

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES ET
GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN PHYSIQUE ET APPLICATIONS

B.P 812 Yaoundé

Email: crfd_stg@uy.uninet.cm



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING
UNIT FOR PHYSICS AND APPLICATIONS

P.O. Box 812 Yaounde

Email: crfd_stg@uy.uninet.cm

LABORATOIRE DE MECANIQUE APPLIQUEE ET D'HYDRAULIQUE

ECOULEMENT LAMINAIRE ET TRANSFERT DE CHALEUR ENTRE DEUX PAROIS RECTANGULAIRES POREUSES

THESE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du Doctorat/ PhD en
Physique

Spécialité : Mécanique des Fluides et Hydraulique

Par :

NYEMB NSOGA Valjacques

Matricule : 07W759

Titulaire du Master de Physique

Sous la Direction de :

Pr. HONA Jacques, PhD

Maître de Conférences

Faculté des Sciences

Université de Yaoundé I

Année 2021





DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE
DOCTARAT/Ph.D

Nous, Professeur **BEN-BOLIE Germain Hubert**, Professeur **FEWO Serge Ibraïd**, Examineurs, Professeur **NDJAKA Jean-Marie Bienvenu**, Président du jury de la Thèse de Doctorat/Ph.D de Monsieur **NYEMB NSOGA Valjacques** Matricule **07W759**, préparée sous la direction du Professeur **HONA Jacques**, intitulée « **Ecoulement laminaire et transfert de chaleur entre deux parois rectangulaires poreuses** », soutenue le **mardi, 16 juillet 2021**, en vue de l'obtention du grade de Docteur/Ph.D en Physique, Spécialité Mécanique des fluides et Hydraulique, Option Mécanique Appliquée, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé, le **05. AUG. 2021**.....

Les Examineurs


FEWO

Ben-Bolie Germain Hubert
Professeur

Le Président du jury


Ndjaka Jean-Marie Bienvenu
Professeur

Le Chef de Département

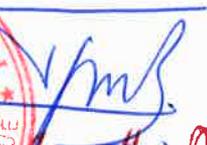


Ndjaka Jean-Marie Bienvenu
Professeur

TABLE DES MATIERES

LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES SYMBOLES	viii
RESUME	xi
ABSTRACT	xii
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : REVUE DE LA LITTERATURE	6
I.1 ECOULEMENT DE FLUIDES ET TRANSFERT DE CHALEUR ENTRE DEUX PAROIS UNIFORMEMENT PERMEABLES.....	7
I.1.1 Ecoulement rampant et transfert de chaleur entre deux parois uniformément perméables.....	8
I.1.1.1 Ecoulements rampants et transfert thermique en conduite rectangulaire poreuse.....	9
I.1.1.2 Ecoulements rampants et transfert thermique en conduite annulaire poreuse.....	15
I.1.2 Ecoulements laminaires et transfert thermique en conduites poreuses.....	17
I.3.2.1 Ecoulement laminaire entre deux parois poreuses accélérées ou décélérées dans la direction longitudinale.....	18
I.1.2.2 Ecoulement laminaire et transfert de chaleur entre deux parois poreuses en mouvement longitudinal	24
I.1.2.3 Ecoulement laminaire et transfert de chaleur dans un canal poreux en expansion	30
CHAPITRE II : POSITION DU PROBLEME ET METHODE DE RESOLUTION	38
II.1 PRESENTATION DU DOMAINE GEOMETRIQUE DE L'ECOULEMENT.....	43

II.2 MODELE MATHEMATIQUE DU PROBLEME	45
II.2.1 Equations du problème.....	46
II.2.2 Conditions aux limites.....	47
II.2.3 Introduction des variables sans dimension	50
II.2.4 Fonction de courant.....	54
II.2.5 Vecteur tourbillon et équation de vorticité	55
II.2.5.1 Définition du vecteur tourbillon.....	58
II.2.5.2 Equation de vorticité	58
II.3 METHODE DES SOLUTIONS SEMBLABLES	59
II.3.1. Type de solution recherchée	60
II.3.2. Méthode de séparation des variables	60
II.3.3. Conductivité thermique	61
II.3.4. Position du problème	63
II.4 DESCRIPTION DE LA METHODE DE RESOLUTION DU PROBLEME	65
CHAPITRE III : RESULTATS ET DISCUSSIONS	75
III.1 SOLUTION POUR LES FAIBLES NOMBRES DE CONTROLE ET VALIDATION DU CODE DE CALCUL.....	76
III.1.1 Solution analytique	76
III.1.2 Validation du code de calcul	78
III.2 COEFFICIENT PARIETAL DE FROTTEMENT	81
III.2.1 Présentation des diagrammes de bifurcations	82
III.2.2 Analyse des bifurcations	85
III.3 PROFILS DE VITESSES DE L'ECOULEMENT	90
III.3.1 Vitesses axiale et transversale suivant la branche I	90

III.3.2 Vitesses axiale et transversale suivant la branche I_1	93
III.3.3 Vitesses axiale et transversale suivant la branche I_1'	94
III.3.4 Comparaison entre les solutions de types I_1 et I_1'	95
III.3.5 Vitesses axiale et transversale suivant la branche II	97
III.3.6 Vitesses axiale et transversale suivant la branche III	98
III.4 LIGNES DE COURANT DE L'ÉCOULEMENT	99
III.5 PROFILS DE TEMPERATURE DANS L'ÉCOULEMENT	102
III.5.1 Profils de température suivant la branche I	103
III.5.2 Profils de température suivant la branche I_1	105
III.5.3 Profils de température suivant la branche I_1'	107
III.5.4 Comparaison des profils de température des branches I_1 et I_1'	108
III.5.5 Profils de température suivant la branche II	110
III.5.6 Profils de température suivant la branche III	112
CONCLUSION GENERALE	115
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	119
ANNEXES.....	133

DEDICACE

A la mémoire de mes parents Mr et Mme NYEMB Jacques
Et
Mr EBANGA Maurice

REMERCIEMENTS

Je tiens à dire un grand merci :

Au **Pr HONA Jacques**, mon Directeur de thèse, qui m'a guidé et conseillé durant toutes mes années passées à ses côtés. Il m'a dirigé avec beaucoup de sérieux et de rigueur en m'inculquant la vision d'un mécanicien des fluides.

Au **Pr Maurice Aurélien SOSSO**, Recteur de l'Université de Yaoundé I, qui a signé la décision de ma sélection en thèse de Doctorat/PhD et qui a autorisé la soutenance de cette Thèse.

Au **Pr NDJAKA Jean-Marie Bienvenu**, Professeur Titulaire, Chef de Département de Physique, pour son soutien, ses conseils ainsi que la diligence avec laquelle il a traité les pièces devant faire partie de la constitution de mon dossier de Doctorat/PhD.

Aux **Pr PEGNYEMB Dieudonné** et **Pr OWONO OWONO Luc Calvin**, respectivement Coordonnateurs du centre de recherche et de Formation Doctorale en Science Technologie et Géoscience et de l'Unité de Recherche et de Formation Doctorale en Physique et Applications, pour leur contribution dans la bonne marche de la recherche au sein de l'Université de Yaoundé I.

Au **Pr. PEMHA Elkana**, Professeur Titulaire, Directeur du laboratoire de Mécanique Appliquée et Hydraulique de la Faculté de Yaoundé I, pour m'avoir accueilli au sein du Laboratoire qu'il a créé. Ces conseils sur le plan académique et social, son esprit scientifique, sa rigueur, son amour du travail bien fait et sa maîtrise de la pédagogie de la recherche, ont beaucoup contribué à la réalisation de ce travail.

Aux **Pr NDJAKA Jean-Marie Bienvenu**, **Pr BEN-BOLIE Germain Hubert**, **Pr NANA NBENJO Blaise Roméo**, **Pr FEWO Serge Ibraïd**, Membres des Jurys de Présoutenance et de Soutenance de ma thèse de

Doctorat/PhD, pour leurs conseil et amélioration qu'ils ont apportés sur ce travail.

Au **Pr NSOUANDELE Jean Luc**, Membre de Jury de ma soutenance, d'avoir accepté de prendre part à ma soutenance.

A tous les enseignants du Département de Physique de l'Université de Yaoundé I, qui ont contribué à ma formation depuis mon entrée à l'Université.

A mes aînés académiques, **Dr BILONG II Jean**, **Dr LAMARA Maurice**, **Dr NGANBE II Médard Marcus** qui sont pour moi des modèles de travail, d'assiduité et de persévérance.

A mes camarades et amis, **TEHNA MANG Fabrice**, **BAYIHA Eric**, **BAKANG David** pour leurs soutiens et conseils.

A ma mère **BANAG Bernadette**, pour son soutien et ses conseils.

A Monsieur **Hassana IYA**, pour ses conseils et son soutien.

A Ma famille, pour l'amour et le réconfort durant cette période de travail.

Le thème de recherche soumis à notre étude a abouti à la rédaction de cette thèse de doctorat/PhD après plusieurs années de travail acharné, cet aboutissement est le résultat de plusieurs contributions venant des encadreurs techniques, administratifs, de ma famille et de bien d'autres secteurs dans mon entourage immédiat. Je tiens donc à adresser mes remerciements à ces personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réussite de ce travail.

LISTE DES FIGURES

Figure I.1: <i>Section longitudinale du canal rectangulaire avec deux parois poreuses fixées à des températures différentes T_0 et T_1 [87, 88]...</i>	10
Figure I.2: <i>Profil de vitesse longitudinale de l'écoulement [88].....</i>	12
Figure I.3: <i>Profil de vitesse transversale de l'écoulement [88].....</i>	12
Figure I.4: <i>Vitesse longitudinale de l'écoulement en [88].....</i>	13
Figure I.5: <i>Vitesse transversale de l'écoulement [88].....</i>	14
Figure I.6: <i>Profil de température dans le canal [88].....</i>	14
Figure I.7: <i>Gradient de pression normale dans le canal [88].....</i>	15
Figure I.8: <i>Géométrie de la conduite cylindrique, (a) section longitudinale de l'écoulement, (b) section transversale de l'écoulement [89, 90]...</i>	15
Figure I.9: <i>Géométrie du canal avec parois poreuses accélérées [93].....</i>	18
Figure I.10: <i>Lignes de courant de suction pour a) $R = -20$, b) $R = -5$ [93]...</i>	22
Figure I.11: <i>Lignes de courant d'injection pour a) $R = 5$, b) $R = 20$ [93].....</i>	23
Figure I.12: <i>Vitesse axiale par unité de longueur, a) pour des paramètres fixes d'accélération ($\lambda = +2$) et de décélération ($\lambda = -2$) et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, b) pour les nombres de Reynolds de suction ($R = -10$) et d'injection ($R = +20$) et pour différentes valeurs du paramètre d'accélération [92].....</i>	26
Figure I.13 : <i>Vitesse normale, a) pour des paramètres fixes d'accélération ($\lambda = +2$) et de décélération ($\lambda = -2$) et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, b) pour les nombres de Reynolds fixes de suction ($R = -10$) et d'injection ($R = +20$) et pour différentes valeurs du paramètre d'accélération [92].....</i>	27
Figure I.14 : <i>Gradient normal de pression [92].....</i>	28
Figure I.15 : <i>Température à l'intérieur du canal, a) présentant une couche limite thermique d'injection, b) présentant une couche limite thermique de suction [92].....</i>	29
Figure I.16: <i>Coupe longitudinale du canal semi-infini [56, 91].....</i>	30
Figure I.17: <i>Vitesse axiale pour plusieurs valeurs des paramètres de contrôle, a) $R = 6$, b) $R = 25$, c) $R = 250$ [56, 91].....</i>	33

Figure I.18: <i>Vitesse normale, a) $R = 6$, b) $R = 25$, c) $R = 250$ [56, 91].....</i>	35
Figure I.19: <i>Gradient de pression à l'intérieur du canal [91].....</i>	36
Figure I.20: <i>Gradient de température à l'intérieur du canal [91].....</i>	36
Figure II.1: <i>Canal rectangulaire avec deux parois poreuses fixées à des températures différentes T_0 et T_1.....</i>	44
Figure II.2: <i>Section longitudinale du canal rectangulaire avec deux parois poreuses fixées à des températures différentes T_0 et T_1.....</i>	44
Figure III.1 : <i>Comparaison entre la solution numérique de la fonction de courant par unité de longueur F pour $R = 0.1, 1, 2$, et la solution analytique tracée pour $R = 0, 0.01, 0.05$.....</i>	80
Figure III.2 : <i>Comparaison entre la solution numérique de la fonction de température θ pour $R = 0.4, 1.5, 3$ et $P = 0.1, 1, 2$, et la solution analytique tracée pour $R = 0, 0.01, 0.05$.....</i>	81
Figure III.3: <i>Diagramme de bifurcations représentant les valeurs du coefficient de frottement au niveau de la paroi supérieure.....</i>	84
Figure III.4: <i>Diagramme de bifurcations représentant les valeurs du coefficient de frottement au niveau de la paroi inférieure.....</i>	84
Figure III.5: <i>Comparaison des coefficients de frottement des deux parois poreuses.....</i>	86
Figure III.6: <i>Diagramme de la bifurcation cuspidé pour la paroi supérieure...87</i>	87
Figure III.7: <i>Diagramme de la bifurcation cuspidé pour la paroi inférieure...88</i>	88
Figure III.8: <i>Comparaison des coefficients de frottement des parois inférieure et supérieure correspondant à la bifurcation cuspidé.....</i>	89
Figure III.9: <i>Profil de vitesse axial et profil de vitesse transversal à travers la branche de type I.....</i>	90
Figure III.10: <i>Profil de vitesse axial et profil de vitesse transversal à travers la branche de type I_1.....</i>	94
Figure III.11: <i>Profil de vitesse axial et profil de vitesse transversal à travers la branche de type I_1'.....</i>	95
Figure III.12: <i>Comparaison des vitesses axiales des branches I_1 et I_1'.....</i>	96
Figure III.13: <i>Comparaison des vitesses transversales des branches I_1 et I_1'...96</i>	96
Figure III.14: <i>Profil de vitesse axial et profil de vitesse transversal à travers la branche de type II.....</i>	97

Figure III.15: Profil de vitesse axial et profil de vitesse transversal à travers la branche de type III.....	98
Figure III.16: Lignes de courant se rapportant à (a) la branche I pour $R = 5.175$, (b) la branche I_1 pour $R = 13.035$, (c) la branche I'_1 pour $R = 13.035$, (d) la branche II dans le cas de l'écoulement inverse pour $R = 12.645$, (e) la branche II en l'absence de l'écoulement inverse pour $R = 14.355$, (f) la branche III pour $R = 17.50$	101
Figure III.17: Profils de température correspondant à la branche I pour (a) $R = 3$, et (b) $R = 23.70$	103
Figure III.18: Profils de température correspondant à la branche I_1 pour (a) $R = 6.5$, et (b) $R = 11.70$	106
Figure III.19: Profils de température correspondant à la branche I'_1 pour (a) $R = 6.5$, et (b) $R = 11.70$	108
Figure III.20: Comparaison des profils de température des branches I_1 et I'_1 pour $R = 11.70$ sous différents nombres de Péclet ($Pé = 0.5, 1.5, 3, 5.2, 7.8, 10$) d'après les Figures 18(b) et 19(b), pour $\gamma = 0.3$ (ligne continue) et $\gamma = -0.1$ (ligne interrompue).....	109
Figure III.21: Profils de température correspondant à la branche II pour (a) $R = 12.90$, et (b) $R = 24.50$	111
Figure III.22: Profils de température correspondant à la branche III pour (a) $R = 12.90$, et (b) $R = 24.50$	113

LISTE DES SYMBOLES

Symboles alphabétiques	significations	Unités
c_p	chaleur massique à pression constante	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
dt	Elément de temps	s
$d\omega$	Elément de volume	m^3
e	Energie interne par unité de masse	$J.kg^{-1}$
E_c	Energie cinétique	J
E_{int}	Energie interne	J
F	Force de contact	N
f	Force de volume	N
F	Fonction de courant par unité de longueur	m/s
g	Force de masse	N
h	Demi-largeur du canal	m
(e_r, e_θ, k)	Base cylindrique usuelle	Sans unité
(i, j, k)	Base cartésienne usuelle	Sans unité
m	Masse du fluide contenu dans le domaine	Kg
n	Normale unitaire	Sans unité
p	Pression	Pa
P	Nombre de pécelet	Sans unité
P_r	Nombre de Prandtl	Sans unité
P_{cal}	Puissance calorifique	W
P_{int}	Puissance interne	W
P_m	Puissance mécanique	W
P_s	Puissance des forces de surface	W
$P\omega$	Puissance des forces de masse	W
(S)	Surface fermée	m^2
R	Nombre de reynolds	Sans unité
t	Temps	s
T	Champ de température	K
T_1, T_0	Température au niveau des parois	K
T_c	Tension ou contrainte	N/m^2
T_f	Contrainte tangentielle	N/m^2
T_n	Contrainte normale	N/m^2
V	Champ de Vitesse	$m.s^{-1}$
V_x, V_y, V_z	Composantes du vecteur vitesse	$m.s^{-1}$

	<i>suivant les trois axes du repère cartésien</i>	
V_r, V_θ, V_z	<i>Composantes du vecteur vitesse suivant les trois axes du repère cylindrique</i>	$m.s^{-1}$
W_{int}	<i>travail des forces intérieures</i>	J
W_s	<i>Travail des forces de surface</i>	J
$W\omega$	<i>Travail des forces de masse</i>	J
x, y, z	<i>Coordonnées cartésiennes</i>	m
(r, θ, z)	<i>système de coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires</i>	(m, rad, m)
Symboles grecs	Significations	
δ_{jk}	<i>Symbole de Kronecker</i>	<i>Sans unité</i>
κ	<i>Conductivité thermique</i>	$W.m^{-1}.K^{-1}$
μ	<i>Viscosité de cisaillement</i>	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
ρ	<i>Masse volumique</i>	$Kg.m^{-3}$
θ	<i>Fonction caractéristique de la distribution de température dans le canal</i>	K
γ	<i>Mesure de la sensibilité de la conductivité thermique à la variation de la température</i>	K^{-1}
ψ	<i>Fonction de courant</i>	$m^2.s^{-1}$
Opérateurs	Significations	
<i>div</i>	<i>Divergence</i>	<i>Sans unité</i>
Δ	<i>Laplacien</i>	<i>Sans unité</i>
<i>grad</i>	<i>Gradient</i>	<i>Sans unité</i>
<i>rot</i>	<i>rotationnel</i>	<i>Sans unité</i>
\wedge	<i>Produit vectoriel</i>	<i>Sans unité</i>

RESUME

Dans ce travail, nous étudions l'écoulement de fluide et le transfert de chaleur entre deux plans rectangulaires parallèles, uniformément poreux et présentant une différence de température qui fait varier la conductivité thermique suivant une loi linéaire. La formulation du problème est réalisée à l'aide de l'équation de continuité, des équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie qui traduisent respectivement la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et d'énergie. Ces équations sont adimensionnalisées dans le but de mettre en exergue les paramètres de contrôle de l'écoulement et du transfert de chaleur, notamment le nombre de Reynolds, le nombre de Péclet, et le paramètre qui mesure la sensibilité de la conductivité thermique aux variations de la température. Compte tenu de l'incompressibilité du fluide et du fait que l'écoulement est décrit par deux composantes de vitesse, la fonction de courant est prescrite dans le problème et est solution de l'équation de vorticité. La configuration géométrique de l'écoulement et du transfert de chaleur implique un changement de variable inspiré par une méthode des solutions semblables de plus en plus utilis e et permettant de transformer les équations aux dérivées partielles en équations différentielles ordinaires décrivant le même problème. La dynamique du fluide et le transfert de chaleur dans le canal sont étudiés suivant les branches d'un diagramme de bifurcations hydrodynamiques, mises en évidence dans l'analyse du comportement du coefficient pariétal de frottement en fonction des valeurs du nombre de Reynolds. Le diagramme de bifurcations présente cinq types de solutions, notamment les solutions de types I, I_1 , I_1' , II et III. Une couche limite de l'écoulement et une couche limite thermique ont été d tect es à travers les branches I et II. Les solutions de types I_1 et I_1' sont des images l'une de l'autre. Les solutions de type III sont caract ris es par l'absence de la couche limite.

Mots clés : Ecoulement avec succion – Transfert de chaleur - Equations de Navier-Stokes – Equation d'énergie – Problème à conditions aux limites sur deux bornes

ABSTRACT

In this work, we study fluid flow and heat transfer between two parallel rectangular planes, which are uniformly porous and have a temperature difference that varies the thermal conductivity according to a linear law. The formulation of the problem is carried out using the continuity equation, the Navier-Stokes equations and the energy equation, which respectively translate the conservation of mass, momentum and energy. These equations are nondimensionalized to highlight the parameters that control flow and heat transfer, including Reynolds number, Péclet number, and the parameter that measures the sensitivity of thermal conductivity to temperature variations. Given the incompressibility of the fluid and the fact that the flow is described by two velocity components, the stream function is prescribed in the problem and is the solution to the vorticity equation. The geometrical configuration of the flow and heat transfer involves a change of variable inspired by a similar solution method which is increasingly used and which transforms the partial differential equations into ordinary differential equations describing the same problem. The dynamics of the fluids and heat transfer in the channel are studied along the branches of a hydrodynamic bifurcation diagram, highlighted in the analysis of the behaviour of the wall friction coefficient as a function of Reynolds number values. The bifurcation diagram shows five types of solutions, namely types I, II, II', II and III. A flow boundary layer and a thermal boundary layer were detected through branches I and II. Types II and II' solutions are images of each other. Type III solutions are characterised by the absence of the boundary layer.

Keywords: Suction-driven flow – Heat transfer – Navier-Stokes equations
– Energy equation – Two-point boundary value problem

INTRODUCTION GENERALE

L'écoulement d'un fluide au voisinage d'une paroi solide revêt un grand nombre d'applications, notamment la filtration ou le tamisage mécanique, l'architecture navale, l'irrigation agricole, l'industrie de l'eau, la production pétrolière, et le transport de liquides ou de gaz dans les oléoducs [1-21]. Il apparaît à travers ces applications que les frontières de l'espace physique contenant l'écoulement peuvent être perméables ou imperméables [25-29]. De plus, l'écoulement peut être confiné [30-38] ou libre [39-43]. Un écoulement confiné a lieu à l'intérieur d'une conduite fermée, alors qu'un écoulement libre présente une paroi solide en contact avec le fluide en mouvement et une autre frontière ouverte appelée surface libre. Les frontières du domaine géométrique délimitant l'écoulement peuvent aussi être mobiles [44-59] ou fixes [60-68]. S'agissant de l'écoulement d'un fluide au voisinage des parois solides mobiles, deux principaux cas sont fréquemment rencontrés, notamment le cas où les parois se déplacent dans la même direction que l'écoulement [44-52], et le cas où les parois sont en mouvement dans la direction perpendiculaire au mouvement primordial du fluide [53-57]. Dans des situations plus complexes, l'écoulement a lieu dans un canal à parois à la fois mobiles et perméables [51, 53, 54, 56]. Chaque type de configuration géométrique évoquée des parois de l'écoulement constitue un ensemble des travaux intéressants pouvant entraîner d'autres applications.

L'un des phénomènes physiques qui attire l'attention des scientifiques quand un fluide visqueux est en mouvement au voisinage d'une paroi solide est la couche limite. La couche limite est la région d'interaction réciproque entre un fluide visqueux en mouvement et une paroi solide. Il existe une couche limite externe et une couche limite interne. La couche limite externe se développe lorsque l'écoulement possède une frontière libre et une autre en contact avec une paroi solide. C'est elle par exemple qui est responsable de l'enlèvement des toitures en tôles des maisons et se manifeste lorsque les forces de frottement entre l'atmosphère et la paroi métallique sont au-delà d'un certain seuil critique.

Elle peut aussi être à l'origine d'un crash quand les frottements entre la couche d'air atmosphérique et les ailes d'avion deviennent irréguliers.

Par ailleurs, la couche limite interne est envisagée dans le cas d'un écoulement confiné. Étant donné que l'écoulement d'un fluide dans une conduite à parois poreuses représente le modèle de fonctionnement de certaines machines hydrauliques et la plupart des moteurs industriels comme les moteurs des fusées, la manifestation de cette couche limite dans de tels dispositifs réduit considérablement leur performance. Ainsi, pour garantir la performance d'un grand nombre de dispositifs industriels, le contrôle de la couche limite dans le but de prédire sa manifestation est un problème intéressant [70-80]. S'agissant du contrôle de la couche limite dans une conduite, il faut dire que les domaines d'écoulements généralement rencontrés présentent deux configurations géométriques, à savoir les conduites de sections transversales rectangulaires [47, 51, 63] et circulaires [55, 64, 65]. Pour séparer la couche limite, c'est-à-dire réduire au maximum sa manifestation, les scientifiques ont incorporé la porosité et/ou le mouvement des parois qui sont au voisinage de l'écoulement [81-85]. L'écoulement d'un fluide visqueux au voisinage des parois poreuses est appelé écoulement de Berman, car l'étude pionnière de Berman [66] sur le mouvement d'un fluide dans un canal rectangulaire possédant deux parois poreuses a produit des résultats intéressants et a surtout fourni une méthode précieuse appelée méthode de solutions semblables pour la résolution des équations de Navier-Stokes du problème. Par la suite, cette méthode des solutions semblables de Berman a été une source d'inspiration d'un grand nombre d'auteurs [55-69] dans l'étude des écoulements à travers des conduites présentant deux frontières perméables. Cette méthode des solutions semblables est de plus en plus utilisée pour résoudre les mouvements de fluides relatifs à l'écoulement de Berman, étant donné que les solutions directes des équations de Navier-Stokes pour les écoulements bidimensionnels et tridimensionnels ne sont pas accessibles. Mais

ces solutions de type Berman sont considérées comme exactes, car elles vérifient les contraintes spatio-temporelles du mouvement du fluide et ont été validées par l'expérimentation [35, 86]. Compte tenu de cette approche rigoureuse et rassurante de Berman dans la recherche des solutions des équations de Navier-Stokes pour les écoulements bidimensionnels, l'équipe de recherche de Mécanique Appliquée s'est aussi intéressée à l'étude des écoulements dans des conduites possédant deux parois perméables. Ainsi, l'écoulement rampant dans une conduite de section transversale rectangulaire avec deux parois uniformément perméables a été étudié par Hona et al. [87] en considérant une variation exponentielle de la viscosité en fonction de la température, et par Hona [88] en tenant compte d'une dépendance linéaire du coefficient de viscosité sur la température, dans le but d'examiner les effets du gradient de viscosité dynamique sur le mouvement du fluide. Les mêmes effets du gradient de viscosité ont été évalués par les mêmes auteurs [89, 90] dans un écoulement rampant entre deux cylindres coaxiaux et poreux fixés à des températures différentes. L'étude réalisée par Pemha et al.[91] relative à l'impact de l'augmentation volumétrique d'un canal rectangulaire poreux sur les profils de vitesses et de températures révèle des résultats intéressants. L'investigation de l'écoulement de fluide entre deux parois rectangulaires poreuses en mouvement accéléré, élaborée par Nganbe et al. [92] avec transfert thermique et par Hona et Nganbe [93] sans transfert thermique, a permis de mettre en évidence différentes structures hydrodynamiques. Il faut tout de même préciser que, compte tenu des nombreuses applications déjà évoquées se rapportant à l'écoulement d'un fluide à proximité des parois solides perméables, les travaux pionniers de Berman [66], tout comme les travaux antérieurs de l'équipe de recherche de Mécanique Appliquée n'avaient pas pour but principal l'investigation de la couche limite. Berman avait pour objectif la mise au point d'un modèle pour la séparation des isotopes de l'Uranium 235 et l'Uranium 238 par diffusion gazeuse afin de produire du combustible pour les réacteurs nucléaires.

Les travaux antérieurs susmentionnés mettent en exergue d'importantes structures hydrodynamiques et le comportement de la températures dans des conduites poreuses contenant un fluide visqueux en écoulement, sans mettre un accent particulier sur l'investigation de la couche limite, d'où notre intérêt pour le contrôle de la manifestation de la couche limite dans ce mémoire de thèse qui porte sur un écoulement de fluide visqueux incompressible entre deux plans parallèles présentant une différence de températures. La différence de température entre les deux frontières perméables de l'écoulement est d'autant plus importante qu'elle ne laisse pas insensible la conductivité thermique du fluide qui varie avec la température suivant une loi linéaire. L'une des motivations consiste à examiner l'influence du mouvement du fluide sur la distribution de température dans le domaine de l'écoulement qui se développe avec succion au niveau des parois poreuses. En effet, le mouvement de succion est le retrait de masse de fluide à travers les pores du canal de l'écoulement. La succion est définie en opposition à l'injection qui est plutôt l'addition de masse à l'intérieur d'un canal contenant un fluide en mouvement. Dans l'objectif de rendre aisée la lecture de cette thèse, ce travail est organisé en trois chapitres.

Le premier chapitre dont l'objectif est de présenter les travaux antérieurs à la thématique abordée, s'intitule revue de la littérature. Le deuxième chapitre porte sur la présentation du domaine géométrique de l'écoulement et la formulation mathématique du problème, ainsi que sur la description de la méthode numérique de résolution du problème. Le troisième chapitre est réservé à la présentation des solutions du problème et à l'interprétation physique des résultats.

CHAPITRE I : REVUE DE LA LITTERATURE

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux travaux antérieurs portant sur les écoulements de fluides et les transferts de chaleur dans des conduites à parois poreuses fixées à des températures différentes. Il s'agit des conduites de section transversale rectangulaire ou circulaire. Les conduites de section transversale rectangulaire sont modélisées comme deux parois planes parallèles, si l'un des côtés de la section transversale a une très grande longueur par rapport à l'autre [87-95]. Les conduites de section transversale circulaire sont deux cylindres coaxiaux présentant un espace annulaire contenant un fluide visqueux en mouvement longitudinal [96-104]. Le transfert de chaleur intervient dans cette étude compte tenu du fait que les phénomènes d'écoulement de fluides et de distribution d'énergie sont couplés de façon naturelle puisque le fluide s'écoule à une température donnée. Compte tenu du couplage des phénomènes de distributions de la chaleur et du fluide, les scientifiques sont parfois intéressés à étudier l'influence de la température sur l'écoulement et vice-versa. Notre objectif pour l'étude du transfert de chaleur et des écoulements de fluides dans des conduites est la mise en évidence des structures hydrodynamiques qui accompagnent le mouvement du fluide et les profils de température pour pouvoir investiguer la couche limite interne dont la manifestation a un impact considérable sur le fonctionnement des moteurs de fusées, des machines hydrauliques et des moteurs industriels. Les parois des conduites qui contiennent l'écoulement peuvent être en mouvement ou poreuses, ou à la fois poreux et en mouvement dans le but de réduire la manifestation de la couche limite interne.

I.1 ECOULEMENT DE FLUIDES ET TRANSFERT DE CHALEUR ENTRE DEUX PAROIS UNIFORMEMENT PERMEABLES

La plupart des écoulements industriels confinés s'opèrent en canal rectangulaire ou cylindrique. La prise en compte de la porosité des parois des canaux rend encore le problème plus complexe dans le but de modéliser la

filtration ou le tamisage mécanique, processus utilisés dans les industries de l'eau et du pétrole. L'irrigation agricole est une autre application associée.

Dans cette étude, les parois des canaux peuvent être fixes ou mobiles. Le mouvement des parois pouvant être parallèle ou transversal à l'écoulement du fluide. L'écoulement de fluides dans des canaux admettant des parois en mouvement longitudinal (parallèle à l'écoulement) est de type couche limite fréquemment rencontrée en aérodynamique et en ingénierie naval. Par ailleurs, le mouvement transversal des parois trouve des applications dans le fonctionnement d'un moteur à combustion et à propulsion appelé fusée incendiaire utilisé dans les tirs d'artillerie. De plus, le mouvement d'un fluide entre des parois poreuses transversalement mobiles est semblable à certains écoulements biologiques rencontrés dans les poumons du corps humain et dans les vaisseaux lymphatiques [105-117].

La différence de températures entre les parois poreuses d'un canal contenant un fluide en mouvement justifie la nécessaire présence des phénomènes de conduction et de convection thermiques associés à l'écoulement. Le couplage entre le transport de masse, encore appelé écoulement, la conduction et la convection thermiques ou transfert thermique dans un canal industriel ou biologique donne lieu à des résultats intéressants et pouvant être confrontés à la réalité.

I.1.1 Ecoulement rampant et transfert de chaleur entre deux parois uniformément perméables

Un écoulement de fluide visqueux confiné est dit rampant lorsqu'il s'opère à faible nombre de Reynolds ($R < 1$). Le nombre de Reynolds est une grandeur physique sans dimension exprimant la comparaison entre les effets d'inertie et les effets de viscosité pendant le mouvement du fluide. Ce nombre est faible lorsque les forces de viscosité dominant sur les forces d'inertie; on dit dans ce cas que le fluide est fortement visqueux. La viscosité dynamique ou

coefficient de diffusion des quantités de mouvement est une propriété physique qui exprime la résistance à la déformation du fluide. En effet, quand un fluide visqueux s'écoule, trois phénomènes sont envisagés, il s'agit de la translation, la rotation et la déformation. S'agissant des propriétés physiques du fluide intervenant de plus en plus dans l'étude des écoulements avec transfert thermique, on peut ajouter la masse volumique, la conductivité thermique, et la chaleur massique à pression constante. En général, ces propriétés physiques varient en fonction de la température et de la pression. Pour les fluides newtoniens que nous étudions, l'influence de la pression est négligeable comparée à celle de la température. Un fluide est dit newtonien lorsque la loi de cause à effet, qui exprime la relation entre les contraintes et les déformations est une loi linéaire. Pour un fluide newtonien, il est convenable de considérer les autres propriétés physiques comme des constantes lorsqu'on veut prendre en compte les variations de l'une ou deux d'entre elles en fonction de la température [118, 119]. Surtout, s'agissant des variations de la viscosité dynamique en fonction de la température, il est conseillé de considérer la conductivité thermique du fluide comme une constante [118, 119]. Dans d'autres études par contre, la viscosité dynamique et la conductivité thermique varient en fonction de la température [120-125]. Parmi les fluides, on distingue surtout les liquides et les gaz. Les fluides que nous étudions sont supposés incompressibles, c'est-à-dire leurs masses volumiques sont insensibles aux variations de pression; la prise en compte de cette hypothèse donne lieu à un champ de vitesses à divergence nulle.

I.1.1.1 Ecoulements rampants et transfert thermique en conduite rectangulaire poreuse

La conduite rectangulaire est horizontale avec deux parois poreuses fixées à des températures différentes. Une section longitudinale de la conduite

rectangulaire admettant le phénomène de succion au niveau des parois poreuses est présentée dans la figure suivante [87, 88]:

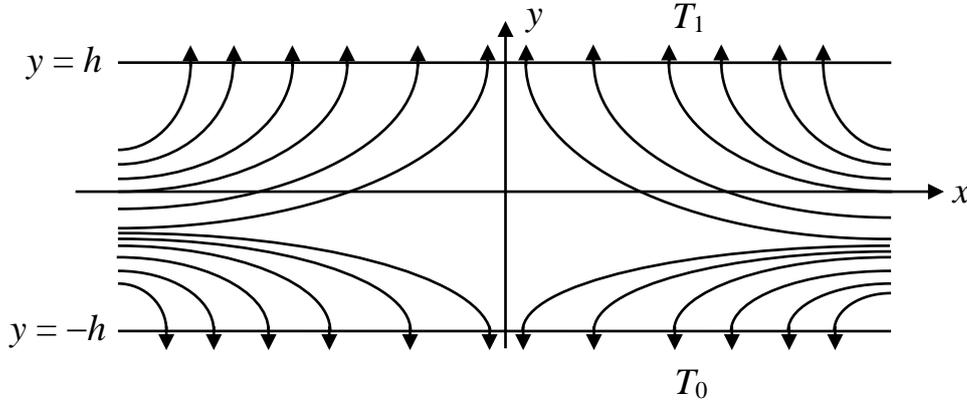


Figure I.1: Section longitudinale du canal rectangulaire avec deux parois poreuses fixées à des températures différentes T_0 et T_1 [87, 88].

Cette figure montre que $2h$ représente la largeur du canal. De plus, x et y sont des coordonnées cartésiennes associées à la géométrie du canal. La dynamique du fluide et le transfert de chaleur à l'intérieur du canal sont décrits mathématiquement par application des principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sous forme adimensionnelle [87, 88]:

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{I.1})$$

$$-\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mu^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} + \mu^* \frac{\partial V_y^*}{\partial x^*} \right) = 0 \quad (\text{I.2})$$

$$-\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\mu^* \frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} + \mu^* \frac{\partial V_y^*}{\partial x^*} \right) + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} \right) = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$V_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{I.4})$$

L'équation (I.1) est l'équation de continuité, les équations (I.2) et (I.3) sont des équations de Navier-Stokes, et l'équation (I.4) est l'équation d'énergie. Dans ces équations, le champ de vitesses a pour composantes (V_x^*, V_y^*) , T^*

décrit la température, p^* la pression, μ^* est la viscosité dynamique qui dépend de la température, R et P sont des nombres sans dimension de Reynolds et de Péclet. Compte tenu de la géométrie de la conduite, les conditions aux limites associées aux équations (I.1)-(I.4) sont les suivantes [87, 88] :

$$\begin{aligned} V_x^* = 0, \quad V_y^* = -1 \text{ et } T^* = \frac{T_0}{T_1 - T_0}, \text{ pour } y^* = -1 \\ V_x^* = 0, \quad V_y^* = +1 \text{ et } T^* = \frac{T_1}{T_1 - T_0}, \text{ pour } y^* = 1 \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

Ces conditions aux limites expriment les vitesses de succion égales (en valeur absolue) du fluide à travers les deux parois poreuses $V_y^* = \pm 1$, l'immobilité dans le sens longitudinal des particules fluides au contact des parois fixes $V_x^* = 0$, et la différence de températures entre les deux parois.

Compte tenu de l'incompressibilité du fluide exprimée à travers l'équation (I.1), l'écoulement admet une fonction de courant ψ liée aux composantes de vitesse par les expressions [87, 88] :

$$\begin{aligned} \psi = x^* F(y^*) \\ V_x^* = \frac{\partial \psi}{\partial y^*}, \quad V_y^* = -\frac{\partial \psi}{\partial x^*} \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

où F représente la fonction de courant par unité de longueur.

S'agissant de la variation de la viscosité dynamique en fonction de la température, beaucoup de lois existent dans la littérature, les lois les plus usuelles sont linéaires [67, 126], algébriques [38, 126] et exponentielles [20, 67, 127, 128]. Pour une loi linéaire de la forme $\mu^*(\theta) = 1 - \beta\theta$, où β est la sensibilité de la viscosité à la variation de la température, avec $T^* = \theta(y) + T_0/(T_1 - T_0)$, nous décrivons les profils de vitesse transversale et longitudinale, la température et la pression dans le canal. La vitesse longitudinale a un profil parabolique. Ce profil est conservé pour différents paramètres de contrôle de l'écoulement comme illustre la figure ci-dessous [88]:

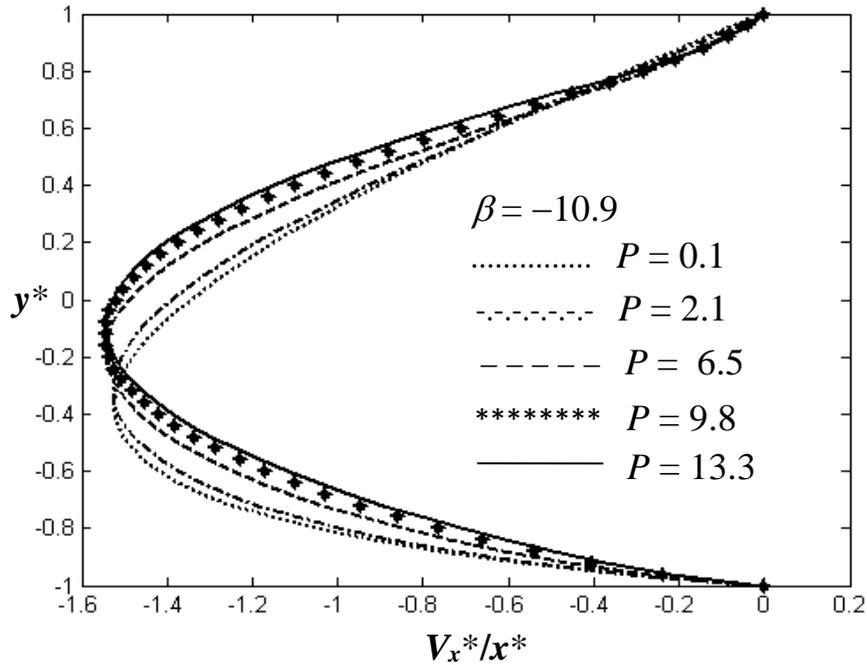


Figure I.2: Profil de vitesse longitudinale de l'écoulement [88].

La vitesse transversale est semblable au profil de Taylor comme le présente la figure I.3 [88]:

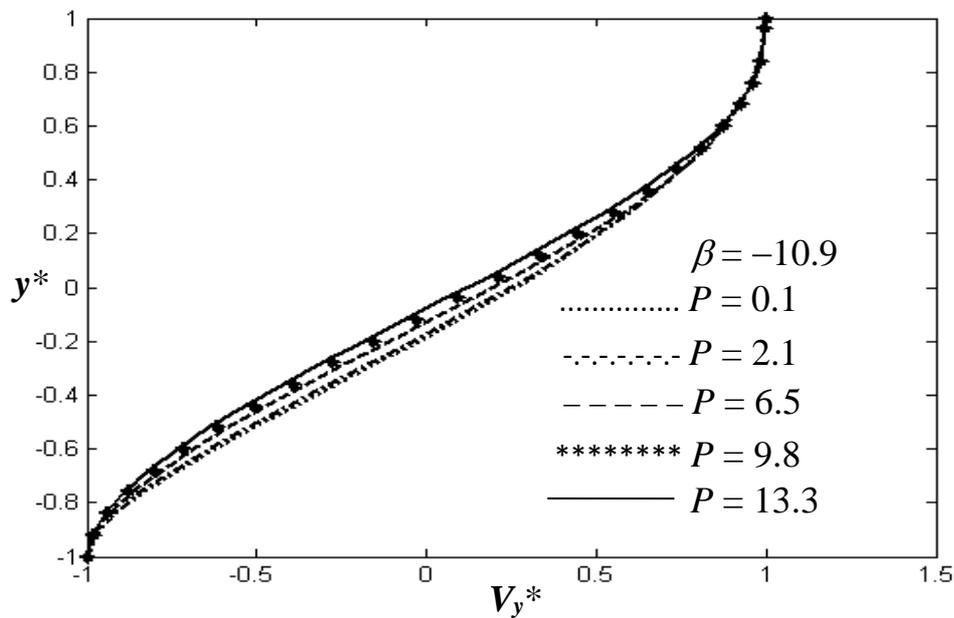


Figure I.3: Profil de vitesse transversale de l'écoulement [88].

L'allure des profils de vitesses présentés permet de conclure que pour un écoulement rampant de fluide visqueux dans une conduite rectangulaire poreuse,

la vitesse du fluide résiste aux changements et garde la même direction au cours du mouvement. Ce comportement du champ de vitesses est le même pour une loi exponentielle de la forme [87]: $\mu^*(\theta) = \exp(-\alpha\theta)$ où α est la sensibilité de la viscosité à la variation de la température, avec $T^* = \theta(y^*) + T_0/(T_1 - T_0)$. Dans la référence [88], il est mis en évidence le fait que pour plusieurs valeurs des paramètres de contrôle de l'écoulement la vitesse longitudinale a un profil parabolique [88]:

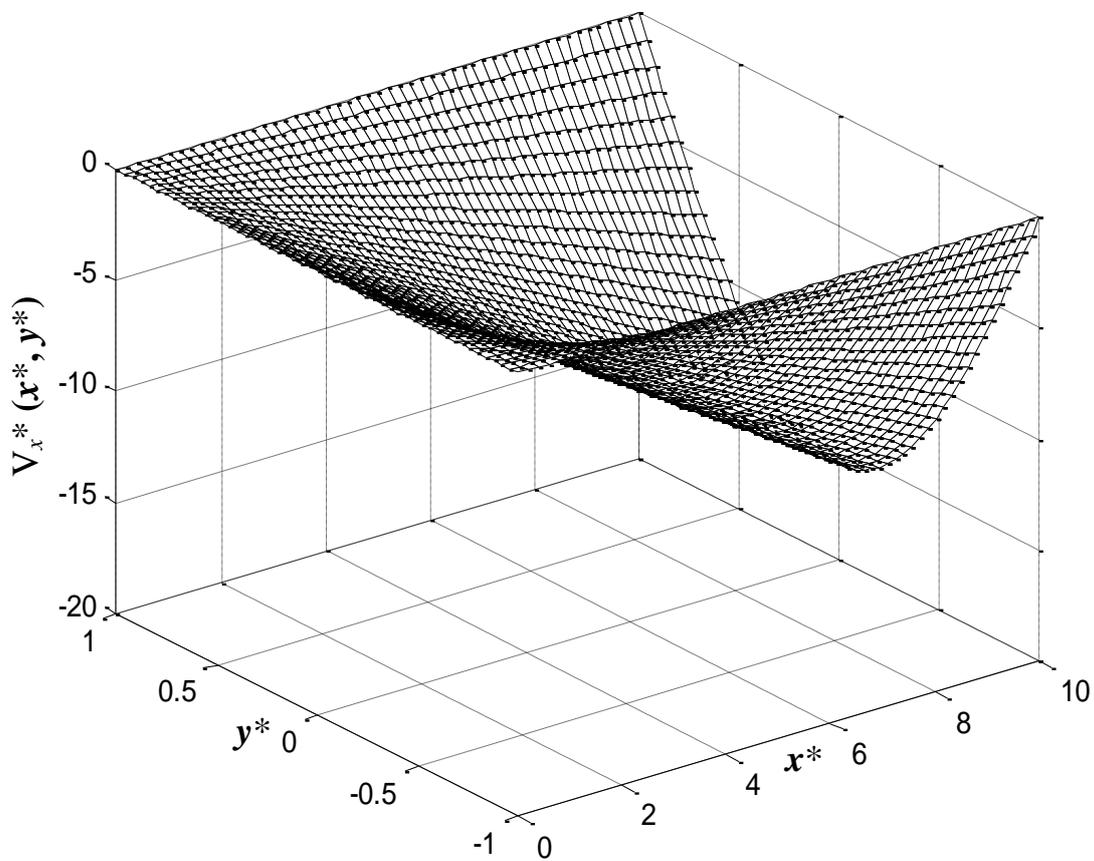


Figure I.4: Vitesse longitudinale de l'écoulement [88].

La vitesse transversale quant à elle présente une allure semblable au profil de Taylor dont la représentation en 3D est la suivante [88] :

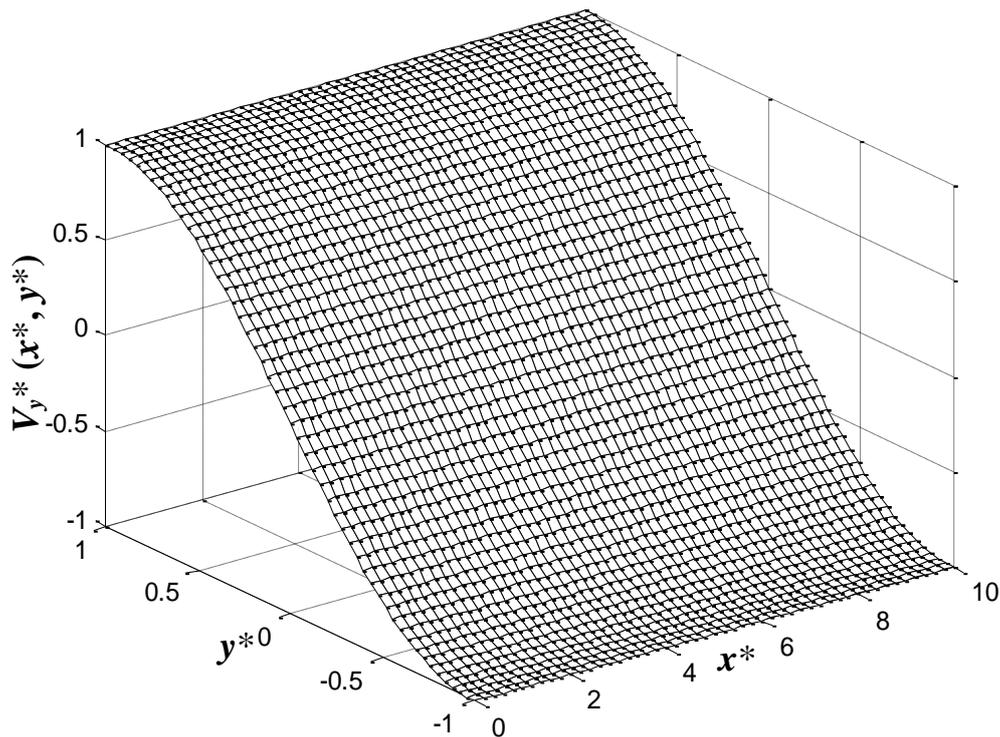


Figure I.5: Vitesse transversale de l'écoulement [88].

Une couche limite thermique apparaît dans le canal lorsque le nombre de Péclet croît. Ce comportement de la température est illustré dans la figure I.6 [88]:

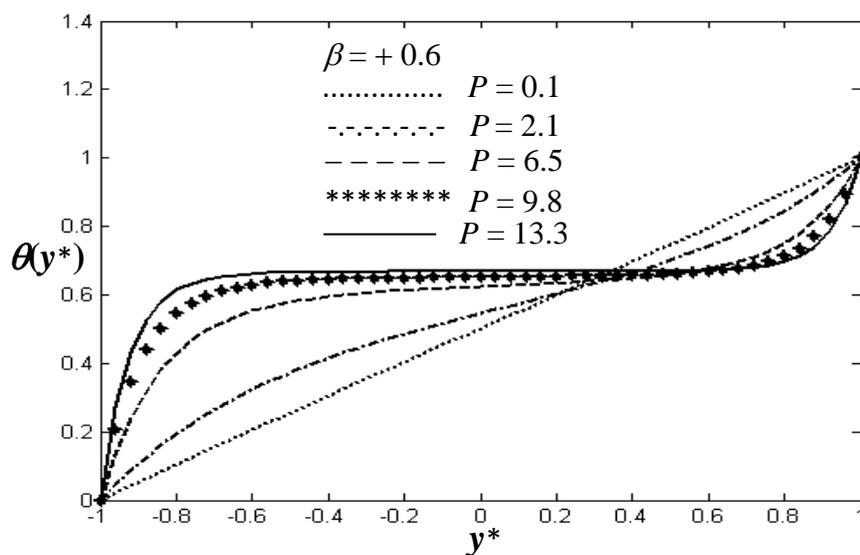


Figure I.6: Profil de température dans le canal [88].

On note aussi un gradient de pression qui chute de la paroi froide à la paroi chaude [88] :

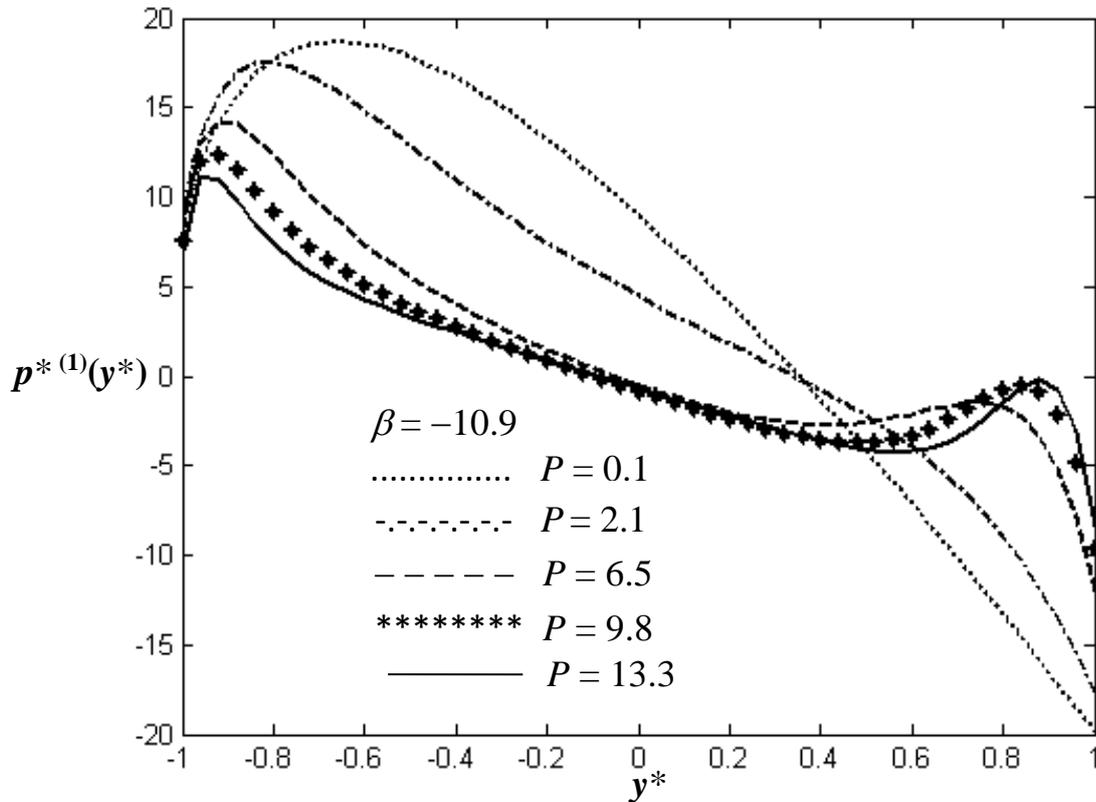


Figure I.7: Gradient de pression normale dans le canal [88].

I.1.1.2 Ecoulements rampants et transfert thermique en conduite annulaire poreuse

Concernant les écoulements rampants en conduite annulaire poreuse, le domaine fluide est formé par deux cylindres coaxiaux poreux disposés horizontalement et fixés à des températures différentes [89, 90] :

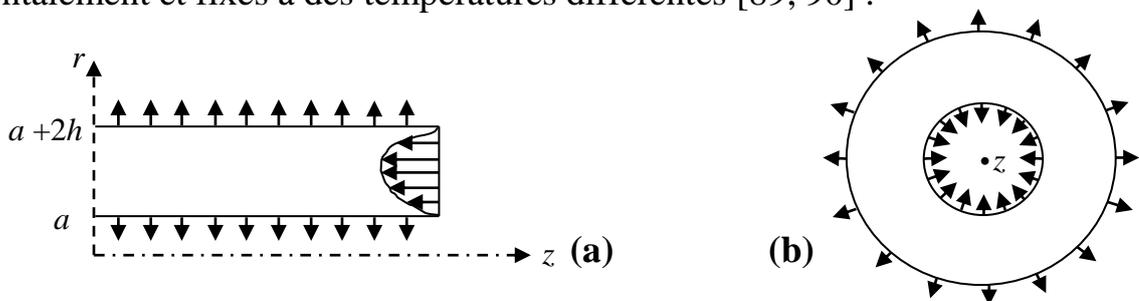


Figure I.8: Géométrie de la conduite cylindrique, (a) section longitudinale de l'écoulement, (b) section transversale de l'écoulement [89, 90].

Dans la Figure I.8, le cylindre intérieur a pour rayon a , le cylindre extérieur a pour rayon $a + 2h$; il en ressort que la distance entre les parois latérales poreuses des deux cylindres est $2h$. De plus, r et z sont des coordonnées radiale et longitudinale du repère cylindrique associé à la conduite annulaire poreuse. Les écoulements rampants avec transfert thermique en conduite cylindrique sont décrits par les équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie écrites en coordonnées cylindriques en y associant l'équation de continuité en formulation adimensionnelle [89, 90] :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* V_r^*) + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = 0 \quad (\text{I.7})$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \frac{1}{R} \mu^* \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 V_r^*}{\partial z^{*2}} - \frac{V_r^*}{r^{*2}} \right) \\ + \frac{2}{R} \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \frac{\partial \mu^*}{\partial r^*} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) \frac{\partial \mu^*}{\partial z^*} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \frac{1}{R} \mu^* \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 V_z^*}{\partial z^{*2}} \right) \\ + \frac{2}{R} \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \frac{\partial \mu^*}{\partial z^*} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} \right) \frac{\partial \mu^*}{\partial r^*} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

$$V_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + V_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \frac{1}{P} \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad (\text{I.10})$$

Dans les équations (I.7)-(I.10) qui décrivent un écoulement axisymétrique de fluide visqueux incompressible, V_r^* et V_z^* sont des composantes radiale et longitudinale du champ de vitesses, T^* et p^* caractérisent la température et la pression dans la conduite, μ^* représente la viscosité dynamique variable avec la température, R et P sont des nombres sans dimension de Reynolds et de Péclet.

Les conditions aux limites qui expriment les vitesses de succion égales (en valeur absolue) du fluide à travers les deux parois poreuses $V_r^* = \pm 1$, l'immobilité dans le sens longitudinal des particules fluides au contact des

parois fixes $V_z^* = 0$, et la différence de températures entre les deux parois sont les suivantes [89, 90]:

$$\begin{aligned} V_r^* = -1, \quad V_z^* = 0 \quad \text{et} \quad T^* = \frac{T_0}{T_1 - T_0}, \quad \text{pour} \quad r^* = \frac{a}{h} \\ V_r^* = 1, \quad V_z^* = 0 \quad \text{et} \quad T^* = \frac{T_1}{T_1 - T_0}, \quad \text{pour} \quad r^* = \frac{a + 2h}{h} \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Considérant les lois linéaire [90] : $\mu^*(\theta) = 1 - \beta(1 - \delta)\theta$ et exponentielle [89]: $\mu^*(\theta) = \exp(-\beta(1 - \delta)\theta)$ de la viscosité dynamique comme fonction de la température et les changements de variables suivants [89, 90] :

$$\begin{aligned} V_r^* &= -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi}{\partial z^*}, \quad V_z^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial \psi}{\partial r^*} \\ T^*(r^*, z^*) &= C(r^*) + \frac{T_0}{T_1 - T_0} \\ \psi(r, z) &= (\delta^{-1} - 1)z^* \phi(\eta) \\ C(r^*) &= (1 - \delta)\theta(\eta) \\ \eta &= \frac{1}{2}\delta r^2 - \frac{1}{2}\delta^{-1}(1 + \delta^2) \\ \delta &= h/(a+h) \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

les résultats obtenus [89, 90] pour les composantes du champ de vitesses, la température et la pression montrent que les caractéristiques du champ global de l'écoulement (V_r^* , V_z^*/z^* , θ , $\theta^{(1)}$, $p^{*(1)}(\eta)$) diffèrent très peu de celles observées pour la conduite rectangulaire [87, 88].

I.1.2 Ecoulements laminaires et transfert thermique en conduites poreuses

Cette partie prend en compte les effets d'inertie et incorpore le mouvement des parois. Les problèmes sont posés en géométrie cartésienne. Il convient d'abord d'étudier un écoulement de fluide visqueux entre deux parois poreuses en mouvement accéléré ou décéléré dans le sens longitudinal avec

succion ou injection sans tenir compte du transfert de chaleur. L'effet causé par les phénomènes de succion ou d'injection d'une part ainsi que le mouvement parallèle des parois d'autre part sur la distribution de température est un autre sujet intéressant à présenter. Le problème d'un écoulement de fluide avec transfert thermique dans un canal dont les parois poreuses sont orthogonalement mobiles est aussi traité.

I.1.2.1- Ecoulement laminaire entre deux parois poreuses accélérées ou décélérées dans la direction longitudinale

La géométrie du canal et de l'écoulement en étude est présentée dans la figure suivante [93]:

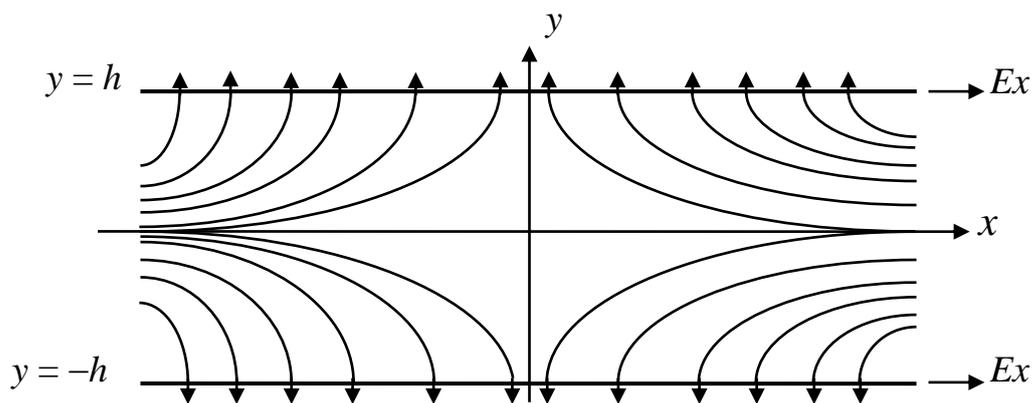


Figure I.9: Géométrie du canal avec parois poreuses accélérées [93].

Dans cette figure, E est un paramètre proportionnel à la force du mouvement des parois et sa dimension est l'inverse du temps. Les coordonnées cartésiennes associées au canal symétrique sont x et y . Il apparaît aussi que la largeur du domaine de l'écoulement est $2h$.

La description mathématique du problème est gouvernée par l'équation de continuité et les équations de Navier-Stokes [93]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$\rho \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I.14})$$

$$\rho \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I.15})$$

Dans ces équations, ρ et μ sont les seules propriétés physiques constantes du problème désignant respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique. La pression est décrite par p ; V_x et V_y sont les composantes du champ de vitesses. Les conditions aux limites associées sont les suivantes [93]:

$$\begin{aligned} V_x &= Ex, & V_y &= -V & \text{pour } y &= h \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} &= 0, & V_y &= 0 & \text{pour } y &= 0 \\ V_x &= Ex, & V_y &= V & \text{pour } y &= -h \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Ces conditions aux limites montrent que la vitesse des parois $V_x = Ex$ varie en fonction de la position longitudinale x , ces parois sont donc accélérées. La vitesse normale du fluide au niveau des parois V , est positive pour l'injection et négative pour la suction. Les conditions $\frac{\partial V_x}{\partial y} = 0, V_y = 0$ pour $y = 0$ établissent la symétrie à l'intérieur du canal. Il apparaît donc que le canal possède un plan de symétrie qui divise le domaine de l'écoulement en deux parties égales et est considéré dans notre étude comme une borne ouverte dans la zone médiane.

La nécessaire adimensionnalisation des équations intervient dans le but de mettre en évidence les nombres et les paramètres sans dimension qui permettent de contrôler l'écoulement. Ainsi, dans cette étude, les variables sans dimension en termes de longueurs, de vitesses et de pression sont choisies de la manière suivante [93]:

$$x^* = \frac{x}{h}, \quad y^* = \frac{y}{h}, \quad V_x^* = \frac{V_x}{Eh+V}, \quad V_y^* = \frac{V_y}{Eh+V}, \quad p^* = \frac{p}{\rho(Eh+V)^2} \quad (\text{I.17})$$

Les équations résultantes et les conditions aux limites sont données [93]:

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{I.18})$$

$$V_x^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 V_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_x^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{I.19})$$

$$V_x^* \frac{\partial V_y^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 V_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_y^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{I.20})$$

$$V_x^* = \lambda x^*, \quad V_y^* = \lambda - 1 \quad \text{pour } y^* = 1$$

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} = 0, \quad V_y^* = 0 \quad \text{pour } y^* = 0 \quad (\text{I.21})$$

$$V_x^* = \lambda x^*, \quad V_y^* = -(\lambda - 1) \quad \text{pour } y^* = -1$$

où $R = \rho(Eh + V)h/\mu$ est le nombre de Reynolds compté positivement pour l'injection et négativement pour la succion, $\lambda = Eh/(Eh + V)$ est un paramètre de contrôle qui désigne le coefficient adimensionnel positif pour l'accélération et négatif pour la décélération. Le cas des parois fixes correspond à $\lambda = 0$.

La fonction de courant qui permet de générer l'allure des lignes de courant de l'écoulement est introduite en utilisant ses relations avec les composantes de vitesse [93]:

$$\begin{aligned} \psi(x^*, y^*) &= x^* F(y^*) \\ V_x^*(x^*, y^*) &= \frac{\partial \psi}{\partial y^*} = x^* F^{(1)}(y^*) \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

$$V_y^*(x^*, y^*) = -\frac{\partial \psi}{\partial x^*} = -F(y^*)$$

L'introduction de la fonction de courant permet de produire les lignes de courant dans les Figures I.10 (a) et I.10 (b) pour les nombres de Reynolds de

succion $R = -20$ et $R = -5$, respectivement. D'autre part, les lignes de courant pour les nombres de Reynolds d'injection $R = 5$ et $R = 20$ sont représentées dans les Figures I.11(a) et I.11(b). Dans ces figures, le cas des parois immobiles ($\lambda = 0$) est illustré par des lignes pleines, les lignes en traits interrompus correspondent aux parois accélérées ($\lambda = 2$) et les lignes en pointillés sont celles de l'écoulement avec des parois décélérées ($\lambda = -2$). Il apparaît dans tous les cas que la décélération a tendance à rapprocher les lignes de courant du plan médian du canal et loin des bords; ceci est plus visible dans les Figures I.11(a) et I.11(b). Cependant, les Figures I.11(a) et I.11(b) montrent que l'immobilité et l'accélération des parois tendent à éloigner ces lignes de courant du plan médian et à les rapprocher des bords du canal. L'écoulement inverse causé par la l'accélération est mis en évidence par des lignes de courant avec un profil parabolique (lignes en traits interrompus). Cet écoulement inverse est prépondérant pendant la succion et la faible injection comme l'illustrent respectivement les Figures I.10(a), I.10(b) et I.11(a). Pour une injection considérable ($R = 25$, voir Figure I.11(b)), l'écoulement inverse se manifeste proche des bords du canal. Plus précisément, l'écoulement inverse a pour conséquence immédiate le changement de direction des particules fluides. Ce changement de direction du mouvement des particules fluides est à l'origine des zones de collision dans le domaine de l'écoulement. Une zone de collision est une position dans le canal où une particule fluide changeant de direction est susceptible de rencontrer une autre qui a gardé la direction primordiale du mouvement.

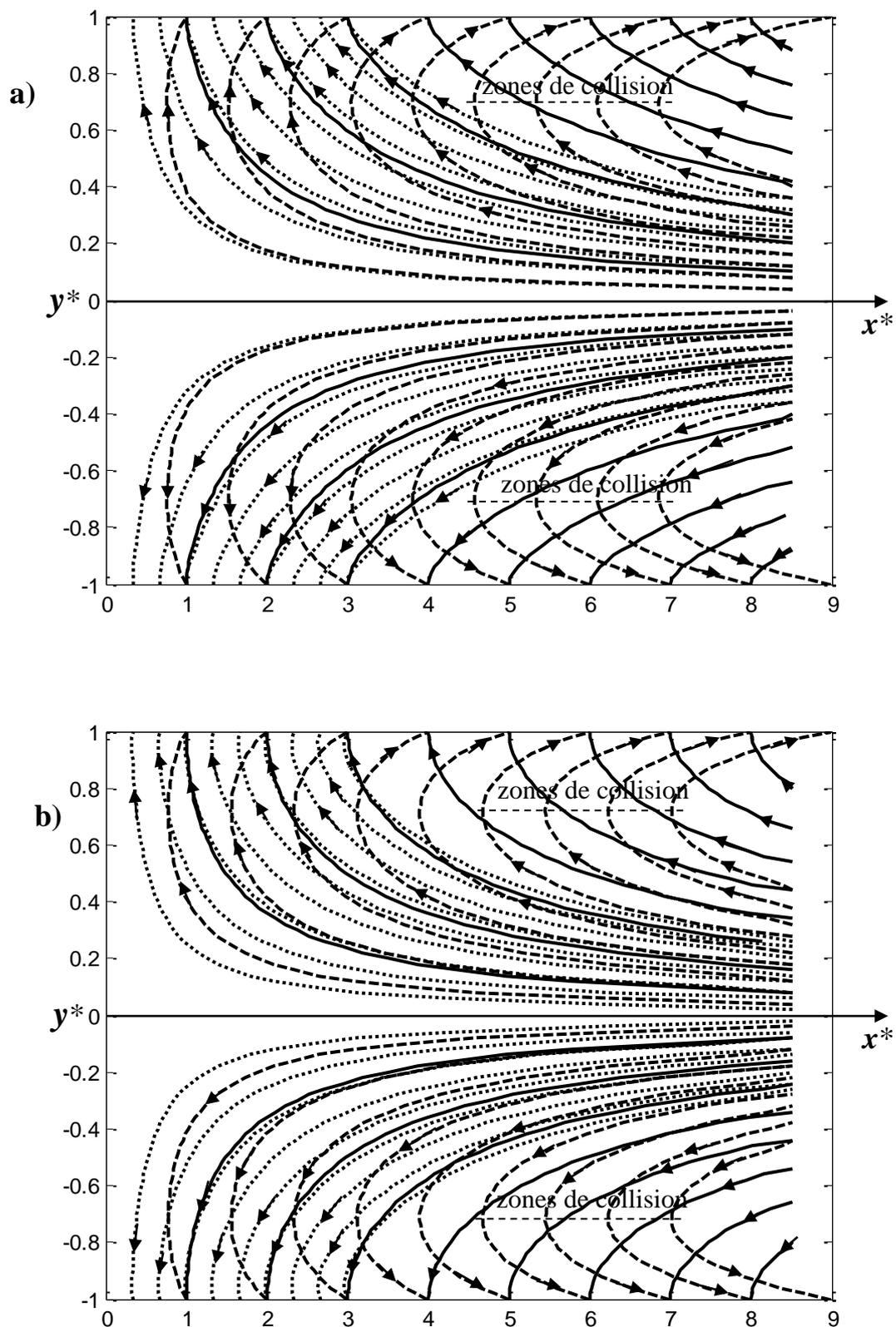


Figure I.10 : Lignes de courant de suction pour a) $R = -20$, b) $R = -5$ [93].

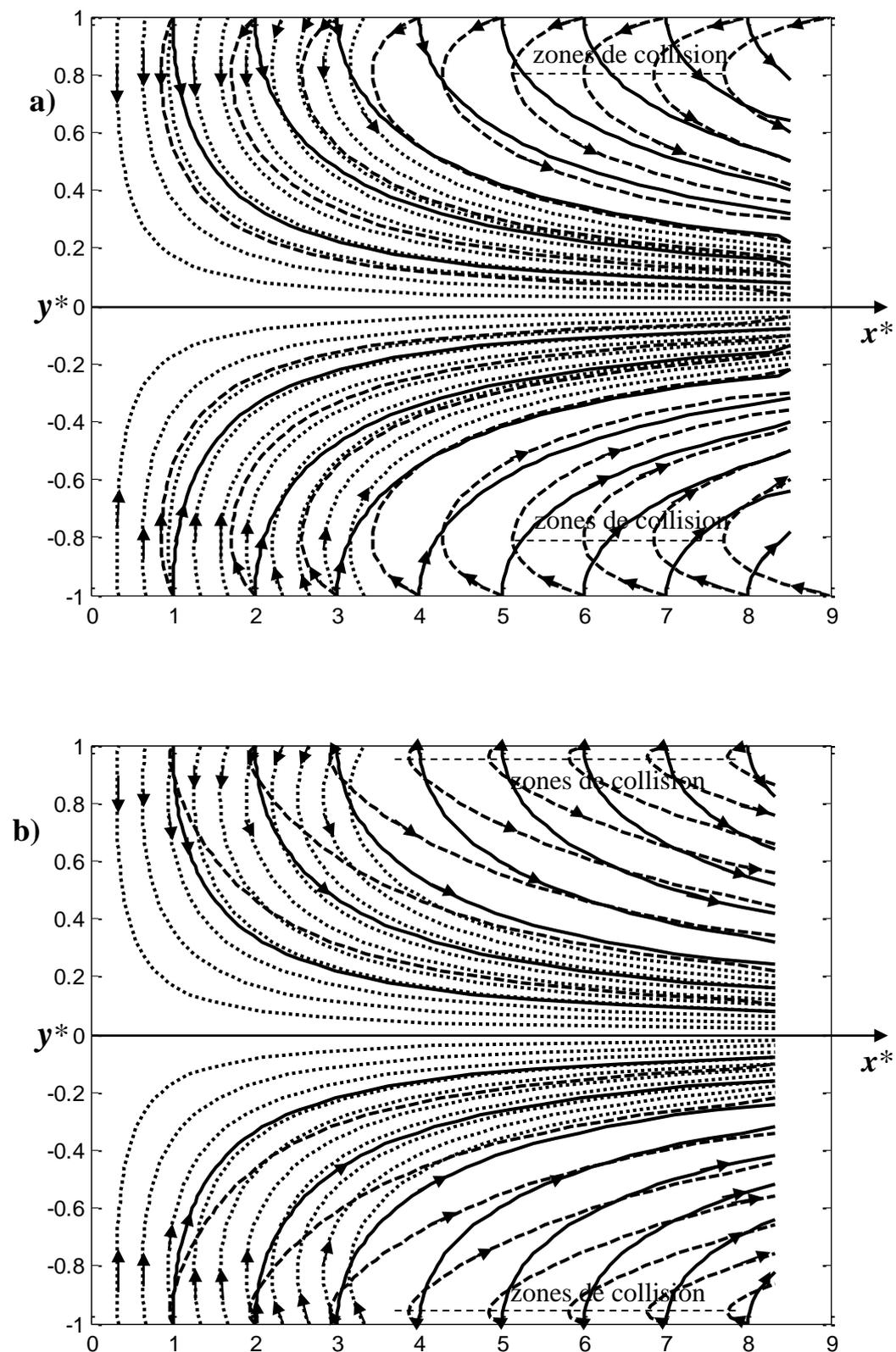


Figure I.11 : Lignes de courant d'injection pour a) $R = 5$, b) $R = 20$ [93].

I.1.2.2 Ecoulement laminaire et transfert de chaleur entre deux parois poreuses en mouvement longitudinal

Dans cette partie, nous présentons les composantes de vitesse, le gradient normal de pression et les variations de température entre deux parois poreuses accélérées ou décélérées, fixées à des températures différentes. Le modèle mathématique de cette section étant le même que celui de la section I.1.2.1 pour le transport de masse, la différence entre les deux sections I.1.2.1 et I.1.2.2 est le couplage entre le transport de masse et le transfert de chaleur avec une conductivité thermique dépendant de la température dans la section I.1.2.2. En utilisant les équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie, ainsi que les changements de variables appropriés, le problème à résoudre est le suivant [92]:

$$\begin{aligned}
 \psi(x^*, y^*) &= x^* F(y^*) \\
 V_x^*(x^*, y^*) &= \frac{\partial \psi}{\partial y^*} = x^* F^{(1)}(y^*) \\
 V_y^*(x^*, y^*) &= -\frac{\partial \psi}{\partial x^*} = -F(y^*) \\
 T^*(x^*, y^*) &= \theta(y^*) \\
 \kappa(\theta) &= 1 + \gamma\theta \\
 F^{(4)} + R(FF^{(3)} - F^{(1)}F^{(2)}) &= 0 \\
 (1 + \gamma\theta)\theta^{(2)} + \gamma(\theta^{(1)})^2 + PF\theta^{(1)} &= 0 \\
 F^{(1)}(1) = \lambda, \quad F(1) = -(\lambda-1), \quad \theta(1) &= 1 \\
 F^{(2)}(0) = 0, \quad F(0) = 0, \quad \theta(0) &= 0.5 \\
 F^{(1)}(-1) = \lambda, \quad F(-1) = \lambda - 1, \quad \theta(-1) &= 0
 \end{aligned} \tag{I.23}$$

Dans les équations adimensionnelles (I.23), ψ est la fonction de courant, F la fonction de courant par unité de longueur, x^* et y^* les coordonnées axiale et normale associées au domaine géométrique de l'écoulement, V_x^* et V_y^* les composantes axiale et normale du champ de vitesses, T^* le champ de température, θ la température dans la direction normale du canal, κ la

conductivité thermique dépendant de la température, γ la sensibilité de la conductivité thermique à la variation de la température, R et P , désignent respectivement le nombre de Reynolds et le nombre de Péclet positifs pour l'injection du fluide dans le canal, mais négatifs pour la suction, et le paramètre de contrôle λ positif pour l'accélération et négatif pour la décélération des parois du canal.

La vitesse axiale par unité de longueur pour différentes valeurs des paramètres de contrôle est présentée dans les Figures I.12(a) et I.12(b). De ces figures, il ressort que l'écoulement inverse est dominant pour une valeur fixe positive de λ et pendant la suction (voir figure I.12(a)). Dans le cas où λ a une valeur fixe positive, l'injection a tendance à réduire l'écoulement inverse et fait apparaître un écoulement de type couche limite dans le canal avec la croissance du nombre de Reynolds positif. Lorsque le paramètre λ prend une valeur fixe négative comme dans la figure I.12(a), l'écoulement inverse disparaît et tend à se manifester de nouveau pour des nombres de Reynolds négatifs. Dans la Figure I.12(b), pour un nombre de Reynolds négatif et fixe, l'écoulement est d'autant plus inversé que le paramètre λ croît; or la décroissance du paramètre λ fait apparaître un comportement contraire. Dans la Figure I.12(a) la vitesse axiale par unité de longueur V_x^*/x^* croît avec le nombre de Reynolds dans la région centrale du canal, mais décroît près des parois lorsque celles-ci sont accélérées ou décélérées. Cependant, dans la Figure I.12(b), la vitesse axiale par unité de longueur V_x^*/x^* décroît avec le paramètre λ dans la région centrale du domaine de l'écoulement, mais croît près des parois pour des valeurs fixes des nombres de Reynolds de suction et d'injection. Il en ressort que la croissance du nombre de Reynolds et celle du paramètre λ causent des effets contraires au centre du canal et proche des parois sur le comportement de la composante axiale par unité de longueur du champ de vitesses.

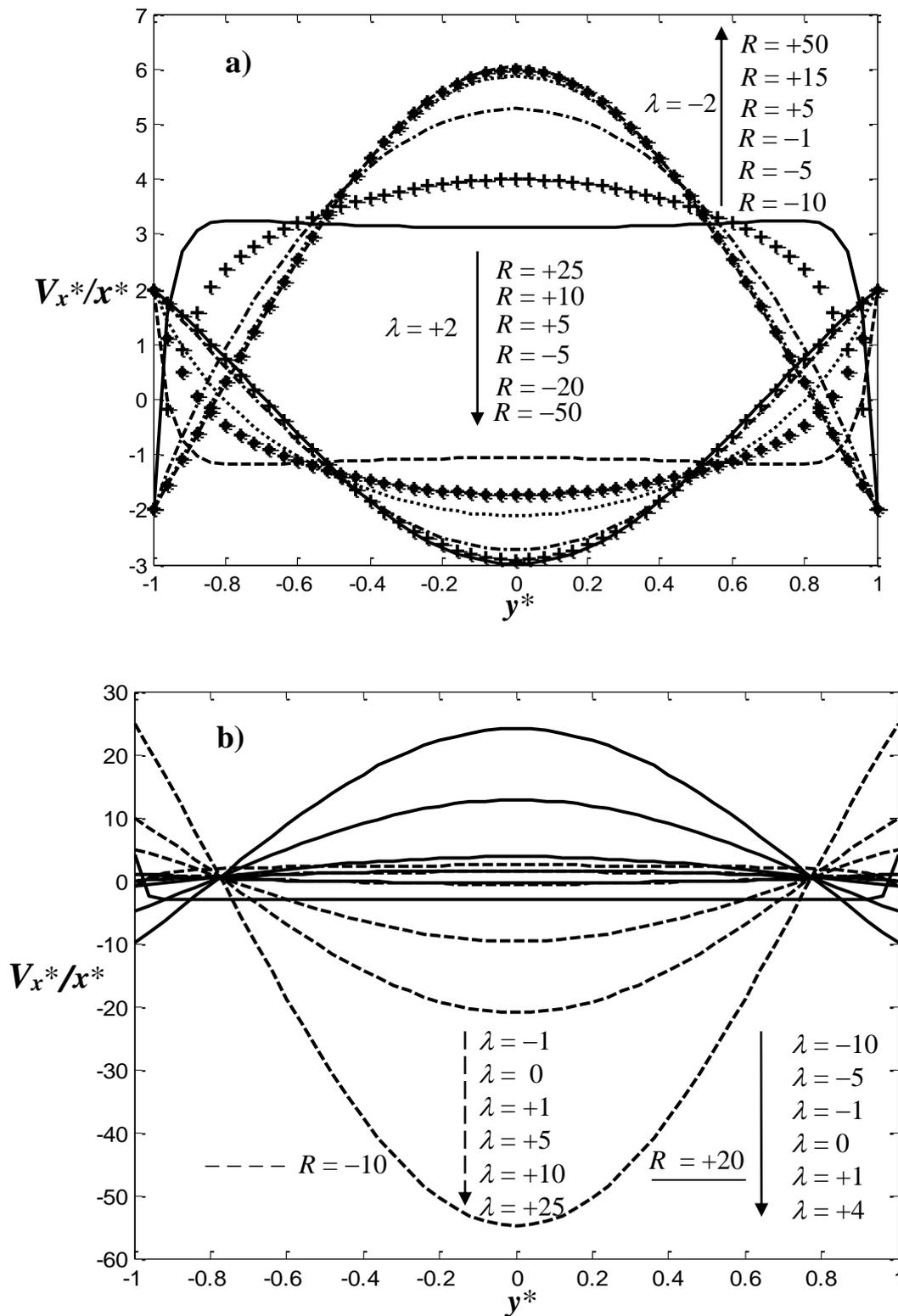


Figure I.12 : Vitesse axiale par unité de longueur, a) pour des paramètres fixes d'accélération ($\lambda = +2$) et de décélération ($\lambda = -2$) et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, b) pour les nombres de Reynolds de suction ($R = -10$) et d'injection ($R = +20$) et pour différentes valeurs du paramètre d'accélération [92].

Pour les mêmes valeurs des paramètres de contrôle utilisés dans l'analyse du comportement de la composante axiale du champ de vitesses, la composante normale V_y^* est aussi présentée [92]:

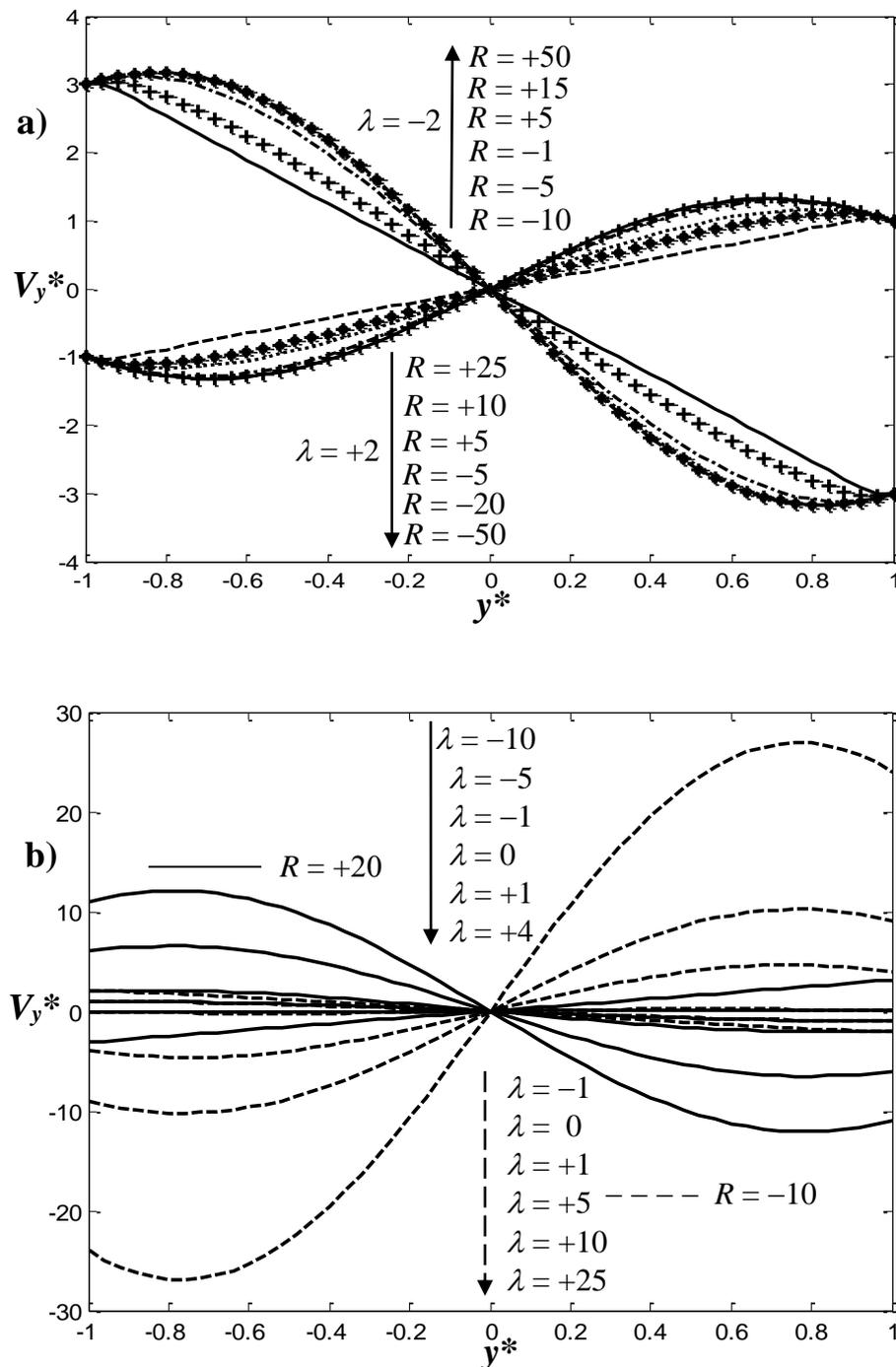


Figure I.13 : Vitesse normale, a) pour des paramètres fixes d'accélération ($\lambda = +2$) et de décélération ($\lambda = -2$) et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, b) pour les nombres de Reynolds fixes de suction ($R = -10$) et d'injection ($R = +20$) et pour différentes valeurs du paramètre d'accélération [92].

La vitesse normale telle que représentée dans la figure I.13(a) fait apparaître des régions où elle déborde sa valeur absolue au niveau des parois. Ces régions sont de plus en plus mises en exergue dans les cas où l'écoulement inverse a été identifié. Il apparaît par ailleurs dans cette figure que la couche limite se manifeste par un comportement quasi-linéaire de la composante normale de vitesse. La mobilité des parois impose des valeurs différentes de la vitesse normale au niveau des parois comme le montre la Figure I.13(b). Dans la Figure I.13(b), le comportement linéaire apparaît avec la croissance du paramètre λ pour un nombre de Reynolds positif et fixé, alors qu'il se manifeste avec la décroissance de λ pour un nombre de Reynolds négatif et fixé.

Le gradient normal de pression $Q(y^*)$ présente un comportement oscillatoire en l'absence de la couche limite et tend à s'annuler quand celle-ci apparaît comme l'illustre la figure suivante [92]:

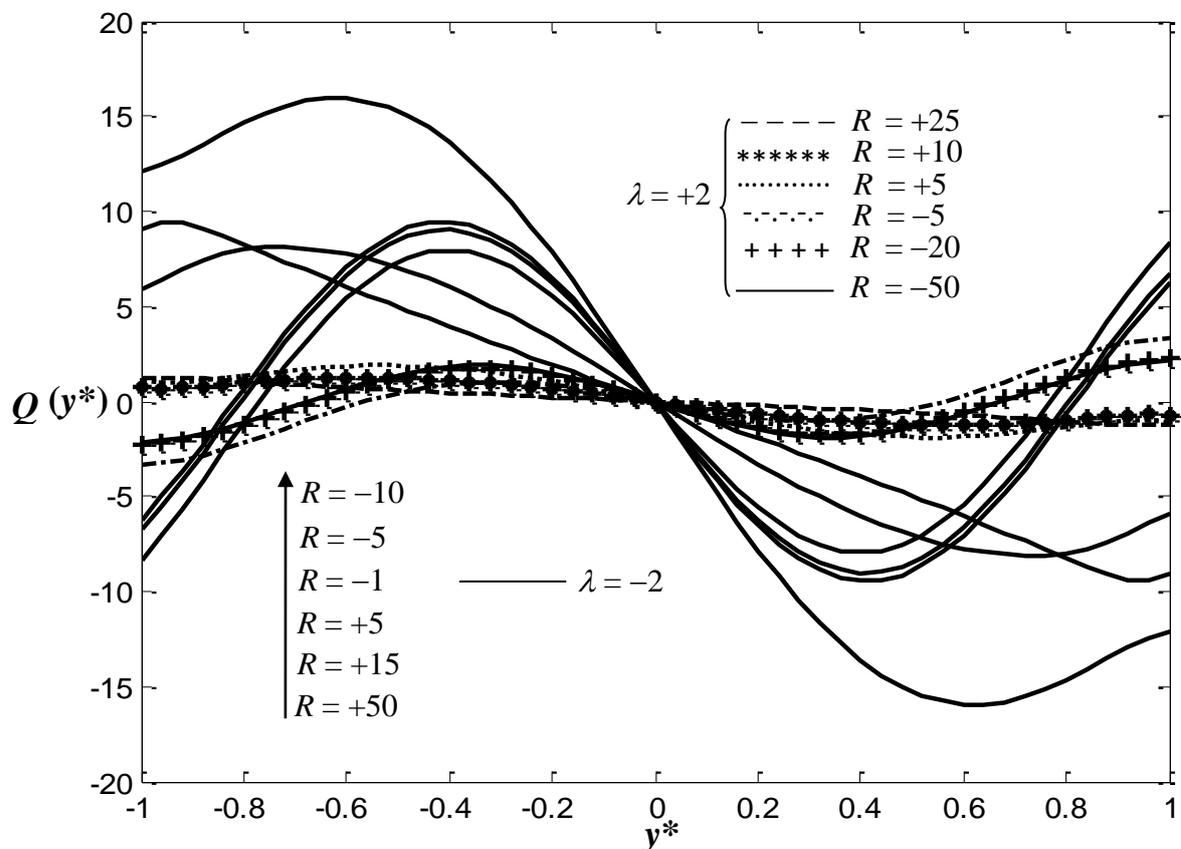


Figure I.14 : Gradient normal de pression [92].

Le comportement du gradient normal de pression est en parfait accord avec la conservation de la quantité de mouvement.

La distribution de température à l'intérieur du canal montre la manifestation d'une couche limite thermique lorsque le nombre de Péclet croît en valeur absolue au voisinage de 10 comme le présentent les figures suivantes [92] :

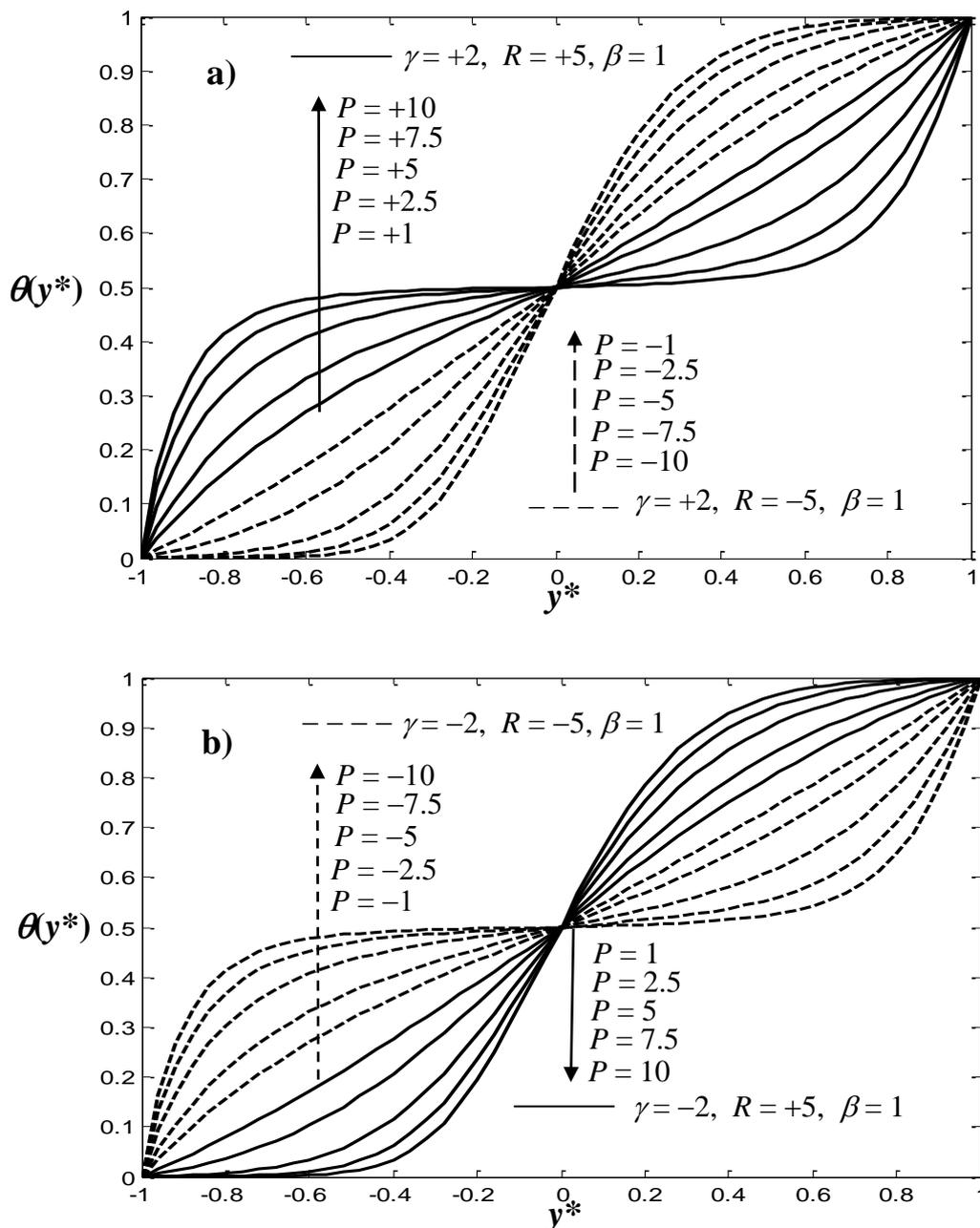


Figure I.15 : Température à l'intérieur du canal, a) présentant une couche limite thermique d'injection, b) présentant une couche limite thermique de suction [92].

Dans les Figures I.15(a) et I.15(b) la température tend à obéir à une loi linéaire avec la décroissance en valeur absolue du nombre de Péclet.

I.1.2.3 Ecoulement laminaire et transfert de chaleur dans un canal poreux en expansion

Dans ce problème, le fluide est injecté à travers le canal perméable dont les parois poreuses sont en expansion. Le mouvement d'expansion des parois crée automatiquement une augmentation du volume du domaine de l'écoulement. La section transversale amont du canal est une membrane imperméable qui admet le mouvement d'expansion des parois latérales comme le montre la Figure I.16 [56, 91]. Il s'agit donc d'un écoulement bidimensionnel de fluide visqueux dans un canal semi-infini, possédant deux plaques poreuses de faible épaisseur fixées à des températures différentes $T = 0$ et $T = T_0$. La Figure I.16 montre que le canal rectangulaire est construit dans un système de coordonnées cartésiennes où x désigne la coordonnée longitudinale ou axiale et y la coordonnée normale ou transversale. h est la demi-largeur du domaine de l'écoulement, variable avec le temps et dh/dt est la vitesse d'éloignement des parois l'une de l'autre.

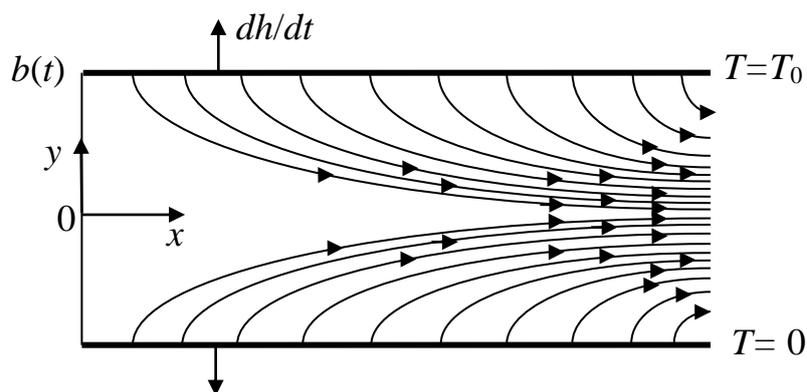


Figure I.16: Coupe longitudinale du canal semi-infini [56, 91].

Dans ce problème intervient un nouveau nombre sans dimension appelé nombre de Prandtl Pr , défini par $Pr = \rho\nu/\kappa$, où ρ est la masse volumique, ν la

viscosité cinématique et κ la conductivité thermique du fluide. En plus du nombre de Prandtl, deux autres paramètres de contrôle interviennent dans le problème; il s'agit du nombre de Reynolds $R = Vb/\nu$ et le coefficient adimensionnel d'expansion des parois $\beta = h\dot{h}/\nu$, où \dot{h} est la vitesse d'expansion du canal, encore appelée vitesse d'entraînement des particules fluides. Dans ce cas, au niveau des frontières du domaine de l'écoulement, si V_0 est la vitesse relative des particules fluides, alors la vitesse absolue V , est définie par : $V = V_0 - \dot{h}$. En formulation adimensionnelle, les équations permettant de décrire le champ de vitesses, la pression et la température à l'intérieur du canal sont les suivantes [56] :

$$V_x^* = F^{(1)} / R$$

$$V_y^* = F / R$$

$$\frac{1}{x^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \phi^{(3)} + \phi\phi^{(2)} + (2\chi - F^{(1)})F^{(1)} + \chi y^* F^{(2)} = \text{constant}$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial y^*} = p^{(1)*}(y^*) = -(F^{(2)} + FF^{(1)} + \chi(F + y^* F^{(1)}))$$

$$y^* = \frac{y}{h(t)}$$

$$F^{(4)} + FF^{(3)} - F^{(1)}F^{(2)} + \chi y^* F^{(3)} + 3\chi F^{(2)} = 0$$

$$\theta^{(2)} + \text{Pr} F\theta^{(1)} + \text{Pr} \chi y^* \theta^{(1)} = 0$$

$$F(-1) = -R, \quad F(0) = 0, \quad F(1) = R$$

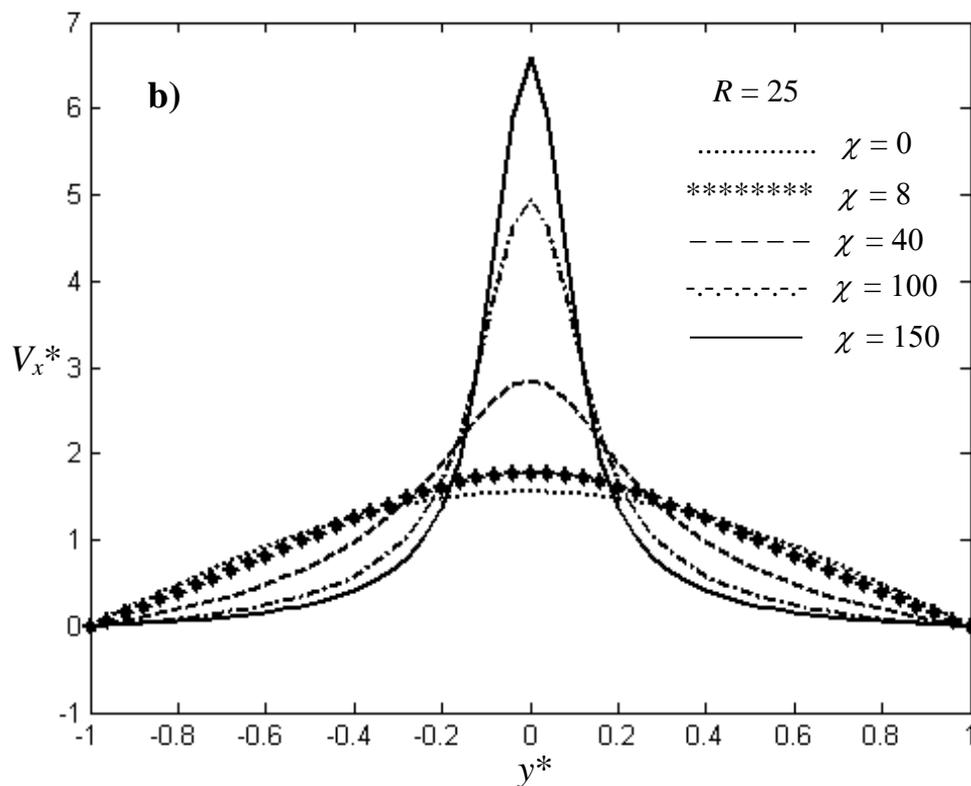
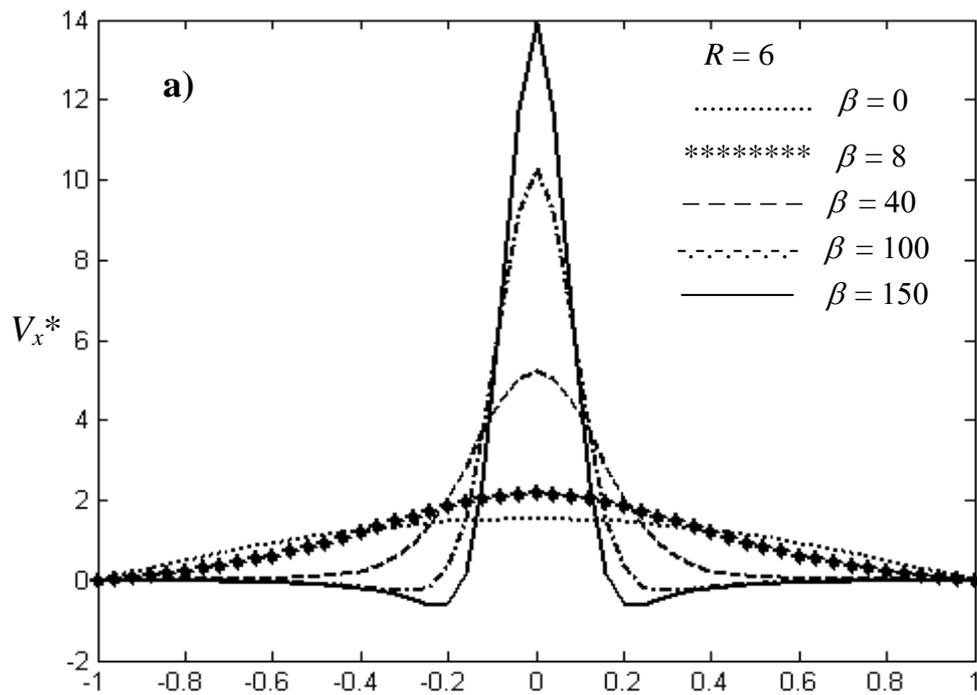
$$F^{(1)}(-1) = 0, \quad F^{(2)}(0) = 0, \quad F^{(1)}(1) = 0$$

$$\theta(-1) = 0, \quad \theta^{(1)}(0) = 0.5, \quad \theta(1) = 1$$

Dans ces équations, V_x^* et V_y^* sont des composantes du champ de vitesses, (x^*, y^*) un système de coordonnées cartésiennes associées au canal, F la fonction de courant par unité de longueur du canal, x^* la coordonnée axiale

adimensionnelle, y^* la variable adimensionnelle suivant la direction normale du canal, p^* la pression et θ représente la température.

La vitesse axiale V_x^* est présentée dans les figures ci-dessous [56, 91] :



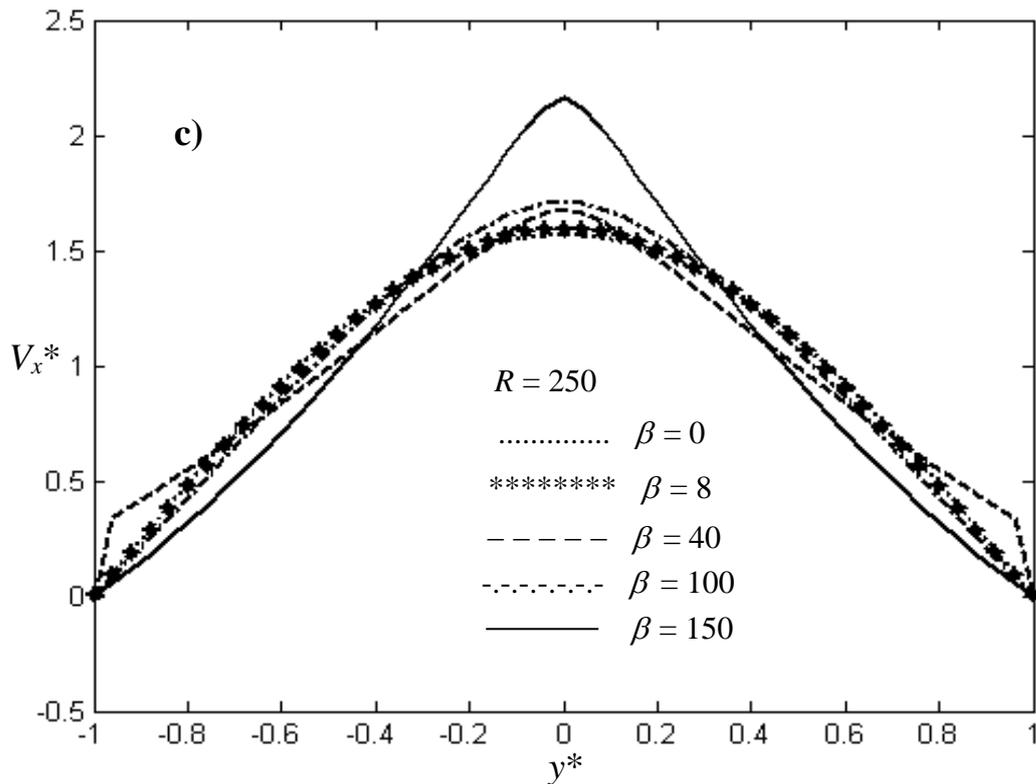
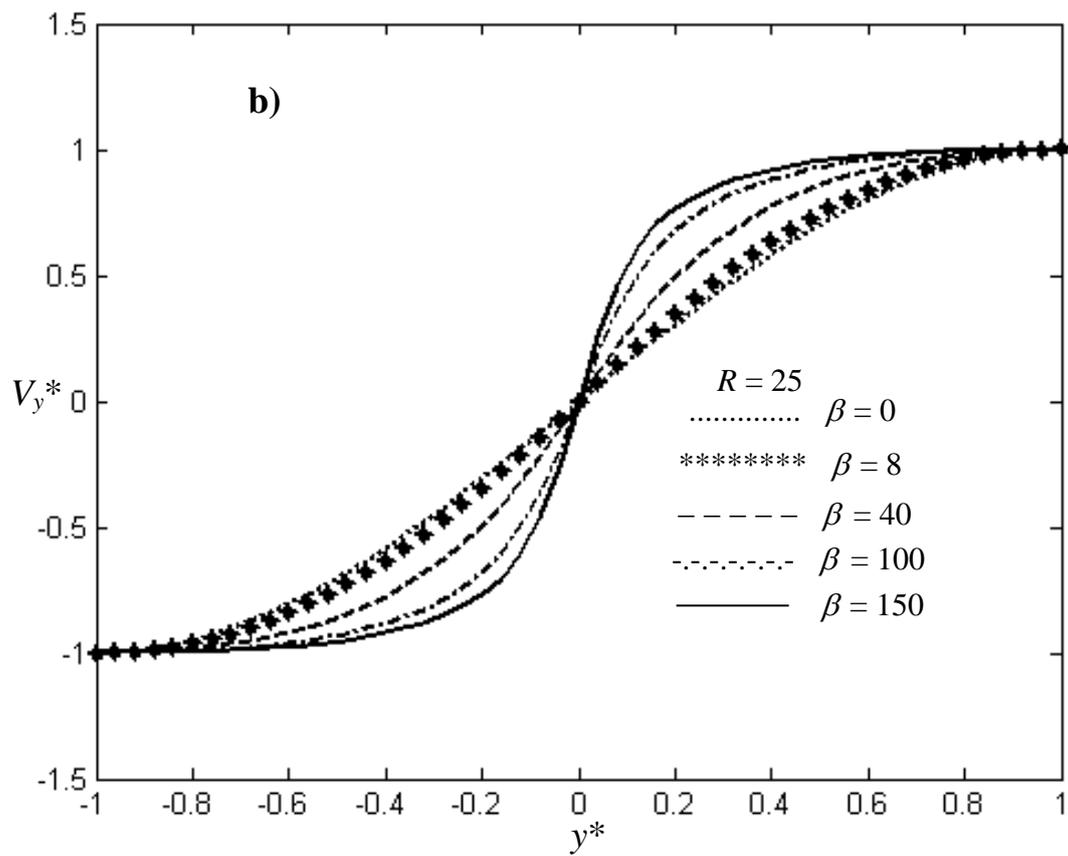
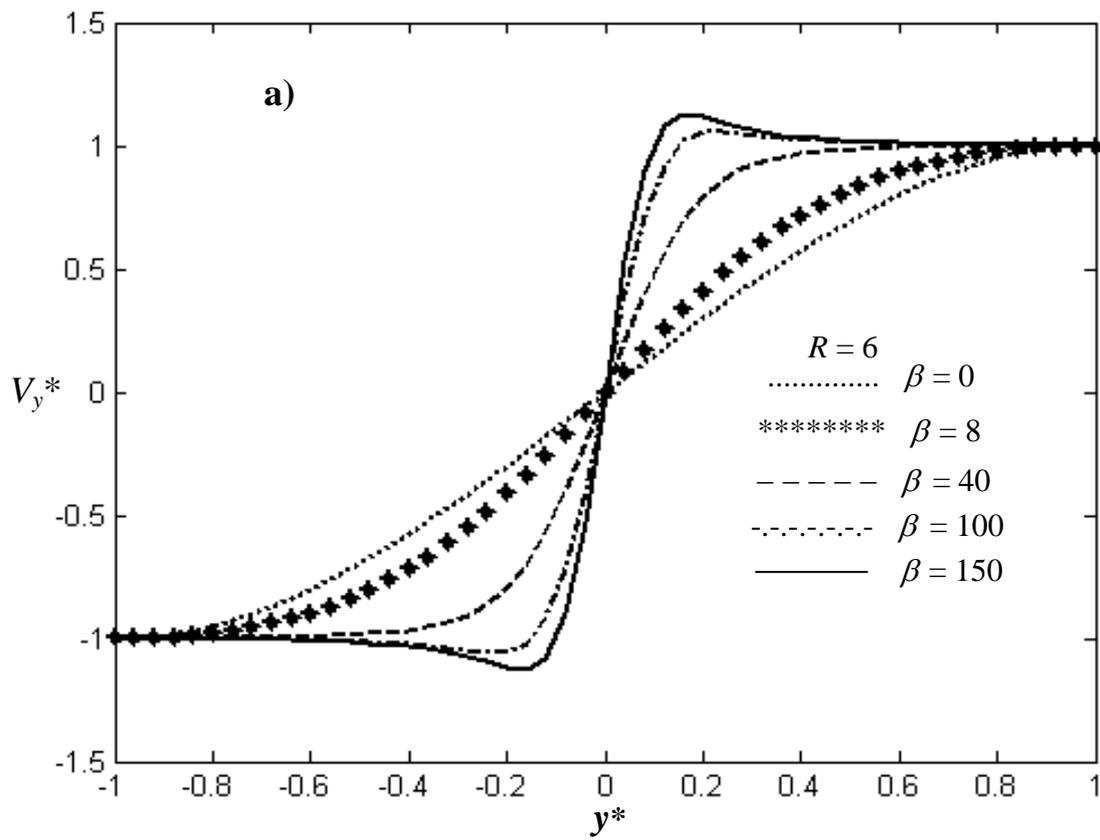


Figure I.17: Vitesse axiale pour plusieurs valeurs des paramètres de contrôle, a) $R = 6$, b) $R = 25$, c) $R = 250$ [56, 91].

La Figure I.17 montre que l'écoulement inverse ne se produit que pour une augmentation du volume du canal et pour des petits nombres de Reynolds. Pour un nombre de Reynolds fixé, l'augmentation du volume du domaine de l'écoulement cause une diminution de V_x^* près des deux frontières poreuses et une croissance au voisinage du plan médian. Pendant que la croissance du nombre de Reynolds fait croître la vitesse axiale au centre du canal, cette même croissance de R , cause une réduction du maximum de V_x^* au milieu du champ de l'écoulement. Cette croissance du nombre de Reynolds R , a tendance à rendre identiques les effets causés par différents coefficients d'expansion χ . La composante normale du champ de vitesses est présentée dans la Figure I.20 [56, 91] :



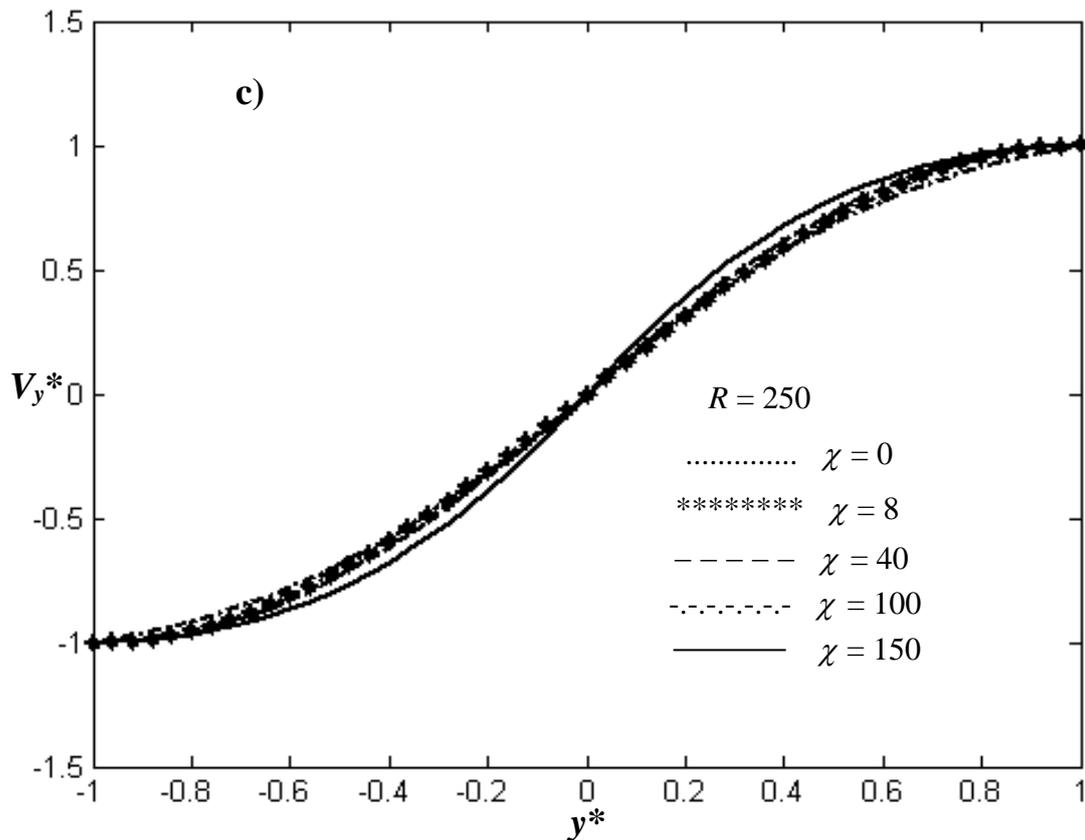


Figure I.18: Vitesse normale, a) $R = 6$, b) $R = 25$, c) $R = 250$ [56, 91].

Les zones où cette composante normale V_y^* dépasse sa valeur absolue au niveau des frontières sont celles où l'écoulement inverse est détecté. Ce débordement de la vitesse normale est dû à la collision des particules fluides à cause du changement de sens du mouvement. Ces collisions probables entre particules fluides ont aussi été évoquées dans d'autres travaux [129, 130]. Le comportement de la vitesse normale tend asymptotiquement à une courbe identique suivant la loi est $V_y^* = \sin\left(\frac{1}{2}\pi y^*\right)$ [131], avec la croissance du nombre de Reynolds (voir Figure I.18(c)).

La relation entre le champ de vitesses et la pression entretenue par la conservation de la quantité de mouvement révèle un comportement oscillatoire du gradient de pression à l'intérieur du canal [91] :

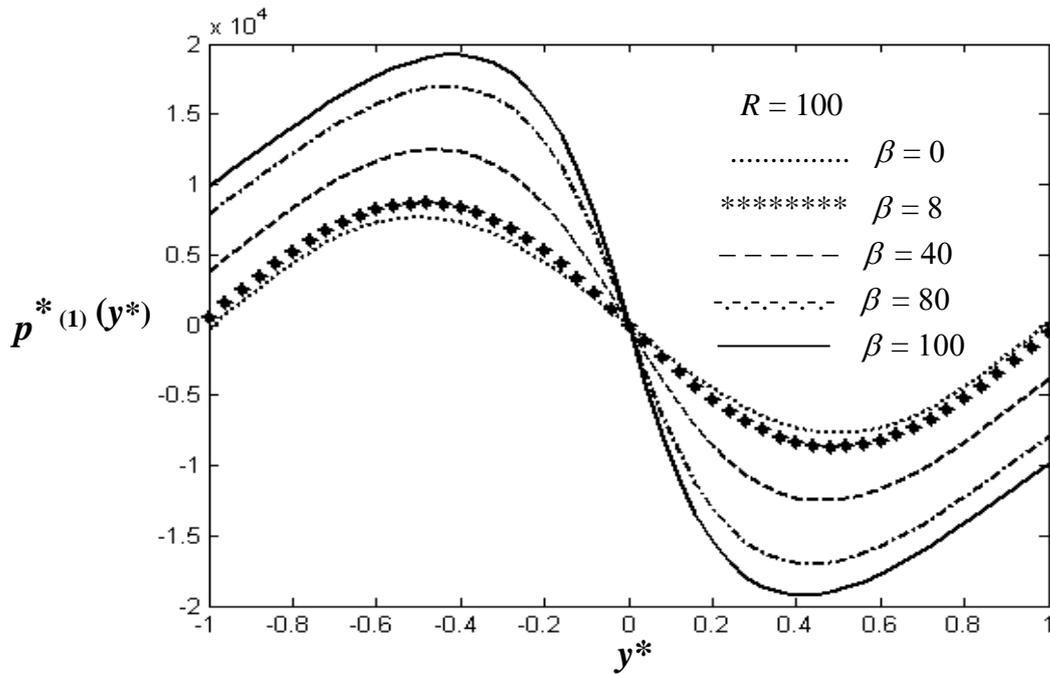


Figure I.19: Gradient de pression à l'intérieur du canal [91].

Pour plusieurs valeurs des paramètres de contrôle, le gradient de température est maximal dans la région centrale du canal et minimal au niveau des frontières du domaine de l'écoulement, comme le montre par exemple la Figure I.20 :

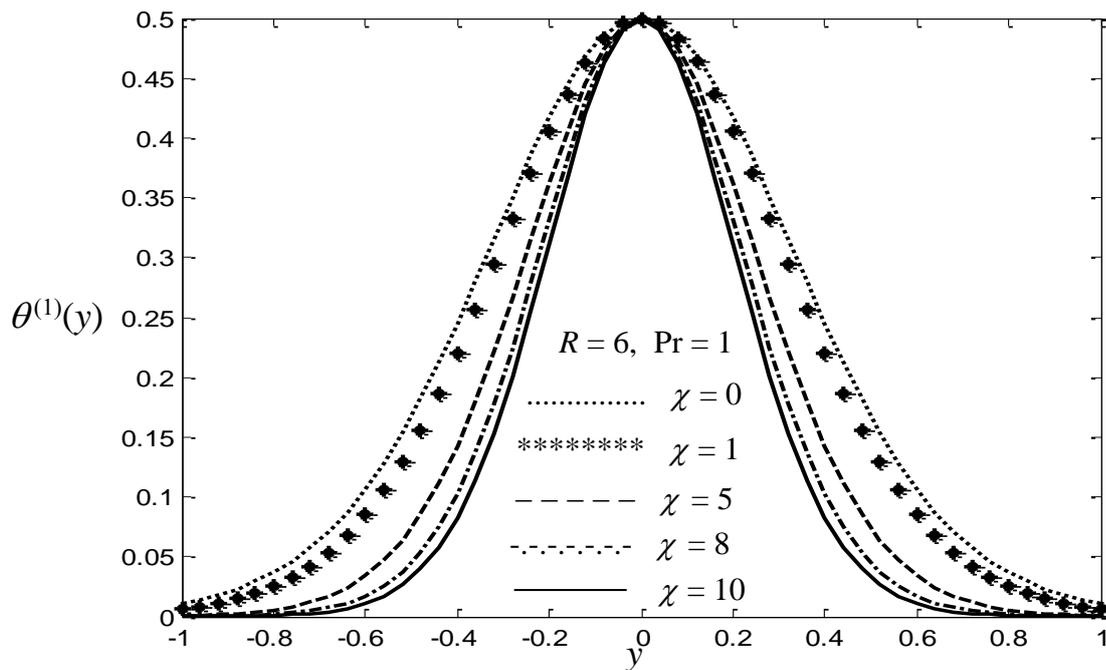


Figure I.20: Gradient de température à l'intérieur du canal [91].

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques travaux antérieurs relatifs à la thématique abordée dans ce mémoire de thèse. Ces travaux présentent l'écoulement rampant et le transfert de chaleur entre deux parois uniformément perméables mais aussi l'écoulement laminaire et le transfert thermique en conduites poreuses.

**CHAPITRE II :
POSITION DU PROBLEME ET
MEHODE DE RESOLUTION**

Dans ce chapitre, nous formulons mathématiquement l'écoulement de cisaillement d'un fluide visqueux incompressible entre deux parois parallèles et poreux fixées à des températures différentes. Comme le mouvement du fluide est associé à la distribution d'énergie, une autre grande attention porte sur l'équation de la chaleur. La réparation de la chaleur renvoie souvent à la thermodynamique et aux transferts thermiques. Les notions de chaleur et de température sont les plus fondamentales de la thermodynamique. Il est possible de définir la thermodynamique comme la science de tous les phénomènes qui dépendent de la température et de ses changements. Un corps est Chaud ou froid selon que sa température est plus ou moins élevée. L'un des grands succès de la thermodynamique classique du XIX^e siècle est d'avoir donné une définition de la température absolue d'un corps, qui a amené à la création de l'échelle Kelvin. Celle-ci donne la température minimale pour tous les corps. Il s'agit du zéro absolu, dont le concept apparaît pour la première fois en 1702 avec le physicien français Guillaume Amontons. La méthode de résolution du modèle mathématique composé des équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie est aussi détaillée [132-139]. Une ancienne théorie, défendue notamment par Lavoisier, attribuait à un fluide spécial (invisible, impondérable ou presque) les propriétés de la chaleur, le calorique; qui circulerait d'un corps à un autre. Plus un corps est chaud, plus il contiendrait de calorique. Cette théorie peut être remise en cause au sens où le calorique ne peut pas être identifié à une quantité physique conservée. En thermodynamique, on définit la chaleur comme un transfert d'énergie désordonné d'un système vers le milieu extérieur. En effet, l'énergie thermique correspond à l'énergie cinétique des molécules se déplaçant et subissant des chocs de manière aléatoire (appelés mouvement brownien). L'énergie transférée est dite désordonnée au niveau microscopique, par opposition au transfert d'énergie ordonnée au niveau macroscopique. La thermodynamique classique a pris son essor comme science des machines thermiques ou science de la puissance motrice du feu. Sadi Carnot a initié les

études modernes des machines thermiques dans un mémoire fondateur, *Réflexion sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* (1824). Le cycle de Carnot étudié dans ce contexte, reste le principal exemple théorique d'étude des machines thermiques. Plutôt que "puissance motrice", on dit aujourd'hui que les machines thermiques fournissent du travail, et on s'interroge sur la façon d'utiliser la chaleur pour produire le travail continu.

La chaleur est produite par le mouvement des corps macroscopiques. Il suffit par exemple de frotter ses mains pour s'en rendre compte. Inversement, la chaleur peut mettre des corps macroscopiques en mouvement. On peut les appeler des machines à feu ou machines thermiques. Dans un système macroscopique, elles conservent leur mouvement tant qu'une différence de température entre une partie chaude et une partie froide est maintenue. Dans la suite, nous donnons quelques exemples où la puissance thermique joue un rôle. Une bougie allumée met en mouvement l'air qui l'entoure. Un courant ascendant est créé au-dessus de la flamme. Il est perpétuellement renouvelé par un courant d'air froid arrivant en dessous. On peut les observer dans un espace calme avec une plume de duvet ou en approchant une autre flamme. Il s'agit d'un courant de convection. De plus, l'eau dans une casserole sur le feu se met en mouvement comme l'air au-dessus de la bougie et comme tous les fluides au-dessus de surfaces suffisamment chaudes. Si on met un couvercle, un autre phénomène se produit. La vapeur soulève le couvercle, qui tombe ensuite pour être à nouveau soulevé, sans cesse jusqu'à épuisement du feu ou de l'eau, donc de la production de vapeur. On dit aussi que l'invention des machines à vapeur est liée à cette simple observation que l'on peut faire dans toutes les cuisines. Le mouvement du couvercle est trop petit pour être intéressant. Il s'arrête aussitôt commencé, car la vapeur qui le pousse s'échappe tout de suite. Mais si l'on remplace le couvercle par un piston dans un cylindre, on obtient un système avec piston qui peut être poussé par la vapeur ou tout autre gaz sur une longueur

courte. Les machines à vapeur et les moteurs thermiques ne sont pas toujours construits sur le principe du piston et du cylindre. Les autres solutions ne sont pas très différentes.

Alors que la thermodynamique ne s'intéresse qu'à l'échange d'énergie entre deux ou plusieurs corps, les transferts thermiques décrivent la manière dont la chaleur est distribuée dans un corps ou entre plusieurs corps dans le temps et dans l'espace, d'où la nécessité d'une formulation mathématique utilisant les équations différentielles. On distingue trois types de transferts thermiques qui peuvent coexister, notamment la conduction due à la diffusion progressive de l'agitation thermique dans la matière, la convection et le rayonnement. De manière plus précise, la conduction est un mode de transfert thermique provoqué par une différence de température entre deux régions d'un même milieu, ou encore deux milieux en contact, et se réalisant sans déplacement de la matière à l'échelle macroscopique. Elle peut s'interpréter comme la transmission de proche en proche de l'agitation thermique sur le plan microscopique: un atome (ou molécule) cède une partie de son énergie cinétique à l'atome voisin. La conduction thermique est un processus de transport de l'énergie interne lié à l'agitation moléculaire et dû à une hétérogénéité du milieu à l'échelle macroscopique. L'énergie interne est l'énergie que possède un corps en l'absence de mouvement et en l'absence d'énergie potentielle. La conduction thermique est un phénomène irréversible analogue au phénomène de diffusion. Dans les liquides et les gaz, ce transport d'énergie résulte au niveau microscopique de l'anisotropie de la fonction de distribution des vitesses [132-139]. La fonction de distribution des vitesses est une grandeur physique qui quantifie la répartition statistique des déplacements des particules dans un fluide homogène en équilibre thermodynamique. Cette distribution a d'abord été définie et utilisée pour décrire la vitesse des particules du gaz parfait, où les particules se déplaçant librement sans interagir les une avec les autres, à l'exception de très brèves collisions au cours desquelles elles échangent de

l'énergie et de la quantité de mouvement. Les énergies de ces particules suivent ce qui est connu sous le nom de Statistique Maxwell – Boltzmann, et la distribution statistique des vitesses est obtenue en assimilant les énergies des particules à leur énergie cinétique. Dans les solides, la conduction thermique est assurée conjointement par les électrons de conduction et par les vibrations du réseau cristallin. La distribution de Maxwell-Boltzmann est un résultat de la théorie cinétique des gaz. Elle fournit une explication simplifiée à de nombreuses propriétés fondamentales des gaz, dont la pression et la diffusion. La distribution de Maxwell-Boltzmann s'applique aux vitesses des particules en trois dimensions, mais elle se révèle dépendre uniquement de la norme de la vitesse des particules. Une distribution de probabilité des vitesses indique les vitesses les plus probables.

La convection [132-139] est un transfert thermique qui s'accompagne des déplacements macroscopiques de la matière. Elle désigne aussi le transfert d'énergie thermique au sein d'un fluide en mouvement ou entre un fluide en mouvement et une paroi solide. Ce transfert d'énergies est réalisé par deux modes de transfert élémentaires combinés qui sont l'advection et la diffusion. L'advection est le transport d'une quantité scalaire ou vectorielle d'un élément donné tel que la chaleur, l'énergie interne, un élément chimique, des charges électriques, par le mouvement du milieu environnant. C'est une notion courante en Mécanique des Fluides, car toutes les caractéristiques d'une particule fluide sont advectées lors de son déplacement au sein de l'écoulement. Dans l'équation de Navier-Stokes, l'advection du vecteur vitesse apparaît dans le terme d'inertie, qui correspond à l'advection de la quantité de mouvement. En Météorologie et en Océanographie, l'advection se réfère surtout au transport horizontal de certaines propriétés par les fluides considérés, dont le transport par le vent ou les courants: advection de vapeur d'eau, de chaleur et de salinité. Le phénomène d'advection est entièrement codé dans l'équation de conservation. Dans le langage courant, le terme diffusion fait référence à une notion de distribution, de

mise en disposition (diffusion d'un produit ou d'une information). En physique, la diffusion désigne deux phénomènes distincts (dont les noms en anglais diffèrent): diffusion ou diffraction (en anglais scattering), et diffusion dans le sens de la caractérisation d'un phénomène physique par une équation de diffusion avec une dérivée première en temps, et seconde en espace.

Dans le premier cas où la diffusion s'assimile à la diffraction, il s'agit souvent de la diffusion des ondes ou propagation des ondes (notamment de la lumière) lorsque celles-ci rencontrent un obstacle. Il y a aussi la diffusion des particules qui est une interaction entre deux particules lorsque l'une est projetée sur l'autre. Dans le second cas, il s'agit de la diffusion de la matière qui fait appel à un coefficient caractéristique appelé diffusivité thermique, c'est une grandeur physique qui caractérise la capacité d'un matériau continu à transmettre un signal de température d'un point à un autre de matériau.

Le rayonnement désigne le processus d'émission ou de propagation d'énergie et de quantité de mouvement impliquant une onde ou une particule. Il existe plusieurs types de rayonnement, notamment le rayonnement électromagnétique, le rayonnement acoustique, et le rayonnement gravitationnel. Le rayonnement électromagnétique a pour base les rayons X et la lumière visible. Le rayonnement acoustique ou sonore correspond à la propagation d'énergie sous la forme d'une onde, ici une onde mécanique.

La description du transfert de chaleur dans un fluide en mouvement fait appel à la combinaison des phénomènes de conduction et de convection, comme c'est le cas dans ce travail.

II.1 PRESENTATION DU DOMAINE GEOMETRIQUE DE L'ÉCOULEMENT

Il est surtout question d'expliquer la géométrie de l'écoulement et le sens des lignes de courant ainsi que le sens et la direction du gradient de température. La Figure II.2 présente la coupe longitudinale du canal constitué de deux plans parallèles et uniformément perméables fixés à des températures différentes.

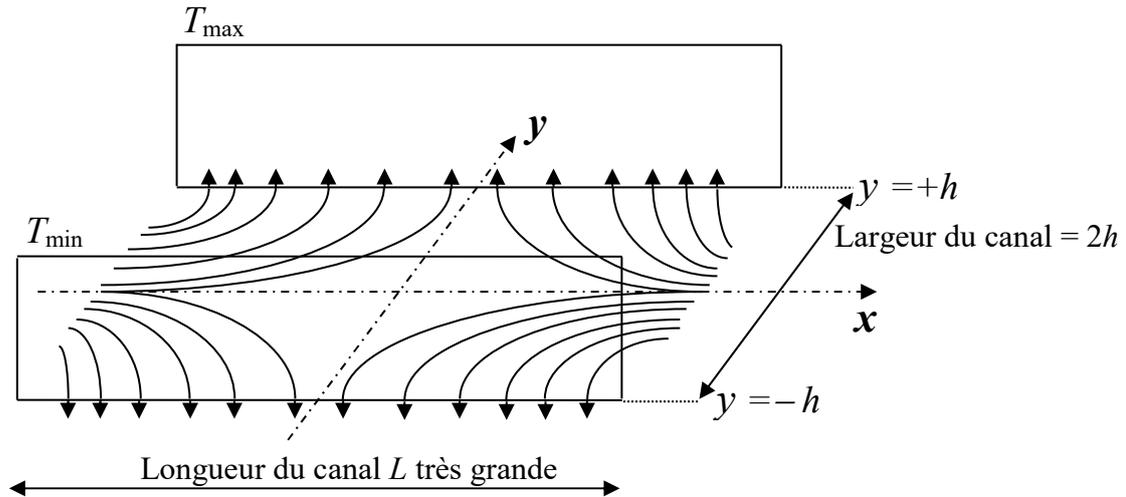


Figure II.1: Canal rectangulaire avec deux parois poreuses fixées à des températures différentes T_0 et T_1 .

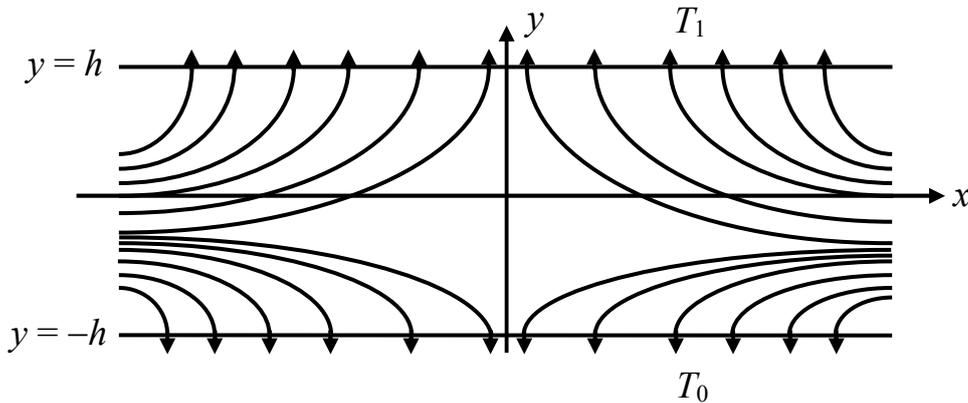


Figure II.2: Section longitudinale du canal rectangulaire avec deux parois poreuses fixées à des températures différentes T_0 et T_1 .

Le canal est construit sur la base d'un système de coordonnées cartésiennes (x, y) , où x représente la coordonnée longitudinale ou axiale et y la coordonnée transversale ou normale. Les deux parois planes sont parallèles et séparées par une distance égale à $2h$, où h est la demi-largeur du canal. La paroi chaude est fixée à la température T_1 et la paroi froide est maintenue à la température T_0 . Comme le montre les Figures II.1 et II.2, l'écoulement est longitudinal, avec un sens primordial pour les lignes de courant, c'est-à-dire de la gauche vers la droite ou dans le sens opposé. Lorsque l'un des sens est choisi pour le mouvement du fluide, l'autre sens représente l'écoulement inverse. Plus précisément, l'écoulement inverse est celui qui s'opère dans le sens contraire du

sens primordial. Les Figures II.1 et II.2 montrent quelques lignes de courant dans les deux sens possibles du mouvement avec la succion qui a lieu au niveau des deux frontières perméables de la conduite rectangulaire. Une conduite est rectangulaire lorsque la section transversale du canal est un rectangle, en considérant particulièrement dans notre étude qu'un côté de ce rectangle est plus grand par rapport à l'autre qui a une longueur égale à la distance entre les deux plans poreux. Le canal tel que présenté dans la Figure II.1 a une longueur plus grande que la distance qui sépare les deux parois poreuses, comme si elle était infinie, de telle sorte que le fluide puisse avoir une longue durée d'écoulement avant le début du contrôle de son mouvement, c'est-à-dire le temps nécessaire pour l'établissement du régime permanent. De plus, la grande longueur axiale implique que les particules fluides ne ressentent pas la proximité des frontières dans le sens longitudinal pendant le mouvement du fluide. Les lignes de courant de succion matérialisent la sortie du fluide au niveau des deux parois. La succion ne peut être bien définie qu'à côté de l'injection. En effet, la succion est le mouvement de retrait du fluide à partir du canal à travers les parois perméables, alors que l'injection est le phénomène d'addition du fluide dans le domaine de l'écoulement à travers les mêmes parois poreuses. Il s'agit donc de deux phénomènes opposés. Les travaux qui se rapportent à la thématique abordée dans ce travail, sont des écoulements de fluides avec succion ou injection à travers les parois poreuses. Les résultats obtenus sont souvent semblables, du fait du simple changement du signe de la vitesse de débit du fluide au niveau des frontières perméables.

La distribution de la chaleur dans l'écoulement est due à la différence de températures entre les deux parois. La chaleur est transférée de la paroi chaude à la température T_1 vers la paroi froide à la température T_0 , de telle sorte que les particules fluides situées sur une même longitudinale aient la même température. Autrement dit, la distribution de température dans ce travail est essentiellement transversale. Le gradient transversal de température régule le transfert de chaleur

des couches fluides les plus chaudes vers les couches fluides les plus froides dans la direction normale, ce qui implique la minimisation de la répartition axiale de température.

II.2 MODELE MATHEMATIQUE DU PROBLEME

Le mouvement du fluide et le transfert de chaleur entre deux parois rectangulaires poreuses sont régis par l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie. Cette formulation s'inspire des équations générales établies en Annexe, en prenant en compte la géométrie de l'écoulement et le sens de distribution de la chaleur [140-148].

II.2.1 Equations du problème

Dans ce travail, le champ de vitesses a deux composantes, une composante longitudinale ou axiale V_x et une composante transversale ou normale V_y . La pression et la température du fluide sont décrites par p et T , respectivement. Le fluide étudié a pour propriétés physiques, la masse volumique ρ , la viscosité dynamique μ , la chaleur massique à pression constante c_p et la conductivité thermique dépendant de la température k . Le champ de vitesses de l'écoulement ne dépend pas explicitement du temps, car le mouvement du fluide étudié est permanent. En d'autres termes, l'étude du mouvement du fluide est faite après un certain temps correspondant à la disparition du régime transitoire. La conduite est horizontale et la largeur du domaine de l'écoulement est petite de sorte que les termes de gravité soient négligeables par rapport aux termes d'inertie et de viscosité dans la modélisation du problème. Ainsi, en considérant les équations de continuité et Navier-stokes (voir l'Annexe), la dynamique du fluide et le transfert de chaleur dans la conduite rectangulaire poreuse sont régis par les équations différentielles suivantes [149] :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\rho \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.2})$$

$$\rho \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.3})$$

$$\rho c_p \left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{II.4})$$

En coordonnées cartésiennes, l'équation (II.1) est l'équation de continuité, les équations (II.2) et (II.3) sont les équations de Navier-Stokes. La distribution d'énergie dans la conduite est traduite par l'équation (II.4). En l'absence des forces de masse pour des raisons déjà évoquées, les équations (II.2) et (II.3) révèlent une relation entre les forces d'inertie, les forces de pression et les forces de viscosité par unité de volume du fluide pour illustrer la conservation de la quantité de mouvement. Par ailleurs, l'équation (II.4) décrit la diffusion d'énergie par convection entre la vitesse du fluide et le gradient de température.

Dans cette étude, le fluide est incompressible malgré le transfert de chaleur dans l'écoulement, car la différence de température entre les deux parois n'est pas assez considérable pour influencer la masse volumique qui reste constante. En générale, cette masse volumique varie en fonction de la pression et de la température. Le fluide est incompressible quand la masse volumique est insensible aux variations de pression, et en situation isotherme, elle devient constante.

II.2.2 Conditions aux limites

En mathématique, une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des équations aux dérivées ordinaires et des équations aux dérivées partielles sur une frontière. Il existe un grand nombre de conditions aux limites possibles, en fonction de la formulation du problème, du

nombre de variables en jeu, et (de manière plus importante) de la nature de l'équation. Les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann sont utilisées pour les équations différentielles partielles elliptiques, telles que l'équation de Helmholtz. Il existe d'autres types de conditions aux limites, telles la condition aux limites de Robin (aussi appelée de Fourier, d'impédance ou troisième condition), la condition aux limites mêlée (ou mixte), ou la condition aux limites dynamique.

En mathématique, une condition aux limites de type Dirichlet (nommée d'après le Johann Dirichlet) est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières (limites du domaine de résolution d'un problème). Une équation aux dérivées partielles est équation dont la ou les inconnues sont des fonctions; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. C'est un cas particulier d'équation fonctionnelle. On distingue généralement deux types d'équations différentielles, notamment les équations différentielles ordinaires (EDO) et les équations aux dérivées partielles (EDP). Pour les (EDO) les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable. S'agissant des (EDP), les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs variables indépendantes. Sans plus de précisions, le terme équation différentielle fait le plus souvent référence aux équations différentielles ordinaires. On rencontre également d'autres types d'équations différentielles telles que les équations intégro-différentielles qui font intervenir les dérivées de fonctions et leurs intégrales; les équations différentielles holomorphes (EDH) où les fonctions inconnues dépendent d'une seule variable complexe; les équations différentielles stochastiques (EDS) où un ou plusieurs termes de l'équation différentielle sont des processus stochastiques; les équations différentielles abstraites (EDA) où les fonctions inconnues et leurs dérivées prennent leurs valeurs dans des espaces fonctionnels abstraits (espace de Hilbert, espace de Banach); les équations différentielles à retard (EDR) dans lesquelles la dérivée de

la fonction inconnue à un moment donné est définie en termes de valeurs de la fonction aux temps précédant.

Une condition aux limites de Robin (ou troisième type) est un type de conditions aux limites portant le nom du mathématicien français Victor Gustave Robin (1855-1897), qui a travaillé dans le domaine de la thermodynamique. Elle est également appelée condition aux limites de Fourier. Imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles, il s'agit d'une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine d'étude. Une condition aux limites de Robin est une combinaison pondérée d'une condition aux limites de Dirichlet et d'une condition aux limites de Neumann. Ceci contraste avec la condition aux limites mêlée, constituée de conditions aux limites de types différents imposées chacune sur une partie du bord du domaine d'étude. La condition aux limites de Robin est aussi appelée condition d'impédance, en raison de son rôle dans les problèmes d'électromagnétisme.

Une condition aux limites mêlée correspond à la juxtaposition de différentes conditions aux limites sur différentes parties de la frontière du domaine dans lequel est posée une équation aux dérivées partielles ou équation différentielle ordinaire. Par ailleurs, une condition aux limites de Neumann est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières ou les limites du domaine d'étude.

Il est d'abord important de signaler que les équations de Navier-Stokes constituent un système d'équations différentielles permettant de résoudre une variété de problèmes d'écoulements dans une configuration géométrique donnée. De même, l'équation d'énergie constitue un modèle global de transfert de chaleur suivant une géométrie précise. C'est pour dire que les équations du problème (II.1)-(II.4) ne suffisent pas pour décrire précisément la dynamique du fluide et le transfert de chaleur dont il est question dans ce travail. Plus

précisément, les équations (II.1)-(II.4) peuvent constituer de modèle pour d'autres problèmes au-delà de notre étude. De manière générale, un problème d'écoulement ou de transfert de chaleur est complètement défini si les conditions aux limites sont associées aux équations différentielles du problème. Ce sont les conditions aux limites qui gouvernent la physique du problème. Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des équations différentielles sur une frontière du domaine d'étude. Il existe un grand nombre de conditions aux limites possibles, en fonction de la formulation du problème et du nombre de variables en présence.

Pour notre problème, nous considérons les conditions aux limites suivantes [149]:

$$\begin{aligned} V_x = 0, \quad V_y = V, \quad T = T_1 \quad \text{pour } y = h \\ V_x = 0, \quad V_y = -V, \quad T = T_0 \quad \text{pour } y = -h \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

Les conditions aux limites $V_y = -V$ et $V_y = V$ pour $y = -h$ et $y = h$, respectivement, supposent les débits de suction égaux en chaque point des parois uniformément poreuses où V est la vitesse absolue de retrait de masse de fluide de la conduite. De plus, la condition aux limites $V_x = 0$, pour $y = -h$ et $y = h$ indique l'immobilité de la paroi chaude et la paroi froide. Par ailleurs, les conditions aux limites $T = T_0$ et $T = T_1$ pour $y = -h$ et $y = h$ traduisent la différence de températures entre les deux parois. Ainsi, les équations (II.1)-(II.4) et les conditions aux limites (II.5) décrivent un fluide en mouvement dans un canal fixe, avec des parois uniformément poreuses admettant une différence de température.

II.2.3 Introduction des variables sans dimension

La formulation adimensionnelle est la transformation des grandeurs qui régissent un phénomène physique en nombres en vue de réaliser une analyse numérique de ce phénomène. Une grandeur physique sans dimension (ou grandeur adimensionnelle) est une grandeur dont l'analyse dimensionnelle aboutit à un produit où tous les exposants des grandeurs de base sont nuls. Elle est constituée des produits ou des rapports de grandeurs à dimensions, de telle façon que le rapport des unités équivaut à un. Les grandeurs sans dimension interviennent particulièrement en Mécanique pour décrire les phénomènes de transport de masse et de chaleur lorsqu'on utilise la similitude des modèles réduits ou théorie des maquettes et construit l'interprétation des résultats d'essais. Il existe une centaine de nombres sans dimension dont une grande partie réservée à des sujets très spécialisés [150-153]. Les nombres sans dimension sont construits à partir des grandeurs dimensionnelles qui caractérisent un phénomène. Il convient donc souvent de déterminer les grandeurs qui régissent le phénomène. La formulation adimensionnelle est une technique de plus en plus utilisée dans la modélisation des écoulements de fluide dans le but de mettre en évidence les nombres et les paramètres sans dimension encore appelés nombres et paramètres de contrôle du mouvement du fluide. En Dynamique des Fluides, les grandeurs qui régissent le phénomène sont issues de la configuration géométrique de l'écoulement, des propriétés physiques du fluide et des contraintes du mouvement du fluide (conditions aux limites et conditions initiales).

Les grandeurs employées pour définir les variables physiques sans dimension d'un problème donné sont appelées grandeurs de référence. Ainsi, compte tenu de la configuration géométrique de l'écoulement et du transfert de chaleur en étude, la demi-largeur h canal représente la référence des longueurs, les vitesses sont comptées par unité de la vitesse de succion V , la pression est adimensionnalisée par la pression de référence (ρV^2) et la température est mesurée par unité de la différence de températures entre les parois ($T_1 - T_0$) et la

conductivité thermique est adimensionnalisée par sa valeur k_0 à la température T_0 . Plus précisément, les variables sans dimension du problème sont définies comme suit [149]:

$$x^* = \frac{x}{h}, y^* = \frac{y}{h}, V_x^* = \frac{V_x}{V}, V_y^* = \frac{V_y}{V}, p^* = \frac{p}{\rho V^2}, T^* = \frac{T}{T_1 - T_0}, \kappa = \frac{k}{k_0} \quad (\text{II.6})$$

L'écriture des équations du problème en termes de variables sans dimension est la suivante [149]:

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{II.7})$$

$$V_x^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 V_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_x^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{II.8})$$

$$V_x^* \frac{\partial V_y^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 V_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_y^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{II.9})$$

$$V_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\kappa \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\kappa \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \right) \quad (\text{II.10})$$

où $R = \frac{\rho V h}{\mu}$ et $P = \frac{\rho V h c_p}{k_0}$ représentent les nombres sans dimension de

Reynolds et de Péclet, respectivement.

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension utilisé en Mécanique des Fluides. Il est mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (rampant, laminaire, transitoire, turbulent). Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses quand le fluide est en mouvement. En d'autres termes, c'est aussi le rapport qualitatif du transfert par convection au transfert par diffusion de la quantité de mouvement. Sa présente définition renferme les propriétés physiques du fluide (ρ, μ), la géométrie de l'écoulement (h) et les conditions aux limites (V). En fonction des nombres de

Reynolds croissants, on distingue quatre régimes d'écoulement principaux: régime de Stokes, régime laminaire, régime transitoire, régime turbulent. L'écoulement de Stokes correspond aux très faibles nombres de Reynolds (inférieurs à 1). Dans ce cas, les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent. Cette notion correspond au domaine de la microfluidique ou de la décantation de petites particules. Pour des valeurs plus élevées du nombre de Reynolds, les forces d'inertie entrent en jeu: c'est le domaine de la dynamique des fluides. Dans ce dernier domaine, on observe d'abord un écoulement laminaire avec des lignes de courant bien identifiées. Dans ce type d'écoulement, l'effet de la viscosité s'atténue au fur et à mesure que l'on s'éloigne des parois, les vitesses du fluide tendant à s'homogénéiser. Il est alors souvent commode de considérer que l'approximation du fluide parfait (fluide non visqueux justiciable du théorème de Bernoulli) est suffisante hors des zones proches d'une paroi, zones appelées couches limites. Ces dernières concentrent les effets visqueux qui peuvent y être modélisés sous une forme simplifiée.

À partir d'un certain nombre de Reynolds, se produit une transition qui fait apparaître des instabilités dues à l'amplification des perturbations. La valeur du Reynolds de transition et la nature des instabilités dépendent essentiellement du type d'écoulement considéré. Ensuite, les instabilités augmentent au point de donner naissance à un phénomène chaotique dans lequel il est difficile de voir une organisation: c'est la turbulence.

Le nombre de Péclet, mis en évidence par le physicien français Eugène Péclet, est un nombre sans dimension utilisé en transfert thermique et massique. Il représente le rapport du transfert par convection et du transfert par diffusion thermique ou massique. Il est équivalent au produit du nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\rho V h}{\mu} \text{ et du nombre de Prandtl } Pr = \frac{\mu c_p}{k} \text{ dans le cas du transfert thermique,}$$

c'est-à-dire :

$$Pé = \text{Re Pr} \quad (\text{II.11})$$

Par ailleurs, le nombre de Prandtl, mis en évidence par le physicien allemand Ludwig Prandtl, exprime la comparaison entre la diffusivité de la quantité de mouvement (viscosité cinématique) $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ et celle de la chaleur

(diffusivité thermique) $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c_p}$. Le nombre de Prandtl ne varie pas pour un

fluide donné dont les propriétés physiques restent constantes dans un problème.

Les conditions aux limites associées aux équations (II.7)-(II.10), appelées conditions aux limites adimensionnelles sont déduites et données par :

$$\begin{aligned} V_x^* = 0, \quad V_y^* = 1, \quad T^* = \frac{T_1}{T_1 - T_0} \quad \text{pour } y = 1 \\ V_x^* = 0, \quad V_y^* = -1, \quad T^* = \frac{T_0}{T_1 - T_0} \quad \text{pour } y = -1 \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

II.2.4 Fonction de courant

La fonction de courant est une grandeur liée au champ de vitesses et qui peut être définie pour différents types d'écoulements. Elle peut être utilisée pour représenter les lignes de courant d'un fluide correspondant aux trajectoires des particules fluides dans un écoulement stationnaire comme c'est le cas dans notre travail. La conséquence de l'incompressibilité du fluide est le champ de vitesses à divergence nulle comme le décrit l'équation (II.7). Les composantes de vitesse peuvent être liées à la fonction de courant ψ dans le but de vérifier l'équation (II.7) par les relations suivantes [149]:

$$V_x^*(x^*, y^*) = \frac{\partial \psi}{\partial y^*}, \quad V_y^*(x^*, y^*) = -\frac{\partial \psi}{\partial x^*} \quad (\text{II.13})$$

Il apparaît clairement que la fonction de courant ψ est liée d'une part à la vitesse axiale V_x^* et à la vitesse transversale V_y^* . Ainsi, le problème vérifié par les composantes de vitesse V_x^* et V_y^* peut être transformé en un problème

satisfait par l'unique fonction de courant ψ , ceci constitue l'intérêt de l'usage de la fonction de courant. Par cette approche, la détermination de la fonction de courant permet de trouver les composantes de vitesse par un calcul en retour.

II.2.5 Vecteur tourbillon et équation de vorticité

La vorticité caractérise les écoulements tourbillonnaires, encore appelés vortex. Il existe des vortex laminaires et les vortex turbulents. L'écoulement étudié étant laminaire, il est question de déterminer l'équation de la dynamique du tourbillon laminaire. Un tourbillon est en dynamique des fluides, une région d'un fluide dans laquelle l'écoulement est principalement en mouvement de rotation autour d'un axe, rectiligne ou incurvé. Ce type de mouvement s'appelle écoulement tourbillonnaire. On en observe à toutes les échelles, depuis le tourbillon de vidange d'une baignoire jusqu'à ceux des atmosphères des planètes, en passant par les sillages observés au voisinage d'un obstacle situé dans un écoulement de liquide ou de gaz. Une fois formés, les tourbillons peuvent se déplacer, s'étirer, se tordre et interagir de manière complexe. Une façon simple de visualiser le tourbillon est de considérer un fluide en mouvement dans lequel on délimite un petit volume supposé rigide. Si ce volume tourne par rapport à un référentiel au lieu d'être en translation, il appartient à un tourbillon. Pour les spécialistes de la Mécanique des Fluides, le mot est très généralement associé au vecteur tourbillon porté par l'axe de rotation qui se calcule comme le rotationnel de la vitesse et a une intensité double de celle du vecteur rotation. Cette intensité de la rotation est parfois considérée comme vorticité.

Pour voir des tourbillons, il suffit d'observer une rivière dont le fond n'est pas trop homogène. Il s'agit d'un phénomène très courant dans tous les aspects de la Mécanique des Fluides. Il complique souvent l'analyse des phénomènes au point de conduire à inventer l'approximation de l'écoulement irrotationnel qui couvre la majeure partie du domaine considéré, les zones tourbillonnaires

recevant un traitement spécifique. Loin de toute paroi, un écoulement est généralement laminaire, les particules fluides voisines à un instant donné restent voisines aux instants suivants et les seules pertes d'énergie sont liées à la viscosité du fluide. Dans des circonstances différentes, l'écoulement peut devenir turbulent avec, dans une certaine zone, une apparence très désordonnée qui se traduit par une dissipation d'énergie. Celle-ci est liée à des tourbillons dont la taille, la localisation et l'orientation varient constamment. La transition laminaire/turbulent se produit souvent d'une manière progressive, le cas laminaire correspond aux vitesses modérées. Dans une conduite, les pertes de charge sont liées à la viscosité qui crée progressivement au voisinage de la paroi une couche limite dans laquelle se concentrent les pertes d'énergie par frottement visqueux. Dans le cas des corps profilés plongés dans un écoulement, la transition se produit lorsque la vitesse, plus précisément le nombre de Reynolds augmente.

Par exemple, les pertes d'énergie sur un profil d'aile d'avion se traduisent par une résistance à l'avancement appelée traînée dans la direction de l'écoulement, mais le profil ne peut se contenter de consommer de l'énergie pour avancer, il doit également fournir une portance pour sustenter l'avion. Celle-ci est indépendante du nombre de Reynolds: elle est liée à la circulation, intégrale curviligne, de vitesse le long du contour du profil, par le théorème de Kutta-Jukowski et peut s'interpréter comme simulant un gros tourbillon qui permet de faire disparaître la vitesse infinie au bord de fuite.

Lors d'un écoulement autour d'un corps non profilé, comme un cylindre de section circulaire, la transition entre les régimes laminaire et turbulent est remplacée par un régime tourbillonnaire dans lequel l'énergie de translation se transforme en énergie de rotation avant de devenir une énergie de dissipation en régime turbulent. Deux tourbillons symétriques apparaissent à une certaine vitesse, grossissent symétriquement lorsque celle-ci croît jusqu'à ce que l'un d'eux expulse l'autre qui est alors remplacé par un nouveau. C'est le phénomène

de tourbillon alterné, nommé allée de tourbillons de Bénard-Karman dont la fréquence d'émission ou de détachement peut être caractérisée par un nombre adimensionnel, le nombre de Strouhal. C'est un nombre qui présente le rapport du temps d'advection et du temps caractéristique de l'instationnarité.

En météorologie et en océanographie physique, le tourbillon est une propriété importante du comportement à grande échelle de l'atmosphère et de l'océan. Les deux circulations, circulation atmosphérique et circulation océanique, étant surtout horizontales, le vecteur tourbillon pour ces deux milieux est généralement vertical. Pour l'atmosphère et l'océan, les déplacements étant horizontaux, ce paramètre est souvent appelé tourbillon vertical planétaire, le tourbillon planétaire étant le double du vecteur rotation terrestre, soit 2Ω . Dans l'atmosphère nord, le tourbillon est positif pour une rotation anti-horaire (cyclonique) et négatif pour une rotation horaire (anti-cyclonique). C'est l'opposé dans l'hémisphère sud. Le tourbillon en un point de l'atmosphère n'est pas conservatif en lui-même, car l'épaisseur de la couche d'air peut être étirée ou compressée par le mouvement de l'air. Cependant, le tourbillon total dans la colonne d'air est lui conservateur et on le nomme tourbillon potentiel. En effet, en général, l'air subit une compression ou décompression adiabatique, l'entropie est conservée et le tourbillon total de la colonne ne changera pas. Le tourbillon potentiel devient donc une façon de suivre les mouvements verticaux dans une masse d'air avec température potentielle constante.

En météorologie, l'une des approximations est celle de l'atmosphère barotrope où il n'y a pas de variation de température dans une masse d'air. L'équation de tourbillon barotrope est donc une façon simple de prévoir le déplacement des creux et crêtes d'onde longue à une hauteur de 50 kPa. Dans les années 1950, le premier programme de prévision numérique du temps utilisa cette équation. Mais c'est l'advection de tourbillon positive dans un système barocline qui crée la cyclogenèse, le développement des dépressions des latitudes moyennes, et l'advection négative qui génère les anticyclones. Elle fait

partie des équations primitives atmosphériques qui sont utilisées dans les modèles modernes. En océanographie, les tourbillons sont particulièrement étudiés pour leur capacité à conserver les propriétés de salinité et de température dans le temps au sein d'une lentille d'eau de quelques kilomètres de diamètre et de plusieurs mètres de hauteur. On peut par exemple citer les remous qui sortent de la mer méditerranée par le canal de Gibraltar et en quelques semaines/mois arrivent dans les Caraïbes. Ces tourbillons sont recherchés par les sous-marins militaires pour cacher leur signature sonar. En effet, la différence de température et de salinité du tourbillon crée une interface opaque.

II.2.5.1 Définition du vecteur tourbillon

Le vecteur tourbillon $\mathbf{\Omega}$ est défini par :

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{V} \quad (\text{II.14})$$

Les composantes de ce vecteur dans la base cartésienne associée à l'écoulement sont telles que :

$$\mathbf{\Omega} = \left(0, 0, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y^*}{\partial x^*} - \frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} \right) \right) \quad (\text{II.15})$$

Le vecteur tourbillon peut aussi s'exprimer en termes de fonction de courant grâce aux équations (II.13) qui lient la fonction de courant aux composantes de vitesse :

$$\mathbf{\Omega} = \left(0, 0, -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^{*2}} \right) \right) = \left(0, 0, -\frac{1}{2} \Delta \psi \right) \quad (\text{II.16})$$

II.2.5.2 Equation de vorticité

Considérons l'expression vectorielle qui réunit les équations (II.8) et (II.9) traduisant la conservation de la quantité de mouvement :

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{V} = -\mathbf{grad}p^* + \frac{1}{R}\Delta\mathbf{V} \quad (\text{II.17})$$

Une autre formulation de l'équation (II.17) est la suivante :

$$\mathbf{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right) + \mathbf{rot}\mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = -\mathbf{grad}p^* + \frac{1}{R}\Delta\mathbf{V} \quad (\text{II.18})$$

En appliquant l'opérateur différentiel rotationnel “**rot**”aux termes de l'équation (II.18), en utilisant les changements de variables (II.13), on obtient :

$$\frac{\partial\psi}{\partial y^*} \frac{\partial}{\partial x^*}(\Delta\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial y^*}(\Delta\psi) = \frac{1}{R}\Delta^2\psi \quad (\text{II.19})$$

La relation (II.19) est l'équation de vorticité satisfait par la fonction de courant ψ . Le principal constat est que l'introduction de la fonction de courant dans les équations du problème permet de passer d'un système de trois équations différentielles coupl es (II.7), (II.8) et (II.9) et (II.10)   deux équations différentielles (II.19) pour le transport de masse, et (II.20) pour la distribution de la chaleur donn e par :

$$\frac{\partial\psi}{\partial y^*} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} - \frac{\partial\psi}{\partial x^*} \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\kappa \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\kappa \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \right) \quad (\text{II.20})$$

Les termes de pression ne figurent pas dans l'équation (II.19), car le rotationnel du gradient de pression de l'équation (II.18) est nul.

II.3 METHODE DES SOLUTIONS SEMBLABLES

C'est une méthode de plus en plus utilis e pour résoudre des problèmes d'écoulements de fluides entre deux parois poreuses [35, 66, 86-93]. C'est une technique bas e sur la séparation des variables qui s'appuie sur la géométrie de l'écoulement ainsi que les conditions aux limites et dont la validité a été d montr e numériquement et expérimentalement [35, 86]. Cette approche

diffère d'un problème à un autre par la configuration géométrique de l'écoulement et les conditions aux limites.

II.3.1 Type de solution recherchée

Le mouvement du fluide se développe de sorte que la vitesse axiale varie suivant les deux coordonnées du domaine de l'écoulement, compte tenu qu'il existe un déplacement longitudinal des particules fluides influencé par la porosité des deux parois. Par ailleurs, le mouvement transversal du fluide ne dépend que de la coordonnée normale, car les particules fluides ne ressentent pas la présence des frontières axiales pendant l'écoulement compte tenu de la grande longueur du canal; ce qui implique aussi une distribution uniquement transversale de la température dans la conduite. Ce comportement de l'écoulement et du transfert de chaleur est de plus en plus étudié et est souvent associée à un type de méthode de séparation des variables appropriée.

II.3.2 Méthode de séparation des variables

Comme la dynamique du fluide dans la conduite rectangulaire poreuse révèle un mouvement axial et un mouvement transversal, ces deux trajets de l'écoulement matérialisés dans la définition du vecteur vitesse du fluide, peuvent être retrouvés à partir de l'expression de la fonction de courant. La méthode de séparation des variables permet de définir la fonction de courant comme un produit des termes issus de l'écoulement normal et de l'écoulement longitudinal. Dans une telle expression de la fonction de courant influencée naturellement par la géométrie de l'écoulement, la variable x^* qui décrit le mouvement longitudinal est indépendante de la variable normale y^* qui caractérise le mouvement normal. En conséquence, nous avons l'équation suivante [149]:

$$\psi(x^*, y^*) = x^* F(y^*) \quad (\text{II.21})$$

où F est la fonction de courant par unité de longueur. L'intérêt de la fonction F émane du fait que, comme le fluide est en perpétuel mouvement de cisaillement à l'intérieur de la conduite rectangulaire poreuse, il est convenable de déterminer les caractéristiques de l'écoulement quelque soit la position axiale. Autrement dit, la fonction $F(y^*)$ qui se trouve dans l'équation (II.21) rend compte du mouvement du fluide à l'intérieur de la conduite sous l'influence des parois poreuses des frontières chaude et froide. Le comportement de la température dans le canal implique le changement de variables suivant:

$$T^*(x^*, y^*) = \theta(y^*) + \frac{T_0}{T_1 - T_0} \quad (\text{II.22})$$

où $\theta(y^*)$ est une fonction qui caractérise la distribution d'énergie à l'intérieur de la conduite régie par la différence de température entre les deux parois.

Il apparaît à travers les équations (II.21) et (II.22) que le problème étudié est régi par les fonctions F et θ dont la détermination permet de caractériser l'écoulement du fluide et la distribution d'énergie dans la conduite annulaire poreuse.

II.3.3 Conductivité thermique

L'analyse du transfert de chaleur dans le domaine de l'écoulement ne peut être réalisée que si l'on connaît la dépendance fonctionnelle et analytique de la conductivité thermique sur la température. La conductivité thermique peut être définie comme la quantité de chaleur transférée en une unité de temps au travers d'un matériau d'une unité de surface et d'une unité d'épaisseur, quand les deux faces opposées diffèrent d'une unité de température. Compte tenu de l'importance de ce coefficient de transfert de chaleur, en d'autres termes, la conductivité thermique peut aussi être définie comme une mesure de la vitesse à laquelle la chaleur est transférée dans un milieu. Une grande valeur de la conductivité thermique indique que le milieu est un bon conducteur de chaleur,

tandis qu'une faible valeur indique que le milieu est un mauvais conducteur de chaleur ou un bon isolant. La variation de la conductivité thermique de certains matériaux sur certaines plages de température est suffisamment faible pour être négligée. Cependant, dans de nombreux cas, tels que les liquides et les gaz, la variation de la conductivité thermique avec la température est importante. À des rares exceptions près, la conductivité thermique du gaz croît avec la température. Par contre, celle des liquides décroît. Toute autre évolution est souvent due à l'effet de rayonnement qu'il est difficile d'estimer pour les fluides partiellement transparents, mais aussi parfois à la convection [154]. La conductivité thermique des fluides varie également avec la pression. Lorsque la pression croît, les conductivités thermiques des gaz ou des liquides augmentent. Cette variation avec la pression est quasi linéaire dans quelques régions du diagramme de phase, par exemple pour le gaz peu dense au voisinage de la pression atmosphérique ou le liquide loin de la région critique. Dans le domaine critique d'un fluide, la conductivité thermique croît très rapidement et sa variation le long de l'isochore critique présente une divergence infinie à la température critique; son comportement est analogue à celui de la capacité thermique à pression constante. Il existe peu de données expérimentales dans ce domaine et peu de méthodes de calcul pratique.

Il existe très peu de formes de variation de conductivité thermique disponibles dans la littérature. Pour un fluide incompressible, il a été constaté que la conductivité thermique varie avec la température suivant une loi approximativement linéaire dans l'intervalle de température allant de 0 à 400 °Fahrenheit [133,154], équivalent à l'intervalle allant de -17,77 à 204,44°C. Ainsi, compte tenu notre intervalle de travail relatif à la température $0 \leq T \leq 100^\circ\text{C}$ [149], la loi linéaire de la conductivité thermique comme fonction de la température peut être adoptée de la forme suivante [149]:

$$\kappa(\theta) = 1 + \gamma\theta \quad (\text{II.23})$$

Le paramètre sans dimension γ est une mesure de la sensibilité de la conductivité thermique à la variation de la température. Comme $\kappa(\theta)$ est positif dans ce travail, $\kappa(\theta) > 0$. En considérant la température adimensionnelle d'après les conditions aux limites $\frac{T_0}{T_1 - T_0} \leq T^* \leq \frac{T_1}{T_1 - T_0}$, c'est-à-dire $0 \leq \theta \leq 1$. Par conséquent $\gamma > -1$. En présence de la convection [154], la conductivité thermique peut augmenter avec la température; ce cas correspond à $\gamma > 0$, alors que la décroissance a lieu quand $-1 < \gamma < 0$. Le cas où la conductivité thermique est constante correspond à $\gamma = 0$.

II.3.4 Position du problème

Les équations à résoudre sont obtenues en introduisant les formules (II.21) et (II.22) dans les équations (II.19) et (II.20), en considérant la dépendance fonctionnelle (II.23) de la conductivité thermique sur la température :

$$F^{(4)} + R(FF^{(3)} - F^{(1)}F^{(2)}) = 0 \quad (\text{II.24a})$$

$$(1 + \gamma\theta)\theta^{(2)} + \gamma(\theta^{(1)})^2 + PF\theta^{(1)} = 0 \quad (\text{II.24b})$$

$$\begin{aligned} F^{(1)}(1) &= 0, & F(1) &= -1, & \theta(1) &= 1 \\ F^{(1)}(-1) &= 0, & F(-1) &= 1, & \theta(-1) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.24c})$$

avec $F^{(i)} = d^i F / dy^i$ et $\theta^{(i)} = d^i \theta / dy^i$. Il en ressort que l'analyse de l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur est équivalente à la résolution d'un problème à conditions aux limites sur deux bornes (II.24). Les termes de pression qui ont disparu dans le processus d'obtention de l'équation de vorticité, peuvent être générés en introduisant les expressions (II.13) et (II.21) dans les équations (II.8) et (II.9) :

$$A = \frac{1}{x^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = \frac{1}{R} F^{(3)} + FF^{(2)} - (F^{(1)})^2 = \text{constant} \quad (\text{II.25})$$

$$\pi(y^*) = \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = -\frac{1}{R} F^{(2)} - FF^{(1)} \quad (\text{II.26})$$

Il apparaît que pour un nombre de Reynolds donné, le gradient de pression axial est constant dans le canal, car d'après l'équation (II.25), il est équivalent à l'intégrale première de l'équation (II.24a). Par ailleurs, le gradient de pression normal est défini par l'équation (II.26).

Les équations (II.24) expriment un problème à conditions aux limites sur deux bornes, écrit sous la forme d'un système couplé d'équations différentielles ordinaires avec six conditions aux limites à raison de trois contraintes sur chaque frontière de l'écoulement. Plus précisément, il s'agit du couplage entre une équation différentielle ordinaire non linéaire de degré deux régissant la distribution de chaleur et une équation différentielle ordinaire non linéaire de degré quatre décrivant le transport du fluide dans la conduite rectangulaire poreuse.

Il apparaît que, la méthode des solutions semblables employée dans notre étude comme dans un grand nombre d'investigations des écoulements de fluides avec effet de succion ou d'injection du fluide entre deux parois poreuses, permet de passer de la modélisation du mouvement du fluide par des équations aux dérivées partielles non linéaires à la description du même problème au moyen des équations différentielles ordinaires non linéaires. Cette technique est guidée par un changement de variables rigoureux qui obéit aux contraintes de l'écoulement et à la géométrie du domaine qui contient le fluide.

Compte tenu de la forte non linéarité des équations du problème, les solutions analytiques ne sont envisageables que pour des cas extrêmement simplifiés; par exemples, pour des faibles nombres de Reynolds et de Péclet. Les résultats concernant les faibles nombres de contrôles R et P sont réservés pour le prochain chapitre. Pour des valeurs modérées de ces nombres correspondant au

régime laminaire, il est important de faire recours aux méthodes numériques de résolutions. L'une des méthodes les plus robustes pour la résolution des problèmes à conditions aux limites sur deux bornes est la méthode numérique de Tir que nous allons utiliser dans ce travail. La méthode de Tir combine l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 et une technique d'optimisation de Newton-Raphson.

II.4 DESCRIPTION DE LA METHODE DE RESOLUTION DU PROBLEME

Les méthodes numériques permettent de déterminer la solution d'un problème par la résolution des équations qui le régissent. En Mécanique des Fluides et en transferts thermiques, il s'agit des équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie. La Mécanique des Fluides numérique émane d'une synergie scientifique entre les mathématiques appliquées et la Mécanique des Fluides, pour devenir un outil essentiel dans pratiquement toutes les branches de la dynamique des fluides; de la propulsion aérospatiale aux prédictions météorologiques, en passant par le dessin des coques de bateaux. Dans le domaine de la recherche, cette approche est l'objet d'un effort important, car elle permet l'accès de toutes les informations instantanées relatives à la vitesse, la pression, la température et la concentration en chaque point du domaine d'étude. De manière générale, la résolution numérique d'un problème en Mécanique des Fluides passe par trois grandes étapes. La première phase concerne la préparation du problème, c'est-à-dire la définition de la géométrie, d'un maillage discrétisant le domaine de calcul, du choix des modèles et méthodes numériques employés. La deuxième étape est la résolution numérique elle-même qui passe par l'exécution d'un programme informatique. La troisième phase est relative à l'exploitation des résultats dans le sens d'établir leur cohérence par rapport à la physique du problème.

En fonction du type de problème, il existe plusieurs méthodes de résolution numérique employées en mécanique des fluides. Nous allons évoquer

par exemple la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis. La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations différentielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. Cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre, car elle procède en deux étapes: d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation ou de différentiation, d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points de discrétisation est la plus faible possible.

La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations différentielles, comme la méthode des différences finies et celle des éléments finis. Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales. Toutefois, la méthode des volumes finis se base directement sur la forme dite forte de l'équation à résoudre, alors que la méthode des éléments finis se fonde sur une formulation variationnelle de l'équation. Une formulation variationnelle ou formulation faible est une autre manière d'énoncer un problème physique régi par des équations différentielles ou aux dérivées partielles. L'intérêt de cette approche est de pouvoir disposer de concepts et de priorités de l'analyse fonctionnelle, en particulier ceux des espaces de Hilbert et de Sobolev. La formulation faible prend son sens dans le théorème de Lax-Milgram. Elle est un des fondements de la méthode des éléments finis. Une formulation faible des équations aux dérivées partielles qui s'exprime en termes d'algèbre linéaire dans le cadre d'un espace de Hilbert est une formulation variationnelle. À l'aide du théorème de Lax-Milgram, elle permet de discuter de l'existence et de l'unicité de solutions. La méthode des éléments finis se fonde sur formulation variationnelle pour déterminer des solutions numériques approchées du problème d'origine.

L'équation différentielle est résolue de manière approchée à l'aide d'un maillage constitué de volumes finis qui sont des petits volumes disjoints en 3D (des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont la réunion constitue le domaine d'étude. Les volumes finis peuvent être construits autour de points d'un maillage initial, mais ce n'est pas une nécessité. Les méthodes des volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation hyperboliques, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques. Ces équations différentielles contiennent des termes de divergence. En utilisant le théorème de flux-divergence, les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface et ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour élaborer une approximation des flux aux interfaces. Puisque le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent, ces méthodes sont conservatives, donc parfaitement adaptées à la résolution de lois de conservation. Un autre avantage de la méthode des volumes finis est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non structurés, car en matière de discrétisation des lois de conservation, sa formulation ne tient aucun compte de la complexité du maillage. En revanche, les caractéristiques géométriques du maillage peuvent jouer un rôle prépondérant lorsque des flux diffusifs entrent en jeu.

La méthode des éléments finis est utilisée dans l'analyse structurale des solides, mais également applicable aux fluides. Cependant, la formulation à éléments finis nécessite des soins particuliers pour assurer une solution conservative.

Dans notre étude, nous utilisons la méthode numérique de Tir qui est la plus efficace et adaptée pour résoudre des problèmes à conditions aux limites sur deux bornes. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 associée dans la résolution numériquement du problème n'est adaptée que pour le traitement des équations

différentielles du premier degré, donc pour des problèmes à condition initiale. Par conséquent, employer l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 pour trouver les solutions dans ce travail requiert une transformation des équations du problème en système d'équations différentielles du premier ordre. Nous partons d'abord du fait que les équations différentielles (II.24a) et (II.24b) peuvent s'exprimer de la manière suivante:

$$f(F, F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}) = F^{(4)} = -RFF^{(3)} + RF^{(1)}F^{(2)} \quad (\text{II.27})$$

$$G(F, \theta, \theta^{(1)}) = \theta^{(2)} = -(\gamma\theta^{(1)} + PF)\theta^{(1)} / (1 + \gamma\theta) \quad (\text{II.28})$$

Pour transformer les équations (II.24) en un problème à valeur initiale, trois conditions supplémentaires doivent être ajoutées à la frontière inférieure ($y = -1$) du domaine d'étude qui est l'intervalle $-1 \leq y \leq 1$, c'est-à-dire les conditions initiales sont telles que:

$$\begin{aligned} F(-1) &= 1, \\ F^{(1)}(-1) &= 0, \\ F^{(2)}(-1) &= a, \\ F^{(3)}(-1) &= b, \\ \theta(-1) &= 0, \\ \theta^{(1)}(-1) &= c \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Ainsi, la solution du problème va dépendre de quatre variables y , a , b et c . L'introduction des conditions initiales supplémentaires implique un aperçu sur la dérivation par rapport à a , b et c qui sont des variables indépendantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \left(f(F, F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}) \right) &= \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) = \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right) \\ \frac{\partial}{\partial b} \left(f(F, F^{(1)}, F^{(2)}, F^{(3)}) \right) &= \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) = \frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\frac{\partial F}{\partial b} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a} \left(G(F, \theta, \theta^{(1)}) \right) &= \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial a} \right) \\
\frac{\partial}{\partial b} \left(G(F, \theta, \theta^{(1)}) \right) &= \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial b} \right) \\
\frac{\partial}{\partial c} \left(G(F, \theta, \theta^{(1)}) \right) &= \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial c} \right)
\end{aligned} \tag{II.30}$$

Il apparaît que la fonction F ne dépend pas de la variable c , car les équations (II.27) et (II.28) sont partiellement couplées, c'est-à-dire le mouvement du fluide n'est pas influencé par le transfert de chaleur dans la conduite, alors que la distribution de température est influencée par l'écoulement. À partir des équations (II.30), cinq nouvelles fonctions peuvent être définies comme suit:

$$\begin{aligned}
u(y, a, b) &= \frac{\partial F}{\partial a} \\
v(y, a, b) &= \frac{\partial F}{\partial b} \\
U(y, a, b, c) &= \frac{\partial \theta}{\partial a} \\
Q(y, a, b, c) &= \frac{\partial \theta}{\partial b} \\
W(y, a, b, c) &= \frac{\partial \theta}{\partial c}
\end{aligned} \tag{II.31}$$

À partir des relations (II.31), deux équations différentielles d'ordre quatre satisfaites respectivement par les fonctions u et v sont déduites. De plus, trois équations différentielles d'ordre deux vérifiées respectivement par les fonctions U , Q et W sont aussi déduites telles que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right) &= \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial F^{(1)}} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial F^{(2)}} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial F^{(3)}} \frac{\partial F^{(3)}}{\partial a} \\
\frac{\partial^4}{\partial y^4} \left(\frac{\partial F}{\partial b} \right) &= \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} = \frac{\partial f}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(1)}} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(2)}} \frac{\partial F^{(2)}}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial F^{(3)}} \frac{\partial F^{(3)}}{\partial b} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial a} \right) &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial G}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial a} + \frac{\partial G}{\partial \theta^{(1)}} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial a} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial b} \right) &= \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \frac{\partial G}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial b} + \frac{\partial G}{\partial \theta^{(1)}} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial b} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial c} \right) &= \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{\partial G}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial c} + \frac{\partial G}{\partial \theta^{(1)}} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial c}
\end{aligned} \tag{II.32}$$

Sachant la fonction F ne dépend pas de c , il vient que:

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 0 \tag{II.33}$$

Compte tenu de la relation (II.33), les équations (II.109) deviennent:

$$\begin{aligned}
\text{En posant: } u_y &= \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_{yyy} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}, \quad u_{yyyy} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \\
v_{yy} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad v_{yyy} = \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}, \quad v_{yyyy} = \frac{\partial^4 v}{\partial y^4}, \quad U_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad Q_y = \frac{\partial Q}{\partial y}, \\
Q_{yy} &= \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \quad W_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad W_{yy} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad f_F = \frac{\partial f}{\partial F}, \quad f_{F^{(1)}} = \frac{\partial f}{\partial F^{(1)}}, \quad f_{F^{(2)}} = \frac{\partial f}{\partial F^{(2)}}, \\
f_{F^{(3)}} &= \frac{\partial f}{\partial F^{(3)}}, \quad G_F = \frac{\partial G}{\partial F}, \quad G_\theta = \frac{\partial G}{\partial \theta}, \quad \text{et } G_{\theta^{(1)}} = \frac{\partial G}{\partial \theta^{(1)}}. \text{ Les équations (II.32)}
\end{aligned}$$

deviennent:

$$\begin{aligned}
u_{yyyy} &= f_F u + f_{F^{(1)}} u_y + f_{F^{(2)}} u_{yy} + f_{F^{(3)}} u_{yyy} \\
v_{yyyy} &= f_F v + f_{F^{(1)}} v_y + f_{F^{(2)}} v_{yy} + f_{F^{(3)}} v_{yyy} \\
U_{yy} &= G_F u + G_\theta U + G_{\theta^{(1)}} U_y \\
Q_{yy} &= G_F v + G_\theta Q + G_{\theta^{(1)}} Q_y \\
W_{yy} &= G_\theta W + G_{\theta^{(1)}} W_y
\end{aligned} \tag{II.34}$$

Le souci de transformer le problème aux limites en un problème à condition initiale a conduit à l'introduction des variables a , b et c encore appelées valeurs testes en termes de contraintes à la frontière inférieure ($y = -1$). À ce stade, le résultat de l'intégration des équations différentielles est une fonction de a , b et c . La vraie solution du problème est celle qui vérifie les conditions aux limites à la frontière supérieure ($y = 1$) du domaine de l'écoulement. En effet, la solution du problème vérifie la frontière supérieure si la fonction suivante est minimisée:

$$K(a, b, c) = (F(1, a, b) + 1)^2 + (F^{(1)}(1, a, b) - 0)^2 + (\theta(1, a, b, c) - 1)^2 \quad (\text{II.35})$$

La vraie solution du problème est obtenue avec les racines a^* , b^* et c^* de la fonction K . En fait, la détermination des zéros a^* , b^* et c^* de la fonction K conduit à un problème d'optimisation que nous résolvons à l'aide de la technique d'optimisation de Newton-Raphson. L'objectif est de minimiser la fonction K , c'est-à-dire déterminer les valeurs $a = a^*$, $b = b^*$ et $c = c^*$ pour que :

$$K(a, b, c) = (F(1, a, b) + 1)^2 + (F^{(1)}(1, a, b) - 0)^2 + (\theta(1, a, b, c) - 1)^2 = 0 \quad (\text{II.36})$$

L'algorithme qui détermine les valeurs de a , b et c pour deux étapes consécutives n et $n+1$ du processus de minimisation de la fonction quadratique K est régi par le calcul suivant:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_n - [J]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} F(1, a, b) + 1 \\ F^{(1)}(1, a, b) - 0 \\ \phi(1, a, b, c) - 1 \end{bmatrix}_n \quad (\text{II.37})$$

où $[J]$ et $[J]^{-1}$ représentent respectivement la matrice jacobienne et son inverse.

Les composantes de la matrice jacobienne sont définies par:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial a} & \frac{\partial K_1}{\partial b} & \frac{\partial K_1}{\partial c} \\ \frac{\partial K_2}{\partial a} & \frac{\partial K_2}{\partial b} & \frac{\partial K_2}{\partial c} \\ \frac{\partial K_3}{\partial a} & \frac{\partial K_3}{\partial b} & \frac{\partial K_3}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(1, a, b) & v(1, a, b) & 0 \\ u_y(1, a, b) & v_y(1, a, b) & 0 \\ U(1, a, b, c) & Q(1, a, b, c) & W(1, a, b, c) \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

où :

$$\begin{aligned} K_1 &= F(1, a, b) + 1 \\ K_2 &= F^{(1)}(1, a, b) - 0 \\ K_3 &= \theta(1, a, b, c) - 1 \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

D'après les expressions (II.31) les conditions initiales associées aux équations différentielles satisfaites par les fonctions u et U sont données par :

$$\begin{aligned} u(-1, a, b) &= 0 \\ u_y(-1, a, b) &= 0 \\ u_{yy}(-1, a, b) &= 1 \\ u_{yyy}(-1, a, b) &= 0 \\ U(-1, a, b, c) &= 0 \\ U_y(-1, a, b, c) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Par ailleurs, les conditions initiales relatives aux équations différentielles vérifiées par v et Q sont telles que:

$$\begin{aligned} v(-1, a, b) &= 0 \\ v_y(-1, a, b) &= 0 \\ v_{yy}(-1, a, b) &= 0 \\ v_{yyy}(-1, a, b) &= 1 \\ Q(-1, a, b, c) &= 0 \\ Q_y(-1, a, b, c) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Les conditions initiales associées à l'équation différentielle vérifiée par W sont déduites comme suit :

$$W(-1, a, b, c) = 0$$

$$W_y(-1, a, b, c) = 1 \quad (\text{II.42})$$

Il en ressort que les équations différentielles (II.24a) et (II.24b), ainsi que les conditions aux limites (II.24c) sont transformées en un système de sept équations différentielles couplées (II.27), (II.28) et (II.34), associées aux conditions initiales (II.29), (II.40)-(II.42).

Le problème à conditions initiales est résolu par l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre impliquant la transformation de toutes les équations différentielles à résoudre en un système d'équation différentielles d'ordre un, ce qui est équivalent à l'intégration d'un système de vingt équations différentielles de premier degré dont les solutions sont les composantes du vecteur suivant:

$$\mathbf{Y} = \left[F \quad F^{(1)} \quad F^{(2)} \quad F^{(3)} \quad \theta \quad \theta^{(1)} \quad u \quad u_y \quad u_{yy} \quad u_{yyy} \quad U \quad U_y \quad v \quad v_y \quad v_{yy} \quad v_{yyy} \quad Q \quad Q_y \quad W \quad W_y \right]^{\text{Tr}} \quad (\text{II.43})$$

En considérant les conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{Y}(-1) = [1 \quad 0 \quad a \quad b \quad 0 \quad c \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^{\text{Tr}} \quad (\text{II.44})$$

Pour résumer la méthode numérique de Tir utilisée dans ce travail, nous pouvons dire que, comme trois des six conditions aux limites du problème sont sur deux bornes, pour que le système d'équations différentielles à résoudre soit transformé en un problème à conditions initiales bien posé, alors trois conditions supplémentaires arbitraires sont exigées au niveau de la borne inférieure du domaine d'étude, c'est-à-dire à $y = -1$. Dans ce cas, la solution du problème dépend de ces trois conditions arbitraires qui deviennent d'autres variables inconnues du problème dont la détermination conduisant à l'obtention de la vraie solution donne lieu à la résolution d'un problème d'optimisation par la technique de Newton-Raphson. En effet, le problème d'optimisation résulte d'un test de la solution à la borne supérieure, c'est-à-dire la vraie solution doit vérifier les conditions aux limites au niveau de la borne supérieure ($\eta = +1$). Cela implique la définition d'une grandeur appelée *fonction coût* K . La fonction K est la somme des écarts quadratiques entre les valeurs respectives des fonctions

trouvées par intégration des équations différentielles utilisant les trois conditions initiales arbitraires avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre et les valeurs des conditions aux limites du problème. Les bonnes conditions initiales du problème conduisant à la vraie solution sont celles pour lesquelles K est minimale, c'est-à-dire nulle puisque la fonction K est quadratique. Par ailleurs, nous rappelons qu'une fonction quadratique est positive et le minimum d'une telle fonction est nul. Les valeurs des trois variables, qui servent à définir les trois conditions initiales supplémentaires correspondant à la valeur minimale de K sont utilisées de façon itérative pour définir les vraies conditions initiales conduisant à la solution recherchée.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le domaine géométrique de l'écoulement avant de modéliser le mouvement de cisaillement du fluide et le transfert de chaleur entre deux parois planes et poreuses. Nous avons aussi réussi à décrire la technique de résolution des équations du problème basée sur la méthode numérique de Tir associée à l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4.

CHAPITRE III : RESULTATS ET DISCUSSION

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats issus de l'intégration numérique des équations du problème. L'interprétation et la discussion de ces résultats interviennent dans le souci de donner une signification physique aux solutions trouvées en termes de profils de vitesse normale ou transversal et de vitesse axiale ou longitudinal du fluide, les lignes de courant, ainsi que des profils de température. Le résultat analytique pour les faibles paramètres de contrôle du problème est aussi présenté pour servir de validation du code de calcul basé sur la méthode numérique Tir employée pour résoudre le problème non linéaire quand les paramètres de contrôle prennent des valeurs différentes de zéro. La description du comportement des grandeurs physiques du problème dont l'ensemble constitue ce qu'on appelle champ de l'écoulement, est faite suivant une démarche bien précise. En effet, la dynamique du fluide et la distribution de température sont analysées suivant les branches d'un diagramme de bifurcations hydrodynamiques. Ce diagramme de bifurcations représente les valeurs du coefficient pariétal de frottement en fonction du nombre de Reynolds.

III.1 SOLUTION POUR LES FAIBLES NOMBRES DE CONTROLE ET VALIDATION DU CODE DE CALCUL

La convergence du schéma numérique est testée pour les faibles valeurs des paramètres de contrôle qui donnent lieu à un problème linéaire impliquant une solution analytique.

III.1.1 Solution analytique

Dans cette étude, le résultat analytique constitue la première étape dans la recherche des solutions du problème. Quand le nombre de Reynolds R , le nombre de Péclet P , et le paramètre qui mesure la sensibilité de la conductivité thermique aux variations de la température γ tendent vers zéro, les équations différentielles ordinaires du problème (II.24) du Chapitre II sont linéaires et fournissent des solutions analytiques qui par la suite vont aider à la validation du

schéma numérique par une approche comparative. Plus précisément, le code de calcul basé sur la méthode de Tir est utilisé pour résoudre les équations non linéaires correspondant aux grandes valeurs de ces paramètres de contrôle. En effet, en posant $\gamma = 0$, la solution analytique est obtenue en développant les fonctions F et θ des équations différentielles du problème (II.24) du chapitre précédent en séries de Taylor suivant les petites valeurs de R et P , respectivement:

$$F = F_0 + RF_1 + R^2F_2 + R^3F_3 + \dots \quad (\text{III.1})$$

$$\theta = \theta_0 + P\theta_1 + P^2\theta_2 + P^3\theta_3 + \dots \quad (\text{III.2})$$

La solution analytique d'ordre zéro (F_0 , θ_0) satisfait les conditions aux limites (II.24c) du chapitre précédent. Les solutions analytiques d'ordres supérieurs à zéro, satisfont aux conditions aux limites homogènes. En introduisant les expressions (III.1) et (III.2) dans les équations différentielles du problème (II.24), les solutions allant de l'ordre zéro à l'ordre 3 vérifient le système d'équations différentielles couplées suivant:

$$\begin{aligned} F_0^{(4)} &= 0 \\ \theta_0^{(2)} &= 0 \\ F_1^{(4)} + F_0F_0^{(3)} - F_0^{(1)}F_0^{(2)} &= 0 \\ \theta_1^{(2)} + F_0\theta_0^{(1)} &= 0 \\ F_2^{(4)} + F_0F_1^{(3)} + F_0^{(3)}F_1 - F_0^{(1)}F_1^{(2)} - F_0^{(2)}F_1^{(1)} &= 0 \\ \theta_2^{(2)} + F_0\theta_1^{(1)} + F_1\theta_0^{(1)} &= 0 \\ F_3^{(4)} + F_0F_2^{(3)} + F_1F_1^{(3)} + F_0^{(3)}F_2 - F_0^{(1)}F_2^{(2)} - F_1^{(1)}F_1^{(2)} - F_0^{(2)}F_2^{(1)} &= 0 \\ \theta_3^{(2)} + F_0\theta_2^{(1)} + F_1\theta_1^{(1)} + F_2\theta_0^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Ces équations différentielles sont résolues successivement et l'expression de la fonction F telle que définie à l'équation (III.1) est obtenue comme suit:

$$\begin{aligned}
 F = & \frac{1}{2}(y^3 - 3y) + \frac{R}{280}(y^7 - 3y^3 + 2y) \\
 & + \frac{R^2}{1293600}(-14y^{11} + 385y^9 - 198y^7 - 876y^3 + 703y) \\
 & + R^3 \left(\frac{1}{215600} \left(\frac{133}{4680}y^{15} - \frac{49}{78}y^{13} + \frac{27}{5}y^{11} - \frac{55}{18}y^9 - \frac{97}{56}y^7 \right) \right. \\
 & \left. - \frac{8951}{321048000}y^3 + \frac{2047}{73573500}y \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

Par ailleurs, l'expression de la fonction θ telle que définie à l'équation (III.2) est donnée par:

$$\begin{aligned}
 \theta = & \frac{1}{2}(y+1) + \frac{P}{80}(-y^5 + 10y^3 - 9y) \\
 & + \frac{P^2}{134400}(55y^9 - 900y^7 + 2034y^5 - 3860y^3 + 2671y) \\
 & - P\epsilon^3 \left(\frac{1}{20697600} \left(\frac{33383}{156}y^{13} - \frac{113729}{22}y^{11} + \frac{124575}{4}y^9 - \frac{555555}{7}y^7 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2954027}{20}y^5 - \frac{628009}{6}y^3 \right) + \frac{2637329}{5381376000}y \right) + \dots
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

III.1.2 Validation du code de calcul

Il est important de mentionner que, pour une équation différentielle, le résultat analytique est la solution exacte, encore appelée solution idéale. La solution numérique représente une approximation en situation où la solution analytique n'est pas accessible par des formules conventionnelles. Autrement dit, les scientifiques font recours aux méthodes numériques pour trouver les solutions des problèmes formulés sous forme d'équations différentielles lorsque

ces problèmes ne fournissent pas de résultats analytiques. Une approximation est une solution approchée, solution présentant une erreur ou un écart minimal par rapport au résultat exact. En analyse numérique, le mot erreur n'est pas pris au sens de faute (raisonnement faux dans la méthode, instruction fautive dans un programme). Il s'agit des erreurs inévitables. On peut les classer en trois catégories, notamment les erreurs sur les données, les erreurs d'arrondi, les erreurs d'approximation ou de discrétisation.

Les erreurs sur les données peuvent être dues à l'imprécision des mesures physiques ou au fait que les données proviennent elles-mêmes d'un calcul approché. Elles sont imposées, en quelque sorte, de l'extérieur et nous ne pouvons agir sur elles. Néanmoins, la manière dont elles se propagent au cours des calculs est davantage du ressort du calculateur. Les données influencent les notions de conditionnement et de stabilité.

Les erreurs d'arrondi sont dues au fait que la machine ou le logiciel de calcul ne peut représenter les nombres réels qu'avec un nombre fini de chiffres. À chaque opération mathématique, il peut avoir une perte de chiffres significatifs. Le calculateur doit donc être vigilant quand le nombre d'opération est très important.

Les erreurs d'approximation ou de discrétisation sont commises par exemple lorsqu'on calcule une intégrale à l'aide d'une somme finie, une dérivée à l'aide de différences finies ou bien la somme d'une série infinie à l'aide d'un nombre fini de ses termes, on parle alors quelquefois d'erreurs de troncature. Une situation souvent rencontrée consiste à approcher une fonction, solution d'une certaine équation, par une combinaison linéaire finie de fonctions élémentaires. Ce type d'erreurs est bien sûr fortement lié à la méthode employée.

Un code de calcul converge efficacement lorsque l'écart entre la solution exacte et le résultat numérique est négligeable. Dans notre travail, nous examinons cet écart en représentant dans les mêmes graphiques, les solutions

analytiques des fonctions F et θ telles que obtenues à travers les formules (III.4) ainsi que (III.5) et les résultats numériques des mêmes fonctions obtenus avec la méthode de Tir pour les petites valeurs des paramètres de contrôle. Ainsi, pour la fonction F la Figure III.1 présente la comparaison entre la solution numérique tracée pour $R = 0.1, 1, 2$ et la solution analytique représentée pour $R = 0, 0.01, 0.05$.

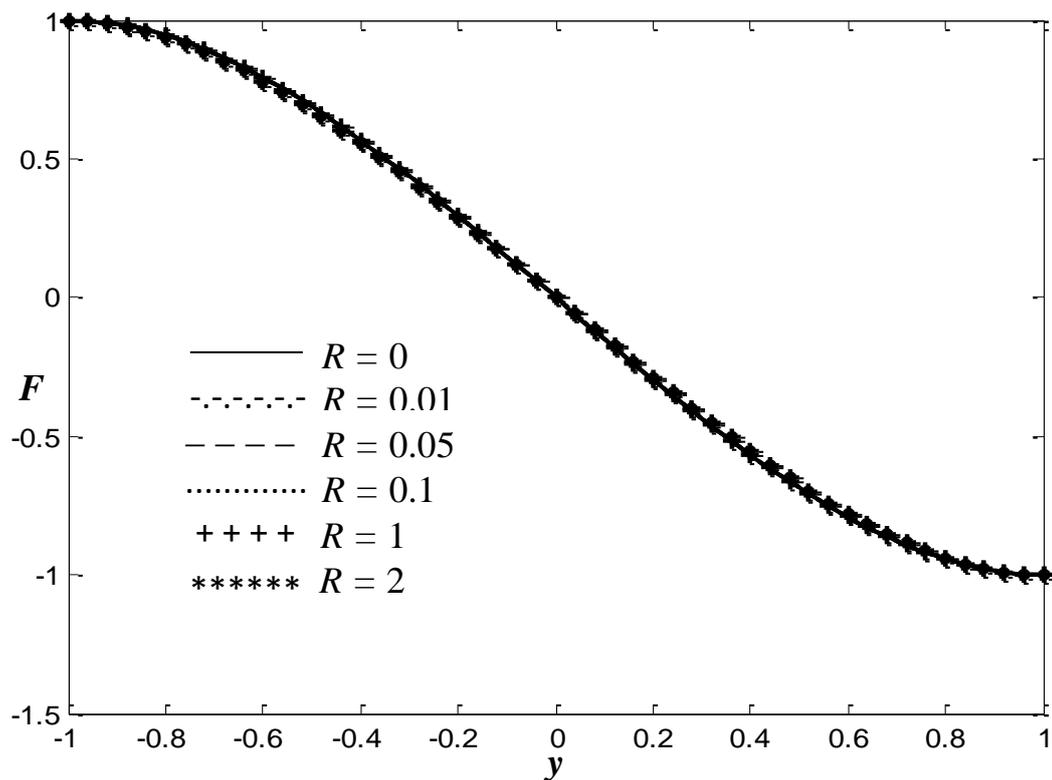


Figure III.1 : Comparaison entre la solution numérique de la fonction de courant par unité de longueur F pour $R = 0.1, 1, 2$, et la solution analytique tracée pour $R = 0, 0.01, 0.05$.

La Figure III.1 montre que, les résultats obtenus pour différentes valeurs du nombre de Reynolds tendent à une même courbe constante, parce que la fonction de courant par unité de longueur F a tendance à être insensible aux faibles nombres de Reynolds. Du point de vue physique, il s'agit là d'un comportement particulier bien connu en hydrodynamique. En effet, les faibles nombres de Reynolds impliquent un régime fortement laminaire, un régime rampant, dans lequel les couches fluides sont régulières et ordonnées les unes

par rapport aux autres. Ce résultat de la dynamique des fluides est donc bien vérifié aussi bien analytiquement que numériquement. Par conséquent, le résultat numérique est en accord avec le résultat analytique pour les faibles valeurs de R . Par ailleurs, la Figure III.2 présente les résultats analytiques pour $P = 0, 0.01, 0.05$ et numériques pour $R = 0.4, 1.5, 3$ et $P = 0.1, 1, 2$, correspondant à la fonction de température θ où il apparaît que les deux familles de solutions sont proches l'une de l'autre.

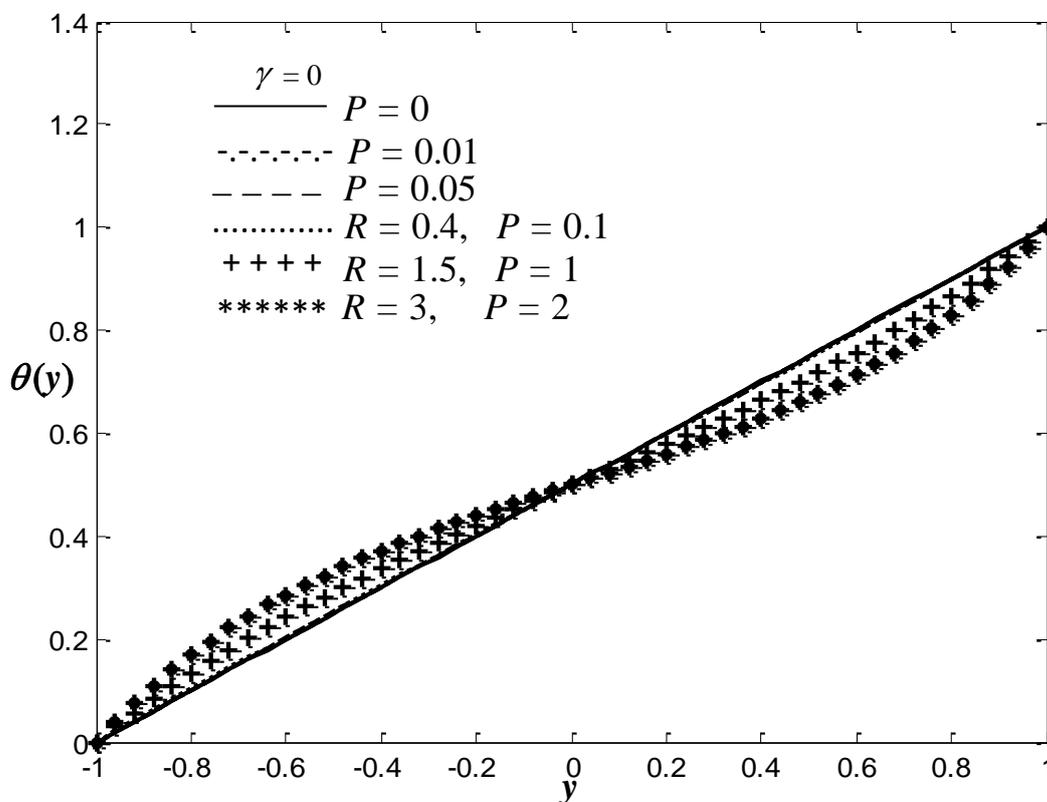


Figure III.2 : Comparaison entre la solution numérique de la fonction de température θ pour $R = 0.4, 1.5, 3$ et $P = 0.1, 1, 2$, et la solution analytique tracée pour $R = 0, 0.01, 0.05$

Les Figures III.1 et III.2 montrent qu'il existe un très grand accord dans le sens qualitatif entre les résultats numériques et les solutions analytiques. Par conséquent, le code de calcul utilisé pour résoudre numériquement les équations du problème est efficient et satisfaisant.

III.2 COEFFICIENT PARIETAL DE FROTTEMENT

Le coefficient pariétal de frottement est une grandeur physique qui résulte d'un écoulement de fluide visqueux dans le proche voisinage d'une paroi solide. Il n'a d'existence que lorsque le fluide est réel. Il dépend de la vitesse relative du fluide par rapport au solide, de sorte que plus le déplacement du fluide est rapide, plus les effets de proximité sont importants. Ce coefficient est aussi souvent appelé trainée de friction cutanée, c'est-à-dire une composante de la trainée de profil qui est une résistance se manifestant lorsqu'un fluide se déplace sur la surface d'un objet. L'écoulement laminaire sur un corps se produit lorsque les couches de fluide se déplacent en douceur les unes par rapport aux autres en lignes parallèles. Lorsque le fluide est en mouvement, il applique des forces de friction à la surface du solide, ce qui empêche le mouvement vers l'avant de l'objet. En d'autres termes, la contrainte de cisaillement dans le fluide ralentit les particules fluides proches de la frontière solide, ce qui fait que la couche limite croît en épaisseur en aérodynamique. En certains points, on peut assister à une instabilité dans la direction de l'écoulement ou à la turbulence.

III.2.1 Présentation des diagrammes de bifurcations

Il est important avant tout de signaler qu'on ne parle pas seulement des bifurcations en hydrodynamique. Le concept de bifurcation est rencontré dans plusieurs domaines de la vie. Des exemples classiques d'une bifurcation sont les rythmes circadiens de populations animales en biologie théorique et les solutions de météo en mathématique et physique non-linéaire. En sciences de l'ingénieur, il y a aussi le flambage d'une poutre élastique ou les transitions de phase de matériaux. Pour le cas de la poutre, si on comprime la poutre légèrement, elle va rester droite. Tout à coup, au-delà d'une limite bien définie, la poutre va se plier de plus en plus lorsqu'on augmente la force exercée. Il y a donc bifurcation, ou brisure de symétrie, où l'on passe de l'état "poutre droite" à l'état "poutre

courbée", soit dans un sens, soit dans l'autre, avec une certaine probabilité (d'où l'idée de bifurcation).

Un exemple de magnétisme est la température de Curie pour une transition de phase. Au-delà de cette température, un matériau perd son aimantation spontanée: c'est une bifurcation.

Les problèmes d'écoulements ou de distribution de masse de fluide se traduisent à l'échelle macroscopique comme des phénomènes de transport de quantité de mouvement associé au transfert d'énergie. La diffusion des quantités de mouvement se fait par frottement des couches fluides les unes des autres grâce à une propriété physique appelée viscosité dynamique. Le coefficient pariétal de frottement intervient lorsque l'écoulement a lieu dans le voisinage immédiat d'une paroi solide. Une bifurcation hydrodynamique est mise en évidence, lorsque ce coefficient de frottement présente un changement qualitatif autour d'une valeur critique du nombre de Reynolds. Dans notre étude, les grandeurs $F^{(2)}(-1)$ et $F^{(2)}(+1)$ sont proportionnelles aux coefficient de frottement sur les parois inférieure et supérieure, respectivement. La détermination de ces deux fonctions suivant les valeurs du nombre de Reynolds permet de générer les diagrammes de bifurcations. Le coefficient de frottement à la paroi supérieure en fonction du nombre de Reynolds est présenté à la Figure III.3.

Dans le but d'évaluer les effets de frottement visqueux au niveau des deux parois poreuses, la détermination du coefficient de frottement à la borne supérieure et à la borne inférieure est nécessaire pour le même intervalle de valeurs du nombre de Reynolds. Cela permet aussi de voir si l'identité géométrique des parois est hydrodynamiquement conservée. En d'autres termes, comme les parois semblent être d'égale importance, l'influence des parois sur l'écoulement, pourrait-elle être la même? Dans une autre perspective, le coefficient de frottement peut être différent d'une paroi à une autre malgré leur identité géométrique. Ainsi, le coefficient de frottement à la paroi inférieure est présenté à la Figure III.4.

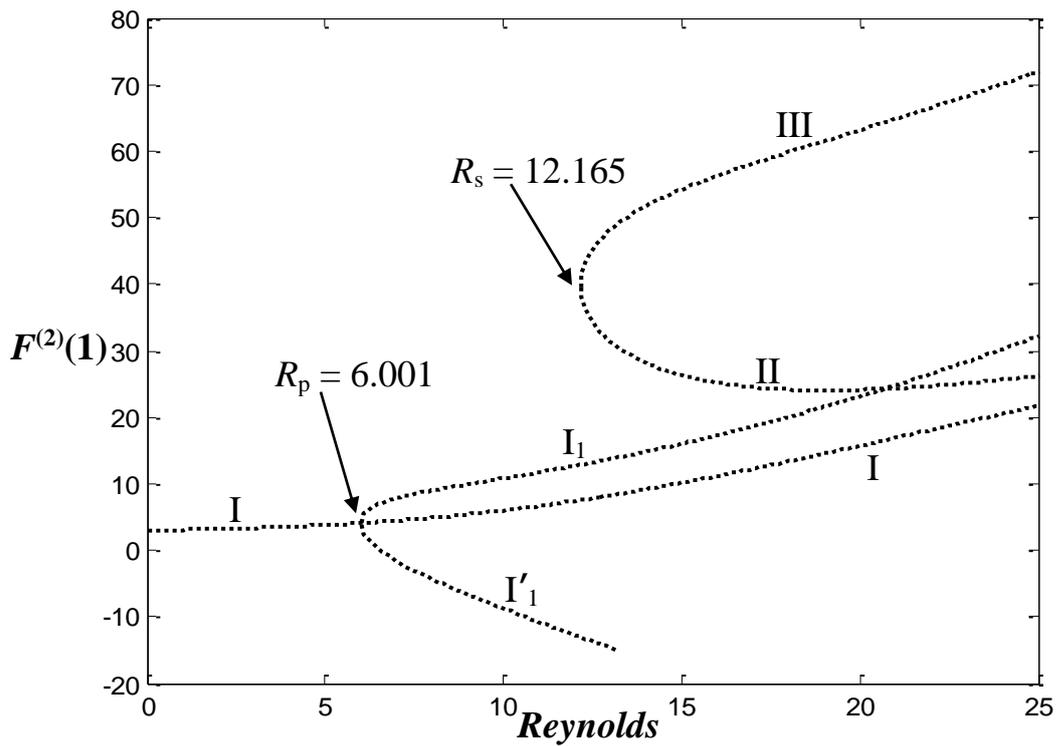


Figure III.3: Diagramme de bifurcations représentant les valeurs du coefficient de frottement au niveau de la paroi supérieure.

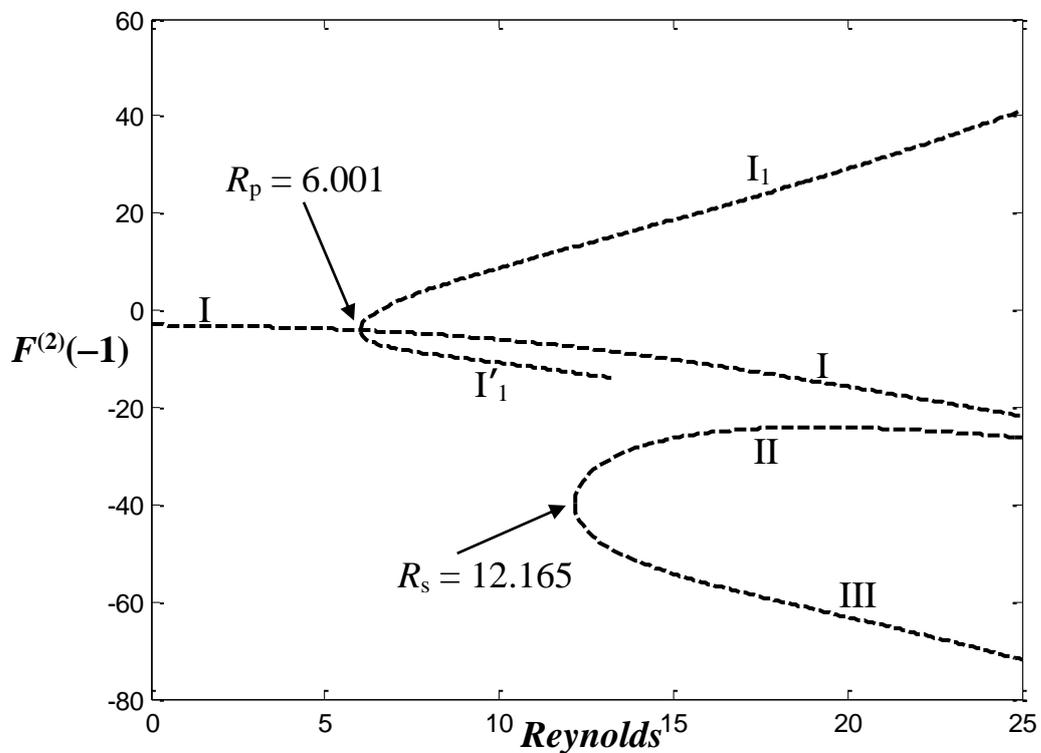


Figure III.4: Diagramme de bifurcations représentant les valeurs du coefficient de frottement au niveau de la paroi inférieure.

III.2.2 Analyse des bifurcations

Les Figures III.3 et III.4 présentent de multiples solutions du coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds. Nous pouvons représenter ces solutions en différentes branches, notamment les solutions de types I, II, III, I_1 et I_1' . Les solutions de types I, II et III sont symétriques, alors que les solutions de types I_1 et I_1' sont asymétriques. Chaque branche de solution caractérise les valeurs du coefficient de frottement $F^{(2)}(+1)$ pour la frontière supérieure du canal et $F^{(2)}(-1)$ pour la borne inférieure du canal en fonction du nombre de Reynolds. La solution symétrique de type I est l'unique branche qui existe pour $R < 6,001$. Cette symétrie est brisée au point critique $R = R_p = 6,001$ à cause d'une bifurcation fourche qui se produit en donnant naissance à deux branches asymétriques de types I_1 et I_1' . La solution de type I continue à exister pour $R > 6,001$. La croissance du nombre de Reynolds donne lieu à deux autres solutions symétriques de types II et III résultant d'une bifurcation selle-nœud au point critique $R = R_s = 12,165$. Pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds, les solutions de type I et II ne diffèrent que par des termes exponentiellement faibles et se rencontrent par conséquent sous forme d'une bifurcation cuspidale.

La symétrie dont il est question est relative aux valeurs du coefficient de frottement au niveau des deux frontières rigides de l'écoulement. Plus précisément, une solution est symétrique quand elle vérifie la relation $F^{(2)}(-1) = -F^{(2)}(+1)$. Sur le plan de la physique, en situation de symétrie, les effets de frottement entre le fluide et les parois poreuses sont identiques en valeur absolue. L'asymétrie survient lorsque ces effets de frottements cessent d'être identiques à cause de la non-linéarité du modèle mathématique de l'écoulement.

La bifurcation fourche, la bifurcation selle-nœud et la bifurcation cuspidale sont la résultante d'un changement qualitatif du comportement de l'écoulement dû au diverses mesures relatives de l'importance des effets d'inertie par rapport aux effets de viscosité pendant le mouvement du fluide.

La Figure III.5 illustre la comparaison des coefficients de frottement au niveau des deux parois.

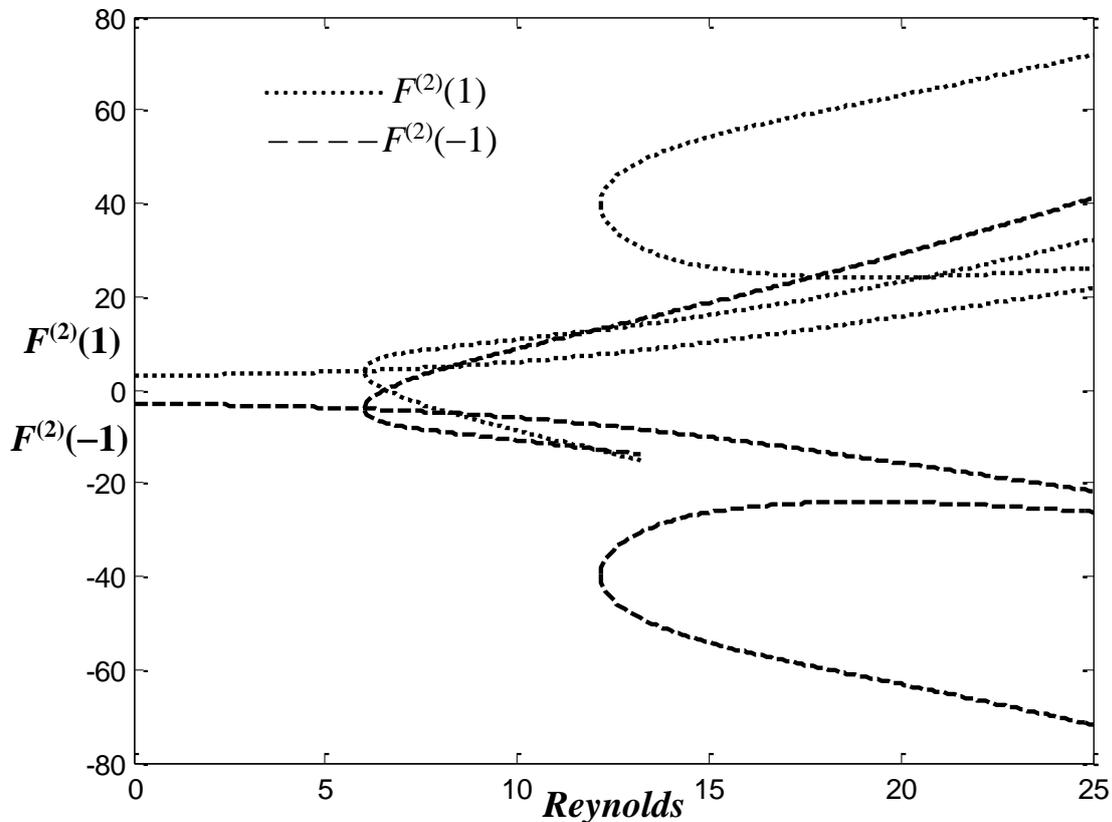


Figure III.5: Comparaison des coefficients de frottement des deux parois poreuses.

La Figure III.5 montre la disposition relative des solutions symétriques et des solutions asymétriques. Il en ressort que, bien qu'elles proviennent d'un changement qualitatif de la dynamique du fluide, les solutions symétriques de types I, II et III sont celles que l'on peut prévoir du fait que les deux parois poreuses du canal sont géométriquement identiques. Une analyse plus distincte des solutions trouvées compte tenu des travaux antérieurs, permet de souligner que la solution de type I est celle qui est envisagée, car elle émane de l'écoulement primordial, c'est à dire le mouvement du fluide pour les nombres de Reynolds tels que $R < 6,001$. En effet, pour les nombres de Reynolds $R < 6,001$, le mouvement du fluide est régulier et au voisinage de l'écoulement de

Stokes où les couches fluides ont tendance à être parallèles en gardant le même sens de déplacement. Le régime de l'écoulement tend à être imprédictible lorsque des changements qualitatifs commencent à se manifester comme à la première bifurcation qui survient pour $R = R_p = 6,001$.

Pour mieux illustrer la bifurcation cuspidale, un traitement à part des solutions de types I et II permet de produire la Figure III.6.

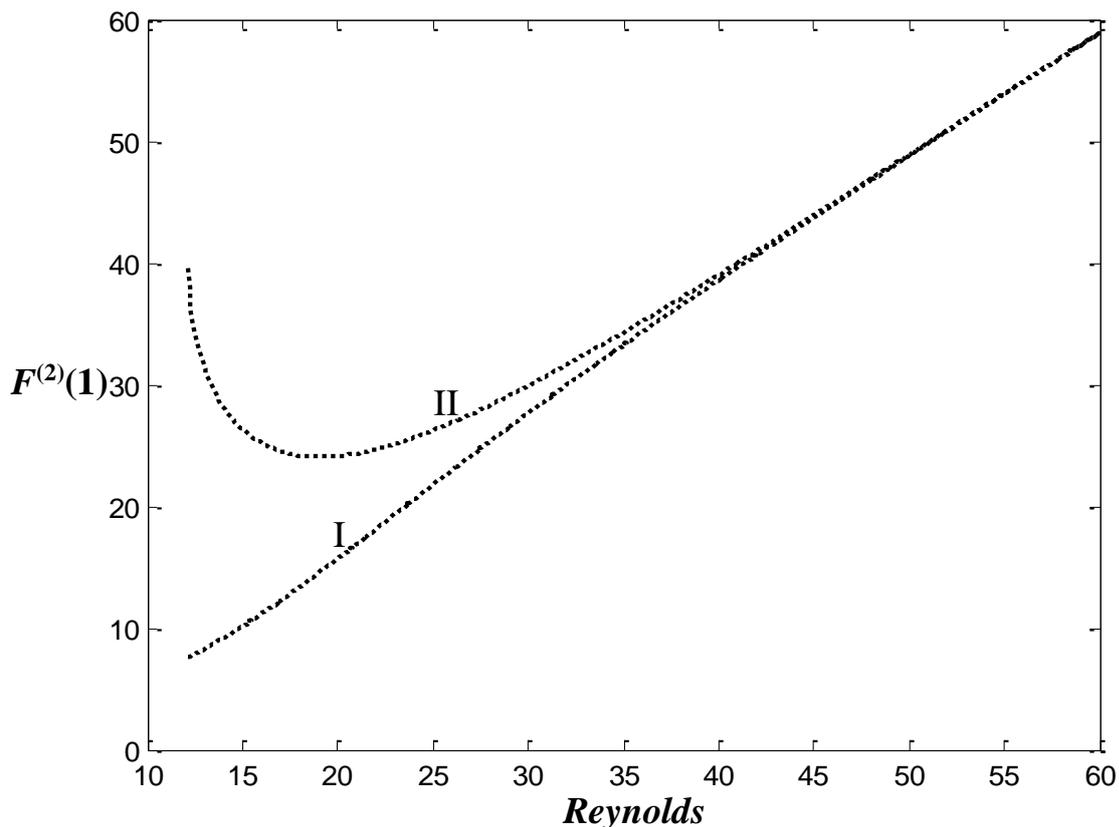


Figure III.6: Diagramme de la bifurcation cuspidale pour la paroi supérieure.

La Figure III.6 représente les valeurs du coefficient de frottement suivant les solutions de types I et II au niveau de la paroi supérieure. Il apparaît que les solutions de types I et II coïncident pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds. Une structure hydrodynamique particulière se révèle de ce comportement du coefficient de frottement qui permet de mettre en exergue le rôle du nombre de Reynolds. En effet, la coïncidence des deux branches de solution implique une dynamique semblable du fluide pour les solutions de

types I et II seulement lorsque R croît, car pour les petites valeurs de R , la solution de type II n'existe pas; et pour les valeurs modérées, la dynamique du fluide n'est pas censée être la même qu'à travers la branche I. Par conséquent, la croissance du nombre de Reynolds peut rapprocher le comportement dynamique du fluide dans les branches de sous régimes laminaires différents. De même, nous avons représenté le coefficient de frottement à la paroi inférieure dans la Figure III.7.

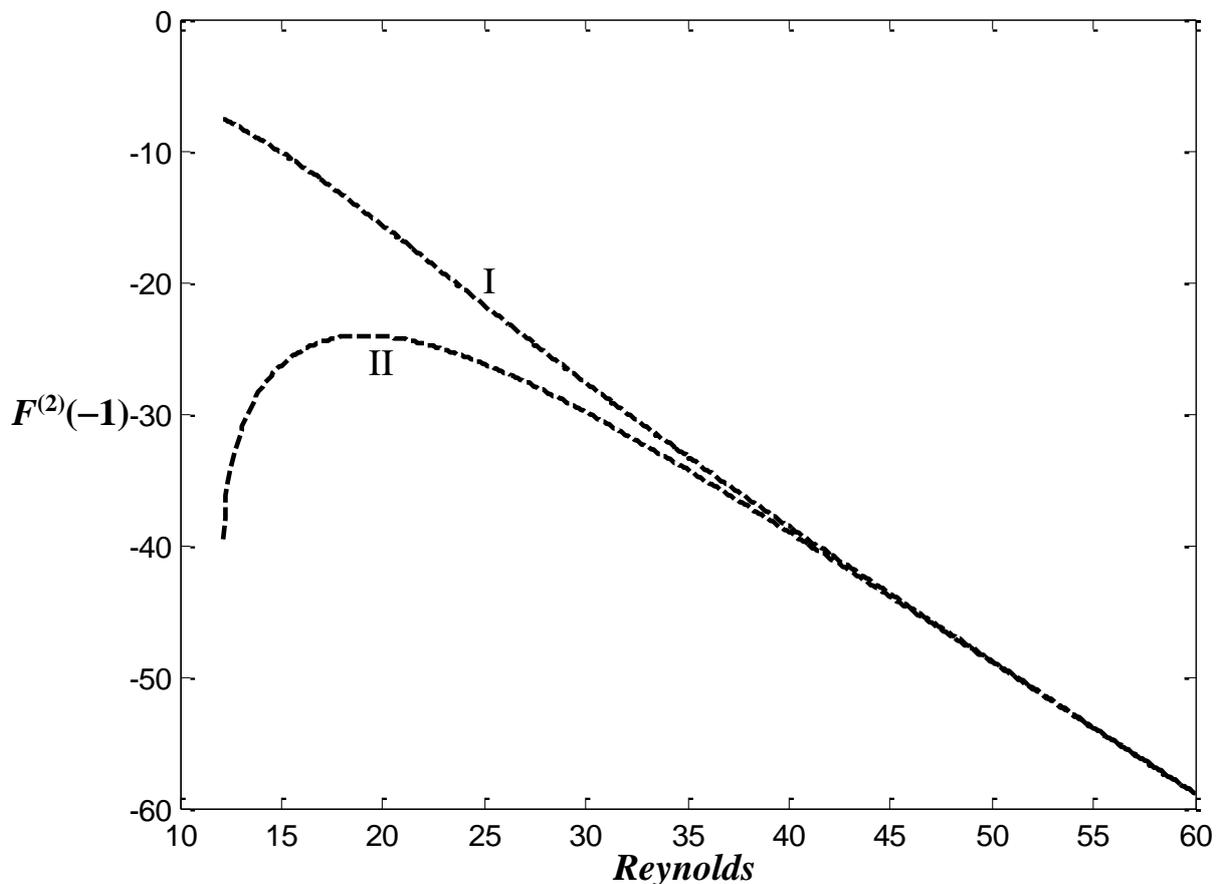


Figure III.7: Diagramme de la bifurcation cuspidale pour la paroi inférieure.

Le rapprochement des comportements de l'écoulement dans les branches I et II à cause de la croissance du nombre de Reynolds se produit au proche voisinage de la paroi inférieure, comme c'était le cas pour la paroi supérieure compte tenu de la symétrie qui caractérise ces deux branches. Les bifurcations cuspidales présentées dans les Figures III.6 et III.7 présentent une différence de

forme qui peut être illustrée en procédant à leur comparaison, comme le montre la Figure III.8.

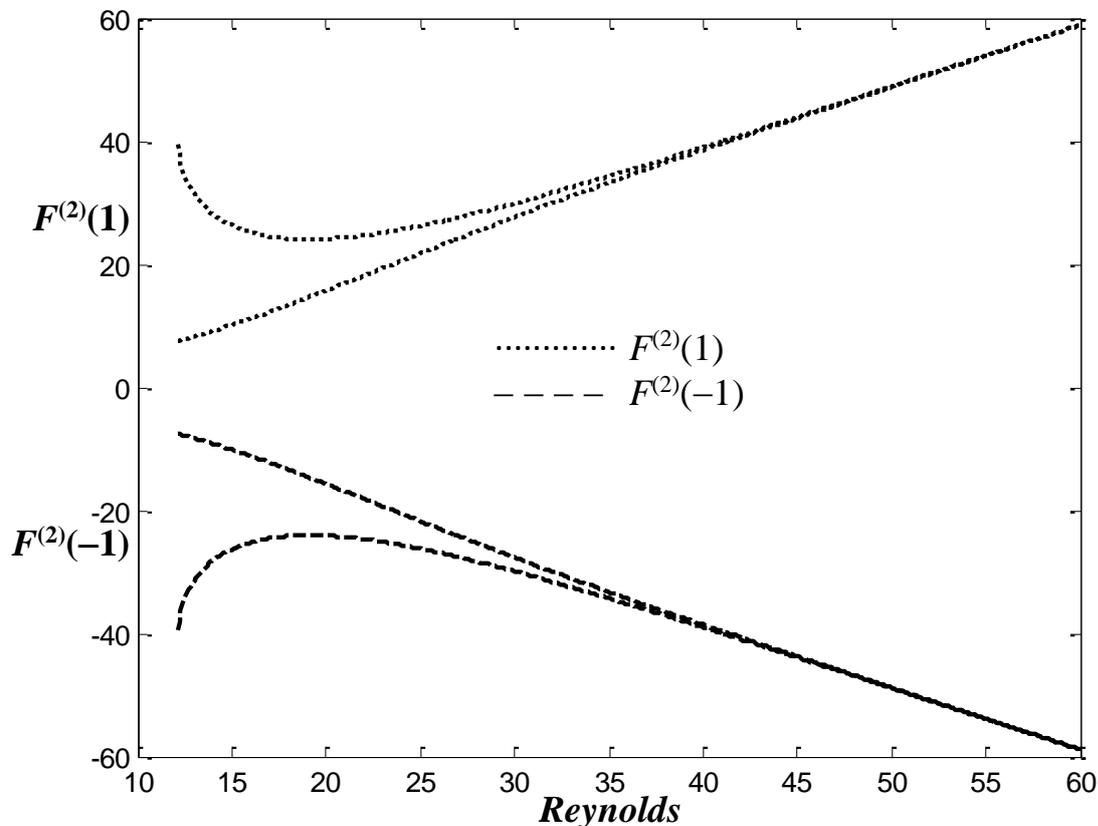


Figure III.8: Comparaison des coefficients de frottement des parois inférieure et supérieure correspondant à la bifurcation cuspidé.

Il apparaît à travers la Figure III.8 que le coefficient de frottement décroît à travers les branches I et II au niveau de la paroi inférieure, alors qu'il croît au niveau de la paroi supérieure quand le nombre de Reynolds augmente. Ce comportement est la conséquence de la distribution du fluide qui présente des effets de cisaillement semblables de part et d'autre des deux parois poreuses du canal rectangulaire.

La cascade de bifurcations peut évoluer jusqu'à la transition vers la turbulence. Mais cette étude est restreinte à l'analyse de l'écoulement laminaire, c'est-à-dire à la détermination du comportement des grandeurs du champ de l'écoulement à travers chaque branche des diagrammes de bifurcations présentés dans les Figures III.3 et III.4. S'agissant des grandeurs physiques du champ de

l'écoulement, notre attention va porter sur les profils de vitesse axial et transversal, les lignes de courant, ainsi que les profils de température.

III.3 PROFILS DE VITESSES DE L'ÉCOULEMENT

L'écoulement étant bidimensionnel, le champ de vitesse a deux composantes, une composante axiale ou longitudinale et une composante transversale ou normale. À travers les composantes de vitesse, nous allons analyser le mouvement du fluide suivant chaque branche des diagrammes de bifurcations présentés dans les Figures III.3 et III.4.

III.3.1 Vitesses axiale et transversale suivant la branche I

Ainsi, la vitesse axiale par unité de longueur suivant l'axe du canal V_x^*/x^* et la vitesse transversale V_y^* sont pour différentes valeurs du nombre de Reynolds à travers la branche de solution de type I dans la Figure III.9.

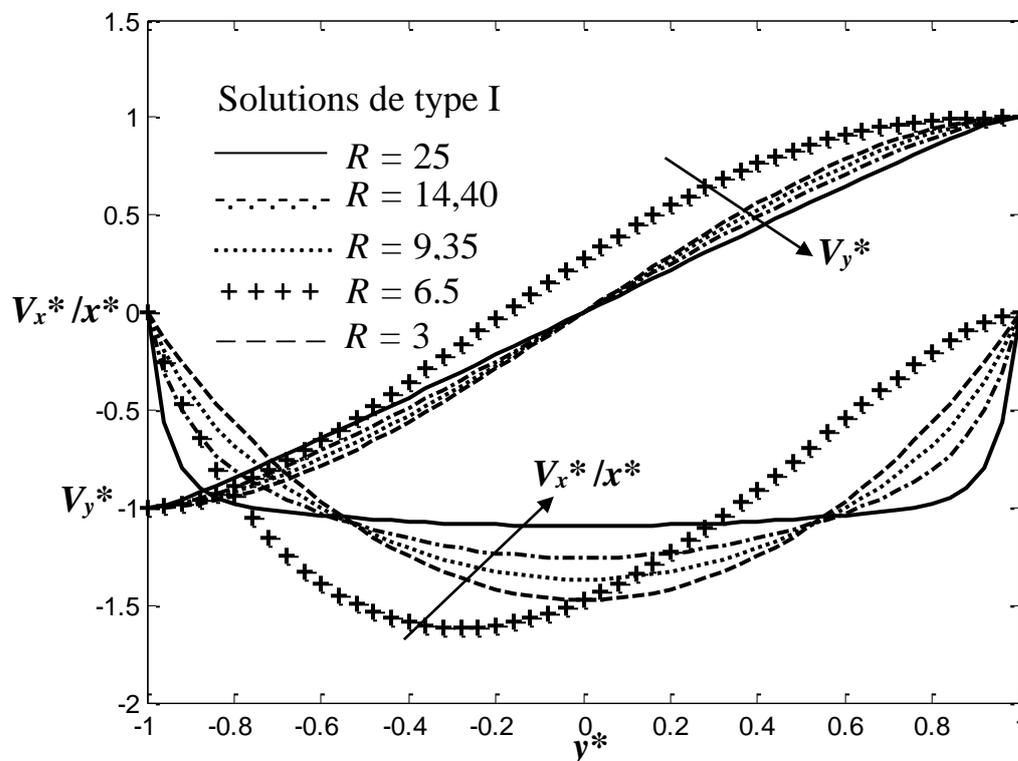


Figure III.9: Profil de vitesse axiale et profil de vitesse transversal à travers la branche de type I.

La Figure III.9 met en exergue un écoulement de type couche limite qui se développe avec la croissance du nombre de Reynolds. Quand la couche limite se développe à l'intérieur du canal, le profil axial de vitesse tend à être rectangulaire, alors que ce profil est parabolique pour les petites valeurs de R . Par ailleurs, la vitesse transversale tend vers un profil linéaire en présence de la couche limite, alors qu'elle satisfait la loi de Taylor [131] pour les nombres de Reynolds modérés. Plus précisément, en présence de la couche limite interne, le profil linéaire de la composante transversale de vitesse est dû au fait que l'écoulement a tendance à se comporter comme celui d'un fluide parfait [91, 155] avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Or, il est bien connu que la couche limite n'est envisageable que si les effets de viscosités sont pris en compte. La caractéristique de l'écoulement qui est la présence d'une couche limite quand le fluide visqueux se comporte comme un fluide parfait avec la croissance du nombre de Reynolds relève d'un phénomène physique qui mérite une attention particulière. En effet, lorsque le nombre de Reynolds croît, le fluide a tendance à se comporter comme non visqueux, en même temps, la proximité des parois de la conduite augmente les effets de viscosité qui influencent l'écoulement. Pour résumé, la proximité des parois de la conduite contribue à rendre prépondérants les effets de viscosité quand le fluide veut se comporter comme non visqueux lorsque le nombre de Reynolds croît. La couche limite apparaît donc quand le mouvement du fluide est sensible aux frontières de l'écoulement dans le sens de rendre considérable les effets de viscosité ou de cisaillement pour contrecarrer les effets d'inertie dont l'importance est liée à l'augmentation du nombre de Reynolds qui donne lieu à un profil rectangulaire de la vitesse axiale. S'agissant de la couche limite, signalons qu'elle représente une région d'influence réciproque et perceptible entre une paroi solide et un fluide en écoulement au voisinage immédiat de cette paroi. Compte tenu de la manifestation évidente de la couche limite, chaque fois que l'écoulement d'un fluide se développe à proximité d'une paroi solide, il est dit écoulement de

couche limite. Il s'agit donc d'un abus de langage, parce que cette couche limite se produit en réalité pour une valeur critique d'un paramètre de contrôle donné. Plus précisément, la couche limite de l'écoulement par exemple, se produit quand les effets dus à l'influence réciproque de la paroi solide et du mouvement du fluide sont perceptibles.

Il existe une couche limite externe et une couche limite interne. La couche limite externe peut se manifester lorsque la couche fluide en mouvement possède une frontière en contact avec une paroi solide et une autre frontière libre. À cause des frottements entre la paroi solide et le fluide en mouvement, c'est la manifestation de cette couche limite qui arrache les toitures en tôles des maisons. Cette couche limite est aussi à l'origine des accidents d'avions lorsque les frottements entre l'atmosphère et les ailes d'avions deviennent irréguliers. Pour ce qui concerne la couche limite interne, sa manifestation peut réduire les performances d'une machine hydraulique ou d'un moteur industriel. Par exemple, le fonctionnement du moteur d'une fusée est souvent modélisé comme un écoulement de fluide entre deux parois rectangulaires planes. La présence de la couche limite dans ce canal réduit considérablement les performances de ce moteur. Ainsi, pour garantir la performance de ce type de moteur, le contrôle de la couche limite devient une étape incontournable, et l'analyse théorique est indispensable dans ce contexte, car l'introduction des sondes de mesure ou la mise au point d'une batterie d'instrumentation pour l'investigation de la couche limite dans le fonctionnement des moteurs s'appuie sur les prédictions théoriques.

Pour réduire ou séparer la couche limite interne dans les modèles de fonctionnement des moteurs industriels, les scientifiques ont incorporé le mouvement et/ou la porosité des frontières des domaines contenant l'écoulement [46, 54-56, 61-62]. En d'autres termes, les parois solides qui sont dans le voisinage de l'écoulement peuvent être fixes et poreuses, elles peuvent aussi être mobiles et imperméables ou mobiles et perméables. S'agissant particulièrement

des parois, les cas les plus rencontrés sont ceux où elles se déplacent dans la même direction que l'écoulement ou orthogonalement au mouvement du fluide.

Dans la Figure III.9, toutes les valeurs de la vitesse axiale par unité de longueur du canal V_x^*/x^* sont négatives, parce que dans la branche I le sens de l'écoulement primordial est conservé. En effet, dans ce travail, le sens primordial de l'écoulement est tel que $V_x^*/x^* < 0$, c'est-à-dire l'écoulement primordial se développe dans le sens des x^* négatives. Par conséquent, tout mouvement du fluide avec une vitesse axiale par unité de longueur positive $V_x^*/x^* > 0$ résulte d'un écoulement inverse, c'est-à-dire un écoulement dans le sens des x^* positives.

III.3.2 Vitesses axiale et transversale suivant la branche I₁

La vitesse axiale par unité de longueur du canal à travers la branche de solutions de type I₁ présente une région d'écoulement inverse au voisinage de la paroi inférieure. L'idée de représenter la vitesse axiale par unité de longueur du canal émane de la configuration géométrique de l'écoulement. Étant donné que la longueur du canal est très grande par rapport à la largeur, elle est considérée comme infinie. Par conséquent, la détermination de la vitesse axiale suivant toute la longueur n'est pas une bonne approche physique. Ainsi, on procède souvent à la description de la vitesse axiale par unité de longueur, compte tenu du fait que l'écoulement est bidimensionnel, c'est-à-dire la dynamique du fluide est identique suivant chaque section transversale de l'écoulement.

L'écoulement inverse proche de la paroi inférieure est plus perceptible avec la croissance en nombre de Reynolds et ne se manifeste pas dans le reste du domaine de l'écoulement. C'est dans cette même région où se développe un mouvement du fluide dans le sens inverse du sens primordial que le module de la vitesse transversale du fluide excède sa valeur au niveau des frontières telle que fixée par les conditions aux limites, comme le présente la Figure III.10.

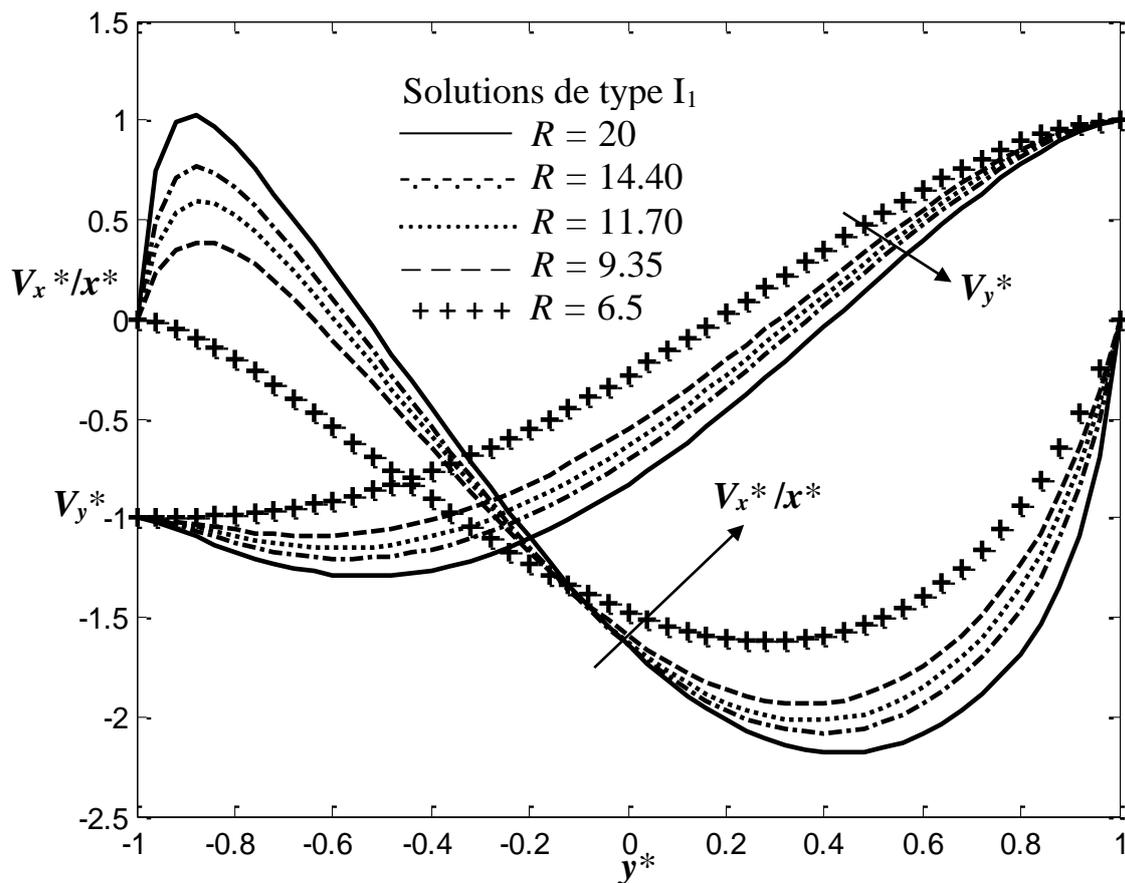


Figure III.10: Profil de vitesse axiale et profil de vitesse transversal à travers la branche de type I_1 .

III.3.3 Vitesses axiale et transversale suivant la branche I_1'

Au niveau de la branche de solution de type I_1' , le phénomène d'écoulement inverse se produit au voisinage de la paroi supérieure, qui est la région dans laquelle le module de la vitesse transversale dépasse sa valeur aux frontières de l'écoulement. À l'exception du voisinage de la paroi supérieure où l'écoulement inverse se manifeste, le reste du domaine de l'écoulement est caractérisé par le fluide en mouvement dans le sens primordial. Cet écoulement qui se développe dans le sens contraire est d'autant plus accentué que le nombre de Reynolds croît. Il en ressort que pour les mêmes valeurs de R , il y a échange de comportement de l'écoulement du fluide au voisinage des deux parois pour les solutions de types I_1 et I_1' , comme le présente la Figure III.11.

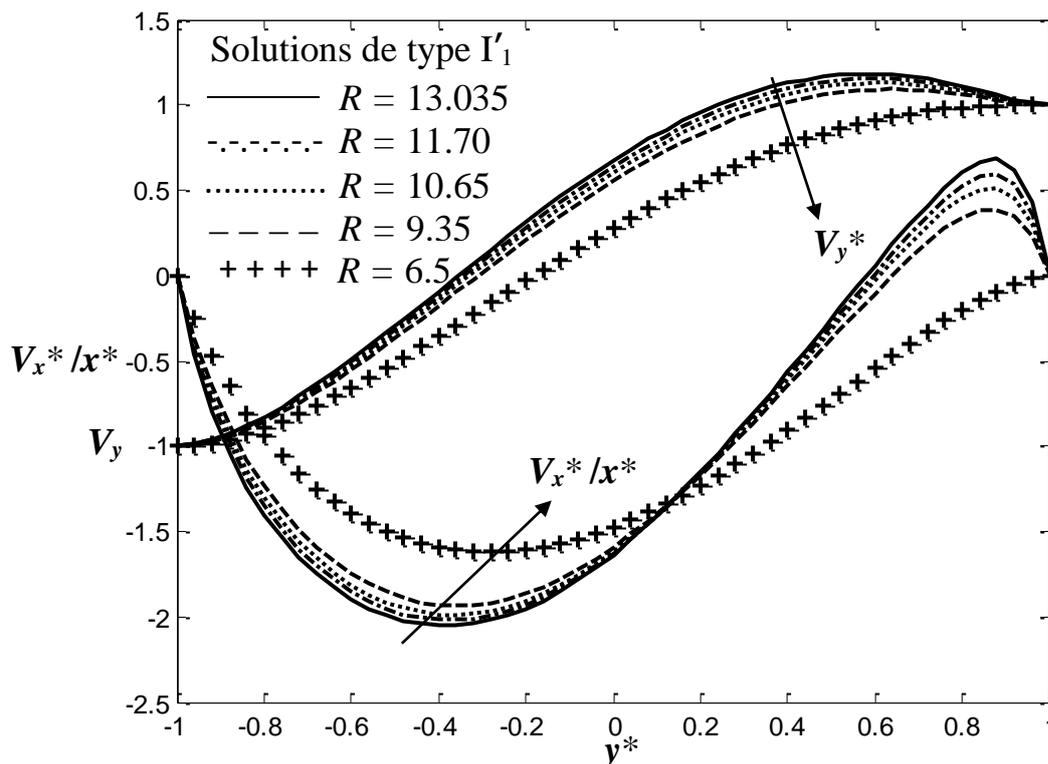


Figure III.11: Profil de vitesse axial et profil de vitesse transversal à travers la branche de type I_1' .

III.3.4 Comparaison entre les solutions de types I_1 et I_1'

Pour comparer le comportement de la vitesse d'écoulement à travers les branches I_1 et I_1' , nous représentons dans la même figure les vitesses axiales par unité de longueur d'une part, et les vitesses transversales d'autre part pour les deux types de solutions. Il est par ailleurs important de relever que les solutions de types I_1 et I_1' sont marquées par l'absence d'une couche limite, mais sont essentiellement le siège de l'écoulement inverse. Ces deux branches sont en compétition à l'intérieur du domaine de l'écoulement, du fait que les vitesses transversale ont des comportements opposés en fonction du nombre de Reynolds, et que la région où l'écoulement inverse se manifeste à travers l'une des branches, cette même région est caractérisée par l'écoulement dans le sens primordial à travers l'autre branche: en hydrodynamique, on dit que les solutions de types I_1 et I_1' sont des images réciproques l'une de l'autre, comme le

présentent la Figure III.12 qui compare les vitesses axiales et la Figure III.13 qui compare les vitesses transversales.

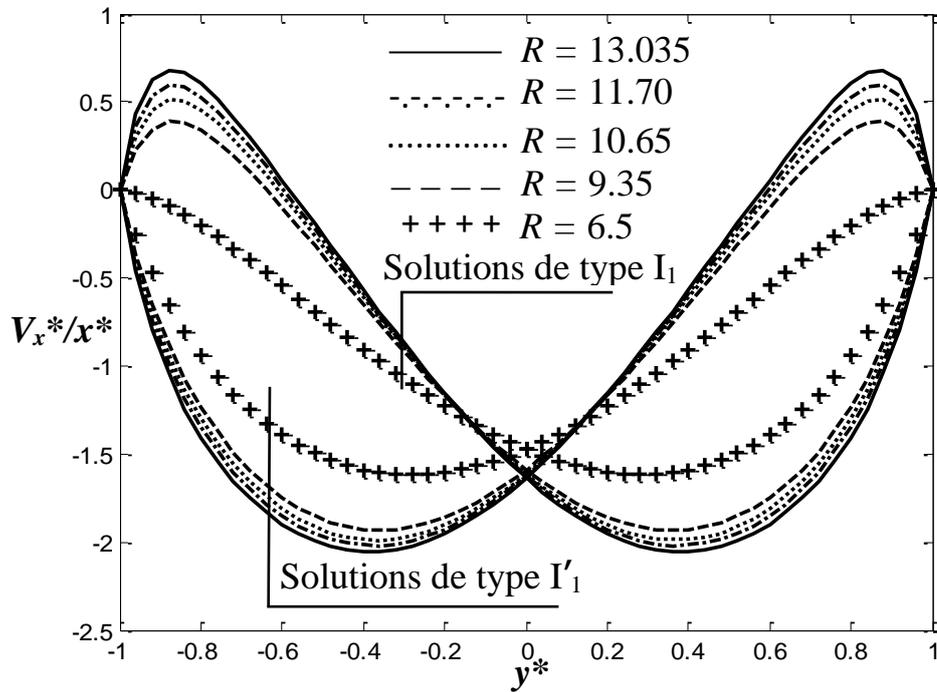


Figure III.12: Comparaison des vitesses axiales des branches I_1 et I'_1 .

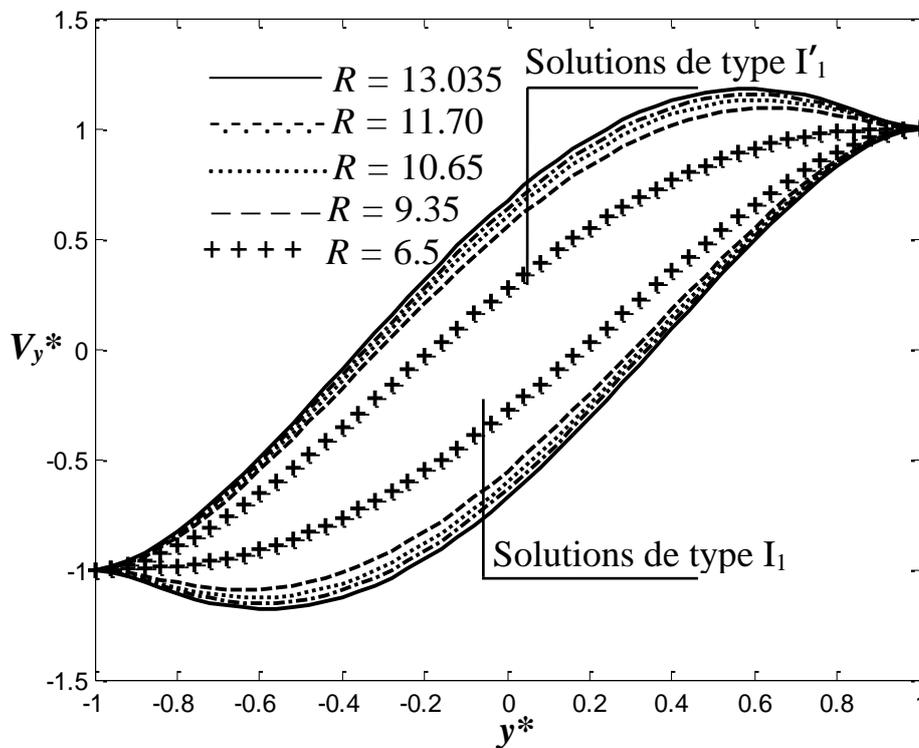


Figure III.13: Comparaison des vitesses transversales des branches I_1 et I'_1 .

III.3.5 Vitesses axiale et transversale suivant la branche II

La vitesse longitudinale et la vitesse normale sont présentées dans la Figure III.14.

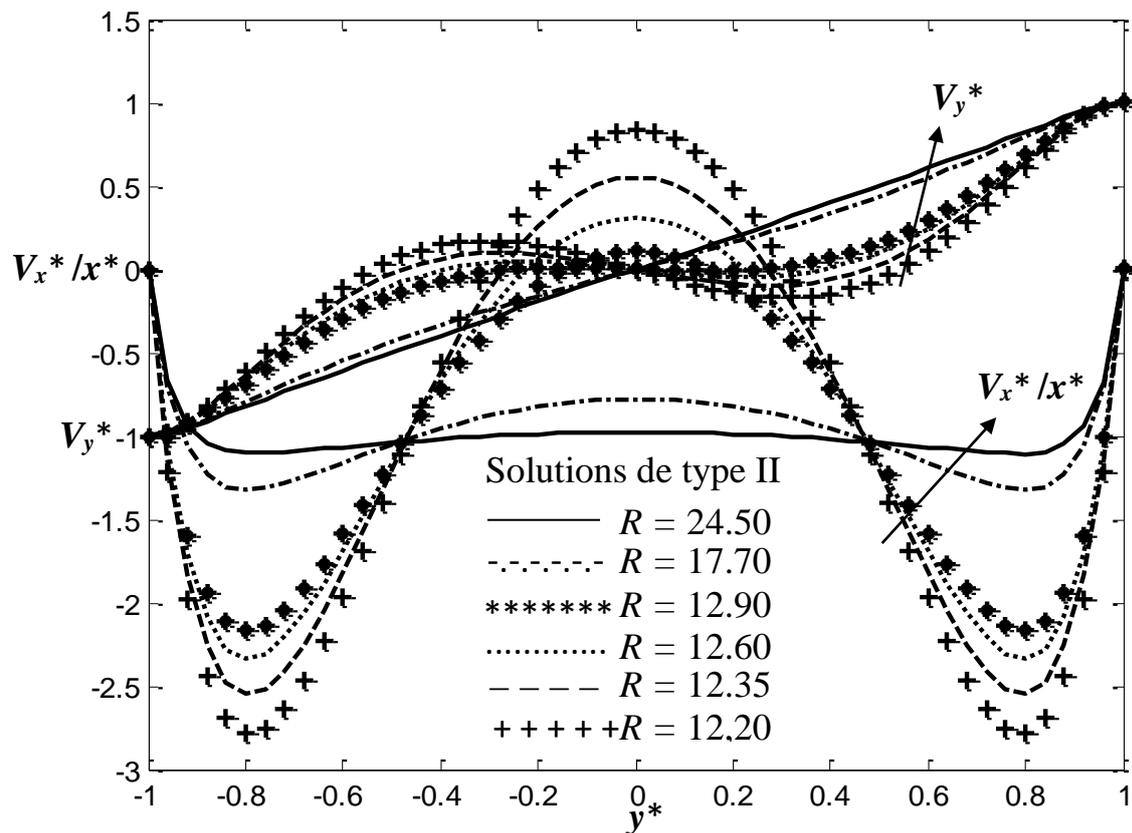


Figure III.14: Profil de vitesse axiale et profil de vitesse transversal à travers la branche de type II.

Les profils de vitesses à travers les branches I et II sont presque semblables, à la seule différence que la branche II présente un écoulement inverse dans la zone médiane du canal. D'après les résultats numériques, cet écoulement inverse se manifeste précisément pour les nombres de Reynolds tels que $12,165 < R < 13,119$. Dans cette région, la vitesse axiale par unité de longueur est positive dans le domaine de l'écoulement. Au-delà de cet intervalle de valeurs du nombre de Reynolds, l'écoulement se développe dans le sens primordial aussi bien au centre que dans le reste de la conduite rectangulaire.

Une couche limite apparaît avec l'augmentation du nombre de Reynolds comme dans le cas des solutions de type I. Cette couche limite se manifeste à travers la vitesse transversale par un profil presque linéaire qui est la conséquence de l'interaction entre les effets d'inertie, les effets de viscosité, et le voisinage de l'écoulement avec les parois solides.

III.3.6 Vitesses axiale et transversale suivant la branche III

La vitesse longitudinale par unité de longueur et la vitesse transversale selon la branche III sont présentées dans la Figure III.15.

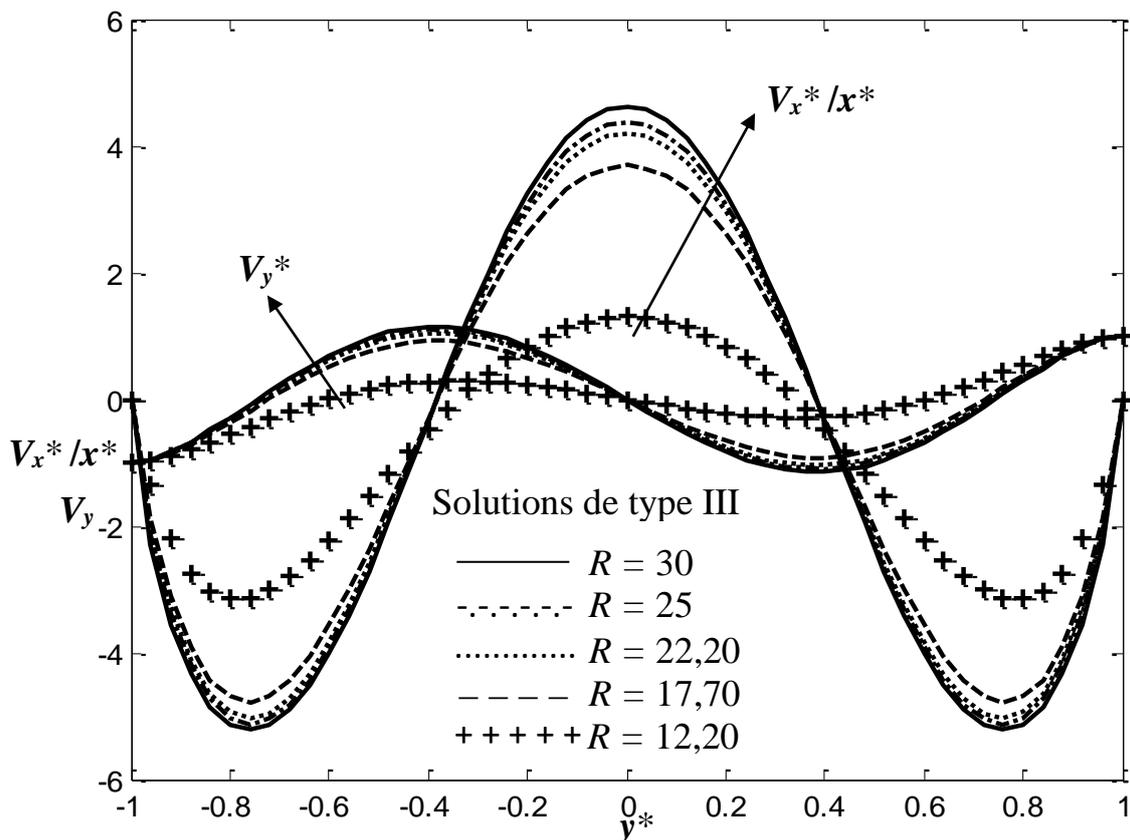


Figure III.15: Profil de vitesse axiale et profil de vitesse transversal à travers la branche de type III.

Les solutions de type III présentent un écoulement inverse au centre du canal et un mouvement du fluide dans le sens primordial pour le reste de la conduite

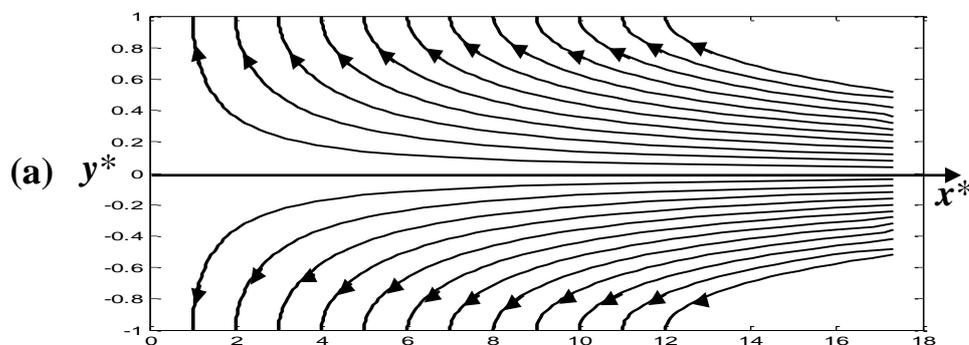
rectangulaire quelque soit le nombre de Reynolds. De plus, on note une absence d'écoulement de type couche limite et un comportement quasi-oscillatoire des composantes de vitesse.

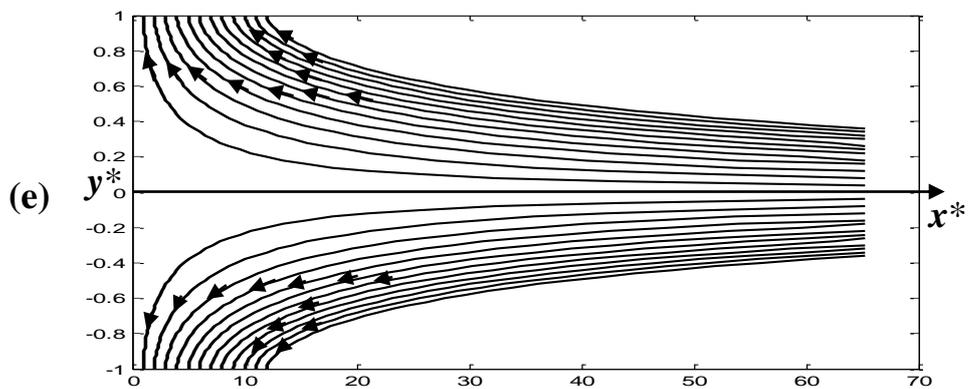
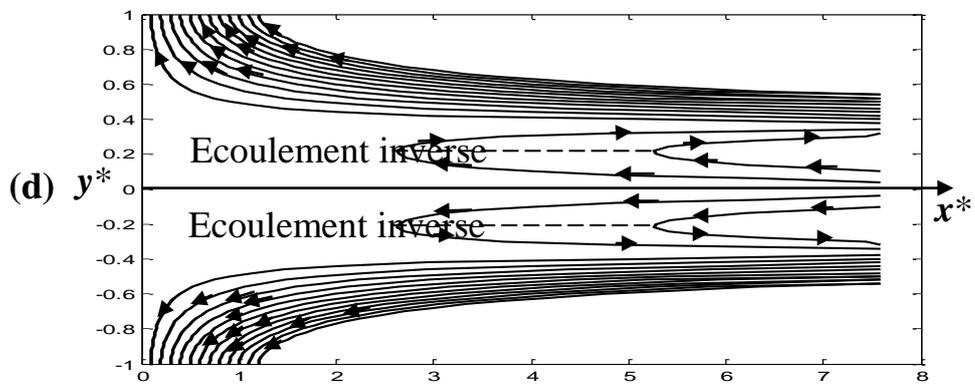
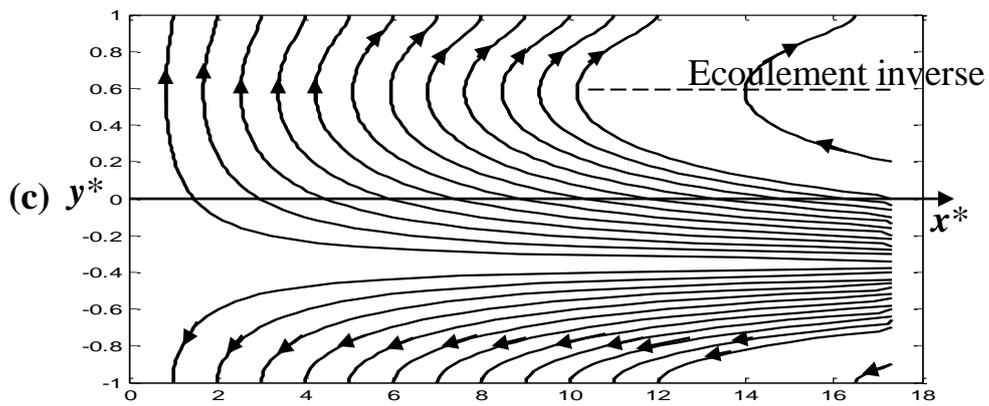
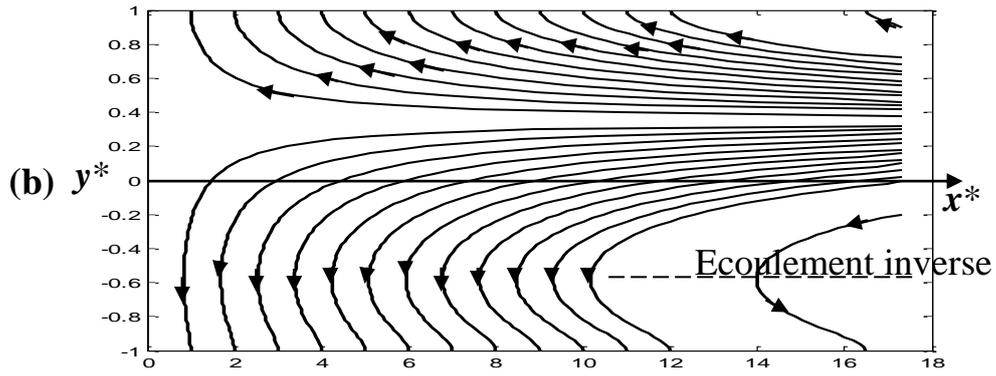
Comme la distribution du fluide dans le domaine de l'écoulement est traduite par l'évolution des composantes de vitesse, il est important de noter que, pour les solutions symétriques de types I, II et III, la masse de fluide est équitablement distribuée de part et d'autre du plan médian du canal, donnant lieu à un écoulement de type "sandwich" [149]. Ce plan médian du canal est dans certaines circonstances appelé frontière ouverte de l'écoulement [149].

III.4 LIGNES DE COURANT DE L'ÉCOULEMENT

Une ligne de courant est une courbe tangente au vecteur vitesse en tout point l'écoulement. Ainsi, dans ce travail, après avoir déterminé l'évolution des composantes de vitesse, pour analyser le comportement du vecteur vitesse, nous procédons à la représentation des lignes de courant. Dans un écoulement bidimensionnel permanent comme c'est le cas dans notre étude, les lignes de courant sont identiques aux trajectoires des particules fluides.

Les lignes de courant de l'écoulement étudié sont représentées dans la Figure III.16.





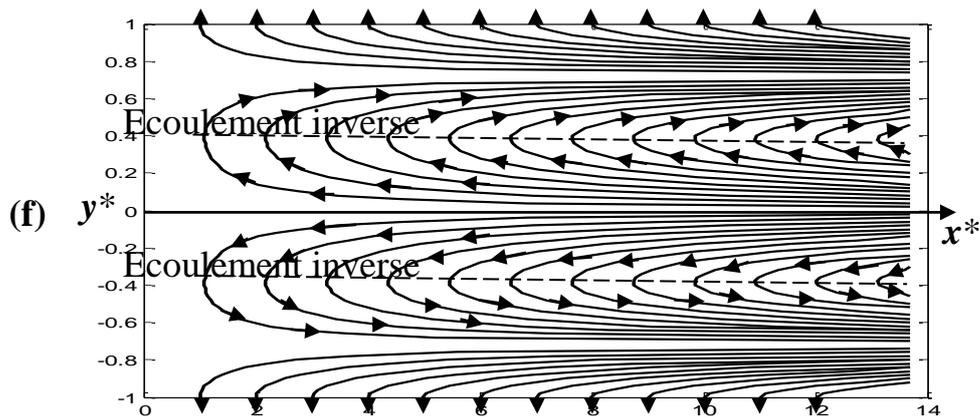


Figure III.16: Lignes de courant se rapportant à (a) la branche I pour $R = 5,175$, (b) la branche I_1 pour $R = 13,035$, (c) la branche I'_1 pour $R = 13,035$, (d) la branche II dans le cas de l'écoulement inverse pour $R = 12,645$, (e) la branche II en l'absence de l'écoulement inverse pour $R = 14,355$, (f) la branche III pour $R = 17,50$.

Le mouvement des particules fluides correspondant à la branche I pour $R = 5,175$ s'effectue dans le sens longitudinal dans la région médiane du canal et dans la direction transversale près des frontières d'après la Figure III.16(a) qui montre que l'ensemble des lignes de courant se rapproche des parois poreuses et s'éloigne du plan médian ($y^* = 0$) de la conduite rectangulaire. Par rapport à la branche I_1 , la courbure des lignes de courant au voisinage de la paroi inférieure ($y^* = -1$) est due au changement de direction du mouvement à cause l'écoulement inverse qui se manifeste dans cette région comme le présente la Figure III.16(b), produite pour $R = 13,035$. Cette courbure des lignes de courant qui est la conséquence du changement de direction dû à la présence de l'écoulement inverse se déplace de la paroi inférieure vers la paroi supérieure en ce qui concerne la branche I'_1 , pour la même valeur de $R = 13,035$. D'après les Figures III.16(b) et III.16(c) les lignes de courant suivant les branches I_1 et I'_1 traduisent une inexistence de l'écoulement de type "sandwich" qui caractérise la branche symétrique de type I. Cet écoulement de type "sandwich" est bien illustré par la Figure III.16(d) qui représente les lignes de courant à travers la branche II en présence d'un écoulement inverse autour du plan médian, car cette

Figure III.16(d) est produite pour $R = 12,645$ appartenant à l'intervalle des valeurs du nombre de Reynolds $12,165 < R < 13,119$ où intervient le mouvement des particules fluides dans la direction opposée au déplacement primordial. Dans la branche II, comme il y a absence de l'écoulement inverse au-delà de l'intervalle $12,165 < R < 13,119$, la Figure III.16(e), obtenue pour $R = 14,355$ présente les lignes de courant de l'écoulement de type "sandwich" uniquement dans le sens primordial. La différence entre les lignes de courant des écoulements symétriques de types I et II est que, l'ensemble des lignes de courant à travers la branche II se rapproche du plan médian et s'éloigne des frontières, contrairement aux solutions de type I. En d'autres termes, cette différence entre les solutions de types I et II est due au fait que la succion est plus importante à travers la branche I.

Comme le mouvement dans le sens inverse de l'écoulement primordial est généralisé autour du plan médian pour les solutions symétriques de type III, toutes les lignes de courant situées au voisinage du milieu du canal sont caractérisées par un changement de direction dans le sens opposé au déplacement initial, comme le montre la Figure III.16(f).

III.5 PROFILS DE TEMPERATURE DANS L'ÉCOULEMENT

L'un des objectifs de ce travail est de déterminer la distribution de température dans le canal. Cette distribution de température est influencée par l'écoulement, alors que la température n'influence pas l'écoulement à cause du couplage partiel entre le transport des quantités de mouvement et le transfert d'énergie dans notre étude. Nous rappelons que le couplage est partiel, car seule l'équation d'énergie a besoin de la solution des équations de Navier-Stokes pour être résolue, alors que la solution des équations de Navier-Stokes n'est influencée par aucun paramètre de l'équation de la chaleur. Nous maintenons la même démarche qui consiste à examiner la variation de la température suivant chaque branche des diagrammes de bifurcations des Figures III.4 et III.5.

III.5.1 Profils de température suivant la branche I

Les profils de température à travers la branche I sont présentés dans la Figure III.17.

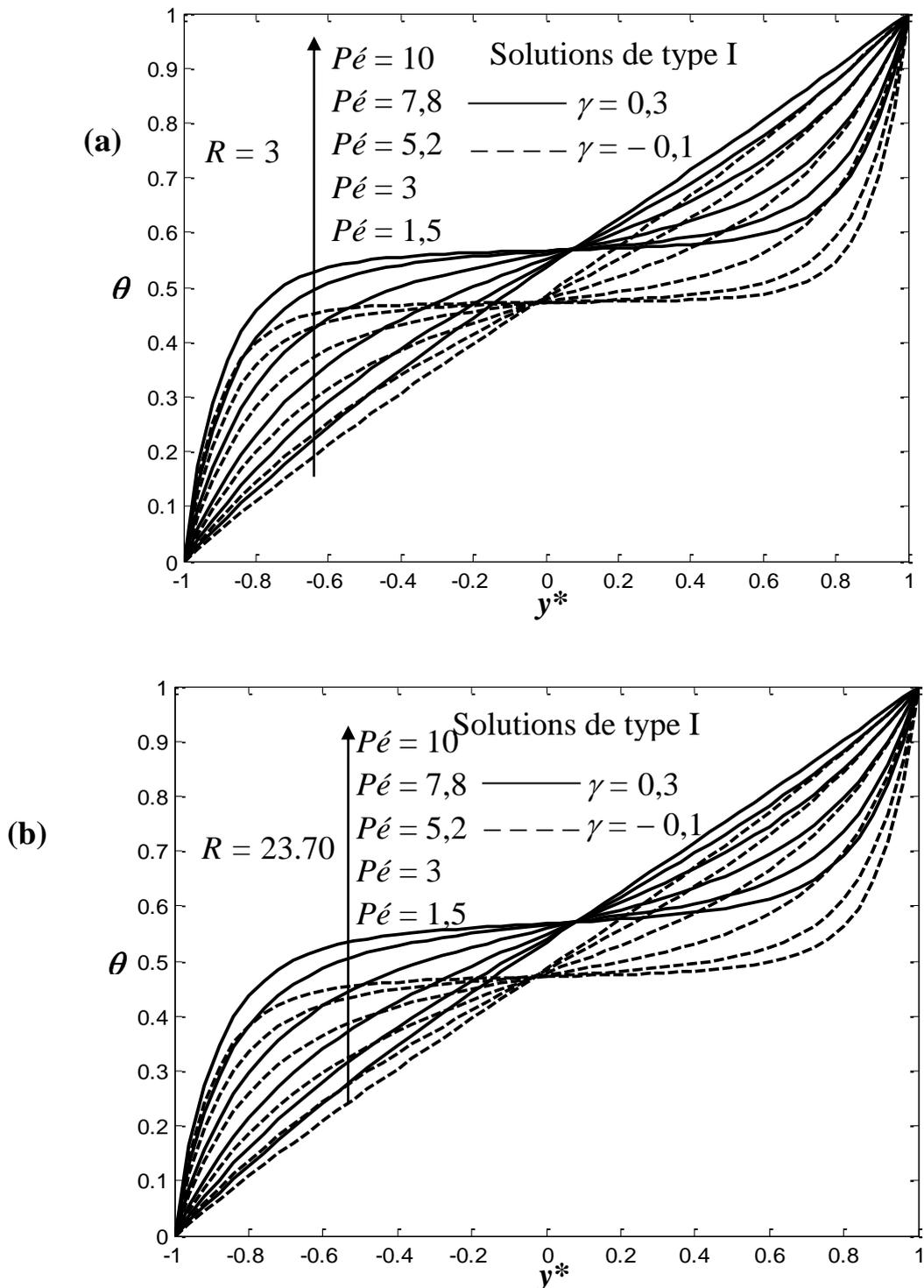


Figure III.17: Profils de température correspondant à la branche I pour (a) $R = 3$, et (b) $R = 23,70$.

La distribution de température, à travers la branche I pour une petite et une grande valeur du nombre de Reynolds R , et pour une valeur positive ainsi qu'une valeur négative du paramètre qui mesure la sensibilité de la conductivité thermique à la variation de la température γ , est présentée dans la Figure III.17. La Figure III.17 montre la présence d'une large zone d'inflexion autour du milieu du domaine de l'écoulement. Cette zone d'inflexion comporte deux concavités. La première concavité, située au voisinage de la paroi froide, est tournée vers le bas; la deuxième concavité, localisée proche de la paroi chaude, est tournée vers le haut: c'est la caractéristique d'une couche limite thermique dans la branche I. Cette couche limite thermique apparaît quand le nombre de Péclet $Pé$ croît au voisinage de 10. Cependant, la décroissance du nombre de Péclet implique un profil linéaire de la température dans le canal, quelque soit le nombre de Reynolds R et quelque soit γ , comme le montrent les Figures III.17(a) et III.17(b). La Figure III.17 montre que la température augmente avec la croissance du paramètre γ , d'une part. D'autre part, la température n'est pas très sensible au nombre de Reynolds par rapport au nombre de Péclet, car pour une petite valeur de $R = 3$ et une grande valeur de $R = 23,70$, la répartition de la température dans le canal est presque la même, elle ne change qu'avec la variation du nombre de Péclet.

Il est important de mettre un accent sur la couche limite thermique, en relevant qu'elle apparaît quand le nombre de Péclet augmente autour de 10, c'est-à-dire quand la conductivité thermique du fluide a tendance à diminuer. Ce qui veut dire que le fluide a tendance à se comporter comme un isolant thermique en présence de la couche limite à cause tout simplement du fait que la température présente un comportement constant autour d'une courbe identique marquée par une large zone d'inflexion au voisinage de $Pé = 10$. En d'autres termes, au-dessus de la valeur $Pé = 10$, aucune autre structure de la température n'est envisagée autre que la couche limite thermique où tous les profils de température convergent vers une même courbe asymptotique pour différentes

valeurs de Pe supérieures à 10. À ce stade, le fluide se comporte comme un isolant thermique, parce que la température révèle un comportement presque identique pour différentes valeurs du nombre de Péclet supérieures à 10 impliquant une diminution de conductivité. Il en ressort que la couche limite est un état thermique critique où plusieurs phénomènes se contrecarrent. En effet, le fluide continue à transférer de la chaleur malgré la diminution de la conductivité thermique, à cause de la différence de température maintenue entre les frontières de l'écoulement et malgré l'augmentation de nombre de Péclet. À partir de la Figure III.17, il apparaît que le nombre de Péclet croissant a tendance à augmenter la température dans l'écoulement. Quand la couche limite apparaît, la croissance de Pe autour de 10 réduit la conductivité du fluide, mais elle est contrecarrée par la différence de température entre la paroi chaude et la paroi froide. Cette différence de température maintient le transfert de chaleur de la frontière chaude vers la frontière froide.

III.5.2 Profils de température suivant la branche I_1

En fixant le nombre de Reynolds et la sensibilité de la conductivité thermique aux variations de température, l'augmentation du nombre de Péclet autour de 10 fait croître la température vers une limite supérieure $\theta = 1$ dans une large région à l'intérieur du canal d'après les Figures III.18 (a) et III.18(b) présentant la température relativement à la branche I_1 . Plus précisément, en faisant croître le nombre de Péclet, l'augmentation de la température dans le domaine de l'écoulement se fait d'abord suivant une loi linéaire sensiblement de la forme $\theta = y^*$, puis vers une asymptote horizontale supérieure donnée par $\theta = 1$. En d'autres termes, la croissance en nombre de Péclet a tendance à faire porter la température des particules fluides à une même limite qui est la température de la paroi chaude. Il en ressort que la branche I_1 assure un meilleur transfert de chaleur dans le domaine de l'écoulement comme l'illustre les Figures III.18(a) et III.18(b).

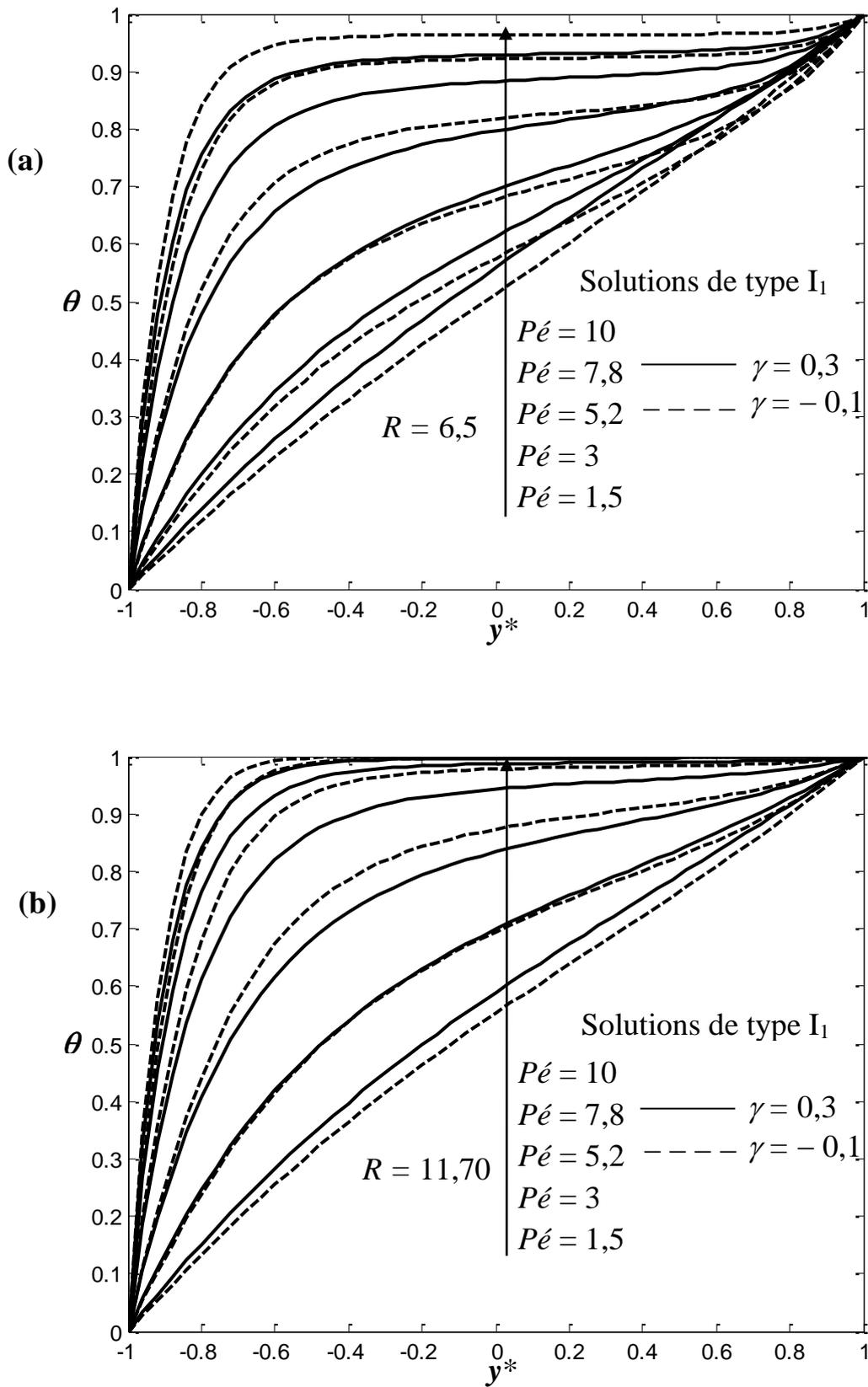
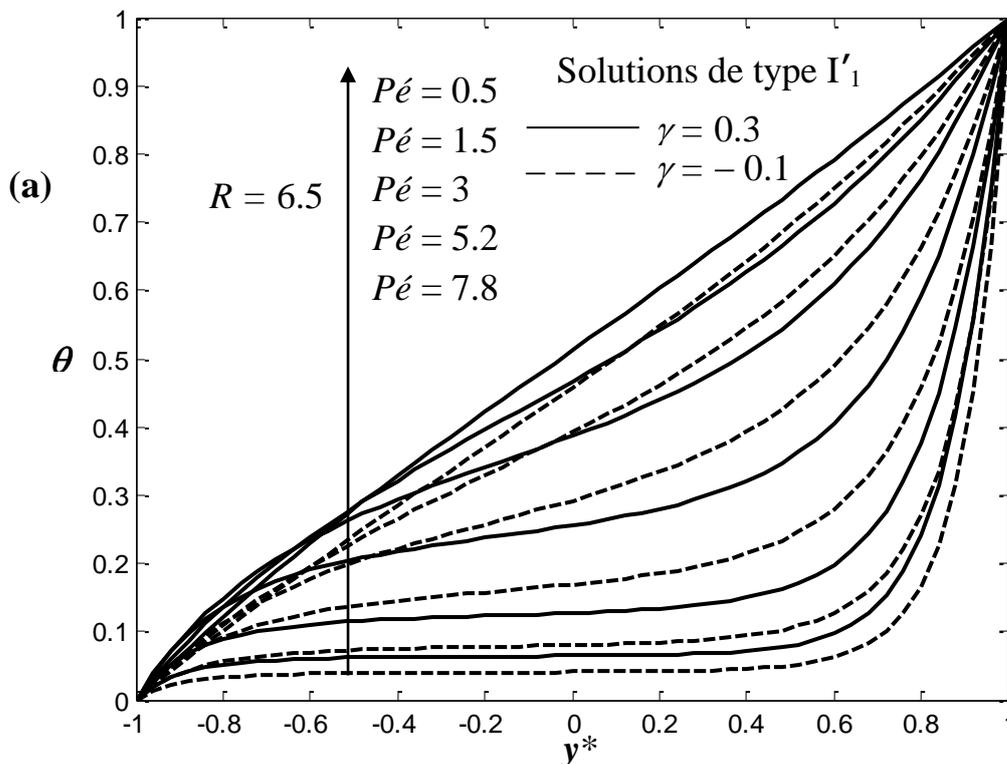


Figure III.18: Profils de température correspondant à la branche I_1 pour (a) $R = 6,5$, et (b) $R = 11,70$.

III.5.3 Profils de température suivant la branche I_1'

En fixant le nombre de Reynolds et la sensibilité de la conductivité thermique aux variations de température, l'augmentation du nombre de Péclet autour de 10 fait décroître la température vers une limite inférieure $\theta = 0$ dans une large région à l'intérieur du canal d'après les Figures III.19 (a) et III.19(b) présentant la température relativement à la branche I_1' . Plus précisément, en faisant croître le nombre de Péclet, la diminution de la température dans le domaine de l'écoulement se fait d'abord suivant une loi linéaire sensiblement de la forme $\theta = y^*$, puis vers une asymptote horizontale inférieure donnée par $\theta = 0$. En d'autres termes, la croissance en nombre de Péclet a tendance à faire porter la température des particules fluides à une même limite qui est la température de la paroi froide. Il en ressort que la branche I_1' n'est un bon conducteur de chaleur dans le domaine de l'écoulement comme l'illustre les Figures III.19(a) et III.19(b).



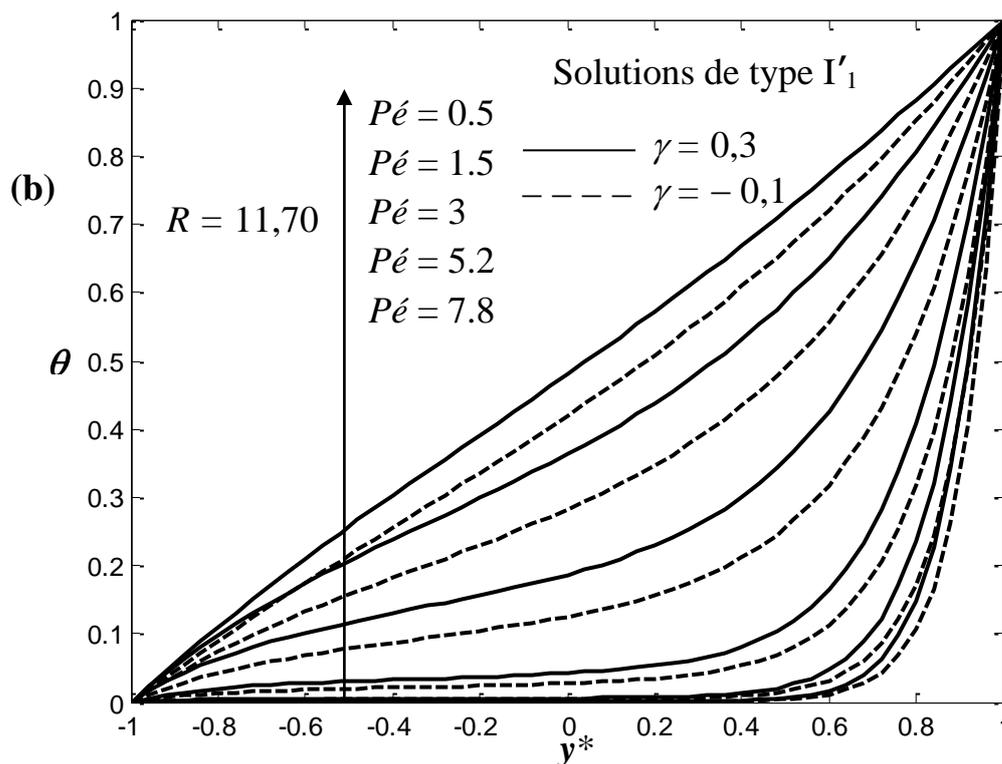


Figure III.19: Profils de température correspondant à la branche I_1' pour (a) $R = 6,5$, et (b) $R = 11,70$.

III.5.4 Comparaison des profils de température des branches I_1 et I_1'

L'interprétation du comportement de la température à travers les branches I_1 et I_1' montre une certaine opposition de comportement, de telle sorte que dans la branche I_1 la température croît avec l'augmentation du nombre de Péclet, alors qu'elle décroît à travers la branche I_1' . De plus, l'augmentation de la température quand le nombre de Péclet augmente dans la branche I_1 présente une limite supérieure qui est la température de la paroi chaude, sous la forme d'une asymptote horizontale d'équation $\theta = 1$. Cependant, à travers la branche I_1' , la diminution de la température avec l'augmentation du nombre de Péclet présente une limite inférieure qui est la température de la paroi froide, sous la forme d'une asymptote horizontale d'équation $\theta = 0$. Il en ressort que, la compétition entre les deux branches I_1 et I_1' mise en évidence dans la distribution de masse du fluide, est aussi mise en exergue s'agissant du transfert

de chaleur comme le montre la Figure III.20. La véritable signification est que, le transport de masse influence fortement le transfert de chaleur, compte tenu du fait que les structures hydrodynamiques qui se révèlent au niveau de l'écoulement sont les mêmes au niveau de la distribution d'énergie suivant les différentes branches du diagramme de bifurcations. À ce stade, il est important d'ajouter que la branche de solution de type I où la couche limite de l'écoulement se manifeste quand le nombre de Reynolds augmente, est aussi celle suivant laquelle la couche limite thermique se développe avec la croissance du nombre de Péclet.

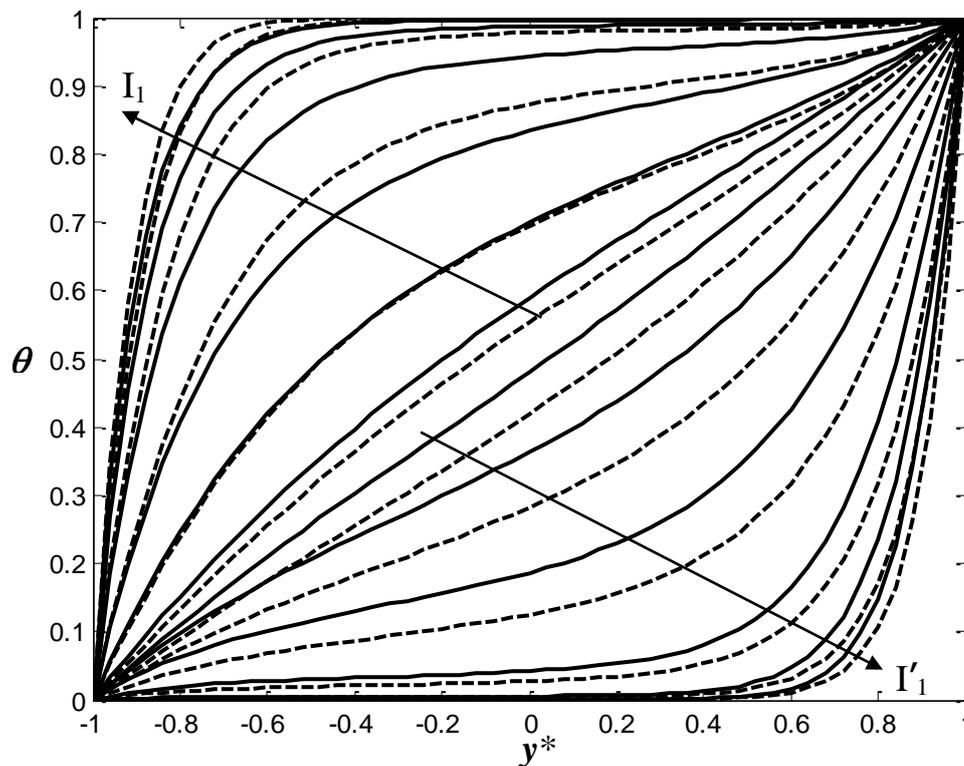


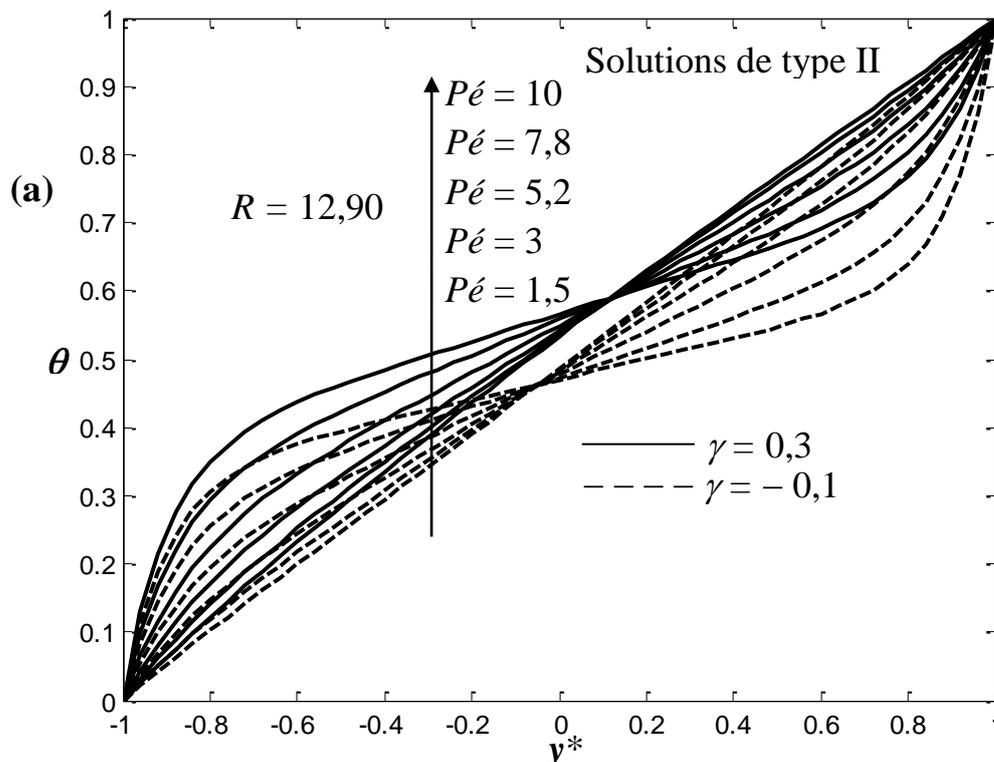
Figure III.20 : Comparaison des profils de température des branches I_1 et I_1' pour $R = 11,70$ sous différents nombres de Péclet ($Pé = 0,5, 1,5, 3, 5,2, 7,8, 10$) d'après les Figures 18(b) et 19(b), pour $\gamma = 0,3$ (ligne continue) et $\gamma = -0,1$ (ligne interrompue).

En d'autres termes, la Figure III.20 illustre le fait que la croissance en nombre de Péclet fait tendre la température des particules fluide vers celle de la paroi chaude suivant la branche I_1 , alors que cette même croissance de $Pé$ fait

tendre la température du fluide vers celle de la paroi froide. C'est ce qui traduit la compétition entre les deux branches.

III.5.5 Profils de température suivant la branche II

La distribution de température à travers les branches I et II sont semblables, à la seule différence que la variation de la température dans la branche II est plus sensible au nombre de Reynolds, à cause du fait que pour les solutions de types II, la zone d'inflexion est plus étalée, plus large et horizontale avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Cependant, s'agissant des solutions de type I, les profils de température présentent la même allure pour les petits et les grands nombres de Reynolds. La similitude des solutions de types I et II est la manifestation de la couche limite thermique causée par l'augmentation du nombre de Péclet. Cette couche limite est plus accentuée à travers la branche II pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds, comme le montre la Figure III.21.



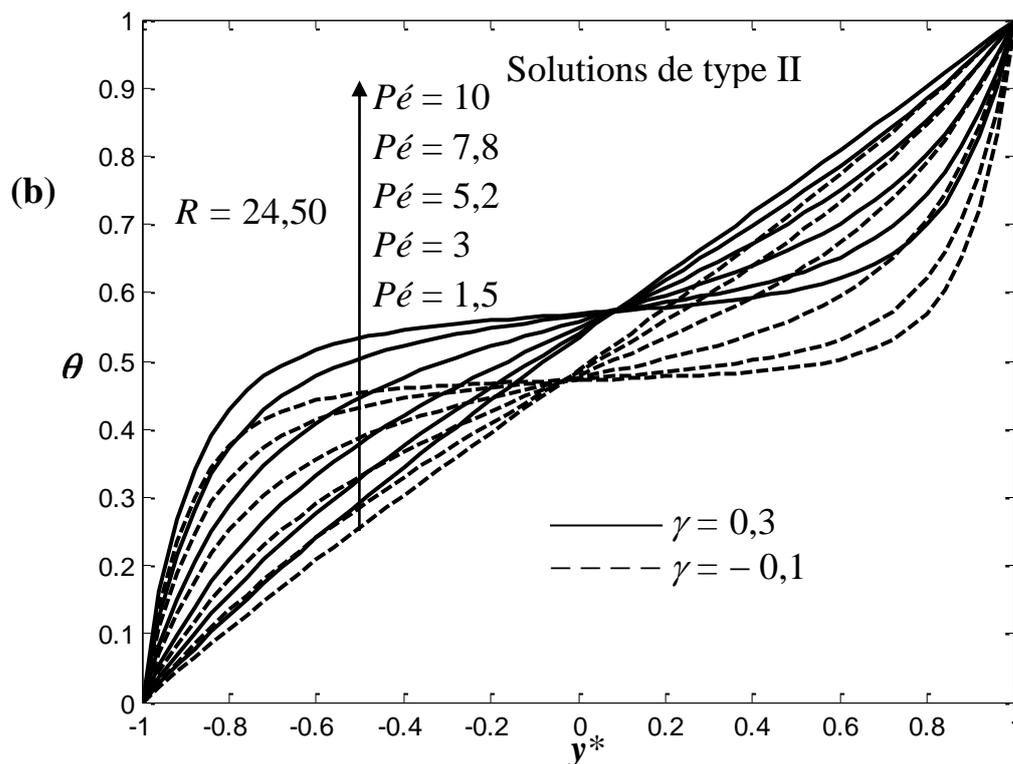


Figure III.21: Profils de température correspondant à la branche II pour (a) $R = 12,90$, et (b) $R = 24,50$.

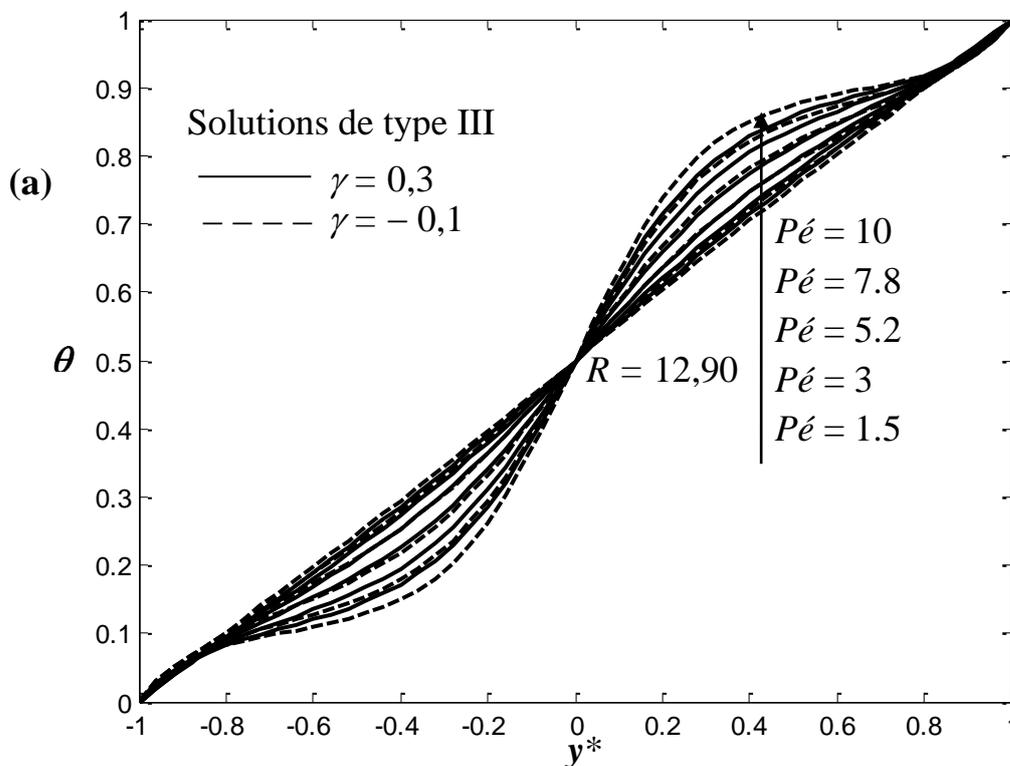
Comme la couche limite thermique est accentuée avec la croissance de R , ceci implique que l'augmentation du nombre de Reynolds produit les mêmes effets que la croissance du nombre de Péclet sur la variation de la température à travers la branche II. Il est convenable de préciser que la petitesse ou la grandeur du nombre de Reynolds dépend de la branche de solution considérée. En effet, le nombre de Reynolds égal à 12,165 est petit pour les solutions de types II et III, alors qu'il est grand pour les solutions de types I, I_1 et I_1' , parce que les branches II et III n'existent pour $R < 12,165$. Par ailleurs, le nombre de Reynolds égal à 6,001 est petit pour les solutions de types I_1 et I_1' , alors qu'il est grand pour les solutions de type I, parce que les branches I_1 et I_1' n'existent pas pour $R < 6,001$.

Une fois de plus, c'est l'occasion de signaler que les structures hydrodynamiques trouvées influencent fortement le transfert d'énergie dans le canal; étant donné que la couche limite de l'écoulement est révélée à travers les

branches I et II où se développe aussi la couche limite thermique. Par ailleurs, le comportement semblable des branches I et II en termes de composantes de vitesse, se révèle aussi dans le transfert de chaleur pour différentes valeurs des paramètres de contrôle du problème.

III.5.6 Profils de température correspondant à la branche III

Les profils de température relatifs à la branche III présentent une absence de la couche limite thermique et une différence de forme au niveau des frontières du domaine de l'écoulement avec l'augmentation du nombre de Reynolds. Plus précisément, relativement à la branche III, lorsque le nombre de Reynolds est petit, l'ensemble des courbes de température forme une pointe au voisinage chaque paroi poreuse. Cette longue pointe de température disparaît quand le nombre de Reynolds augmente. Il en ressort que, pour les petites valeurs de R , les conditions aux limites thermiques sont satisfaites légèrement avant les frontières de l'écoulement comme l'illustre la Figure III.22.



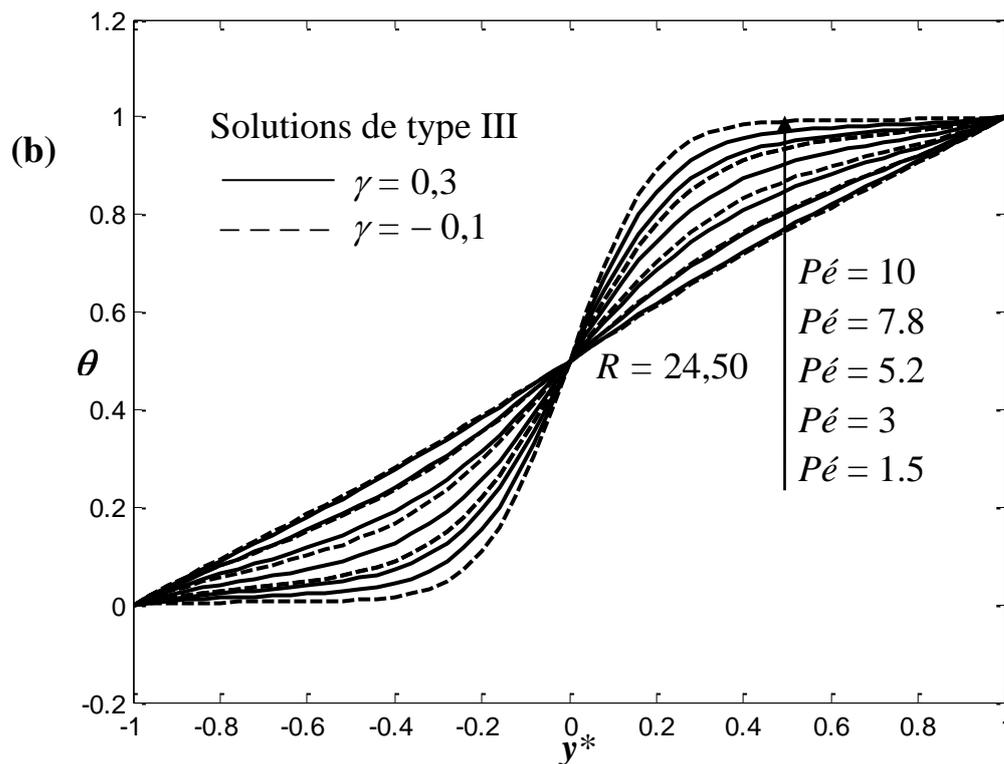


Figure III.22: Profils de température correspondant à la branche III pour (a) $R = 12,90$, et (b) $R = 24,50$.

Les profils de température des Figures III.22(a) et III.22(b) diffèrent par le fait que, pendant que les conditions aux limites semblent satisfaites avant les frontières à cause de la petite valeur de R correspondant à la branche III dans la Figure III.22(a), dans la Figure III.22(b) ces conditions aux limites sont vérifiées aux frontières à cause de l'augmentation du nombre de Reynolds.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la solution analytique du problème correspondant aux faibles nombres de Reynolds et de Péclet. Cette solution analytique a été utilisée pour valider le code numérique de calcul basé sur la méthode de Tir utilisée pour résoudre le problème correspondant aux valeurs non nulles et modérées des nombres de contrôle. La discussion des résultats concernait l'influence de l'écoulement sur le transfert de chaleur et celle des

paramètres de contrôle du problème sur la distribution de la masse de fluide et de l'énergie dans le domaine de l'écoulement suivant chaque branche des diagrammes de bifurcations que nous avons réussi à mettre en évidence dans la détermination du coefficient pariétal de frottement du fluide sur les parois poreuses du canal.

CONCLUSION GENERALE

Dans un système de coordonnées cartésiennes, les équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie sont utilisées pour étudier les structures hydrodynamiques et le transfert de chaleur entre deux parois rectangulaires parallèles, uniformément poreuses et maintenues à des températures différentes.

Compte tenu de l'incompressibilité du fluide en mouvement et de l'utilisation de la méthode des solutions semblables, le problème décrit par quatre équations aux dérivées partielles et vérifié par deux composantes de vitesse et la pression, ainsi que la température a été transformé pour être décrit par deux équations différentielles ordinaires non linéaires et couplées. Ces équations différentielles contiennent trois paramètres de contrôles, notamment le nombre de Reynolds R , le nombre de Péclet $Pé$, et un autre paramètre qui exprime la mesure de la sensibilité de la conductivité thermique aux variations de température γ , mis en évidence dans le processus d'adimensionnalisation des équations du problème.

La solution analytique trouvée pour les faibles valeurs des nombres de Reynolds et de Péclet impliquant des équations différentielles linéaires, permet de tester la validité de la méthode de Tir à convergence rapide associée à l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre appliquée pour obtenir les résultats numériques correspondant aux équations différentielles non linéaires en raison des grandes valeurs de R et de $Pé$. L'attention est concentrée sur l'analyse des comportements des composantes de vitesse et de la température, ainsi que les lignes de courant à travers cinq branches de solutions de types I, I_1 , I_1' , II et III issues d'un diagramme de bifurcations que nous avons réussi à générer. Nous avons réussi à mettre en évidence trois types de bifurcations, notamment une bifurcation fourche au voisinage du nombre critique de Reynolds $R = R_p = 6.001$, une bifurcation selle-nœud pour $R = R_s = 12.165$, et une bifurcation cuspidale qui traduit la rencontre suivant une même courbe des solutions de type I et II quand le nombre de Reynolds prend les grandes valeurs. Le diagramme de bifurcations représente les valeurs du coefficient pariétal de frottement en

fonction du nombre de Reynolds. De l'analyse de la dynamique du fluide et du transfert de chaleur à travers les branches de solutions de types I, I_1 , I_1' , II et III il ressort que les solutions de types I et II présentent une couche limite de l'écoulement quand le nombre de Reynolds croît. Le développement de la couche limite dynamique est identifié par un profil presque rectangulaire de la composante axiale de vitesse par unité de longueur du canal. Cette couche limite se manifeste par un profil presque linéaire de la composante transversale de vitesse. En l'absence de la couche limite à travers la branche I, la vitesse axiale présente un profil parabolique qui traduit un écoulement dans le sens primordial. La dynamique du fluide à travers la branche II présente un écoulement dans le sens inverse du mouvement primordial du fluide au milieu du canal quand le nombre de Reynolds est dans l'intervalle $12.165 < R < 13.119$. Par ailleurs, une couche limite thermique se développe pour les solutions de types I et II avec l'augmentation du nombre de Péclet autour de la valeur 10. Les branches I_1 et I_1' sont images l'une de l'autre, d'une part à cause du fait que, dans la distribution de masse de fluide, lorsque l'écoulement inverse se manifeste proche de la paroi inférieure à travers la branche I_1 , cet écoulement inverse se développe plutôt près de la paroi supérieure en ce qui concerne la dynamique du fluide à travers la branche I_1' . Au niveau des lignes de courant que nous avons réussi à représenter, l'écoulement inverse se distingue par la courbure des lignes de courant traduisant le changement de direction de l'écoulement. Plus précisément, l'écoulement inverse se manifeste quand les particules fluides changent de sens de mouvement en se déplaçant dans le sens contraire du sens primordial de l'écoulement. D'autre part, dans la répartition de la chaleur à l'intérieur du canal, quand le nombre de Péclet croît autour de la valeur 10, la température présente une limite asymptotique supérieure correspondant à la branche I_1 , alors que la branche I_1' présente une limite asymptotique inférieure.

L'écoulement à travers la branche III est contraire au sens primordial du mouvement dans la région médiane de la conduite rectangulaire quelque soit

le nombre de Reynolds. Ce comportement implique un profil presque oscillatoire des vitesses longitudinale et normale à l'intérieur du domaine de l'écoulement. Par ailleurs, la distribution de la chaleur à travers les solutions de type III est caractérisée par les pointes de température aux deux frontières du canal, à cause du fait les profils de température pour différentes valeurs des paramètres de contrôle satisfont aux conditions aux limites avant les frontières pour les petits nombres de Reynolds relativement à la branche III.

En définitive, notre étude révèle une grande influence de l'écoulement sur le transfert d'énergie, à cause du fait que toutes les structures hydrodynamiques mise en évidence au niveau de l'écoulement étudié, ont été aussi révélées dans l'analyse du transfert de chaleur.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R.K. Bhatnagar, Fluctuating flow of a viscoelastic fluid in a porous channel, *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, pp. 21–25, (1979).
- [2] H.N. Chang, J.S. Ha, J.K. Park, I.H. Kim, H.D. Shin, Velocity field of pulsatile flow in a porous tube, *Journal of Biomechanics*, Vol. 22, pp. 1257–1262, (1989).
- [3] C.F.J. Dewey, S.R. Bussolari, M.A.J. Gimbrone, P.F. Davis, The dynamic response of vascular endothelial cells to fluid shear stress, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 103, p. 177, (1981).
- [4] J.M. Drazen, R.D. Kamm, A.S. Slutsky, High frequency ventilation, *Physiological Reviews*, Vol. 64, pp. 505–543, (1984).
- [5] Y.C.Fung, C.S. Yih, Peristaltic transport, *Journal of Applied Mechanics* Vol. 35, 669–675, (1968).
- [6] M.Y. Jaffrin, A.H. Shapiro, Peristaltic pumping, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 3, pp. 13–36, (1971).
- [7] R.T. Jones, Blood flow, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 1, pp. 223–244, (1969).
- [8] J.R. Womersley, Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known, *Journal of Physiology*, Vol. 127, pp. 553–563, (1955).
- [9] M.J. Levesque, E.A. Sprague, C.J. Schwartz, R.M. Nerem, The influence of shear stress on cultured vascular endothelial cells: the stress response of an anchorage-dependent mammalian cell, *Biotechnical Progress*, Vol. 5, pp. 1–8, (1989).
- [10] M.J. Lighthill, Physiological fluid dynamics: a survey, *Journal of Fluid Mechanics A*, Vol. 52, pp. 475–497, (1972).
- [11] R.M. Nerem, M.J. Levesque, Hemodynamics and the arterial wall, *Vascular Diseases*, pp. 295–317, (1987).
- [12] C.Y. Wang, Pulsatile flow in a porous channel, *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38, pp. 553–555, (1971).
- [13] E.A. Sprague, B.L. Steinbach, R.M. Nerem, C.J. Schwartz, Influence of a laminar steady state fluid-imposed wall shear stress on the binding internalization, and degradation of low density lipoproteins by cultured arterial endothelium, *Circulation*, Vol. 76, pp. 648–656, (1987).
- [14] J.A. Whitehead, K.R. Helfrich, Instability of flow with temperature-

- dependent viscosity: a model of magma dynamics, *Journal of Geophysical Research*, Vol. 96, pp. 4145-4155, (1991).
- [15] P.M. Bruce, H. E. Huppert, Thermal control of basaltic fissure eruptions, *Nature*, Vol. 4, pp. 665-667, (1989).
- [16] T. V. Davies, E. M. James, *Nonlinear Differential Equations*, Addison-Wesley, (1966).
- [17] J. Lin, G. M. Purdy, H. Schouten, J. C. Sempere, C. Zervas, Evidence from gravity data for focused magmatic accretion along the Mid-Atlantic Ridge, *Nature*, Vol. 344, pp. 627-632, (1990).
- [18] R. P. Lowell, Thermoelasticity and the formation of black smokers, *Geophysics Research Letters*, Vol. 17, pp. 709-712, (1990).
- [19] P. Ortoleva, J. Chadam, E. Merino, A. Sen, Geochemical self-organization II. The reactive-infiltration instability, *American Journal of Science*, Vol.87, pp. 1008-1040, (1987).
- [20] J.J. Wylie, J. R. Lister, The effect of temperature dependent viscosity on flow in a cooled channel with application to basaltic fissure eruption, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 305, pp. 239-261, (1995).
- [21] Pharoah, J. G., Djlali, N. and Vickers, G.W., Fluid Mechanics and Mass Transport in Centrifugal Membrane Separation, *Journal of Membrane Science*, 2000, 176(2), pp. 277–289.
- [22] Subramani, A., Kim, S., & Hoek, E. M, Pressure, flow, and concentration profiles in open and spacer-filled membrane channels. *Journal of Membrane Science*, vol.277(1), pp. 7-17. (2006)
- [23] Belfort, G, Fluid mechanics in membrane filtration: recent developments. *Journal of Membrane science*, vol.40(2), pp.123-147, (1989).
- [24] Kotzev T, Numerical study of the fluid dynamics and mass transfer of an ultrafiltration performance in a tube membrane module. *International journal of engineering science*, vol.32(2), 359-368, (1994).
- [25] H. Xu, I. Pop, Fully developed mixed convection flow in a horizontal channel filled by a nanofluid containing both nanoparticles and gyrotactic microorganisms, *Eur. J. Mech. B/Fluids* 46 (2014) 37–45.
- [26] Kiran Kumari and Mamta Goyal, Heat and Mass Transfer Flow of MHD Viscous Dissipative Fluid in a Channel with a Stretching and Porous Plate, *Appl. Math. Inf. Sci. Lett.* Vol.5, No. 3, pp 81-87, (2017)

- [27] E.P. Valueva, M.S. Purdin, heat exchange at laminar flow in rectangular channels, *Thermophysics and Aeromechanics*, Vol. 23, pp.857-867, (2016).
- [28] Damien Anthony Harwin, Flow in porous channels, Ph.D. thesis University of Bath, (2007)
- [29] Casilas, G., G.Avalon and JP . Pineau, spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls. *Phys. Fluid*, Vol. 10 pp. 2558-2568, (1998)
- [30] Deka, R.K and H.S Takhar, Hydrodynamic stability of viscous flow between curved porous channel with radial flow. *Int. J. Eng. Sci*, Vol 42 pp. 953-956, (2004)
- [31] Terrill, R. M. & Thomas, P. W, On laminar flow through a uniformly porous pipe, *Appl. Sci. Res.* Vol. 21, pp. 37–67, (1969).
- [32] Terrill, R. M. and Shrestha, G. M., Laminar Flow through Parallel and Uniformly Porous Walls of Different Permeability, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 16(4), 470–482, (1965).
- [33] S. W. Yuan, Further investigation of laminar flow in channels with porous walls, *Journal of Applied Physics*, Vol. 27, pp. 267-269, (1956).
- [34] R. M. Terrill, Laminar flow in a uniformly porous channel with large injection, *Aeronautic Quarterly*, Vol. 16, pp. 323-332, (1965).
- [35] J. Griffond, G. Casalis, On the nonparallel stability of the injection induced two-dimensional Taylor flow, *Physics of Fluids*, Vol. 13, pp. 1635-1644, (2001).
- [36] R. M. Terrill, Laminar flow in a uniformly porous channel, *Aeronautic Quarterly*, Vol. 15, pp. 299-310, (1964).
- [37] I. Proudman, An example of steady laminar flow at large Reynolds number, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 9, pp. 593-612, (1960).
- [38] H. Ockendon, J. R.Ockendon, Variable-viscosity flows in heated and cooled channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 83, pp. 177-190, (1977).
- [39] B. C. Sakiadis, Boundary layer behavior on continuous solid surface, *AIChE Journal*, Vol. 7, pp. 26-28, (1961).

- [40] S. Liao, A new branch of solutions of boundary-layer flows over an impermeable stretched plate, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 48, pp. 2529-2539, (2005).
- [41] K. GEMBA, Measurement of boundary layer on a flat plate, California, USA, (2007).
- [42] BRADSHAW, P. Mixing-length velocity profile in boundary layers with transpiration. *AIAA Journal*, vol. 5, pp.1674-1675, (1967).
- [43] SIMPSON, R.L., MOFFAT, R.J. et KAYS, W.M. The turbulent boundary layer on a porous plate: experimental skin friction with variable blowing and suction. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 12, n°7, pp. 771-789, (1969).
- [44] E. B. B. Watson, W. H. H. Banks, M. B. Zaturka, P. G. Drazin, On transition to chaos in two-dimensional channel flow symmetrically driven by accelerating walls, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 212, pp. 451-485, (1990).
- [45] P. Watson, W. H. H. Banks, M. B. Zaturka, P. G. Drazin, Laminar channel flow driven by accelerating walls, *European Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2, pp. 359-385, (1991).
- [46] E. Magyari, B. Keller, Exact solutions for self-similar boundary-layer flows induced by permeable stretching walls, *European Journal of Mechanics B-Fluids*, Vol. 19, pp. 109-122, (2000).
- [47] J. C. Williams, T. H. Rhyne, Boundary layer development on a wedge impulsively set into motion, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 38, pp. 215-224, (1980).
- [48] I. Pop, T. Y. Na, Unsteady flow past a stretching sheet, *Mechanics Research Communications*, Vol. 23, pp. 413-422, (1996).
- [49] C. Y. Wang, G. Du, M. Miklavcic, C. C. Chang, Impulsive stretching of a surface in a viscous fluid, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 57, pp. 1-14, (1997).
- [50] N. Nazar, N. Amin, I. Pop, Unsteady boundary layer flow due to stretching surface in a rotating fluid, *Mechanics Research Communications*, Vol. 31, pp. 121-128, (2004).
- [51] S. Dinarvand, M.M. Rashidi, A reliable treatment of a homotopy analysis method for two- dimensional viscous flow in a rectangular domain bounded by two moving porous walls, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 11, pp. 1502-1512, (2010).

- [52] C. B. Watkins, Heat transfer in the boundary layer over an impulsively started flat plate, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 97, pp. 482-484, (1975).
- [53] J. Majdalani, The boundary layer structure in cylindrical rocket motors, *AIAA Journal*, Vol. 37, pp. 505-508, (1999).
- [54] C. Zhou J. Majdalani, Improved mean-flow solution for slab rocket motors with regressing walls, *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 18, pp. 703-711, (2002).
- [55] M. Goto, S. Uchida, Unsteady flows in a semi-infinite expanding pipe with injection through wall, *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 33, pp. 14-27, (1990).
- [56] C.E. Dauenhauer, J. Majdalani, Exact self-similarity solution of the Navier-Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls, *Physics of Fluids*, Vol. 15, pp. 1485-1495, (2003).
- [57] Majdalani, J. and Zhou, C., Moderate-to-large Injection and Suction Driven Channel Flows with Expanding and Contracting Walls, *ZAMM*, vol.83(3), pp. 181–196, (2003).
- [58] Gbeminiyi Sobamowo, On the Analysis of Laminar Flow of Viscous Fluid through a Porous Channel with Suction/Injection at Slowly Expanding or Contracting Walls, *Jcamech*, Vol. 48, No. 2, pp 319-330 (2017).
- [59] G. Sobamowo, O. A. Adeleye, J. D. Femi-Oyetero, Unsteady Two-dimensional Flow Analysis of Nanofluid through a Porous Channel with Expanding or Contracting Walls using Adomian Decomposition Method, *Journal of Engineering Research*, Vol22, No 2, (2018)
- [60] B. Li, L. Zheng, X. Zhang, L. Ma, The multiple solutions of laminar flow in a uniformly porous channel with suction/injection, *Advance Studies in Theoretical Physics*, Vol. 2, pp. 473-478, (2008).
- [61] C. Lu, On the asymptotic solution of laminar channel flow with large suction, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 28, pp. 1113-1134, (1997).
- [62] M. L. Martins-Costa, R. M. Saldanha Da Gama, S. Frey, Modeling of a generalized Newtonian flow through channels with permeable walls, *Mechanics Research Communication*, Vol. 27, pp. 707-712, (2000).
- [63] S. M. Cox, Two-dimensional flow of a viscous fluid in a channel with porous walls, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 27, pp. 1-33, (1991).

- [64] O.D. Makinde, Thermal analysis of a reactive generalized Couette flow of power law fluids between concentric cylindrical pipes, *European Physical Journal Plus*, Vol. 129, pp. 1-9, (2014).
- [65] W. H. H. Banks, M. B. Zatorska, On flow through a porous annular pipe, *Physics of Fluids A*, Vol. 4, pp. 1131-1141, (1992).
- [66] A.S. Berman, Laminar flow in channels with porous walls, *Journal of Applied Physics*, Vol. 24, pp. 1232-1235, (1953).
- [67] P. Schäfer, H. Herwig, Stability of plane poiseuille flow with temperature dependent viscosity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 36, pp. 2441-2448, (1993).
- [68] Raithby, G., Laminar heat transfer in the thermal entrance region of circular tubes and two-dimensional rectangular ducts with wall suction and injection, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 14, pp. 223-243, (1971).
- [69] N. Phan-Thien, R. Zheng, Viscoelastic flow in a curved channel: a similarity solution for the Oldroyd-B fluid, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, Vol. 41, pp. 766–781, (1990).
- [70] M. Jahanmiri, Active Flow Control, Department of Applied Mechanics, University of technology Printed at Chalmers Repro-service Goteborg, Sweden, (2010).
- [71] R. Radespie et al, Active flow control for high lift with steady blowing, *The Aeronautical Journal January, Germany*, (2016).
- [72] M. Goodarzi et al, Investigation of Active Flow Control over NACA0015 Airfoil via Blowing, *International Journal of Aerospace Sciences, Iran*, (2012).
- [73] T. Cebeci and J. Cousteix, Modeling and computation of boundary-layer Springer edition, USA, 2005.
- [74] T. Cebeci and J. Cousteix, Heat transfer of boundary-layer flows, *Springer edition*, USA, 2005.
- [75] S. Geng and U. Kaynak, Control of Laminar Separation Bubble over a NACA2415 aerofoil at Low Re Transitional Flow Using blowing / Suction, *13th International Conference on aerospace sciences & aviation technology, Paper: ASAT-13-AE-11, EGYPT*, (2009).

- [76] Bich and Hung, Study of separation phenomenon in transonic flows produced by interaction between choc wave and boundary layer , *Vietnam journal of Mechanics*, Vol. 33, N°3, (2014).
- [77] P. Magnier, *Etude expérimentale du contrôle d'écoulements aérodynamiques subsoniques par action de plasmas froids surfaciques à pression atmosphérique*, Thèse de doctorat, Orléans, France, (2007).
- [78] Kissi, Analyses du décollement de la couche limite d'un jet laminaire impactant sur une plaque plane chauffée, *9ième Congrès de Mécanique*, FS SEMLALIA, Marrakech, (2013).
- [79] P. Manier, *Etude expérimentale du contrôle d'écoulements aérodynamiques subsoniques par action de plasmas froids surfaciques à pression atmosphérique*, Thèse de doctorat, Université d'Orléans, France, (2007).
- [80] Ahmer Mehmood, Muhammad Usman, Controlling boundary layer separation in stretching sheet flow, *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 57, pp. 3747–3753, (2018).
- [81] K. YOUSEFI, Numerical Investigation of Suction and Length of Suction Jet on Aerodynamic Characteristics of the NACA 0012 Airfoil, *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*, Vol. 1, No. 2, (2013).
- [82] A. NAHOUI and L. BAHI, Incompressible laminar boundary Layer Control by blowing and suction, *Revue des sciences & technologies A*, Constantine, (2013).
- [83] Sorour, M.M. and Hassab, M.A., Effect of Sucking the Hot Fluid Film on the Performance of Flat Plate Solar Energy Collectors, *Applied Energy*, 14(3), pp. 161–173, (1983).
- [84] J.L. Ericksen, Over-determination of the speed in rectilinear motion of non-newtonian fluids, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 14, pp. 318–321, (1956).
- [85] A.E. Green, R.S. Rivlin, Steady flow of non-Newtonian fluids through tubes, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 14, pp. 299–308, (1956).
- [86] J. Griffond, G. Casalis, On the dependence on the formulation of some nonparallel stability approaches applied to the Taylor flow, *Physics of Fluids*, Vol. 12, pp. 466-468, (2000).

- [87] J.Hona, E.Ngo Nyobe, E. Pemha, Numerical investigation of high viscous fluid flow between two porous plates using the shooting technique, *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*, Vol. 7, pp.192–201, (2015).
- [88] J. Hona, Modeling of heat and high viscous fluid distributions with variable viscosity in a permeable channel, *International Journal of Multiphysics*, Vol. 9, pp.641-360, (2015).
- [89] J.Hona, E. Ngo Nyobe, E.Pemha, Creeping flow with non-uniform viscosity in a permeable industrial conduct, *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*, Vol. 8, pp.183–194, (2016).
- [90] J.Hona, E.Pemha and E. Ngo Nyobe, Viscous flow and heat transfer through two coaxial porous cylinders, *International Journal of Multiphysics*, Vol. 9, pp.45–60, (2015).
- [91] E. Pemha, J. Hona, E. Ngo Nyobe, Numerical control of a two-dimensional channel flow with porous expanding walls at different temperatures, *International Journal of flow control*, Vol. 6, pp. 119-134, (2015).
- [92] M. M. Nganbe II, J. Hona, E. Ngo Nyobe, E. Pemha, Heat transfer and liquid distribution between two moving porous surfaces, *Journal of Applied Sciences*, Vol. 17, pp. 315-323, (2017).
- [93] J. Hona, M. M. Nganbe II, Modelling and simulation of an industrial flow between two moving permeable surfaces, *International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation*, Vol. 9, pp. 117-187, (2017).
- [94] E.P. Valueva, M.S. Purdin, heat exchange at laminar flow in rectangular channels, *Thermophysics and Aeromechanics*, Vol. 23, pp. 857-867, (2016)
- [95] Joseph Majdalani, Li-Jun Xuan, On the viscous core boundary layer of the injection and suction driven channel flows with expanding or contracting walls, *Z Angew Math Mech*, Vol. 55, pp. 1-12, (2018).
- [96] Tony Saad, Joseph Majdalani, Viscous Mean Flow Approximations for Porous Tubes with Radially Regressing Walls, *AIAA J*, Vol. 55, (2017).
- [97] M.M Nganbe, Elisabeth Ngo Nyobe, Jacques Hona, Elkana Pemha, Heat transfer and circular flow around a hydrodynamic turning point through a

- porous annular tube, *Chinese Journal of Physics*, Vol. 61, pp.316-335, (2019).
- [98] M.M Nganbe, Jacques Hona, Elisabeth Ngo Nyobe, Elkana Pemha, Circular flow around a turning point in an annular area between two coaxial porous cylinders, *Eur. Phys. J. Plus*, Vol. 134, (2019).
- [99] S. Taghizadeh, A. Asaditaheri, Heat transfer and entropy generation of laminar mixed convection in an inclined lid driven enclosure with a circular porous cylinder, *Int. J. Therm. Sci.* vol.134, pp.242–257, (2018).
- [100] Jacques Hona, Elisabeth Ngo Nyobe, Elkana Pemha, Dynamic Behavior of a Steady Flow in an Annular Tube with Porous Walls at Different Temperatures, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 19, pp. 2939–2951, (2009)
- [101] Jacques Hona, Elkana Pemha, Elisabeth Ngo Nyobe, Viscous flow and heat transfer through two coaxial porous cylinders, *International Journal of Multiphysics*, Vol. 9, pp. 45–60, (2015).
- [102] J. F. Brady, Flow development in a porous channel or tube, *Physics of Fluids*, Vol. 27, pp. 1061-1067, (1984).
- [103] O.D. Makinde, Thermal analysis of a reactive generalized Couette flow of power law fluids between concentric cylindrical pipes, *European Physical Journal Plus*, Vol. 129, pp. 1-9, (2014).
- [104] Li. Zhang, *Fluid flow and compound heat transfer for shell side of double-pipe heat exchanger enhanced by helical fins*. Ph.D. Thesis, Tianjin University, China, pp. 52 (2011).
- [105] R.K. Bhatnagar, Fluctuating flow of a viscoelastic fluid in a porous channel, *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, pp. 21–25, (1979).
- [106] H.N. Chang, J.S. Ha, J.K. Park, I.H. Kim, H.D. Shin, Velocity field of pulsatile flow in a porous tube, *Journal of Biomechanics*, Vol. 22, pp. 1257–1262, (1989).
- [107] C.F.J. Dewey, S.R. Bussolari, M.A.J. Gimbrone, P.F. Davis, The dynamic response of vascular endothelial cells to fluid shear stress, *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 103, p. 177, (1981).

- [108] J.M. Drazen, R.D. Kamm, A.S. Slutsky, *High frequency ventilation, Physiological Reviews*, Vol. 64, pp. 505–543, (1984).
- [109] Y.C.Fung, C.S. Yih, Peristaltic transport, *Journal of Applied Mechanics* Vol. 35, 669–675, (1968).
- [110] M.Y. Jaffrin, A.H. Shapiro, Peristaltic pumping, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 3, pp. 13–36, (1971).
- [111] R.T. Jones, Blood flow, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 1, pp. 223–244, (1969).
- [112] J.R. Womersley, Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known, *Journal of Physiology*, Vol. 127, pp. 553–563, (1955).
- [113] M.J. Levesque, E.A. Sprague, C.J. Schwartz, R.M. Nerem, The influence of shear stress on cultured vascular endothelial cells: the stress response of an anchorage-dependent mammalian cell, *Biotechnical Progress*, Vol. 5, pp. 1–8, (1989).
- [114] M.J. Lighthill, Physiological fluid dynamics: a survey, *Journal of Fluid Mechanics A*, Vol. 52, pp. 475–497, (1972).
- [115] R.M. Nerem, M.J. Levesque, Hemodynamics and the arterial wall, *Vascular Diseases*, pp. 295–317, (1987).
- [116] C.Y. Wang, Pulsatile flow in a porous channel, Transactions of the ASME: *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38, pp. 553–555, (1971).
- [117] E.A. Sprague, B.L. Steinbach, R.M. Nerem, C.J. Schwartz, Influence of a laminar steady state fluid-imposed wall shear stress on the binding internalization, and degradation of low density lipoproteins by cultured arterial endothelium, *Circulation*, Vol. 76, pp. 648–656, (1987).
- [118] D.D. Joseph, Variable viscosity effects on the flow and stability of flow in channels and pipes, *Physics of Fluids*, Vol. 7, pp. 1761–1771, (1964).
- [119] S. Ferro, G. Gnani, Effect of temperature-dependent viscosity in channels with porous walls, *Physics of Fluids*, Vol. 14, pp. 839–849, (2002).
- [120] M. Choudhury, G. C. Hazarika, Effects of Temperature Dependent Viscosity and Thermal Conductivity on Unsteady MHD Natural

- Convection in a Porous Medium between two long Vertical Wavy Walls, Vol. 2, pp. 685–692, (2013).
- [121] K. Hooman, H. Gurgenci, Effects of temperature-dependent viscosity variation on entropy generation, heat, and fluid flow through a porous-saturated duct of rectangular cross-section, Vol. 22, pp. 585–592, (2007).
- [122] K. Hooman, H. Gurgenci, The effect of temperature-dependent viscosity and thermal conductivity on micropolar fluid over a stretching sheet, *Technical gazette* Vol. 24, pp. 371–378, (2017).
- [123] Hazarika, Phukan, Effects of Variable Viscosity and Thermal Conductivity on Steady Magnetohydrodynamic Flow of a Micropolar Fluid through a Specially Characterized Horizontal Channel, *AMSE JOURNALS-AMSE IIETA* Vol. 86, pp. 1–13, (2017).
- [124] P.K. Khound, G.C. Hazarika, Effects of variable viscosity and thermal conductivity on MHD flow through a specially characterized horizontal channel, In Proceedings: 47th Congress of the ISTAM, Indian Institute of Technology, Kharagpur, India, (2002).
- [125] G.C. Hazarika, B. Phukan, Effects of variable viscosity and thermal conductivity on magnetohydrodynamic free convection flow of a micropolar fluid past a stretching plate through porous medium with radiation, heat generation and Joule dissipation, *Turk. J. Phys.*, vol. 40, No. 1, pp. 40-51, (2016).
- [126] K. Stewartson, The theory of boundary layers in compressible fluids, Oxford University Press, Oxford, (1964).
- [127] C.-R. Lin and C.-K. Chen, Effect of temperature dependent viscosity on the flow and heat transfer over an accelerating surface, *Journal of Physics D*, Vol. 27, pp. 29-36, (1994).
- [128] R.C. Reid, J.M. Prausnitz, B.E. Poling, The Properties of Gases and Liquids, McGraw-Hill Book Company, (1987).
- [129] J.F. Brady, Flow development in a porous channel or tube, *Physics of Fluids*, Vol. 27, pp. 1061-1067, (1984).
- [130] J.F. Brady and A. Acrivos, Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier–Stokes

- equations with reverse flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 112, pp. 127-150, (1981).
- [131] G.I. Taylor, Fluid flow in regions bounded by porous surfaces, *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 234, pp. 456-475, (1956).
- [132] W. M. Rohsenow, J. P. Hartnett, E. N. Ganic, *Handbook of heat transfer fundamentals*, Mac Graw Hill, 1985.
- [133] W. M. Kays, *Convective heat and mass transfer*, McGraw-Hill, New York, (1966).
- [134] M. F. White, *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill, New York, (1991).
- [135] B. Weigand, *Analytical methods for heat transfer and fluid flow problems*, 2nd Edition, (2015).
- [136] A. Bejan, *Convection heat transfer*, John Wiley & Sons, New York, 4th Edition, (2013).
- [137] K. D. Hagen, *Heat Transfer with Applications*, Prentice-Hall, New Jersey, USA, (1999).
- [138] T. Cebeci, P. Bradshaw, *Physical and computational aspects of convective heat transfer*, Springer, New York, (1984).
- [139] F. P. Incropera, D.P. DeWitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, New York: John Wiley & Sons, (2002).
- [140] J-N. Gence, *Les écoulements de fluides newtoniens : principaux mécanismes associés aux mouvements des fluides*, Ellipses, (2007).
- [141] E. Pemha, *Cours de Mécanique des fluides*, Master 1 de Physique, Université de Yaoundé I, (2014).
- [142] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1967).
- [143] C. Bailly, G. Compte-Bellot, *Turbulence*, CNRS Edition, (2003).
- [144] S.B. Pope, *Turbulent flows*, Cambridge University Press, (2000).

- [145] P. Chassaing, Mécanique des fluides : élément d'un premier parcours, Cépaduès, (2010).
- [146] P. Germain, Mécanique des milieux continus, Masson, (1973).
- [147] P.G. Drazin, W. H. Reid, Hydrodynamic stability, Cambridge University Press, Cambridge, (1981).
- [148] P.G. Drazin, Introduction to hydrodynamic stability, Cambridge University Press, (2002).
- [149] V. Nyemb Nsoga, J. Hona, E. Pemha, Numerical simulation of heat distribution with temperature dependent thermal conductivity in a two-dimensional liquid flow, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, DOI 10.1515/ijnsns-2016-0163, (2017).
- [150] B.S. Massey, Measures in Science and Engineering: Their Expression, Relation and Interpretation, Halsted Press, (1986).
- [151] C.W. Hall, Laws and Models: Science, Engineering, and Technology, CRC Press, (2000).
- [152] J.P. Catchpole, J. Fulford, Dimensionless Groups, *Industrial and Engineering Chemistry*, Vol. 3, pp. 46-60, (1966).
- [153] N.S. Lang, A Compilation of Nondimensional Numbers, NASA, (1972).
- [154] B. Le Neindre, Conductivité Thermique des Liquides et des Gaz, Techniques de l'Ingénieur, Saint Denis, France, (1998).
- [155] J.R. Sellars, Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers, *Journal of Applied Physics*, Vol. 26, pp. 489-490, (1955).

ANNEXES

A.1 EQUATIONS DES ECOULEMENTS

En Mécanique des Fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides, c'est-à-dire les gaz et la majeure partie des liquides. La résolution de ces équations modélisant un fluide comme un milieu continu à une seule phase est difficile. L'existence mathématique de solution des équations de Navier-Stokes est une conquête permanente. Mais elles permettent souvent, par une résolution approchée, de proposer une modélisation de nombreux phénomènes, comme les courants océaniques et des mouvements de masse d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, le comportement des gratte-ciels ou des ponts sous l'action du vent pour les architectes et les ingénieurs, ou encore celui des avions, des trains et des voitures à grande vitesse pour leurs bureaux d'études concepteurs, mais aussi le trivial écoulement de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de divers fluides. Les équations de Navier-Stokes sont nommées ainsi pour honorer les travaux de deux scientifiques du XIX^esiècle: le mathématicien et ingénieur des ponts Henri Navier, qui est le premier à introduire la notion de viscosité dans les équations d'Euler en 1823, et le physicien George Gabriel Stokes, qui a donné sa forme définitive à l'équation de conservation de la quantité de mouvement en 1845. Entre-temps, divers scientifiques ont contribué à l'avancement du sujet, notamment Augustin Louis Cauchy et Simon Denis Poisson en 1829, ainsi que Adhémar Barré de Saint-venant en 1843.

Pour un gaz peu dense, il est possible de trouver une solution appropriée de l'équation de Boltzmann, décrivant le comportement statistique des particules dans le cadre de la théorie cinétique des gaz. Ainsi, la méthode de Chapman-Enskog, due à Sydney Chapman et David Enskog en 1916 et 1917, permet de généraliser les équations de Navier-Stokes à un milieu comportant plusieurs espèces et de calculer l'expression des flux de masse (équations de Stefan-

Maxwell incluant l'effet Soret), de la quantité de mouvement (en donnant l'expression du tenseur de pression) et d'énergie en montrant l'existence de l'effet Dufour. Cette méthode permet également de calculer les coefficients de transport à partir des potentiels d'interaction moléculaires.

La recherche d'une meilleure compréhension de la Dynamique des fluides a non seulement inspiré le développement de la discipline elle-même, mais a également ouvert la voie à l'émergence de nouvelles techniques et de nouveaux domaines de la science tels que les mathématiques appliquées, les méthodes numériques et expérimentales, ainsi que l'analyse numérique des écoulements (CFD : Computational Fluid Dynamics).

Cette partie décrit les équations de Navier-Stokes pour les milieux homogènes, les problèmes liés à la diffusion et aux réactions chimiques n'y sont pas abordés.

A. 1.1 Equation d'état du fluide

Les grandeurs thermodynamiques du fluide considéré dans notre travail, notamment la pression p , la température T , et la masse volumique ρ sont regroupées dans une loi sous forme $E(p, T, \rho) = 0$, caractérisant l'état thermodynamique du fluide quelque soient les transformations subies par ce dernier. On dit que le fluide satisfait à la loi des gaz parfaits :

$$p = \rho R_0 T \quad (\text{A.1})$$

où R_0 est une constante des gaz parfaits.

A. 1.2 Conservation de la masse

L'expression mathématique de la conservation de la masse est l'équation de continuité. Il est donc question de présenter la démarche qui conduit à l'obtention de l'équation de continuité.

A.1.2.1 Tenseur des taux de déformation

Soient M et M' deux points infiniment voisins d'un milieu fluide. Les vitesses du fluide aux points M et M' sont liées par la relation suivante [133]:

$$\mathbf{V}(M') = \mathbf{V}(M) + \frac{1}{2} \mathbf{rotV} \wedge \mathbf{MM}' + \mathbf{D}(M) \quad (\text{A.2})$$

où $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{rotV}$ est le vecteur tourbillon et $2\mathbf{\Omega}$ représente la vorticité du fluide au point M . Le vecteur vitesse de déformation $\mathbf{D}(M)$ est donné par l'expression

$$\mathbf{D} = \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \mathbf{MM}' \quad (\text{A.3})$$

dans laquelle $\overline{\overline{\varepsilon}}$ est le tenseur des taux de déformation et dont les composantes sont définies à partir des gradients de vitesse :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.4})$$

Pour $i = j$, (ε_{ii}) est le taux de dilatation linéaire d'un élément de longueur initialement parallèle à l'axe \mathbf{x}_i et pour $i \neq j$, (ε_{ij}) est le taux de déformation angulaire ou taux de glissement d'un angle initialement droit dont les côtés sont parallèles aux axes \mathbf{x}_i et \mathbf{y}_j . La trace de $\overline{\overline{\varepsilon}}$ qui est la divergence du vecteur vitesse, c'est aussi le taux de dilatation cubique relative par unité de temps et s'exprime par la relation suivante [60-66] :

$$\text{divV} = \frac{1}{dt} \left(\frac{d\omega' - d\omega}{d\omega} \right) \quad (\text{A.5})$$

ou encore

$$\operatorname{div} \mathbf{V} dt = \frac{d\omega' - d\omega}{d\omega} \quad (\text{A.6})$$

où $d\omega$ et $d\omega'$ représentent des éléments de volume pris dans l'écoulement.

A.1.2.2 Enoncé du principe de conservation de la masse

Quelque soit le domaine (D) de fluide limité par une surface fermée (S), entièrement contenue dans le fluide, et que l'on suit dans son mouvement au cours du temps, sa masse reste constante.

Le schéma de la Figure I.1 montre un domaine (D) de fluide évoluant dans le temps.

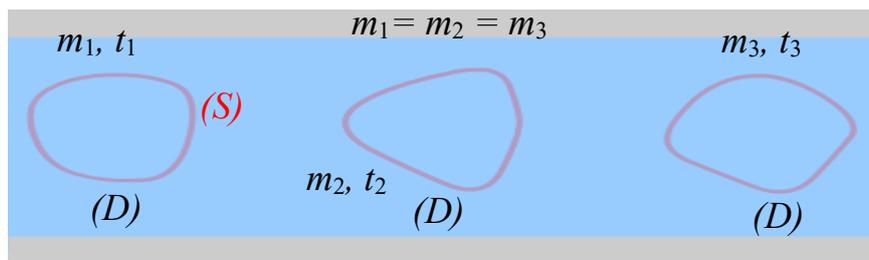


Figure A.1 : Conservation de la masse d'une particule fluide au cours du mouvement.

A.1.2.3 Equation de continuité

Soit (\mathcal{V}) le volume de fluide contenu dans un domaine (D) et $d\omega$ le volume élémentaire pris autour d'une particule fluide contenant le point M à l'instant t . La masse du fluide contenu dans le domaine (D) est donnée par [140-142]:

$$m = \iiint_D \rho(M, t) d\omega \quad (\text{A.7})$$

où $\rho(M, t)$ est la masse volumique du fluide au point M à l'instant t .

D'après le principe de conservation de la masse, la masse m reste constante au cours du temps, donc sa dérivée par rapport au temps s'annule; il en ressort que

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_D \rho(M, t) d\omega = 0 \quad (\text{A.8})$$

En utilisant la dérivée lagrangienne définie par

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad} \quad (\text{A.9})$$

et en tenant compte de l'expression (A.5) qui définit la relation entre la divergence du vecteur vitesse et le taux de dilation cubique, l'équation (A.8) devient :

$$\iiint_D \left[\frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} + \text{div} \rho(M, t) \mathbf{V} \right] d\omega = 0 \quad (\text{A.10})$$

Cette équation devant être vérifiée pour tout domaine (D), le théorème de l'intégrale multiple permet d'obtenir :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{A.11})$$

La relation (A.11) est appelée équation de continuité. Pour les fluides incompressibles, (fluides pour lesquels la masse volumique $\rho(p, T)$ varie très faiblement avec la pression) et lorsque les variations de température sont sans effet sur la masse volumique, l'équation (A.11) se réduit à l'équation suivante :

$$\text{div} \mathbf{V} = 0 \quad (\text{A.12})$$

L'équation (A.11) suppose que dans le fluide, il n'existe ni puits de masse, ni source de masse. Dans le cas contraire, elle serait définie par la relation [141] :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = \rho q_v \quad (\text{A.13})$$

La quantité q_v est le débit de la source ou du puits. Elle est positive ou négative selon qu'on a affaire à une source ou à un puits.

A.1.3 Conservation de la quantité de mouvement

Les équations de Navier-Stokes traduisent l'expression mathématique de la conservation de la quantité de mouvement. Il est donc question de présenter la démarche qui conduit à l'obtention des équations de Navier-Stokes.

A.1.3.1 Force de contact

On appelle force de contact sur une portion de fluide (D) limitée par une surface fermée (S), la force exercée par le fluide extérieur sur le fluide intérieur à (D) et qui s'applique sur la surface (S) à raison de $\mathbf{T}_c dS$ sur l'élément de surface (dS) telle que $d\mathbf{F} = \mathbf{T}_c(M) dS$, où :

- \mathbf{F} est la force de contact sur dS ;
- $\mathbf{T}_c(M)$ est appelée tension ou contrainte au point M .

La Figure I.2 présente une portion de fluide (D) sur laquelle est exercée la force de contrainte $\mathbf{T}_c dS$ sur l'élément de surface (dS).

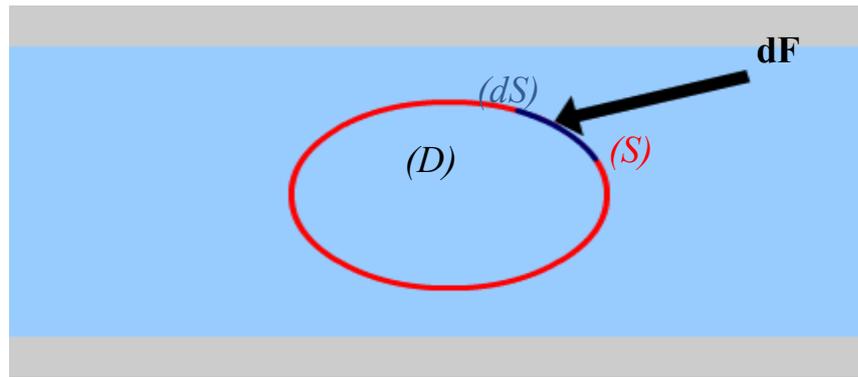


Figure A.2 : *Portion de fluide (D) délimitée par une surface fermée (S).*

La contrainte \mathbf{T}_c contient une composante normale \mathbf{T}_n ou contrainte normale à dS et une composante tangentielle \mathbf{T}_f ou contrainte tangentielle à dS (ou contrainte de glissement, ou contrainte de cisaillement). La contrainte \mathbf{T}_c est donc égale à :

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{T}_n + \mathbf{T}_f \quad (\text{A.14})$$

A.1.3.2 Tenseur des contraintes

Pour les fluides étudiés dans ce travail, on suppose vérifiées les propriétés suivantes [141]:

Propriété 1: La distribution des contraintes $T_c(M)$ en tout point M du fluide est totalement déterminée dès que l'on connaît les contraintes qui s'exercent sur les trois éléments de surface dS_1, dS_2, dS_3 formant un trièdre trirectangle ayant pour origine le point O de l'espace physique de dimension 3.

Propriété 2: Si l'on considère maintenant un petit parallélépipède rectangle bâti sur le point M et d'arrêts parallèles aux axes de coordonnées. Et qu'on exprime l'équilibre des moments des forces appliquées, on trouve que le tenseur des contraintes $\overline{\sigma}$ est symétrique, c'est-à-dire, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

À ces deux propriétés s'ajoutent les hypothèses caractéristiques des fluides newtoniens suivantes [140-142]:

Hypothèse 1: Le tenseur des contraintes est une fonction continue du tenseur des taux de déformation et de l'état thermodynamique local (pression, température) du fluide. Il est indépendant du temps, de la translation et de la rotation de l'élément de fluide local.

Hypothèse 2: Le fluide est entièrement dénué d'élasticité, c'est-à-dire il n'a pas la mémoire du passé.

Hypothèse 3: Un même état de contrainte ne conduit qu'à un même état de déformation, quelque soit le point considéré dans le fluide. Ce qui implique que le tenseur des contraintes ne dépend pas explicitement des coordonnées locales.

Hypothèse 4: Le fluide est isotrope, c'est-à-dire les relations entre les contraintes et les déformations n'ont pas de directions privilégiées dans le fluide.

Il est aussi important de mentionner le principe de symétrie entre les causes et les effets comme autre caractéristique de la relation entre les contraintes et les déformations. Les effets peuvent contenir d'autres symétries éventuelles, mais toutes les symétries originelles proviennent des causes. Les taux de déformation ont en plus d'autres symétries, éventuellement toutes les symétries que possèdent les contraintes. Les plans principaux et les directions principales du tenseur des contraintes sont confondus avec ceux du tenseur des taux de déformations.

On démontre que la contrainte \mathbf{T}_c sur un élément de surface pris autour du point M du fluide est liée à la normale unitaire \mathbf{n} de cet élément de surface par la relation

$$\mathbf{T}_c = \overline{\overline{\sigma}} \mathbf{n} \quad (\text{A.15})$$

dans la quelle $\overline{\overline{\sigma}}$ est le tenseur d'ordre 2 des contraintes. La composante σ_{ik} de ce tenseur s'interprète comme la contrainte suivant l'axe \mathbf{x}_i sur une surface de normale \mathbf{x}_k .

Pour $i = k$, σ_{ii} est appelé contrainte normale et pour $i \neq k$, σ_{ik} est appelé contrainte tangentielle.

A.1.3.3 Loi de comportement

Pour les fluides newtoniens, les contraintes sont par définition des fonctions linéaires des taux de déformation du milieu. Et la loi de comportement qui en découle de cette définition est donnée par la relation [140-142]:

$$\sigma_{jk} = (-p + \xi \operatorname{div} \mathbf{V}) \delta_{jk} + 2\mu \varepsilon_{jk} \quad (\text{A.16})$$

Sous forme vectorielle, la relation (A.16) devient :

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} = (-p + \xi \operatorname{div} \mathbf{V}) \overline{\overline{\mathbf{I}}} + 2\mu \overline{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (\text{A.17})$$

- p est la pression (indépendante de la direction en un point donné)
- δ_{jk} est le symbole de Kronecker:
$$\begin{cases} \delta_{jk} = 1 & \text{si } j = k \\ \delta_{jk} = 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

μ et ξ sont deux paramètres caractérisant les propriétés visqueuses des fluides :

- μ est la viscosité de cisaillement
- ξ est la viscosité de dilatation

Il est important de noter que la viscosité de cisaillement μ , encore appelée viscosité dynamique exprime la résistance à la déformation du fluide, alors que la viscosité de dilatation ξ est une autre forme de résistance liée cette fois-ci aux effets de compressibilité du fluide.

En effet, Les processus d'écoulements ou de transport à l'échelle moléculaire se traduisent à l'échelle macroscopique par des phénomènes de diffusion de masse en plus de la conduction et de la convection thermiques. La diffusion des quantités de mouvement s'effectue par frottement des couches

fluides les uns les autres et le coefficient de diffusion associé s'appelle viscosité dynamique du fluide ou viscosité de cisaillement. Cette propriété est notamment à l'origine d'efforts de frottement lorsque le fluide est en contact avec une paroi solide. Sa prise en compte n'est cependant pas primordiale pour obtenir une restriction de la réalité d'un écoulement. C'est pour dire que sous certaines conditions la viscosité peut être négligée; on considère alors un fluide à faible viscosité appelé fluide parfait. Par contre, les problèmes de type visqueux sont ceux pour lesquels les frottements ont une influence notable et le fluide considéré est dit réel.

A.1.3.4 Enoncé du principe de conservation de la quantité de mouvement

Quelque soit le domaine (D) de fluide que l'on suit dans son mouvement dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du tenseur cinématique est égale au tenseur des efforts extérieurs appliqués à (D):

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \quad (\text{A.18})$$

L'égalité entre les deux tenseurs précédents équivaut à l'égalité entre les moments résultants:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \begin{cases} \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\omega \\ \frac{d\mathbf{M}_o}{dt} = \iiint_D \frac{d(\mathbf{OM} \wedge \mathbf{V})}{dt} d\omega \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

par ailleurs,

$$\mathbf{F}_{ext} = \begin{cases} \mathbf{R}_{ext} = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\omega + \oiint_S \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{n} dS \\ \mathbf{M}_{ext} = \iiint_D \rho \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f} d\omega + \oiint_S \mathbf{OM} \wedge (\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{n}) dS \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

On montre que la deuxième égalité n'apporte aucune information supplémentaire sur la détermination du champ de vitesse du fluide, car elle aboutit à la symétrie du tenseur des contraintes. Donc seule la première égalité est intéressante :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\omega = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\omega + \oiint_S \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{n} dS \quad (\text{A.21})$$

où $\rho \mathbf{f} d\omega$ est la résultante des forces de masse sur la particule fluide de masse dm . Les forces de masse sont les forces qui sont proportionnelles à la masse et qui sont dues à l'existence d'un ou de plusieurs champs de forces dans le domaine où se trouve le fluide.

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky :

$$\oiint_S \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} \mathbf{n} dS = \iiint_D \text{div}(\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}) d\omega \quad (\text{A.22})$$

La relation (A.21) devient :

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\omega = \iiint_D \rho \mathbf{f} d\omega + \iiint_D \mathbf{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}} d\omega \quad (\text{A.23})$$

Par ailleurs

$$\iiint_D \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\omega = \iiint_D (\rho \mathbf{f} + \mathbf{div} \overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}) d\omega \quad (\text{I.24})$$

Le domaine (D) pouvant être quelconque, on aboutit à l'équation locale de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \mathbf{div} \overline{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A.25})$$

qui, en notation indicielle, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.26})$$

L'équation (A.26) est appelée relation de Cauchy. Cette relation est valable quelque soit le fluide, qu'il soit newtonien ou pas. Un fluide est dit newtonien lorsque le tenseur des contraintes visqueuses est une fonction linéaire du tenseur des déformations. Pour la plupart des fluides usuels dans des conditions standards, ce modèle est très satisfaisant.

A.1.3.5 Equations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes [140-142], sont une conséquence du principe de conservation de la quantité de mouvement. Pour plus de précision, ce principe découle de l'inventaire des forces extérieures appliquées à un domaine fluide, notamment les forces de masse ou de volume, et les forces de contact ou de surface. Les forces de masse sont proportionnelles à la masse et sont dues à l'existence d'un champ de force dans le domaine occupé par le fluide. Les forces de contact ou de surface proviennent du fluide extérieur au domaine considéré, et s'appliquent sur la surface frontière de ce domaine. Elles sont dues à leur tour, à l'existence au sein du domaine d'un champ de contrainte responsable du caractère déformable du fluide. Ces contraintes sont tangentielles et normales. Les premières génèrent les forces de viscosité qui naissent du mouvement relatif des particules fluides entre-elles, et les secondes donnent naissance aux forces de pression, normales à la surface frontière du domaine. Le

lien entre les contraintes et les déformations dans le fluide est régi par la loi de comportement, fondée sur le principe de symétrie entre les causes et les effets.

En appliquant l'opérateur divergence sur la relation (A.17), on obtient :

$$\mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}} = -\mathbf{grad} p + \mathbf{grad}(\xi \mathbf{div} \mathbf{V}) + 2\mu \mathbf{div} \bar{\bar{\varepsilon}} + 2\bar{\bar{\varepsilon}} \mathbf{grad} \mu. \quad (\text{A.27})$$

Compte tenu des propriétés de la divergence, l'équation (A.27) devient :

$$\mathbf{div} \bar{\bar{\sigma}} = -\mathbf{grad} p + \mathbf{grad}(\xi \mathbf{div} \mathbf{V}) + 2\mathbf{div} \mu \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (\text{A.28})$$

En substituant l'équation (A.28) dans (A.26), on obtient :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + \mathbf{grad}(\xi \mathbf{div} \mathbf{V}) + 2\mathbf{div} \mu \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (\text{A.29})$$

où $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est le tenseur des taux de déformation, et est lié au gradient de vitesse par la relation [128-136]:

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\mathbf{grad} \mathbf{V}}} + {}^t \overline{\overline{\mathbf{grad} \mathbf{V}}} \right) \quad (\text{A.30})$$

En substituant la relation (A.30) dans l'équation (A.29) on obtient de nouvelles équations appelées équations de Navier-Stokes, valables dans tous les systèmes de coordonnées :

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad} p + (\mu + \xi) \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{V}) + \mu \Delta \mathbf{V} \quad (\text{A.31})$$

Dans l'équation (A.31), les quantités $\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt}$, $\rho \mathbf{f}$, $\mathbf{grad} p$ et $(\mu + \xi) \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{V}) + \mu \Delta \mathbf{V}$ représentent respectivement, les forces d'inertie, de masse, de pression et de viscosité appliquées à l'unité de volume.

Pour les fluides incompressibles, la relation $\text{div}\mathbf{V} = 0$ permet d'obtenir les équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles, données par l'équation suivante :

$$\rho \left[\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right] = \rho \mathbf{f} - \mathbf{grad}p + \mu \Delta \mathbf{V} \quad (\text{A.32})$$

L'écoulement d'un fluide visqueux et incompressible est régi par les équations (A.12) et (A.32) valables dans tous les systèmes de coordonnées. Ce chapitre étant consacré à la revue de la littérature et compte tenu du fait que la plupart des écoulements industriels ont lieu dans des canaux rectangulaires ou cylindriques, la formulation de ces équations dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques est un outil nécessaire.

A.1.3.6 Equations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes

Dans un champ de force de masse \mathbf{g} , en considérant le système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) , et les vitesses V_x , V_y et V_z suivant les trois directions du repère cartésien, la projection des relations (A.12) et (A.32) dans la base cartésienne habituelle $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.34})$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.36})$$

A.1.3.7 Equations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques

Dans un champ de force de masse \mathbf{g} , en considérant le système de coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires (r, θ, z) , et les vitesses V_r, V_θ et V_z suivant les trois directions du repère cylindrique, la projection des relations (A.12) et (A.32) dans la base cylindrique habituelle $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k})$, permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \\ &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

A.2 EQUATION DE L'ENERGIE

L'équation d'énergie [132-139] est aussi, tout comme les équations de Navier-Stokes, une conséquence du principe de conservation de la quantité de mouvement. Ainsi, en multipliant l'équation (A.26) par V_i et en intégrant la relation obtenue considérant que le fluide est contenu dans un domaine (D) , on obtient la relation suivante :

$$\iiint_{(D)} \rho V_i \frac{dV_i}{dt} d\omega = \iiint_{(D)} \rho V_i f_i d\omega + \iiint_{(D)} V_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\omega \quad (\text{A.41})$$

où $\iiint_{(D)} \rho V_i \frac{dV_i}{dt} d\omega = \frac{d}{dt} \iiint_{(D)} \frac{\mathbf{V}^2}{2} dm$ est la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique, $dm = \rho d\omega$ est la masse élémentaire, et $d\omega$ l'élément de volume. $\iiint_{(D)} \rho V_i f_i d\omega = \iiint_{(D)} \mathbf{V} \cdot \mathbf{f} dm = P_\omega$ représente la puissance des forces de masse. On montre [49] aussi que:

$$\iiint_{(D)} V_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\omega = \iint_{(S)} \mathbf{V} \cdot \mathbf{Y} dS - \iiint_{(D)} \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} d\omega \quad (\text{A.42})$$

$\iint_{(S)} \mathbf{V} \cdot \mathbf{Y} dS = P_S$ est la puissance des forces de surface, dS l'élément de surface

pris autour d'un point du contour fermé du domaine (D) et \mathbf{Y} le champ des forces de contact. Par ailleurs, la puissance interne est définie par :

$$- \iiint_{(D)} \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} d\omega = P_{\text{int}} \quad (\text{A.43})$$

La variation de l'énergie cinétique du fluide contenu dans le domaine (D) est équivalente à la somme des travaux des forces extérieures (forces de volume et forces de surface) et des travaux des forces intérieures. Ce théorème dit de l'énergie cinétique est traduit en multipliant les différentes puissances inventoriées par l'élément de temps dt dans l'objectif d'écrire l'équation du travail :

$$dE_c = dW_\omega + dW_S + dW_{\text{int}} \quad (\text{A.44})$$

où pour l'élément de temps dt , $dW_\omega = P_\omega dt$ est le travail des forces de masse, $dW_S = P_S dt$ est le travail des forces de surface, $dW_{\text{int}} = P_{\text{int}} dt$ représente le travail

des forces intérieures, et dE_c la variation de l'énergie cinétique. Les phénomènes de dissipation ou de perte d'énergie dans le domaine fluide sont l'œuvre des forces intérieures. En explicitant l'expression dW_{int} , on trouve une décomposition élémentaire en travail intérieur de pression et de frottement :

$$dW_{int} = (dW_{int})_{pression} + (dW_{int})_{frottement} \quad (\text{A.45})$$

Le fluide étant incompressible, on a :

$$(dW_{int})_{pression} = \left(\iiint_{(D)} p \operatorname{div} \mathbf{V} \, d\omega \right) dt = 0 \quad (\text{A.46})$$

Cette expression montre que le travail des forces intérieures est donc dû exclusivement aux frottements visqueux, tels que :

$$(dW_{int})_{frottement} = \left(\iiint_{(D)} \phi_e \, d\omega \right) dt \quad (\text{A.47})$$

où ϕ_e est la fonction de dissipation définie par :

$$\phi_e = \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right) + \eta \left(\frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right)^2 \quad (\text{A.48})$$

Le principe de conservation de l'énergie stipule que, pour tout domaine fluide que l'on suit dans son mouvement, la variation temporelle de la somme de son énergie interne E_{int} , et de son énergie cinétique E_c , équivaut à la somme de la puissance mécanique fournie P_m au domaine par les forces extérieures, en l'occurrence les forces de masse et les forces de contact, et de la puissance calorifique P_{cal} fournie au domaine par l'extérieur ; c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} (E_{int} + E_c) = P_m + P_{cal} \quad (\text{A.49})$$

Lorsqu'on tient compte de l'équation du travail, sachant que $P_m = P_\omega + P_S$, l'équation d'énergie devient comme suit :

$$\frac{dE_{\text{int}}}{dt} = -P_{\text{int}} + P_{\text{cal}} \quad (\text{A.50})$$

Dans le cas où la puissance calorifique est uniquement due au phénomène de conduction thermique avec un fluide qui a pour champ de température T et pour conductivité thermique κ , on a :

$$P_{\text{cal}} = \iiint_{(D)} \text{div}(\kappa \mathbf{grad} T) d\omega \quad (\text{A.51})$$

L'équation d'énergie peut se réécrire, en introduisant l'énergie interne par unité de masse $e = dE_{\text{int}}/dm$, et en considérant que le domaine occupé par le fluide incompressible est arbitrairement choisi :

$$\rho \frac{de}{dt} = \phi_e + \text{div}(\kappa \mathbf{grad} T) \quad (\text{A.52})$$

En introduisant la chaleur massique à pression constante c_p , définie par :

$$c_p dT = de + d(p/\rho) \quad (\text{A.53})$$

On obtient l'équation suivante en considérant que les phénomènes de dissipation sont négligeables pour un régime d'écoulement où les vitesses moyennes sont modérées comme c'est le cas dans notre travail :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \text{div}(\kappa \mathbf{grad} T) \quad (\text{A.54})$$

En coordonnées cartésiennes par exemple, dans les conditions où les températures ne sont pas très élevées pour faire varier la conductivité thermique, l'équation (A.54) se développe comme suit :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.55})$$

En d'autres termes, cette équation peut s'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} = \beta \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.56})$$

où $\beta = \frac{\kappa}{\rho c_p}$ est la diffusivité thermique du fluide. La diffusivité thermique est

une grandeur physique qui caractérise la capacité d'un corps continu à transmettre un signal de température d'un point à un autre de ce corps. Elle dépend de la capacité du corps à conduire la chaleur (sa conductivité) et de sa capacité à accumuler la chaleur (capacité thermique ρc_p).

Pour une conductivité thermique constante, l'écriture de l'équation (A.54) en coordonnées cylindriques est la suivante :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \kappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.57})$$

PUBLICATION ISSUE DE LA THESE

Valjacques Nyemb Nsoga, Jacques Hona, Elkana Pemha

Numerical simulation of heat distribution with temperature-dependent thermal conductivity in a two-dimensional liquid flow, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, Vol. 18, (2017).

Valjacques Nyemb Nsoga, Jacques Hona* and Elkana Pemha

Numerical Simulation of Heat Distribution with Temperature-Dependent Thermal Conductivity in a Two-Dimensional Liquid Flow

DOI 10.1515/ijnsns-2016-0163

Received November 4, 2016; accepted January 23, 2017

Abstract: This paper is a contribution to a better understanding of heat transfer through porous channels used for mechanical sieving and filtration of liquids. The problem modeled by means of the Navier–Stokes equations and the energy equation is similar to a viscous flow between two uniformly permeable walls fixed at different temperatures. Thermal behaviors are determined through three branches denoted solutions of types I, II and III of a diagram of bifurcations presenting the values of the wall shear stress as the Reynolds number varies. We found that the distribution of temperature is similar through branches I and II where a large horizontal inflection area is observed as the Péclet number increases. This large horizontal inflection area inside the channel denotes the presence of thermal boundary layers which more precisely occur across branches I and II when the Péclet number approaches the value of 10. On the other hand, along branch III, thermal boundary layers do not exist and temperature presents a different behavior compared to those of branches I and II.

Keywords: numerical simulation, nonlinear boundary-value problem, heat transfer, suction-driven flow, Navier-Stokes equations

1 Introduction

The flow of a viscous fluid in a porous channel is increasingly used to model filtration [1, 2], water treatment [3], the control of boundary layers [4], biological transport processes [5], and combustion in slab rocket motors [6]. Due to this preponderance of related applications, investigations of porous channel flows have become a valuable

topic. In the present study, to model heat transfer through a flow between two permeable rigid walls fixed at different temperatures, the Navier–Stokes equations and the energy equation are solved.

In many cases, the Navier–Stokes equations are solved using a similarity method [7, 8, 9] first introduced by Berman [10] in treating porous rectangular channel flows. In validating this similarity solution, investigators have often relied on numerical simulations. Extensive experimental verifications and numerous laboratory experiments on porous channel flows have also been accomplished [7, 8, 9]. On the other hand, there exists a variety of methods [11, 12] for solving the differential equations of a given channel flow model.

The present study highlights typical solutions of the Navier–Stokes equations and the energy equation. These solutions contribute to ascertain a deeper understanding of heat transfer with temperature-dependent thermal conductivity through each branch of a diagram of bifurcations. The diagram of bifurcations for the fluid flow under study presents the wall shear stress also known as the wall friction coefficient as function of the Reynolds number. More precisely, the flow process or the fluid motion manifests itself at the macroscopic level as a phenomenon of mass distribution combined with thermal conduction and convection. The diffusion of momentum occurs due to the rubs of fluid layers from each other and the diffusion coefficient associated is the dynamic viscosity or the shear viscosity. This shear viscosity is at the origin of friction effects when the fluid is in contact with a solid wall. A bifurcation occurs when the wall friction coefficient undergoes a qualitative change at a critical value of the Reynolds number.

This work is aimed to find and examine the behavior of the temperature field between two porous walls as function of position through three branches of a diagram of bifurcations. To reach this objective, the mathematical model of the problem and the method of solution deal with Section 2. Temperature profiles through each branch of the diagram of bifurcations are presented and discussed in Section 3. A final summary is given in Section 4.

*Corresponding author: Jacques Hona, Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 7389, Yaoundé, Cameroon, E-mail: honajacques@yahoo.fr

Valjacques Nyemb Nsoga: E-mail: nsoganyembjacques@yahoo.fr, Elkana Pemha: E-mail: elkanaderbeau@yahoo.fr, Applied Mechanics Laboratory, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 7389, Yaoundé, Cameroon

2 Methodology

A viscous incompressible fluid flowing along a channel formed by two rigid permeable surfaces is considered. The flow is forced by uniform suction through the two porous rigid surfaces which have different fixed temperatures.

The working fluid is liquid mercury which is a Newtonian fluid like water and air. The constant physical properties of liquid mercury in this study are the specific mass ρ , the dynamic viscosity μ , and the specific heat at constant pressure c_p . At temperature 0°C , these constant physical properties are given [13]: $\rho = 13,595 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.687 \times 10^{-3} \text{ kg/(m.s)}$, and $c_p = 140.4 \text{ J/(kg. }^\circ\text{C)}$. The thermal conductivity k varies with temperature and its value $k_0 = 8.182 \text{ W/(m. }^\circ\text{C)}$ [13] at temperature 0°C is taken as a reference value. The reference length of the porous small channel is its half-width $h = 5 \text{ mm}$, so that the channel total width is $2h = 10 \text{ mm}$. Temperature of the cold wall is $T_{\min} = 0^\circ\text{C}$, and that of the hot wall is $T_{\max} = 100^\circ\text{C}$. The fluid suction speed at walls is V . For the laminar flow under study, its range is such that $0 < V < 9 \text{ mm/s}$. This range of the suction velocity at walls will influence the ranges of control numbers of the problem. The channel as shown in Figure 1 is built on the base of a plane Cartesian coordinate system (x^*, y^*) , where x^* is the streamwise coordinate, and y^* denotes the normal coordinate. The velocity field has components as (V_x^*, V_y^*) , where V_x^* is the streamwise velocity component, and V_y^* denotes the normal velocity component. The variables uniform to temperature and pressure are T^* and p^* , respectively.

In the absence of gravity terms due to the fact that the channel is horizontal, the equations of motion express mass, momentum and energy conservations:

$$\frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(V_x^* \frac{\partial V_x^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_x^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2)$$

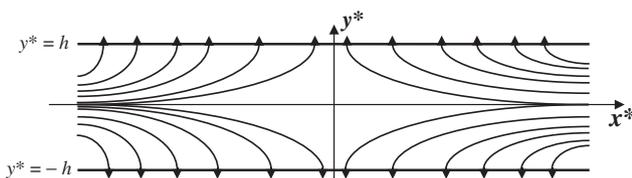


Figure 1: Geometry of the channel. The plotted streamlines represent the flow pattern of a symmetric similarity solution of the Navier–Stokes equations for a suction-driven flow.

$$\rho \left(V_x^* \frac{\partial V_y^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial V_y^*}{\partial y^*} \right) = - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 V_y^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3)$$

$$\rho c_p \left(V_x^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + V_y^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) = \frac{\partial}{\partial x^*} \left(k \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(k \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) \quad (4)$$

Mass conservation is described by the continuity eq. (1). The momentum equation consists of two Navier–Stokes eqs (2) and (3), while energy conservation is described by eq. (4). The boundary conditions following the geometry of the problem are stated as follows:

$$\begin{aligned} V_x^* &= 0, \quad V_y^* = V, \quad T^* = T_{\max} & \text{for } y^* = h \\ \frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} &= 0, \quad V_y^* = 0, \quad T^* = T_{\max}/2 & \text{for } y^* = 0 \\ V_x^* &= 0, \quad V_y^* = -V, \quad T^* = T_{\min} = 0 & \text{for } y^* = -h \end{aligned} \quad (5)$$

The boundary conditions for $y^* = \pm h$ show the difference of temperatures [14] between the two rigid porous walls, equal fluxes of fluid at walls [14]: $V_y^* = \pm V$, and the no-slip condition [14, 15]: $V_x^* = 0$. On the other hand, the boundary conditions [5, 6, 15]: $\frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} = 0$, $V_y^* = 0$ for $y^* = 0$ establish the symmetry through mass distribution inside the channel with respect to the midsection plane at temperature $T_{\max}/2$. The midsection plane is also known as the open wall [5, 6, 15] dividing the flow domain into two identical parts. More precisely, the symmetry is only with respect to mass distribution and the boundary conditions [5, 6, 15]: $\frac{\partial V_x^*}{\partial y^*} = 0$, $V_y^* = 0$ for $y^* = 0$ express the fact that the fluid is sandwiched or equally distributed [5, 6, 15] within the porous channel.

These boundary conditions used in this study to investigate heat transfer in a porous channel performed for mechanical sieving or filtration of liquid mercury, have many other applications including biological filters [5] and slab rocket motors [6, 15].

It is convenient at this stage to generate some control parameters which help in discussing the dynamic behavior of the flow under study. These control parameters derive from the nondimensional formulation of the governing equations of the problem. Indeed, dimensionless variables for lengths, velocity components, pressure, temperature, and thermal conductivity are introduced as follows:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{h}, \quad y = \frac{y^*}{h}, \quad V_x = \frac{V_x^*}{V}, \quad V_y = \frac{V_y^*}{V}, \quad p = \frac{p^*}{\rho V^2}, \\ T &= \frac{T^*}{T_{\max} - T_{\min}}, \quad \kappa = \frac{k}{k_0} \end{aligned} \quad (6)$$

The governing equations and boundary conditions written in terms of the above dimensionless variables become:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

$$\left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

$$\left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

$$\left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} V_x = 0, \quad V_y = 1, \quad T = 1 & \quad \text{for } y = 1 \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0, \quad V_y = 0, \quad T = 0.5 & \quad \text{for } y = 0 \\ V_x = 0, \quad V_y = -1, \quad T = 0 & \quad \text{for } y = -1 \end{aligned} \quad (11)$$

where the Reynolds number $R = \rho V h / \mu$, Péclet number $P = \rho V h c_p / k_0$, and the ρ the specific mass of the fluid are derived.

The incompressibility of the fluid as described by eq. (7) gives the existence of a stream function ψ . The existence of a stream function is accompanied by a new function θ uniform to temperature. The following transformations are considered:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= xF(y) \\ V_x(x, y) &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = xF^{(1)}(y) \\ V_y(x, y) &= - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -F(y) \\ T(x, y) &= \theta(y) + \frac{T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}} \end{aligned} \quad (12)$$

where $F^{(1)}(y) = dF/dy$. Function F is uniform to the stream function per unit length.

The complete formulation of the problem requires the functional dependence of nondimensional thermal conductivity on temperature $\kappa(\theta)$. In this study, the only variable physical property of the fluid is the thermal conductivity which varies with temperature. Other physical properties of the fluid are considered as constants but to account for the change of thermal conductivity. The prescription to take other properties of the fluid as constants while treating the variation of a given property can be applied in the case of most Newtonian liquids as water, air, liquid mercury and is used in the study of a liquid flow with temperature-dependent viscosity [14, 16]. In fact, the thermal conductivity can be defined as a measure of how fast heat is transferred in a medium. A large value of thermal conductivity indicates that the medium is a good heat conductor, while a low value indicates that the medium is a poor heat conductor or a good insulator. The variation of thermal conductivity of some materials over certain temperature ranges is small enough to be neglected. However, in many cases, such as liquids and gases, the variation of thermal conductivity with temperature is significant. Thermal conductivity of

most gases increases with temperature, while that of many liquids decrease. However, it is stated that another behavior can take place in the presence of radiation or convection [17]. There are very few forms of thermal conductivity variation available in the literature. For a liquid, it has been found that the thermal conductivity varies with temperature in an approximately linear manner in the range from 0 to 400 °Fahrenheit [18], equivalent to the range from -17.77 to 204.44 °C. Hence, relative to our working temperature range $0 < T^* < 100$ °C, the linear law of thermal conductivity as function of temperature can be adopted. Thus, in terms of θ , we have considered the following functional form [18, 19, 20] of the nondimensional conductivity:

$$\kappa(\theta) = 1 + \gamma\theta \quad (13)$$

The nondimensional parameter γ is a measure of the sensitivity of thermal conductivity to the variations of temperature. Since $\kappa(\theta)$ is positive in this work, thus $\kappa(\theta) > 0$. Considering the nondimensional temperature range by referring to boundary conditions (11): $0 \leq T \leq 1$, this means that $0 \leq \theta \leq 1$. It follows that $\gamma > -1$. In the presence of convection [17], thermal conductivity can increase with temperature; this case corresponds to $\gamma > 0$, while a decrease takes place when $-1 < \gamma < 0$. The case of constant thermal conductivity corresponds to $\gamma = 0$.

Considering eqs (12) and (13), the nondimensional continuity eq. (7) is self-satisfied. By taking the curl of the momentum equation, pressure terms disappear and function F describes the vorticity transport equation, while function θ satisfies the energy equation as follows:

$$F^{(4)} + R \left(FF^{(3)} - F^{(1)}F^{(2)} \right) = 0 \quad (14)$$

$$(1 + \gamma\theta)\theta^{(2)} + \gamma(\theta^{(1)})^2 + PF\theta^{(1)} = 0 \quad (15)$$

The boundary conditions related to functions F and θ are derived:

$$\begin{aligned} F^{(1)}(1) = 0, \quad F(1) = -1, \quad \theta(1) = 1 \\ F^{(2)}(0) = 0, \quad F(0) = 0, \quad \theta(0) = 0.5 \\ F^{(1)}(-1) = 0, \quad F(-1) = 1, \quad \theta(-1) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

with $F^{(i)} = d^i F / dy^i$ and $\theta^{(i)} = d^i \theta / dy^i$. It follows that the mathematical problem is reduced to solving a nonlinear boundary-value problem (14)–(16).

Equations (12) derive from a technique using the stream function to solve the differential eqs (7)–(10) with boundary conditions (11). This technique is similar to the Berman approach [10] which inspired other

authors [5, 6, 7, 8, 14, 15] to find solutions of the Navier–Stokes equations. However, other methods [11, 12] to solve the Navier–Stokes equations and the energy equation exist. Indeed, another approach could consist to determine the flow field characteristics directly without introducing the stream function. The present work is based on the stream function, since the introduction of the stream function in the governing equations enables to determine different solution branches of a diagram of bifurcations which will be presented in Section 3, by solving a nonlinear ordinary differential equation known as the vorticity eq. (14). Our study is aimed to describe heat transfer through each branch of the diagram of bifurcations.

3 Results

It is important to know that, for $\gamma=0$ and for small values of the Péclet number and the Reynolds number corresponding to a creeping type flow, such that $P \ll 1$ and $R \ll 1$ [14, 21], eqs (14) and (15) are linear. In this case, the problem admits analytical solutions in terms of functions F and θ . When the Péclet and the Reynolds numbers are not close to zero, the shooting method associated with a fourth-order Runge–Kutta algorithm [15, 17] is applied to obtain the solution of the nonlinear boundary-value problem (14)–(16). Since the symmetry is only established with respect to mass distribution through the porous channel, so to obtain the results about temperature profiles, the numerical integration is performed in two stages. The first stage is restricted to find the solution on the interval $[-1, 0]$, that is the solution of eqs (14) and (15) subject to boundary conditions:

$$\begin{aligned} F^{(2)}(0) &= 0, & F(0) &= 0, & \theta(0) &= 0.5 \\ F^{(1)}(-1) &= 0, & F(-1) &= 1, & \theta(-1) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

The second stage is restricted to find the solution on the interval $[0, 1]$, that is the solution of eqs (14) and (15) subject to boundary conditions:

$$\begin{aligned} F^{(1)}(1) &= 0, & F(1) &= -1, & \theta(1) &= 1 \\ F^{(2)}(0) &= 0, & F(0) &= 0, & \theta(0) &= 0.5 \end{aligned} \quad (18)$$

The complete solution on the interval $[-1, 1]$ is obtained by combining solutions on the intervals $[-1, 0]$ and $[0, 1]$.

Solutions of type I denoted branch I exist for all values of the Reynolds number as shown in Figure 2(a). In this figure, function $F^{(2)}(1)$ proportional to the wall

shear stress also known as the wall friction coefficient at the upper wall ($y=1$) is plotted versus R . As presented in Figure 2(a), the unique solution of the wall friction coefficient is branch I for $0 \leq R < 12.165$. However, a saddle-node bifurcation which gives birth to branches II and III is highlighted at $R = R_s = 12.165$. For great values of R , solutions of types I and II differ by exponentially small terms only, and they coalesce in a cusp type bifurcation as shown in Figure 2(b).

Temperature for branches I, II and III under different Reynolds and Péclet numbers for fixed positive and negative sensitivities of thermal conductivity to the variations of temperature is shown in Figure 3(a)–3(c), respectively. By referring to these figures, the distribution of temperature through each branch presents the same behavior both for positive and negative values of the parameter γ . More precisely, thermal behaviors do not differ enough by the sign of the parameter γ in each figure. It appears that thermal boundary layers occur through solutions of types I and II when the Péclet number approaches the value of 10 as presented in Figure 3(a) and 3(b). These thermal boundary layers manifest themselves as large horizontal inflection areas inside the flow domain. The curves that highlight thermal boundary layers present two concavities. The first concavity situated in the region $-1 < y < 0$ is turned toward the stocking. The second concavity located in the region $0 < y < 1$ is turned toward the top. With the decrease of the Péclet number, the curves of temperature for all the three branches tend to satisfy a linear law. On the other hand, thermal boundary layers disappear along branch III as shown in Figure 3(c). In addition, the temperature distribution relative to branch III is different compared to those of branches I and II which present a same behavior for various values of control numbers.

4 Conclusion

To investigate heat transfer with temperature-dependent thermal conductivity in a two-dimensional channel flow, the stream function per unit length is introduced in the Navier–Stokes equations and the energy equation by similarity transformation in order to obtain two coupled nonlinear ordinary differential equations. The solutions of the problem are obtained by numerical integration based on the shooting method and a fourth-order Runge–Kutta integration scheme.

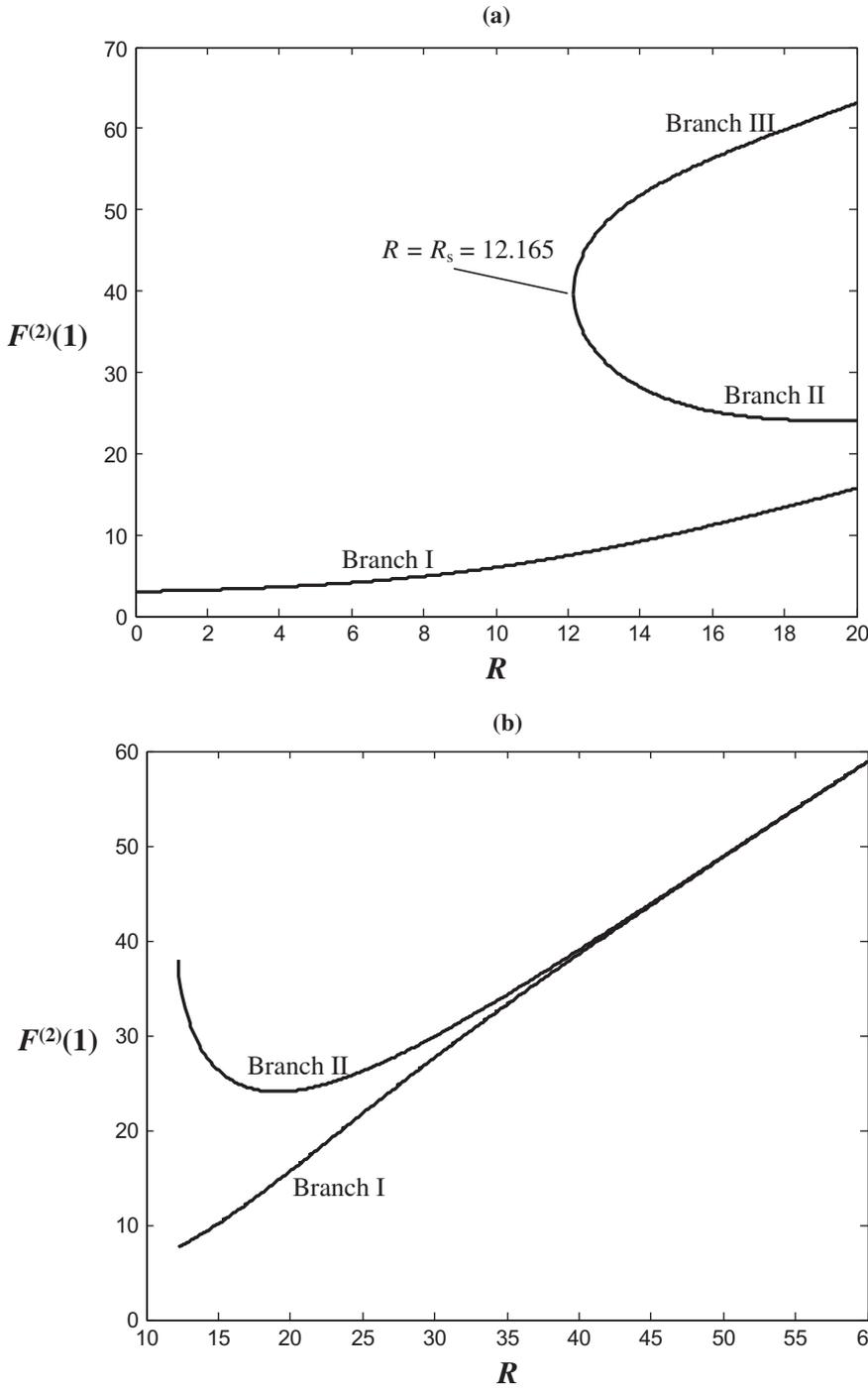


Figure 2: Diagram of bifurcations, (a) a saddle-node bifurcation occurs at $R = R_s = 12.165$. The three branches denoted branches I, II and III are presented, (b) a cusp type bifurcation occurs when branches I and II coalesce as the Reynolds number increases.

From numerical results, a diagram which consists of three branches revealing a saddle-node bifurcation and a cusp-type bifurcation is presented. The temperature field is examined through these three branches denoted solutions of types I, II and III of the diagram of bifurcations. Solutions of types I and II present the same behavior of temperature with boundary layers which occur as the Péclet number tends to 10. On the other hand, these

thermal boundary layers disappear through solutions of type III which present a different temperature distribution compared to those of types I and II.

Acknowledgment: The authors would like to thank the Reviewers for the corrections they have made and the valuable comments they have suggested for improving the paper.

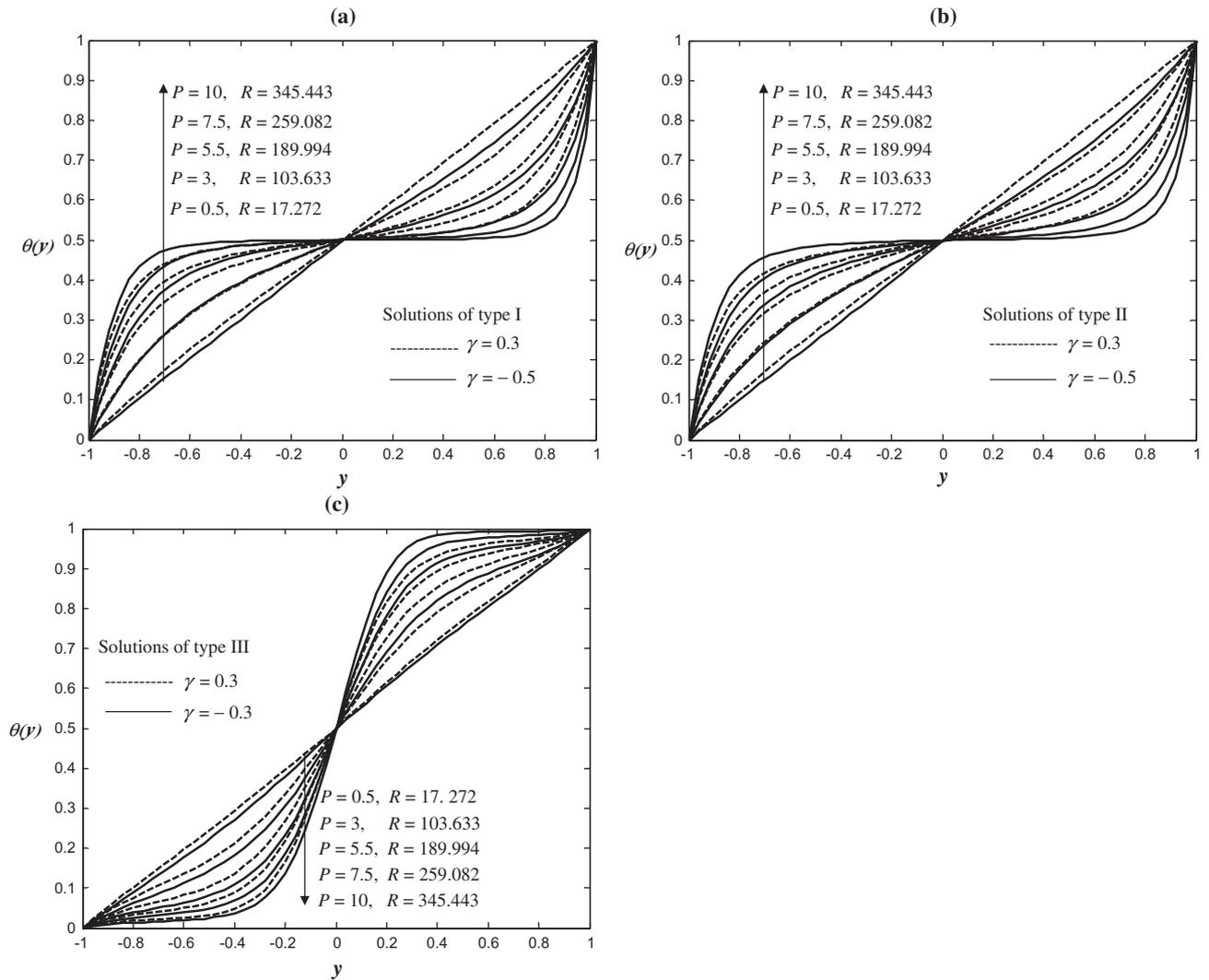


Figure 3: Temperature plotted under different Péclet and Reynolds numbers, and for fixed positive and negative parameters γ , (a) through branch I, (b) through branch II, (c) through branch III.

References

- [1] M.M. Kim and A.L. Zydney, Theoretical analysis of particle trajectories and sieving in a two-dimensional cross-flow filtration system, *J. Memb. Sci.* **281** (2006), 666–675.
- [2] Z. Jalilvand, F.Z. Ashtiani, A. Fouladitajar and H. Rezaei, Computational fluid dynamics modeling and experimental study of continuous and pulsatile flow in flat sheet microfiltration membranes, *J. Memb. Sci.* **450** (2014), 207–214.
- [3] M. Lee, B. Wang, Z. Wu and K. Li, Formation of micro-channels in ceramic membranes – Spatial structure, simulation, and potential use in water treatment, *J. Memb. Sci.* **483** (2015), 1–14.
- [4] E. Magyari and B. Keller, Exact solutions for self-similar boundary-layer flows induced by permeable stretching walls, *Eur. J. Mech. B-Fluids* **19** (2000), 109–122.
- [5] J. Majdalani, C. Zhou and C.A. Dawson, Two-dimensional viscous flow between slowly expanding or contracting walls with weak permeability, *J. Biomech.* **35** (2002), 1399–1403.
- [6] C. Zhou and J. Majdalani, Improved mean-flow solution for slab rocket motors with regressing walls, *J. Propul. Power* **18** (2002), 703–711.
- [7] J. Griffond and G. Casalis, On the dependence on the formulation of some nonparallel stability approaches applied to the Taylor flow, *Phys. Fluids* **12** (2000), 466–468.
- [8] J. Griffond and G. Casalis, On the nonparallel stability of the injection induced two-dimensional Taylor flow, *Phys. Fluids* **13** (2001), 1635–1644.
- [9] J. Barron, J. Majdalani and W.K. Van Moorhem, A novel investigation of the oscillatory field over a transpiring surface, *J. Sound Vib.* **235** (2000), 281–297.
- [10] A.S. Berman, Laminar flow in channels with porous walls, *J. Appl. Phys.* **24** (1953), 1232–1235.
- [11] N. Bildik and A. Konuralp, The use of variational iteration method, differential transform method and Adomian decomposition method for solving different types of nonlinear partial differential equations, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **7** (2006), 65–70.

- [12] W.F. Ames, Numerical solutions of partial differential equations, Second ED., Academic Press, New York, 1977.
- [13] S.A. Klein and F.L. Alvarado, EES – Engineering equation solver, F-Chart Software, Middleton, WI, 1993.
- [14] S. Ferro and G. Gnani, Effect of temperature-dependent viscosity in channels with porous walls, *Phys. Fluids* **14** (2002), 839–849.
- [15] E.C. Dauenhauer and J. Majdalani, Exact self-similarity solution of the Navier–Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls, *Phys. Fluids* **15** (2003), 1485–1494.
- [16] D.D. Joseph, Variable viscosity effects on the flow and stability of flow in channels and pipes, *Phys. Fluids* **7** (1964), 1761–1771.
- [17] B. Le. Neindre, Conductivité thermique des liquides et des gaz, Techniques de l'Ingénieur, Saint Denis, France, 1998.
- [18] W.M. Kays, Convective heat and mass transfer, p. 362, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [19] M.F. White, Viscous fluid flow, McGraw-Hill, New York, 1991.
- [20] M.A. Alim, S. Alam and M. Miraj, Effects of temperature dependent thermal conductivity on natural convection flow along a vertical wavy surface with heat generation, *Int. J. Eng. Technol.* **11** (2011), 60–69.
- [21] T. Fang and J. Zhang, Flow between two stretchable disks-An exact solution of the Navier–Stokes equations, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* **35** (2008), 892–895.
- [22] J. Hona, E. Ngo Nyobe and E. Pemha, Creeping flow with non-uniform viscosity in a permeable industrial conduct, *Int. J. Eng. Syst. Model. Simul.* **8** (2016), 183–194.