

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES
ET GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE "PHYSIQUE ET APPLICATIONS"

BP 812 Yaoundé
email: crfd_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING
UNIT FOR "PHYSICS AND APPLICATIONS"

PO BOX 812 Yaoundé
email: crfd_stg@uy1.uninet.cm

LABORATOIRE DE PHYSIQUE NUCLEAIRE, ATOMIQUE, MOLECULAIRE ET
BIOPHYSIQUE

ETUDE DES PROPRIETES DU NOYAU
ATOMIQUE ET DE QUELQUES MOLECULES A L'AIDE DE
L'EQUATION DE KLEIN-GORDON

Thèse

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du
Diplôme de Doctorat/PhD en Physique

Option: Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection

Par :

ANEMENA ETOGA Emmanuel

Matricule 10W0034

Master en Physique



Sous la Co-direction de :
EMA'A EMA'A Jean Marie
Maître de Conférences
(Université de Ngaoundéré)

et

de :
BEN-BOLIE Germain Hubert
Professeur
(Université de Yaoundé I)

Année 2021



DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE
DOCTORAT/Ph.D

Nous, Professeurs NJANDJOCK NOUCK Philippe, TCHOFFO Martin, SAÏDOU et Professeur EKOBEA FOUA Henri Paul, respectivement Examineurs et Président du jury de la thèse de Doctorat/Ph.D de Monsieur ANEMENA ETOGA Emmanuel Matricule 10W0034, préparée sous la co-direction du Professeur EMA'A EMA'A Jean Marie et du Professeur BEN-BOLIE Germain Hubert, intitulée : « ETUDE DES PROPRIETES DU NOYAU ATOMIQUE ET DE QUELQUES MOLECULES A L'AIDE DE L'EQUATION DE KLEIN-GORDON », soutenue le **Lundi, 06 Décembre 2021**, en vue de l'obtention du grade de Docteur/Ph.D en Physique, Spécialité **Physique des Rayonnements et Biophysique**, attestons que toutes les corrections demandées par le Jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé le **10 DEC 2021**

Examineurs

Pr. NJANDJOCK NOUCK Philippe

Pr. SAÏDOU

Pr. TCHOFFO Martin

Le Président du Jury

Pr. H. P EKOBEA FOUA

Le Chef de Département de Physique



Professeur

Université de Yaoundé I

Faculté des Sciences

Département de Physique

**ETUDE DES PROPRIÉTÉS DU NOYAU ATOMIQUE ET
DE QUELQUES MOLECULES A L'AIDE DE
L'EQUATION DE KLEIN-GORDON**

THÈSE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat/PhD en Physique

Option: **Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection**

Par

ANEMENA ETOGA Emmanuel

Matricule: 10W0034

Master en Physique

Sous la Co-direction de

EMA'A EMA'A Jean Marie

Maître de Conférences, Université de Ngaoundéré

et de

BEN-BOLIE Germain Hubert

Professeur, Université de Yaoundé I

**Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et
Biophysique**

Dédicace

Je dédie cette thèse à :

Ma défunte sœur MIMPOUNDE ETOGA Agnès, ma sœur que ton âme repose en paix .

Remerciements

Je remercie le Seigneur DIEU Tout Puissant pour tous ses biens faits dans ma vie et en particulier pour tous les moyens qu'il a mis à ma disposition pour la réalisation de cette thèse.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements au Professeur BEN-BOLIE Germain Hubert pour m'avoir accueilli dans son Laboratoire et pour les précieux conseils, le soutien et les compétences scientifiques dont j'ai bénéficié tout au long de la préparation de cette thèse.

J'exprime mes remerciements particuliers au Professeur EMA'A EMA'A Jean-Marie qui a Co-dirigé cette thèse, pour sa grande disponibilité à répondre à mes interrogations et pour le suivi permanent dans la réalisation de cette thèse.

J'exprime mes remerciements les plus respectueux au Professeur OWONO ATEBA Pierre qui est le créateur du Laboratoire de Physique Nucléaire et qui continue à nous assister par ses précieux conseils.

Ma reconnaissance va tout particulièrement au Docteur ELE ABIAMA Patrice pour son soutien remarquable.

Je remercie les Professeurs EKOBENA FOU DA Henri Paul et OWONO OWONO Luc Calvin pour leurs conseils et échanges fructueux.

Je remercie grandement le Professeur NDJAKA Jean-Marie Bienvenu, Chef de Département de Physique de l'Université de Yaoundé I pour ses encouragements.

Mes remerciements vont à l'endroit de tous les enseignants du département de Physique, en particulier aux Professeurs SAÏDOU et BOYOMO ONANA Marthe pour leurs enseignements et leurs encouragements.

Je remercie grandement le Professeur KOFANE Timoléon Crépin pour ses conseils et ses encouragements pour l'avancement de cette thèse.

Aux Honorables membres du jury, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger ce travail.

Je remercie également tous les membres du Laboratoire de Physique Nucléaire pour leurs aides, leur assistance et leur amitié ; particulièrement Dr ALI ZARMA, Dr MVONDO Stanislas, Dr NDONGO ASSOMO, Dr NGA ONGODO Dieudonné, Dr TAKEMBO NTAHKIE Clovis, Dr NGOUBI HENOCK, Dr TAKOUKAM SOH Serge, Dr

BINENG Samuel Guillaume, OMON Yves, TJOCK-MBAGA Thomas, MAH TSILA Philippe, NGIMSSING Brice, AWE Richard, KOYANG François, MBIDA MBEMBE Serge, YIA ETOLO Hervé Didier, TAMIAN FOTSO Kévin Adelphe, ADJABA Jean Liboire, TANKOU TAGNE Alain Sylvain, EBODE ONYIE Fabien, NNOMO MANGA Richard.

Je remercie infiniment mes parents ETOGA ANEMENA Paul Edouard et BOBO Marie Anne pour tout ce qu'ils ont fait pour moi pour la réalisation de cette thèse. Mes sincères remerciements à tous les membres de ma famille en particulier : ma grand-mère MBOA Jeannette ; mes oncles BANYOMO Bertrand, MBITE Dieudonné, NDJOULI Albert, BELLA Jean, ANEMENA André ; mes tantes MBIA Véronique, MINOMO Jacqueline ; mes sœurs MESSOMO Angèle, NYIMI Crescence, MBOA Flora, EHONNA Pascaline, MBANDI Thérèse, MBASSITE Welisanne, MESSINA Brigitte ; mes frères BESSALA Steve, ETOGA Junior, ATEBA Guy, BELLA Tony ; mes cousins et cousines ANEMENA Guy, MBALLA Nadège, BASSOULE Prudence, BESSALA Serge, BANYOMO Junior, NGAMA Jean, MAKOLO Fleur. A vous tous, je dis Merci pour votre générosité tout au long de ces années d'étude.

Je remercie tous mes amis et camarades du Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique de la Faculté des Sciences.

Je tiens également à remercier tous mes amis de l'Amicale des Anciens Élèves du Lycée de Nkolbisson pour leurs encouragements.

Je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à l'élaboration de ce travail et dont les noms ne figurent pas ici.

Liste des Abréviations

PM : Potentiel de Morse

PKM : Potentiel de Killingbeck plus Morse

PFIQT : Potentiel de Fractionnaire Inverse à Quatre Termes

CCG : Coefficient de Clebsch Gordan

RQN : Résonance Quadrupolaire Nucléaire

Exp : Expérience

SUSY : Super Symétrie

SUSY MQ : Super Symétrie en Mécanique Quantique

EKG : Equation de Klein- Gordon

GZK : Greisen Zatsepine et Kouzmine

FAIR : Fast Intercrate Readout

CCG : Coefficients de Clebsch de Gordan

MM : Modèle Macroscopique

MMi : Modèle Microscopique

MC : Modèle en Couche

LNL : Laboratoire National de Legnaro

MCS : Modèle en Couche Sphérique

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Liste des Abréviations	iv
Table des matières	vi
Liste des Figures	x
Abstract	xii
Résumé	xiv
Chapitre I REVUE DE LA LITTÉRATURE	4
I.1 Historique de la connaissance du noyau atomique	4
I.2 Propriétés du noyau atomique	5
I.2.1 Structure des noyaux atomiques	5
I.2.2 Interactions dans le noyau atomique	5
I.2.3 Caractéristiques des noyaux atomiques	6
I.2.4 Parité du noyau atomique	7
I.2.5 Nombres magiques	7
I.2.6 Radioactivité des noyaux	8
I.2.7 Lois de conservation	11
I.2.8 Unité de masse atomique, masse atomique et défaut de masse . . .	12
I.2.9 Énergie de liaison et énergie de séparation	13
I.3 Covariant, contravariant et métrique	14
I.3.1 Forme des noyaux atomiques	15
I.4 Modèles nucléaires	15
I.4.1 Modèle de la goutte liquide	16
I.4.2 Modèle en couches sphériques	17
I.5 Équation de Klein-Gordon appliquée à certains noyaux et à quelques po- tentiels	18

I.5.1	Origine de l'équation de Klein-Gordon	18
I.5.2	Equation de Klein-Gordon avec le potentiel de type exponentiel . .	18
I.5.3	Equation de Klein-Gordon avec le bottomonium et le charmonium	19
I.5.4	Equation de Klein-Gordon avec le potentiel de Coulomb	19
I.5.5	Equation de Klein-Gordon pour le noyau de plomb	19
I.5.6	Equation de Klein-Gordon pour les hypernuclei de type Λ	19
I.5.7	Equation de Klein-Gordon avec le potentiel exponentiel à cinq paramètres	20
I.5.8	Equation de Klein-Gordon avec le potentiel inverse racine carré .	20
I.5.9	Equation de Klein-Gordon avec le potentiel de Hulthen plus le potentiel déformé de type exponentiel	20
I.5.10	Solutions de l'équation de Klein-Gordon en dimension-D pour les potentiels scalaire et vecteur égaux en utilisant le pseudo potentiel harmonique de Ring-Shape	21
I.5.11	Equation de Klein-Gordon avec le potentiel symétrique généralisé .	21
I.5.12	Equation de Schrödinger avec le potentiel de Coulomb	21
I.5.13	Equation de Klein-Gordon pour l'oscillateur de Sextic avec l'équation bi-confluente de Heun	22
I.5.14	Equation de Klein-Gordon avec le potentiel exponentiel multiparamétrique	22
I.5.15	Equation de Klein-Gordon avec le potentiel Sextic indépendant de γ	22
I.6	Équation de Klein-Gordon et applications	23
I.6.1	Équation de Klein-Gordon sur la mécanique quantique et la relativité	23
I.6.2	Effet de l'équation de Klein-Gordon sur la biologie	24
I.6.3	Importance de l'équation de Klein-Gordon sur l'informatique . . .	24
I.6.4	Effet de l'équation de Klein-Gordon sur la chimie physique	24
I.7	Conclusion	24
Chapitre II MATÉRIELS ET MÉTHODES		25
II.1	Propriétés des molécules	25
II.1.1	HCl	25
II.1.2	LiH	26
II.1.3	O_2	27
II.1.4	H_2O	28
II.2	Constituants du noyau atomique	30
II.2.1	Bottomonium	30
II.2.2	Propriétés	31
II.2.3	Charmonium	31

II.2.4 Propriétés	31
II.3 Mesure expérimentale des énergies de quelques noyaux : cas des noyaux de lithium et de plomb	32
II.4 Spectrographe de masse/ Principe de fonctionnement	36
II.5 Equation de Klein-Gordon tridimensionnelle	37
II.6 Équation bi-confluente de Heun et fonctions polynômiales associées . . .	39
II.6.1 Équation bi-confluente de Heun	39
II.6.2 Fonctions polynômiales associées à l'équation bi-confluente de Heun	43
II.7 Résolution de l'équation de Klein-Gordon avec le potentiel inverse à quatre termes	44
II.8 Résolution de l'équation de Klein-Gordon pour le potentiel singulier frac- tionnaire	46
II.9 Résolution de l'équation de Klein-Gordon pour le potentiel de Sextic . . .	47
II.10 Conclusion	52
Chapitre III RÉSULTATS ET DISCUSSION	53
III.1 Etats d'une particule de Klein-Gordon dans des potentiels scalaire et vec- toriel du type fractionnaire	53
III.2 Potentiel inverse à quatre termes	54
III.3 Cas spéciaux et comparaison avec les résultats de la littérature	59
III.3.1 Potentiel de Coulomb	59
III.3.2 Potentiel de Kratzer	59
III.4 Fonction d'onde	60
III.5 Potentiel singulier fractionnaire	62
III.6 Cas spéciaux et comparaison avec les résultats de la littérature	66
III.6.1 Potentiel à carré inverse	66
III.6.2 Potentiel de Kratzer	66
III.7 Fonction d'onde	67
III.8 Courbes des fonctions d'ondes	68
III.9 Application au potentiel de Sextic	74
III.9.1 Cas spéciaux et comparaison avec les résultats de la littérature . .	74
III.9.2 Potentiel de Davidson	74
III.9.3 Potentiel Parabolique	74
III.10 Fonction d'onde	75
III.11 Spectre de masse	76
III.12 Ecart type	82
III.13 Tracé du spectre de masse	82
III.14 Discussion	84
III.15 Tracé des énergies	84

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	<i>ix</i>
III.16 Conclusion	90
Conclusion Générale et perspectives	91
Publication issue de la thèse	93
Références Bibliographiques	94

Table des figures

Figure 1	Énergie de liaison par nucléon [33]	14
Figure 2	Molécule de HCl [110]	25
Figure 3	Molécule de LiH [110]	27
Figure 4	Molécule de O_2 [110]	28
Figure 5	Molécule de H_2O [110]	28
Figure 6	Bottomonium [111]	30
Figure 7	Charmonium [111]	31
Figure 8	Principe de l'appareil expérimental 8π LP [128]	34
Figure 9	Matrice expérimentale d'un télescope Ball [128]	35
Figure 10	Matrice expérimentale d'un télescope Ball [128]	35
Figure 11	Distributions angulaires de la diffusion élastique du système [128] 36	
Figure 12	Spectrographe de masse[111]	36
Figure 13	Représentation du potentiel inverse à quatre termes avec quelques paramètres. Courbe 1) $a = -64.15, b = 67.90, c = -19.20, d = 4.122$. Courbe 2) $a = -74.15, b = 64.52, c = -21.92, d = 5.77$. Courbe 3) $a = -93.39, b = 59.42, c = -27.92, d = 10.0951$	61
Figure 14	Représentation du potentiel singulier fractionnaire avec quelques valeurs des paramètres. Courbe 1) $a = 40.05, b = -78.90, c = 0.20, d = 0.122$. Courbe 2) $a = 50.05, b = -77.90, c = 0.20, d = 0.123$. Courbe 3) $a = 55.05, b = -76.90, c = 0.19, d = 0.124$	68
Figure 15	Représentation de la fonction d'onde pour $\gamma = 1, N_0 = 1, D = -1, B = 1, A = 1$ et $C_0 = 1$	69
Figure 16	Représentation de la fonction d'onde pour $\gamma = 1, N_0 = 2, D = -1, B = 1, A = 1$ et $C_0 = 1$	70
Figure 17	Représentation de la fonction d'onde pour $\gamma = 1, N_0 = 2, D = -1, B = 2, A = 1$ et $C_0 = 1$	71
Figure 18	Représentation de la fonction d'onde pour $\gamma = 1, N_0 = 1, D = -1/2, B = 2, A=1$ et $C_0 = 1$	71

Figure 19	Représentation de la fonction d'onde pour $\gamma = 1, N_0 = 1, D = -1/2, B=2, A=1$ et $C_0 = 1$	72
Figure 20	Représentation de la fonction d'onde pour $\gamma = 1, N_0 = 3, D = -1/2, B = 3, A = 1$ et $C_0 = 1$	73
Figure 21	Représentation de la fonction d'onde pour $\gamma = 1, N_0 = 3, D = -1/2, B = 3, A=1$ et $C_0 = 1$	73
Figure 22	Représentation du potentiel de Sextic avec quelques paramètres. Courbe 1) $a = 4.05, b = 7.90, c = -5.20, d = 9.122$. Courbe 2) $a = 14.05, b = 17.90, c = -15.20, d = 19.122$. Courbe 3) $a = 24.05, b = 27.90, c = -25.20, d = 29.122$	76
Figure 23	Représentation du spectre de masse charmonium pour certains nombres quantiques.	83
Figure 24	Représentation du spectre de masse bottomonium pour certains nombres quantiques.	83
Figure 25	Représentation de l'énergie pour les paramètres $n=1, M=15, a=1, b=1, c=1$	85
Figure 26	Représentation de l'énergie de Coulomb pour les valeurs des paramètres ; courbe en rouge $n = 2, M = 1, a = 1$; courbe en noir $n = 1, M = 2, a = 2$; courbe en jaune $n = 3, M = 3, a = 3$. courbe en vert $n = 5, M = 7, a = 3$	86
Figure 27	Représentation de l'énergie de Coulomb ; courbe en rouge $n=8, M=5, a=3$; courbe en noir : $n=9, M= 10, a=-5,5$; courbe en Vert : $n=9, M=150, a=-5,5$	87
Figure 28	Représentation de l'énergie de Coulomb ; courbe en rouge $n=149, M=150, a = -1000$; courbe en vert $n=1, M=200, a=1$ et la courbe en noir : $n=38, M=20, a=125$	88
Figure 29	Représentation de l'énergie de Coulomb ; courbe en rouge pour $n=1, M=1, a = 1$; courbe en bleu pour $a= 2, M= 1, n=2$; courbe en noir pour $a=0, M=1, n=1$	88
Figure 30	Représentation de l'énergie de Kratzer ; courbe en rouge pour $n=1, b= 1 M=1, a = 0$; courbe en bleu pour $n=3, b= 1 M=1, a = 2$.	89
Figure 31	Représentation de l'énergie de Kratzer pour $n=3, b= 1 M=1, a = 2$.	90

Abstract

In this thesis, the model of Klein-Gordon equation describing the different nuclear interactions, properties and energies of the constituents of the atomic nucleus is studied. This model is solved by relying on the method of Heun's bi-confluent equations and using the fractional type potential to determine the energy and the corresponding wave function. We apply this model on the constituents of the nucleus such as bottomonium, charmonium and some molecules like HCl , LiH , O_2 , and H_2O . Indeed, by using the method of separating variables, we end up with two equations, one of which is a function of the parameter γ which represents the rotational motion of the particle and the equation of the motion of the particle which is a function of the parameter r . In order to determine the energy and the wave function of the system, the equation containing the r part is solved using Heun's bi-confluent equation method and we obtain a transcendental energy equation. The energy of the spectrum obtained is a function of the parameters a , b and c which are very important parameters for our potential. The energies are calculated for each molecule mentioned above, the mass spectrum applied and calculated for the two constituents of the atomic nucleus which are bottomonium and charmonium. The energies of the fundamental level, according to the numbers l and n are calculated. The different theoretical results of our model are compared with the results of the models of Ikot, Ikhdair, Ibekwe and Omugbe. It emerges from these results that the values obtained for our model are better in the case of bottomonium and charmonium because the values of the Sextic energies, of the four-term inverse potential and the values of the standard deviations theoretically obtained are smaller than those of the models of Ikot, IKhdair, Ibekwe and Omugbe. This shows that, the model is better than the one used in the model of Ikot. But on the other hand, for triatomic molecules, the results obtained show that the model is not well suited for the latter. The experimental method for the determination of energies with experienced devices made in Italy at the National Laboratory of Legnaro was carried out for lithium and lead cores. The experiment was performed using a ${}^7Li^{3+}$ pulsed beam delivered by an XTU-Tanden accelerator. The reaction between Lithium and Lead was performed at beam energies of 25, 31, 33, 35 and 39 MeV covering the range from the bottom to the top of the Coulomb barrier. To perform the experiment, inside the Ball sector, a cylinder was installed and placed coaxially around the beam to reduce the opening of the active area of the telescope ball,

count rate and downtime. In this way, the measurements were taken at the corners of the laboratory. Note also that for each level, the peak of the probability density distribution increases as the angular momentum quantum number increases.

In addition, a comparison of the work carried out in the Laboratory on bottomonium and charmonium Ikot, IKhdair, Ibekwe are presented. These different results show that the model is better compared to the different models used by Ikot, IKhdair then Ibekwe. Finally, the various results obtained are mostly in good agreement with the experimental results.

Keywords : Klein-Gordon equation, four inverse power term potentials, Heun bi-confluent equation method, atomic nuclei, energy spectrum, mass spectrum, wave function, Kratzer potential, Coulomb potential, Sextic potential.

Résumé

Dans cette thèse, le modèle de l'équation de Klein-Gordon est étudié pour décrire les différentes interactions nucléaires, les propriétés et les énergies des constituants du noyau atomique. Ce modèle est résolu en s'appuyant sur la méthode des équations bi-confluentes de Heun et en utilisant le potentiel de type fractionnaire pour déterminer l'énergie et la fonction d'onde correspondante. Nous appliquons ce modèle sur les constituants du noyau tels que le bottomonium, le charmonium et quelques molécules comme le HCl , LiH , O_2 , et H_2O . Ainsi, en utilisant la technique de séparation des variables, on aboutit à deux équations dont l'une est fonction du paramètre γ qui représente le mouvement de rotation de la particule et l'équation du mouvement de la particule qui est fonction du paramètre r . L'équation contenant la partie en r a été résolue en utilisant la méthode des équations bi-confluentes de Heun et on obtient une équation transcendante de l'énergie. Cette équation est fonction des paramètres a , b et c . Les énergies ont été calculées pour chaque molécule citée ci-haut, le spectre de masse a été déterminé pour le bottomonium et le charmonium. Les énergies du niveau fondamental, en fonction des nombres l et n ont été calculées. Les différents résultats théoriques de ce modèle ont été comparés aux résultats des modèles de Ikot, Ikhdair, Ibekwe et Omugbe. Il en ressort de ces résultats que le modèle est meilleur dans le cas du bottomonium et du charmonium car les valeurs des énergies de Sextic, du potentiel inverse à quatre termes et les valeurs des écarts types obtenus théoriquement sont plus petits que celles des modèles de Ikot, Ikhdair, Ibekwe et Omugbe. Ce qui montre que le modèle est meilleur que celui utilisé dans le modèle de Ikot. Mais par contre, pour les molécules triatomiques, les résultats obtenus montrent que, le modèle n'est pas bien adapté pour ces dernières. La méthode expérimentale de détermination des énergies avec des appareils expérimentés fait en Italie au Laboratoire National de Legnaro a été réalisé pour les noyaux de lithium et de plomb. L'expérience a été réalisé à l'aide d'un faisceau pulsé de ${}^7Li^{3+}$ livré par un accélérateur XTU-Tanden. La réaction entre le lithium et le plomb a été exécuté aux énergies de faisceau de 25, 31, 33, 35 et 39 MeV couvrant la plage allant du bas au dessus de la barrière coulombienne. Pour réaliser l'expérience, à l'intérieur du secteur Ball, un cylindre a été installé et placé coaxialement autour du poutre pour réduire l'ouverture de la zone active de la balle télescope, le taux de comptage et le temps mort. De cette façon, les mesures ont été prises aux angles de laboratoire. On note également que pour

chaque niveau, le pic de la distribution de densité de probabilité augmente lorsque le nombre quantique du moment angulaire augmente. En outre, une comparaison des travaux menés au Laboratoire sur le bottomonium et le charmonium par Ikot, IKhdair et Ibekwe a été présentée. Ces différents résultats montrent que, le modèle est meilleur par rapport aux différents modèles utilisés par Ikot, Ikhdair, et Ibekwe. Enfin, les différents résultats obtenus sont pour la plupart en accord avec les résultats expérimentaux.

Mots clés : Equation de Klein-Gordon, Potentiel inverse à quatre termes, Equations bi-confluentes de Heun, Noyaux atomiques, Spectre d'énergies, Spectre de masse, Fonction d'onde, Potentiel de Kratzer, Potentiel de Coulomb, Potentiel de Sextic.

Introduction Générale

Plusieurs analyses ont été faites ces dernières décennies sur l'équation de Klein-Gordon. Cette équation est appliquée dans plusieurs branches de la physique telles que les structures nucléaires [1] et atomiques [2], les nanostructures [3], les processus chimiques [4,5], le nouvel aspect du transport de l'information [6], les processus biologiques [7]. Elle est utilisée par exemple pour la détection du cancer par injection d'une particule de spin dans le sang [8], en astrophysique [9] pour l'étalonnage de quelques instruments d'astrophysique [10]. L'équation de Klein-Gordon étant relativiste, son intérêt est rapidement grandissant avec le temps en raison du fait que bons nombres de phénomènes physiques dans le monde réel sont relativistes.

La relativité est la théorie de l'espace-temps et de la covariance par excellence. Dès son apparition sous sa forme restreinte en 1905, dans les travaux d'Einstein sur l'électrodynamique des corps en mouvement, ensuite sous sa forme générale en 1915 afin de s'appliquer à la gravitation. Elle a renversé toute notre conception de l'espace et du temps et de leur relation avec la matière. Depuis, elle n'a pas cessé d'enchaîner les succès en expliquant et en prédisant les phénomènes de la physique.

La contribution majeure de la relativité restreinte est la réconciliation de la mécanique et de l'électromagnétisme, en postulant l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide c et le principe de la covariance des lois de la nature. Elle a aussi attiré l'attention vers d'autres phénomènes liés aux changements de repères tels que la nature relative de la simultanéité des événements, la contraction des longueurs et de la dilatation des durées.

La relation de dispersion énergie-impulsion $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ de la relativité restreinte, appelée aussi la relation d'Einstein, exprime l'énergie E de la particule en fonc-

tion de sa masse m et son impulsion \vec{p} . Elle est à la base des équations d'ondes de Klein-Gordon et de Dirac de la mécanique quantique relativiste, et de la théorie quantique des champs qui permet d'étudier les processus de création et d'annihilation des particules élémentaires. L'accord parfait entre les mesures expérimentales et les valeurs calculées par des théories basées sur la relation de dispersion montre que cette dernière est très efficace et qu'elle contient une grande part de vérité.

Cependant, la relativité restreinte n'est testée que pour des énergies très basses comparées aux énergies déployées dans certains processus astronomiques. On parle ici des rayons cosmiques qui traversent l'Univers et arrivent sur Terre avec des énergies très élevées par rapport à ce qu'on produit dans les accélérateurs de particules. En effet, d'après les prédictions des physiciens GZK [134]. Il existe un seuil d'énergie, appelé la limite GZK, qu'aucun proton du rayonnement cosmique ne devrait dépasser une fois détecté sur Terre, et cela à cause de leurs interactions avec les photons du fond diffus cosmologique remplissant tout l'espace interstellaire.

Les phénomènes de la physique quantique exhibent deux aspects fondamentaux, en rupture avec ceux de la physique classique : le caractère discret de certaines quantités physiques (énergie, moment cinétique, . . .) lié à l'existence d'une nouvelle grandeur fondamentale, ayant les dimensions d'une action $\hbar = 1,055 \times 10^{-34} \text{kg.m}^2/\text{s}$

Cette thèse retrace un ensemble de réflexions sur le formalisme qui décrit la mécanique quantique dans son état d'avancement en ce début de XXI^{ème} siècle jusqu'à l'équation de Klein-Gordon. Ces avancées décrivent les concepts physiques qui accompagnent la théorie à travers le prisme de l'équation de Klein-Gordon. Ce travail utilise certains concepts mathématiques utiles dans la synthèse de la théorie quantique, et nécessaires pour la compréhension physique des phénomènes. La suite de notre travail est entièrement consacré à la mise en œuvre d'un procédé approfondi pour la détermination des solutions sous forme transcendente de l'équation de Klein-Gordon.

Elle représente une avancée dans la simulation des phénomènes quantique monde quantique [11]. Ses solutions dépendent fortement du potentiel utilisé. Ceci apparaît dans le cas des potentiels de Tietz [13], Hulthén [14], Eckart [14], le potentiel de type

exponentiel [15], le potentiel de Manning-Rosen [16], le potentiel de ring-shape [17].

Parmi ces potentiels, ceux qui sont singuliers sont les plus simples car apparaissent comme étant très important dans plusieurs aspects de la Science et en Ingénierie [18]. Il est à souligner qu'avant, le monde réel et ses interactions trouvaient leurs explications dans les potentiels singuliers. C'est la raison pour laquelle une dense littérature existe sur les potentiels singuliers [19]. Nous pouvons mentionner par exemple les cas du potentiel de l'oscillateur harmonique [20], du potentiel de Coulomb, Kratzer [21], du potentiel de Davidson [22, 23] et du potentiel de Killingbeck [24, 25]. Les sous-classes des potentiels singuliers sont les potentiels singuliers fractionnaires qui ont un pouvoir rationnel important. Cette sous-classe de potentiel a eu le mérite d'être utilisé pour décrire les interactions quark-antiquark [26] et les modèles exposant une forme de résonance [27]. Pour une utilisation très répandue dans le monde scientifique, il est nécessaire de vérifier si ce potentiel peut être utilisé avec succès et investiguer les solutions de l'équation de Klein-Gordon.

Le travail présenté dans ce document s'appuie sur un ensemble de solutions exactes, mais inédites à ce jour, de l'équation de Klein-Gordon. Cette approche garantit donc, de manière intrinsèque, la cohérence avec l'ensemble des propriétés théoriques construites autour de cette équation. Elle conduit, in fine, à une description relativiste de l'état d'un système.

Ceci étant, l'objectif de ce travail est de déterminer les énergies nucléaires de l'équation de Klein-Gordon par la méthode des équations biconfluentes de Heun en utilisant un potentiel de type fractionnaire développé par Bose et Lemieux [28]. Ce travail sera structuré comme suit : le premier chapitre est consacré à la revue de la littérature sur les modèles nucléaires, le chapitre deux, présente le matériel utilisé ainsi que les méthodes de résolution des équations biconfluentes de Heun. Le troisième chapitre quand-à-lui présente les résultats obtenus et les discute. Ce travail s'achève par une conclusion générale et en énonce les perspectives.

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Dans ce chapitre, nous présentons une revue de la littérature sur la détermination des propriétés du noyau atomique et des molécules à l'aide de l'équation de Klein-Gordon. Avant cela, nous présentons l'origine et les propriétés du noyau atomique ainsi que les interactions qui existent en son sein. Puis, nous présentons certains modèles nucléaires utilisés pour décrire les états d'énergies et quelques propriétés des composants internes du noyau.

I.1 Historique de la connaissance du noyau atomique

L'existence d'un noyau minuscule au centre de l'atome fut découvert en 1911. Mais ce n'est qu'en 1932 après la découverte par Chadwick, que la physique nucléaire connaîtra ses débuts sur ses bases actuelles.

Dès lors, on admet qu'un noyau de numéro atomique Z et de nombre de masse A est composé de Z protons et N neutrons, tel que le nombre de neutrons vaut $A - Z$. Ces deux particules constituant le noyau communément appelées nucléons, ne diffèrent essentiellement que par leurs propriétés électromagnétiques. Elles sont toutes des fermions de spin $1/2$ d'après la physique quantique, masses voisines ($m_p c^2 = 938,28 MeV$ pour le proton et $m_n c^2 = 939,57 MeV$ pour les neutrons), mais le proton porte une charge positive $+e$ alors que le neutron a une charge nulle. On reproduit ainsi les caractéristiques élémentaires de tous les noyaux : une charge Ze , une masse voisine de A et un spin entier ou non selon que le noyau considéré comporte respectivement un nombre pair ou impair de nucléons. Cependant, les nucléons eux même sont chacun composés de trois

quarks. Les énergies mises en jeu dans un noyau sont très faibles à l'échelle des quarks, on peut raisonnablement continuer à les considérer comme les constituants de base du système nucléaire, au même titre qu'on considère les atomes comme constituants des gaz rares à températures ordinaires.

I.2 Propriétés du noyau atomique

L'atome est comparable à un système planétaire dont le centre est le noyau (renfermant presque la quasi totalité de sa masse), chargé positivement et autour duquel gravitent des électrons chargés négativement.

I.2.1 Structure des noyaux atomiques

Le noyau se compose de Z protons et de N neutrons[29]. Le neutron et le proton, de masses à peu près égales (nous les supposons égales dans la théorie) représentent 2 états quantiques d'une même particule fondamentale : le nucléon. Z est le numéro atomique, $A = Z + N$ le nombre de masse de l'atome, On distingue :

- les isobares : noyaux ayant le même nombre de masse A ; des isobares ont généralement des nombres de protons et de neutrons différents.
- les isotopes : noyaux ayant le même numéro atomique Z , mais un nombre différent de neutrons ; si deux noyaux ont le même nombre de protons, il se peut qu'ils aient des nombres de neutrons (donc des nombres de masse) différents.
- les isotones : noyaux ayant le même nombre de neutrons N , mais de Z différents.

I.2.2 Interactions dans le noyau atomique

L'aspect structurel du noyau atomique est régi par l'interaction entre ses nucléons (protons et neutrons) et ceci à cause des états liés quantiques de protons, de charge unité, et de neutrons de charge nulle. Il est connu que, trois types de forces assurent la cohésion dans le noyau atomique et donc la stabilité de ce dernier.

→ L'interaction nucléaire, encore appelée interaction forte, parfois responsable de la radioactivité α (alpha), assure la cohésion des noyaux car elle est attractive et permet de lier les quarks entre eux pour former les hadrons (protons, neutrons). Elle permet en plus de confiner les photons dans le noyau.

→ L'interaction électromagnétique, est répulsive mais moins intense que l'interaction nucléaire. Elle est appliquée à toute particule ayant une charge (à l'exemple du proton). Les protons étant pratiquement au contact, il faut que les forces nucléaires attractives soient très intenses pour vaincre la répulsion de ces charges confinées dans une minuscule sphère dont le rayon est de quelques milliardièmes de milliardième de mètre.

→ L'interaction faible, n'est ni attractive, ni répulsive. Elle agit à l'intérieur même des nucléons et transforme une espèce de nucléon (proton ou neutron) en une autre espèce et vice-versa, provoquant la radioactivité bêta (β).

La présence de ces trois interactions dans le noyau atomique est à l'origine de la stabilité ou de l'instabilité de ce dernier.

I.2.3 Caractéristiques des noyaux atomiques

Bien que renfermant la quasi totalité de la masse de l'atome, le noyau y occupe un très faible volume (10^{-13} environ du volume total de l'atome). Les dimensions du noyau sont donc très petites. En module, la charge du proton est égale celle de l'électron; le neutron a une charge nulle. Ce sont deux fermions de spin $\frac{1}{2}$. Il en résulte que le noyau peut avoir un spin nucléaire et de ce fait, peut avoir un moment magnétique.

Le noyau éclaterait, du fait de la répulsion coulombienne des Z protons dans un si faible volume, s'il n'existait pas, entre nucléons, des forces de liaison suffisamment élevées pour supprimer d'une part cet effet, et maintenir la cohésion au sein du noyau. La nature des forces nucléaires est encore fort mal connue. On sait toutefois que ce sont des forces de courte portée, présentant à la fois une indépendance de charge, et un caractère de saturation. Leur entière connaissance aurait permis de déduire la forme exacte des énergies de liaison entre nucléons.

I.2.4 Parité du noyau atomique

Nous rappellerons que :

- le noyau pair-pair (P-P) un noyau ayant un nombre pair de protons (Z pair) et un nombre pair de neutrons (N pair).

- le noyau pair-impair (P-I) ou tout simplement noyau impair, un noyau possédant une catégorie de nucléons en nombre pair (soit N ou Z), l'autre catégorie étant un nombre impair (soit Z ou N).

- le noyau impair-impair (I-I) un noyau renfermant les 2 catégories de nucléons en nombre impair. Deux noyaux $A(Z, N)$ et $A'(Z', N')$ sont dits noyaux miroirs, si on a $Z = N'$ et $N = Z'$.

"La parité" des noyaux étant ainsi définie, jetons un coup d'œil sur les caractéristiques des éléments naturels stables et dans leur état fondamental : → Une corrélation entre l'abondance des éléments et la " parité " des noyaux apparait. En effet, il existe : 167 noyaux pair-pairs, 208 noyaux pair-impairs et 8 seulement impair-impairs.

→ De l'analyse des spectres nucléaires, on déduit que : - les noyaux P-I possèdent un spin nucléaire égal $(n + \frac{1}{2})\hbar$ ($n = 0, 1, 2, \dots - 1$) ;

- les noyaux P-P ont un spin nucléaire nul ;

- les noyaux I-I ont un spin nucléaire égal $n\hbar$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Dans tous les cas, le spin nucléaire des noyaux dans leur état fondamental est compris entre 0 et $9/2$. La distribution du spin nucléaire en fonction du nombre de masse, présente des irrégularités remarquables.

I.2.5 Nombres magiques

Ce sont les nombres 2, 8, 20, 28, 50 et 126 que peuvent avoir Z et N , indépendamment, dans la composition d'un noyau. Ils rappellent étrangement la structure en couches du cortège électronique de l'atome ; en effet, si les couches K, L, M, N, O, ... peuvent avoir respectivement au maximum 2, 8, 8, 18, 18, ... électrons, le nombre d'occupation des couches complètes est successivement : 2, 10, 18, 36, 54, ...

Avec le succès éclatant de la théorie électronique des atomes, ces nombres magiques qui semblent suggérer une périodicité des propriétés des noyaux, ont été le fil conducteur des théoriciens vers la recherche d'un modèle des couches du noyau. De nombreux faits permettent de les mettre en évidence :

Dans la nature, on constate que les éléments se répartissent de la manière suivante :

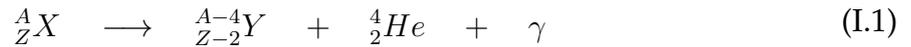
- Parmi les noyaux P-P, ceux qui sont les plus abondants sont les isotopes du calcium (avec 6 isotopes), de l'étain (12 isotopes), soit pour $Z = 20$ et $Z = 50$; et les isotones tels que $N = 20$ (5 isotones), 28 (5 isotones), 50 (6 isotones) et 82 (7 isotones) - Il n'apparaît que 2 isotones stables parmi les noyaux pair-impairs dans les cas suivants : $N = 20$ (37 cl et 39 K), $N = 50$ (87 Rb et 89 Y) et $N = 82$ (139 La et 141Pm). - L'abondance relative d'un isotope de A pair ne dépasse pas en général 60, sauf pour les éléments suivants : Ba 132($N = 82$) avec 72 ; et Ce 140($N = 82$) avec 90.

I.2.6 Radioactivité des noyaux

La radioactivité est la transformation spontanée d'un noyau atomique instable ou radioactif (dit père) en un autre noyau plus stable (dit fils) en émettant un rayonnement de matière ou de lumière qui emporte leur trop plein d'énergie. Ainsi, le noyau d'un isotope radioactif va se transformer spontanément en un noyau d'un isotope plus stable du même élément, ou bien encore en un noyau d'un isotope plus d'un autre élément chimique. Sur terre, le nombre de noyaux stables et de noyaux radioactifs naturellement présents sur la terre est de 300. Ce nombre est porté à environ 2000 à partir des réactions nucléaires effectuées en laboratoire (exemple : le technicium n'a que des isotopes radioactifs). Si l'on reporte sur un graphique le nombre de neutrons N en fonction du nombre de protons Z déterminant tous les noyaux possible, on obtient le diagramme des nucléides stables et radioactifs. On se rend compte que tout noyau en dehors de cette ligne de stabilité va tendre à devenir stable par un mode ou un autre de transformation ou encore mode de radioactivité ou encore mode de désintégration. En fonction de la nature du rayonnement émis, on peut distinguer : la désintégration α (mission de la par-

ticule ${}^4_2\text{He}$), la désintégration β^+ (émission de la particule ${}^0_{+1}e$) et la capture électronique (C.E), la désintégration β^- (émission de la particule ${}^0_{-1}e$), désexcitation γ (émission de la particule γ) et la conversion interne (C.I).

- Désintégration α : Au cours de ce processus, il y a émission d'une particule d'hélium. Cette dernière est émise en parallèle avec un photon γ selon l'équation :

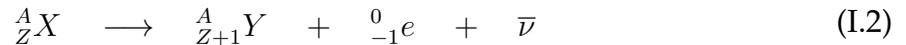


C'est une radioactivité produite par l'interaction forte.

- Désintégration β^-

Le noyau expulse un électron. En effet, un neutron se transforme en proton et l'émission de l'électron s'accompagne de l'émission d'un anti-neutrino (particule de masse nulle).

La réaction qui la gouverne s'écrit :



C'est une radioactivité produite par l'interaction faible.

- Désintégration β^+

Le noyau expulse un positron (particule de charge $+e$ et de même masse que l'électron). Un proton du noyau se transforme en neutron et l'émission du positron s'accompagne de l'émission d'un neutrino (particule de masse nulle). La transformation s'écrit :

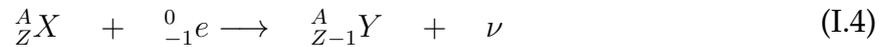


C'est une radioactivité produite par l'interaction faible.

- Capture électronique

La capture électronique apparaît presque toujours en compétition avec le processus désintégration β^+ . C'est un processus au cours duquel un électron du cortège électronique entourant le noyau (en général, un électron proche du noyau). Cette capture, tout comme

le processus de désintégration β^+ , conduit à la transformation d'un proton du noyau en neutron. La capture s'écrit :



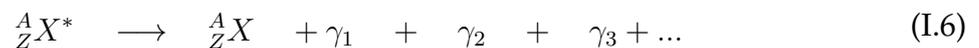
C'est une radioactivité produite par l'interaction faible.

- Désexcitation γ

Tout comme les atomes, les noyaux peuvent se trouver dans un état excité. La désexcitation d'un noyau X^* vers son état fondamental X se fait soit par transition directe si l'énergie du photon γ mis est égale l'énergie d'excitation du noyau,



soit par cascade de rayonnements γ dont la somme des énergies est égale l'énergie d'excitation du noyau



- Conversion interne (C.I)

Lorsqu'un noyau est dans un état excité, il peut retrouver son état fondamental de deux manières : par transmission directe de l'énergie du photon hors du noyau ou par transmission directe de l'énergie de désexcitation à un électron du cortège électronique.

La plupart des réactions radioactives s'accompagnent de l'émission d'un rayonnement γ . Ce n'est pas une particule matérielle mais un rayonnement électromagnétique de même nature que la lumière visible mais de bien plus grande énergie (de plus courte longueur d'onde). Le noyau obtenu à l'issue d'une désintégration est souvent dans un état excité : il possède trop d'énergie et il perd cet excès d'énergie en émettant ce rayonnement.

Ces rayonnements très énergétiques sont très dangereux par leur capacité détruire

les cellules vivantes (ils sont utilisés pour détruire des cellules malades en radiothérapie).

I.2.7 Lois de conservation

Lors des réactions nucléaires (la radioactivité naturelle ou artificielle, la fission nucléaire, la fusion nucléaire, le bombardement, ...), un noyau atomique subit une transformation avec formation d'autres produits.

Dans toute réaction nucléaire, de nombreuses lois de conservation du noyau atomique [30] sont observés :

- la conservation du nombre de masse ou du nombre de nucléons : cette loi se traduit par $\sum A = \text{constante}$. Pour les électrons, les positrons et les neutrons, on considère que $A = 0$;

- la conservation de la charge électrique : la charge se conserve quelle que soit la nature de l'interaction. Cette loi se traduit par la relation $\sum Z = \text{constante}$. Lorsqu'un électron (de charge négative) ou un positron (de charge positive) intervient dans une réaction nucléaire, on doit considérer que $Z = -1$ et $Z = +1$ respectivement ;

- la conservation de la masse-énergie : lors d'une réaction $X(a, b)Y$, la loi relative à la conservation de la masse énergie s'écrit : $(m_a c^2 + T_a) + m_x = (m_b c^2 + T_b) + (m_y c^2 + T_y)$ où m_a, m_b, m_x et m_y sont

les masses au repos ; T_a, T_b et T_y sont les énergies cinétiques.

- la conservation de l'impulsion ou de la quantité de mouvement : les lois de conservation de l'énergie totale et de l'impulsion totale s'appliquent à toutes les interactions et sont le point de départ obligé de tout calcul cinématique. Cette loi est donnée par $\sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_i$ où \vec{p}_f et \vec{p}_i sont les impulsions finales et initiales respectivement.

- la conservation du moment cinétique total : Lors d'une réaction nucléaire le moment angulaire ou moment cinétique total est conservé. La loi de conservation s'écrit $\sum \vec{J}_f = \sum \vec{J}_i$ avec $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ où \vec{L} est le moment cinétique orbital et \vec{S} est le spin.

I.2.8 Unité de masse atomique, masse atomique et défaut de masse

Il est question ici d'exprimer les équivalences relatives aux unités du système international[31] des différents constituants du noyau atomique.

- Unité de masse atomique u : $1u=1,66054 \times 10^{-27} \text{ kg}=931.5 \text{ MeV}/c^2$
- Masse de l'électron : $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}=5.4858 \times 10^{-4} u= 0,511 \text{ MeV}/c^2$
- Masse du proton : $m_p = 1,67264 \times 10^{-27} \text{ kg}=1,007276 u= 938,28 \text{ MeV}/c^2$
- Masse du neutron : $m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg}=1,008665 u= 939,57 \text{ MeV}/c^2$

où c est la célérité de la lumière dans le vide qui est de l'ordre de $3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Un atome neutre est constitué d'un noyau central autour duquel gravitent Z électrons [32]. Ainsi la masse $M(A, Z)$ d'un atome s'écrit

$$M(A, Z) = Zm_p + Nm_n + Zm_e - \frac{E_c(Z)}{c^2} \quad (\text{I.7})$$

où M est la masse du noyau atomique, Zm_e la masse des électrons qui gravitent autour du noyau et $E_c(Z)$ est l'énergie de cohésion du noyau atomique.

Nous constatons que la masse du noyau atomique est différente de la masse de ces constituants pris séparément à cause de l'énergie de cohésion du noyau atomique.

- Défaut de masse. Dans certaines conditions particulières, la masse et l'énergie sont les grandeurs équivalentes : l'un pouvant se transformer en l'autre. D'après Einstein, la relation énergie-masse s'écrit

$$E = mc^2. \quad (\text{I.8})$$

De cette relation, il est pratique d'exprimer l'unité de la masse en MeV/c^2 même si le MeV est une unité d'énergie. La masse d'un noyau A_ZX est inférieure à la somme des masses de ses nucléons pris individuellement.

$$M(A, Z) < Zm_p + (A - Z)m_n = Zm_p + Nm_n. \quad (\text{I.9})$$

Cette différence de masse est appelée défaut de masse du noyau atomique et est noté $\Delta(A, Z)$ tel que

$$\Delta(A, Z) = Zm_p + Nm_n - M(A, Z). \quad (\text{I.10})$$

I.2.9 Energie de liaison et énergie de séparation

C'est l'énergie correspondant au défaut de masse du noyau atomique c'est-à-dire l'énergie qu'il faut fournir à un noyau au repos pour le dissocier en nucléons isolés et immobiles.

$$\mathcal{E}_L = \Delta(A, Z)c^2 = (Zm_p + Nm_n - M(A, Z))c^2 \quad (\text{I.11})$$

Cette équation traduit la variation de masse dans un noyau. Ce qui permet de prédire sa stabilité, sa cohésion en fonction du nombre de masse, et du nombre de charge. C'est une formule qui tient compte de la vitesse de la lumière dans le vide. L'énergie de liaison permet d'évaluer les pertes et les gains en énergie afin d'en en perdre aucune énergie. Il traduit également les interactions entre le proton et le neutron. Il s'agit de l'interaction forte ou attractive, de l'interaction électromagnétique ou répulsive, et de de l'interaction faible.

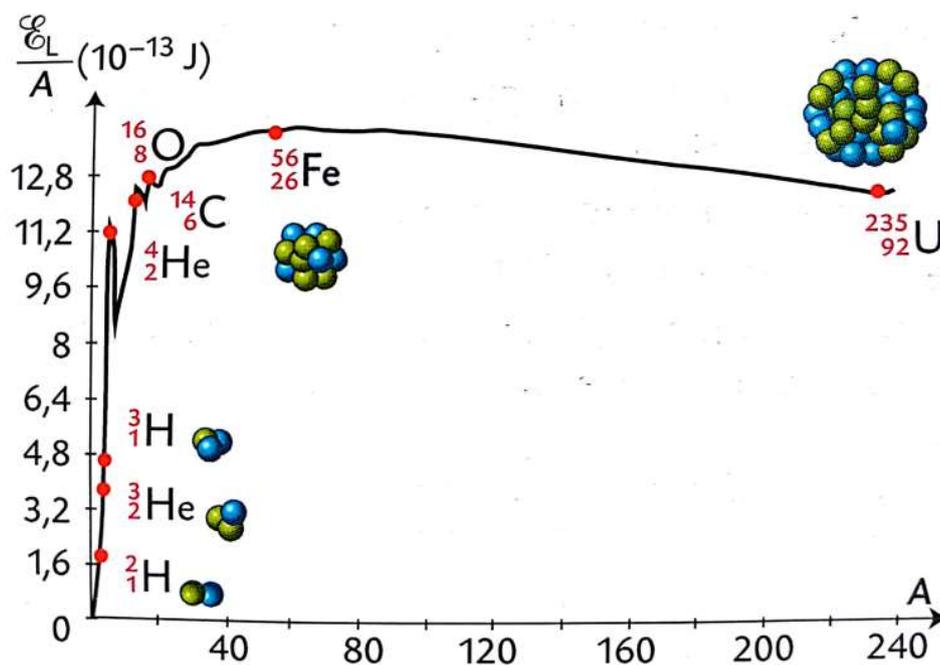


FIGURE 1 – Énergie de liaison par nucléon [33]

I.3 Covariant, contravariant et métrique

En algèbre linéaire, les adjectifs covariant et contravariant sont utilisés pour décrire la manière avec laquelle des grandeurs varient lors d'un changement de base. Comme grandeurs, on peut citer la position, la vitesse, l'accélération. Ces grandeurs sont dites covariantes lorsqu'elles varient comme les vecteurs de la base et contravariantes lorsqu'elles varient de façon contraire. La notion est étroitement liée au concept de dualité : les coordonnées covariantes dans une base correspondent en effet aux coordonnées contravariantes dans la base duale, et réciproquement. En géométrie différentielle, la considération des espaces tangents permet d'étendre les deux concepts aux familles de fonctions définies sur les variétés différentielles. La manipulation de grandeurs covariante et contravariante est facilitée par la convention de sommation d'Einstein, qui sera largement utilisé dans cette thèse.

La métrique est l'étude de la versification fondée sur l'emploi des mètres, autrement dit des unités qui se répètent régulièrement dans le temps à travers des formes proso-

diques ou musicales. Réduite à l'étude des formes régulières d'origine prosodiques.

I.3.1 Forme des noyaux atomiques

La forme du noyau est l'une des propriétés nucléaires fondamentales, elle varie rapidement en fonction du nombre de nucléons (en ajoutant ou retirant un nucléon ou en augmentant le spin) du noyau. Un noyau peut aussi présenter différentes déformations des énergies d'excitations très similaires (coexistence de forme). Une attention particulière est donnée à la recherche de nouvelles formes exotiques dans des noyaux situés loin de la vallée de stabilité ainsi qu'à la compréhension de la structure nucléaire des éléments les plus lourds. Il est aussi important de noter que, la structure en couches joue également un rôle important dans l'évolution de la déformation le long des chaînes isotopiques, pour les noyaux à couches ouvertes. Dans le cas des couches complètement remplies, on a affaire à un noyau "magique" qui est de forme sphérique. La plupart des noyaux ont des couches partiellement remplies et préfèrent être déformés. Les formes des noyaux les plus couramment rencontrées sont allongées (prolate) et aplaties (oblate) et peuvent changer d'un noyau à l'autre. En outre, un noyau peut changer de forme en fonction de son énergie d'excitation. Certains noyaux présentent même un rare phénomène de coexistence de formes : le noyau change radicalement de forme pour une faible énergie d'excitation. Selon les lois de la mécanique quantique, le noyau atomique peut se trouver à la fois, dans un état allongé et aplati.

I.4 Modèles nucléaires

La modélisation du noyau atomique est une préoccupation qui est d'actualité en physique nucléaire. Elle présente deux difficultés majeures dont la première causée par l'interaction nucléaire est mal connue et donc difficile à appliquer et la seconde provient de l'impossibilité à l'heure actuelle de résoudre le problème N corps, surtout pour un N grand ($N > 2$). Cependant, tous les modèles proposés pour modéliser le noyau atomique ont leurs limites. Le modèle de la goutte-liquide et le modèle en couches

nucléaires sont les premiers qui présente les modèles de structure nucléaire, bien qu'il illustrent deux approches différentes. Les déformations dans les noyaux, en décrivant d'un point de vue général les déformations dans les noyaux et en présentant un modèle de déformation très couramment utilisé, le modèle de Nilsson.

Les noyaux composés de nucléons, pouvant aller jusqu'à environ 250 subit jusqu'à trois interactions (l'interaction forte, l'interaction faible et l'interaction électromagnétique) provoquées par les autres nucléons. Une modélisation dont le but est de comparer les différentes données expérimentales nous permet de comprendre la physique du noyau.

I.4.1 Modèle de la goutte liquide

En 1936, N. Bohr propose l'un des premiers modèles nucléaire et simple[38], basé sur la faible portée des forces nucléaires, conjointement avec l'addition des volumes et des énergies de liaison où il considère le noyau comme la goutte-liquide. Ceci lui permet d'établir une formule semi-empirique qui est utilisée pour prédire la masse des noyaux stables dans leur état fondamental.

Il établie une analogie entre un noyau et une goutte d'eau, malgré les interactions fortes entre proches voisins des nucléons composant le noyau, tout comme se comportent les molécules dans une goutte d'eau. Dans ce modèle les molécules dans la goutte-liquide jouent même le rôle que les nucléons dans le noyaux. Par conséquent on peut essayer de décrire les propriétés du noyau atomique par des quantités significatives, à l'exemple du rayon, la densité, la tension de surface et l'énergie de volume.

Ce modèle, proposé par von Weizsäcker [39] et repris par Bethe [39] pour la paramétrisation des énergies de liaison des noyaux dans leurs états fondamentaux. Elle est qualifiée de semi-empirique à cause de la provenance des termes théoriques et des valeurs des coefficients des résultats expérimentaux. La formule de masse de H. Bethe et C.F. Weizsäcker est [40] :

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + \delta(A) \quad (\text{I.12})$$

- Terme volumique

Ce terme traduit l'attraction entre les nucléons due à l'interaction forte ou force d'interaction nucléaire.

- Terme surfacique

Le volume du noyau étant limité, les nucléons situés la surface ont moins de voisins que ceux se trouvant à l'intérieur du noyau. - Terme coulombien

Les nucléons ne subissent pas qu'une force attractive. Les protons se repoussent mutuellement sous l'action de l'interaction électromagnétique. - Terme d'assymtrie

Les noyaux étant plus stables lorsque le nombre de neutrons et de protons est identique quand l'effet de la répulsion électrostatique est négligé. - Terme d'appariement

Il n'existe que 4 noyaux stables ayant N et Z impairs contre 167 noyaux stables avec N et Z pairs.

I.4.2 Modèle en couches sphériques

Parmi les différents modèles développés, le modèle en couches est le modèle le plus fructueux, qui permet d'expliquer l'origine des états excités, la distribution de la densité des nucléons à l'intérieur du noyau et la forme du noyau à partir de la mesure directe de ses moments multipolaires. Ce modèle fournis aussi un travail fondamental dans la description de structure des noyaux doublement magiques et leurs voisins [42]. Ce modèle permet aussi de montrer la stabilité des noyaux.

I.5 Équation de Klein-Gordon appliquée à certains noyaux et à quelques potentiels

L'équation de Klein-Gordon (EKG) est une équation d'onde relativiste, liée à l'équation de Schrödinger, et de second ordre dans l'espace et le temps. Cette équation est une version quantifiée de l'effet relativiste par rapport à l'énergie-impulsion. Ses résolutions comprennent un champ scalaire quantique ou pseudo scalaire, un champ dont les quanta sont des particules sans spin. Sa pertinence théorique est similaire à celle de l'équation de Dirac. Les interactions électromagnétiques peuvent être incorporées, formant le thème de l'électrodynamique scalaire, mais parce que les particules communes comme les sans spin : π , mésons sont instables et subissent également l'interaction forte (avec terme d'interaction inconnue dans le Hamiltonien).

I.5.1 Origine de l'équation de Klein-Gordon

L'équation de Klein-Gordon parfois également appelée équation de Klein-Gordon Fock, est une version relativiste de l'équation de Schrödinger décrivant des particules massives de spin nul, sans ou avec charge électrique, établie indépendamment en 1926 par les physiciens Oskar Klein et Walter Gordon[35].

I.5.2 Equation de Klein-Gordon avec le potentiel de type exponentiel

Ikot et al.[114] dans leurs travaux, ont utilisés le Potentiel de type exponentiel, ils résolvent l'équation de Klein-Gordon en utilisant le potentiel de type exponentiel par la méthode de la super symétrie en mécanique quantique. Dans leur modèle, ils obtiennent les valeurs propres de l'énergies et les fonctions d'ondes propres après utilisation de la méthode de séparation des variables r , θ et φ de l'équation de Klein-Gordon et en résolvant la partie en r de celle-ci.

I.5.3 Equation de Klein-Gordon avec le bottomonium et le charmonium

Ibekwe et al.[117] déterminent la fonction d'onde, le spectre d'énergie et le spectre de masse du bottomonium et du charmonium. Ils déterminent également le spectre d'énergie pour le potentiel de Kratzer et compare ses résultats avec ceux obtenus Ikh-dair[116] et Ikot [114].

I.5.4 Equation de Klein-Gordon avec le potentiel de Coulomb

Vardaci et al.[128] étudie l'effet de la réaction de ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ de la barrière Coulombienne en utilisant le potentiel phénoménologique de Coulomb dans l'équation de Klein-Gordon. Ils montrent que, en bombardant les noyaux de ${}^{16}\text{O}$, et de ${}^6\text{Li}$ au noyau de ${}^7\text{Li}$ ils observent une anomalie et une ambiguïté sur la réaction.

I.5.5 Equation de Klein-Gordon pour le noyau de plomb

Inci et al. [100] utilisent le Hamiltonien de Bohr avec un puits fini pour les isotopes du noyau de plomb. Ils comparent leur résultats avec un puits infini, l'oscillateur harmonique avec les résultats de la rotation d'un noyau rigide. Ils comparent leur résultat à ceux obtenus expérimentalement par Iachello F en 2000 pour les différents états 1s et 2s ainsi que pour les différents nombres quantiques l pairs. Ils remarquent que leurs résultats se rapprochent de l'expérience.

I.5.6 Equation de Klein-Gordon pour les hypernuclei de type Λ

Moradi et al. [93] ont travaillé sur la symétrie spinorielle des hypernuclei plus précisément dans le cas de Λ - hypernuclei. Ils résolvent l'équation de Dirac pour le potentiel scalaire et vecteur de Kilingbeck ils obtiennent les valeurs propres de l'énergie et la fonction d'onde spinorielle pour les ondes s en utilisant la méthode analytique. Leurs résultats sont en accord avec les valeurs expérimentales obtenues en 2018 par K P

Santhosha et C Nithya .

I.5.7 Equation de Klein-Gordon avec le potentiel exponentiel à cinq paramètres

Ikot [114] utilise la méthode de Nikiforov-Uvarov pour obtenir approximativement les solutions de l'équation de Klein-Gordon avec le potentiel exponentiel déformé ayant cinq paramètres. En utilisant la limite non-relativiste, ils trouvent les énergies et les propriétés thermodynamiques

I.5.8 Equation de Klein-Gordon avec le potentiel inverse racine carré

Wen et al.[132] ont déterminé la solution exacte de la symétrie sphérique en troisième dimension du potentiel inverse racine carré dans l'équation de Klein-Gordon et ils ont trouvé la diffusion et la solution des états liés.

I.5.9 Equation de Klein-Gordon avec le potentiel de Hulthen plus le potentiel déformé de type exponentiel

Obong et al.[133] ont déterminé les états liés et la diffusion par les méthodes dépendant de la masse et la factorisation pour les états arbitraires. Les valeurs propres de l'énergie relativiste sont trouvées et ont aussi employés la supersymétrie en mécanique pour différents nombres quantiques, ils déterminent également la fonction d'onde correspondante en utilisant un noyau de lithium, ils comparent leur résultats à ceux obtenus par Wang et al. [134] et ils obtiennent des résultats semblables à ceux mesurés par Xu [135].

I.5.10 Solutions de l'équation de Klein-Gordon en dimension-D pour les potentiels scalaire et vecteur égaux en utilisant le pseudo potentiel harmonique de Ring-Shape

Sameer et al.[136] présentent les solutions exactes de l'équation de Klein-Gordon en dimensions D en présence d'un potentiel non central pseudo harmonique plus celui de Ring-Shape en utilisant la méthode de Nikiforov-Uvarov. Ils obtiennent les niveaux d'énergie et la fonction d'onde correspondante pour une particule de spin nul. Ils montrent aussi que le pseudo potentiel harmonique de Ring-Shape peut se réduire au potentiel pseudo harmonique à trois dimensions lorsque la partie non centrale du potentiel devient zéro.

I.5.11 Equation de Klein-Gordon avec le potentiel symétrique généralisé

Zhao et al [137] résolvent l'équation de Klein-Gordon pour les ondes s pour le potentiel symétrique généralisé en utilisant la méthode de la super symétrie en mécanique quantique ainsi , en utilisant l'approche de l'invariance, et la méthode alternative, ils obtiennent l'équation exacte de l'énergie et la fonction d'onde normalisée et ils appliquent la limite non relativiste pour trouver d'autres propriétés.

I.5.12 Equation de Schrödinger avec le potentiel de Coulomb

Ali et al.[138] résolvent analytiquement l'équation de Schrödinger avec le potentiel de Coulomb en prenant juste la partie angulaire. La méthode des paramètres généralisés de Nikiforov-Uvarov employée d'obtenir les valeurs propres de l'énergie et la fonction d'onde correspondante. Ils montrent aussi que le choix de la partie angulaire sur la partie radiale a permis d'obtenir certains cas spéciaux des autres potentiels se trouvant dans la littérature.

I.5.13 Equation de Klein-Gordon pour l'oscillateur de Sextic avec l'équation bi-confluente de Heun

Lévai et al.[139] montrent que l'oscillateur de Sextic est obtenu par l'équation bi-confluente de Heun après une suite de transformation de variable. Parmi les solutions de cette équation, on a les fonctions de Hermite. Ils obtiennent la relation de récurrence à trois termes et démontrent que pour certains cas spécifiques du potentiel, on obtient d'autres potentiels comme le potentiel de Coulomb, de Kratzer et parabolique. Ils déterminent les valeurs propres de l'énergie avec les polynômes de Hermite. Pour la valeur de $\delta = 0$ ils obtiennent le potentiel de quartic.

I.5.14 Equation de Klein-Gordon avec le potentiel exponentiel multiparamétrique

Peña et al.[140] trouvent les états liés pour la classe des potentiels multiparamétriques de type exponentiels. Après l'approximation de Greene et Aldrich ils trouvent les potentiels de Eckart, Manning-Rosen, Hulthén et de Deng Fan.

I.5.15 Equation de Klein-Gordon avec le potentiel Sextic indépendant de γ

Arias et al.[141] présentent l'oscillateur de Sextic ayant deux paramètres. Ils obtiennent le spectre d'énergie et la fonction d'onde. Ils déterminent les transitions quadrupolaires. Ils comparent les propriétés spectral du potentiel racine carré infini avec les valeurs expérimentales des transitions E2 pour le noyau de Baryom 134.

Les travaux précédents réalisés par les auteurs ont présenté les énergies nucléaires, les fonctions d'ondes correspondantes, les transitions énergétiques, les propriétés des noyaux tels que le baryum, le lithium, les hypernuclei lamda ainsi que les valeurs expérimentales des énergies mesurées dans les laboratoires comme le Laboratoire National de Legnaro en Italie. Une comparaison des énergies calculées par les physiciens cités ci-

haut a été faite avec les résultats expérimentaux on remarque que leur valeur se rapprochent de l'expérience. Cependant, nous allons proposer un modèle pour améliorer ceux calculés par les travaux précédents.

I.6 Équation de Klein-Gordon et applications

I.6.1 Équation de Klein-Gordon sur la mécanique quantique et la relativité

Les solutions de l'équation de Klein-Gordon étant chacune de premier ordre dans le temps, elles ont deux composantes, ce qui reflète le degré de charge de liberté dans la relativité. Elle admet une quantité conservée, mais n'est pas définie positive. Cette fonction d'onde ne peut donc pas être interprétée comme une amplitude de probabilité. La quantité conservée est plutôt interprétée comme une charge électrique et la norme du carré de la fonction d'onde est interprétée comme une densité de charge. L'équation décrit toutes les particules sans spin avec aussi bien positif, négatif comme nulle. L'équation ne forme pas la base d'un quantum cohérent relativiste d'une particule théorique. Il n'y a pas cette théorie connue pour les particules de chaque tour. Pour la réconciliation complète de la mécanique quantique avec la relativité restreinte, la théorie quantique des champs est nécessaire, dans laquelle l'équation de Klein-Gordon réémerge comme l'équation qui obéit à tous les champs quantiques libres. En théorie quantique des champs, les solutions des versions libres (sans interaction) des équations d'origine jouent encore un rôle. Ils sont nécessaires pour construire l'espace de Hilbert (espace Fock) et d'exprimer des champs quantiques en utilisant des ensembles complets (ensembles couvrant l'espace de Hilbert de fonction d'onde). On peut donc dire que les équations de Klein-Gordon interviennent en mécanique quantique et en relativité restreinte [35].

I.6.2 Effet de l'équation de Klein-Gordon sur la biologie

Dans les processus biologiques, l'équation de Klein-Gordon intervient lorsqu'on injecte une particule de spin dans le sang d'un patient pour détecter ses cellules malades si elles sont atteintes du cancer ou pas [7].

I.6.3 Importance de l'équation de Klein-Gordon sur l'informatique

Il arrive souvent de rencontrer des difficultés dans la résolution de certains problèmes en informatique entre autres la simulation quantique. Les (EKG) permettent de simuler et de prédire des résultats avec précision surtout lorsqu'il s'agit de l'infiniment petit [11].

I.6.4 Effet de l'équation de Klein-Gordon sur la chimie physique

Pour décrire les interactions de l'univers les équations de Klein-Gordon résolvent ce problème en utilisant la nanostructure[3], la structure atomique[2], la structure nucléaire [1].

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le noyau atomique depuis l'atome jusqu'à ses composants. Les différentes interactions dans le noyau atomique pouvant entraîner sa déformation. Les modèles nucléaires ont été présentés et les travaux précédents sur l'équation de Klein-Gordon ainsi que leur limite ont été présentés. Le chapitre suivant est consacré à la résolution de l'équation de Klein-Gordon par la méthode des équations biconfluentes de Heun en utilisant un potentiel de type fractionnaire.

MATÉRIELS ET MÉTHODES

L'équation de Klein-Gordon est la forme relativiste de l'équation de Schrödinger. Elle est utilisée pour caractériser les particules de spin nul. Cette équation sera appliquée aux particules telles que le bottomonium et charmonium et à quelques molécules. Dans ce chapitre, nous présenterons d'abord les particules et les molécules utilisées ensuite, nous ferons ressortir la méthode utilisée pour la résolution de l'équation de Klein-Gordon en l'occurrence la méthode des équations biconfluentes de Heun.

II.1 Propriétés des molécules

II.1.1 *HCl*

La molécule de HCl est représentée sur la figure 2

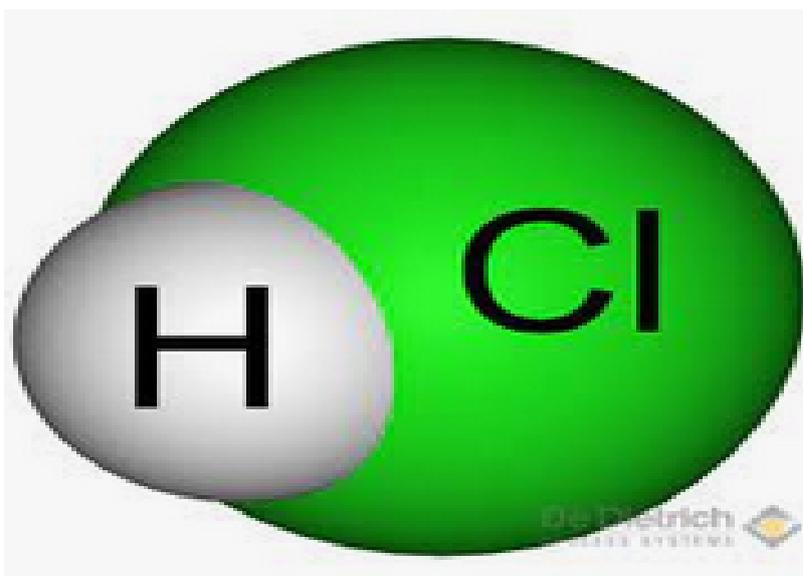


FIGURE 2 – Molécule de HCl [110]

Sa formule brute est : HCl. Sa masse molaire moléculaire est de 36,46 g/mol. Son point d'ébullition est 84,9°C. Son point de fusion est 114°C. Sa température critique est 51,54°C. C'est un gaz incolore d'odeur forte et étouffante, très soluble dans l'eau, fumant dans l'air humide et corrosif. On appelle acide chlorhydrique les solutions aqueuses de HCl.

Les solutions aqueuses de chlorure d'hydrogène sont très corrosives et sont stockées dans des récipients en céramique, en verre ou en matières plastiques résistant aux acides. La solution commerciale se vend sous le nom d'acide chlorhydrique concentré. C'est un acide très fort dont les solutions aqueuses sont fortement dissociées ; la dissociation est totale en solution diluée. Le chlorure d'hydrogène gazeux réagit à température relativement élevée avec les métaux et leurs oxydes, hydroxydes ou carbonates pour donner les chlorures correspondants. Très inerte quand il est parfaitement débarrassé d'humidité, il réagit fortement en présence d'eau. Ses réactions sont celles des acides forts habituels et son action sur les métaux se produit avec dégagement du dihydrogène, ses réactions avec les oxydes, neutralisent les bases avec formation d'eau et de sel suivant la réaction : $HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O$. Il déplace enfin les acides plus faibles de leurs composés. Il entre dans toutes les réactions caractéristiques de l'ion Cl^- des composés minéraux et c'est un puissant agent chlorurant des composés organiques. Avec certains métaux, il forme des ions complexes comme : $PtCl_6^-$, $CuCl_4^-$, ..., ce qui explique la facilité avec laquelle il dissout certains métaux et oxydes métallurgiques, qui résistent ou sont faiblement attaqués par l'acide sulfurique.

II.1.2 *LiH*

La molécule de LiH est représentée à la figure 3

L'hydrure de lithium est un composé chimique de formule LiH. Il se présente comme une poudre inflammable allant de la couleur blanche à grise. Elle s'assombrit à la lumière. Elle a une masse volumique de $0,76g/cm^3$, et est également le solide ionique le plus léger. Sa masse molaire est $7,949 \pm 0,002$ g/mol, son moment dipolaire est : $5,884 \pm$

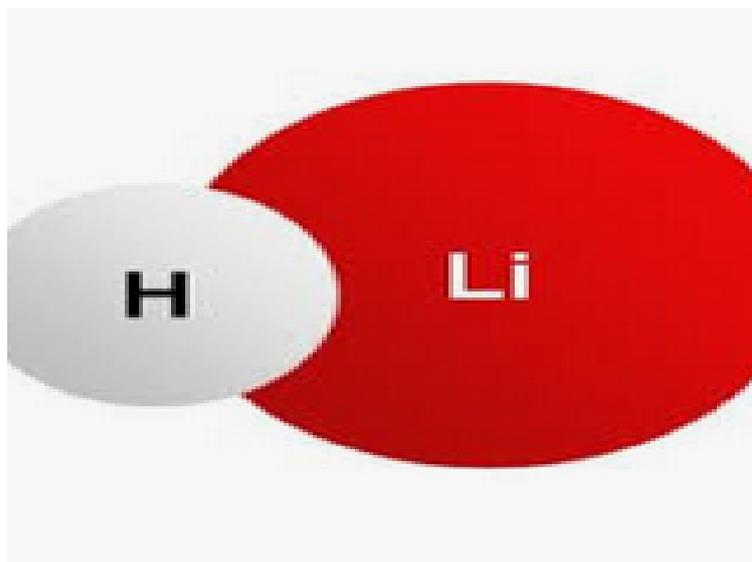


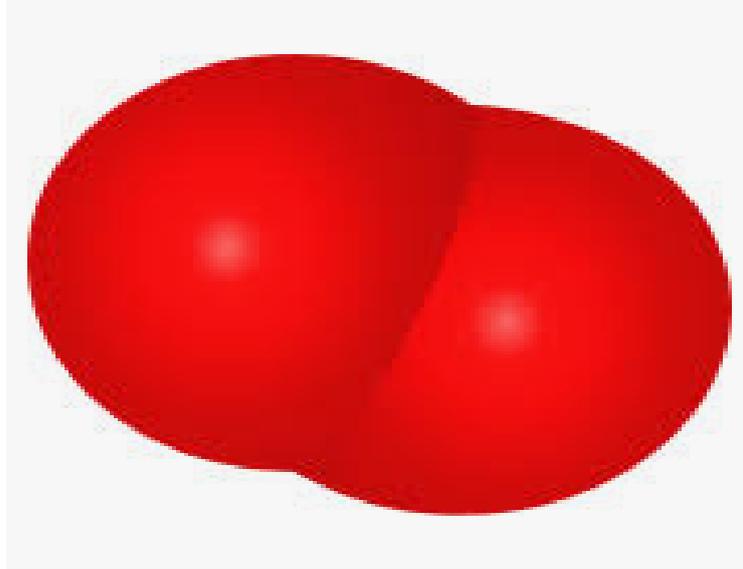
FIGURE 3 – Molécule de LiH [110]

0,001D, alors que sa température de fusion est 680° , sa température d'ébullition est $850^{\circ}C$. Pour ce qui est de sa solubilité dans l'eau, elle réagit avec les alcools. Sa masse volumique est $0,76 - 0,77gcm^{-3}$ et a pour température d'auto-inflammation $200^{\circ}C$. A sa première ionisation, son énergie est de $7,7eV$. Cette molécule cristallise dans une structure de type NaCl.

II.1.3 O_2

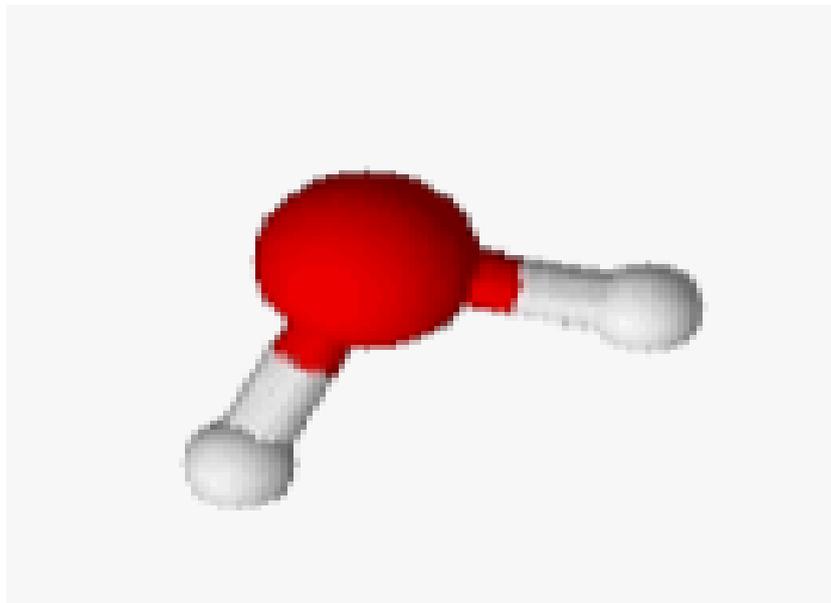
La molécule de O_2 est représentée à la figure 4.

C'est une molécule gazeuse dans les conditions normales de température et de pression, incolore, inodore et insipide, elle participe à des réactions d'oxydoréduction, essentiellement la combustion, la corrosion et la respiration. Le dioxygène est l'une des formes allotropiques de l'oxygène. Les températures critiques du diazote ($t_c = 146,9^{\circ}C$) et du dioxygène $t_c = 118,4^{\circ}C$ ne permettent pas la liquéfaction de l'air par simple compression. Sa masse volumique à l'état gazeux est $1,354.10^{-3}g.cm^{-3}$, liquide $1,149g.cm^{-3}$ solide $1,426g.cm^{-3}$. Sa température de fusion est $-218,4^{\circ}C$. Sa solubilité dans l'eau à $0^{\circ}C$ est $4,89cm^3/100g$.

FIGURE 4 – Molécule de O_2 [110]

II.1.4 H_2O

La molécule de H_2O est représentée à la figure 5.

FIGURE 5 – Molécule de H_2O [110]

L'eau possède plusieurs propriétés inhabituelles, parmi lesquelles son anomalie de densité, ses points de fusion et d'ébullition élevés et sa grande capacité thermique. C'est

une molécule composée de deux atomes d'hydrogène et d'un atome d'oxygène. Sa formule chimique est H_2O . Les atomes sont liés entre eux par une liaison covalente. On parle de liaison covalente lorsque deux atomes non-métaux sont liés chimiquement.

L'eau met en jeu des liaisons hydrogènes dans lesquelles les atomes d'hydrogènes possèdent une charge positive. Le caractère dipolaire de la molécule d'eau s'explique par cette charge partielle positive de l'atome d'hydrogène et par la charge partielle négative de l'atome d'oxygène. Les deux liaisons OH forment un angle de $104^{\circ}40'$.

Le caractère dipolaire de la molécule d'eau permet de former de grandes associations de molécules. Ces formations, de formule $(H_2O)_n$, permettent une augmentation apparente de la masse moléculaire de 18 à $n \times 18$.

Les liaisons hydrogènes contribuent à la création de ces formations plus importantes. En raison de sa charge partielle positive, chaque atome d'hydrogène d'une molécule d'eau peut, en plus de sa liaison covalente avec l'atome d'oxygène, se lier à un autre atome doté d'une paire d'électrons non engagés dans une liaison covalente. Ce type de liaison repose sur l'attraction électrostatique, et est qualifiée de liaison hydrogène. Cette liaison est relativement faible par rapport aux liaisons covalentes. Alors qu'une liaison covalente OH possède une énergie de liaison d'environ 463 kJ/mol , l'énergie de liaison molaire d'une liaison non covalente entre hydrogène et oxygène ne représente qu'environ 4,3% de l'énergie de la liaison covalente correspondante.

A l'état solide, chaque molécule d'eau est entourée de manière tétraédrique par quatre autres molécules d'eau. Chaque atome d'oxygène est lié à deux atomes d'hydrogènes par des liaisons covalentes, et à deux autres atomes d'hydrogènes par des liaisons hydrogènes. Du fait du réseau des liaisons hydrogène, il s'agit d'une structure ouverte.

Lorsque la glace fond, sa structure très ordonnée disparaît ; les molécules d'eau peuvent alors être plus proches les unes des autres, ce qui conduit à une augmentation de la masse volumique, avec un maximum 4°C . Mais au-delà, l'agitation thermique croissante conduit à occuper un volume plus grand, et la masse volumique diminue.

La masse volumique d'un corps correspond au quotient de sa masse m par son vo-

lume V. Pour l'eau, la masse volumique est la plus élevée à 4°C , où elle vaut $1,000\text{g}/\text{cm}^3$. Elle diminue jusqu'à $0,998\text{g}/\text{cm}^3$ lors d'un refroidissement jusqu'à 0°C , et jusqu'à moins de $0,92\text{g}/\text{cm}^3$, par à-coups, lorsqu'elle gèle.

On a choisi le corps humain pour modéliser la structure d'une molécule d'eau. Les mains représentent les deux atomes d'hydrogène, les pieds les paires d'électrons non covalentes de l'oxygène. Si l'on écarte bras et jambes de façon à établir un angle de 90° à la hanche, on obtient une configuration tétraédrique. Pour représenter les liaisons entre molécules, chaque main peut attraper un pied d'une autre molécule.

II.2 Constituants du noyau atomique

II.2.1 Bottomonium

La figure 6 présente un bottomonium

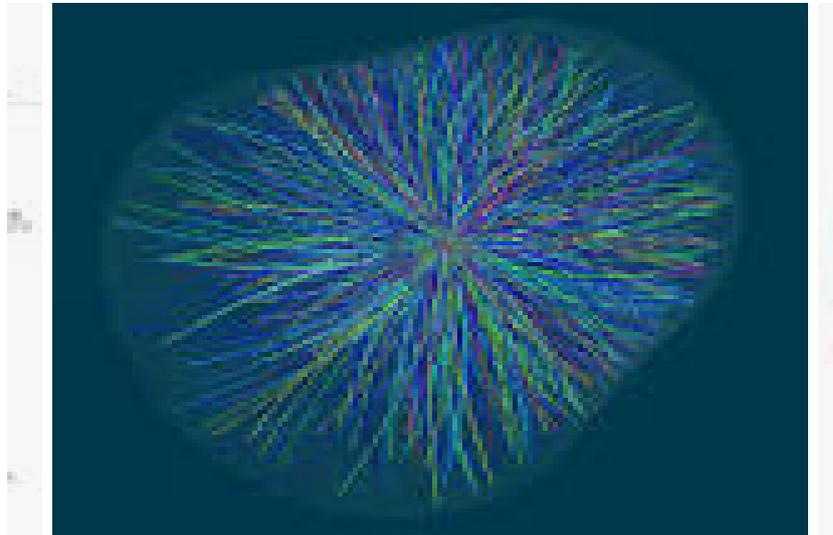


FIGURE 6 – Bottomonium [111]

II.2.2 Propriétés

Le quark bottom ou bottomonium (souvent abrégé en quark b) est une particule élémentaire. C'est une composante du proton et du neutron. Sa masse va de 4,1 à 4,4 GeV/c^2 . Sa charge électrique est de $-e/2$ et son spin est $1/2$. Il est classé parmi les fermions.

II.2.3 Charmonium

La figure 7 présente un charmonium

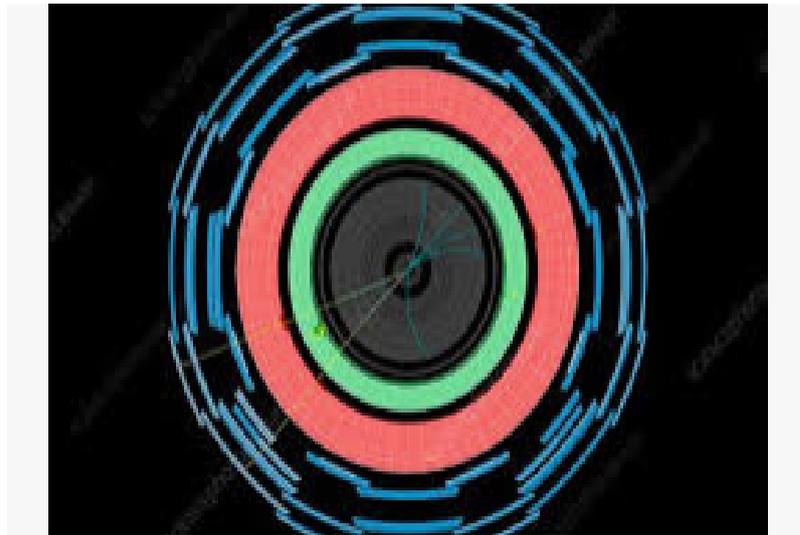


FIGURE 7 – Charmonium [111]

II.2.4 Propriétés

Le quark charmé ou charmonium souvent abrégé en quark c est l'une des six saveurs connues de quarks et fait partie des composantes du proton et du neutron. Sa masse va de 1,15 à 1,35 GeV/c^2 . Sa charge électrique est $2e/3$ et son spin est $1/2$. Il est classé parmi les fermions.

II.3 Mesure expérimentale des énergies de quelques noyaux : cas des noyaux de lithium et de plomb

L'expérience de mesures expérimentales des énergies des noyaux a été réalisée à l'aide d'un faisceau pulsé de ${}^7\text{Li}^{3+}$ dans l'accélérateur XTU-Tandem au Laboratoire National de Legnaro (LNL, Italie). La réaction ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ a été exécutée aux énergies de faisceau de 25, 31, 33, 35 et 39 MeV couvrant la plage allant du bas au dessus de la barrière coulombienne $V_c = 30,1\text{MeV}$ correspondant à $E_{c.m.}/V_c = 0,80; 1; 1,06; 1,12; 1,25$. $E_{c.m.}$ est l'énergie disponible au centre du châssis de masse. Le faisceau pulsé avait une période de 800 ns et une durée d'environ 2 ns. Une cible de ${}^{208}\text{Pb}$ d'épaisseur $200\mu\text{g}/\text{cm}^2$ a été utilisée. Les ions Li^{3+} ont été détectés avec l'appareil $8\pi\text{LP}$ et décrit en détail dans [127,128] représenté schématiquement sur la figure 8 et constitué de deux secteurs : un mur, couvrant les angles de $2,5^\circ$ à 24° et le Ball couvrant les angles de 34° jusqu'à 163° . La boule est une sphère de 126 télescopes qui sont disposés en 7 anneaux étiquetés de A à G et placés coaxialement autour de l'axe du faisceau. Chaque télescope est constitué d'un détecteur de silicium, soutenu par un scintillateur CsI. Chaque anneau contient 18 télescopes identiques et couvre environ 17° dans l'angle polaire et à partir de 0° à 360° dans l'angle azimutal. Pour cette expérience, à l'intérieur du secteur Ball, il est installé un cylindre placé coaxialement autour d'une poutre pour réduire l'ouverture de la zone active de la balle télescopes ; le taux de comptage et le temps mort. De cette façon, les mesures ont été prises aux angles de laboratoire . Chaque télescope a une surface de 25cm^2 , une couverture angulaire de 4° , et sous-tend un angle solide d'environ 7 msr. Chaque télescope est indépendamment fixé à une structure de support en aluminium. Tous les détecteurs des murs sont en contact étroit les uns avec les autres pour former une portion de surface sphérique d'un rayon de 60 cm. Egalement pour le secteur mur, pour cette expérience, un écran en aluminium est utilisé pour réduire la zone active des télescopes, et l'angle solide. Dans ce cas, l'ouverture angulaire de chaque télescope est d'environ un degré. Chaque télescope du Wall et Ball intègre

également le préamplificateur pour les secteurs ΔE et E. Un système de refroidissement, basé sur un liquide réfrigérant en circulation, conserve l'ensemble du système à une température stable. Le système de refroidissement est crucial pour garantir la stabilité des performances de l'ensemble du système de détection. L'identification des particules est réalisée en utilisant la technique ΔE et E pour les particules qui ont suffisamment d'énergie pour passer à travers le stade E. Pour les télescopes Ball, la technique de discrimination de forme impulsion est utilisée. Pour les télescopes muraux, la technique du temps de vol (TTV) est utilisée. Le temps de référence est tiré du signal radiofréquence du faisceau pulsé. Ce système permet une très bonne identification des particules chargées légères, comme les particules α , tritons, deutons et protons.

Le ${}^7\text{Li}$ a été complètement arrêté dans la gamme d'énergie étudiée. La figure 9 montre un échantillon d'un temps. Alors que la figure 10 montre la matrice $\Delta E \times E_R$ (énergie résiduelle) du même détecteur pour 33 MeV. On peut observer la haute qualité de la séparation entre les particules α , les tritons, les deutons et les protons dans les deux matrices. Le système d'acquisition est basé sur le FAIR (FAst Intercrate Readout) [124] et VIPERS (Vme Interfaced to Pci Easy Read System) [125-126]. Le déclencheur a été conçu pour enregistrer des événements uniques et coïncidant dans les télescopes. Le déclencheur de la coïncidence a été mis en œuvre pour détecter les particules chargées de lumière (particules α , tritons, deutons, et protons) en coïncidence pour étudier les canaux de rupture. Les distributions angulaires expérimentales de diffusion élastique, normalisées à la section transversale différentielle de Rutherford, sont illustrées sur la figure 11 pour toutes les énergies de laboratoire.

Les figures 8 et 9 sont obtenus en additionnant les rendements de 18 détecteurs au même anneau. Ceci est possible grâce à la symétrie sphérique de la balle. Cette symétrie de la configuration 8π LP présente un avantage crucial lorsque divers canaux de réaction, en particulier ceux de section transversale relativement plus petite, sont étudiés dans la même expérience [127-128]. On note que les distributions angulaires de 31 à 39 MeV correspondent bien aux données de Martel et al. [129]. Ce résultat confirme la normalisation et la résolution angulaire des données mesurées à 25 MeV.

Une caractéristique supplémentaire du détecteur 8π LP est la stabilité de la résolution énergétique. L'étude de la diffusion élastique autour de la barrière de Coulomb est le moyen le plus simple pour déterminer la dépendance énergétique des parties réelles et imaginaires du potentiel optique (OP) d'une réaction nucléaire. Dans les réactions entre ions lourds stables, il a été montré que l'effet dit d'anomalie de seuil (TA) se produit lorsque des projectiles radioactifs légers faiblement liés sont impliqués. Les mesures existantes concernent les noyaux riches en neutrons.

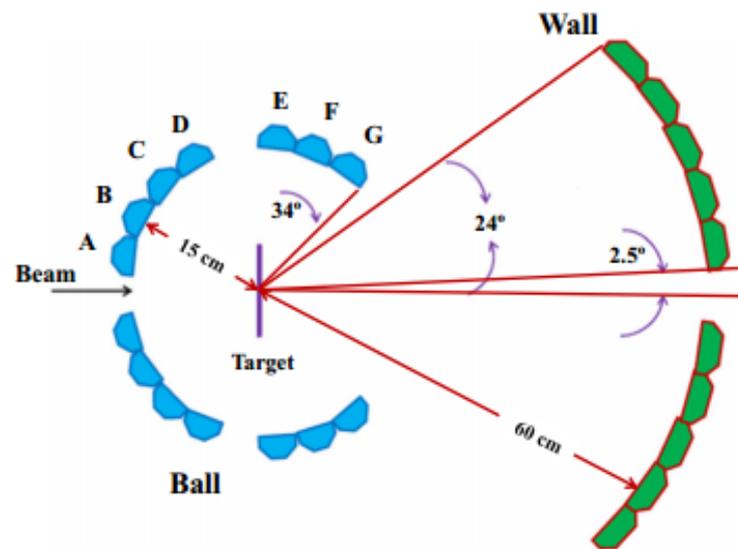


FIGURE 8 – Principe de l'appareil expérimental 8π LP [128]

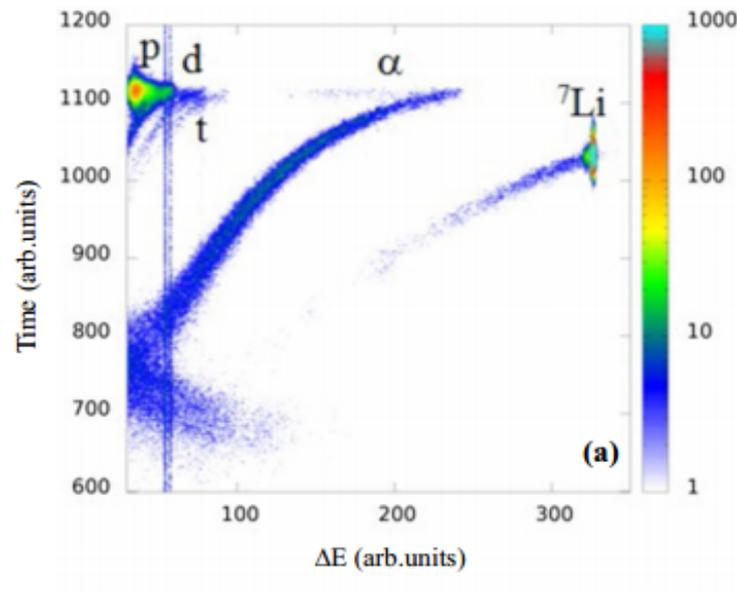


FIGURE 9 – Matrice expérimentale d'un télescope Ball [128]

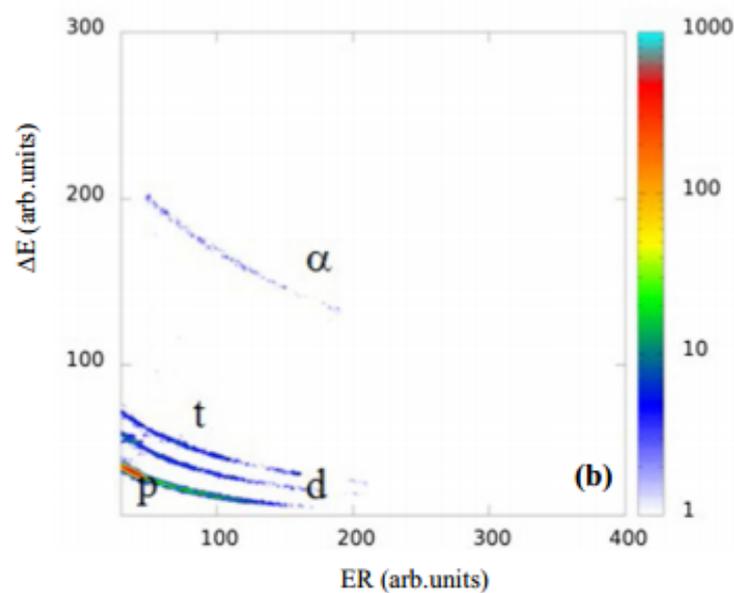


FIGURE 10 – Matrice expérimentale d'un télescope Ball [128]

Les Figures 8 et 9 présentent les matrices expérimentales d'un télescope Ball à l'avant du laboratoire angle ($\theta = 43^\circ$ et $\phi = 320^\circ$).

Ce système est représenté pour diverses énergies de bombardement normalisées à la section transversale différentielle de Rutherford respectivement par rapport au c.m. angle $\theta_{c.m.}$.

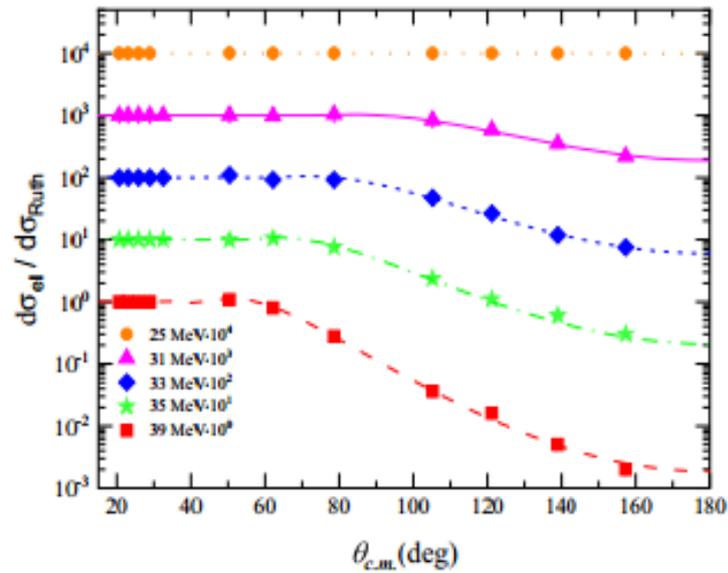


FIGURE 11 – Distributions angulaires de la diffusion élastique du système [128]

II.4 Spectrographe de masse/ Principe de fonctionnement

Le spectrographe de masse est représenté par la figure 12 :

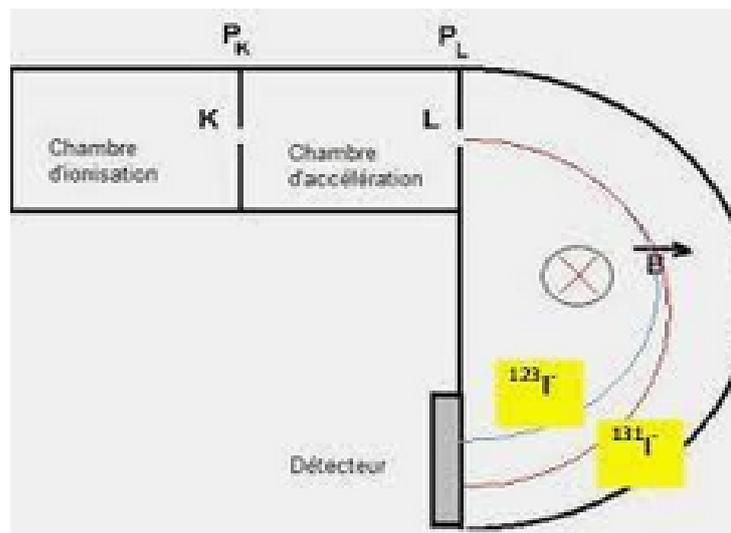


FIGURE 12 – Spectrographe de masse[111]

Son principe de fonctionnement réside dans la séparation en phase gazeuse de molécules

chargées (ions) en fonction de leur rapport masse/charge (m/z). Il est utilisé dans pratiquement tous les domaines scientifiques : physique, astrophysique, chimie en phase gazeuse, chimie organique, dosages, biologie, médecine et en physique nucléaire.

Le spectrographe de masse consiste à ioniser par des électrons une molécule A . Celle-ci va donc donner une entité A^+ ayant perdu un électron. A^+ va pouvoir se scinder en plusieurs groupements (chargé + ou non) plus petits, ou bien se réarranger. On accélère alors ces particules par un champ électrique, puis elles sont déviées par un champ magnétique. On montre que la déviation est proportionnelle à m/q . Un spectrographe de masse dans lequel on ne modifie aucun paramètre va pouvoir être étalonné. Il sera étalonné en masses molaires, puisque e est constant. Le nombre de molécules aura une incidence sur la plaque sensible du détecteur : plus nombreux sont les ions d'un type donné, plus intense sera la tache obtenue. Actuellement, les détecteurs informatisés permettent d'obtenir directement un spectre étalé.

II.5 Equation de Klein-Gordon tridimensionnelle

L'équation de Klein-Gordon pour un potentiel scalaire $S(r)$ et un potentiel vectoriel $V(r)$ à symétrie sphérique s'écrit dans le système d'unités naturelles $\hbar = c = 1$ sous la forme de l'équation (II.1) :

$$[\nabla^2 + (V(r) - E)^2 + (S(r) + M)^2]\psi(r, \theta, \varphi) = 0. \quad (\text{II.1})$$

où E est l'énergie, M est la masse de la particule, $\psi(r; \theta; \varphi)$ est la fonction d'onde, ∇^2 est l'opérateur de Laplace. Comme $V(r)$ et $S(r)$ sont des potentiels à symétrie sphérique, il convient de chercher les solutions particulières de l'équation (II.1) par séparation des variables en coordonnées sphériques. L'expression du laplacien en coordonnées sphériques est :

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} [\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}]. \quad (\text{II.2})$$

Si l'on utilise l'expression du carré du moment cinétique orbital \vec{L}^2 , en coordonnées sphériques on a :

$$\vec{L}^2 = -\frac{1}{\sin^2 \theta} [\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}], \quad (\text{II.3})$$

on peut dire que :

$$L_z = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (\text{II.4})$$

on voit que le Laplacien peut se mettre sous la forme :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{\vec{L}^2}{r^2}, \quad (\text{II.5})$$

où

$$H\psi = E\psi; L^2\psi = l(l+1)\hbar^2\psi; L_z\psi = m\hbar\psi \quad (\text{II.6})$$

Finalement, l'équation de Klein-Gordon en coordonnées sphériques devient l'équation (II.7)[46] :

$$[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{\vec{L}^2}{r^2} - 2\{EV(r) + MS(r)\} + V^2(r) - S^2(r) + E^2 - M^2]\psi(r, \theta, \varphi) = 0. \quad (\text{II.7})$$

Procédons à la décomposition de la fonction ψ :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{R(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (\text{II.8})$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad (\text{II.9})$$

Après séparation des variables, on obtient :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + [E^2 - M^2 - 2\{EV(r) + MS(r)\} + V^2(r) - S^2(r) - \frac{\lambda}{r^2}]R(r) = 0, \quad (\text{II.10})$$

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad (\text{II.11})$$

où m^2 et $\lambda = l(l+1)$ sont des constantes de séparation.

II.6 Équation bi-confluente de Heun et fonctions polynômiales associées

II.6.1 Équation bi-confluente de Heun

Cherchons les conditions pour lesquelles nous avons des solutions polynômiales sous la forme $y(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Cette classe d'équations contient un nombre très important d'équations différentielles telles que l'équation confluyente de Heun, l'équation bi-confluente de Heun et l'équation générale de Heun [43], qui sont pour la plupart étudiées individuellement dans la littérature.

Nous nous intéresserons à la résolution de l'équation biconfluente de Heun parce que

c'est elle qui est susceptible de donner les solutions de notre système. Cette équation est donnée par l'équation (II.12).

Considérons une forme particulière de l'équation bi-confluente de Heun dont la forme canonique est donnée par :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{1 + \alpha'}{t} - \beta' - 2t \right) \frac{dy(t)}{dt} + \left((\gamma' - \alpha' - 2) - \frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] \frac{1}{t} \right) y(t) = 0, \quad (\text{II.12})$$

où $y(t) = \text{HeunB}(\alpha', \beta', \gamma', \delta', t)$ sont les fonctions bi-confluentes de Heun. Supposons que les solutions de l'équation (II.12) s'écrivent sous la forme de l'équation (II.13) :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad (\text{II.13})$$

et donc nous avons

$$\frac{dy(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k t^{k-1}, \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) t^{k-2}, \quad (\text{II.15})$$

En remplaçant les équations (II.13), (II.14) et (II.15) dans l'équation (II.12), nous obtenons l'équation suivante :

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) t^{k-2} + \left(\frac{1 + \alpha'}{t} - \beta' - 2t \right) \sum_{k=1}^{\infty} a_k k t^{k-1} + \left((\gamma' - \alpha' - 2) - \frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] \frac{1}{t} \right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = 0. \quad (\text{II.16})$$

D'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)t^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} (1+\alpha')a_k k t^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \beta' k t^{k-1} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k k t^k + \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\gamma' - \alpha' - 2)t^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\delta' + (1+\alpha')\beta'] a_k t^{k-1} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Cette équation est encore équivalente à

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+2}(i+2)(i+1)t^i + \sum_{i=-1}^{\infty} (1+\alpha')a_{i+2}(i+2)t^i - \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1}\beta' i t^i - 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i i t^i + \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i (\gamma' - \alpha' - 2)t^i - \frac{1}{2} \sum_{i=-1}^{\infty} [\delta' + (1+\alpha')\beta'] a_{i+1} t^i = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

où $i = k - 2$. En regroupant tous les termes du même ordre en t , nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\{ (1+\alpha')a_1 - \frac{1}{2}[\delta' + (1+\alpha')\beta']a_0 \right\} t^{-1} + \\ \left\{ 2(2+\alpha')a_2 - \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1+\alpha')\beta'] + \beta' \right) a_1 + (\gamma' - \alpha' - 2)a_0 \right\} + \\ \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ (i+2)(i+2+\alpha')a_{i+2} - \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1+\alpha')\beta'] + (i+1)\beta' \right) a_{i+1} + (\gamma' - \alpha' - 2 - 2i)a_i \right\} t^i = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

Donc l'équation (II.19) donne les relations de récurrences pour les coefficients :

$$\begin{aligned} (1+\alpha')a_1 &= \frac{1}{2}[\delta' + (1+\alpha')\beta']a_0, \\ 2(2+\alpha')a_2 &= \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1+\alpha')\beta'] + \beta' \right) a_1 - (\gamma' - \alpha' - 2)a_0, \\ (i+2)(i+2+\alpha')a_{i+2} &= \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1+\alpha')\beta'] + (i+1)\beta' \right) a_{i+1} - (\gamma' - \alpha' - 2 - 2i)a_i, \quad i \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

Considérons un choix approprié de a_0 et posons $a_0 = 1$. Les relations précédentes de l'équation (II.20) s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
(1 + \alpha')a_1 &= \frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'], \\
2(1 + \alpha')(2 + \alpha')a_2 &= \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] + \beta'\right) \frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] - (1 + \alpha')(\gamma' - \alpha' - 2), \\
6(1 + \alpha')(2 + \alpha')(3 + \alpha')a_3 &= \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] + 2\beta'\right) \times \\
&\quad \left\{ \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] + \beta'\right) \frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] - (\gamma' - \alpha' - 2) \right\} - \\
&\quad 2(2 + \alpha')(\gamma' - \alpha' - 4) \frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'].
\end{aligned} \tag{II.21}$$

En considérant les changements dans la notation, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
A_0 &= a_0 = 1, \\
A_1 &= (1 + \alpha')a_1 = \frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'], \\
A_2 &= 2(1 + \alpha')(2 + \alpha')a_2, \\
A_3 &= 3 \times 2 \times (1 + \alpha')(2 + \alpha')(3 + \alpha')a_3, \\
A_i &= i!(1 + \alpha')_i a_i, \quad i \geq 0,
\end{aligned} \tag{II.22}$$

où

$$(1 + \alpha')_i = \frac{\Gamma(i + 1 + \alpha')}{\Gamma(1 + \alpha')} = \begin{cases} (1 + \alpha')(2 + \alpha')(3 + \alpha') \dots (i + \alpha'), & i = 1, 2, 3, \dots \\ 1, & i = 0 \end{cases} \tag{II.23}$$

Supposons maintenant que α' n'est pas un entier négatif, les fonctions bi-confluentes de Heun peuvent s'écrire :

$$\text{Heun}B(\alpha', \beta', \gamma', \delta', t) = \sum_{k \geq 0} \frac{A_k}{(1 + \alpha')_k k!} t^k, \quad (\text{II.24})$$

où

$$A_{k+2} = \left\{ (1+k)\beta' + \frac{1}{2}[\delta' + (1+\alpha')\beta'] \right\} A_{k+1} - (1+k)(1+k+\alpha')(\gamma' - \alpha' - 2 - 2k)A_k, \quad k \geq 0. \quad (\text{II.25})$$

II.6.2 Fonctions polynômiales associées à l'équation bi-confluente de Heun

La condition nécessaire pour qu'un polynôme de degré N soit solution d'une équation différentielle de la forme :

$$(a_2x^2 + a_1x) y''(x) + (b_2x^2 + b_1x + b_0) y'(x) - (\tau_1x + \tau_0) y(x) = 0. \quad (\text{II.26})$$

où $\tau_1 = Na_2$, $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ et la solution polynômiale explicite $y_N(x)$ est donnée par :

$$y_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{P_k(\tau_0)}{k! a_1^k (b_0/a_1)_k} x^k, \quad (\text{II.27})$$

où pour chaque valeur de N , le polynôme $\{P_k(\tau_0)\}_{k=0}^N$ satisfait une relation de trois termes de récurrence, pour $0 \leq k \leq N+1$,

$$P_{k+1}(\tau_0) = (\tau_0 - k(k-1)a_2 - kb_1)P_k(\tau_0) + kb_2(N-k+1)((k-1)a_1 + b_0)P_{k-1}(\tau_0) \quad (\text{II.28})$$

avec pour conditions initiales $P_{-1}(\tau_0) = 0, P_0(\tau_0) = 1$

II.7 Résolution de l'équation de Klein-Gordon avec le potentiel inverse à quatre termes

C'est la première fois que ce potentiel a été utilisé pour déterminer le spectre d'énergie et la fonction d'onde de l'équation de Klein-Gordon [115].

L'équation de Klein-Gordon avec un potentiel scalaire et vecteur quelconque est donnée par l'équation (II.29)[115] :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + (E - V(r))^2 - (M + S(r))^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] F(r) = 0. \quad (\text{II.29})$$

Il est clair que cette équation différentielle n'admet aucune solution exacte pour les états de moment cinétique orbital $l \neq 0$ à cause du terme centrifuge.

Les solutions de cette équation peuvent être trouvées uniquement pour les ondes $S(l = 0)$.

Ceci nous permet d'écrire :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + (E - V(r))^2 - (M + S(r))^2 \right] F(r) = 0, \quad (\text{II.30})$$

où E est l'énergie relativiste, M est la masse de la particule. La fonction d'onde radiale est $R(r) = \frac{F(r)}{r}$ et $\hbar = c = 1$.

Considérons que $V(r) = S(r)$, on obtient :

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + 2(M + E)V(r) \right] F = (E^2 - M^2)F. \quad (\text{II.31})$$

Introduisons maintenant le potentiel inverse à quatre termes [28].

$$V(r) = \frac{a}{r} + \frac{c}{r^{3/2}} + \frac{b}{r^2} + \frac{d}{\sqrt{r}} \quad (\text{II.32})$$

où a , b , c et d sont des coefficients constants qui peuvent être déterminés par des méthodes expérimentales convenables. Ici, r représente la coordonnées radiale. Ce potentiel peut se transformer au potentiel de Coulomb si $b=c=d=0$, au potentiel de racine carré inverse si $a=b=c=0$, au potentiel de Kratzer si $c=d=0$ et au potentiel singulier fractionnaire si $a=b=0$.

En utilisant la transformation $z = \sqrt{\gamma r}$, avec $\gamma > 0$, z représente la variable qui facilite la résolution de l'équation de Klein-Gordon.

On obtient la transformation suivante :

$$\frac{dF}{dr} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{dr} = \frac{1}{2} \frac{dF}{dz} \left(\frac{\gamma}{z} \right), \quad (\text{II.33})$$

La dérivée deuxième de la fonction F sera écrite de la manière suivante :

$$\frac{d^2F}{dr^2} = \frac{\gamma^2}{4z^2} \frac{d^2F}{dz^2} - \frac{\gamma^2}{4z^3} \frac{dF}{dz}. \quad (\text{II.34})$$

Remplaçons $\frac{d^2F}{dr^2}$, et $V(r)$ dans l'équation (II.31), on trouve :

$$\frac{\gamma^2}{4z^2} \frac{d^2F}{dz^2} - \frac{\gamma^2}{4z^3} \frac{dF}{dz} - 2(M + E) \left(\frac{a\gamma}{z^2} + \frac{c\gamma^{3/2}}{z^3} + \frac{b\gamma^2}{z^4} + \frac{d\gamma^{1/2}}{z} \right) F = (M^2 - E^2)F. \quad (\text{II.35})$$

Pour des raisons de simplification, nous diviserons l'équation (II.35) par γ^2 et on a :

$$\frac{1}{4z^2} \frac{d^2F}{dz^2} - \frac{1}{4z^3} \frac{dF}{dz} - 2(M + E) \left(\frac{a}{\gamma z^2} + \frac{c}{\gamma^{1/2} z^3} + \frac{b}{z^4} + \frac{d}{z\gamma^{3/2}} \right) F = \frac{1}{\gamma^2} (M^2 - E^2)F. \quad (\text{II.36})$$

Pour simplifier les calculs, on multiplie l'équation (II.36) par $4z^2$, on trouve donc la longue équation suivante :

$$\frac{d^2F}{dz^2} - \frac{1}{z} \frac{dF}{dz} - \left[\frac{8}{\gamma} (M + E)a + \frac{8}{\gamma^{1/2}} (M + E) \frac{c}{z} + 8(M + E) \frac{b}{z^2} + \right.$$

$$\frac{8(M+E)dz}{\gamma^{3/2}} + \frac{4z^2}{\gamma^2}(M^2 - E^2)]F = 0. \quad (\text{II.37})$$

Pour rendre la suite facilement utilisable, on pose les annotations suivantes :

$$O = \frac{8}{\gamma}(M+E)a, \quad P = \frac{8}{\gamma^{1/2}}(M+E)c, \quad Q = 8(M+E)b, \quad R = \frac{8(M+E)d}{\gamma^{3/2}}, \quad S = \frac{4}{\gamma^2}(M^2 - E^2). \quad (\text{II.38})$$

L'équation (II.37) devient alors

$$\frac{d^2F}{dz^2} - \frac{1}{z} \frac{dF}{dz} - \left[O + \frac{P}{z} + \frac{Q}{z^2} + Rz + Sz^2 \right] F = 0. \quad (\text{II.39})$$

On obtient alors une équation bi-confluente de Heun qui doit être traitée avec rigueur pour déterminer l'équation donnant le spectre d'énergie de la particule de masse M et la fonction d'onde qui représente la densité de probabilité de trouver la particule à une position précise et à un instant t quelconque. Nous allons utiliser le potentiel inverse à quatre termes où a , b , c , et d sont des constantes qui connaissant leur valeurs, on peut tracer les courbes des énergies en fonction du nombre quantique principale n .

II.8 Résolution de l'équation de Klein-Gordon pour le potentiel singulier fractionnaire

Bose et Lemieux découvrent les potentiels solubles parmi lesquels ceux de type fractionnaire. Ce qui fera l'objet de notre travail s'écrit [28] :

$$V(r) = \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^{4/3}} + \frac{c}{r^{2/3}} + dr^{2/3} \quad (\text{II.40})$$

En l'introduisant dans l'équation de Klein-Gordon, on a :

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{1/2}{z} \frac{dF}{dz} - \left[\frac{9}{2}(M+E)c + \frac{9}{2z}(M+E)b + \frac{9}{2}(M+E)a \frac{1}{z^2} + \frac{9}{4}(M^2 - E^2)z + \frac{9}{2}(M+E)dz^2 \right] F = 0. \quad (\text{II.41})$$

Posons :

$$E = -\frac{9}{2}(M+E)c, \quad F = -\frac{9}{2}(M+E)b, \quad G = -\frac{9}{2}(M+E)a, \quad H = -\frac{9}{4}(M^2 - E^2), \quad I = -\frac{9}{2}(M+E)d. \quad (\text{II.42})$$

Pour une utilisation facile, mettons là sous la forme de l'équation biconfluente de Heun.

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{1/2}{z} \frac{dF}{dz} + \left[E + \frac{F}{z} + \frac{G}{z^2} + Hz + Iz^2 \right] F = 0. \quad (\text{II.43})$$

II.9 Résolution de l'équation de Klein-Gordon pour le potentiel de Sextic

Considérons le potentiel de Sextic suivant :

$$V(r) = \frac{a}{r^2} + br^2 + cr^4 + dr^6, [28] \quad (\text{II.44})$$

Considérons l'équation radiale de Schrödinger suivante :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right] F = 0 [119] \quad (\text{II.45})$$

Et en utilisant la transformation $Z = r^2$, on trouve :

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{3/2}{z} \frac{dF}{dz} + \left[-\frac{b\mu}{2\hbar^2} + \frac{\mu E}{2\hbar^2} \frac{1}{z^2} - \left(\frac{\mu a}{2\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{4} \right) \frac{1}{z^2} - \frac{\mu c}{2\hbar^2} z - \frac{\mu d}{2\hbar^2} z^2 \right] F = 0 \quad (\text{II.46})$$

Posons :

$$P = -\frac{b\mu}{2\hbar^2}, Q = -\frac{\mu E}{2\hbar^2}, R = -\frac{\mu a}{2\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{4}, S = -\frac{\mu c}{2\hbar^2}, T = -\frac{\mu d}{2\hbar^2}. \quad (\text{II.47})$$

Pour une utilisation facile, mettons là sous la forme de l'équation biconfluente de Heun de Heun. On a :

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{3/2}{z} \frac{dF}{dz} + \left[P + \frac{Q}{z} + \frac{R}{z^2} + Sz + Tz^2 \right] F = 0. \quad (\text{II.48})$$

Pour transformer la dernière équation sous la forme d'une équation biconfluente de Heun, nous pouvons utiliser la transformation suivante :

$$F(z) = z^A \exp(Dz^2 + Bz) G(z) \quad (\text{II.49})$$

Dans cette transformation, A , B , et D sont les constantes qui peuvent être déterminées par identification. En remplaçant l'équation (II.49) dans l'équation (II.48) on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} \left(z \frac{d^2 G}{dz^2} + (3/2 + 2A + 2Bz + 4Dz^2) \frac{dG}{dz} + (2AB + 3B/2 + Q) + \right. \\ \left. (B^2 + 5D + 4AD + P)z + (4BD + S)z^2 + \right. \\ \left. (4D^2 + T)z^3 + 1/z(R + A^2 + A/2) \right) G = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.50})$$

La littérature présente l'équation biconfluente de Heun sous la forme[28] :

$$ZY''(z) + (1 + \alpha' - \beta'z - 2z^2)Y'(z) + \left((\gamma' - \alpha' - 2)z - \frac{\delta' + (1 + \alpha')\beta'}{2} \right) Y(z) = 0. \quad (\text{II.51})$$

β' , δ' et γ' sont les paramètres de l'équation biconfluente de Heun. Cette équation a des applications dans les ondes acoustiques et en électromagnétisme [23], où z est la variable. En procédant par identification et en égalant les équations (II.50) et (II.51), on a :

$$2A + 3/2 = \alpha' + 1, \quad (\text{II.52})$$

$$2B = -\beta', \quad (\text{II.53})$$

$$4D = -2, \quad (\text{II.54})$$

D est égal à $-1/2$.

$$B^2 + 5D + 4AD + P = \gamma' - \alpha' - 2, \quad (\text{II.55})$$

$$4BD + S = 0, \quad (\text{II.56})$$

$$4D^2 + T = 0, \quad (\text{II.57})$$

$$\frac{1}{z}(A^2 + R + \frac{A}{2}) = 0, \quad (\text{II.58})$$

$$2AB + 3B/2 + P = -\frac{\delta' + (1 + \alpha')\beta'}{2}, \quad (\text{II.59})$$

Supposons que la solution est une série de la forme :

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (\text{II.60})$$

Substituons l'équation (II.60) dans l'équation (II.51), on obtient la relation de recur-

rence suivante pour les coefficients de la série détaillée :

$$a_{n+2}(n+2)(n+2+\alpha') + a_{n+1} \left(-\beta'(n+1) - \frac{\delta' + (1+\alpha')\beta'}{2} \right) + a_n(\gamma' - \alpha' - 2 - 2n) = 0. \quad (\text{II.61})$$

La série suivante doit être coupée après pour obtenir les valeurs de n suffisantes. Cela implique que nous égalons les coefficients de a_{n+2} à zéro. Cela exige que les coefficients de a_{n+1} et a_n soient égales à zéro [24].

Ces considérations donnent les deux contraintes suivantes :

$$\gamma' - \alpha' - 2 - 2n = 0, \quad (\text{II.62})$$

$$-\beta'(n+1) - \frac{\delta' + (1+\alpha')\beta'}{2} = 0. \quad (\text{II.63})$$

Il est important de noter que n est le nombre quantique principal qui peut prendre la valeur zéro et décrit le type de série. Si $n = 1$, la particule est dans son état fondamental. La valeur de la constante A est :

$$A = \frac{-1/2 + \sqrt{1/4 - 4R}}{2} \quad A > 0. \quad (\text{II.64})$$

On note que $1/4 - 4R \geq 0$, alors $R \leq \frac{1}{16}$

A ne doit pas être considérée comme négative car elle est une fonction de Q . Si nous prenons la valeur négative de A , $A = \frac{-1/2 - \sqrt{1/4 - 4R}}{2}$, nous pouvons avoir les valeurs négatives. Substituons $-\frac{\delta' + (1+\alpha')\beta'}{2}$ par sa valeur $-\beta'(n+1)$ et substituons β' par $-2B$, on obtient :

$$2AB + 3B/2 + Q = -\beta'(n+1) = -2B(n+1) \quad (\text{II.65})$$

Après développement de l'équation (II.65) et en mettant B en facteur, on obtient

l'équation suivante :

$$B(2A + 7/2 + 2n) = -Q \quad (\text{II.66})$$

Remplaçons A avec sa valeur positive, on a :

$$B(3 + \sqrt{1/4 - 4R} + 2n) = -Q \quad (\text{II.67})$$

Dans ce cas, B est donnée par la relation :

$$B = -\frac{Q}{3 + 2n + \sqrt{1/4 - 4R}} \quad (\text{II.68})$$

Or $4BD = -SD = -1/2$; $S = 2B$, $B = S/2$

En égalant les deux valeurs de B , on obtient :

$$\frac{S}{2} = -\frac{Q}{3 + 2n + \sqrt{1/4 - 4R}} \quad (\text{II.69})$$

Substituons R , S et Q avec leur valeur, dans l'équation(II.69) on obtient la valeur de c comme :

$$c = \frac{2E}{3 + 2n + 2\sqrt{1/4 - 4R}}. \quad (\text{II.70})$$

Où, E est l'énergie relativiste de la particule. En substituant α' et γ' , on a :

$$4AD + B^2 + 5D + P = 2n \quad (\text{II.71})$$

substituons A , D , B et P avec leur valeur respective, on obtient le spectre d'énergie suivant :

$$E = \pm \frac{\left[4\hbar^4(3 + 2n + \sqrt{1/4 + l(l+1) + 2a\mu/\hbar^2})^2(2n + 2 + b\mu/2\hbar^2 + \sqrt{1/4 + l(l+1) + 2a\mu/\hbar^2}) \right]^{1/2}}{\mu} \quad (\text{II.72})$$

Cette énergie varie en fonction de la molécule choisi et a les propriétés particulières.

II.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les propriétés des particules de bottomonium et de charmonium ainsi que les molécules utilisées. Nous avons présenté la méthode des équations biconfluentes de Heun qui a facilité la résolution de l'équation de Klein-Gordon. Le matériel utilisé pour mesurer les énergies lors des expériences a été présenté.

Nous présentons par la suite les outils qui permettent la détermination des énergies du potentiel de Sextic. Nous déterminons les valeurs numériques des énergies avec le potentiel de Sextic et le potentiel inverse à quatre termes à l'aide des données de la littérature et d'une comparaison successive des résultats théoriques du modèle et des résultats expérimentaux. Nous présentons les résultats du modèle et les résultats expérimentaux et leur discussion.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

Dans ce chapitre, nous allons présenter les énergies obtenues, les fonctions d'ondes et le spectre de masse du potentiel de Sextic. Par la suite, nous présenterons les différentes courbes y afférentes. Bien plus, la discussion et la comparaison avec les résultats expérimentaux seront présentées.

III.1 Etats d'une particule de Klein-Gordon dans des potentiels scalaire et vectoriel du type fractionnaire

Ici, nous examinons la solution du problème d'une particule relativiste sans spin (spin = 0), de masse M qui se déplace sous l'action d'un champ à symétrie sphérique composé d'un potentiel scalaire $S(r)$ et d'un potentiel vectorielle $V(r)$ égaux. L'équation de Klein-Gordon décrit le mouvement d'une particule de Spin zero [67-68]. Les niveaux d'énergies et les valeurs propres de l'équation de Klein-Gordon à déterminer avec un simple Potentiel.

Il est clair que cette équation différentielle n'admet aucune solution exacte pour les états de moment cinétique orbital l différent de zéro à cause du terme centrifuge. Les solutions de cette équation peuvent être trouvées uniquement pour les ondes $s(l = 0)$ dans le cas des potentiels de Hulthén ou de Woods-Saxon déformés [34-35].

En réalité, l'équation de Klein-Gordon dans le cas ($l \neq 0$) est trop compliquée et ne se laisse pas traiter exactement. Il faut alors avoir recours à une résolution basée sur une méthode des équations bi-confluentes de Heun qui permet d'obtenir analytiquement une solution approchée de l'équation.

Les potentiels de type fractionnaire comme le potentiel de Sextic, le potentiel inverse

à quatre termes jouent un rôle très important en physique microscopique. Car ils sont largement utilisés comme une bonne approximation du potentiel d'interaction dans de nombreux domaines de la physique et de la chimie. Notamment en physique nucléaire, physique atomique, moléculaire et en chimie quantique.

III.2 Potentiel inverse à quatre termes

Pour transformer la dernière équation en la forme des équations biconfluentes de Heun, nous pouvons utiliser la transformation suivante :

$$F(z) = z^{1/2} z^A \exp(Dz^2 + Bz)G(z) \quad (\text{III.1})$$

Dans cette transformation, A,B, et D sont les constantes qui peuvent être déterminés par identification avec l'équation bi-confluente de Heun. En remplaçant donc l'équation (III.1) dans l'équation (II.39) on trouve :

$$(16ADz^4 + 16D^2z^4 + 8Dz^2 + 4A^2 - 4A - 4Sz^4 - 4Oz^2 - 4Pz - 4Q - 4Rz^3 - 3 + 4B^2z^2 + 16BDz^3 + 8ABz)G(z) + 16Dz^3 \frac{dG}{dz} + 8Az \frac{dG}{dz} + 4z^2 \frac{d^2G}{dz^2} + 8Bz^2 \frac{dG}{dz} = 0, \quad (\text{III.2})$$

En divisant l'équation (III.2) par z et par factorisation, on obtient l'équation suivante :

$$z \frac{d^2G}{dz^2} + (2A + 2Bz + 4Dz^2) \frac{dG}{dz} + (2AB - P + (4AD + B^2 - O + 2D)z + (4BD - R)z^2 + (4D^2 - S)z^3 + \frac{A^2}{z} - \frac{A}{z} - \frac{Q}{z} - \frac{3}{4z})G = 0 \quad (\text{III.3})$$

La littérature présente l'équation biconfluente de Heun sous la forme[23] :

$$Y''(z) + (1 + \alpha' - \beta'z - 2z^2)Y'(z) + \left((\gamma' - \alpha' - 2)z - \frac{\delta' + (1 + \alpha')\beta'}{2} \right) Y(z) = 0. \quad (\text{III.4})$$

β' , δ' et γ' sont les paramètres de l'équation biconfluente de Heun [23], z est la variable. En égalant les équations (III.3) et (II.4), on a :

$$2A = \alpha' + 1, \quad (\text{III.5})$$

$$2B = -\beta', \quad (\text{III.6})$$

$$4D = -2, \quad (\text{III.7})$$

D est égal à $-1/2$.

$$4AD + B^2 - O + 2D = \gamma' - \alpha' - 2, \quad (\text{III.8})$$

$$4BD - R = 0, \quad (\text{III.9})$$

$$4D^2 - S = 0, \quad (\text{III.10})$$

$$\frac{1}{z}(A^2 - A - Q - \frac{3}{4}) = 0, \quad (\text{III.11})$$

$$2AB - P = -\frac{\delta' + (1 + \alpha')\beta'}{2}, \quad (\text{III.12})$$

Considérons que la solution peut être écrite sous la forme d'une série :

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (\text{III.13})$$

Substituons l'équation (III.13) dans l'équation (III.4), on obtient la relation de récurrence suivante :

$$a_{n+2}(n+2)(n+2+\alpha') + a_{n+1} \left(-\beta'(n+1) - \frac{\delta' + (1+\alpha')\beta'}{2} \right) + a_n(\gamma' - \alpha' - 2 - 2n) = 0. \quad (\text{III.14})$$

La série suivante doit être coupée après développement pour obtenir les valeurs de n suffisantes. Cela implique que nous égalons les coefficients de a_{n+2} à zéro. Cela exige que les coefficients de a_{n+1} et a_n soient égale à zéro [24].

Ces considérations donnent les deux contraintes suivantes :

$$\gamma' - \alpha' - 2 - 2n = 0, \quad (\text{III.15})$$

$$-\beta'(n+1) - \frac{\delta' + (1+\alpha')\beta'}{2} = 0. \quad (\text{III.16})$$

Il est important de noter que n est le nombre quantique principal qui peut prendre la valeur zéro et décrit le type de série. Si $n = 1$, la particule est dans son état fondamental. La valeur de la constante A est :

$$A = \frac{1 + 2\sqrt{1+Q}}{2} A > 0. \quad (\text{III.17})$$

A ne doit pas être considérée comme négative car elle est une fonction de Q . Si nous prenons la valeur négative de A , $\frac{1-2\sqrt{1+Q}}{2}$, nous pouvons avoir les valeurs négative. Substituons $-\frac{\delta'+(1+\alpha')\beta'}{2}$ par sa valeur $-\beta'(n+1)$ et substituons β' par $-2B$, on obtient :

$$2AB - P = -\beta'(n+1) = -2B(n+1) \quad (\text{III.18})$$

Après développement de l'équation (III.18) et en mettant B en facteur, on obtient l'équation (III.19) :

$$B(2A + 2 + 2n) = P \quad (\text{III.19})$$

Remplaçons A avec sa valeur positive, on a :

$$B(2 + 2\sqrt{1 + Q} + 1 + 2n) = P \quad (\text{III.20})$$

Dans ce cas, B est donnée par la relation :

$$B = \frac{P}{3 + 2n + 2\sqrt{1 + Q}} \quad (\text{III.21})$$

Or $4BD = R D = -1/2$; $R = -2B$, $B = -R/2$

En égalant les deux valeurs de B , on obtient :

$$-\frac{R}{2} = \frac{P}{3 + 2n + 2\sqrt{1 + Q}} \quad (\text{III.22})$$

Substituons R , P et Q avec leur valeur, dans l'équation(III.22) on obtient la valeur de la contrainte d comme :

$$d = -\frac{2\gamma c}{3 + 2n + 2\sqrt{1 + 8(M + E)b}}. \quad (\text{III.23})$$

Où γ est une variable dépendante de la masse M de la particule, et E est l'énergie relativiste de la particule, c et b sont des constantes réelles. La valeur de γ est donnée par la relation suivante :

$$\gamma = 2(M + E)^{1/2}(M - E)^{1/2}. \quad (\text{III.24})$$

Par ailleurs, en considérant les équations précédentes, on obtient en substituant α' et γ' ,

$$4AD + B^2 - O + 2D = 2n \quad (\text{III.25})$$

substituons A , D , et O avec leur valeur respective, on obtient :

$$B^2 = 2n + \frac{8(M + E)a}{\gamma} + 1 + 2\sqrt{1 + 8(M + E)b} \quad (\text{III.26})$$

Bien plus, substituons B avec sa valeur, on trouve :

$$\frac{16}{\gamma^3}(M + E)^2 d^2 = \frac{8}{\gamma}(M + E)a + 2n + 2 + 2\sqrt{1 + 8(M + E)b} \quad (\text{III.27})$$

Ensuite, pour déterminer les états d'énergies possibles correspondantes, remplaçons d et γ avec leur valeur respective, l'équation donnant les valeurs propres de l'énergie est :

$$\frac{16(M + E)^2 c^2}{(3 + 2n + 2\sqrt{1 + 8(M + E)b})^2} - 2a(M + E) - (M + E)^{\frac{1}{2}}(M - E)^{\frac{1}{2}}(n + 1 + \sqrt{1 + 8(M + E)b}) = 0 \quad (\text{III.28})$$

Divisons l'équation précédente par $M + E$, on obtient finalement :

$$\frac{16(M + E)c^2}{(3 + 2n + 2\sqrt{1 + 8(M + E)b})^2} - 2a - \frac{(M - E)^{\frac{1}{2}}(n + 1 + \sqrt{1 + 8(M + E)b})}{(M + E)^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad (\text{III.29})$$

C' est une équation transcendente. L'énergie peut être obtenue numériquement en utilisant l'équation (III.29).

III.3 Cas spéciaux et comparaison avec les résultats de la littérature

III.3.1 Potentiel de Coulomb

Notre équation donnant l'énergie se réduit à l'énergie de Coulomb quand $d = c = b = 0$,

En utilisant l'équation (III.29), on obtient :

$$\frac{(n+2)(M-E)^{\frac{1}{2}}}{(M+E)^{\frac{1}{2}}} + 2a = 0 \quad (\text{III.30})$$

On obtient l'énergie suivante :

$$E = \frac{M((2+n)^2 - 4a^2)}{4a^2 + (2+n)^2} \quad (\text{III.31})$$

Si nous employons, $E + M \rightarrow M$, $E - M \rightarrow E$, la solution à la limite non relativiste de l'équation transcendental (III.29) est obtenu .

$$E = -\frac{4Ma^2}{(n+2)^2} \quad (\text{III.32})$$

Ce qui est le résultat de la référence [114] pour $l = 0$.

III.3.2 Potentiel de Kratzer

Notre équation donnant l'énergie se réduit en l'énergie de Kratzer quand $d = c = 0$,

En utilisant l'équation (III.29), on obtient l'énergie suivante :

$$E = -\frac{4a^2M}{(n+1+\sqrt{1+8Mb})^2} \quad (\text{III.33})$$

Ce qui est le résultat de la référence [114] où $l = 0$.

III.4 Fonction d'onde

Partant de l'équation (III.1), nous obtenons la fonction d'onde radiale du potentiel inverse à quatre termes. Ainsi, les termes de la fonction biconfluente de Heun sont :

$$y(z) = H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', z), \quad (\text{III.34})$$

On a :

$$F(z) = z^{A+1/2} \exp(Dz^2 + Bz) G(z), \quad (\text{III.35})$$

En remplaçant z par $\sqrt{\gamma r}$, on trouve :

$$F(r) = (\gamma r)^{1/4} (\gamma r)^{A/2} \exp(D\gamma r + B(\gamma r)^{1/2}) H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \sqrt{\gamma r}), \quad (\text{III.36})$$

Ainsi donc, la fonction d'onde de spin nul s'écrit donc :

$$F(r) = N_r r^{\frac{2A+1}{4}} \exp(D\gamma r + B\sqrt{\gamma r}) H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \sqrt{\gamma r}). \quad (\text{III.37})$$

Avec $\alpha' = 2A - 1$, $\beta' = R$, $\delta' = 2P$, $\gamma' = \frac{R^2}{4} - O + 1$.

Précisons que la valeur de la contrainte d est obtenu quand nous posons $E - M \rightarrow E$,

$E + M \rightarrow M$, la masse $M = 1Kg$ et $n = 0$

La fonction de Heun est la solution de l'équation(II.29). La fonction d'onde $F(r)$ de Heun nous permet de compléter la description de l'état de la particule dans l'espace. N_r est la constante de normalisation. Dans le but d'avoir une fonction d'onde $F(r)$ physiquement acceptable, nous allons prendre les conditions suivantes : $\gamma > 0, D < 0, A > 0$ et $B < 0$. La condition $\gamma > 0$ est directement vérifiée, $D < 0$ parceque $D = -1/2$; $A > 0$ est aussi vérifiée. La condition $B < 0$ permet que nous choisissons le paramètre du potentiel $c < 0$.

Le tracé de la courbe du potentiel avec quelques valeurs des paramètres du potentiel est [115] :

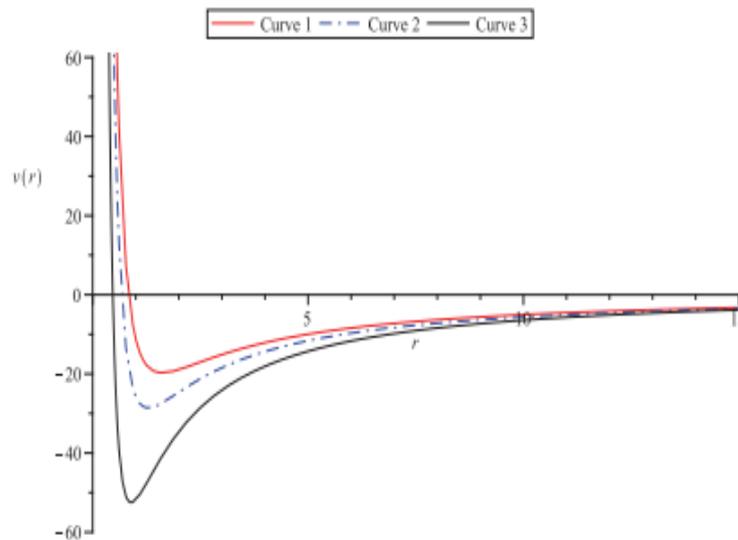


FIGURE 13 – Représentation du potentiel inverse à quatre termes avec quelques paramètres. Courbe 1) $a = -64.15, b = 67.90, c = -19.20, d = 4.122$. Courbe 2) $a = -74.15, b = 64.52, c = -21.92, d = 5.77$. Courbe 3) $a = -93.39, b = 59.42, c = -27.92, d = 10.0951$.

Ces courbes montrent que le potentiel inverse à quatre termes découvert par Bose et Lemieux est physiquement acceptable car présente un puits et pour les phénomènes physiques les potentiels qui confinent représentent une avancée dans la physique et ses applications.

III.5 Potentiel singulier fractionnaire

Pour transformer la dernière équation en la forme des équations biconfluentes de Heun, nous pouvons utiliser la transformation suivante :

$$F(z) = z^{A+1/2} \exp(Dz^2 + Bz)G(z) \quad (\text{III.38})$$

Dans cette transformation A , B , et D sont les constantes qui peuvent être déterminés par identification avec l'équation bi-confluente de Heun. En remplaçant donc l'équation (III.38) dans l'équation (II.57) on trouve :

$$(3Bz + 8ADz^2 + 2B^2z^2 + A + 2Iz^4 + 2Ez^2 + 2Fz + 2G + 2Hz^3 + 10Dz^2 + 8D^2z^4 + 4ABz + 8BDz^3 + 2A^2)G(z) + (3z \frac{dG}{dz} + 4Az \frac{dG}{dz} + 4Bz^2 \frac{dG}{dz} + 8Dz^3 \frac{dG}{dz} + 2z^2 \frac{d^2G}{dz^2}) = 0, \quad (\text{III.39})$$

En divisant l'équation (III.39) par z et par factorisation, on obtient l'équation suivante :

$$(z \frac{d^2G}{dz^2} + (3/2 + 2A + 2Bz + 4Dz^2) \frac{dG}{dz} + (2AB + 3B/2 + F + (B^2 + 5D + 4AD + E)z + (4BD + H)z^2 + (4D^2 + I)z^3 + 1/z(G + A^2 + A/2))G = 0, \quad (\text{III.40})$$

La littérature présente l'équation biconfluente de Heun sous la forme[23] :

$$Y''(z) + (1 + \alpha' - \beta'z - 2z^2)Y'(z) + \left((\gamma' - \alpha' - 2)z - \frac{\delta' + (1 + \alpha')\beta'}{2} \right) Y(z) = 0. \quad (\text{III.41})$$

β' , δ' et γ' sont les paramètres de l'équation biconfluente de Heun et z est la variable. En procédant par identification et en égalant les équations (III.40) et (III.41), on a :

$$2A + 3/2 = \alpha' + 1, \quad (\text{III.42})$$

$$2B = -\beta', \quad (\text{III.43})$$

$$4D = -2, \quad (\text{III.44})$$

Dans cette expression, D est un nombre réel égal à $-1/2$.

$$B^2 + 5D + 4AD + E = \gamma' - \alpha' - 2, \quad (\text{III.45})$$

$$4BD + H = 0, \quad (\text{III.46})$$

$$4D^2 + I = 0, \quad (\text{III.47})$$

$$\frac{1}{z}(A^2 + G + \frac{A}{2}) = 0, \quad (\text{III.48})$$

$$2AB + 3B/2 + F = -\frac{\delta' + (1 + \alpha')\beta'}{2}, \quad (\text{III.49})$$

Considérons que la solution peut être écrite sous la forme d'une série :

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (\text{III.50})$$

Substituons l'équation (III.50) dans l'équation (III.41), on obtient la relation de récurrence suivante pour les coefficients de la série détaillée :

$$a_{n+2}(n+2)(n+2+\alpha') + a_{n+1} \left(-\beta'(n+1) - \frac{\delta' + (1+\alpha')\beta'}{2} \right) + a_n(\gamma' - \alpha' - 2 - 2n) = 0. \quad (\text{III.51})$$

La série suivante doit être coupée après pour obtenir les valeurs de n suffisante. Cela implique que nous égalons les coefficients de a_{n+2} à zéro. Cela exige que les coefficients de a_{n+1} et a_n soient égale à zéro [24].

Ces considérations donnent les deux contraintes suivantes :

$$\gamma' - \alpha' - 2 - 2n = 0, \quad (\text{III.52})$$

$$-\beta'(n+1) - \frac{\delta' + (1+\alpha')\beta'}{2} = 0. \quad (\text{III.53})$$

Il est important de noter que n est le nombre quantique principal qui peut prendre la valeur zéro et décrit le type de série. Si $n = 1$, la particule est dans son état fondamental. La valeur de la constante A est :

$$A = \frac{-1/2 + \sqrt{1/4 - 4G}}{2} \quad A > 0. \quad (\text{III.54})$$

Notons que $1/4 - 4G \geq 0$, alors $G \leq \frac{1}{16}$ A ne doit pas être considéré comme négative car elle est une fonction de G . Si nous prenons la valeur négative de A , $A = \frac{-1/2 - \sqrt{1/4 - 4G}}{2}$, nous pouvons avoir les valeurs négatives. Substituons $-\frac{\delta' + (1+\alpha')\beta'}{2}$ par sa valeur $-\beta'(n+1)$ et substituons β' par $-2B$, on obtient :

$$2AB + 3B/2 + F = -\beta'(n+1) = -2B(n+1) \quad (\text{III.55})$$

Après développement de l'équation (III.55) et en mettant B en facteur, on obtient

l'équation suivante :

$$B(2A + 7/2 + 2n) = -F \quad (\text{III.56})$$

Remplaçons A avec sa valeur positive, on a :

$$B(3 + \sqrt{1/4 - 4G} + 2n) = -F \quad (\text{III.57})$$

Dans ce cas, B est donnée par la relation :

$$B = -\frac{F}{3 + 2n + \sqrt{1/4 - 4G}} \quad (\text{III.58})$$

Or $4BD = -HD = -1/2$; $H = 2B$, $B = H/2$

En égalant les deux valeurs de B , on obtient :

$$\frac{H}{2} = -\frac{F}{3 + 2n + \sqrt{1/4 - 4G}} \quad (\text{III.59})$$

Substituons G , H et F avec leur valeur, dans l'équation(III.59) on obtient la valeur de la contrainte b comme :

$$b = \frac{(3 + 2n + 2\sqrt{1/4 + 18(M + E)a})(E - M)}{4}. \quad (\text{III.60})$$

Où M est la masse de la particule, et E est l'énergie relativiste de la particule, c et a sont des constantes réelles. Remplaçons α' et γ' par leur valeur, on trouve :

$$4AD + B^2 + 5D + E = 2n \quad (\text{III.61})$$

substituons A , D , B et P avec leur valeur respective, on obtient :

$$(M - E)^2(M + E)^2 = \frac{64}{81}[2n + 2 + \sqrt{\frac{1}{4} + 18(M + E)a} + \frac{9}{2}(M + E)c] \quad (\text{III.62})$$

C'est une équation transcendente . L'énergie peut être obtenue numériquement en utilisant l'équation (III.62).

III.6 Cas spéciaux et comparaison avec les résultats de la littérature

III.6.1 Potentiel à carré inverse

Notre équation donnant l'énergie se réduit en l'énergie d'un potentiel de carré inverse quand $b = c = d = 0$,

En utilisant l'équation(III.62), et Si nous employons, $E + M \rightarrow M$, $E - M \rightarrow E$, la solution à la limite non relativiste de l'équation transcendental (III.62) est obtenu .

$$E = \pm \frac{8}{9M} \sqrt{2n + 2 + \sqrt{\frac{1}{4} + 18Ma}} \quad (\text{III.63})$$

Ce résultat n'est valide que pour $l = 0$.

III.6.2 Potentiel de Kratzer

Notre équation donnant l'énergie se réduit à l'énergie de Kratzer quand $d = c = 0$, En utilisant l'équation (III.62), on obtient l'énergie suivante :

$$E = \pm \frac{8}{9M} \sqrt{2n + 2 + \sqrt{\frac{1}{4} + 18Ma}} \quad (\text{III.64})$$

Ce qui est le résultat de la référence [114] où $l = 0$.

III.7 Fonction d'onde

Partant de l'équation (II.38), nous obtenons la fonction d'onde radiale du potentiel inverse à quatre termes. Ainsi, les termes de la fonction biconfluente de Heun est :

$$y(z) = H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', z), \quad (\text{III.65})$$

On a :

$$F(z) = z^{A+1/2} \exp(Dz^2 + Bz) G(z), \quad (\text{III.66})$$

En remplaçant z par $r^{2/3}$, on trouve :

$$F(r) = N_r r^{2/3(A+1/2)} \exp(Dr^{4/3} + Br^{2/3}) H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', r^{2/3}). \quad (\text{III.67})$$

Avec $\alpha' = 2A + 1/2$, $\beta' = -2B$, $\delta' = -2F$, $\gamma' = B^2 + E$.

La fonction de Heun est la solution de l'équation (II.62). La fonction d'onde $F(r)$ de Heun nous permet de compléter la description de l'état de la particule dans l'espace. N_r est la constante de normalisation.

Dans le but d'avoir une fonction d'onde $F(r)$ physiquement acceptable, nous allons prendre les conditions suivantes : $2A + 1 > 0$, $A > 0$, $Dr^{4/3} < 0$, $G \leq 1/16$, $D < 0$, et $Br^{2/3} < 0$. La condition $G \leq 1/16$ est directement vérifiée, $D < 0$ parce que $D = -1/2$; $A > 0$ est aussi vérifiée. La condition $B < 0$ permet que nous choisissons le paramètre

du potentiel $b < 0$.

Le tracé des courbes du potentiel avec quelques valeurs des paramètres nous donne la figure ci-dessous :

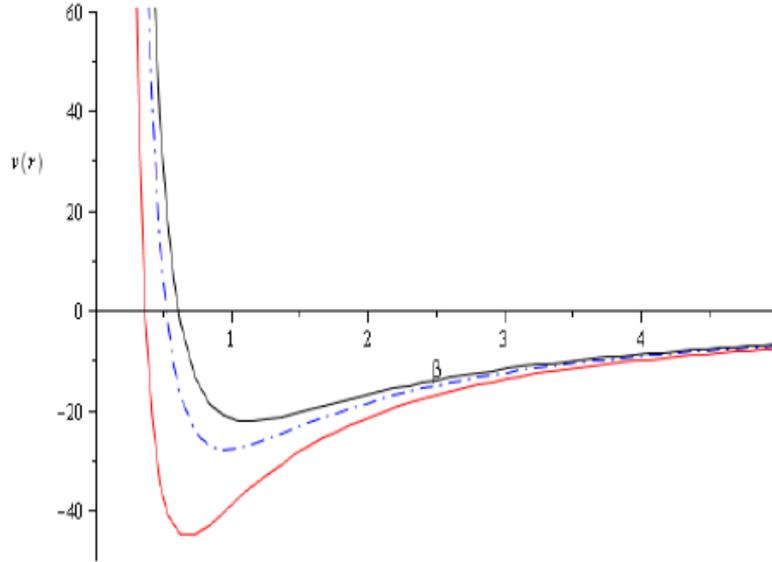


FIGURE 14 – Représentation du potentiel singulier fractionnaire avec quelques valeurs des paramètres. Courbe 1) $a = 40.05, b = -78.90, c = 0.20, d = 0.122$. Courbe 2) $a = 50.05, b = -77.90, c = 0.20, d = 0.123$. Courbe 3) $a = 55.05, b = -76.90, c = 0.19, d = 0.124$.

Ces courbes témoignent à suffisance que ce potentiel confine et présente un puits.

III.8 Courbes des fonctions d’ondes

La fonction d’onde du potentiel inverse à quatre termes est donné par :

$$F(r) = N_r r^{\frac{2A+1}{4}} \exp(D\gamma r + B\sqrt{\gamma r}) H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \sqrt{\gamma r}). \quad (\text{III.68})$$

La fonction de Heun est un polynôme. En utilisant le changement de variable $z =$

$\sqrt{\gamma r}$, on peut réécrire la fonction d'onde sous la forme :

$$F(z) = N_0 \left(\frac{z^2}{\gamma}\right)^{\frac{2A+1}{4}} \exp(Dz^2 + Bz)(C_0 + C_0 z). \tag{III.69}$$

$D = -1/2$, on trouve donc la constante de normalisation suivante :

$$N_0 = \sqrt{\frac{1/C_0 \exp(B^2/2) \gamma^{A+1/2}}{2^{-A-1} \Gamma(2A+2) D_{-2A-2} \left(\frac{-2B}{\sqrt{2}}\right) + 2^{-A-1/2} \Gamma(2A+3) D_{-2A-3} \left(\frac{-2B}{\sqrt{2}}\right) + 2^{-A-2} \Gamma(2A+4) D_{-2A-4} \left(\frac{-2B}{\sqrt{2}}\right)}} \tag{III.70}$$

Pour certaines valeurs des paramètres de la fonction d'onde, on a les courbes suivantes :

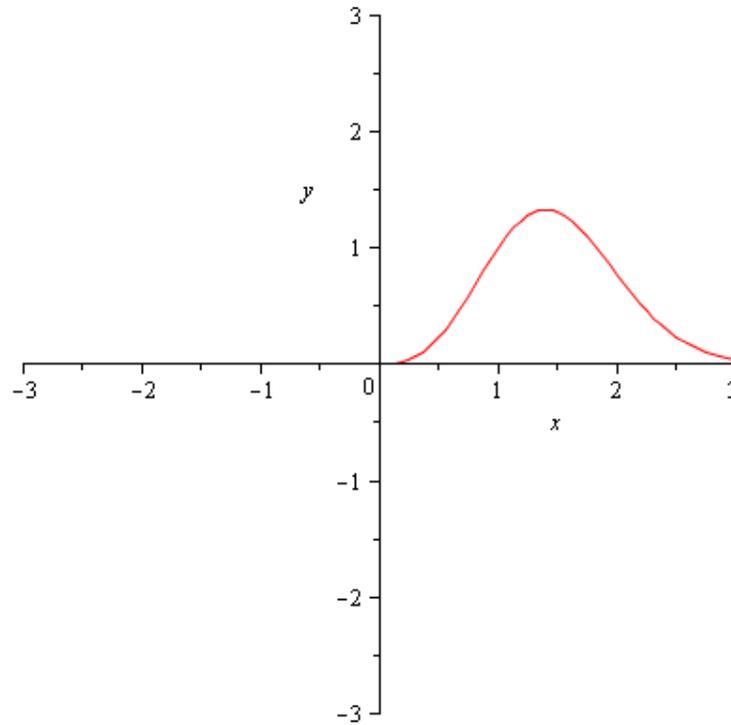


FIGURE 15 – Représentation de la fonction d'onde pour $\gamma = 1$, $N_0 = 1$, $D = -1$, $B = 1$, $A = 1$ et $C_0 = 1$.

Ici, la fonction d'onde qui est une densité de probabilité présente une courbe dont la concavité est tournée vers le bas. Cela permet de représenter le système dans une dimension finie. La concavité de la fonction est l'état du système. la fonction d'onde stationnaire correspond au produit des fonctions d'ondes stationnaires individuelles des solutions des équations aux valeurs propres.

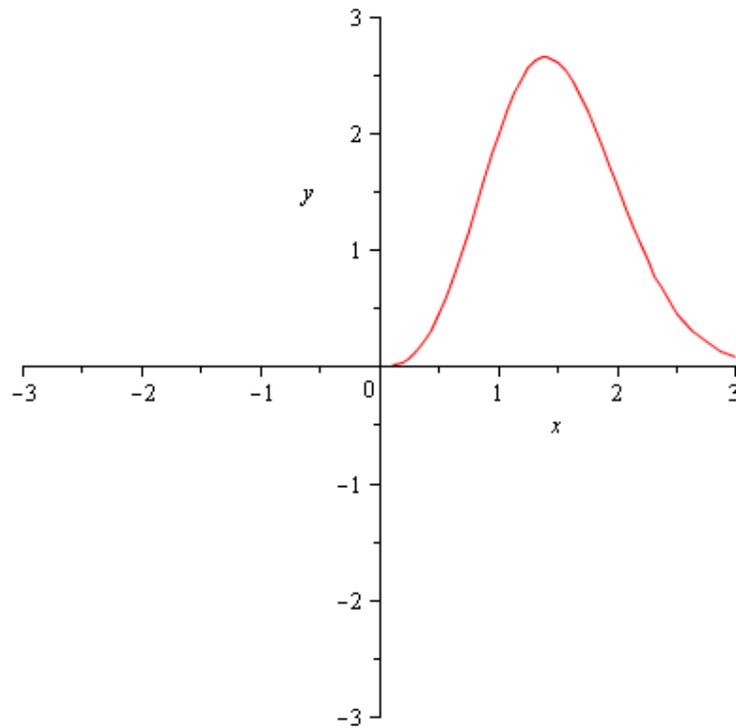


FIGURE 16 – Représentation de la fonction d’onde pour $\gamma = 1$, $N_0 = 2$, $D = -1$, $B = 1$, $A = 1$ et $C_0 = 1$.

On observe une concavité tournée vers le bas et plus rebondi. La fonction d’onde ne peut être de forme quelconque. À cause de la condition de normalisation, des lois de conservation du moment cinétique et de la parité, elle doit être une gaussienne. Elle doit être par ailleurs attractive. Avec un telle fonction, il est possible de reproduire convenablement les propriétés de particules stables.

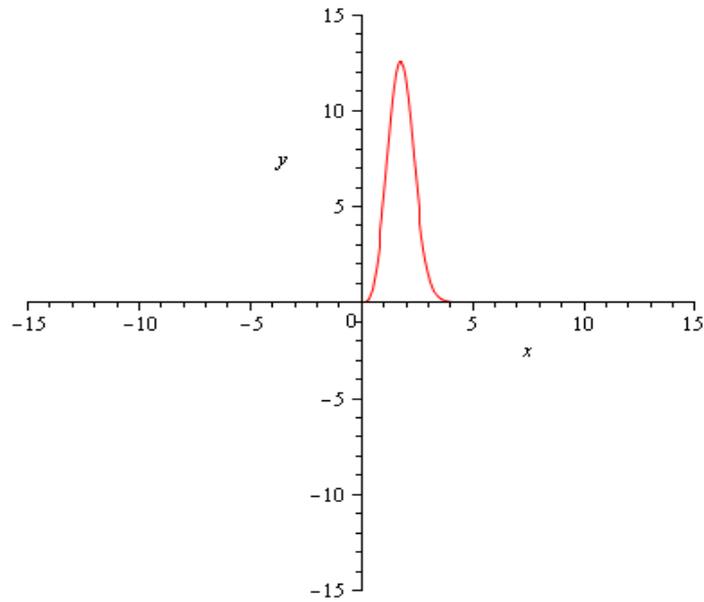


FIGURE 17 – Représentation de la fonction d’onde pour $\gamma = 1$, $N_0 = 2$, $D = -1$, $B = 2$, $A = 1$ et $C_0 = 1$.

La courbe obtenu montre une concavité tournée vers le haut et plus étroit.

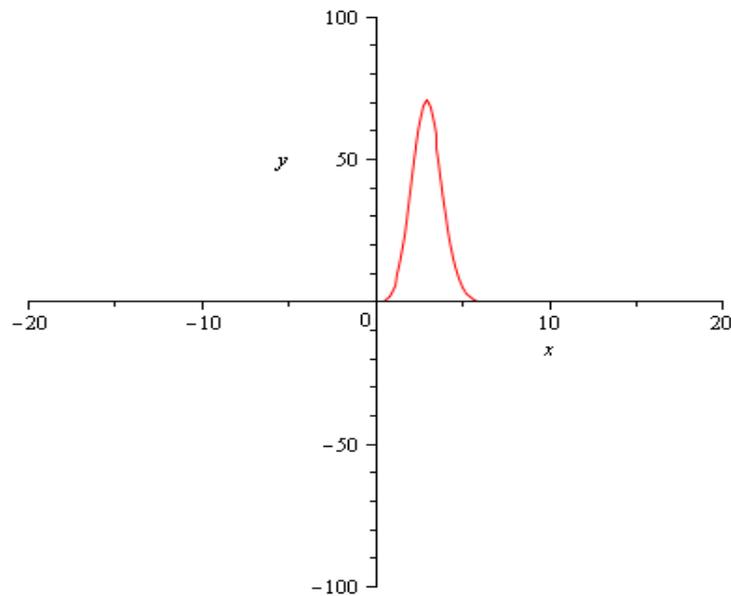


FIGURE 18 – Représentation de la fonction d’onde pour $\gamma = 1$, $N_0 = 1$, $D = -1/2$, $B = 2$, $A = 1$ et $C_0 = 1$.

On a une concavité tournée vers le haut avec un sommet décrivant un pic d’énergie.

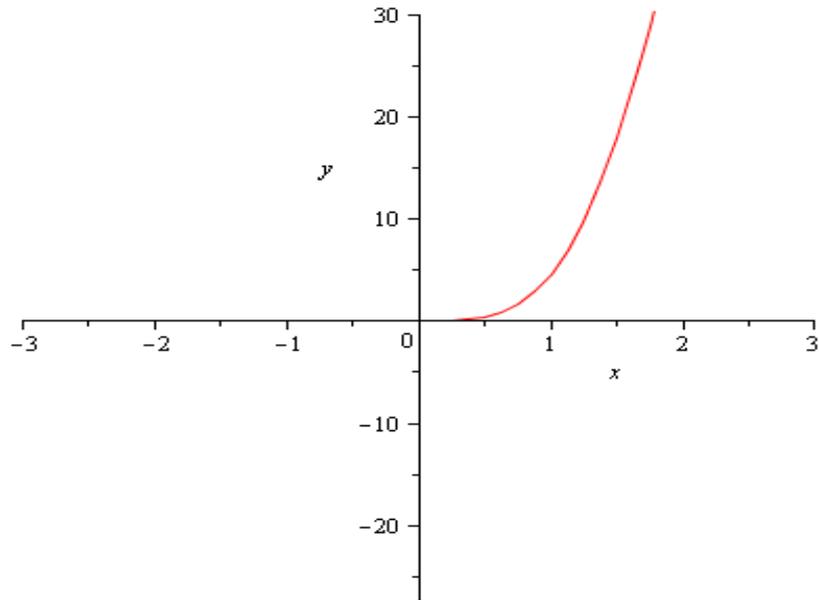


FIGURE 19 – Représentation de la fonction d’onde pour $\gamma = 1$, $N_0 = 1$, $D = -1/2$, $B=2$, $A=1$ et $C_0 = 1$.

Ici, la courbe représente un demi- puits de potentiels. Les abscisses allant de -3 à 3 et les ordonnées allant de -30 à 30 . On peut aussi dire que la fonction d’onde représente l’état du système qui le définit. Contrairement aux bandes rotationnelles pour lesquelles on observe une augmentation progressive de la valeur des transitions entre les différents états. Les transitions d’ordre un sont quasiment constantes dans une bande vibrationnelle. Il est ainsi possible que les raies à 1000 keV observées, puissent constituer une bande vibrationnelle. Il n’est cependant pas exclu qu’il existe une bande rotationnelle fondée sur les états excités d’ordre supérieur. Considérer la « *forme* » du noyau n’a de sens que si les nucléons sont pourvus d’une vitesse très supérieure à la vitesse de rotation de l’ensemble.

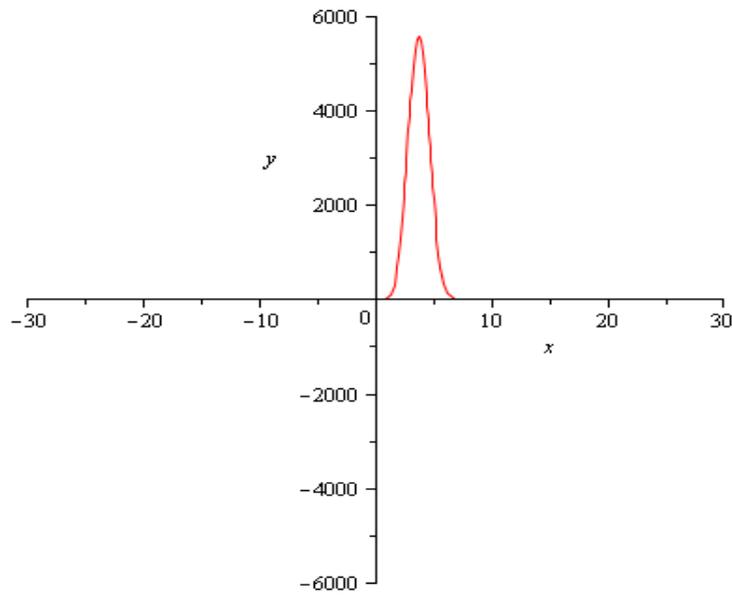


FIGURE 20 – Représentation de la fonction d’onde pour $\gamma = 1$, $N_0 = 3$, $D = -1/2$, $B = 3$, $A = 1$ et $C_0 = 1$.

La fonction d’onde présente un pic au sommet assez pointu. Les abscisses allant de -30 à 30 et les ordonnées allant de -6000 à 6000 .

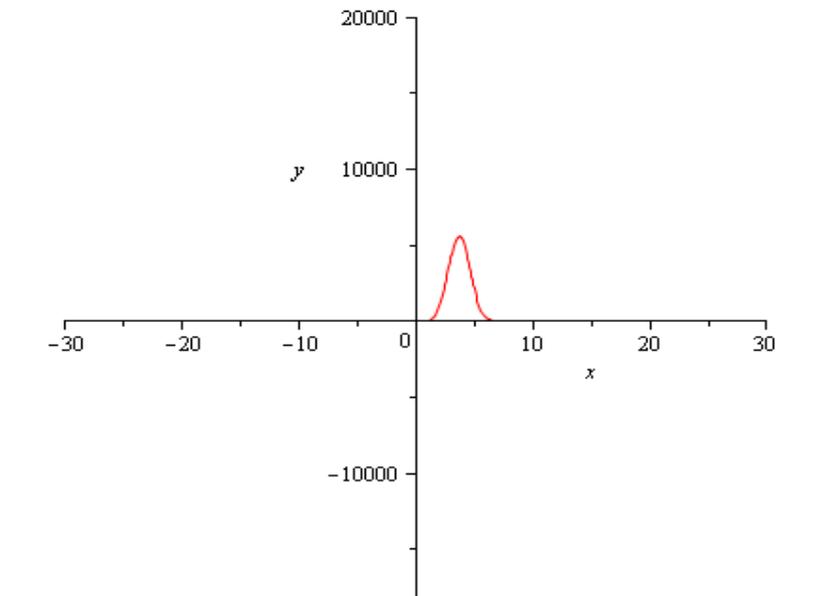


FIGURE 21 – Représentation de la fonction d’onde pour $\gamma = 1$, $N_0 = 3$, $D = -1/2$, $B = 3$, $A=1$ et $C_0 = 1$.

On obtient une gaussienne qui tend à s'applatir. Les abscisses allant de -30 à 30 et les ordonnées allant de -20000 à 20000 .

III.9 Application au potentiel de Sextic

III.9.1 Cas spéciaux et comparaison avec les résultats de la littérature

Après développement, et révisions, nous obtenons l'énergie réelle par cette méthode. Après quelques ajustements du potentiel de Sextic, il en ressort les potentiels de Davidson et Parabolique dans les cas spéciaux et cela a une application directe en physique et en chimie.

III.9.2 Potentiel de Davidson

Notre énergie reste intacte.

$$E = \pm \frac{\left[4\hbar^4(3 + 2n + \sqrt{1/4 + l(l+1) + 2a\mu/\hbar^2})^2(2n + 2 + b\mu/2\hbar^2 + \sqrt{1/4 + l(l+1) + 2a\mu/\hbar^2}) \right]^{1/2}}{\mu} \quad (\text{III.71})$$

Quand $d = c = 0$, le potentiel devient : $V(r) = a/r^2 + br^2$, ce qui est le résultat de la référence [115] où $l = 0$.

III.9.3 Potentiel Parabolique

L'énergie se réduit au potentiel parabolique quand $d = c = a = 0$, on obtient :

$$E = \pm \frac{\left[4\hbar^4(3 + 2n + \sqrt{1/4 + l(l+1)})^2(2n + 2 + b\mu/2\hbar^2 + \sqrt{1/4 + l(l+1)}) \right]^{1/2}}{\mu}. \quad (\text{III.72})$$

Le potentiel devient : br^2

Ce qui est le résultat de la référence [114] où $l = 0$.

III.10 Fonction d'onde

Partant de l'équation (II.96), nous obtenons la fonction d'onde radiale du potentiel de Sextic. Ainsi, les termes de la fonction biconfluente de Heun est :

$$y(z) = H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', z), \quad (\text{III.73})$$

On a :

$$F(z) = z^A \exp(Dz^2 + Bz)G(z), \quad (\text{III.74})$$

En remplaçant z par r^2 , on trouve la fonction d'onde de spin nul qui s'écrit :

$$F(r) = N_r r^{2A} \exp(Dr^4 + Br^2) H_b(\alpha', \beta', \gamma', \delta', r^2). \quad (\text{III.75})$$

Avec $\alpha' = 2A + 1/2$, $\beta' = -2B$, $\delta' = S + 2Q$, $\gamma' = B^2 + P$.

La fonction de Heun est la solution de l'équation (II.95). La fonction d'onde $F(r)$ de Heun nous permet de compléter la description de l'état de la particule dans l'espace . N_r est la constante de normalisation .

Dans le but d'avoir une fonction d'onde $F(r)$ physiquement acceptable, nous allons prendre les conditions suivantes :

$2A > -1/2$, $A > -1/4$, $Dr^4 < 0$, $R \leq 1/16$, $D < 0$, $A > -1/4$ and $Br < 0$, est directement vérifiée, $D < 0$ parceque $D = -1/2$; $A > -1/4$ est aussi vérifiée. La condition $B < 0$ permet que nous choissions le paramètre du potentiel $c > 0$.

Le tracé de la courbe du potentiel avec quelques valeurs des paramètres du potentiel est :

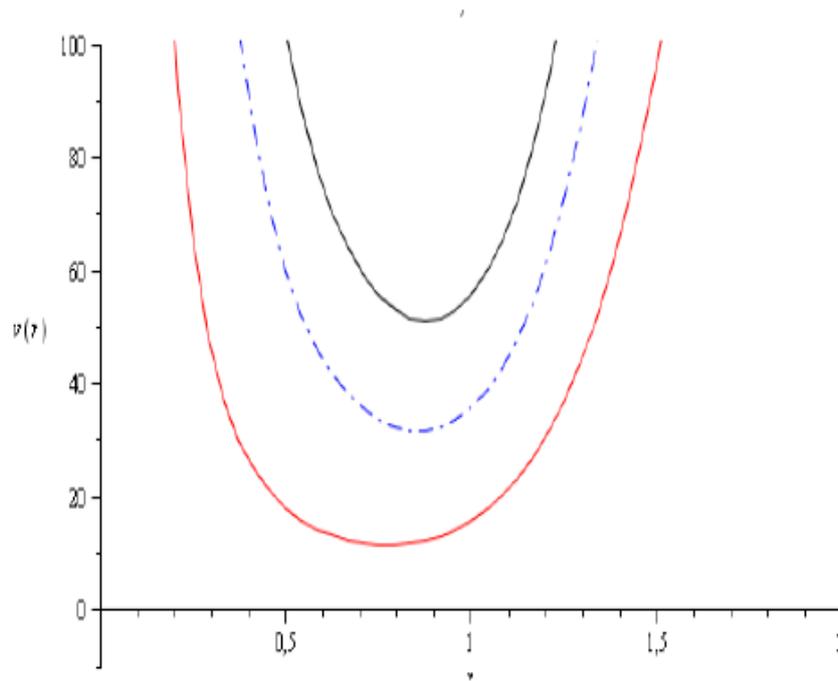


FIGURE 22 – Représentation du potentiel de Sextic avec quelques paramètres. Courbe 1) $a = 4.05, b = 7.90, c = -5.20, d = 9.122$. Courbe 2) $a = 14.05, b = 17.90, c = -15.20, d = 19.122$. Courbe 3) $a = 24.05, b = 27.90, c = -25.20, d = 29.122$.

Ces courbes montrent bien un potentiel physiquement acceptable. Car il existe un extrêmmum. On peut donc dire que ce potentiel fractionnaire de type sextic nous présente un puits qui permet sa validité.

III.11 Spectre de masse

On dérive le spectre de masse pour un système de quarkonium lourd tel que le charmonium et bottonium dont le quark et l'antiquark ont même saveur. La relation donnant le spectre de masse est donné par :

$$M = m_1 + m_2 + E, \quad (\text{III.76})$$

mais $m_1 = m_2 = m_b$, et

$$M = 2m_b + E. \quad (\text{III.77})$$

À partir de la relation (III.72), on calcule les différentes valeurs du spectre d'énergie et on compare avec ceux de la littérature. Ce tableau montre que la diminution de quelques MeV du gap potentiel, combinée ou pas avec une diminution de 0,01 MeV du gap proton, permet de reproduire l'énergie. Cette faible évolution des gaps engendre, toutefois, une augmentation de la déformation et une chute de l'énergie du premier état excité de la molécule de HCl. Le tableau 1 montre que, l'énergie inclusive n'est pas une information suffisante pour conclure sur l'évolution des propriétés intrinsèques du noyau. Elles correspondent aux gaps obtenus par les calculs modèle en couches utilisant l'interaction de Coulomb.

TABLE 1 – Comparaison des valeurs propres de l'énergie pour le cas spécial (potentiel parabolique) pour HCl(eV).

n	l	E_{nergie} de <i>Sextic</i>	Ref[114]	Ref[116]
0	0	-4.580573130	-4.541847882	-4.541848211101
1	0	-4.391701333	-4.393727024	-4.393727956046
	1	-4.392722570	-4.391292904	-4.391293850595
2	0	-4.255750726	-4.252735636	-4.252737112329
	1	-4.257670351	-4.250417718	-4.250419208735
	2	-4.243323367	-4.245789526	-4.245791052967
3	0	-4.115199817	-4.118423404	-4.118425371585
	1	-4.110119139	-4.116214408	-4.116216389518
	2	-4.1159007861	-4.111803616	-4.111805631214
	3	-4.109965792	-4.105205380	-4.105207449232
4	0	-3.998897166	-3.990375014	-3.990377425087
	1	-3.981837655	-3.988268222	-3.988270645562
	2	-3.987024743	-3.984061424	-3.984063879462
	3	-3.976439828	-3.977768152	-3.977770657456
	4	-3.961056114	-3.969408570	-3.969411138650
5	0	-3.86104069	-3.868206938	-3.868209749404
	1	-3.866534899	-3.866196140	-3.866198963636
	2	-3.868732146	-3.862180950	-3.862183802008
	3	-3.998897166	-3.990375014	-3.990377425087
	4	-3.854089847	-3.856174134	-3.856177032746
	5	-3.840863365	-3.848194720	-3.848197679994

Les tableaux 1, 2, 5, 6 présentent les énergies obtenu à partir du potentiel de Sextic pour différentes valeurs des nombres quantiques n et l respectivement pour les molécules de HCl, LiH, H_2O et O_2 . On remarque que ces valeurs sont en concordance avec les travaux de Ikhadair [116] en 2009 et Ikot en 2019[114] et .

Les tableaux 3, 4, 7 et 8 présentent le spectre de masse du charmonium et du bottomonium. On remarque la similarité entre nos résultats et ceux obtenus par Ibekwe en 2020 [117] et Omugbe en 2020 [118].

TABLE 2 – Comparaison des valeurs propres de l'énergie pour le cas spécial (potentiel parabolique) pour LiH(eV).

n	l	E_{nergie} de <i>Sextic</i>	Ref[114]	Ref[116]
0	0	-2.461240799	-2.467293778	-2.467310304097
1	0	-2.389958192	-2.375802636	-2.375819214406
	1	-2.377563123	-2.374091378	-2.374107972668
2	0	-2.289984761	-2.289307674	-2.289324266253
	1	-2.286911526	-2.287688996	-2.287705602815
	2	-2.285729422	-2.284458584	-2.284475215373
3	0	-2.205729422	-2.207451626	-2.207468200275
	1	-2.200171012	-2.205918968	-2.205935555783
	2	-2.201405667	-2.202860140	-2.202876749122
	3	-2.194532489	-2.198288040	-2.198304679122
4	0	-2.129711620	-2.129908602	-2.129925128672
	1	-2.129711620	-2.128455976	-2.128472514560
	2	-2.127522781	-2.125556792	-2.125573350591
	3	-2.123691134	-2.121223116	-2.121239701434
	4	-2.118606020	-2.115472884	-2.115489505754
5	0	-2.058450004	-2.056380834	-2.056397286593
	1	-2.051374381	-2.055002762	-2.055019226505
	2	-2.059664513	-2.052252304	-2.052268785922
	3	-2.040795786	-2.048140758	-2.048157264859
	4	-2.043995899	-2.042684928	-2.042701466576
	5	-2.034353226	-2.035906942	-2.035923524667

TABLE 3 – Spectre de masse du charmonium avec la masse $m_c = 1.209$.

Etat	Masse de <i>Sextic</i>	Ref[117]	Ref[118]	Exp
1 s	3.09123456	3.0959	3.098	3.096
2 s	3.672485732	3.6858	3.689	3.686
2 p	3.874354321	3.7565	3.784	—
3 s	4.041441337	4.3228	4.041	4.040
4 s	4.347482101	4.9894	4.266	4.263

TABLE 4 – Spectre de masse du bottomonium avec la masse $m_b = 4.822$.

Etat	Masse de Sextic	Ref[117]	Ref[118]	Exp
1 s	9.461786743	9.5151	9.461	9.460
2 s	10.024873478	10.0180	10.023	10.023
2 p	10.098451567	10.0944	10.110	10.260
3 s	10.358743784	10.4414	10.365	10.355
4 s	10.612345878	10.8577	10.588	10.580

TABLE 5 – Comparaison des valeurs propres de l'énergie pour le cas spécial(potentiel parabolique) pour H_2O (eV).

n	l	Energie de Sextic	Ref[114]	Ref[116]
0	0	-5.371240799	-5.377293778	-5.377310304097
1	0	-5.489958192	-5.485802636	-5.485819214406
	1	-5.487563123	-5.484091378	-5.484107972668
2	0	-5.289984761	-5.289307674	-5.289324266253
	1	-5.286911526	-5.287688996	-5.287705602815
	2	-5.285729422	-5.284458584	-5.284475215373
3	0	-5.215729422	-2.217451626	-2.217468200275
	1	-5.220171012	-5.225918968	-5.225935555783
	2	-5.231405667	-5.232860140	-5.232876749122
	3	-5.194532489	-5.198288040	-5.198304679122
4	0	-5.149711620	-5.149908602	-5.149925128672
	1	-5.139711620	-5.138455976	-5.138472514560
	2	-5.137522781	-5.135556792	-5.135573350591
	3	-5.143691134	-5.141223116	-5.141239701434
	4	-5.108606020	-5.105472884	-5.105489505754
5	0	-5.068450004	-5.066380834	-5.066397286593
	1	-5.061374381	-5.065002762	-5.065019226505
	2	-5.069664513	-5.062252304	-5.062268785922
	3	-5.030795786	-5.038140758	-5.038157264859
	4	-5.063995899	-5.062684928	-5.062701466576
	5	-5.024353226	-5.025906942	-5.025923524667

TABLE 6 – Comparaison des valeurs propres de l'énergie pour le cas spécial(potentiel parabolique) pour O_2 (eV).

n	l	E_{nergie} de <i>Sextic</i>	Ref[114]	Ref[116]
0	0	-7.571240799	-7.577293778	-7.577310304097
1	0	-7.409958192	-7.405802636	-7.405819214406
	1	-7.407563123	-7.394091378	-7.394107972668
2	0	-7.239984761	-7.239307674	-7.239324266253
	1	-7.276911526	-7.277688996	-7.277705602815
	2	-7.295729422	-7.294458584	-7.294475215373
3	0	-7.235729422	-7.237451626	-7.237468200275
	1	-7.200171012	-7.205918968	-7.205935555783
	2	-7.211405667	-7.212860140	-7.212876749122
	3	-7.184532489	-7.188288040	-7.188304679122
4	0	-7.179711620	-7.179908602	-7.179925128672
	1	-7.139711620	-7.138455976	-7.138472514560
	2	-6.147522781	-6.145556792	-6.145573350591
	3	-6.133691134	-6.131223116	-6.131239701434
	4	-6.128606020	-6.125472884	-6.125489505754
5	0	-6.088450004	-6.086380834	-6.086397286593
	1	-6.071374381	-6.075002762	-6.075019226505
	2	-6.059664513	-6.052252304	-6.052268785922
	3	-6.050795786	-6.058140758	-6.058157264859
	4	-6.043995899	-6.042684928	-6.042701466576
	5	-6.044353226	-6.045906942	-6.045923524667

TABLE 7 – Spectre de masse du charmonium avec la masse $m_c = 1.209$.

Etat	Masse de <i>Sextic</i>	Ref[117]	Ref[118]	Exp
1 s	2.07123456	2.0759	2.078	2.076
2 s	2.772485732	2.7858	2.789	2.786
2 p	2.774354321	2.7565	2.784	—
3 s	3.061441337	3.06228	3.061	3.060
4 s	3.447482101	3.4494	3.466	3.463

TABLE 8 – Spectre de masse du charmonium avec la masse $m_c = 1.209$.

Etat	Masse de Sextic	Ref[117]	Ref[118]	Exp
1 s	10.46123456	10.4659	10.4698	10.466
2 s	11.072485732	11.07858	11.0689	11.0686
2 p	11.094354321	11.09565	11.09784	11.0945
3 s	11.341441337	11.3428	11.341	11.340
4 s	11.367482101	11.36894	11.366	11.263

III.12 Ecart type

L'écart type est donné par :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (E_i(exp) - E_i(th))^2}{M}}. \quad (\text{III.78})$$

Pour le tableau 4, $m_b = 4.822$ et l'écart-type est égal à 0.011370871

Pour le tableau 3, $m_c = 1.209$ et l'écart-type est égal à 0.005209455.

Pour le tableau 7, $m_b = 4.822$ et l'écart-type est égal à 0.009461238

Pour le tableau 8, $m_c = 4.822$ et l'écart-type est égal à 0.046810897

Les tableaux 3, 4, 7 et 8 présentent les valeurs numériques de l'équation (III.77) pour le système quarkonium charmonium et bottomonium. Ces résultats du spectre de masse sont en concordance avec les valeurs expérimentales et celles obtenu lors des travaux théoriques similaires de Ibekwe et Omugbe en 2020.

III.13 Tracé du spectre de masse

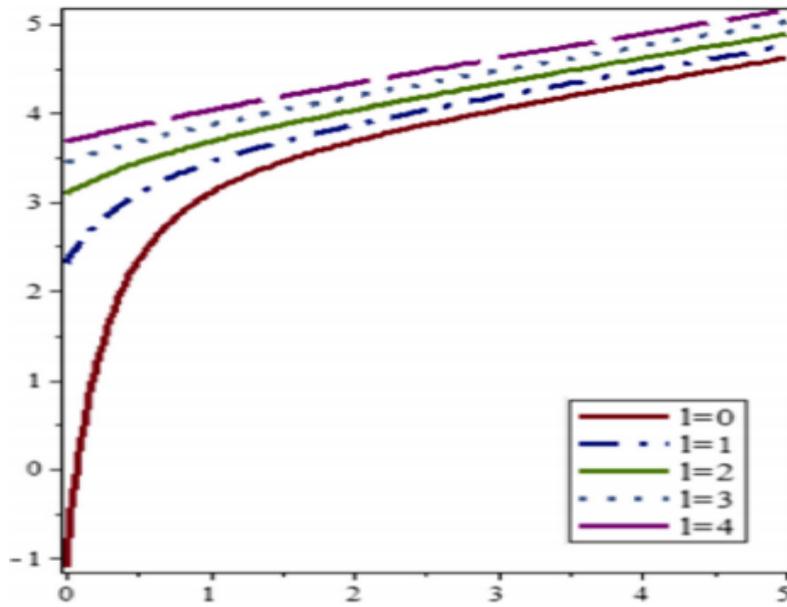


FIGURE 23 – Représentation du spectre de masse charmonium pour certains nombres quantiques.

Ici, le spectre d'énergie du charmonium pour $l = 4$ dans le cas spécial du potentiel parabolique à la même allure et est en concordance avec les valeurs théoriques pour $l = 1, l = 2$ et $l = 3$

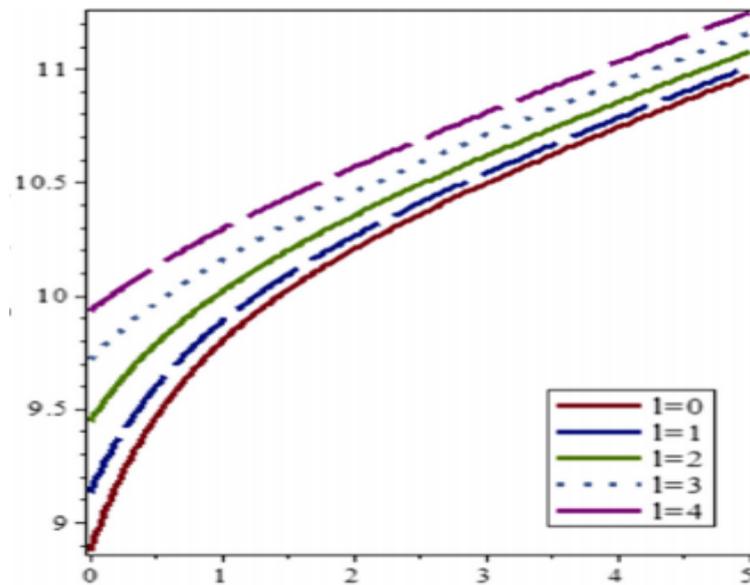


FIGURE 24 – Représentation du spectre de masse bottomonium pour certains nombres quantiques.

Ici, le spectre d'énergie du bottomonium pour $l = 4$ dans le cas spécial du potentiel Parabolique a la même allure et est en concordance avec les valeurs théoriques pour $l = 1, l = 2$ et $l = 3$

III.14 Discussion

Cette expérience a analytiquement résolu l'équation de Schrödinger radiale avec le potentiel de Sextic en utilisant la méthode des équations bi-confluentes de Heun et les états liés du spectre d'énergie de l'équation de Schrödinger radial sont obtenus. Pour valider la méthode employée dans cette étude, nous déduisons les potentiels de Davidson et Parabolique comme cas spéciaux et aussi les différentes valeurs numériques des cas spéciaux pour les molécules diatomiques de HCl, LiH, H_2O et de O_2 pour les différents nombres quantiques n et l et ces résultats sont en accord avec les travaux de Ikot en 2019 et Ikhadair en 2009 et d'autres études théoriques du même potentiel. Les tableaux 1 et 2 montrent la comparaison numérique du potentiel parabolique pour HCl et LiH et aussi pour les travaux théoriques semblables. Il est observé dans les tableaux 1 et 2 que les valeurs numériques du potentiel Parabolique pour les molécules diatomiques de HCl et de LiH deviennent de plus en plus grande lorsque les nombres quantiques deviennent aussi grand. Les tableaux 3 et 4 présentent les valeurs numériques du spectre de masse pour le système quarkonium charmonium et bottomonium respectivement. Les résultats du spectre de masse sont en concordance avec les valeurs expérimentales et les travaux théoriques semblables.

III.15 Tracé des énergies

L'équation transcendantal de l'énergie est donnée par :

$$\frac{16(M + E)c^2}{(3 + 2n + 2\sqrt{1 + 8(M + E)b})^2} - 2a - \frac{(M - E)^{1/2}(n + 1 + \sqrt{1 + 8(M + E)b})}{(M + E)^{1/2}} = 0. \quad (\text{III.79})$$

Pour les valeurs des paramètres de cette équation transcendental tous différents de zéro, on a la courbe suivante :

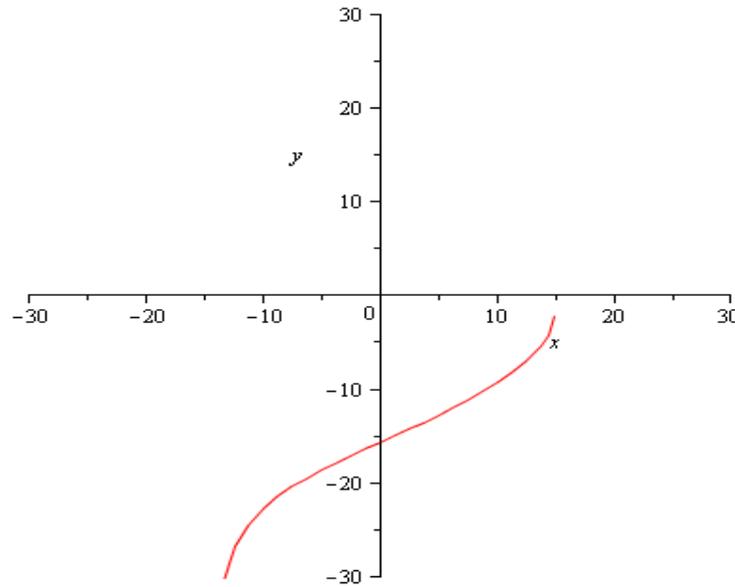


FIGURE 25 – Représentation de l'énergie pour les paramètres $n=1$, $M=15$, $a=1$, $b=1$, $c=1$.

Ici, l'énergie a une concavité tournée vers le haut. Pour $b = c = d = 0$, on aura l'énergie de Coulomb. Et cela explique la stabilité du noyau. L'énergie de Coulomb est donnée par la relation :

$$2a + \frac{(2+n)(M-E)^{1/2}}{(M+E)^{1/2}} = 0. \quad (\text{III.80})$$

La courbe qui suit présente l'énergie en fonction des paramètres et pour les molécules de Chlorure d'hydrogène. Elle a été établie à partir des valeurs disponibles dans la littérature et complétée par les résultats obtenus dans cette expérience. nous avons vu que les noyaux possédant un nombre magique de neutrons et/ou de protons ont des propriétés de surstabilité par rapport aux noyaux situés autour. Nous avons également énuméré un ensemble d'observables qui font ressortir la caractère magique de ces noyaux.

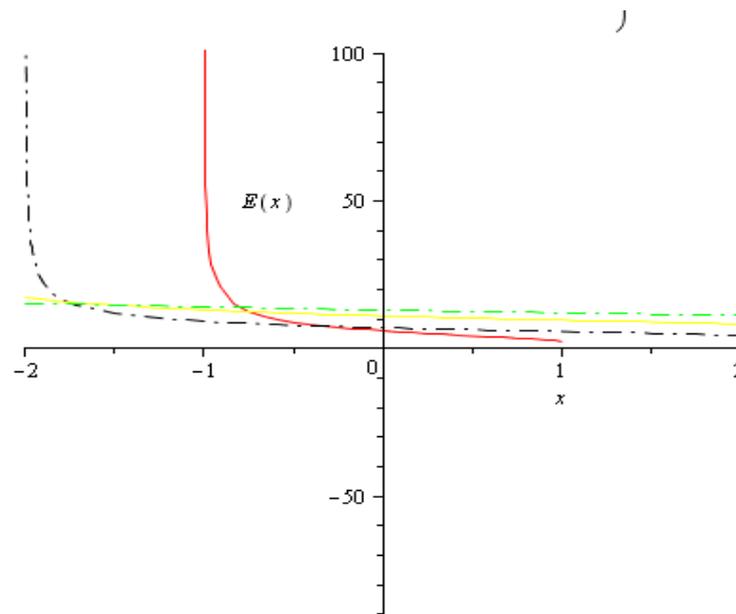


FIGURE 26 – Représentation de l'énergie de Coulomb pour les valeurs des paramètres ; courbe en rouge $n = 2, M = 1, a = 1$; courbe en noir $n = 1, M = 2, a = 2$; courbe en jaune $n = 3, M = 3, a = 3$. courbe en vert $n = 5, M = 7, a = 3$.

La courbe en rouge montre que, on a une énergie qui tend à s'annuler lorsque le paramètre radial est 1 alors on peut dire que l'état du système tend à devenir d'abord plus stable puis à s'annuler. La courbe en noir montre que, lorsque le paramètre radial a devient égal à la masse, avec le nombre quantique n restant constant, la courbe de l'énergie devient plus excentrée puis tend à s'annuler. Pour le cas de la courbe en jaune, lorsque le nombre quantique n , la masse M et le paramètre radial ont la même valeur qui est 3, on a une courbe de l'énergie qui décrit une stabilité et une constante de l'énergie. L'énergie tend à devenir constante avec une concavité tendant vers le haut. Sur la courbe en vert, On observe une énergie qui tend à devenir constante lorsque la masse de la particule devient grande. La mécanique quantique permet de résoudre les problèmes de l'infiniment petit qui réside en la description de l'état d'un système par l'équation d'état de Schrödinger qui décrit avec précision la position de particule de M dans l'espace. Donc la masse est un paramètre physique important dans la description des phénomènes quantiques.

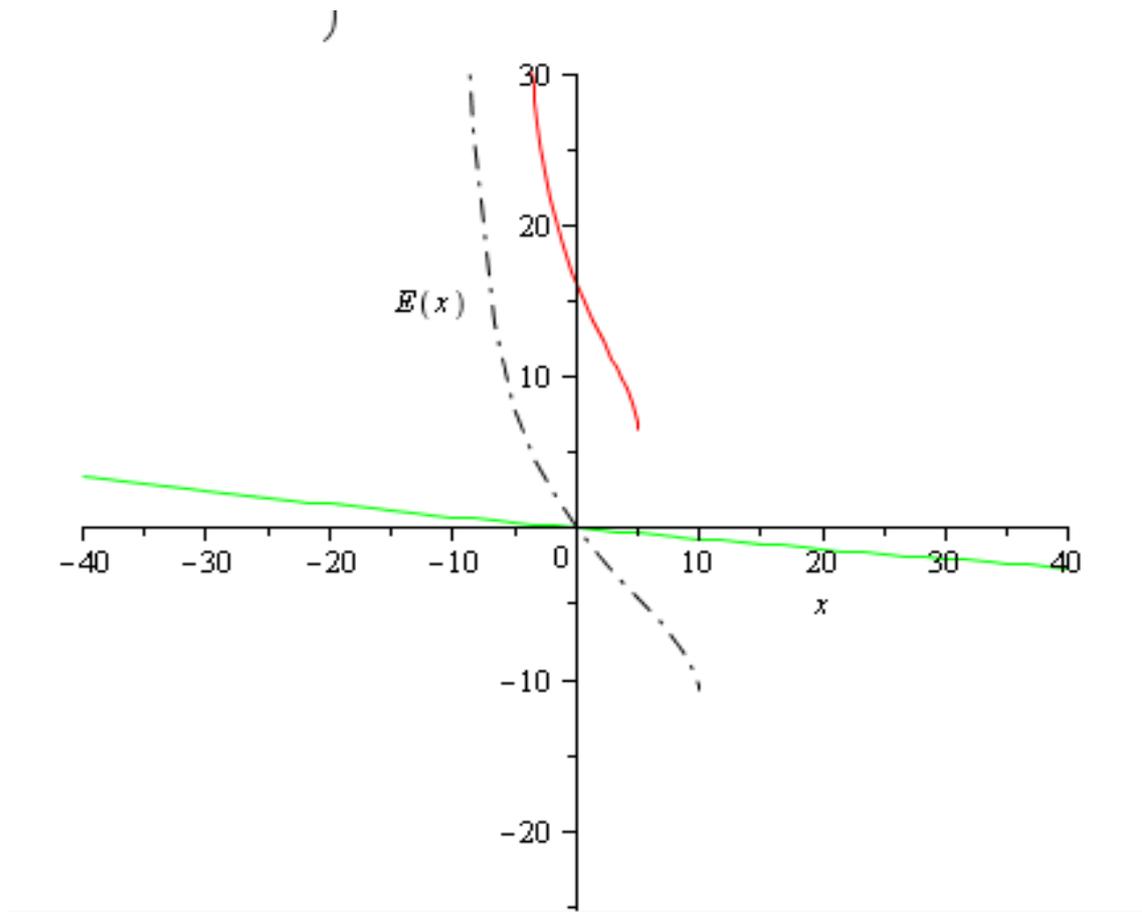


FIGURE 27 – Représentation de l'énergie de Coulomb ; courbe en rouge $n=8$, $M=5$, $a=3$; courbe en noir : $n=9$, $M=10$, $a=-5,5$; courbe en Vert : $n=9$, $M=150$, $a=-5,5$

La courbe rouge montre que, lorsqu'on diminue la masse de la particule, l'énergie devient symétrique lorsque le nombre quantique devient un peu grand et la masse diminuant, la symétrie de l'énergie est observée. La courbe en noir montre que, lorsque le paramètre radial a est négatif, la masse et le nombre quantique prenant pour valeurs respectives : 10 et 9, l'énergie décrit une courbe symétrique par rapport à l'origine. Celle en vert montre que, l'énergie décrit une droite oblique et rencontre l'axe des ordonnées.

L'énergie décrit une droite oblique et rencontre l'axe des ordonnées.

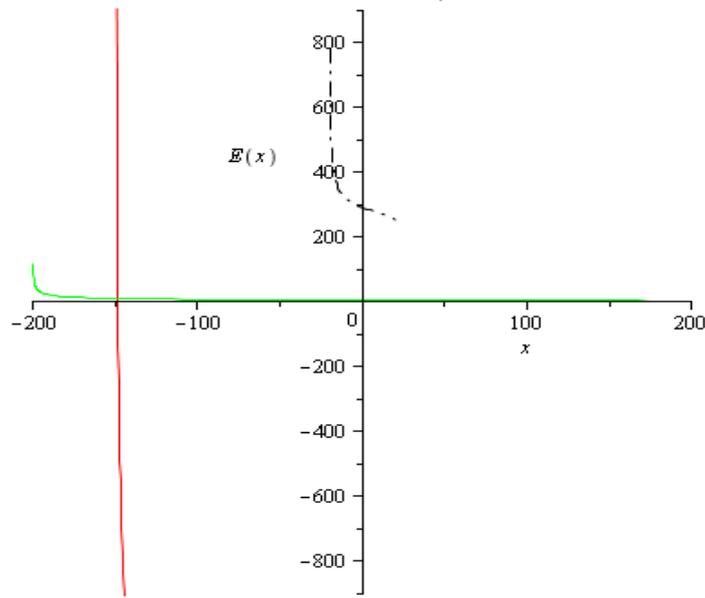


FIGURE 28 – Représentation de l'énergie de Coulomb ; courbe en rouge $n=149$, $M=150$, $a = -1000$; courbe en vert $n=1$, $M=200$, $a=1$ et la courbe en noir : $n=38$, $M=20$, $a=125$.

Sur la courbe en rouge, l'énergie décrit une droite verticale preuve que l'énergie est constante. La courbe en vert décrit une décroissance radioactive et passe inaperçu à l'origine et va s'annuler vers l'infini. La courbe en noir montre que l'énergie décrit une courbe de décroissance et rencontre l'axe des ordonnées.

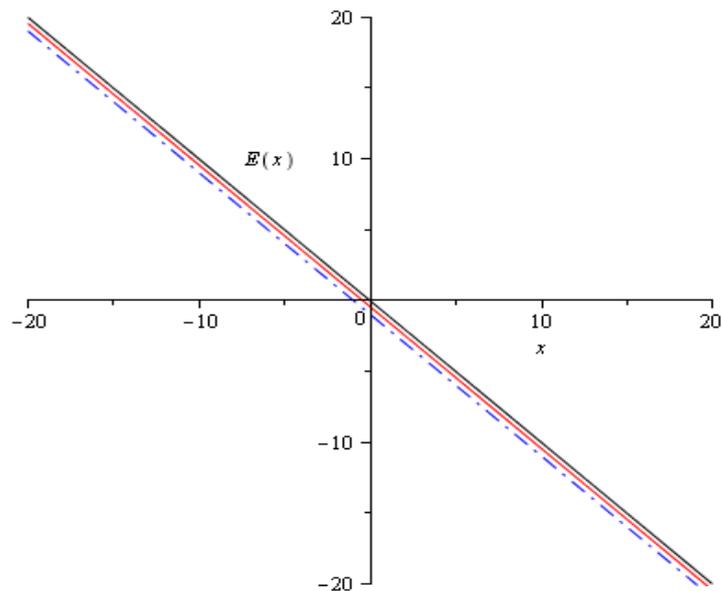


FIGURE 29 – Représentation de l'énergie de Coulomb ; courbe en rouge pour $n=1$, $M=1$, $a = 1$; courbe en bleu pour $a= 2$, $M= 1$, $n=2$; courbe en noir pour $a=0$, $M=1$, $n=1$.

En faisant $E + M \rightarrow M, E - M \rightarrow E$, la solution de la limite non relativiste de l'équation transcendental donne la droite la figure 31. $E = -\frac{4Ma^2}{(n+2)^2}$ Dans ce cas, les courbes donnant l'énergie ne peuvent que décrire des droites. C'est le cas de la figure en rouge, qui est la première bissectrice qui passe par l'origine. Pour la courbe en bleu, l'énergie décrit une droite affine lorsque les nombres quantiques et a sont égaux. Pour la courbe en noir, On observe également que l'énergie décrit une droite.

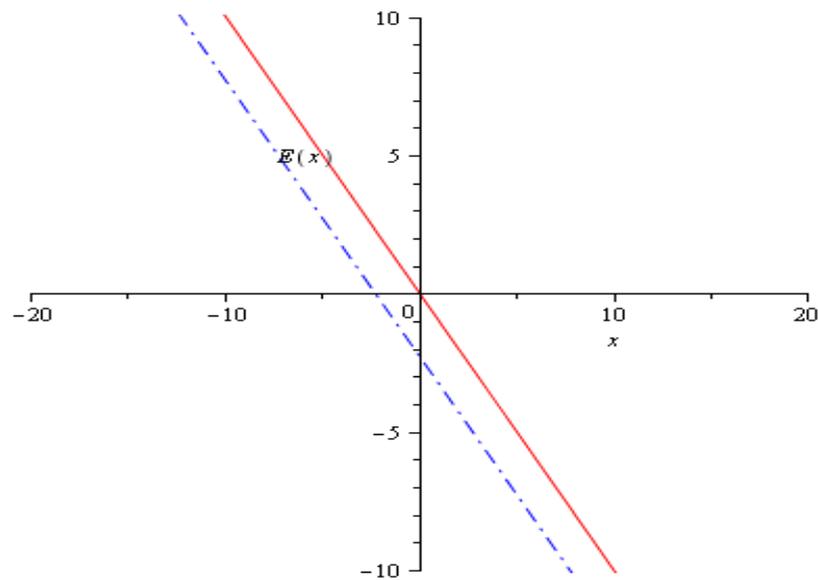


FIGURE 30 – Représentation de l'énergie de Kratzer ; courbe en rouge pour $n=1, b=1, M=1, a=0$; courbe en bleu pour $n=3, b=1, M=1, a=2$

L'allure est celle d'une droite affine où l'énergie est une droite affine lorsque tous ses paramètres sont tous non nuls sauf a qui est nul.

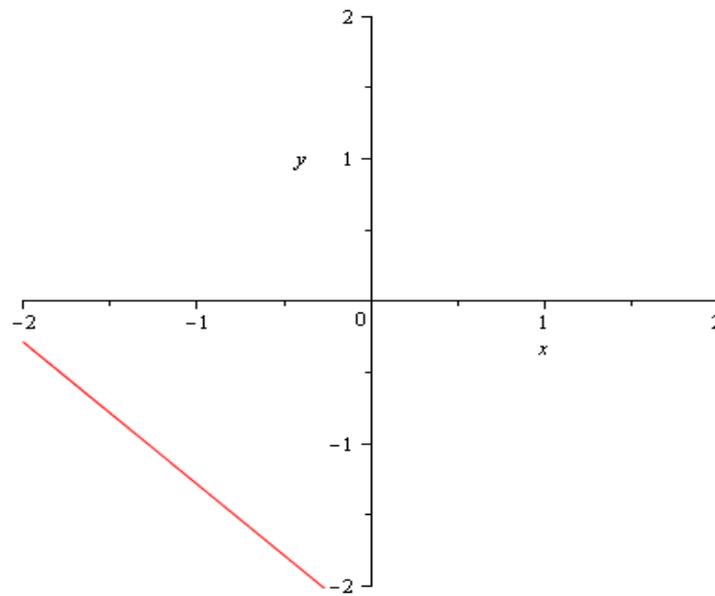


FIGURE 31 – Représentation de l'énergie de Kratzer pour $n=3$, $b=1$ $M=1$, $a = 2$.

Dans ce cas l'énergie est une droite oblique qui change de concavité. La particule est alors excitée car son nombre quantique est devenu plus grand. Ce qui explique le fait que lorsque le n devient grand, le noyau devient plus étiré.

III.16 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé les énergies, les fonctions d'ondes, le spectre de masse du bottomonium et du charmonium. Nous avons tracé les énergies et les fonctions d'ondes associées. Nous avons également comparé nos résultats avec les travaux théoriques d'investigations similaires. Il en ressort que, après les travaux menés par les physiciens sur l'équation de Klein-Gordon leurs résultats n'étaient pas très proches des travaux expérimentaux. Notre modèle à travers nos résultats se rapproche mieux de l'expérience que leurs résultats pour avoir utilisé la méthode des équations biconfluentes de Heun.

Conclusion Générale et perspectives

Dans ce travail, il était question de déterminer les propriétés, les interactions et les énergies nucléaires de l'équation de Klein-Gordon par la méthode des équations biconfluentes de Heun en utilisant un potentiel de type fractionnaire développé par Bose et Lemieux [28]. Le premier chapitre a été consacré à la revue de la littérature sur les modèles nucléaires, le chapitre deux a présenté le matériel utilisé ainsi que les méthodes de résolution des équations biconfluentes de Heun. Le troisième chapitre quant-à-lui a présenté les résultats obtenus et une discussion a été présentée. Il en ressort que, en partant de l'historique de la connaissance du noyau atomique, des propriétés du noyau atomique, des modèles nucléaires, des travaux précédents sur l'équation de Klein-Gordon on remarque que ces travaux ont eu des limites sur la résolution de l'équation de Klein-Gordon avec sa partie angulaire. En utilisant les particules de bottomonium et charmonium et aussi les molécules de HCl, LiH, O_2 , et H_2O , le spectre d'énergie et la fonction d'onde correspondante ont été déterminés. Par utilisation du potentiel de Sextic, on a trouvé les énergies correspondantes et on a comparé nos résultats à ceux de Ikot[114] et Ikhdair[116] et il est constaté une ressemblance. De plus le spectre de masse du bottomonium et le charmonium a été obtenu et nos résultats ont été comparés à ceux obtenus par Ibekwe[117] et Omugbe[118] et on observe une ressemblance. Les résultats obtenus sont meilleurs et se rapprochent de l'expérience. L'écart type calculé montre à suffisance que nos résultats théoriques obtenus sont en concordance avec ceux réalisés expérimentalement.

Toutefois, nous constatons que la résolution de l'équation de Klein-Gordon n'est pas aisée et présente des limites, entre autre la résolution de la partie angulaire. C'est ainsi que nous souhaitons dans l'avenir passer à travers des stations qui nous conduisent vers

une équation déduite selon le principe d'équivalence et qui sert à étudier des particules relativistes où l'énergie au repos n'est plus nulle et où le spin l est différent de zéro.

Publication issue de la thèse

[1] E. Anemena Etoga, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, Klein-Gordon equation with a four inverse power term potentials , Modern Physics Letters A.2050080. DOI :10.1142/S0217732320500807

Bibliographie

- [1] A. Bohr and B. Mottelson, Nuclear Structure, Benjamin, San Francisco (1975).
- [2] E. Schrödinger, Phys. Rev. **28**(1926), 1049.
- [3] O. Manasreh, Semiconductor Heterojunctions and Nanostructures, (McGraw-Hill Professional, New York (2005)).
- [4] A. Gustavo and T. Orlando, J. Math. Chem.**37**(2005), 389.
- [5] R. D. Levine, Quantum Mechanics of Molecular Rate Processes, Dover, New York 1999.
- [6] G. Chen, D. A. Church, B-G. Englert, C. Henkel, B. Rohwedder, M. O. Scully and M. S. Zubairy, Quantum Computing Devices, Principles, Designs, and Analysis, Chapman and Hall/CRC, New York 2007.
- [7] R. Markus, Atomistic Approaches in Modern Biology, Springer, New York 2007.
- [8] P. A. M. Dirac. A theory of electrons and protons proceeding of the royal society of condon A 1930 **126**, 360-365.
- [9] M. Chabab, A. Lahbas, M.Oulne. High Energy Physics and Astrophysics Laboratory Cadi Ayyad University, P.O.B 2390, Marrakesh **40000**,Morocco.
- [10] M. Feynman Introduction to the particles physics. University Laval. [http : // Phy. Ulaval.Ca/marleau, intl /fr/ marleau-ppnotes.pdf](http://Phy.Ulaval.ca/marleau,intl/fr/marleau-ppnotes.pdf).
- [11] M. Kapil, K. Bikash, Behera, K. Prasanta, Panigrahi. arxiv, **1807.00521v1** [quantum-phy] 2 Jul 2018.
- [12] C. Fabre, C. Antoine, N. Treps, Dunod, **2015** ISBN 978-2-10-072021-7.
- [13] H. M. Tang, G.C. Liang, L.H.Zhang, F. Zhang, F. Zhao and C.S. Jia, Can. J. Chem; **92**, **201** (2014).

- [14] G. F. Wei, CY. Long, X. Y. Duang and S. A. Dong 2008 Phys. Scr. **7703** 5011.
- [15] A. Arda, S. C. Rand Telcam 2010 Chin. J. Phys. **48**. 27.
- [16] S.H. Dong and G. F. Wei 2010 Phys. Lett. **B** 686288.
- [17] C. y. Chen and S.H. Dong 2005 Phys Lett. **A** 305374.
- [18] D. Agboola, Y.Z.Zhang, J.Phys.A, Math.Theor. 46, **505301** (2013).158.
- [19] E. Predazzi, T.Regge, N. Cimento 24, **518** (1962).
- [20] A. S. Davydov, A.A. Chaban, Nucl. Phys. 20, **499** (1960).
- [21] L. Fortunato, A. Vitturi, J. Phys. G, Nucl. Part. Phys. 29, **1341** (2003).
- [22] D. Bonatsos et al., Phys. Lett. B 584, **40** (2004). 155.
- [23] I.Yigitoglu, D.Bonatsos, Phys.Rev.C. 83, **014303** (2011).
- [24] H. Sobhani H. Hassanabadi, W.S. Chung, Nucl. Phys. A. 85, **3580** (2018).
- [25] H. Neyazi, A.A.Rajabi, H.Hassanabadi, Nucl.Phys.A (2015).
- [26] F. H. Stillinger, J. Math. Phhys. **20** (1979).
- [27] X. Song, J.Phys G : Nucl. Part. Phys.**17** (1991) 49.
- [28] A. Lemieux, A.K Bose, Annales de II H P. Sect. A number 3 , **10** (1969).
- [29] M. Thoennessen, *Reaching the limits of nuclear stability*, (Reports on progress in Physics, 2004).
- [30] N. Oulebsir, *Rappels de cours et recueil d'exercices de physique nucléaire* (Lawrence Radiation Lab, 2016).
- [31] C. Amsler and al., *Phys. Lett. B* **667** (2008).
- [32] T. Ruedas, *Radioactive heat production of six geologically importantt nuclides*, G3, (2017) 006997.
- [33] D. R. Inglis, *Phys. Rev.* **60** (1941) 837.
- [34] <https://www.ilephysique.net/sujet-reaction-de-fusion-300005.html>
- [35] Wikipédia. Histoire de l'équation de Klein-Gordon.

- [36] C. F. V. Weizsäcker, *Zur Theorie der Kernmassen*(Zeitschrift fr Physik, New York, 1935).
- [37] J. Jolie and A. Linnemann, *Phys. Rev. C* **68** (2003) 031301.
- [38] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nuclear Structure, volume I et II* (World Scientific, Amsterdam, 1968).
- [39] H. A. Bethe, R. F. Bacher, *Rev. Mod. Phys.* **75** (1949) 1969.
- [40] C. F. V. Weizsäcker, *Zur Theorie der Kernmassen*(Zeitschrift fr Physik, New York, 1935).
- [41] https://fr.wikibooks.org/wiki/Le_noyau_atomique/Le_modèle_de_la_goutte_liquide.
- [42] D. L. Hill, J. A. Wheeler, *Phys. Rev***89** (1953) 1102.
- [43] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics* (Ed. Wiley, Oregon State University, 1988).
- [44] M. G. Mayer, *Phys. Rev.* **74** (1948) 235.
- [45] K. L. G. Heyde, *The nuclear shell model*(Springer, Verlag, 1996).
- [46] Y. Shi, J. Dobaczewski, S. Frauendorf, W. Nazarewicz, J. C. Pei, F. R. Xu and N. Nikolov, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 092501.
- [47] K. Starosta, T. Koike, C. J. Chiara, D. B. Fossan, D. R. LaFosse, A. A. Hecht, C. W. Beausang, M. A. Caprio, J. R. Cooper, R. Krcken, J. R. Novak, N. V. Zamfir, K. E. Zyromski, D. J. Hartley, D. L. Balabanski, Jing-ye Zhang, S. Frauendorf and V. I. Dimitrov, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 971.
- [48] S. Mukhopadhyay, D. Almehed, U. Garg, S. Frauendorf, T. Li, P. V. Madhusudhana Rao, X. Wang, S. S. Ghugre, M. P. Carpenter, S. Gros, A. Hecht, R. V. F. Janssens, F. G. Kondev, T. Lauritsen, D. Seweryniak and S. Zhu, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 172501.
- [49] E. Grodner, J. Srebrny, A. A. Pasternak, I. Zalewska, T. Morek, Ch. Droste, J. Mierzejewski, M. Kowalczyk, J. Kownacki, M. Kisieliński, S. G. Rohoziński, T. Koike, K.

- Starosta, A. Kordyasz, P. J. Napiorkowski, M. Wolińska-Cichocka, E. Ruchowska, W. Póciennik, and J. Perkowski, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 172501.
- [50] C. Vaman, D. B. Fossan, T. Koike, K. Starosta, I. Y. Lee and A. O. Macchiavelli, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 032501.
- [51] J. Timár, P. Joshi, K. Starosta, V.I. Dimitrov, D.B. Fossan, J. Molnr, D. Sohler, R. Wadsworth, A. Algora, P. Bednarczyk, D. Curien, Zs. Dombardi, G. Duchene, A. Gizon, J. Gizon, D.G. Jenkins, T. Koike, A. Krasznahorkay, E.S. Paul, P.M. Raddon, G. Rainovski, J.N. Scheurer, A.J. Simons, C. Vaman, A.R. Wilkinson, L. Zolnai and S. Frauendorf, *Phys. Lett. B* **598** (2004) 178.
- [52] E. A. Lawrie, P. A. Vymers, J. J. Lawrie, Ch. Vieu, R. A. Bark, R. Lindsay, G. K. Mabala, S. M. Maliage, P. L. Masiteng, S. M. Mullins, S. H. T. Murray, I. Ragnarsson, T. M. Ramashidzha, C. Schück, J. F. Sharpey-Schafer, and O. Shirinda, *Phys. Rev. C* **78** (2008) 021305.
- [53] W. Greiner, *Relativistic, quantum mechanics/* (2000).
- [54] D. Farquet *Klein-Gordon et Dirac en physique quantique relativiste.*
- [55] H. Barry. *Topics in Advanced Quantum Mechanics*, AddisonWesley Publishing company, 1991.
- [56] S. Claudio. *Advanced Quantum Mechanics*, Adresse : <http://documents.epfl.ch/users/s/sc/scrucca/www/teach.html>.
- [57] J. John David. *Classical Electrodynamics*, Wiley and Sons, Inc., 2001.
- [58] M. Michele. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, Oxford Master Series, 2009.
- [59] D. Sidney et James B Jorke. *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, 1964.
- [60] M. Eugen. *Quantum Mechanics*, Wiley international editon, 1970.
- [61] F. Michael et E. F. URLANI. *Zitterbewegung and the Klein Paradox for spin-zero particles*, American Journal of Physics June 1982 Volume 50, Issue 6.

- [62] D. Agboola and Y. Z. Zhang, *J. Phys. A : Math. Theor.* **46** (2013) 505301.
- [63] E. Predazzi and T. Regge, *Nuovo Cimento* **24** (1962) 518.
- [64] A. S. Davydov and A. A. Chaban, *Nucl. Phys.* **20** (1960) 499.
- [65] L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys.* **29** (2003) 1341.
- [66] D. Bonatsos et al., *Phys. Lett. B* **584** (2004) 40.
- [67] I. Yigitoglu and D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
- [68] H. Sobhani, H. Hassanabadi and W. S. Chung, *Nucl. Phys. A* **85** (2018) 3580.
- [69] H. Neyazi, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, *Nucl. Phys. A* **945** (2015) 80.
- [70] R. Budaca, *Eur. Phys. J. A* . **5** (2014) 50.
- [71] G. Lévai and J. Arias, *Phys. Rev. C* **81** (2010) 044304.
- [72] P. Baganu and R. Budaca, *J. Phys. G* **42** (2015) 105106.
- [73] F. H. Stillinger, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 1891.
- [74] X. Song, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **17** (1991) 49.
- [75] R. Herrmann, *Fractional Calculus An Introduction for Physicists*(World Scientific, Singapore, 2011).
- [76] A. Lemieux and A. K. Bose, *Annales de l'I H P. Sect. A n°3* (1969) 10.
- [77] B. Btissen, Résolution de l'équation de Klein-Gordon par SUSYM MQ avec un potentiel exponentiel.01 Juin 2017.
- [78] F. Abe and al. CDF collaboration,
- [79] L. Infeld and T.E Hull, *Rev. Mod. Phys.* **23** (1951) 21.
- [80] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, LAUR- 94-569. (2004).
- [81] V. A. Kostelecky and D. K. Campbell, *Supersymmetry in Physics*, North Holland (1985).
- [82] F. Cooper and B. Freedman, *Ann. Phys.* **146** (1983) 262.

- [83] P. Salomonson and J. van Holten, Nucl. Phys. B196 (1982) 509.
- [84] M. Bernstein and L. Brown, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 1933.
- [85] F. Cooper, A. Khare, R. Musto, and A. Wipf, Ann. Phys. 187(1988).
- [86] C. Blockley and G. Stedman, Euro. Jour. Phys. 6 (1985) 218.
- [87] L. Gendenshtein, JETP Lett. 38 (1983) 356.
- [88] A. Bohr, *Mat.-Fys. Medd.Danske Vid.Selsk.* 26 (1952) 14.
- [89] M. Zahira. Le 09 mai 2017 Résolution de l'équation de Dirac avec un potentiel Coulombien.
- [90] R. Schmied introduction to Quantum Mechanics 2012.
- [91] A. Benbrahim Memoire de master Resolution numérique de l'équation de Klein Gordon 2016
- [92] B. Bruno. Polycopie en cours de préparation Théorie quantique et renormalisation S. Kouidri.
- [93] A. Soubahni. The Quantum Theory of the Hydrogen Atom Felix Nendzig January 31, 2014
- [94] B. mohamed Ahmed, 12 Novembre 2019. EKG sur les variétés.
- [95] M. Abramowitz and A. Stegun , Handbook of mathematical functions with formulas. Graphs and mathematical tables. (NBS Appl. Math. Ser., Vol 55), Dover, New-York, 1964.
- [96] W. Arendt, R. Nittka, W. Peter and F. Steiner , L. Weyls : Spectral properties of the laplacian in mathematics and physics. Mathematical analysis of evolution, information and complexity, Wiley-VCH, Weinheim pp 1-71, 2009.
- [97] I. Areteva, Y. Regge Regime in QCD and asymmetric Lattice Gauge theory. Phys. Lett. B 325, 171-182, 1994.
- [98] V. Arnold. Equations différentielles ordinaires. Ed. Mir Moscou, 1974.
- [99] S. Drell and J. Bjorken Relativistic quantum mechanics. McGraw Hill Book company, 1964.

- [100] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik Tables of Integrals, Sums, Series, and Products. Fizmatlit, Moscow, **1971**.
- [101] B. Holstein Topics and advanced quantum mechanics. AddisonWesley Publishing company, **1991**.
- [102] P. Horeva Phys. Rev. D : Part Fields 79, 084008, **2009**.
- [103] J. Lafontaine Introduction aux varits direntielles. Collection Grenoble Sciences, EDP, **1996**.
- [104] A. Meshchenko , A. Fomenko A course of dierential geometry and topology. Ed. Mir Moscou, **1988**.
- [105] Y. Rohlin , D. Fuchs Premier cours de topologie : chapitres gomtriques. Ed. Mir Moscou, **1981**.
- [106] D. Shirkov, V. Dreamland with classic Higgs Field, Dimensional Reduction and all that. Proceeding of the Steklov Institute of mathematics, vol. 272, 216-222, **2011**.
- [107] I. Yigitoglu and D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
- [108] A. R. Edmonds, *Angular Momentum In Quantum Mechanics*(Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957).
- [109] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588**, (2004) 172.
- [110] A. F Dominguez 1989 Phys. Lett. A **136** 175.
- [111] H. Egrifes, R. Sever , 2005. Bound states of the Dirac equation for PT-symmetric generalized Hulthen potential by Nikiforov-Uvarov mthod, **Phys. LeF. A 344117-126**.
- [112] A.D. Alhaidari 2004. L2 series solution of the relativistic Dirac-Morse problem for all energies, **Phys. LeF. A 32658-69**.
- [113] H. Sobhani, H. Hassanabadi, W.S. Chung, arXiv :1804.08090(2018).
- [114] A.N. Ikot, U.S.Okorie, R. Sever, and G.J. Ramph Eur. Phys. J. Plus (2019)134 :
- [115] E. Anemena Etoga, J.M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, and G.H. Ben-Bolie. **Vol. 33, No.1 (2020)2050080**.

- [116] S.M. IKhdair,R. Sever, J. Math. Chem. **45**,11387(2009).
- [117] E.E. Ibekwe, A. T. Ngiangia, U.S. Okorie, A.N.Ikot,H.Y Aboullah,Iran J.Sci.Technol.Trans.Sci. **44**,1191 (2020).
- [118] E. Omugbe,O.E.O. Safile, M.c. Hindawi, Adv.High Energy Phy (2020)<https://doi.org/10.115/2020/5901404>
- [119] H. Ciftci, F.H.Kisoglu,Hindawi. Adv ; High Energy Phys. **45**, 497057 (2018)
- [120] Wikipedia. **65**, 56765 (2020)
- [121] A. Analopes. 16 Juillet **2019**
- [122] E. Fioretto, M. Cinausero, M. Giacchini, M. Lollo, G. Prete, R. Burch, M. Caldogno, D. Fabris, M. Lunardon, G. Nebbia, G. Viesti, A. Boiano, A. Brondi, G. La Rana, R. Moro, A. Ordine, E. Vardaci, A. Zaghi, N. Gelli, F. Lucarelli, IEEE Trans. Nucl. Sci.**44**, 1017 (1997)
- [123] G. Prete, E. Fioretto, M. Cinausero, M. Giacchini, M. Lollo, D. Fabris, M. Lunardon, G. Nebbia, G. Viesti, M. Caldogno, A. Brondi, G. La Rana, R. Moro, E. Vardaci, A. Ordine, A. Zaghi, A. Boiano, P. Blasi, N. Gelli, F. Lucarelli, Il Nuovo Cimento A **111**, 1089 (1998)
- [124] A. Ordine, A. Boiano, E. Vardaci, A. Zaghi, A. Brondi, IEEE Trans. Nucl. Sci.**45**, 873 (1998)
- [125] M. Romoli, M. Di Pietro, E. Vardaci, A. De Francesco, M. Mazzocco, R. Bonetti, A. De Rosa, T. Glodariu, A. Guglielmetti, G. Inglima et al., IEEE Trans. Nucl. Sci.**52**, 1860 (2005)
- [126] E. M. Kozulin, V.I. Zagrebaev, G.N. Knyazheva, I.M. Itkis, K.V. Novikov, M.G. Itkis, S.N. Dmitriev, I.M. Harca, A.E. Bondarchenko, A.V. Karpov, V.V. Saiko, E. Vardaci, Phys. Rev. C**96**, 064621 (2017)
- [127] A. Di Nitto, E. Vardaci, A. Brondi, G. La Rana, M. Cinausero, N. Gelli, R. Moro, P.N. Nadtochy, G. Prete, A. Vanzanella, Phys. Rev. C**93**, 044602 (2016)

- [128] E. Vardaci, A. Di Nitto, P. Nadtochy, G. La Rana, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **46**, 115111 (2019)
- [129] I. Martel, J. Gmez-Camacho, K. Rusek, G. Tungate, Nucl. Phys. A **605**, 417 (1996)
- [130] E. Vardaci, P. K. Rath, M. Mazzocco, A. Di Nitto, G. La Rana, C. Parascandolo, D. Pierroutsakou, M. Romoli², A. Boiano, A. Vanzanella, M. Cinausero, G. Prete, N. Gelli, F. Lucarelli, C. Mazzocchi, M. La Commara, L. Fortunato, A. Guglielmetti, F. Soramel, L. Stroe, C. Signori. Eur. Phys. J. A (2021) **57** :95.
- [131] A. Greisen, B. Zatsepin et S. Kousmine (GZK) 1966.
- [132] W. Du Li and W. Sheng Dai, Journal of High Energy Physics (2014)
- [133] H. P. Obong, T. M. Abbey, S. Zare. Few body systems (2016)
- [134] Z. Wang, L. OX, Z. M. Transcendental of Klein-Gordon equation (2011)
- [135] X. Xu, Y. F. Si. Teller potential including spin orbital. Modern Physics Letters A (2005)
- [136] G. Chen, Physics Letters A 328 (2004)
- [137] M. Sameer, M. Ikhdair and R. Sever. Solutions of the D- dimensional Klein-Gordon equation with equal scalar and vector ring-shaped pseudo harmonic potential. (2016)
- [138] X. Zha, X-Q Physics letters A 337 (2005)
- [139] A. Akbar Rajabi and M. Hamzavi. Journal of theoretical and applied physics 2013.
- [140] G. Lévai and A. M. Ishkhanyan, Modern Physics Letters A. December (2017)
- [141] J-J. Peña, J. García- Martínez, J. García-Ravelo and J. Morales. Journal of Physics conference serie (2014)
- [142] J. M. Arias, G. Lévia, Physical Review c 69014304 (2004).