

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES ET
GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE "PHYSIQUE ET APPLICATIONS"

BP 812 Yaoundé
email: crfd_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING
UNIT FOR "PHYSICS AND APPLICATIONS"

PO BOX 812 Yaoundé
email: crfd_stg@uy1.uninet.cm

**LABORATOIRE DE PHYSIQUE NUCLEAIRE, ATOMIQUE,
MOLECULAIRE ET BIOPHYSIQUE**

**ETUDE DE LA DEFORMATION DES NOYAUX
TRIAxiaux EN UTILISANT LE HAMILTONIEN
DE BOHR**

Thèse

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du
Diplôme de Doctorat/PhD en Physique

Option: Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection

Par :

OMON Yves

Matricule : 12W1745

Master en Physique

Sous la co-direction de :

ELE ABIAMA Patrice
Maître de Recherche
(MINRESI/ CNDT)

OWONO ATEBA Pierre
Maître de conférences
(Université de Yaoundé I)



Année 2021



DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE
DOCTORAT/Ph.D

Nous, Professeur **BEN-BOLIE Germain Hubert** et Professeurs **H.P EKOBENA FOUDA**, **SAÏDOU** et **HONA Jacques** respectivement Président et Examineurs du jury de la Thèse de Doctorat/Ph.D de Monsieur **OMON Yves** Matricule **12W1745**, préparée sous la co-direction des Professeurs **OWONO ATEBA Pierre** et **ELE ABIAMA Patrice**, intitulée : « **Etude de la déformation des noyaux triaxiaux en utilisant le Hmiltonien de Bohr** », soutenue le **lundi, 06 décembre 2021**, en vue de l'obtention du grade de Docteur/Ph.D en Physique, Spécialité **Physique des rayonnements et Biophysique** attestons que toutes les corrections demandées par le Jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé le : ...**0.9 DEC 2021**.....

Les Examineurs

Le Président du Jury

Pr. H.P EKOBENA FOUDA

Pr. SAÏDOU

Pr. BEN-BOLIE Germain Hubert

Pr. HONA Jacques



Le Chef de Département de Physique

Université de Yaoundé I

Faculté des Sciences

Département de Physique

**Etude de la déformation des noyaux triaxiaux en utilisant le
Hamiltonien de Bohr**

THÈSE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat/PhD en Physique

Option: **Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection**

Par

OMON Yves

Matricule: 12W1745

Master en Physique

Sous la co-direction de:

ELE ABIAMA Patrice

Maître de Recherche

MINRESI/CNDT

et de

OWONO ATEBA Pierre

Maître de Conférences

Université de Yaoundé I

Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique

Copyright ©OMON Yves, omonyves@yahoo.fr

Année 2021

Dédicace

Je dédie cette thèse :

À Dieu Tout Puissant Créateur du Ciel et de la Terre, qui m'a donné la santé, la sagesse et l'intelligence pour l'aboutissement de cette Thèse .

À mon père OMON Yves et ma mère Madame OMON KONGO Emilie, qui m'ont encouragé à donner le meilleur de moi-même et qui m'ont donné les moyens d'être ce que je suis aujourd'hui.

À mes frères et sœurs OMON : Bruno, Odilon, Octavie, Aimé, Belvia et Christophe pour leurs différents soutiens et conseils.

À ma femme KONGO MBONGO Jockanaelle Léaphra et mes enfants OMON GNIKESSE : Bienheureux Onyx, Bienheureuse Patricia et Yvenaelle pour leurs prières à mon endroit.

Remerciements

Je remercie chaleureusement mon Directeur de Thèse, le **Pr. OWONO ATEBA Pierre** qui est le fondateur du Laboratoire de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I. Grâce à lui, nous avons bénéficié du matériel adéquat pour nos différentes expériences dans le Laboratoire.

J'exprime mes remerciements à mon Co-Directeur de Thèse, le **Dr. ELE ABIAMA Patrice, Maître de Recherche** qui, malgré ses différentes occupations au Ministère de la Recherche Scientifique, a dirigé mes travaux pendant toutes ces années, depuis mon master 2 jusqu'à la Thèse. Ses conseils éclairés et ses expériences dans le domaine du nucléaire m'ont été très profitables. Je lui en suis très reconnaissant.

J'exprime ma profonde gratitude au **Pr. BEN-BOLIE Germain Hubert**, Chef du Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique de l'Université de Yaoundé I qui, en 2012 m'avait accueilli au sein de son Laboratoire depuis mon inscription en master 2 jusqu'à ce jour. Ses conseils et orientations m'ont aidé à finaliser mes travaux. Je serai toujours reconnaissant à son égard. Car il a contribué efficacement à la finalisation de cette Thèse.

Je remercie le **Pr. OWONO OWONO Luc Calvin** qui fut mon Professeur de Mécanique quantique en master 2, Vice-Recteur à l'Université de Yaoundé I.

J'exprime ma reconnaissance au **Pr. EKOBENA FOU DA Henri Paul**, Vice-Recteur à l'Université de Ngaoundéré.

Je remercie grandement le **Pr. NDJAKA Jean-Marie Bienvenu**, Chef de Département de Physique, et le **Pr. KOFANE Timoléon Crépin**, pour leurs conseils et encouragements dans la finalisation de cette Thèse.

Je remercie particulièrement : **Pr. SAÏDOU** et **Pr. BOYOMO ONANA Marthe**, pour leurs enseignements en master 2.

Mes remerciements vont également à tous les Enseignants du Département de Physique, en particulier aux Professeurs : **NJANDJOCK NOUCK Philippe**, **HONA Jacques**, **TCHAWOUA Clément**, **WOAFO Paul**, **PEMHA ELKANA**, **BODO Bertrand**, **ENYEGUE A NYAM Françoise**, **ZEKENG Serge**, **VONDOU Débertini**, **FEWO Serge Ibrid**, **NANA ENGO Serge**, **DJUIDJE Françoise**, **NANA NBENJO Roméo**, **MVOGO Alain**, **SIEWE SIEWE Martin** et aux Docteurs **MBINACK Clément**, **CHAMANI Roméo**, **ABDOURAHIMI**, **MELI'I Jorelle Larissa** .

Ma reconnaissance va tout particulièrement aussi au **Pr. EMA'A EMA'A Jean-Marie** pour son soutien remarquable et consistant dans l'aboutissement de mes travaux de recherches.

Je remercie également les Docteurs : **NGA ONGODO Dieudonné**, **TAKEMBO Clovis**, **NGOUBI Hénock**, **ALI ZARMA**, **TAKOUKAM SOH Serge** et **TANKOU TAGNE Alain** pour leurs conseils.

J'adresse mes plus sincères remerciements aux Honorables membres du jury, qui ont accepté de juger cette Thèse.

Je tiens à remercier très particulièrement tous les membres du Laboratoire de Physique Nucléaire pour leurs aides et assistances particulièrement, les doctorants MBIDA MBEMBE Serge, AKAMBA MBEMBE Bertrand, NDOUVADE KANAGO Vivien Ulrich, EBODE Fabien, ADJABA Jean Liboire, TJOCK-MBAGA Thomas, AWE Richard, KOYANG François, YIA ETOLO Hervé, MAH TSILA Philippe, ANEMENA ETOGA Emmanuel, AHMADOU KATARKALAH, SOULEY-MANOU HAMAN ADAMA et TAMIAN FOTSO Kévin.

Je tiens aussi à remercier l'Ambassade de la République Centrafricaine à Yaoundé, l'Association des Elèves et Etudiants Centrafricaine ainsi que toute la colonie Centrafricaine vivant au Cameroun.

À tous ceux qui ont contribué et participé de près ou de loin à la rédaction de cette Thèse et qui n'ont pas été cités, je leurs adressent ma profonde reconnaissance.

Liste des Abréviations et Symboles

PEK : Potentiel Ecranté de **Kratzer**

NU : **Nikivorov Uvarov**

CCG : Coefficients de **Clebsch Gordan**

GANIL : **Grand Accélérateur des Ions Lourds**

MC : **Modèle en Couche**

MCS : **Modèle en Couche Sphérique**

Pm : **Picomètre**

fm : **femtomètre**

E_l : **Energie de liaison**

Xe : **Xénon**

Pt : **Platine**

CPS : **Critical Point Symmetries**

MeV : **Méga électron Volt**

E_c : **Energie cinétique du nucléide**

$V(\beta, \gamma)$: **Energie potentielle du nucléide**

\hat{H} : **Opérateur Hamiltonien**

\hat{p} : **Opérateur impulsion du mouvement**

-
- B** : Masse totale du nucléide
- n** : Nombre quantique principal
- l** : Nombre quantique azimutal
- j** : Nombre quantique associé à la résultante du couplage entre le moment angulaire orbital
- s** : Moment angulaire de spin
- m** : Nombre de quantique magnétique
- N** : Nombre de couches de l'Oscillateur Harmonique
- n_z : Nombre quantique principal selon l'axe de symétrie
- Λ : Projection du moment orbital \vec{l} sur l'axe de la symétrie
- n_ω : Nombre quantique secondaire
- L** : Nombre quantique cinétique
- a_v : Effet volumique
- a_c : Effet de repulsion coulombienne
- a_s : Effet surfacique
- a_p : Terme d'appariement
- a_a : Terme d'asymétrie
- PWS** : Potentiel de Woods-Saxon
- OH** : Oscillateur Harmonique
- β : Paramètre qui mesure l'étendue de la déformation
- γ : Paramètre qui montre l'éloignement par rapport à la symétrie axiale

k : Paramètre de déformation du potentiel

$P_n^{(\alpha,\beta)}$: Polynôme de Jacobi

$H_{n\bar{\gamma}}$: Polynôme de Hermite

$D(\theta_i)$: Composante angulaire de la fonction d'onde appelée fonction de Wigner

$\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$: Fonction d'onde

θ_i : Angle d'Euler : $i = 1, 2, 3$

\hat{Q}_k^2 : Composantes du moment angulaire

k : Représente les trois axes de coordonnées : $k = 1, 2, 3$

u : Unité de masse atomique

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Liste des Abréviations	iv
Table des matières	vii
Liste des Figures	x
Abstract	xii
Résumé	xiii
Chapitre I Revue de la littérature sur la structure nucléaire	4
I.1 Introduction	4
I.2 Noyau atomique	4
I.2.1 Historique	4
I.2.2 Présentation de l'atome	5
I.2.3 Caractéristiques de l'atome	5
I.3 Généralités sur le noyau	6
I.3.1 Composants du noyau	6
I.3.2 Masse et énergie	6
I.3.3 Défaut de masse atomique : Δm	7
I.3.4 Energie de liaison ou énergie de cohésion : E_l	8
I.3.5 Energie de liaison par nucléon	9
I.4 Différents types de radioactivités	10
I.5 Xénon	12
I.5.1 Origine du xénon	12
I.5.2 Propriétés physiques et chimiques du xénon	12
I.5.3 Isotopes du xénon	12
I.5.4 Importance du xénon dans l'industrie	12
I.5.5 Utilisation du xénon	12
I.5.6 Effets du xénon sur la santé	13
I.6 Platine	15

I.6.1	Historique du platine	15
I.6.2	Utilisation du platine	15
I.6.3	Isotopes du platine	16
I.6.4	Importance du platine dans l'industrie	16
I.6.5	Effets du platine sur la santé	16
I.6.6	Effets du platine sur l'environnement	17
I.7	Description des modèles nucléaires	19
I.7.1	Modèle de la goutte liquide	19
I.7.2	Modèle en couches	21
I.8	Déformations et rotations dans les noyaux atomiques	22
I.8.1	Déformations	22
I.8.2	Déformations nucléaires	22
I.8.3	Forces subies par le noyau atomique	22
I.8.4	Rotation	23
I.8.5	Mouvement collectif dans les noyaux	23
I.8.6	Mode vibrationnel	24
I.8.7	Mode rotationnel	25
I.8.8	Approximations du champ moyen	27
I.8.9	Notions de base du modèle en couches sphérique	27
I.8.10	Modèle en couches sphériques	28
I.8.11	Déformation triaxiale	30
I.9	Quelques travaux antérieurs sur les noyaux triaxiaux	32
I.10	Conclusion	33
Chapitre II Matériel et Modèle		34
II.0.1	Introduction	34
II.1	Mesure expérimentale de l'énergie de transition par spectroscopie gamma	34
II.2	Le modèle du Hamiltonien de Bohr	40
II.3	Modèle du Hamiltonien de Bohr	40
II.4	Potentiels nucléaires	40
II.5	Méthode de Nikiforov-Uvarov	40
II.5.1	Équation différentielle de Nikiforov-Uvarov (NU)	41
II.6	Solution de l'équation de NU	41
II.6.1	Valeurs propres	44
II.6.2	Fonctions propres	45
II.7	Paramètres de NU	46
II.8	Équations générales des mouvements régissant les déformations et les interactions nucléaires	50
II.9	Équations des déformations nucléaires	50
II.10	Techniques de séparations des mouvements de la déformation et des interactions	53
II.10.1	Méthode de séparation des mouvements de déformations des nucléides	53
II.10.2	Solution de la partie γ	56

II.10.3	Solution de la partie β	56
II.10.4	Cas spéciaux	58
II.10.5	Détermination de la fonction d'onde	59
II.11	Moment de transition quadrupolaire électrique	61
II.11.1	Moment de transition quadrupolaire nucléaire	61
II.12	Conclusion	64
Chapitre III	Résultats et discussion	65
III.1	Introduction	65
III.2	Présentation des résultats et discussion	65
III.2.1	Relation intra et inter-bande	69
III.2.2	Effet de l'étalonnage des énergies dans la bande γ	81
III.2.3	Densité de probabilité	89
III.3	Conclusion	97
Conclusion Générale		98
Appendix		99
Liste des Publications issue de la thèse		101
Références Bibliographiques		102

Table des figures

Figure 1	L'atome dans le modèle de Bohr [50].	5
Figure 2	Défaut de masse d'un noyau atomique [51].	8
Figure 3	Énergie de liaison par nucléon [53].	9
Figure 4	Carte des noyaux classées en fonction de leur nombre de neutrons (en abscisse), leur nombre de protons (en ordonnée) et de leurs instabilités [54].	10
Figure 5	Image du platine [57].	15
Figure 6	Les différentes formes correspondant aux différents ordres multipolaires [71].	24
Figure 7	a) Forme quadrupolaire d'un noyau pour le cas de symétrie axiale ($\gamma = 0$) en haut de la figure, et exemple de la déformation triaxiale ($0^\circ < \gamma < 60^\circ$) présenté en bas de cette figure. b) Évolution de la forme nucléaire dans le plan (β, γ) . Quand γ n'est pas un multiple de 60° le noyau prend une forme triaxiale (la déformation non-axiale) [72].	26
Figure 8	Niveaux d'énergie selon le modèle en couches [76].	30
Figure 9	Noyau triaxial dans son référentiel intrinsèque où sont représentés l'angle θ entre le vecteur rotation $\vec{\omega}$ et l'axe Ox , et l'angle α entre les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ et moment angulaire total \vec{J} [83].	31
Figure 10	De la production à la détection.	35
Figure 11	Matrice d'identification ΔE -Tof avant la cible.	35
Figure 12	Identification après la cible.	36
Figure 13	Effet Doppler corrigé suivant l'angle de correction sur la raie à 885 keV du ^{32}Mg	37
Figure 14	Spectre gamma ^{32}Mg pour toutes les réactions, inélastique, (d,p) et (d, ^3He).	38
Figure 15	Comparaison des premiers états du ^{34}Si avec différents calculs.	39
Figure 16	Gamma en coïncidence avec 2^+	39
Figure 17	Variations du potentiel écranté de Kratzer $\mu(\beta)$ en fonction de β lorsque $A_1 = -24$, $B_1 = 60$ et $k_1 = 0.050$, $k_2 = 0.075$ et $k_3 = 0.030$	79
Figure 18	Variations du potentiel écranté de Kratzer $\mu(\beta)$ en fonction de β pour les valeurs $A_2 = -60$, $B_2 = 47$ et $k_1 = 0.050$, $k_2 = 0.070$, $k_3 = 0.090$	80
Figure 19	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et les données expérimentales du ^{126}Xe	82
Figure 20	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et les données expérimentales du ^{128}Xe	83

Figure 21	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et les données expérimentales du ^{130}Xe	84
Figure 22	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et les données expérimentales du ^{132}Xe	85
Figure 23	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et l'expérimentale du ^{134}Xe	86
Figure 24	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et des données expérimentales du ^{192}Pt	87
Figure 25	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et des données expérimentales du ^{194}Pt	88
Figure 26	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et l'expérimentale du ^{196}Pt	89
Figure 27	Variation de la densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{126}Xe	90
Figure 28	Variation de la densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{128}Xe	91
Figure 29	Variation de la densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{130}Xe	92
Figure 30	Variation de la densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{132}Xe	93
Figure 31	Variation de la densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope des états ^{130}Xe	94
Figure 32	Variation de la densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{192}Pt	95
Figure 33	Densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{194}Pt	96
Figure 34	Variation de la densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{196}Pt	97

Abstract

In this Thesis, we study Bohr Hamiltonian model describing the different nuclear interactions, motions and deformations that the atomic nucleus undergoes. This model is solved by relying on the Nikiforov-Uvarov method and using Kratzer screened potential to determine the energy of the spectrum and the wave function. We apply this model to the isotopes of $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$ and $^{192,194,196}\text{Pt}$. Indeed, by using the technique of separating variables, we end up with two equations, one of which is a function of the parameter which represents the rotational motion and the equation of the vibrational motion which is a function of the parameter γ . In order to determine the energy and wave function of the system, the equation containing the β part is solved using the Nikiforov-Uvarov method. Normalized energy ratios, probabilities of electric B(E2) transitions and quadrupole moments are calculated for each isotope of platinum and xenon. The calculations of the energies in the ground state band, the β and γ band are obtained using the selection rules imposed by the Clebsch-Gordan coefficients, i.e., the allowed transitions are those which satisfy the equation $\Delta\alpha = \pm 2$. For all the platinum isotopes and some isotopes of ^{126}Xe and ^{130}Xe , it appears that the results obtained by our model are closer to the experimental results than those of the models of Chabab (2015) and Morse (2010). On the other hand, these results are more distant from the experimental results for the isotopes of ^{128}Xe , ^{132}Xe and ^{134}Xe . This shows that our model is better suited for platinum and some xenon isotopes. For the wave function, we also note that for each energy level, the peak of the probability density distribution increases as the angular momentum quantum number increases. Finally, the various results obtained are mostly in good agreement with the experimental data.

Keywords : Bohr Hamiltonian, Potential screened Kratzer, Nikiforov-Uvarov method, triaxial nuclei, probabilities of transitions B(E2).

Résumé

Dans cette Thèse, nous étudions le modèle du Hamiltonien de Bohr pour décrire les différentes interactions nucléaires, les mouvements et les déformations que subit le noyau atomique. Ce modèle est résolu en s'appuyant sur la méthode de Nikiforov-Uvarov et en utilisant le potentiel écranté de Kratzer pour déterminer l'énergie du spectre et la fonction d'onde. Nous appliquons ce modèle aux isotopes de $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$ et de $^{192,194,196}\text{Pt}$. Ainsi, en utilisant la technique de séparation des variables, on aboutit à deux équations dont l'une est fonction du paramètre γ qui représente le mouvement de rotation et l'équation du mouvement de vibration qui est fonction du paramètre β . Afin de déterminer l'énergie et la fonction d'onde du système, l'équation contenant la partie β a été résolue en utilisant la méthode de Nikiforov-Uvarov (NU). Les rapports des énergies normalisés, les probabilités de transitions électrique B(E2) et les moments quadrupolaires ont été calculés pour chaque isotope de platine et de xénon. Les calculs des énergies dans la bande de l'état fondamental, la bande β et γ ont été obtenus en utilisant les règles de sélection imposées par les coefficients de Clebsch-Gordan, c'est-à-dire que, les transitions permises sont celles qui vérifient l'équation $\Delta\alpha = \pm 2$. Pour tous les isotopes de platines et de quelques isotopes de ^{126}Xe et le ^{130}Xe , il apparaît que les résultats obtenus par notre modèle sont plus proches des résultats expérimentaux que ceux des modèles de Chabab (2015) et Morse (2010). Par contre, ces résultats sont plus éloignés des résultats expérimentaux pour les isotopes de ^{128}Xe , ^{132}Xe et le ^{130}Xe . Ce qui montre que notre modèle est mieux adapté pour le platine et quelques isotopes de xénon. Pour la fonction d'onde, on note également que pour chaque niveau d'énergie, le pic de la distribution de densité de probabilité augmente lorsque le nombre quantique du moment angulaire augmente. Enfin, les différents résultats obtenus sont pour la plupart des cas en bon accord avec les données expérimentales.

Mots clés : Hamiltonien de Bohr, Potentiel écranté de Kratzer, méthode de Nikiforov-Uvarov, noyaux triaxiaux, probabilité de transition B(E2).

Introduction Générale

Dès le début du XX^e siècle, des preuves irréfutables ont été apportées pour dire que la matière pouvait s'expliquer à partir des atomes. Ces atomes sont constitués d'un noyau central et des électrons [1]. En 1911, Ernest Rutherford qui peut être considéré comme l'un des pères de la physique nucléaire, a découvert l'existence du noyau atomique grâce à l'expérience de Rutherford menée par Hans Geiger et Ernest Marsden en 1909, qui démontre l'existence d'une forte densité de charges positives au centre de l'atome, contrairement aux théories de type pudding de l'époque [2]. En 1919, il prouve que des noyaux sont composés de noyaux d'hydrogène et découvre ainsi le proton. En 1932, James Chadwick (Assistant de Rutherford) découvre le neutron. Ainsi, on sait que les noyaux sont composés de protons et de neutrons [3].

Le modèle en couches est un modèle de structure nucléaire comparable à bien des égards au modèle planétaire de l'atome. Il constitue la pierre angulaire de la physique nucléaire en ce sens que son ambition est de rendre compte de la structure des noyaux en termes microscopiques, c'est-à-dire à l'aide des propriétés individuelles de ses constituants. Sa démarche, pour contourner le problème à N corps, consiste à recourir, dans un premier temps, à l'approximation dite du potentiel moyen en espérant traiter ensuite toutes les interactions résiduelles des nucléons comme des perturbations.

Tout au long du XX^e siècle, les physiciens ont développés différents modèles théoriques permettant de modéliser les mouvements des nucléons dans le noyau. Mais chacun de ces modèles est valable pour expliquer certaines propriétés du noyau atomique. La recherche qui s'en est suivie a permis de modéliser le noyau comme un fluide constitué de nucléons confinés par l'interaction forte dans un volume fini de l'espace. Par exemple l'un des premiers modèles du noyau, proposé par Weizsäcker en 1935, est celui de la goutte liquide. Le noyau est assimilé à un fluide quantique constitué de nucléons (protons et neutrons)[4]. Le modèle de la goutte liquide offre une bonne description des masses des atomes connus. Ce modèle permet aussi d'expliquer les réactions de la fission des noyaux lourds [5], interprétée alors comme le mouvement collectif des nucléons au sein du noyau causé par la répulsion coulombienne entre protons et aboutissant

à la scission si la chaleur de réaction Q devient positive. L'étude des données nucléaires, qui devenaient de plus nombreuses et plus précises, confirma l'évidence d'une stabilité accrue de certains noyaux possédant des nombres de neutrons et de protons appartenant à des séquences bien déterminées (les nombres magiques 2, 8, 20, 28, 50, 82 et 126). L'explication donnée par le modèle de particules quantiques indépendantes possédant un couplage spin-orbite important, le modèle en couches [6, 7], a permis de comprendre ces séquences, ainsi que la majorité des spins des noyaux connus jusqu'alors [8]. Cependant, de nombreuses données expérimentales ne pouvaient s'expliquer par ce modèle en couches de particules individuelles, mais étaient comprises comme des phénomènes d'ensemble du noyau des phénomènes collectifs. C'était en particulier le cas de certaines résonances de hautes énergies (les résonances géantes) découvertes par Baldwin et Klaiber [9], et interprétées comme des vibrations dipolaires par Goldhaber et Teller [10], vibrations collectives des neutrons et des protons en opposition de phase. Parmi les données expérimentales mettant en défaut le modèle en couches figurait aussi la mise en évidence de moments quadripolaires dans certains noyaux non magiques, impliquant une déformation importante [11]. On peut ajouter enfin certains états du spectre nucléaire, présentant de fortes analogies avec des modes de vibration ou de rotation du noyau dans sa totalité [12, 13]. La symétrie $E(5)$ [14] est conçue pour décrire la transition de phase de second ordre entre des noyaux sphériques, tandis que la transition de phase de premier ordre entre les noyaux rotatifs déformés à déformations vibrationnelles et à symétrie axiale est décrite par la symétrie $X(5)$ [15, 16]. Cette description est faite à l'aide d'un hamiltonien connu sous le nom de hamiltonien de Bohr ou hamiltonien collectif qui utilise deux variables intrinsèques β et γ avec les trois angles d'Euler (θ, φ, ϕ) . β mesure l'écart par rapport à la sphéricité du noyau, tandis que γ spécifie la déformation axiale. Récemment, les solutions analytiques de Iachello [17,18] ont donné un nouvel élan à l'hamiltonien de Bohr, puisqu'elles sont considérées comme des exemples de symétries de points critiques [19]. Ces symétries sont liées aux transitions de phase de forme dans la structure nucléaire. A titre d'illustration, les symétries appelées $Y(5)$ [20] et $Z(5)$ [21], sont liées à la transition de formes axiales à triaxiales et de formes allongées à oblates. L'étude des solutions du hamiltonien de Bohr devrait en fait nous aider à mieux comprendre les transitions de phase de forme et la triaxialité dans les noyaux ainsi que les mécanismes physiques des problèmes associés. Dans ce contexte, une attention particulière est consacrée au développement des solutions analytiques du hamiltonien de Bohr avec différents potentiels pour étudier les transitions

de forme des noyaux. Pour la variable β , certains potentiels réguliers utilisés sont : potentiel de l'oscillateur harmonique [22], potentiels de Coulomb et de Kratzer [23], potentiel de Davidson [24, 25], potentiel de Killingbeck [26, 27], potentiel quartique [28], potentiel sextique [29 - 32], potentiel puits carré [17], potentiel puits fini [33], potentiel de Hülthen [34], potentiel de Manning-Rosen [35,36], potentiel de Eckart [37], potentiel de Morse [38, 39], potentiel de Woods-Saxon [40], potentiel de Killingbeck plus potentiel de Morse [41]. La déformation quadrupolaire, la plus courante parmi les noyaux déformés, est liée aux probabilités de transitions quadripolaires électriques B(E2) entre les états excités, constituant des mesures directes de la collectivité. Pour une forme triaxiale, la surface des noyaux oscillent uniformément sur la coordonnée γ de la forme allongée à la forme oblique [42, 43]. Il est désormais d'usage d'utiliser le potentiel de l'oscillateur harmonique ayant un minimum d'angle autour de $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Notre étude consiste à décrire le comportement des noyaux triaxiaux en utilisant le potentiel écranté de Kratzer. La méthode de Nikiforov-Uvarov est utilisée pour déterminer le spectre d'énergie et la fonction d'onde correspondante. Les rapports des énergies normalisés et la probabilité de transition quadrupolaire électrique B(E2) des isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ et de $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$ sont calculés et comparés aux données expérimentales.

Dans ce travail, il est question d'utiliser le modèle du Hamiltonien de Bohr en utilisant le potentiel écranté de Kratzer en s'appuyant sur la méthode de Nikiforov-Uvarov. Ce modèle est utilisé sur les isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$ et de $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$. Dans le but de déterminer l'énergie du spectre, la fonction d'onde ainsi que la probabilité de transition électrique B(E2). Ce travail est organisé en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la revue de la littérature sur la structure nucléaire.

Le deuxième chapitre présente le modèle du Hamiltonien de Bohr, ainsi que la détermination des paramètres.

Le troisième chapitre quant à lui présente les résultats du modèle et discussion. Ce travail s'achève par une conclusion générale suivi des perspectives qui peuvent en découler.

REVUE DE LA LITTÉRATURE SUR LA STRUCTURE NUCLÉAIRE

I.1 Introduction

La notion de la structure nucléaire permet de décrire le mode d'arrangement des nucléons dans les noyaux et vise à établir des lois et des principes afin de pouvoir construire des modèles à caractère prédictif. Dans ce premier chapitre, la structure du noyau atomique dans ses détails est présentée ainsi que les modèles nucléaires utilisés afin d'expliquer les états d'énergies du noyau atomique et quelques unes de ces déformations. Par la suite, les forces nucléaires, ses caractéristiques et les aspects énergétiques mis en jeu dans le noyau sont ressortis.

I.2 Noyau atomique

I.2.1 Historique

En 1897, Thomson a montré que l'atome n'est pas une particule élémentaire mais qu'il contient lui-même des particules négatives, appelées électrons. Mais en 1909, Geiger et Marsden [47] bombardent une fine feuille d'or avec des particules alpha (noyau de l'atome d'hélium). La majorité des particules traverse la feuille d'or en subissant une légère déviation, mais certaines sont rejetées en arrière. Deux années plus tard, Rutherford arrive à la conclusion que ce phénomène ne peut se produire que si la charge positive est concentrée dans une petite partie centrale de l'atome, appelée noyau atomique, dont la taille est de l'ordre de 10^{-14} m : l'atome est en grande partie formé de vide [48].

Au cours de l'année 1931, le physicien Chadwick a prouvé l'existence d'une particule neutre. Il a découvert aussi les propriétés de cette particule qu'il nomme *neutron*. Il a déclaré que le noyau atomique est constitué des deux types de particules : les protons et les neutrons. En 1970,

le physicien Gell-Mann a prouvé l'existence des petites particules qui entrent dans la constitution des protons et des neutrons. Il les appelle les quarks. Le noyau atomique est donc constitué des nucléons (formés de Z protons et de N neutrons) à l'intérieur desquels, on y trouve de petites particules appelées quarks [49].

I.2.2 Présentation de l'atome

Les atomes sont des particules qui constituent la matière. Au centre de l'atome, se trouve un noyau, composé de neutrons et de protons autour duquel se trouvent les particules en mouvement très rapide, les électrons. Dans un atome, il y a autant de protons que d'électrons. Le nombre de protons est le numéro atomique Z . La somme des protons et des neutrons est le nombre de masse A . Chaque atome est défini par son numéro atomique Z , qui correspond au nombre de protons présents dans le noyau.

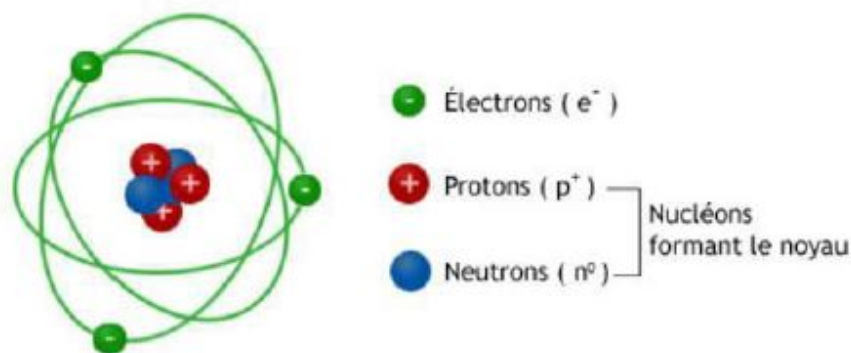


FIGURE 1 – L'atome dans le modèle de Bohr [50].

I.2.3 Caractéristiques de l'atome

L'atome est composé d'un nuage électronique de 100 pm (10^{-10} m ou 1 \AA) ainsi que d'un noyau de 10^3 pm soit 10^{-15} m . Le noyau se compose de Z protons et de N neutrons. Le neutron et le proton, de masse à peu près égales, représentent 2 états quantiques d'une même particule fondamentale : le nucléon.

I.3 Généralités sur le noyau

I.3.1 Composants du noyau

Le noyau est constitué de proton et de neutron. Les différents noyaux ou nucléides se distinguent donc par le nombre de protons Z et de neutrons N qui les constituent. Le nombre de protons indique l'élément chimique du noyau considéré. La manière la plus commune de représenter un noyau particulier est ${}^A_Z X_N$, souvent abrégée ${}^A X$, où A est le nombre de masse ($A = Z + N$) et X l'élément chimique. Pour chaque élément, le nombre de neutrons contenu dans le noyau peut varier. Les différents noyaux ainsi formés sont appelés isotopes de l'élément. Rappelons quelques définitions de base :

▷ Nucléides :

C'est l'ensemble des éléments chimiques qui ont les mêmes nombres de masse A . Il est représenté par ${}^A_Z X$ ou ${}^A X$ avec :

A : Nombre de masse du noyau atomique,

Z : Nombre de charge ou nombre de protons du noyau atomique,

X : Symbole de l'élément chimique correspondant.

Exemples : ${}^{14}_6 C$; ${}^{14}_7 N$.

▷ Isotope :

On parle de noyaux isotopes quand ils ont même nombre Z de protons, mais de nombre de masses A différent. Ils diffèrent par leur nombre de neutrons N .

Exemples : ${}^{12}_6 C$; ${}^{13}_6 C$; ${}^{14}_6 C$

▷ Isobare :

On parle de nucléides isobares lorsqu'ils ont le même nombre de masse A mais de nombre de charges Z différentes.

Exemples : ${}^{14}_6 C$; ${}^{14}_7 N$ et ${}^{14}_8 O$.

▷ Isotone : Ce sont des noyaux qui ont même nombre de neutrons N mais de numéro atomique Z différent.

Exemples : ${}^{15}_7 N$ et ${}^{16}_8 O$.

I.3.2 Masse et énergie

▷ Unité de masse atomique : u.m.a. ou u.

La masse d'un atome peut être exprimée en kilogramme. Mais il faudra manipuler des nombres très petits, car elle est de l'ordre de 10^{-27} kg. C'est pour cette raison qu'une autre unité de masse est utilisée. L'unité de masse atomique est donc égale à un douzième de la masse d'un atome de l'isotope 12 de l'élément carbone.

Enumérons ici quelques valeurs relatives aux unités du système international des constituants du noyau :

- ▷ Unité de masse atomique : $1u=1,66054 \times 10^{-27}$ kg= 931.5 MeV/ c^2 ,
- ▷ Masse de l'électron : $m_e = 9,109 \times 10^{-31}$ kg= 5.4858×10^{-4} u= $0,511$ MeV/ c^2 ,
- ▷ Masse de proton : $m_p = 1,67264 \times 10^{-27}$ kg= $1,007276$ u= $938,28$ MeV/ c^2 ,
- ▷ Masse de neutron : $m_n = 1,675 \times 10^{-27}$ kg= $1,008665$ u= $939,57$ MeV/ c^2 ,
- ▷ La célérité de la lumière dans le vide c est de 3×10^8 m/s.

I.3.3 Défaut de masse atomique : Δm

Dans un noyau atomique, on ne trouve que de protons et de neutrons. Et donc la masse d'un noyau atomique devrait être la somme des masses de protons et de neutrons qui le constituent. L'expérience montre que la masse d'un nucléide au repos donné est inférieure à la somme de masses des nucléons séparés qui le constitue. C'est-à-dire, lors d'une décomposition d'un noyau ${}^A_Z X$, de masse m_X , en ses constituants, on a remarqué que :



$$m_X < Zm_p + Nm_n$$

La différence entre la somme des masses des nucléons séparés au repos (sans interaction) par la masse d'un nucléide au repos représente le défaut de masse atomique. La figure 2 représente le défaut de masse d'un noyau. Si on veut utiliser un formalisme mathématique, pour un nucléide ${}^A_Z X$ donné, on peut exprimer le défaut de masse atomique, noté Δm , par la relation :

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_X,$$

avec Z : nombre de protons ;

m_p : masse de proton ;

$A-Z=N$: nombre de neutrons ;

m_n : masse de neutron,

m_X : masse du noyau au repos.

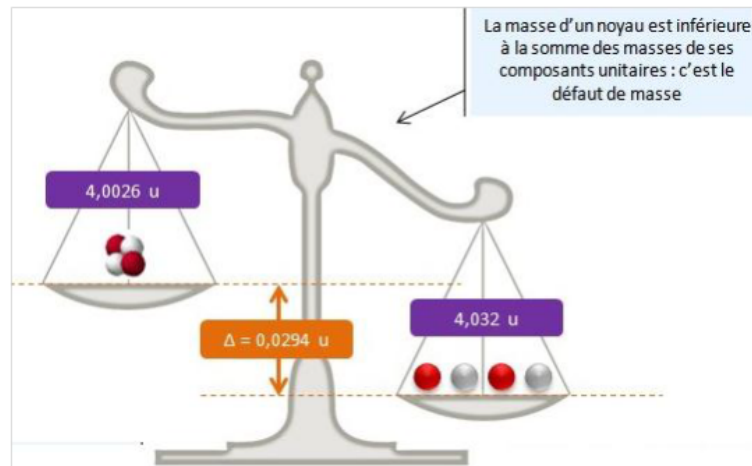


FIGURE 2 – Défaut de masse d'un noyau atomique [51].

I.3.4 Energie de liaison ou énergie de cohésion : E_l

Les nucléons (protons et neutrons) d'un noyau atomique sont confinés dans un très petit volume. Il existe une répulsion électrostatique intense entre les protons, car ils ont la même charge électrique ; ce qui devrait briser le noyau, mais ce n'est pas le cas. Car les nucléons s'attirent aussi par interaction forte. Cette interaction ne modifie pas la taille du noyau, mais elle assure tout simplement la liaison entre les nucléons qu'ils soient protons ou neutrons. Il est donc difficile de séparer les nucléons d'un noyau, car ils sont très liés grâce à l'existence de cette interaction. Pour pouvoir séparer les nucléons d'un noyau en ses constituants, il lui faut apporter une certaine énergie. Cette énergie est appelée Energie de liaison . L'énergie de liaison du noyau, notée E_l , est l'énergie qu'il faut fournir à un noyau pris au repos pour le dissocier en ses différents nucléons obtenus isolés, immobiles et sans interaction entre eux. C'est aussi l'énergie qu'il faut pour séparer les nucléons, pour casser la liaison entre les nucléons [52]. A partir d'une réaction de décomposition d'un noyau en ses différents constituants, on peut trouver l'expression de l'énergie de liaison d'un noyau. En effet soit la réaction de décomposition suivante :

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z) m_n - m_X.$$

Lors de cette réaction, l'énergie doit être conservée. Le noyau A_ZX a une énergie de masse $m_X c^2$ et aussi une énergie de liaison E_l . Les Z protons et les N neutrons séparés ont tout simplement une énergie de masse respectivement $Zm_p c^2$ et $(A - Z) m_n c^2$. En utilisant le principe de la conservation de l'énergie, on a :

$$m_X c^2 + E_l = Zm_p c^2 + (A - Z) m_n c^2$$

alors,

$$E_l = Zm_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 - m_X c^2$$

$$E_l = [Zm_p + (A - Z) m_n - m_X] \cdot c^2$$

$$E_l = \Delta m c^2$$

Cette expression montre que, l'énergie de liaison d'un noyau, est une énergie de masse qui correspond au défaut de masse de ce noyau.

I.3.5 Énergie de liaison par nucléon

Chaque noyau a sa propre énergie de liaison. Plus l'énergie de liaison est élevée, plus le noyau est stable. Et plus le noyau est lourd, plus l'énergie de liaison est élevée. Cependant, pour bien caractériser la stabilité d'un noyau, les physiciens ont introduit ce qu'on appelle énergie de liaison par nucléon. Comme son nom l'indique, l'énergie de liaison par nucléon, notée par E_N est donnée par la relation : $E_N = \frac{E_l}{A}$. Elle est exprimée en MeV / nucléon. La figure 3 représente l'énergie de liaison par nucléon.

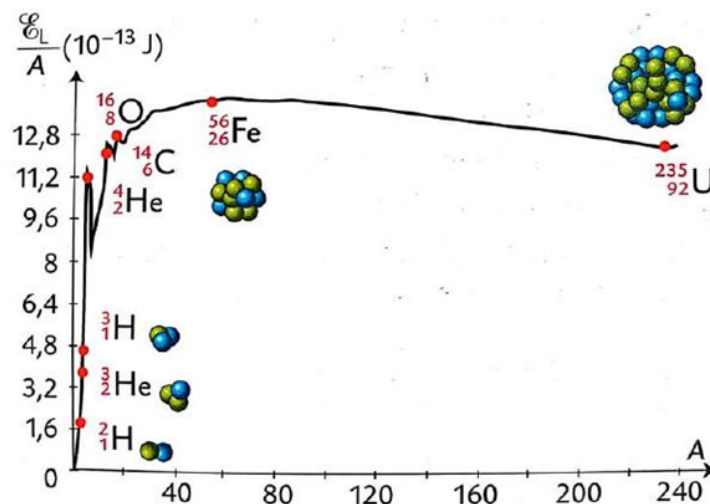


FIGURE 3 – Énergie de liaison par nucléon [53].

La figure 4 est une carte des nucléides ayant été observés, donnant la stabilité (noyaux stables en noir, instables en couleurs) des isotopes en fonction de leur nombre de neutrons en abscisse et de protons en ordonnée. La ligne noire formée par les noyaux stables s'appelle la vallée de stabilité. Cette vallée suit la diagonale pour laquelle le nombre de protons est égal au nombre de neutrons, jusqu'à environ $N = Z = 20$, puis s'en éloigne en restant en dessous. Les noyaux instables

qui sont indiqués par différentes couleurs selon le type de la radioactivité principale émise. Les noyaux au-dessus de la vallée de stabilité sont trop riches en protons. Ils se libèrent de cette contrainte soit par émission d'un ou plusieurs protons (isotopes rouges), soit par décroissance β^+ (en orange). Les noyaux sous la vallée de stabilité sont trop riches en neutrons. Ils se libèrent de cette contrainte soit en émettant un ou plusieurs neutrons (en violet), soit par décroissance β^- (en bleu). Les noyaux situés au bout de la vallée de stabilité sont instables car ils sont trop lourds. Dans ce cas, ils ont accès à d'autres modes de décroissance tel que la radioactivité α (en jaune), et la fission spontanée (en vert).

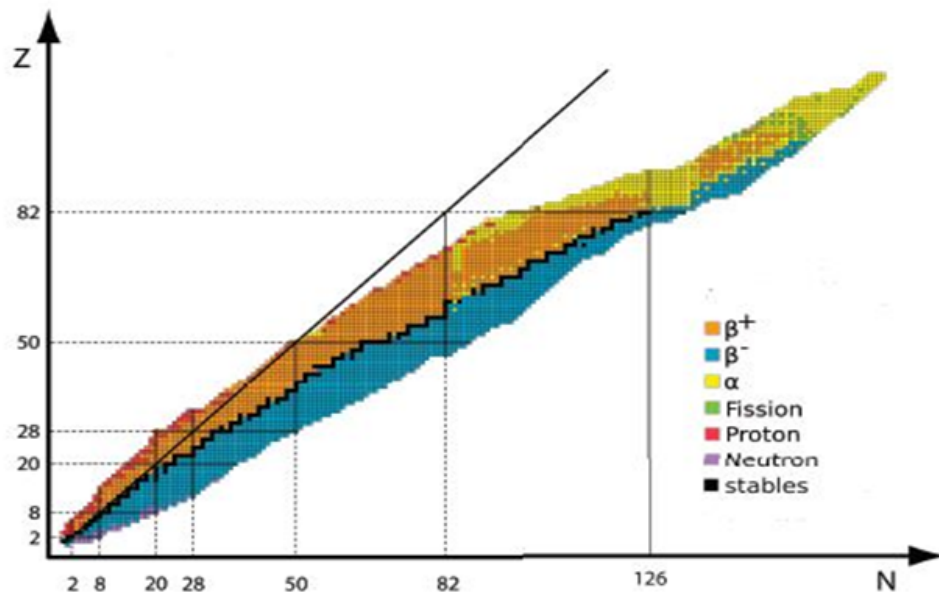


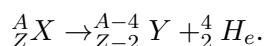
FIGURE 4 – Carte des noyaux classés en fonction de leur nombre de neutrons (en abscisse), leur nombre de protons (en ordonnée) et de leurs instabilités [54].

I.4 Différents types de radioactivités

Il existe trois types de radioactivité. La radioactivité alpha, la radioactivité bêta, (radioactivité bêta moins et la radioactivité bêta plus) et la radioactivité gamma.

▷ Radioactivité alpha (α)

C'est la transformation au cours de laquelle le noyau père donne un noyau fils en émettant un noyau d'hélium (${}^4_2\text{He}$) ou une particule α . La réaction de désintégration s'écrit :

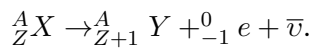


◇ Propriétés du rayonnement alpha

Le rayonnement alpha est composé par des particules alpha. Ces particules sont fortement ionisantes, mais peu pénétrantes. Elles sont arrêtées par une feuille de papier ou une épaisseur de quelques centimètres d'air (environ 4 cm). Elles sont éjectées à grande vitesse de l'ordre de $2,0 \times 10^7 m/s$ et peuvent parcourir $50 \mu m$ de tissu humain.

▷ Radioactivité β^-

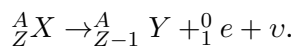
C'est la transformation au cours de laquelle le noyau père expulse un électron, c'est-à-dire qu'il y a une transformation d'un neutron en proton. L'émission de l'électron s'accompagne toujours par l'émission d'antineutrino. Cette réaction de désintégration s'écrit :



▷ Radioactivité β^+

C'est la transformation au cours de laquelle le noyau père expulse un positron, c'est-à-dire, qu'il y a une transformation d'un proton en neutron. L'émission de positron s'accompagne toujours par l'émission de neutrino.

La réaction de désintégration s'écrit :



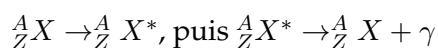
◇ Propriétés du rayonnement bêta

Le rayonnement bêta est constitué par des particules β^- ou par des particules β^+ . Ces particules sont plus pénétrantes, mais moins ionisantes que les particules alpha. Elles sont arrêtées par un écran de plexiglas ou par une plaque d'aluminium de quelques centimètres (environ 3 mm). Elles sont émises à grande vitesse de l'ordre de $2,8 \times 10^8 m/s$ et sont dangereuses pour la peau.

▷ Radioactivité gamma

Au même titre que les atomes, les noyaux peuvent se trouver dans un état excité ${}^A_Z X^*$. La désexcitation d'un noyau ${}^A_Z X^*$ vers son état fondamental s'accompagne d'une émission des rayonnements gamma de charge et de masse nulle.

L'équation de cette désintégration est :



◇ Propriétés du rayonnement gamma

Il est constitué d'une onde électromagnétique de très courte longueur d'onde, de l'ordre de picomètre, et de photons qui se déplacent à la vitesse de la lumière et dont la masse est nulle. Ils ne sont pas directement ionisants, mais ils sont très pénétrants et peuvent traverser jusqu'à 20

centimètre de plomb.

I.5 Xénon

Le xénon est un produit de gaz noble ou inerte dans l'atmosphère dans une faible mesure. En effet, il est présent dans l'atmosphère martienne à environ 0,08 ppm [55].

I.5.1 Origine du xénon

Le xénon a été découvert par Ramsay et Travers en 1898. La découverte s'est faite suite à la découverte du krypton et du néon en tant que résidu issu de l'évaporation sélective des différents éléments constitutifs de l'air liquide.

I.5.2 Propriétés physiques et chimiques du xénon

Le xénon pur est un gaz monoatomique incolore, inodore et non réactif qui présente toutes les caractéristiques propres à la famille des gaz rares. Il présente une extrême stabilité en raison de sa couche électronique externe pleine. De ce fait, il ne peut établir de liaison covalente avec d'autres atomes ; ce qui explique son inertie chimique.

I.5.3 Isotopes du xénon

Le xénon, est un élément chimique possédant 7 isotopes stables dont le nombre de masse est compris entre 124 et 134. Il faut noter que le xénon et l'étain font parti des deux seuls éléments possédant au moins 7 isotopes stables : ^{126}Xe , ^{128}Xe , ^{129}Xe , ^{130}Xe , ^{131}Xe , ^{132}Xe et ^{134}Xe .

I.5.4 Importance du xénon dans l'industrie

En optique, le xénon est fréquemment utilisé dans les lampes à décharge puisqu'il permet, en effet, de produire une lumière proche de celle du Soleil à midi. Ces lampes équipent d'ailleurs les phares des voitures, leur conférant une lumière légèrement bleutée.

I.5.5 Utilisation du xénon

Sur les sept isotopes de xénon stables, plusieurs sont utilisés dans diverses applications médicales et scientifiques. Le ^{124}Xe est utilisé dans la production de deux radioisotopes de l'Iode :

^{123}I et ^{125}I . L' ^{123}I est largement utilisé dans les procédures de diagnostic alors que l' ^{125}I est utilisé dans le traitement du cancer de la prostate. Le ^{129}Xe hyperpolarisé est utilisé dans l'imagerie par résonance magnétique des flux de gaz dans les poumons. Le ^{136}Xe a été proposé comme détecteur pour la double recherche neutre de la dégradation bêta. Le ^{126}Xe peut être utilisé comme cible pour la production de ^{128}Ba radioactif.

I.5.6 Effets du xénon sur la santé

Le xénon, gaz inerte est considéré comme agent asphyxiant non toxique. L'inhalation excessives de ce gaz provoque des vertiges, des nausées, des vomissements et des pertes de conscience. Il peut également provoquer la mort. La perte de conscience puis la mort peuvent se produire en quelques secondes sans aucun symptôme si la concentration en oxygène est basse. Ceci est expliqué car les effets des gaz asphyxiants non toxiques sont proportionnels à la diminution d'oxygène présent dans l'air. Cela signifie que, plus l'oxygène est présent dans l'air, moins le gaz sera asphyxiant et, inversement, moins il y a d'oxygène dans l'air, plus celui-ci sera mortel. Le tableau 1 présente quelques propriétés sur le xénon.

TABLE 1 – Présentation générale du Xénon [56].

Informations générales	
Symbole	Xe
Numéro atomique	54
Famille	Gaz rares
Groupe (colonne)	18 (<i>VIIIA</i>)
Période (ligne)	5
Sous-couche électronique	
Propriétés atomiques	
Masse atomique (isotope principal)	131, 293 ± 0.006 u
Rayon atomique	108 pm
Structure électronique	(<i>K</i>) ² (<i>L</i>) ⁸ (<i>M</i>) ¹⁸ (<i>N</i>) ¹⁸ (<i>O</i>) ⁸
Configuration électronique	1s ² 2s ² 2p ⁶ 3s ² 3p ⁶ 3d ¹⁰ 4s ² 4p ⁶ 5s ² 4d ¹⁰ 5p ⁶
Isotopes les plus stables	
Nombre de neutrons du ¹²⁶ Xe	72
Nombre de neutrons du ¹²⁸ Xe	74
Nombre de neutrons du ¹²⁹ Xe	75
Nombre de neutrons du ¹³⁰ Xe	76
Nombre de neutrons du ¹³¹ Xe	77
Nombre de neutrons du ¹³² Xe	78
Nombre de neutrons du ¹³⁴ Xe	80
Propriétés cristallographiques	
Structure cristalline	Cubique à faces centées
Dimension de la cellule unitaire	
Groupe d'espace	
Propriétés physico-chimiques	
Densité	5.894g/L
Electronégativité	2,6
Masse molaire atomique (g/mol)	131.293 u
Masse volumique	5.761kg.m ⁻³
Point de fusion	-111.75° C
Point d'ébullition	-108.09° C
Nombre d'oxydation	0
Volume molaire	22.26399 × 10 ⁻³ m ³ .mol ⁻¹
Résistivité électrique	10.6 μΩ.cm (20° C)
Conductivité thermique	5.69 × 10 ⁻³ W.m ⁻¹
Energie de vaporisation	12.57kJ.mol ⁻¹ (1atm, -108.09° C)

I.6 Platine

Le platine est un métal blanc, pur et à la couleur de l'étain, malléable, ductile et plus dur que l'argent. On le trouve à l'état natif sous forme assez pure ou sous forme d'alliage avec d'autres métaux. Le platine est classé 57ème terme d'abondance parmi les éléments de la croûte terrestre. Il ne ternit pas dans l'air ou ne se dissout pas dans un acide unique. La plupart du platine utilisé aujourd'hui provient de l'Afrique du Sud et de la Russie.



FIGURE 5 – Image du platine [57].

I.6.1 Historique du platine

Le platine a été découvert par les explorateurs espagnols en Colombie et finalement ramené vers l'Europe en 1735. Lorsque le platine fut découvert, on le nomma platina qui signifie petit argent sous entendant une faible valeur [58].

I.6.2 Utilisation du platine

De nombreuses utilisations ont été trouvées pour ce métal plus précieux aux propriétés étonnantes. Le platine est utilisé dans des procédés chimiques en tant que catalyseur, comme dans le craquage du pétrole ou la fabrication d'acide. Cette industrie l'utilise également sous

forme de gaz métallique ou fin filet pour catalyser l'oxydation partielle de l'ammoniac. Le platine est également utilisé dans des applications dentaires et notamment dans les alliages pour dents en céramique.

I.6.3 Isotopes du platine

Le platine est un métal de transition appartenant à la sixième période de la classification des éléments atomiques et dont le numéro atomique est $Z = 78$. Il possède 37 isotopes connus, de nombre de masse variant entre 166 et 202. Parmi les isotopes du platine, cinq sont stables parmi lesquels : ^{192}Pt , ^{194}Pt , ^{195}Pt , ^{196}Pt et ^{198}Pt .

- Il existe un seul et unique radioisotope du platine naturel. Celui-ci a un nombre de masse de 190 et est très peu présent sur terre soit 0,01%.

- Il existe de nombreux isotopes synthétiques du platine obtenus dans les laboratoires de recherche en radiochimie. Les isotopes plus légers que le platine naturel ont des nombres de masses allant de 166 à 189. Chacun de ces isotopes a deux modes de désintégration possibles : α ou β^+ . Plus l'isotope est léger, plus la désintégration α prédomine. Par contre plus l'on se rapproche des isotopes naturels, plus la désintégration β^+ s'accroît puis prédomine. Les isotopes plus lourds que les isotopes naturels du platine sont nettement moins nombreux et ont des nombres de masses compris entre 199 à 202. Ces isotopes se désintègrent principalement selon une radioactivité β^- .

I.6.4 Importance du platine dans l'industrie

Des catalyseurs au platine sont utilisés dans le raffinage et la transformation du pétrole, ainsi que dans d'autres processus de la production d'essence et de composés aromatiques dans l'industrie pétrochimique. On estime que l'industrie automobile consomme environ 60 % des ressources mondiales de platine.

I.6.5 Effets du platine sur la santé

Le platine est un métal noble. Sa concentration dans le sol, l'eau et l'air est très minime. Dans certains endroits, principalement en Afrique du Sud, en Russie et aux Etats Unis, on peut trouver des gisements qui sont très riches en platine. Le platine est utilisé dans certains produits métalliques comme les électrodes et il peut être utilisé comme catalyseur pour un certain nombre

de réactions chimiques. Des dérivés du platine sont souvent utilisés comme médicaments pour soigner le cancer. Les effets du platine sur la santé dépendent fortement du type de liaisons formées, du niveau d'exposition et de l'immunité de la personne exposée. Le platine en tant que métal, n'est pas très dangereux, mais les sels de platine peuvent provoquer des effets importants sur la santé, tels que :

- l'altération de l'ADN,
- le cancer (leucémie, testicule, vessie),
- les réactions allergiques de la peau et des membranes muqueuses,
- les dommages aux organes tels que les intestins, les reins et la moëlle osseuse,
- les problèmes d'audition.

Enfin, un des risques du platine est qu'il peut provoquer la potentialisation de la toxicité d'autres produits chimiques dangereux dans le corps.

I.6.6 Effets du platine sur l'environnement

L'utilisation du platine dans les produits en métaux n'est pas connu pour provoquer beaucoup de problèmes environnementaux, mais on sait qu'il peut provoquer un état de santé grave dans l'environnement du lieu de travail. Le platine est émis dans l'air par l'intermédiaire des gaz d'échappement des voitures qui utilisent de l'essence au plomb. Par conséquent, le niveau du platine dans l'air peut être plus élevé dans certains endroit, par exemple les garages, les tunnels et sur les terrains des entreprises de transport routier. Les effets du platine sur l'environnement et les animaux n'ont pas encore fait l'objet de recherches intenses. La seule chose que l'on sait est que le platine s'accumule dans les racines des plantes après avoir été absorbé. On n'a pas encore établi clairement si le fait de manger les racines des plantes contenant du platine était nocif pour les animaux ou l'homme.

TABLE 2 – Présentation générale du platine [59].

Informations générales	
Symbole	Pt
Numéro atomique	78
Famille	Métaux de transition
Groupe (colonne)	10
Période (ligne)	6
Sous-couche électronique	d
Propriétés atomiques	
Masse atomique (isotope principal)	195.084 u
Rayon atomique	137.3 pm
Structure électronique	$(K)^2(L)^8(M)^{18}(N)^{32}(O)^{17}(P)^1$
Configuration électronique	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^9 6s^1$
Isotopes les plus stables	
Nombre de neutrons du ^{192}Pt	114
Nombre de neutrons du ^{194}Pt	116
Nombre de neutrons du ^{195}Pt	117
Nombre de neutrons du ^{196}Pt	118
Nombre de neutrons du ^{198}Pt	120
Propriétés cristallographiques	
Structure cristalline	Cubique à faces centrées
Dimension de la cellule unitaire	$a=392.40$ pm
Groupe d'espace	Fm3p
Propriétés physico-chimiques	
Densité	21.5 à 25° C
Electronégativité	2,28
Masse molaire atomique (g/mol)	195,1
Point de fusion	1 768° C
Point d'ébullition	3 825° C
Nombre d'oxydation	+2, +4
Volume molaire	$9.09 \text{ cm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ (293 K)
Résistivité électrique	$10.6 \mu\Omega \cdot \text{cm}$ (20° C)
Conductivité thermique	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

I.7 Description des modèles nucléaires

En physique nucléaire, il existe plusieurs modèles théoriques qui décrivent et interprètent les propriétés nucléaires des noyaux. à savoir :

- les modèles macroscopiques ou modèles collectifs décrivant le mouvement d'ensemble des nucléons à l'exemple du modèle de la goutte liquide.

- les modèles microscopiques ou d'excitation des particules individuelles qui prennent en compte le mouvement de chaque nucléon dans le noyau. Par exemple, le modèle en couches [60].

I.7.1 Modèle de la goutte liquide

Ce modèle est l'un des premiers modèles, basé sur la courte portée des forces nucléaires. Un nucléon donné interagit fortement avec ses voisins, comme les molécules dans une goutte liquide [61, 62]. Les propriétés du noyau peuvent être décrites à l'aide de son rayon, sa densité, et son énergie de volumique [63]. Ce fluide est dit quantique, car la longueur d'onde des nucléons est grande par rapport à leurs tailles, permettant de négliger les notions de position et de trajectoire des nucléons. Dans ce modèle, une goutte liquide chargée, est caractérisé par son rayon et son énergie de liaison. Son volume est donc proportionnel au nombre de nucléons. Ces derniers n'interagissent qu'avec leurs voisins immédiats, d'où l'apparition du modèle de la goutte liquide décrit par la formule de Bethe et Von Weizscker [58] :

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_p \delta(A). \quad (\text{I.1})$$

▷ Terme volumique

L'expression $a_v A$, désigne le terme de volume, celui-ci est proportionnel au nombre de nucléons A . Ce terme rend compte de la force nucléaire, donc des interactions entre nucléons. Il considère chaque nucléon comme étant à l'intérieur du volume du noyau et à saturation des interactions avec les autres nucléons. On a

$$a_v \approx 15,41 \text{ MeV}. \quad (\text{I.2})$$

▷ terme surfacique

L'expression $a_s A^{2/3}$, est le terme de surface. Ce terme est une première correction au terme de volume. Il rend compte du fait que les nucléons se trouvant à la surface du noyau ont moins de voisins que ceux situés à l'intérieur du volume. Ils subissent donc moins d'interactions de la part des autres nucléons. Ce terme est donc proportionnel à la dimension de la surface du noyau, $A^{2/3}$, pour lequel, la correction apportée est de :

$$a_s \approx 16,87 \text{ MeV}. \quad (\text{I.3})$$

▷ terme coulombien

Ce terme décrit la baisse de stabilité engendrée par la répulsion coulombienne entre protons. En considérant que le noyau est une sphère ayant une charge uniformément répartie, chacun des Z protons interagit avec un champ électrostatique formé par les $Z - 1$ autres protons. Le terme est donc proportionnel à $Z(Z - 1)$. Ce champ diminue avec la dilution de la charge sur de plus grandes distances. Le terme est donc inversement proportionnel à la distance $A^{1/3}$. Le facteur de proportionnalité prend en compte les différents termes venant de la forme, de la charge élémentaire et vaut :

$$a_c \approx 0,70 \text{ MeV}, \quad (\text{I.4})$$

▷ terme d'asymétrie

Le terme d'asymétrie est noté $a_a \frac{(N-Z)^2}{A}$. Il est connu que les noyaux gagnent en stabilité lorsque les nombres de protons et de neutrons sont égaux. Ce terme est donc proportionnel à $(N - Z)^2$. Il vaut donc 0 pour les noyaux ayant $N = Z$. Il contribue à diminuer l'énergie de liaison lorsque le noyau s'écarte de $N = Z$, quand le nombre de protons ou le nombre de neutrons augmente. Pour traduire le fait que les noyaux stables les plus lourds s'écartent de $N = Z$, la contribution de ce terme doit diminuer avec l'augmentation de la masse. De ce fait, il est également inversement proportionnel à A . Un coefficient de proportionnalité est toutefois nécessaire et vaut :

$$a_a \approx 22,44 \text{ MeV}. \quad (\text{I.5})$$

▷ terme d'appariement

Un noyau ayant des nombres pairs de protons Z ou de neutrons N est plus stable qu'un noyau ayant les deux impairs. Un noyau ayant N et Z pairs est plus stable qu'un noyau ayant A impair. Le dernier terme de l'équation de Bethe et Weizsäcker prend donc comme référence les noyaux avec A impair, pour lesquels la correction vaut 0. Le terme est positif, donc liant, pour les noyaux pairs-pairs, et négatif, donc répulsif, pour les noyaux impairs-impairs. L'amplitude de cette correction vaut :

$$a_p \approx 11,2 \text{ MeV}. \quad (\text{I.6})$$

Il permet ainsi de rendre compte de l'écart d'énergie de liaison entre noyaux pairs-pairs et impairs-impairs et de l'existence d'un plus grand nombre de noyaux pairs-pairs stables.

$$\delta(A) = \begin{cases} +\frac{1}{A^{1/2}}, & \text{pour } Z \text{ et } N \text{ pairs} \\ 0, & \text{pour } Z \text{ ou } N \text{ impair} \\ -\frac{1}{A^{1/2}}, & \text{pour } Z \text{ et } N \text{ impairs} \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

I.7.2 Modèle en couches

Le modèle en couches est un modèle de structure nucléaire comparable à bien des égards au modèle planétaire atomique. Il constitue la pierre angulaire de la physique nucléaire en ce sens que son ambition est de rendre compte de la structure des noyaux en termes microscopiques, c'est-à-dire à l'aide des propriétés individuelles de ses constituants. Dans ce modèle, chaque nucléon est défini dans un état donné, est représenté comme évoluant individuellement dans un potentiel moyen. Un nucléon est un fermion, objet quantique dont certaines valeurs en énergie seulement, sont accessibles. Il est défini par un ensemble de nombres quantiques : n , l , s , j et m :

- n est le nombre quantique principal définissant le nombre de noeuds dans la partie radiale de la fonction d'onde.

- l nombre quantique azimutal,

- j est le nombre quantique associé à la résultante du couplage entre le moment angulaire orbital l et le moment angulaire de spin $s = 1/2$ et $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$.

- m est le nombre quantique magnétique $-l \leq m \leq l$.

En accord avec le principe de Pauli, seul un type de nucléon peut être dans un état quantique défini par les nombres quantiques n , l , j et m . À l'inverse du modèle de la goutte liquide où l'on considère les mouvements collectifs des nucléons comme responsables du comportement du noyau, tels que la rotation, la vibration ou la déformation de celui-ci, ce modèle s'intéresse au caractère individuel du nucléon, dans le but de reproduire des nombres magiques [64].

I.8 Déformations et rotations dans les noyaux atomiques

I.8.1 Déformations

L'existence de noyaux déformés a été soupçonnée dès les années 30 par des mesures de moments magnétiques, puis électriques bien avant l'apparition du modèle en couches sphériques. L'abondance de noyaux déformés rend leur étude incontournable et constitue le point central de notre travail. La déformation peut être soit associée à l'état fondamental pour les noyaux situés entre les nombres magiques sphériques, soit apparaître pour des états excités et/ou à haut moment angulaire.

I.8.2 Déformations nucléaires

La présence de déformations nucléaires est intimement liée au champ moyen. Les nucléons, comme les électrons, ont un moment angulaire j dont la projection sur l'axe de quantification vaut m . Pour une projection m élevée, la distribution est centrée dans le plan équatorial et donc aplatie. À l'inverse, la distribution est centrée dans le plan perpendiculaire et donc allongée pour m faible. La présence de ces orbitales à distribution anisotrope, encore appelées orbitales polarisantes, tend à déformer l'ensemble des nucléons, et donc le champ moyen.

I.8.3 Forces subies par le noyau atomique

Le noyau atomique étant constitué de diverses particules et certaines d'ailleurs chargées, est soumis de plusieurs forces parmi lesquelles nous dénombrons les trois principales qui sont :

⇒ Les forces électriques appliquées à toutes particules ayant une charge électrique (proton), caractérisées par une interaction coulombienne d'une intensité relative de 10^{-2} N.

⇒ Les interactions fortes qui permettent de lier les quarks entre eux pour former les hadrons (protons, neutrons). Par contre les électrons, les photons et les neutrinos ne sont pas de quarks ;

ils sont insensibles aux interactions fortes ; qui sont à leur tour attractives et s'opposent à la répulsion électrostatique. Elles permettent de confiner les protons dans le petit volume qu'est le noyau d'une portée de 10^{-15} m, d'intensité relative de 1N.

⇒ Les interactions faibles qui agissent à l'intérieur des nucléons en transformant un nucléon en un autre avec émission d'une particule bêta, caractérisées par une intensité relative de 10^{-36} N et d'une portée de 10^{-18} m. La stabilité d'un noyau dépend de la compétition entre ces trois forces et au dessus d'un certain nombre de protons (92), les noyaux sont instables.

I.8.4 Rotation

Au cours d'une réaction nucléaire, le noyau peut acquérir un moment angulaire. Le noyau peut donc roter, à condition que des symétries soient brisées. Par contre, un noyau sphérique de spin et parité 0^+ ne peut tourner car toutes les orientations sont indiscernables. D'un point de vue purement macroscopique, la rotation favorise les noyaux allongés : pour une même amplitude de déformation, le moment d'inertie d'un noyau aplati est plus faible que celui d'un noyau allongé.

I.8.5 Mouvement collectif dans les noyaux

Les observations expérimentales des énergies de niveaux excités, leurs spins et le rapport d'intensité, nous offrent la base pour l'investigation théorique de la structure nucléaire. Un grand nombre de propriétés observées des noyaux impliquent l'existence du mouvement d'ensemble des nucléons. Ces phénomènes sont appelés mouvements collectifs. Dans ce cas, il est plus approprié de les décrire en utilisant les coordonnées macroscopiques telles que la masse, le volume et les paramètres de déformation (β, γ). Les excitations collectives sont représentées par deux types de mouvement :

- vibrations des noyaux (états à N photons, déformation dynamique axiale ou triaxiale, résonances géantes).

- rotations collectives autour de l'axe perpendiculaire à l'axe de symétrie du noyau (bande de rotation).

Ces deux types d'excitations collectives conduisent en général à des schémas de niveaux réguliers et l'évolution dynamique de la forme du noyau. Ainsi, la présence d'un certain type d'excitation nous aide à déduire la forme du noyau.

I.8.6 Mode vibrationnel

Bohr a introduit une paramétrisation de la surface nucléaire qui est décrite par l'expression du rayon développé en harmoniques sphériques ci-dessous [70] :

$$R(\theta, \varphi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right). \quad (\text{I.8})$$

Où $R(\theta, \varphi, t)$ est la distance entre le centre du noyau et sa surface dépendant de l'angle (θ, ϕ) à l'instant t ; le rayon d'équilibre R_0 correspond au rayon de la sphère ayant le même volume que le noyau déformé ; les amplitudes dépendantes du temps $\alpha_{\lambda\mu}^*$ sont les paramètres de la forme du noyau et servent ainsi de coordonnées collectives. Ils décrivent les vibrations de la surface nucléaire et $Y_{\lambda\mu}$ sont les harmoniques sphériques.

Les formes nucléaires correspondant aux différents ordres multipolaires sont représentées dans la figure ci-dessous :

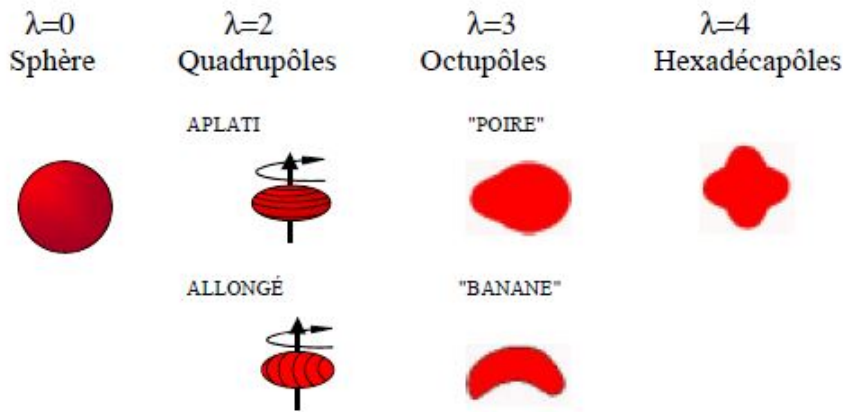


FIGURE 6 – Les différentes formes correspondant aux différents ordres multipolaires [71].

▷ le terme $\lambda = 0$, correspond à la variation du volume sans variation de la forme sphérique et donne naissance la déformation monopolaire.

▷ le terme $\lambda = 1$, décrit la translation du système et correspond à la déformation dipolaire ; ce mode peut souvent être ignoré lors de l'étude de la forme des noyaux.

▷ le terme $\lambda = 2$, correspond à une déformation quadrupolaire ; ce type de déformation

caractérise la majorité des noyaux. Il sera développé plus en détails par la suite.

▷ le terme $\lambda = 3$, correspond à la déformation octupolaire. Ce mode se manifeste à travers les bandes de parité négative.

▷ Et enfin, les termes $\lambda = 4$ correspondent à une déformation hexadécapolaire. Afin de se placer dans le référentiel lié au noyau, décrit par les angles d'Euler qui déterminent l'orientation des axes principaux par rapport au référentiel du laboratoire, un changement de variables doit être effectué. Dans une première approximation, on considère uniquement le terme d'ordre $\lambda = 2$ qui est le plus fréquent et qui correspond à une déformation quadrupolaire. La figure 7 ci-dessus montre les différentes d'ordres multipolaires.

I.8.7 Mode rotationnel

La rotation se traduit par la présence de moment angulaire suivant un axe donné. Dans le cas de la rotation collective, le noyau tourne globalement autour de cet axe de rotation. Il doit pour cela être déformé, car la mécanique quantique interdit une rotation autour d'un axe de symétrie. Dans la plupart des cas, les noyaux ont la déformation quadrupolaire ($\lambda = 2$) décrite par l'Eq.(I.8). Ainsi, il y a cinq paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$. Les paramètres de forme peuvent être exprimés par la transformation du système des coordonnées :

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = \sum_{\nu=-2}^2 \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} a_{\nu\mu'}^* D_{\mu\mu'}^{(\nu)}(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma). \quad (\text{I.9})$$

Les formes des noyaux sont définies par les valeurs de γ :

$\Rightarrow \gamma = 0^\circ$, l'axe de symétrie est le plus long, les noyaux déformés ont une déformation prolate, de forme allongée.

$\Rightarrow \gamma = 60^\circ$, l'axe de symétrie est le plus court, les noyaux ont une déformation oblate, de forme aplatie.

$\Rightarrow (0^\circ < \gamma < 60^\circ)$, pas de symétrie axiale, le noyau devient triaxial, ce qui signifie que ses trois axes principaux sont de longueurs différentes.

Les paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$ sont indépendants du temps dans le système de coordonnées du corps fixe. Selon la forme du noyau, on peut réduire les paramètres de déformation nucléaire dans l'Eq.(I.9). Par exemple, pour le cas d'un noyau de symétrie axiale où la rotation collective

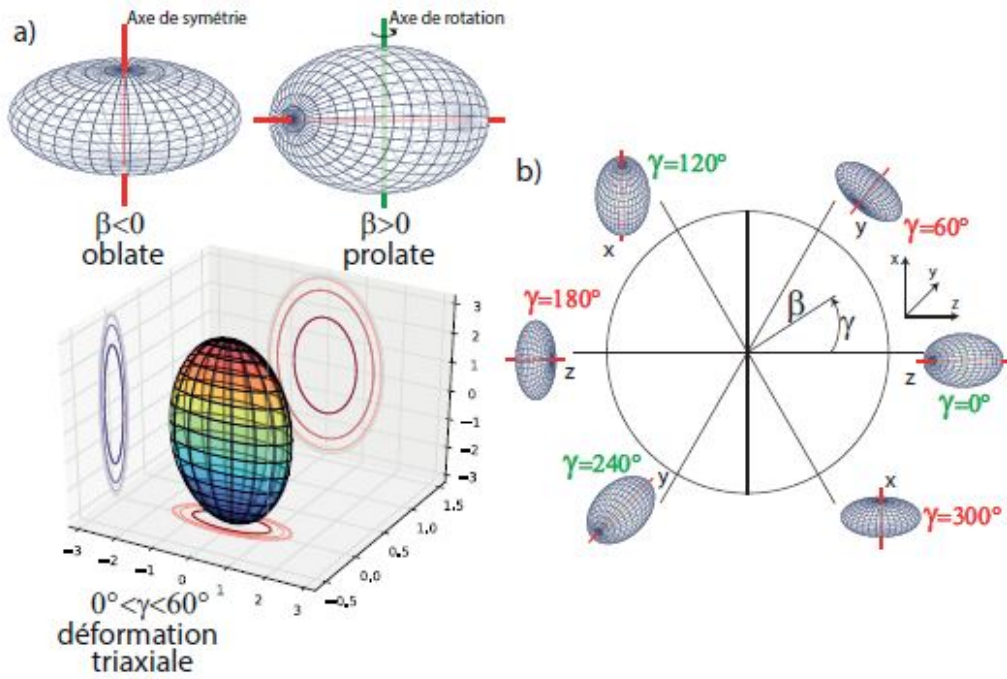


FIGURE 7 – a) Forme quadrupolaire d'un noyau pour le cas de symétrie axiale ($\gamma = 0$) en haut de la figure, et exemple de la déformation triaxiale ($0^\circ < \gamma < 60^\circ$) présenté en bas de cette figure. b) Évolution de la forme nucléaire dans le plan (β, γ) . Quand γ n'est pas un multiple de 60° le noyau prend une forme triaxiale (la déformation non-axiale) [72].

est perpendiculaire à l'axe de symétrie intrinsèque, $\mu = 0$ et $\alpha_{\lambda 0}$ sont désignés par λ . Ainsi, la déformation quadripolaire positive $\beta > 0$ signifie que le rayon polaire est plus grand que le rayon équatorial (la forme prolate) et la déformation quadrupolaire correspond à la forme oblate $\beta < 0$ où le rayon équatorial est plus grand que le rayon polaire. Il est d'usage d'exprimer des déformations quadrupolaires dans un référentiel de corps fixe avec des axes 1, 2 et 3. Si les axes du système de coordonnées choisis sont orientés le long des axes principaux d'inertie du système à corps fixe, alors $a_{2,-1} = a_{2,1} = 0$, $a_{2,-2} = a_{2,2}$. Par conséquent, les coefficients non-nuls $a_{2,2}$ et $a_{2,0}$ sont suffisants pour décrire la forme du noyau. Ces coefficients sont souvent exprimés en termes de paramètres de Hill-Wheeler.

$$a_{20} = \beta \cos \gamma, \quad (\text{I.10})$$

et

$$a_{2,-2} = a_{22} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \gamma. \quad (\text{I.11})$$

Où β représente l'amplitude de la déformation quadrupolaire. Le facteur $1/\sqrt{2}$ a été choisi de tel sorte que $\sum |\alpha_{\lambda\mu}| = \alpha_0 + 2\alpha_2^2 = \beta^2$. L'angle γ , dénommé paramètre de triaxialité, a été accepté comme étant la manière la plus pratique pour décrire la forme des noyaux. En utilisant les Eqs.(I.10 et I.11), la surface du noyau peut être décrite en fonction de β et γ comme :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \cos \gamma Y_{20}(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma (Y_{22}(\theta, \varphi) + Y_{2-2}(\theta, \varphi)) \right] \quad (\text{I.12})$$

En introduisant les expressions des harmoniques sphériques, l'Eq. (I.15) devient :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(\cos \gamma (3 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} \sin \gamma \sin^2 \theta \cos 2\varphi \right) \right] \quad (\text{I.13})$$

Dans cette formule, nous voyons que le paramètre β permet de mesurer l'étendue de la déformation et le paramètre γ montre l'éloignement par rapport à la symétrie axiale. La valeur négative de β indique que le noyau a la forme oblate et la valeur positive décrit la forme prolata, comme illustré sur la figure 8.

I.8.8 Approximations du champ moyen

Dans cette section, nous présenterons le Modèle en Couches comme l'un des fameux modèles microscopiques. Le modèle en couches du noyau atomique a été développé entre 1948 et 1950 et a permis d'expliquer un grand nombre de propriétés structurales du noyau. Ce modèle, essentiellement quantique, assigné aux nucléons l'occupation d'états définis par quelques nombres entiers (appelés nombres quantiques). De nombreuses conséquences de cette hypothèse sur la structure des niveaux d'énergie des noyaux ont permis d'interpréter les observations expérimentales, par exemple les nombres magiques (c'est-à-dire 2, 8, 20, 28, 50, 82 et 126) de protons ou de neutrons constituant un noyau. L'existence de nombres magiques est une preuve de l'existence des couches dans la structure nucléaire.

I.8.9 Notions de base du modèle en couches sphérique

Depuis 1950 et l'explication des nombres magiques [74], le modèle en couches est devenu un outil incontestable en physique nucléaire théorique. Il est basé sur une hypothèse selon laquelle les nucléons bougent indépendamment dans un potentiel, qui représente l'interaction moyenne avec les autres nucléons dans le noyau, en première approximation.

I.8.10 Modèle en couches sphériques

Le plus simple des modèles microscopiques est le modèle en couches sphériques basé sur le fait que les nucléons sont arrangés dans des couches ou des niveaux dans le noyau. Plusieurs propriétés nucléaires peuvent être interprétées, en supposant que les nucléons individuels se déplacent indépendamment dans un potentiel défini par l'interaction avec les autres nucléons.

$$\hat{H}\Psi(1, \dots, A) = E\Psi(1, \dots, A). \quad (\text{I.14})$$

L'Éq.(I.14) est développée sous la forme [3] :

$$\hat{H} = \left\{ \sum_{i=1}^A (\hat{T}_i + \hat{U}_i) \right\} + \left\{ \sum_{i>j}^A \nu_{ij} - \sum_{i=1}^A \hat{U}_i \right\} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1 = \sum_{i=1}^A \hat{h}_i^0 + \sum_{i=1}^A \hat{h}_i^1. \quad (\text{I.15})$$

L'hamiltonien \hat{H}^0 reflète le mouvement indépendant des nucléons plongés dans le potentiel moyen \vec{U}_i créé par les A nucléons [68]. Le choix du potentiel à un corps U doit être tel que \hat{H}^1 soit petit devant \hat{H}^0 afin qu'on puisse le considérer comme une perturbation. \hat{H}^1 porte le nom d'interaction résiduelle. En première approche, cette interaction est considérée comme nulle. Le choix du potentiel moyen central a été choisi de manière à reproduire les résultats expérimentaux des noyaux magiques : 2, 8, 20, 28, 50, 82 et 126. Afin de construire une théorie reproduisant telle ou telle propriété physique du noyau, le point de départ est l'équation de Schrödinger : tel que l'hamiltonien \hat{H} du système est :

$$\hat{H} \approx - \sum_{i=1}^A \frac{\hbar}{2m} \Delta + \sum_{i<j}^A \nu_{ij} \quad (\text{I.16})$$

Le premier terme est l'énergie cinétique des nucléons T et ν_{ij} est l'interaction nucléon - nucléon composée d'une partie nucléaire et d'une partie coulombienne. Une des difficultés des modèles microscopiques est qu'à priori l'interaction nucléon-nucléon n'est pas connue. L'influence qu'aura l'introduction du terme qui tient compte de l'interaction à plus de deux corps n'est pas non plus maîtrisée. Le potentiel de Woods-Saxon est un exemple des potentiels moyens [75] :

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - al^2 - f(r)\vec{l} \cdot \vec{s}, \quad (\text{I.17})$$

où V_0 et a_0 sont respectivement la profondeur du puits de potentiel de Woods-Saxon, la largeur sur laquelle décroît la densité de la matière nucléaire $\rho(r)$, et le rayon moyen du noyau. La profondeur du puits peut être évaluée en ajoutant l'énergie de Fermi des nucléons 37 MeV, et l'énergie moyenne de liaison 8 MeV, c'est à dire que V_0 prend la valeur 50 MeV en générale. En première approximation, ce potentiel est remplacé par le potentiel de l'oscillateur harmonique (OH), avec lequel on obtient des dégénérescences en niveaux énergétiques.

$$V(r) = V_0 + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 m \quad (\text{I.18})$$

et l'expression de ω donne :

$$\omega = \left(\frac{2V_0}{mR} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{I.19})$$

Pour lever la dégénérescence et reproduire les résultats expérimentaux des noyaux dits magiques, un développement de Taylor du potentiel Woods-Saxon au voisinage du zéro, avec l'effet du moment angulaire et de l'interaction spin-orbite fortement attractif est introduit et l'expression du potentiel devient :

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - al^2 - f(r)\vec{l}\cdot\vec{s}. \quad (\text{I.20})$$

Le terme $\vec{l}\cdot\vec{s} = \frac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2)$, et $s = 1/2$, et l'énergie peut être calculé en utilisant la relation ci-dessous :

$$E_{nlj} = -V_0 + \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right) - a\hbar^2 l(l+1) - \frac{1}{2}f(r)\hbar^2 \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (\text{I.21})$$

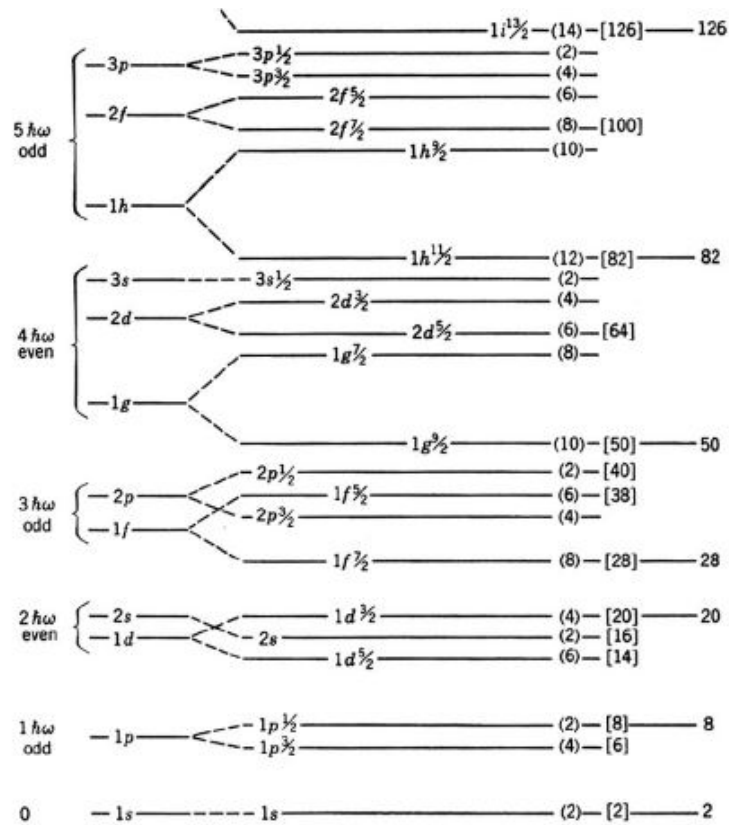


FIGURE 8 – Niveaux d'énergie selon le modèle en couches [76].

Grâce au modèle en couches, on peut reproduire les nombres magiques observés expérimentalement. Cependant, ce modèle n'est valable que pour les noyaux sphériques. La figure 9 ci-dessus, représente les niveaux des énergies selon le modèle en couches.

1.8.11 Déformation triaxiale

Le fait qu'un noyau triaxial ne possède pas de symétrie axiale implique une plus grande richesse de phénomènes physiques qui apparaissent dans le schéma de niveaux d'énergie. Pour une forme triaxiale, il est possible de faire tourner le noyau suivant un axe n'appartenant pas à un des plans principaux du référentiel intrinsèque. Parmi les modes d'excitations d'un noyau, il y en a deux qui caractérisent de manière univoque un noyau triaxial en rotation : le mode wobbling [81] et la chiralité. Lorsque la direction de l'axe de rotation du noyau oscille dans l'espace, on parle alors de mouvement de wobbling ; ce qui se traduit dans le schéma de niveaux par une bande parallèle à la bande yrast[82] légèrement plus excitée. Elle est fortement connectée à celle-ci par des transitions dipôlares. Une oscillation du signe de l'angle α entre l'axe du moment

angulaire et l'axe de rotation va être à l'origine du moment de wobbling. Un autre phénomène typique de la triaxialité est la chiralité. Il se manifeste par deux bandes dipolaires (constituées de transitions magnétiques dipolaires M1) de configurations identiques, mais dont l'axe de rotation pointe dans deux directions différentes de l'espace, symétriques par rapport au plan perpendiculaire à l'axe long de l'ellipsoïde. La déformation triaxiale s'avère stable sur une gamme limitée de spin à bas spin. De plus, il n'est pas facile de la mettre en évidence expérimentalement. La figure 10 représente le noyau triaxial dans un référentiel intrinsèque.

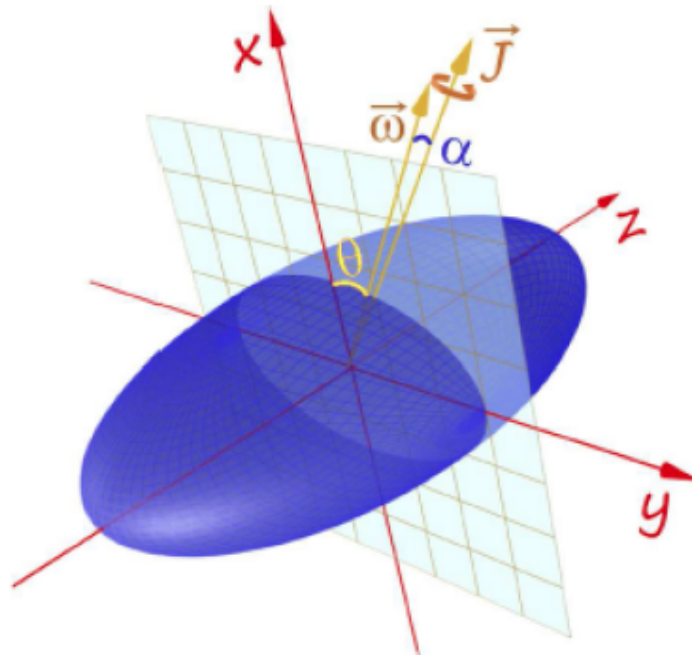


FIGURE 9 – Noyau triaxial dans son référentiel intrinsèque où sont représentés l'angle θ entre le vecteur rotation $\vec{\omega}$ et l'axe Ox , et l'angle α entre les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ et moment angulaire total \vec{J} [83].

I.9 Quelques travaux antérieurs sur les noyaux triaxiaux

Plusieurs scientifiques ont développé des outils théoriques en physique nucléaire pour décrire d'une part les états et les propriétés des noyaux atomiques, d'autre part les modèles dont l'objectif est de réduire les écarts entre les valeurs calculées et d'avoir une structure plus proche de la symétrie $Z(5)$.

Dans le modèle conduit par Chabab et al.[84], la résolution du problème des valeurs propres et des vecteurs propres avec le Hamiltonien collectif de Bohr pour les noyaux triaxiaux de platine et de xénon ont trouvé des solutions élogieuses. La partie β du potentiel collectif est considérée comme égale au potentiel de Hulthén tandis que la partie γ est définie par un nouveau potentiel généralisé obtenu à partir d'un potentiel en forme d'anneau. Il ressort de ses travaux que, les différentes énergies calculées et les taux de transitions $B(E2)$ sont en accord avec les données expérimentales et aux résultats théoriques disponibles dans la littérature.

Inci [85], dans ses travaux, il a utilisé le potentiel de Morse pour les noyaux triaxiaux. Dans son modèle, il obtient des valeurs propres d'énergie et les fonctions d'onde propres après utilisation de la méthode de séparation des variables β et γ du Hamiltonien de Bohr. Ces résultats ont été appliqués aux isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ pour générer les spectres énergétiques. Par la suite, les rapports des transitions quadrupolaires électriques $B(E2)$ obtenues, comparés aux résultats expérimentaux et de la symétrie $Z(5)$, montrent que cette méthode ne tient compte que des déformations cylindriques (allongées ou aplaties).

Ema'a et al [86], dans ses travaux a utilisé le Hamiltonien de Bohr avec le potentiel de type exponentiel multiparamétrique sur les noyaux triaxiaux. Dans ses calculs, il a obtenu des valeurs propres des énergies et les fonctions d'ondes propre après utilisation de la méthode de séparation des variables. Les résultats obtenus pour les rapports des transitions quadrupolaire électrique $B(E2)$, comparés aux résultats expérimentaux et de la symétrie $Z(5)$, montrent que les résultats obtenus sont meilleurs et le modèle est applicable pour les noyaux triaxiaux.

Tchana [87], par la suite, a utilisé le Hamiltonien de Bohr et le potentiel de Killingbeck associé à celui de Morse pour les noyaux triaxiaux et obtient aussi des résultats plus fiables que ceux de Inci et al. Toutefois, on constate que certains écarts persistent entre ses valeurs calculées et les valeurs expérimentales.

Nga et al.[88], dans ses travaux ont utilisé un potentiel fractionnaire inverse à quatre termes

(PFIQT) dans le but d'étudier le mouvement de vibrations et de rotations des noyaux triaxiaux en s'appuyant sur le modèle de Hamiltonien de Bohr. En utilisant la technique de séparation des variables, des équations dont l'une dépend du paramètre de déformation β (partie β) et l'autre du paramètre déviation γ (partie γ). Une résolution de l'équation du Hamiltonien de Bohr avec le PFIQT pour les noyaux triaxiaux pour la partie β et pour la partie γ avec un minimum de $\gamma = \pi/6$ lui a permis de trouver l'énergie propre du système et les fonctions d'onde sont ainsi déduites en utilisant l'équation bi-confluente de Heun. Les solutions analytiques de l'énergie et des fonctions d'onde ont permis d'évaluer les valeurs théoriques des rapports des énergies de niveaux et les taux de transition $B(E2)$ et il les ont été comparées aux données expérimentales et aux autres prédictions théoriques utilisant les potentiels de Morse et de Killingbeck plus de Morse pour les isotopes 192, 194 et 196 du Platine. Les résultats obtenus avec ce modèle sont plus proches des résultats expérimentaux que ceux obtenus par les auteurs ayant utilisés les potentiels de Morse et de Killingbeck plus de Morse.

I.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la structure nucléaire du noyau atomique ainsi que ses caractéristiques. Une brève historique du noyau et ses composants a été développée pour mieux comprendre le comportement du noyau atomique. Par la suite, nous avons étudié les isotopes du xénon et du platine. Nous avons discuté sur des approches et des modèles du noyau en s'appuyant sur les différents mouvements du noyau atomique à savoir (rotation et vibration). Dans le chapitre suivant, nous allons présenter le modèle du Hamiltonien de Bohr, puis le potentiel écranté de Kratzer. Les solutions de ce modèle sont explorés par la méthode de Nikivorov-Uvarov afin de déterminer l'énergie du spectre, la fonction d'onde ainsi les transitions quadrupolaire électrique $B(E2)$.

MATÉRIEL ET MODÈLE

II.0.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une expérience réalisée au Grand Accélérateur National d'Ions Lourds (GANIL) qui a pour but d'étudier et de mesurer les énergies de transition par la spectroscopie gamma des noyaux du ^{32}Mg et le ^{34}Si . Cette expérience a été réalisée au GANIL avec le spectromètre VAMOS et le détecteur EXOGAM. Le système de détection permet de considérer les noyaux produits par des réactions inélastiques, de transfert ou de fragmentation d'un faisceau secondaire contenant entre autre des noyaux de ^{32}Mg et le ^{34}Si . Par la suite, on étudie un potentiel nucléaire qui nous permettra de déterminer les solutions du Hamiltonien de Bohr en s'appuyant sur la méthode de Nikiforov-Uvarov qui consiste à résoudre les différents types d'équations hypergéométriques afin d'obtenir les solutions du modèle du Hamiltonien de Bohr utilisé.

II.1 Mesure expérimentale de l'énergie de transition par spectroscopie gamma

Pour étudier la spectroscopie gamma des noyaux ^{32}Mg et le ^{34}Si , on accède à leurs états excités lors des différentes réactions (d,p), (d, ^3He) et des réactions inélastiques. On utilise un faisceau primaire de ^{36}S qui interagit avec la cible de tantale de Source d'Ions Secondaires à Supraconducteurs Intense (SISSI). La production de la plupart des noyaux de masse inférieure au ^{36}S , dont le ^{32}Mg et le ^{34}Si est faite puis, sélectionnés grâce au spectromètre alpha. Ces noyaux sont ensuite acheminés vers le dispositif expérimental, schématisé par la figure 11 [89] et qui peut être décomposé en 3 parties :

- ⇒ identification du faisceau,
- ⇒ identification de l'éjectile et
- ⇒ détection gamma.

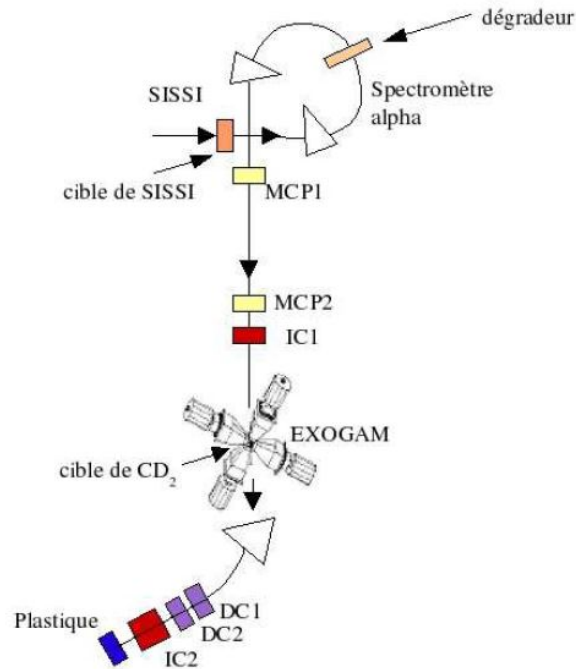
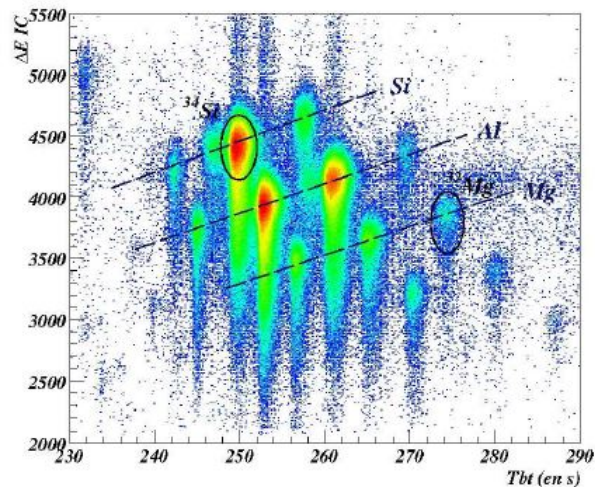


FIGURE 10 – De la production à la détection.

L'identification du faisceau secondaire, c'est-à-dire du projectile avant la cible, est faite événement par événement par les techniques ΔE - Tof où le temps de vol est obtenu par différence de temps entre deux galettes à mi-crocanaux placées à la sortie du spectromètre l'alpha (MCPI) et juste avant la cible (MCP2) et la perte d'énergie par une chambre à ionisation (IC1).

La figure 12, montre l'identification obtenue où on peut voir entre autre le ³²Mg et le ³⁴Si.

FIGURE 11 – Matrice d'identification ΔE - Tof avant la cible.

L'identification après la cible est obtenue grâce aux détecteurs du plan focal du spectromètre VAMOS. Le système de détection est composé de 2 chambres à dérives pour donner la position et une première perte d'énergie, d'une chambre à ionisation qui fournit une seconde perte d'énergie et d'un plastique pour la mesure de l'énergie résiduelle du temps. Avec toutes ces données, on extrait le numéro atomique Z et le rapport M/Q qui permet une identification de l'élément. La figure 13, montre l'identification obtenue : y sont indiqués le ^{32}Mg , le ^{34}Si et les lignes isotopiques $Z = 12$ (magnésium), $Z = 14$ (silicium).

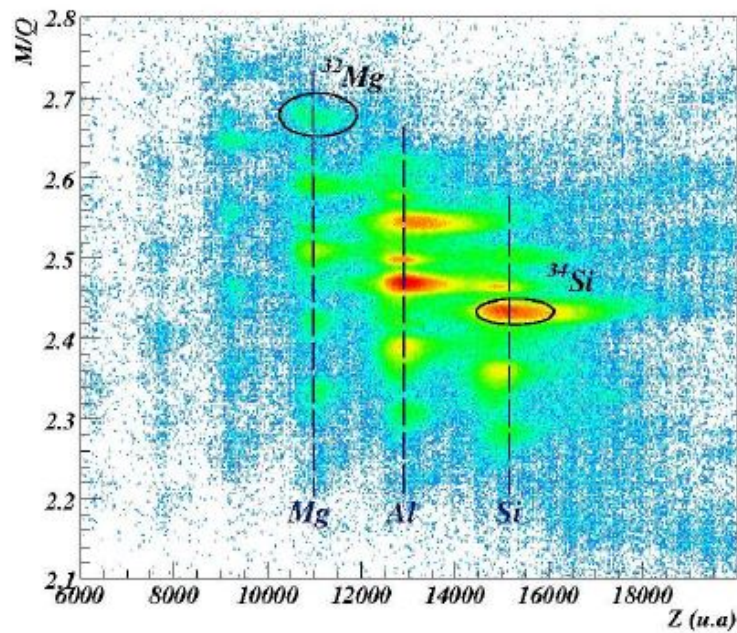


FIGURE 12 – Identification après la cible.

On utilise pour la détection gamma EXOGAM, constitué pour cette expérience de 11 détecteurs HPGe (High Purity Germanium) segmentés. Chaque détecteur (Clover) est ainsi composé de 4 cristaux, eux-mêmes divisés électriquement en 4 segments. Les détecteurs sont disposés tout autour de la cible de CD2, 4 détecteurs à 45° (angle par rapports au faisceau), 4 à 135° et 3 à 90° . Les noyaux incidents ont une vitesse de $\beta=0.2$ dans le référentiel du laboratoire. Les gammas, émis dans le référentiel du noyau, sont détectés dans le référentiel du laboratoire. Ces gammas sont donc soumis à l'effet Doppler, qui dépend de l'angle d'émission du gamma pour obtenir une bonne résolution en énergie : la figure 13, illustre cet effet pour la raie gamma à 885 keV du ^{32}Mg . Les spectres sont obtenus en considérant les angles moyens de chaque détecteur (Clover) en haut, de chaque cristal (au milieu), et enfin, de chaque segment (en bas).

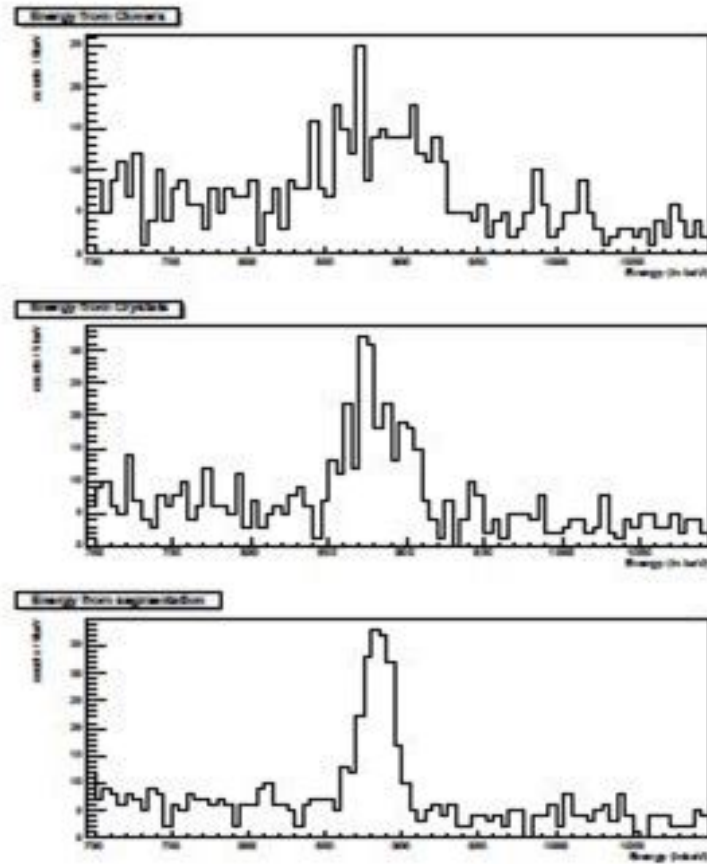


FIGURE 13 – Effet Doppler corrigé suivant l'angle de correction sur la raie à 885 keV du ^{32}Mg .

L'expérience permet l'étude de nombre de noyaux riches en neutrons autour de $N=20$. L'une des caractéristiques de cette expérience est l'identification événement par événement aussi bien avant qu'après la cible. Ceci permet non seulement de réaliser une étude noyau par noyau mais aussi réaction par réaction. En considérant les deux noyaux : ^{32}Mg et le ^{34}Si on a :

■ ^{32}Mg

La fermeture de couche implique une grande énergie d'excitation du premier état et une probabilité faible de transition de ce niveau excité vers le fondamental. Or dans le cas du ^{32}Mg , 12 protons et 20 neutrons, malgré un nombre magique de neutrons, le premier état d'excité est à 885 keV (contre 3,9 MeV pour le niveau 2^+ du ^{40}Ca). Ceci illustre la perte de sa magie de $N=20$ pour le Mg. L'état à 885 keV est un état bien connu. Par contre, les informations expérimentales pour l'état à 2,3 MeV sont confuses : des expériences précédentes lui ont assignés différents spins et parités. Ainsi, une expérience de spectroscopie gamma en ligne par fragmentation a conclu à un 4^+ [90] alors qu'une expérience de décroissance bêta proposait une parité négative [91]. Une

troisième expérience de réaction inélastique [92], trouve un meilleur accord avec un 3^- qu'un 4^+ par des considérations de sections efficaces.

Dans cette expérience, la population relative 1438 keV (état $2.3keV$) est mesuré suivant la réaction par rapport à la population du 2^+ comme on peut le voir sur la figure 14. On peut remarquer que la population la plus grande observée est dans la réaction $^{33}Al \rightarrow ^{32}Mg$, c'est-à-dire quand on arrache un proton . Avec un modèle très simple cela penche en faveur du 4^+ , mais il faudrait faire des calculs plus rigoureux pour l'affirmer.

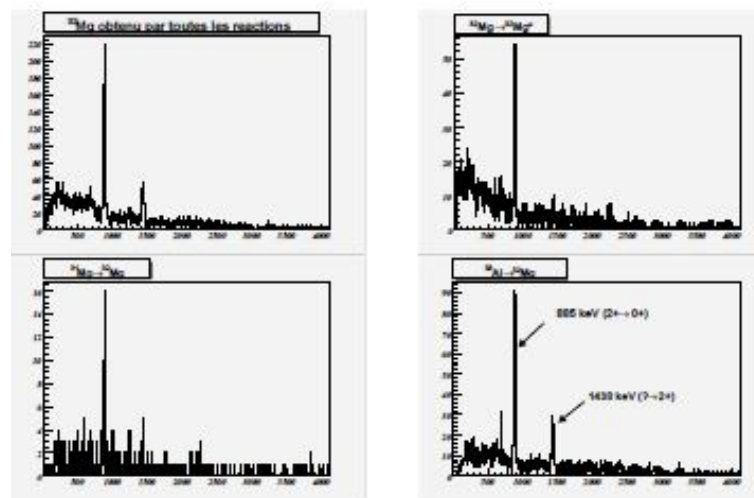


FIGURE 14 – Spectre gamma ^{32}Mg pour toutes les réactions, inélastique, (d,p) et (d, 3He).

■ ^{34}Si

Les calculs réalisés pour le ^{34}Si dans le cadre du modèle en couches prévoient que l'état fondamental 0^+ correspondant à une configuration sphérique pure, mais qu'un deuxième état 0^+ déformé, correspond à des configurations avec des excitations 2 particules - 2 trous, se situe en dessous du premier état excité 2^+ ou juste au-dessous (figure 16) [93].

La dernière attribution en date correspondait à un état à 1.48 MeV qui avait été suggéré pour la transition 2^+ vers 0_2^+ . Dans cette expérience, grâce aux coïncidences gamma-gamma de haute résolution, un spectre conditionné par la transition à 3.3 MeV entre le 2^+ et le fondamental (figure 18) a été obtenu . Sur ce spectre, la transition à 1,48 MeV apparait clairement, et correspond donc obligatoirement à un état au dessus de l'état 2^+ . Nous excluons donc la possibilité que cette transition corresponde à l'état recherché.

La spectroscopie gamma des noyaux riches en neutrons autour de $N=20$ est riche et intéressante.

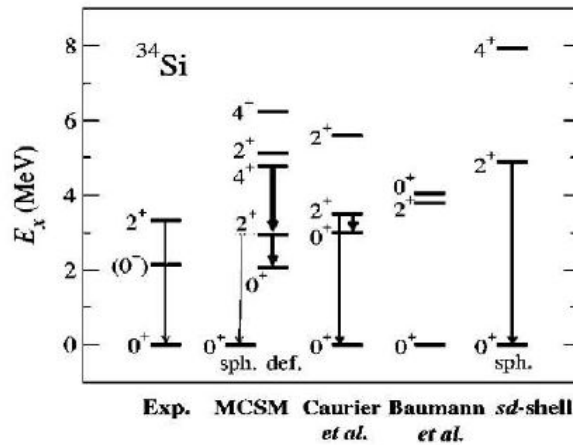


FIGURE 15 – Comparaison des premiers états du ^{34}Si avec différents calculs.

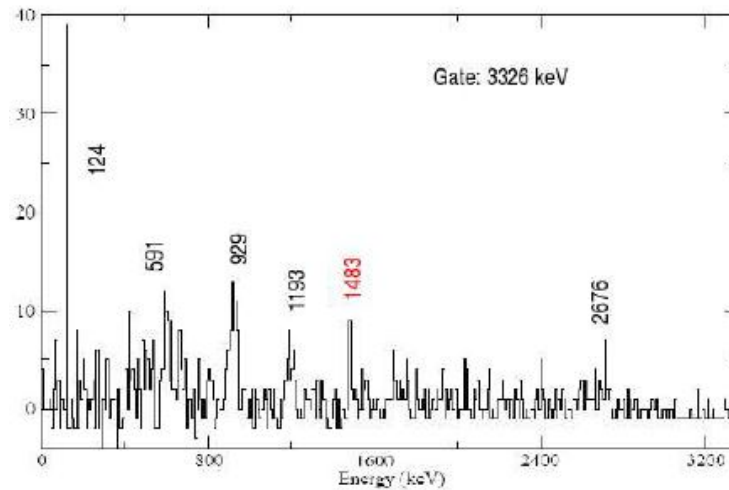


FIGURE 16 – Gamma en coïncidence avec 2^+ .

La combinaison de deux instruments de haute efficacité EXOGAM et VAMOS est idéale pour ce genre d'étude qui utilise des faisceaux de très faible intensité. L'identification des noyaux incidents et des éjectiles a permis de distinguer les différentes voies de réaction. L'utilisation de la segmentation des détecteurs (Clovers) d'EXOGAM a permis une correction précise de l'effet Doppler et l'obtention d'une bonne résolution en énergie pour les gammas. Des données de coïncidences gamma-gamma de bonne qualité qui permettent d'envisager une meilleure connaissance de schémas de niveaux ont été obtenus.

II.2 Le modèle du Hamiltonien de Bohr

Le Hamiltonien de Bohr est largement utilisé pour décrire certaines propriétés de noyaux déformés (rotation et vibration) [94-96]. De nos jours, plusieurs tentatives ont été consacrées à la construction de solutions analytiques de l'équation de Schrödinger associée au Hamiltonien de Bohr pour divers types de potentiels dans le but de décrire de manière appropriée les transitions de phase de noyaux atomiques [97, 99]. C'est dans ce contexte qu'une attention particulière est consacrée au développement de solutions analytiques du Hamiltonien de Bohr avec le potentiel écranté de Kratzer pour étudier les transitions de forme des noyaux.

II.3 Modèle du Hamiltonien de Bohr

L'équation fondamentale de la mécanique relativiste dont l'état du système est décrit par une fonction d'onde peut être représentée par un vecteur de l'espace des états. L'équation du Hamiltonien de Bohr nous permet donc de suivre l'évolution sphérique du noyau atomique afin de décrire ses déformations.

II.4 Potentiels nucléaires

Plusieurs travaux ont été publiés sur les solutions de Bohr Modelson en utilisant le potentiel sextic [100-102]. L'un des potentiels généralement utilisés dans le Hamiltonien de Bohr pour déterminer la structure des noyaux est le potentiel de Kratzer [103-105]. Motivé par de nombreuses études avec le potentiel de Kratzer couplé, le Potentiel de Yukawa et son utilisation est répandu dans divers domaines de la science, en particulier dans les domaines de la Physique Nucléaire et moléculaire. Ikot et al. [106] ont proposé une combinaison de ces deux potentiels appelée potentiel écranté de Kratzer. Dans ce travail, nous allons utiliser ce modèle dans la solution du Hamiltonien de Bohr afin de déterminer l'énergie du spectre ainsi que la fonction d'onde correspondante.

II.5 Méthode de Nikiforov-Uvarov

La méthode de Nikiforov-Uvarov (NU) [107- 110], est une méthode mathématique efficace pour la résolution des équations différentielles du second ordre à coefficients variables sous

forme de polynômes. Elle a été utilisée avec succès dans le traitement analytique d'un grand nombre de problèmes de la physique théorique stationnaire et particulièrement dans le cas relativiste.

Parmi les nombreuses équations de la Physique qui sont traitées de différentes manières, on trouve l'équation de Klein-Gordon, Dirac et Schrödinger. Cette dernière, qui est une équation différentielle du second ordre par rapport la position du système et du premier ordre par rapport au temps, est d'un intérêt spécial en Physique Quantique non relativiste. En effet la résolution de cette équation nous fournis toutes les informations sur le système. L'équation de Schrödinger peut être citée (moyennent de quelques astuces mathématiques étudié) parmi une famille d'équations différentielles acceptant des solutions analytiques. Cette famille d'équations différentielles a été résolue par Nikiforov et Uvarov [11].

II.5.1 Équation différentielle de Nikiforov-Uvarov (NU)

Le but de la méthode de NU est de résoudre toute équation différentielle de la forme :

$$\Psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\Psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\Psi(s) = 0, \quad (\text{II.1})$$

dite de type hypergéométrique.

$\sigma(s)$ et $\tilde{\sigma}(s)$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, avec $\sigma(s) = a_1s^2 + a_2s + a_3$ et $\tilde{\sigma}(s) = b_1s^2 + b_2s + b_3$. $\tilde{\tau}(s)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

$$\tilde{\tau}(s) = c_1s + c_2. \quad (\text{II.2})$$

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ sont des constantes.

II.6 Solution de l'équation de NU

La première étape dans cette méthode consiste à opérer un changement en supposant que la solution de l'Eq.(II.1) est sous la forme :

$$\Psi(s) = \phi(s)y(s), \quad (\text{II.3})$$

Partant de l'Eq.(II.3) on a :

$$\Psi'(s) = \phi'(s) y(s) + \phi(s) y'(s), \quad (\text{II.4})$$

et

$$\Psi''(s) = \phi''(s) y(s) + \phi'(s) y'(s) + \phi'(s) y'(s) + \phi(s) y''(s). \quad (\text{II.5})$$

En insérant les Eqs.(II.4 et II.5) dans l'Eq.(II.1) on obtient :

$$y''(s) + \left(2 \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \right) y'(s) + \left(\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \right) y(s) = 0. \quad (\text{II.6})$$

La fonction $\phi(s)$ est choisi de telle sorte que le coefficient de $y'(s)$ soit sous la forme $\frac{\sigma(s)}{\sigma(s)}$. Cela nous donne :

$$2 \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}, \quad (\text{II.7})$$

où $\phi(s)$ est une dérivée logarithmique dont la solution est obtenu à partir de la condition suivante :

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)}. \quad (\text{II.8})$$

Après avoir comparé les Eqs.(II.7 et II.8), nous avons :

$$\pi(s) = \frac{1}{2} [\tau(s) - \tilde{\tau}(s)]. \quad (\text{II.9})$$

À partir de l'Eq.(II.9), on obtient le nouveau paramètre $\pi(s)$, qui est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. À partir de la dernière équation nous écrivons :

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s), \quad (\text{II.10})$$

$\tau(s)$ doit vérifier la condition ($\tau'(s) < 0$). Ce qui nous donne les solutions physiquement

acceptables.

Afin de simplifier l'Eq.(II.6) et le coefficient de $y(s)$ dans l'Eq.(II.8), nous calculons d'abord $(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)})'$:

$$\frac{\phi'(s)'}{\phi(s)} = \frac{\phi''(s)}{\phi(s)} - \frac{\phi'(s)^2}{\phi(s)^2}. \quad (\text{II.11})$$

À partir des Eqs.(II.8 et II.11), on obtient :

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} = \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}\right)' + \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}\right)^2. \quad (\text{II.12})$$

Dans ce cas-ci, le coefficient de $y(s)$ est transformé dans une forme plus appropriée en prenant l'égalité donné dans l'Eq. (II.8).

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} = \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}, \quad (\text{II.13})$$

où :

$$\bar{\sigma}(s) = \tilde{\sigma}(s) + \pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \pi'(s)\sigma(s). \quad (\text{II.14})$$

On obtient $\bar{\sigma}(s)$ en fonction de $\tilde{\sigma}(s)$, $\pi^2(s)$ et $\sigma(s)$ c'est à dire $\bar{\sigma}(s)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Donc l'Eq.(II.6) est écrite sous la même forme que l'équation (II.1),

$$y''(s) + \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}y'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}y(s) = 0. \quad (\text{II.15})$$

Le polynôme $\tilde{\sigma}(s)$ dans l'Eq.(II.14) est divisible par $\sigma(s)$. Posons :

$$\tilde{\sigma}(s) = \lambda\sigma(s), \quad (\text{II.16})$$

où λ est une constante.

Donc, l'Eq.(II.15) est réduite à une équation de type hypergéométrique :

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \lambda y(s) = 0. \quad (\text{II.17})$$

Afin de trouver la forme du polynôme $\pi(s)$ qui est un polynôme du premier degré, nous utilisons les deux Eqs. (II.13 et II.16)

$$\pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \pi'(s)\sigma(s) + \tilde{\sigma}(s) = \lambda\sigma(s). \quad (\text{II.18})$$

Si on pose : $k = \lambda - \pi'(s)$, avec k constante,

l'Eq. (II.18) devient alors :

$$\pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \tilde{\sigma}(s) - k\sigma(s) = 0. \quad (\text{II.19})$$

L'Eq.(II.19) est une équation du second ordre par rapport à $\pi(s)$. Essayons maintenant de résoudre cette équation, on a :

$$\pi^2(s) + \pi(s)[\tilde{\tau}(s) - \sigma'(s)] + \tilde{\sigma}(s) - k\sigma(s) = 0, \quad (\text{II.20})$$

d'où

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)}. \quad (\text{II.21})$$

Comme nous l'avons signalé précédemment, le polynôme $\pi(s)$ est un polynôme du premier degré. Ceci est vrai si et seulement si l'expression sous la racine carrée de l'Eq. (II.21) qui est un carré d'un polynôme d'ordre inférieur ou égal à 1, et pour cela, il faut que le discriminant de l'expression quadratique sous la racine soit nulle. Cette condition ($\Delta = 0$) nous donne la valeur de la constante k .

Après la détermination de k , le polynôme de l'Eq. (II.20), $\tau(s)$ et λ sont également obtenus en utilisant les Eqs. (II.10 et II.19), respectivement.

II.6.1 Valeurs propres

Dans l'Eq.(II.17), cherchons les solutions sous les formes :

$$y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n, \quad (\text{II.22})$$

donc,

$$y'_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n s^{n-1}, \quad (\text{II.23})$$

et aussi,

$$y''_n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n s^{n-2}. \quad (\text{II.24})$$

L'équation (II.17) devient :

$$\sigma(s) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n s^{n-2} + \tau(s) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = 0. \quad (\text{II.25})$$

En remplaçant les $\sigma(s)$ et $\tau(s)$, on obtient :

$$a_1 n(n-1) s^n + c_1 n s^n = -\lambda_n s^n, \quad (\text{II.26})$$

avec : $\sigma''(s) = 2a_1$ et $\tau'(s) = c_1$.

La méthode de Frobenius nous donne la relation suivante :

$$\lambda = \lambda_n = -n(\tau'(s) + \frac{(n-1)}{2} \sigma''(s)), \quad (\text{II.27})$$

où λ_n représentent les valeurs propres de l'équation différentielle (II.17).

II.6.2 Fonctions propres

Pour générer les fonctions propres correspondantes, il faut que $\tau'(s) < 0$. La solution de la deuxième partie de la fonction d'onde $y_n(s)$ est donnée par la formule de Rodrigues [112] :

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s) \rho(s)], \quad (\text{II.28})$$

où B_n est une constante de normalisation et $\rho(s)$ représente la fonction résolvante (fonction poids), qui a été trouvé à partir de l'équation suivante :

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) = -\lambda y(s) = \frac{1}{\rho(s)} [\rho(s)\sigma(s)y'(s)]', \quad (\text{II.29})$$

et $\rho(s)$ est une dérivée logarithmique dont la solution est obtenu à partir de l'expression :

$$\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} = \frac{\tau(s) - \sigma'(s)}{\sigma(s)}. \quad (\text{II.30})$$

$\rho(s)$ est une fonction analytique qui est défini à l'intérieur d'un contour fermé C entourant le point ($s=z$) et faisant usage de théorème de l'intégrale de Cauchy [113]. Nous pouvons écrire :

$$y_n = (s) = \frac{c_n}{\rho(s)} \int_c \frac{\sigma^n(z)\rho(z)}{(z-s)^{n+1}} dz, \quad (\text{II.31})$$

où c_n est une constante de normalisation et $\rho(s)$ satisfait l'Eq. (II.26). Ceci suggère de chercher une solution particulière de l'Eq. (II.17).

II.7 Paramètres de NU

La forme paramétrique, utilise simplement des paramètres pour obtenir explicitement des valeurs propres de l'énergie et est toujours basée sur les solutions d'une équation différentielle linéaire généralisée du second ordre avec des fonctions orthogonales spéciales. La méthode de NU a montré une grande utilité dans le calcul des niveaux d'énergie exacts de tous les états liés pour certains systèmes quantiques solubles.

Considérons l'équation différentielle du second ordre donnée par l'Eq.(II.1). $\sigma(s)$ et $\bar{\sigma}(s)$ sont des polynômes du second degré et $\tilde{\tau}(s)$ est un polynôme du premier degré. La généralisation paramétrique de la méthode NU est donnée par l'équation généralisée de type hypergéométrique.

En général, l'équation de Schrödinger qui peut être obtenue avec différents potentiels prend la forme suivante [110].

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{s^2(1 - \alpha_3 s)^2} \right] \Psi = 0. \quad (\text{II.32})$$

Comparons l'Eq. (II.32) à l'Eq.(II.1) , nous obtenons :

$$\tilde{\tau} = \alpha_1 - \alpha_2 s, \quad (\text{II.33})$$

avec

$$\sigma = s(1 - \alpha_3 s), \quad (\text{II.34})$$

et

$$\tilde{\sigma} = -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3. \quad (\text{II.35})$$

En substituant les Eqs.(II.33, II.34 et II.35) dans l'Eq. (II.21), on trouve :

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s \pm [(\alpha_6 - \alpha_3 k_{\pm})s^2 + (\alpha_7 + k_{\pm})s + \alpha_8]^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{II.36})$$

où les différentes valeurs de $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ et α_8 sont données par :

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} (1 - \alpha_1), \quad (\text{II.37})$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2} (\alpha_2 - 2\alpha_3), \quad (\text{II.38})$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1, \quad (\text{II.39})$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2, \quad (\text{II.40})$$

et

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3. \quad (\text{II.41})$$

Nous définissons α_9 tel que :

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6. \quad (\text{II.42})$$

La valeur résultante de k dans l'Eq. (II.36) est obtenue à partir de la condition que la fonction sous la racine carrée est le carré d'un polynôme. On a :

$$k_{\pm} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) \mp 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9}, \quad (\text{II.43})$$

le nouveau $\pi(s)$ pour k_- devient :

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5s - [(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8} - \sqrt{\alpha_8})], \quad (\text{II.44})$$

et la valeur de k_- donne :

$$k_- = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) - 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9}. \quad (\text{II.45})$$

En utilisant les Eqs. (II.10 et II.44), on obtient :

$$\tau(s) = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_5)s - [(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}]. \quad (\text{II.46})$$

La condition physique de la solution de l'état lié est $\tau' < 0$ et donc :

$$\tau'(s) = -2\alpha_3 - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) < 0, \quad (\text{II.47})$$

à l'aide des Eqs. (II.27 et II.31), on obtient la forme de l'équation d'énergie :

$$n\alpha_2 - (2n + 1)\alpha_5 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + n(n - 1)\alpha_3 + (2n + 1)\sqrt{\alpha_9} + (2\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3(2n + 1))\sqrt{\alpha_8} = 0, \quad (\text{II.48})$$

ce qui donne :

$$(\alpha_2 - \alpha_3)n + \alpha_3n^2 - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0. \quad (\text{II.49})$$

La fonction poids $\rho(s)$ est obtenue à partir de l'Eq.(II.28) comme :

$$\rho(s) = s^{\alpha_{10}-1} (1 - \alpha_3s)^{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1}. \quad (\text{II.50})$$

Lorsque cette équation est introduite dans l'Eq. (II.31), on obtient :

$$y_n = P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1\right)} (1 - 2\alpha_3s), \quad (\text{II.51})$$

où

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8}, \quad (\text{II.52})$$

et

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}). \quad (\text{II.53})$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}$ est le polynôme de Jacobi. En utilisant l'Eq.(II.8), on abouti à :

$$\phi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}}, \quad (\text{II.54})$$

où les paramètres α_{12} et α_{13} sont donnés par :

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}, \quad (\text{II.55})$$

et

$$\alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}). \quad (\text{II.56})$$

Ainsi, la fonction d'onde totale devient :

$$\psi_{n,l}(s) = N_{n,l} s^{-\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_3}} \times P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1\right)} (1 - 2\alpha_3 s). \quad (\text{II.57})$$

II.8 Équations générales des mouvements régissant les déformations et les interactions nucléaires

Le physicien Autrichien Erwin Schrödinger avait en 1926, décrit l'équation d'évolution des états dynamiques d'un système quantique [114]. L'état d'un système est décrit par une fonction d'onde ψ qui peut être représentée par un vecteur de l'espace des états. Le vecteur d'état représente par un paquet d'onde, un groupe d'onde plus ou moins stable. L'espace des états est un espace de Hilbert construit dans le corps des nombres complexes. Dans ce travail, le mouvement des nucléides sera suivi par l'équation de Schrödinger. Cependant, nous considérerons la forme sphérique de l'équation de Schrödinger pour nous permettre de décrire les interactions nucléaires et les déformations.

II.9 Équations des déformations nucléaires

Dans cette partie, nous partons du Hamiltonien de Bohr sous la forme sphérique en se basant sur l'équation de Schrödinger suivante :

$$\hat{H}\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = E\psi(\beta, \gamma, \theta_i), \quad (\text{II.58})$$

où \hat{H} représente l'opérateur Hamiltonien composé de deux parties, cinétique et potentielle,

E représente l'énergie du nucléide et

ψ représente la fonction d'onde du nucléide considéré.

Le Hamiltonien \hat{H} est donné par l'expression [115] :

$$\hat{H} = E_c + V(\beta, \gamma), \quad (\text{II.59})$$

où E_c est l'énergie cinétique donnée par l'expression :

$$E_c = \frac{\hat{p}^2}{2B}, \quad (\text{II.60})$$

avec

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right]. \quad (\text{II.61})$$

En tenant compte des Eqs. (II.60 et II.61), l'Eq. (II.59) prend la forme du Hamiltonien :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V(\beta, \gamma). \quad (\text{II.62})$$

Introduisons maintenant, la notion des déformations (rotation et vibration) dans l'expression de l'opérateur de Hamiltonien. On a donc :

$$\hat{H} = T_{vib} + T_{rot} + V(\beta, \gamma), \quad (\text{II.63})$$

avec

$$T_{rot} = \frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right], \quad (\text{II.64})$$

T_{rot} représente le Hamiltonien relatif aux rotations des nucléides,

$$T_{vib} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right], \quad (\text{II.65})$$

T_{vib} représente les vibrations des nucléides.

Posons : $T_{vib} = T_\beta + T_\gamma$ avec

$$T_\beta = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right], \quad (\text{II.66})$$

et

$$T_\gamma = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right]. \quad (\text{II.67})$$

En tenant compte des Eqs. (II.58 et II.62) nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] \psi(\beta, \gamma, \theta_i) \\ + V(\beta, \gamma) \psi(\beta, \gamma, \theta_i) = E \psi(\beta, \gamma, \theta_i), \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

où β et γ sont les coordonnées intrinsèques, qualifiant les différentes déformations liées aux vibrations des nucléides.

Les \widehat{Q}_k^2 sont les composantes du moment angulaire, $k = 1, 2, 3$ représentent les trois axes de coordonnées ;

$\theta_i (i = 1, 2, 3)$ sont les angles d'Euler ;

E_c est l'énergie cinétique du nucléide qui s'identifie au diverses rotations effectuées par les nucléides ;

\hat{p} est l'opérateur impulsion du mouvement ;

$V(\beta, \gamma)$ est l'énergie potentielle du système ;

B est la masse totale du nucléide en mouvement ;

$\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ est la fonction d'onde.

Dans la théorie quantique, le Hamiltonien du Bohr \hat{H} est appelé observable et E la valeur propre, qui représente l'énergie totale du système étudié.

L'Eq.(II.68) traduit l'équation générale des mouvements de déformation des nucléides pour le système. Cette équation sera utilisée dans la suite de notre travail.

II.10 Techniques de séparations des mouvements de la déformation et des interactions

II.10.1 Méthode de séparation des mouvements de déformations des nucléides

Nous rappelons que, l'énergie potentielle $V(\beta, \gamma)$ et la fonction d'onde $\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ étant quasiment séparables [116], nous aboutissons à deux équations hypergéométriques correspondant respectivement aux mouvements de rotation et vibration dûs aux variables β et γ des nucléides. Pour cela, posons :

$$V(\beta, \gamma) = V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2}, \quad (\text{II.69})$$

avec $V_1(\beta)$ qui représente l'énergie potentielle suivant la coordonnée β et

$V_2(\gamma)$, l'énergie potentielle suivant la coordonnée γ .

En injectons l'Eq.(II.69) dans l'Eq.(II.68), le Hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2}. \quad (\text{II.70})$$

La fonction d'onde s'écrit :

$$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i), \quad (\text{II.71})$$

avec $\chi(\beta)$ et $\eta(\gamma)$ des fonctions d'onde suivant les coordonnées β et γ respectivement, tandis que $D(\theta_i)$ est la composante angulaire de la fonction d'onde, appelée fonction d'onde de Wigner, qui est une fonction symétrique ayant pour expression :

$$D(\theta_i) = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)]. \quad (\text{II.72})$$

Dans l'Eq. (II.72), L est le nombre quantique du moment angulaire, α est la projection du moment quantique angulaire par rapport aux coordonnées fixes et $\nu = 1, 2, 3, \dots$. Dans la pratique, le découplage de l'équation du Hamiltonien n'est possible que pour les nucléides triaxiaux dont le

mouvement de rotation à une énergie potentielle minimale (c'est-à-dire $\gamma = \frac{\pi}{6}$) [117]. Dans le cas contraire, les différents mouvements décrits par les nucléides restent liés donc, la séparation des variables est quasi impossible.

Posons :

$$W = \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2 \left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k \right)}. \quad (\text{II.73})$$

Puisque que $\gamma = \frac{\pi}{6}$, alors :

$$W = \widehat{Q}_1^2 + 4\widehat{Q}_2^2 + 4\widehat{Q}_3^2. \quad (\text{II.74})$$

Le moment angulaire total \widehat{Q} , représente la somme des composantes des moments angulaires suivants les différents axes :

$$\widehat{Q} = \widehat{Q}_1^2 + \widehat{Q}_2^2 + \widehat{Q}_3^2 \quad (\text{II.75})$$

Compte tenu de l'expression de \widehat{Q} , l'Eq. (II.68) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} W &= 4(\widehat{Q}_1^2 + \widehat{Q}_2^2 + \widehat{Q}_3^2) - 3\widehat{Q}_1^2 \\ &= 4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2. \end{aligned} \quad (\text{II.76})$$

En tenant compte de toutes les expressions précédentes, l'Eq. (II.68) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} (4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2) \right] \chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) \\ + \left(V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2} \right) \chi(\beta)\eta(\gamma)\Theta(\theta_i) = E\chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) \end{aligned} \quad (\text{II.77})$$

En appliquant l'opérateur \widehat{Q}^2 [77] sur la fonction d'onde de Wigner, l'Eq. (II.72) s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{Q}^2 \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)] \\ = 4L(L+1) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [\Theta_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)]. \end{aligned} \quad (\text{II.78})$$

De même, en appliquant \widehat{Q}_1^2 sur la fonction de Wigner, l'Eq. (II.72) devient :

$$\begin{aligned} & \widehat{Q}_1^2 \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)] \\ & = (\alpha^2 + L - \alpha) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)]. \end{aligned} \quad (\text{II.79})$$

L représente le nombre quantique du moment angulaire et α la projection du moment quantique angulaire par rapport aux axes fixes.

Introduisons les Eqs. (II.78 et II.79) dans le troisième terme de l'opérateur Hamiltonien de l'Eq. (II.77), nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[-\frac{1}{4\beta^2} (4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2) \right] \chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) &= \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \chi(\beta)\eta(\gamma) \left(4\widehat{Q}^2 D(\theta_i) - 3\widehat{Q}_1^2 D(\theta_i) \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \chi(\beta)\eta(\gamma) (4L(L+1)D(\theta_i) - 3(\alpha^2 + L - \alpha)D(\theta_i)). \end{aligned} \quad (\text{II.80})$$

Multiplions maintenant l'Eq. (II.77) par $-\frac{2B}{\hbar^2}$ et posons :

$$\begin{aligned} v_1(\beta) &= \frac{2B}{\hbar^2} V_1(\beta), \\ v_2(\beta) &= \frac{2B}{\hbar^2} V_2(\beta), \\ \xi &= \frac{2B}{\hbar^2} E. \end{aligned} \quad (\text{II.81})$$

Nous rappelons que les effets de la projection de α sur les coordonnées fixes font introduire les nombres quantiques apparents n_ω [118] tels que $n_\omega = L - \alpha$ avec $L = n_\omega, n_{\omega+2}, n_{\omega+4}, \dots$. Pour $n_\omega = 0$, le nucléide est dans son état fondamental.

Les Eqs (II.82 et II.83) ci-dessous, décrivent les mouvements de rotation γ et les mouvements de vibration β . Les solutions de l'équation décrivant les mouvements de rotation des nucléides sont connues.

$$\left[-\frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \omega(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \lambda \eta(\gamma), \quad (\text{II.82})$$

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{4L(1+L) - 3\alpha^2 + 4\lambda}{4\beta^2} + u(\beta) \right] \psi(\beta) = \xi \psi. \quad (\text{II.83})$$

II.10.2 Solution de la partie γ

Pour les noyaux triaxiaux, la variable γ oscille uniformément entre $\gamma = 0^\circ$ et $\gamma = 60^\circ$. Nous supposons que la partie γ du potentiel est un oscillateur harmonique ayant un minimum profond $\gamma = \frac{\pi}{6}$. La surface d'énergie potentielle correspondante doit avoir un minimum autour de $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Aussi, lorsque le nucléide est en rotation, il passe de la forme elliptique à la forme sphérique et vice-versa. Dans la suite, le potentiel harmonique peut être considéré comme :

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{2}\tilde{c}\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right)^2. \quad (\text{II.84})$$

On définit \tilde{c} comme étant la rigidité du potentiel. En insérant l'Eq.(II.84) dans l'Eq. (II.77) et en résolvant l'équation obtenue, nous obtenons l'énergie et les fonctions d'ondes normalisées[30] respectivement :

$$\lambda_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{2\tilde{c}}\left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2}\right), \quad \tilde{n}_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.85})$$

et

$$\eta_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n_{\tilde{\gamma}}}\sqrt{\pi}n_{\tilde{\gamma}}!}} H_{n_{\tilde{\gamma}}}\left((\tilde{c}/2)^{1/4}\tilde{\gamma}\right) \exp\left(-(\tilde{c}/2)^{1/2}\tilde{\gamma}^2/2\right), \quad (\text{II.86})$$

avec $\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{6}$, $n_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots$ est le nombre quantique de l'oscillateur et $H_{n_{\tilde{\gamma}}}$ est le polynôme de Hermite.

II.10.3 Solution de la partie β

Considérons l'Eq. (II.83) et posons :

$$\psi(\beta) = \beta^{-2}F(\beta), \quad (\text{II.87})$$

introduisons l'Eq. (II.87) dans l'Eq.(II.83), on a :

$$\left[\frac{\partial}{\partial\beta^2} - \frac{P}{\beta^2} - u(\beta) + \xi\right]F(\beta) = 0, \quad (\text{II.88})$$

où

$$P = 2 + L(L + 1) - \frac{3\alpha^2}{4} + \lambda. \quad (\text{II.89})$$

Introduisons maintenant dans l'Eq.(II.83) le potentiel écranté de Kratzer qui est donné par la relation :

$$u(\beta) = \left(\frac{A}{\beta} + \frac{B}{\beta^2} \right) e^{-k\beta}, \quad (\text{II.90})$$

où A et B sont des constantes, β mesure l'étendue de la déformation et k est le paramètre de déformation du potentiel utilisé.

En utilisant les approximations de Pekeris [118-121], nous avons :

$$\frac{1}{\beta^2} \approx \frac{k^2}{(1 - e^{-k\beta})^2}, \quad \frac{1}{\beta} \approx \frac{k}{(1 - e^{-k\beta})}. \quad (\text{II.91})$$

En substituant $u(\beta)$ dans l'Eq.(II.88), nous avons :

$$\frac{d^2 F}{d\beta^2} + \left[-\frac{k^2 P}{(1 - e^{-k\beta})^2} - \frac{A k e^{-k\beta}}{1 - e^{-k\beta}} - \frac{B k^2 e^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})^2} + \xi \right] F(\beta) = 0. \quad (\text{II.92})$$

Posons :

$$z = e^{-k\beta}, \quad (\text{II.93})$$

nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dF(z)}{dz} + \frac{1}{[z(1-z)]^2} \left\{ \left(-\frac{A}{k} - B - \frac{2\xi}{k^2} \right) z + \left(\frac{A}{k} + \frac{\xi}{k^2} \right) z^2 + \frac{\xi}{k^2} - P \right\}. \quad (\text{II.94})$$

Pour déterminer les différentes valeurs de ξ_1 , ξ_2 et ξ_3 , identifions α_6 , α_7 et α_8 par l'Eq. (II.32), on a :

$$\xi_1 = -\frac{A}{k} - \frac{\xi}{k^2}, \quad \xi_2 = -\frac{A}{k} - B - \frac{2\xi}{k^2}, \quad \xi_3 = P k^2 - \xi, \quad (\text{II.95})$$

et les différentes valeurs des paramètres sont données par :

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = -\frac{1}{2}, \alpha_6 = \frac{1}{4} - \frac{A}{k} - \frac{\xi}{k^2}, \alpha_7 = \frac{A}{k} + B + \frac{2\xi}{k^2}, \\ \alpha_8 = P - \frac{\xi}{k^2}, \alpha_9 = B + P + \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (\text{II.96})$$

En introduisons l'Eq. (II.96) dans l'Eq. (II.48), on a :

$$\begin{aligned} n - (2n + 1) \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{A}{\alpha} + B + \frac{2\xi}{\alpha^2} + 2 \left(P - \frac{\xi}{\alpha^2} \right) + n(n - 1) + \\ (2n + 1) \sqrt{\frac{1}{4} + B + P} + \left(2\sqrt{\frac{1}{4}B + P} + (2n + 1) \right) \sqrt{P - \frac{\xi}{\alpha^2}} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.97})$$

En simplifiant l'Eq.(II.97), nous obtenons l'équation suivante :

$$P - \frac{\xi}{\alpha^2} = \frac{\left(n^2 + n + \frac{1}{2} + \frac{A}{\alpha} + B + 2P + (2n + 1) \sqrt{\frac{1}{4} + B + P} \right)^2}{\left(2\sqrt{\frac{1}{4} + B + P} + (2n + 1) \right)^2}. \quad (\text{II.98})$$

Finalement, l'expression de l'énergie du spectre est donnée par la relation :

$$\xi = Pk^2 - k^2 \left[\frac{\left(n^2 + n + \frac{1}{2} + \frac{A}{k} + B + 2P + (2n + 1) \sqrt{\frac{1}{4} + B + P} \right)^2}{\left((2n + 1) + 2\sqrt{\frac{1}{4} + B + P} \right)} \right]^2, \quad (\text{II.99})$$

où A, B sont les constantes et k est le paramètre de déformation.

II.10.4 Cas spéciaux

Dans cette section, nous allons maintenant discuter les différents cas, lorsque les paramètres k et B tendent vers zéro.

■ Quand $k \rightarrow 0$, l'Eq. (II.90) prend la forme standard du potentiel Kratzer ci-dessous :

$$u(\beta) = \left(\frac{A}{\beta} + \frac{B}{\beta^2} \right), \quad (\text{II.100})$$

et dans ce cas, l'expression de l'énergie est donnée par :

$$\xi = -\frac{A^2}{\left(2\sqrt{\frac{1}{4}} + B + P + (2n + 1)\right)^2}, \quad (\text{II.101})$$

■ Quand $B \rightarrow 0$, l'Eq. (II.90) est réduit au potentiel écranté de Kratzer de Coulomb suivant :

$$u(\beta) = \frac{A}{\beta} e^{-k\beta}. \quad (\text{II.102})$$

L'énergie du potentiel écranté de Kratzer de Coulomb est donnée sous la forme :

$$\xi = Pk^2 - k^2 \left[\frac{\left(n^2 + n + \frac{1}{2} + \frac{A}{k} + 2P + (2n + 1)\sqrt{\frac{1}{4} + P}\right)}{\left((2n + 1) + 2\sqrt{\frac{1}{4} + P}\right)} \right]^2. \quad (\text{II.103})$$

■ Quand $k \rightarrow 0, B = 0$, l'Eq. (II.90) prend la forme du potentiel de Coulomb sous la forme suivante :

$$u(\beta) = \frac{A}{\beta}, \quad (\text{II.104})$$

et l'énergie correspondante devient :

$$\xi = -\frac{A^2}{\left(2\sqrt{\frac{1}{4}} + P + (2n + 1)\right)^2}. \quad (\text{II.105})$$

II.10.5 Détermination de la fonction d'onde

Considérons l'Eq. (II.57), nous avons :

$$\psi_{n,l}(s) = N_{n,l} s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \times P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}} - \alpha_{10}-1\right)} (1 - 2\alpha_3 s). \quad (\text{II.106})$$

À partir des Eqs. (II.52), (II.53), (II.55) et (II.56) et on tenant compte de l'Eq. (II.96), les différentes valeurs de α_{10} , α_{11} , α_{12} et α_{13} sont données par :

$$\begin{aligned}\alpha_{10} &= 1 + 2\sqrt{P - \frac{\xi}{k^2}}, \\ \alpha_{11} &= 2 + 2\left(\sqrt{\frac{1}{4} + B + P} + \sqrt{P - \frac{\xi}{k^2}}\right), \alpha_{12} = \sqrt{P - \frac{\xi}{k^2}}, \\ \alpha_{13} &= -\frac{1}{2} - \left(\sqrt{\frac{1}{4} + B + P} + \sqrt{P - \frac{\xi}{k^2}}\right).\end{aligned}\tag{II.107}$$

Posons :

$$s = e^{-\alpha\beta}.\tag{II.108}$$

En remplaçant l'Eq.(II.108) dans l'Eq.(II.106), on à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\psi(\beta) &= N_\beta \beta^{-2} \left(e^{-\alpha_{12}\alpha\beta}\right) \left(1 - \alpha_3 e^{-\alpha\beta}\right)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \\ &\times P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1\right)} \left(1 - 2\alpha_3 e^{-\alpha_{12}\beta}\right),\end{aligned}\tag{II.109}$$

où P_n est le polynôme de Jacobi et N_β représente la constante de normalisation.

La condition de normalisation est donnée par la formule suivante :

$$\int_0^{+\infty} \beta^4 \psi_\beta^2(\beta) d\beta = 1,\tag{II.110}$$

en remplaçant l'Eq. (II.109) dans l'Eq. (II.110), on obtient l'expression de la constante de normalisation :

$$N_\beta = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{+\infty} \left[\left(e^{-\alpha_{12}\alpha\beta}\right) \left(1 - \alpha_3 e^{-\alpha\beta}\right)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \times P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1\right)} \left(1 - 2\alpha_3 e^{-\alpha_{12}\beta}\right) \right]^2 d\beta}},\tag{II.111}$$

En introduisant l'Eq. (II.79, II.88 et II.106) dans l'Eq. (II.86), nous obtenons l'expression de la

fonction d'onde suivante :

$$\begin{aligned} \psi(\beta, \gamma, \theta_i) = & \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n\tilde{\gamma}} \sqrt{\pi n\tilde{\gamma}}}} H_{n\tilde{\gamma}} \left((\tilde{c}/2)^{1/4} \tilde{\gamma} \right) \exp \left(-(\tilde{c}/2)^{1/2} \tilde{\gamma}^2 / 2 \right) \\ & \times \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2 (1+\delta_{\alpha,0})}} \left[D_{\mu,\alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu,-\alpha}^L(\theta_i) \right] \\ & \times N_L \beta^{-2} \left(e^{-\alpha_{12}\alpha\beta} \right) \left(1 - \alpha_3 e^{-\alpha\beta} \right)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \\ & \times P_n^{\left(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1 \right)} \left(1 - 2\alpha_3 e^{-\alpha_{12}\beta} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.112})$$

II.11 Moment de transition quadrupolaire électrique

Le moment de transition quadrupolaire électrique permet de déterminer les différentes transitions des nucléides.

II.11.1 Moment de transition quadrupolaire nucléaire

Le moment de transition quadrupolaire nucléaire est un caractère fondamental associé au noyau. Ce moment est lié à la répartition non purement sphérique au sein du noyau. En effet sa mesure nous permet de sonder la déformation géométrique du noyau de sa forme sphérique. Il permet aussi de donner tous les détails sur des énergies de chaque niveau. Celui-ci singularise et particularise chaque nucléon en indiquant s'il se trouve au niveau fondamental, γ ou β . L'équation quadrupolaire électrique est régie par [116-123] :

$$T_{\mu}^{(E2)} = t\beta \left[D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right) \sin \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) \right], \quad (\text{II.113})$$

où θ_i sont les angles d'Euler, t un scalaire, $D_{\mu,\alpha}^{(2)}(\theta_i)$ sont définies comme des fonctions de Wigner pour les angles d'Euler, μ est le niveau concerné et L le nombre quantique du moment angulaire.

■ Pour $\gamma = \frac{\pi}{6}$, l'opérateur quadrupolaire se réduit à :

$$T_{\mu}^{(E2)} = -\frac{t\beta}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right). \quad (\text{II.114})$$

Ainsi, les différentes probabilités de transitions B(E2) [123-124] des niveaux i vers les niveaux f

sont définies par :

$$B(E2; L_i \alpha_i \longrightarrow L_f \alpha_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle L_f \alpha_f || T^{(E2)} || L_i \alpha_i \rangle|^2}{2L_i + 1}, \quad (\text{II.115})$$

où $L_i \alpha_i$ et $L_f \alpha_f$ représentent les énergies des niveaux i et f respectivement et $|\langle L_f \alpha_f || T^{(E2)} || L_i \alpha_i \rangle|^2$ est une quantité matricielle calculée à partir du théorème de Wigner-Eckart[109]. Ces éléments de matrice sont donnés par :

$$\langle L_f M_f \alpha_f | T_{\mu}^{(E2)} | L_i M_i \alpha_i \rangle = \frac{\langle L_f \alpha_f || T^{(E2)} || L_i \alpha_i \rangle}{\sqrt{2L_f + 1}} \langle L_i 2L_f | M_i \mu M_f \rangle. \quad (\text{II.116})$$

La fonction d'onde associée à cette transition est donnée par :

$$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \sqrt{\frac{2L + 1}{16\pi^2 (1 + \delta_{\alpha,0})}} \left[D_{\mu, \alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu, -\alpha}^L(\theta_i) \right] \xi_{n, n_{\omega}, L, n_{\tilde{\gamma}}}(\beta) \eta_{n_{\tilde{\gamma}}}(\tilde{\gamma}). \quad (\text{II.117})$$

Afin de calculer les éléments de la matrice de l'opérateur quadrupolaire de l'Eq. (II.116), l'intégrale à travers $\tilde{\gamma}$ est égale à l'unité à cause de la méthode de normalisation des fonctions d'ondes [91]. L'intégrale à travers les angles d'Euler est déformée par l'intégrale principale des trois fonctions de Wigner et l'intégrale à travers β prend la forme [124] :

$$I(n_i, L_i, \alpha_i, n_f, L_f, \alpha_f) = \int \beta \xi_{n_i, L_i, \alpha_i}(\beta) \xi_{n_f, L_f, \alpha_f}(\beta) \beta^4 d\beta, \quad (\text{II.118})$$

où les facteurs β et β^4 proviennent de l'opérateur quadrupolaire et l'élément de volume respectivement.

En utilisant le théorème de Wigner-Eckart, l'Eq. (II.115) prend la forme :

$$B(E2; L_i, \alpha_i \longrightarrow L_f, \alpha_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{t^2}{2} \frac{1}{(1 + \delta_{\alpha_i, 0})(1 + \delta_{\alpha_f, 0})} \times \\ \left[(L_i, 2, L_f | \alpha_i, 2, \alpha_f) + (L_i, 2, L_f | \alpha_i, -2, \alpha_f) + (-1)^{L_i} (L_i, 2, L_f | -\alpha_i, 2, \alpha_f) \right]^2 \times \\ [I(n_i, L_i, \alpha_i, n_f, L_f, \alpha_f)]^2. \quad (\text{II.119})$$

Les trois coefficients de Clebsch-Gordan (CCG) [125-127] apparaissant dans l'équation ont été déduits par ses propriétés (seulement les transitions $\Delta\alpha = \pm 2$ sont permises). En effet, le premier CCG ne disparaît que si $\alpha_i + 2 = \alpha_f$, tandis que le second CCG ne disparaît que si $\alpha_i - 2 = \alpha_f$ et le troisième CCG ne disparaît que si $\alpha_i + \alpha_f = 2$. Ce dernier peut être valable que dans quelques

cas particuliers. Les résultats de la partie angulaire de cette équation sont connus.

L'état fondamental est caractérisé par $n_\omega = L - \alpha = 0$ et ses transitions sont caractérisées par $\alpha_i = L_i$ et $\alpha_f = L_f$ [123-125]. En normalisant les taux de B(E2) pour les faibles transitions au sein de l'état fondamental nous obtenons :

$$R_{ground \rightarrow ground}(L + 2 \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L + 2)_g \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.120})$$

Les niveaux paires de la bande γ sont caractérisés par $n_\omega = L - \alpha = 2$, ce qui signifie que $\alpha = L - 2$.

Pour l'état fondamental, $n_{\omega f} = 0$, $n_f = 0$ et pour la bande γ des valeurs paires de L , $n_{\omega i} = 2$, $n_i = 0$ et le taux de transition est donnée par :

$$R_{\gamma\text{-even} \rightarrow ground}(L \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-even}} \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.121})$$

Pour la bande γ des valeurs impaires de L , $n_{\omega i} = 1$, $n_i = 0$ et le taux de transition des niveaux impairs de la bande γ vers l'état fondamental sont donnés par :

$$R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow ground}(L \rightarrow L + 1) = \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-odd}} \rightarrow (L + 1)_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.122})$$

Pour les transitions des niveaux impairs de la bande γ vers les niveaux impairs de la bande γ inférieurs, on a :

$$R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \gamma\text{-even}}(L + 2 \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L + 2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.123})$$

Les transtions des niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L vers niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L inférieures sont données par :

$$R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \gamma\text{-odd}}(L \rightarrow L - 1) = \frac{B(E2; (L + 2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.124})$$

De même, pour les niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L vers les niveaux de bande

γ pour les valeurs paires de L , on a :

$$R_{\gamma\text{-odd}\rightarrow\gamma\text{-even}}(L \rightarrow L - 1) = \frac{B(E2; L_{\gamma} \rightarrow (L - 1)_{\gamma})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.125})$$

Pour le premier état excité, c'est-à-dire pour les niveaux de la bande β , $n_{\omega f} = 0$, $n_f = 1$ et

$$R_{\beta\text{-band}\rightarrow\beta\text{-band}}(L \rightarrow L - 1) = \frac{B(E2; L_{\beta\text{-band}} \rightarrow (L - 1)_{\beta\text{-band}})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \quad (\text{II.126})$$

II.12 Conclusion

Dans ce chapitre, il était question de trouver les solutions analytiques de notre modèle à partir de l'équation hypergéométrique le régissant. Comme les mouvements décrits par les nucléides sont toujours couplés entre eux, nous avons fait appel aux différentes techniques mathématiques afin de retrouver séparément ces équations de mouvements. Plusieurs fonctions mathématiques associées à la physique ont été explorées ; nous faisons allusions aux polynômes de Jacobi, de Rodrigues et Legendre.

Il est maintenant question d'utiliser toutes ces notions pour expliquer les différents résultats concernant notre modèle utilisé à savoir : les énergies du spectre, les moments quadripolaires électriques, les différentes probabilités de transitions et d'engager quelques discussions relatives à leurs validations.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous avons déterminé par la méthode de Nikivorov Uvarov, les solutions des équations hypergéométriques qui régissent le modèle du Hamiltonien de Bohr par la détermination des propriétés des noyaux du xénon et platine. Les différents résultats théoriques obtenus seront comparés aux données expérimentales des isotopes de $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$ et du $^{192,194,196}\text{Pt}$ ainsi que leurs interprétations. Les courbes des effets d'étalonnages sont tracées et comparées à celles de la symétrie $Z(5)$ et les données expérimentales de Chabab et al.

III.2 Présentation des résultats et discussion

Les énergies de niveau de chaque nucléide sont obtenues en utilisant l'Eq. (II.99). La forme normalisée de l'Eq. (II.99) est [128] :

$$R_{n,L,n_\omega} = \frac{E_{n,L,n_\omega} - E_{0,0,0}}{E_{0,2,0} - E_{0,0,0}}, \quad (\text{III.1})$$

où

n : le nombre quantique principal,

n_ω : le nombre quantique secondaire,

L : le nombre quantique cinétique,

$E_{0,2,0} - E_{0,0,0}$, est défini comme les rapports des énergies normalisées au premier état excité,

E_{L^+,n_ω} , représente l'énergie du noyau dans l'état L_n^+, n_ω .

Ainsi,

\Rightarrow la bande de l'état fondamental est donnée en considérant $n = 0$ et $n_\omega = 0$, la bande γ , $n = 0$ et $n_\omega = 1$ pour les valeurs impaires de L , tandis que $n = 0$ et $n_\omega = 2$ pour les valeurs paires de L et la bande β quand à elle, est identifiée pour $n = 1$ et $n_\omega = 0$.

TABLE 3 – Comparaison des résultats théoriques de l'état fondamental, des bandes β et γ des énergies avec les données expérimentales [129].

Isotopes	^{126}Xe		^{128}Xe		^{130}Xe		^{132}Xe		^{134}Xe		^{192}Pt		^{194}Pt		^{196}Pt		
	Théo.	Exp.	Théo.	Exp.	Théo.	Exp.	Théo.	Exp.	Théo.	Exp.	Théo.	Exp.	Théo.	Exp.	Théo.	Exp.	
L_{band}																	
2^+_g	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4^+_g	2.485	2.424	2.422	2.333	2.387	2.247	2.175	2.157	1.828	2.044	2.482	2.479	2.452	2.470	2.446	2.464	2.464
6^+_g	4.255	4.207	4.026	3.922	3.905	3.627	3.241	3.163	2.387	2.387	4.312	4.314	4.133	4.299	4.112	4.290	4.290
8^+_g	6.126	6.267	5.622	5.674	5.370	5.031					6.099	6.377	5.855	6.392	5.807	6.333	6.333
10^+_g	7.960	8.645	7.098	7.597	6.686	6.457					7.912	8.624	7.491	8.671	7.409	8.558	8.558
12^+_g	9.673	10.999	8.013		7.820	7.867											
14^+_g					8.776	9.458											
2^+	1.912	2.264	1.885	2.189	1.868	2.093	1.760	1.944	1.567	1.905	1.900	1.935	1.896	1.894	1.897	1.936	1.936
3^+	2.758	3.391	2.676	3.228	2.631	3.045	2.358	2.701	1.936	2.266	2.714	2.910	2.715	2.809	2.707	2.854	2.854
4^+	4.706	3.830	4.419	3.620	4.271	3.373	3.471	2.940	2.491	2.458	4.550	3.795	4.522	3.743	4.526	3.636	3.636
5^+	4.923	4.898	4.607	4.508	4.444	4.051	3.577	3.246	2.536	2.682	4.751	4.682	4.755	4.563	4.725	4.525	4.525
6^+	7.178	5.698	6.480	5.150							6.792	5.905	6.723	5.863	6.734	5.644	5.644
7^+	7.012	6.848	6.346	6.165							6.644	6677					
8^+	9.313	7.878									8.652	8.186	8.538	8.186	8.555	7.730	7.730
9^+	8.933	9.059															
0^+_{β}	3.493	3.381	3.575	3.575	3.141	3.446	2.359	2.771	1.711	1.932	4.078	3.776	3.687	3.858	3.506	3.192	3.192
2^+_{β}	4.229	4.319	4.260	4.515							4.776	4.547	4.394	4.603	4.212	3.828	3.828
4^+_{β}	5.334	5.255									5.801	6.110	5.432	5.817	5.245	4.318	4.318
$\sigma_{Theo.}$				0.494		0.403		0.299		0.211		0.403		0.496		0.624	0.624
σ_{Exp}				0.446		0.404		0.157		0.091		0.469		0.512		0.664	0.664

Nous présentons dans le tableau 3, les valeurs des rapports des énergies de la bande de l'état fondamental (2_g^+ , 4_g^+ , 6_g^+ , 8_g^+ , 10_g^+ , 12_g^+ et 14_g^+), de la bande γ (2_γ^+ , 3_γ^+ , 4_γ^+ , 5_γ^+ , 6_γ^+ , 7_γ^+ , 8_γ^+ et 9_γ^+) et la bande β (0_β^+ , 2_β^+ et 4_β^+) par rapport au premier état excité des isotopes de $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$ et du $^{192,194,196}\text{Pt}$. Les différentes valeurs des écarts types des huit isotopes ont été présentées. Ce facteur est défini comme la déviation moyenne des prédictions théoriques par rapport aux données expérimentales. Il est donné par la relation suivante [114] :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (E_i^{\text{exp}} - E_i^{\text{theo}})^2}{m-1}}. \quad (\text{III.2})$$

où E_i^{exp} et E_i^{theo} sont les énergies expérimentales et théoriques de niveau i respectivement et m le nombre des énergies de niveau considéré. Discutons maintenant les différentes valeurs obtenues :

⇒ **Bande de l'état fondamental** : (2_g^+ , 4_g^+ , 6_g^+ , 8_g^+ , 10_g^+ , 12_g^+ et 14_g^+)

■ Cas des isotopes du xénon

-les valeurs obtenues théoriquement pour l'isotope de ^{126}Xe croient de 2.485 à 9.673 de la bande de 4_g^+ à 12_g^+ . Comparées aux données expérimentales de Chabab [129], qui croient aussi de 2.424 à 10.999. On constate que, les valeurs théoriques et expérimentales évoluent de la même manière au niveau de la bande de 4_g^+ à 8_g^+ . Mais c'est au niveau de la bande de 10_g^+ à 12_g^+ qu'on observe des écarts entre les valeurs théoriques et expérimentales.

-dans le cas de ^{128}Xe , les valeurs théorique croient de 2.422 à 8.013 de la bande de 4_g^+ à 12_g^+ . Comparées aussi aux données expérimentales, ces valeurs croient de 2.333 à 7.597 de la bande de 4_g^+ à 10_g^+ . Dans les états de 4_g^+ à 6_g^+ , les valeurs théoriques sont supérieures aux valeurs expérimentales.

-pour l'isotope de ^{130}Xe , on remarque que, les valeurs théoriques sont supérieures aux données expérimentales dans les états de 4_g^+ à 10_g^+ . Mais dans les états de 12_g^+ à 14_g^+ , les données expérimentales sont supérieures aux valeurs théoriques.

-les valeurs expérimentales de ^{132}Xe sont supérieures aux données expérimentales de Chabab.

- pour le ^{134}Xe , la valeur théorique est inférieure à la valeur expérimentale. Par contre, on rémarque que, les deux valeurs théoriques et expérimentales ont les mêmes valeurs qui est de 2.387.

■ Cas des isotopes du platine

-dans l'état 4_g^+ , la valeur théorique du ^{192}Pt est inférieure à la valeur expérimentale. Dans les états 6_g^+ à 10_g^+ , les valeurs théoriques sont inférieures aux valeurs expérimentales.

-pour les isotopes de ^{194}Pt et ^{196}Pt , toutes les valeurs théoriques obtenues sont inférieures aux données expérimentales dans les 4_g^+ à 10_g^+ .

⇒ **Bande γ** : (2_γ^+ , 3_γ^+ , 4_γ^+ , 5_γ^+ , 6_γ^+ , 7_γ^+ , 8_γ^+ et 9_γ^+)

■ Cas des isotopes du xénon

-dans les bandes des états de 2_γ^+ , 3_γ^+ et 9_γ^+ , les valeurs théoriques du ^{126}Xe sont inférieures aux données expérimentales de Chabab [129]. Par contre, dans les états de 4_γ^+ , 5_γ^+ , 6_γ^+ , 7_γ^+ et 8_γ^+ les valeurs théoriques sont supérieures aux données expérimentales.

-pour l'isotope de ^{128}Xe , les valeurs théoriques sont inférieures par rapport aux données expérimentales dans les états de 2_γ^+ à 3_γ^+ . Par contre, dans les états de 4_γ^+ à 7_γ^+ , les valeurs théoriques sont supérieures aux données expérimentales.

-nous constatons que, les valeurs théoriques des isotopes de $^{128,132,134}\text{Xe}$ dans les bandes des états de 2_γ^+ à 3_γ^+ , sont inférieures aux données expérimentales. Pour les états de 4_γ^+ à 5_γ^+ , les valeurs théoriques sont supérieures aux données expérimentales.

■ Cas des isotopes du platine

- dans les états 2_γ^+ , 3_γ^+ et 7_γ^+ , on constate que les valeurs expérimentales des isotopes du $^{192,194,196}\text{Pt}$ sont supérieures aux valeurs théoriques. Tandis que, dans les états 4_γ^+ , 5_γ^+ , 6_γ^+ et 8_γ^+ , toutes les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques.

⇒ **Bande β** : (0_β^+ , 2_β^+ et 4_β^+)

■ Cas des isotopes du xénon

- dans l'état de 0_β^+ et 4_β^+ , les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques pour le ^{126}Xe .

- dans les états de 2_β^+ , les valeurs théoriques sont supérieures aux valeurs expérimentales pour les isotopes de $^{126,128}\text{Xe}$.

■ Cas des isotopes du platine

-dans les états de 0_β^+ à 2_β^+ , les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques du ^{192}Pt , sauf pour le ^{194}Pt .

- pour le ^{196}Pt , toutes les valeurs théoriques obtenues sont supérieures aux données expérimentales.

Ces différentes valeurs obtenues théoriquement, nous conduisent à tirer une conclusion sui-

vante :

Les valeurs obtenues théoriquement par notre modèle pour les isotopes du platine sont inférieures et meilleures que celles de Chabab. et al[129]. Le potentiel utilisé est applicable aux isotopes de platine. On peut écrire que :

$$\sigma_{Pt} < \sigma_{Chabab}.$$

Dans le cas des isotopes du xénon, notre modèle n'est pas meilleur sur les tous les isotopes, car d'après le tableau 3, seuls les valeurs des écarts-types des isotopes du ^{126}Xe et ^{130}Xe qui sont inférieurs aux valeurs théoriques de Chabab. et al par rapport aux isotopes du ^{128}Xe , ^{132}Xe et ^{134}Xe dont les valeurs théoriques sont supérieures aux valeurs théoriques de Chabab. et al. Ce qui montre que, pour ces trois isotopes, notre modèle n'est pas meilleur.

Ces différentes valeurs des écarts types nous montrent clairement que, pour les isotopes de platine, notre modèle nous a permis d'avoir les valeurs inférieures que celles de Chabab. et al.

III.2.1 Relation intra et inter-bande

Dans cette section, nous allons présenter quelques notions de bases sur les calculs des transitions B(E2) intra et inter-bande obtenues à partir des différentes valeurs dans les tableaux ci-dessous. La comparaison de ces résultats obtenus à partir de notre modèle et comparés avec les données expérimentales pour les isotopes du xénon et du platine. Les transitions quadrupôlaires observées ici sont les suivantes :

état fondamental \rightarrow état fondamental,

γ -pair \rightarrow état fondamental,

γ -impair \rightarrow état fondamental,

γ -pair \rightarrow γ -pair,

γ -impair \rightarrow γ -impair,

γ -impair \rightarrow γ -pair et

$\beta \rightarrow \beta$.

Il est important de savoir que les résultats des tableaux 4 et 5 ont été obtenus en utilisant les règles de sélections imposées par les Coefficients de Clebsch-Gordan (CCG), c'est-à-dire que les transitions permises sont celles qui vérifient l'équation $\Delta\alpha = \pm 2$. Afin d'évaluer ces transitions permises, on calcule la valeur de $\Delta\alpha = \alpha_f - \alpha_i$. Les paramètres fixes pour chacune des bandes sont :

- l'état fondamental (gsb) par $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 0, 0)$,
 - la bande γ pour les valeurs paires de L s'obtient avec $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 2, 0)$,
 - la bande γ pour les valeurs impaires de L s'obtient avec $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 1, 0)$ et
 - la bande β s'identifie pour $(n, n_\omega, n_\gamma) = (1, 0, 0)$.
- Les transitions $(4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0})$ et $(7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2})$ sont des exemples de transitions permises par la règle de sélection des CCG. En effet, $\alpha_i = L_i - (n_\omega)_i$ et $\alpha_f = L_f - (n_\omega)_f$
 - $(4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}) : \alpha_i = 4 - 0 = 4, \alpha_f = 2 - 0 = 2$ et on trouve $\Delta\alpha = 2$,
 - $(7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2}) : \alpha_i = 7 - 1 = 6, \alpha_f = 6 - 2 = 4$ et on trouve $\Delta\alpha = 2$.
 - Les transitions $(0_{1,0} \rightarrow 2_{0,2})$ et $(3_{0,1} \rightarrow 2_{0,0})$ sont des exemples de transitions non permises par la règle de sélection de CCG. En effet, $\alpha_i = L_i - (n_\omega)_i$ et $\alpha_f = L_f - (n_\omega)_f$
 - $(0_{1,0} \rightarrow 2_{0,2}) : \alpha_i = 0 - 0 = 0, \alpha_f = 2 - 2 = 0$ et on trouve $\Delta\alpha = 0$,
 - $(3_{0,1} \rightarrow 2_{0,0}) : \alpha_i = 2 - 0 = 2, \alpha_f = 3 - 1 = 2$ et on trouve $\Delta\alpha = 0$.
- En outre, la transition d'une bande f à une bande i est dite non permise si l'énergie de transition est insuffisante ou très grande pour se retrouver au niveau indiqué.

TABLE 4 – Comparaison des transitions B(E2) théoriques avec les données expérimentales [129] pour les isotopes du $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$.

Isotopes $L_{n,n_\omega}^i \rightarrow L_{n,n_\omega}^f$	^{126}Xe		^{128}Xe		^{130}Xe		^{132}Xe		^{134}Xe	
	Théo.	Exp.	Théo.	Exp.	Théo.	Exp.	Théo.	Exp.	Théo.	Exp.
$4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$	1.472		1.481	1.468	1.457		1.365	1.238	1.125	0.758
$6_{0,0} \rightarrow 4_{0,0}$	1.828		1.883	1.941	1.811		1.758		1.797	
$8_{0,0} \rightarrow 6_{0,0}$	1.976		2.168	2.388	2.043		2.250		3.078	
$10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$	2.034		2.493	2.737	2.299	0.045	3.032		3.405	
$12_{0,0} \rightarrow 10_{0,0}$	2.025		2.928		2.628		3.214		3.610	
$14_{0,0} \rightarrow 12_{0,0}$	2.215		3.012		3.028		3.614		3.764	
$2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$	0.759		0.772	1.194	0.784		0.857	1.775	1.128	
$4_{0,2} \rightarrow 4_{0,0}$	0.340		0.358		0.375		0.477		0.851	
$6_{0,2} \rightarrow 6_{0,0}$	0.219		0.240		0.260		0.383		0.865	
$8_{0,2} \rightarrow 8_{0,0}$	0.178		0.160		0.120		0.215		0.755	
$3_{0,1} \rightarrow 4_{0,0}$	1.013		1.010		1.001		0.941		0.706	
$5_{0,1} \rightarrow 6_{0,0}$	0.777		0.787		0.784	0.342	0.774		0.721	
$7_{0,1} \rightarrow 8_{0,0}$	0.702		0.702		0.707		0.785		1.022	
$9_{0,1} \rightarrow 10_{0,0}$	0.633		0.691		0.709		0.915		1.478	
$4_{0,2} \rightarrow 2_{0,2}$	0.360		0.375		0.384		0.437		0.588	
$6_{0,2} \rightarrow 4_{0,2}$	1.218		1.348		1.454		2.135		1.447	
$8_{0,2} \rightarrow 6_{0,2}$	2.431		2.801		3.178		2.905		2.815	
$5_{0,1} \rightarrow 3_{0,1}$	1.223		1.296		1.328		1.578		2.354	
$7_{0,1} \rightarrow 5_{0,1}$	2.030		2.255		2.367		3.312		2.121	
$9_{0,1} \rightarrow 7_{0,1}$	2.907		3.415		3.367		4.025		3.095	
$3_{0,1} \rightarrow 2_{0,2}$	1.084		1.136		1.181		1.145		1.120	
$5_{0,1} \rightarrow 4_{0,2}$	1.575		1.739		1.908		2.919		1.702	
$7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2}$	1.939		2.208		2.544		4.045		2.186	
$2_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$	2.029		1.481		2.191		1.358		1.492	
$4_{0,0} \rightarrow 4_{0,0}$	2.873		1.883		3.123		1.753		1.919	

Nous présentons dans le tableau 4, les différentes valeurs de quelques transitions B(E2) des isotopes de $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$, calculées puis comparées avec les données expérimentales.

⇒ les transitions de l'état fondamental à l'état fondamental :

-dans cette gamme de transition de $4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$ à $14_{0,0} \rightarrow 12_{0,0}$, les valeurs obtenues croient à partir de la valeur minimale de 1.472 à 2.215 de la valeur maximale pour l'isotope de ^{126}Xe . Pour cet isotope, toutes les données expérimentales ne figurent pas dans la littérature.

-pour le ^{128}Xe , les valeurs théoriques croient aussi à partir de 1.481 à 3.012 de la valeur maximale. Les valeurs expérimentales croient aussi de 1.468 à 2.737. Nous remarquons que, dans la bande de $4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$, les valeurs théoriques sont supérieures aux données expérimentales. Mais dans la bande $6_{0,0} \rightarrow 4_{0,0}$ et de $10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$, les valeurs théoriques sont inférieures aux données expérimentales.

-pour le ^{130}Xe , les valeurs théoriques croient aussi de 1.457 de la valeur minimale à 3.028. Et on constate que, la valeur théorique est supérieure à la valeur expérimentale dans la bande de $10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$.

-les valeurs croient aussi de 1.365 pour l'isotope de ^{132}Xe à 3.614 pour les valeurs théoriques. Dans la bande de l'état de $4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$, la valeur théorique est supérieure à la valeur expérimentale.

-pour l'isotope ^{134}Xe , la valeur théorique obtenue est supérieure à la donnée expérimentale dans l'état $4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$. Et les valeurs théoriques croient de 1.125 à 3.764.

⇒ les transitions de γ -pair à l'état fondamental

-pour les transitions de $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$ à $8_{0,2} \rightarrow 8_{0,0}$, les valeurs théoriques obtenues décroissent pour tous les isotopes de $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$. Et nous constatons aussi que, pour les isotopes de $^{128,132}\text{Xe}$, les valeurs théoriques sont inférieures aux données expérimentales de Chabab [129] dans l'état de $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$.

⇒ les transitions de γ -impair à l'état fondamental.

-Pour les transitions de $3_{0,1} \rightarrow 4_{0,0}$ à $9_{0,1} \rightarrow 10_{0,0}$. Nous observons que, les valeurs théoriques décroissent pour tous les isotopes de xénon. Mais, dans la bande de l'état de $5_{0,1} \rightarrow 6_{0,0}$, la valeur théorique de ^{130}Xe est supérieure à la donnée expérimentale.

⇒ Pour les bandes de transitions de γ -pair à γ -pair, γ -impair à γ -impair, γ -impair à γ -pair et β à β , on constate que, toutes les valeurs théoriques obtenues croient. Dans ces différents états de transitions, les données expérimentales ne figurent pas dans la littérature.

TABLE 5 – Comparaison des transitions B(E2) avec les données expérimentales et la prédiction de Morse [129] des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$.

Isotopes $L_{n,n_\omega}^i \rightarrow L_{n,n_\omega}^f$	^{192}Pt			^{194}Pt			^{196}Pt		
	Théo.	Exp.	esM.	Théo.	Exp.	esM.	Théo.	Exp.	esM.
$4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$	1.497	1.556	1.563	1.482	1.728	1.630	1.475	1.478	1.540
$6_{0,0} \rightarrow 4_{0,0}$	1.933	1.224	2.213	1.877	1.362	2.334	1.851	1.798	2.141
$8_{0,0} \rightarrow 6_{0,0}$	2.250		2.735	2.125	1.016	2.835	2.067	1.921	2.597
$10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$	2.598		3.163	2.371	0.691	3.187	2.264		2.955
$2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$	0.761	1.905	1.586	0.765	1.809	1.653	0.767		1.564
$4_{0,2} \rightarrow 4_{0,0}$	0.342		0.350	0.348	0.285	0.370	0.351		0.339
$6_{0,2} \rightarrow 6_{0,0}$	0.220			0.228			0.232	0.394	
$8_{0,2} \rightarrow 8_{0,0}$	0.171			0.182			0.186		
$3_{0,1} \rightarrow 4_{0,0}$	1.016	0.664	1.236	1.013		1.305	1.011		1.200
$5_{0,1} \rightarrow 6_{0,0}$	0.787			0.784			0.783		
$7_{0,1} \rightarrow 8_{0,0}$	0.691			0.690			0.689		
$9_{0,1} \rightarrow 10_{0,0}$	0.665			0.666			0.665		
$4_{0,2} \rightarrow 2_{0,2}$	0.365		0.734	0.368	0.427	0.776	0.369	0.714	0.716
$6_{0,2} \rightarrow 4_{0,2}$	1.239		1.081	1.279		1.112	1.295	1.207	1.022
$8_{0,2} \rightarrow 6_{0,2}$	2.442		1.715	2.295		1.697	2.658		1.589
$5_{0,1} \rightarrow 3_{0,1}$	1.255		1.250	1.263		1.316	1.266		1.205
$7_{0,1} \rightarrow 5_{0,1}$	2.121		1.943	2.150		1.994	2.159		1.834
$9_{0,1} \rightarrow 7_{0,1}$	3.118		2.485	3.182		2.468	3.198		2.306
$3_{0,1} \rightarrow 2_{0,2}$	1.091	1.783	2.147	1.108		2.264	1.116		2.094
$5_{0,1} \rightarrow 4_{0,2}$	1.577			1.647			1.675		
$7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2}$	1.904			2.047			2.108		
$9_{0,1} \rightarrow 8_{0,2}$	2.249			2.500			2.611		
$2_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$	1.497			1.482			1.475		
$4_{0,0} \rightarrow 4_{0,0}$	1.933			1.877			1.851		

Dans le tableau 5, nous présentons quelques résultats des transitions B(E2) intra et inter-bande calculés à partir des différentes transitions comparées aux données disponibles dans la littérature. Les différentes transitions quadrupôlaires obtenues dans le tableau 5 sont décrites de la manière suivantes :

⇒ les transitions de l'état fondamental à l'état fondamental.

- dans les états de $4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$ à $10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$. Les valeurs théoriques du ^{192}Pt et celles de la prédiction de Morse croissent. Par contre, les données expérimentales décroissent. Pour l'isotope de ^{194}Pt , les valeurs théoriques décroissent par rapport aux données expérimentales et de celles de la prédiction esM qui croient. Ce qui montre que, les valeurs théoriques sont inférieures par rapport aux données expérimentales et celles de la prédiction de Morse. Et pour l'isotope du ^{196}Pt , nous constatons aussi que, les valeurs théoriques et les données expérimentales et celles

de la prédiction de Morse croient.

⇒ les transitions de γ -pair \rightarrow état fondamental.

- dans les états de $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$ à $8_{0,2} \rightarrow 8_{0,0}$, la valeur des donnée expérimentale du ^{192}Pt est supérieure par rapport au valeur obtenue théoriquement ainsi que celle de la prédiction de esM. Les résultats théoriques et celles de la prédiction de Morse décroient. Pour l'isotope du ^{194}Pt , les valeurs théoriques sont inférieures aux données expérimentales et celles de la prédiction de Morse dans la bande de transition de $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$. La valeur théorique du ^{196}Pt est inférieure au donnée expérimentale pour la transition $6_{0,2} \rightarrow 6_{0,0}$. En plus, les valeurs théoriques et celles de la prédiction de Morse décroissent.

⇒ les transitions de γ -impair \rightarrow état fondamental

la valeur théorique de l'isotope ^{192}Pt est supérieure par rapport au donnée expérimentale et est inférieure au donnée de la prédiction de esM pour la transition $3_{0,1} \rightarrow 4_{0,0}$. Pour l'isotope du ^{194}Pt , la valeur théorique est inférieure à la prédiction de Morse. Enfin, nous constatons que, la valeur théorique du ^{196}Pt est inférieure par rapport au donnée de la prédiction de Morse.

⇒ les transitions γ -pair $\rightarrow \gamma$ -pair,

- dans cette gamme de transition de $4_{0,2} \rightarrow 2_{0,2}$ à $8_{0,2} \rightarrow 6_{0,2}$,

les valeurs théoriques du $^{192,194,196}\text{Pt}$ sont inférieures aux données expérimentales et celles de la prédiction de Morse.

⇒ les transitions γ -impair $\rightarrow \gamma$ -impair,

- dans les bandes de transitions de $5_{0,1} \rightarrow 3_{0,1}$ à $9_{0,1} \rightarrow 7_{0,1}$, les différentes valeurs théoriques obtenues sont supérieures aux données de la prédiction de Morse pour les isotopes du $^{192,196}\text{Pt}$ et du ^{194}Pt , seulement dans les transitions des états de $7_{0,1} \rightarrow 5_{0,1}$ à $9_{0,1} \rightarrow 7_{0,1}$.

⇒ les transitions γ -impair $\rightarrow \gamma$ -pair,

- dans cette gamme de transition de $3_{0,1} \rightarrow 2_{0,2}$ à $9_{0,1} \rightarrow 8_{0,2}$, les valeurs théoriques des isotopes du $^{192,194,196}\text{Pt}$ sont inférieures par rapport aux données expérimentales et celles de la prédiction de Morse.

⇒ les transitions $\beta \rightarrow \beta$, c'est à dire de $2_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$ à $4_{0,0} \rightarrow 4_{0,0}$:

les valeurs théoriques augmentent pour tous les isotopes étudiés. Mais les données expérimentales et celles de la prédiction ne figurent pas dans la littérature.

TABLE 6 – Les valeurs numériques des paramètres utilisés pour chaque isotope.

Isotope	A	B	k
¹²⁶ Xe	-24	60	0.050
¹²⁸ Xe	-24	40	0.020
¹³⁰ Xe	-20	35	0.030
¹³² Xe	-24	15	0.015
¹³⁴ Xe	-24	4.5	0.010
¹⁹² Pt	-30	49	0.008
¹⁹⁴ Pt	-60	47	0.070
¹⁹⁶ Pt	-60	47	0.090

Le tableau 6, présente quelques valeurs des paramètres utilisés pour tracer les courbes des variations du potentiels écran de Kratzer.

TABLE 7 – Comparaison des valeurs théoriques de l'état fondamental, dans la bande γ et β des rapports des énergies normalisées des travaux effectués au Laboratoire par Ema'a[24], Tchana [41] et Nga [115] sur les isotopes du ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt .

L_{band}	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	Ema.	Tcha.	Nga.	Omo.	Ema.	Tcha.	Nga.	Omo.	Ema.	Tcha.	Nga.	Omo.
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.447	2.598	2.488	2.482	2.436	2.486	2.484	2.452	2.423	2.321	2.463	2.446
6_g^+	4.113	3.597	4.267	4.312	4.073	4.488	4.252	4.133	4.029	3.440	4.170	4.112
8_g^+	5.805	4.836	6.148	6.099	5.251	6.728	6.114	5.855	5.626	4.823	5.930	5.807
10_g^+	7.395	6.285	7.992	7.912	7.251	9.073	8.932	7.491	7.095	6.432	7.609	7.409
12_g^+	8.816	7.913				11.431			8.384	8.231		
2_γ^+	1.897	2.307	1.917	1.900	1.892	1.863	1.916	1.896	1.886	1.993	1.905	1.897
3_γ^+	2.708	2.743	2.763	2.714	2.694	2.788	2.757	2.715	2.667	2.483	2.729	2.707
4_γ^+	4.527	3.877	4.720	4.550	4.478	5.016	4.701	4.522	4.423	3.752	4.598	4.526
5_γ^+	4.725	4.016	4.939	4.751	4.671	5.272	4.918	4.755	4.671	3.907	4.804	4.725
6_γ^+	6.726	5.635	7.207	6.792	6.608	8.053	7.158	6.723	6.480	5.711	6.899	6.734
7_γ^+	6.582	5.503	7.040	6.644	6.469	7.841	6.994			6.469	5.564	
8_γ^+	8.523	7.545	9.349	8.652	8.328	10.920	9.265	8.538	8.120	7.825	8.816	8.555
9_γ^+		7.172				10.390				7.414		
10_γ^+	9.972	9.573			9.703	13.604			9.416	10.056		
11_γ^+												
12_γ^+												
0_β^+	4.133	5.177	2.805	4.078	4.009	3.716	2.774	3.687	3.881	4.931	2.613	3.506
2_β^+	4.818	5.617	3.625	4.776	4.689	4.717	3.591	4.394	4.555	5.427	3.418	4.212
4_β^+	5.820	6.338	4.851	5.801	5.676	6.254	4.811	5.432	5.525	6.235	4.604	5.245
6_β^+	6.989	7.319			6.817	8.171			6.637	7.334		
σ	0.491	0.935	0.705	0.403	0.427	0.989	0.717	0.496	0.692	1.075	0.602	0.624

Le tableau 7 présente une étude comparative des valeurs théoriques des isotopes du platine utilisé dans le Laboratoire de Physique Nucléaire. Ces valeurs théoriques ont été obtenues à l'aide des différents modèles utilisés tels que : le potentiel de type exponentiel multiparamétrique [24] , le potentiel de Killinbeck plus Morse [41], le potentiel fractionnaire inverse à quatre terme [115] et le potentiel écran de Kratzer. Nous observons que, les valeurs théoriques obtenues par notre modèle sont inférieures et meilleures par rapport aux autres types de potentiels utilisés. Et cela se traduit par les relations suivantes :

$$\Rightarrow \text{Pour le } ^{192}\text{Pt} : \sigma_{Omon} < \sigma_{Ema'a} < \sigma_{Nga} < \sigma_{Tchana}$$

$$\Rightarrow \text{Pour le } ^{194}\text{Pt} : \sigma_{Ema'a} < \sigma_{Omon} < \sigma_{Nga} < \sigma_{Tchana}$$

$$\Rightarrow \text{Et enfin, pour le } ^{196}\text{Pt} : \sigma_{Nga} < \sigma_{Omon} < \sigma_{Ema'a} < \sigma_{Tchana}$$

Le tableau 8 ci-dessous nous présente aussi, la comparaison entre les valeurs théoriques obtenues dans les différentes bandes des états excités des isotopes du platine utilisé dans le Laboratoire à l'aide des différents potentiels utilisés. Nous observons que :

⇒ : dans la bande γ , les valeurs théoriques obtenues par notre modèle dans la plupart des cas sont meilleures par rapport aux autres données.

⇒ : dans les bandes des états fondamentaux et la bande β , les valeurs obtenues théoriquement par notre modèle ne sont pas meilleures.

Nous pouvons donc affirmer que, le potentiel écrané de Kratzer est bien applicable et donne de bonnes valeurs par rapport aux autres potentiels utilisés.

TABLE 8 – Comparaison des valeurs théoriques des transitions B(E2) des isotopes du ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt des travaux effectués au Laboratoire par Ema'a [24], Tchana [41], Nga[115] pour des transitions.

Transition	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	Ema.	Tcha.	Nga.	Omo.	Ema.	Tcha.	Nga.	Omo.	Ema.	Tcha.	Nga.	Omo.
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.562	0.725	1.464	1.497	1.581	1.530	1.466	1.482	1.581	0.814	1.475	1.475
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	1.847	0.988	1.968	1.933	1.900	1.914	1.974	1.877	1.900	1.105	2.004	1.851
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$	2.271	1.225	2.391	2.250	2.382	2.147	2.402	2.125	2.382	1.365	2.464	2.067
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$	2.805	1.434	2.824	2.598	3.075	2.256	2.843	2.371	3.075	1.590	2.950	2.264
$12_g^+ \rightarrow 10_g^+$	3.721	1.611			4.047	2.278			4.047	1.778		
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$	1.585		1.495	0.761	1.604	1.653	1.496	0.765	1.604	1.564	1.505	0.767
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.361		0.310	0.342	0.371	0.370	0.311	0.348	0.371	0.339	0.315	0.351
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	0.225		0.176	0.220	0.233		0.177	0.228	0.233		0.181	0.232
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	0.165		0.118	0.171	0.174		0.118	0.182	0.174	0.122		0.186
$10_\gamma^+ \rightarrow 10_g^+$	0.199				0.144				0.144			
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$		1.236	1.113	1.016		1.305	1.115	1.013		1.200	1.131	1.011
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$			0.882	0.787			0.886	0.886			0.910	0.783
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$			0.771	0.691			0.777	0.777			0.807	0.689
$9_\gamma^+ \rightarrow 10_g^+$			0.771	0.665				0.666				0.665
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	0.733	0.734	0.656	0.365	0.745	3.013	0.658	0.368	0.745	0.716	0.664	0.369
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	1.247	1.739	0.937	1.239	1.308	2.917	0.941	1.279	1.308	1.022	0.967	1.295
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	2.473	1.715	1.561	2.442	2.663	2.765	1.572	2.295	2.663	1.589	1.639	2.658
$10_\gamma^+ \rightarrow 8_\gamma^+$	4.161	1.715			4.575	1.697			4.575	1.589		
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$	1.306	1.259	1.101	1.255	1.346	2.376	1.105	1.263	1.346	1.407	1.123	1.266
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$	2.314	1.472	1.699	2.121	2.440	2.466	1.708	2.150	2.440	1.637	1.758	2.159
$9_\gamma^+ \rightarrow 7_\gamma^+$		1.652		3.118		2.458		3.182		1.827		3.198
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$		0.869	1.952	1.091		2.264	1.956	1.108			1.979	1.116
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$			1.198	1.577			1.204	1.647			1.238	1.675
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$			1.233	1.904			1.242	2.047			1.296	2.108
$9_\gamma^+ \rightarrow 8_\gamma^+$				2.249				2.500				2.611
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$	1.345	0.440	1.135	1.497	1.359	0.936	1.137	1.482	1.359	0.491	1.146	1.475
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$	2.018	1.553	2.007	1.933	2.051	0.000	2.018	1.877	2.051	0.000	2.078	1.851
$6_\beta^+ \rightarrow 4_\beta^+$	2.822	1.739			2.894				2.894			

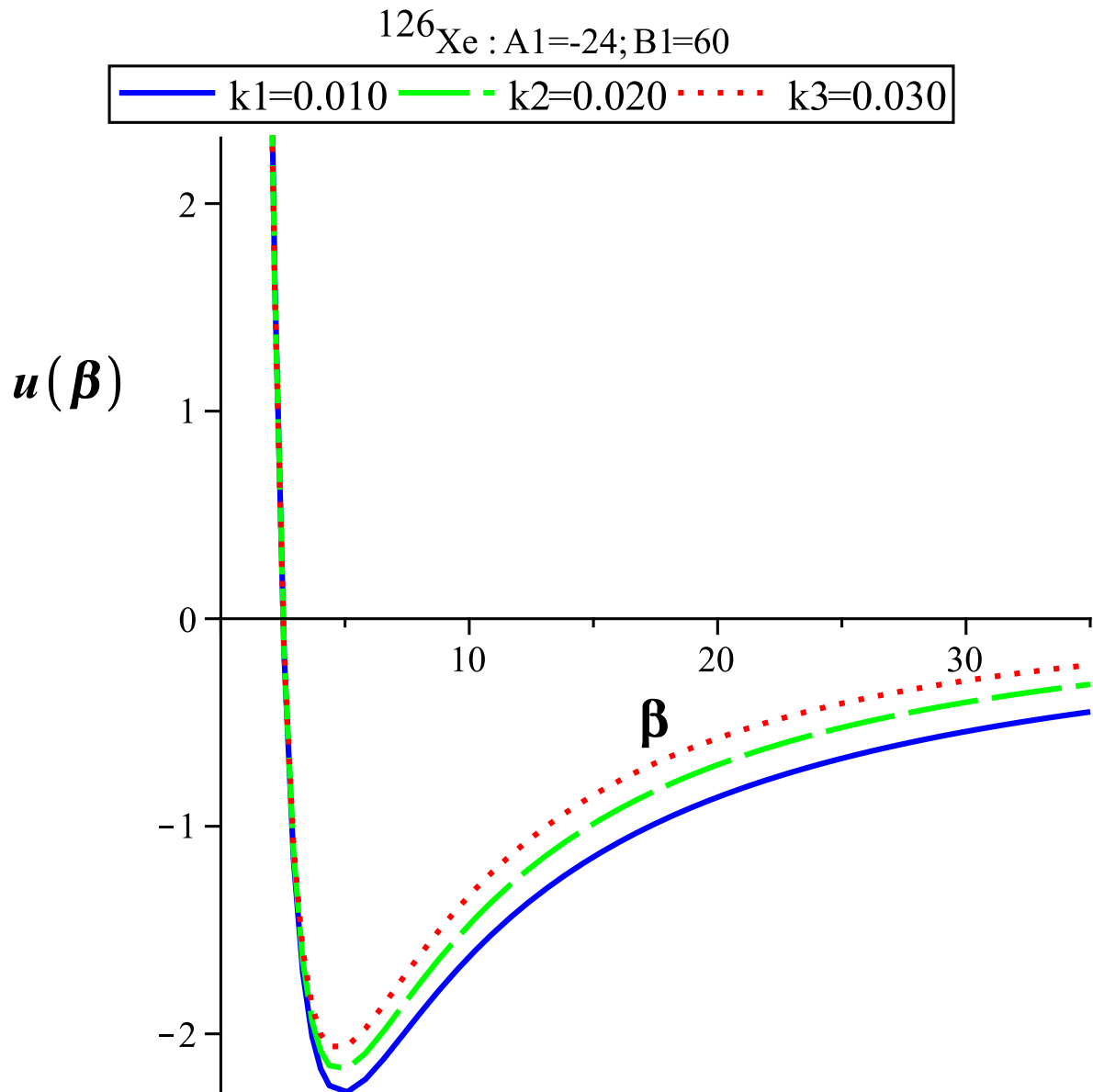


FIGURE 17 – Variations du potentiel écrané de Kratzer $\mu(\beta)$ en fonction de β lorsque $A_1 = -24$, $B_1 = 60$ et $k_1 = 0.050$, $k_2 = 0.075$ et $k_3 = 0.030$.

La figure 19, nous présente l'évolution et la variation du potentiel écrané de Kratzer lorsqu'on fixe les valeurs des paramètres $A_1 = -24$ et $B_1 = 60$, et en faisant varier le paramètre k tel que $k_1 = 0.050$, $k_2 = 0.075$ et $k_3 = 0.030$ pour l'isotope de ^{126}Xe .

Ces différentes courbes présentent la forme d'une gaussienne renversée et montrent que :

- le potentiel écrané de Kratzer garde la même forme pour les trois courbes lorsqu'on varie la valeur de k ,
- le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$,

- on remarque aussi que, le potentiel confine plus lorsque $3 < \beta < 10$,
 - nous constatons aussi que, les courbes s'écartent à partir de $\beta = 5$ et elles gardent les mêmes formes et allures jusqu'à l'infini,
 - Plus les valeurs de k augmentent, les courbes se rapprochent de l'axe et tendent vers zéro.
- Ceci montre que, à longue portée, le potentiel tend vers zéro.

Ces différentes variations des courbes sont dues au fait que k est un le paramètre de déformation du potentiel utilisé.

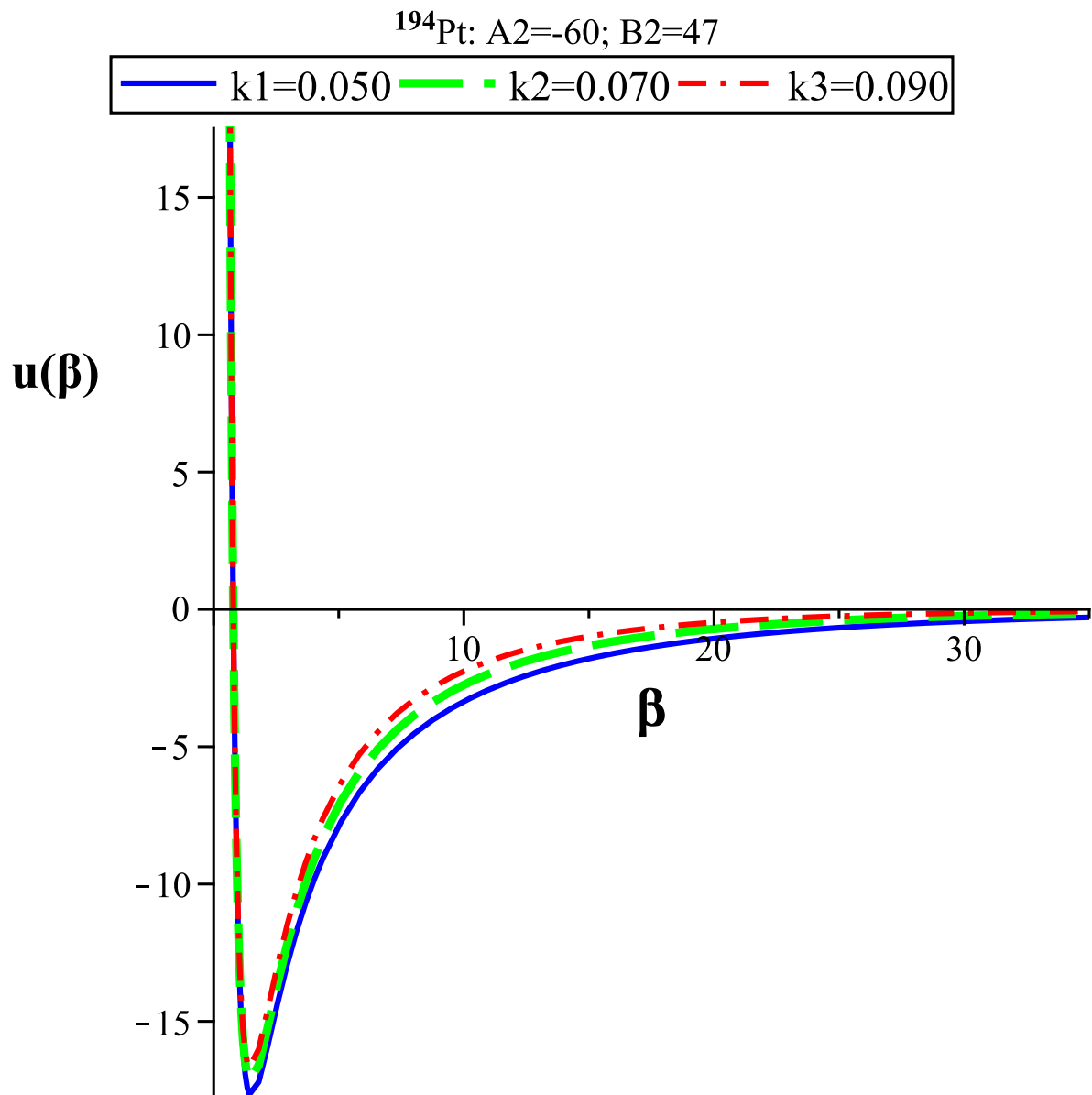


FIGURE 18 – Variations du potentiel écranté de Kratzer $\mu(\beta)$ en fonction de β pour les valeurs $A_2 = -60$, $B_2 = 47$ et $k_1 = 0.050$, $k_2 = 0.070$, $k_3 = 0.090$.

La figure 20, nous montre également les variations du potentiel écranté de Krazer lorsqu'on fixe les valeurs de $A_2 = -60$, $B_2 = 47$, et en faisant varier la valeur du paramètre de k , tel que : $k_1 = 0.050$, $k_2 = 0.070$ et $k_3 = 0.090$ pour l'isotope de ^{194}Pt .

Les courbes présentent la forme des gaussiennes renversées et montrent que :

- lorsque $\beta \rightarrow 0$ le potentiel tend vers l'infini,
- quand $\beta \rightarrow \infty$ le potentiel tend vers 0, cela s'explique qu'il ya aucun effet
- on constate que, plus que les valeurs de k augmentent, les courbes se rapprochent beaucoup plus de l'axe de zéro se convergent ensemble et tendent vers zéro,
- le potentiel confine plus lorsque $2 < \beta < 5$, c'est à dire très attractif,
- plus le puit du potentiel est profond, le noyau est stable et les interactions entre nucléons sont faibles.

III.2.2 Effet de l'étalonnage des énergies dans la bande γ

L'effet étalon où staggering effect est défini comme un décalage impair-pair des niveaux d'énergies dans la bande γ . Il représente une grandeur très sensible sur les effets de l'étalonnage dans la bande γ pour la structure de la triaxialité. Cette grandeur consiste à mesurer le déplacement du niveau $(J-1)_{\gamma}^{+}$ par rapport à la moyenne de ses voisins $(J-2)_{\gamma}^{+}$ et J_{γ}^{+} . Cette quantité importante est donnée par la formule suivante [129-131] :

$$S(J) = \frac{E(J_{\gamma}^{+}) + E((J-2)_{\gamma}^{+}) - 2E((J-1)_{\gamma}^{+})}{E(2_g^{+})}, \quad (\text{III.3})$$

où $E(J)$ représente l'énergie de l'état J_{γ}^{+} appartenant à la bande γ , $E(2_g^{+})$ est l'énergie du premier état excité de la bande fondamentale. Les valeurs du modèle $Z(5)$, celle de la théorie et les données expérimentales sont représentées sur les différentes courbes ci-dessous. On peut regarder sur ces courbes que, la valeur de $S(J)$ est positive pour J pair et négative pour J impair. Afin de voir si la signature dans ce modèle actuel est révélée, nous avons tracé l'effet de l'étalonnage des énergies $S(J)$ en fonction de J pour les isotopes de $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$ et $^{192,194,196}\text{Pt}$. Les figures 21 à 28 présentent les différentes comparaisons des valeurs de $Z(5)$, celles de la théorie et les données expérimentale.

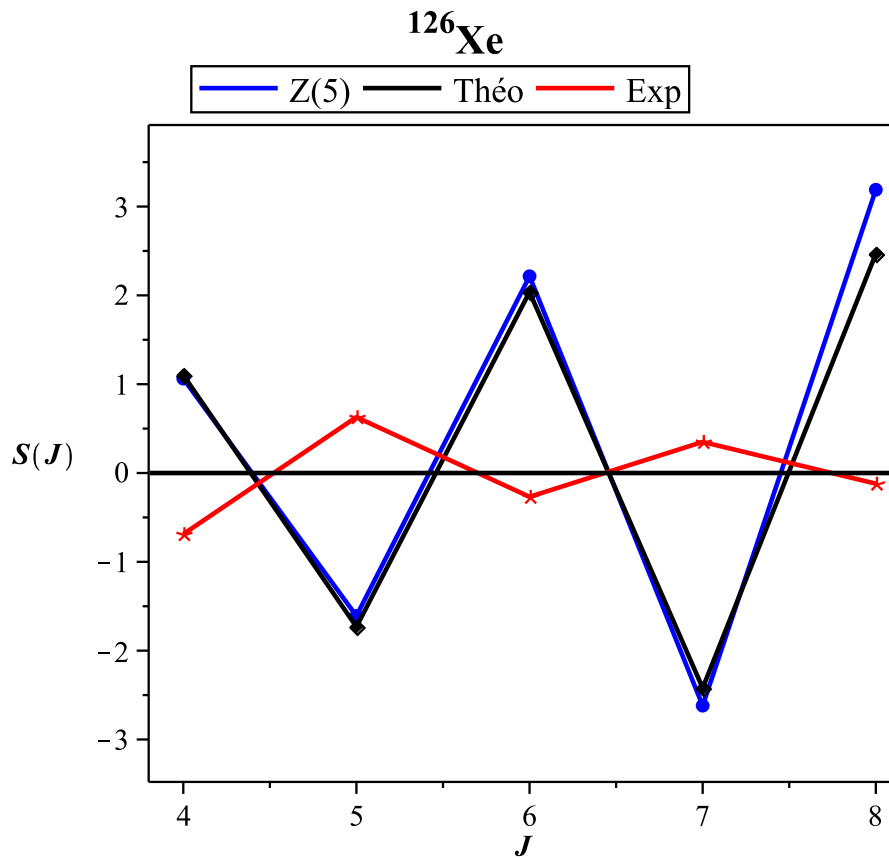


FIGURE 19 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie Z(5) [129] et les données expérimentales du ^{126}Xe .

On observe sur la figure 21 que, l'effet d'étalonnage de la symétrie Z(5) et les valeurs théoriques s'étalent et se superposent entre elles dans les bandes des états des énergies aux points 4_{γ}^{+} , 5_{γ}^{+} , 6_{γ}^{+} et 7_{γ}^{+} . Et c'est à partir de l'état d'énergie 8_{γ}^{+} qu'il y a un léger décalage entre l'effet de la symétrie Z(5) et la théorie. Les courbes obtenues par notre modèle se trouvent à l'intermédiaire de la symétrie Z(5) et les données expérimentales. On observe aussi que, la courbe obtenue par notre modèle se trouve à l'intermédiaire de celle de la symétrie Z(5) et celle des données expérimentales.

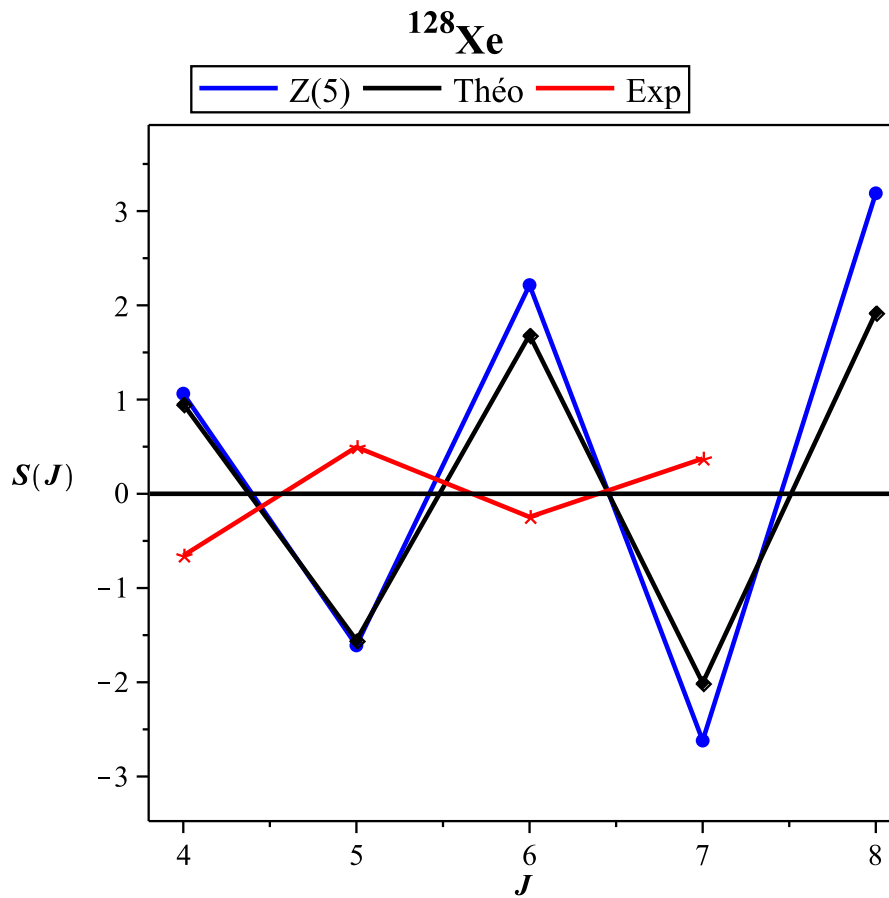


FIGURE 20 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et les données expérimentales du ^{128}Xe .

Nous présentons au niveau de la figure 22, les effets des étalonnages $S(J)$ en fonction de J entre les valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ et les données expérimentales. On constate que, les courbes s'étalent entre la symétrie $Z(5)$ et la théorie dans les bandes des états d'énergies de 4_{γ}^{+} à 5_{γ}^{+} . Et c'est à partir des états des énergies de 6_{γ}^{+} à 8_{γ}^{+} que, ces courbes commencent à s'écarter. Les courbes théoriques obtenues s'approchent de celle des données expérimentales.

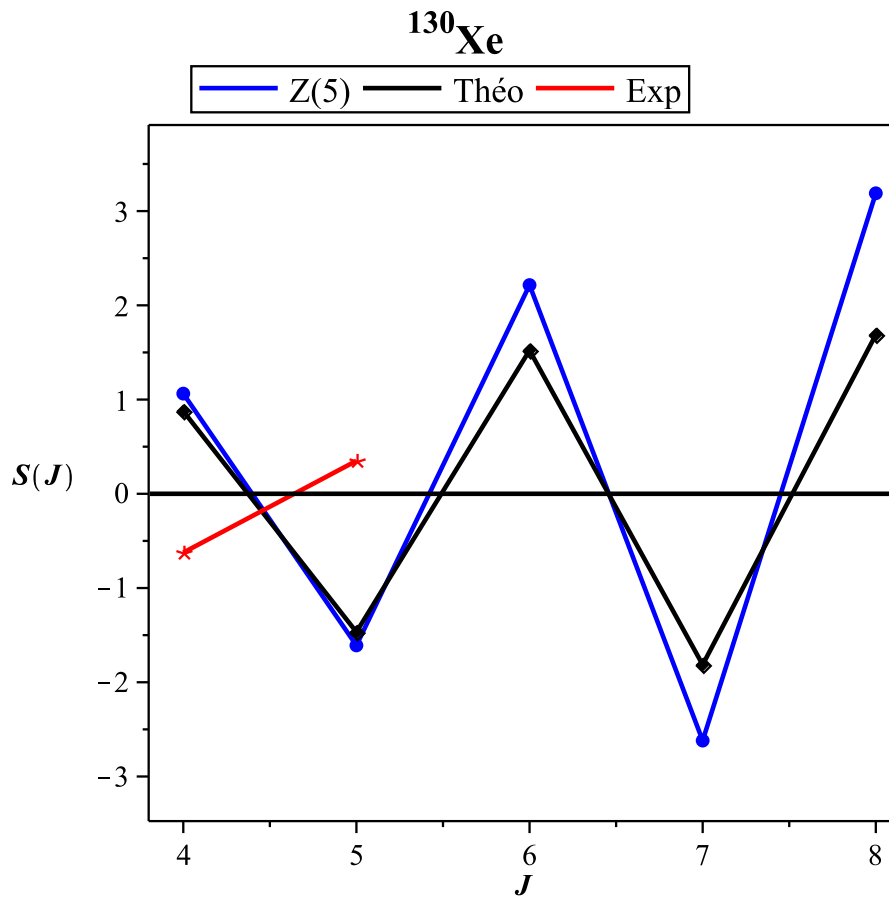


FIGURE 21 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et les données expérimentales du ^{130}Xe .

La figure 23 nous présente un léger décalage entre la courbe de la symétrie $Z(5)$ et les valeurs thoriqes aux points 4_{γ}^{+} à 5_{γ}^{+} et s'écartent dans les états des énergies 6_{γ}^{+} à 8_{γ}^{+} .

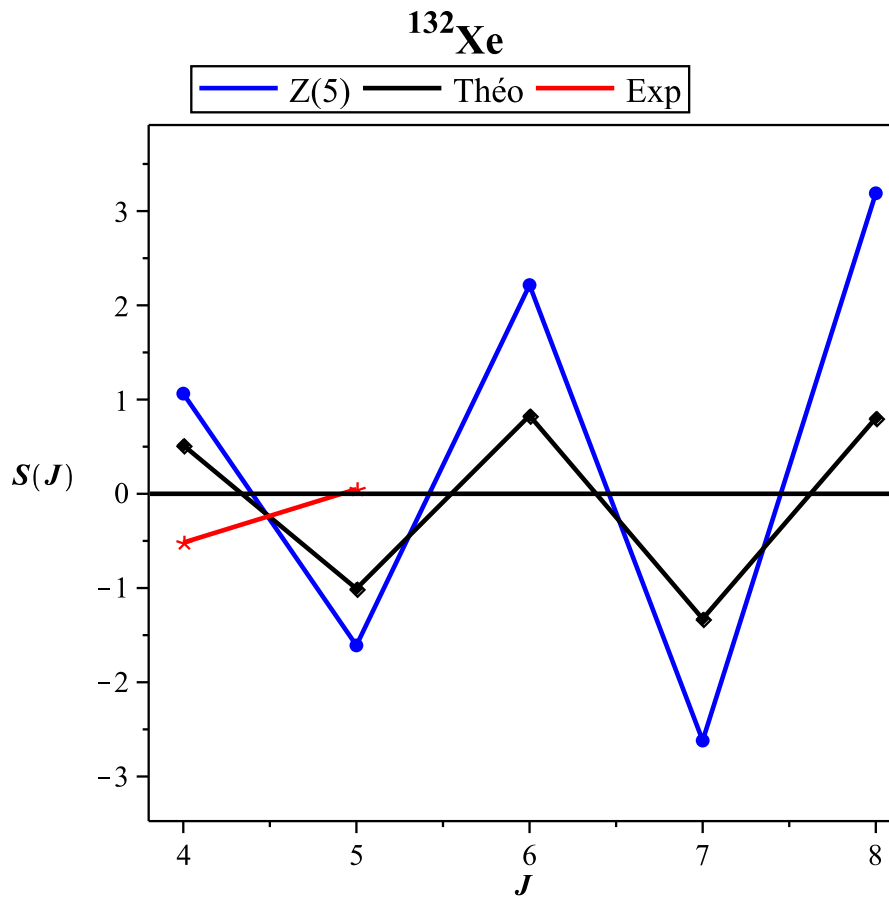


FIGURE 22 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et les données expérimentales du ^{132}Xe .

Les courbes présentées dans la figure 24, présentent des décalages aux différents points de 4_γ^+ à 8_γ^+ entre la symétrie $Z(5)$, la théorique et l'expérimentale. On remarque que, la courbe théorique s'écarte de celle de la symétrie $Z(5)$ et se rapproche de la courbe expérimentale aux points 4_γ^+ à 5_γ^+ .

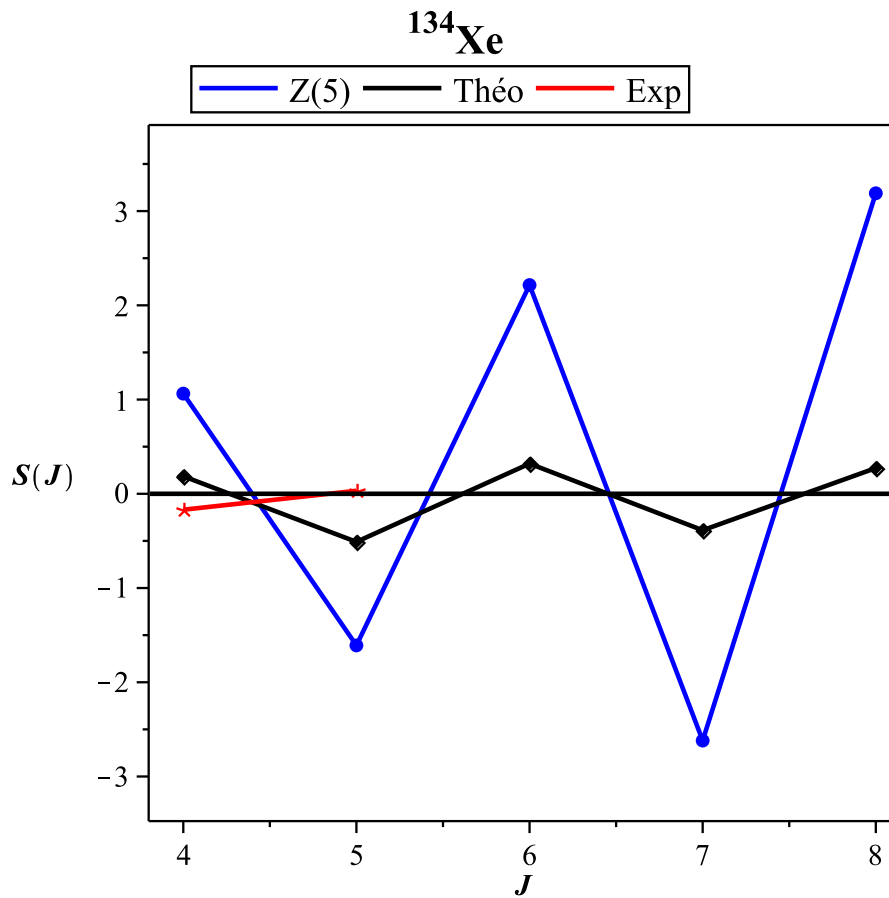


FIGURE 23 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et l'expérimentale du ^{134}Xe .

La figure 25 présente un très grand décalage entre la courbe de la symétrie $Z(5)$ et la courbe théorique au niveau de tous les points. On remarque que, la courbe théorique se rapproche beaucoup plus de la courbe expérimentale aux points 4_{γ}^{+} et 5_{γ}^{+} .

■ Nous pouvons dire que, pour les isotopes du $^{126,128,130}\text{Xe}$, les courbes théoriques sont très proches de celle de la symétrie $Z(5)$. Par contre, on constate que, lorsque le nombre de masse augmente, les courbes théoriques s'écartent d'avantage de courbes expérimentales.

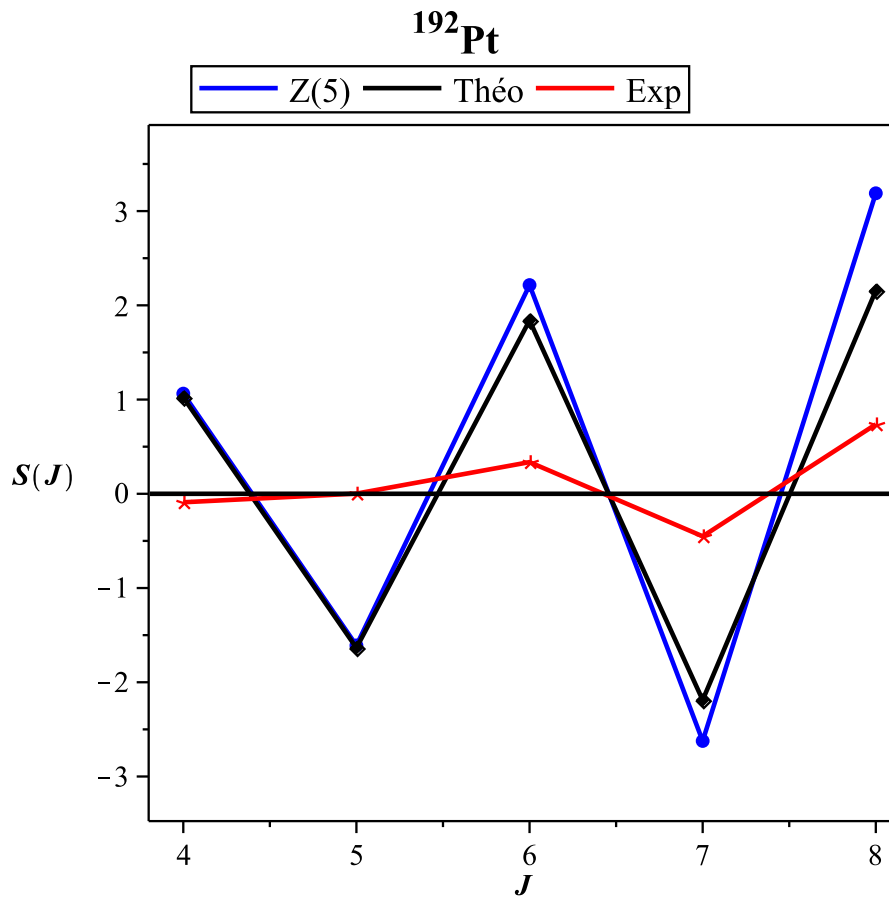


FIGURE 24 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et des données expérimentales du ^{192}Pt .

Les courbes présentées dans la figure 26 montrent qu'aux points 4_{γ}^{+} à 5_{γ}^{+} , les deux courbes de la symétrie $Z(5)$ et celle de la théorie se superposent bien entre elles. Aux points 6_{γ}^{+} à 8_{γ}^{+} , ces deux courbes présentent un léger décalage. On remarque que, la courbe expérimentale se rapproche de celle de la théorie.

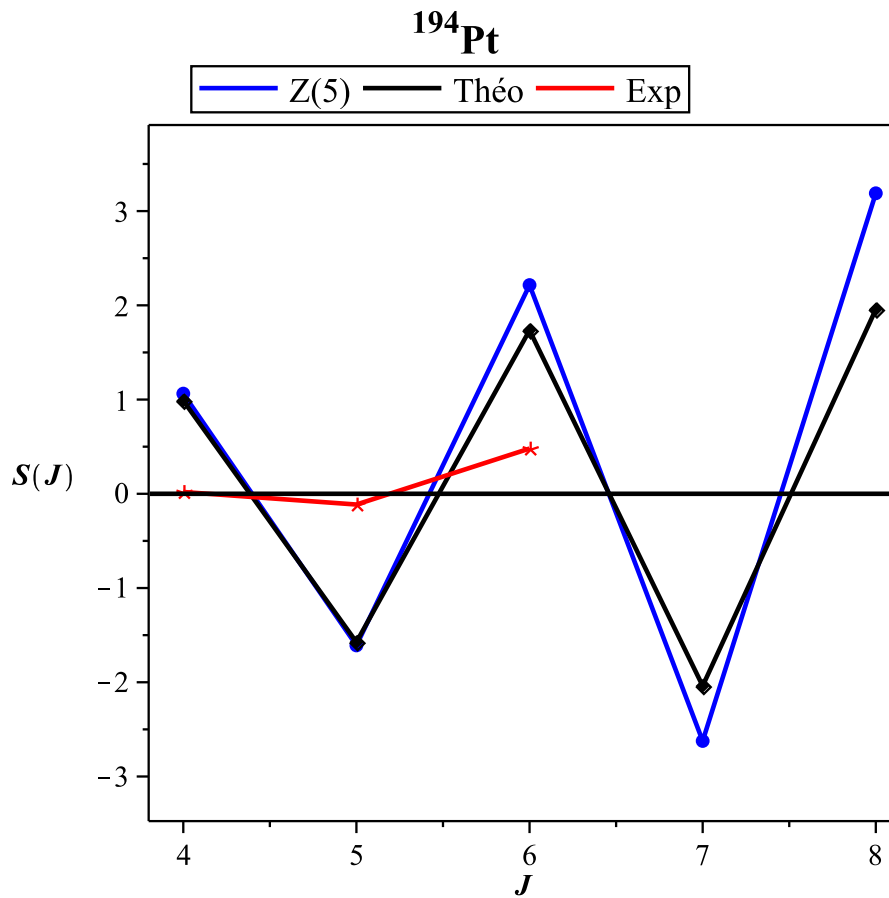


FIGURE 25 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et des données expérimentales du ^{194}Pt .

Nous observons sur la figure 27 que, les courbes d'étalonnages de la symétrie $Z(5)$ et théorique s'étalent et se superposent entre elles dans la bande des états d'énergies de 4_{γ}^{+} à 5_{γ}^{+} . Par contre, au niveau des bandes des états d'énergies de 5_{γ}^{+} à 6_{γ}^{+} , la courbe théorique commence à s'écarter de celle de la symétrie et se rapproche de la courbe expérimentale. Aussi, on constate que, la courbe théorique se trouve à l'intermédiaire entre la courbe de la symétrie $Z(5)$ et la courbe expérimentale au point 6_{γ}^{+} .

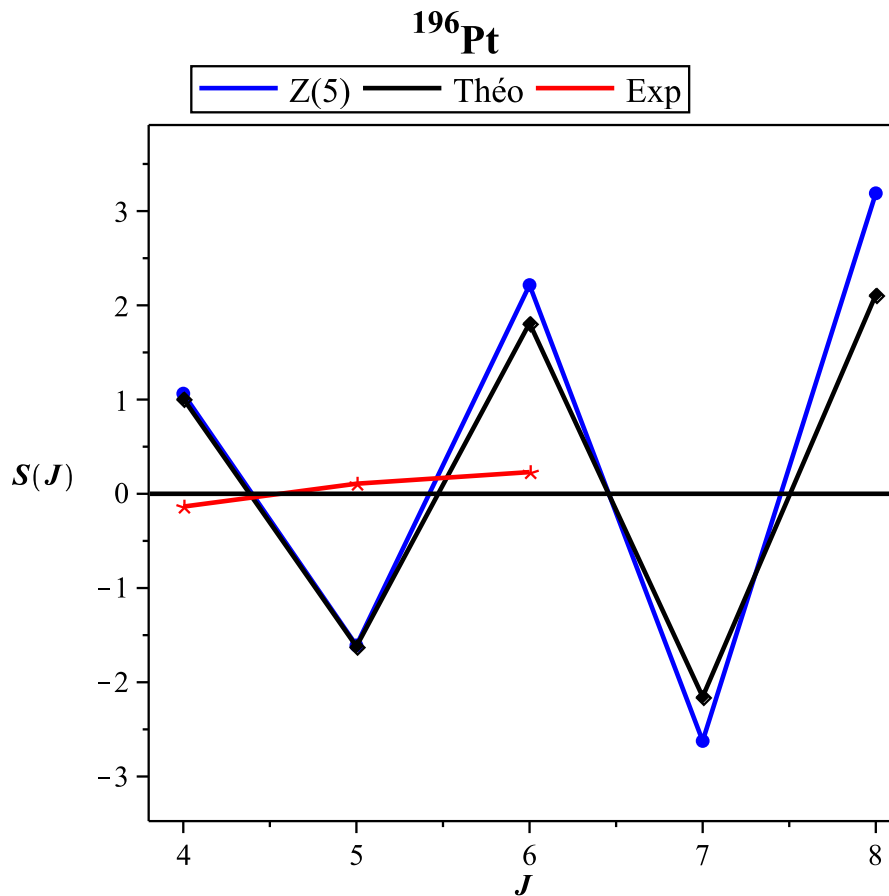


FIGURE 26 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et l'expérimentale du ^{196}Pt .

Au niveau de la figure 28, les courbes sont superposées entre la symétrie $Z(5)$ et la théorie aux points 4_{γ}^{+} à 5_{γ}^{+} . À partir des points 6_{γ}^{+} à 8_{γ}^{+} , la courbe théorique s'écarte de celle de la symétrie $Z(5)$ et se rapproche de celle de l'expérience. Et nous remarquons que au point 6_{γ}^{+} , la courbe expérimentale se rapproche de celle de la théorie.

■ Dans le cas des isotopes du platine, les courbes s'étalent bien entre elles dans la bande des états des énergies de 4_{γ}^{+} à 5_{γ}^{+} . Mais à partir des bandes des états de 5_{γ}^{+} à 8_{γ}^{+} , on remarque que les courbes s'écartent un peu de celle de la symétrie $Z(5)$.

III.2.3 Densité de probabilité

La fonction d'onde est une amplitude de probabilité de présence et le carré de sa norme représente la densité volumique de probabilité de présence de la particule. C'est une propriété ponctuelle, car en chaque point de l'espace, on peut calculer cette densité volumique à partir de

l'expression de la fonction d'onde.

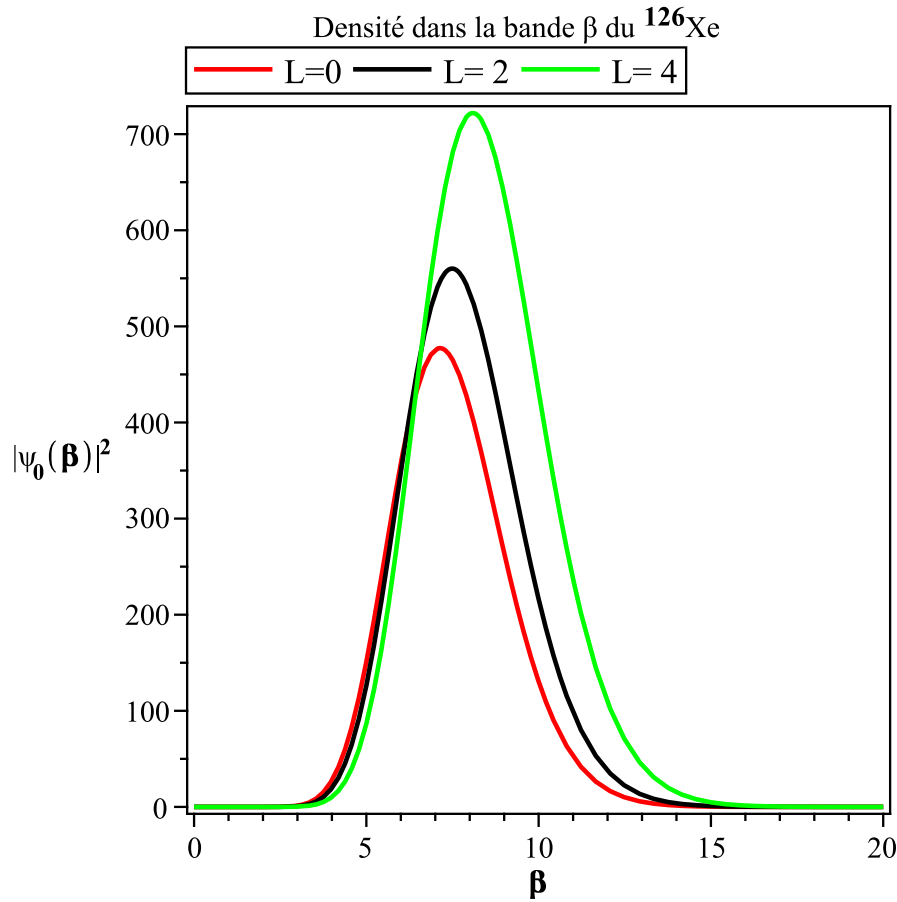


FIGURE 27 – Variation de la densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{126}Xe .

La figure 29 montre l'évolution de la densité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde dans les états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{126}Xe . Ces différentes courbes présentent l'allure d'une gaussienne avec un pic large. Nous remarquons que, lorsque $L = 0$, l'énergie de cohésion entre les nucléons est plus dense. Et lorsqu'on varie L , l'énergie entre les nucléons et la densité de distribution augmente. Ce qui montre que, la distribution de densité de probabilité est fonction du nombre quantique et du moment angulaire.

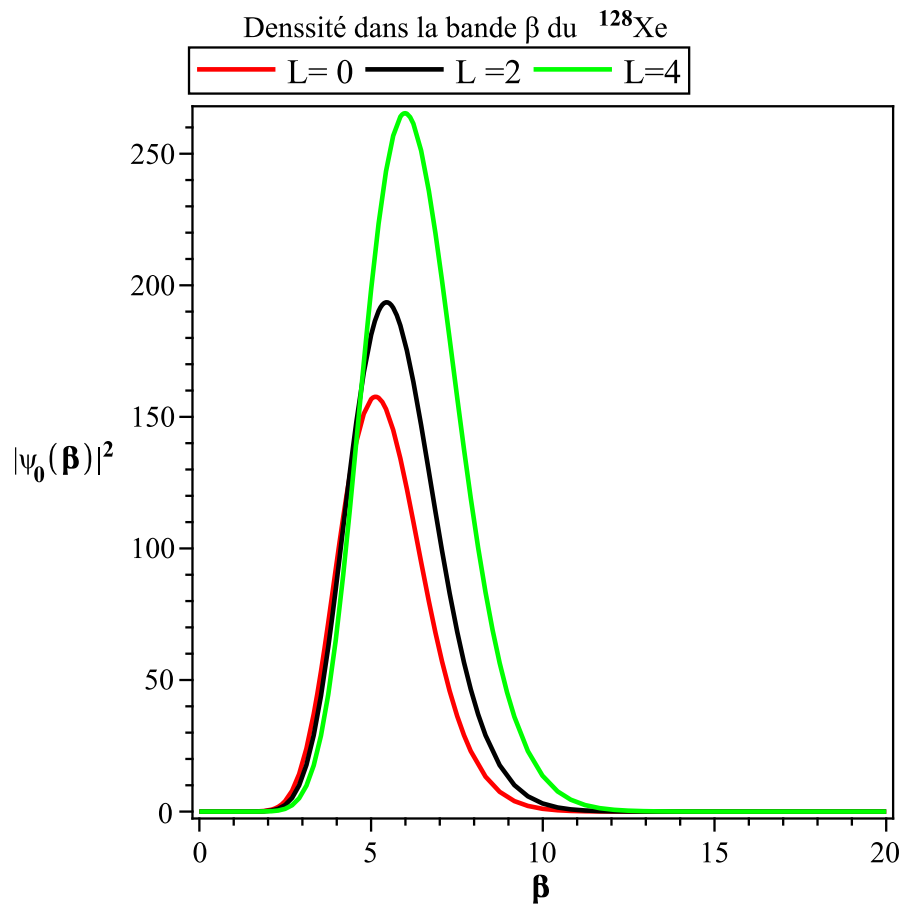


FIGURE 28 – Variation de la densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{128}Xe .

Les différentes courbes obtenues dans la figure 30, présentent la forme des gaussiennes avec des pics larges. Nous remarquons sur cette figure que, lorsqu'on varie L de 0, 2 et 4, la densité de probabilité de distribution augmente, et les énergies de cohésions entre les nucléons augmentent lorsque les valeurs du moment magnétique L augmentent.

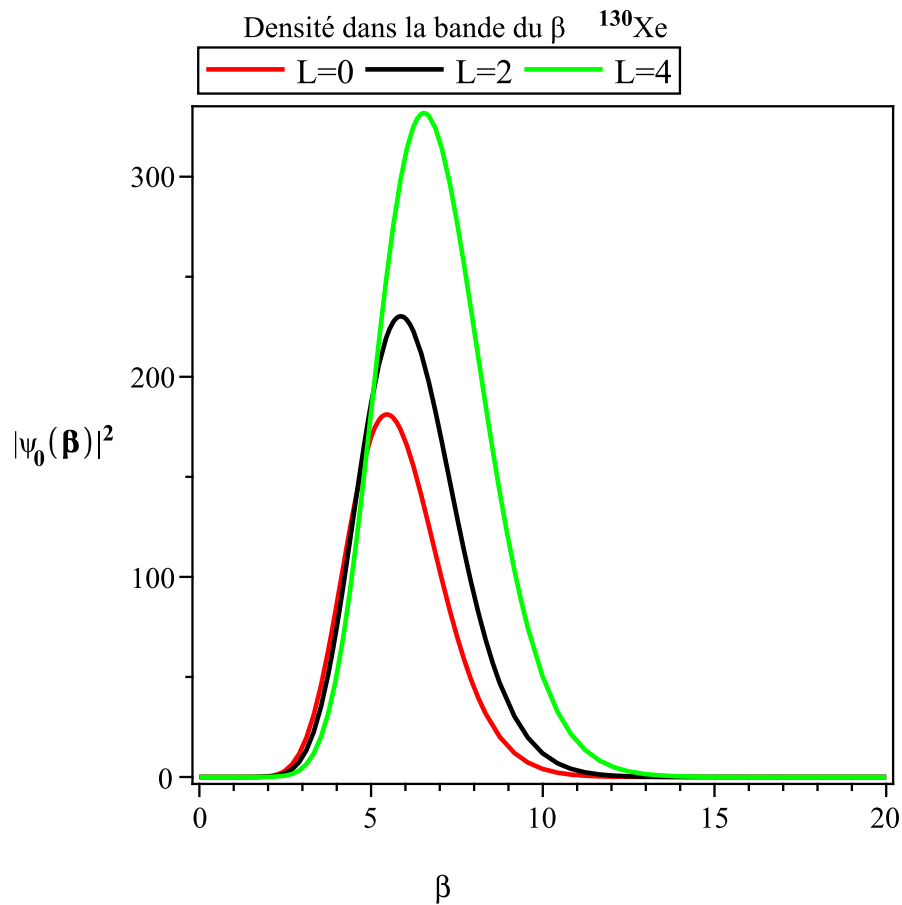


FIGURE 29 – Variation de la densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{130}Xe .

La figure 31 présente aussi les variations de la densité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde dans les états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{130}Xe . Ces courbes ont la forme d'une gaussienne avec un pic large, centré autour des valeurs de $\beta= 5,5$ pour $L=0$, $\beta= 6$ pour $L=2$ et $\beta= 7$ pour $L=4$. lorsque les valeurs de L augmentent, l'énergie entre les nucléons et la densité de distribution augmentent aussi.

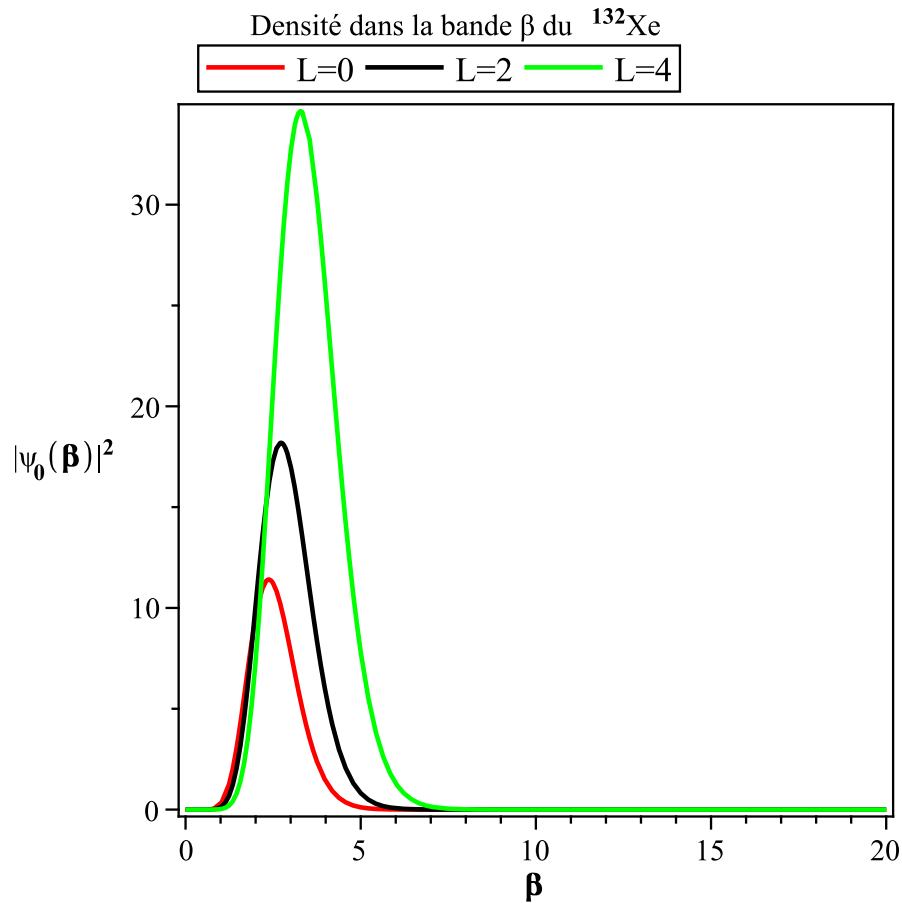


FIGURE 30 – Variation de la densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{132}Xe .

Les différentes courbes présentées dans la figure 32 ont la forme d'une gaussienne centrée et étroite autour des valeurs de $\beta= 2,5$ pour $L= 0$, $\beta= 3,5$ pour $L= 2$ et $\beta= 4$ pour $L= 4$. L'énergie entre les nucléons est plus dense pour $L = 4$. Et cette cohésion décroît pour $L = 2, 0$. On observe que l'énergie entre nucléon et la densité de distribution augmente lorsque le moment magnétique varie.

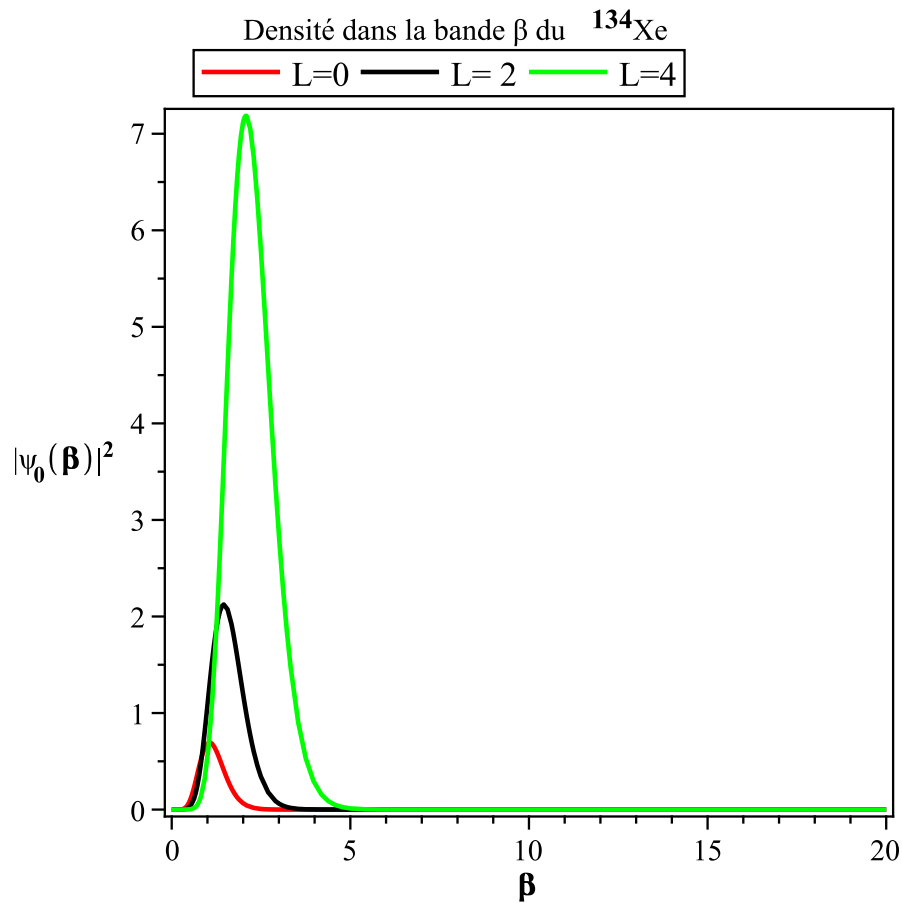


FIGURE 31 – Variation de la densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope des états ^{130}Xe .

Dans la figure 33, pour $L=4$, la courbe de la densité de distribution présente un large pic et étroit par rapport aux deux autres courbes qui présentent des très faibles gaussiennes lorsque $L = 0, 2$. La densité de probabilité n'est pas importante et aussi, l'énergie entre les nucléons est faible.

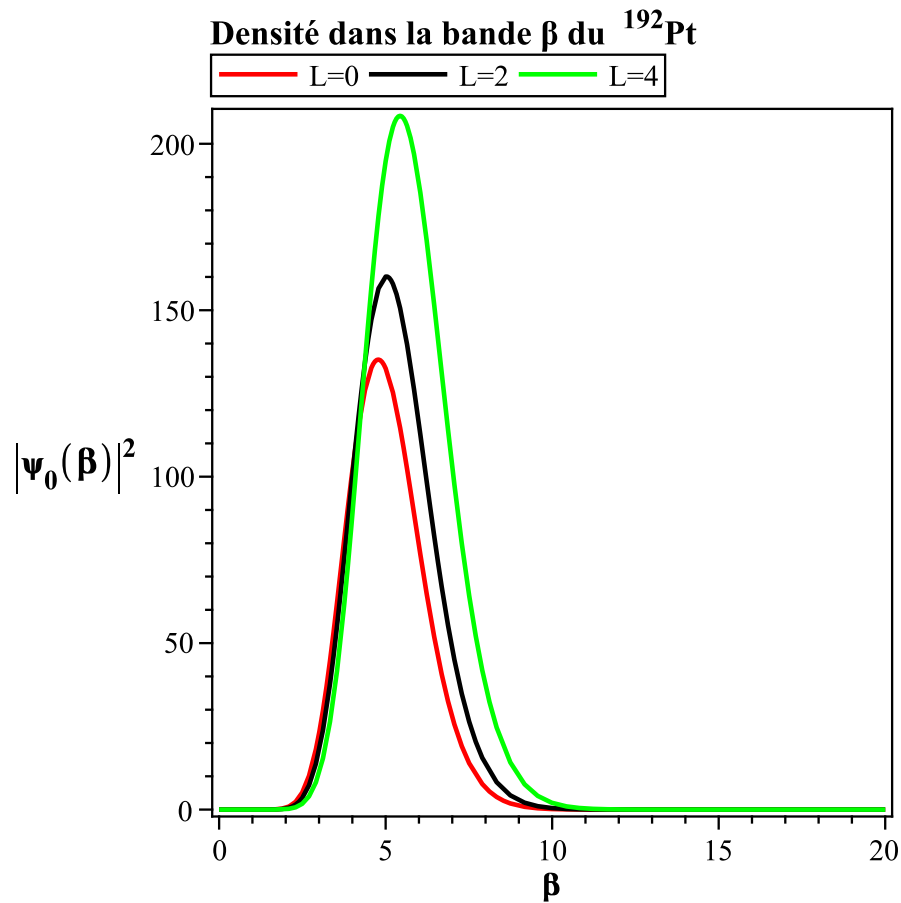


FIGURE 32 – Variation de la densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{192}Pt .

La densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde dans les états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ présente la forme des gaussiennes avec des pics large, centrées autour des valeurs de $\beta=5$ pour $L=0$ et $\beta=5,5$ pour $L=2$ et $\beta=6$ pour $L=4$. Nous remarquons que, dans la figure 34, lorsque $L=0, 2$ et 4 , les énergies de cohésions entre les nucléons sont importantes.

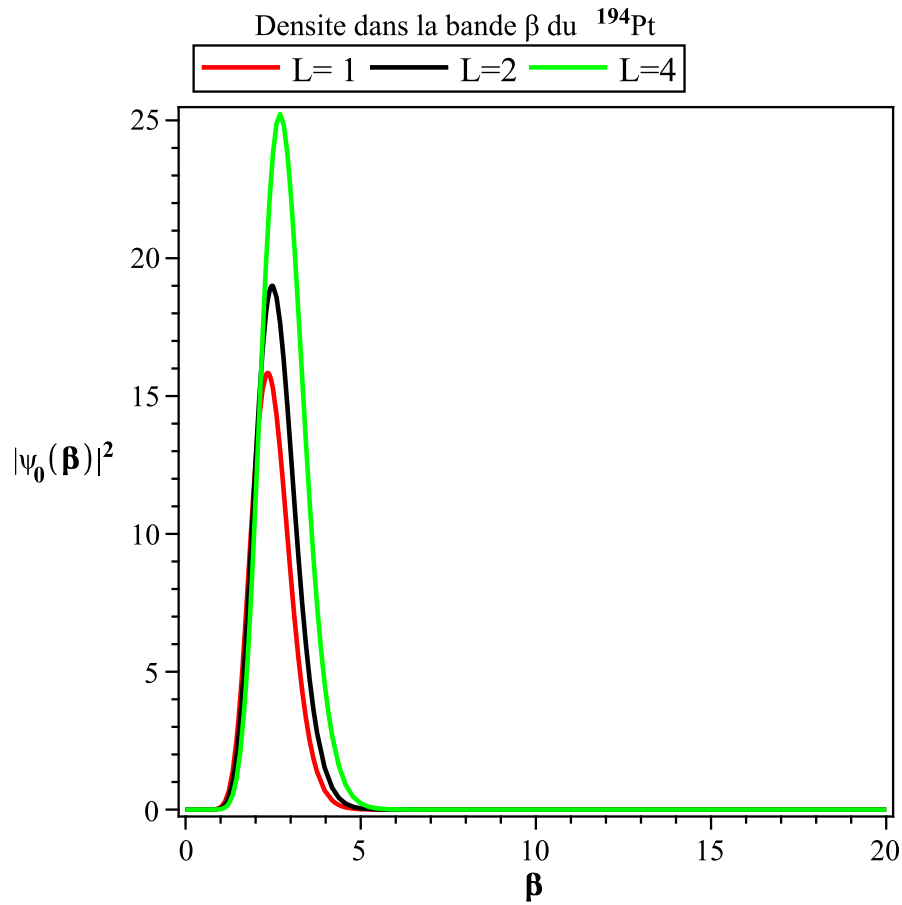


FIGURE 33 – Densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{194}Pt .

La figure 35 présente les courbes de la densité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde dans les états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{194}Pt . Ces courbes présentent des gaussiennes avec des pics étroits, centrés autour des valeurs de $\beta=2,5$ pour $L=0$, $\beta=2,5$ pour $L=2$ et $\beta=3$ pour $L=4$. Et lorsque $L=0$, l'énergie de cohésion entre les nucléons est dense et la densité de distribution augmente lorsque les valeurs de L augmentent ($L=2, 4$).

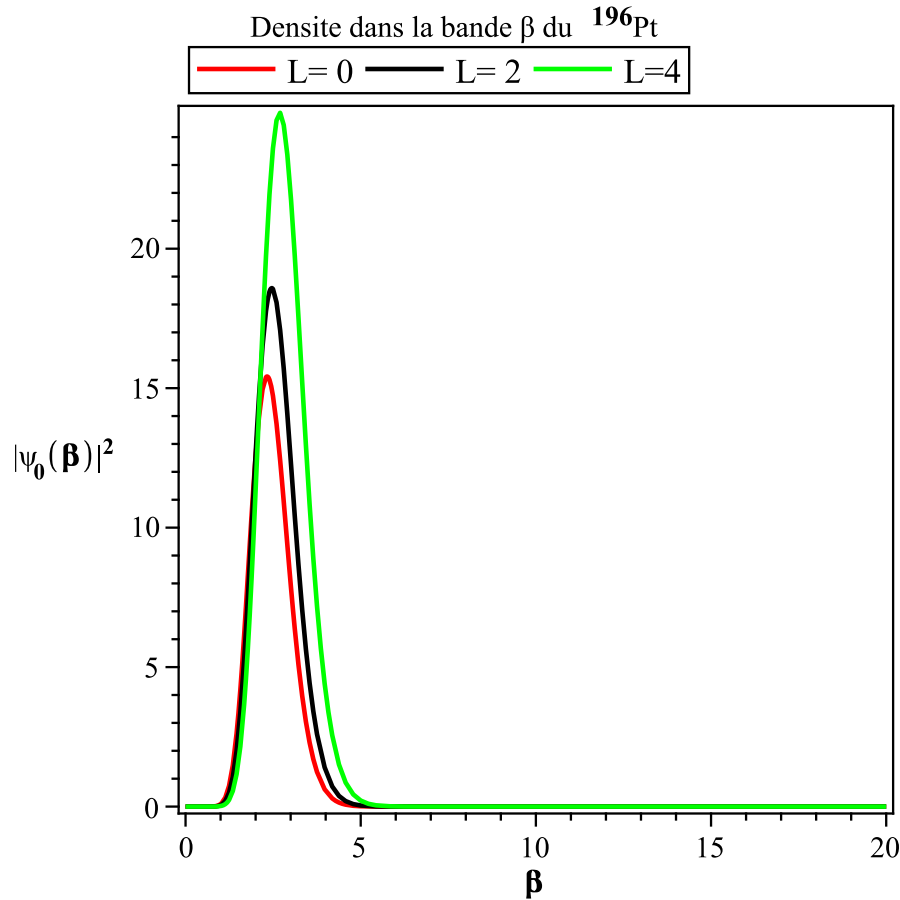


FIGURE 34 – Variation de la densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{196}Pt .

Les différentes courbes de la densité présentées dans la figure 36 ont l'allure des gaussiennes avec des pics étroits, centrés autour des valeurs de $\beta = 2,5$ pour $L=0$, $\beta = 2,5$ pour $L=2$ et $\beta = 3$ pour $L=4$. Lorsque les valeurs de L augmentent ($L = 2, 4$), on observe que l'énergie entre les nucléons et la densité de distribution augmentent également.

III.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué notre modèle en calculant les transitions $B(E2)$, les énergies de transitions des noyaux étudiés. Les différentes valeurs obtenues ont été comparées aux données expérimentales aux isotopes du $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$ et du $^{192,194,196}\text{Pt}$. Les effets des étalonnages dans la bande γ ont été calculés et comparés à la symétrie $Z(5)$. Les résultats de notre modèle sont en accord avec les données expérimentales et celles de la symétrie $Z(5)$.

Conclusion Générale

Dans ce travail, nous avons étudié un modèle qui nous a permis de décrire la structure nucléaire et les différentes déformations (vibration et rotation) au sein des noyaux atomiques.

Dans le premier chapitre, les caractéristiques de la structure nucléaire ont été présentées à savoir : la découverte du noyau atomique et ses constituants, les différents types de la radioactivité, une étude sur les isotopes du xénon et du platine a été décrite, suivi de la description des modèles nucléaires à savoir, le modèle de la goutte liquide, le modèle en couches sphérique et le modèle en couches déformés. Enfin, nous avons aussi étudié les différents types de déformation (rotation et vibration) des noyaux.

Dans le second chapitre, nous avons résolu l'équation du Hamiltonien de Bohr en utilisant la technique de séparation des variables, qui nous conduit à l'obtention des solutions de la partie γ et β . L'introduction de la méthode de Nikivorov-Uvarov nous a permis de déterminer l'énergie du spectre. La partie β de la solution de l'équation du Hamiltonien de Bohr nous a permis d'utiliser avec le potentiel écranté de Kratzer pour obtenir l'énergie du spectre du système ainsi que l'expression de la fonction d'onde correspondante. Les différents types de transitions ainsi que les moments quadrupôlares des isotopes ont été calculés. Par la suite, nous avons calculé l'effet de l'étalonnage $S(J)$, qui nous a permis d'observer les différents effets sur des courbes obtenues. Enfin, les courbes de la densité de la fonction d'onde ont été tracées pour différentes valeurs du moment magnétique (L).

Enfin dans le troisième chapitre, les résultats théorique des rapports des énergies des niveaux et les taux de transition $B(E2)$ des isotopes de $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$ et du $^{192,194,196}\text{Pt}$ ont été présentés. Les valeurs obtenues théoriquement par notre modèle sont meilleures pour notre étude précisément dans le cas des isotopes du platine et aussi pour quelques isotopes du xénon. Le tableau 3 montre que, les valeurs des écarts types obtenues théoriquement sont plus petites que celles des données expérimentales. Ce qui montre que, notre modèle est meilleur que celui utilisé par Chabab pour les isotopes du platine et quelques isotopes du xénon.

Les résultats obtenus dans les tableaux 3 et 5 montrent que, les valeurs obtenues pour les isotopes du platine sont plus petites et meilleures que les résultats expérimentaux de Chabab et pour la prédiction de Morse. Nous pouvons donc écrire que : $\sigma_{Pt} < \sigma_{Chabab}$. Mais par contre, pour les isotopes du xénon, les résultats obtenus montrent que, notre modèle n'est pas meilleur par rapport aux données expérimentales : $\sigma_{Chabab} < \sigma_{Xe}$, précisément pour le $^{128,132,134}\text{Xe}$. Ceci montre que, notre modèle améliore les résultats, et il est mieux adapté pour modéliser les noyaux triaxiaux.

Toutefois, notre modèle n'a été utilisé que pour les noyaux triaxiaux, dans les travaux futurs nous l'utiliserons pour étudier les noyaux prolates et oblates.

Appendices

ANNEXE : Ratios des moments de transitions quadrupôlaires électriques B(E2)

$$\begin{aligned}
 R_{\text{ground} \rightarrow \text{ground}}(L+2 \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L+2)_g \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{2L+1}{2L+5} (1 + \delta_{L,0}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \text{ground}}(L \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-even}} \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{15}{(L+1)(2L+3)} (1 + \delta_{L,2}) \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \text{ground}}(L \rightarrow L+1) &= \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-odd}} \rightarrow (L+1)_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{(L+2)} \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-1; n=0, L+1, L+1)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \gamma\text{-even}}(L+2 \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{L(2L-1)(2L+1)}{(2L+3)(L+2)(2L+5)} (1 + \delta_{L,2}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L; n=0, L, L-2)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.7}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \gamma\text{-odd}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{L(2L+1)}{(L+2)(2L+5)} \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+1; n=0, L, L-1)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.8}$$

$$\begin{aligned}
R_{\gamma\text{-odd}\rightarrow\gamma\text{-even}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; L_\gamma \rightarrow (L-1)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
&= \frac{5(2L-3)(2L-1)}{L(L+1)(2L+1)} (1 + \delta_{L,3}) \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-1; n=0, L-1, L-3)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
\end{aligned} \tag{III.9}$$

$$\begin{aligned}
R_{\beta\text{-band}\rightarrow\beta\text{-band}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; L_{\beta\text{-band}} \rightarrow (L-1)_{\beta\text{-band}})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
&= \frac{5}{2} \frac{2L+1}{2L+5} (1 + \delta_{L,0}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
\end{aligned} \tag{III.10}$$

Liste de la Publication

[1] Y. Omon, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, P. Owono Ateba, Bohr Hamiltonian with screened Kratzer potential for triaxial nuclei, Int. Jour. of Mod. Phys. E, vol.29, No.10 (2020) 2050082.

Bibliographie

- [1] E. Rutherford, *The scattering of alpha and beta-particles by matter and the structure of atoms*, (Phil. Mag., 1911) 669-698.
- [2] J.J. Thomson, *Philosophical Magazine Series* :77 (1904) 39 237.
- [3] J. Chadwick, *The Royal Society*, 77 (1932) 692708.
- [4] J. Rainwater, *Phys. Rev.* **79** (1950) 432.
- [5] C. F. V. Weizscker, *Zeitschrift fur Physik* **96** (1935) 458.
- [6] L. Meitner et al, *A New Type of Nuclear Reaction. Nat* **143** (1939) 239.
- [7] M. G. Mayer, *Nuclei. Phys. Rev* **74** (1948) 235.
- [8] M. G. Mayer, *Phys. Rev* **75** (1949) 1969.
- [9] M. G. Mayer, *Phys. Rev.* **78** (1950) 16.
- [10] G. C. Baldwin et al, *Phys. Rev.* **71** (1947) 3.
- [11] M. Goldhaber et al, *Phys. Rev.* **74** (1948) 1046.
- [12] C. H. Townes et al, *Phys. Rev* **76** (1949) 1415 - 1416.
- [13] A. Bohr et al, *Phys. Rev* **89** (1953) 316 - 317.
- [14] A. Bohr et al, *Nuclei. Phys. Rev* **90** (1953) 719.
- [15] J. P. Elliott, J. A. Evans and P. Park, *Phys. Lett. B.* **16** (1986) 9309.
- [16] D. Bonatsos, E. A. McCutchan, N. Minkov, R. F. Casten, P. Yotov, D. Lenis, D. Petrellis and I. Yigitoglu, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 064312.
- [17] F.F. Ruffino, L. Fortunato, *Computation* **6** **48** (2018) 48.
- [18] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3580.
- [19] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett* **87** (2001) 052502.
- [20] W. Greiner, A.J. Maruhn, *Nuclear Models, Springer, Berlin* **24** (1996).
- [21] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett* **91** (2003) 132502.
- [22] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P.A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588** (2004) 172.
- [23] A.S. Davydov, A.A. Chaban, *Nucl. Phys* **20** (1960) 499.
- [24] J. M. E. Ema'a, B. T. Mbadjoun, A. Zarma, P. Ele Abiama and G. H.
- [25] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P.P. Raychev, P.A. Terziev, *Phys. Lett B* **584** (2004) 40.

- [26] I. Yigitoglu, D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
- [27] H. Neyazi, A.A. Rajabi, H. Hassanabadi, *Nucl. Phys. A* **945** (2016) 80.
- [28] H. Sobhani, H. Hassanabadi, W.S. Chung, *Nucl. Phys. A* **85** (2018) 3580.
- [29] R. Budaca, *Eur. Phys. J. A* **5** (2014) 50.
- [30] G. Levai, J. Arias, *Phys. Rev. C* **81** (2010) 044304.
- [31] P. Bugu, R. Budaca, *J. Phys. G* **42** (2015) 105106.
- [32] R. Budaca, P. Bugu, A.I. Budaca, *Phys. Lett. B* **776** (2018) 26.
- [33] G. Levai, A.M. Ishkhanyan, *Mod. Phys. Lett. A* **34** (2019) 1950134.
- [34] I. Inci, I. Boztosun, Y.E. Gonen, *J. Phys. G* **39** (2012) 085112.
- [35] M. Chabab, A. Lahbas, M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51** (2015) 131.
- [36] M. Chabab, A. Lahbas, M. Oulne, *Int. J. Mod. Phys. E* **24** (2015) 1550089.
- [37] M. Chabab, A.E. Batoul, A. Lahbas, M. Oulne, *Nucl. Phys. A* **953** (2016) 158.
- [38] L. Naderi, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **131** (2016) 133.
- [39] I. Boztosun, D. Bonatsos, I. Inci, *Phys. Rev. C* **77** (2008) 044302.
- [40] I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E Int. J. Mod. Phys. E* **23** (2014) 1450053.
- [41] B.T. Mbadjoun, J.M.E. Ema'a, P.E. Abiama, G.H. Ben-Bolie, P.O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **27** (2018) 1850072.
- [42] B. Yamina, Cours de structure de la matière, 2018.
- [43] L. Fortunato, *Eur. Phys. J. A* **26** (2005) 1.
- [44] P. Bugu, L. Fortunato, *J. Phys. G* **43** (2016) 093003.
- [45] L. Wilets and M. Jean, *Phys. Rev* **102** (1956) 788.
- [46] N. V. Zamfir and R. F. Casten, *Phys. Rev. Lett. B* **260** (1991) 265.
- [47] M. Thoennessen, *Reaching the limits of nuclear stability* (2004).
- [48] E. Rutherford, the scattering of alpha and beta-particles by matter and the structure of atoms, *Phil. Mag.*, **43** (1911) 669 - 698.
- [49] M. Capak, D. Petrellis, B. Gonul, D. Bonatsos, *J. Phys. G* **42**, (2015) 095102.
- [50] J. Shergur et al., *Phys. Rev. C* **65** (2002) 034343.
- [51] D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, *Int. Jour. of Mod. Phys. E* **28** (2019) 1950106.
- [52] A. Bohr et B. R. Mottelson, *Nuclear structure volume I*. (1969).
- [53] M. G. Mayer, On closed shells in nuclei *Phys. Rev* **75** (1949) 1969.
- [54] E. A. McCutchan, D. Bonatsos, N.V. Zamfir, R.F. Casten, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 024306.
- [55] N. Walet, *Nuclear and Particle Physics, UMIST, Manchester, U.K.* (1999).
- [56] J. Suhonen, *Theoretical and Mathematical Physics, From Nucleons to Nucleus, Springer- Verlag* (2007).

- [57] D. Boumala, *Thèse de magistère, Université Mentouri Constantine* (2007).
- [58] L. Fortunato, A. Vitturi, *J. Phys. G.* **29** (2003) 1341 Ben-Bolie, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 490.
- [59] Von Weizsacker, C, *ur Theorie der Kernmassen. Zeitschrift fur Physik* **96** (1935) 1969.
- [60] C. Von Weizsacker, *Ann. Phys. Fr.* **96** (1935).
- [61] S.G. Nilsson, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, *Mat. -fys. Medd* **29** (1955).
- [62] S.G. Nilsson and I. Ragnarsson, *Shapes and shells in nuclear structure* (Cambridge university press) **29** (1995) .
- [63] R.M. Clark and A.O. Macchiavelli, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci* **50** (2000) 1.
- [64] M. Kaci, *Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud 11, Orsay*(1996).
- [65] A. Bohr et al., Rotational States in Even-Even Nuclei *Phys. Rev.* **90** (1953) 717 - 719.
- [66] A. Bohr and B. Mottelson, *Phys. Rev* **90** (1953) 717.
- [67] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, ed. W. Beiglöbck, Springer-Verlang *New York* **108** (1980).
- [68] J. M. E. Ema'a, B. T. Mbadjoun, A. Zarma, P. Ele Abiama and G. H.
- [69] K. L. G. Heyde, *The nuclear shell model* (1996).
- [70] S. Frauendorf and J. Meng *Nuc. Phys. A* **617** (1997) 131.
- [71] K. Lobner, M. Vetter, and V. Honig, *Nucl. Phys. A* **436(1)** (1985) 14.
- [72] O. Haxel, J. H. D. Jensen, H. E. Suess, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1766.
- [73] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, volume I et II (World Scientific, Amsterdam, (1968).
- [74] E. A. Lawrie, P. A. Vymers, J. J. Lawrie, Ch. Vieu, R. A. Bark, R. Lindsay, G. K. Mabala, S. M. Maliage, P. L. Masiteng, S. M. Mullins, S. H. T. Murray, I. Ragnarsson, T. M. Ramashidzha, C. Schück, J. F. Sharpey-Schafer, and O. Shirinda, *Phys. Rev. C* **78** (2008) 021305.
- [75] S. Nilsson, *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab* **29** (1955).
- [76] B.T. Mbadjoun, J.M.E. Ema'a, P.E. Abiama, G.H. Ben-Bolie, P.O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **27** (2018) 1850072.
- [77] K. Gottfried, *Phys. Rev.* **103** (1956) 1017.
- [78] W. Greiner and J. Maruhn, *Nuclear Models*(Springer, 1996).
- [79] T. Bengtsson and I. Ragnarsson, *Phys. Rev.* **103** (1956) 1017.
- [80] K. Lobner, M. Vetter, and V. Honig, *Nucl. Phys. A* **436(1)** (1985) 14.
- [81] J. P. Elliott, J. A. Evans and P. Park, *Phys. Lett. B.* **16** (1986) 9309.
- [82] E. Predazzi and T. Regge, *Nuovo Cimento* **24** (1962) 518.
- [83] A. S. Davydov and A. A. Chaban, *Nucl. Phys.* **20** (1960) 499.
- [84] M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51**, (2015) 131.
- [85] S. G. Rohozinski, J. Srebrny and K. Horbaczwska, *Phys. Z* **26** (1974) 8401.

- [86] Y. Shi, J. Dobaczewski, S. Frauendorf, W. Nazarewicz, J. C. Pei, F. R. Xu and N. Nikolov *Phys. Rev. Lett* **108** (2012) 092501.
- [87] S. A. Moszkowski, *Phys. Rev.* **99** (1955) 803.
- [88] I. Ragnarsson, S.G. Nilsson, R.K. Sheline, *Phys. Rep.*, **45** (1968) 1.
- [89] M. Gélin , Spectroscopie gamma des noyaux riches en neutrons autour de N=20 (2005).
- [90] L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. Rev* **30** (2004) 627.
- [91] A. S. Davydov and A. A. Chaban, *Nucl. Phys* **20** (1960) 499.
- [92] D. Bonatsos, P. E. Georgoudis, N. Minkov, D. Petrellis and C. Quesne *Phys. Rev. C* **88** (2013) 034316.
- [93] A. Lahbas, P. Baganu and R. Budaca, *Mod. Phys. Lett. A* **35** (2020) 2050085.
- [94] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics Birkhauser, Basel* (1988) .
- [95] G. Lévai and J. Arias, *Phys. Rev. C* **81** (2010) 044304.
- [96] P. Baganu and R. Budaca, *J. Phys. G* **42** (2015) 105106.
- [97] F. H. Stillinger, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 1891.
- [98] X. Song, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **17** (1991) 49.
- [99] R. Herrmann, *Fractional Calculus An Introduction for Physicists*(World Scientific, Singapore, 2011).
- [100] A. Lemieux and A. K. Bose, *Annales de l'I H P. Sect. A n°3* (1969) 10.
- [101] M. Kossow, *Annal. Phys : Quantum field theory and composite fermions in the fractional quantum Hall Effect* (2009) 285 - 377.
- [102] M. Chabab and M. Oulne, *Int, Int. Rev. Phys* **4**, (2010) 331.
- [103] A. V. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematics Physics*, (Birkhäuser, Boston, 1988).
- [104] J. Meyer-ter-Vehn J, *Nucl. Phys.* **249** (1975) 111.
- [105] H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkiliç, *Rep. Math. Phys.* **76**(3) (2015) 271 - 281.
- [106] C. Tezcan, R. Sever, *Int. J. Theor. Phys* **48** (2009) 337.
- [107] I. Yigitoglu, D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
- [108] D. Bonatsos and al., *Phys. Rev. C* **76** (2007) 064312.
- [109] A. R. Edmonds, *Angular Momentum In Quantum Mechanics*(Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957).
- [110] N. Soheibi, M. Hamzavi, M. Eshghi and Sameer M. Ikhdair, *Int. J. Mod. Phys. E* **26** (2017) 1750073.
- [111] E. R. Marshalek, *Theory of Collective Vibrations of Even-Even Spheroidal Nuclei*(Lawrence Radiation Lab, 1962).

- [112] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588**, (2004) 172.
- [113] L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys* **29**, (2003) 1341.
- [114] L. Gaudefroy, Thèse de Doctorat, Université de Paris XI Orsay (2005).
- [115] D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, *Int. Jour. of Mod. Phys. E* **28** (2019) 1950106.
- [116] J. Suhonen, *Theoretical and Mathematical Physics, From Nucleons to Nucleus*, Springer (2007).
- [117] T. R. Rodriguez, J. L. Egido, *Phys. Rev.* **51**, C81 (2010) 064323.
- [118] E. Caurier, G. Martinez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves, A. P. Zuker, *Ann. Phys* **318**, (2005) 454.
- [119] J. Meyer-ter-Vehn, *Nucl. Phys. A* **249**, (1975) 42.
- [120] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Harcourt Academic Press, San Diego.*, (2001).
- [121] A. Bohr, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid.* **26**, (1952) 454.
- [122] P. A. Butler, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **43**, (2016) 073002.
- [123] Otto Haxel, J. Hans D. Jensen, and Hans E. Suess, *Phys. Rev.* **75**, (1949) 1766.
- [124] A. Johnson, H. Ryde, and S. A. Hjorth, *Ann. Phys* **6**, (1972) 345.
- [125] A. Johnson, H. Ryde, and S.A. Hjorth, *Nucl. Phys. A* **75**, (1949) 753-768.
- [126] S. Mordechai et al., *Phys. Rev. Lett* **60**, (1988) 408.
- [127] J. Meyer-ter-Vehn, *Phys. A* **111**, (1975) 37.
- [128] A. Bohr, B.R. Mottelson, *Nuclear structure : Nuclear Deformations*, (1999).
- [129] M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51**, (2015) 131.
- [130] M. A. Caprio and F. Iachello, *Ann. Phys* **318**, (2005) 454.
- [131] M. Chabab and M. Oulne, *Int. Rev. Phys* **4**, (2010) 331.

Bohr Hamiltonian with screened Kratzer potential for triaxial nuclei

Y. Omon^{*,§}, J. M. Ema'a Ema'a^{†,¶}, P. Ele Abiama^{*,‡,||},
G. H. Ben-Bolie^{*,**} and P. Owono Ateba^{*,††}

**Laboratory of Atomic, Molecular and Nuclear Physics,
Department of Physics, Faculty of Science,
University of Yaounde I, P. O. Box 812, Yaounde, Cameroon*

*†University of Ngaoundéré, Higher Teachers' Training College,
ENS of Bertoua, Department of Physics,
P. O. Box 55, Bertoua, Cameroon*

*‡The Nuclear Technology Section (NTS),
Institute of Geological and Mining Research,
P. O. Box 4110, Nlongkak, Yaounde, Cameroon*

§omonyves@yahoo.fr

¶emaajm@yahoo.fr

||eleabiama2003@yahoo.fr

***gbenbolie@yahoo.fr*

††aowono1@yahoo.fr

Received 28 July 2020

Revised 5 October 2020

Accepted 6 October 2020

Published 7 November 2020

In this paper, Bohr Hamiltonian is used to describe the behaviors of triaxial nuclei with screened Kratzer potential. The Nikiforov–Uvarov method is used to derive the energy spectrum and corresponding wave function. The electric quadruple transition ratios and energy spectrum of the ^{126}Xe , ^{128}Xe , ^{130}Xe , ^{132}Xe , ^{134}Xe , ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt are calculated and compared with the experimental data. The results are in good agreement with experiment data.

Keywords: Bohr Hamiltonian; screened Kratzer potential; Nikiforov–Uvarov method; triaxial nuclei; $B(E2)$ transition rates and energy spectra.

PACS Number(s): 21.60.Fw, 21.10.Re, 70.25.+k, 04.10.Mn

1. Introduction

Several phenomena in nuclear structure involve the vibration and rotation of its nuclei surface.¹ The key issue in nuclear structure studies is the correct representation of these motions in order to gain knowledge on nuclei properties. Different

[§]Corresponding author.

approaches have been applied by many scientists to better represent those complex motions such as Interacting Boson Model,^{2,3} and the Bohr–Mottelson Model⁴ (BMM) sometimes called the geometrical model. The late model has marked advantages over others because a few number of its solutions can be obtained analytically. Furthermore, interest in the BMM has increased with the introduction of critical point symmetries (CPS) by Iachello.^{5–7} Those CPS are verifiable experimentally as a special solution of the BMM. As illustrated, X(5) symmetry describes the first-order transition between vibrational and prolate transform form of nuclei. In this context, special attention is devoted to studying Bohr Hamiltonian with different potentials like Davidson,^{8–12} Morse,^{13–15} Manning–Rosen,^{16,17} Woods–Saxon,¹⁸ Killingbeck potential,^{19,20} Morse+Killingbeck²¹ and Sextic.^{22–28} Recently, several works have been published on Bohr–Mottelson solutions using the sextic potential.^{29–32} Many other potentials and references on this topic can be found in Refs. 33 and 34.

One of the potentials generally used in Bohr Hamiltonian to determine the structure of transitional nuclei is the Kratzer potential.^{35–38} Motivated by many studies with the coupled Kratzer potential and Yukawa potential and their widespread usage in various fields of science especially in molecular and nuclear physics, Ikot *et al.*³⁹ proposed a combination of these two potentials called screened Kratzer potential. In this work, we are going to use the Screened Kratzer potential in the β variable of the Bohr Hamiltonian. Luckily, the Kratzer Coulomb and screened Coulomb or Yukawa potentials can be derived from the new potential. Therefore, the solution derived in this work is expected to be more useful.

On the other the hand, for triaxial nuclei, the surface oscillates uniformly over the γ variable, hence harmonic oscillator potential with a minimum around $\frac{\pi}{6}$ can be used.

This work is presented as follows: In Sec. 2, the Nikiforov–Uvarov method is introduced followed by Sec. 3 which develops the Bohr Hamiltonian model with screened Kratzer potential in its two parts. Section 4 is devoted to results and discussions and Sec. 5 concludes the work.

2. Generality on Nikiforov–Uvarov Method

The widely used Nikiforov–Uvarov method^{40,41} is applied to a second-order differential equation of the form

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{s^2(1 - \alpha_3 s)^2} \right) \Psi(s) = 0, \quad (1)$$

according to Tezcan *et al.*⁴⁰ it is assumed that

$$\alpha_4 = \frac{1 - \alpha_1}{2}, \quad \alpha_5 = \frac{\alpha_2 - 2\alpha_3}{2}, \quad \alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1,$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2, \quad \alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3,$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_9 &= \alpha_3(\alpha_7 + \alpha_3\alpha_8) + \alpha_6, \\
 \alpha_{10} &= \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8}, \quad \alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}), \\
 \alpha_{12} &= \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}, \quad \alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}).
 \end{aligned} \tag{2}$$

The wave function of Eq. (1) is given by

$$\Psi_{n,l}(S) = N_{n,l} S^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 S)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \times P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2\alpha_3 S) \tag{3}$$

and the energy can be obtained from the following equation:

$$\begin{aligned}
 n\alpha_2 - (2n+1)\alpha_5 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + n(n-1)\alpha_3 + (2n+1)\sqrt{\alpha_9} + (2\sqrt{\alpha_9} \\
 + \alpha_3(2n+1))\sqrt{\alpha_8} = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

3. Bohr Hamiltonian Model

The Bohr Hamiltonian in collective intrinsic variables⁴² can be written as

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right. \\
 \left. - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} \right] + V(\beta, \gamma), \tag{5}
 \end{aligned}$$

where β and γ are defined as the intrinsic collective coordinates, and \hat{Q}_k (with $k = 1, 2, 3$) are considered as components of angular momentum in the intrinsic frame and B is defined as the mass parameter. Let us introduce $v(\beta, \gamma)$ and ε such that

$$\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E, \tag{6}$$

$$v(\beta, \gamma) = \frac{2B}{\hbar^2} V, \tag{7}$$

these different expressions are called reduced energies and reduced potentials, respectively. To be able to separate the Hamiltonian into its different variables, we will assume that the reduced potential and the wave function are really separable. The real suitable forms are $v(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{\omega(\gamma)}{\beta^2}$, $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \psi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i)$, where θ_i ($i = 1, 2, 3$) are called the Euler angles and D are their Wigner functions. By considering the triaxial nuclei with or maximum at $\gamma = \frac{\pi}{6}$, we can write the angular-momentum as

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} = 4(\hat{Q}_1^2 + \hat{Q}_2^2 + \hat{Q}_3^2) - 3\hat{Q}_1^2. \tag{8}$$

By using the following symmetrized wave function:

$$D(\theta_i) = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\mu,\alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu,-\alpha}^L(\theta_i)], \quad (9)$$

the eigenvalue is $4L(L+1) - 3\alpha^2$, where L is the angular-momentum and α the projection quantum number of angular-momentum on the body-fixed x' -axis. Henceforth, the γ - and β -dependent Schrödinger equations are as follows:

$$\left[-\frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \omega(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \lambda \eta(\gamma), \quad (10)$$

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{L(L+1) - \frac{3\alpha^2}{4} + \lambda}{\beta^2} + u(\beta) \right] \psi(\beta) = \xi \psi. \quad (11)$$

3.1. Solution of the γ -part

For triaxial shapes, the corresponding potential energy surface should have a minimum around $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Henceforth, the following harmonic potential can be considered as:

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{2} \tilde{c} \left(\gamma - \frac{\pi}{6} \right)^2, \quad (12)$$

where \tilde{c} is defined as the stiffness of the potential. Inserting Eq. (12) into Eq. (10) and solving the resulting equation, the energy eigenvalue and the normalized eigenfunctions are, respectively,⁴³

$$\lambda_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{2\tilde{c}} \left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2} \right), \quad n_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

$$\eta_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n_{\tilde{\gamma}}} \sqrt{\pi} n_{\tilde{\gamma}}}} H_{n_{\tilde{\gamma}}}((\tilde{c}/2)^{1/4} \tilde{\gamma}) \exp(-(\tilde{c}/2)^{1/2} \tilde{\gamma}^2/2), \quad (14)$$

with $\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{6}$, $n_{\tilde{\gamma}}$ is the oscillator quantum number, and $H_{n_{\tilde{\gamma}}}$ are the Hermite polynomials.

3.2. Solution of the β part

Consider Eq. (11) and by considering

$$\psi(\beta) = \beta^{-2} F(\beta), \quad (15)$$

we introduce Eq. (15) in Eq. (11), we get

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{p}{\beta^2} - u(\beta) + \xi \right] F(\beta) = 0, \quad (16)$$

where

$$p = 2 + L(L+1) - \frac{3\alpha^2}{4} + \lambda. \quad (17)$$

We introduce the screened Kratzer potential:

$$u(\beta) = \left(\frac{A}{\beta} + \frac{B}{\beta^2} \right) e^{-k\beta}, \quad (18)$$

where this function is represented in Figs. 1 and 2 for the same values of A , B and k . Using the following Pekeris approximation scheme⁴⁴⁻⁴⁸ we have:

$$\frac{1}{\beta^2} \approx \frac{k^2}{(1 - e^{-k\beta})^2}, \quad \frac{1}{\beta} \approx \frac{k}{(1 - e^{-k\beta})}, \quad (19)$$

by substituting $u(\beta)$ in Eq. (16), we obtain

$$\frac{d^2 f}{d\beta^2} + \left[-\frac{k^2 p}{(1 - e^{-k\beta})^2} - \frac{A k e^{-k\beta}}{1 - e^{-k\beta}} - \frac{B k^2 e^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})^2} + \xi \right] F(\beta) = 0, \quad (20)$$

it is more suitable to use the variable transformation

$$z = e^{-k\beta} \quad (21)$$

and we get

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{df}{dz} + \frac{1}{[z(1-z)]^2} \left\{ \left(-\frac{A}{k} - B - \frac{2\xi}{k^2} \right) z + \left(\frac{A}{k} + \frac{\xi}{k^2} \right) z^2 + \frac{\xi}{k^2} - P \right\}. \quad (22)$$

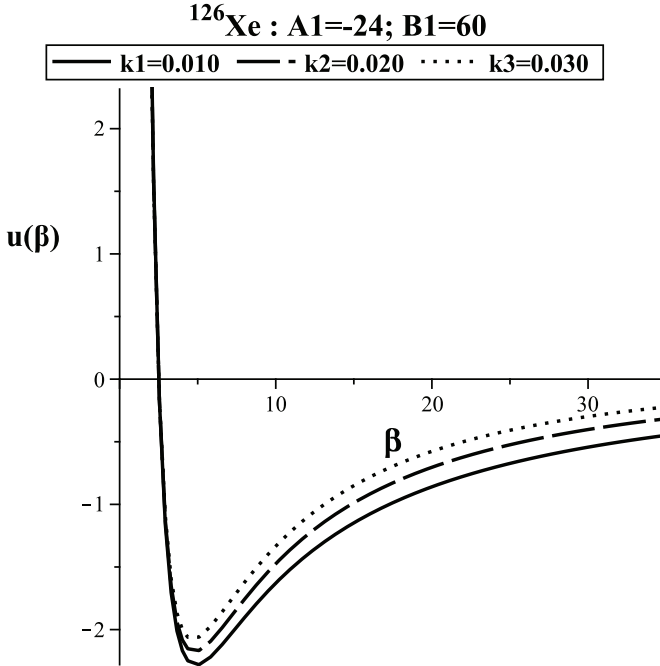


Fig. 1. Representation of the screened Kratzer potential with the values: $A1 = -24$, $B1 = 60$ and $k1 = 0.050$, $k2 = 0.075$ and $k3 = 0.030$.

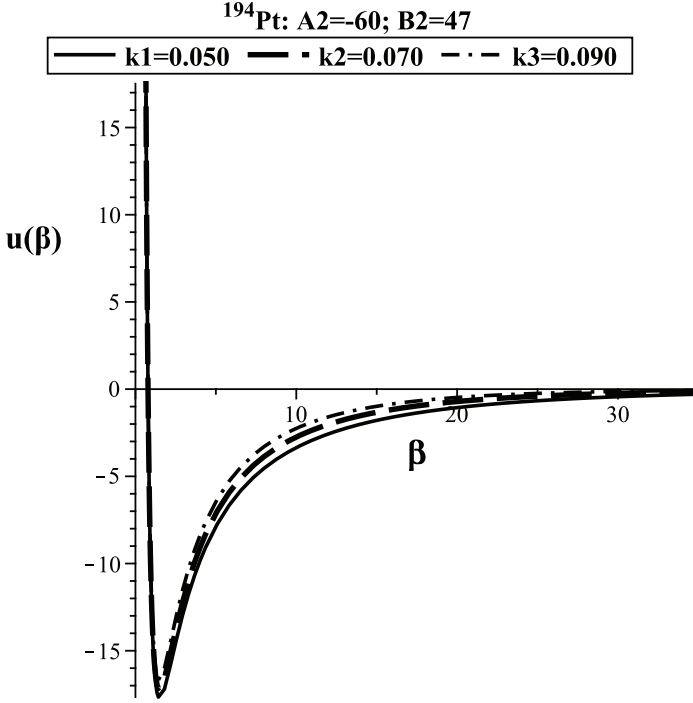


Fig. 2. Representation of the screened Kratzer potential with the values: $A_2 = -60$, $B_2 = 47$ and $k_1 = 0.050$, $k_2 = 0.070$, $k_3 = 0.090$.

In order to determine the values of ξ_1 , ξ_2 and ξ_3 in Eq. (2), identifying α_6 , α_7 and α_8 by Eq. (1), we have

$$\xi_1 = -\frac{A}{k} - \frac{\xi}{k^2}, \quad \xi_2 = -\frac{A}{k} - B - \frac{2\xi}{k^2}, \quad \xi_3 = Pk^2 - \xi, \quad (23)$$

the values of parameters are given by

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_6 = \frac{1}{4} - \frac{A}{k} - \frac{\xi}{k^2}, \\ \alpha_7 = \frac{A}{k} + B + \frac{2\xi}{k^2}, \quad \alpha_8 = P - \frac{\xi}{k^2}, \quad \alpha_9 = B + P + \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (24)$$

In order to determine the expression of energy, we introduce different values of α in Eq. (4). After some manipulations, we obtain the energy spectrum, given by

$$\xi = Pk^2 - k^2 \left[\frac{\left(n^2 + n + \frac{1}{2} + \frac{A}{k} + B + 2P + (2n+1)\sqrt{\frac{1}{4} + B + P} \right)^2}{\left((2n+1) + 2\sqrt{\frac{1}{4} + B + P} \right)} \right], \quad (25)$$

where A , B and k are the constants.

3.3. Special cases

When $k \rightarrow 0$, Eq. (18) takes the form of the standard Kratzer potential:

$$u(\beta) = \left(\frac{A}{\beta} + \frac{B}{\beta^2} \right). \quad (26)$$

In this case, the expression of the eigenvalues of energy is given by

$$\xi = - \frac{A^2}{\left(2\sqrt{\frac{1}{4} + B + P} + (2n + 1) \right)^2}, \quad (27)$$

when $B = 0$, Eq. (18) is reduced to the screened Kratzer potential of Coulomb, which is given by

$$u(\beta) = \frac{A}{\beta} e^{-k\beta} \quad (28)$$

and the energy eigenvalues of Coulomb of screened Kratzer potential is of the form

$$\xi = Pk^2 - k^2 \left[\frac{\left(n^2 + n + \frac{1}{2} + \frac{A}{k} + 2P + (2n + 1)\sqrt{\frac{1}{4} + P} \right)^2}{\left((2n + 1) + 2\sqrt{\frac{1}{4} + P} \right)} \right], \quad (29)$$

when $k \rightarrow 0$ and $B = 0$, Eq. (18) becomes the Coulomb potential of the form

$$u(\beta) = \frac{A}{\beta}, \quad (30)$$

with corresponding energy eigenvalues given by

$$\xi = - \frac{A^2}{\left(2\sqrt{\frac{1}{4} + P} + (2n + 1) \right)^2}. \quad (31)$$

3.4. Determination of the wave function

Consider Eq. (8) of Ref. 41,

$$\Psi_{n,l}(S) = N_{n,l} S^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 S)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \times P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2\alpha_3 S), \quad (32)$$

where α_{10} , α_{11} , α_{12} and α_{13} have the following values:

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= 1 + 2\sqrt{P - \frac{\xi}{k^2}}, \\ \alpha_{11} &= 2 + 2 \left(\sqrt{\frac{1}{4} + B + P} + \sqrt{P - \frac{\xi}{k^2}} \right), \quad \alpha_{12} = \sqrt{P - \frac{\xi}{k^2}}, \\ \alpha_{13} &= -\frac{1}{2} - \left(\sqrt{\frac{1}{4} + B + P} + \sqrt{P - \frac{\xi}{k^2}} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

in the original variable the wave function can be expressed as

$$\begin{aligned} \Psi(\beta) = N_\beta \beta^{-2} (e^{-\alpha_{12}\alpha\beta})(1 - \alpha_3 e^{-\alpha\beta})^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \\ \times P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2\alpha_3 e^{-\alpha_{12}\beta}), \end{aligned} \quad (34)$$

where P_n is defined as the Jacobi Polynomial and N_β is the normalization constant. The condition for normalization is given by the following formula:

$$\int_0^{+\infty} \beta^4 \Psi_\beta^2(\beta) d\beta = 1, \quad (35)$$

by inserting Eq. (15) in Eq. (35), the expression of the normalization constant is given by

$$N_\beta = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{+\infty} (e^{-\alpha_{12}\alpha\beta})(1 - \alpha_3 e^{-\alpha\beta})^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \\ \times [P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2\alpha_3 e^{-\alpha_{12}\beta})]^2 d\beta}} \quad (36)$$

Finally, the total wave function can be written as

$$\begin{aligned} \Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n_\gamma} \sqrt{\pi n_\gamma}}} H_{n_\gamma}((\tilde{c}/2)^{1/4} \tilde{\gamma}) \exp(-(\tilde{c}/2)^{1/2} \tilde{\gamma}^2/2) \\ \times \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\mu,\alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu,-\alpha}^L(\theta_i)] \\ \times N_L \beta^{-2} (e^{-\alpha_{12}\alpha\beta})(1 - \alpha_3 e^{-\alpha\beta})^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \\ \times P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2\alpha_3 e^{-\alpha_{12}\beta}). \end{aligned} \quad (37)$$

4. Results and Discussion

In this section, we will evaluate numerically the same intra and intra band $B(E2)$ ratios alongside the energy spectrum. This is usually done by writing the energy spectrum in the normalized form:

$$R_{n,L,n_\omega} = \frac{E_{n,L,n_\omega} - E_{0,0,0}}{E_{0,2,0} - E_{0,0,0}}, \quad (38)$$

where the quantum number n_ω is linked to α by the relation: $n_\omega = L - \alpha$. Thus, for each of band, we have the following relations^{45,46}:

- (1) the ground state band (gsb) is characterized by $n = 0$, $n_\omega = 0$,
- (2) the gamma band is composed by the even levels with $n = 0$, $n_\omega = 2$ and the odd levels with $n = 0$, $n_\omega = 1$,
- (3) the beta band is characterized by $n = 1$ and $n_\omega = 0$.

Table 1. Comparison of theoretical results for ground, β and γ bands energies with the experimental data.⁴⁹

Isotopes	¹²⁶ Xe		¹²⁸ Xe		¹³⁰ Xe		¹³² Xe		¹³⁴ Xe		¹⁹² Pt		¹⁹⁴ Pt		¹⁹⁶ Pt		
	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	
L_{band}																	
2^+_g	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4^+_g	2.485	2.424	2.422	2.333	2.387	2.247	2.175	2.157	1.828	2.044	2.482	2.479	2.452	2.470	2.446	2.464	2.464
6^+_g	4.255	4.207	4.026	3.922	3.905	3.627	3.241	3.163	2.387	2.387	2.522	4.314	4.133	4.299	4.112	4.290	4.290
8^+_g	6.126	6.267	5.622	5.674	5.370	5.031					6.099	6.377	5.855	6.392	5.807	6.333	6.333
10^+_g	7.960	8.645	7.098	7.597	6.686	6.457					7.912	8.624	7.491	8.671	7.409	8.558	8.558
12^+_g	9.673	10.999	8.013		7.820	7.867											
14^+_g					8.776	9.458											
2^+_1	1.912	2.264	1.885	2.189	1.868	2.093	1.760	1.944	1.567	1.905	1.900	1.935	1.896	1.894	1.897	1.936	1.936
3^+_1	2.758	3.391	2.676	3.228	2.631	3.045	2.358	2.701	1.936	2.266	2.714	2.910	2.715	2.809	2.707	2.854	2.854
4^+_1	4.706	3.830	4.419	3.620	4.271	3.373	3.471	2.940	2.491	2.458	4.550	3.795	4.522	3.743	4.526	3.636	3.636
5^+_1	4.923	4.898	4.607	4.508	4.444	4.051	3.577	3.246	2.536	2.682	4.751	4.682	4.755	4.563	4.725	4.525	4.525
6^+_1	7.178	5.698	6.480	5.150							6.792	5.905	6.723	5.863	6.734	5.644	5.644
7^+_1	7.012	6.848	6.346	6.165							6.644	6.677					
8^+_1	9.313	7.878									8.652	8.186	8.538	8.186	8.555	7.730	7.730
9^+_1	8.933	9.059															
0^+_2	3.493	3.381	3.575	3.575	3.141	3.446	2.359	2.771	1.711	1.932	4.078	3.776	3.687	3.858	3.506	3.192	3.192
2^+_2	4.229	4.319	4.260	4.515							4.776	4.547	4.394	4.603	4.212	3.828	3.828
4^+_2	5.334	5.255									5.801	6.110	5.432	5.817	5.245	4.318	4.318
$\sigma_{Present}$	0.680		0.494		0.403		0.299		0.211		0.403		0.469		0.624		0.624
σ^{53}	0.788		0.446		0.404		0.157		0.091		0.469		0.512		0.664		0.664

By applying these different of Xenon ($^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$) and Platinum ($^{192,194,196}\text{Pt}$) relationships, we calculated the energies of the excited levels of the isotopes. The theoretically obtained results are listed in Table 1 alongside the experimental results. These results were obtained with the values in Table 4. It could be observed that the results are in good agreement with the experimental ones. In order to further confirm this observation, we calculated the means square deviation using the expression:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (E_i^{\text{exp}} - E_i^{\text{theo}})^2}{m - 1}}, \quad (39)$$

where m represents the number of experimental data, E_i^{exp} and E_i^{theo} designate the experimental and theoretical energy data, respectively. The standard deviation (σ) confirms that for all the isotopes investigated, the theoretical and experimental results are in good agreement. Figures 1 and 2 show the variations of the different parameters of the screening values when A and B are fixed for each isotope. These curves converge towards zero as beta tends to infinity. The mean square standard deviation of our model for the isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ and ^{126}Xe are better than that of Ref. 49 However, for isotopes $^{128,130,132,134}\text{Xe}$, the mean square standard deviation of Ref. 49 are better than that of our model.

4.1. $B(E2)$ transition rates

In this part, we will determine the $B(E2)$ transitions rates. This is done using the transition operator⁵⁰:

$$T_{\mu}^{(E2)} = t\beta \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i))\sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i)\cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right], \quad (40)$$

where t is a scaling factor and θ is characterized by the Euler angle. For our case, we have $\gamma \approx \frac{\pi}{6}$. This operator is simplified as follows:

$$T_{\mu}^{(E2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}t\beta(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i)). \quad (41)$$

The expression of $B(E2)$ transition rate for a transition from an initial state $|L_i\alpha_i\rangle$ to a final state $|L_f\alpha_f\rangle$, is given by the following expression:

$$B(E2; L_i\alpha_i \rightarrow L_f\alpha_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle L_f\alpha_f || T^{(E2)} || L_i\alpha_i \rangle|^2}{(2L_i + 1)}. \quad (42)$$

We obtain the final result of the transition rate $B(E2)$, using the performing integrals and by taking into account the Wigner functions on the Euler angles. The

final result is given by

$$\begin{aligned}
 B(E2; L_i \alpha_i n_i \rightarrow L_f \alpha_f n_f) &= \frac{5}{16\pi} \frac{t^2}{2} \frac{1}{(1 + \delta_{\alpha_i, 0})(1 + \delta_{\alpha_f, 0})} [(L_i 2L_f | \alpha_i 2\alpha_f) \\
 &+ (L_i 2L_f | \alpha_i - 2\alpha_f) + (-1)^{L_i} (L_i 2L_f | -\alpha_i 2\alpha_f)]^2 \\
 &\times I_\beta^2(n_i, L_i, \alpha_i, n_f, L_f, \alpha_f), \tag{43}
 \end{aligned}$$

where $I_\beta(n_i, L_i, \alpha_i, n_f, L_f, \alpha_f) = \int_0^{+\infty} \beta^4 \psi_{n_i, L_i, \alpha_i}(\beta) \psi_{n_f, L_f, \alpha_f}(\beta) \beta d\beta$. In this equation, there are three Clebsch–Gordan coefficients, whose properties only allow coefficients for which, we have the relation $\Delta\alpha = \pm 2$. In Tables 2 and 3, we have represented $B(E2)$ transition rate calculated using Eq. (43) for the isotope ^{126}Xe , ^{128}Xe , ^{130}Xe , ^{132}Xe , ^{134}Xe , ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt . These theoretical results are represented alongside the experimental data available in the literature, and there is an overall good agreement.

Table 2. Comparison of the theoretical of $B(E2)$ transition rates with the experimental data⁴⁹ and the model⁷ prediction for $^{126,128,130,132,134}\text{Xe}$ isotopes.

Isotopes	^{126}Xe		^{128}Xe		^{130}Xe		^{132}Xe		^{134}Xe	
	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.	Theo.	Exp.
$L_{n, n_\omega}^i \rightarrow L_{n, n_\omega}^f$										
$4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$	1.472		1.481	1.468	1.457		1.365	1.238	1.125	0.758
$6_{0,0} \rightarrow 4_{0,0}$	1.828		1.883	1.941	1.811		1.758		1.797	
$8_{0,0} \rightarrow 6_{0,0}$	1.976		2.168	2.388	2.043		2.250		3.078	
$10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$	2.034		2.493	2.737	2.299	0.045	3.032		3.405	
$12_{0,0} \rightarrow 10_{0,0}$	2.025		2.928		2.628		3.214		3.610	
$14_{0,0} \rightarrow 12_{0,0}$	2.215		3.012		3.028		3.614		3.764	
$2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$	0.759		0.772	1.194	0.784		0.857	1.775	1.128	
$4_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$	0.340		0.358		0.375		0.477		0.851	
$6_{0,2} \rightarrow 6_{0,0}$	0.219		0.240		0.260		0.383		0.865	
$8_{0,2} \rightarrow 8_{0,0}$	0.178		0.160		0.120		0.215		0.755	
$3_{0,1} \rightarrow 4_{0,0}$	1.013		1.010		1.001		0.941		0.706	
$5_{0,1} \rightarrow 6_{0,0}$	0.777		0.787		0.784	0.342	0.774		0.721	
$7_{0,1} \rightarrow 8_{0,0}$	0.702		0.702		0.707		0.785		1.022	
$9_{0,1} \rightarrow 10_{0,0}$	0.633		0.691		0.709		0.915		1.478	
$4_{0,2} \rightarrow 2_{0,2}$	0.360		0.375		0.384		0.437		0.588	
$6_{0,2} \rightarrow 4_{0,2}$	1.218		1.348		1.454		2.135		1.447	
$8_{0,2} \rightarrow 6_{0,2}$	2.431		2.801		3.178		2.905		2.815	
$5_{0,1} \rightarrow 3_{0,1}$	1.223		1.296		1.328		1.578		2.354	
$7_{0,1} \rightarrow 5_{0,1}$	2.030		2.255		2.367		3.312		2.121	
$9_{0,1} \rightarrow 7_{0,1}$	2.907		3.415		3.367		4.025		3.095	
$3_{0,1} \rightarrow 2_{0,2}$	1.084		1.136		1.181		1.145		1.120	
$5_{0,1} \rightarrow 4_{0,2}$	1.575		1.739		1.908		2.919		1.702	
$7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2}$	1.939		2.208		2.544		4.045		2.186	
$2_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$	2.029		1.481		2.191		1.358		1.492	
$4_{0,0} \rightarrow 4_{0,0}$	2.873		1.883		3.123		1.753		1.919	

Table 3. Comparison of the $B(E2)$ transition rates with the experimental data³⁹ and esM¹⁷ prediction for ^{192,194,196}Pt isotopes.

Isotopes	¹⁹² Pt			¹⁹⁴ Pt			¹⁹⁶ Pt			
	$L_{n,n_\omega}^i \rightarrow L_{n,n_\omega}^f$	Theo.	Exp.	esM.	Theo.	Exp.	esM.	Theo.	Exp.	esM.
40,0 \rightarrow 20,0	1.497	1.556	1.563	1.482	1.728	1.630	1.475	1.478	1.540	
60,0 \rightarrow 40,0	1.933	1.224	2.213	1.877	1.362	2.334	1.851	1.798	2.141	
80,0 \rightarrow 60,0	2.250		2.735	2.125	1.016	2.835	2.067	1.921	2.597	
100,0 \rightarrow 80,0	2.598		3.163	2.371	0.691	3.187	2.264		2.955	
20,2 \rightarrow 20,0	0.761	1.905	1.586	0.765	1.809	1.653	0.767			1.564
40,2 \rightarrow 20,0	0.342		0.350	0.348	0.285	0.370	0.351			0.339
60,2 \rightarrow 60,0	0.220			0.228			0.232	0.394		
80,2 \rightarrow 80,0	0.171			0.182			0.186			
30,1 \rightarrow 40,0	1.016	0.664	1.236	1.013		1.305	1.011			1.200
50,1 \rightarrow 60,0	0.787			0.784			0.783			
70,1 \rightarrow 80,0	0.691			0.690			0.689			
90,1 \rightarrow 100,0	0.665			0.666			0.665			
40,2 \rightarrow 20,2	0.365		0.734	0.368	0.427	0.776	0.369	0.714	0.716	
60,2 \rightarrow 40,2	1.239		1.081	1.279		1.112	1.295	1207	1.022	
80,2 \rightarrow 60,2	2.442		1.715	2.295		1.697	2.658		1.589	
50,1 \rightarrow 30,1	1.255		1.250	1.263		1.316	1.266			1.205
70,1 \rightarrow 50,1	2.121		1.943	2.150		1.994	2.159			1.834
90,1 \rightarrow 70,1	3.118		2.485	3.182		2.468	3.198			2.306
30,1 \rightarrow 20,2	1.091	1.783	2.147	1.108		2.264	1.116			2.094
50,1 \rightarrow 40,2	1.577			1.647			1.675			
70,1 \rightarrow 60,2	1.904			2.047			2.108			
90,1 \rightarrow 80,2	2.249			2.500			2.611			
20,0 \rightarrow 20,0	1.497			1.482			1.475			
40,0 \rightarrow 40,0	1.933			1.877			1.851			

Table 4. Numerical values of the dimensionless free parameters for each isotope.

Isotopes	A	B	k
¹²⁶ Xe	-24	60	0.050
¹²⁸ Xe	-24	40	0.020
¹³⁰ Xe	-20	35	0.030
¹³² Xe	-24	15	0.015
¹³⁴ Xe	-24	4.5	0.010
¹⁹² Pt	-30	49	0.008
¹⁹⁴ Pt	-60	47	0.070
¹⁹⁶ Pt	-60	47	0.090

5. Conclusion

In this paper, we studied Bohr Hamiltonian model by considering the screened Kratzer potential as an interaction of the beta part. The energy spectrum and the wave function were derived using the popular Nikiforov–Uvarov method. It is shown that some energy spectral reported in the literature are special cases of our solution.

The different energies and $B(E2)$ transition rates are calculated and compared with the experimental data. It is observed that the results obtained theoretically are in good agreement with experimental ones for the studied nuclei.

Acknowledgment

The authors would like to thank the editor and referee for their suggestions and recommendations.

References

1. A. Davydov and A. Chaban, *Nucl. Phys.* **20** (1960) 499.
2. M. Sugita, T. Otsuka and A. Gelberg, *Nucl. Phys. A* **493** (1989) 350.
3. M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Int. J. Mod. Phys. E* **21** (2012) 10.
4. A. Bohr, *Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk.* **26** (1952) 1.
5. J. Meyer-ter-Vehn, *Nucl. Phys. A* **249** (1975) 111.
6. A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure: Nuclear Deformations*, Vol. II (World Scientific, Singapore, 1999).
7. I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E* **23** (2014) 111.
8. P. M. Davidson, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **13** (1932) 5459.
9. S. G. Rohozinski, J. Srebrny and K. Horbaczwska, *Phys. Z* **26** (1974) 8401.
10. J. P. Elliott, J. A. Evans and P. Park, *Phys. Lett. B* **16** (1986) 9309.
11. D. Bonatsos, E. A. McCutchan, N. Minkov, R. F. Casten, P. Yotov, D. Lenis, D. Petrellis and I. Yigitoglu, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 064312.
12. D. Bonatsos, P. E. Georgoudis, D. Lenis, N. Minkov and C. Ouene, *Phys. Rev.* **83** (2011) 044312.
13. P. M. Morse, *Phys. Rev.* **34** (1929) 57.
14. I. Boztosun, D. Bonatsos and I. Inci, *Phys. Rev. C* **77** (2008) 044302.
15. I. Inci, D. Bonatsos and I. Bostosun, *Phys. Rev. C* **84** (2011) 024309.
16. M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Int. J. Mod. Phys. E* **24** (2015) 1550089.
17. M. Chabab, A. E. Batoul, A. Lahbas and M. Oulne, *Nucl. Phys. A* **953** (2016) 158.
18. M. Capak, D. Petrellis, B. Gonul and D. Bonatsos, *J. Phys. G* **42** (2015) 095102.
19. H. Neyazi, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, *Nucl. Phys. A* **945** (2016) 80.
20. H. Sobhani, H. Hassanabadi and W. S. Chung, *Nucl. Phys. A* **85** (2018) 3580.
21. B. T. Mbadjoun, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama, G. H. Ben-Bolie and P. O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **27** (2018) 1850072.
22. G. Levai and J. M. Arias, *Phys. Rev. C* **69** (2004) 014304.
23. A. A. Raduta and P. Baganu, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 034313.
24. A. A. Raduta and P. Baganu, *J. Phys. G Nucl. Part. Phys* **40** (2013) 025108.
25. P. Baganu and R. Budaca, *J. Phys. G Nucl. Part. Phys* **42** (2015) 105106.
26. P. Baganu and R. Budaca, *Phys. Rev. C* **91** (2015) 014306.
27. R. Budaca, P. Budaca, M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Ann. Phys. (NY)* **375** (2016) 65.
28. R. Budaca, P. Baganu and A. I. Budaca, *Phys. Lett. B* **776** (2018) 26.
29. L. Fortunato, *Euro. Phys. J. A* **26** (2005) 1.
30. R. Budaca and A. I. Budaca, *Eur. Phys. L.* **123** (2018) 42001.
31. R. Budaca, P. Baganu and A. I. Budaca, *Nucl. Phys. A* **990** (2019) 137.
32. R. Budaca, A. I. Budaca and P. Baganu, *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.* **46** (2019) 125102.
33. A. Lahbas, P. Baganu and R. Budaca, *Mod. Phys. Lett. A* **35** (2020) 2050085.

34. A. Kratzer, *Phys. Z* **32** (1920) 89.
35. L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G Nucl. Part. Phys. Rev.* **29** (2003) 1341.
36. L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G Nucl. Part. Phys. Rev.* **30** (2004) 627.
37. P. Baganu and L. Fortunato, *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.* **43** (2016) 093003.
38. D. Bonatsos, P. E. Georgoudis, N. Minkov, D. Petrellis and C. Quesne, *Phys. Rev. C* **88** (2013) 034316.
39. A. N. Ikot, U. S. Okorie, R. Sever and G. J. Rampho, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 386.
40. C. Tezcan and R. Sever, *Int. J. Theor. Phys.* **48** (2009) 337.
41. C. A. Onate, O. Adebimpe, A. F. Lukman, I. J. Adama, J. O. Okoro and E. O. Davids, *Heliyon* **4** (2018) e00977.
42. A. Bohr, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **26** (1952) 14.
43. I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E* **23** (2014) 1450053.
44. R. L. Greene and C. Aldrich, *Phys. Rev. A* **14** (1976) 2363.
45. S. H. Dong, W. C. Qiang, G. H. Sun and V. B. Bezerra, *J. Phys. A* **40** (2007) 10535.
46. G. F. Wei, S. H. Dong and V. B. Bezerra, *Int. J. Mod. Phys. A* **24** (2009) 161.
47. S. H. Dong and X. Y. Gu, *J. Phys. Conf. Ser.* **96** (2008) 012109.
48. G. F. Wei and S. H. Dong, *Phys. Scr.* **81** (2010) 035009.
49. M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51** (2015) 131.
50. S. H. Dong, W. C. Qiang and J. Garcio-Ravelo, *Int. J. Mod. Phys. A* **23** (2008) 1537.