) – (3.28), substituting Q^1 by Q_n^1 , one obtains

$$\sup |V^1(t)| \leq |Q_n^1(t_0)| + C(t) \int_t^{t_0} [Q_n^1(s) + \sup_{\theta} \Gamma_n(s, \theta) + \sup_{\theta} \dot{H}_n(s, \theta)] ds, \quad t < t_0 \quad (4.33)$$

$$\sup_{\theta} \Gamma_n(t, \theta) \leq \Gamma_n(t_0, \theta) + C \int_t^{t_0} [1 + Q_n^1(s)] ds, \quad t < t_0 \quad (4.34)$$

$$\sup_{\theta} \dot{H}_n(t, \theta) \leq |\dot{H}_n|(t_0, \theta) + C \int_t^{t_0} [1 + Q_n^1(s) + \sup_{\theta} |\Gamma_n|(s, \theta)] ds \quad t < t_0 \quad (4.35)$$

These give the uniform bound of Q_n^1, Γ_n and \dot{H}_n . Since $|V^k| \leq V^0, k = 1, 2, 3$, we deduce that $\rho_n, P_{k;n}$ are bounded and therefore $|S_{12;n}|$ and $|S_{13;n}|$ are bounded.

Using previous steps, we deduce the existence of $C(t) > 0$ such that

$$\begin{cases} \|\mu_n\|, \|R_n\|, \|A_n\|, \|\phi_n\|, \|\tau_n\|, \|\check{\mu}_n\|, \|\underline{\mu}_n\|, \|p_{1,n}\|, \|p_{2,n}\|, \|p_{3,n}\|, \|\rho_n\| \\ \|\check{A}_n\|, \|\check{R}_n\|, \|\check{A}_n\|, \|\check{\phi}_n\|, \|\check{\tau}_n\|, \|\check{\phi}_n\|, \|\check{\tau}_n\|, \|S_{21,n}\|, \|S_{23,n}\|, \|S_{31,n}\| \leq C(t) \end{cases}$$

Proposition 4.1 *Let $[t_2; t_0] \subset]0; t_0]$, be an arbitrary compact subset on which the previous estimates hold. Then on such an interval, the iterates and their derivatives converge uniformly for L^∞ -norm.*

Proof 4.1 *Let $t \in [t_2; t_0]$, we use (4.5) – (4.6) to obtain respectively*

$$\begin{aligned} X_{n+1} - X_n &= \frac{1}{2} (R_{n+1} - R_n) (\check{\mu}_{n+1}^2 + \underline{\mu}_{n+1}^2 + \check{\phi}_{n+1}^2 + \underline{\phi}_{n+1}^2) \\ &+ \frac{1}{2} R_n [(\check{\mu}_{n+1} - \check{\mu}_n)(\check{\mu}_{n+1} + \check{\mu}_n) + (\check{\phi}_{n+1} - \check{\phi}_n)(\check{\phi}_{n+1} + \check{\phi}_n)] \\ &+ \frac{1}{2} R_n [(\underline{\mu}_{n+1} - \underline{\mu}_n)(\underline{\mu}_{n+1} + \underline{\mu}_n) + (\underline{\phi}_{n+1} - \underline{\phi}_n)(\underline{\phi}_{n+1} + \underline{\phi}_n)] \\ &+ \frac{e^{4\mu_{n+1}}}{8R_{n+1}} [(\check{A}_{n+1} - \check{A}_n)(\check{A}_{n+1} + \check{A}_n) + (\check{A}_{n+1} - \check{A}_n)(\check{A}_{n+1} + \check{A}_n)] \\ &+ \left(\frac{e^{4\mu_{n+1}}}{8R_{n+1}} - \frac{e^{4\mu_n}}{8R_n} \right) (\check{A}_n^2 + \underline{A}_n^2) + \frac{1}{2} (\phi_{n+1} - \phi_n)(\phi_{n+1} + \phi_n) \quad (4.36) \end{aligned}$$

and since $\partial_\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t + \partial_\theta)$ and $\partial_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t - \partial_\theta)$,

$$\begin{aligned} X_{n+1} - X_n &= (R_{n+1} - R_n) (\hat{\mu}_{n+1}^2 + \check{\mu}_{n+1}^2 + \hat{\phi}_{n+1}^2 + \check{\phi}_{n+1}^2) \\ &+ R_n [(\hat{\mu}_{n+1} - \hat{\mu}_n)(\hat{\mu}_{n+1} + \hat{\mu}_n) + (\hat{\phi}_{n+1} - \hat{\phi}_n)(\hat{\phi}_{n+1} + \hat{\phi}_n)] \\ &+ \frac{1}{2} R_n [(\check{\mu}_{n+1} - \check{\mu}_n)(\check{\mu}_{n+1} + \check{\mu}_n) + (\check{\phi}_{n+1} - \check{\phi}_n)(\check{\phi}_{n+1} + \check{\phi}_n)] \\ &+ \frac{e^{4\mu_{n+1}}}{4R_{n+1}} [(\hat{A}_{n+1} - \hat{A}_n)(\hat{A}_{n+1} + \hat{A}_n) + (\check{A}_{n+1} - \check{A}_n)(\check{A}_{n+1} + \check{A}_n)] \\ &+ \left(\frac{e^{4\mu_{n+1}}}{8R_{n+1}} - \frac{e^{4\mu_n}}{4R_n} \right) (\hat{A}_n^2 + \check{A}_n^2) + \frac{1}{2} (\phi_{n+1} - \phi_n)(\phi_{n+1} + \phi_n) \quad (4.37) \end{aligned}$$

Let now define $W_{n+1}(t) = (X_{n+1} - X_n)(t) + (Y_{n+1} - Y_n)(t)$ and $\tilde{W}_{n+1}(t) = (X_{n+1} - X_n)(t) - (Y_{n+1} - Y_n)(t)$. We deduce from (4.37) that

$$\begin{aligned} \partial_\lambda W_{n+1} &= \partial_\lambda[(X_{n+1} - X_n) + (Y_{n+1} - Y_n)] = \chi_n - \chi_{n-1} - (\check{\mu}_n - \check{\mu}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1}) \\ &+ \left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \right) (\check{A}_n - \check{A}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1}) + F_n \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \partial_\sigma \tilde{W}_{n+1} &= \partial_\sigma[(X_{n+1} - X_n) - (Y_{n+1} - Y_n)] = \tilde{\chi}_n - \tilde{\chi}_{n-1} - (\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1})(\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1}) \\ &+ \left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \right) (\hat{A}_n - \hat{A}_{n-1})(\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1}) + \tilde{F}_n. \end{aligned} \quad (4.39)$$

where

$$\begin{aligned} F_n &= -\hat{\mu}_n \zeta_{n-1} - \hat{\mu}_{n-1} \zeta_n - 2\hat{\mu}_{n-1} \zeta_{n-1} + \frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} \hat{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_n \\ &+ \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \hat{A}_n \tilde{\zeta}_n + \frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} \hat{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_{n-1} \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \hat{A}_n \tilde{\zeta}_n + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \hat{A}_n \tilde{\zeta}_{n-1} \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n &= -\check{\mu}_n \zeta_{n-1} - \check{\mu}_{n-1} \zeta_n - 2\check{\mu}_{n-1} \zeta_{n-1} + \frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} \check{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_n \\ &+ \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \check{A}_n \tilde{\zeta}_n + \frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} \check{A}_{n-1} \tilde{\zeta}_{n-1} \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \check{A}_n \tilde{\zeta}_n + \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \check{A}_n \tilde{\zeta}_{n-1} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Integrating (4.38)–(4.39) along null paths between t_1 and t_0 on the characteristics map $t \mapsto (t; \gamma^\pm(t))$ where $\gamma^\pm(t) = \theta \pm (t_0 - t)$ for all $(t; \theta) \in [t_1; t_0] \times S^1$, and after adding, we obtain

$$\begin{aligned} (X_{n+1} - X_n)(t_1, \theta) &= \frac{1}{4} [W_{n+1}(t_0, \gamma^-(t_1)) + \tilde{W}_{n+1}(t_0, \gamma^+(t_1))] \\ &- \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} [(\chi_n - \chi_{n-1})(s, \gamma^-(s)) + (\tilde{\chi}_n - \tilde{\chi}_{n-1})(s, \gamma^+(s))] ds \\ &- \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} [(\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1})(t_0, \gamma^-(s))] ds \\ &- \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} [(\check{\mu}_n - \check{\mu}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1})(t_0, \gamma^+(s))] ds \\ &- \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} \left[\left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \right) (\hat{A}_n - \hat{A}_{n-1})(\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1})(t_0, \gamma^-(s)) \right] ds \\ &- \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} \left[\left(\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \right) (\check{A}_n - \check{A}_{n-1})(\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1})(t_0, \gamma^+(s)) \right] ds \\ &+ \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_0} [F_n(t_0, \gamma^+(s)) + F_n(t_0, \gamma^-(s))] ds \end{aligned} \quad (4.42)$$

From (4.1) we have

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}((\Theta, V)_{n+1} - (\Theta, V)_n)(s, t, \theta, v) &= (\Xi_n - \Xi_{n-1})(s, t, \theta, v) \\
&\leq C |X_n - X_{n-1}|(s, t, \theta) + (|F_n| + |\tilde{F}_n|)(s, \theta) \\
|(\Theta, V)_{n+1} - (\Theta, V)_n|(t_0, t, \theta, v) &\leq |(\Theta, V)_{n+1} - (\Theta, V)_n|(t, t, \theta, v) \\
&\quad + C \int_t^{t_0} (|X_n - X_{n-1}| + |F_n| + |\tilde{F}_n|)(s) ds
\end{aligned}$$

and from (4.2) we have

$$\begin{aligned}
|(f_{n+1} - f_n)(t)| &\leq \|f_0\| |(\Theta, V)_{n+1} - (\Theta, V)_n|(t_0, t, \theta, v) \\
&\leq C \|f_0\| \left[\int_t^{t_0} |\Xi_n - \Xi_{n-1}|(s) ds + \int_t^{t_0} (|F_n| + |\tilde{F}_n|)(s) ds \right]
\end{aligned}$$

This implies

$$\|\rho_{n+1} - \rho_n\| \leq C |W_n| + C \int_t^{t_0} |X_n - X_{n-1}| ds \quad (4.43)$$

Since $|P_{k;n}|, |S_{k;n}|, |J_{k;n}| \leq |\rho_n|$, we deduce from (4.43) that :

$$\|P_{k;n+1} - P_{k;n}\|; \|J_{k;n+1} - J_{k;n}\|; \|S_{j_{k;n+1}} - S_{j_{k;n}}\| \leq C \left[|W_n| + \int_t^{t_0} |X_n - X_{n-1}| ds \right] \quad (4.44)$$

We proceed in the same way as we did for (3.17) and (4.37) or step 2 of [7] to obtain respectively

$$\left| \int_{t_1}^{t_0} (\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1})(s, \gamma^+(s)) ds \right| \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{|X_n - X_{n-1}|(t, \theta)} \quad (4.45)$$

$$\left| \int_{t_1}^{t_0} (\check{\mu}_n - \check{\mu}_{n-1})(\zeta_n - \zeta_{n-1})(s, \gamma^-(s)) ds \right| \leq C \sup_{t \in [t_1, t_0]} \sqrt{|X_n - X_{n-1}|(t, \theta)} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_0} \left[\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_n} \right] |\hat{A}_n - \hat{A}_{n-1}| |\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1}|(s, \gamma^+(s)) ds &\leq \\
C \sup_{t \in [t_1, t_0]} |X_n - X_{n-1}|(t, \theta) &\quad (4.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_0} \left[\frac{e^{4\mu_n}}{2R_n} - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{2R_{n-1}} \right] |\check{A}_n - \check{A}_{n-1}| |\tilde{\zeta}_n - \tilde{\zeta}_{n-1}|(s, \gamma^-(s)) ds &\leq \\
C \sup_{t \in [t_1, t_0]} |X_n - X_{n-1}|(t, \theta) &\quad (4.48)
\end{aligned}$$

Using (4.12) – (4.13), we have respectively

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda [R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} (\Gamma_n - \Gamma_{n-1}) + \Gamma_{n-1} (R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} - R_{n-1} e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}})] = \\ & -2R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (J_{2,n} - J_{2,n-1} + S_{12,n-1} - S_{12,n}) - (J_{2,n-1} - S_{12,n-1}) (R_n e^{\tau_n} - R_{n-1} e^{\tau_{n-1}}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} & \partial_\sigma [R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} (\Gamma_n - \Gamma_{n-1}) + \Gamma_{n-1} (R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} - R_{n-1} e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}})] = \\ & -2R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (J_{2,n} - J_{2,n-1} + S_{12,n} - S_{12,n-1}) - (J_{2,n-1} + S_{12,n-1}) (R_n e^{\tau_n} - R_{n-1} e^{\tau_{n-1}}) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Add (4.49) – (4.50) to obtain

$$\begin{aligned} & \partial_t [R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} (\Gamma_n - \Gamma_{n-1}) + \Gamma_{n-1} (R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} - R_{n-1} e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}})] = \\ & -2R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (J_{2,n} - J_{2,n-1} + S_{12,n} - S_{12,n-1}) - J_{2,n-1} (R_n e^{\tau_n} - R_{n-1} e^{\tau_{n-1}}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Integrating with respect to t and obtain

$$\begin{aligned} & |R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} (\Gamma_n - \Gamma_{n-1}) + \Gamma_{n-1} (R_n e^{-2\tau_n + 4\mu_n} - R_{n-1} e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}})|(t, \theta) \leq \\ & \int_t^{t_0} [2R_{n-1} e^{\tau_{n-1}} (|J_{2,n} - J_{2,n-1}| + |S_{12,n} - S_{12,n-1}|) + J_{2,n-1} |R_n e^{\tau_n} - R_{n-1} e^{\tau_{n-1}}|] (s, \theta) ds \end{aligned} \quad (4.52)$$

We deduce from (4.44) that (4.52) gives

$$|\Gamma_n - \Gamma_{n-1}| \leq C \int_{t_1}^{t_0} |X_n - X_{n-1}|(s) ds \quad (4.53)$$

From (4.26) – (4.27), we obtain

$$\left| \int_{t_1}^{t_0} [\chi_n - \chi_{n-1}](s, \theta + s - t) ds \right| \leq C \int_{t_1}^{t_0} |X_n - X_{n-1}|(s, \theta) ds \quad (4.54)$$

$$\left| \int_{t_1}^{t_0} [\tilde{\chi}_n - \tilde{\chi}_{n-1}](s, \theta + s - t) ds \right| \leq C \int_{t_1}^{t_0} |X_n - X_{n-1}|(s, \theta) ds \quad (4.55)$$

Replacing (4.45) – (4.46) – (4.47) – (4.48) – (4.54) – (4.55), in (4.42) gives

$$\sup_{\theta \in S^1} |X_{n+1} - X_n|(t_1, \theta) \leq C \int_{t_1}^{t_0} \sup_{\theta \in S^1} |X_n - X_{n-1}|(s, \theta) ds \quad (4.56)$$

Therefore

$$\sup_{\theta \in S^1} |X_{n+1} - X_n|(t_1, \theta) \leq \left| C^{n+2} \frac{(t_0 - t)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \text{ for } n \in \mathbb{N}, t \in [t_1; t_0] \quad (4.57)$$

Since the series $\left\{ \frac{(t_0 - t)^{n+1}}{(n+1)!} \right\}_n$ converges, we deduce the convergence of $\left(\frac{(t_0 - t)^{n+1}}{(n+1)!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ to zero. This implies that $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence.

Otherwise, (3.15) and (3.16) imply respectively

$$\begin{aligned} & \zeta_{n+1} - \zeta_n = e^{2(\tau_{n+1} - \mu_{n+1})} [\rho_{n+1} - \rho_n - (P_{1,n+1} - P_{1,n}) + P_{2,n+1} - P_{2,n} - (P_{3,n+1} - P_{3,n})] \\ & + [(e^{\tau_{n+1}} - e^{\tau_n})(e^{\tau_{n+1}} + e^{\tau_n})e^{-2\mu_{n+1}} + e^{2\tau_n}(e^{-2\mu_{n+1}} - e^{-2\mu_n})] [\rho_n - P_{1,n} + P_{2,n} - P_{3,n}] \\ & + \frac{R_{n+1}}{2} e^{-2\tau_{n+1} + 4\mu_{n+1}} \Gamma_{n+1}^2 - \frac{R_n}{2} e^{-2\tau_n + 4\mu_n} \Gamma_n^2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}_{n+1} - \tilde{\zeta}_n &= R_{n+1}^2 e^{-2(\tau_{n+1} + \mu_{n+1})} \{ \Gamma_{n+1} (\check{H}_{n+1} - \check{H}_n) + \check{H}_n (\Gamma_{n+1} - \Gamma_n) \} \\
&\quad + 2R_{n+1}^2 e^{-2(\tau_{n+1} + \mu_{n+1})} (S_{23,n+1} - S_{23,n}) + 2S_{23,n} (R_{n+1}^2 e^{-2(\tau_{n+1} + \mu_{n+1})} \\
&\quad - R_n^2 e^{-2(\tau_n + \mu_n)}) + \check{H}_n \Gamma_n (R_{n+1}^2 e^{-2(\tau_{n+1} + \mu_{n+1})} - R_n^2 e^{-2(\tau_n + \mu_n)})
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\text{with } \Gamma_{n+1} - \Gamma_n = (\check{G}_{n+1} - \check{G}_n) + (A_{n+1} \check{H}_{n+1} - A_n \check{H}_n) \tag{4.60}$$

Using (4.53), (4.60) gives

$$\| \underline{G}_{n+1} - \underline{G}_n \|, \| \underline{H}_{n+1} - \underline{H}_n \| \leq C \| X_{n+1} - X_n \| \tag{4.61}$$

From (4.36) we deduce that

$$\| R_{n+1} - R_n \|, \| \check{\mu}_{n+1} - \check{\mu}_n \|, \| \check{A}_{n+1} - \check{A}_n \|, \| \phi_{n+1} - \phi_n \| \leq C \| X_{n+1} - X_n \| \tag{4.62}$$

From (4.58), (4.59), (4.60), (4.43), (4.44) we have

$$\| S_{23,n+1} - S_{23,n} \|, \| \rho_{n+1} - \rho_n \|, \| P_{1,n+1} - P_{1,n} \|, \| P_{2,n+1} - P_{2,n} \|, \| P_{3,n+1} - P_{3,n} \| \leq C \| X_{n+1} - X_n \| \tag{4.63}$$

Relation (4.29) imply

$$\begin{aligned}
|\hat{\tau}_{n+1} - \hat{\tau}_n| &= |\hat{\mu}_n \check{\mu}_n - \hat{\mu}_{n-1} \check{\mu}_{n-1} + \frac{e^{4\mu_n}}{4R_n^2} \hat{A}_n \check{A}_n - \frac{e^{4\mu_{n-1}}}{4R_{n-1}^2} \hat{A}_{n-1} \check{A}_{n-1} \\
&\quad + \frac{R_{n-1}}{4} e^{-2\tau_{n-1} + 4\mu_{n-1}} \Gamma_{n-1}^2 - \frac{R_n}{4} e^{-2\tau_n + 4\mu_n} \Gamma_n^2 + \frac{3R_{n-1}^2 e^{-2\tau_{n-1}}}{4} \check{H}_{n-1}^2 \\
&\quad - \frac{3R_n^2 e^{-2\tau_n}}{4} \check{H}_n^2 + e^{2(\tau_{n-1} - \mu_{n-1})} P_{3,n} - e^{2(\tau_n - \mu_n)} P_{3,n+1}| \\
&\lesssim |X_{n+1} - X_n| + |P_{3,n+1} - P_{3,n}| \quad (\text{using (4.37) - (4.44)}) \tag{4.64}
\end{aligned}$$

Integrating along null paths starting at (t_1, θ) and ending at the initial t_0 -surface, we obtain from (4.62) - (4.63) that

$$\| \tau_{n+1} - \tau_n \| \leq C \| X_{n+1} - X_n \| \tag{4.65}$$

We have (where ν is respectively replaced by μ or A):

$$\nu_{n+1}(t, \theta) - \nu_n(t, \theta) = \int_t^{t_0} (\underline{\nu}_n(s, \theta) - \underline{\nu}_{n+1}(s, \theta)) ds \tag{4.66}$$

Using (4.36), we have:

$$|\nu_{n+1}(t, \theta) - \nu_n(t, \theta)| = \left| \int_t^{t_0} (\underline{\nu}_{n+1}(s, \theta) - \underline{\nu}_n(s, \theta)) ds \right| \leq C \int_t^{t_0} |X_{n+1}(s, \theta) - X_n(s, \theta)| ds$$

This implies that

$$|A_{n+1}(t, \theta) - A_n(t, \theta)|, |\mu_{n+1}(t, \theta) - \mu_n(t, \theta)| \leq C \int_t^{t_0} |X_{n+1}(s, \theta) - X_n(s, \theta)| ds \tag{4.67}$$

Otherwise, from (4.61), we have respectively:

$$|G_{n+1}(t, \theta) - G_n(t, \theta)| = \left| \int_t^{t_0} (\underline{G}_{n+1} - \underline{G}_n)(s, \theta) ds \right| \leq C \left| \int_t^{t_0} (X_{n+1}(s, \theta) - X_n(s, \theta)) ds \right| \quad (4.68)$$

$$|H_{n+1}(t, \theta) - H_n(t, \theta)| = \left| \int_t^{t_0} (\underline{H}_{n+1}(s, \theta) - \underline{H}_n(s, \theta)) ds \right| \leq C \left| \int_t^{t_0} (X_{n+1}(s, \theta) - X_n(s, \theta)) ds \right|. \quad (4.69)$$

Using (4.57), (4.63), (4.65), (4.62), (4.67), (4.68), (4.69), we deduce the uniform convergence for L^∞ norm of the iterates. Since all the iterates are respectively bounded with their derivatives, we deduce that there exist functions μ , R , A , ϕ , τ , H , G and f such that

$$\mu_n \rightarrow \mu, R_n \rightarrow R, A_n \rightarrow A, \phi_n \rightarrow \phi, \tau_n \rightarrow \tau, H_n \rightarrow H, G_n \rightarrow G, f_n \rightarrow f \quad (4.70)$$

and

$$\mu'_n \rightarrow \mu', R'_n \rightarrow R', A'_n \rightarrow A', \phi'_n \rightarrow \phi', \tau'_n \rightarrow \tau', H'_n \rightarrow H', G'_n \rightarrow G'. \quad (4.71)$$

$$\dot{\mu}_n \rightarrow \dot{\mu}, \dot{R}_n \rightarrow \dot{R}, \dot{A}_n \rightarrow \dot{A}, \dot{\phi}_n \rightarrow \dot{\phi}, \dot{\tau}_n \rightarrow \dot{\tau}, \dot{H}_n \rightarrow \dot{H}, \dot{G}_n \rightarrow \dot{G}; \quad (4.72)$$

where "dot" and "prime" represent respectively partial derivative with respect to t and θ . Therefore $(f, R, \tau, \mu, A, H, G, \phi)$ satisfy the complete Cauchy problem.

Let us now prove the uniqueness of the solution.

Let $\chi_k = (f_k; R_k; \mu_k; A_k; \tau_k; G_k; H_k; \phi_k)_{k=1;2}$ be two regular solutions of the Cauchy problem (2.3) – (2.4) – (2.5), (2.6) – (2.10) for the same initial data $(\overset{\circ}{f}, \overset{\circ}{R}, \overset{\circ}{\tau}, \overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{H}, \overset{\circ}{G}, \overset{\circ}{\phi}, \overset{\circ}{R}, \overset{\circ}{\tau}, \overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{H}, \overset{\circ}{G}, \psi)$ at $t = t_0$. Using the fact that χ_k is a solution of the complete system, one proceeds similarly to prove the convergence of the iterates to obtain

$$\beta(t) \leq C \int_t^{t_0} \beta(s) ds$$

where

$$\beta(t) = \sup\{\|f_2(s) - f_1(s)\| + \|R_2(s) - R_1(s)\| + \|\mu_2(s) - \mu_1(s)\| + \|A_2(s) - A_1(s)\| + \|\tau_2(s) - \tau_1(s)\| + \|G_2(s) - G_1(s)\| + \|H_2(s) - H_1(s)\| + \|\phi_2(s) - \phi_1(s)\|\}; s \in [t, t_0]\}.$$

We deduce that $\beta(t) = 0$ for $t \in]0, t_0]$. This implies that $f_2 = f_1$; $R_2 = R_1$; $\mu_2 = \mu_1$; $A_2 = A_1$; $\tau_2 = \tau_1$; $G_2 = G_1$; $H_2 = H_1$ and $\phi_2 = \phi_1$. We have proved the following result:

Theorem 4.1 (local existence) *Let $\overset{\circ}{f} \in C^1(S^1 \times \mathbb{R}^3)$ with $\overset{\circ}{f} \geq 0$, $\overset{\circ}{f}(\theta + 2\pi, v) = \overset{\circ}{f}(\theta, v)$ for $(\theta, v) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$ and*

$$W_0 := \sup\{\|v\| | (\theta, v) \in \text{supp } \overset{\circ}{f}\} < \infty$$

Let given regular functions $\bar{R}, \bar{\tau}, \bar{\mu}, \bar{A}, \bar{H}, \bar{G}, \psi \in C^1(\mathbb{R})$ and $\overset{\circ}{R}, \overset{\circ}{\tau}, \overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{H}, \overset{\circ}{G}, \overset{\circ}{\phi} \in C^2(S^1)$. Then there exists a unique left maximal regular solution $(f, R, \tau, \mu, A, H, G, \phi)$ of the complete EVSFS with $(f, R, \tau, \mu, A, H, G, \phi)(t_0) = (\overset{\circ}{f}, \overset{\circ}{R}, \overset{\circ}{\tau}, \overset{\circ}{\mu}, \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{H}, \overset{\circ}{G}, \overset{\circ}{\phi})$ and $(\bar{R}, \bar{\tau}, \bar{\mu}, \bar{A}, \bar{H}, \bar{G}, \psi)(t_0) = (\bar{R}, \bar{\tau}, \bar{\mu}, \bar{A}, \bar{H}, \bar{G}, \psi)$ on a time interval $]T, t_0]$ with $T \in [0, t_0[$.

Remark 4.1 *The result we have obtained here proves particularly the local in time existence of solution in Gowdy case with scalar field or not in passed direction. It generalizes also the T^2 symmetry case without scalar field. It remains using global existence result obtained in [7], looking for stability and asymptotic behaviour of that solution. Another preoccupation will be focused on what happens in future direction (cf [6]).*

References

- [1] H. Andreasson, Global foliations of matter spacetimes with Gowdy symmetry. *Comm. Math. Phys.* 206 (1999), pp.337-365.
- [2] H. Andreasson, H. Ringström, Proof of the cosmic no-hair conjecture in the T^3 Gowdy symmetric Einstein-Vlasov setting. arXiv: 1306.6223v1 [gr-qc] 26 Jun 2013.
- [3] H. Andreasson, A. D. Rendall, and M. Weaver, Existence of CMC and constant areal time foliations in T^2 symmetric spacetimes with Vlasov matter, *Comm. Partial Differential Equations*, 29, N^0 1-2, pp. 237-262 (2004).
- [4] B.K. Berger, P. Chrusciel, J. Isenberg and V. Moncrief, Global foliations of vacuum spacetimes with T^2 isometry, *Ann. Phys.* 260, 117-148 (1997).
- [5] Y. Choquet-Bruhat, Problème de Cauchy pour le système intégro-différentiel d'Einstein-Liouville, *Ann. Inst. Fourier*, tome 21, N^0 3 pp. 181-201 (1971).
- [6] A.T. Lassiye, Equations d'Einstein-Vlasov en symétrie T^2 avec champ scalaire non linéaire. Thèse de Doctorat/Ph.D en Mathématiques, Université de Yaounde 1 (2020).
- [7] A.T. Lassiye, D. Tegankong, N. Noutchequeme, The Einstein-Vlasov-Scalar field system with Gowdy or T^2 symmetry in contracting direction. *Acta Math Vietnam* (2018) Vol 44 pp. 501-518.
- [8] H. Ringström, Future stability of the Einstein non-linear scalar field system, *Invent. Math.* 173, 123-208, (2008).
- [9] J. Smulevici, On the area of the symmetry orbits of cosmological spacetimes with toroidal or hyperbolic symmetry. *Analysis & PDE*. Vol 4, N^0 2, 191-245 (2011).

- [10] D. Tegankong, N. Noutchequeme and A.D. Rendall , Local existence and continuation criteria for solutions of the Einstein-Vlasov-scalar field system with surface symmetry Journ. Hyperb. Diff. Eq. Vol 1, No.4, (2004) 691-624.
- [11] M. Weaver, On the area of the symmetry orbits in T^2 symmetric spacetimes with Vlasov matter, Classical Quantum Gravity, 21 (2004), pp.1079-1097.