

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix - Travail - Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES
ET GEOSCIENCES

Unité de recherche et de formation
Doctorale en physiques et applications

B.P 812 Yaoundé
Email: crfd_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIC OF CAMEROON
Peace - Work - Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCES,
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

Research and postgraduate training
unit for physics and applications

P.O. Box 812 Yaounde
Email: crfd_stg@uy1.uninet.cm

LABORATOIRE DE MECANIQUE, MATERIAUX ET STRUCTURES
LABORATORY OF MECHANICS, MATERIALS AND STRUCTURES

THESE

**Conception et évaluation des performances de quelques
systèmes passifs de suppression de vibrations à base
d'inertier avec ou sans rigidité négative**

Soumise dans le respect partiel des exigences en vue de
l'obtention du diplôme de Doctorat/Ph.D.

Spécialité : Mécanique, Matériaux et Structures

Option : Mécanique fondamentale et systèmes complexes

Par

BADUIDANA Marcial
Matricule : 11Y714
Master II en Mécanique des Systèmes Complexes

Directeur :

KENFACK JIOTSA Aurelien,
Professeur
Université de Yaoundé I



© année: 2022

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix - Travail - Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES
ET GEOSCIENCES

Unité de recherche et de formation
Doctorale en physiques et applications

B.P 812 Yaoundé
Email: crfd_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIC OF CAMEROON
Peace - Work - Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCES,
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

Research and postgraduate training
unit for physics and applications

P.O. Box 812 Yaounde
Email: crfd_stg@uy1.uninet.cm

LABORATOIRE DE MECANIQUE, MATERIAUX ET STRUCTURES
LABORATORY OF MECHANICS, MATERIALS AND STRUCTURES

THESE

**Conception et évaluation des performances de quelques
systèmes passifs de suppression de vibrations à base
d'inertier avec ou sans rigidité négative**

Soumise dans le respect partiel des exigences en vue de
l'obtention du diplôme de Doctorat/Ph.D.

Spécialité : Mécanique, Matériaux et Structures
Option : Mécanique fondamentale et systèmes complexes

Par
BADUIDANA Marcial
Matricule : 11Y714

Master II en Mécanique des Systèmes Complexes

Devant le Jury Composé de :

President:	WOAFO Paul, Professeur	Université de Yaoundé I ;
Rapporteur:	KENFACK-JIOTSA Aurelien, Professeur	Université de Yaoundé I ;
Membres:	NANA NBENDJO Blaise Roméo, Professeur	Université de Yaoundé I ;
	BOGNING Jean Roger, Maitre de Conférence	Université de Bamenda ;
	MBINACK Clément, Maitre de Conférence	Université de Yaoundé I ;
	FEWO Serge Ibraïd, Maitre de Conférence	Université de Yaoundé I.

© année: 2022



DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THÈSE DE DOCTORAT/Ph.D

Nous, Professeur NANA NBENDJO Blaise Roméo et Professeur WOAFU Paul, respectivement Examineur et Président du jury de la Thèse de Doctorat/Ph.D. de Monsieur BADUIDANA Marcial, Matricule 11y714, préparée sous la direction du Professeur KENFACK JIOTSA Aurélien (Université de Yaoundé I), intitulée : « CONCEPTION ET EVALUATION DES PERFORMANCES DE QUELQUES SYSTEMES PASSIFS DE SUPPRESSION DE VIBRATIONS A BASE D'INERTER AVEC OU SANS RIGIDITE NEGATIVE », soutenue le mardi, 20 décembre 2022, en vue de l'obtention du grade de Docteur/Ph.D en Physique, Spécialité Mécanique, Matériaux et Structures, option Mécanique Fondamentale et Systèmes Complexes, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé, le 08 FEV 2023

Examineur

Pr NANA NBENDJO Blaise R.

Le Président du jury

Pr WOAFU Paul

Le Chef de Département de Physique



Pr NDJAKA Jean-Marie

**Conception et évaluation des performances de
quelques systèmes passifs de suppression de
vibrations à base d'inerteur avec ou sans rigidité
négative**

THÈSE

Soumise dans le respect partiel des exigences
à l'Unité de Formation Doctorale Physique et Application

Par

BADUIDANA Marcial

Master II en Mécanique et Systèmes Complexes

en vue de l'obtention du

diplôme de Doctorat/Ph.D.

Spécialité : Mécanique, Matériaux et Structures

Option : Mécanique Fondamentale et Systèmes Complexes

Directeur :

KENFACK JIOTSA Aurelien,

Professeur

Université de Yaoundé I

Université de Yaoundé
UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION DOCTORALE PHYSIQUE ET APPLICATION
B.P. Box 8580 Yaoundé, Cameroun

©2021/2022

Citation

*”La maîtrise et l’excellence s’acquièrent par la persévérance dans le travail,
la pratique, la répétition et la concentration, dans un long processus
d’apprentissage.”*

Didier Court

Dédicaces

♡ *To my late beloved father, peace to her soul NKAMA Thomas*

♡ *To my mother, Mrs. NKAMA born NGOMANDE ALAKA Anastasie.*

Déclaration

Je soussigné, Monsieur BADUIDANA Marcial, Matricule 11Y714, déclare que le travail de ce mémoire de thèse de Doctorat/Ph.D a été effectué conformément aux exigences du règlement et du code de pratique de l'Université pour les programmes de diplôme de recherche et qu'il n'a été soumis à aucune autre Université académique. Sauf indication contraire dans le texte, ce travail est celui du candidat. Les travaux réalisés en collaboration ou avec l'aide d'autres personnes sont indiqués comme tels. Toutes les opinions exprimées dans la thèse sont celles de l'auteur sous la direction de Monsieur KENFACK JIOTSA Aurelien, Professeur. Je soumetts ce mémoire en accomplissement partiel en vue de l'obtention du Doctorat/Ph.D en Dynamique linéaire et Contrôle des vibrations, Option : Mécanique fondamentale et systèmes complexes.

Les Auteurs :

BADUIDANA Marcial
Candidat au Doctorat/Ph.D.
Université de Yaoundé I

KENFACK JIOTSA Aurelien, Professeur
Université de Yaoundé I

Remerciements

- Je voudrais tout d'abord remercier le Dieu Tout puissant, pour la force et la grâce qu'il m'a accordé tout au long de cette thèse.

- Je remercie mon encadreur, M. Kenfack Jiotsa Aurelien, Professeur, pour son temps et la patience dans le suivi de ce travail. Cela n'a pas toujours été facile d'intégrer et d'accepter votre rigueur dans la recherche, c'est la raison pour laquelle je me suis mis à votre école. J'ai beaucoup appris avec vous et ce grâce à votre expérience dans la recherche, particulièrement dans le domaine du contrôle, des simulations numériques et la compréhension des phénomènes linéaires. Sincèrement je vous suis très reconnaissant.

- Je voudrais sincèrement remercier chaque membre du jury qui a accepté d'évaluer le présent travail de thèse.

- Je voudrais aussi remercier sincèrement tous ceux qui m'ont enseigné et encadré depuis l'école primaire, secondaire et universitaire. Plus particulièrement, les enseignants du Département de Physique de la Faculté des Sciences et de L'école Normale Supérieure de L'université de Yaoundé I; parmi lesquels; Pr. Beguide bonoma de regretté mémoire (ancien Chef du Département de Physique de L'école normale Supérieure de Yaoundé), Professeur Kofane Timoléon Crépin, Professeur Ndjaka Jean Marie B. (Chef du Département de Physique de la Faculté des Sciences de L'université de Yaoundé I), Professeur Tchawoua Clément, Professeur Wofo Paul, Professeur Owono owono luc calvin (Secrétaire général de L'université de Yaoundé I) pour la formation de qualité qu'ils m'ont donnée et leur encouragement permanent.

- Je souhaite du plus profond de mon cœur dire toute ma gratitude à ma maman Ngomande Alaka Anastasie et à mon feu père Nkama Thomas, pour leurs prières incessantes de me voir réussir dans ma vie. C'est grâce à leur soutien moral et financier que je peux soutenir cette thèse.

- Je souhaite dire un merci doux et affectueux à ma compagne Djoumbissi Gomsu Sorelle et ma chère fille Onguene Coralie qui n'ont eu de cesse de me soutenir tout au long de ce travail.

- Je voudrais dire un merci spécial à mon grand frère Nkama Rodrigue, mes deux grandes sœurs Guiegou Nkama Felicite et Befieue Nkama Stephanie, ma petite sœur chérie Abidina Nkama Dorine. Vous m'avez tous soutenu financièrement comme moralement et spirituellement dans ce travail. En effet, vous m'avez encouragé à faire de mon mieux chaque jour un peu plus, soyez bénis.

- Je voudrais dire toute ma reconnaissance à Mle Mbang Eyezo'o Clémentine qui a cru en moi et qui a prié DIEU Tout Puissant tout au long de ce travail afin qu'Il me fortifie dans la finalisation de cette thèse.

- Je voudrais également dire toute ma gratitude à la grande famille de l'École Normale Supérieure de l'Université de Yaoundé 1, particulièrement à tous les enseignants quelque soit le département, qui m'ont encadré, enseigné, conseillé et encouragé durant mon séjour dans cette prestigieuse école, qui a fait de moi un grand professeur des lycées d'enseignement général (PLEG).

- Ma reconnaissance va aussi à l'endroit de mes promotionnaires de thèse, qui n'ont pas cessé de m'encourager chaque fois qu'ils me voyaient travailler sur cette thèse. Les séances de travail et d'échange avec eux lors des exposés concernant la présentation de l'avancement des travaux pendant les petits séminaires organisés au laboratoire par l'encadreur, m'ont donné l'opportunité d'entreprendre et d'approfondir mes recherches dans ce domaine. J'ai ainsi eu l'honneur d'enrichir mes expériences, d'où ma profonde gratitude.

- Je tiens particulièrement à dire toute ma gratitude au Dr. Fendzi Donfack Emmanuel, pour les multiples échanges fructueux et enrichissants, surtout, par ses multiples encouragements afin d'aboutir à la finalisation de ce travail de thèse.

- Je souhaite dire ma gratitude à l'équipe du laboratoire de simulation analogique (sous la supervision du Professeur Kenfack Aurélien) du Département de Physique de l'École Normale Supérieure de l'Université de Yaoundé 1 : Dr Fotsa Ngaffo Fernande, Dr. Fendzi Donfack Emmanuel, Dr Tala, Dr. Djoufack, Dr. Djob, Tikeng, Tabeu, Tagoueni, Azeghap Simo Ibrahim, Silatchom, Kamdoum, Njiké Njiké, Toutnoukeu, Tatsitsa, Mba, Tegua, Noupeyi.

- Je voudrais dire toute ma reconnaissance à ma belle famille ; la famille Djoumbissie qui a cru en moi et qui a prié DIEU Tout Puissant tout au long de ce travail afin qu'il me fortifie dans la finalisation de cette thèse.

- Je remercie gracieusement la famille du feu Nkono Alaka, qui m'a accueilli dès le début de ma formation académique et a toujours mis ma réussite dans leurs prières.

- Je remercie le Pasteur Jean Calvin et sa famille, qui ont toujours gardé une place pour moi dans leurs prières et m'ont soutenu tout au long de ce travail.

- Je voudrais dire toute ma profonde reconnaissance à mon oncle Bidias Eyaga pour son soutien moral et financier qui ma propulsé vers l'avant.

- Je remercie tout particulièrement mes amis, Megaptche Raissa, Teguemne Guy, Heuteu Crepin, Docgne Kamogne, Kamga Simo Guy Arnaud et Bissene Antoine pour leur amour fraternel et encouragements permanents.

- Je remercie toutes les personnes que je n'ai pas cité, mais qui de près ou de loin ont contribué à leur manière à la réalisation de ce travail ; recevez ma profonde reconnaissance.

Résumé

Cette thèse propose quelques dispositifs de réseaux mécaniques basés sur l'inerteur $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$ et $C7$ en disposition série ou série-parallèle avec ou sans rigidité négative pour le contrôle passif des vibrations d'une structure primaire à un degré de liberté non amorti (1DDL) sous excitation de base ou de force directement appliquée à la masse primaire. Les conditions nécessaires et suffisantes pour garantir la stabilité de la structure primaire incorporant les dispositifs de contrôle $C4$, $C6$ et $C7$ avec rigidité négative sont établies selon le critère de Routh-Hurwitz et la stabilité de frontière est obtenue. Les paramètres de réglage des dispositions $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$ et $C7$ sont déterminés sous excitation harmonique par la théorie des points fixes basée sur l'optimisation H_∞ et sur la base de l'optimisation H_2 en cas d'excitation aléatoire. Une comparaison entre les performances des dispositifs proposés dans cette étude et les amortisseurs conventionnels TMD (ou TDVA) et le TID est présenté, respectivement en termes de : (1) l'atténuation de l'amplitude des vibrations de la structure primaire pour les cas d'excitations harmonique, transitoire et aléatoire (bruit blanc), respectivement, (2) l'élargissement de la bande de suppression des vibrations en considérant l'excitation harmonique, (3) la stabilisation de la structure primaire en cas d'excitation transitoire et (4) la réduction du bruit généré par la structure primaire dans l'excitation aléatoire (bruit blanc).

Les résultats de cette étude ont démontré que sous excitation harmonique de la base du système primaire, les dispositions $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ surpassent le TMD (ou TDVA), respectivement, en termes de bande passante de suppression plus large et la réduction significative de l'amplitude maximale des vibrations de la masse primaire. Pendant ce temps, dans le cas de l'excitation aléatoire, ces dispositifs ont également surpassé le TMD (ou TDVA), respectivement, en termes de réduction de la réponse quadratique moyenne et l'historique de temps de la structure primaire. Par ailleurs, les dispositions $C1$ et $C2$ ont contribué à réduire le bruit généré par la structure sous excitation harmonique et aléatoire de la base de la structure primaire en comparaison avec la TDVA.

Dans le cas de l'excitation de force harmonique de la structure primaire, $C5$, $C6$ et $C7$ ont chacun surpassé le TID, respectivement, en termes de bande passante de suppression plus large et la réduction de l'amplitude maximale des vibrations de la masse primaire significativement, avec un espace d'installation plus réduit. Pendant ce temps, le $C7$ avec rigidité mise à la terre couplée à un mécanisme d'amplification d'inertance a présenté trois cas de figure sur la valeur du rapport de rigidité mise à la terre en fonction du changement du rapport d'amplification, c'est-à-dire négative, nulle et positive. Enfin, la comparaison supplémentaire entre les appareils $C5$, $C6$ et $C7$ et le TID sous l'excitation

de bruit blanc montre également que $C7$ est supérieur aux autres pour un rapport de masse donné. Théoriquement la configuration $C7$ avec la rigidité positive mise à la terre a les meilleurs performances de contrôle que ses deux autres cas et dans la comparaison avec les dispositifs $C5$, $C6$ et le TID.

Par ailleurs, la réponse libre du système primaire sous excitation transitoire a été évaluée avec les dispositifs $C3$, $C4$ et TMD, tandis que celle sous excitation sinusoïdale a été évaluée avec les dispositifs $C5$, $C6$, $C7$ et le TID, et des comparaisons ont été données. Dans les deux cas sur évoqués, les dispositifs $C3$, $C4$, $C5$, $C6$ et $C7$ par rapport à TMD et TID, respectivement, ont montré de meilleures performances de contrôle caractérisées par la plus petite amplitude de la réponse du système primaire et un temps de stabilisation plus court dans le cas de l'excitation transitoire en particulier. Cependant, pour les deux cas sur évoqués, les dispositifs $C4$, $C6$ et $C7$ avec rigidité négative mise à la terre ont encore une fois montré des performances de contrôle remarquable par rapport aux dispositifs $C3$, $C5$ sans rigidité négative, pendant que $C7$ dans son cas 3 avec rigidité positive mise à la terre, est supérieure à tous les autres dispositifs.

Finalement, les dispositifs avec rigidité négative mise à la terre ont montré une supériorité par rapport à ceux des dispositifs sans rigidité négative. Ainsi, la complexité du système de rigidité négative est également un facteur à prendre en compte dans l'ingénierie pratique. Cependant, obtenir une rigidité négative est difficile dans la pratique de l'ingénierie. Par conséquent, le dispositif $C7$ dans son cas 3 avec rigidité positive mise à la terre, qui a montré des performances très supérieures par rapport aux dispositifs C_i ($i=1,2,\dots,6$) avec ou sans rigidité négative, mérite une attention particulière dans cette thèse. Ce travail pourrait fournir une base théorique pour la conception d'isolateurs ou d'absorbeurs à base d'inerters avec ou sans rigidité négative.

Mots clés : Optimisation H_∞ , Optimisation H_2 , inerts, contrôle des vibrations, rigidité négative

Abstract

This thesis proposes some mechanical inerter-based networks $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$ and $C7$ in series or series-parallel arrangement with or without negative stiffness for passive vibration control of an undamped single-degree-of-freedom primary structure under base excitation or force excitation directly applied to the primary mass. The necessary and sufficient conditions to guarantee the stability of the $C4$, $C6$ and $C7$ devices with negative stiffness are established according to the Routh-Hurwitz criterion and the stability boundary is obtained. The parameters for setting the proposed $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$ and $C7$ devices are determined under harmonic excitation by the fixed points theory based on the H_∞ optimization and the H_2 optimization in case of random excitation. A comparison between the performance of the proposed devices in this study and conventional TMD (or TDVA) and TID dampers is presented in terms of : (1) reducing the peak vibration amplitude of the primary mass for the cases of harmonic, transient and random excitations (white noise), respectively, (2) the vibration suppression bandwidth considering harmonic excitation, (3) the stabilization of the primary structure in the event of transient excitation and (4) reduction of the noise generated by the primary structure in the random excitation (white noise).

The results of this study demonstrated that under harmonic excitation of the base of the primary system, the proposed $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ devices exceed TMD (or TDVA), respectively, in terms of suppression bandwidth more wide and the reduction of the maximum amplitude of the primary mass significantly. Meanwhile, in the case of random excitation, these devices also outperformed TMD (or TDVA) , respectively, in terms of reduction of the root mean square response and the time history of the primary structure. In addition, the proposed $C1$ and $C2$ device contributed to reduce the noise generated by the structure under harmonic and random excitation of the base of the primary structure in comparison with the TDVA.

In the case of harmonic force excitation of the primary structure, $C5$, $C6$ and $C7$ each surpassed the TID, respectively, in terms of suppression bandwidth more wide and reduction of the maximum amplitude of the primary mass significantly, with a smaller installation space (stroke length). Meanwhile, $C7$ with grounded negative stiffness coupled with an inerter amplification mechanism presented three boxes of figure on the value of the grounded stiffness ratio according to the change in amplification ratio, i.e. negative, zero and positive. Finally, the further comparison among these devices $C5$, $C6$ and $C7$ and TID under white noise excitation also shows that $C7$ is superior to the others for a

given mass ratio. Theoretically the $C7$ configuration with grounded positive stiffness has the best control performance than the other two cases and in the comparison with the devices of $C5$, $C6$ and TID.

Finally, the free vibration response of the primary system under transient excitation was evaluated with the devices $C3$, $C4$ and TMD, while that under sinusoidal excitation was evaluated with the devices $C5$, $C6$, $C7$ and TID, and comparisons have been given. In both cases on evoked, the devices $C3$, $C4$, $C5$, $C6$ and $C7$ compared to TMD and TID, respectively, showed better control performance characterized by the smallest amplitude of the primary system response and a stabilization time more cost in the case of transient excitation in particular. However, for the two mentioned above cases, the devices $C4$, $C6$ and $C7$ with negative grounded stiffness have once again again showed remarkable control performance compared to $C3$, $C5$ devices without negative stiffness, while $C7$ in its case 3 with positive grounded stiffness is superior to all other devices.

Finally, devices with negative grounded stiffness showed superiority over compared to those of devices without negative stiffness. Thus, the complexity of the negative stiffness system is also a factor to be considered in actual engineering. However, obtaining negative stiffness is difficult in engineering practice. Therefore, the device $C7$ in its case 3 with positive grounding stiffness, which showed much superior performance compared to devices C_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) with or without negative stiffness, deserves special attention in this thesis. This result could provide a theoretical basis for the design of inerter-base isolators or absorbers with or without negative stiffness.

Keywords : H_∞ optimization, H_2 optimization, inerter, vibration control, negative stiffness.

Table des matières

Citation	i
Dedication	ii
Déclaration	iii
Remerciements	iv
Résumé	vi
Abstract	viii
Table des matières	x
Liste des tableaux	xiii
Liste des figures	xv
Liste des abréviations	xxi
Introduction Générale	1
1 Revue de la littérature : Contrôle des vibrations et mécanisme d'amplification de masse	5
1.1 Introduction	5
1.2 Les vibrations	5
1.2.1 Les vibrations transitoires	6
1.2.2 Vibrations en régime permanent	7
1.2.3 Vibrations aléatoires	7
1.3 Méthodes de suppression des vibrations	8
1.3.1 Suppression passive des vibrations	8
1.3.2 Suppression active des vibrations	12
1.3.3 Suppression semi-active des vibrations	13
1.4 Suppression des vibrations basée sur l'inertier	14
1.4.1 L'inertier	14

1.4.2	Analogie force-courant	19
1.4.3	Approches conceptuelles des dispositifs passifs de suppression de vibrations	21
1.4.4	Quelques applications de l'inerteur	24
1.4.5	Mécanisme d'amplification de l'inertance de l'inerteur	26
1.5	Le contrôle des vibrations basé sur le mécanisme à rigidité négative	27
1.5.1	Conclusion	29
2	Matériels et méthodes : Modélisation mathématique, optimisation et simulation	30
2.1	Introduction	30
2.2	Modélisation mathématique	30
2.2.1	Isolation des vibrations à base d'inerteur	31
2.2.2	Isolation du bruit structurel à base d'inerteur	36
2.2.3	Absorption des vibrations à base d'inerteur	38
2.3	Optimisation des paramètres	43
2.3.1	Optimisation H_∞	43
2.3.2	Optimisation H_2	45
2.4	Simulation numérique	47
2.4.1	Les modèles mathématiques	47
2.4.2	La méthode de Runge-Kutta	51
2.5	Conclusion	52
3	Résultats et Discussions	53
3.1	Introduction	53
3.2	Réponse du système primaire avec $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) sous excitation de base harmonique.	53
3.2.1	La solution optimale H_∞ des dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) minimisant la fonction de transfert de conformité.	54
3.2.2	La solution optimale H_∞ des dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) minimisant la fonction de transfert de mobilité.	55
3.2.3	Comparaison des solutions optimales.	57
3.2.4	Comparaison entre la DVA traditionnelle (TDVA) et les isolateurs à base d'inerteur $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS).	58
3.3	Réponse du système primaire avec $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) sous excitation aléatoire de la base	62
3.3.1	La solution optimale H_2 pour minimiser la fonction de transfert de conformité	62
3.3.2	La solution optimale H_2 pour minimiser la fonction de transfert de mobilité.	63

3.3.3	Comparaison entre la DVA traditionnelle et les isolateurs à inerter $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS).	64
3.4	Réponse du système primaire avec $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) sous excitation de base	69
3.4.1	Résultats sur la conception de $C4$ (NSPIS)/ $C3$ (SPIS).	69
3.4.2	Effet des grandeurs μ et κ sur les paramètres de conception : valeurs limites et optimales sur κ .	71
3.4.3	Analyse des résultats sous le paramètre optimal κ_{opt}	73
3.4.4	Évaluation des performances des dispositifs $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) sous excitation harmonique de la base.	75
3.4.5	Évaluation des performances des dispositifs $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) sous excitation aléatoire de la base	78
3.5	Réponse du système primaire avec $C5$ (IVA), $C6$ (NGS-IVA) et $C7$ (AIGS-IVA) sous excitation de force	81
3.5.1	Résultats sur la conception des dispositifs $C5$ (IVA), $C6$ (NGS-IVA) et $C7$ (AIGS-IVA)	82
3.5.2	Analyse des résultats pour $C7$ (AIGS-IVA)	84
3.5.3	Comparaison des performances	88
3.6	Conclusion	97
	Conclusion Générale	98
	Bibliographie	101
	Liste des Publications	123

Liste des tableaux

1.1	Nouvelle correspondance entre réseaux électrique et mécanique.	20
2.1	$W(s)$ pour les configurations de la Fig. 2.2, où s désigne la variable de Laplace.	33
2.2	Tableau des coefficients de Routh.	35
2.3	$Y(s)$ pour les configurations de la Fig. 2.6, où s désigne la variable de Laplace et β le facteur d'amplification de l'inertance comme montré à la section 1.5.	40
3.1	Comparaison des paramètres optimaux dans l'optimisation H_∞	61
3.2	Comparaison des paramètres optimaux dans l'optimisation H_2	67
3.3	La variance et la diminution du déplacement et de la vitesse du système primaire.	68
3.4	Paramètres des conceptions optimaux des dispositions série-parallèles à système inerter avec ou sans rigidité négative pour les deux cas d'excitation.	70
3.5	Amplitudes normalisées du système primaire aux points fixes.	75
3.6	Bande passante de suppression des vibrations et les amplitudes maximales du système primaire avec TMD, C3 (SPIS) et C4 (NSPIS) sous $\mu = 0,05$	75
3.7	La variance et la diminution du déplacement du système primaire.	81
3.8	Paramètres du système dans différents cas de η_{opt}	85
3.9	Paramètres optimaux de divers types d'absorbeurs.	89

3.10	Les valeurs des paramètres utilisés dans la comparaison présentée.	89
3.11	Vibration amplitude of primary system at the fixed points when controlled by the four vibration absorbers.	91
3.12	La variance et la diminution du déplacement et de l'accélération du système primaire. .	96

Table des figures

1.1	Modèle de structure (système primaire de masse m_1) équipée d'une solution de contrôle passif TMD de type Frahm [6].	9
1.2	Modèle de structure (système primaire de masse m_1) équipée d'une solution de contrôle passif TMD de type Ormondroyd et Den Hartog [7].	10
1.3	Représentation schématique du dispositif à volant à deux bornes (b est la constante de proportionnalité équivalente à la masse.	15
1.4	Vue schématique d'un inerter fluide à tube hélicoïdal typique, reproduite à partir de [106].	16
1.5	Modèle de structure (système primaire) équipée d'une solution de contrôle passif (a) TMD de type Frahm [6] (b) et son modèle équivalent avec dispositif inerter mis à la terre.	17
1.6	Réalisation mécanique possible de l'inerteur comprenant un poussoir qui entraîne un volant rotatif à travers un système à crémaillère, pignon et engrenage à n engrenages. .	18
1.7	Représentation schématiques des mécanismes physiques simples utilisés pour produire un inerter : (a) mécanisme à vis à bielles et (b) mécanisme à crémaillère et pignon. . .	18
1.8	Exemple de vues schématiques de deux amortisseurs de vibrations typiques à base d'inerteur, (a) disposition parallèle-amortisseur-inerteur [117], (b) un ressort en parallèle avec une disposition d'amortisseur-inerteur série [117].	22
1.9	Mise en œuvre schématique d'une inertance amplifiée [170].	26
1.10	Illustration du mécanisme physique pour les appareils à raideur négative.(a) Ressorts précomprimés ou précontraints,(b) mécanisme magnétique,(c) pendules à friction à interface convexe et(d) ressort précomprimé à base de mécanisme à levier [183].	28

2.1	système d'isolement uni-axiale de vibration d'une structure primaire non amortie sous excitation de base.	31
2.2	Les réseaux mecaniques à base d'inerters utilisés comme $W(s)$ sur la Fig. 2.1.	32
2.3	système d'isolement uni-axiale de bruit d'une structure primaire non amortie sous excitation de base.	37
2.4	Les réseaux à base d'inerter utilisés comme $W(s)$ sur la Fig. 2.3.	38
2.5	Système d'absorption uni-axiale de vibrations d'une structure primaire non amortie sous excitation de force.	39
2.6	Les réseaux à base d'inerter utilisés comme $Y(s)$ sur la Fig. 2.5.	39
2.7	Representation graphique de la procédure 1.	44
2.8	Modèles de systèmes primaires isolés par les dispositifs (a) $C1$ (SPIS), (b) $C2$ (SIS) et (c) TDVA, respectivement.	48
2.9	Modèles de systèmes primaires isolés par les dispositifs (a) $C3$ (SPIS), (b) $C4$ (NSPIS) et (c) TMD, respectivement.	49
2.10	Modèles de systèmes primaires contrôlé par les absorbeurs $C5$, $C6$ et $C7$, respectivement.	50
2.11	Modèle de système primaire contrôlé par l'absorbeur TID.	50
3.1	Dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) candidat à l'isolation des vibrations.	54
3.2	Réponse en régime permanent du système primaire attaché aux isolateurs optimisés à base d'inerter pour divers rapport inertance/masse δ (trait plein : les fonctions de transferts de conformité , ligne pointillée : les fonctions de transfert de mobilité et ligne bleu : $\delta = 0,05$, ligne rouge : $\delta = 0,1$ et ligne noire : $\delta = 0,2$).	57
	(a) Dispositif $C1$ (SPIS)	57
	(b) Dispositif $C2$ (SIS)	57
3.3	Paramètres optimisés et indices de performances μ_T et μ_V minimisés pour les isolateurs à inerter.	58
	(a) Dispositif $C1$ (SPIS)	58
	(b) Dispositif $C2$ (SIS)	58

3.4	Comparaison entre la DVA traditionnelle et les isolateurs à base d'inertre par rapport au même rapport de masse (trait plein : la fonction de transfert de conformité, ligne pointillée : la fonction de transfert de mobilité) : (a) la réponse complexe en régime permanent lorsque $\delta = 0,2$ et (b) les indices de performances μ_T et μ_V minimisés (couleur rouge : TDVA, couleur verte C2 (SIS) et couleur bleue C1 (SPIS)).	59
(a)	59
(b)	59
3.5	Pourcentage d'amélioration des isolateurs à base d'inertre (Ligne continue : Fonction de transfert de conformité, ligne pointillée : fonction de transfert de mobilité) : En blue C1 (SPIS) et en vert C2 (SIS).	61
3.6	Comparaison entre les isolateurs à inertre et la DVA traditionnelle (trait plein : réponse en régime permanent du déplacement, ligne pointillée : la réponse en régime permanent de la vitesse). (a) la performance H_2 (rouge : TDVA, bleu : C1 (SPIS) et vert : C2 (SIS)); (b) pourcentage d'amélioration des isolateurs à inertre par rapport à la DVA traditionnelle (Bleu : SPIS et Vert : SIS).	65
(a)	Performance	65
(b)	Pourcentage	65
3.7	Rapport de rigidité optimal λ en H_2 optimisation (rouge : TDVA, bleu : C1 (SPIS) et vert : C2 (SIS).	65
3.8	Rapport d'amortissement optimal ζ dans l'optimisation H_2 (Rouge : TDVA, Bleu : C1 (SPIS) et Vert : C2 (SIS)).	66
3.9	(a) L'historique temporel de l'excitation aléatoire. Pour $\delta = 0.1$: (b) L'historique temporel du système primaire avec TDVA, (c) L'historique temporel du système primaire avec C1 (SPIS) et (d) L'historique temporel du système primaire avec C2 (SIS).	68
(a)	Accélération aléatoire	68
(b)	TDVA	68
(c)	C1 (SPIS)	68
(d)	C2 (SIS)	68
3.10	Dispositifs C3 (SPIS) et C4 (NSPIS) candidat à l'isolation des vibrations.	69
3.11	Représentation tridimensionnelle des variations des paramètres optimaux : (a), (b) et (c) pour base excitée par déplacement, et (d), (e) et (f) pour base excitée par accélération.	71

3.12	Les représentations graphiques des rapports de rigidité négatives optimaux pertinents pour chaque cas d'excitation de la base avec leur limite de stabilité.	73
(a)	Déplacement de la base excitée	73
(b)	Accélération de la base excitée	73
3.13	Effet de la rigidité négative et de l'inertance/masse sur les paramètres optimaux pour les deux dispositions <i>C4</i> (NSPIS) (lignes pointillées) et <i>C3</i> (SPIS) (lignes pleines) dans chaque cas d'excitation de la base. Ici, (a), (b) et (c) sont pertinents pour le déplacement de la base excitée, tandis que (d), (e) et (f) sont pour l'accélération de base excitée, dans lesquels (a), (b), (d) et (e) sont les rapports de rigidité et (c) et (f) sont les rapports d'amortissement.	74
3.14	Tracé de contour de l'amplitude du déplacement normalisée du système primaire avec <i>C4</i> (NSPIS) par rapport au rapport de masse μ pour $\kappa = \kappa^{opt}$	74
(a)	Déplacement de la base excitée	74
(b)	Accélération de la base excitée	74
3.15	Comparaison des amplitudes normalisées aux points fixes de la masse du système primaire contrôlée par les trois dispositifs TMD, <i>C3</i> (SPIS) et <i>C4</i> (NSPIS) pour différents rapports de masse ou rapport d'inertance/masse μ	76
(a)	Déplacement de la base excitée	76
(b)	Accélération de la base excitée	76
3.16	La comparaison entre TMD, <i>C3</i> (SPIS) et <i>C4</i> (NSPIS) dans la réponse en fréquence du système primaire sous des paramètres optimaux lorsque $\mu = 0, 05$	77
(a)	Déplacement de la base excitée	77
(b)	Accélération de la base excitée	77
3.17	Réponse transitoire des systèmes primaires sous $\mu = 0, 1$ pour la condition initiale (1,0,0,0).	78
(a)	Déplacement de la base excitée	78
(b)	Accélération de la base excitée	78
3.18	La comparaison des différentes réponses quadratiques moyennes du système primaire par rapport à μ dans l'accélération aléatoire de la base du système primaire.	79
3.19	Historique temporel de l'excitation aléatoire.	80
3.20	L'historique temporel du système primaire avec différent dispositifs. (a) sans contrôle (b) avec TMD (c) <i>C3</i> (SPIS) et (d) avec <i>C4</i> (NSPIS).	80

3.21	Dispositifs candidat à l'absorption des vibrations de la structure primaire.	81
3.22	Évolution en fonction du produit $\mu\beta^2$ (a) de l'amplitude des vibrations normalisées aux points fixes et (b) du rapport de rigidité négative optimale.	83
	(a)	83
	(b)	83
3.23	Relation entre le rapport de masse amplifiée et les paramètres optimaux.	84
3.24	Graphique de contour du facteur de grossissement d'amplitude normalisé du système primaire équipé de <i>C7</i> (AIGS-IVA) pour différents rapport $\mu\beta^2$	85
3.25	Le facteur de grossissement d'amplitude normalisé du système primaire équipé de <i>C7</i> (AIGS-IVA) dans trois cas différents de la rigidité η_{opt} mise à la terre.	86
3.26	Réponse transitoire au déplacement initial x_0 de la structure primaire.	86
3.27	Comparaison des performances de contrôle avec d'autres absorbeurs de vibrations.	90
3.28	Évolution des deux fréquences naturelles sans dimensions en fonction du rapport d'amplification β sous $\mu=0,1$	91
3.29	Réponse en fréquence du déplacement relatif entre la masse primaire et le point de partage du système à inerter.	91
3.30	Réponse en fréquence de la force totale transmise au sol.	92
3.31	Réponse du déplacement normalisé du système primaire sous une entrée d'excitation de force harmonique à la fréquence forcée $\Omega = 1,05$	93
3.32	L'historique temporel de l'excitation aléatoire et du déplacement du système primaire pour différents absorbeurs.	95
3.33	L'historique temporel de l'excitation aléatoire et de l'accélération du système primaire pour différents absorbeurs.	95
A.0.1	Courbes amplitude-fréquence du système principal associées au système inerter série-parallèle <i>C1</i> sous $\delta = 0,2$ et $\lambda = 4$	114

A.0.2 Les courbes amplitude-fréquence du système avec $C4$ (NSPIS) pour des paramètres comme $\mu = 0,05$, $\lambda = 0,05$, $\beta = 0,09$ et $\kappa = -0,07$ et (SBW) désigne la bande passante de suppression des vibrations. 118

A.0.3 Les courbes amplitude-fréquence du système $C4$ (NSPIS) avec des paramètres comme $\mu = 0,05$, $\lambda = 0,0536$, $\beta = 0,0957$ et $\kappa = -0,0786$ 119

Liste des abréviations

- TMD(s)** : Tuned mass damper inerter (Amortisseur(s) de masse accordée (réglée));
- DVA(s)** : Dynamic vibration absorber(s) (Absorbeur(s) de vibrations dynamique);
- TDVA(s)** : Traditional dynamic vibration absorber (Absorbeur de vibrations dynamique traditionnel);
- RMI** : Réseaux mécaniques à base d'inertier;
- TID** : Tuned inerter damper (Amortisseur à inertier réglé);
- 1DDL** : Un degré de liberté;
- MDDL** : Multiple degrés de libertés;
- SBW** : Suppression bandwidth (Bande passante de suppression de vibrations);
- SIS** : Series inerter system (Système inertier en série);
- SPIS** : Series parallel inerter system (Système inertier en série-parallèle);
- NSPIS** : Series parallel inerter system with negative stiffness (Système inertier série-parallèle avec rigidité négative);
- IVA(s)** : Inerter-based vibration absorber(s) (Absorbeur de vibrations à base d'inertier);
- NGS-IVA** : Inerter-based vibration absorber with negative grounded stiffness (Absorbeur de vibrations à base d'inertier avec rigidité négative mise à la terre);
- AIGS-IVA** : Inerter-based vibration absorber with negative grounded stiffness and amplified inerter (Absorbeur de vibrations à base d'inertier avec rigidité mise à la terre et inertance amplifiée);
- PSD** : Power spectral density (Densité spectrale de puissance);
- TVMD** : Tuned viscous mass damper (Amortisseur visqueux de masse accordée);
- TMDI** : Tuned mass damper (Amortisseur de masse accordée à inertier);
- MRN** : Mécanisme à rigidité négative
- NSDVA(s)** : Dynamic vibration absorbers with negative stiffness (Absorbeurs de vibrations dynamique avec rigidité négative);
- TPF** : Théorie des points fixes;
- TEPF** : Théorie étendue des points fixes.

Introduction Générale

Les vibrations présentes dans la plupart des constructions (structures) mécaniques d'ingénierie et de génie civil sont généralement indésirables, non seulement parce qu'elles peuvent produire des mouvements excessifs, du bruit et des contraintes dynamiques pouvant entraîner de la fatigue et des dommages aux structures mécaniques et de génie civil, mais aussi parce que ces vibrations peuvent réduire les performances de ces structures. La sécurité des structures mécaniques est donc le point clé des pratiques d'ingénierie. Il existe plusieurs procédures pour améliorer la performance des structures afin de garantir leur sécurité et le confort des occupants. Le contrôle des vibrations des structures est crucial pour confirmer leur protection en cas de forces dynamiques soudaines. Le but du contrôle des vibrations structurelles est d'éliminer et de contrôler les effets de vibrations indésirables (tels que les vents, les tremblements de terre, les mouvements du sol et autres) formées par des forces dynamiques qui pourraient potentiellement nuire aux performances de la structure. Le contrôle des vibrations fournit donc une analyse générale des structures dynamiques dans les applications d'ingénierie. Il en résulte des équations différentielles régissant le déplacement de chaque point de la structure. Ainsi, dans la pratique de l'ingénierie, l'indice d'évaluation des performances couramment mesuré est la minimisation de la fonction de transfert de déplacement de la structure principale. Le but de cette fonction d'évaluation est de minimiser la réponse de déplacement absolu du système primaire contrôlé par un dispositif d'absorption ou d'isolation de vibrations. Par conséquent, les techniques de contrôle des vibrations sont généralement classées en trois catégories : passives, semi-actives et actives. Les techniques de contrôle active permettent généralement d'obtenir de meilleures performances de contrôle que les techniques passives. Cependant, la dépendance vis-à-vis de l'alimentation externe, de la détection et de la rétroaction du système rend également les techniques de contrôle actif plus complexes, coûteuses et difficiles. Pendant ce temps, les solutions de contrôle passif sont favorables dans de nombreuses solutions pratiques en raison de leur simplicité, leur fiabilité, leur robustesse et leur faible coût. Une technique de contrôle passif des vibrations qui peut offrir des performances comparables au contrôle actif est hautement souhaitable dans les applications pratiques. Ainsi, les deux approches passives de contrôle des vibrations très courantes sont l'isolation des vibrations, l'insertion d'un isolateur de vibrations entre la source et le récepteur des vibrations (système primaire ou principale) et l'absorption des vibrations, la fixation d'un absorbeur de vibrations (une masse ou un système secondaire) au système considéré comme une structure primaire.

Au cours de ces trois dernières décennies, l'incorporation de divers dispositifs tels que les isolateurs de base des structures, équipements dissipatifs d'énergie (par exemple, amortisseurs visqueux, amortisseurs à friction, etc.) et l'amortisseur de masse réglée (TMD) (tuned mass damper) encore appelé amortisseur dynamique de vibrations (DVA) (dynamic vibration absorber) a été étudiée par divers chercheurs et appliquée dans la pratique du contrôle passif du mouvement vibratoire des structures en maintenant leur amplitude en dessous d'un certain seuil acceptable [1–4]. Cependant, l'un des dispositifs de contrôle des vibrations masse-amortisseur-ressort largement utilisé en raison de son efficacité, de sa facilité d'installation et de nombreux autres avantages est l'amortisseur dynamique de vibrations (DVA) ou amortisseur de masse réglé (TMD). En tant que dispositif passif, le TMD est un système auxiliaire masse-ressort-amortisseur qui, lorsqu'il est correctement réglé et attaché à un système de vibration soumis à une excitation dynamique, provoque l'arrêt du mouvement en régime permanent au point auquel il est fixé. Le premier TMD sans amortisseur a été à l'origine introduit et développé par Frahm [5], mais n'était utile que dans une plage de fréquences étroite très proche de la fréquence naturelle du TMD. Pour étendre la gamme de fréquences et limiter la réponse maximale du système primaire, Ormondroyd et Den Hartog [6] ont proposé le TMD avec amortisseur, et a été considéré comme un modèle standard de DVA, connu sous le nom de DVA de type Voigt, DVA traditionnel (TDVA) ou classique. Bien après, plusieurs autres dispositifs de contrôle des vibrations masse-ressort-amortisseur ont été développés et étudiés [7–12].

Bien que les systèmes de contrôle des vibrations masse-ressort-amortisseur [7–12], aient été largement utilisés, dans la pratique de l'ingénierie [13], il existe des limitations inhérentes à la quantité d'absorption ou d'isolation des vibrations qu'ils peuvent atteindre. L'inconvénient majeur de ces dispositifs est que leurs performances d'absorption des vibrations dépendent d'un rapport massique élevé entre la masse de la structure contrôlée et celle de l'absorbeur ou isolateur [14]. Ils sont assez limités lorsque le rapport massique est petit [15]. Pour ce dernier cas, le TMD produit deux fréquences propres proches, ce qui nuit au contrôle des vibrations. De plus, dans la performance sismique, par exemple, voir [16–18], les systèmes TMDs (ou DVAs) ne sont pas robustes contre la variation des paramètres de la structure et l'excitation du sol; le désaccord ou mauvais réglage des paramètres du système peut réduire l'efficacité des systèmes contrôlés par le TMD. Le TMD a besoin d'une masse relativement importante pour être efficace, ce qui est associé à des inconvénients importants (par exemple, des problèmes pratiques et des conflits avec l'architecture de la structure, pour ne citer que cela), et les exigences de dérive sur le TMD elle-même sont généralement importantes. Pour résoudre ces problèmes, diverses stratégies différentes ont été employées telles que l'utilisation de plusieurs TMDs ou DVAs disposés en série ou en parallèle [18–21] et de l'hystérétique amortisseur à la place de l'amortisseur linéaire [22]. Ces stratégies offrent des performances améliorées par rapport aux TMDs classiques, mais elles ajoutent une couche supplémentaire de complexité; une conception et/ou le réglage optimal devient une tâche difficile et complexe en

termes de calcul, et d'espace d'installation. Ces systèmes sont également limités par un faible rapport massique. A cet égard, il convient de noter que, peut-être, le moyen le plus simple d'améliorer les performances et la robustesse des systèmes de contrôle de vibrations est (1) de concevoir de nouveaux systèmes à masse secondaire équivalente beaucoup plus importante incluant de nouvelles propriétés d'inertie, pour lesquelles une conception optimale est recherchée en remplaçant totalement la masse des DVAs. En effet, plus la masse secondaire considérée réelle ou apparente est grande, plus le système de contrôle conçu de manière optimale devient efficace pour supprimer les vibrations excessives de la structure primaire. (2) d'envisager de nouvelles propriétés des ressorts ayant des caractéristiques de raideur négative pour dissiper d'avantage l'énergie de vibration de la structure contrôlée, afin d'améliorer le contrôle des vibrations [23–26].

Motivé par ces dernières observations, cette thèse considère un nouveau dispositif mécanique d'amplification de masse, baptisé "inertter" par Smith [27], pour le développement de nouveaux réseaux mécaniques de contrôle de vibrations et d'envisager l'amélioration des performances de contrôle des structures. Les réseaux mécaniques ainsi proposés exploitent l'effet d'amplification de masse apparent de l'inertter et agissent de la même manière qu'un TMD (ou DVA) mais, avec une masse secondaire apparente appelée inertance dont l'unité est le kilogramme. L'inertter est un dispositif à deux bornes développant une force de résistance proportionnelle à l'accélération relative de ses terminaux (bornes), pour obtenir un meilleur contrôle de vibrations par rapport aux TMDs pour la même masse secondaire attachée (respectivement masse secondaire apparente). Le coefficient de proportionnalité est appelé inertance. Cependant, le bénéfice de l'inclusion d'un ressort à coefficient de raideur négatif mis à la terre dans ces réseaux mécaniques à base d'inertter proposés est également un point fort dans cette thèse [28, 29].

Dans ce contexte, les équations de mouvement sous-jacentes pour les structures primaires à 1DDL équipées de réseaux mécaniques linéaires proposés sont d'abord introduites dans la thèse. On démontre que ces réseaux mécaniques à base d'inertter constituent une généralisation des TMDs. Ensuite, les techniques d'optimisation standard utilisées pour les TMDs classiques sont appliquées pour dériver les paramètres optimaux des systèmes de contrôle. L'accent est mis sur les performances de contrôle des vibrations des systèmes primaires 1DDL sous contrôle optimal, par rapport à celle obtenue par le TMD classique ou traditionnel. En particulier, une partie importante de cette thèse est axée sur la dérivation analytique des expressions de formes fermées pour une conception optimale des paramètres de réglage, dans le cas des systèmes primaires à un seul degré de liberté (1DDL) excités harmoniquement ou stochastiquement (aléatoirement). Cependant, les dispositifs de contrôle conçus de manière optimale dans cette thèse sont appliqués d'une part pour le contrôle des déplacements verticaux de la structure primaire considérée (indice d'évaluation dans la pratique de l'ingénierie) et d'autre part, pour réduire les bruits générés par celle-ci, en minimisant la vitesse de son déplacement. Ceci a été réalisé en minimisant les fonctions de transferts de déplacement et de vitesse de la structure primaire 1DDL

considérée [30, 31], encore appelées fonction de transfert de conformité et fonction de transfert de mobilité, respectivement.

Cette thèse comprend trois chapitres et une annexe suivis de la liste des références citées et des articles publiés. Après avoir présenté la motivation et les objectifs des travaux entrepris, le chapitre premier fournit un bref aperçu sur les types de vibrations, les méthodes de contrôle, en se concentrant sur le contrôle passif basé sur l'inertier et ses applications en génie des structures et dans la pratique de l'ingénierie.

Au chapitre 2, les méthodes utilisées pour atteindre nos objectifs sont présentées. Premièrement, les équations de mouvement et les fonctions de transferts pertinentes pour les configurations de réseaux mécaniques proposés sont dérivées pour le cas des systèmes primaires linéaires à un seul degré de liberté (1DDL) dynamiquement excitée. Une analyse de la stabilité pour les structures primaires avec dispositif de contrôle incluant une rigidité négative est effectuée. En suite, les méthodes d'optimisation sont présentées en détail tour à tour pour concevoir de manière optimale les configurations d'absorbeurs ou d'isolateurs proposées. Enfin, les expressions analytiques sont dérivées sous forme fermée pour les paramètres optimaux minimisant les fonctions de transfert de déplacement et de vitesse, respectivement dans le cas particulier des structures primaires 1DDL non-amorti excitées harmoniquement. De plus, des expressions analytiques pour les paramètres optimaux minimisant la réponse quadratique moyenne (la variance de déplacement et de vitesse) pour le cas particulier des structures primaires 1DDL non-amorti excités par bruit blanc à large bande sont également obtenus.

Le chapitre 3 est consacré à la présentation et l'analyse des résultats obtenus à partir des méthodes de conception analytique. Par simulation numérique dans les domaines fréquentiel et temporel, les performances de contrôle des configurations optimales proposées dans cette thèse sont comparées aux configurations classiques optimales existantes, suivant les indices de performances évalués.

Ce travail s'achève par une conclusion générale où nous présentons l'essentiel des résultats obtenus ayant fait l'objet de publications ou d'articles soumis. Toutefois, à l'analyse profonde des résultats présentés, des perspectives sont à envisager.

Revue de la littérature : Contrôle des vibrations et mécanisme d'amplification de masse

1.1 Introduction

La suppression des vibrations indésirables est cruciale pour maintenir et améliorer les performances de systèmes d'ingénierie, tels que les structures aérospatiales, automobiles et civiles. Actuellement, la tendance croissante vers des structures plus légères et plus flexibles donne lieu à davantage de problèmes de vibrations. Par conséquent, la nécessité d'améliorer la capacité des systèmes de suppression des vibrations devient de plus en plus pressant. Des efforts de recherche antérieurs ont été faits sur la conception de divers systèmes de suppressions de vibrations pour différentes applications. Par conséquent, cette section commence par un examen de plusieurs problèmes de suppression des vibrations en termes de comportement vibratoire et de techniques de suppression. Par la suite, nous mettons en évidence la suppression des vibrations basée sur l'inertier (entendu par dispositif d'amplification de masse) dans le contexte de suppression passif des vibrations, et pressentons quelques de ses applications.

1.2 Les vibrations

Les vibrations en général sont des mouvements oscillatoires d'un objet ou d'un ensemble d'objets par rapport à un référentiel stationnaire ou point d'équilibre [32]. Un phénomène de vibration se produit dans un large éventail de structures d'ingénierie et peut être souhaitable ou indésirable. Il est important de réduire les vibrations indésirables car elles peuvent détériorer les performances de fonctionnement du système, produire une charge de fatigue et conduire extrêmement à une défaillance de la structure. La conception des mécanismes de suppression des vibrations dépend des exigences de performance pour des applications spécifiques d'ingénierie, qui sont déterminées par la nature des problèmes [33]. Dans cette section, nous explorons trois types notables de comportement vibratoire soumis à différents excitations, accompagnées d'exemples typiques correspondant à chaque type. Cela sera suivi, dans la section 2.2, en considérant les types de méthodes de suppression ces vibrations disponibles pour limiter ces réponses indésirables.

1.2.1 Les vibrations transitoires

Les réponses transitoires font normalement référence au mouvement d'un système qui est soudainement perturbé par une excitation déterministe mais apériodique [34]. De telles excitations peuvent avoir des durées courtes ou longues et les réponses transitoires générées devraient disparaître après une période de temps [35]. Les vibrations transitoires sont normalement mesurées par la technique du domaine temporel. Différents critères temporels peuvent être proposés pour mesurer un tel mouvement, y compris l'amplitude maximale des vibrations et le taux de décroissance. La surcharge causée par une grande amplitude d'oscillations peut endommager la structure ou entraîner une défaillance extrême.

Le mouvement généré par le choc ou l'impact initial est un type typique de vibrations transitoire, par exemple, lors de l'atterrissage d'un avions. Au cours de ce processus, les charges de l'impact à l'atterrissage sera le plus atténué grâce à la dynamique du train d'atterrissage pour éviter d'endommager la structure de la cellule, l'inconfort des passagers et/ou l'équipage, ainsi que des dommages à la piste [36]. Toutes ces compréhensions sont rapportées dans [37–42]. Les vibrations de la machine causées par des charges d'impact, telles que le marteau de forge, le poinçonnage, les processus de démarrage et d'arrêt, sont aussi typiquement des vibrations transitoires. Il est important de concevoir une fondation de machine fiable pour réduire ces perturbations de l'appareil et du milieu environnant [43].

Outre la courte période d'excitations initiales, des réponses transitoires peuvent également être déclenchées par une durée d'entrées. Un exemple notable est le mouvement des véhicules circulant sur les irrégularités de la route telles que bosses, creux et dos d'âne, etc. L'accélération maximale qui en résulte de la carrosserie du véhicule doit être suffisamment réduite compte tenu de l'inconfort des passagers [44]. Un autre exemple est les vibrations du profil aérodynamique causées par des rafales de vent soudaines et la charge importante qui en résulte peut causer une gêne aux passagers et des dommages structurels à l'aéronef [45]. L'aéronef doit satisfaire au critère de conception de la charge de rafale, par exemple, résister aux charges de rafale du "pire cas" identifiées dans le domaine temporel sur la base de profils de rafales discrets (un cosinus) [46].

Plutôt qu'un choc ou un impact initial, les réponses transitoires peuvent également être excitées par une perturbation, telle qu'une perturbation soudaine d'une structure à un degré de liberté (1DDL) ou Multiple degrés de libertés (MDDL) pour provoquer une condition d'état initial non nul de la structure. des méthodes de conception pour accélérer la décroissance rapide de la réponse transitoire de ces types de structures sont abordés dans Xiang et Nishitani [47]. Les auteurs ont montré que pour un Système 2DDL, cette décroissance rapide sera maximisé, c'est-à-dire que la réponse transitoire sera optimisée en faisant coïncider les deux paires de valeurs propres conjuguées complexes de l'équation caractéristique de la structure considérée.

1.2.2 Vibrations en régime permanent

Il existe de nombreuses structures d'ingénierie sujettes à des vibrations forcées en régime permanent, conduisant à une rupture par fatigue [48]. Afin d'assurer la durabilité et la sécurité de la structure, la suppression des vibrations en régime permanent a également attiré une grande attention des chercheurs [49]. Pour le mouvement en régime permanent, bien qu'il puisse être simulé avec la méthode du domaine temporel, cela peut prendre du temps si le système a besoin de beaucoup de temps pour atteindre l'état stable. Ainsi, la méthode du domaine fréquentiel est toujours utilisée pour analyser le mouvement en régime permanent, qui transfère les réponses du domaine temporel au domaine fréquentiel (exemple de la transformation de Fourier ou Laplace) et présente l'état du mouvement par rapport à la fréquence.

Un exemple typique de vibrations forcées en régime permanent est celui induit par le forçage interne, comme dans les moteurs à combustion [50]. Dans [51], les auteurs ont résumé deux types de perturbations du moteur, y compris l'impulsion d'allumage et la force d'inertie et le couple du moteur. Ces excitations internes sont périodiques [50] et se réfèrent généralement à deux types spécifiques d'entrées sur des gammes de fréquences différentes. Pour les véhicules de tourisme modernes, la conception et la mise en œuvre du système de montage du moteur sont essentielles pour améliorer les performances en termes confort de conduite, d'isolation des vibrations et réduction du bruit. En raison de la forte tendance vers des carrosseries plus légères et plus flexibles et de l'exigence d'efficacité énergétique, des moteurs plus petits et plus légers mais ne compromettent pas sa puissance sont nécessaires, comme indiqué dans [52]. Cela donne lieu à plus de problèmes de vibrations et de bruit, de sorte que l'amélioration de la capacité des supports de moteur devienne encore plus importante.

L'excitation de base, comme les entrées routières inégales harmoniques, est également une source de perturbations générant des vibrations forcées en régime permanent. De nombreuses recherches ont porté sur les vibrations du véhicule induites par le profil harmonique de la route, voir [53] à titre d'exemple. Un autre type de réponse en régime permanent est excité par un forçage externe périodique. Pour exemple, Van der Tempel [54] a analysé les dommages de fatigue d'un éolien offshore monopile dus à la charge régulière des vagues. La structure de support doit être soigneusement conçue pour résister à une telle charge. Les excitations de base ou de force (comme entrée harmonique) des structures primaires à 1DDL sont également traités dans [4] pour augmenter les performances de la structure.

1.2.3 Vibrations aléatoires

Dans les sections 1.2.1 et 1.2.2, les vibrations transitoires et stationnaires sont explorées, avec quelques exemples typiques. Les oscillations aléatoires sont considérées comme une classe spéciale des vibrations se produisant fréquemment dans une large classe de

structures d'ingénierie. Les applications sont nombreuses dans les industries de transport, de l'aéronautique, du spatial, de l'énergie et du génie civil : tenue mécanique des structures soumises au vent, à la houle ou aux séismes, réduction des niveaux vibratoires ou acoustique, estimation de la durée de vie des équipements.

Afin d'assurer la durabilité et la sécurité des structures y compris leurs occupants, la suppression des vibrations aléatoires qui peuvent être causées par les effets sur-cités a fait objet d'une grande attention dans la littérature. Dans le domaine du génie civil, des études sur la tenue mécanique des structures (bâtiments) soumises au vent, ou aux tremblements de terre (séismes et autre) ont été proposées et des systèmes mécaniques de contrôle de ces effets indésirables ont été proposés à cet égard [16–19, 21].

Dans la plupart des recherches [9, 10, 28], le système de contrôle est défini de manière optimale en minimisant la réponse quadratique moyenne de la structure considérée sous excitation à large bande. Les méthodes d'évaluation de cette fonction quadratique sont abordées de différentes manières dans [9, 55–57]. Il convient de mentionner que cette approche conceptuelle a été introduite par Crandall et Mark [58].

1.3 Méthodes de suppression des vibrations

Plusieurs stratégies de suppression, qui sont globalement classées en trois types : passive, actifs et semi-actifs, ont été proposées et utilisées pour la suppression des vibrations. Chaque technique a une gamme raisonnable d'applications. Plutôt que de fournir un examen, cette section présentera une brève introduction de ces techniques, ainsi que quelques applications notables.

1.3.1 Suppression passive des vibrations

Le moyen passif le plus simple de supprimer les vibrations consiste à modifier la structure, comme choisir la masse, la rigidité et l'amortissement appropriés de la structure [33]. Cependant, l'efficacité de modifications structurelles sont souvent limitées car des critères de performance complexes ne peuvent pas être tous satisfaits et les contraintes pratiques sur les paramètres de la structure doivent être prises en compte. Une approche alternative courante, consiste à ajouter des dispositifs passifs de suppression des vibrations aux structures oscillantes tels que des absorbeurs ou isolateurs.

L'idée d'attacher une masse supplémentaire libre de mouvements à des systèmes structurels excités dynamiquement (structures primaires) pour supprimer leur mouvement oscillatoire est historiquement parmi les premières stratégies de contrôle passif des vibrations dans le domaine de la dynamique structurelle [6, 7, 59, 60]. Cette idée repose sur la conception (réglage) des dispositifs mécaniques qui relient la masse ajoutée à la structure primaire pour réaliser un mouvement déphasé (résonnant) de la masse principale. Dans ce contexte, Frahm [6] a introduit l'utilisation d'un système masse-ressort linéaire pour supprimer les oscillations des systèmes structurels primaires à excitation harmonique dans

la marine et applications de génie mécanique (voir Fig. 1.1). Ce premier absorbeur de vibrations dynamique était capable de réduire les oscillations des structures primaires à un seul degré de liberté (1DDL) dans une plage étroite centrée sur une fréquence d'excitation particulière (pré-spécifiée). Dans la Fig. 1.1, le système constitué des éléments m_1 et k_1 est la structure primaire où m_1 est la masse et k_1 la raideur du ressort de support. Les éléments m_2 et k_2 constituent le système secondaire de suppression des vibrations attaché à la structure primaire avec m_2 la masse et k_2 la raideur du ressort d'attache.

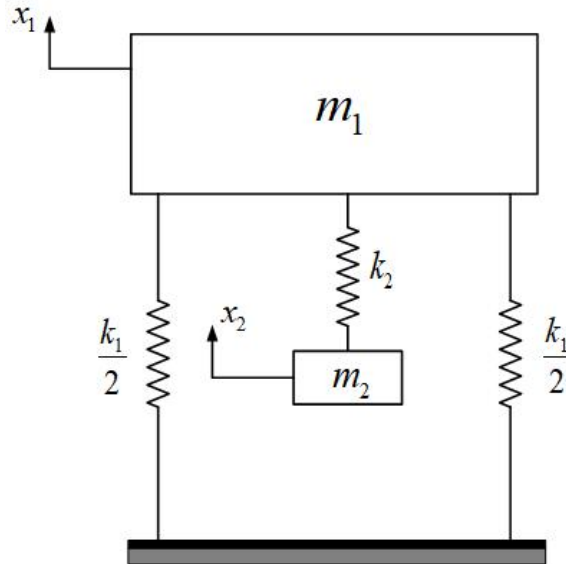


FIGURE 1.1 – Modèle de structure (système primaire de masse m_1) équipée d'une solution de contrôle passif TMD de type Frahm [6].

Plus tard, Ormondroyd et Den Hartog [7] ont amélioré l'efficacité de l'absorbeur ci-dessus pour dissiper l'énergie cinétique de la structure primaire en ajoutant un amortisseur visqueux (dashpot) parallèlement au ressort linéaire k_2 . Ce dispositif est désormais connu sous le nom d'amortisseur de masse réglé (TMD) ou DVA de type Voigt ou encore amortisseur dynamique de vibration traditionnel (TDVA) et est illustré à la Fig. 1.2.

Trouver les paramètres optimaux du TMD conventionnel, pour la structure primaire à un seul degré de liberté (1DDL) (voir Fig. 1.2) a attiré l'attention de nombreux chercheurs. L'une des méthodes est basée sur l'optimisation H_∞ qui vise à minimiser le maximum d'amplitude atteint par le mouvement de la structure primaire. D'autre part, une procédure empirique pour la conception optimale du TMD, c'est à dire la dérivation des expressions analytiques de formes exactes pour les paramètres du TMD a été établie par Den Hartog [60, 61] et Brock [59]. Ces méthodes permettent de régler les propriétés de l'amortissement c et de la rigidité k_2 pour une masse m_1 et une raideur k_1 a priori spécifiée du système primaire. L'objectif est tel que la fixation du TMD minimise (réduit) le déplacement de crête de la structure primaire 1DDL non amorties à excitation harmonique (voir [62]). Cette procédure de conception ou réglage repose sur l'hypothèse du "point fixe" qui stipule que toutes les courbes de réponse en fréquence du système dynamique à 2DDL résultant passe par deux points spécifiques ; l'emplacement de ces

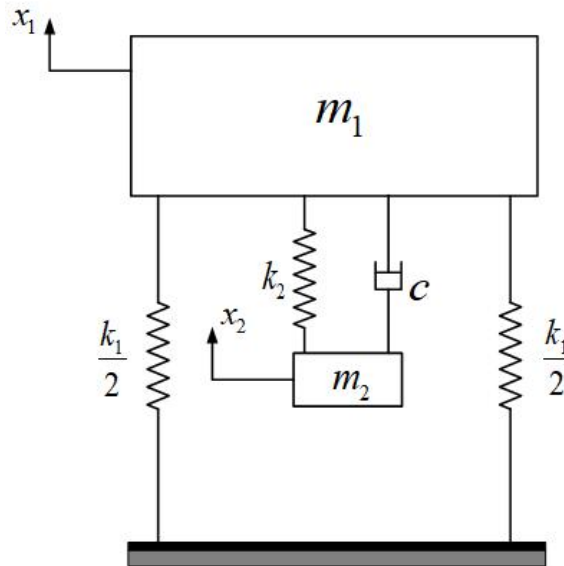


FIGURE 1.2 – Modèle de structure (système primaire de masse m_1) équipée d’une solution de contrôle passif TMD de type Ormondroyd et Den Hartog [7].

points étant indépendant du coefficient d’amortissement du dashpot. Ainsi, le dispositif amortisseur-masse-ressort réglé, communément appelée dans la littérature amortisseur de masse accordé (réglée) (TMD) ou amortisseur dynamique de vibrations (DVA), permet de supprimer le mouvement oscillatoire des structures primaires à excitation harmonique sur une plus large gamme de fréquences d’excitation par rapport au dispositif masse-ressort attaché de Frahm [6]. Plus loin, la procédure de réglage basée sur des points fixes s’est avérée très proche à la solution “exacte” pour le réglage optimal du TMD classique (Nishihara et Asami [63]). Cependant, pour le cas des structures primaires à 1DDL amorties, la théorie du point fixe n’est pas applicable et la dérivation des paramètres TMD optimaux sous forme exacte devient une tâche difficile (voir par exemple Nishihara et Asami [63]; Asami et al [64]). Néanmoins, les techniques d’optimisation numérique sont appliquées en pratique pour une conception optimale du TMD [65–67].

Pour étendre l’application de l’amortisseur de masse réglée TMD dans l’ingénierie sismique, Warburton [69] a dérivé les paramètres TMD optimaux basés sur la théorie des points fixes pour le cas des structure à 1DDL non amorties à excitation de base harmonique. De plus, d’importants travaux de recherche ont été consacrés à l’étude du potentiel d’utilisation du TMD classique pour atténuer le mouvement de la structure primaire excité stochastiquement. En utilisant des techniques analytiques standard, les paramètres TMD optimaux peuvent être facilement obtenu sous formes exactes en tant que fonction de la masse du TMD pour minimiser la variance de réponse des structures primaires à 1DDL non amorties soumises à une excitation de support de bruit blanc [68, 69]. Cependant, pour le cas des structures primaires 1DDL amorties soumises à des excitations de support stochastiques, la dérivation des paramètres TMD optimaux par des approches analytiques devient également une tâche difficile. A cette fin, des techniques d’optimisation numérique sont couramment utilisées pour une conception optimale du TMD afin de minimiser la

réponse de la variance pour ces structures primaires [65, 70–72]. Alternativement, des solutions approximatives simplifiées pour le problème en question ont été atteintes en faisant l’hypothèse de structures primaires “légèrement” amorties [73, 74]. Dans le même esprit, plusieurs chercheurs ont proposé différentes méthodes approximatives simplifiées et numériques pour la conception du TMD pour structures primaires linéaires amorties à multiple degrés de liberté (MDDL) sous excitation de base stochastique. Ces différentes méthodes sont largement utilisées pour modéliser les structures de bâtiments à plusieurs étages à excitation sismique [75–78]. Notons que la conception optimale du TMD pour la suppression des vibrations dans les structures primaires linéaires à multiples degrés de liberté (MDDL) sont une tâche simple car, en pratique courante, le but est de contrôler les vibrations selon une seule forme du mode structurel unique (le dominant) [76].

Bien que des arrangements alternatifs de ressorts linéaires et d’amortisseurs visqueux ont été envisagés dans la littérature pour fixer une masse aux structures primaires (voir par exemple [79, 80] et leurs références), la configuration TMD classique discuté ci-dessus (masse fixée via un ressort et un amortisseur en parallèle) est le plus étudié dans la littérature et le plus couramment utilisé pour le contrôle passif des vibrations de diverses structures de génie civil et mécanique et des Composants structurels.

Ces dernières années, plusieurs stratégies différentes ont été utilisées pour améliorer les performances du TMD classique pour la suppression passive des vibrations des systèmes structurels y compris l’utilisation de plusieurs TMD classiques (voir par exemple [18–20, 71, 81] et les références y figurant), l’incorporation d’amortisseurs visqueux non linéaires à la configuration TMD classique [56], la prise en compte des TMDs hystérétiques [22], et l’inclusion de rigidités négatives dans les différentes configurations masse-ressort-amortisseur de TMDs [15, 23–26]. Ces stratégies offrent des performances améliorées par rapport au TMD classique. Cependant, une conception ou un réglage optimal devient une tâche difficile et compliquée par le calcul, en particulier pour les structures primaires à MDDL amorties. Pour les structures primaires à 1DDL non amorties contrôlés par un TMD incluant une rigidité négative, la conception optimal suivant les procédures standard est parfois simple mais, l’implémentation d’une rigidité négative est très complexe et difficile à réaliser dans les pratiques d’ingénierie. De plus ces types de systèmes sont potentiellement instables et causent d’importants déplacements dans la région des basses fréquences de la réponse en fréquence de ces structures primaires. Néanmoins, la justification de son utilisation dans le contrôle des vibrations des structures primaires pourrait être double : réponses en fréquences améliorées sur une plus grande zone autour de la résonance et une réponse quadratique moyenne cumulative réduite du système primaire [25]. En outre, les résultats analytiques et numériques rapportés dans la vaste littérature pertinente suggèrent que l’efficacité du TMD pour l’atténuation des vibrations des structures augmentent en augmentant la masse du TMD attachée. C’est particulièrement le cas pour les excitations haute intensité de support de structures primaires [78, 83].

En effet, plus la masse attachée considérée est grande, plus le TMD conçu de manière

optimale devient efficace pour supprimer les vibrations excessives de la structure primaire au prix d'une augmentation du poids total du système structurel [84]. À cet égard, des études récentes se concentrent sur des configurations non conventionnelles qui ont en commun l'emploi de masses de TMD significativement grandes, pouvant atteindre l'ordre de 15% à 100% de la masse totale de la structure primaire [77, 78, 83–86]. Cela peut être réalisé par l'utilisation de sous-structures utilisées comme absorbeurs de vibrations autonomes dans immeubles de grande hauteur, comme proposé par Feng et Mita [84] où il est montré que l'utilisation de cette " Configuration de méga-sous-structures " avec des masses pouvant atteindre 100% de la masse du corps principal de la structure, améliore considérablement la réponse sismique des structures primaires. Il est prouvé que l'utilisation de TMD de grande masse améliore la robustesse en termes d'incertitudes des paramètres. De la même manière, de grands TMDs sont également proposé dans Angelis et al [78], avec des masses égales à 72% de la masse du système primaire. L'étude est réalisée au moyen d'analyses numériques et d'essais expérimentaux. Il est à conclure que les TMDs de grande masse entraînent de plus grandes réductions de la réponse structurelle par rapport aux conventionnels. La solution proposée se révèle également plus robuste contre les écarts des paramètres optimaux résultant d'incertitudes dans les propriétés structurelles. Des TMDs de grande masse sont également utilisés dans [83] pour le cas d'une structure 1DDL sur un exemple de conception pour la modernisation sismique d'un pont en treillis à longue portée. Une masse TMD égale à 77% de la masse totale de la structure primaire est proposée. Ses performances se sont avérées plus robustes par rapport aux incertitudes des paramètres structurels du système ainsi du contenu en fréquence d'excitation. De plus, le concept de toit-jardin à pendule roulant TMD (RPTMD) est introduit par Matta et De Stefano [85, 86] où de grandes masses non structurelles déjà disponibles au sommet des bâtiments sont transformées en TMD. Les incertitudes de masse survenant dans le TMD sont inspectées au moyen d'une analyse robuste. Les mêmes auteurs [86] proposent une comparaison entre le pendule roulant précédemment proposé et la configuration classique TMD translationnelle.

Étant donné qu'une grande masse de TMD conduit à une augmentation indésirable du poids qui doit être supporté par la structure primaire en utilisant des solutions structurellement sophistiquée [77, 78, 83–86], il est possible de rechercher des moyens de réduire la masse du TMD attachée pour faciliter la conception structurelle pratique, tout en maintenant l'efficacité bien documentée des TMDs de grandes masses pour atténuer les mouvements de forces soudaines associées aux mouvements du sol, mouvements de vents et autres, induite modéré ou grave. En attendant, des techniques de suppression active et semi-active des vibrations sont présentés dans la suite.

1.3.2 Suppression active des vibrations

La méthode active est également un moyen populaire de supprimer les vibrations avec des recherches importantes à partir des années 1970. Différente de la technique de sup-

pression passive, la méthode active réduit les vibrations en utilisant une force active sous la forme d'un actionneur. Un tel système nécessite une alimentation supplémentaire au système pour générer un mouvement, plutôt que d'absorber de l'énergie pour résister à un mouvement comme dans le cas des appareils passifs. Ces forces actives varieront en fonction des états actuels du système, qui sont normalement mesurés par des capteurs, et sont conçus pour fonctionner dans une large gamme de conditions d'excitation et de fonctionnement. Une loi de commande est utilisée pour déterminer la force de l'actionneur appropriée en fonction des signaux du capteur. Si les lois de contrôle sont soigneusement conçues, un tel système surpasse les dispositifs passifs. A titre d'exemple, voir [87] dans la comparaison utilisant un modèle de bâtiment à plusieurs étages. Cependant, des exigences matérielles et électriques plus coûteuses entraînent un coût élevé de ces systèmes de suppression active de vibrations. De plus, la suppression active des vibrations comporte un risque d'instabilité dû à l'injection de puissance d'activation [59]. Par conséquent, les techniques de suppression active des vibrations sont souvent évitées si possible dans la plupart des applications industrielles [88].

Les conceptions de systèmes de suspension active ont attiré une grande attention ces dernières années avec de nombreuses démonstrations de leur supériorité de performance par rapport aux systèmes passifs dans différents applications. Cependant, moins sont nombreux des systèmes de suppression active des vibrations dans les applications en génie civil. On peut néanmoins citer [89, 90] en tant que exemple. Ils sont beaucoup plus nombreux dans les systèmes de suspension automobile. les méthodes de contrôle actif ont également été proposées pour les amortisseurs d'aéronefs [91, 92].

1.3.3 Suppression semi-active des vibrations

Une alternative aux techniques de suppression passive et active est la suppression semi-active, qui combinent certaines des caractéristiques des techniques passives et actives. Fondamentalement, les techniques semi-actives incorporent des dispositifs passifs réglables qui incorporent les paramètres accordables qui dépendent du mouvement du système [93]. Généralement, les systèmes de suppression semi-active ne nécessitent qu'un faible niveau d'alimentation externe. Ils ne génèrent pas de mouvement, mais résistent à un mouvement car des dispositifs passifs facilitent donc la stabilité du système [94].

L'étude de la suppression semi-active des vibrations a d'abord été réalisée par Karnopp et al. dans [95], qui proposait un système d'amortissement "skyhook" pour les systèmes de suspension automobile et des avantages similaires en termes de performance ont été obtenus en tant que systèmes entièrement actifs. Après [95], de nombreux efforts de recherche ont été faits sur la suppression semi-active pour les applications d'ingénierie. Par exemple, Alujević et al [96] ont étudié les limites de stabilité et de performance pour l'isolation semi-active des vibrations à l'aide d'un retour de vitesse mixte. Mansour et al. [97] ont analysé la faisabilité et l'efficacité d'une commande de suspension semi-active à l'aide d'actionneurs intelligents magnétorhéologiques, pour réduire les vibrations des

systèmes mécaniques, à l’exemple des suspensions des voitures particulières. Dans [98], la supériorité des systèmes d’amortisseurs semi-actifs sur la suppression des vibrations des structures d’ingénierie a été démontré par rapport à un amortisseur passif conventionnel.

En résumé, bien que les suppressions de vibrations actives ou semi-actives surpassent les suppressions passives en termes d’amélioration des performances, les dispositifs passifs présentent certains avantages. Ils sont généralement plus simples, plus fiables, ne nécessitent aucune source d’alimentation et sont inconditionnellement stable. Par exemple, les systèmes actifs nécessitent une production d’électricité d’appoint, mais sous certaines circonstances tels qu’un tremblement de terre, l’appareil est nécessaire alors que l’alimentation tombe souvent en panne. Par conséquent, cette thèse se concentrera uniquement sur les dispositifs de suppression passive des vibrations.

En général, les dispositifs passifs conventionnels sont normalement identifiés via une approche “suivi et erreur”. Par conséquent leur performance dynamique n’est pas maximisée. Cela est dû au manque d’approche symétrique pour explorer pleinement toutes les conceptions possibles. Cependant, avec les avancés dans le domaine du contrôle structurel des vibrations, cela peut être potentiellement résolu à l’aide d’un élément mécanique passif nouvellement introduit, appelé “inerter”, comme discuté dans la section 1.4. Avec ce nouveau dispositif, de nouveaux réseaux mécaniques (dispositifs mécaniques) couplant de ressorts, amortisseurs (composant principales des réseaux mécaniques) et dispositifs d’amplification de masse (“inerter”) ont été récemment développés comme présenté dans la même section. De plus, compte tenu des insuffisances remarquées des amortisseurs de masse réglé TMD (voir section 1.3.1), ces dispositifs mécaniques sont de bon substituant et agissent au même titre qu’un TMD, mais avec une masse secondaire équivalente beaucoup plus importante. Ces détails son également présentés dans la section suivante. À cet égard, quelques de ces dispositifs à base d’inerter seront étudiés dans cette thèse et les résultats seront présentés dans la suite.

1.4 Suppression des vibrations basée sur l’inerter

L’inerter est un composant disponible dans le commerce, conceptuellement introduit par Smith [27]. Récemment, des avantages de performances significatifs de la suppression passive des vibrations basées sur l’inerter ont été identifiés avec succès pour plusieurs structures d’ingénierie. Dans cette section, le concept et les réalisations physiques de l’inerter sont passés en revue, ainsi qu’une analogie force-courant est présentée. Nous explorons également trois approches de conception disponibles pour les absorbeurs ou isolateurs de vibrations et un certain nombre d’exemples d’applications notables.

1.4.1 L’inerter

Conceptuellement introduit par Smith [27], l’inerter a d’abord été proposé comme élément de circuit mécanique passif pour réaliser une analogie complète entre les sys-

tèmes mécaniques et électriques. L'analogie standard force-courant mécanique-électrique introduite par Firestone [100], définit la force mécanique F analogue au courant électrique i et la différence de vitesse mécanique Δv à la tension électrique u . Avec l'analogie force-courant, l'inductance électrique et la résistance peuvent être mappées au ressort mécanique et à l'amortisseur, respectivement. Étant donné que la masse doit avoir une borne fixée à la terre [99] en raison de la deuxième loi de Newton appliquée, il est analogue au condensateur avec une borne comme masse électrique. Cette analogie est évidemment incomplet car le condensateur ne doit pas nécessairement avoir une borne mise à la terre.

Étant donné la propriété idéale d'un condensateur selon laquelle le courant traversant l'élément est proportionnel à la dérivée de la tension, il peut être exprimé comme

$$i = C\dot{u} \quad (1.1)$$

où C est la capacité. Équivalent à un condensateur, l'inerteur idéal (aucune borne n'a besoin d'être mise à la terre) est un élément (dispositif) mécanique à deux terminaux (deux bornes) de masse/poids négligeable développant une force interne (de résistance) proportionnelle à l'accélération relative de ses deux bornes qui sont libres de se déplacer (mouvement) indépendamment. La Fig. 1.3 représente symboliquement un dispositif inerteur dont les bornes sont soumises à une force F égale appliquée extérieurement et opposée en équilibre avec la force développée intérieurement. Par définition, la relation suivante est valable pour l'inerteur linéaire idéal [27, 100] :

$$F = b(\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1) \quad (1.2)$$

où u_1 and u_2 sont les coordonnées des déplacements des deux bornes et un point sur le symbole signifie la différenciation par rapport au temps t . Dans l'équation ci-dessus (1.2), b est la constante de proportionnalité ayant pour unité de masse le kilogramme et caractérise pleinement le comportement de l'inerteur. Pourtant, la masse physique d'un dispositif inerteur réel est d'un ordre de grandeur très inférieure à b d'où l'importance de ce dispositif.

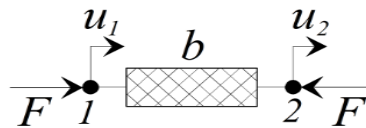


FIGURE 1.3 – Représentation schématique du dispositif à volant à deux bornes (b est la constante de proportionnalité équivalente à la masse).

Utilisant des arrangements d'engrenages à crémaillère ou des mécanismes à vis à billes pour entraîner un volant d'inertie rotatif, plusieurs de ces dispositifs ont été construits et prototypés [27, 100, 101]. En fait, les dispositifs inerters ont été utilisés avec succès pour le contrôle des vibrations des systèmes de suspension dans les véhicules de haute performance [102, 103]. Plus, récemment, des implémentations d'inerters de fluide ont

été proposées [104, 105] qui utilisent la masse d'un fluide s'écoulant à travers un canal hélicoïdal pour générer la force résistive requise (voir Fig. 1.4).

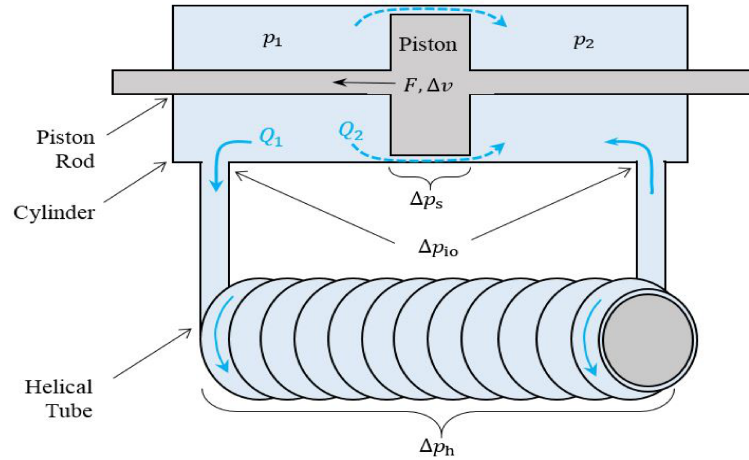


FIGURE 1.4 – Vue schématique d'un inerteur fluide à tube hélicoïdal typique, reproduite à partir de [106].

Le dispositif inerteur peut être considéré et modélisé comme un élément mécanique linéaire qui complète l'élément à ressort linéaire idéal (c.-à-d. dispositif à deux bornes développant une force interne proportionnelle au déplacement relatif de ses bornes) et l'amortisseur linéaire (c'est-à-dire dispositif à deux bornes développant une force interne proportionnelle à la vitesse de ses bornes). À cette fin, le concept de l'inerteur permet une cartographie biunivoque des systèmes mécaniques dynamiques pour le contrôle passif des vibrations de manière analogue à la synthèse du réseau électrique. En fait, le concept de l'inerteur permet de concevoir des systèmes mécaniques pour le contrôle passif des vibrations de manière analogue à la synthèse des réseaux électriques. À cette fin, diverses topologies de ressorts, d'amortisseurs et d'inerteurs ont été testés pour l'isolation des vibrations des véhicules [102, 103].

L'effet apparente d'une masse secondaire b provenant du mécanisme de l'inerteur qui a été noté dans l'article original de Smith [27] est particulièrement important pour les besoins de cette thèse. L'effet peut être facilement compris en examinant le modèle équivalent de la Fig. 1.1 en remplaçant la masse secondaire m_2 par un dispositif inerteur à une borne mis à la terre et de masse secondaire équivalente b . En particulier, considérons la structure primaire linéaire non-amortie à 1DDL de la Fig. 1.5 avec une masse m_1 et une rigidité k_1 contrôlée par un TMD sans amortisseur (Fig. 1.5a) et par un dispositif à base inerteur mis à la terre (Fig. 1.5b); respectivement. La structure est soumise à des excitations de force due aux pressions du vent comme exemple. L'équation du mouvement de cette structure écrite en termes de déplacement vertical par rapport à l'excitation de force est donnée comme suite.

Avec un TMD sans amortisseur (Fig. 1.5a) :

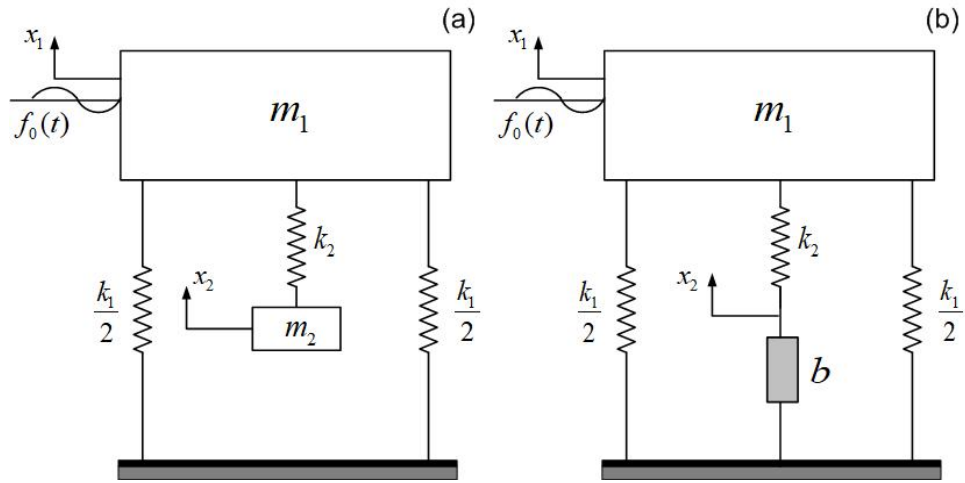


FIGURE 1.5 – Modèle de structure (système primaire) équipée d'une solution de contrôle passif (a) TMD de type Frahm [6] (b) et son modèle équivalent avec dispositif inerteur mis à la terre.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_2(x_1 - x_2) + k_1 x_1 = f_0(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Avec un dispositif à base inerteur mis à la terre (Fig. 1.5b) :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_2(x_1 - x_2) + k_1 x_1 = f_0(t) \\ b \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Clairement, à partir des équations (1.3) et (1.4), l'inclusion de l'inerteur fait apparaître une masse secondaire apparente dans le système. Cependant, concernant la taille physique de l'inerteur, il est rapporté dans la littérature qu'il existe des inerteurs de 2 kg pouvant fournir 70 kg d'inertance, disponible sur le marché commercial [107]. De plus, un volant de 2 kg produisant une inertance de 350 kg [108] et une masse inertielle de 5400 tonnes en utilisant une masse réelle de 560 kg a été étudiée expérimentalement [109]. Cela sert à démontrer qu'une forte valeur d'inertance peut être créée avec des masses relativement petites. Étant donné que les TMDs ont besoin d'une masse secondaire importante pour être plus efficaces, l'inerteur se présente donc comme un bon substituant de la masse secondaire des TMDs compte tenu de ses avantages inertiels.

Pour approfondir cette question, la Fig. 1.6 présente une réalisation mécanique de l'inerteur comprenant un piston qui entraîne un volant rotatif par une crémaillère, un pignon et un système d'engrenage à n engrenages (par exemple, Smith [27]).

L'inertance b obtenue à partir d'un tel dispositif mécanique s'exprime par :

$$b = m_f \frac{\gamma_f^2}{\gamma_{pr}^2} \left(\prod_{i=1}^n \frac{r_i^2}{pr_f^2} \right) \quad (1.5)$$

où m_f est la masse du volant et γ_f est le rayon de giration du volant ; r_f représente le rayon du pignon du volant et n représente le nombre d'engrenages avec rayon r_i et rayon de pignon r_j enchaînés entre le pignon d'entrée et le pignon de sortie du volant.

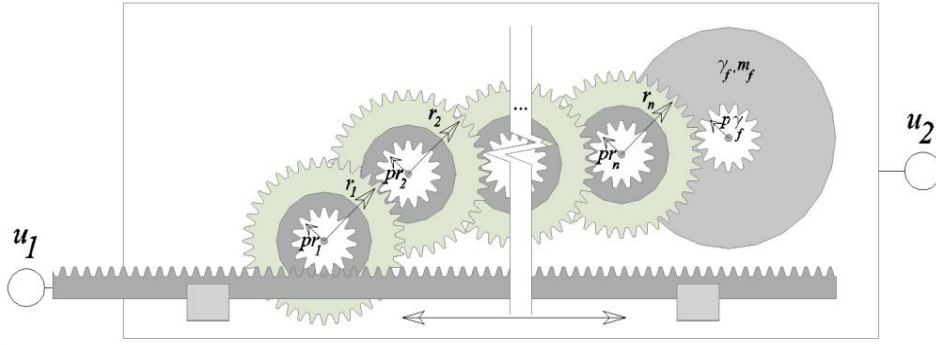


FIGURE 1.6 – Réalisation mécanique possible de l'inerteur comprenant un poussoir qui entraîne un volant rotatif à travers un système à crémaillère, pignon et engrenage à n engrenages.

On peut facilement déduire de l'équation (1.5) que, à mesure que le nombre d'engrenages considérés dans la réalisation mécanique de l'inerteur augmentent, l'effet d'amplification de masse augmente proportionnellement, donc l'inertance b implicitement.

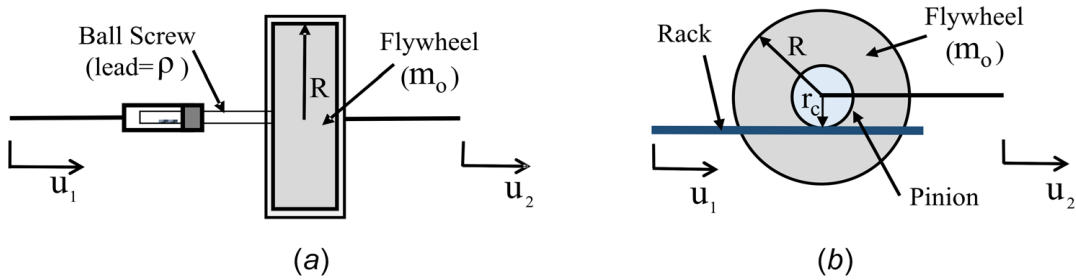


FIGURE 1.7 – Représentation schématiques des mécanismes physiques simples utilisés pour produire un inerteur : (a) mécanisme à vis à billes et (b) mécanisme à crémaillère et pignon.

Divers autres dispositifs mécaniques peuvent être utilisés pour satisfaire l'équation (1.2) et produire un inerteur. La Fig. 1.7 montre le mécanisme à vis à billes [108, 111] et le mécanisme à crémaillère et pignon [147], qui sont deux des mécanismes les plus courants qui ont été utilisés dans la littérature pour produire un inerteur. En utilisant ces dispositifs, les mécanismes produisent de l'inertance b en transférant le mouvement des deux bornes dans la rotation d'une petite masse physique m_0 du volant et développement de la force axiale (F).

La vitesse de rotation (ω) du volant d'inertie est égale au produit de la dérivée du déplacement relatif entre les deux extrémités (terminaux) du dispositif et le coefficient α lié à la géométrie du mécanisme

$$\omega = \alpha(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) \quad (1.6)$$

Pour le mécanisme à vis à billes

$$\alpha = 2\pi/\rho \quad (1.7)$$

où ρ est le pas de la vis à billes. Pour le mécanisme à pignon et crémaillère

$$\alpha = 1/r_c \quad (1.8)$$

où r_c est le rayon du pignon.

Considérant que le volant est un cylindre creux, $J = m_0 R^2$, où m_0 et R sont la masse et le rayon du volant. L'énergie cinétique du corps en rotation peut être réécrite comme

$$T = \frac{1}{2} m_0 R^2 \alpha^2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)^2 \quad (1.9)$$

Sur la base de cette énergie cinétique, la contribution inertielle effective du système peut être écrit comme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i} \right) = m_0 R^2 \alpha^2 (\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2) \quad (1.10)$$

Comparer les equations (1.2) et (1.11) et compte tenu des hypothèses décrites ci-dessus, l'inertance de ce dispositif peut s'écrire

$$b = m_0 R^2 \alpha^2 \quad (1.11)$$

Notons que, l'inclusion de l'inertier dans des systèmes dynamiques modifie (réduit) la fréquence naturelle du système. Cette question a été récemment examinée par Chen et al, [110]. De plus, l'amplitude de la force effective sur la structure est également réduite, considération qui a été largement discuté dans Takewaki et al. [112].

A l'exception des réalisations d'inerters mentionnées ci-dessus qui intègrent toujours une course de translation, l'inertier rotatif qui est idéal pour la suppression des vibrations de torsion est également proposé. Un inertier à engrenage planétaire [113] est un exemple typique et pendant son fonctionnement, la rotation relative entre deux bornes entraîne les rotations à la fois du soleil et des engrenages planétaires, générant la force d'inertie.

1.4.2 Analogie force-courant

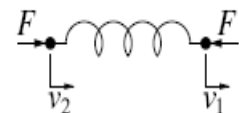

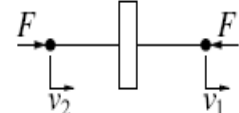
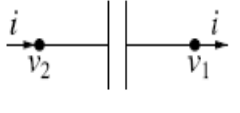
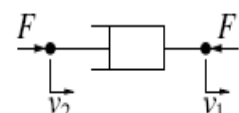
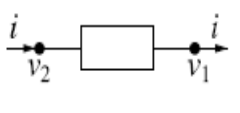
Les systèmes mécaniques et électriques ont une dynamique très similaire. Dans l'analogie force-courant entre ces systèmes, Le ressort et l'amortisseur dans les systèmes mécaniques peuvent être analogues à la bobine et au résistor dans les systèmes électriques, respectivement.

Historiquement, la masse est vue comme l'élément mécanique correspondant au condensateur électrique. Cependant, d'après la deuxième loi de Newton, l'accélération de la masse est relative à un point fixe dans le cadre inertiel [27]. Cela signifie que l'un des terminaux de la masse est au sol et l'autre terminal est le centre de masse. En d'autres termes,

la masse n'est pas un véritable dispositif à deux terminaux. L'élément électrique correspondant à la masse est en réalité un condensateur mis à la terre. En proposant l'inerteur, l'analogie force-courant est complétée et les réseaux mécaniques ressort-amortisseur-inerteur peuvent être directement représentés en tant que réseaux électriques inductance-résistance-condensateur. Une nouvelle correspondance de l'inerteur est proposée dans le Tableau 1.1. Notons que bien que l'inerteur soit motivé par l'analogie force-courant, ses propriétés ne sont pas dépendantes de cette analogie. Cependant, les méthodes systématiques de synthèse passive de réseau électrique peuvent être directement appliquées à la conception de réseaux mécaniques basés sur des inerters.

Pour plus de détails, le Tableau 1.1 résume l'analogie mécanique-électrique force-courant et la translation des impédances mécaniques pour les éléments de base. Via le mécanisme analogie électrique-mécanique, un système physique linéaire peut être représenté par un réseau comme un circuit électrique puis, l'analyse et la synthèse du réseau électrique peuvent être appliquées pour explorer systématiquement les caractéristiques dynamiques. En outre, il fournit un moyen unificateur de modéliser et d'analyser un système interdisciplinaire, tel qu'un système mécatronique [114]. La modélisation de l'inerteur fluide profite également d'une telle analogie [115]. Un examen de l'utilisation de l'analyse et de la synthèse du réseau dans la conception des dispositifs passifs de suppression de vibrations est donné à la section suivante.

TABLE 1.1 – Nouvelle correspondance entre réseaux électrique et mécanique.

Mechanical		Electrical	
 $Y(s) = \frac{k}{s}$ <p>spring</p> $\frac{dF}{dt} = k(v_2 - v_1)$		 $Y(s) = \frac{1}{Ls}$ <p>inductor</p> $\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(v_2 - v_1)$	
 $Y(s) = bs$ <p>inerter</p> $F = b \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$		 $Y(s) = Cs$ <p>capacitor</p> $i = C \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$	
 $Y(s) = c$ <p>damper</p> $F = c(v_2 - v_1)$		 $Y(s) = \frac{1}{R}$ <p>resistor</p> $i = \frac{1}{R}(v_2 - v_1)$	

1.4.3 Approches conceptuelles des dispositifs passifs de suppression de vibrations

Dans la section précédente, il a été montré que l'introduction de l'inertier complète l'analogie électrique-mécanique. Par conséquent, la gamme des dispositifs de suppression passifs de vibrations, qui peut être réalisé par des réseaux passifs, est fondamentalement élargi pour fournir une performance dynamique souhaitable. L'identification des configurations passifs d'absorbeurs ou d'isolateurs de vibrations bénéfiques dépend de la façon dont les schémas candidates sont proposées et le réglage optimal des paramètres est effectué via une analyse analytique ou via des algorithmes d'optimisation. Notons qu'ici, le terme configuration représente la disposition topologique du réseau (disposition) des composants qui sont des ressorts, amortisseurs et inertes passifs idéaux, ainsi que leurs valeurs de paramètres. Deux approches, qui sont basées sur la structure et basées sur l'admittance, sont couramment utilisées pour concevoir les configurations d'amortisseurs passifs optimales. Une approche de conception remarquable, à savoir l'approche basée sur la structure-admittance, est nouvellement introduite dans [116]. Cette section donne un aperçu de ces trois approches. Notons que les algorithmes d'optimisation eux-mêmes ne sont pas abordés ici car les techniques d'optimisation standard sont appliquées ici.

Approche basée sur la structure

Avec l'approche basée sur la structure, des réseaux passifs candidats sont proposés en utilisant des composants prédéterminés avec une topologie de réseau fixe. Les valeurs d'élément des dispositifs candidats sont sélectionnées grâce à l'optimisation, en utilisant les critères de performance comme fonction coût et en tenant compte des contraintes d'éléments sensibles.

Un certain nombre de dispositions passifs d'absorbeurs ou d'isolateurs de vibrations, qui manifestent leurs avantages pour différentes applications peuvent être proposées en tant que candidats basés sur la structure. Par exemple, avant l'introduction de l'inertier, l'amortisseur de vibrations passif se compose normalement de ressorts, d'amortisseurs et d'éléments de masse, tels que les TMDs pour la suppression de vibrations dans les bâtiments. En variante, des amortisseurs de vibrations à base d'inertier sont proposés avec une approche basée sur la structure pour la construction de suspensions. Dans [117], trois structures ont été étudiées, qui sont l'amortisseur à ressort parallèle, l'amortisseur à ressort parallèle et un ressort en parallèle avec des dispositions d'amortisseur en série (les deux derniers sont illustrés sur les Figs. 1.8a et b).

L'amortisseur de masse visqueuse ajusté (TVMD), qui incorpore un composant de type inertier, a été également proposé et analysé pour le contrôle des vibrations sismiques du bâtiment par Ikago et al. [108]. Une nouvelle configuration dans laquelle la masse de TMD est remplacée par inertier a été introduite par Lazar et al. [118], appelé amortisseur inertier accordé (TID). Les vues schématiques des mises en place TVMD et TID sont illustrés dans [108, 118]. On peut également trouver d'autres disposition de ces réseaux dans Hu et al. [119]. Tous ces dispositifs proposés fonctionnent comme des systèmes de suspension,

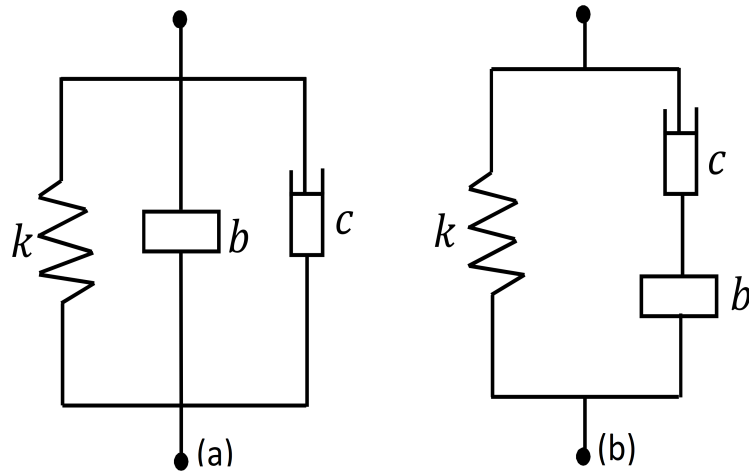


FIGURE 1.8 – Exemple de vues schématiques de deux amortisseurs de vibrations typiques à base d’inerter, (a) disposition parallèle-amortisseur-inerter [117], (b) un ressort en parallèle avec une disposition d’amortisseur-inerter série [117].

qui ont deux bornes reliées à deux points sur les structures. Les applications des dispositions susmentionnées sont présentées en détail dans la section suivante. L’approche basée sur la structure permet d’étudier les avantages potentiels en termes de performances des mises en page présentant la complexité la plus faible, avec les avantages supplémentaires de définir directement les contraintes de paramètres sur les composants. Ceci est crucial en termes de poids et de limite d’espace et de coût de fabrication. Cependant, l’amélioration obtenue est limitée du fait qu’il existe de nombreuses conceptions possibles qui n’ont pas été couvertes par cette approche. En revanche, l’approche par admittance peut systématiquement envisager des structures mécaniques plus complexes avec un large éventail de possibilités.

Approche basée sur l’admittance

L’approche basée sur l’admittance est associée à la synthèse en réseau de l’admittance (ou impédance) positive-réelle du système $Y(s)$, qui peut être définie comme

$$Y(s) = \frac{\tilde{F}}{\Delta\tilde{v}} \quad (1.12)$$

où \tilde{F} et $\Delta\tilde{v}$ représentent respectivement la force et la vitesse relative dans le domaine de Laplace. Les expressions de $Y(s)$ pour les composants de base sont résumées dans la Fig. ???. Pour être précis, un réel positif $Y(s)$ sera utilisé puis, ses paramètres seront optimisés pour atteindre les performances optimales. Ensuite, la théorie de la synthèse de réseau peut être utilisée pour identifier la disposition spécifique qui peut réaliser le ou les $Y(s)$ optimisés [120, 121]. Dans le contexte de la synthèse de réseau électrique, Bott et Duffin [122] ont introduit un théorème selon lequel toute fonction d’admittance positive-réelle peut être réalisée par une configuration de réseau constituée uniquement d’inductances, de résistances et de condensateurs. Avec l’analogie introduite dans la section 1.4.2, ce théorème peut être étendu à d’autres contextes, tels que les systèmes mécaniques. Pour

assurer une complexité relativement moindre, l'admittance $Y(s)$ peut être définie comme une fonction bilinéaire ou biquadratique, dans laquelle le numérateur et le dénominateur sont respectivement des fonctions de premier ou de second ordre de la variable de Laplace s . Les avantages de l'utilisation de telles fonctions de transfert ont été identifiés pour diverses structures mécaniques, telles que l'automobile [114], la moto [123] et le bâtiment [124]. Les fonctions d'admittance d'ordre supérieur sont également étudiées à l'aide d'approches d'inégalité de matrice linéaire pour la suspension de véhicule dans [125, 126] et se sont avérées plus bénéfiques que les fonctions bilinéaires et biquadratiques. Pour les absorbeurs de vibrations des structures mécaniques, la minimisation de la complexité du réseau est cruciale en raison de l'espace et de la limite de poids, de sorte que des réalisations minimales des fonctions d'admittance optimales attirent l'attention des chercheurs. Une série de résultats de synthèse de réseau ont été récemment obtenus sur des réalisations efficaces des impédances biquadratiques positives-réelles [127–129]. Par exemple, des réseaux constitués de trois éléments résistifs et de deux éléments réactifs [127].

Un large éventail de fonctions d'admittance positive-réelle peuvent être explorées en utilisant l'approche basée sur l'admittance. Cependant, dans cette approche, il n'est pas possible de prédéterminer le nombre et les types d'éléments et la topologie du réseau. Il y a encore quelques admittances positives-réelles qui doivent être réalisées avec un grand nombre d'éléments, comme neuf éléments pour des fonctions biquadratiques avec des réalisations de Bott-Duffin [122]. Compte tenu de la difficulté de fabrication, de l'encombrement et de la limite de poids, le réseau avec un grand nombre d'éléments ou une topologie complexe n'est pas préférable. En ce qui concerne également ces considérations physiques, un autre inconvénient de l'approche basée sur l'admittance, par rapport à l'approche basée sur la structure, est que les valeurs des éléments ne peuvent pas être restreintes à l'avance.

Approche basée sur la structure-admittance

Comme indiqué précédemment, les deux approches de conception couramment utilisées pour les absorbeurs et isolateurs passifs de vibrations, basées sur la structure et basées sur l'admittance ont leurs propres avantages et inconvénients inhérents. Pour conserver les avantages associés aux deux approches tout en évitant leurs limites, une approche de conception nouvellement introduite, à savoir l'approche structure-admittance, a été proposée dans [124]. Les fonctions de transfert proposées par cette approche couvrent non seulement tous les réseaux avec un nombre prédéterminé de chaque élément mais contiennent également des informations explicites sur la topologie du réseau et les valeurs des éléments. Basé sur la théorie série-parallèle des réseaux, une procédure générale pour formuler l'admittance structurelle avec n'importe quel nombre arbitraire et type d'éléments est introduite, en détail [124].

Dans [124], deux études de cas concernant la suppression des vibrations des structures de véhicules et de bâtiments sont réalisées pour démontrer la faisabilité de cette approche. Compte tenu des structures avec une complexité spécifiée en termes de nombres de chaque

élément utilisé, les résultats d'optimisation avec cette approche surpassent ceux obtenus avec les approches basées sur la structure et l'admittance. L'applicabilité d'une telle technique n'est pas limitée au contexte du dispositif mécanique alors qu'elle peut être étendue aux systèmes électriques ou composés.

Cependant, l'approche basée sur la structure est manifestement l'intérêt porté dans cette thèse. Des réseaux passifs candidats sont proposés en utilisant des composants d'éléments mécanique de base comme les ressorts, les amortisseurs couplés en série ou en parallèle avec le dispositif inerteur idéal. Les valeurs d'élément des dispositifs candidats sont sélectionnées grâce à l'optimisation en utilisant les critères de performance comme fonction coût. En attendant, la section suivante présente quelques applications ayant fait objet d'utilisation du dispositif inerteur.

1.4.4 Quelques applications de l'inerteur

Dans [27], Smith a introduit trois idées initiales pour des applications inerteur, pour fonctionner comme un amortisseur de vibrations amélioré, aider à concevoir une jambe de suspension supérieure et remplacer un élément de masse. Ces trois idées ont été développées et étendues à un large éventail de structures d'ingénierie par des études approfondies, avec des améliorations de performance significatives identifiées.

Systèmes de véhicules

L'inerteur, nommé "amortisseur J", a été initialement appliqué pour la suspension des courses de Formule 1 par Mc Laren Mercedes depuis 2005, où une disposition parallèle ressort-amortisseur-inerteur, comme illustré sur la Fig. 1.8a, est utilisée [130] pour conserver une meilleure maniabilité et une meilleure adhérence. McLaren a inventé le nom de "amortisseur en J" pour l'inerteur afin de protéger la technologie de ses rivaux, tandis que jusqu'en 2008, le secret a été divulgué et l'inerteur devenait disponible dans le commerce [131]. Bien que les avantages de "l'amortisseur en J" sur la Formule 1 aient été cachés, des études sur la suspension à inerteur pour véhicules routiers sont encore développées dans la littérature ouverte. Dans [132], Smith et Wang ont introduit huit schémas de suspension simples à base d'inerteurs qui ne contiennent qu'un seul inerteur et un amortisseur. Pour les modèles quart de voiture et les modèles complets, environ 10% ou plus d'améliorations ont été identifiées pour les performances de confort de conduite, d'adhérence de type et de port de charge dynamique, individuellement, par rapport à la jambe de force conventionnelle. Une optimisation multi-objectifs prenant en compte à la fois le confort de conduite et la charge dynamique a également été réalisée pour démontrer les avantages. Les résultats d'optimisation obtenus dans [132] ont été consolidés par [125, 133]. Les effets des suspensions de véhicules à inerteur sur le compromis entre les différents critères de performance des véhicules ont été étudiés dans [134] et les avantages ont été mis en évidence. Les effets des non-linéarités rencontrées dans les dispositifs inerteur à vis à billes et à fluide sur les performances des suspensions de véhicules ont été étudiés dans [135, 136], respectivement.

Des recherches sur l'utilisation de l'inerteur dans les systèmes de suspension de véhicules

ferroviaires sont en cours. La première contribution significative à ce sujet a été faite par Wang et al. dans [126, 137]. Dans [126], les améliorations de deux configurations simples basées sur l'inerteur dans le confort des passagers et le rapport d'amortissement du système le long de la déviation verticale ont été obtenues, en comparaison avec la disposition conventionnelle. D'autres avantages des suspensions ferroviaires basées sur les inerteurs ont été identifiés avec des admittances d'ordre élevé. Les tests expérimentaux ont montré que, bien que les avantages en termes de performances soient amoindris en raison des non-linéarités inerte, ils sont toujours significatifs. L'inerteur s'est également avéré efficace pour augmenter la vitesse critique afin de maintenir la stabilité latérale [138]. Ces études ont été étendues pour améliorer les performances de confort de conduite dans [139]. Jiang et al. [139] ont démontré les avantages de l'inclusion de l'inerteur dans les suspensions secondaires verticales et latérales pour améliorer le confort de conduite. Les effets des irrégularités de piste ont été soulignés dans [140]. Pour une revue plus approfondie de ce sujet, voir [141].

Systemes de génie civil

Les applications de la suspension à base d'inerteur ont été étendues aux systèmes de génie civil grâce à des recherches approfondies, dont la plupart sont axées sur les bâtiments. Les premiers travaux sur la suspension de bâtiment à base d'inerters ont été menés par Wang et al. [117, 138] et ses références. Dans [117], deux agencements simples à base d'inerters qui sont représentés sur les Figs. 1.8a et b) ont été proposés pour se situer entre la base de la structure principale et le sol. Par rapport à la suspension passive conventionnelle, les avantages dus à l'inclusion de l'inerteur ont été étudiés dans la suppression des vibrations induites par la circulation et les tremblements de terre, avec différents modèles de bâtiments. Sur la base de ces résultats, une étude plus complète a été présentée dans [138] avec une disposition supplémentaire de suspension à base d'inerteur pris en considération. Une vérification expérimentale a été effectuée avec un prototype d'inerteur à vis à billes. Par la suite, des contributions significatives dans ce domaine ont été apportées au Japon, principalement motivées par l'ingénierie sismique. Dans [142], un dispositif de type inerteur, appelé "amortisseur de masse visqueux réglé" (ou masse dynamique dans [143]), a été proposé pour fonctionner comme une rigidité négative en parallèle avec la suspension conventionnelle. Le dispositif TVMD mentionné ci-dessus est une autre application utilisant le concept inerteur [108] et a profité de l'effet d'amplification de masse grâce à un mécanisme à vis à billes avec un engrenage approprié. En comparant avec d'autres dispositifs d'amortissement, l'efficacité du TVMD pour supprimer les vibrations excitées par le sol a été illustrée théoriquement et expérimentalement en utilisant un modèle de bâtiment avec un seul DDL. Un travail prolongé utilisant un modèle de bâtiment à degrés de liberté multiples (MDDL) a été rapporté dans [144] pour démontrer l'efficacité du TVMD dans l'amélioration des réponses modales du bâtiment. En outre, Lazar et al. [118] ont suggéré le TID comme une alternative intéressante à un TMD conventionnel. Contrairement au TMD qui n'agit que sur un seul étage, le TID à deux bornes peut être connecté entre deux

étages ou l'étage et le sol. Lazar et al ont suggérés que le TID peut fournir des réponses de contrôle sismique améliorées avec une masse de dispositif beaucoup plus petite ajoutée à la structure primaire. En considérant un seul TID, les auteurs ont conclu que la meilleure position du TID était au niveau inférieur connecté au sol, et offre le potentiel de supprimer à la fois le mode ciblé et les réponses à des fréquences plus élevées. Une autre suspension de bâtiment à base d'inertier notable qui utilise également l'effet d'amplification de masse est l'inertier-amortisseur de masse réglé (TMDI) décrit dans [145, 146], dont [146] se concentre sur les vibrations induites par le vent. En utilisant la méthode de synthèse en réseau, Zhang et al. ont proposés une série de schémas avec inertier de taille fixe et quatre configurations avantageuses ont été identifiées en ce qui concerne l'inertance et la rigidité de l'entretoise. D'autres travaux publiés liés à ce sujet sont également présentés dans [147, 148].

D'autres applications de l'utilisation de l'inertier pour le contrôle structurel sont également développées, comme pour les câbles structuraux [149–151]. Dans [149], les auteurs ont démontré l'utilisation bénéfique du TID pour supprimer les vibrations du câble, avec des rapports d'amortissement modal plus élevés que les amortisseurs traditionnels pour le premier mode. Luo et al. [150] ont proposé deux dispositions avantageuses basées sur l'inertier pour la suppression des vibrations des câbles multi-modes.

Notons que l'examen susmentionné des applications de l'inertier s'inscrit dans le contexte de suppression passive des vibrations. La suppression semi-active et active des vibrations basée sur l'inertier sont également étudiés dans [152–156]. Cependant, cela n'entre pas dans le cadre de cette thèse.

1.4.5 Mécanisme d'amplification de l'inertance de l'inertier

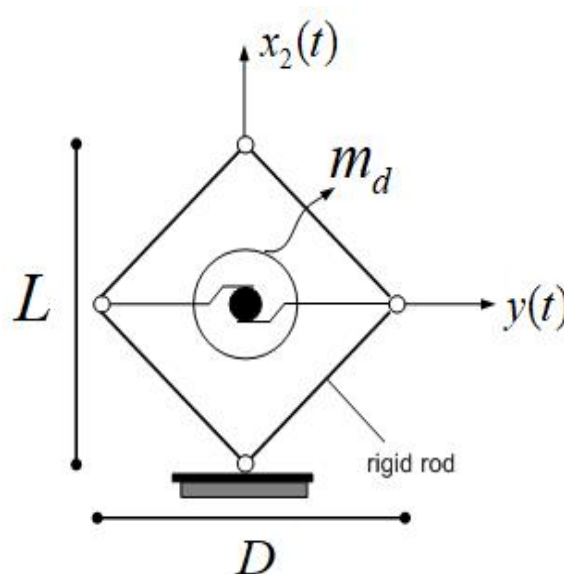


FIGURE 1.9 – Mise en œuvre schématique d'une inertance amplifiée [170].

Comme un rapport de masse élevé entraîne une grande suppression de vibrations, le

mécanisme d'amplification de l'inertance de l'inertier est toujours bénéfique pour améliorer le contrôle. Par conséquent, la mise en œuvre schématique d'une inertance amplifiée est représentée sur la Fig. 1.9 [170]. Sur la base de cette figure, l'inertier est inséré dans une structure de poutre en losange ; les tiges sont modélisées comme rigides et leurs propriétés d'inertie sont supposées négligeables par rapport à celles de l'inertier et le système 1DDL auquel il peut être associé. Sous l'effet de petites déformations de l'appareil comme représenté sur la Fig. 1.9, la force de résistance exercée par l'inertier est proportionnelle à l'accélération relative entre ses deux bornes comme

$$f_{m_d}(t) = -2\ddot{y}(t)m_d \quad (1.13)$$

où $y(t)$ est le déplacement d'une extrémité, comme illustré à la Fig. 1.9 et m_d l'inertance. Ainsi, sous l'hypothèse de petits déplacements, $y(t)$ est lié à $x_2(t)$ par la relation qui suit

$$y(t) = -x_2(t)\frac{L}{2D}. \quad (1.14)$$

Selon [170], en imposant l'équilibre des tiges, la réaction de la poutre en losange au mouvement $x_2(t)$, dans le sens de la diagonale de longueur L , s'obtient comme

$$f_{m_d}(t) = \ddot{x}_2(t)m_d\left(\frac{L}{D}\right)^2 = m_d\beta^2\ddot{x}_2(t) \quad (1.15)$$

où le rapport $\beta = (L/D)$ entre les diagonales de la poutre en losange est le coefficient d'amplification de la masse d'inertance m_d . Par conséquent, β doit être supérieur à l'unité. Cependant, sur la base de l'étude dans [170], les valeurs de β supérieures à 3 ne doivent pas être prises en compte car elles peuvent être atteintes avec des géométries extrêmes de la poutre en losange. Il faut également mentionner que $\beta = 1$ correspond au cas de non amplification et $\beta < 1$ est le cas de la réduction de la masse d'inertance. Dans la suite du document, le dispositif d'amplification de l'inertance sera introduit dans une configuration d'absorbeur de vibrations basé sur l'inertier, pour étudier ses effets sur la réponse du système.

1.5 Le contrôle des vibrations basé sur le mécanisme à rigidité négative

le mécanisme de rigidité négative (MRN) est caractérisé par une courbe force - déplacement avec une pente négative, ce qui signifie qu'un MRN peut générer une force pour assister son mouvement au lieu de lui résister. Récemment, le MRN a reçu une grande attention dans le domaine de l'isolation des vibrations. En disposant en parallèle le MRN et la rigidité de support de la structure à isoler, la fréquence de résonance peut être diminuée, améliorant ainsi l'isolation des vibrations dans la région des basses fréquences et élargissant la plage de fréquences de l'isolation des vibrations, pendant ce temps, la rigidité

statique n'est pas affectée afin d'éviter une déviation statique excessive et une instabilité du système. Les caractéristiques de rigidité élevée-statique-faible-dynamique peuvent être obtenues par diverses structures mécaniques, qui peuvent être classées en : ressorts pré-comprimés symétriques [171, 172], structures en forme de X bio-inspirées [173, 174] et ressorts magnétiques à raideur négative [175, 176]. De toute évidence, la plupart des MRN dans les recherches susmentionnées sont passifs et non linéaires, tandis qu'il a été indiqué dans [176] que la rigidité négative utilisant la contrainte magnétique normale de Maxwell peut être considérée comme linéaire dans une certaine plage autour de la position d'équilibre. Une approche plus pratique pour réaliser un MRN linéaire a été proposée et validée expérimentalement dans [177] en utilisant une technique de contrôle actif avec un actionneur linéaire. Pour résumer, le MRN a une application étendue pour améliorer les performances d'isolation des vibrations [178, 179], cependant, seules quelques études sur l'amélioration de l'effet de contrôle des DVAs via une rigidité négative sont disponibles dans la littérature, comme indiqué ci-dessous, de même que pour les systèmes de suppressions de vibrations basés sur les RMIs.

Shen et al. [15] ont intégré une rigidité négative entre la base et la masse de DVA, donnant la configuration NSDVA. Son optimisation selon la théorie des points fixes a été effectuée pour un système primaire 1DDL, suggérant que l'utilisation d'une rigidité négative diminue l'amplitude de vibration maximale du système primaire et élargit la gamme de fréquences d'absorption des vibrations. De même [180, 181] ont également abordé l'effet du MRN dans les autres configuration de DVAs. Cependant, dans tous ces travaux, la structure mécanique de rigidité négative n'avait pas été présentés physiquement. Néanmoins, dans [28, 29, 182] des structures de MRN sont présentés pour modéliser le comportement de rigidité négative. Des exemples de structures sont données dans la Fig. 1.10 pour être mieux adaptés à un dispositif éventuel de contrôle de vibrations.

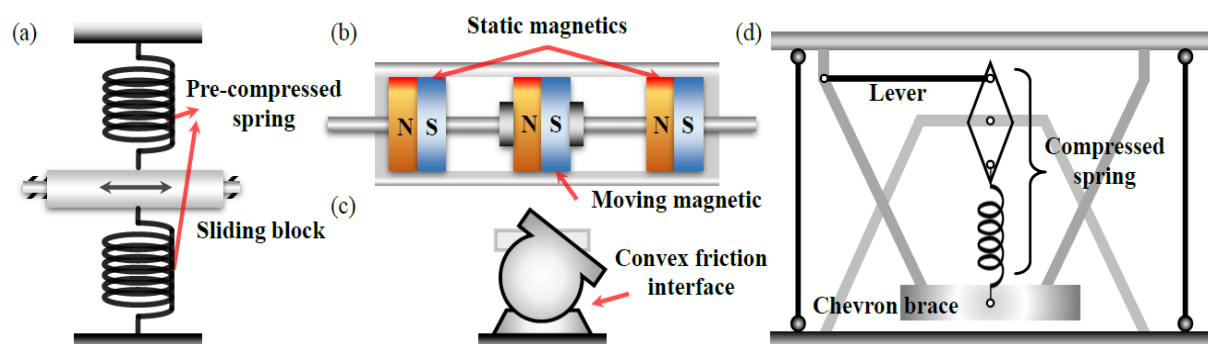


FIGURE 1.10 – Illustration du mécanisme physique pour les appareils à raideur négative.(a) Ressorts précomprimés ou précontraints,(b) mécanisme magnétique,(c) pendules à friction à interface convexe et(d) ressort précomprimé à base de mécanisme à levier [183].

Il convient de mentionner que l'introduction intentionnelle d'une rigidité négative mise à la terre dans les DVAs contribue à l'amélioration des performances de contrôle des vibrations, tandis que le système couplé pourrait être potentiellement déstabilisé. Par

conséquent, l'analyse de stabilité cruciale et l'intervalle admissible de rigidité négative doit être abordés. Bien que le MRN a montré son efficacité dans les travaux susmentionnés son implication dans les systèmes de suppressions des vibrations basés sur les RMIs est manquante en termes de suppression des vibrations harmoniques.

1.5.1 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques sources de vibrations qui peuvent par leur amplitude remettre en cause les performances des structures d'ingénierie. Pour contrer ces effets, les méthodes passives, actives et semi-actives ont été proposées comme moyen de suppression de ces vibrations. Il apparaît clairement que la méthode passive, présentant des coûts abordables, est manifestement la plus pratiquée, notamment dans l'ingénierie civil. A cet effet, les dispositifs masse-ressort-amortisseurs (TMDs) sont largement utilisés dans la littérature. Cependant, à cause d'un besoin de structure plus légère, et des TMDs d'inertie plus important, le dispositif mécanique inerter à deux bornes (complétant l'analogie force-courant) a été proposé comme amplificateur de masse des TMDs ou comme substituant de la masse des TMDs. Ayant présenté de meilleurs résultats dans le contrôle des vibrations par rapport aux TMDs, les dispositifs de suppression passif des vibrations à base d'inertier font actuellement leur preuve dans la littérature, comme il sera également montré dans cette thèse. Cependant, la contribution du MRN est fait majeur dans la réduction des vibrations structurelles, également montré dans cette recherche.

Matériels et méthodes : Modélisation mathématique, optimisation et simulation

2.1 Introduction

Ce chapitre présente un ensemble de configurations de réseaux mécaniques à base d'inertier (RMIs), schémas candidats pour la suppression des vibrations d'une structure primaire non amorties à un degré de liberté (1DDL) sous excitation harmonique ou aléatoire (brui blanc). Les configurations proposées tirent parti de "l'effet de masse apparente" de l'inertier en l'utilisant comme un élément de connexion entre la masse oscillante (système primaire) et le sol. Parce que les réseaux mécaniques à base d'inertier peuvent être considérés comme de modèles équivalents aux TMDs ou DVAs existants, toutes les procédures établies dans la littérature pour la conception optimale (réglage) des TMDs ou DVAs sont facilement applicables pour leur conception optimale. Les équations du mouvement du système couplé (structure primaire + RMI) dans le domaine de Laplace sont d'abord présentées. Ensuite, les solutions du déplacement et de la vitesse de la structure primaire sont établies au cas échéant. Deux objectifs sont envisagés : (1) supprimer le mouvement de la structure primaire sous excitation harmonique c'est-à-dire le déplacement ou la vitesse au cas échéant ; (2) minimiser la variance (réponse quadratique moyenne) du déplacement ou de la vitesse de la structure primaire sous excitation stochastique de support. Dans cet objectif, les expressions analytiques de forme exacte pour les paramètres optimaux des RMIs sont dérivées par application des approches de conception semi-empirique largement utilisées pour le cas des TMDs ou DVAs. A la fin, les équations du mouvement du système couplé dans le temps sont présentées pour besoin d'usage.

2.2 Modélisation mathématique

Dans cette section, deux cas de figures sont envisagés pour modéliser la suppression passive des vibrations à base d'inertier dans les structures primaires : l'isolation des vibrations et l'absorption des vibrations.

2.2.1 Isolation des vibrations à base d'inert

L'isolation contre les vibrations est l'une des catégories de contrôle des vibrations les plus courantes, où deux situations sont couramment rencontrées au niveau de la source vibrante. La première situation est de protéger l'objet de l'environnement vibrant [28,29]. Par exemple, les équipements peuvent être montés sur un isolateur à protéger d'un environnement caractérisé par de violents chocs ou vibrations. L'autre situation est l'isolement de la source vibrante. Par exemple, une machine créant des vibrations importantes pendant son fonctionnement peut être supportée par des isolateurs de telle sorte que d'autres parties des systèmes ou d'autres machines soient moins influencées [157]. De ces deux situations, cette thèse se concentre sur le premier cas d'isolation sur-mentionné.

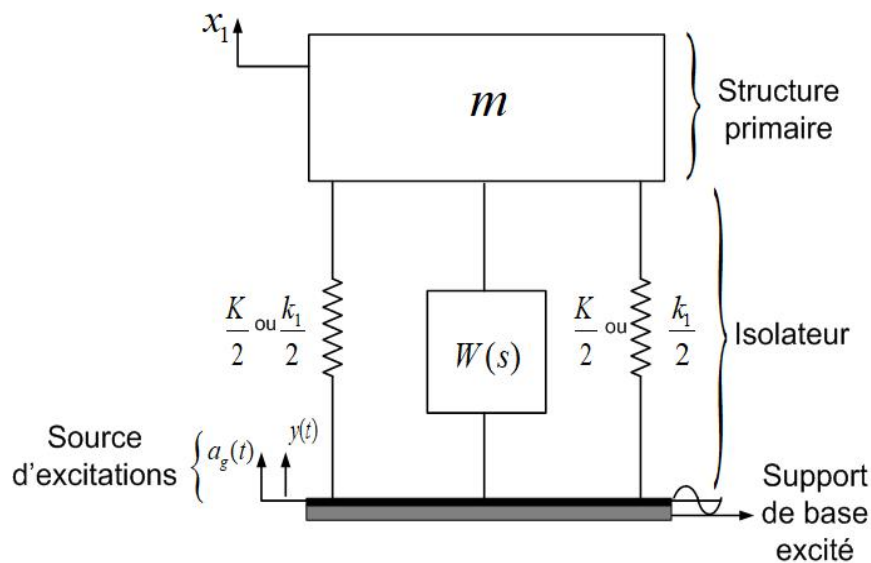
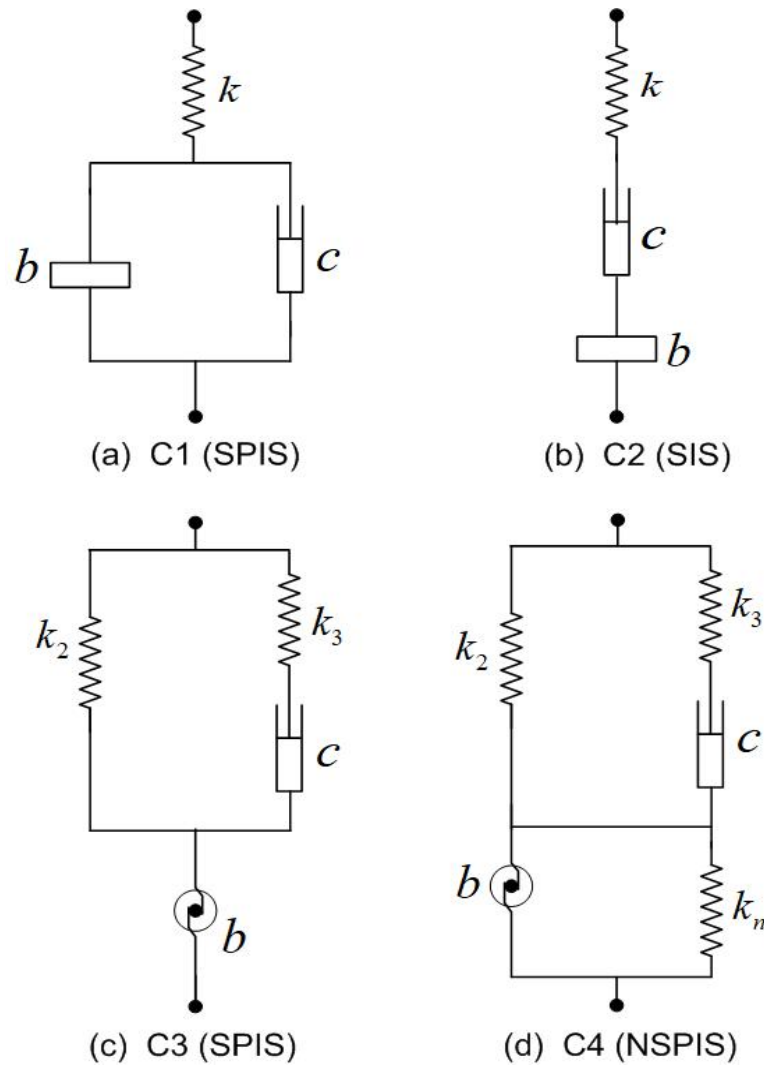


FIGURE 2.1 – système d'isolement uni-axiale de vibration d'une structure primaire non amortie sous excitation de base.

Sur la Fig. 2.1, une structure primaire non amortie dynamiquement excitée à sa base qui peut être modélisée comme une structure de bâtiment à un étage à degré de liberté unique (1DDL) est contrôlée par un système d'isolation de vibrations "uni-axial". Sur cette Figure, le système vibratoire considéré dans la présente étude est la masse m de la structure principale et $Q(s)$ est l'isolateur à concevoir. Ces systèmes d'isolation sont proposés pour remplacer l'isoleur traditionnelle ou le TMD traditionnel [60] (voir Fig. 1.2) afin d'améliorer les performances sur la réponse du système primaire. L'ensemble des réseaux utilisés dans cette section sont illustrés à la Fig. 2.2 où, b est l'inertance (masse secondaire équivalente), c et (k, k_2, k_3) sont, le coefficient d'amortissement et les coefficients de rigidités, respectivement, des isolateurs à base d'inert et k_n est le coefficient de rigidité négative. Finalement, la structure primaire elle-même est supportée au sol par des ressort de coefficient de raideur équivalente k_1 ou K au cas échéant.

Supposons que le système à un seul degré de liberté (1DDL) non amorti équipé d'un système d'isolation à base d'inert comme montré à la Fig. 2.1 soit soumis à des exci-


 FIGURE 2.2 – Les réseaux mecaniques à base d'inerters utilisés comme $W(s)$ sur la Fig. 2.1.

tations de la base de formes telle que, $a_g(t)$ soit l'accélération de la base (cas 1), et $y(t)$ le déplacement de la base (cas 2). L'équation du mouvement pour l'ensemble du système dans le domaine de Laplace peut donc s'établir comme suit :

$$ms^2 X_1 + sW(s)(X_1 - Y) + K(X_1 - Y) = -mA_g \quad (2.1)$$

où $W(s)$ est l'admittance des réseaux mécaniques passifs à inertier, X_1 , Y et A_g sont les transformations de Laplace, du déplacement x_1 de la structure primaire, du déplacement du sol $y(t)$ et de l'accélération du sol $a_g(t)$, respectivement, avec $s = j\omega$ la variable de Laplace. Ici, ω est la fréquence d'excitation de la base de la structure primaire. En résolvant l'équation (2.1), le déplacement X_1 par rapport au sol, de la structure primaire en termes de sources d'excitations peut s'écrire comme :

$$X_1 = H_1(s)Y + H_2(s)A_g \quad (2.2)$$

avec

$$H_1(s) = \left. \frac{X_1}{Y} \right|_{A_g=0} = \frac{sQ(s)}{m_1 s^2 + sQ(s)}; \quad H_2(s) = \left. \frac{X_1}{A_g} \right|_{Y=0} = \frac{-m_1}{m_1 s^2 + sQ(s)}, \quad (2.3)$$

les fonctions de transferts du déplacement de la structure primaire par rapport aux excitations Y (lorsque $A_g=0$) et A_g (lorsque $Y=0$), respectivement. $Q(s)$ est l'admittance de l'isolateur. Comme le montre la Fig. 2.1, $Q(s) = \frac{K}{s} + W(s)$ ou $Q(s) = \frac{k_1}{s} + W(s)$, où $W(s)$ désigne l'admittance du réseau passif constitué d'interconnexions finies de ressorts, d'amortisseurs et de l'inerteur. Ainsi, dans cette section, quatre isolateurs à base d'inerteur sont étudiés et indiqués comme à la Fig. 2.2. Leurs admittances sont résumées dans le Tableau 2.1.

TABLE 2.1 – $W(s)$ pour les configurations de la Fig. 2.2, où s désigne la variable de Laplace.

$W_1(s) = \frac{1}{bs+c+\frac{s}{k}}$	$W_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{bs}+\frac{1}{bs}+\frac{s}{k}}$
$W_3(s) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{s}{k_3}+\frac{1}{c}}+\frac{k_2}{s}}+\frac{1}{bs}}$	$W_4(s) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{s}{k_3}+\frac{1}{c}}+\frac{k_2}{s}}+\frac{1}{bs+\frac{s}{k_n}}}$

Pour les configurations considérées comme indiqué sur la Fig. 2.2, les fonctions de transferts $H_2(s)$ et $H_1(s)$ dans l'équation (2.2) peuvent être obtenue en remplaçant $Q_i(s) = \frac{K}{s} + W_i(s)$, $i = 1, \dots, 4$, dans l'équation (2.3), respectivement, où les $W_i(s)$ indiquant les configurations C_i ($i = 1, \dots, 4$), respectivement, sont donnés dans le Tableau 2.1.

Afin d'obtenir une représentation sans dimension et de simplifier les calculs, $\omega_n = \sqrt{K/m}$ et $c_r = 2\omega_n m = 2\sqrt{mK}$ sont utilisés pour désigner, respectivement, la fréquence propre et l'amortissement critique du système illustré à la Fig. 2.1 sans $W(s)$. Notons que les systèmes primaires contrôlés avec chacun des quatre configurations d'isolateurs proposées ne sont pas adimensionnés de la même manière, il y a deux classes :

Pour les systèmes primaires contrôlés avec les configurations $C1$ (SPIS) (series-parallel inerteur system) et $C2$ (SIS) (series inerteur system), seule l'excitation de type accélération de la base du système primaire est considérée (cas 1). Les paramètres sans dimension, $q = \frac{\omega}{\omega_n}$, $\zeta = \frac{c}{c_r}$, $\delta = \frac{b}{m}$, et $\lambda = \frac{K}{k}$ désignent, respectivement, le rapport de la fréquence d'excitation par rapport à la fréquence naturelle de la structure primaire (q), le rapport d'amortissement (ζ), le rapport inertance/masse (δ), et le rapport de rigidité (λ). Comme indiqué par l'équation (2.3) pour $Y = 0$, le rapport d'amplitude absolue $|X_1/A_g|$ du déplacement X_1 par rapport à A_g (avec $A_g = a_g \omega_n^{-2}$) de la fonction de transfert sans dimension $H_2(s = jq)$ peut être obtenu en remplaçant respectivement dans (2.3), $Q_i(s = jq)$, $i = 1, 2$ et les paramètres sans dimension, où les $W_i(jq)$ sont obtenue à partir du Tableau 2.1 en remplaçant s par jq .

Considérant la configuration $C1$ (SPIS) de la Fig. 2.2(a),

$$\left| \frac{X_1}{A_g} \right| = \left| \frac{1 - \delta\lambda q^2 + j2q\lambda\zeta}{1 - (1 + \delta + \delta\lambda)q^2 + \delta\lambda q^4 + j2q(1 + \lambda - \lambda q^2)\zeta} \right|. \quad (2.4)$$

Dans cette dernière équation et ci-après, $j = \sqrt{-1}$. Pour le cas de la configuration $C2$ (SIS) de la Fig. 2.2(b), la fonction de transfert du déplacement (encore appelée transfert de conformité) de la structure primaire est également obtenue en utilisant l'équation (2.3) pour $Y = 0$. Par conséquent, le rapport d'amplitude $|X_1/A_g|$ de la fonction de transfert de conformité sans dimension pertinente pour $C2$ (SIS) peut être établie comme suit :

$$\left| \frac{X_1}{A_g} \right| = \left| \frac{2(1 - \lambda\delta q^2)\zeta + j\delta q}{2(\lambda\delta q^4 + (1 + \delta(1 + \lambda))q^2 + 1)\zeta + j\delta(1 - q^2)q} \right|. \quad (2.5)$$

Pour les systèmes primaires contrôlés par les configurations $C3$ (SPIS) (series-parallel inertier system) et $C4$ (NSPIS) (series-parallel inertier system with negative stiffness), les deux cas d'excitation c'est-à-dire, l'accélération de base (cas 1) et le déplacement de base (cas 2) sont considérée comme à la Fig. 2.1. Les paramètres sans dimension étant, $\nu = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\zeta = \frac{c}{c_r}$ ($c_r = 2\omega_0 m = 2\sqrt{mk_1}$ avec $k_1 = K$ dans (2.1)), $\mu = \frac{b}{m}$, $\lambda = \frac{k_3}{k_1}$, $\beta = \frac{k_2}{k_1}$ et $\kappa = \frac{k_n}{k_1}$ désignent respectivement, le rapport de la fréquence d'excitation par rapport à la fréquence naturelle du système primaire (ν), le rapport d'amortissement (ζ), le rapport inertance/masse (μ) et les rapports de rigidités positives (λ , β) et négatif (κ). Selon l'équation (2.3), les rapports d'amplitudes $|X_1/Y|$ et $|X_1/A_g|$ des fonctions de transferts sans dimension $H_1(\bar{s})$ et $H_2(\bar{s})$ peuvent être obtenue en remplaçant $Q_i(\bar{s})$, $i = 3, 4$ et les paramètres sans dimension dans (2.3), respectivement, où les $W_i(\bar{s})$ sont donnés dans le Tableau 2.1 en remplaçant s par \bar{s} .

Considérant la configuration $C4$ (NSPIS),

$$\left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right| = \left| -\frac{N_3\bar{s}^3 + N_2\bar{s}^2 + N_1\bar{s} + N_0}{D_5\bar{s}^5 + D_4\bar{s}^4 + D_3\bar{s}^3 + D_2\bar{s}^2 + D_1\bar{s} + D_0} \right| \quad (2.6)$$

dans laquelle, $\bar{s} = j\nu$ et $\delta_{st} = A_g$ ou Y . Les coefficients du numérateur de la fonction de transfert la structure primaire excitée par accélération de sa base (cas 1) en fixant $Y = 0$, et ceux de la structure primaire excitée par déplacement de sa base (cas 2) en fixant $A_g = 0$ sont listés respectivement comme suit :

$$acc - \begin{cases} N_3 = 2\zeta\mu \\ N_2 = \lambda\mu \\ N_1 = 2\zeta(\beta + \lambda + \kappa) \\ N_0 = (\beta + \kappa) \end{cases}, \quad dep - \begin{cases} N_3 = -2\zeta\mu \\ N_2 = -\lambda\mu \\ N_1 = -2\zeta(\beta + \lambda + \kappa) \\ N_0 = -(\kappa\beta + \beta + \kappa) \end{cases} \quad (2.7)$$

et les coefficients du dénominateur commun aux deux cas d'excitation de la structure primaire sont énumérés comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_5 = 2\zeta\mu \\ D_4 = \lambda\mu \\ D_3 = 2\zeta(\beta\mu + \lambda\mu + \beta + \lambda + \kappa + \mu) \\ D_2 = \lambda(\beta\mu + \beta + \kappa + \mu) \\ D_1 = 2\zeta[(\beta + \lambda + 1)\kappa + (\beta + \lambda)] \\ D_0 = \lambda[(\beta + 1)\kappa + \beta] \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où les notations *acc* et *dep* désignent respectivement la base excitée par accélération (cas 1), et la base excitée par déplacement (cas 2). Notez que par un réglage de $\kappa = 0$ dans les équations (2.6) (2.7) et (2.8), les fonctions de transferts en termes de déplacement relatif X_1 de la masse principale m (structure primaire) pour le système 1DDL équipé d'un système à inerteur $C3(\text{SPIS})$ peuvent être récupérées. À cet égard, le système 1DDL avec $C3(\text{SPIS})$ est considéré comme un cas particulier du système primaire 1DDL avec $C4(\text{NSPIS})$ en imposant $\kappa=0$.

Stabilité du système primaire + $C4$ (NSPIS)

Selon la caractéristique de la raideur négative, il est pertinent de préciser la limite admissible sur la valeur de la rigidité négative, à l'intérieur de laquelle le système primaire contrôlé avec $C4$ (NSPIS) reste stable. Notant que l'analyse de stabilité de ce type de système est rare dans la littérature, l'une des contributions majeures de cette section est de mener une étude systématique sur la stabilité du système primaire équipé du $C4$ (NSPIS).

Considérons l'équation caractéristique ci-dessous de la structure primaire sous excitation harmonique de sa base comme montrée sur la Fig. 2.1, et contrôlée par le dispositif $C4$ (NSPIS) :

$$D_5\bar{s}^5 + D_4\bar{s}^4 + D_3\bar{s}^3 + D_2\bar{s}^2 + D_1\bar{s} + D_0 = 0, \quad (2.9)$$

où les coefficients D_i ($i = 0, 1, \dots, 5$) sont donnés dans l'équation (2.8). Selon "le critère de stabilité de Routh-Hurwitz", un système est asymptotiquement stable si et seulement si toutes ses valeurs propres se trouvent dans la moitié gauche du plan complexe et tous les coefficients D_i dans l'équation caractéristique (2.9) doivent également être positifs. Les coefficients de Routh associés sont énumérés dans le Tableau 2.2.

TABLE 2.2 – Tableau des coefficients de Routh.

\bar{s}^0	\bar{s}^1	\bar{s}^2	\bar{s}^3	\bar{s}^4	\bar{s}^5
D_0	$a_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 D_0}{c_1}$	$c_1 = \frac{b_1 D_2 - b_2 D_4}{b_1}$	$b_1 = \frac{D_4 D_3 - D_2 D_5}{D_4}$	D_4	D_5
0	0	D_0	$b_2 = \frac{D_4 D_1 - D_0 D_5}{D_4}$	D_2	D_3
0	0	0	0	D_0	D_1

où les coefficients a_1 , b_1 , b_2 et c_1 sont calculés et exprimés comme suit :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2\zeta\lambda(\mu - \kappa)^2}{(1 + \beta)\mu^2 + 2\beta\mu + \beta + \kappa}, & b_1 = 2\zeta\lambda(1 + \mu), \\ b_2 = 2\zeta\lambda(1 + \kappa), & c_1 = \frac{\lambda[(1 + \beta)\mu^2 + 2\beta\mu + \beta + \kappa]}{1 + \mu} \end{cases}. \quad (2.10)$$

Le système est stable si tous les coefficients de la deuxième ligne du Tableau 2.2 ci-dessus sont du même signe, c'est-à-dire positif ($D_5 > 0$, $D_4 > 0$, $b_1 > 0$, $c_1 > 0$, $a_1 > 0$ et $D_0 > 0$). De plus, dans (2.2.1), les paramètres a_1 et c_1 sont du signe du polynôme en μ défini par $(1 + \beta)\mu^2 + 2\beta\mu + \beta + \kappa$, donc le discriminant est : $\Delta = -[\beta + \kappa(1 + \beta)]$. Ainsi, a_1 et c_1 sont positifs et du signe de $1 + \beta$ quand $\beta + \kappa(1 + \beta) > 0$ et c'est la même condition pour avoir $D_0 > 0$ (voir l'équation (2.8)). Enfin, le stress unique sur le rapport de rigidité négatif garantissant la stabilité du système primaire sous le contrôle de $C4$ (NSPIS), peut être atteint comme suit :

$$\kappa > -\frac{\beta}{1 + \beta} = -1 + \frac{1}{1 + \beta}. \quad (2.11)$$

Comme $1/(1 + \beta)$ dans (2.11) diminue pour tous β positif, il est trouvé que la borne inférieure de κ est supérieur à -1, ce qui signifie que la valeur absolue de la rigidité négative k_n doit toujours être inférieure à rigidité k_1 du système primaire. Cependant, la valeur optimale et la limite supérieure effective sur κ seront montrées dans le chapitre 3 parce que, la formulation analytique du rapport de rigidité β pourrait avoir une expression en fonction de κ et μ dans la suite du problème.

Dans cette étude, il est important de noter que l'objectif de conception est de minimiser les réponses de la structure primaire en termes de déplacement, sous excitation harmonique et aléatoire de la base, respectivement, sous le contrôle des isolateurs proposées à la Fig. 2.2. Cet objectif est atteint en recherchant une conception optimale des configurations proposées en utilisant des méthodes standards d'optimisation basées sur la fonction de transfert de déplacement du système primaire. Dans cette conception, les paramètres optimaux qui sont les coefficients des rapports de rigidités, et d'amortissement sont dérivés en fonction du rapport inertance/masse μ . Ainsi, les conceptions optimales trouvées peuvent être comparées au TMD classique ou DVA traditionnelle (TDVA), afin d'évaluer leurs performances de contrôle (suppression des vibrations).

2.2.2 Isolation du bruit structurel à base d'inerteur

Dans la pratique de l'ingénierie, l'indice d'évaluation de la performance utilisé est la minimisation de la fonction de transfert de déplacement de la structure primaire. Le but de cette fonction d'évaluation est de minimiser la réponse de déplacement absolu du système primaire. Cependant, il est important de minimiser la réponse de vitesse absolue du système primaire pour réduire le bruit généré par la structure ou le corps vibrant

[28, 29, 158]. Ce dernier aspect est l'un des principaux objectifs de cette étude. La Fig. 2.3 montre une structure primaire en mouvement de vitesse \dot{x}_1 sous excitation d'accélération harmonique et aléatoire de la base, respectivement, et contrôlée par des isolateurs à base d'inerters dont les configurations sont illustrées à la Fig. 2.4.

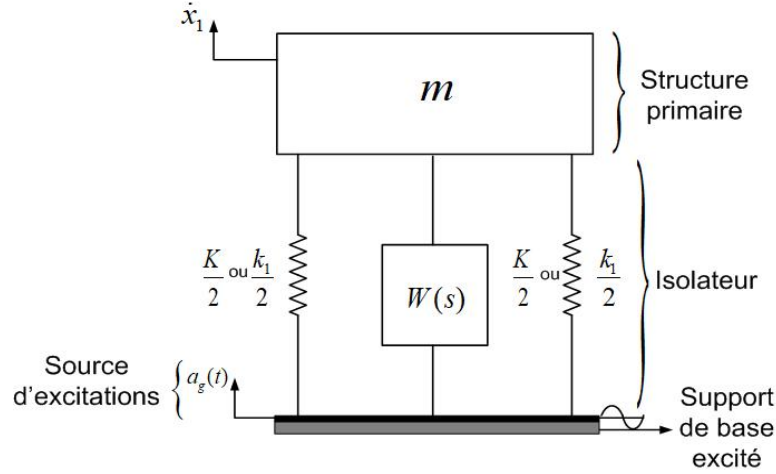


FIGURE 2.3 – système d'isolement uni-axiale de bruit d'une structure primaire non amortie sous excitation de base.

En remarquant que $\dot{X}_1 = sX_1$, où \dot{X}_1 est la transformation de Laplace de \dot{x}_1 , l'équation du mouvement traduisant l'évolution de la vitesse de la structure primaire dans le domaine de Laplace peut être écrite en remplaçant $Y = 0$ et sX_1 par \dot{X}_1 dans l'équation (2.1) comme :

$$m_1 s \dot{X}_1 + W(s) \dot{X}_1 + \frac{k_1}{s} \dot{X}_1 = -m_1 A_g. \quad (2.12)$$

Ensuite, on obtient la fonction de transfert de mobilité comme

$$H_3(s) = \frac{\dot{X}_1}{A_g} = \frac{-m_1 s}{m_1 s^2 + sQ(s)}. \quad (2.13)$$

De même, pour les configurations considérées dans cette section (Fig. 2.4), la fonction de transfert de mobilité $H_3(s)$ dans l'équation (2.13) peut être obtenue en remplaçant $Q_i(s) = \frac{K}{s} + W_i(s)$, $i = 1, 2$, dans cette équation, où les $W_i(s)$ sont donnés dans le Tableau 2.1. Ainsi, le rapport d'amplitude normalisé $|\dot{X}_1/A_g|$ de cette fonction de transfert de mobilité est obtenu en remarquant que :

$$\left| \frac{\dot{X}_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{qX_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{qX_1}{\delta_{st}} \right|_{C1, C2}, \quad (2.14)$$

où $C1$ et $C2$ sont les configurations de la Fig. 2.4, respectivement. Encore une fois, la conception du système consiste par des méthodes standards, à dériver les paramètres optimaux de la structure isolatrice qui minimisent la fonction de transfert de mobilité. Pour ce faire, les deux configurations de la Fig. 2.4 sont les deux schémas candidats qui après

conception, seront comparés à la DVA traditionnelle (TDVA), pour évaluation des performances de contrôle. Cependant, il faut noter que la conception du (TDVA) pour minimiser la fonction de transfert de mobilité (c'est-à-dire réduire le bruit généré par la structure primaire) de la structure primaire non amortie sujet à des excitations d'accélération de base n'est pas mentionnés dans la littérature. Par conséquent, ces résultats sont présentés pour la première fois dans cette étude.

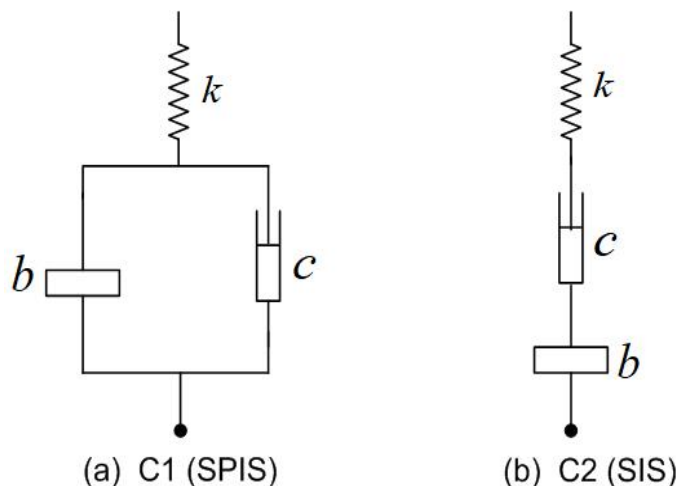


FIGURE 2.4 – Les réseaux à base d'inertier utilisés comme $W(s)$ sur la Fig. 2.3.

2.2.3 Absorption des vibrations à base d'inertier

Dans cette section, la structure primaire est directement excitée par force (comme le montre la Fig. 2.5), qui peut être également modélisée comme une structures de bâtiment à un étage à degré de liberté unique (1DDL). Ces excitations produisent des mouvement indésirables excessifs de la structure primaire du bruit et des contraintes dynamiques pouvant entraîner de la fatigue et des dommages à la structure, mais aussi, ces vibrations peuvent réduire les performances de la structure. Par conséquent, la sécurité de la structure peut être garantie en contrôlant ses mouvements excessifs. Pour le faire, il existe plusieurs procédures de contrôle afin d'améliorer la performance de la structure. L'une des approches de contrôle des vibrations couramment utilisée dans ce cas de figure est l'absorption passive de ces mouvementS excessifs, par la fixation d'un absorbeur de vibrations au système considéré comme une structure primaire. Les TMDs ont longtemps été utilisés à cette fin mais, présentes des limitations inhérentes [14–18]. A cet effet, les TMDs sont remplacés dans cette étude par des absorbeurs à base d'inertier en fixation entre la structure primaire et le sol (voir Fig. 2.5). Ces systèmes sont proposés à la Fig. 2.6 afin d'améliorer les performances sur la réponse du système primaire et de surmonter les limitations inhérentes des TMDs.

Pour les configurations d'absorption de vibrations à inertier proposées dans cette section (Fig. 2.6), $P(s)$ est l'admittance de l'absorbeur. Comme le montre la Fig. 2.5,

$P(s) = \frac{k_1}{s} + Y(s)$, où $Y(s)$ désigne les admittances de réseaux passifs constitués d'interconnexions finies de ressorts, d'amortisseurs et d'inerters. Dans cette section trois absorbeurs à base d'inertier comme indiqué dans la Fig. 2.6 seront étudiés. Leur admittance sont résumées dans le Tableau 2.3, où k_2 est le coefficient de raideur du ressort, c le coefficient de viscosité de l'amortisseur et m_d le coefficient d'inertance. Ici, k_n représente le coefficient de raideur mis à la terre. Le dispositif entourant l'inertier dans la configuration C7 (AIGS-IVA) est un mécanisme d'amplification de l'inertance en cas de besoin de masse importante pour l'amélioration du contrôle des vibrations. Cependant, la théorie autour de ce dispositif d'amplification de masse est montrée dans la revue de la littérature et peut être retrouvée dans [30, 170].

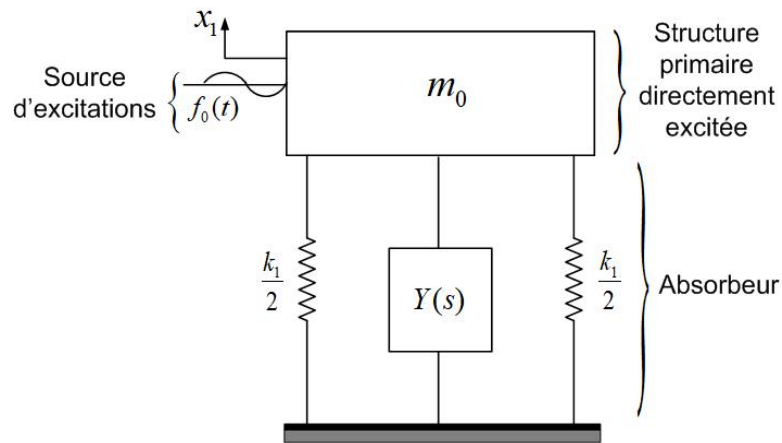


FIGURE 2.5 – Système d'absorption uni-axiale de vibrations d'une structure primaire non amortie sous excitation de force.

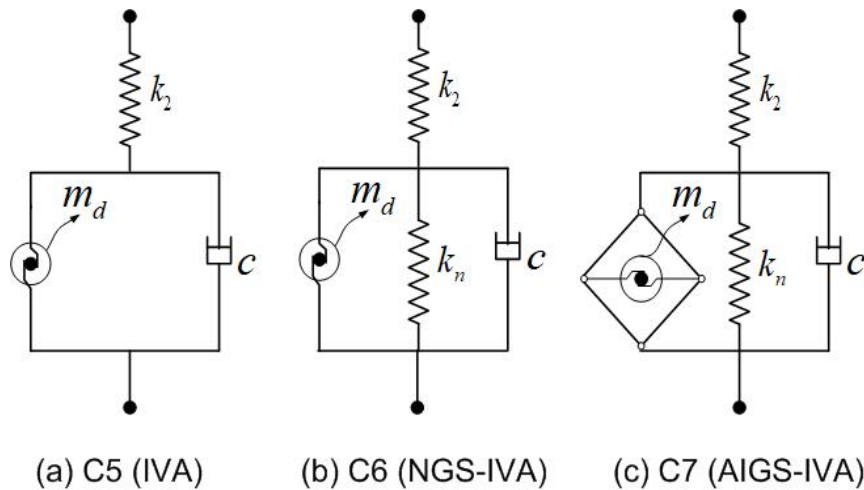


FIGURE 2.6 – Les réseaux à base d'inertier utilisés comme $Y(s)$ sur la Fig. 2.5.

Notons X_1 et F les transformation de Laplace du déplacement x_1 de la structure primaire et de la force d'excitation $f_0(t)$, respectivement. s la variable de Laplace. L'équation du mouvement traduisant l'évolution du déplacement de la structure primaire dans

le domaine de Laplace peut être écrite comme :

$$m_1 s^2 X_1 + sY(s)X_1 + k_1 X_1 = F. \quad (2.15)$$

Ensuite, on obtient la fonction de transfert de déplacement par rapport à la force d'excitation comme

$$H_4(s) = \frac{X_1}{X_s} = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_1^2} + \frac{sP(s)}{k_1}}, \quad (2.16)$$

où $X_s = F/k_1$ et $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$ sont le déplacement statique et la fréquence propre du système primaire, respectivement. La fonction de transfert $H_4(s)$ peut être obtenue en remplaçant $P_i(s) = \frac{k_1}{s} + Y_i(s)$, $i = 1, 2, 3$, dans l'équation (2.16), où les $Y_i(s)$ indiquent les configurations C_i ($i = 1, \dots, 3$), respectivement, données dans le Tableau 2.3.

TABLE 2.3 – $Y(s)$ pour les configurations de la Fig. 2.6, où s désigne la variable de Laplace et β le facteur d'amplification de l'inertance comme montré à la section 1.5.

$Y_1(s) = \frac{1}{\frac{1}{m_d s + c} + \frac{s}{k_2}}$	$Y_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_n}{s} + m_d s + c} + \frac{s}{k_2}}$
$Y_3(s) = \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_n}{s} + \beta^2 m_d s + c} + \frac{s}{k_2}}$	$Y_{TID}(s) = \frac{1}{\frac{1}{s+c} + \frac{1}{bs}}$

Afin d'obtenir une représentation sans dimension, $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$ et $c_r = 2\beta^2 m_d \omega_d = 2\sqrt{\beta^2 m_d k_2}$ sont utilisés pour désigner la fréquence propre et l'amortissement critique du système d'absorption illustré à la Fig. 2.5 sans $Y(s)$, respectivement.

Pour les configuration d'absorbeurs de vibration à base d'inertier proposées, contrôlant la structure primaire de la Fig. 2.5, les paramètres sans dimension, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$, $\xi = \frac{c}{c_r}$, $\mu = \frac{m_d}{m_1}$, et $\alpha = \frac{\omega_d}{\omega_1}$ ($\omega_d = \sqrt{k_2/\beta^2 m_d}$ est la fréquence de coin avec β le facteur d'amplification) désignent le rapport de fréquence forçage (Ω), le rapport d'amortissement (ξ), le rapport inertance/masse (μ), et le rapport de fréquence de coin (α), respectivement. En utilisant ces paramètres, le rapport d'amplitude $|X_1/X_s|$ de la fonction de transfert de déplacement sans dimension peut être obtenu en remplaçant $P_i(s = j\Omega)$, $i = 1, 2, 3$, où $Y_i(j\Omega)$ sont donnés dans le Tableau 2.3 en remplaçant s par $j\Omega$. Ainsi, on obtient :

$$\left| \frac{X_1}{X_s} \right| = \left| \frac{(j\Omega)^2 + N_1(j\Omega) + N_0}{(j\Omega)^4 + D_3(j\Omega)^3 + D_2(j\Omega)^2 + D_1(j\Omega) + D_0} \right| \quad (2.17)$$

où j est l'unité imaginaire, $X_s = F/k_1$ la déflexion statique de la structure sans contrôle, et les autres paramètres sont les suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = 2\xi\alpha, \\ N_0 = \alpha^2(1 + \eta), \\ D_3 = 2\xi\alpha, \\ D_2 = \alpha^2(1 + \eta + \mu\beta^2), \\ D_1 = 2\xi\alpha(1 + \mu\beta^2\alpha^2), \\ D_0 = \alpha^2(1 + \eta + \eta\mu\beta^2\alpha^2). \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Lorsque facteur d'amplification $\beta = 1$, les configurations d'absorbeur $C6$ (NGS-IVA) (Fig. 2.6(b)) (inerteur vibration absorber with grounded stiffness device) et $C7$ (AIGS-IVA) (Fig. 2.6(c)) (inerteur vibration absorber with an amplified inertance and grounded stiffness device) n'ont aucune différence sauf pour la structure. Par conséquent, $C6$ (NGS-IVA) est un cas particulier de $C7$ (AIGS-IVA). De la même manière, en imposant $\eta = 0$ dans $C6$ (NGS-IVA), $C5$ (IVA) (Fig. 2.6(a)) (inerteur vibration absorber) se présentera comme son cas particulier sans raideur négative.

Stabilité du système primaire + $C6$ (NGS-IVA) et $C7$ (AIGS-IVA)

Selon la caractéristique de la rigidité négative k_n , il est pertinent de spécifier la limite admissible sur sa valeur, à l'intérieur de laquelle le système couplé reste stable. La stabilité de l'équilibre statique du système couplé avec une rigidité à la terre pertinente pour $C7$ (AIGS-IVA) peut être analysé en appliquant le critère de Routh-Hurwitz à l'équation caractéristique du système donnée par

$$s^4 + D_3s^3 + D_2s^2 + D_1s + D_0 = 0. \quad (2.19)$$

Selon le critère de stabilité de Routh-Hurwitz, le système couplé est asymptotiquement stable si et seulement si tous ses valeurs propres (de l'équation (2.19)) se trouvent dans la moitié gauche du plan complexe et tous les coefficients D_i dans l'équation caractéristique (2.19) devrait également être positive. En conséquence, le système couplé $C7$ (AIGS-IVA) est stable si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$D_3 > 0, \quad D_1 > 0, \quad D_0 > 0, \quad D_1D_2D_3 > D_1^2 + D_0D_3^2. \quad (2.20)$$

En substituant les coefficients D_i ($i = 0, \dots, 3$) (voir éq(2.18)) dans l'équation(2.20), une contrainte unique sur le rapport de rigidité pertinent pour garantir la stabilité de $C7$ (AIGS-IVA) peut être satisfait comme suit

$$\eta = -1 + \frac{\mu\beta^2\alpha^2}{1 + \mu\beta^2\alpha^2}. \quad (2.21)$$

Comme $\mu\beta^2\alpha^2/(1 + \mu\beta^2\alpha^2)$ dans (2.21) augmente pour toutes les valeurs positives de $\mu\beta^2\alpha^2$, la borne inférieure de η est supérieur à -1, ce qui signifie que la valeur absolue de la rigidité à la terre k_n doit toujours être inférieure à celle de la rigidité k_2 . Cependant, la limite supérieure effective sur η sera montrée dans le chapitre 3 car la formulation

analytique du rapport de fréquence pourrait être trouvée en fonction de η , μ et β . Par ailleurs, la condition de stabilité pertinente pour C6(NGS-IVA) se déduit de celle de C7(AIGS-IVA) en remplaçant le facteur d'amplification β par 1 dans (2.21). La valeur absolue de k_n étant toujours inférieure à celle de la rigidité k_2 .

Notons que les objectifs de conception sont identiques que dans les sections précédentes, c'est-à-dire limiter les déplacements de la structure primaire dans les domaines fréquentiels et temporels en absorbant ses vibrations au moyen des réseaux d'absorbeurs proposés. Pour ce faire, les paramètres de réglage (conception) des configurations proposés sont déterminés au moyen des méthodes standards d'optimisation.

Remarque 1 *Dans cette étude, l'analogie force-courant entre réseaux mécanique et électrique est utilisée, et l'admittance est définie comme étant le rapport de la force à vitesse, ce qui est conforme à la terminologie électrique habituelle (pour détails voir [27]). Une telle définition est cohérente avec certains livres (Shearer et Murphy [159], p.328), mais pas avec d'autres qui utilisent l'analogie force-tension (Hixson [160]).*

Remarque 2 *Puisque les fréquences naturelles seraient perturbées en utilisant l'inerteur comme démontré dans Chen et al. [161], ω_0 , ω_1 et ω_n utilisées dans cette étude ne sont pas la vraie fréquence naturelle de l'ensemble du système. ω_d n'est pas non plus la fréquence de coin réelle. Ici, ces notations sont utilisées uniquement pour des représentations sans dimension.*

Remarque 3 *Dans cette étude, l'effet de la rigidité négative sur l'atténuation des vibrations de la structure primaire est un phénomène particulièrement remarquable dans cette thèse. Cependant, la structure de rigidité négative est instable et difficile à réaliser dans la pratique de l'ingénierie. Néanmoins, pour le dispositif mécanique de raideur négative, les stratifiés composites croisés avec une contrainte thermique résiduelle sont capables de réaliser une rigidité négative [162]. En outre, un matériau piézoélectrique shunté avec le condensateur résistance-inductance-négatif est également un moyen réalisable de mettre en œuvre une rigidité négative [163–165]. Plus récemment, des structures mécaniques à rigidité négative ont été implémentées dans [166–169] pour une réalisation physique plus réaliste des dispositifs à raideur négative*

Remarque 4 *En dehors de l'effet d'atténuation de la rigidité négative sur les vibrations, la section 2.2.3 prend aussi en compte l'effet d'amplification de l'inertance de l'inerteur couplé à une raideur positive mise à la terre. Dans ce cas également, le phénomène d'atténuation des vibrations de la structure primaire est particulièrement remarquable dans cette thèse. Notons que l'implémentation d'un dispositif d'amplification de l'inertance de l'inerteur a été proposée dans [170]*

Tous ces effets remarquables seront mis en évidence dans le chapitre 3. En attendant, la section suivante présente les méthodes de conception (optimisation) des isolateurs ou absorbeurs de vibrations proposés basées sur les fonctions de transferts.

2.3 Optimisation des paramètres

Pour la conception optimale des systèmes de suppression passif des vibrations, de nombreuses recherches approfondies et méticuleuses ont été menées dans le passé. Dans ces dernières années, le chercheur japonais Asami [9] a réalisé un travail théorique systématique et approfondi. Selon les différents but de l'application, l'optimisation des problèmes de conception peut être divisée en trois catégories :

(1) *Dans le cas où le système de vibration principal est soumis à une excitation harmonique, l'objectif est de minimiser le déplacement maximum de la structure primaire (appelé norme H_∞). C'est un problème d'optimisation H_∞*

(2) *Dans le cas où le système de vibration principal est soumis à une excitation aléatoire, l'objectif est de réduire l'énergie vibratoire total du système sur toutes les fréquences. Dans ce critère d'optimisation, l'aire (appelée norme H_2) sous la courbe de réponse en fréquence du système est minimisée. C'est un problème d'optimisation H_2 .*

(3) *Pour le cas où le système de vibration principal est soumis à une excitation par choc, l'objectif du critère de maximisation de la stabilité est d'améliorer la vibration transitoire du système. C'est un problème de maximisation de la stabilité.*

Le système primaire dans cette étude est soumis à une excitation harmonique et aléatoire, respectivement, de telle sorte que l'optimisation H_∞ et l'optimisation H_2 soient utilisées comme critères d'optimisation.

2.3.1 Optimisation H_∞

En pratique, pour obtenir de bonnes performances de suppression de vibrations, il est toujours souhaitable de minimiser le déplacement maximal de l'objet contrôlé, ce que l'on appelle l'optimisation H_∞ [80]. Pour la dérivation des solutions de forme exacte, [61, 62] ont proposé la théorie des points fixes (TPF). Cependant, cette technique est basée sur l'existence des points invariants (points fixes) où les courbes de réponse en fréquence du système primaire coïncident.

Notons que deux ou trois points invariants (points fixes) peuvent être introduits en utilisant la connexion en série-inerter ou série-parallèle-inerter. Afin d'ajuster davantage les deux points ou trois points invariants, des ressorts supplémentaires sont incorporés. Selon le nombre de points fixes dans les courbes amplitude-fréquence normalisées du système primaire, les sept configurations illustrées aux (Fig. 2.2 et Fig. 2.6) peuvent être divisées en deux catégories. Il y a deux points fixes dans une classe (qui comprend $C1$, $C2$, $C5$, $C6$ et $C7$) et trois points fixes dans l'autre (qui comprend $C3$ et $C4$). La théorie du point fixe (Den Hartog [60, 61]) est utilisée pour dériver les paramètres des configurations d'isolateurs ou d'absorbeur à inerter. A titre d'exemple pour les isolateurs, la théorie du point fixe [60, 61] peut être résumée comme suit.

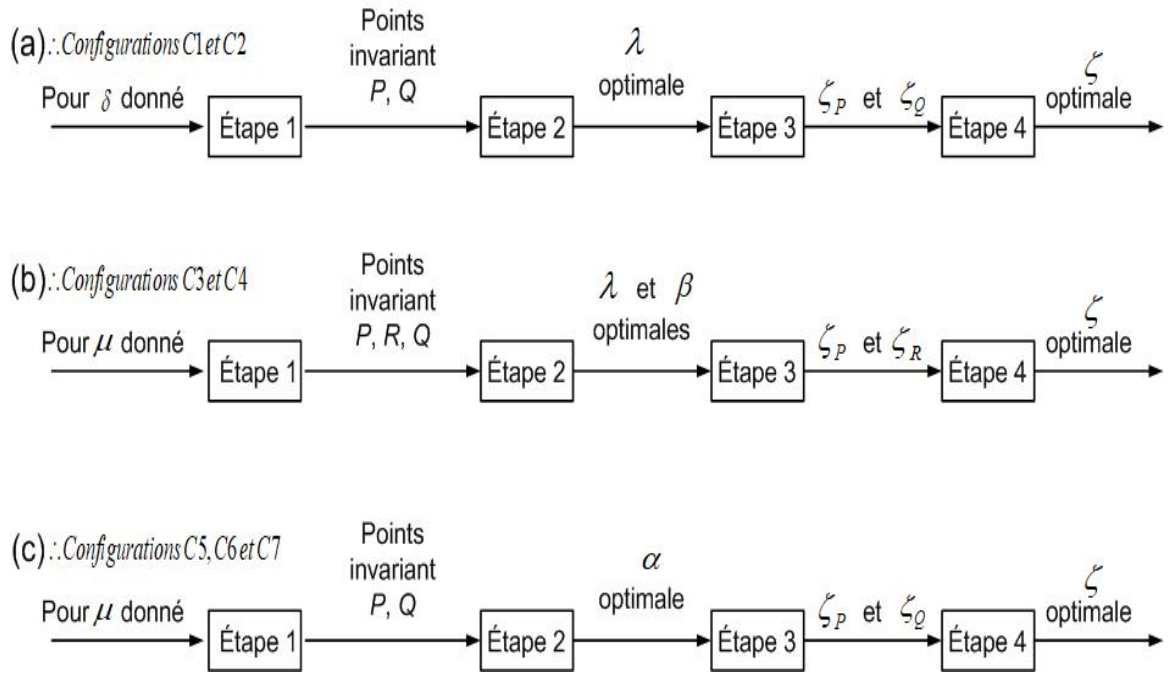


FIGURE 2.7 – Representation graphique de la procédure 1.

Procédure 1

1. Pour un rapport inertance/masse donné, trouver les points invariants qui sont indépendants du rapport d'amortissement ζ , et dénotons les deux (trois) plus petits points invariants comme P et Q (pour deux points) ou P , R et Q (pour trois points), respectivement ;
2. Ajustez le(s) rapport(s) de rigidité du(des) ressort(s) λ et β de sorte que les ordonnées aux points invariants soient égaux ;
3. Calculer le rapport d'amortissement ζ_P et ζ_Q pour que les courbes amplitude-fréquence normalisées traversent horizontalement P et Q , respectivement ;
4. Obtenez le rapport d'amortissement optimal comme $\zeta = \sqrt{\frac{\zeta_P^2 + \zeta_Q^2}{2}}$.

Une représentation graphique de la procédure 1 est donnée à la Fig. 2.7(a)-(b), indiquant le paramètre requis et de sortie à chaque étape. Selon cette procédure, les paramètres optimaux λ , β et ζ pour chaque configuration $C1$ - $C4$ (Fig. 2.2) sont dérivés ultérieurement.

De la même manière que les isolateurs précédent, la théorie du point fixe est également appliquée aux configurations d'absorbeurs $C5$ - $C7$ (Fig. 2.6) dont une représentation graphique de la procédure d'optimisation est donnée à la Fig. 2.7(c), indiquant le paramètre requis et de sortie à chaque étape de la procédure 1.

En particulier, pour les configurations $C4$, $C6$ et $C7$, la théorie étendue des points fixes (TEPF) est utilisée pour dériver le rapport de rigidité négative optimal. Selon les caractéristiques de rigidité négative, elle peut être obtenue si le matériau de rigidité négative

est appliqué par pré-charge. La pré-charge provoquera un pré-déplacement du système primaire, de sorte que l'on adoptera une approximation qui rend le pré-déplacement égal aux valeurs des points fixes. Cela signifie que la valeur de réponse à une excitation de fréquence nulle est égale à celle des des points fixes, c'est-à-dire

$$|H(s = jq)|_{q=q_{\text{points fixes}}} = |H(s = jq)|_{q=0} \quad (2.22)$$

Remarque 5 *La théorie du point fixe (Den Hartog [60, 61]) donne en fait une solution sous-optimale mais très précise comme démontré dans (Nishihara et Asami [63]). Le mérite de la théorie du point fixe est qu'une solution analytique peut être facilement dérivée, ce qui le rend largement utilisée dans le réglage de l'amortisseur de vibrations dynamiques (DVA) (ou amortisseur de masse accordé (TMD)). Voir, par exemple, (Ren [11]; Cheung and Wong [80]; Asami et al. [184]) et leur références. C'est aussi la raison pour laquelle il est utilisé dans cet article. Notons que les paramètres optimaux dérivés de cette section sont "optimales" au sens de la théorie des points fixes utilisant la procédure 1, qui serait sous-optimal en pratique.*

2.3.2 Optimisation H_2

L'optimisation H_2 vise à minimiser l'énergie de vibration totale ou le carré moyen du mouvement de la masse de l'objet lorsque l'excitation du bruit blanc est appliquée [55]. Dans le cas d'une excitation aléatoire (stochastique) telle que la charge du vent au lieu de l'excitation harmonique, l'optimisation H_2 serait plus pratique que l'optimisation H_∞ . Dans cette section, la procédure pour les solutions analytiques des isolateurs à inerter basée sur le critère d'optimisation H_2 est présentée.

La mesure de performance à minimiser dans l'optimisation H_2 est définie comme suit [184, 185] :

$$I = \frac{E[x_1^2]}{2\pi S_0 \omega_1}, \quad (2.23)$$

où S_0 est la fonction de densité spectrale de puissance uniforme, ω_1 et x_1 la fréquence naturelle et le déplacement du système primaire, respectivement. Dénnotant $|H(s)|$ la norme de la fonction de transfert du déplacement x_1 de la structure primaire par rapport a l'excitation ou $s = j\omega$ est la variable de Laplace, la valeur quadratique moyenne de x_1 peut être calculée au moyen de la formule

$$[E[x_1^2]] = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(s = j\omega)|^2 d\omega = S_0 \omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(s = jq)|^2 dq, \quad (2.24)$$

où ω est la fréquence d'excitation et $q = \omega/\omega_1$ le rapport de fréquence de forçage. En remplaçant (2.24) dans (2.23), on obtient

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(s = j\omega)|^2 dq, \quad (2.25)$$

qui est exactement la définition de la norme H_2 de la fonction de transfert $\hat{H}(s)$ en remplaçant jq dans $H(jq)$ par la variable de Laplace s . Par conséquent, la mesure de performance H_2 est réécrite comme

$$I = \left\| \hat{H}(s) \right\|_2^2. \quad (2.26)$$

Dans ce qui suit, une approche analytique pour calculer la norme H_2 de la fonction transfert $\hat{H}(s)$ sera présentée selon (Doyle et al. [186], section 2.6), qui a été utilisé pour dériver des solutions analytiques pour les suspensions de véhicules dans Hu et al. [134].

Pour une fonction de transfert stable $\hat{H}(s)$, sa norme H_2 peut être calculée comme (Doyle et al. [186], section 2.6)

$$I = \left\| \hat{H}(s) \right\|_2^2 = \left\| C(sI - A)^{-1}B \right\|_2^2 = CLC^T, \quad (2.27)$$

où A , B et C sont la réalisation minimale de l'espace d'états $\hat{H}(s) = C(sI - A)^{-1}B$ et L est la solution unique de l'équation de Lyapunov donnée par

$$AL + LA^T + BB^T = 0. \quad (2.28)$$

On peut écrire $\hat{H}(s)$ comme

$$\hat{H}(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (2.29)$$

sous sa forme canonique contrôlable ci-dessous

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (2.30)$$

où A , B et C sont donnés par l'équation (2.31).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n-1}]. \quad (2.31)$$

Précisons que la solution analytique pour les configurations $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) peuvent être dérivées en utilisant la méthode ci-dessus, car les fonctions $\hat{H}(s)$ pour $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) sont strictement corrects. Par conséquent, à titre d'exemple, la procédure pour

dériver les paramètres optimaux pour $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) sous la structure primaire excitée par accélération et déplacement aléatoire de la base peut être résumée comme suit :

Procédure 2

1. Calculer analytiquement la mesure H_2 de performance I en utilisant la méthode décrite ci-dessus. Désignons la mesure de performance par $I = F(\lambda)\zeta + \frac{G(\lambda)}{\zeta}$, où $F(\lambda)$ et $G(\lambda)$ sont des fonctions de λ avec $F(\lambda) > 0$, $G(\lambda) > 0$;
2. Obtenir les équations de ζ optimal et I comme $\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{F(\lambda)}{G(\lambda)}}$ et $I_{opt} = 2\sqrt{F(\lambda)G(\lambda)}$, respectivement ;
3. Obtenir le λ optimal comme celui minimisant $F(\lambda)G(\lambda)$, noté λ_{opt} ;
4. Obtenir les ζ et I optimaux en substituant λ_{opt} aux équations obtenues dans l'étape 2, respectivement.

A l'étape 1 de la procédure 3, il faut inclure le cas où les grandeurs $F(\lambda)$ et $G(\lambda)$ sont constantes par rapport à λ . En suivant la procédure 3, les paramètres optimaux pour $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) dans l'optimisation H_2 seront dérivés ultérieurement.

2.4 Simulation numérique

2.4.1 Les modèles mathématiques

Nous avons précédemment présenté les différents modèles et établi les équations qui régissent leur dynamique dans le domaine de Laplace (domaine fréquentiel). Nous présentons ici la méthode numérique utilisée pour approfondir notre analyse. Cependant, cette méthode numérique a besoin des équations qui régissent la dynamique des systèmes dans le temps. Par conséquent, la Fig. 2.8 montre trois premiers modèles candidats à l'isolation des vibrations en cas d'excitation de la base de la structure primaire. Dans la Fig. 2.8a, un réseau mécanique basé sur les éléments tel que l'inertie b , l'amortisseur c et le ressort k en configuration série-parallèle est constitué, tandis que dans la Fig. 2.8b, ces éléments sont arrangés en série. Finalement, la Fig. 2.8c, montre le modèle traditionnel déjà présenté dans la littérature.

L'excitation basée sur l'accélération $a_g(t)$ de la base de la structure primaire est considérée. En utilisant le formalisme de Lagrange ou le principe fondamental de la dynamique, les équations du mouvement de chaque système dans l'espace-temps sans dimension peuvent être formulées respectivement comme suit.

$C1$ (SPIS) :

$$\begin{cases} (1 + \delta)\ddot{x}_1 - \delta\ddot{x}_2 + 2\zeta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + x_1 = -a_g(\tau) \\ \lambda\delta(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + 2\lambda\zeta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

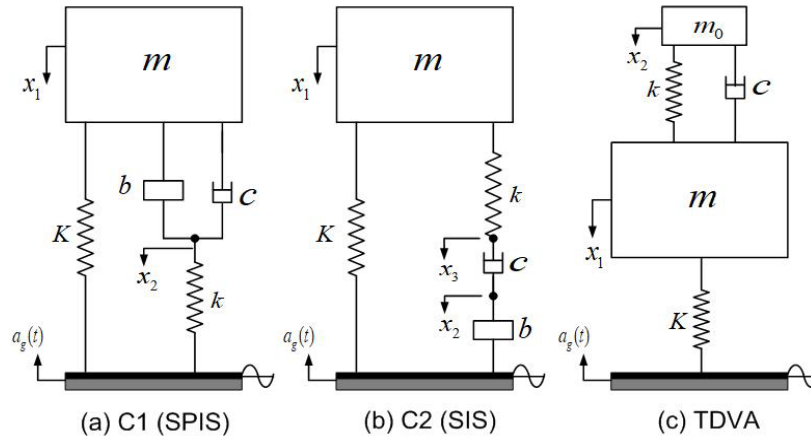


FIGURE 2.8 – Modèles de systèmes primaires isolés par les dispositifs (a) C1(SPIS), (b)C2(SIS) et (c) TDVA, respectivement.

C1(SIS) :

$$\begin{cases} \lambda \ddot{x}_1 + (x_1 - x_3) + \lambda x_1 = -a_g(\tau) \\ 2\lambda\zeta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (x_3 - x_1) = 0 \\ \delta \ddot{x}_2 + 2\zeta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

TDVA :

$$\begin{cases} \lambda \ddot{x}_1 + 2\lambda\zeta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (x_1 - x_2) + \lambda x_1 = -\lambda a_g(\tau) \\ \lambda\delta \ddot{x}_2 + 2\lambda\zeta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (x_2 - x_1) = -\delta\lambda a_g(\tau) \end{cases} \quad (2.34)$$

Pour une diversité dans la modélisation de l'isolation, les Figs. 2.9a et 2.9b montrent deux nouvelles configurations d'isolateurs incorporant un dispositif inerter b . La configuration C3(SPIS) est constituée d'une connexion de type Maxwell (ressort k_3 en série avec l'amortisseur c_2) en parallèle avec un ressort k_2 , les deux en connexion série avec l'inertier b pour former un modèle série-parallèle à inertier. En particulier, la configuration C4(NSPIS) est une version améliorée de la configuration C3(SPIS) en introduisant un ressort supplémentaire k_n à rigidité négative. Pour l'évaluation des performances d'isolation, la configuration du modèle TMD est présentée à la Fig. 2.9c pour être comparée aux dispositifs à inertier proposés dans les Figs. 2.9a et 2.9b, respectivement.

Deux cas d'excitations sont considérés ici, c'est-à-dire, le déplacement $y(t)$ de la base et l'accélération $a_g(t)$ de la base de la structure primaire, respectivement. En utilisant la deuxième loi de Newton, les équations du mouvement de chaque system de la figure 2.9 dans l'espace-temps sans dimension peuvent être établies respectivement.

C3(SPIS) :

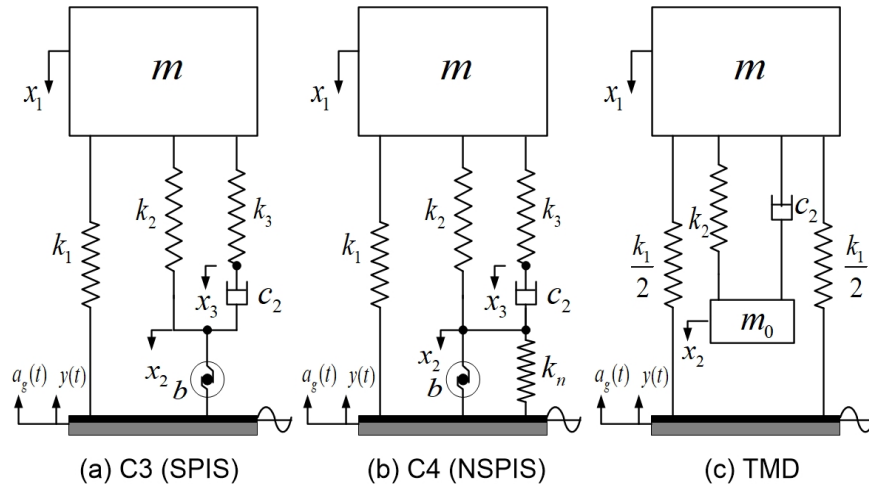


FIGURE 2.9 – Modèles de systèmes primaires isolés par les dispositifs (a) $C3$ (SPIS), (b) $C4$ (NSPIS) et (c) TMD, respectivement.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \beta(x_1 - x_2) + \lambda(x_1 - x_3) + x_1 - y = -a_g(\tau) \\ \mu(\ddot{x}_2 - \ddot{y}) + 2\zeta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \beta(x_2 - x_1) = 0 \\ 2\zeta(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + \lambda(x_3 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

$C4$ (NSPIS) :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \beta(x_1 - x_2) + \lambda(x_1 - x_3) + x_1 - y = -a_g(\tau) \\ \mu(\ddot{x}_2 - \ddot{y}) + 2\zeta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \beta(x_2 - x_1) + \kappa(x_2 - y) = 0 \\ 2\zeta(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + \lambda(x_3 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

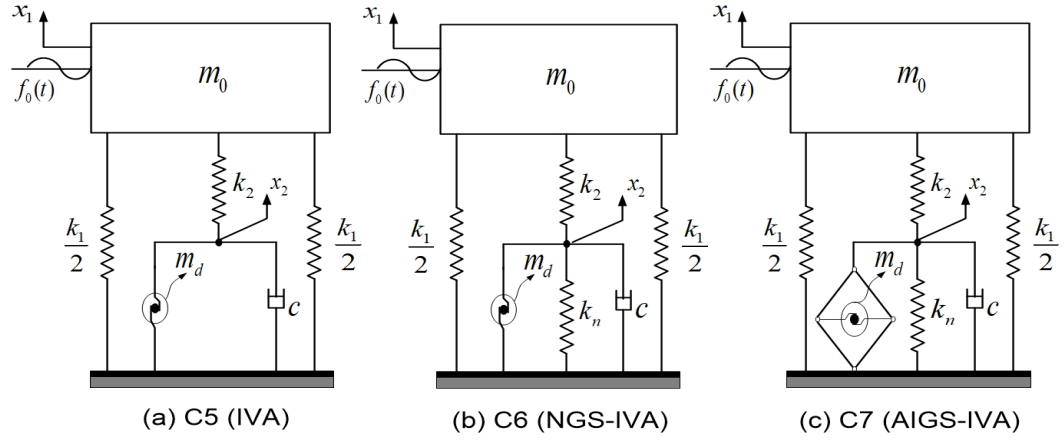
TMD :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\mu\zeta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu\alpha^2(x_1 - x_2) + x_1 - y = -a_g(\tau) \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \alpha^2(x_2 - x_1) = -a_g(\tau) \end{cases} \quad (2.37)$$

L'absorption des vibrations est également un facteur pris en compte dans ce travail. A cet effet, trois dispositifs d'absorption de vibration sont présentés dans la Fig. 2.10. La configuration $C5$ (IVA) dans la Fig. 2.10a est une disposition série-parallèle du ressort k_2 avec l'ensemble inerter b et amortisseur c_2 en parallèle et mis à la terre. Une amélioration des performances de ce dispositif est effectuée en introduisant un ressort k_n à rigidité négative pour obtenir la configuration $C6$ (NGS-IVA) dans la Fig. 2.10b. Les caractéristiques inertielles du système peuvent être modifiées pour améliorer les performances de contrôle. A cette fin, un mécanisme d'amplification inertiel est introduit au niveau de l'inertier comme le montre la Fig. 2.10c, ce qui constitue la configuration $C7$ (AIGS-IVA).

Un système primaire sous excitation de force est modélisé et les équations dynamique du mouvement pertinentes pour chaque modèle de la Fig. 2.10 peuvent être établies.

$C5$ (IVA) :


 FIGURE 2.10 – Modèles de systèmes primaires contrôlé par les absorbeurs $C5$, $C6$ et $C7$, respectivement.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \mu\alpha^2(x_1 - x_2) + x_1 = f_0(\tau)k_1^{-1} \\ \ddot{x}_2 + 2\xi\alpha\dot{x}_2 + \alpha^2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

$C6(NGS-IVA)$:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \mu\alpha^2(x_1 - x_2) + x_1 = f_0(\tau)k_1^{-1} \\ \ddot{x}_2 + 2\xi\alpha\dot{x}_2 + \alpha^2(x_2 - x_1) + \eta\alpha^2x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

$C6(AIGS-IVA)$:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \mu\beta^2\alpha^2(x_1 - x_2) + x_1 = f_0(\tau)k_1^{-1} \\ \ddot{x}_2 + 2\xi\alpha\dot{x}_2 + \alpha^2(x_2 - x_1) + \eta\alpha^2x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

Pour illustrer les performances des configurations d'absorbeurs de la figure 2.10, la configuration du TID dans la Fig. 2.11 est introduit à des fins de comparaisons. Ses équations du mouvement sont données par

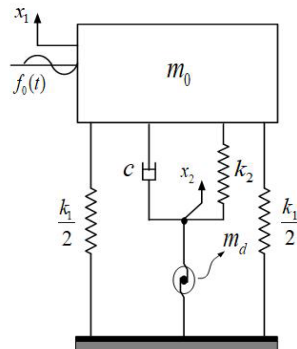


FIGURE 2.11 – Modèle de système primaire contrôlé par l'absorbeur TID.

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\mu\xi(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \mu\alpha^2(x_1 - x_2) + x_1 = f_0(\tau)k_1^{-1} \\ \ddot{x}_2 + 2\xi(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \alpha^2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}. \quad (2.41)$$

Afin que les résultats dans cette étude soient comparés dans l'espace-temps, l'algorithme Runge-Kutta du quatrième ordre est utilisé ici comme méthode numérique. Cette méthode permet de résoudre des équations différentielles numériquement ordinaires. C'est l'une des méthodes les plus explicites utilisées en intégration numérique en raison de son efficacité de sa fiabilité et de sa précision.

2.4.2 La méthode de Runge-Kutta

Premièrement, considérons un problème régi par une équation différentielle du premier ordre suivante

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.42)$$

L'algorithme de résolution numérique par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) est donnée par

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.43)$$

où

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned}. \quad (2.44)$$

Par contre, lorsque le problème dynamique est plutôt gouverné par une équation différentielle du second ordre sur la forme

$$\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}), \quad y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad (2.45)$$

avec y_0 et \dot{y}_0 étant les conditions initiales sur la position et la vitesse, l'algorithme est adaptée. Nous pouvons décomposer le problème en un système d'équations différentielles du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{y} = g(t, y, z) \\ \dot{z} = f(t, y, z) \end{cases}, \quad (2.46)$$

avec ici $\dot{y} = g(t, y, z) = z$. En appliquant la méthode de RK4 à chacune de ces équations, puis en simplifiant nous obtenons

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n, \dot{y}_n) \\k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\dot{y}_n, \dot{y}_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\dot{y}_n + \frac{h^2}{4}k_1, \dot{y}_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\k_4 &= f\left(t_n + h, y_n + h\dot{y}_n + \frac{h^2}{2}k_2, \dot{y}_n + hk_3\right)\end{aligned}\tag{2.47}$$

On déduit y_{n+1} et \dot{y}_{n+1} grâce à

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + h\dot{y}_n + \frac{h^2}{6}(k_1 + k_2 + k_3) \\ \dot{y}_{n+1} &= \dot{y}_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}\tag{2.48}$$

2.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les modèles mathématiques, les équations du mouvement dans le temps et dans le domaine fréquentiel, respectivement. Les fonctions de transferts de déplacement et de mobilité des systèmes primaires utilisées lors de la conception analytique des modèles proposés ont été présentées. Les méthodes qui ont permis d'obtenir tous les résultats analytiques et celles permettant de faire une analyse dans le temps sont également présentées dans ce chapitre. Signalons que dans certains cas, les études analytiques ont été effectuées pour garantir la stabilité des systèmes incluant une rigidité négative. Ainsi, le chapitre 3 se concentre à la présentation des résultats et l'analyse des performances de nos systèmes proposés.

Résultats et Discussions

3.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats obtenus dans cette thèse. Les résultats des conceptions optimales sont d'abord présentés et analysés. Ensuite, les performances de contrôle des dispositifs passifs de suppression des vibrations sont comparées par rapport au TMD classique ou DVA traditionnelle (cas de l'isolation) et l'amortisseur à inertie accordé (TID) (cas de l'absorption des vibrations). Ces dispositifs sont comparés numériquement et analytiquement dans les domaines fréquentiel et temporel. Dans le contexte de l'isolation des vibrations, la section 3.2 fournit les résultats sur la conception des dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) et leur performance par rapport à la DVA traditionnelle (TDVA). La section 3.3 montre la conception des dispositifs $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) et leur performance par rapport au TMD. Ici l'effet de rigidité négative sur la dynamique du système est analysé. Dans la dernière section 3.4, nous présentons l'effet d'un dispositif inerter à inertance amplifiée couplé à une rigidité mise à la terre dans un absorbeur de vibrations à inerter (IVA). Dans ce dernier cas, la conception des dispositifs d'absorbeurs $C5$ (AIGS-IVA), $C6$ (NGS-IVA) et $C7$ (IVA) et leur performance par rapport à l'amortisseur à inerter réglé (TID) sont présentés.

3.2 Réponse du système primaire avec $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) sous excitation de base harmonique.

La compréhension du comportement dynamique des systèmes dans le domaine fréquentiel passe par l'analyse des courbes de réponse en fréquence des fonctions de transferts du système primaire. Dans cette section, les deux configurations de la Fig. 3.1 sont candidats à la suppression des vibrations de la structure primaire. Deux indices de performances sont évalués dans cette section : (1) la réduction de l'amplitude normalisée de la fonction de transfert de conformité (déplacement) pour limiter les mouvements excessifs uni-axial de la structure primaire ; (2) la réduction de l'amplitude de la fonction de transfert de mobilité pour supprimer le bruit généré par la structure. En attendant, les deux premières sous-sections suivantes présentent les solutions optimales obtenues pour les deux dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS), minimisant les fonctions de transfert de mobilité et

3.2.1. La solution optimale H_∞ des dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) minimisant la fonction de transfert de conformité.

de conformité respectivement. $C1$ (SPIS) est la disposition en série-parallèle des éléments de ressort d'amortisseur et d'inertier, tandis que $C1$ (SIS) est la disposition en série. Les solutions optimales sont comparées et analysées puis, les dispositifs optimaux $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) sont comparés à la DVA traditionnelle (TDVA).

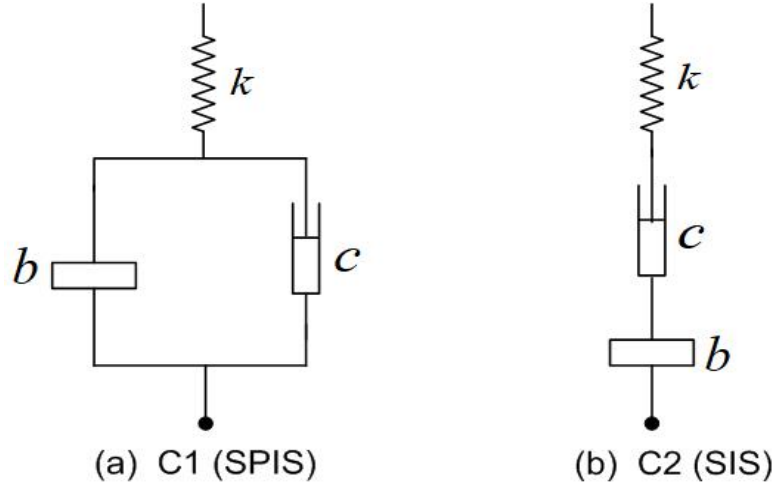


FIGURE 3.1 – Dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) candidat à l'isolation des vibrations.

3.2.1 La solution optimale H_∞ des dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) minimisant la fonction de transfert de conformité.

La fonction de transfert de conformité ou de transfert de déplacement de la structure primaire régit les fluctuations de cette structure dans le domaine fréquentiel sous excitation harmonique. Elle est minimisée ici pour dériver les paramètres optimaux des dispositions $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) par rapport à la structure primaire afin de limiter ses mouvements vibratoires excessifs.

Résultats sur la conception optimale de $C1$ (SPIS).

Le rapport d'amplitude normalisé $\mu_T = |X_1/\delta_{st}|$ traduisant la fonction de transfert de conformité pour $C1$ (SPIS) (Fig. 2.4(a)) peut être obtenue comme

$$\mu_T = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{1 - \delta\lambda q^2 + j2q\lambda\zeta}{1 - (1 + \delta + \delta\lambda)q^2 + \delta\lambda q^4 + j2q(1 + \lambda - \lambda q^2)\zeta} \right|. \quad (3.1)$$

En suivant la **procédure 1**, le rapport de rigidité optimal λ peut être obtenu comme

$$\lambda_{opt} = \frac{1 - \delta}{\delta} \quad (3.2)$$

ce qui nécessite $\delta < 1$. Le rapport d'amortissement optimal ζ peut donc être exprimé par

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3\delta^3}{4(1 - \delta)(2 - \delta)}}. \quad (3.3)$$

3.2.2. La solution optimale H_∞ des dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) minimisant la fonction de transfert de mobilité.

Sur la base des paramètres optimaux, l'amplitude normalisée aux points fixes P et Q est donnée par l'expression :

$$\mu_T = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_{q_P, q_Q} \cong (1 - \delta) \sqrt{\frac{2}{\delta}}. \quad (3.4)$$

Preuve Voir l'annexe A1.

Résultats sur la conception optimale de $C2$ (SIS).

Dans le cas du $C2$ (SIS) de la Fig. 3.1(b), la magnitude $\mu_T = |X_1/\delta_{st}|$ peut être exprimé comme

$$\mu_T = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{2(1 - \lambda\delta q^2)\zeta + j\delta q}{2(\lambda\delta q^4 + (1 + \delta(1 + \lambda))q^2 + 1)\zeta + j\delta(1 - q^2)q} \right|. \quad (3.5)$$

Selon la procédure d'optimisation des paramètres de $C1$ (SPIS) (**procédure 1**), nous pouvons obtenir les paramètres optimaux du $C2$ (SIS) sous la forme résumée ci-dessous

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \\ \zeta_{opt} &= \sqrt{\frac{3\delta}{2(2 + \delta)(4 + \delta)}} \\ \mu_T &= \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_{q_P, q_Q} = \sqrt{1 + \frac{2}{\delta}} \end{aligned} \right\}. \quad (3.6)$$

La preuve est similaire à celle du dispositif $C1$ (SPIS)

3.2.2 La solution optimale H_∞ des dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) minimisant la fonction de transfert de mobilité.

Il est important de supprimer la réponse de vitesse absolue du système primaire pour réduire le bruit généré par la structure ou le corps vibrant. Donc, l'optimisation de $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) basée sur la minimisation de l'indice de performance $\mu_V = \left| \dot{X}_1/\delta_{st} \right| = |qX_1/\delta_{st}|$ sera exécuté en suivant la même procédure que dans la section 3.2.1 (**procédure 1**).

Résultats sur la conception optimale de $C1$ (SPIS)

Dans le cas de la minimisation de la fonction de transfert de mobilité de la structure primaire pour $C1$ (SPIS) sur la Fig. 3.1(a), la **procédure 1** permet d'obtenir le rapport de raideur comme

3.2.2. La solution optimale H_∞ des dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) minimisant la fonction de transfert de mobilité.

$$\lambda_{opt} = \frac{1 - 2\delta + \sqrt{1 - 2\delta}}{2\delta}, \quad (3.7)$$

ce qui nécessite $\delta < 1/2$. Le rapport d'amortissement optimal ζ peut être obtenu ensuite

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{\zeta_P^2 + \zeta_Q^2}{2}} \quad (3.8)$$

où

$$\zeta_{P,Q}^2 = \frac{\delta^2 (a_8 q_{P,Q}^8 - a_6 q_{P,Q}^6 - a_4 q_{P,Q}^4 + a_2 q_{P,Q}^2 - a_0)}{4q_{P,Q}^2 (-d_4 q_{P,Q}^4 + d_0)}, \quad (3.9)$$

et

$$q_{P,Q}^2 = \frac{\left(2 - \delta \pm \sqrt{\delta(4 - 3\delta + 4\sqrt{1 - 2\delta})}\right) \sqrt{1 - 2\delta} + 2 - 4\delta}{(1 - 2\delta + \sqrt{1 - 2\delta})^2}, \quad (3.10)$$

avec

$$\begin{aligned} a_8 &= (1 - 2\delta)^2 (\delta^2 - 4\delta + 2 + 2(1 - \delta)\sqrt{1 - 2\delta}), \\ a_6 &= 2(1 - 2\delta) \left((2 - \delta)(1 - 2\delta) + (2 - 3\delta)\sqrt{1 - 2\delta} \right), \\ a_4 &= \delta(1 - 2\delta) (-7\delta + 6 + 6\sqrt{1 - 2\delta}), \\ a_2 &= 2(2 + \delta - 2\delta^2)\sqrt{1 - 2\delta} - 2(6\delta^2 + \delta - 2), \\ a_0 &= 2(1 - \delta + \sqrt{1 - 2\delta}), \\ d_0 &= \frac{(a_8 - d_4)}{(1 - 2\delta)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

ce qui nécessite $\delta < 1/2$. Sur la base du rapport de rigidité optimal, la réponse à P et Q peut être obtenue comme ci-dessous

$$\mu_V = \left| \frac{qX_1}{\delta_{st}} \right|_{q_P, q_Q} \cong \frac{(1 - 2\delta + \sqrt{1 - 2\delta})\sqrt{\sqrt{\phi} + \psi}}{\sqrt{\phi} + \delta\sqrt{1 - 2\delta}}, \quad (3.12)$$

où

$$\phi = \delta(1 - 2\delta)(4 - 3\delta + 4\sqrt{1 - 2\delta}), \quad (3.13)$$

$$\psi = (2 - \delta)\sqrt{1 - 2\delta} + 2(1 - 2\delta),$$

ce qui nécessite $\delta < 1/2$.

Preuve Voir l'annexe A1.

Résultats sur la conception optimale de $C2$ (SIS).

Selon la procédure d'optimisation des paramètres de $C1$ (SPIS) de la Fig. 3.1(a), nous pouvons obtenir les paramètres optimaux de la configuration $C2$ (SIS) (Fig. 3.1(b)) comme montrés ci-dessous

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_{opt} &= \frac{1}{\delta} \\
 \zeta_{opt} &= \zeta_P = \zeta_Q = \sqrt{\frac{\delta}{6}} \\
 \mu_V &= \left| \frac{qX_1}{\delta_{st}} \right|_{q_P, q_Q} = 2 \frac{\sqrt{\delta + 4 + \sqrt{\delta(\delta + 8)}}}{\delta + \sqrt{\delta(\delta + 8)}}
 \end{aligned} \right\} . \quad (3.14)$$

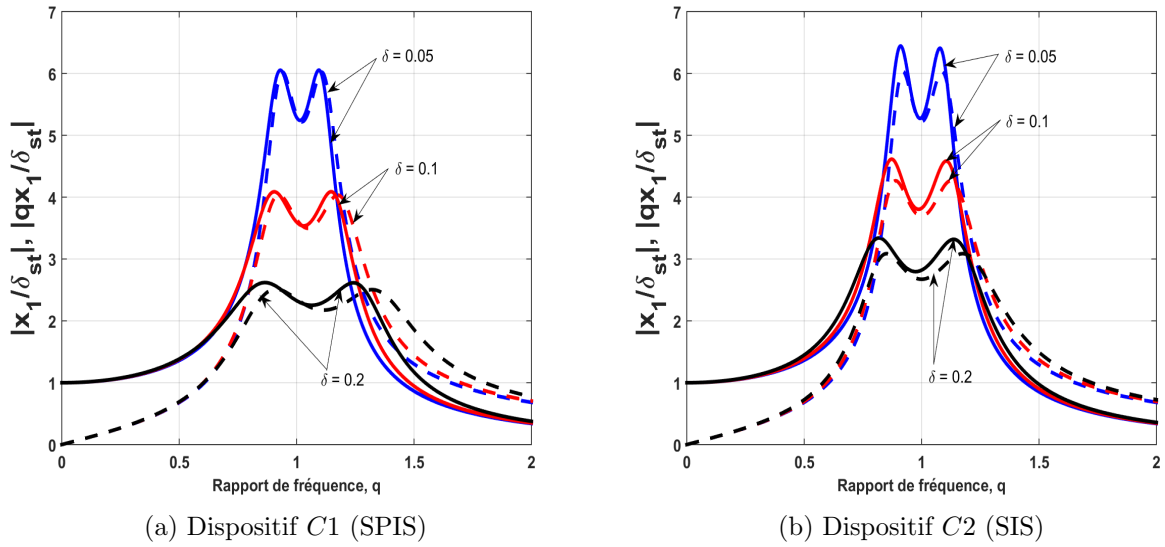


FIGURE 3.2 – Réponse en régime permanent du système primaire attaché aux isolateurs optimisés à base d'inertère pour divers rapport inertance/masse δ (trait plein : les fonctions de transferts de conformité, ligne pointillée : les fonctions de transfert de mobilité et ligne bleue : $\delta = 0,05$, ligne rouge : $\delta = 0,1$ et ligne noire : $\delta = 0,2$).

3.2.3 Comparaison des solutions optimales.

La Fig. 3.2 montre les courbes normalisées des réponses système primaire dans le domaine fréquentiel avec deux isolateurs à inertère ($C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS)) optimiser en minimisant les fonctions de transferts $|qX_1/\delta_{st}|$ et $|X_1/\delta_{st}|$ de mobilité et de conformité, respectivement. Dans cette figure, les lignes pleines et en pointillées montrent les courbes des fonctions de transferts de conformité et de mobilité respectivement. Une comparaison de ces lignes révèle que la minimisation de la fonction de transfert de mobilité permet la réduction de la fonction d'évaluation au-delà de celle de la fonction de conformité minimisée. D'autre part, la Fig. 3.2 montre également qu'avec l'augmentation du rapport inertance/masse δ , les performances de suppression des vibrations deviennent meilleures. Cependant, le rapport inertance/masse δ a également une influence sur les paramètres du system de contrôle.

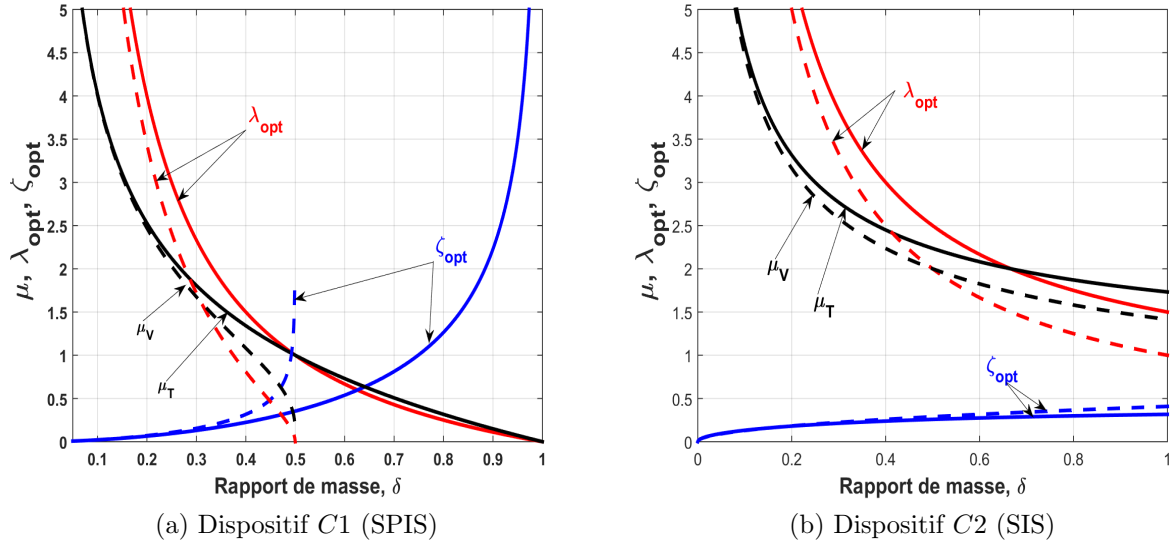


FIGURE 3.3 – Paramètres optimisés et indices de performances μ_T et μ_V minimisés pour les isolateurs à inertier.

Les valeurs optimales λ_{opt} et ζ_{opt} et les indices de performances μ_T et μ_V minimisés sont tracés sur la Fig. 3.3. Les lignes pleines et pointillés montrent les fonctions de transfert de conformité et transfert de mobilité respectivement. Ces résultats confirment de nouveau que les valeurs des paramètres obtenus pour minimiser les indices de performance μ_V pertinents pour chaque isolateur sont inférieurs à ceux obtenus en utilisant les indices de performances μ_T pour tout rapport d'inertance/masse δ sauf pour le rapport d'amortissement ζ_{opt} . On peut également constater que lorsque le rapport δ augmente, le paramètre λ_{opt} décroît pendant que ζ_{opt} croît. Cela signifie que pour un rapport δ élevé, les dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) ont une structure plus souple.

3.2.4 Comparaison entre la DVA traditionnelle (TDVA) et les isolateurs à base d'inertier $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS).

Les solutions pour l'amortisseur de vibration dynamique traditionnel (TDVA) montré par la Fig. 2.8(c) sont présentées dans cette section. Ces solutions sont nécessaires pour clarifier les performances des isolateurs à inertier $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS). Selon les procédures d'optimisation des paramètres des isolateurs, nous pouvons obtenir les paramètres optimaux de la TDVA

Dans le cas des solutions optimales H_∞ pour minimiser la fonction de transfert de conformité, les expressions suivantes ont été obtenue comme :

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{opt} &= \sqrt{\frac{3\delta^3}{8(1+\delta)^3}} \\ \lambda_{opt} &= \frac{2(1+\delta)^2}{\delta(2-\delta)} \\ \mu_T &= |X_1/\delta_{st}|_{q_P, q_Q} \cong (1+\delta)\sqrt{\frac{2}{\delta}} \end{aligned} \right\} . \quad (3.15)$$

Dans le cas des solutions H_∞ -optimales pour minimiser la fonction de transfert de mobilité, les expressions suivantes sont également obtenues comme

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{opt} &= \sqrt{\frac{3\delta^3}{8(1+\delta)^3}} \\ \lambda_{opt} &= \frac{2(2-\delta)}{2(1+\delta)^2} \\ \mu_V &= |qX_1/\delta_{st}|_{q_P, q_Q} \cong (1+\delta)\sqrt{\frac{2}{\delta}} \end{aligned} \right\} . \quad (3.16)$$

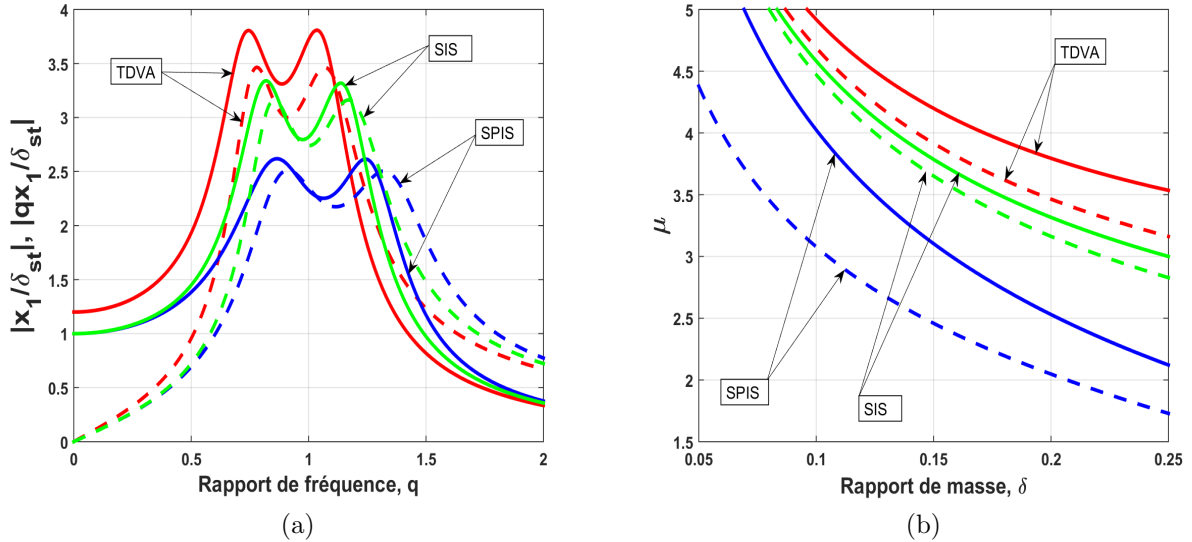


FIGURE 3.4 – Comparaison entre la DVA traditionnelle et les isolateurs à base d'inertier par rapport au même rapport de masse (trait plein : la fonction de transfert de conformité, ligne pointillée : la fonction de transfert de mobilité) : (a) la réponse complexe en régime permanent lorsque $\delta = 0, 2$ et (b) les indices de performances μ_T et μ_V minimisés (couleur rouge : TDVA, couleur verte C2 (SIS) et couleur bleue C1 (SPIS)).

La Fig. 3.4 montre la comparaison des réponses normalisées du système primaire dans

le domaine de fréquences et les indices de performance μ_T et μ_V minimisés pertinents pour la DVA traditionnelle et les isolateurs à inerteur $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS). Les lignes solides sont pour la fonction de transfert de conformité et les lignes pointillées montrent les courbes de la fonction de transfert de mobilité. Comme représenté sur la Fig. 3.4(a), les amplitudes des réponses normalisées du transfert de conformité (ligne solide) et du transfert de mobilité (ligne pointillée) sont inférieures lorsqu'elles sont évaluées à l'aide des isolateurs à inerteur $C1$ (SPIS) (ligne bleue) et $C2$ (SIS) (ligne verte) par rapport à la TDVA (ligne rouge). De plus, le rapport d'amplitude s'est avéré plus faible lorsque évalué en utilisant les fonctions de transferts de mobilité que lors de l'utilisation des fonctions de transferts de conformité. Une telle observation est confirmée par la Fig. 3.4(b), où la comparaison des maximums μ_T et μ_V de ces fonctions aux points fixes, pertinents pour chacun des dispositifs est affichée pour le même rapport de masse δ . Il convient de noter que le dispositif $C2$ (SIS) n'avait pas montré d'amélioration dans Hu et al [119] dans le cas de transmissibilité du déplacement du sol à la structure primaire, ce qui signifie que les performances d'un isolateur peuvent également dépendre de la source d'excitation prise en considération.

La comparaison numérique des paramètres optimaux λ et ζ , et le maximum μ (résultant des indices de performance μ_T et μ_V) entre les systèmes à inerteur $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) et la DVA traditionnelle est indiquée dans le Tableau 3.1 pour différents rapports δ . Toutefois, en s'accordant à ce Tableau 3.1, il est important de noter que le réglage optimal des isolateurs à base d'inerteur proposés ajoute à la fois l'amortissement et la rigidité à la structure primaire en comparaison avec la DVA traditionnelle. Par conséquent, l'atténuation des vibrations des structures soumises au mouvement harmonique du sol est plus significative avec ces isolateurs. Cependant, puisque le rapport massique est normalement assez petit et pratiquement inférieur à 0,25 pour les DVAs, les pourcentages de réduction de l'amplitude maximale du système primaire pertinents pour $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) sont représentés sur la Fig. 3.5. La plage $0 < \delta \leq 0,25$ est choisie pour des raisons de comparaison mais, δ peut être supérieure à 0,25 pour les dispositifs à inerteur. Comme le montre la Fig. 3.5, 40% et 45% d'amélioration peuvent être obtenues en termes de réduction des amplitudes des fonctions de transferts de conformité et de mobilité, respectivement, par rapport à la DVA traditionnelle lorsque $\delta = 0,25$ si $C1$ (SPIS) est utilisé. $C2$ (SIS) a également fourni une amélioration de 15% et 11% pour les mêmes fonctions, respectivement. Cependant, $C1$ (SPIS) est supérieure à $C2$ (SIS) et à la DVA traditionnelle (TDVA) pendant que $C2$ (SIS) est supérieure à TDVA.

3.2.4. Comparaison entre la DVA traditionnelle (TDVA) et les isolateurs à base d'inertier C1 (SPIS) et C2 (SIS).

TABLE 3.1 – Comparaison des paramètres optimaux dans l'optimisation H_∞ .

δ	TDVA ^a	C1 (SPIS) ^a	C2 (SIS) ^a	TDVA ^b	C1 (SPIS) ^b	C2 (SIS) ^b
(a) : Mesure de la performance μ .						
0.01	14.2836	14.0007	14.1774	14.2123	9.7949	14.1421
0.03	8.4099	7.9200	8.2260	8.2865	5.6468	8.1650
0.05	6.6408	6.0083	6.4031	6.4807	4.3785	6.3246
0.1	4.9193	4.0249	4.5826	4.6904	3.0784	4.4721
0.2	3.7947	2.5298	3.3166	3.4641	2.5942	3.1623
0.5	3.0000	1.0000	2.2361	2.4495	nan	2.0000
1	2.8284	0	1.7321	2.0000	-	1.4142
(b) : Rapport de rigidité optimal λ .						
0.01	102.5226	99.0000	100.5000	102.0100	98.4975	100.0000
0.03	35.9019	32.3333	33.8333	35.3633	31.8256	33.3333
0.05	22.6154	19.0000	20.5000	22.0500	18.4868	20.0000
0.1	12.7368	9.0000	10.5000	12.1000	8.4721	10.0000
0.2	8.0000	4.0000	5.5000	7.2000	3.4365	5.0000
0.5	6.0000	1.0000	2.5000	4.5000	0	2.0000
1	8.0000	0	1.5000	4.0000	-	1.0000
(c) : Rapport de d'amortissement optimal ζ .						
0.01	0.0006	0.0006	0.0407	0.0006	0.0006	0.0408
0.03	0.0031	0.0033	0.0702	0.0031	0.0033	0.0707
0.05	0.0064	0.0071	0.0903	0.0064	0.0072	0.0913
0.1	0.0168	0.0209	0.1263	0.0168	0.0216	0.1291
0.2	0.0417	0.0645	0.1750	0.0417	0.0700	0.1826
0.5	0.1178	0.3535	0.2611	0.1178	0.3536	0.2887
1	0.2165	∞	0.3162	0.2165	-	0.4082

^a Transfert de conformité

^b Transfert de mobilité

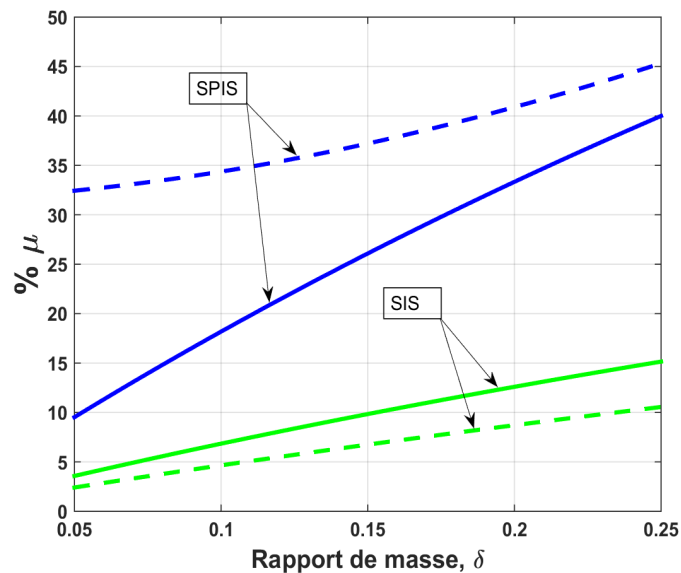


FIGURE 3.5 – Pourcentage d'amélioration des isolateurs à base d'inertier (Ligne continue : Fonction de transfert de conformité, ligne pointillée : fonction de transfert de mobilité) : En bleu C1 (SPIS) et en vert C2 (SIS).

3.3 Réponse du système primaire avec $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) sous excitation aléatoire de la base

L'optimisation H_2 vise à minimiser l'énergie totale de vibrations ou le mouvement moyen carré de la structure primaire lorsque l'excitation de bruit blanc est enfoncée [55]. dans cette section, le système primaire est soumis à une excitation aléatoire comme dans la plupart des cas de la pratique de l'ingénierie. Par conséquent, il est très important et significatif d'étudier la réponse du système à une excitation aléatoire.

Dans cette section, les deux configurations de la Fig. 3.1 sont encore une fois de plus candidats à la suppression des vibrations de la structure primaire à 1DDL non amortie sous excitation aléatoire (bruit blanc) de la base. Les deux indices de performances sont pris comme la réduction des amplitudes des fonctions de transferts de conformité et de mobilité, respectivement, sur toute la bande de fréquence. Cet objectif peut être atteint en minimisant la réponse quadratique moyenne du système primaire. Le contrôle des mouvements aléatoires de la structure primaire et la réduction du bruit généré par cette structure sous le contrôle des dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) sont les deux objectifs de cette section. Après avoir dérivé les paramètres optimaux selon le critère d'optimisation H_2 suivant la **procédure 2** présentée au chapitre 2, les dispositifs optimaux $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) sont comparés à la DVA traditionnelle (TDVA).

3.3.1 La solution optimale H_2 pour minimiser la fonction de transfert de conformité

Pour les paramètres δ , λ et ζ donnés, la mesure de la performance H_2 en (3.51) traduisant le déplacement quadratique moyen I , pertinente pour chaque dispositif est obtenu comme :

Pour la configuration $C1$ (SPIS)

$$I_{SPIS} = \lambda^2 \zeta + \frac{\delta^2 \lambda^2 + \delta(1 - 2\delta)\lambda + 1}{4\zeta}, \quad (3.17)$$

et pour la configuration $C2$ (SIS) :

$$I_{SIS} = \frac{\delta^2 \lambda^2 - 2\delta\lambda + \delta + 1}{\zeta} \delta^2 + \frac{1}{4\zeta}. \quad (3.18)$$

Pour un rapport inertance/masse δ donné, le λ optimal et le ζ optimal relatif à chaque dispositif peuvent être obtenus comme suit

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{SPIS}^{opt} &= \frac{6 - (3\delta + \sqrt{9\delta^2 - 36\delta + 4})}{8\delta} \\ \lambda_{SIS}^{opt} &= \frac{1}{\delta} \end{aligned} \right\}, \quad (3.19)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{SPIS}^{opt} &= \frac{\delta \sqrt{8 + 24\delta - 6\delta^2 + (4 - 2\delta)\sqrt{9\delta^2 - 36\delta + 4}}}{2(6 - 3\delta - \sqrt{9\delta^2 - 36\delta + 4})} \\ \zeta_{SIS}^{opt} &= \frac{\sqrt{\delta}}{2} \end{aligned} \right\}, \quad (3.20)$$

De plus, en remplaçant les paramètres de réglage optimaux ci-dessus dans (3.17) et (3.18), respectivement, l'expression suivante pour le minimum I_{IS} est obtenu comme :

$$\left. \begin{aligned} I_{SPIS}^{opt} &= \frac{6 - (3\delta + \sqrt{9\delta^2 - 36\delta + 4})}{64\delta} \varphi \\ I_{SIS}^{opt} &= \sqrt{\frac{1}{\delta}} \end{aligned} \right\}, \quad (3.21)$$

où

$$\varphi = \sqrt{8 + 24\delta - 6\delta^2 + (4 - 2\delta)\sqrt{9\delta^2 - 36\delta + 4}}. \quad (3.22)$$

La *Preuve* peut être obtenue par calcul directe suivant la **procédure 2**.

3.3.2 La solution optimale H_2 pour minimiser la fonction de transfert de mobilité.

Similaire à la section 3.3.1, le réglage optimal pour les dispositifs $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) minimisant la vitesse quadratique moyenne sans dimension I peut être obtenue suivant la **procédure 2** (chapitre 2).

Pour $C1$ (**SPIS**), la mesure de la performance I peut être exprimée comme

$$I_{SPIS} = (\lambda^2 + \lambda)\zeta + \frac{\delta^2\lambda^2 - 2\delta(1 - \delta)\lambda + \delta^2 - \delta + 1}{4\zeta}. \quad (3.23)$$

Pour un δ donné, la solution suivante est obtenue dans cette étude

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{SPIS}^{opt} &= \sqrt{\frac{\delta^2\lambda^2 - 2\delta(1 - \delta)\lambda + \delta^2 - \delta + 1}{4\lambda(1 + \lambda)}} \\ I_{SPIS}^{opt} &= \sqrt{(\lambda^2 + \lambda)(\delta^2\lambda^2 - 2\delta(1 - \delta)\lambda + \delta^2 - \delta + 1)} \end{aligned} \right\}, \quad (3.24)$$

où λ est l'unique solution réelle positive de l'équation (3.29) ci-dessous pertinente pour chaque valeur de δ donnée.

$$\begin{aligned} 4\delta^2\lambda^3 + (3\delta^2 + 6\delta(\delta - 1))\lambda^2 + \\ (4\delta(\delta - 1) + 2\delta^2 - 2\delta + 2)\lambda + \delta^2 - \delta + 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

La *Preuve* est simple comme indiqué dans la **procédure 2**.

Pour $C2$ (**SIS**), la mesure de la performance I peut être exprimée comme ci-dessous

$$I_{SIS} = \frac{\delta^2\lambda^2 - \delta(2 - \delta)\lambda + 1}{\delta^2}\zeta + \frac{1}{4\zeta}. \quad (3.26)$$

Selon la **procédure 2** (chapitre 2), pour un δ donné, la solution exacte suivante est obtenue dans cette étude

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{SIS}^{opt} &= \frac{2 - \delta}{2\delta}, \quad \zeta_{SIS}^{opt} = \sqrt{\frac{\delta}{4 - \delta}}, \quad I_{SIS}^{opt} = \sqrt{\frac{4 - \delta}{4\delta}} \end{aligned} \right\}. \quad (3.27)$$

3.3.3 Comparaison entre la DVA traditionnelle et les isolateurs à inerter $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS).

A ce stade, tous les paramètres optimaux pour les isolateurs à inerter selon la procédure d'optimisation H_2 ont été dérivés. Dans cette section, les performances de ces isolateurs à inerter seront comparées à la DVA traditionnelle. Pour la DVA traditionnelle, la mesure de la performance H_2 peut être dérivée comme suit

Dans le cas de la solution optimale H_2 pour minimiser la fonction de transfert de conformité

$$I_{DVA} = \frac{(1 + \delta)^3}{\delta^2}\zeta + \frac{\delta^2\lambda^2 + \delta(\delta - 2)(1 + \delta)^2\lambda + (1 + \delta)^4}{4\delta^2\lambda^2\zeta}, \quad (3.28)$$

où le rapport massique δ est défini comme $\delta = m_0/m$. Similaire aux isolateurs à inerter, les paramètres optimaux peuvent être obtenus comme ci-dessous

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{DVA}^{opt} &= \frac{2(1 + \delta)^2}{\delta(2 - \delta)} \\ \zeta_{DVA}^{opt} &= \sqrt{\frac{\delta^3(4 - \delta)}{16(1 + \delta)^3}} \\ I_{DVA}^{opt} &= \sqrt{\frac{(4 - \delta)(1 + \delta)^3}{4\delta}} \end{aligned} \right\}, \quad (3.29)$$

et dans le cas de la solution optimale H_2 pour minimiser la fonction de transfert de mobilité,

$$I_{DVA} = \frac{(1 + \delta)^2}{\delta^2}\zeta + \frac{\delta^2\lambda^2 - 2\delta(1 + \delta)\lambda + (1 + \delta)^3}{\delta^2\lambda^2\zeta}. \quad (3.30)$$

3.3.3. Comparaison entre la DVA traditionnelle et les isolateurs à inerter $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS).

Comme dans le cas ci-dessus, les paramètres optimaux peuvent être obtenus comme ci-dessous

$$\lambda_{DVA}^{opt} = \frac{(1 + \delta)^2}{\delta}, \quad \zeta_{DVA}^{opt} = \sqrt{\frac{\delta^3}{4(1 + \delta)^3}}, \quad I_{DVA}^{opt} = \sqrt{\frac{1 + \delta}{\delta}} \quad (3.31)$$

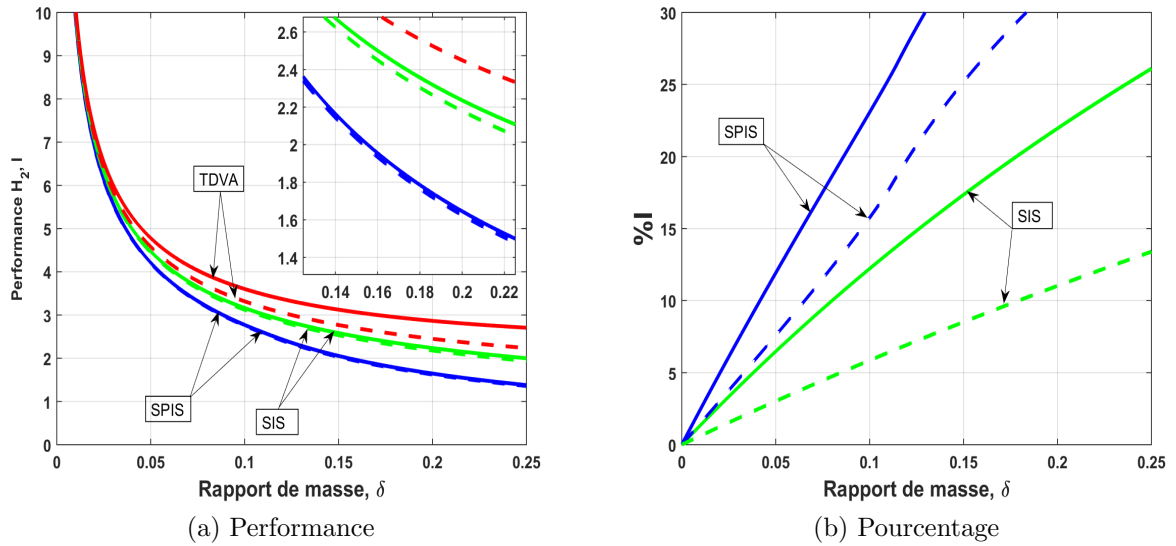


FIGURE 3.6 – Comparaison entre les isolateurs à inerter et la DVA traditionnelle (trait plein : réponse en régime permanent du déplacement, ligne pointillée : la réponse en régime permanent de la vitesse). (a) la performance H_2 (rouge : TDVA, bleu : $C1$ (SPIS) et vert : $C2$ (SIS)); (b) pourcentage d'amélioration des isolateurs à inerter par rapport à la DVA traditionnelle (Bleu : SPIS et Vert : SIS).

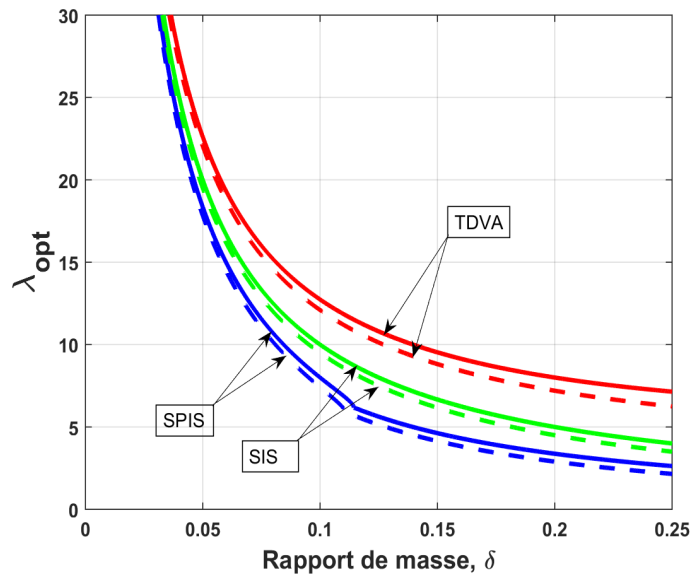


FIGURE 3.7 – Rapport de rigidité optimal λ en H_2 optimisation (rouge : TDVA, bleu : $C1$ (SPIS) et vert : $C2$ (SIS)).

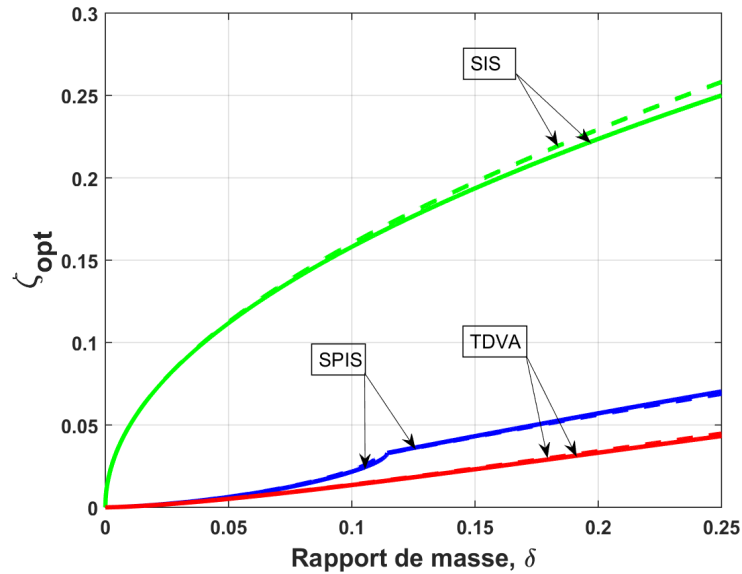


FIGURE 3.8 – Rapport d’amortissement optimal ζ dans l’optimisation H_2 (Rouge : TDVA, Bleu : $C1$ (SPIS) et Vert : $C2$ (SIS)).

Les Figs. 3.6- 3.9 montrent la comparaison entre la DVA traditionnelle et les isolateurs à inerter selon l’optimisation H_2 . Dans ces figures, les lignes pleines et pointillées montrent le transfert conformité et le transfert de mobilité respectivement. Ces figures indiquent que les solutions H_2 obtenues en minimisant les fonctions de transferts de mobilité et de conformité sont très similaires. Par conséquent, il est possible de calculer les solutions optimales H_2 minimisant la fonction de transfert de conformité en modifiant légèrement les éqs. (3.24), (3.27), (3.29) et (3.31). Comme le montre la Fig. 3.6a, pour le même rapport δ , les isolateurs à inerter $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS) fonctionnent mieux que la DVA traditionnelle lorsque δ est inférieur à 0,12 et lorsque $\delta \geq 0$, respectivement. Comme le montre la Fig. 3.6, lorsque $\delta < 0.12$, la configuration $C1$ (SPIS) fonctionne mieux que la configuration $C2$ (SIS). De la Fig. 3.9, on montre que les rapports d’amortissement ζ de la DVA traditionnelle sont normalement plus petits que les isolateurs à inerter. Pourtant, le rapport de masse δ pour la DVA traditionnelle est pratiquement inférieur à 0,25. À partir de ce point de vue, il est montré que lorsque $\delta = 0,25$ (voir Fig. 3.6b), $C2$ (SIS) fournit 26% et 13,5% d’amélioration en termes de réduction des transferts de conformité et de mobilité, respectivement, par rapport à la DVA traditionnelle. Parce que $C1$ (SPIS) n’est applicable que dans la région des $\delta < 0.12$, quand $\delta = 0.1$ (voir Fig. 3.6b), $C1$ (SPIS) fournit 23% et 15,75% d’amélioration en terme de réduction des transferts de conformité et de mobilité, respectivement, par rapport à la DVA traditionnelle. Les valeurs détaillées des paramètres sont données dans le Tableau 3.2, où il est montré que les performances des isolateurs à base d’inerter peuvent être encore améliorées en augmentant le rapport inertance/masse δ même au delà de $\delta > 0,25$, car une grande inertance peut facilement être obtenue sans augmenter la masse de l’ensemble du système. Ce qui est un avantage potentiel des isolateurs à base d’inerter par rapport aux DVAs existant. De plus, il est

3.3.3. Comparaison entre la DVA traditionnelle et les isolateurs à inerter $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS).

également noté que sous excitation aléatoire de la base de la structure primaire, le réglage optimal des isolateurs à base d'inerter proposés ajoute également à la fois l'amortissement et la rigidité à la structure principale en comparaison avec la DVA traditionnelle et donc, l'atténuation des vibrations est plus importante pour ces isolateurs.

TABLE 3.2 – Comparaison des paramètres optimaux dans l'optimisation H_2 .

δ	TDVA ^a	$C1$ (SPIS) ^a	$C2$ (SIS) ^a	TDVA ^b	$C1$ (SPIS) ^b	$C2$ (SIS) ^b
(a) : Mesure de performance I .						
0.01	10.1377	9.8868	10.0000	10.0499	9.8990	9.9875
0.03	6.0125	5.5749	5.7735	5.8595	5.5945	5.7518
0.05	4.7815	4.2118	4.4721	4.5826	4.2351	4.4441
0.1	3.6024	2.7713	3.1623	3.3166	2.7941	3.1225
0.2	2.8649	-	2.2361	2.4495	-	2.1794
0.5	2.4303	-	1.4142	1.7321	-	1.3229
1	2.4495	-	1.0000	1.4142	-	0.8660
(b) : Rapport de rigidité optimal λ .						
0.01	102.5226	98.4764	100.0000	102.0100	97.9738	99.5000
0.03	35.9019	31.7549	33.3333	35.3633	31.2458	32.8333
0.05	22.6154	18.3520	20.0000	22.0500	17.8341	19.5000
0.1	12.7368	8.0000	10.0000	12.1000	7.4095	9.5000
0.2	8.0000	-	5.0000	7.2000	-	4.5000
0.5	6.0000	-	2.0000	4.5000	-	1.5000
1	8.0000	-	1.0000	4.0000	-	0.5000
(c) : Rapport d'amortissement optimal ζ .						
0.01	0.0005	0.0005	0.0500	0.0005	0.0005	0.0501
0.03	0.0025	0.0028	0.0866	0.0025	0.0028	0.0869
0.05	0.0052	0.0063	0.1118	0.0052	0.0063	0.1125
0.1	0.0135	0.0216	0.1581	0.0137	0.0224	0.1601
0.2	0.0332	-	0.2236	0.0340	-	0.2294
0.5	0.0900	-	0.3535	0.0962	-	0.3779
1	0.1531	-	0.5000	0.3062	-	0.5774

^a Transfert de conformité

^b Transfert de mobilité

Afin d'obtenir des résultats plus réalistes, une excitation aléatoire de 50 secondes est construite, composée de 5000 nombres aléatoires normalisés avec une valeur moyenne nulle et de variance unitaire, respectivement. L'histoire temporelle de l'excitation aléatoire est représentée sur la Fig. 3.9a. Ici, on prend la masse primaire $m = 1\text{kg}$ et la rigidité du système primaire $K = 100\text{N/m}$.

3.3.3. Comparaison entre la DVA traditionnelle et les isolateurs à inerter $C1$ (SPIS) et $C2$ (SIS).

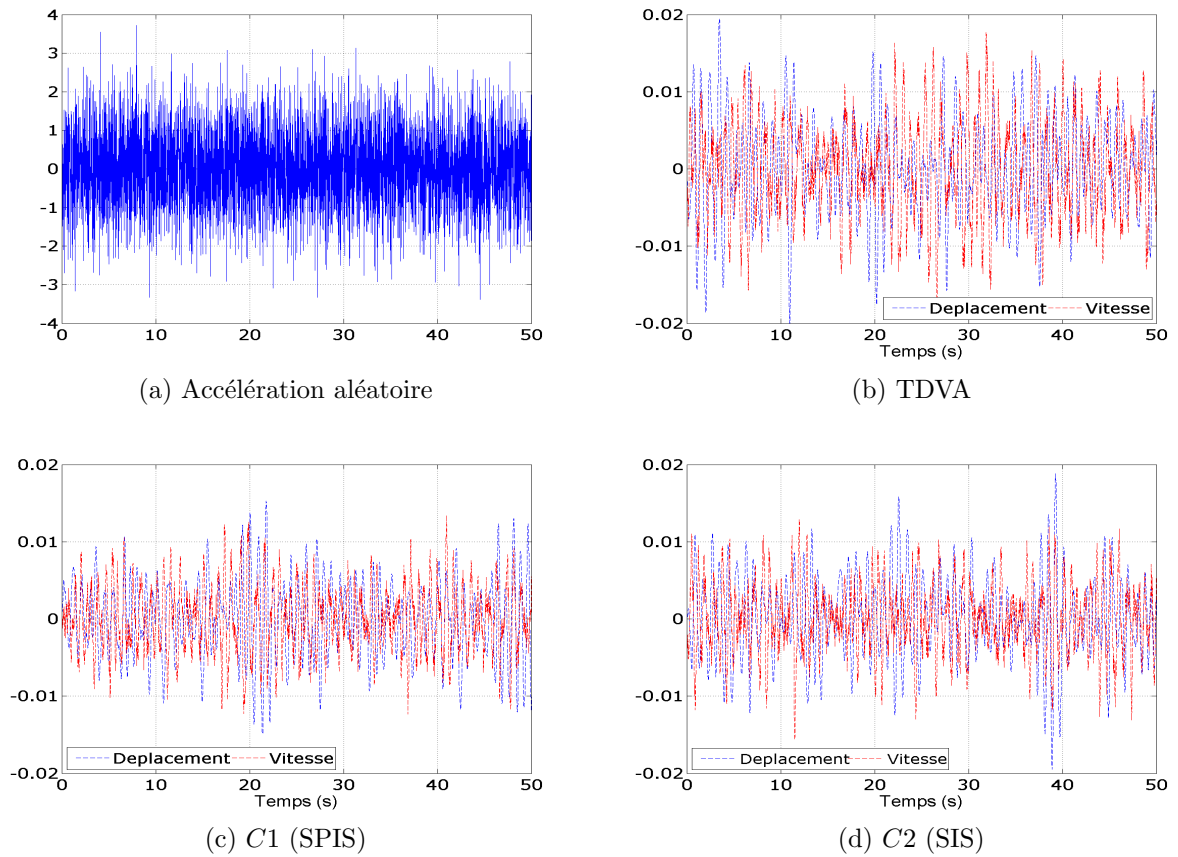


FIGURE 3.9 – (a) L’historique temporel de l’excitation aléatoire. Pour $\delta = 0.1$: (b) L’historique temporel du système primaire avec TDVA, (c) L’historique temporel du système primaire avec $C1$ (SPIS) et (d) L’historique temporel du système primaire avec $C2$ (SIS).

TABLE 3.3 – La variance et la diminution du déplacement et de la vitesse du système primaire.

Modèles	Variance	Diminution (%)
(a) : Déplacement.		
TDVA	3.2309e-05	
$C2$ (SIS)	2.8326e-05	12.33
$C1$ (SPIS)	2.4161e-05	25.22
(b) : Vitesse.		
TDVA	2.8118e-05	
$C2$ (SIS)	2.5619e-05	8.89
$C1$ (SPIS)	2.3511e-05	16.38

Les équations différentielles dans le temps donné par la Fig. 2.8 sont utilisées ici. Basées sur la méthode Runge-Kutta du quatrième ordre et les paramètres optimisés dans l’optimisation H_2 , la réponse du système primaire avec différents isolateurs peut être obtenue. L’historique temporel de ces systèmes primaires est représenté sur les Figs. 3.9b- 3.9d. La

variances et le pourcentage de diminution du système primaire pour différents dispositifs sont résumés dans le Tableau 3.3. On peut observer que les pourcentages d'atténuation de la réponse quadratique moyenne du système primaire sont proches de ceux de la Fig. 3.6b sous bruit blanc, indiquant la validité de la conception proposée.

3.4 Réponse du système primaire avec $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) sous excitation de base

Dans cette section, deux entrées d'excitation sont prises en compte : l'accélération et le déplacement de la base de la structure primaire, respectivement. Les deux configurations de la Fig. 3.10 en disposition série-parallèle des éléments mécaniques sont candidats à la suppression des vibrations de la structure primaire. La configuration $C4$ (NSPIS) diffère de celle de $C3$ (SPIS) par la présence d'une rigidité supplémentaire k_n , négative. Dans ce cas, $C3$ (SPIS) est un cas particulier de $C4$ (NSPIS) en remplaçant $k_n = 0$ (c'est-à-dire $\kappa = 0$). La section 3.4.1 présente les solutions optimales obtenues pour les deux dispositifs $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS), minimisant les fonctions de transferts du système, respectivement. L'analyse des résultats est d'abord effectuée dans les sections 3.4.2 et 3.4.3 puis, les configurations optimales $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) sont ensuite comparées au TMD classique dans la section 3.4.4.

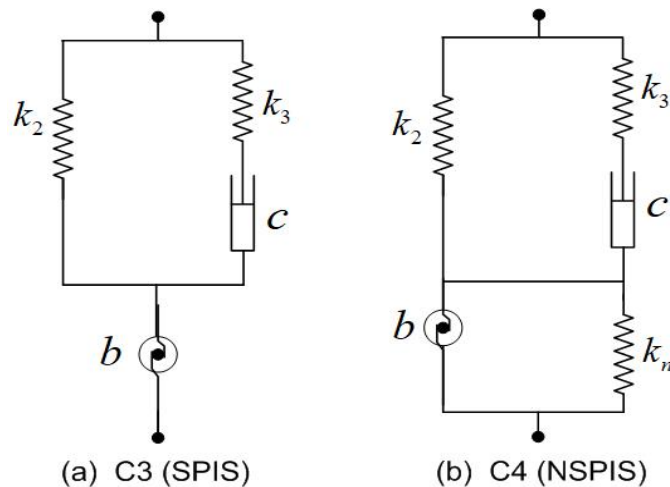


FIGURE 3.10 – Dispositifs $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) candidat à l'isolation des vibrations.

3.4.1 Résultats sur la conception de $C4$ (NSPIS)/ $C3$ (SPIS).

Pour obtenir les paramètres optimaux, il est important de minimiser les fonctions de transferts du système primaire sous les deux cas d'excitation harmonique de la base de la structure primaire, pertinent pour chaque dispositif. L'accélération et le déplacement harmonique de la base de la structure primaire sont les deux cas d'excitation ici. Les fonctions de transferts dans chacun de ces cas sont données pour $C4$ (NSPIS)/ $C3$ (SPIS) comme suite

$$G = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right| = \left| -\frac{N_3 \bar{s}^3 + N_2 \bar{s}^2 + N_1 \bar{s} + N_0}{D_5 \bar{s}^5 + D_4 \bar{s}^4 + D_3 \bar{s}^3 + D_2 \bar{s}^2 + D_1 \bar{s} + D_0} \right| \quad (3.32)$$

où $\bar{s} = j\nu$, $\delta_{st} = A_g$ (cas de l'accélération) ou Y (cas du déplacement) et les coefficients du numérateur sont listés respectivement comme suit :

$$acc - \begin{cases} N_3 = 2\zeta\mu \\ N_2 = \lambda\mu \\ N_1 = 2\zeta(\beta + \lambda + \kappa) \\ N_0 = 2\zeta(\beta + \kappa) \end{cases}, \quad dis - \begin{cases} N_3 = 2\zeta\mu \\ N_2 = \lambda\mu \\ N_1 = 2\zeta(\beta + \lambda + \kappa) \\ N_0 = 2\zeta(\kappa\beta + \beta + \kappa) \end{cases} \quad (3.33)$$

et ceux du dénominateur commun aux deux cas d'excitation sont :

$$\begin{cases} D_5 = 2\zeta\mu \\ D_4 = \lambda\mu \\ D_3 = 2\zeta(\beta\mu + \lambda\mu + \beta + \lambda + \kappa + \mu) \\ D_2 = \lambda(\beta\mu + \beta + \kappa + \mu) \\ D_1 = 2\zeta[(\beta + \lambda + 1)\kappa + (\beta + \lambda)] \\ D_0 = \lambda[(\beta + 1)\kappa + \beta] \end{cases} \quad (3.34)$$

où les notations *acc* et *dis* désignent respectivement la base excitée par accélération et la base excitée par déplacement. En minimisant ces fonctions de transferts sous la base de l'optimisation H_∞ utilisant la théorie des points fixes, les résultats obtenus pour $C4$ (NSPIS) et $C3$ (SPIS), respectivement, sont résumés dans le Tableau 3.4

TABLE 3.4 – Paramètres des conceptions optimaux des dispositions série-parallèles à système inerter avec ou sans rigidité négative pour les deux cas d'excitation.

Systèmes	λ	β	ζ
(a) : Accélération de la base			
$C3$ (SPIS)	$\frac{2\mu\sqrt{\mu^2+\mu}}{(1+\mu)^2}$	$\frac{(1+\mu-\sqrt{\mu^2+\mu})\mu}{(1+\mu)^2}$	$\sqrt{\frac{20(\sqrt{\mu^2+\mu}-\mu)\mu^3}{17(1+\mu)^2(\mu+\sqrt{\mu^2+\mu})}}$
$C4$ (NSPIS)*	$\frac{2(\mu-\kappa)\sqrt{\mu^2+\mu}}{(1+\mu)^2}$	$\frac{(1+\mu-\sqrt{\mu^2+\mu})(\mu-\kappa)}{(1+\mu)^2}$	$\sqrt{\frac{20(\mu-\kappa)^2(\sqrt{\mu^2+\mu}-\mu)\mu}{17(1+\mu)^2(1+\kappa)(\mu+\sqrt{\mu^2+\mu})}}$
(b) : Déplacement de la base			
$C3$ (SPIS)	$\frac{2\mu\sqrt{\mu^2+\mu}}{(1+\mu)}$	$\frac{(\mu+1-\sqrt{\mu^2+\mu})\mu}{(1+\mu)}$	$\sqrt{\frac{\mu^3[2(1+\mu)\sqrt{\mu^2+\mu}-2\mu^2-3\mu]}{2(1+\mu)\sqrt{\mu^2+\mu+2\mu^2+3\mu}}}$
$C4$ (NSPIS)*	$\frac{2(\mu-\kappa)\sqrt{\mu^2+\mu}}{(1+\mu)(1+\kappa)}$	$\frac{(\mu+1-\sqrt{\mu^2+\mu})(\mu-\kappa)}{(1+\mu)(1+\kappa)}$	$\sqrt{\frac{\mu(\kappa-\mu)^2[2(1+\mu)\sqrt{\mu^2+\mu}-2\mu^2+\kappa-3\mu]}{(1+\kappa)^3[2(1+\mu)\sqrt{\mu^2+\mu+2\mu^2-\kappa+3\mu}]}}$

* Le paramètre κ étant le rapport de rigidité négative.

3.4.2 Effet des grandeurs μ et κ sur les paramètres de conception : valeurs limites et optimales sur κ .

Pour le $C4$ (NSPIS) avec rigidité négative, les graphiques tridimensionnels représentés sur la Fig. 3.11 montrent l'effet des rapports d'inertance/masse μ et de rigidité négative κ sur les trois paramètres optimaux dans les deux cas d'excitations (de déplacement de la base et accélération de la base), respectivement. La gamme des rapports d'inertance/masse et de rigidité négative sont de 0,005 à 2 pour μ et de -0,2 à 0 pour κ , respectivement. On constate que dans le cas du déplacement de la base comme indiqué sur les Figs. 3.11(a)-(c), les rapports de rigidités optimales (β) et (λ), et le rapport d'amortissement optimal (ζ) s'agrandissent avec l'augmentation des rapports de rigidité négative et d'inertance/masse. Pour le cas de l'accélération de la base, les paramètres optimaux sont représentés sur les Figs. 3.11(d)-(f). Le rapport de rigidité optimale (β) (Fig. 3.11(d)) s'amplifie avec l'augmentation du rapport de rigidité négative, et il augmente avec le rapport d'inertance/masse croissant sur la plage $\mu < \mu_0$, et sur la plage $\mu > \mu_0$, il diminue avec l'augmentation du rapport d'inertance/masse. μ_0 est le point de stagnation donné par l'équation (3.35).

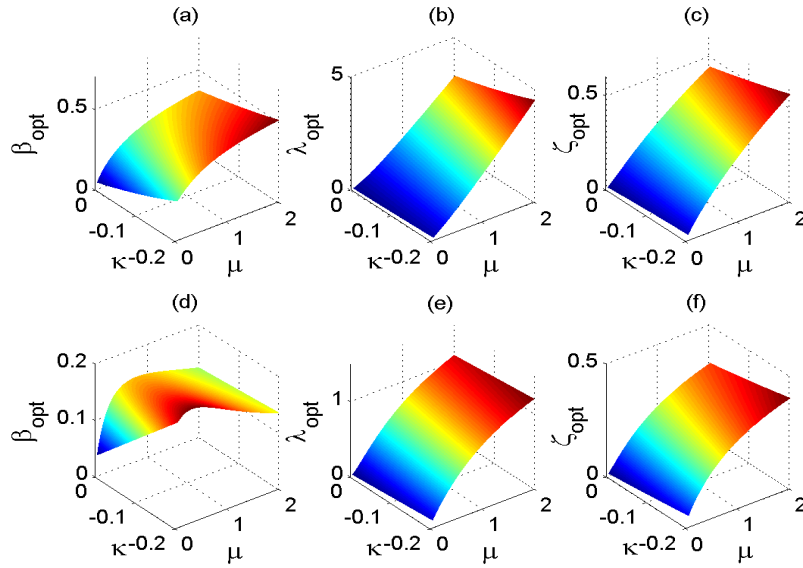


FIGURE 3.11 – Représentation tridimensionnelle des variations des paramètres optimaux : (a), (b) et (c) pour base excitée par déplacement, et (d), (e) et (f) pour base excitée par accélération.

$$\mu_0 = \frac{4\kappa^2 + 7\kappa + 2 + 2\sqrt{(4\kappa + 1)(\kappa + 1)^3}}{(4\kappa + 5)}, \quad (3.35)$$

où $-1/4 \leq \kappa \leq 0$. Il peut également être observé que le rapport de rigidité optimale (λ) (Fig. 3.11(e)), et le le rapport d'amortissement (ζ) (Fig. 3.11(f)) croissent avec l'augmentation des deux rapports d'inertance/masse (μ) et de rigidité négative (κ). Cela indique que pour une combinaison de μ et κ donnée, le système $C4$ (NSPIS) a besoin des res-

sorts plus rigides et un coefficient de viscosité d'amortissement élevé pour des meilleures performances de contrôle.

Les plages des valeurs des paramètres μ et κ sur la Fig. 3.11 ont été choisis afin de rendre compte de leur rôle sur l'évolution des paramètres des systèmes $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS). Cependant, lorsque toutes les combinaisons possibles de μ et κ sont prises dans les autres paramètres optimisés (résumées dans le Tableau 3.4) et les amplitudes normalisées du déplacement de la structure primaire aux points fixes pertinents pour $C4$ (NSPIS), on pourrait trouver que toutes les combinaisons de μ et κ ne garantissent pas la stabilité du système. En d'autres termes, pour toutes les combinaisons possible de μ et κ certaines rendent les paramètres du système en valeurs négatives ou complexes. Par conséquent, la limite des valeurs admissibles sur le rapport de rigidité négative κ , à l'intérieur de laquelle le système reste stable, est donnée par $\kappa \in (\kappa^-, 0]$. De plus, les études dans [26, 29] ont montré qu'il existe une condition d'optimalité κ_{opt} sur le rapport de rigidité κ pour chaque scénario d'excitation. Ainsi :

* Pour l'accélération de la base, la limite inférieure sur le rapport de la rigidité négative est donnée par

$$\kappa^- = \frac{(1 + \mu)[2\mu - \sqrt{\mu(5\mu + 5 - 4\sqrt{\mu^2 + \mu})}] + (1 - \mu)\sqrt{\mu^2 + \mu}}{2\mu + 2 - 2\sqrt{\mu^2 + \mu}}, \quad (3.36)$$

et la sa valeur optimale est

$$\kappa_{opt} = \frac{2\mu(1 + \mu) - (2\mu + 1)\sqrt{\mu^2 + \mu}}{2\mu(1 + \mu) - \sqrt{\mu^2 + \mu}}. \quad (3.37)$$

* Pour le déplacement de la base, la limite inférieure sur le rapport la rigidité négative est :

$$\kappa^- = \frac{\mu - 1 - \sqrt{\mu^2 + \mu} + \sqrt{(1 + \mu)(2\mu + 1 - 2\sqrt{\mu^2 + \mu})}}{2}, \quad (3.38)$$

et la sa valeur optimale est donnée par

$$\kappa_{opt} = \frac{\mu - 1 - \sqrt{\mu^2 + \mu} + \sqrt{(1 + \mu)(2\mu + 1 - 2\sqrt{\mu^2 + \mu})}}{2(1 + \varepsilon)}, \quad (3.39)$$

où $\varepsilon > 0$ doit être choisi petit pour être aussi proche que possible de la limite de stabilité notée (3.38).

Preuve voir l'annexe A2

Pour valider les résultats sur les valeurs optimales de κ du dispositif $C4$ (NSPIS) dans les deux cas d'excitation de la base du système primaire, la Fig. 3.12 trace les rapports de rigidités négatives optimales pertinents pour chaque cas d'excitation de la base de

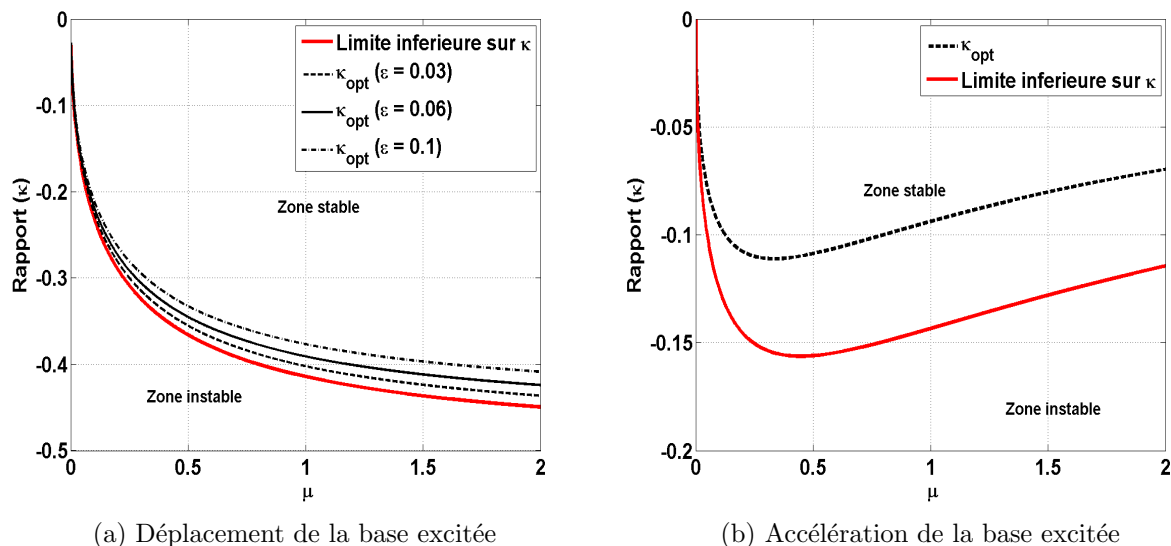


FIGURE 3.12 – Les représentations graphiques des rapports de rigidité négatives optimaux pertinents pour chaque cas d’excitation de la base avec leur limite de stabilité.

la structure primaire avec leur limite de stabilité. La ligne rouge représente la limite de stabilité sur κ en dessous de laquelle le système devient instable. On peut observer que pour tout rapport inertance/masse μ et pour tout coefficient $\varepsilon > 0$, les rapports de rigidité négatives optimales restent valables et situés au-dessus de la limite de stabilité sur κ dans chaque cas d’excitation, ce qui garantit la stabilité du système.

3.4.3 Analyse des résultats sous le paramètre optimal κ_{opt}

Pour une meilleure compréhension du rôle du rapport d’inertance/masse μ et du rapport de rigidité négative optimale κ_{opt} sur les paramètres optimaux du système, les graphiques bidimensionnels sont présentés sur la Fig. 3.13. La ligne pleine correspond à $C3$ (SPIS) (pour $\kappa = 0$) et la ligne en pointillé est liée au $C4$ (NSPIS) avec un rapport de rigidité négative optimale (pour $\kappa = \kappa_{opt}$). Les résultats indiquent que lorsque le rapport μ augmente, l’effet du rapport de rigidité négative optimale devient plus important dans le cas d’un déplacement de la base excitée (Fig. 3.13(a)-(c)), ce qui entraîne une différence entre les lignes pleine et en pointillé. Cependant, dans le cas d’une accélération de la base excitée (Fig. 3.13(d)-(f)), l’effet de la rigidité négative optimale est presque constante avec l’augmentation du rapport μ . La Fig. 3.13 montre également que pour tout rapport d’inertance/masse μ donné, les paramètres de $C4$ (NSPIS) sont supérieurs à ceux de SPIS, ce qui justifie que l’inclusion de la rigidité négative dans la disposition série-parallèle à inerter $C3$ (SPIS) proposée a pour effet d’augmenter les valeurs des paramètres de conception. Par conséquent, un rapport d’inertance/masse μ plus petit est plus avantageux pour obtenir de petites valeurs de λ_{opt} , β_{opt} et ζ_{opt} pour $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) dans les deux cas d’excitations harmoniques et limiter les coûts de fabrication des pièces mécanique.

la Fig. 3.14 représentent le tracé de contour du déplacement normalisé du système pri-

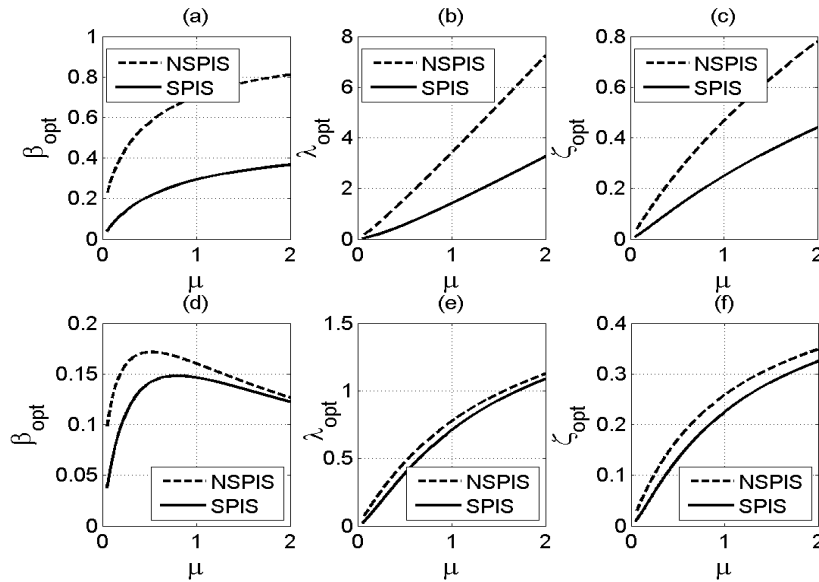
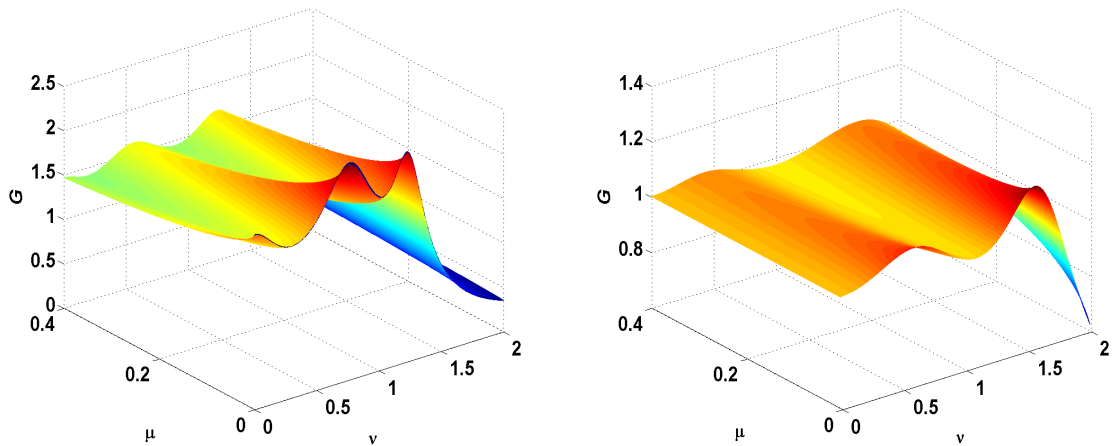


FIGURE 3.13 – Effet de la rigidité négative et de l’inertance/masse sur les paramètres optimaux pour les deux dispositions $C4$ (NSPIS) (lignes pointillées) et $C3$ (SPIS) (lignes pleines) dans chaque cas d’excitation de la base. Ici, (a), (b) et (c) sont pertinents pour le déplacement de la base excitée, tandis que (d), (e) et (f) sont pour l’accélération de base excitée, dans lesquels (a), (b), (d) et (e) sont les rapports de rigidité et (c) et (f) sont les rapports d’amortissement.



(a) Déplacement de la base excitée

(b) Accélération de la base excitée

FIGURE 3.14 – Tracé de contour de l’amplitude du déplacement normalisée du système primaire avec $C4$ (NSPIS) par rapport au rapport de masse μ pour $\kappa = \kappa^{opt}$.

maire contrôlé avec $C4$ (NSPIS). On peut observer que l’effet d’amortissement s’améliore au fur et à mesure que μ augmente. Cependant, la lente décomposition de l’amplitude de crête lorsque μ augmente, montre que la valeur normalisée du déplacement de la masse de la structure primaire contrôlée avec $C4$ (NSPIS) n’est pas sensible à la variation de μ pour une valeur absolue de κ plus grande. De plus, comme les paramètres de conception augmentent au fur et à mesure que μ augmente (voir Fig. 3.13), choisir un rapport μ élevé va augmenter le coût de fabrication des pièces mécaniques. Cependant, l’inclusion

3.4.4. Évaluation des performances des dispositifs $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) sous excitation harmonique de la base.

de la rigidité négative peut réduire considérablement les coûts de fabrication car, pour une petite valeur du rapport μ (impliquant de petites valeurs des paramètres de conception), une réduction effective de la réponse du système primaire peut être obtenue.

TABLE 3.5 – Amplitudes normalisées du système primaire aux points fixes.

	TMD	$C3$ (SPIS)	$C4$ (NSPIS)
(a) : Accélération de base excitée			
$\left \frac{X_1}{A_g} \right _{\max}$	$\sqrt{\frac{2(1+\mu)^2}{\mu}}$	$\sqrt{1 + \frac{1}{\mu}}$	$\sqrt{\frac{\mu(1+\mu)}{(\mu-\kappa)^2}}$
(b) : Déplacement de la base excitée			
$\left \frac{X_1}{Y} \right _{\max}$	$\sqrt{1 + \frac{2}{\mu}}$	$\sqrt{1 + \frac{1}{\mu}}$	$\sqrt{\frac{\mu(1+\mu)}{(\mu-\kappa)^2}}$

* Le paramètre κ étant le rapport de rigidité négative.

3.4.4 Évaluation des performances des dispositifs $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) sous excitation harmonique de la base.

TABLE 3.6 – Bande passante de suppression des vibrations et les amplitudes maximales du système primaire avec TMD, $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) sous $\mu = 0,05$.

	TMD	$C3$ (SPIS)	$C4$ (NSPIS)
(a) : Accélération de la base excitée			
Bande de suppression	0.159	0.163	0.317
Amplitude maximale	6.646	6.261	2.158
(b) : Déplacement de la base excitée			
Bande de suppression	0.163	0.166	0.821
Amplitude maximale	6.406	6.224	1.414

Dans le Tableau 3.5, nous résumons toutes les amplitudes du déplacement normalisée aux points fixes du système primaire contrôlé par trois types de dispositifs (à savoir, TMD, $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS)) dans les deux cas d'excitations harmoniques mentionnés dans cette section (à savoir, l'excitation de la base par accélération et par déplacement, respectivement). Comme le rapport massique du TMD est normalement assez petit et pratiquement inférieur à 0,25, les amplitudes du déplacement normalisées aux points fixes du système primaire avec $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) pour le même rapport de masse sont représentés sur la Fig. 3.15 sur la plage de $0 < \mu < 0,2$ pour une comparaison raisonnable avec le TMD. Comme le montre la Fig. 3.15a, si la disposition $C4$ (NSPIS) (avec raideur négative) est utilisée dans le cas d'une structure primaire excitée par accélération de sa base, une amélioration de 58,05 à 86,69% peut être obtenue par rapport au TMD tandis que 35,02 à 81,09% d'amélioration peut être obtenue par rapport à la disposition $C3$

3.4.4. Évaluation des performances des dispositifs $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) sous excitation harmonique de la base.

(SPIS). Cependant, dans le cas de la structure primaire excitée par déplacement de la base comme montré à la Fig. 3.15b), la disposition $C4$ (NSPIS) apporte une amélioration de 65 à 97% par rapport au TMD et 53 à 96 % d'amélioration comparée au $C3$ (SPIS). Ces résultats montrent également que $C3$ (SPIS) est supérieur au TMD. La Fig. 3.15 montre également que le système $C4$ (NSPIS) est avantageux pour des petites valeurs du rapport μ .

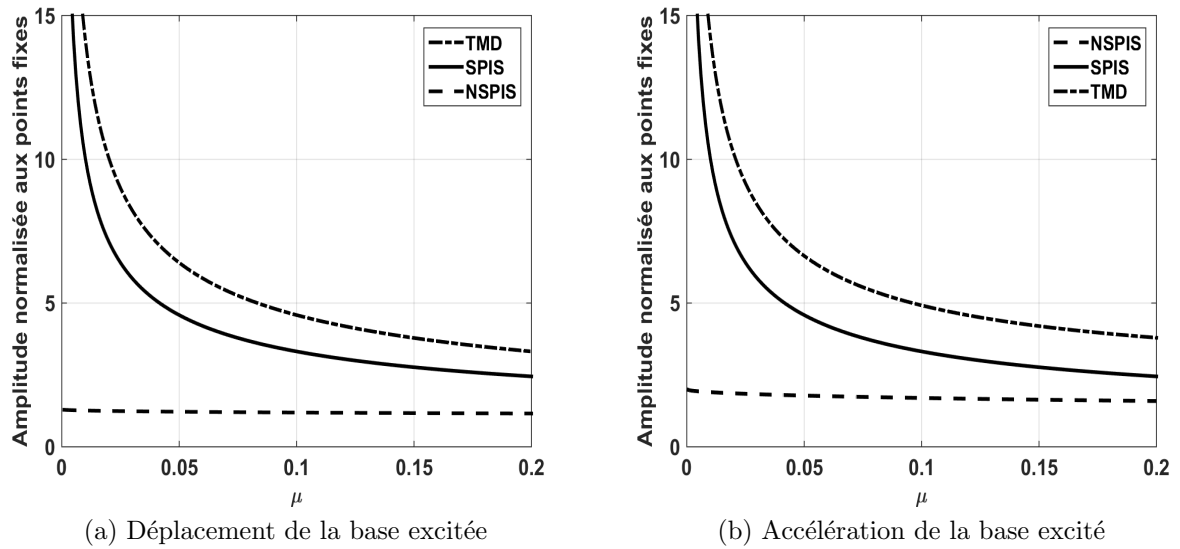


FIGURE 3.15 – Comparaison des amplitudes normalisées aux points fixes de la masse du système primaire contrôlée par les trois dispositifs TMD, $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) pour différents rapports de masse ou rapport d'inertance/masse μ .

De plus, les réponses en fréquence du système primaire équipé respectivement des trois types de dispositifs mentionnés ci-dessus sont illustrées à la Fig. 3.16. Le rapport d'inertance/masse ou rapport de masse est imposé comme $\mu = 0,05$. Deux indices de comparaison sont envisagés, le maximum d'amplitude des vibrations du système primaire et la largeur de la bande de suppression des vibrations notée (SBW) (suppression bandwidth). Comme illustré sur la Fig. 3.16a, la bande passante de suppression (SBW) peut être définie comme la plage des fréquences d'excitation dans lesquelles la structure primaire contrôlée surpasse un cas de structure primaire non-contrôlée. A cet effet, les valeurs de ces caractéristiques correspondant à différents dispositifs sont résumées dans le Tableau 3.6. Il est vrai que dans le cas de la structure primaire excitée par accélération de la base (Fig. 3.16b), le principal inconvénient de la rigidité négative est d'augmenter l'amplitude des vibrations dans les basses fréquences. Néanmoins, la justification de son utilisation dans les systèmes de contrôle; est caractérisée par la plus grande largeur de la bande de suppression et l'amplitude de vibration minimale du système primaire. Plus précisément, par rapport au TMD et $C3$ (SPIS), le $C4$ (NSPIS) peut agrandir la bande passante de suppression de 49,84% et 48,58% et réduire l'amplitude maximale des vibrations de 67,53% et 65,53%, respectivement. Alors que dans le cas d'une structure primaire excitée

3.4.4. Évaluation des performances des dispositifs $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) sous excitation harmonique de la base.

par le déplacement de sa base (Fig. 3.16a), il n'y a pas d'amplification de l'amplitude des vibrations dans la région de basses fréquences en raison du rapport de rigidité négative. Ainsi, par rapport au TMD et $C3$ (SPIS), le $C4$ (NSPIS) peut élargir la bande passante de suppression de 80% et 79,8% et réduire l'amplitude maximale des vibrations de 78% et 77,3%, respectivement. Ces résultats montrent également que le $C3$ (SPIS) est supérieur au TMD.

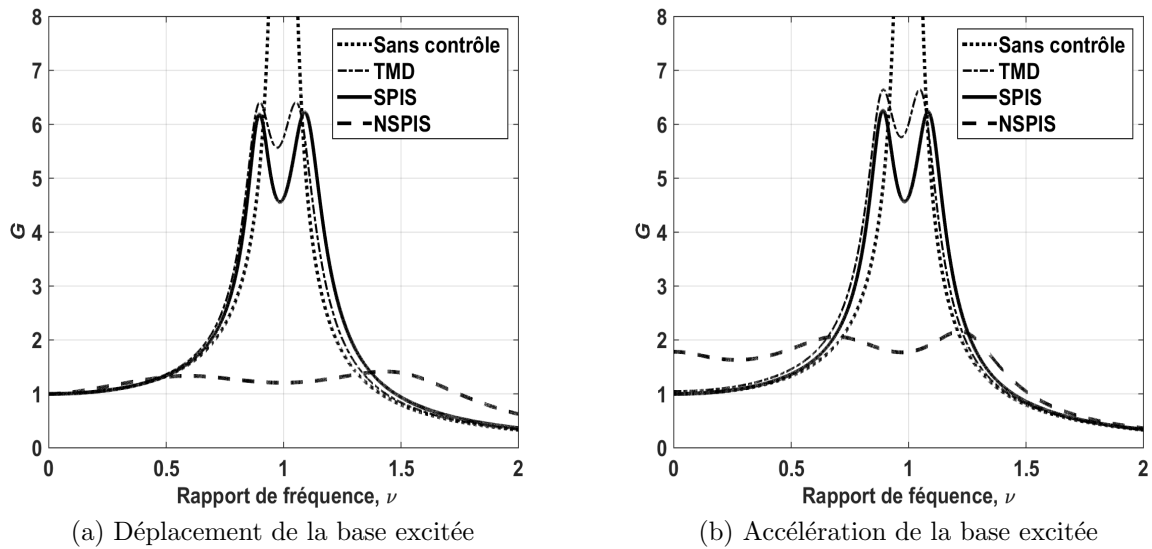


FIGURE 3.16 – La comparaison entre TMD, $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) dans la réponse en fréquence du système primaire sous des paramètres optimaux lorsque $\mu = 0,05$.

Une simulation numérique dans le temps à base des équations différentielles données par la Fig. 2.9 est également exécutée pour étudier les performances de contrôle des trois différents dispositifs TMD, $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) par rapport aux vibrations transitoires. La Fig. 3.17 représente les réponses temporelles des systèmes primaires. La simulation est effectuée sous vibration libre (à savoir, $a(\tau) = y(\tau) = 0$) grâce à la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre, avec un rapport de masse $\mu = 0,1$ pour un meilleur effet visuel. Comme le montre la Fig. 3.17, $C3$ (SPIS) (quand $\kappa = 0$) et le TMD rendent une atténuation similaire de la réponse transitoire du système primaire en termes d'amplitude maximale des vibrations et de temps de stabilisation. En outre, le dispositif $C4$ (NSPIS) avec une rigidité négative surpasse le $C3$ (SPIS) (quand $\kappa = 0$) et le TMD en terme de temps de stabilisation beaucoup plus court et l'amplitude maximale du système primaire plus faible. Enfin, la Fig. 3.17a et la Fig. 3.17b, suggèrent que les paramètres optimaux obtenus pour le déplacement de la base excitée sont plus préférables que les paramètres optimaux obtenus pour une accélération de base excitée en terme d'amplitude maximale des vibrations plus faibles avec un temps de stabilisation plus court.

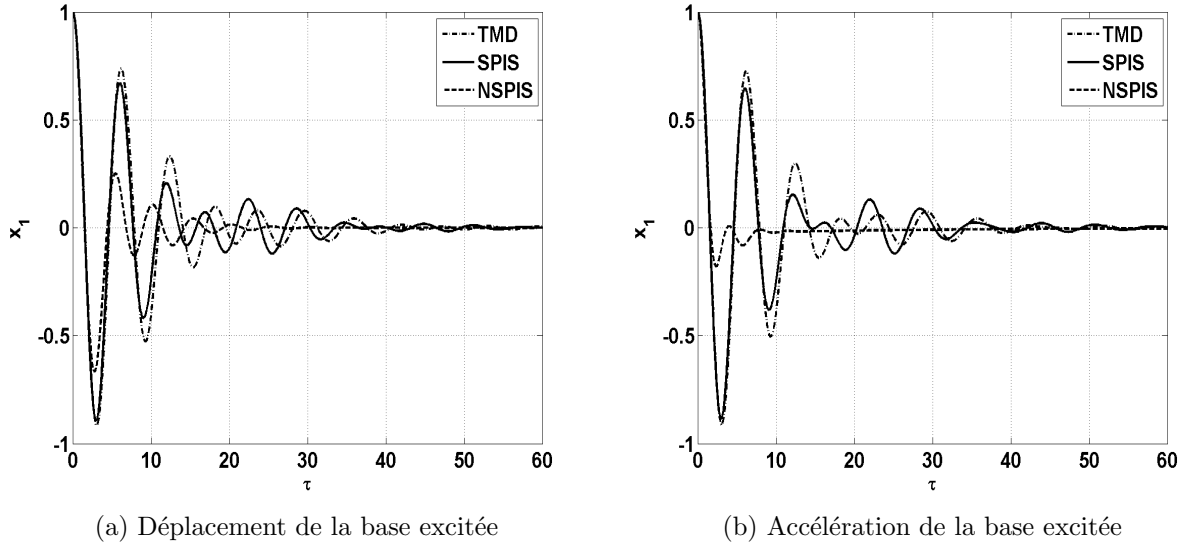


FIGURE 3.17 – Réponse transitoire des systèmes primaires sous $\mu = 0,1$ pour la condition initiale $(1,0,0,0)$.

3.4.5 Évaluation des performances des dispositifs $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) sous excitation aléatoire de la base

Le système primaire est généralement soumis à des excitations aléatoires comme dans la plupart des pratiques de l'ingénierie, il est donc très important et significatif d'observer la réponse du système à une excitation aléatoire. Par exemple, supposons que le système primaire soit soumis à une excitation aléatoire (bruit blanc) d'accélération de la base avec une valeur moyenne nulle et une densité spectrale de puissance constante $S(\omega) = S_0$ (bruit blanc idéal). Le réponse quadratique moyenne sans dimension $\bar{\sigma}$ du système primaire pour chaque dispositif TMD, $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS), respectivement est exprimée grâce à l'équation (3.51) comme

$$\bar{\sigma}^2 = F\zeta + \frac{G}{\zeta}. \quad (3.40)$$

- Pour $C4$ (NSPIS),

$$\left\{ \begin{array}{l} F = (\kappa^2 + (2\beta + 2\lambda - 2\mu)\kappa + (\beta + \lambda)(\beta + \lambda - 2)\mu + (\beta + \lambda)^2 + \mu^2)/\lambda^2(\kappa - \mu)^2 \\ G = \left\{ \begin{array}{l} \kappa^3 + (3\beta - 2\mu)\kappa^2 + [(2\mu + 3)\beta^2 - 4\mu\beta + \mu^2]\kappa \\ +(1 + \mu)^2\beta^3 - (\mu^2 + 2\mu)\beta^2 + \beta\mu^2 \end{array} \right\} / 4[(1 + \beta)\kappa + \beta](\mu - \kappa)^2 \end{array} \right. , \quad (3.41)$$

- Pour $C3$ (SPIS),

$$F = \frac{(\beta + \lambda)(\beta + \lambda - 2)\mu + (\beta + \lambda)^2 + \mu^2}{\lambda^2\mu^2}, \quad G = \frac{(1 + \mu)^2\beta^3 - (\mu^2 + 2\mu)\beta^2 + \beta\mu^2}{4\beta\mu^2} \quad (3.42)$$

- Pour TMD,

$$F = \frac{\alpha(1 + \mu)^3}{\mu}; \quad G = \frac{(1 + \mu)^4 \alpha^4 + (\mu^3 - 3\mu - 2)\alpha^2 + 1}{4\alpha\mu}. \quad (3.43)$$

L'évolution de ces réponses quadratiques moyennes du système primaire en fonction du rapport de masse μ avec les trois dispositifs, respectivement, sous les paramètres optimaux (le Tableau 3.4) peuvent être obtenus comme indiqué sur la Fig. 3.18. Il est démontré que le dispositif $C4$ (NSPIS) montre la plus petite réponse quadratique moyenne sur $0,001 < \mu < 0,2$. La Fig. 3.18 montre également que le système $C4$ (NSPIS) est avantageux pour un rapport μ petit et que $C3$ (SPIS) est supérieure au TMD.

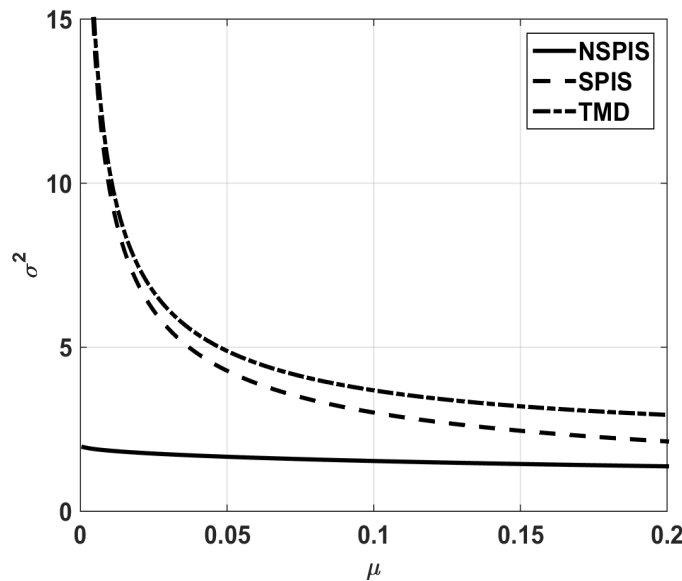


FIGURE 3.18 – La comparaison des différentes réponses quadratiques moyennes du système primaire par rapport à μ dans l'accélération aléatoire de la base du système primaire.

Afin d'être plus réaliste, une excitation aléatoire de 50 secondes est construite, ce qui est composée de 5000 nombres aléatoires normalisés avec une valeur moyenne nulle et une variance unitaire, respectivement. L'historique temporel de l'excitation aléatoire est représentée sur la Fig. 3.19. Ici, nous prenons la masse primaire $m = 1k_g$ et la rigidité du système primaire $k_1 = 100N/m$. Puis, les paramètres des dispositifs TMD, $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS) dans ce document peuvent être calculés selon le Tableau 3.4 et [28, 68, 69] pour le TMD.

La méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre intégrant les équations différentielles données par la Fig. 2.9 a permis d'obtenir les réponses de l'historique temporel du système primaire sans contrôle et avec contrôle, respectivement. L'historique temporel de ces systèmes primaires est représenté sur la Fig. 3.20. La variance et la diminution du déplacement du système primaire avec les dispositifs TMD, $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS), respectivement, sont résumées dans le Tableau 3.7.

D'après la Fig. 3.20 et le Tableau 3.7, il pourrait également être conclu que le dispo-

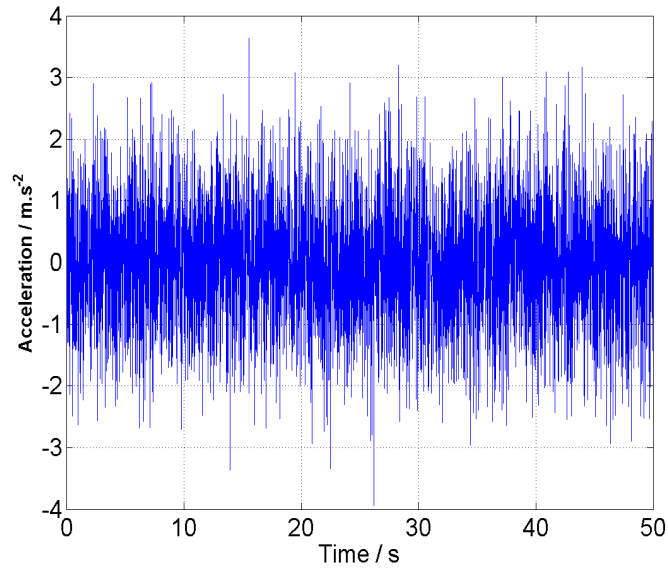


FIGURE 3.19 – Historique temporel de l'excitation aléatoire.

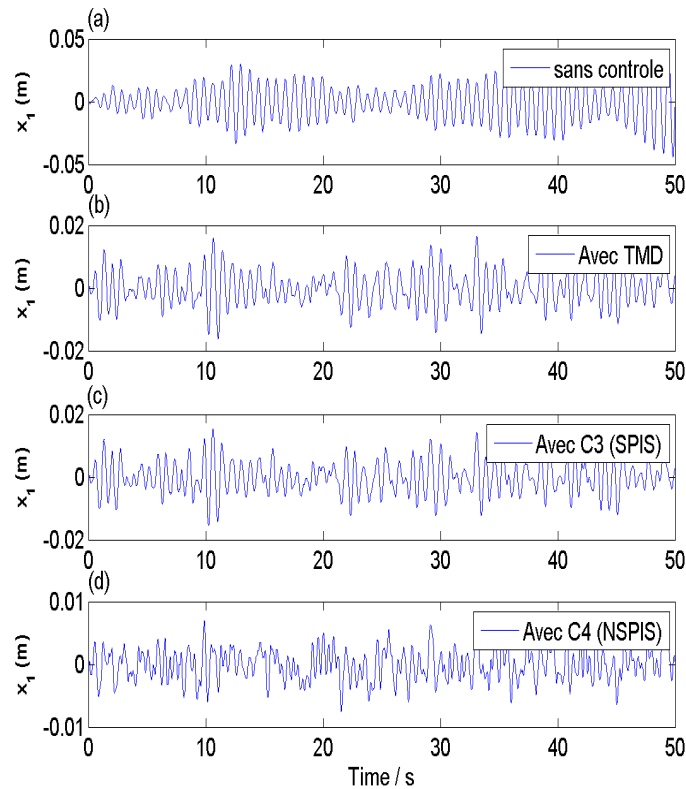


FIGURE 3.20 – L'historique temporel du système primaire avec différents dispositifs. (a) sans contrôle (b) avec TMD (c) $C3$ (SPIS) et (d) avec $C4$ (NSPIS).

sitif $C4$ (NSPIS) avec une rigidité négative est le système le plus efficace sous excitation aléatoire par rapport à TMD et $C3$ (SPIS) (sans rigidité négative). Cependant $C3$ (SPIS) surpasse le TMD pour μ supérieure.

TABLE 3.7 – La variance et la diminution du déplacement du système primaire.

Modèles	Variance	Diminution (%)
Sans contrôle	2.0082e-04	
TMD	2.5760e-05	87.17
$C3$ (SPIS)	2.4243e-05	87.93
$C4$ (NSPIS)	1.1987e-05	94.03

3.5 Réponse du système primaire avec $C5$ (IVA), $C6$ (NGS-IVA) et $C7$ (AIGS-IVA) sous excitation de force

Dans cette section, la structure primaire est excitée par une force directement appliquée à la masse principale de la structure comme montré à la Fig. 2.5. Les dispositifs $C5$ (IVA), $C6$ (NGS-IVA) et $C7$ (AIGS-IVA) de la Fig. 3.21 sont candidats à la suppression des vibrations de la structure primaire. Dans ces dispositifs, l'effet d'une inertance amplifiée couplée à une rigidité mise à la terre est particulièrement observée pour le dispositif $C7$ (AIGS-IVA). Cependant, le dispositif $C6$ (NGS-IVA) est à rigidité négative mise à la terre tandis que $C5$ (IVA) est sans rigidité négative. La réponse du système primaire avec ces dispositifs est analysée sous les paramètres optimaux des dispositifs proposés. En attendant, la section suivante montre ces paramètres optimaux.

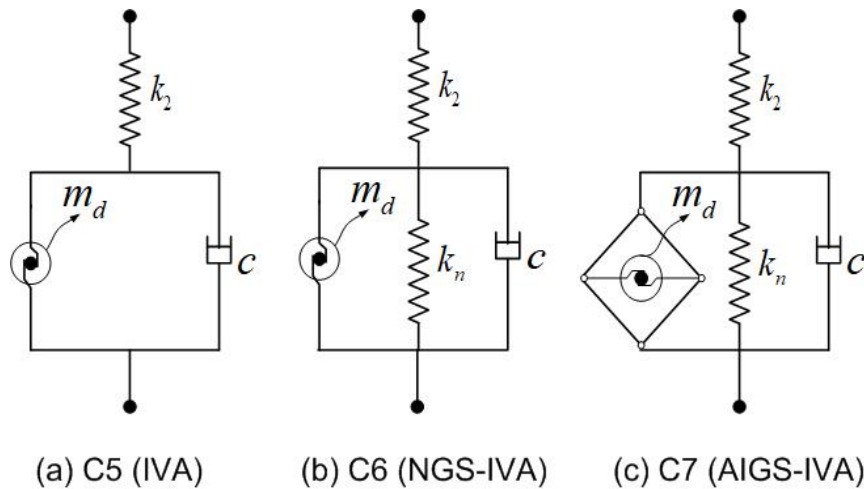


FIGURE 3.21 – Dispositifs candidat à l'absorption des vibrations de la structure primaire.

3.5.1 Résultats sur la conception des dispositifs $C5$ (IVA), $C6$ (NGS-IVA) et $C7$ (AIGS-IVA)

La fonction de transfert du système primaire sous excitation de force harmonique contrôlée par le dispositif $C7$ (AIGS-IVA) est donnée comme ci-dessous :

$$A(\Omega) = \left| \frac{X_1}{X_s} \right| = \left| \frac{(j\Omega)^2 + N_1(j\Omega) + N_0}{(j\Omega)^4 + D_3(j\Omega)^3 + D_2(j\Omega)^2 + D_1(j\Omega) + D_0} \right| \quad (3.44)$$

où j est l'unité imaginaire, $X_s = F/k_1$ la déformation statique, et les autres paramètres sont les suivants :

$$\begin{cases} N_1 = 2\xi\alpha \\ N_0 = \alpha^2(1 + \eta) \\ D_3 = 2\xi\alpha \\ D_2 = \alpha^2(1 + \eta + \mu\beta^2) \\ D_1 = 2\xi\alpha(1 + \mu\beta^2\alpha^2) \\ D_0 = \alpha^2(1 + \eta + \eta\mu\beta^2\alpha^2) \end{cases} \quad (3.45)$$

Ainsi, les paramètres optimaux de conception sont obtenus en minimisant cette fonction de transfert dans l'optimisation H_∞ basée sur la théorie des points fixes. En suivant la **procédure 1**, le rapport de fréquence optimal α peut être obtenu comme :

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{1}{1 + \eta - \mu\beta^2}}. \quad (3.46)$$

Le rapport d'amortissement optimal ζ peut donc être exprimé par

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3(1 + \eta)\mu\beta^2}{4[2(\eta + 1)^2 - \mu\beta^2]}}. \quad (3.47)$$

Sur la base des paramètres optimaux, l'amplitude normalisée aux points fixes P et Q est donnée par la relation

$$A|_{P,Q} = (1 + \eta - \mu\beta^2) \sqrt{\frac{2}{\mu\beta^2}}. \quad (3.48)$$

La présence de la rigidité négative k_n dans le système d'absorption cause des déplacements important dans la zone des basses fréquences de la réponse fréquentielle du système primaire. Limiter ces déplacements consiste à imposer que la déformation statique du système $A|_{\Omega=0}$ soit limitée par l'amplitude normalisée aux points fixes $A|_{P,Q}$ (c'est-à-dire $A|_{\Omega=0} = A|_{P,Q}$). Cette condition définit ainsi le rapport de rigidité optimale donné par la relation

$$\eta_{opt} = -1 + \sqrt{2\mu\beta^2}, \quad (3.49)$$

ce qui satisfait bien la condition de stabilité $-1 + \mu\beta^2 < \eta < \eta_{up}^{cste}$ en remplaçant (3.46)

dans la condition de stabilité générale (2.21). η_{up}^{cste} est définie dans la suite du problème.

Preuve la preuve est identique comme montré à l'appendix A1.

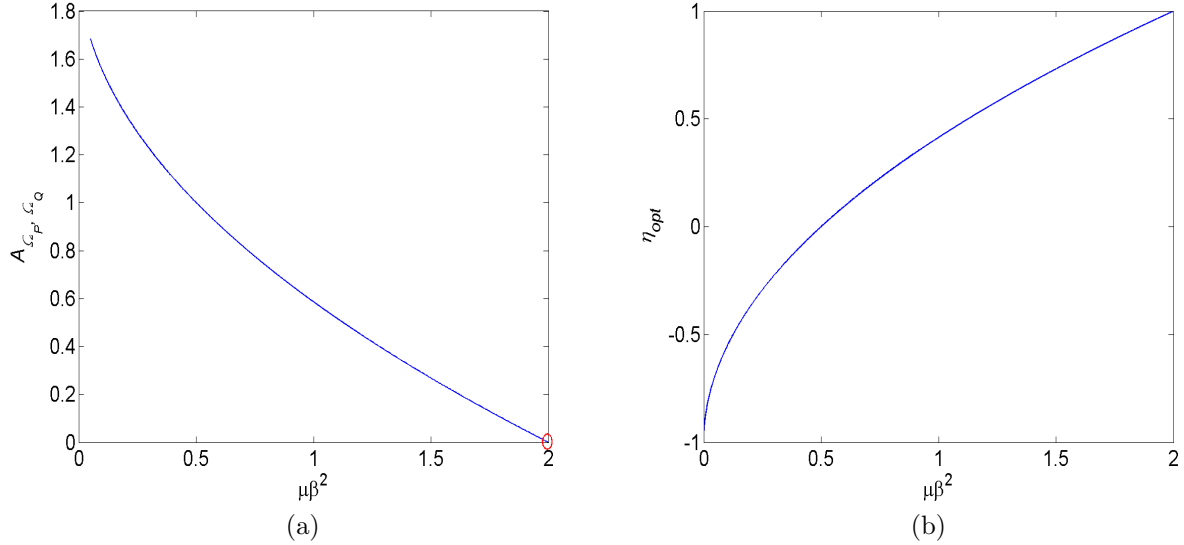


FIGURE 3.22 – Évolution en fonction du produit $\mu\beta^2$ (a) de l'amplitude des vibrations normalisées aux points fixes et (b) du rapport de rigidité négative optimale.

La Fig. 3.22 montre l'évolution de l'amplitude normalisée aux points fixes (Fig. 3.22a) et du rapport de rigidité négative optimale (Fig. 3.22b) pour différentes valeurs du produit $\mu\beta^2$. Sur la Fig. 3.22a, on montre que les paramètres optimaux du système ne sont applicables que dans la région $0 < \mu\beta^2 < 2$, c'est-à-dire que $\eta_{up}^{cste} = 2$. En analysant la formule de la rigidité optimale mise à la terre (3.49), et en inspectant la Fig. 3.22b, un phénomène intéressant a été découvert, c'est-à-dire trois possibilités pour la valeur η_{opt} . Ce qui veut dire que la rigidité optimale mise à la terre peut être négative, zéro et positive comme ci-dessous :

$$\begin{cases} \eta_{opt} < 0, & \text{si } 0 < \mu\beta^2 < 1/2 \\ \eta_{opt} = 0, & \text{si } \mu\beta^2 = 1/2 \\ \eta_{opt} > 0, & \text{si } 1/2 < \mu\beta^2 < 2 \end{cases} . \quad (3.50)$$

A ce stade, tous les paramètres optimaux $C7$ (AIGS-IVA) dans cette thèse sont obtenus sur la base de la théorie du point fixe (FPT) (**procédure 1**). Il peut être trouvé que les objectifs d'optimisation des paramètres sont essentiellement atteints. Cependant, en définissant $\beta = 1$ dans les équations (3.46), (3.47), (3.48) et (3.49) les paramètres optimaux pour $C6$ (NGS-IVA) peuvent être réécrits. De la même manière, en posant $\beta = 1$ et $\eta = 0$ simultanément dans les équations (3.46), (3.47) et (3.48), les paramètres optimaux pour IVA sont retrouvés.

3.5.2 Analyse des résultats pour $C7$ (AIGS-IVA)

En pratique, le rapport de masse amplifiée $\mu\beta^2$ dépend des exigences spécifiques d'ingénierie. Par conséquent, l'influence de ce rapport sur les paramètres de conception α , ξ et η est digne d'une attention particulière. Pour valider les solutions optimales, les simulations sont d'abord réalisées sur le système en fonction du rapport de masse amplifiée $\mu\beta^2$. Les solutions optimales du rapport de fréquence α et rapport d'amortissement ξ du système $C7$ (AIGS-IVA) dérivés des équations analytiques. (3.46) et (3.47) sont présentés sur la Fig. 3.23 le rapport de masse amplifiée $\mu\beta^2$ compris entre 0,05 et 1,5. Le rapport de fréquence optimale α_{opt} diminue rapidement au début lorsque le rapport de masse amplifiée $\mu\beta^2$ est très petit ($\mu\beta^2 \leq 0.5$), puis augmente rapidement dans la plage $\mu\beta^2 > 0.5$. Cependant, à la fois pour $\mu\beta^2 \leq 0.5$ et $\mu\beta^2 > 0.5$, la Fig. 3.23 indique que pour un rapport de masse amplifiée $\mu\beta^2$ donnée, le système $C7$ (AIGS-IVA) a besoin d'un ressort plus rigide pour obtenir une meilleure performance de contrôle. Le rapport d'amortissement optimal ξ_{opt} augmente avec, lorsque augmente le rapport de masse amplifiée $\mu\beta^2$. Cela indique qu'un rapport de masse amplifiée plus grand $\mu\beta^2$ nécessite un amortissement élevé pour le système $C7$ (AIGS-IVA) afin d'obtenir de meilleures performances de contrôle.

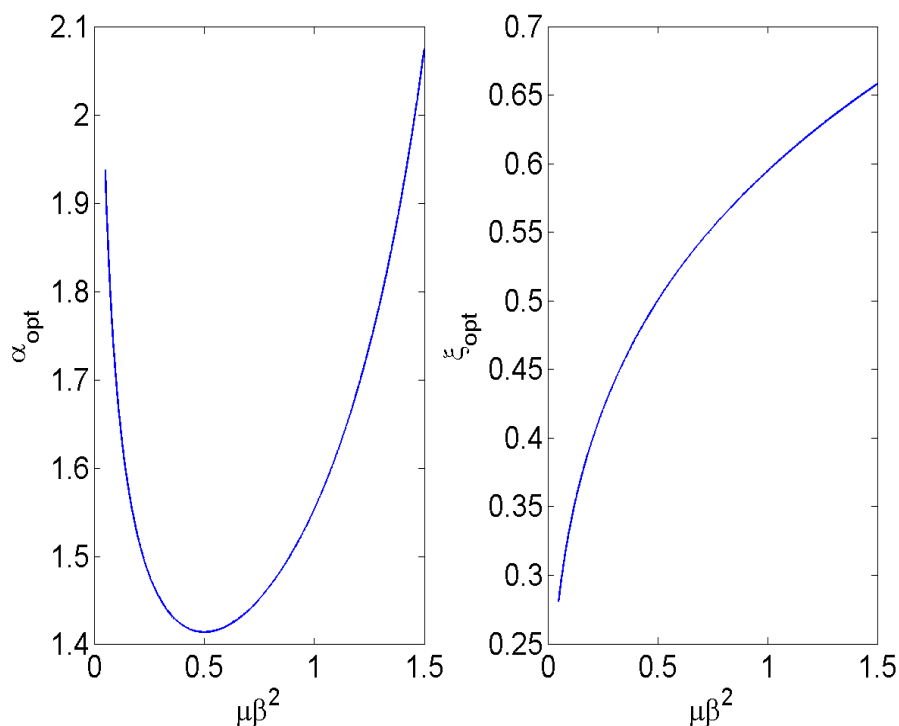


FIGURE 3.23 – Relation entre le rapport de masse amplifiée et les paramètres optimaux.

L'effet d'amortissement s'améliore à mesure que l'amplification du rapport de masse $\mu\beta^2$ augmente, comme le montre la Fig. 3.24. Cependant, la décroissance rapide de l'amplitude de crête lorsque $\mu\beta^2$ augmente, montre que le déplacement normalisé du système primaire contrôlé avec de $C7$ (AIGS-IVA) est sensible à la variation de β pour une valeur plus grande de η . De plus, comme le système a besoin d'une rigidité et d'un amortissement

élevés pour obtenir de meilleures performances de contrôle, le choix d'un rapport massique d'inertance important va augmenter les Coûts de fabrication. Néanmoins, la mise en œuvre d'une inertance amplifiée peut réduire considérablement les coûts de fabrication car, pour un petit rapport de masse d'inertance avec une amplification plus grande ($\beta > 1$), une réduction efficace de la réponse du système primaire peut être obtenue.

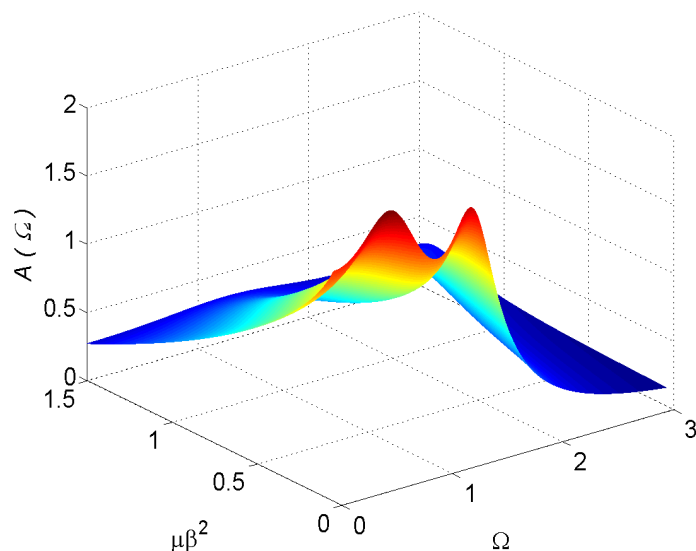


FIGURE 3.24 – Graphique de contour du facteur de grossissement d'amplitude normalisé du système primaire équipé de $C7$ (AIGS-IVA) pour différents rapport $\mu\beta^2$.

De plus, la Fig. 3.25 illustre l'effet d'amortissement lié à chaque cas de réglage du rapport de rigidité η_{opt} mis à la terre comme précédemment mentionné et étiqueté comme cas 1, cas 2 et cas 3 et chacun d'eux inclus le cas (a) et le cas (b) avec des valeurs différentes de μ et β mais, la même valeur de $\mu\beta^2$, selon les paramètres spécifiques du Tableau 3.8. De toute évidence, comme dans les Figs. 3.23 et 3.24, on peut à nouveau voir sur la Fig. 3.25 que les performances de contrôle sont seulement accordées par la valeur du rapport de masse amplifiée $\mu\beta^2$. En d'autres termes, selon la Fig. 3.25 et le Tableau 3.8, le système a les mêmes performances de contrôle quelques soient les valeurs de μ et η , tant que les valeurs de $\mu\beta^2$ sont égales.

TABLE 3.8 – Paramètres du système dans différents cas de η_{opt} .

Cas		η_{opt}	μ	β	$\mu\beta^2$
cas 1	(a)	-0,106	0,1	2	0,4
	(b)	-0,106	0,125	$\sqrt{3.2}$	0,4
cas 2	(a)	0	0,1	$\sqrt{5}$	0,5
	(b)	0	0,125	2	0,5
cas 3	(a)	0,342	0,1	3	0,9
	(b)	0,342	0,125	$\sqrt{7.2}$	0,9

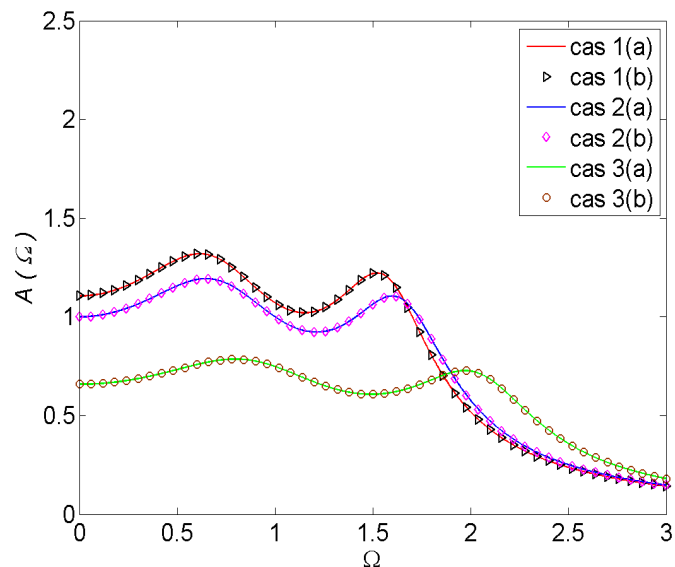


FIGURE 3.25 – Le facteur de grossissement d’amplitude normalisé du système primaire équipé de $C7$ (AIGS-IVA) dans trois cas différents de la rigidité η_{opt} mise à la terre.

En termes de performances de contrôle, on constate que la configuration $C7$ (AIGS-IVA) dans le cas 3 est la meilleure, suivie du cas 2, puis du cas 1. Bien que les performances de contrôle soient les meilleures dans le cas 3, il nécessite une valeur élevée du rapport $\mu\beta^2$ tandis que les cas 1 et 2 nécessitent une valeur inférieure de $\mu\beta^2$. Mais $\mu\beta^2$ ne peut pas être choisi arbitrairement en raison de la limitation sur le coefficient d’amplification β pour une réalisation pratique. Pour plus d’explications, la Fig. 3.22a montre l’amplitude normalisée aux points fixes avec différent $\mu\beta^2$. Théoriquement, la réponse aux points fixes diminue avec l’augmentation de la valeur de $\mu\beta^2$. Pourtant, on constate qu’il y a une limite aux valeurs de $\mu\beta^2$, comme mentionné précédemment.

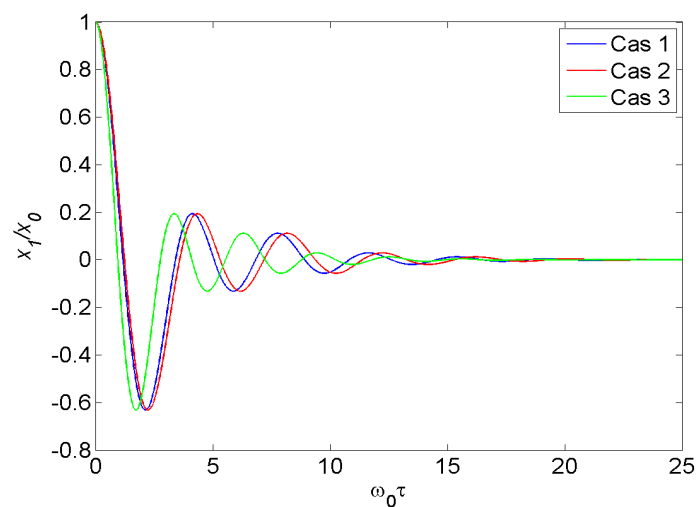


FIGURE 3.26 – Réponse transitoire au déplacement initial x_0 de la structure primaire.

Enfin, pour étudier plus en détail l’effet d’amortissement des différents cas de rapport

de rigidité optimal mis à la terre, la Fig. 3.26 montre le réponse transitoire sans dimension x_1/x_0 du système primaire après un déplacement initial x_0 donné à la masse primaire. La vibration du système conçu dans le cas 3 se détériore rapidement que celle des autres systèmes conçus en utilisant les cas 1 et 2. Néanmoins, dans tous ces cas, la vibration de retour ne se produit pas lorsque le système se stabilise.

Habituellement, le rapport d'inertance/masse μ et le coefficient d'amplification β sont définis au début de la conception et en fonction des exigences. Cependant, un rapport μ élevé peut être produit par le dispositif inerter sans augmenter le volume du système [23, 144]. Pendant ce temps, le mécanisme d'amplification de l'inertance ajoute une certaine charge permanente au système mais négligeable. Par conséquent, la combinaison de ces deux appareils doit tenir compte des conditions réelles. A cet effet, la gamme des valeurs de β est définie physiquement dans [170] et adopté dans ce document. De plus, le remarquable effet positif de la combinaison de ces deux appareils avec une rigidité mise à la terre incluse dans l'IVA considérée, mérite une attention particulière pour la pratique de l'ingénierie. Mais d'abord, les performances de contrôle du C7 (AIGS-IVA) proposées par rapport aux autres IVAs est mis en évidence dans la section suivante.

A ce stade, quelques remarques sont destinées à résumer les principaux résultats de cette section 3.5.

Remarque 1 *Le mécanisme d'amplification de AIGS-IVA permet d'atteindre des rapports massiques élevés en ajoutant une petite charge permanente au système, ce qui permet au système d'atteindre rapidement des taux d'amortissement élevés (voir Fig. 3.23). Cet effet est déjà réalisé par de simples IVAs, mais l'AIGS-IVA proposé dans ce travail pourrait être encore plus efficace pour le même rapport de masse.*

Remarque 2 *Pour les applications numériques, les valeurs du rapport d'amplification β doit être pris dans l'intervalle de 1 à 3 pour des raisons de géométrie structurelle [170]. Cependant, $\beta = 1$ est le cas non amplifié de l'inertance, qui correspond à NGS-IVA sur la Fig. 3.21(b). Donc NGS-IVA est un cas particulier de AIGS-IVA dans cette étude. Les valeurs de $\beta < 1$ ne sont pas prises en compte dans cette étude car elles réduisent l'inertance et entraînant une amplification dans la réponse du système primaire.*

Remarque 3 *La géométrie du mécanisme d'amplificateur de masse a été choisie dans cette étude comme la plus simple possible sans généralité. Cependant, le mécanisme réel peut être différent en réalité et sûrement être encore amélioré ou modifié avec l'objectif d'obtenir un rapport d'amplification de masse plus grand et de meilleures performances que celles présentées dans cette étude pour AIGS-IVA.*

Remarque 4 *L'inclusion de la rigidité négative dans les absorbeurs de vibrations [23–26] ou des systèmes d'isolation [29] améliorent considérablement la réponse du système primaire. Cependant, obtenir une rigidité négative est difficile dans la pratique de l'ingénierie. Par conséquent, l'inclusion d'un mécanisme d'amplification d'inertance*

dans le AIGS-IVA entraîne non seulement une rigidité positive ou rigidité nulle de la rigidité négative mise à la terre, mais aussi à une amélioration significative de la réponse du système primaire au-delà de celle du système à raideur négative (voir Fig. 3.25). De plus, AIGS-IVA avec la rigidité mise à la terre positive a entraîné une réponse du système primaire beaucoup plus petite que sa réponse statique sans contrôle.

Remarque 5 L'avantage du mécanisme d'amplification concerne également l'amortisseur visqueux et le ressort, respectivement. Le mécanisme d'amplification lorsqu'il est également installé au niveau de l'amortisseur visqueux et du ressort, les IVAs peuvent permettre d'adopter un amortisseur visqueux et des rigidités avec des caractéristiques considérablement inférieure à la viscosité et la rigidité réelle demandée, mais avec des coefficients plus faibles que dans le cas où ils ne sont pas amplifiés, s'ils sont accordés par la théorie des points fixes.

Remarque 6 La formulation des résultats de cette étude est basée sur l'hypothèse de petits déplacements de la structure primaire. Ici, pour justifier cette hypothèse, il est remarqué que le facteur d'agrandissement du système primaire avec AIGS-IVA dans ses trois cas a de petites magnitudes (voir Fig. 3.25). Ceci est pertinent car, si le facteur d'agrandissement est un petit déplacement du système SDOF, comme c'est généralement le cas dans certains ouvrages d'art, la longueur de course du système (c'est-à-dire le mouvement relatif $x_2 - x_1$) correspondra à de petits déplacements $x_2(t)$ le long d'une diagonale des tiges (voir Fig. 1.9). Cependant, puisque $y(t) = -x_2(t)/2$, $y(t)$ étant le déplacement le long de l'autre diagonale des tiges et le fait que $1 < \beta < 4$ pour des raisons structurelles [170], on peut en conclure que l'hypothèse de petits déplacements effectués à la base de l'ensemble de la formulation peut être considérée comme raisonnablement correcte.

Remarque 7 Les dispositifs IVA proposés dans cette section, notamment AIGS-IVA a été étudié en mettant l'accent sur l'application à un système SDOF. Ces appareils conviennent également pour une application sur des systèmes MDOF ou continus pour de futures recherches. Cependant, dans la vraie application pour les structures MDOF, les paramètres de réglage sous-optimaux de ces dispositifs peuvent suivre l'approche adoptée dans [187].

3.5.3 Comparaison des performances

Jusqu'à présent, la conception optimale de tous les types de systèmes d'IVA, C7 (AIGS-IVA), C6 (NGS-IVA) et C5 (IVA) de la Fig. 3.21 sont présentés. Les solutions pour les paramètres de réglage du (TID) [107] sont introduites dans cette section. Ces solutions sont nécessaires pour clarifier les performances de contrôle des IVAs illustrés à la Fig. 3.21. Par conséquent, tous les paramètres optimaux des quatre modèles évoqués jusqu'ici sont résumés dans le Tableau 3.9.

TABLE 3.9 – Paramètres optimaux de divers types d'absorbeurs.

Modèles	α_{opt}	ξ_{opt}	η_{opt}
TID	$\frac{1}{1+\mu}$	$\sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}$	-
<i>C</i> 5 (IVA)	$\sqrt{\frac{1}{1-\mu}}$	$\sqrt{\frac{3\mu}{4(2-\mu)}}$	-
<i>C</i> 6 (NGS-IVA)	$\sqrt{\frac{1}{1+\eta-\mu}}$	$\sqrt{\frac{3\mu(1+\eta)}{8(\eta+1)^2-4\mu}}$	$-1 + \sqrt{2\mu}$
<i>C</i> 7 (AIGS-IVA)	$\sqrt{\frac{1}{1+\eta-\mu\beta^2}}$	$\sqrt{\frac{3\mu\beta^2(1+\eta)}{8(\eta+1)^2-4\mu\beta^2}}$	$-1 + \sqrt{2\mu\beta^2}$

Afin d'illustrer les performances de contrôle de la configuration *C*7 (AIGS-IVA), une enquête numérique est effectuée pour simuler la dynamique dans les domaines fréquentiel et temporel.

Le cas de l'excitation de force harmonique.

Afin de comparer les performances de contrôle des absorbeurs dans le domaine fréquentiel sous excitation de force harmonique du système primaire, les valeurs des paramètres optimaux du Tableau 3.9 sont données dans le Tableau 3.10 pour un rapport massique $\mu = 0, 1$. Les courbes de fréquence des réponses des systèmes avec les quatre types d'absorbeurs mentionnés ci-dessus sont représentés sur la Fig. 3.27. En conséquence, les valeurs spécifiques du paramètre β , pertinentes pour chaque cas de rapport de rigidité mise à la terre pour le proposé *C*7 (AIGS-IVA) dans ce travail, peut être trouvé dans le Tableau 3.8. Notez que les valeurs de β ne peuvent pas être choisies supérieures à 3,5 [170].

TABLE 3.10 – Les valeurs des paramètres utilisés dans la comparaison présentée.

Les modèles		μ ou $\mu\beta^2$	α_{opt}	ξ_{opt}	η_{opt}
TID		$\mu=0,1$	0,909	0,185	-
<i>C</i> 5 (IVA)		$\mu=0,1$	1,054	0,199	-
<i>C</i> 6 (NGS-IVA)		$\mu=0,1$	1,697	0,334	-0,553
<i>C</i> 7 (AIGS-IVA)	cas 1	$\mu\beta^2=0,4$	1,422	0,473	-0,106
	cas 2	$\mu\beta^2=0,5$	1,414	0,500	0
	cas 3	$\mu\beta^2=0,9$	1,505	0,579	0,342

À partir de la comparaison à la Fig. 3.27, on peut conclure que *C*7 (AIGS-IVA) dans les trois cas, peut non seulement supprimer l'amplitude des vibrations du système primaire dans la zone de résonance de manière significative, mais étant également la gamme de fréquences efficace d'absorption des vibrations. On peut également voir que sur la base des paramètres optimaux, les performances de contrôle de *C*7 (AIGS-IVA) dans le cas de la rigidité positive mise à la terre sont plus meilleures parmi les trois cas, tandis que ces performances sont légèrement en baisse dans la gamme des hautes fréquences. Le changement des fréquences naturelles en raison de l'inclusion du mécanisme d'amplification de

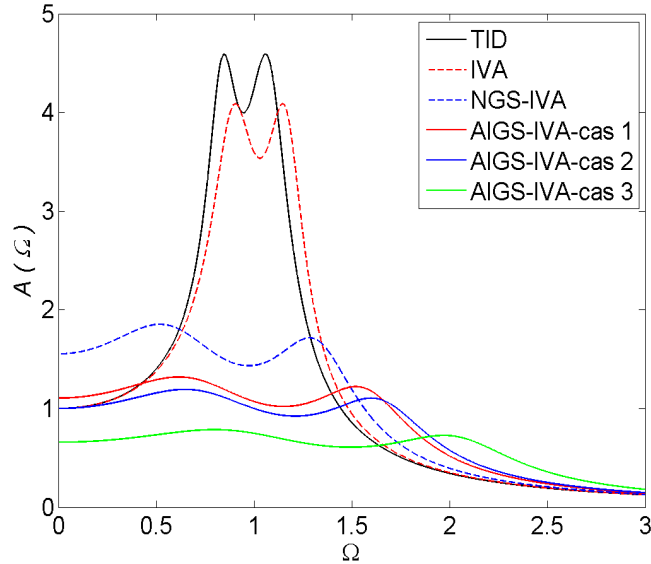


FIGURE 3.27 – Comparaison des performances de contrôle avec d'autres absorbeurs de vibrations.

l'inertance peut plus expliquer cette baisse des performances. Les fréquences propres sans dimension peuvent être obtenues en positionnant le dénominateur de l'équation (3.51) égal à zéro, que l'on peut obtenir comme ci dessous :

$$\Omega_{n,2} = \sqrt{\frac{1 + \eta \pm \sqrt{\mu\beta^2}}{1 + n - \mu\beta^2}}. \quad (3.51)$$

La Fig. 3.28 montre l'évolution des deux fréquences naturelles sans dimension en fonction du rapport d'amplification β pour un rapport de masse donné comme $\mu = 0,1$. De cette figure, on peut voir qu'au fur et à mesure que le rapport d'amplification augmente, les deux fréquences augmentent. Le déplacement des deux fréquences naturelles vers la gamme des hautes fréquences entraîne une légère diminution de la performance dans le haut gamme de fréquences pour *C7* (AIGS-IVA) avec une rigidité positive mise à la terre.

Bien que les performances du *C7* (AIGS-IVA) avec la rigidité positive mise à la terre diminue légèrement dans la gamme des hautes fréquences, ses performances dans la gamme des basses fréquences ont été améliorées par une réponse du système primaire beaucoup plus petite que sa réponse statique sans IVAs. De plus, ses performances dans le milieu des gammes de fréquences peuvent être expliquées par la plus petite amplitude de vibration aux points fixes dans toute la plage admissible du rapport massique μ comme indiqué dans le Tableau 3.11, pour rapport d'amplification β sélectionné. Cependant, il convient de mentionner que l'amplitude des vibrations aux points fixes est légèrement différente de l'amplitude de crête en raison de la nature sous-optimale de la méthodologie basée sur des points fixes.

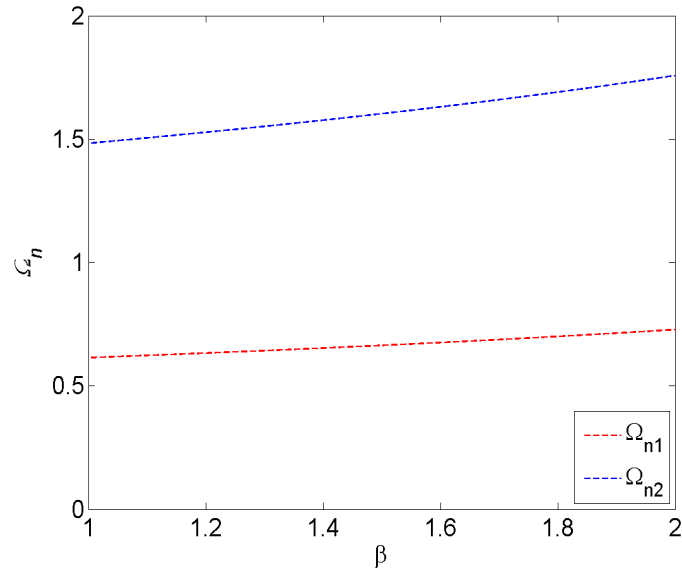


FIGURE 3.28 – Évolution des deux fréquences naturelles sans dimensions en fonction du rapport d'amplification β sous $\mu=0,1$.

TABLE 3.11 – Vibration amplitude of primary system at the fixed points when controlled by the four vibration absorbers.

	TID	C5 (IVA)	C6 (NGS-IVA)	C7 (AIGS-IVA)
A_{max}	$\sqrt{1 + \frac{2}{\mu}}$	$\sqrt{\frac{2(1-\mu)^2}{\mu}}$	$2 - \sqrt{2\mu}$	$2 - \sqrt{2\mu\beta^2}$

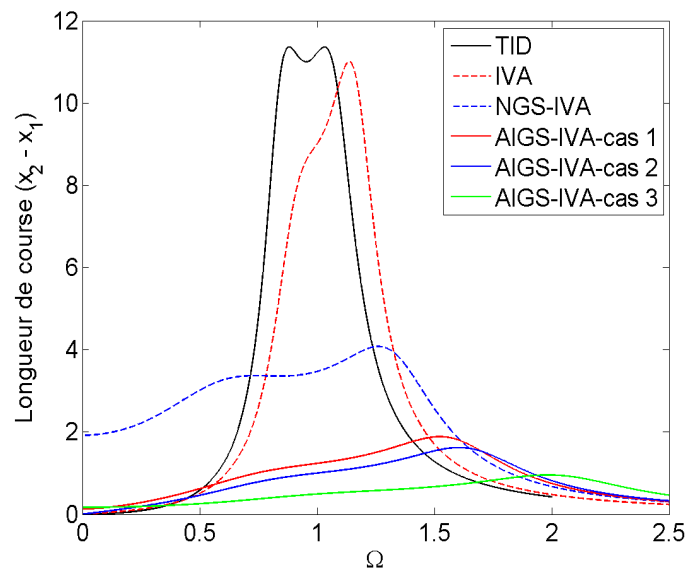


FIGURE 3.29 – Réponse en fréquence du déplacement relatif entre la masse primaire et le point de partage du système à inertier.

Plus d'avantages pourraient être introduits dans les performances de contrôle en utilisant la rigidité mise à la terre couplée à une inertance amplifiée. La Fig. 3.29 montre

les réponses en fréquence du mouvement relatif entre la masse primaire et le point de partage des dispositifs (IVAs) de contrôle (Fig. 3.21), également appelés comme longueur de course, sous excitation de force harmonique. On peut remarquer que le dispositif *C7* (AIGS-IVA) dans ses trois cas différents peut réduire considérablement l'amplitude maximale des vibrations de la longueur de course par rapport à ses homologues *C5* (IVA), *C6* (NGS-IVA) et TID, ce qui facilite leur mise en œuvre pratique dans un environnement plus strict.

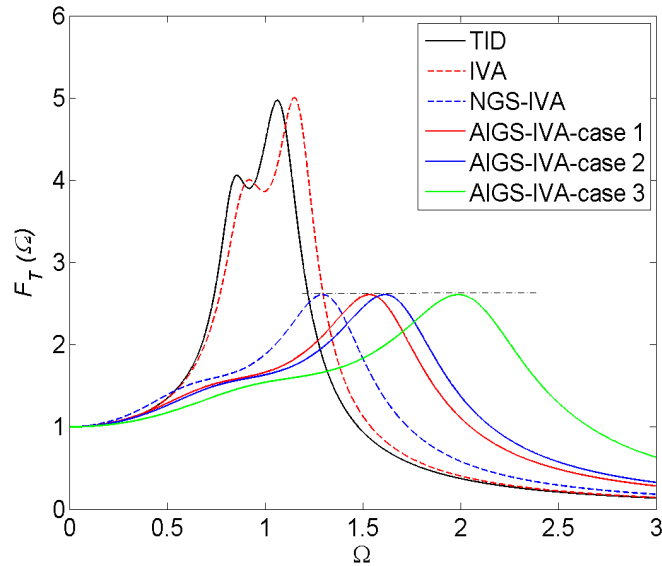


FIGURE 3.30 – Réponse en fréquence de la force totale transmise au sol.

Un autre aspect à prendre en compte est la force totale transmise au sol. La Fig. 3.30) montre les courbes de réponse en fréquence de la force totale transmise au sol (ou fondation), pertinente pour chaque IVA sous les paramètres optimaux basés sur la minimisation du facteur d'amplification du système primaire comme dans la section 3.5.1. Il peut être vu que les IVAs avec rigidité mise à la terre sont plus efficaces que leurs homologues IVAs sans rigidité mise à la terre. Cependant, AIGS-IVA ; dans ses trois cas de raideurs mises au sol, a le même pic de résonance et le décalage vers la droite de la zone de résonance en raison du rapport d'amplification est observé, ce qui montre que, β n'a pas d'effet sur la réduction de la réponse de crête concernant AIGS-IVA dans ses trois cas. Néanmoins, les réponses des systèmes proposés peuvent être améliorés en minimisant les fonctions de transferts correspondant à la force totale transmise au sol en utilisant la théorie des points fixes [23].

Ensuite, l'analyse de l'historique des temps pour l'excitation harmonique est menée pour valider l'efficacité du dispositif *C7* (AIGS-IVA) proposé dans ses trois cas. Les équations gouvernantes des systèmes (Fig. 2.10) sont configurées en un environnement MATLAB et résolu en utilisant la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre considérant les paramètres optimaux du Tableau 3.10. Ici, nous prenons la masse primaire comme $m_0 = 1k_g$ et la rigidité du système primaire comme $k_1 = 100$ N/m. Pour les IVAs, y compris le

TID, le rapport inertance/masse est défini comme $\mu = 0,1$. Et pour l'historique de temps exécuté, il est supposé que la structure est au repos pour $t = 0$.

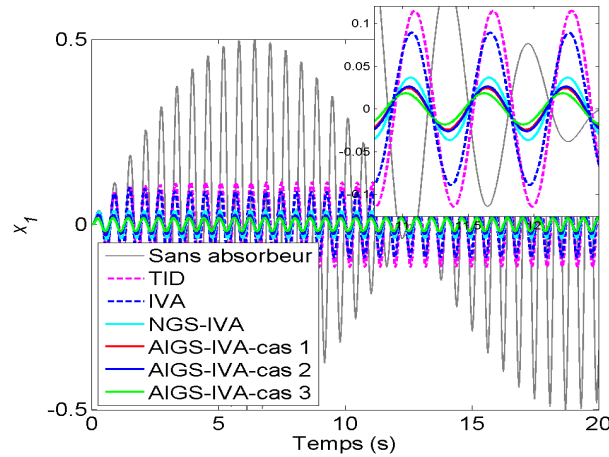


FIGURE 3.31 – Réponse du déplacement normalisé du système primaire sous une entrée d'excitation de force harmonique à la fréquence forcée $\Omega = 1,05$.

Le mouvement d'excitation de force harmonique sans dimension ($F(\tau) = f_0 \sin(\Omega\tau)$) avec son rapport de fréquence forcée sélectionnée comme $\Omega = 1.05$, est imposé. La Fig. 3.31 montre la réponse du déplacement normalisée de la structure primaire avec ou sans absorbeur. Clairement, la structure primaire sans aucun amortisseur de vibrations basée sur l'inerteur présente un phénomène de battement typique et aboutit à une large réponse. Lorsque des IVAs, y compris le TID sont utilisés, la réponse du système primaire est atténuée, avec une grande réduction fournie par le C7 (AIGS-IVA) avec rigidité positive (cas 3), comme prédits par les comparaisons précédentes.

Bien que le dispositif C7 (AIGS-IVA) proposé dans ses trois cas, a la meilleure capacité de contrôle des vibrations, décrite par la plus large bande passante de suppression et la plus petite amplitude de vibration du système primaire contrôlé sous excitation de force harmonique, les performances de cet appareil doivent également être évaluées pour une excitation aléatoire de vibrations par rapport aux systèmes C5 (IVA), C6 (NGS-IVA) et TID envisagés dans ce travail.

Le cas de l'excitation de force aléatoire (bruit blanc)

Le système primaire est soumis à une excitation aléatoire de bruit blanc. Quand le système primaire avec les absorbeurs de vibrations est soumis à une excitation aléatoire avec une moyenne nulle et de densité spectrale de puissance (PSD) (power spectral density) comme $S(\omega) = S_0$, la fonction PSD de la réponse au déplacement du système primaire pertinent pour chacun des quatre dispositifs d'absorption considérés à la Fig. 2.10 y compris le TID est obtenue respectivement comme :

$$S_*(\omega) = |X_{1*}|^2 S_0 \quad (3.52)$$

où * désigne l'absorbeur considéré. Puis la réponse quadratique moyenne du système primaire avec chacun d'eux peut être exprimé comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_T^2 = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{1T}|^2 d\omega = \frac{\pi S_0 U_T}{2\mu\xi\alpha\omega_0^3} \\ \sigma_I^2 = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{1I}|^2 d\omega = \frac{\pi S_0 U_I}{2\mu\xi\alpha^5\omega_0^3} \\ \sigma_N^2 = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{1N}|^2 d\omega = \frac{\pi S_0 U_N}{2\mu\xi\alpha^5\omega_0^3(1+\eta+\eta\mu\alpha^2)} \\ \sigma_{AI}^2 = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{1A}|^2 d\omega = \frac{\pi S_0 U_{AI}}{2\mu\xi\alpha^5\omega_0^3(1+\eta+\eta\mu\beta^2\alpha^2)} \end{array} \right. \quad (3.53)$$

où les souscriptions T , I , N et A sont liés au TID, à $C5$ (IVA), au $C6$ (NGS-IVA) avec élément de rigidité négatif mis à la terre, et au dispositif $C7$ (AIGS-IVA), respectivement. Les quatre autres paramètres U_i ($i = T, I, N$ et A) sont listés comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{TID} = 1 + \alpha^4(1 + \mu)^2 + \alpha^2(4\mu\xi^2 + 4\xi^2 - \mu - 2) \\ U_{C5} = 1 + \alpha^4 + \alpha^2(4\xi^2 + \mu - 2) \\ U_{C6} = 1 + \eta + \alpha^4[(1 + \eta)^3 - 2\eta\mu(1 + \eta - 2\xi) + \eta\mu^2]... \\ + \alpha^2[4\xi^2 + \mu - 2 + 2\eta(-2 - \eta + 2\xi^2 + \mu)] \\ U_{C7} = 1 + \eta + \alpha^4[(1 + \eta)^3 - 2\eta\mu\beta^2(1 + \eta - 2\xi) + \eta\mu^2\beta^4]... \\ + \alpha^2[4\xi^2 + \mu\beta^2 - 2 + 2\eta(-2 - \eta + 2\xi^2 + \mu\beta^2)] \end{array} \right. \quad (3.54)$$

Selon les valeurs des paramètres optimaux données dans le Tableau 3.10, la réponse quadratique moyenne des systèmes primaires avec tous les absorbeurs peut être obtenu comme :

$$\begin{aligned} \sigma_{TID}^2 &= \frac{6.401\pi S_0}{\omega_0^3}, \sigma_{C5}^2 = \frac{5.780\pi S_0}{\omega_0^3}, \sigma_{C6}^2 = \frac{2.736\pi S_0}{\omega_0^3}, \\ \sigma_{C7(cas1)}^2 &= \frac{1.644\pi S_0}{\omega_0^3}, \sigma_{C7(cas2)}^2 = \frac{1.414\pi S_0}{\omega_0^3}, \sigma_{C7(cas3)}^2 = \frac{0.755\pi S_0}{\omega_0^3} \end{aligned} \quad (3.55)$$

où, les $\sigma_{C7(cas1)}^2$, $\sigma_{C7(cas2)}^2$ et $\sigma_{C7(cas3)}^2$ désignent les carrés moyens du système primaire avec le dispositif $C7$ (AIGS-IVA) dans le cas 1, le cas 2 et le cas 3 de la rigidité négative, respectivement.

À partir du carré moyen résultant de la réponse du déplacement de la masse primaire en (3.55), le dispositif $C7$ (AIGS-IVA) démontre les plus petites réponses quadratiques moyennes du système primaire, qui traduit des meilleures performances de contrôle que les autres dispositifs $C5$ (IVA), $C6$ (NGS-IVA) et TID sous l'excitation aléatoire. Cependant, $C7$ (AIGS-IVA) avec une inertance amplifiée et la rigidité positive mise à la terre dans les trois cas du $C7$ (AIGS-IVA) montre également de meilleure performance sous l'excitation aléatoire du système primaire.

Afin d'obtenir des résultats plus réalistes, une excitation aléatoire de 50 secondes est construite, qui est composé de 5000 nombres aléatoires normalisés avec une valeur moyenne

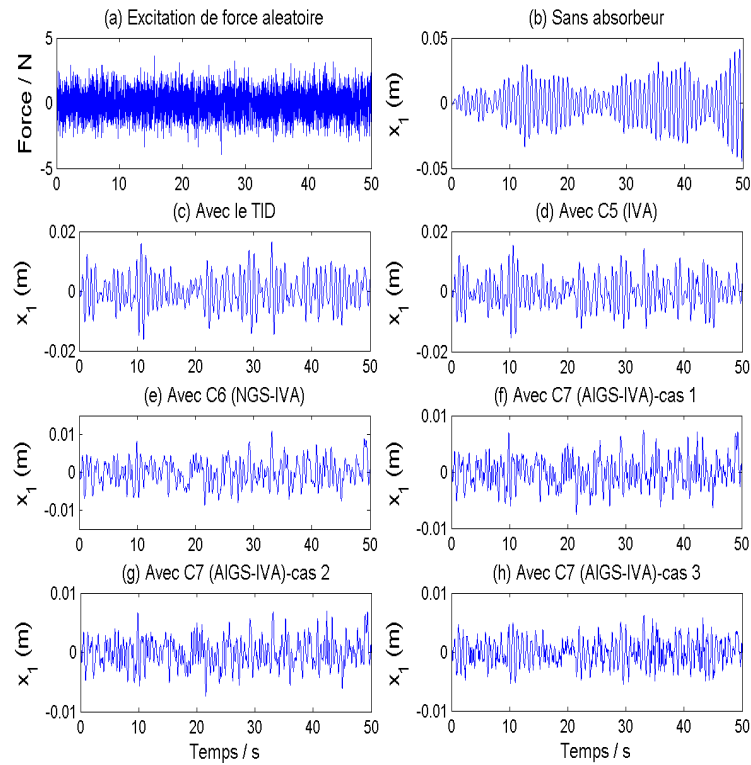


FIGURE 3.32 – L'historique temporel de l'excitation aléatoire et du déplacement du système primaire pour différents absorbeurs.

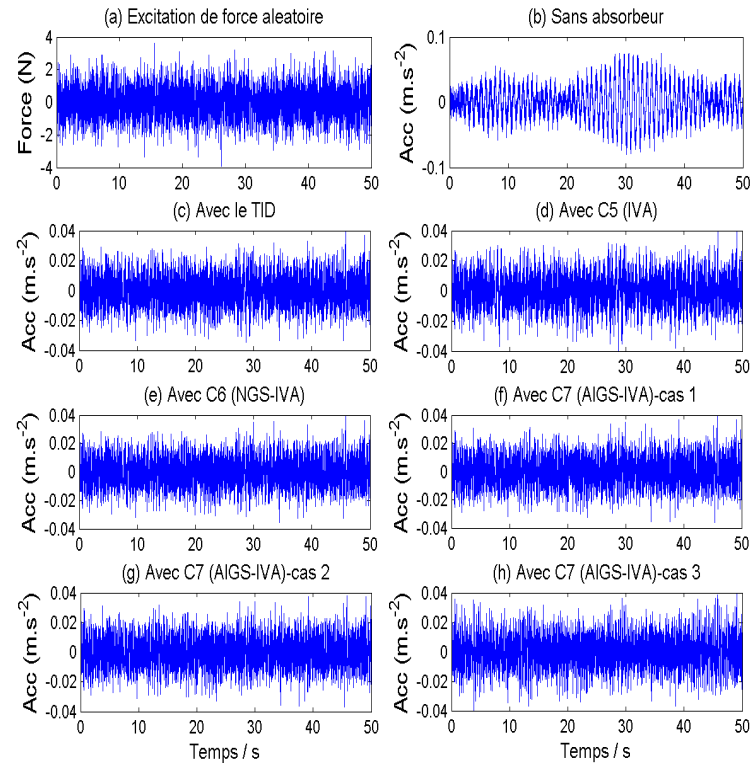


FIGURE 3.33 – L'historique temporel de l'excitation aléatoire et de l'accélération du système primaire pour différents absorbeurs.

et une variance unitaire nulles, respectivement. L'excitation aléatoire est représentée sur la Fig. 3.32a. Ici, nous prendrons également la masse primaire $m_0 = 1k_g$ et la rigidité

du système primaire $k_1 = 100$ N/m. Ensuite, les paramètres des absorbeurs dans cette section peuvent être calculés selon le Tableau 3.9 et résumé dans le Tableau 3.10.

Basé sur la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre sous les paramètres optimaux, la réponse d'historique de temps du système primaire sans absorbeur et avec différents absorbeurs considérés peut être obtenue. L'historique temporel de ces systèmes primaires est illustré sur les Figs. 3.32(b)-(h) en termes de déplacement de la structure primaire. les variances de réponse et les ratios de diminution pour les différents systèmes primaires avec différents absorbeurs sont résumés dans le Tableau 3.12 en cas de déplacement de la structure primaire.

À partir des Figs. 3.32(b)-(h) et le Tableau 3.12(a), on pourrait également conclure que *C7* (AIGS-IVA) dans ses trois cas est le système le plus efficace pour contrôler les déplacements verticaux de la structure primaire sous excitation de force aléatoire.

TABLE 3.12 – La variance et la diminution du déplacement et de l'accélération du système primaire.

(a) : Déplacement			
Modèles		Variance	Diminution (%)
Sans contrôle		2,0082e-04	
TID		2,5760e-05	87,17
<i>C5</i> (IVA)		2,4243e-05	87,93
<i>C6</i> (NGS-IVA)		1,1987e-05	94,03
<i>C7</i> (AIGS-IVA)	cas 1	7,1776e-06	96,42
	cas 2	6,6192e-06	96,70
	cas 3	4,2705e-06	97,87
(b) : Accélération			
Sans contrôle		4,0508e-04	
TID		1,0438e-04	74,23
<i>C5</i> (IVA)		1,1179e-04	72,40
<i>C6</i> (NGS-IVA)		1,0397e-04	74,33
<i>C7</i> (AIGS-IVA)	cas 1	1,0639e-04	73,74
	cas 2	1,0737e-04	73,49
	cas 3	1,1582e-04	71,41

La prise en compte de la protection des éléments non structuraux consiste à limiter l'accélération de la structure primaire sous excitation de force aléatoire comme à la Fig. 3.33(a). À partir des Figs. 3.33(b)-(h) et le Tableau 3.12(b), il est clairement montré que par rapport au système primaire sans contrôle, les systèmes primaires sous contrôle sont de très loin moins exposés aux vibrations. Cependant, les performances de *C7* (AIGS-IVA) dans le cas 3 sont légèrement inférieure à ceux des autres cas et homo-

logues $C6$ (NGS-IVA), $C5$ (IVA) et TID. Cela signifie que l'amplification de l'inertance conduit à une légère baisse de performance.

3.6 Conclusion

Cette section était réservée à la présentation des différents résultats de ces travaux, basés sur l'évaluation des performances de certains dispositifs de contrôle basés sur l'inertance. Beaucoup d'informations ont été notées. Par exemple, il peut exister plusieurs schémas de contrôle présentant des dynamiques variées et riches. De plus, les performances d'un système de contrôle peuvent changer selon la disposition de ses différents éléments mécaniques ou selon la forme de l'excitation d'entrée considérée. En générale, tous les systèmes de contrôle à base d'inertance ($C1-C7$) proposés dans cette étude se sont avérés plus performants que les amortisseurs conventionnels TMD et TDVA y compris l'amortisseur à inertance conventionnel TID. Pour les dispositions mécaniques avec rigidité négative ($C4$, $C6$ et $C7$), l'effet d'amortissement des vibrations a été plus significatif que dans le cas des dispositions ($C1$, $C2$, $C3$ et $C5$). Cependant, l'effet d'amplification de l'inertance a rendu la rigidité négative nulle ou positive donnant lieu à des performances plus améliorées de la disposition $C7$.

Conclusion Générale

Notre objectif dans le cadre de ce travail de recherche était de concevoir et d'évaluer les performances de quelques systèmes de suppression passif des vibrations à base d'inertier avec ou sans rigidité négative incorporée. Par conséquent, sept modèles $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$ et $C7$ en connexion série ou série-parallèle ont été identifiés et classés en deux groupes : les isolateurs comme $C1$, $C2$, $C3$ et $C4$ et les absorbeur comme $C5$, $C6$ et $C7$. De tous ces dispositifs, certains sont à raideur négative c'est-à-dire $C4$, $C6$ et $C7$. Une structure primaire (principale) à degré de liberté unique sous contrôle a été modélisée comme une structure de bâtiment à un étage excitée à sa base (cas de l'isolation des vibrations) ou excitée de force directement appliquée à la masse primaire (cas de l'absorption). Dans un premier temps, les équations du mouvement de la structure primaire sous contrôle ont été développées dans le domaine fréquentiel et les fonctions de transferts ont été dérivées pour usage dans les méthodes de conception basées sur la théorie des points fixes selon la H_∞ optimisation et la théorie de la H_2 optimisation. Cependant, la minimisation de la fonction de transfert de conformité (transfert de déplacement) acte pour la réduction des déplacements verticaux de la structure primaire, alors que la minimisation de la fonction de transfert de mobilité (transfert de vitesse) acte pour la réduction du bruit généré par la structure. Ensuite, les mêmes équations sont réécrites dans le domaine temporel pour visualiser l'évolution dans le temps de la dynamique du système primaire grâce à la méthode de Runge-Koutta du quatrième ordre.

Les objectifs de conception étant principalement de contrôler les mouvements indésirables de la structure primaire et limiter les bruits générés, les résultats sur la conception des dispositifs $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$ et $C7$ comme présentés dans ce chapitre 3 et analysés ont permis de montrer que :

★ Les performances de tous les systèmes présentés dans cette thèse s'améliorent au fur et à mesure que le rapport inertance/masse (noté δ ou μ) augmente. De plus, ce rapport massique peut prendre une valeur élevée sans toutefois augmenter la masse physique de l'ensemble du système. D'où l'avantage des systèmes à inertier contrairement aux amortisseurs de masse réglée TMDs ou amortisseurs dynamiques de vibration (DVAs). Cependant, l'inclusion d'un ressort à coefficient de raideur négative a contribué à améliorer de façon significative les performances de contrôle des dispositifs $C5$, $C6$ et $C7$ proposés dans ce travail de recherche. Pendant ce temps le dispositif à raideur négative reste tout de même difficile à réaliser. A cet effet, un mécanisme d'amplification de l'inertance a permis de rendre positive ou nulle la rigidité négative dans $C7$, ce qui a conduit à des

performances de contrôle encore plus améliorées.

★ Dans l'optimisation H_∞ sous excitation d'accélération harmonique de la base du système primaire, les dispositifs optimaux $C1$ et $C2$ peuvent réduire l'amplitude maximale des vibrations aux points fixes de 40% et 15,16% pour la fonction de transfert de conformité, respectivement, et par 45,32% et 10,53%, pour la fonction de transfert de mobilité, respectivement, par rapport à la TDVA. Dans l'optimisation H_2 , la configuration optimale $C2$ n'est applicable que dans la région $\delta < 0,12$. Pour cette raison, il n'a que été possible d'obtenir des solutions algébriques du critère d'optimisation H_2 pour $\delta < 0,12$. Concernant l'optimisation H_2 des dispositifs $C1$ et $C2$, les solutions obtenues en minimisant les fonctions de transferts de mobilité et de conformité ne différaient que légèrement, alors qu'elles différaient largement dans les solutions basées sur l'optimisation H_∞ , sauf pour le rapport d'amortissement. Cependant, les dispositifs optimaux $C1$ et $C2$ conçus sur la base de l'optimisation H_2 peuvent réduire la réponse quadratique moyenne du système primaire de 23% et 26,10% en cas de minimisation de la fonction de transfert de conformité, respectivement, et de 17,75% et 13,40% dans le cas de la fonction de transfert de mobilité, respectivement, par rapport à la TDVA optimale.

★ Sous excitation harmonique de la base du système primaire, $C4$ avec rigidité négative a présenté un meilleur contrôle des vibrations en termes de diminution du pic d'amplitude des vibrations de la masse primaire et l'élargissement de la bande passante de fréquences de suppression par rapport à TMD et $C3$, respectivement, pour le même rapport de massique μ . La comparaison a montré que, dans le cas d'une structure primaire excitée par accélération de la base, $C4$ avec rigidité négative peut réduire l'amplitude maximale des vibrations de la structure primaire de 67,53% et 65,53% et agrandir la bande passante de suppression de 49,84% et 48,58%, respectivement, par rapport à TMD et $C3$ lorsque $\mu = 0,05$. Alors que dans le cas de la structure primaire excitée par déplacement de la base, $C4$ peut réduire le pic d'amplitude de vibrations de la structure primaire de 80% et 79,8% et agrandir la bande passante de suppression 78% et 77,3%, respectivement, par rapport à TMD et $C3$ lorsque $\mu = 0,05$. Cependant, ces résultats ont montré que $C3$ reste supérieure à TMD quelque soit le rapport de masse donné

★ Pour un rapport d'inertance/masse μ donné, le changement du rapport d'amplification β du système s'est traduit par trois valeurs possibles de la rigidité optimale mise à la terre dans $C7$, c'est-à-dire négative quand $0 < \mu\beta^2 < 1/2$, nulle quand $\mu\beta^2 = 1/2$ et positive quand $1/2 < \mu\beta^2 < 2$. Après avoir étudié les performances de contrôle des dispositifs $C5$, $C6$ et $C7$ proposés y compris l'amortisseur à inerte réglé (TID) et leur comparaison, les résultats démontrent que $C7$ dans ses trois cas présente des meilleures performances de contrôle largement au-dessus de $C5$, $C6$ et TID, caractérisées par la plus large bande passante de suppression et la vibration minimale de l'amplitude du sys-

tème primaire contrôlé sous excitation de force harmonique. De plus, les performances de contrôle du modèle *C7* avec une rigidité positive est meilleur parmi ses trois cas. Bien que l'utilisation d'une inertance amplifiée dans le système *C7* peut augmenter la masse effective de l'inertance résultant des meilleures performances de contrôle, il y a une limite sur les valeurs possibles de ce rapport d'amplification et aucune valeur optimale.

★ Dans l'objectif d'avoir des résultats plus réalistes dans le cas d'excitation aléatoire, une excitation de 50 secondes est construite, ce qui est composée de 5000 nombres aléatoires normalisés avec une valeur moyenne nulle et variance unitaire, respectivement. Les modèles *C1*, *C2*, *C3*, *C4*, *C5*, *C6* et *C7* proposées dans ces travaux ont également montré un excellent avantage avec un bon effet de réduction des vibrations aléatoires. De plus, cet effet de réduction est plus accentué dans le cas des dispositions avec rigidité négative pour un petit rapport massique donné.

★ La réponse libre du système primaire sous excitation transitoire a été évaluée avec les dispositifs *C3*, *C4* et TMD, tandis que la réponse sous excitation sinusoïdale a été évaluée avec les dispositifs *C5*, *C6*, *C7* et TID, et des comparaisons ont été données. Dans les deux cas sur évoqués, les dispositifs *C3*, *C4*, *C5*, *C6* et *C7* par rapport à TMD et TID, respectivement, ont montré de meilleures performances de contrôle (en particulier *C4*, *C6* et *C7* avec rigidité négative) caractérisées par la plus petite amplitude de la réponse du système primaire et un temps de stabilisation plus court en particulier pour le cas de l'excitation transitoire.

Les résultats présentés dans ce travail de recherche pourrait fournir une base théorique pour la conception d'isolateurs ou d'absorbeur à base inerter avec ou sans rigidité négative. Cependant, les efforts des recherches futurs seront consacrés à l'investigation d'autres dispositifs de suppression passif des vibrations basées ou non sur l'inertre, avec ou sans rigidité négative, couplés à de nouveaux mécanismes d'amplification de masse pour un contrôle plus efficace de vibration. Leur applicabilité aux systèmes multiples degrés de liberté (MDLL) avec effet d'amortissement linéaire ou non-linéaire.

Bibliographie

- [1] A. Martelli, M. Forni, P. Clemente, Recent worldwide application of seismic isolation and energy dissipation and conditions for their correct use. In Proceedings on electronic key of the 15th World conference on earthquake engineering (15WCEE), Lisbon, Conf. prog. **52**, 24-28 (2012).
- [2] T. T. Soong, G. F. Dargush, Passive energy dissipation and active control. Structural Engineering Handbook. CRC Press LLC, Boca Raton. (1999)
- [3] B. F. Spencer Jr, S. Nagarajaiah, State of the art of structural control. J. Struct. Eng. **129** (7), 845-856 (2003).
- [4] C. C. Chang, Mass dampers and their optimal designs for building vibration control. Eng. Struct. **21**(5), 454-463 (1999).
- [5] O. Nishihara, T. Asami, Closed-form exact solution to hinfinty optimization of dynamic vibration absorber : II. Development of an algebraic approach and its application to a standard problem, Proc. Spie. **3989**, 500-511 (2000).
- [6] H. Frahm, Device for Damping Vibrations of Bodies, U.S. Patent No. **989958A**, (1909).
- [7] J. Ormondroyd and J.P. Den Hartog, The theory of the dynamic vibration absorber. ASME J. Appl. Mech. **50**(7), 9-22 (1928).
- [8] O. Nishihara, T. Asami, Closed-form solutions to the exact optimizations of vibration absorbers (minimizations of the maximum amplitude magnification factors), ASME J. Vib. Acoust. **124**(4), 576-582 (2002).
- [9] T. Asami, O. Nishihara, A.M. Baz, Analytical solutions to h1 and h2 optimization of dynamic vibration absorber attached to damped linear systems, ASME J. Vib. Acoust. **124**(2), 67-78 (2002).
- [10] T. Asami, O. Nishihara Analytical and experimental evaluation of an air damped dynamic vibration absorber : design optimizations of the three-element type model. ASME J. Vib. Acoust. **121**(3), 334e342 (1999).
- [11] M.Z. Ren, A variant design of the dynamic vibration absorber. J. Sound.Vib. **245**(4), 762e770 (2001).
- [12] X.R. Wang, Y.J. Shen and S.P. Yang H_∞ optimization of the grounded three-element type dynamic vibration absorber Chin. J. Dyn. Control **14**(05), 448e453 (2016).

- [13] S.M. Gutierrez, and H. Adeli, Tuned Mass Damper, *Arch. Comput Methods. Eng.* **20(4)**, 419-431 (2013).
- [14] B.G. Korenev and L.M. Reznikov, *Dynamic Vibration Absorbers : Theory and Technical Applications*. Wiley, New York (1993).
- [15] Y.J. Shen, H. Peng, X. Li and S. Yang, Analytically optimal parameters of dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Mech. Syst. Sig. Proc.* **85(15)**, 193-203 (2017).
- [16] C. Tributsch and Adam, Evaluation and analytical approximation of tuned mass damper performance in an earthquake environment. *Smart. Struct. Syst.* **10**, 155-179 (2012).
- [17] H. Anajafi and R.A. Medina, Comparison of the seismic performance of a partial mass isolation technique with conventional TMD and base-isolation systems under broad-band and narrow-band excitations. *Eng. Struct.* **158**, 110-123, (2018a)
- [18] H. Anajafi and R.A. Medina, Robust Design of a Multifloor Isolation System. *Struct. Cont. Health Monit.* **25(4)**, e2130 (2018b).
- [19] M. Abe and Y. Fujino, Dynamic Characterization of Multiple Tuned Mass Dampers and Some Design Formulas. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **23(8)**, 813-835 (1994).
- [20] L. Zuo, Effective and Robust Vibration Control Using Series Multiple Tuned-Mass-Dampers, *ASME J. Vib. Acoust.* **131(3)**, 031003 (2009).
- [21] H. Yamaguchi, N. Harnpornchai, Fundamental characteristics of multiple tuned mass dampers for suppressing harmonically forced oscillations. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **22(1)**, 51-62 (1993).
- [22] F. Ricciardelli, B. J. Vickery, Tuned vibration absorbers with dry friction damping. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **28(7)**, 707-723 (1999).
- [23] Y.J. Shen, X. Wang, S. Yang and H. Xing, Parameters optimization for a kind of dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Math. Prob. Eng. Jul. Art.* **9624325** (2016)
- [24] X.R. Wang, Y.J. Shen, S.P. Yang and H.J. Xing, Parameters optimization of three-element type dynamic vibration absorber with negative stiffness. *J. Vib. Eng.* **30(2)**, 177-184 (2017).
- [25] S. Zhou, C. Jean-Mistral and S. Chesne Closed-form solutions to optimal parameters of dynamic vibration absorbers with negative stiffness under harmonic and transient excitation. *J. Sound Vib.* **157-158**, 528-541 (2019).
- [26] H. Xiuchang, Z. Su and H. Hua, Optimal parameters for dynamic vibration absorber with negative stiffness in controlling force transmission to rigid foundation. *Inter. J. Mech. Sc.* **152**, 88-98 (2019)
- [27] MC Smith , Synthesis of mechanical networks : the inerter. *IEEE Trans. Aut. Cont.* **47(10)**, 1648-1662 (2002).

- [28] Q. Chen, Y. Wang, and Z. Zhao, A Novel Negative Stiffness Amplification System Based Isolation Method for the Vibration Control of Underground Structures, **10(16)**, 5421, (2020).
- [29] D.T.R. Pasala, A.A. Sarlis, S. Nagarajaiah, A.M. Reinhorn, M.C. Constantinou, and D. Taylor, Adaptive negative stiffness : new structural modification approach for seismic protection. *J. Struct. Eng.* **139(7)**, 1112-1123 (2013).
- [30] T. Asami, M. Yand, T. Ise, Optimal design of doublemass dynamic vibration absorbers minimizing the mobility transfer function. *J. Vib. Acoust.* **40**,061012–061014 (2018).
- [31] T. Asami, Erratum of Optimal Design of Double-Mass Dynamic Vibration Absorbers Arranged in Series or in Parallel. *ASME J. Vib. Acoust.* **140(2)**, 027001 (2018).
- [32] D. J. Inman, *Engineering vibration.* **3**, Prentice Hall New Jersey (2008).
- [33] D. J. Inman, *Vibration with control.* John Wiley & Sons (2017).
- [34] R. E. D. Bmop, A. G. Parkinson, and J. W. Pendered, Linear analysis of transient vibration. *J. Sound. Vib.* **9(2)**, 313–337 (1969).
- [35] S. S. Rao and F. F. Yap, *Mechanical vibrations.* **4**, Prentice Hall Upper Saddle River (2011).
- [36] H. P. Y. Hitch, Aircraft ground dynamics, *Vehicle Syst. Dyn.* **10(4-5)**, 319–332 (1981).
- [37] B. Milwitzky and F. E. Cook, Analysis of landing-gear behavior. *Tech. Rep.* **1154**, NACA (1953).
- [38] N.S. Currey, *Aircraft and inggear design : prin. prac.* AIAA Educ. Ser. Washington (1988).
- [39] D. W. Young, Aircraft landing gears—the past, present and future. *Proc. Inst. Mech. Eng. Part D : Transp. Eng.* **200(2)**, 75–92 (1986).
- [40] J. H. Walls, Investigation of the air-compression process during drop tests of an oleo-pneumatic landing gear. *Tech. Rep. TN 2477*, NACA (1951).
- [41] J. H. Walls, An experimental study of orifice coefficients, internal strut pressures, and loads on a small oleo-pneumatic shock strut. *Tech. Rep. TN 3426*, NACA (1955).
- [42] B. Milwitzky and F. E. Cook, Effect of interaction on landing-gear behavior and dynamic loads in a flexible airplane structure. *Tech. Rep.* **1278**, NACA (1955).
- [43] M. R. Svinkin, Predicting soil and structure vibrations from impact machines. *J. Geotech. Geoenv. Eng.* **128(7)**, 602–612 (2002).
- [44] T. P. Waters, Y. Hyun, and M. J. Brennan, The effect of dual-rate suspension damping on vehicle response to transient road inputs. *J. Vib. Acoust.* **131(1)**, 011004 (2009).
- [45] J.N.YangandW.J.Trapp, Reliability analysis of aircraft structures under random loading and periodic inspection. *AIAA J.* **12(12)**, 1623–1630 (1974).

- [46] H. Haddad Khodaparast, G. Georgiou, J. Cooper, L. Riccobene, S. Ricci, G. Vio, and P. Denner, Efficient worst case 1-cosine gust loads prediction. *J. Aeroelas. Struct. Dyn.* **2(3)** (2012).
- [47] P. Xiang and A. Nishitani, Optimum Design and Application of Non-traditional Tuned Mass Damper toward Seismic Responses Control with Experimental Test Verification. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **44**, 2199-2220 (2015).
- [48] J. S. Rao and R. V. Dukkipati, Mechanism and machine theory.
- [49] M. Klasztorny, Reduction of steady-state forced vibrations of structures with dynamic absorbers. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **24(8)**, 155–1172 (1995).
- [50] D. J. P. Hartog, Mechanical vibrations. McGraw-Hill Book Company (1956).
- [51] Y. Yu, N. G. Naganathan, and R. V. Dukkipati, A literature review of automotive vehicle engine mounting systems. *Mech. Mach. Theory.* **36(1)**, 123–142 (2001).
- [52] M. S. Foumani, A. Khajepour, and M. Durali, A new high-performance adaptive engine mount. *Modal Analysis.* **10(1)**, 39–54 (2004).
- [53] R. S. Barbosa, Vehicle dynamic response due to pavement roughness. *J. Braz. Soci. Mech. Sci. Eng.* **3(3)**, 302–307 (2011).
- [54] J. Van Der Tempel, Design of support structures for offshore wind turbines. PhD thesis, TU Delft, Delft University of Technology (2006).
- [55] T. Asami, and O. Nishihara, H_2 Optimization of the Three-Element Type Dynamic Vibration Absorbers. *ASME J. Vib. Acoust.* **124(4)**, 583–592 (2002).
- [56] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik and A. Jeffrey, Table of Integrals Series, and Products, Academic Press, Amsterdam, The Netherlands (2007).
- [57] H. M. James, N. B. Nichols and R. S. Phillips, eds, Theory of Servomechanisms, McGraw-Hill, New York. (1947)
- [58] S.H. Crandall and W.D. Mark Random vibration in mechanical systems. New York : Academic Press.(1963).
- [59] J.E. Brock, A note on the damped vibration absorber. *J. App. Mech.* **13(4)**, A-284 (1946).
- [60] J.P. Den Hartog, Mechanical Vibrations. 4th Edition. McGraw-Hill. New York (1956).
- [61] J.P. Den Hartog Mechanical Vibrations. Dover Pub. Inc (1985).
- [62] S. Krenk Frequency analysis of the tuned mass damper. *J. app. Mech.* **72(6)**, 936-942 (2005).
- [63] O. Nishihara and T. Asami, Closed-form solutions to the exact optimizations of dynamic vibration absorbers (minimizations of the maximum amplitude magnification factors). *J. Vib. Acoust.* **124(4)**, 576-582 (2002).
- [64] T. Asami, O. Nishihara and A. M. Baz, Analytical solutions to H_∞ and H_2 optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems. *J. Vib. Acoust.* **124(2)**, 284-295 (2002).

- [65] A. Y. T. Leung and H. Zhang, Particle swarm optimization of tuned mass dampers. *Eng. Struct.* **31(3)**, 715-728 (2009).
- [66] A.G. Thompson, Optimum tuning and damping of a dynamic vibration absorber applied to a force excited and damped primary system. *J. Sound. Vib.* **77**, 403-15 (1981).
- [67] A. Soom, M. Lee, Optimal design of linear and nonlinear vibration absorbers for damped systems. *ASME J. Vib. Acoust. Stress. Reliability in Design.* **105**, 112-118 (1983).
- [68] E. O. Ayorinde and G. B. Warburton, Minimizing structural vibrations with absorbers. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **8(3)**, 219-236 (1980).
- [69] G. B. Warburton, Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **10(3)**, 381-401 (1982).
- [70] S. V. Bakre and R. S. Jangid, Optimum parameters of tuned mass damper for damped main system. *Struct. Cont. Health Monit.* **14(3)**, 448-470 (2007).
- [71] N. Hoang and P. Warnitchai, Design of multiple tuned mass dampers by using a numerical optimizer. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **34(2)**, 125-144 (2005).
- [72] J. Salvi and E. Rizzi, Minimax optimization of Tuned Mass Dampers under seismic excitation. In *EURODYN 2011 : 8th Inter. Conf. Struct. Dyn. Leuven, Belgium.* **4-6 July**, 1892-1899 (2011).
- [73] A. Ghosh and B. Basu, A closed-form optimal tuning criterion for TMD in damped structures. *Struct. Cont. Health Monit.* **14(4)**, 681-692 (2007).
- [74] S. Krenk and J. Høgsberg, Tuned mass absorbers on damped structures under random load. *Prob. Eng. Mech.* **23(4)**, 408-415 (2008).
- [75] F. Sadek, B. Mohraz, A. W. Taylor and R. M. Chung, A method of estimating the parameters of tuned mass dampers for seismic applications. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **26(6)**, 617-636 (1997).
- [76] R. Rana and T. T. Soong, Parametric study and simplified design of tuned mass dampers. *Eng. Struct.* **20(3)**, 193-204 (1998).
- [77] C. Moutinho, An alternative methodology for designing tuned mass dampers to reduce seismic vibrations in building structures. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **41(14)**, 2059-2073 (2012).
- [78] M. De Angelis, S. Perno and A. Reggio, Dynamic response and optimal design of structures with large mass ratio TMD. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **41(1)**, 41-60 (2012).
- [79] K. Liu and J. Liu, The damped dynamic vibration absorbers : revisited and new result. *J. Sound Vib.* **284(3)**, 1181-1189 (2005).
- [80] Y. L. Cheung and W. O. Wong, H_∞ optimization of a variant design of the dynamic vibration absorber-revisited and new results. *J. Sound. Vib.* **330(16)**, 3901-3912 (2011).

- [81] C. L. Lee, Y. T. Chen, L. L. Chung and Y. P. Wang, Optimal design theories and applications of tuned mass dampers. *Eng. Struct.* **28(1)**, 43-53 (2006).
- [82] F. Rüdinger, Optimal vibration absorber with nonlinear viscous power law damping and white noise excitation. *J. Eng. Mech.* **132(1)**, 46-53 (2006).
- [83] N. Hoang, Y. Fujino and P. Warnitchai, Optimal tuned mass damper for seismic applications and practical design formulas. *Eng. Struct.* **30(3)**, 707-715 (2008).
- [84] M. Q. Feng and A. Mita, Vibration control of tall buildings using mega subconfiguration. *J. Eng. Mech.* **121(10)**, 1082-1088 (1995).
- [85] E. Matta and A. De Stefano, Robust design of mass-uncertain rolling-pendulum TMDs for the seismic protection of buildings. *Mech. Syst. Sig. Proces.* **23(1)**, 127-147 (2009a).
- [86] E. Matta and A. De Stefano, Seismic performance of pendulum and translational roof-garden TMDs. *Mech. Syst Sig. Proces.*, 23(3), 908-921 (2009).
- [87] F. Yi and S. J. Dyke, Structural control systems : performance assessment. *Amer. Cont. Conf.* **1**, 14-18, IEEE (2000).
- [88] N. Jalili, A comparative study and analysis of semi-active vibration-control systems. *J. Vib. Acoust.* **124(4)**, 593-605 (2002)
- [89] A. Kras, P. Gardonio, Active vibration control unit with a flywheel inertial actuator. *J. Sound. Vib.* **464**, 114987 (2020).
- [90] N. Alujević, D. Čakmak, H. Wolf, M. Jokić, Passive and active vibration isolation systems using inerter. *J. Sound. Vib.* **418**, 163-183 (2018).
- [91] W. E. Howell, J. R. Mcgehee, R. H. Daugherty and W. A. Vogler, F-106Bairplane active control landing gear drop test performance. *Tech. Rep. TM 102741*, NASA (1990).
- [92] L. G. Horta, R. H. Daugherty, and V. J. Martinson, Modeling and validation of a navy a6-intruder actively controlled landing gear system. *Tech. Rep. TP 209124*, NASA (1999).
- [93] N. Jalili, A comparative study and analysis of semi-active vibration-control systems. *J. Vib. Acoust.* **124(4)**, 593-605 (2002).
- [94] G. Pouly, T.-H. Huynh, J.-P. Lauffenburger and M. Basset, Indirect fuzzy adaptive control for active shimmy damping. *IFAC Proceedings.* **41(2)**,15058-15063 (2008).
- [95] D. Karnopp, M. J. Crosby, and R. Harwood, Vibration control using semi-active force generators. *J. Eng. Indust.* **96(2)**, 619-626 (1974).
- [96] N. Alujević, H. Wolf, P. Gardonio and I. Tomac, Stability and performance limits for active vibration isolation using blended velocity feedback. *J. Sound. Vib.* **330(21)**, 4981-4997 (2011).
- [97] A. Mansour, Karkoub and Z. Mohamed, Active/Semi-active suspension control using magnetorehological actuators. *Int. Sc. Syst.* **37(1)**, 35-44 (2006).

- [98] J. Nader, A comparative study and analysis of semi-active vibration-control systems. *J. Vib. Acous.* **124**, 593-605 (2002).
- [99] F. A. Firestone, A new analogy between mechanical and electrical systems. *J. Acoust. Soci. Amer.* **4(3)**, 249–267 (1933).
- [100] C. Li, M. Liang, Y. Wang and Y. Dong, Vibration suppression using twoterminal flywheel. Part I : Modeling and characterization. *J. Vib. Cont.* **18(8)**, 1096-1105 (2011).
- [101] C. Papageorgiou and M. C. Smith, Laboratory experimental testing of inerters. In *Decision and Control, 2005 and 2005 Europ. Cont. Conf. CDCECC' 05. 44th IEEE Conf.* 3351-3356 (2005).
- [102] C. Li, M. Liang, Y. Wang and Y. Dong, Vibration suppression using twoterminal flywheel. Part II : application to vehicle passive suspension. *J. Vib. Cont.* **18(8)**, 1353-1365 (2011).
- [103] S. Evangelou, R. S.Sharp and M. C. Smith, Steering compensation for high-performance motorcycles. In *Decision and Control. CDC. 43rd IEEE Conf.* **(1)**, 749-754 (2004).
- [104] S. J. Swift, M. C. Smith, A. R. Glover, C. Papageorgiou, B. Gartner and N.E. Houghton, Design and modelling of a fluid inerter. *Inter. J. Cont.* **86(11)**, 2035-2051 (2013).
- [105] F. C. Wang, M. F. Hong and T. C. Lin, Designing and testing a hydraulic inerter. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : J. Mech. Eng. Sci.* **225(1)**, 66-72 (2011).
- [106] X. Liu, J. Z. Jiang, B. Titurus, and A. Harrison, Model identification methodology for fluid-based inerters. *Mech. Syst. Sig. Proces.* **(106)**, 479–494 (2018).
- [107] A. Gonzalez-Buelga, I. F. Lazar, J. Z. Jiang, S. A. Neild and D. J. Inman, Assessing the Effect of Nonlinearities on the Performance of a Tuned Inerter Damper : Effect of Nonlinearities on a Tuned Inerter Damper Performance. *Struct. Control Health Monit.* **24(3)**, e1879 (2017).
- [108] K. Ikago, K. Saito and N. Inoue, Seismic Control of Single-Degreeof- Freedom Structure Using Tuned Viscous Mass Damper : The Tuned Viscous Mass Damper. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* **41(3)**, 453–474 (2012).
- [109] Y. Sugimura, W. Goto, H. Tanizawa, K. Saito and T. Nimomiya, Response Control Effect of Steel Building Structure Using Tuned Viscous Mass Damper. *15th World Conf. Earthquake Eng. (WCEE)*, Lisbon, Portugal, Sept. 24–28 (2012).
- [110] M. Z. Chen, Y. Hu, L. Huang and G. Chen, Influence of inerter on natural frequencies of vibration systems. *J. Sound. Vib.* **333(7)**, 1874-1887 (2014).
- [111] J.-S. Hwang, J.Kim, and Y.-M. Kim, Rotational Inertia Dampers With Toggle Bracing for Vibration Control of a Building Structure. *Eng. Struct.* **29(6)**,1201–1208 (2007).

- [112] I. Takewaki, S. Murakami, S. Yoshitomi and M. Tsuji, Fundamental mechanism of earthquake response reduction in building structures with inertial dampers. *Struct. Control and Health Monit.* **19(6)**, 590-608 (2012).
- [113] A. Ogawa and K. Adachi, Theoretical analysis of a novel planetarygear type inerter for the torsional vibration suppression capability of automotive drive train system in ASME 2017 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Amer. Soci. Mech. Eng, V013T01A001–V013T01A001 (2017).
- [114] F.-C. Wang and H.-A. Chan, Vehicle suspensions with a mechatronic network strut. *Vehicle Syst. Dyn.* **49(5)**, 811–830 (2011).
- [115] X. Liu, J. Z. Jiang, B. Titurus, and A. Harrison, Model identification methodology for fluid-based inerters. *Mech. Syst. Sig. Proces.* **106**, 479–494 (2018).
- [116] S. Y. Zhang, J. Z. Jiang, and S. A. Neild, Passive vibration control : A structure–immittance approach. *Proceedings of the Royal Society A.* **73(2201)**, 20170011 (2017).
- [117] F.-C. Wang, C.-W. Chen, M.-K. Liao, and M.-F. Hong, Performance analyses of building suspension control with inerters in 46th IEEE Conf. Decision and Control, 3786–3791, IEEE, (2007).
- [118] I. F. Lazar, S. A. Neild and D. J. Wagg, Using an inerter-based device for structural vibration suppression. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* **43(8)**, 1129–1147 (2014).
- [119] Y. Hu, M. Z.Q. Chen, Z. Shu and L. Huang, Analysis and optimization for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution. *J. sound. Vib.* **333(3)**, 707-715 (2015).
- [120] J. E. Storer, *Passive network synthesis*. McGraw-Hill, New York, (1957).
- [121] M. E. Van Valkenburg, *Introduction to modern network synthesis*. Wiley, New York, (1965).
- [122] R. Bott and R. Duffin, Impedance synthesis without use of transformers. *J. App. Phy.* **20(8)**, 816–816 (1949).
- [123] S. Evangelou, D. J. N. Limebeer, R. S. Sharp, and M. C. Smith, Mechanicalsteering compensators for high-performance motorcycles. *J. of App. Mech.* **4(2)**, 332–346 (2007).
- [124] S. Y. Zhang, J. Z. Jiang, and S. A. Neild, Optimal configurations for a linear vibration suppression device in a multi-storey building. *Struc. Control. Health. Monit.* **24(3)**(2017).
- [125] C. Papageorgiou and M. C. Smith, Positive real synthesis using matrix inequalities for mechanical networks : Application to vehicle suspension. *IEEE Transac. Control. Syst. Tech.* **14(3)**, 423–435 (2006).
- [126] F.-C. Wang, M.-K. Liao, B.-H. Liao, W.-J. Su, and H.-A. Chan, The performance improvements of train suspension systems with mechanical networks employing inerters. *Vehicle. Sys. Dyn.* **47(7)**, 805–830 (2009).

- [127] J. Z. Jiang and M. C. Smith, Regular positive-real functions and five-element network synthesis for electrical and mechanical networks. *IEEE Transac. Aut. Control.* **56(6)**, 1275–1290 (2011).
- [128] J. Z. Jiang and M. C. Smith, Series-parallel six-element synthesis of biquadratic impedances. *IEEE Transac. Circuits. Syst. I.* **59(11)**, 2543–2554 (2012).
- [129] J. Z. Jiang and M. C. Smith, On the theorem of reichert. *Syst. Control. Letters.* **61(12)**, 1124–1131 (2012).
- [130] J. S. Mcbeath, Shocks to the system. Racecar Engineering, (2011).
- [131] University of Cambridge, Secrets of the inerter revealed. [http :www.cam.ac.uk /re-search /news /secrets-of-the-inerter-revealed](http://www.cam.ac.uk/research/news/secrets-of-the-inerter-revealed).
- [132] M. C. Smith and F.-C. Wang, Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters. *Vehicle Syst. Dyn.* **42(4)**, 235–257 (2004).
- [133] F. Scheibe and M. C. Smith, Analytical solutions for optimal ride comfort and tyre grip for passive vehicle suspensions. *Vehicle Syst. Dyn.* **47(10)**, 1229–1252 (2009).
- [134] Y. Hu, M. Z. Q. Chen, and Z. Shu, Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements. *J. Sound. Vib.* **333(8)**, 2212–2225 (2014).
- [135] F.-C. Wang and W.-J. Su, Impact of inerter nonlinearities on vehicle suspension control. *Vehicle Syst. Dyn.* **46(7)**, 575–595 (2008).
- [136] Y. Shen, L. Chen, Y. Liu, and X. Zhang, Influence of fluid inerter nonlinearities on vehicle suspension performance. *Advances in Mech. Eng.* **9(11)**, 1687814017737257 (2017).
- [137] F.-C. Wang, C.-H. Yu, M.-L. Chang, and M. Hsu, The performance improvements of train suspension systems with inerters. In *45th IEEE Conf. Decision and Control*, 1472–1477 (2006).
- [138] F.-C. Wang and M.-K. Liao, The lateral stability of train suspension systems employing inerters. *Vehicle Syst. Dyn.* **48(5)**, 619–643, (2010).
- [139] J. Z. Jiang, A. Z. Matamoros-Sanchez, R. M. Goodall, and M. C. Smith, Passive suspensions incorporating inerters for railway vehicles. *Vehicle Syst. Dyn.* **50(1)**, 263–276 (2012).
- [140] J. Z. Jiang, A. Z. Matamoros-Sanchez, A. Zolotas, R. M. Goodall, and M. C. Smith, Passive suspensions for ride quality improvement of two-axle railway vehicles. *Proc. Inst. Mech. Eng. Part F : J. Rail. Rapid Transit.* **229(3)**, 315–329 (2015).
- [141] A. Z. Matamoros-Sanchez and R. M. Goodaoll, Applications of the inerter in railway vehicle suspension. In *UKACC Inter. Conf. Control.* **IEEE**, 555–560 (2014).
- [142] I. Takewaki, S. Murakami, S. Yoshitomi, and M. Tsuji, Fundamental mechanism of earthquake response reduction in building structures with inertial dampers. *Struc. Control. Health. Monit.* **19(6)**, 590–608 (2012).

- [143] T. Furuhashi and S. Ishimaru, Mode control seismic design with dynamic mass. In 5th Inter. Conf. Urban. Earth. Eng. (2008).
- [144] K. Ikago, Y. Sugimura, K. Saito, and N. Inoue, Modal response characteristics of a multiple-degree-of-freedom structure incorporated with tuned viscous mass dampers. *J. Asian Arch. Build. Eng.* **11**(2), 375–382 (2012).
- [145] L. Marian and A. Giaralis, Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems. *Prob. Eng. Mech.* **38**, 156–164 (2014).
- [146] A. Giaralis and F. Petrini, Wind-induced vibration mitigation in tall buildings using the tuned mass-damper-inerter. *J. Struc. Eng.* **143**(9), 04017127 (2017).
- [147] H. Garrido, O. Curadelli, and D. Ambrosini, Improvement of tuned mass damper by using rotational inertia through tuned viscous mass damper. *Eng. Struc.* **56**, 2149–2153 (2013).
- [148] R. M. Hessabi and O. Mercan, Investigations of the application of gyro-mass dampers with various types of supplemental dampers for vibration control of building structures. *Eng. Struc.* **126**, 174–186 (2016).
- [149] I. F. Lazar, S. A. Neild, and D. J. Wagg, Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers. *Eng. Struc.* **122**, 62–71 (2016).
- [150] J. Luo, J. H. G. Macdonald, and J. Z. Jiang, Use of inerter-based vibration absorbers for suppressing multiple cable modes. *Proc. Eng.* **199**, 1695–1700 (2017).
- [151] L. Sun, D. Hong, and L. Chen, Cables interconnected with tuned inerter damper for vibration mitigation. *Eng. Struc.* **151**, 57–67 (2017).
- [152] X.-J. Zhang, M. Ahmadian, and K.-H. Guo, On the benefits of semi-active suspensions with inerters. *Shock and Vib.*, vol. **19**(3), 257–272 (2012).
- [153] M. Z. Q. Chen, Y. Hu, C. Li, and G. Chen, Performance benefits of using inerter in semiactive suspensions. *IEEE Transac. Control. Syst. Tech.* **23**(4), 1571–1577 (2015).
- [154] P. Li, J. Lam, and K. C. Cheung, Control of vehicle suspension using an adaptive inerter. *Proc. Inst. Mech. Eng., Part D : J. Auto. Eng.* **229**(14), 1934–1943 (2015).
- [155] A. Z. Matamoros-Sanchez and R. M. Goodall, Novel mechatronic solutions incorporating inerters for railway vehicle vertical secondary suspensions. *Vehicle Syst. Dyn.* **53**(2), 113–136 (2015).
- [156] M. Zilletti, Feedback control unit with an inerter proof-mass electrodynamic actuator. *J. Sound. Vib.* **369**, 16–28 (2016).
- [157] A. G. Piersol and T. L. Paez, *Harris’ Shock and Vibration Handbook* (6th ed.). New York : McGraw-Hill, (2010).
- [158] T. Asami, Y. Mizukawa and T. Ise, Optimal design of doublemass dynamic vibration absorbers minimizing the mobility transfer function. *J. Vib Acoust.* **40**, 061012–061014 (2018).

- [159] J. L. Shearer, A. T. Murphy and H. H. Richardson, Introduction to system dynamics. Reading, MA : Addison-Wesley (1967).
- [160] E. L. Hixson, Mechanical impedance. In C.M. Harris (Ed.), Shock and vibration handbook (3rd ed.), New York, McGraw-Hill (ch. 10) (1988).
- [161] M. Z. Q. Chen, Y. Hu, L. Huang and G. Chen, Influence of inerter on natural frequencies of vibration systems. *J. Sound. Vib.* **333(7)**, 1874–1887 (2014).
- [162] H. Guo, H. Li, W. D. Chen and X. B. Zhou, A quasi-zero-stiffness vibration isolation system based on unsymmetric composite laminate (in Chinese). *J. Vib. Shock.* **37(20)**, 222-227 (2018).
- [163] M. Neubauer, R. Oleskiewicz, K. Poop and T. Kryzynski, Optimization of damping and absorbing performance of shunted piezo elements utilizing negative capacitance. *J. Sound. Vib.* **298**, 84-107 (2006).
- [164] M. Neubauer and J. Wallaschek, Vibration damping with shunted piezoceramics : Fundamentals and technical applications. *Mech. Syst. Signal Proces.* **36**, 36-52 (2013).
- [165] U. A. Korde , M. A. Wickersham and S. G. Carr, The effect of a negative capacitance circuit on the out-of-plane dissipation and stiffness of a piezoelectric membrane. *Smart Mat. Struc.* **17(3)**, 035017 (2018).
- [166] A. Saha and S. K. Mishra, Adaptive Negative Stiffness Device based nonconventional Tuned Mass Damper for seismic vibration control of tall buildings. *Soil. Dyn. Earth. Eng.* **126**, 105767 (2019).
- [167] A. A. Sarlis, D. T. R. Pasala, M. C. Constantinou, A. M. Reinhorn, S. Nagarajaiah, and D. P. Taylor, Negative stiffness device for seismic protection of structures, *J. Struc. Eng.* **139(7)**, 1124-1133 (2013).
- [168] X. Shi and S. Zhu, A comparative study of vibration isolation performance using negative stiffness and inerter dampers. *J. Franklin. Inst.* 356(14), 7922-7946 (2019).
- [169] M. Wang, F.-f. Sun, J.-q. Yang, and S. Nagarajaiah, Seismic protection of SDOF systems with a negative stiffness amplifying damper. *Eng. Struc.* 190, 128-141 (2019).
- [170] A. Gioacchino and F. Giuseppe Improved inerter-based vibration absorbers. *Inter. J. Mach. Sc.* **192**, 106087 (2020).
- [171] T.D. Le, K.K. Ahn, Experimental investigation of a vibration isolation system using negative stiffness structure. *Int J. Mech. Sci.* **70**, 99–112 (2013).
- [172] X. Wang, H. Liu, Y. Chen, P. Gao, Beneficial stiffness design of a high-static-low-dynamic-stiffness vibration isolator based on static and dynamic analysis. *Int. J. Mech. Sci.* **142(143)**, 235–44(2018).
- [173] X. Sun, S. Zhang, J. Xu, Parameter design of a multi-delayed isolator with asymmetrical nonlinearity. *Int. J. Mech. Sci.* **138(139)**, 398–408 (2018).
- [174] Y. Wang, X. Jing , H. Dai, F. Li, Subharmonics and ultra-subharmonics of a bio-inspired nonlinear isolation system. *Int. J. Mech. Sci.* **152**, 167–84 (2019).

- [175] X. Shi, S. Zhu, Magnetic negative stiffness dampers. *Smart. Mater. Struct.* **24(7)**, 072002(2015).
- [176] F. Zhang, S. Shao, Z. Tian, M. Xu, S. Xie, Active-passive hybrid vibration isolation with magnetic negative stiffness isolator based on maxwell normal stress. *Mech. Syst. Sig. Process.* **123** :244–63 (2019).
- [177] Mizuno T, Toumiya T, Takasaki M. Vibration isolation system using negative stiffness. *JSME Int J Ser C Mech Syst Mach Elem Manuf* 2003 ;46(3) :807–12. doi : 10.1299/jsmec.46.807 .
- [178] T.B. Djuitchou Yaleu1, J. Metsebo, B. R. Nana Nbandjo1, P. Woafu, Effect of Thermal and High Static Low Dynamics Stiffness Isolator with the Auxiliary System on a Beam Subjected to Traffic Loads. *J. Vib. Eng. & Tech.* doi.org/10.1007/s42417-021-00399-3.
- [179] H. Sonfack Bouna, B. R. Nana Nbandjo, P. Woafu, Isolation performance of a quasi-zero stiffness isolator in vibration isolation of a multi-span continuous beam bridge under pier base vibrating excitation. *Non. Dyn.* doi.org/10.1007/s11071-020-05580-z.
- [180] I.A. Antoniadis, S.A. Kanarachos, K. Gryllias, I.E. Sapountzakis, KDamping : a stiffness based vibration absorption concept. *J Vib Control* **24(3)**,588–606 (2018).
- [181] X. Huang, Z. Su, H. Hua, Application of a dynamic vibration absorber with negative stiffness for control of a marine shafting system. *Ocean Eng.* **155**, 131–43 (2018).
- [182] N. Attary, M. Symans, S. Nagarajaiah, A.M. Reinhorn, M.C. Constantinou, A.A. Sarlis, D.T.R. Pasala, D.P. Taylor, Experimental shake table testing of an adaptive passive negative stiffness device within a highway bridge model. *Earth. Spect.* **31(4)**, 2163-2194 (2015).
- [183] Zhipeng Zhao , Qingjun Chen , Xiuyan Hu , Ruifu Zhang, Enhanced energy dissipation benefit of negative stiffness amplifying, *Int. J. of Mech. Sci. dampers* **240**, 107934 (2023).
- [184] T. Asami, T. Wakasono, K. Kameoka, M. Hasegawa and H. Sekiguchi, Optimum design of dynamic absorbers for a system subjected to random excitation. *JSME Inter. J. Series III.* **34(2)**, 218–226 (1991).
- [185] Y. L. Cheung and W. O. Wong, H_2 optimization of a non-traditional dynamic vibration abosorber for vibration control of structures under random force excitation. *J. Sound. Vib.* **330(6)**, 1039–1044 (2011).
- [186] J. C. Doyle, B. A. Francis and A. R. Tannenbaum et al., *Feedback Control Theory.* Oxford : Maxwell Macmillan Int, (1992).
- [187] Y. Kun and P. Nyangi, H_∞ Optimization of Tuned Inerter Damper with Negative Stiffness Device Subjected to Support Excitation. *Shock. Vib.* 7608078 (2020)

Annexe

Les expressions des paramètres optimaux présentés dans le document principale pour tous les dispositifs ont été dérivées sur la base de la théorie du point fixe [60, 61]. Ici, une structure 1DDL avec un $C1$ (SPIS) ou un $C4$ (NSPIS), respectivement, est utilisée comme exemple pour démontrer les processus de dérivation des rapports de rigidités, de fréquences et d'amortissements pour un rapport de masse donné. $C1$ (SPIS) démontre le cas de systèmes à deux points fixes, tandis que $C4$ (NSPIS) démontre le cas des systèmes à trois points fixes et avec rigidité négative en particulier.

Annexe A1 : paramètres optimaux de $C1$ minimisant les fonctions de transferts de conformité et de mobilité

a) Conception optimale de $C1$ (SPIS) pour minimiser la fonction de transfert de conformité

Pour la configuration $C1$ minimisant la fonction de transfert de conformité, en notant

$$\begin{cases} A = 2\lambda q \\ B = 1 - \delta\lambda q^2 \\ C = 2q(1 + \lambda - \lambda q^2) \\ D = 1 - (1 + \delta + \delta\lambda)q^2 + \delta\lambda q^4 \end{cases}, \quad (\text{A.56})$$

le rapport d'amplitude $|X_1/A_g|$ de la fonction de transfert de déplacement sans dimension peut être réécrit comme

$$\left| \frac{X_1}{A_g} \right|^2 = \frac{A^2\zeta^2 + B^2}{C^2\zeta^2 + D^2}. \quad (\text{A.57})$$

Dans les courbes de normalisation d'amplitude du système principal, toutes les courbes passent par deux points indépendants de l'amortissement. À titre d'illustration, la Fig. A.0.1 représente la grandeur $|X_1/A_g|$ dans l'équation (A.57) pour plusieurs valeurs du rapport d'amortissement ζ et pour des valeurs fixes de δ et λ . Évidemment, il existe deux points stationnaires, désignés par P et Q , où la magnitude $|X_1/A_g|$ des courbes amplitude-fréquence se coupent pour toutes les valeurs de rapport d'amortissement ζ .

L'emplacement des points P et Q sur l'axe des fréquences peut être trouvé en consi-

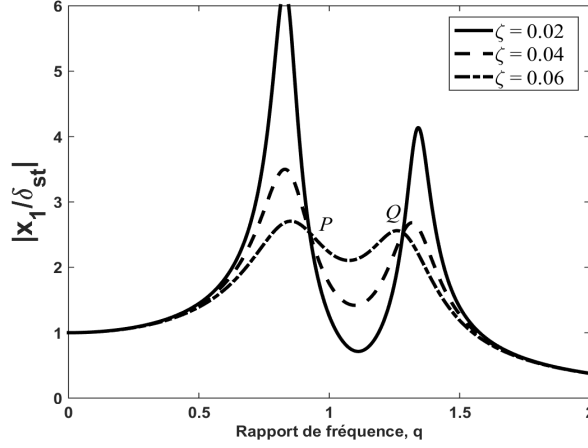


FIGURE A.0.1 – Courbes amplitude-fréquence du système principal associées au système inerter série-parallèle $C1$ sous $\delta = 0, 2$ et $\lambda = 4$.

dérant l'équation

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left| \frac{X_1}{A_g} \right|^2 = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left| \frac{X_1}{A_g} \right|^2. \quad (\text{A.58})$$

En substituant l'équation (A.57) dans (A.58) selon (A.56) et en effectuant certaines manipulations algébriques, on obtient

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda - \lambda q^2} = \pm \frac{1 - \delta \lambda q^2}{1 - (1 + \delta + \delta \lambda) q^2 + \delta \lambda q^4}. \quad (\text{A.59})$$

On pourrait constater qu'il n'y a pas de sens lorsque la partie droite de (A.59) est positive. En conséquence, en prenant le signe négatif et en simplifiant l'équation (A.59), nous pouvons obtenir que

$$2\delta \lambda^2 q^4 - 2\lambda(1 + \delta + \delta \lambda) q^2 + 2\lambda + 1 = 0. \quad (\text{A.60})$$

En supposant que les racines de (A.60) sont q_P et q_Q , on peut obtenir l'équation suivante :

$$(q^2 - q_P^2)(q^2 - q_Q^2) = q^4 - (q_P^2 + q_Q^2)q^2 + q_P^2 q_Q^2 = 0. \quad (\text{A.61})$$

En comparant (A.61) et (A.60), nous pouvons conclure que

$$q_P^2 + q_Q^2 = \frac{1 + \delta + \delta \lambda}{\delta \lambda}. \quad (\text{A.62})$$

Les valeurs à P et Q doivent être les mêmes pour obtenir le rapport de rigidité optimal

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda - \lambda q_P^2} = - \frac{\lambda}{1 + \lambda - \lambda q_Q^2}. \quad (\text{A.63})$$

En simplifiant (A.63), on peut obtenir

$$q_P^2 + q_Q^2 = \frac{2(1 + \lambda)}{\lambda}. \quad (\text{A.64})$$

En combinant (A.62) et (A.64), et en résolvant l'équation, nous pouvons obtenir le rapport de rigidité optimal

$$\lambda_{opt} = \frac{1 - \delta}{\delta}. \quad (\text{A.65})$$

Les deux points fixes peuvent être obtenus dans cette condition comme

$$q_{P,Q}^2 = \frac{2 \pm \sqrt{2\delta}}{2(1 - \delta)}. \quad (\text{A.66})$$

assumant que $q_P^2 < q_Q^2$. Sur la base du rapport de rigidité optimal, la réponse en amplitude à P et Q peut être obtenue comme

$$\mu_T = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_{q_P, q_Q} \cong (1 - \delta) \sqrt{\frac{2}{\delta}}. \quad (\text{A.67})$$

L'étape suivante pourrait ajuster le rapport d'amortissement afin de rendre l'amplitude maximale du système primaire aux points fixes. La condition peut être obtenue lorsque les dérivées du facteur d'amplification sont nulles aux deux points fixes P et Q , respectivement, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial q^2} \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_{q_P, q_Q} = 0. \quad (\text{A.68})$$

Résoudre (A.68) et remplacer le rapport de rigidité optimal dans le résultat, nous pouvons obtenir

$$\zeta_P^2 = \frac{3\delta^3(2 + \sqrt{2\delta})}{8(1 - \delta)(2 - \delta)} \quad . \quad (\text{A.69})$$

$$\zeta_Q^2 = \frac{3\delta^3(2 - \sqrt{2\delta})}{8(1 - \delta)(2 - \delta)}$$

En prenant une moyenne de ζ_P^2 et ζ_Q^2 , nous pouvons obtenir le rapport d'amortissement optimal

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3\delta^3}{4(1 - \delta)(2 - \delta)}}. \quad (\text{A.70})$$

b) Conception optimale de $C1$ (SPIS) pour minimiser la fonction de transfert de mobilité

Dans le cas de la minimisation de la fonction de transfert de mobilité de la structure primaire pour $C1$ (SPIS) sur la Fig. 2.2a, les valeurs à P et Q doivent être identiques afin d'obtenir le rapport de rigidité optimal

$$\frac{\lambda q_P}{1 + \lambda - \lambda q_P^2} = -\frac{\lambda q_Q}{1 + \lambda - \lambda q_Q^2}. \quad (\text{A.71})$$

En simplifiant (A.71), nous pouvons obtenir

$$q_P^2 q_Q^2 = \frac{(1 + \lambda)^2}{\lambda^2}. \quad (\text{A.72})$$

Encore une fois, en comparant (A.61) et (A.60), nous pouvons conclure que

$$q_P^2 q_Q^2 = \frac{1 + 2\lambda}{2\delta\lambda^2}. \quad (\text{A.73})$$

En combinant (A.72) et (A.73), et en résolvant l'équation, nous pouvons obtenir le rapport de rigidité optimal

$$\lambda_{opt} = \frac{1 - 2\delta + \sqrt{1 - 2\delta}}{2\delta}, \quad (\text{A.74})$$

ce qui nécessite $\delta < 1/2$. Le rapport d'amortissement optimal ζ_{opt} peut être obtenu en résolvant (A.68) comme

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{\zeta_P^2 + \zeta_Q^2}{2}}, \quad (\text{A.75})$$

où,

$$\zeta_{P,Q}^2 = \frac{\delta^2 (a_8 q_{P,Q}^8 - a_6 q_{P,Q}^6 - a_4 q_{P,Q}^4 + a_2 q_{P,Q}^2 - a_0)}{4 q_{P,Q}^2 (-d_4 q_{P,Q}^4 + d_0)}, \quad (\text{A.76})$$

lorsque les dérivées du facteur d'amplification sont nulles aux deux points fixes P et Q , respectivement, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial q^2} \left| \frac{qX_1}{\delta_{st}} \right|_{q_{P,Q}} = 0, \quad (\text{A.77})$$

et,

$$q_{P,Q}^2 = \frac{\left(2 - \delta \pm \sqrt{\delta(4 - 3\delta + 4\sqrt{1 - 2\delta})} \right) \sqrt{1 - 2\delta} + 2 - 4\delta}{(1 - 2\delta + \sqrt{1 - 2\delta})^2}, \quad (\text{A.78})$$

est obtenu en résolvant l'équation (A.60) après avoir remplacé (A.74) dans (A.60).

où les coefficients a_i et d_i sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} a_8 &= (1 - 2\delta)^2 \left(\delta^2 - 4\delta + 2 + 2(1 - \delta)\sqrt{1 - 2\delta} \right), \\ a_6 &= 2(1 - 2\delta) \left((2 - \delta)(1 - 2\delta) + (2 - 3\delta)\sqrt{1 - 2\delta} \right), \\ a_4 &= \delta(1 - 2\delta) \left(-7\delta + 6 + 6\sqrt{1 - 2\delta} \right), \\ a_2 &= 2(2 + \delta - 2\delta^2)\sqrt{1 - 2\delta} - 2(6\delta^2 + \delta - 2), \\ a_0 &= 2(1 - \delta + \sqrt{1 - 2\delta}), \\ d_0 &= \frac{(a_8 - d_4)}{(1 - 2\delta)}, \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

ce qui nécessite $\delta < 1/2$. Sur la base du rapport de rigidité optimal (A.74) et des points

fixes (A.78), la réponse du système primaire à P et Q peut être obtenu comme

$$\mu_T = \left| \frac{qX_1}{\delta_{st}} \right|_{q_P, q_Q} \cong \frac{(1 - 2\delta + \sqrt{1 - 2\delta})\sqrt{\sqrt{\phi} + \psi}}{\sqrt{\phi} + \delta\sqrt{1 - 2\delta}} \quad (\text{A.80})$$

où

$$\begin{aligned} \phi &= \delta(1 - 2\delta)(4 - 3\delta + 4\sqrt{1 - 2\delta}) \\ &, \\ \psi &= (2 - \delta)\sqrt{1 - 2\delta} + 2(1 - 2\delta), \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

ce qui nécessite également $\delta < 1/2$.

Notons que les mêmes procédures peuvent être appliquée aux dispositifs $C2$ (SIS), $C5$ (IVA), $C6$ (NGS-IVA) et $C7$ (AIGS-IVA), respectivement, car ces systèmes avec la structure primaire montrent deux points fixes sur leur courbe de réponse amplitude-fréquence. Cependant, il existe des dispositifs montrant trois points fixes sur la courbe de réponse amplitude-fréquence du système primaire comme dans $C3$ (SPIS) et $C4$ (NSPIS), respectivement, dont la démonstration est montrée comme ci-dessous pour $C4$ (NSPIS).

Annexe A2 : paramètres optimaux de $C4$ (NSPIS) minimisant la fonction de transfert de conformité

La fonction de transfert de mobilité défini la fonction de transfert du déplacement dynamique du système primaire. Ainsi, le module carré de la fonction de transfert pour la structure primaire excitée par accélération de base peut être exprimé comme :

$$G^2 = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|^2 = \frac{4\zeta^2 A^2 + B^2}{4\zeta^2 C^2 + D^2}, \quad (\text{A.82})$$

où

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\Omega}[\beta + \lambda + \kappa - \mu\Omega], \\ B &= \lambda[\beta + \kappa - \mu\Omega], \\ C &= \sqrt{\Omega}[(\beta + \lambda + 1)\kappa + \beta + \lambda - (\beta\mu + \lambda\mu + \beta + \lambda + \kappa + \mu)\Omega + \mu\Omega^2], \\ D &= \lambda[(\beta + 1)\kappa + \beta - (\beta\mu + \beta + \kappa + \mu)\Omega + \mu\Omega^2]. \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

La Fig. A.0.2 montre la réponse en fréquence du système primaire non amorti (en utilisant (A.82)) contrôlé avec $C4$ (NSPIS) (Fig. 2.2d) pour divers rapports amortissements, 0,01, 0,02 et 0,05. Sur cette figure, les courbes de fréquence passent par trois points invariants P , Q et R indépendamment du rapport d'amortissement de l'absorbeur quand une accélération harmonique est appliquée à la base du système primaire. Pour localiser les points fixes P , Q et R sur l'axe des fréquences, l'équation suivante doit être prise en compte comme

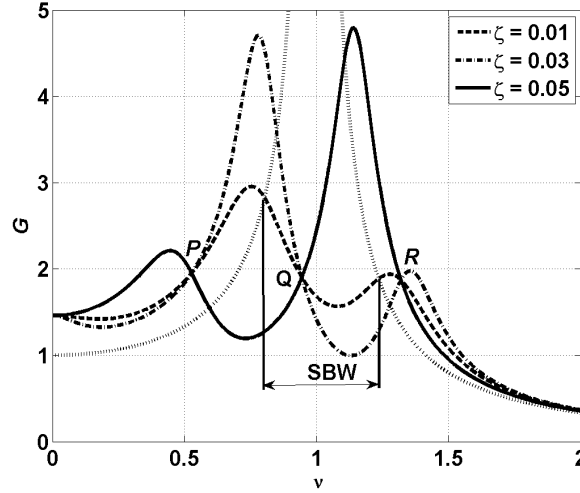


FIGURE A.0.2 – Les courbes amplitude-fréquence du système avec $C4$ (NSPIS) pour des paramètres comme $\mu = 0,05$, $\lambda = 0,05$, $\beta = 0,09$ et $\kappa = -0,07$ et (SBW) désigne la bande passante de suppression des vibrations.

$$\frac{A}{C} = \pm \frac{B}{D}, \quad (\text{A.84})$$

avec $\kappa \neq 0$. On pourrait constater qu'il y a aucune signification lorsque la partie droite de (A.84) est positive. Par conséquent, en prenant le signe négatif et en simplifiant l'équation, nous pouvons obtenir

$$\Omega^3 + \alpha_2 \Omega^2 + \alpha_1 \Omega + \alpha_0 = 0, \quad (\text{A.85})$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{2\beta\mu + \lambda\mu + 4\beta + 2\lambda + 4\kappa + 2\mu}{2\mu}, \\ \alpha_1 &= \frac{\kappa^2 + (2\beta\mu + \lambda\mu + 2\beta + \lambda + 2\mu)\kappa + \beta^2\mu + \beta\lambda\mu + \beta^2 + \beta\lambda + 2\beta\mu + \lambda\mu}{\mu^2}, \\ \alpha_0 &= -\frac{(2\beta + \lambda + 2)\kappa^2 + 2(\beta^2 + \beta\lambda + 2\beta + \lambda)\kappa + 2\beta(\beta + \lambda)}{2\mu^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

Par simple déduction des observations faites sur la Fig. A.0.2 concernant (A.82), il existe deux valeurs égales de G indépendant de l'amortissement ζ de l'absorbeur.

En conséquence, lorsque $\zeta \rightarrow \infty$

$$|G| = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{\beta + \lambda + \kappa - \mu\Omega}{(\beta + \lambda + 1)\kappa + \beta + \lambda - (\beta\mu + \lambda\mu + \beta + \lambda + \kappa + \mu)\Omega + \mu\Omega^2} \right|, \quad (\text{A.87})$$

et quand $\zeta = 0$

$$|G| = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{\beta + \kappa - \mu\Omega}{(\beta + 1)\kappa + \beta - (\beta\mu + \beta + \kappa + \mu)\Omega + \mu\Omega^2} \right|. \quad (\text{A.88})$$

Par conséquent, on peut obtenir

$$|G| = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{2(\beta + \kappa) + \lambda - 2\mu\Omega}{\lambda[1 + \kappa - (1 + \mu)\Omega]} \right|. \quad (\text{A.89})$$

Soit Ω_P , Ω_Q et Ω_R les racines réelles de l'équation (A.85) correspondant à des points fixes P , Q , et R . Alternativement, ces racines doivent vérifier

$$\begin{aligned} \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_P &= \frac{2(\beta + \kappa) + \lambda - 2\mu\Omega_P}{\lambda[1 + \kappa - (1 + \mu)\Omega_P]} \\ \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_Q &= \frac{2(\beta + \kappa) + \lambda - 2\mu\Omega_Q}{\lambda[1 + \kappa - (1 + \mu)\Omega_Q]} \\ \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_R &= \frac{2(\beta + \kappa) + \lambda - 2\mu\Omega_R}{\lambda[1 + \kappa - (1 + \mu)\Omega_R]}. \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

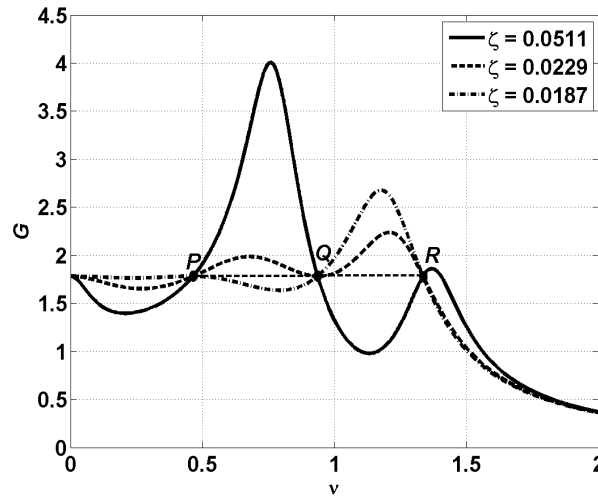


FIGURE A.0.3 – Les courbes amplitude-fréquence du système $C4$ (NSPIS) avec des paramètres comme $\mu = 0,05$, $\lambda = 0,0536$, $\beta = 0,0957$ et $\kappa = -0,0786$.

L'approche de réglage de Den Hartog [60, 61] suggère que la réponse maximale de la structure primaire considérée est minimisée lorsque G atteint la même valeur aux points P , Q , et R (voir Fig. A.0.3). Tout d'abord en fixant les points fixes P et R à la même hauteur, c'est-à-dire en écrivant $|X_1/\delta_{st}|_P = |X_1/\delta_{st}|_R$, on peut obtenir la relation suivante

$$\lambda = \frac{2\mu(1 + \kappa)}{1 + \mu} - 2(\beta + \kappa). \quad (\text{A.91})$$

En remplaçant l'équation (A.91) par (A.85) selon (A.86), un peut obtenir

$$[(1 + \mu)\Omega - (1 + \kappa)][\mu^2\Omega^2 - 2\mu^2\Omega - (1 + \mu)\beta^2 + 2\beta\mu - \kappa^2 + 2(\mu - \beta)\kappa] = 0. \quad (\text{A.92})$$

Résoudre (A.92) pour Ω conduit à

$$\begin{aligned} \Omega_P &= \frac{\mu - \sqrt{(1 + \mu)\beta^2 - 2\beta(\mu - \kappa) + (\mu - \kappa)^2}}{\mu} \\ \Omega_Q &= \frac{1 + \kappa}{1 + \mu} \\ \Omega_R &= \frac{\mu + \sqrt{(1 + \mu)\beta^2 - 2\beta(\mu - \kappa) + (\mu - \kappa)^2}}{\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

Ensuite, (A.90) peut être écrit comme

$$\begin{aligned} \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_{P,R} &= \frac{\mu}{\mu - \kappa - (1 + \mu)\beta}, \\ \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_Q &= \frac{(1 + \mu)(\mu - \kappa - \beta\mu - \beta)}{\mu^2 - 2\mu\kappa + \kappa^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

Deuxièmement, définir les trois points fixes P , R , et Q à la même hauteur, c'est-à-dire en écrivant $|X_1/\delta_{st}|_{P,R} = |X_1/\delta_{st}|_Q$ dans (A.94), la première condition de réglage optimal par rapport à β peut être obtenue.

$$\beta_{opt} = \frac{(1 + \mu - \sqrt{\mu^2 + \mu})(\mu - \kappa)}{(1 + \mu)^2}. \quad (\text{A.95})$$

Puis, en remplaçant (A.95) dans (A.91), la seconde condition de réglage optimale par rapport à λ peut être obtenue comme

$$\lambda_{opt} = \frac{2(\mu - \kappa)\sqrt{\mu^2 + \mu}}{(1 + \mu)^2}. \quad (\text{A.96})$$

Basé sur les paramètres optimaux dans (A.95) et (A.96), l'amplitude normalisée aux points fixes P , Q et R peut être obtenu comme

$$\left| \frac{X_1}{A_g} \right|_{P,Q,R} = \frac{\sqrt{\mu^2 + \mu}}{\mu - \kappa}. \quad (\text{A.97})$$

La prochaine étape pourrait ajuster le rapport d'amortissement de manière à rendre l'amplitude maximale du système primaire aux points fixes à la même hauteur (voir Fig. A.0.3). La condition peut être obtenue lorsque les dérivées du facteur d'amplification d'amplitude sont nulles aux deux points fixes P et R

$$\left. \frac{\partial G^2}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_P, \Omega_R} = 0. \quad (\text{A.98})$$

Résoudre (A.98) après avoir substitué les paramètres λ_{opt} et β_{opt} et en prenant la racine carrée de la valeur moyenne des deux taux d'amortissement aux points fixes P et R , on peut obtenir le rapport d'amortissement optimal $\zeta = \sqrt{(\zeta_P^2 + \zeta_R^2)/2}$ (Den Hartog [60, 61]). Cependant, il est difficile d'obtenir une solution réductible en raison de la complexité de l'équation (A.98). Néanmoins, La Fig. A.0.3 montre que lorsque les deux pics de résonance se rapprochent à la même hauteur, on peut observer que le point Q est presque à la zone où la pente de la courbe amplitude-fréquence est nulle, de sorte que la l'approximation de la solution donnée par ((A.99) est adoptée.

$$\left. \frac{\partial G^2}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_Q} \cong 0. \quad (\text{A.99})$$

Résoudre (A.99), d'après (A.95), (A.96) et (A.97) nous obtenons le rapport d'amortissement optimal pour $C4$ (NSPIS).

$$\zeta_{opt} \cong \sqrt{\frac{20(\mu - \kappa)^2(\sqrt{\mu^2 + \mu} - \mu)\mu}{17(1 + \mu)^2(1 + \kappa)(\mu + \sqrt{\mu^2 + \mu})}}. \quad (\text{A.100})$$

A ce moment, il existe encore un paramètre réglable autre que le rapport d'amortissement optimal et les rapports de rigidités optimaux. C'est le rapport de rigidité négatif κ . De la Fig. A.0.2, il y a un autre point d'intersection O , qui est également indépendant de l'amortissement de $C4$ (NSPIS). Selon l'équation (A.97), il est clair qu'une rigidité négative les trois points fixes beaucoup plus bas ; cela signifie que l'on peut obtenir un meilleur contrôle des vibrations. Depuis le point fixe O est le point de fréquence zéro, en remplaçant $\nu = 0$ dans l'équation (A.82), la valeur de $G|_{\nu=0}$ au point fixe O sous les rapports de rigidités optimaux λ et β défini par les équations (A.95) et (A.96) est formulé comme

$$G|_{\nu=0} = \frac{\beta + \kappa}{\kappa\beta + \beta + \kappa}. \quad (\text{A.101})$$

Ainsi, pour trouver le rapport de rigidité optimal mis à la terre, un choix approprié de rapport de rigidité κ mis à la terre pourrait être trouvé où tous les points fixes P , Q R et O sont ajustés à des hauteurs égales, à savoir $G^2|_{\nu=0} = G^2|_{\nu_P, Q, R}$. C'est-à-dire

$$\left(\frac{\beta + \kappa}{\kappa\beta + \beta + \kappa} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\mu^2 + \mu}}{\mu - \kappa} \right)^2 \quad (\text{A.102})$$

La résolution de (A.102) donne deux valeurs rationnelles de κ

$$\kappa_1 = -1, \quad \kappa_2 = \frac{2\mu(1 + \mu) - (2\mu + 1)\sqrt{\mu^2 + \mu}}{2\mu(1 + \mu) - \sqrt{\mu^2 + \mu}}. \quad (\text{A.103})$$

En accord avec (2.11) et (A.95), il y a une dépendance entre le rapport de rigidité β et le rapport de rigidité négatif κ conduisant à l'expression explicite pour la limite inférieure de κ . Ainsi, en substituant le rapport de rigidité (A.95) dans la condition générale de stabilité dans (2.11), une inégalité sur κ peut être obtenue

$$(1 + \mu - \sqrt{\mu^2 + \mu})\kappa^2 - [2\mu(1 + \mu) + (1 - \mu)\sqrt{\mu^2 + \mu}]\kappa - \mu(1 + \mu - \sqrt{\mu^2 + \mu}) < 0 \quad (\text{A.104})$$

Parce que $(1 + \mu - \sqrt{\mu^2 + \mu}) > 0$ dans (A.104), κ est situé dans l'intervalle (κ^-, κ^+) , avec les limites inférieure et supérieure définies par

$$\begin{aligned} \kappa^- &= \frac{(1 + \mu)[2\mu - \sqrt{\mu(5\mu + 5 - 4\sqrt{\mu^2 + \mu})}] + (1 - \mu)\sqrt{\mu^2 + \mu}}{2\mu + 2 - 2\sqrt{\mu^2 + \mu}}, \\ \kappa^+ &= \frac{(1 + \mu)[2\mu + \sqrt{\mu(5\mu + 5 - 4\sqrt{\mu^2 + \mu})}] + (1 - \mu)\sqrt{\mu^2 + \mu}}{2\mu + 2 - 2\sqrt{\mu^2 + \mu}}. \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

On note que $\kappa^+ > 0$ et $\kappa^- > -1$ (avec $\kappa^- < 0$) tel que $0 \in [\kappa^-, \kappa^+]$. Par conséquent, la limite admissible sur κ est alors réduite à $\kappa \in (\kappa^-, 0]$. Cependant, κ_1 est inférieur à la borne inférieure κ^- au delà du quel le système primaire devient instable. De plus, κ_2 satisfait la condition $-1 < \kappa^- < \kappa_2 < 0$, ce qui est pertinent pour l'existence d'un rapport optimal de rigidité négative κ_{opt} dans la région stable, qui s'exprime comme suit

$$\kappa_{opt} = \frac{2\mu(1 + \mu) - (2\mu + 1)\sqrt{\mu^2 + \mu}}{2\mu(1 + \mu) - \sqrt{\mu^2 + \mu}} \quad (\text{A.106})$$

Notons que la même procédure peut être appliquée à *C6* (NGS-IVA) et *C7* (AIGS-IVA), respectivement, pour dériver les limites de stabilités et les rapports de rigidités mis à la terre de chaque dispositif, respectivement.

Liste des Publications


Publications scientifiques de la thèse

- 1- **Marcial Baduidana** and Aurelien Kenfack-Jiotsa, “Optimal design of inerter-based isolators minimizing the compliance and mobility transfer function versus harmonic and random ground acceleration excitation”, *Journal of Vibration and Control* **27**(11-12), 1297-1310 (2020).
- 2- **Marcial Baduidana**, Xiaoran Wang and Aurelien Kenfack-Jiotsa, “Parameters optimization of series-parallel inerter system with negative stiffness in controlling a single-degree-of-freedom system under base excitation”, *Journal of Vibration and Control* **0**(0), 1-18 (2021).
- 3- **Marcial Baduidana** and Aurelien Kenfack-Jiotsa, “Optimum design for a novel inerter-based vibration absorber with an amplified inertance and grounded stiffness for enhanced vibration control”, *Journal of Vibration and Control* **0**(0), 1-17 (2021).

Autres publications scientifiques

- 1- **Marcial Baduidana**, Berline Kendo-Nouja, Aurelien Kenfack-Jiotsa and Robert Nzungwa, “Optimal design of a novel high-performance passive nontraditional inerter-based dynamic vibration absorber for enhancement vibration absorption”, *Asian Journal of Control* **0**(0), 1-10 (2021).
- 2- **Marcial Baduidana** and Aurelien Kenfack-Jiotsa, “Parameters optimization and performance evaluation for the novel tuned inertial damper”, *Engineering Structures* **250**(2022)111396.
- 3- **Marcial Baduidana** and Aurelien Kenfack-Jiotsa, “Analytical optimal design for the novel grounded three-element inertial damper”, *Engineering Structures* **272**(2022) 114964.

Optimal design of inerter-based isolators minimizing the compliance and mobility transfer function versus harmonic and random ground acceleration excitation

Journal of Vibration and Control
2020, Vol. 0(0) 1–14
© The Author(s) 2020
Article reuse guidelines:
sagepub.com/journals-permissions
DOI: 10.1177/1077546320940175
journals.sagepub.com/home/jvc


Marcial Baduidana^{1,2}  and Aurelien Kenfack-Jiotsa^{1,2,3}

Abstract

This study is concerned with the problem of analysis and optimization of inerter-based systems. A main inerter system is generally composed of an inerter, a spring, and viscous damper. Series–parallel inerter systems and series inerter systems are two commonly used configurations of inerter-based systems. First, in this study, the H_∞ optimum parameters of inerter-based isolators are derived to minimize the compliance and mobility transfer function of a single-degree-of-freedom system under a harmonic ground acceleration excitation. Under the optimum tuning condition, it is shown that the proposed inerter-based isolators when compared with the traditional dynamic vibration absorber provide larger suppression of the peak value of the magnitude of compliance and mobility transfer functions of the primary system. For the studied cases, more than 40% and 45% improvement can be attained in terms of minimizing the compliance and mobility transfer functions, respectively, as compared with the traditional dynamic vibration absorber for the series–parallel inerter system and 15% and 11% improvement can be attained respectively, for the series inerter system. Finally, further comparison between the inerter-based isolators and traditional dynamic vibration absorber under white noise excitation also shows that the series–parallel inerter system and series inerter systems are superior to the traditional dynamic vibration absorber. The results of the studied systems show that more than 23% and 16% improvement are attained in terms of minimizing the compliance and mobility transfer functions respectively, as compared with the traditional dynamic vibration absorber for the series–parallel inerter system and 26% and 13% improvement can be attained respectively, for the series inerter system. The optimal parameters for different cases are obtained. It is shown that the optimal parameters obtained using the minimized mobility transfer function are smaller than those using the compliance transfer function at all mass ratios or inertance-to-mass ratio. The results of this study can provide theoretical basis for design of the optimal inerter-based isolators in engineering practice.

Keywords

H_∞ optimization, H_2 optimization, inerter-based isolator, fixed-point theory, optimization

1. Introduction

Vibration control occupies a prominent place in many engineering practices. One of the widely used vibration control devices because of its efficiency is the dynamic vibration absorber (DVA) or tuned mass damper (TMD). Since then, different types of TMDs have shown their usefulness in successfully dealing with traditional base isolation systems for the passive control of many buildings around the world (Gutierrez and Adeli, 2013). However, studies in the past (e.g. see Tributsch and Adam (2012), Anajafi and Medina (2018a, 2018b, 2018c), and Wang and Lin (2005)), have identified following deficiencies in the seismic performance of traditional passive control systems: traditional base isolation systems result in large displacement responses at the

¹Laboratory of Mechanics, Materials and Structures, Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaounde I, Cameroon

²Nonlinear and Complex Systems Physics Group, Departement of Physics, The Higher Teacher Training College, University of Yaounde I, Cameroon

³Department of Physics, Higher Teacher Training College, University of Yaounde I, Cameroon

Received: 27 August 2019; accepted: 12 June 2020

Corresponding author:

Marcial Baduidana, Laboratory of Mechanics, Materials and Structures, Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaounde I, P.O. Box 47, Yaounde, Cameroon.

Email: badui1310@yahoo.fr

base of the building; traditional base isolation and TMD systems are not robust against variation in the parameters of the structure and ground excitation; detuning may significantly reduce the efficiency of TMD systems; TMDs need a relatively large mass to be efficient that is associated with significant drawbacks (e.g. practical problems and conflict with the building architecture), and the drift demands exposed on the TMD itself are usually significant. In addition, the base isolation + TMD system needs a massive TMD that may cause significant drawbacks. Nevertheless, many studies have been conducted to improve the efficacy and robustness of TMDs using multiple DVAs in parallel or series (Abé and Fujino, 1994; Anajafi and Medina, 2018b, 2018c; Hoang et al., 2008; Zuo, 2009).

To overcome the deficiencies associated with TMDs, inerter-based devices have been proposed (Lazar et al., 2014; Sara et al., 2016), introduced by Smith (2002). The inerter is a mechanical device with two terminals and it has the property that the generated force is proportional to the relative acceleration between its two terminals (Chen et al., 2009; Smith, 2002), and the constant of proportionality is called inertance with kilogram as its unit. The tuned inerter damper (Lazar et al., 2014), tuned viscous mass damper (Ikago et al., 2012), and tuned mass-damper-inerter (TMDI) (Marian and Giaralis, 2014) have been identified as suspensions of buildings. Moreover, inerter-vibration absorbers have two unique properties, which are more attractive than TMDs: first, the inertance mass ratio of inerter-based TMDs can easily be larger than the mass ratio of TMDs without increasing the gravitational mass of the whole system (De Domenico and Ricciardi, 2018a, 2018b; Marian and Giaralis, 2014; Pietrosanti et al., 2017); second, there is no need to mount an additional mass on the object to be controlled (Hu et al., 2015). The inerter-based devices have been also investigated for mitigation of the liquid sloshing in storage tanks (Luo et al., 2016), to enhance the properties of TMDs (De Domenico and Ricciardi, 2018a; De Domenico et al., 2019), for seismic protection of building structure (Radu et al., 2019), for seismic protection of wind turbine towers (Zhang et al., 2019), for improving the seismic performance of base-isolated structure (De Domenico and Ricciardi, 2018b, 2018c; Saitoh, 2012), for vibration suppression of cables (Lazar et al., 2016), for wind-induced vibration mitigation of tall buildings using TMDI (Giaralis and Petrini, 2017), and for vehicle suppression (Chen et al., 2009, 2016; Hu et al., 2014; Smith and Wang, 2004; Wang and Chan, 2001; Wang et al., 2012) and vibration suppression (Brzeski et al., 2015; Lazar et al., 2014). The interest in passive network synthesis has also been rekindled (Chen, 2008; Chen and Smith, 2009a, 2009b; Chen et al., 2013; Wang and Chen, 2012).

Hu et al. (2015) investigated the damping performance of multiple optimized configurations of inerter-based isolators relative to traditional dynamic vibration absorbers (TDVAs) when the primary system is excited at its base by

a harmonic and random ground displacement. However, the primary system response to a basic acceleration excitation was not considered in Hu et al. (2015) nor the reduction of noise generated by the primary structure. Moreover, Hu et al. (2015) also showed that, when the primary system is excited by a ground displacement, the series inerter system (SIS) (called C4 in Hu et al. (2015)) does not improve the vibration control of the primary system when compared to the traditional DVA. But in this study, we showed earlier that when the excitation source is harmonic or random ground acceleration, the SIS provides better vibration control compared to the traditional DVA. Furthermore, in engineering practice, the evaluation index of the performance used is the minimization of the displacement transfer function. The purpose of this evaluation function is to minimize the absolute displacement response of the primary system (Hu et al., 2015; Marian and Giaralis, 2014). However, it is important to suppress the absolute velocity response of the primary system to reduce the noise generated by the structure or the vibrating body (Asami et al., 2018). This last aspect is one of the main objectives of this study.

To achieve these goals, two inerter-based isolators, each of which incorporates a spring, a damper, and an inerter, are proposed (namely, series inerter system (SIS) and series-parallel inerter system (SPIS)). To clarify the performance of inerter-based isolators, the optimal parameters in both H_∞ optimization and H_2 optimization are analytically derived. H_∞ optimization aims to minimize the amplitude response of transfer function of primary system at resonance (Den Hartog, 1985), whereas H_2 optimization aims to minimize the total vibration energy or the mean square motion of the object mass when white noise excitation is enforced (Cheung and Wong, 2011). The analytical method described by Hu et al. (2015) is used to calculate the H_2 norm performance measures of the inerter-based isolators in this study. At the same time, the comparisons of the H_2 and H_∞ performances between inerter-based isolators and traditional DVAs are made. For that, two optimal conditions of the proposed inerter-based isolators are studied; that is objective functions are the mobility transfer function and the compliance transfer function of the primary system, describing the velocity and displacement response of the primary system to an input ground acceleration. In the case of minimizing the mobility transfer function, no research on SPIS and SIS isolators is proposed in the literature. However, in Asami et al. (2018), the minimization of the mobility transfer has been evaluated for a multiple DVA.

The rest of the organization of this article is as follows. In the next section, the steady-state complex response of the primary system is first derived and optimization criteria are then presented. In Section 3, the optimal parameters of SIS and SPIS are analytically derived according to H_∞ optimization based on the fixed point theory. In Section 4, the comparison between the traditional DVA and inerter-based isolators is presented. In Section 5, the response of the

primary system under white noise excitation is derived according to H_2 optimization and then compared with that of the traditional DVA.

2. The steady-state complex response of the inerter-based isolators and optimization criteria

Let us consider the class of dynamically excited structures which can be modeled as single-degree-of-freedom (SDOF) systems illustrated in Figure 1. Figure 1(a) and (b) show the analytical model of the inerter-based isolators, which is the vibratory system considered in the present study. m is the mass of the main structure, b is the inertance (inerter equivalent mass), C and k are the damping coefficient and stiffness coefficient respectively, of the inerter-based isolators, and K is the main structure stiffness coefficient. These two systems have been proposed to replace the traditional base isolation or the traditional DVA of Den Hartog (1956) to improve the performance on the response of the primary system. In Figure 1, P is the primary mass of the system (the object to be controlled).

For the case of the SPIS in Figure 1(a), the differential motion equation can be established as

$$\begin{cases} (m+b)\ddot{x}_1 - b\ddot{x}_2 + C(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + Kx_1 = -ma_g(t) \\ b(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) + C(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + kx_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

The natural frequency of the primary system ω_n and the critical damping ratio of isolation system, ζ , are defined as

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad \zeta = \frac{C}{2m\omega_n} \quad (2)$$

Furthermore, consider the forced frequency ratio q , the inertance-to-mass ratio δ , and the stiffness ratio λ as

$$q = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \delta = \frac{b}{m}, \quad \text{and} \quad \lambda = \frac{K}{k} \quad (3)$$

respectively. Using the above dimensionless quantities, the magnitude ratio $|x_1\omega_n^2/a_g|$ in terms of the absolute displacement $x_1(t)$ of the base-excited primary structure in Figure 1(a) can be written as equation (4) in the domain of frequencies q by considering the normalized acceleration input $\delta_{st} = a_g/\omega_n^2$

$$\left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{1 - \delta\lambda q^2 + j2q\lambda\zeta}{1 - (1 + \delta(1 + \lambda))q^2 + \delta\lambda q^4 + j2q(1 + \lambda - \lambda q^2)\zeta} \right| \quad (4)$$

In the latter equation and hereafter, $j = \sqrt{-1}$.

For the case of the SIS in Figure 1(b), the compliance transfer function is easier to determine using admittance methods. Therefore, the dimensionless compliance transfer function of the SIS can be established as

$$\left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{2(1 - \lambda\delta q^2)\zeta + j\delta q}{2(\lambda\delta q^4 + (1 + \delta(1 + \lambda))q^2 + 1)\zeta + j\delta(1 - q^2)q} \right| \quad (5)$$

The H_∞ norm of the magnitude ratio of the displacement for SPIS and SIS is expressed as

$$\mu_T = \left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right|_{\max} \quad (6)$$

Furthermore, as in the case of the compliance transfer function, the mobility transfer function in the frequency domain ω (frequency of the acceleration excitation) is taken as the ratio of the velocity response to an input acceleration, and its maximum value (the H_∞ norm) can be dimensionless as

$$\mu_V = \left| \frac{\dot{x}_1}{\omega_n \delta_{st}} \right|_{\max} = \left| \frac{\omega x_1}{\omega_n \delta_{st}} \right|_{\max} = \left| \frac{qx_1}{\delta_{st}} \right|_{\max} \quad (7)$$

Minimizing the H_∞ norm is the target of H_∞ optimization. Thus, in H_∞ optimization, the minimum value of μ_T from equation (6) is obtained when using the compliance

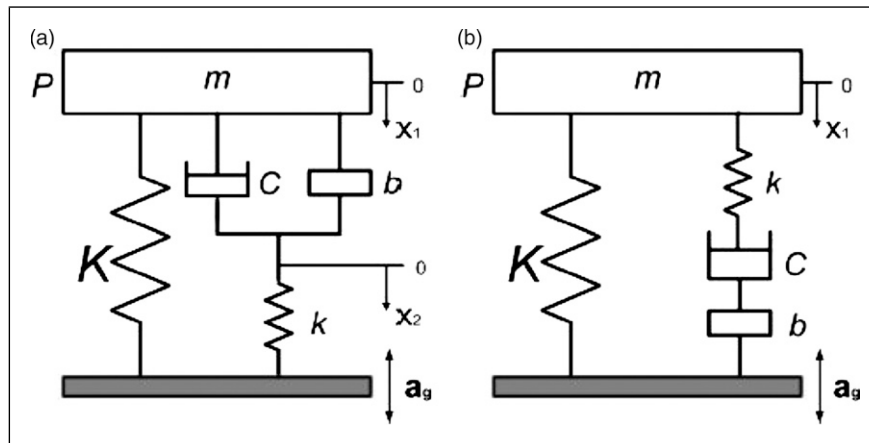


Figure 1. Inerter-based isolators: (a) series-parallel inerter system, (b) series inerter system.

transfer function, and the minimum value of μ_V from equation (7) is similarly obtained when using the mobility transfer function. Hereafter, the minimum value of μ_T and μ_V will be expressed using the same symbol μ .

3. H_∞ optimization of the inerter-based isolators based on the fixed point theory

Assume that the SDOF structure in Figure 1 equipped with proposed inerter-based isolators is subjected to a harmonic ground acceleration excitation $a_g(t)$, unlike displacement transmissibility as in Hu et al. (2015). With the given fixed value for inertance-to-mass ratio δ , it is sought to determine optimal values of stiffness ratio λ and damping ratios ζ respectively, such that the performance indices μ_T and μ_V of the primary structure are minimized. For this aim, the optimum tuning ratio, the optimum stiffness ratio, and the optimum damping ratio of DVA/inerter-based isolators are derived by using the fixed-point theory (Den Hartog, 1985).

3.1. The H_∞ -optimal solution for minimizing the compliance transfer function

(a) Optimal design of the SPIS

In the main system amplitude normalization curves, all curves pass through two points independent of damping. For illustration, Figure 2 plots the magnitude $|x_1\omega_n^2/a_g|$ in equation (4) for several values of the damping ratio ζ and for fixed values δ and λ . Evidently, there exist two stationary points, denoted by P and Q , where the magnitude of $|x_1\omega_n^2/a_g|$ curves intersect for all damping ratio values ζ .

The location of P and Q points on the frequency axis can be found by considering the equation

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right|^2 = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right|^2 \quad (8)$$

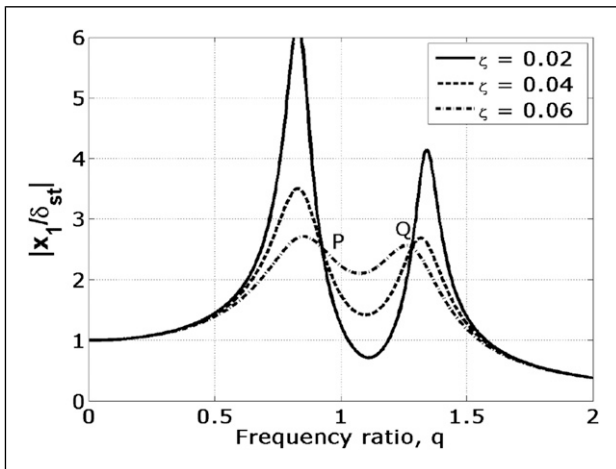


Figure 2. Amplitude–frequency curves of the primary system attached to the series–parallel inerter system under $\delta = 0.2$ and $\lambda = 4$.

By collecting the real and imaginary parts in the numerator and denominator in equation (4), the square of the magnitude $|x_1\omega_n^2/a_g|$ can be expressed as

$$\left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right|^2 = \frac{A_{SPIS}^2 \zeta^2 + B_{SPIS}^2}{C_{SPIS}^2 \zeta^2 + D_{SPIS}^2} \quad (9)$$

where

$$\begin{aligned} A_{SPIS} &= 2\lambda q \\ B_{SPIS} &= 1 - \delta\lambda q^2 \\ C_{SPIS} &= 2q(1 + \lambda - \lambda q^2)q \\ D_{SPIS} &= 1 - (1 + \delta + \delta\lambda)q^2 + \delta\lambda q^4 \end{aligned} \quad (10)$$

By substituting equation (9) into (8) and upon some algebraic manipulation, one obtains

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda - \lambda q^2} = \pm \frac{1 - \delta\lambda q^2}{1 - (1 + \delta + \delta\lambda)q^2 + \delta\lambda q^4} \quad (11)$$

It could be found that there is no meaning when the right part in (11) is positive. Accordingly, taking the negative one and simplifying the equation, we can get

$$2\delta\lambda^2 q^4 - 2\lambda(1 + \delta + \delta\lambda)q^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad (12)$$

Supposing that the roots of (12) are q_P and q_Q , we can get the following equation

$$(q^2 - q_P^2)(q^2 - q_Q^2) = q^4 - (q_P^2 + q_Q^2)q^2 + q_P^2 q_Q^2 = 0 \quad (13)$$

Comparing (12) and (13), we can conclude that

$$q_P^2 + q_Q^2 = \frac{1 + \delta + \delta\lambda}{\delta\lambda} \quad (14)$$

The values at P and Q should be the same to get the optimum stiffness ratio

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda - \lambda q_P^2} = -\frac{\lambda}{1 + \lambda - \lambda q_Q^2} \quad (15)$$

Simplifying (15), we can get

$$q_P^2 + q_Q^2 = \frac{2(1 + \lambda)}{\lambda} \quad (16)$$

Combining (16) and (14) and solving the equation, we can obtain the optimum stiffness ratio

$$\lambda_{opt} = \frac{1 - \delta}{\delta} \quad (17)$$

The two fixed points can be obtained under this condition as

$$q_{P,Q} = \frac{2 \pm \sqrt{2\delta}}{2(1 - \delta)} \quad (18)$$

Assume that $q_P^2 < q_Q^2$.

Based on the optimum stiffness ratio, the response at P and Q can be obtained

$$\mu_T = \left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right|_{q_P, q_Q} \cong (1 - \delta) \sqrt{\frac{2}{\delta}} \quad (19)$$

In the next step, one could adjust the damping ratio so as to make the maximum amplitude of the primary system at the fixed points. The condition can be achieved when the derivatives of the amplitude amplification factor are zero at the two fixed points

$$\frac{\partial}{\partial q^2} \left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right|_{q_P, q_Q} = 0 \quad (20)$$

Solving (20) and substituting the optimum stiffness ratio into the results, we can get

$$\begin{aligned} \zeta_P^2 &= \frac{3\delta^3(2 + \sqrt{2\delta})}{8(1 - \delta)(2 - \delta)} \\ \zeta_Q^2 &= \frac{3\delta^3(2 - \sqrt{2\delta})}{8(1 - \delta)(2 - \delta)} \end{aligned} \quad (21)$$

Taking an average of ζ_P^2 and ζ_Q^2 , we can get the optimum damping ratio

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{3\delta^3}{4(1 - \delta)(2 - \delta)}} \quad (22)$$

(b) Optimal design of the SIS

In the case of SIS in Figure 1(b), the square of the magnitude $|x_1 \omega_n^2 / a_g|$ can be expressed as

$$\left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right|^2 = \frac{A_{SIS}^2 \zeta^2 + B_{SIS}^2}{C_{SIS}^2 \zeta^2 + D_{SIS}^2} \quad (23)$$

where

$$\begin{aligned} A_{SIS} &= 2(1 - \lambda \delta q^2) \\ B_{SIS} &= \delta q \\ C_{SIS} &= 2(1 - (1 + \lambda + \delta \lambda) q^2 + \delta \lambda q^4) \\ D_{SIS} &= \delta(1 - q^2) q \end{aligned} \quad (24)$$

According to the parameter optimization procedures of SPIS, we can get the optimum parameters of SIS as

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{opt} &= \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \\ \zeta_{opt} &= \sqrt{\frac{\zeta_P^2 + \zeta_Q^2}{2}} = \sqrt{\frac{3\delta}{2(2 + \delta)(4 + \delta)}} \\ \mu_T &= \left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right|_{\max} = \sqrt{1 + \frac{2}{\delta}} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \zeta_P^2 &= \frac{(\delta - \sqrt{\delta(2 + \delta)})\delta}{2((\delta + 3)\sqrt{\delta(2 + \delta)} - \delta^2 - 2\delta)} \\ \zeta_Q^2 &= \frac{(\delta + \sqrt{\delta(2 + \delta)})\delta}{2((\delta + 3)\sqrt{\delta(2 + \delta)} + \delta^2 + 2\delta)} \\ q_{P,Q}^2 &= 1 \pm \sqrt{\frac{\delta}{2 + \delta}} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

3.2. The H_∞ -optimal solution for minimizing the mobility transfer function

To the knowledge of the authors, optimization based on the minimization of the performance index μ_V is lacking in Hu et al. (2015). However, it is important to suppress the absolute velocity response of primary system to reduce the noise generated by the structure or the vibrating body (Asami et al., 2018). Therefore, the optimization of SPIS and SIS based on the minimization of the performance index μ_V will be carried out following the same procedure as in Section 3.1.

(a) Optimal design of the SPIS

In the case of the minimization of the mobility transfer function of the primary structure for SPIS in Figure 1(a), the values at P and Q should be the same to get the optimum stiffness ratio

$$\frac{\lambda q_P}{1 + \lambda - \lambda q_P^2} = -\frac{\lambda q_Q}{1 + \lambda - \lambda q_Q^2} \quad (27)$$

Simplifying (27), we can get

$$q_P^2 q_Q^2 = \frac{(1 + \lambda)^2}{\lambda^2} \quad (28)$$

Again, comparing (13) and (12), we can conclude that

$$q_P^2 q_Q^2 = \frac{1 + 2\lambda}{2\delta\lambda^2} \quad (29)$$

Combining (29) and (28) and solving the equation, we can obtain the optimum stiffness ratio

$$\lambda_{opt} = \frac{1 - 2\delta + \sqrt{1 - 2\delta}}{2\delta} \quad (30)$$

which requires $\delta < 1/2$. The optimal damping ratio ζ_{opt} can be obtained as

$$\zeta_{opt} = \sqrt{\frac{\zeta_P^2 + \zeta_Q^2}{2}} \quad (31)$$

where

$$\zeta_{P,Q}^2 = \frac{\delta^2 (a_8 q_{P,Q}^8 - a_6 q_{P,Q}^6 - a_4 q_{P,Q}^4 + a_2 q_{P,Q}^2 - a_0)}{4 q_{P,Q}^2 (-d_4 q_{P,Q}^4 + d_0)} \quad (32)$$

and

$$q_{P,Q}^2 = \frac{\left(2 - \delta \pm \sqrt{\delta(4 - 3\delta + 4\sqrt{1 - 2\delta})}\right) \sqrt{1 - 2\delta} + 2 - 4\delta}{(1 - 2\delta + \sqrt{1 - 2\delta})^2} \quad (33)$$

with

$$\begin{aligned} a_8 &= (1 - 2\delta)^2 (\delta^2 - 4\delta + 2 + 2(1 - \delta)\sqrt{1 - 2\delta}) \\ a_6 &= 2(1 - 2\delta) \left((2 - \delta)(1 - 2\delta) + (2 - 3\delta)\sqrt{1 - 2\delta} \right) \\ a_4 &= \delta(1 - 2\delta) (-7\delta + 6 + 6\sqrt{1 - 2\delta}) \\ a_2 &= 2(2 + \delta - 2\delta^2)\sqrt{1 - 2\delta} - 2(6\delta^2 + \delta - 2) \\ a_0 &= 2(1 - \delta + \sqrt{1 - 2\delta}) \\ d_0 &= \frac{(a_8 = d_4)}{(1 - 2\delta)} \end{aligned} \quad (34)$$

which requires $\delta < 1/2$. Based on the optimum stiffness ratio, the response at P and Q can be obtained

$$\mu_T = \left| \frac{qx_1}{\delta_{st}} \right|_{q_{P,Q}} \cong \frac{(1 - 2\delta + \sqrt{1 - 2\delta})\sqrt{\sqrt{\phi} + \psi}}{\sqrt{\phi} + \delta\sqrt{1 - 2\delta}} \quad (35)$$

where

$$\begin{aligned} \phi &= \delta(1 - 2\delta)(4 - 3\delta + 4\sqrt{1 - 2\delta}) \\ \psi &= (2 - \delta)\sqrt{1 - 2\delta} + 2(1 - 2\delta) \end{aligned} \quad (36)$$

which requires $\delta < 1/2$.

(b) Optimal design of the SIS

According to the parameter optimization procedures of SPIS in Figure 1(a), we can get the optimum parameters of SIS in Figure 1(b)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\text{opt}} &= \frac{1}{\delta} \\ \zeta_{\text{opt}} &= \zeta_P = \zeta_Q = \sqrt{\frac{\delta}{6}} \\ \mu_V &= \left| \frac{qx_1}{\delta_{st}} \right|_{\text{max}} = 2 \frac{\sqrt{\delta + 4 + \sqrt{\delta(\delta + 8)}}}{\delta + \sqrt{\delta(\delta + 8)}} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

3.3. Comparison of optimal solutions

Figure 3 shows the steady-state response of the primary system with optimized inerter-based isolators designed using the two optimization criteria. In this figure, the solid

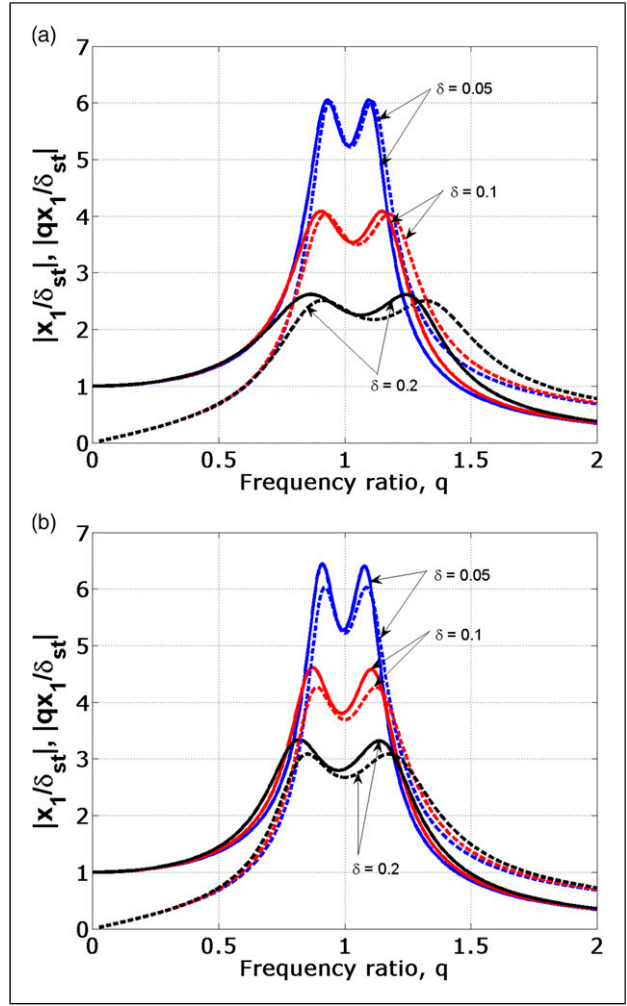


Figure 3. Steady-state response of the primary system attached to the optimized inerter-based isolators for various inerter-to-mass ratios δ (solid line: the compliance transfer functions, dashed line: the mobility transfer functions, $\delta = 0.05$, $\delta = 0.1$, and $\delta = 0.2$): (a) series-parallel inerter system and (b) series inerter system.

and dashed lines show the optimized compliance and mobility transfer functions, respectively. A comparison of these lines reveals that the minimization of the mobility transfer functions enables the further reduction of the evaluation function beyond that of the compliance function. On the other hand, this figure shows that with the increase of the inerter-to-mass ratio δ , the performance becomes better.

The optimal values λ_{opt} and ζ_{opt} and the minimized performance indices μ_T and μ_V are plotted in Figure 4. The solid and dashed lines show the optimized compliance and mobility transfer functions, respectively. These results again confirmed that the parameter values obtained by minimizing the performance indices μ_V are smaller than those obtained using the performance indices μ_T at all mass ratios δ except for damping ratio ζ .

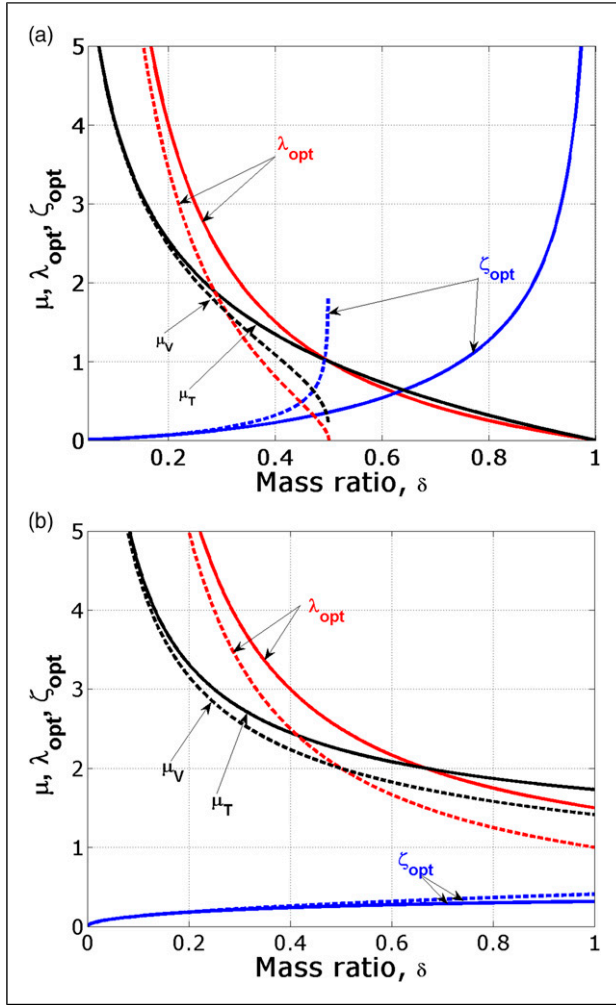


Figure 4. Optimized parameters and minimized performance indices μ_T and μ_V for the interter-based isolators: (a) series-parallel interter system and (b) series interter system.

4. Comparison between the traditional DVA and the interter-based isolators

The solutions for the TDVA are introduced in this section. These solutions are necessary to clarify the performance of interter-based isolators SPIS and SIS. According to the parameter optimization procedures of interter-based isolators, we can get the optimum parameters of TDVA.

In the case of H_∞ -optimal solution for minimizing the compliance transfer function, the following expression was obtained

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{\text{opt}} &= \sqrt{\frac{3\delta^3}{8(1+\delta)^3}} \\ \lambda_{\text{opt}} &= \frac{2(1+\delta)^2}{\delta(2-\delta)} \\ \mu_T &= \left| \frac{x_1}{\delta_{\text{st}} \max} \right| \cong (1+\delta) \sqrt{\frac{2}{\delta}} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

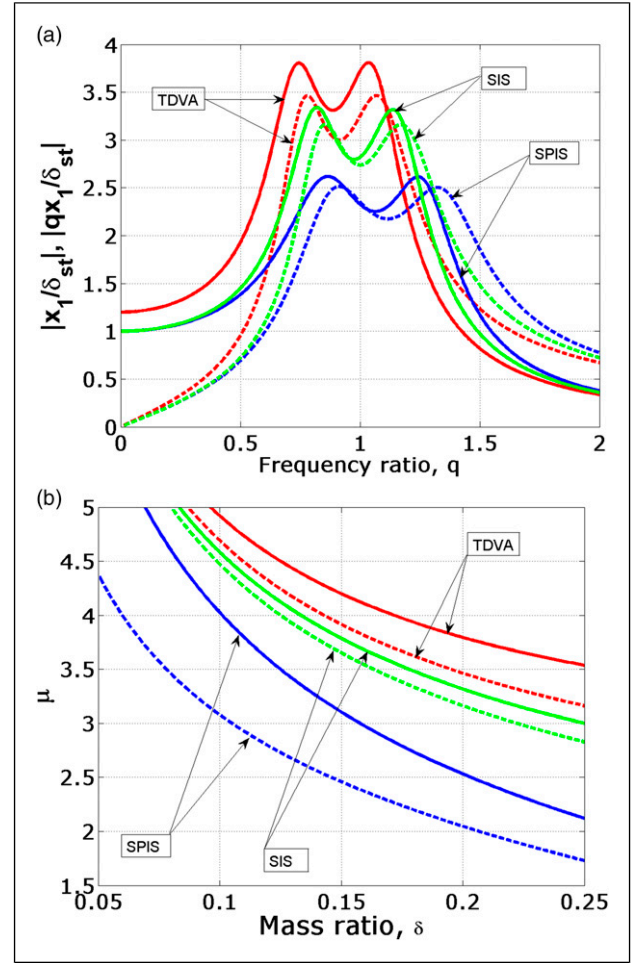


Figure 5. Comparison between the traditional DVA and interter-based isolators versus the same mass ratio (solid line: the compliance transfer functions, dashed line: the mobility transfer functions): (a) the steady-state complex response when $\delta = 0.2$ and (b) the minimized performance indices μ_T and μ_V (TDVA, SIS, and SPIS). Note: DVA: dynamic vibration absorber; TDVA: traditional dynamic vibration absorber; SIS: series interter system; SPIS: series-parallel interter system.

In the case of H_∞ -optimal solution for minimizing the mobility transfer function, the following expression was obtained

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{\text{opt}} &= \sqrt{\frac{3\delta^3}{8(1+\delta)^3}} \\ \lambda_{\text{opt}} &= \frac{2(2-\delta)}{2(1+\delta)^2} \\ \mu_V &= \left| \frac{qx_1}{\delta_{\text{st}} \max} \right| \cong \sqrt{2(1+1/\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Figure 5 shows the comparison of the steady-state and the minimized performance indices μ_T and μ_V between the traditional DVA and interter-based isolators. The solid and dashed lines show the optimized compliance and mobility transfer

functions, respectively. As shown in Figure 5(a), the amplitude response of the compliance transfer functions (solid line) and mobility transfer functions (dashed line) are lower when evaluated using the inerter-based isolators SIS (green line) and SPIS (blue line) when compared with TDVA (red line). Moreover, the amplitude ratio was found to be lower when evaluated using the mobility transfer functions than that when using the compliance transfer functions. Such an observation is confirmed by Figure 5(b), where the comparison of the maximum μ_T and μ_V versus the same mass ratio δ is shown. Moreover, it should be noted that SIS had not shown improvement in Hu et al. (2015) in the case of ground displacement transmissibility, which means the performance of an isolator can also depend on the excitation source considered.

The comparison of the optimal parameters λ and ζ , and the maximum magnitude μ between the inerter systems SPIS and SIS and the traditional DVA with respect to different δ values is shown in Table 1. However, it is important to note that optimal tuning of the proposed inerter-based isolators adds both damping and stiffness to the primary structure in comparison with the traditional DVA

and therefore, the mitigation of structural vibration subjected to harmonic ground motion is more significant for this DVA. However, because the mass ratio is normally quite small and practically less than 0.25, the optimal maximum amplitude of the primary system is plotted in Figure 6 over the range of $0 < \delta \leq 0.25$. As shown in Figure 6, if using SPIS, 40% and 45.32% improvement can be attained in terms of compliance and mobility transfer functions, respectively, as compared with traditional DVA where $\delta = 0.25$ and SIS provided 15.16% and 10.53% improvement, respectively. So, SPIS is superior to SIS and traditional DVA.

5. Response of the primary system under white noise excitation: H_2 optimization

H_2 optimization aims to minimize the total vibration energy or the mean square motion of the object mass when white noise excitation is enforced (Cheung and Wong, 2011). The primary system is usually subject to random excitation in practical engineering, so it is very important and meaningful to investigate the system response to random excitation.

Table 1. Comparison of optimal parameters in H_∞ optimization.

δ	TDVA ^a	SPIS ^a	SIS ^a	TDVA ^b	SPIS ^b	SIS ^b
(a): Maximum magnitude μ						
0.01	14.2836	14.0007	14.1774	14.2123	9.7949	14.1421
0.03	8.4099	7.9200	8.2260	8.2865	5.6468	8.1650
0.05	6.6408	6.0083	6.4031	6.4807	4.3785	6.3246
0.1	4.9193	4.0249	4.5826	4.6904	3.0784	4.4721
0.2	3.7947	2.5298	3.3166	3.4641	2.5942	3.1623
0.5	3.0000	1.0000	2.2361	2.4495	nan	2.0000
1	2.8284	0	1.7321	2.0000	—	1.4142
(b): Optimal stiffness ratio λ						
0.01	102.5226	99.0000	100.5000	102.0100	98.4975	100.0000
0.03	35.9019	32.3333	33.8333	35.3633	31.8256	33.3333
0.05	22.6154	19.0000	20.5000	22.0500	18.4868	20.0000
0.1	12.7368	9.0000	10.5000	12.1000	8.4721	10.0000
0.2	8.0000	4.0000	5.5000	7.2000	3.4365	5.0000
0.5	6.0000	1.0000	2.5000	4.5000	0	2.0000
1	8.0000	0	1.5000	4.0000	—	1.0000
(c): Optimal damping ratio ζ						
0.01	0.0006	0.0006	0.0407	0.0006	0.0006	0.0408
0.03	0.0031	0.0033	0.0702	0.0031	0.0033	0.0707
0.05	0.0064	0.0071	0.0903	0.0064	0.0072	0.0913
0.1	0.0168	0.0209	0.1263	0.0168	0.0216	0.1291
0.2	0.0417	0.0645	0.1750	0.0417	0.0700	0.1826
0.5	0.1178	0.3535	0.2611	0.1178	0.3536	0.2887
1	0.2165	∞	0.3162	0.2165	—	0.4082

Note: TDVA: traditional dynamic vibration absorber; SPIS: series-parallel inerter system; SIS: series inerter system.

^aCompliance transfer functions.

^bMobility transfer functions.

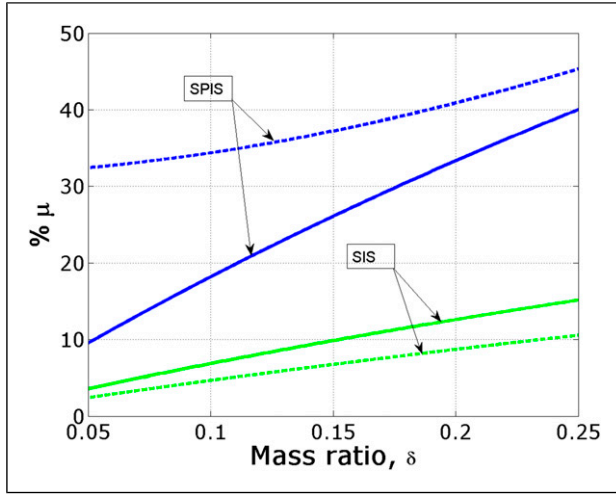


Figure 6. Percentage improvement of inerter-based isolators (solid line: compliance transfer function, and dashed line: mobility transfer function): SPIS and SIS. Note: SPIS: series-parallel inerter system; SIS: series inerter system.

Assume a stationary stochastic ground excitation process a_g/ω_n^2 represented in the frequency domain by a constant double-sided spectral density function (power spectrum) $S(\omega) = S_0$ (ideal white noise).

5.1. The H_2 -optimal solution for minimizing the compliance transfer function

If the system is subjected to random excitation instead of sinusoidal excitation, H_2 optimization would be more desirable than H_∞ optimization (Asami et al., 2002). The performance measure in H_2 optimization is defined as (Asami et al., 2002)

$$I = \frac{E[x_1^2]}{2\pi S_0 \omega_n} \quad (40)$$

where S_0 is the uniform power spectrum density function. The mean square value of x_1 of the object mass m can be calculated as

$$E[x_1^2] = S_0 \omega_n \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right|^2 dq \quad (41)$$

where $|x_1/\delta_{st}|$ is given in (5) or (6). Substituting (41) into (40), one obtains

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x_1}{\delta_{st}} \right|^2 dq \quad (42)$$

With the given δ mass ratios or inertance-to-mass ratios, it is sought to determine optimum values for the stiffness ratio λ and damping ratio ζ dimensionless parameters of the considered inerter-based isolators, which minimize the H_2 performance measure I in equation (42) for the case of

undamped SDOF primary structures under white noise support excitation.

The analytical method described by Hu et al. (2015) is used to calculate the H_2 -norm performance measures in equation (42). The H_2 performance measure I is expressed as follows:

For SPIS

$$I_{SPIS} = \lambda^2 \zeta + \frac{\delta^2 \lambda^2 + \delta(1-2\delta)\lambda + 1}{4\zeta} \quad (43)$$

For SIS

$$I_{SIS} = \frac{\delta^2 \lambda^2 - 2\delta\lambda + \delta + 1}{\zeta} \delta^2 + \frac{1}{4\zeta} \quad (44)$$

Assuming constant mass ratio δ , the H_2 performance measure I in equations (43) and (44) is minimized in terms of the stiffness ratio λ and damping ratio ζ by enforcing the following two conditions

$$\frac{\partial I_{IS}}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial I_{IS}}{\partial \zeta} = 0 \quad (45)$$

With IS, the corresponding inerter-based device. These conditions yield a system of two equations from which the optimal tuning parameters λ and ζ of the proposed inerter-based isolators configuration are found in terms of the mass ratios δ as

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{SPIS}^{opt} &= \frac{6 - (3\delta + \sqrt{9\delta^2 - 36\delta + 4})}{8\delta} \\ \lambda_{SIS}^{opt} &= \frac{1}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{SPIS}^{opt} &= \frac{\delta \sqrt{8 + 24\delta - 6\delta^2 + (4-2\delta)\sqrt{9\delta^2 - 36\delta + 4}}}{2(6 - 3\delta - \sqrt{9\delta^2 - 36\delta + 4})} \\ \zeta_{SIS}^{opt} &= \frac{\sqrt{\delta}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Furthermore, by substitution of the above optimal tuning parameters into equations (43) and (44) respectively, the following expression for the achieved minimum I_{IS} is obtained as

$$\left. \begin{aligned} I_{SPIS}^{opt} &= \frac{6 - (3\delta + \sqrt{9\delta^2 - 36\delta + 4})}{64\delta} \varphi \\ I_{SIS}^{opt} &= \sqrt{\frac{1}{\delta}} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

where

$$\varphi = \sqrt{8 + 24\delta - 6\delta^2 + (4 - 2\delta)\sqrt{9\delta^2 - 36\delta + 4}} \quad (49)$$

5.2. The H_2 -optimal solution for minimizing the mobility transfer function

Similar to Section 5.1, the optimum tuning for SPIS and SIS minimizing the dimensionless mean square velocity I can be obtained.

For SPIS: The H_2 performance measure I can be expressed as

$$I_{\text{SPIS}} = (\lambda^2 + \lambda)\zeta + \frac{\delta^2\lambda^2 - 2\delta(1 - \delta)\lambda + \delta^2 - \delta + 1}{4\zeta} \quad (50)$$

According to equations (45) and (50), the following solution was obtained in this study

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{\text{SPIS}}^{\text{opt}} &= \sqrt{\frac{\delta^2\lambda^2 - 2\delta(1 - \delta)\lambda + \delta^2 - \delta + 1}{4\lambda(1 + \lambda)}} \\ I_{\text{SPIS}}^{\text{opt}} &= \sqrt{(\lambda^2 + \lambda)(\delta^2\lambda^2 - 2\delta(1 - \delta)\lambda + \delta^2 - \delta + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Let \mathfrak{R} be the set of real, positive solutions λ of the cubic equation

$$4\delta^2\lambda^3 + (3\delta^2 + 6\delta(\delta - 1))\lambda^2 + (4\delta(\delta - 1) + 2\delta^2 - 2\delta + 2)\lambda + \delta^2 - \delta + 1 = 0 \quad (52)$$

By making the derivative of $I_{\text{SPIS}}^{\text{opt}}$ with respect to λ zero, the cubic equation (52) can be obtained, and then the optimal λ can be selected from the real, positive solutions of the cubic equation as well as ∞ .

For SIS: The H_2 performance measure I can be express as

$$I_{\text{SIS}} = \frac{\delta^2\lambda^2 - \delta(2 - \delta)\lambda + 1}{\delta^2}\zeta + \frac{1}{4\zeta} \quad (53)$$

According to equations (45) and (53), the following exact solution was obtained in this study

$$\lambda_{\text{opt}} = \frac{2 - \delta}{2\delta}, \quad \zeta_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\delta}{4 - \delta}}, \quad I_{\text{SIS}}^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{4 - \delta}{4\delta}} \quad (54)$$

5.3. Comparison between the traditional DVA and the inerter-based isolators

Now, all the optimal parameters for the inerter-based isolators in H_2 optimization have been derived. In this section, the performance of these inerter-based isolators will be compared with the traditional DVA. For the traditional DVA, the H_2 performance measure can be derived as:

In the case of the H_2 -optimal solution for minimizing the compliance transfer function

$$I_{\text{DVA}} = \frac{(1 + \delta)^3}{\delta^2}\zeta + \frac{\delta^2\lambda^2 + \delta(\delta - 2)(1 + \delta)^2\lambda + (1 + \delta)^4}{4\delta^2\lambda^2\zeta} \quad (55)$$

where the mass ratio δ is defined as $\delta = m_0/m$. Similar to the inerter-based isolators, the optimal parameters can be obtained as

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{\text{opt}} &= \frac{2(1 + \delta)^2}{\delta(2 - \delta)} \\ \zeta_{\text{opt}} &= \sqrt{\frac{\delta^3(4 - \delta)}{16(1 + \delta)^3}} \\ I_{\text{DVA}}^{\text{opt}} &= \sqrt{\frac{(4 - \delta)(1 + \delta)^3}{4\delta}} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

and in the case of the H_2 -optimal solution for minimizing the mobility transfer function

$$I_{\text{DVA}} = \frac{(1 + \delta)^2}{\delta^2}\zeta + \frac{\delta^2\lambda^2 - 2\delta(1 + \delta)\lambda + (1 + \delta)^3}{\delta^2\lambda^2\zeta} \quad (57)$$

Similar to inerter-based isolators, the optimal parameters can be obtained as

$$\lambda_{\text{opt}} = \frac{(1 + \delta)^2}{\delta}, \quad \zeta_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\delta^3}{4(1 + \delta)^3}}, \quad I_{\text{DVA}}^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{1 + \delta}{\delta}} \quad (58)$$

Figures 7–9 show the comparison between the traditional DVA and the inerter-based isolators in H_2 optimization. In these figures, the solid and dashed lines show the compliance and mobility transfer functions, respectively. These figures indicate that the H_2 solutions obtained using the mobility and compliance transfer functions are very similar. Therefore, it is possible to calculate the H_2 -optimal solutions minimizing the compliance transfer function by slightly modifying equations (51), (54), (56), and (58). As shown in Figure 7(a), for the same δ , the inerter-based isolators SPIS and SIS perform better than the traditional DVA when δ is less than 0.12 and when $\delta \geq 0$, respectively. As shown in Figure 7, when $\delta < 0.12$, the configuration SPIS performs best than SIS. From Figure 9, it is shown that the damping ratios ζ of the traditional DVA are normally smaller than the inerter-based isolators. However, the mass ratio δ for the traditional DVA is practically less than 0.25 (Cheung and Wong, 2011; Inman, 2008). From this point of view, it is shown that when $\delta = 0.25$ (see Figure 7(b)), SIS provides 26.10% and 13.40% improvement in terms of

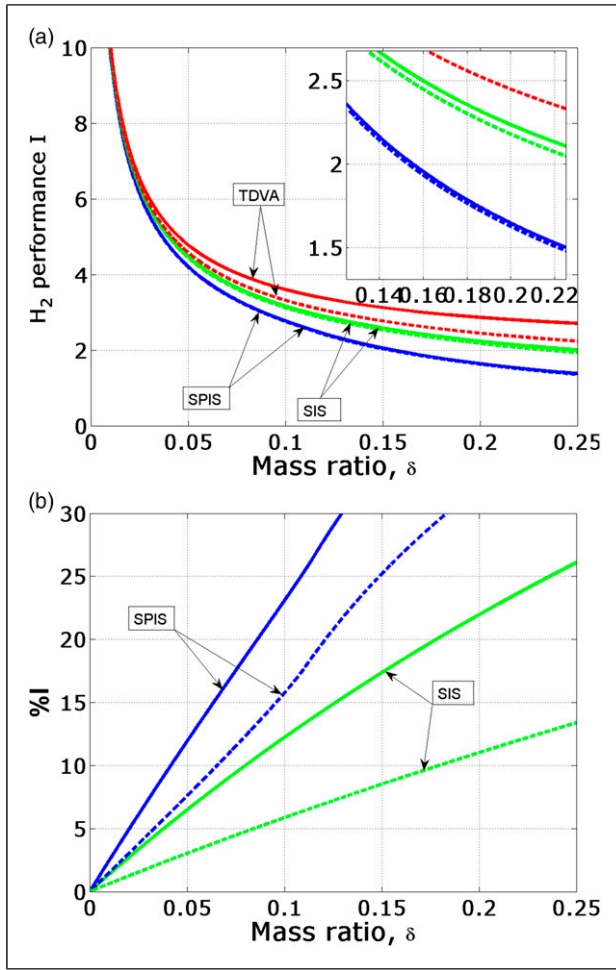


Figure 7. Comparison between inerter-based isolators and the traditional DVA (solid line: steady-state response of displacement, and dashed line: the steady-state response of velocity). (a) The H_2 performance (TDVA, SPIS, and SIS); (b) percentage improvement of inerter-based isolators with respect to the traditional DVA (SPIS and SIS). Note: DVA: dynamic vibration absorber; TDVA: traditional dynamic vibration absorber; SPIS: series-parallel inerter system; SIS: series inerter system.

compliance and mobility transfer functions, respectively, compared with the traditional DVA. Because SPIS is applicable only in the region $\delta < 0.12$, when $\delta = 0.1$ (see Figure 7(b)), SPIS provides 23% and 15.75% improvement in terms of compliance and mobility transfer functions, respectively, compared with the traditional DVA. The detailed values of the parameters are given in Table 2, where the performance of the inerter-based isolators can be further improved by increasing the inertance-to-mass ratio δ as even $\delta > 0.25$, because large inertance can easily be obtained without increasing the physical mass of the whole system, which is a potential advantage of inerter-based isolators compared with the traditional DVA. Moreover, it is important to note that under a random excited primary structure, optimal tuning of the proposed inerter-based isolators adds both damping and stiffness to the primary structure in comparison

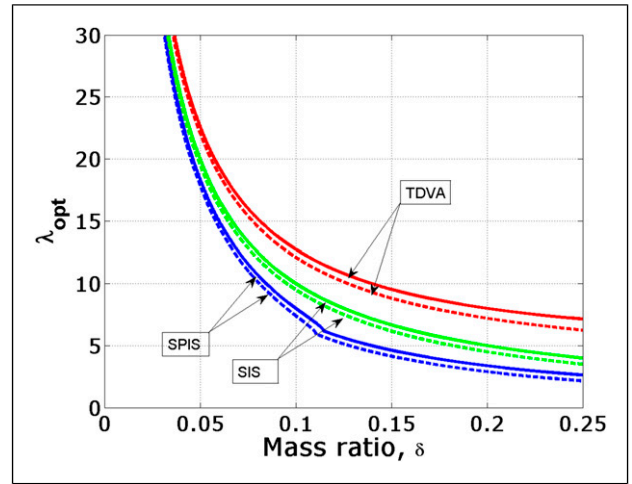


Figure 8. Optimal stiffness ratio λ in H_2 optimization (TDVA, SPIS, and SIS). Note: TDVA: traditional dynamic vibration absorber; SPIS: series-parallel inerter system; SIS: series inerter system.

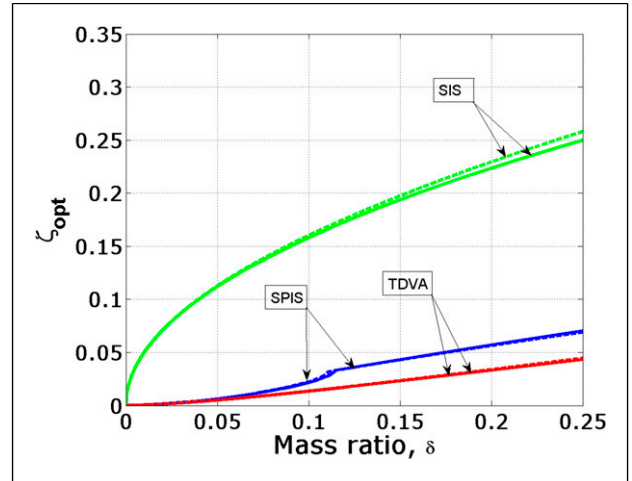


Figure 9. Optimal damping ratio ζ in H_2 optimization (TDVA, SPIS, and SIS). Note: TDVA: traditional dynamic vibration absorber; SPIS: series-parallel inerter system; SIS: series inerter system.

with the traditional DVA and therefore, the mitigation of structural vibration is more significant for this DVA.

To get more realistic results, 50-s random excitation is constructed, which is composed of 5000 normalized random numbers with zero mean value and unit variance, respectively. The time history of the random excitation is shown in Figure 10.

Based on the parameters optimized in H_2 optimization, the response of primary system with different absorbers can be obtained. The time history of these primary systems is shown in Figures 11–13. The response variances and percentage decrease of the primary system for different absorbers are summarized in Table 3. It can be observed that the attenuation percentages of the mean square response of the primary system are close to those of Figure 7(b) under white noise, indicating the validity of the proposed design.

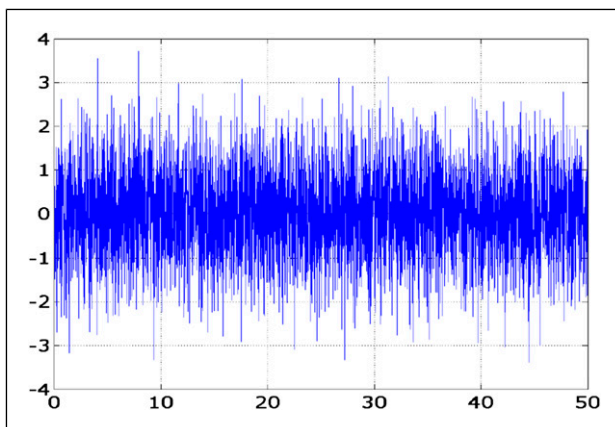
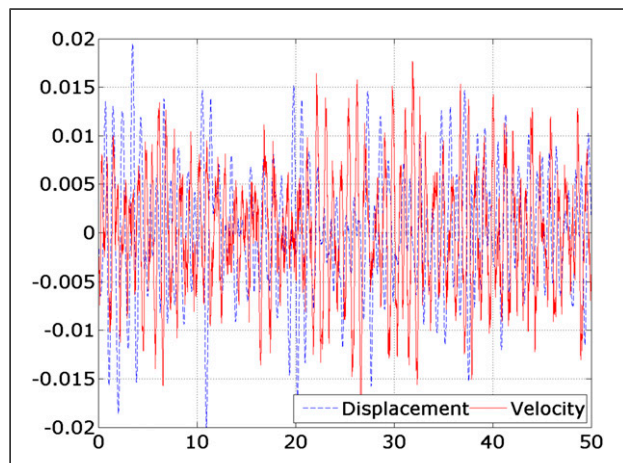
Table 2. Comparison of optimal parameters in H_2 optimization.

δ	TDVA ^a	SPIS ^a	SIS ^a	TDVA ^b	SPIS ^b	SIS ^b
(a): H_2 performance measure I						
0.01	10.1377	9.8868	10.0000	10.0499	9.8990	9.9875
0.03	6.0125	5.5749	5.7735	5.8595	5.5945	5.7518
0.05	4.7815	4.2118	4.4721	4.5826	4.2351	4.4441
0.1	3.6024	2.7713	3.1623	3.3166	2.7941	3.1225
0.2	2.8649	—	2.2361	2.4495	—	2.1794
0.5	2.4303	—	1.4142	1.7321	—	1.3229
1	2.4495	—	1.0000	1.4142	—	0.8660
(b): Optimal stiffness ratio λ						
0.01	102.5226	98.4764	100.0000	102.0100	97.9738	99.5000
0.03	35.9019	31.7549	33.3333	35.3633	31.2458	32.8333
0.05	22.6154	18.3520	20.0000	22.0500	17.8341	19.5000
0.1	12.7368	8.0000	10.0000	12.1000	7.4095	9.5000
0.2	8.0000	—	5.0000	7.2000	—	4.5000
0.5	6.0000	—	2.0000	4.5000	—	1.5000
1	8.0000	—	1.0000	4.0000	—	0.5000
(c): Optimal damping ratio ζ						
0.01	0.0005	0.0005	0.0500	0.0005	0.0005	0.0501
0.03	0.0025	0.0028	0.0866	0.0025	0.0028	0.0869
0.05	0.0052	0.0063	0.1118	0.0052	0.0063	0.1125
0.1	0.0135	0.0216	0.1581	0.0137	0.0224	0.1601
0.2	0.0332	—	0.2236	0.0340	—	0.2294
0.5	0.0900	—	0.3535	0.0962	—	0.3779
1	0.1531	—	0.5000	0.3062	—	0.5774

Note: TDVA: traditional dynamic vibration absorber; SPIS: series-parallel inerter system; SIS: series inerter system.

^aCompliance transfer functions.

^bMobility transfer functions.

**Figure 10.** Time history of the random excitation.**Figure 11.** Time history of the primary system with traditional dynamic vibration absorber under $\delta = 0.1$.

6. Conclusion

On the basis of the two design criteria (H_∞ optimization and H_2 optimization), inerter-based isolators in SPIS and SIS were optimized to minimize the compliance and mobility

transfer function of the primary vibratory system. A comparison of the present results in front of TDVA yielded the following conclusions. (1) The algebraic solution for the H_∞ optimization of the proposed inerter-based isolators was

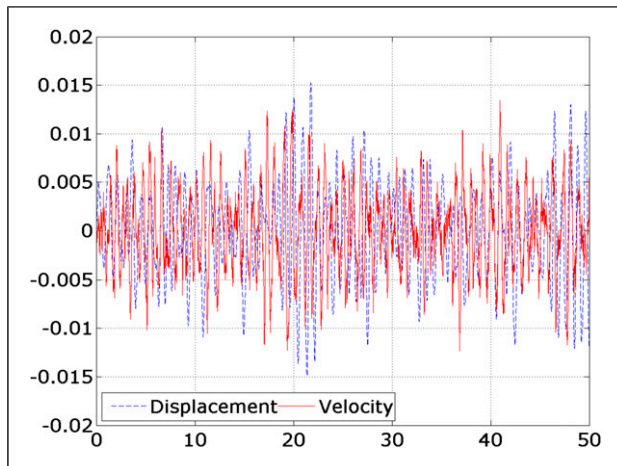


Figure 12. Time history of the primary system with series-parallel inerter system under $\delta = 0.1$.

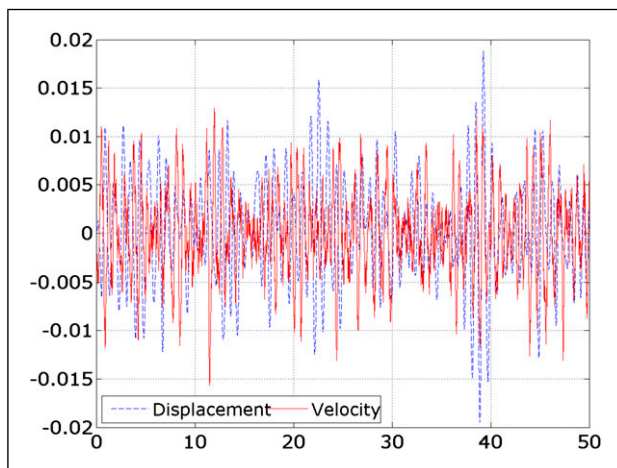


Figure 13. Time history of the primary system with series inerter system under $\delta = 0.1$.

Table 3. Variance and decrease of the displacement and velocity of the primary system.

Model	Variance	Decrease (%)
(a): Displacement		
TDVA	3.2309×10^{-5}	
SIS	2.8326×10^{-5}	12.33
SPIS	2.4161×10^{-5}	25.22
(b): Velocity		
TDVA	2.8118×10^{-5}	
SIS	2.5619×10^{-5}	8.89
SPIS	2.3511×10^{-5}	16.38

Note: TDVA: traditional dynamic vibration absorber; SPIS: series-parallel inerter system; SIS: series inerter system.

successfully obtained for the first time. The H_∞ optimum SPIS and the H_∞ optimum SIS can reduce the peak vibration amplitude at the fixed points by 40% and 15.16% for the compliance transfer function, respectively, and by 45.32%

and 10.53%, for the mobility transfer function, respectively, when compared with H_∞ optimum TDVA. (2) In the H_2 optimization using the compliance and mobility transfer functions, the optimal configuration of SPIS is applicable only in the region $\delta < 0.12$. (3) Because of this, it was impossible to obtain an algebraic solution of the H_2 criterion for $\delta < 0.12$. (4) Regarding the H_2 optimization, the solutions obtained using the mobility and compliance transfer functions differed only slightly, whereas they differed greatly in the H_∞ optimization solutions except for damping ratio ζ . (5) Finally, the H_2 optimum SPIS and the H_2 optimum SIS can reduce the mean square response of primary system by 23% and 26.10% in the case of compliance transfer function, respectively and by 17.75% and 13.40% in the case of mobility transfer function, respectively, when compared with H_2 optimum TDVA.

Acknowledgements

The authors would like to thanks the associate editor and the anonymous referees for their valuable comments and suggestions, which helped us to improve the article.

Declaration of conflicting interests

The author(s) declared no potential conflicts of interest with respect to the research, authorship, and/or publication of this article.

Funding

The author(s) received no financial support for the research, authorship, and/or publication of this article.

ORCID iD

Marcial Baduidana  <https://orcid.org/0000-0002-3421-9321>

References

Abé M and Fujino Y (1994) Dynamic characterization of multiple tuned mass dampers and some design formulas. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 23(8): 813–835.

Anajafi H and Medina RA (2018a) Comparison of the seismic performance of a partial mass isolation technique with conventional TMD and base-isolation systems under broad-band and narrow-band excitations. *Engineering Structures* 158: 110–123.

Anajafi H and Medina RA (2018b) Partial mass isolation system for seismic vibration control of buildings. *Structural Control and Health Monitoring* 25(2): e2088.

Anajafi H and Medina RA (2018c) Robust design of a multi-floor isolation system. *Structural Control and Health Monitoring* 25(4): e2130.


Asami T, Mizukawa Y and Ise T (2018) Optimal design of double-mass dynamic vibration absorbers minimizing the mobility transfer function. *Journal of Vibration and Acoustics* 40: 061012–061014.

Asami T, Nishihara O and Baz AM (2002) Analytical solutions to H_∞ and H_2 optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems. *Journal of Vibration and Acoustics* 124(2): 2849–2855.

- Brzeski P, Pavlovskaja E, Kapitaniak T, et al. (2015) The application of inerter in tuned mass absorber. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 70: 20–29.
- Chen MZQ (2008) A note on PIN polynomials and PRIN rational functions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* 55(5): 462–463.
- Chen MZQ, Hu Y and Chen G (2016) Application of semi-active inerter in semi-active suspensions via force tracking. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 138(4): 041014.
- Chen MZQ, Papageorgiou C, Scheibe F, et al. (2009) The missing mechanical circuit element. *IEEE Circuits and Systems Magazine* 9(1): 10–26.
- Chen MZQ and Smith MC (2009a) A note on tests for positive-real functions. *IEEE Transactions on Automatic Control* 54(2): 390–393.
- Chen MZQ and Smith MC (2009b) Restricted complexity network realizations for passive mechanical control. *IEEE Transactions on Automatic Control* 54(10): 2290–2301.
- Chen MZQ, Wang K, Zou Y, et al. (2013) Realization of a special class of admittances with one damper and one inerter for mechanical control. *IEEE Transactions on Automatic Control* 58(7): 1841–1846.
- Cheung YL and Wong WO (2011) H2 optimization of a non-traditional dynamic vibration absorber for vibration control of structures under random force excitation. *Journal of Sound and Vibration* 330(6): 1039–1044.
- De Domenico D, Deastra P, Ricciardi G, et al. (2019) Novel fluid inerter based tuned mass dampers for optimised structural control of base-isolated buildings. *Journal of the Franklin Institute* 356(14): 7626–7649.
- De Domenico D and Ricciardi G (2018a) An enhanced base isolation system equipped with optimal tuned mass damper inerter (TMDI). *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 47(5): 1169–1192.
- De Domenico D and Ricciardi G (2018b) Improving the dynamic performance of base-isolated structures via tuned mass damper and inerter devices: a comparative study. *Structural Control and Health Monitoring* 25(10): e2234.
- De Domenico D and Ricciardi G (2018c) Optimal design and seismic performance of tuned mass damper inerter (TMDI) for structures with nonlinear base isolation systems. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 47(12): 2539–2560.
- Den Hartog J (1956) *Mechanical Vibrations*. 4th edition. New York: McGraw-Hill.
- Den Hartog JP (1985) *Mechanical Vibrations*. New York: Dover Publications Inc.
- Giaralis A and Petrini F (2017) Wind-induced vibration mitigation in tall buildings using the tuned mass-damper-inerter. *Journal of Structural Engineering* 143(9): 04017127.
- Gutierrez SM and Adeli H (2013) Tuned mass damper. *Archives of Computational Methods in Engineering* 20(4): 419–431.
- Hoang N, Fujino Y and Warnitchai P (2008) Optimal tuned mass damper for seismic applications and practical design formulas. *Engineering Structures* 30(3): 707–715.
- Hu Y, Chen MZQ and Shu Z (2014) Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements. *Journal of Sound and Vibration* 333(8): 2212–2225.
- Hu Y, Chen MZQ, Shu Z, et al. (2015) Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution. *Journal of Sound and Vibration* 346: 17–36.
- Ikago K, Saito K and Inoue N (2012) Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 41: 453–474.
- Inman DJ (2008) *Engineering Vibration*. 3rd edition. Upper Saddle River: Prentice-Hall Inc.
- Lazar IF, Neild SA and Wagg DJ (2014) Using an inerter-based device for structural vibration suppression. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 43(8): 1129–1147.
- Lazar IF, Neild SA and Wagg DJ (2016) Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers. *Engineering Structures* 122: 62–71.
- Luo H, Zhang R and Weng D (2016) Mitigation of liquid sloshing in storage tanks by using a hybrid control method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 90: 183–195.
- Marian L and Giaralis A (2014) Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems. *Probabilistic Engineering Mechanics* 38: 156–164.
- Pietrosanti D, De Angelis M and Basili M (2017) Optimal design and performance evaluation of systems with tuned mass damper inerter (TMDI). *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 46(8): 1367–1388.
- Radu A, Lazar IF and Neild SA (2019) Performance-based seismic design of tuned inerter dampers. *Structural Control and Health Monitoring* 26: e2346.
- Saitoh M (2012) On the performance of gyro-mass devices for displacement mitigation in base isolation systems. *Structural Control and Health Monitoring* 19(2): 246–259.
- Sara YZ, Jiang JZ and Neild S (2016) Passive vibration suppression using inerters for a multi-storey building structure. *Journal of Physics: Conference Series* 744: 012044.
- Smith MC (2002) Synthesis of mechanical networks: the inerter. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(10): 1648–1662.
- Smith MC and Wang F-C (2004) Performance benefits in passive vehicle suspensions employing inerters. *Vehicle System Dynamics* 42(4): 235–257.
- Tributsch A and Adam C (2012) Evaluation and analytical approximation of tuned mass damper performance in an earthquake environment. *Smart Structures and Systems* 10: 155–179.
- Wang F-C and Chan H-A (2011) Vehicle suspensions with a mechatronic network strut. *Vehicle System Dynamics* 49(5): 811–830.
- Wang F-C, Hsieh M-R and Chen H-J (2012) Stability and performance analysis of a full-train system with inerters. *Vehicle System Dynamics* 50(4): 545–571.
- Wang J-F and Lin C-C (2005) Seismic performance of multiple tuned mass dampers for soil-irregular building interaction systems. *International Journal of Solids and Structures* 42(20): 5536–5554.
- Wang K and Chen MZQ (2012) Generalized series-parallel RLC synthesis without minimization for biquadratic impedances. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs* 59(11): 766–770.
- Zhang R, Zhao Z and Dai K (2019) Seismic response mitigation of a wind turbine tower using a tuned parallel inerter mass system. *Engineering Structures* 180: 29–39.
- Zuo L (2009) Effective and robust vibration control using series multiple tuned-mass-dampers. *Journal of Vibration and Acoustics* 131(3): 031003.

Parameters optimization of series–parallel inerter system with negative stiffness in controlling a single–degree–of–freedom system under base excitation

Marcial Baduidana¹ , Xiaoran Wang² and Aurelien Kenfack-Jiotsa^{1,3}

Journal of Vibration and Control
2021, Vol. 0(0) 1–18
© The Author(s) 2021
Article reuse guidelines:
sagepub.com/journals-permissions
DOI: 10.1177/1077546320985335
journals.sagepub.com/home/jvc


Abstract

This study proposes a series–parallel inerter system with negative stiffness for the passive vibration control of an undamped single–degree–of–freedom system under base excitation. The necessary and sufficient conditions for stability of series–parallel inerter system with negative stiffness are established by Routh–Hurwitz criterion, and the stability boundary is obtained. The tuning parameters of the series–parallel inerter system with negative stiffness are determined through fixed point theory, and a comparison between the vibration mitigation performance of series–parallel inerter system with negative stiffness, series–parallel inerter system (without negative stiffness), and tuned mass damper is presented considering both harmonic excitation, transient excitation, and random (white noise) excitation. The results of this study demonstrate that under base harmonic excitation, series–parallel inerter system with negative stiffness outperforms the series–parallel inerter system and tuned mass damper in terms of suppression bandwidth and reducing the peak vibration amplitude of the primary mass. In the case of base acceleration–excited primary structure, more than 49.84% and 67.53% improvement can be obtained from series–parallel inerter system with negative stiffness as compared with tuned mass damper in terms of suppression bandwidth and reducing the peak vibration amplitude, respectively. Whereas in the case of base displacement–excited primary structure, more than 78% and 80% improvement can be obtained from series–parallel inerter system with negative stiffness, respectively, following the same criteria. A slightly lower improvement has been obtained from series–parallel inerter system with negative stiffness as compared with series–parallel inerter system, which justified the superiority of series–parallel inerter system compared to tuned mass damper. The transient response investigation showed that series–parallel inerter system with negative stiffness outperforms the series–parallel inerter system and tuned mass damper in terms of much shorter stabilization times and lower peak amplitude of the primary mass. Finally, the further comparison among these devices (series–parallel inerter system with negative stiffness, series–parallel inerter system, and tuned mass damper) under white noise excitation also shows that series–parallel inerter system with negative stiffness is superior to series–parallel inerter system and tuned mass damper for a small inertance mass ratio. This result could provide a theoretical basis for the design of inerter-based isolators with negative stiffness.

Keywords

Inerter vibration absorber, H^∞ optimization, fixed point theory, negative stiffness, base excitation

1. Introduction

Dynamic vibration absorbers (DVAs) or tuned mass dampers (TMDs) are widely utilized as effective passive vibration control device to reduce excessive and undesirable vibrations from an excitatory source to a receiving structure. The first DVA without damper was originally introduced and developed by [Frahm \(1909\)](#) but was only useful in narrow frequency range very close at the natural frequency of DVA. To extend the frequencies range, [Ormondroyd and](#)

¹Department of Physics, Faculty of Science, Laboratory of Mechanics, Materials and Structures, University of Yaounde I, Cameroun

²School of Transportation Science and Engineering, Beihang University, China

³Department of physics, Higher Teacher Training College, University of Yaounde I, Cameroon

Corresponding author:

Marcial Baduidana, Department of Physics, Faculty of Science, Laboratory of Mechanics, Materials and Structures, University of Yaounde I, Box 47, Yaounde, Cameroun.

Email: badui1310@yahoo.fr

Den Hartog (1928) proposed the DVAs with damper, which consists of a spring and viscous damper arranged in parallel and connects between an auxiliary small mass (mass of absorber) and primary structure (the object to be controlled) and has been considered as a standard model of DVAs or TMDs. Hence, several passive design methodologies for DVAs have been developed analytically. The fixed point theory (FPT) of Den Hartog (1956) was commonly used for determining the optimum tuning frequency and damping ratios of conventional TMD (Den Hartog, 1956; Warburton, 1982). Note that the FPT only yields an approximate solution to the H_∞ optimization problem because of discrepancy between fixed point and resonance peak of frequency response. Moreover, the fixed point theory is only valid for the case of harmonic excitation and undamped primary systems, whereas in most cases, random excitations having particular frequency contents (e.g. earthquake excitation and/or wind pressures) are applied to (damped) structures (Pan and Zhang, 2018). However, its high accuracy and efficiency has allowed us to design new models of vibration absorbers (Asami and Nishihara, 1999; Ren, 2001; Wang et al., 2016). To expand the application of DVAs, the H_2 optimization criterion was suggested by Crandall and Mark (1963) for the case when the primary structure is subjected to random excitation. The purpose was to minimize the area under the frequency response curve of the system (i.e. total vibration energy of the structure over all frequencies). After that, the optimal parameters of DVAs according to the H_2 optimization were presented by Iwata (1982) and Asami (1991). The stability maximization criterion and exact solutions of optimum parameters of the TMD were first given by Yamaguchi (1988) with the aim to improve the transient vibration of the structure. This methodology was commonly used in (Asami et al., 2018; Zhou et al., 2019). Different types of TMDs have shown their usefulness in successfully dealing with traditional base isolation systems for the passive control of many building around the world (Gutierrez Soto and Adeli, 2013). However, studies in the past (e.g. see Tributsch and Adam., 2012; Anajafi and Medina., 2018a, 2018b) have identified following deficiencies in the seismic performance of traditional passive control systems: traditional base isolation systems result in large displacement responses at the base of the building; traditional base isolation and TMD systems are not robust against variation in the parameters of the structure and ground excitation; detuning may significantly reduce the efficiency of TMD systems; TMDs need a relatively large mass to be efficiency that is associated with significant drawbacks (e.g. practical problems and conflict with the building architecture); and the drift demands exposed on the TMD itself usually significant. Nevertheless, many studies have been conducted to improve the efficacy and robustness of TMDs using multiple DVA in parallel or series (Abe and Fujino, 1994; Anajafi and Medina, 2018b; Zuo, 2009).

In the objective of achieving an improved control effect and maintaining the structural simplicity, the inerter-based isolators systems could be effectively used in replacing the damper in the traditional base isolation systems (Sara et al., 2016). On the other hand, the use of the inerter in TMDs can reduce the weight of the secondary mass, while maintaining performance similar to that of a system with a higher physical mass. According to Smith (2002), the inerter is a mechanical device with two terminals and it has the property that the generated force is proportional to the relative acceleration between its two terminals en them, and the constant of proportionality is called inertance with a unit of kilogram. Its intrinsic characteristic is reflected in the fact that it can generate a mass much higher than its gravitational mass (Gonzalez-Buelga et al., 2017; Ikago et al., 2012; Sugimura et al., 2012). Based on the inerter device, several inerter-based mechanical networks have been developed in the literature (Sara et al., 2017). Before that, the performance of multiple configurations of inerter-based isolators has been investigated in Hu et al. (2015). In the same way, the tuned inerter damper (Lazar et al., 2014), the tuned viscous mass damper (Ikago et al., 2012), and the tuned mass damper inerter (TMDI) (Marian and Giaralis, 2014a, 2014b) have been identified as building suspensions. Inerter-based devices have been also investigated for mitigation of the liquid sloshing in storage tanks (Jiang et al., 2020; Luo et al., 2016), to enhance the properties of TMDs (Domenico and Ricciardi, 2018a; Domenico et al., 2019), for seismic protection of building structure (Radu et al., 2019), for seismic protection of wind turbine towers (Zhang et al., 2019), for improving the seismic performance of a base-isolated structure (Domenico and Ricciardi, 2018b, 2018c; Saitoh, 2012), for vibration suppression of cables (Lazar et al., 2016), for wind-induced vibration mitigation of tall buildings using the TMDI (Giaralis and Petrini, 2017; Wang et al., 2019a), for vehicles suppression (Hu et al., 2014; Chen et al., 2016), and for vibration control of adjacent structures (Palacios-Quinonero et al., 2019; Basili et al., 2018, 2019).

More recently to further improve the performance of the DVA, Shen et al. (2016, 2017) studied a new type of dynamic vibration absorber with negative stiffness (NSDVA) and finished its parameter optimization. It was found that the DVA with negative stiffness had good control performance. Wang et al. (2017) introduced the negative stiffness connected to the earth in the three-element type of the DVA and found that the three-element type of the DVA with negative stiffness also had good control performance. Thereafter, in (Zhou et al., 2019), the closed-form solutions to optimal parameters of DVAs with negative stiffness under harmonic and transient excitation have been presented. The results suggest that the inclusion of negative stiffness in the classic DVA system can significantly improve the vibration control performance. However, the introduction of negative stiffness in the inerter-based

isolator devices as realized in the above references is rare in the literature for base excitation control considering two inputs for the design: sinusoidal base acceleration and sinusoidal base displacement, which justify the objective of this work. Moreover, for the mechanical device of negative stiffness (which is not mentioned in the above references), the cross-ply composite laminates with residual thermal stress are able to realize negative stiffness (Guo et al., 2018). Besides mechanical device, piezoelectric material shunted with the resistance–inductance–negative capacitor is also a feasible way to implement negative stiffness (Korde et al., 2018; Neubauer and Wallaschek, 2013; Neubauer et al., 2006).

Furthermore, studies have considered the use of the series–parallel inerter system (SPIS) for the control of high-rise buildings subject to ground displacement (Sara et al., 2017), and their performances in terms of reduced vibration amplitude have been demonstrated with efficiency compared to the traditional base isolation systems. However, the inclusion of negative stiffness in such a system to control an undamped primary structure was not taken into account. Although the investigated model in this study can be drawn from the model AIN in Wang et al. (2019b) for a zero secondary mass in AIN, the two systems are not set up in the same way. In fact, at no time do NSPIS and AIN coincide mathematically for a zero mass ratio in AIN, which means that the optimum parameters of AIN are set by the mass ratio between primary and secondary mass, whereas the optimum NSPIS parameters are set by the inertance mass ratio (equivalent mass ratio). However, for a zero-inertance mass ratio in AIN, NSPIS, and AIN can coincide in the case of base acceleration excitation of NSPIS. For this latter case, the performances of AIN with zero-inertance mass ratio become even more limited with than the NSPIS because it is unable to work with high mass ratio as the NSPIS, which can work with high equivalent

mass ratio because of inerter. Furthermore, a systematic study of stability of the system and the optimum parameters based on the ground displacement excited primary structure is not reported in Wang et al. (2019b). So they are presented for the first time in this document. Further, in terms of cost and installation space, the NSPIS is better suited than AIN. Accordingly, the tuning parameters of the NSPIS system in this study are determined based on the aforementioned tuning strategy, that is, FPT under base harmonic excitation, and light will be shed onto the influence of negative stiffness on the series–parallel inerter system (SPIS). According to the characteristic of negative stiffness, the primary system coupled with NSPIS could be potentially unstable. Accordingly, the allowable bounds on negative stiffness will also be predicted.

This study is organized as follows. In the next section, models and analytical solution of the NSPIS implementing on an undamped single-degree-of-freedom (SDOF) primary system are first presented, and then the tuning parameters are analytically derived according to the fixed point theory in Section 3, in which the stability analysis is performed. In Section 4, the performances evaluation of NSPIS and SPIS with respect to TMD is performed under harmonic and transient excitations. The random response of the undamped primary structure with NSPIS, SPIS, and TMD is investigated, and the comparison is made in Section 5. Finally, conclusion is drawn in Section 6.

2. Mathematical models and analytical solution

2.1. Mathematical models

Figure 1(a) shows the undamped SDOF system (SDOF) with the series–parallel inerter system (SPIS) consisting

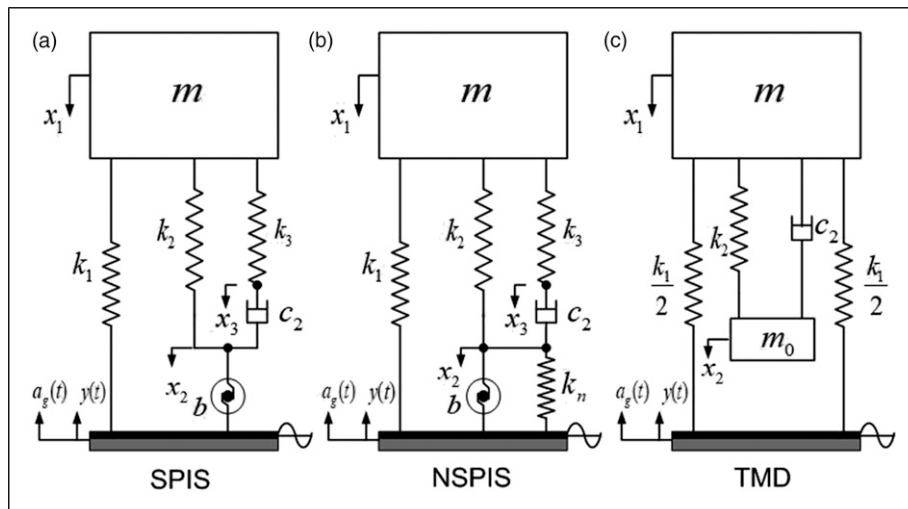


Figure 1. Mechanical models of a single-degree-of-freedom primary structure under base excitation, controlled by (a) A series–parallel inerter system; (b) A series–parallel inerter system with negative stiffness (NSPIS); (c) A tuned mass damper.

device layout one damper (c_2), one inerter (b), and two stiffness (k_2 and k_3) connected between the main mass and the ground. Figure 1(b) shows the device of NSPIS obtained by adding the negative stiffness (k_n) directly connecting the SPIS and the earth. In general, during the theoretical design of inerter-based vibration absorbers, the inerter is idealized as a simple element b linearly proportional to the relative acceleration of its two terminals (Smith 2002). However, many parasitic effects on the real inerter such as ratcheting, backlash, and friction phenomena (for both the mechanical of the device) have been observed experimentally in (Gonzalez-Buelga et al., 2017 and Domenico et al., 2019). Therefore, the parasitic effects must be taken into account later for a more realistic conception of the NSPIS. Furthermore, the springs and the damper in the NSPIS can also present effects of nonlinearity. Because this study evaluates the effect of the inerter and negative stiffness, the general model of the inerter has been adopted, in which the inerter is simplified as b , and the other mechanical elements such as the stiffness coefficients and the damping coefficient are considered to be linear. Finally, Figure 1(c) has shown the conventional model of the TMD taken here as a reference for evaluating the performance of the proposed SPIS and NSPIS. Depending on the form of excitation, its parameters have long been established in (Den Hartog, 1956; Warburton, 1982), respectively (see Appendix).

2.2. Analytical solution

Assume that the undamped SDOF system equipped of the SPIS with negative stiffness in Figure 1(b) is subjected to base excitation (namely, base acceleration-excited $a_g(t)$ and base displacement-excited $y(t)$). According to the fundamental principle of dynamic, the differential equation of motion can be established as

$$\begin{aligned} mx_1'' + k_2(x_1 - x_2) + k_3(x_1 - x_3) + k_1(x_1 - y) &= -ma_g(t) \\ b(x_2'' - y'') + c_2(x_2' - x_3') + k_2(x_2 - x_1) + k_n(x_2 - y) &= 0 \\ c_2(x_3' - x_2') + k_3(x_3 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

where m and k_1 are the main mass and linear stiffness coefficient of the SDOF system. k_2 , k_3 , and c_2 are the linear stiffness and damping coefficients of the series-parallel inerter system. k_n is the additional negative stiffness coefficient in the model. Finally, x_1 , x_2 , and x_3 are the displacement response relative to the ground of the main mass and the split points of the inerter system.

Including the following parametric transformations

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{b}{m}; \quad \lambda = \frac{k_3}{k_1}; \quad \beta = \frac{k_2}{k_1}; \quad \kappa = \frac{k_n}{k_1}; \\ \zeta &= \frac{c_2}{2m\omega_0}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \end{aligned} \quad (2)$$

where ω_0 is the natural frequency of the main mass and μ is the inertance mass ratio. λ , β , and ζ are the stiffness and damping ratios, respectively, of the SDOF system equipped of the SPIS, respectively, and κ is the adding negative stiffness ratio. Resizing the time by $t = \tau/\omega_0$, one has $(d/dt) = \omega_0(d/d\tau)$ and $(d^2/dt^2) = \omega_0^2(d^2/d\tau^2)$ and replace in (1) according to the above dimensionless quantities (equation (2)), the corresponding dimensionless equation of motion can be written as

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \beta(x_1 - x_2) + \lambda(x_1 - x_3) + x_1 - y &= -a_g(\tau) \\ \mu(\ddot{x}_2 - \ddot{y}) + 2\zeta(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + \beta(x_2 - x_1) + \kappa(x_2 - y) &= 0 \\ 2\zeta(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + \lambda(x_3 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Assuming that the system is initially static, that is, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$, the Laplace transformation of equation (3) can be written as follows

$$\begin{aligned} \bar{s}^2 X_1 + \beta(X_1 - X_2) + \lambda(X_1 - X_3) + X_1 - Y &= -A_g \\ \mu\bar{s}^2(X_2 - Y) + 2\zeta\bar{s}(X_2 - X_3) + \beta(X_2 - X_1) + \kappa(X_2 - Y) &= 0 \\ 2\zeta\bar{s}(X_3 - X_2) + \lambda(X_3 - X_1) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

where X_1 , X_2 , X_3 , Y , and A_g are the Laplace transformation of the (NSPIS) displacement x_1 , x_2 , x_3 , $y(t)$, and $a_g(t)$, respectively, where $\bar{s} = jv$. $v = \omega/\omega_0$ and ω are the input frequency ratio and the frequency of the base excitation, respectively. Solve equation (4), the transfer function $H(\bar{s})$ in the Laplace domain in terms of relative displacement X_1 of main mass in Figure 1(b) can be written as

$$H(\bar{s}) = \frac{X_1}{\delta_{st}} = -\frac{N_3\bar{s}^3 + N_2\bar{s}^2 + N_1\bar{s} + N_0}{D_5\bar{s}^5 + D_4\bar{s}^4 + D_3\bar{s}^3 + D_2\bar{s}^2 + D_1\bar{s} + D_0} \quad (5)$$

with $\delta_{st} = A_g$ or Y . The numerator coefficients of base acceleration-excited primary structure (by setting $Y=0$ in equation (4)) and those of base displacement-excited primary structure (by setting $A_g=0$ in equation (4)) are listed as follows, respectively

$$\begin{aligned} \text{acc} - \begin{cases} N_3 = 2\zeta\mu \\ N_2 = \lambda\mu \\ N_1 = 2\zeta(\beta + \lambda + \kappa) \\ N_0 = 2\zeta(\beta + \kappa) \end{cases}, \\ \text{dis} - \begin{cases} N_3 = -2\zeta\mu(\beta + \lambda + 1) \\ N_2 = -\lambda\mu(1 + \beta) \\ N_1 = -2\zeta[(\kappa + 1)(\beta + \lambda) + \kappa] \\ N_0 = -2\zeta(\kappa\beta + \beta + \kappa) \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

And the same denominator coefficients for both base excited primary structure are listed as follows

$$\begin{cases} D_5 = 2\zeta\mu \\ D_4 = \lambda\mu \\ D_3 = 2\zeta(\beta\mu + \lambda\mu + \beta + \lambda + \kappa + \mu) \\ D_2 = \lambda(\beta\mu + \beta + \kappa + \mu) \\ D_1 = 2\zeta[(\beta + \lambda + 1)\kappa + (\beta + \lambda)] \\ D_0 = \lambda[(\beta + 1)\kappa + \beta] \end{cases} \quad (7)$$

where the notations *acc* and *dis* denote the base acceleration-excited and base displacement-excited, respectively. Note that by setting $\kappa = 0$ into equation (5) according to (6) and (7), the transfer function in terms of relative displacement X_1 of the main mass m for the SDOF system equipped of the series-parallel inerter system (SPIS) is retrieved. In this regard, the SDOF system with the SPIS may be viewed as a special case of the SDOF system with the NSPIS.

By collecting the real and imaginary parts of numerator and denominator in equation (5), the squared module of the transfer function can be expressed as

$$G^2 = \frac{|X_1|^2}{|\delta_{st}|^2} = \frac{4\zeta^2 A^2 + B^2}{4\zeta^2 C^2 + D^2} \quad (8)$$

where

For base acceleration-excited primary structure

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\Omega}[\beta + \lambda + \kappa - \mu\Omega] \\ B &= \lambda[\beta + \kappa - \mu\Omega] \\ C &= \sqrt{\Omega}[(\beta + \lambda + 1)\kappa + \beta + \lambda - (\beta\mu + \lambda\mu + \beta \\ &\quad + \lambda + \kappa + \mu)\Omega + \mu\Omega^2] \\ D &= \lambda[(\beta + 1)\kappa + \beta - (\beta\mu + \beta + \kappa + \mu)\Omega + \mu\Omega^2] \end{aligned} \quad (9)$$

For base displacement-excited primary structure

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\Omega}[(\kappa + 1)(\beta + \lambda) + \kappa - \mu(1 + \beta + \lambda)\Omega] \\ B &= \lambda[\kappa\beta + \beta + \kappa - \mu(1 + \beta)\Omega] \\ C &= \sqrt{\Omega}[(\kappa + 1)(\beta + \lambda) + \kappa - (\beta\mu + \lambda\mu + \beta \\ &\quad + \lambda + \kappa + \mu)\Omega + \mu\Omega^2] \\ D &= \lambda[(\beta + 1)\kappa + \beta - (\beta\mu + \beta + \kappa + \mu)\Omega + \mu\Omega^2] \end{aligned} \quad (10)$$

with the following change $\Omega = v^2$ to simplify the process.

3. Parameters optimization of NSPIS

In this section, the primary system undergoes two types of base sinusoidal disturbances (namely, base acceleration-excited and base displacement-excited), and the parameters of the NSPIS are tuned by the fixed point theory. Moreover, the effects of inertance mass and negative stiffness ratios on the tuning parameters are presented to better

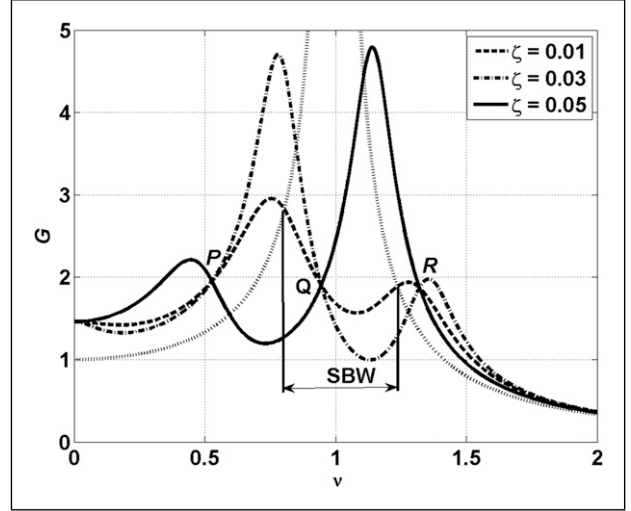


Figure 2. Amplitude–frequency curves of the NSPIS system with parameters as $\mu = 0.05$, $\lambda = 0.05$, $\beta = 0.09$, and $\kappa = -0.07$, and SBW denotes the suppression bandwidth.

understand their role. However, the permissible bound and the optimal value on the negative stiffness ratio (κ) will be defined in each excitation scenario.

3.1. Base acceleration-excited primary structure

The undamped primary structure with the NSPIS is subjected to harmonic base acceleration excitation as shown in Figure 1(b). The design of the NSPIS (or SPIS) presented in this document is to determine the optimum values of damping ratio ζ and stiffness ratios λ , β , and κ defined as function of the mass ratio between the inertance coefficient and the main mass (called inertance mass ratio), so that the vibration amplitude of the primary system without damper is minimized at the fixed points. This is consistent with the FPT of Den Hartog (1985). Accordingly, Figure 2 shows the frequency response curves (by using equation (8) of the undamped primary system with the NSPIS (Figure 1(b)) for various absorber damping ratio (0.01, 0.02, and 0.05). In this figure, the frequency curves pass through three invariant points P , Q , and R independent of absorber damping when a harmonic acceleration is applied to the base of the primary system. To locate fixed point values P , Q , and R , the following equation must be considered

$$\frac{A}{C} = \pm \frac{B}{D} \quad (11)$$

with $\kappa \neq 0$. It could be found that there is no meaning when the right part in (11) is positive. Accordingly, taking the negative one and simplifying the equation, we can get

$$\Omega^3 + a_2\Omega^2 + a_1\Omega + a_0 = 0 \quad (12)$$

where

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= -\frac{2\beta\mu + \lambda\mu + 4\beta + 2\lambda + 4\kappa + 2\mu}{2\mu} \\ \alpha_1 &= \frac{\kappa^2 + (2\beta\mu + \lambda\mu + 2\beta + \lambda + 2\mu)\kappa + \beta^2\mu}{\mu^2} \\ &\quad + \frac{\beta\lambda\mu + \beta^2 + \beta\lambda + 2\beta\mu + \lambda\mu}{\mu^2} \\ \alpha_0 &= -\frac{(2\beta + \lambda + 2)\kappa^2 + 2(\beta^2 + \beta\lambda + 2\beta + \lambda)\kappa}{2\mu^2} + 2\beta(\beta + \lambda)\end{aligned}\quad (13)$$

By simple deducing of the observations made in [Figure 2](#) concerning equation (8), there exist two equal values of G independent of absorber damping ζ .

Accordingly, when $\zeta \rightarrow \infty$

$$|G| = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{\beta + \lambda + \kappa - \mu\Omega}{(\beta + \lambda + 1)\kappa + \beta + \lambda - (\beta\mu + \lambda\mu + \beta + \lambda) + \kappa + \mu)\Omega + \mu\Omega^2} \right| \quad (14)$$

and when $\zeta = 0$

$$|G| = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{\beta + \kappa - \mu\Omega}{(\beta + 1)\kappa + \beta - (\beta\mu + \beta + \kappa + \mu)\Omega + \mu\Omega^2} \right| \quad (15)$$

Therefore, one can get

$$|G| = \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right| = \left| \frac{2(\beta + \kappa) + \lambda - 2\mu\Omega}{\lambda[1 + \kappa - (1 + \mu)\Omega]} \right| \quad (16)$$

Let Ω_P , Ω_Q , and Ω_R be the real roots of equation (12) corresponding to fixed points P , Q , and R . Alternatively, these roots must be verified

$$\begin{aligned}\left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_P &= \frac{2(\beta + \kappa) + \lambda - 2\mu\Omega_P}{\lambda[1 + \kappa - (1 + \mu)\Omega_P]} \\ \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_Q &= \frac{2(\beta + \kappa) + \lambda - 2\mu\Omega_Q}{\lambda[1 + \kappa - (1 + \mu)\Omega_Q]} \\ \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_R &= \frac{2(\beta + \kappa) + \lambda - 2\mu\Omega_R}{\lambda[1 + \kappa - (1 + \mu)\Omega_R]}\end{aligned}\quad (17)$$

The tuning approach of [Den Hartog \(1985\)](#) suggests that the peak response of the considered primary structure is minimized when G attains the same value at the points P , Q , and R (see [Figure 3](#)). First by setting the fixed points P and R at the same height, that is writing $|X_1/\delta_{st}|_P = |X_1/\delta_{st}|_R$, one can obtain the following relationship

$$\lambda = \frac{2\mu(1 + \kappa)}{1 + \mu} - 2(\beta + \kappa) \quad (18)$$

Substituting equations (18) into (12) according (13), one can get

$$[(1 + \mu)\Omega - (1 + \kappa)][\mu^2\Omega^2 - 2\mu^2\Omega - (1 + \mu)\beta^2 + 2\beta\mu - \kappa^2 + 2(\mu - \beta)\kappa] = 0 \quad (19)$$

Solving (19) for Ω leads to

$$\begin{aligned}\Omega_P &= \frac{\mu - \sqrt{(1 + \mu)\beta^2 - 2\beta(\mu - \kappa) + (\mu - \kappa)^2}}{\mu} \\ \Omega_Q &= \frac{1 + \kappa}{1 + \mu}\end{aligned}\quad (20)$$

$$\Omega_R = \frac{\mu + \sqrt{(1 + \mu)\beta^2 - 2\beta(\mu - \kappa) + (\mu - \kappa)^2}}{\mu}$$

Afterward (17) can be written as

$$\begin{aligned}\left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_{P,R} &= \frac{\mu}{\mu - \kappa - (1 + \mu)\beta} \\ \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|_Q &= \frac{(1 + \mu)(\mu - \kappa - \beta\mu - \beta)}{\mu^2 - 2\mu\kappa + \kappa^2}\end{aligned}\quad (21)$$

Second, setting the three fixed points P , R , and Q to the same height, that is writing $|X_1/\delta_{st}|_{P,R} = |X_1/\delta_{st}|_Q$ in (21), the first optimum tuning condition with respect to β can be obtained

$$\beta_{\text{opt}} = \frac{(1 + \mu - \sqrt{\mu^2 + \mu})(\mu - \kappa)}{(1 + \mu)^2} \quad (22)$$

Then, substituting (22) into (18), the second optimum tuning condition with respect to λ can be obtained

$$\lambda_{\text{opt}} = \frac{2(\mu - \kappa)\sqrt{\mu^2 + \mu}}{(1 + \mu)^2} \quad (23)$$

Based on the optimal parameters in (22) and (23), the normalized amplitude at the fixed points P , Q , and R can be obtained as

$$\left| \frac{X_1}{A_g} \right|_{P,Q,R} = \frac{\sqrt{\mu^2 + \mu}}{\mu - \kappa} \quad (24)$$

Next, step one could adjust the damping ratio so as to make the maximum amplitude of the primary system at the fixed points at the same height (see [Figure 3](#)). The condition can be achieved when the derivatives of the amplitude amplification factor are zero at the two fixed points P and R

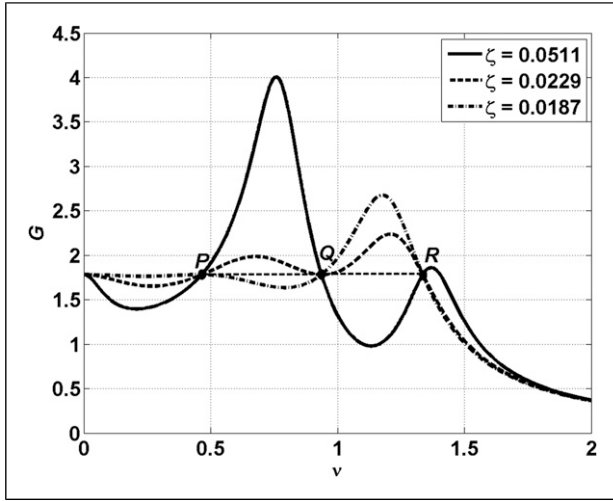


Figure 3. Amplitude–frequency curves of the NSPIS system with parameters as $\mu = 0.05$, $\lambda = 0.0536$, $\beta = 0.0957$, and $\kappa = -0.0786$.

$$\left. \frac{\partial G^2}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_P, \Omega_R} = 0 \quad (25)$$

Solving (25) after substituting the optimum parameters λ_{opt} and β_{opt} and take the square of average value of damping ratios at the fixed points P and R , we can get the optimum damping ratio $\zeta = \sqrt{(\zeta_P^2 + \zeta_R^2)}/2$ (Den Hartog, 1985). However, it is difficult to obtain a reducible solution because of the complexity of equation (25). Nevertheless, Figure 3 shows that when the two resonance peaks approximate at the same height, one could observe that the point Q almost the area where the slope of the amplitude–frequency curve is zero. So that the approximation of the solution given by (26) is adopted

$$\left. \frac{\partial G^2}{\partial \Omega} \right|_{\Omega_Q} \cong 0 \quad (26)$$

Solve (26) according to (20), (22), and (23), we get the optimal damping ratio for the NSPIS

$$\zeta_{opt} \cong \sqrt{\frac{20(\mu - \kappa)^2 (\sqrt{\mu^2 + \mu} - \mu) \mu}{17(1 + \mu)^2 (1 + \kappa) (\mu + \sqrt{\mu^2 + \mu})}} \quad (27)$$

3.2. Base displacement–excited primary structure

The undamped primary structure with the NSPIS is subjected to base displacement excitation as shown in Figure 1(b). For the case of base displacement excitation, the optimum parameters can be obtained according to the parameter optimization procedures above

$$\begin{aligned} \beta_{opt} &= \frac{(\mu + 1 - \sqrt{\mu^2 + \mu})(\mu - \kappa)}{(1 + \mu)(1 + \kappa)}, \\ \lambda_{opt} &= \frac{2(\mu - \kappa)\sqrt{\mu^2 + \mu}}{(1 + \mu)(1 + \kappa)}, \\ \zeta_{opt} &= \frac{\sqrt{\mu(\kappa - \mu)^2 [2(1 + \mu)\sqrt{\mu^2 + \mu} - 2\mu^2 + \kappa - 3\mu]}}{\sqrt{(1 + \kappa)^3 [2(1 + \mu)\sqrt{\mu^2 + \mu} + 2\mu^2 - \kappa + 3\mu]}} \end{aligned} \quad (28)$$

Based on the optimal parameters in (28) and the previous procedures, the normalized amplitude at the fixed points P , Q , and R (i.e. when $\zeta \rightarrow 0$ or ∞ in (8)) can be obtained as

$$\left. \frac{X_1}{Y} \right|_{P, Q, R} = \frac{\sqrt{\mu^2 + \mu}}{\mu - \kappa} \quad (29)$$

By comparing equations (24) and (29), it is clear that the normalized amplitude at the fixed points is the same for both base excited primary structure in Figure 1(b). However, the response to the these fixed points may differ due to a different optimal negative stiffness ratio.

3.3. Effect of inertance mass and negative stiffness ratios on the optimum design

For the NSPIS, the three-dimensional plots depicted in Figure 4 show the effect of inertance mass and negative stiffness ratios on three optimum parameters for base displacement excitation and base acceleration excitation, respectively. The range of inertance mass and negative stiffness ratios are 0.005–2 for μ and -0.2 to 0 for κ , respectively. It can be observed that in the cases of base displacement excitation as shown in Figure 4(a) and (c), the optimum stiffness ratios (β) and (λ) and the damping ratio (ζ) increase with increasing both negative stiffness and inertance mass ratios. For the cases of base acceleration excitation, the optimum parameters are shown in Figure 4(d) and (f). The optimum stiffness ratio (β) increases with increasing the negative stiffness ratio, and it increases with increasing inertance mass ratio on the range $\mu < \mu_0$, and on range $\mu > \mu_0$, it decreases with increasing inertance mass ratio. μ_0 is the stagnation point of equation (22) that is found by $(\partial\beta_{opt}/\partial\mu) = 0$, and the result is given in equation (30)

$$\mu_0 = \frac{4\kappa^2 + 7\kappa + 2 + 2\sqrt{(4\kappa + 1)(\kappa + 1)^3}}{(4\kappa + 5)} \quad (30)$$

which $-1/4 \leq \kappa \leq 0$. It can be also observed that the optimum stiffness ratio (λ) (Figure 4(e)) and the damping ratio (ζ) (Figure 4(f)) increase with increasing both negative stiffness and inertance mass ratios.

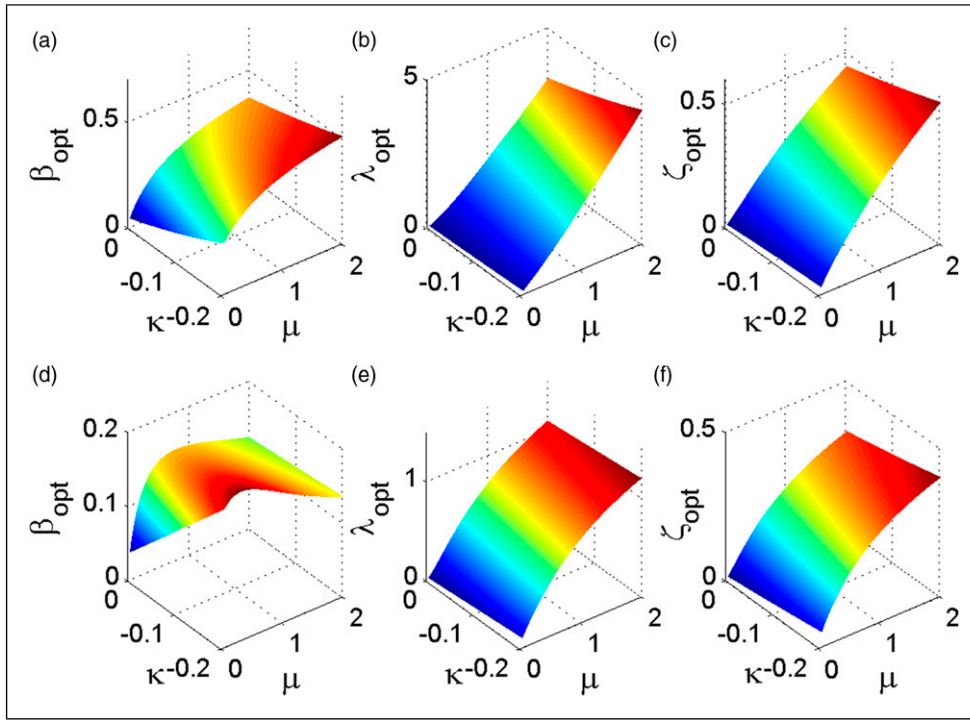


Figure 4. Three-dimensional representation of variation of optimum parameters: (a), (b), and (c) are relevant to base displacement, whereas (d), (e), and (f) are for base acceleration, in which (a), (b), (d), and (e) are the stiffness ratios; (c) and (f) are the damping ratios.

The ranges of the values of parameters μ and κ in Figure 4 were chosen to account for their role on the optimal parameters. However, when all the possible combination μ and κ are taken into the other optimization parameters and the normalized amplitude at the fixed points of the primary mass, one could find that not all combinations μ and κ ensure the system stability. So, in the following section, the permissible bound on the negative stiffness ratio κ as function of μ will be specified in each excitation scenario, and an optimal value of κ will be also defined in these cases.

3.4. Stability analysis, lower limit, and optimal value of κ

3.4.1. Stability analysis of the system. According to the characteristic of the negative stiffness, it is relevant to specify the admissible limit on the value of the negative stiffness, inside which the system remains stable. Noting that the stability analysis of this type of system is rare in the literature, one of the major contributions of this study is to conduct a systematic study on the stability of the primary system equipped with the NSPIS.

Let us consider the characteristic equation of base harmonic-excited primary structure in Figure 1(b)

$$D_5\bar{s}^5 + D_4\bar{s}^4 + D_3\bar{s}^3 + D_2\bar{s}^2 + D_1\bar{s} + D_0 = 0 \quad (31)$$

where the coefficient $D_i (i = 0, 1, \dots, 5)$ is given in equation (7). According the Routh–Hurwitz stability criterion, a system is asymptotically stable if and only if all their eigenvalues lie in the left half of the complex plan and all the coefficients D_i into characteristic equation (31) should also be positive. The related Routh's coefficients are listed in Table 1.

Where the coefficients a_1 , b_1 , b_2 , and c_1 are calculated and expressed as

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2\zeta\lambda(\mu - \kappa)^2}{(1 + \beta)\mu^2 + 2\beta\mu + \beta + \kappa} \\ b_1 &= 2\zeta\lambda(1 + \mu), \quad b_2 = 2\zeta\lambda(1 + \kappa), \\ c_1 &= \frac{\lambda[(1 + \beta)\mu^2 + 2\beta\mu + \beta + \kappa]}{1 + \mu} \end{aligned} \quad (32)$$

The system is stable if all the coefficients of the second line of the above table are the same sign, that is positive ($D_5 > 0, D_4 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0, a_1 > 0$, and $D_0 > 0$). Moreover, in (32), the parameters a_1 and c_1 are of the sign of the polynomial in μ defined by $(1 + \beta)\mu^2 + 2\beta\mu + \beta + \kappa$, so the discriminant is: $\Delta = -[\beta + \kappa(1 + \beta)]$. Thus, a_1 and c_1 are positive and of the sign of $1 + \beta$ when $\beta + \kappa(1 + \beta) > 0$ and it is the same condition of having $D_0 > 0$ (see equation (7)). Finally, the unique stress of system stability on the negative stiffness ratio can be reached as follows

Table 1. Routh's coefficient chart.

\bar{s}^0	\bar{s}^1	\bar{s}^2	\bar{s}^3	\bar{s}^4	\bar{s}^5
D_0	$a_1 = (c_1 b_2 - b_1 D_0 / c_1)$	$c_1 = (b_1 D_2 - b_2 D_4 / b_1)$	$b_1 = (D_4 D_3 - D_2 D_5 / D_4)$	D_4	D_5
0	0	D_0	$b_2 = (D_4 D_1 - D_0 D_5 / D_4)$	D_2	D_3
0	0	0	0	D_0	D_1

$$\kappa > -\frac{\beta}{1+\beta} = -1 + \frac{1}{1+\beta} \quad (33)$$

with $1/(1+\beta)$ in (33) decreases for all positive β , which means that the lower bound of κ is greater than -1 , meaning that the absolute value of the negative stiffness k_n must always be less than that of the primary system k_1 . Nonetheless, the optimal value of κ and the effective upper limit of κ will be derived in the following subsections because the analytical formulation of the stiffness ratio β is expressed as a function of κ and μ .

3.4.2. Lower limit of κ . In the first case, the system is subjected to a base harmonic acceleration excitation (see Figure 1(b)). According to (22) and (33), there is dependence between the stiffness ratio β and the negative stiffness ratio κ leading to the explicit expression for the lower limit of κ . Thus, by substituting the optimal stiffness ratio equation (22) into the general stability condition in (33), an inequality on κ can be obtained

$$\begin{aligned} & (1+\mu - \sqrt{\mu^2 + \mu})\kappa^2 - [2\mu(1+\mu) \\ & + (1-\mu)\sqrt{\mu^2 + \mu}]\kappa - \mu(1+\mu - \sqrt{\mu^2 + \mu}) < 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Because $(1+\mu - \sqrt{\mu^2 + \mu}) > 0$ in (34), κ is located within the interval (κ^-, κ^+) , with the lower and upper limits defined by

$$\begin{aligned} \kappa^- &= \frac{(1+\mu) \left[2\mu - \sqrt{\mu(5\mu+5-4\sqrt{\mu^2+\mu})} \right] + (1-\mu)\sqrt{\mu^2+\mu}}{2\mu+2-2\sqrt{\mu^2+\mu}} \\ \kappa^+ &= \frac{(1+\mu) \left[2\mu + \sqrt{\mu(5\mu+5-4\sqrt{\mu^2+\mu})} \right] + (1-\mu)\sqrt{\mu^2+\mu}}{2\mu+2-2\sqrt{\mu^2+\mu}} \end{aligned} \quad (35)$$

It is noted that $\kappa^+ > 0$ and $\kappa^- > -1$ (with $\kappa^- < 0$) such that $0 \in [\kappa^-, \kappa^+]$. Therefore, the allowable bound on κ is then reduced to $\kappa \in (\kappa^-, 0]$.

In the second case, the system is subjected to a base harmonic displacement excitation (see Figure 1(b)). By substituting the optimal stiffness ratio β_{opt} in (28) into the general stability condition in (33), the permissible bound on the negative stiffness ratio κ is

$$\kappa > \kappa^- = \frac{\mu - 1 - \sqrt{\mu^2 + \mu} + \sqrt{(1+\mu)(2\mu+1-2\sqrt{\mu^2+\mu})}}{2} \quad (36)$$

3.4.3. Optimal value of κ . In the case of base harmonic acceleration excitation because $|X_1/A_g|_{\bar{s}=0} = f(\kappa, \mu) \neq 1$, there exists a response which fulfills the condition so that one adopts the strategy of assimilation of the transfer function at the fixed points to that at $\bar{s} = 0$, as in (Zhou et al. 2019).

Accordingly, one can get

$$\left. \frac{X_1}{A_g} \right|_{P,Q,R} = \frac{\sqrt{\mu^2 + \mu}}{\mu - \kappa} = \left. \frac{X_1}{A_g} \right|_{\bar{s}=0} \quad (37)$$

Solving (37) yields two rational values of κ

$$\kappa_1 = -1, \quad \kappa_2 = \frac{2\mu(1+\mu) - (2\mu+1)\sqrt{\mu^2+\mu}}{2\mu(1+\mu) - \sqrt{\mu^2+\mu}} \quad (38)$$

However, κ_1 is inferior to the lower bound κ^- with which the primary system becomes unstable. Moreover, κ_2 satisfies the condition $-1 < \kappa^- < \kappa_2 < 0$, which is relevant for the existence of an optimal ratio of negative stiffness κ_{opt} in the stable region, which is expressed as

$$\kappa_{opt} = \frac{2\mu(1+\mu) - (2\mu+1)\sqrt{\mu^2+\mu}}{2\mu(1+\mu) - \sqrt{\mu^2+\mu}} \quad (39)$$

In the case of base harmonic displacement excitation $|X_1/Y|_{\bar{s}=0} = 1$, so that a strategy based on making the solution of the smaller fixed point to approach zero is adopted to obtain the optimal κ (Xiuchang et al., 2019), which is determined by $\beta\kappa + \beta + \kappa = 0$. Using β in (28) and the result is

$$\begin{aligned} \kappa_{opt} &= \frac{\mu - 1 - \sqrt{\mu^2 + \mu} + \sqrt{(1+\mu)(2\mu+1-2\sqrt{\mu^2+\mu})}}{2(1+\varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Furthermore, because the transfer function at the two fixed points (in equation (29)) is a monotonic increasing function like κ , we choose κ to be as close as possible to

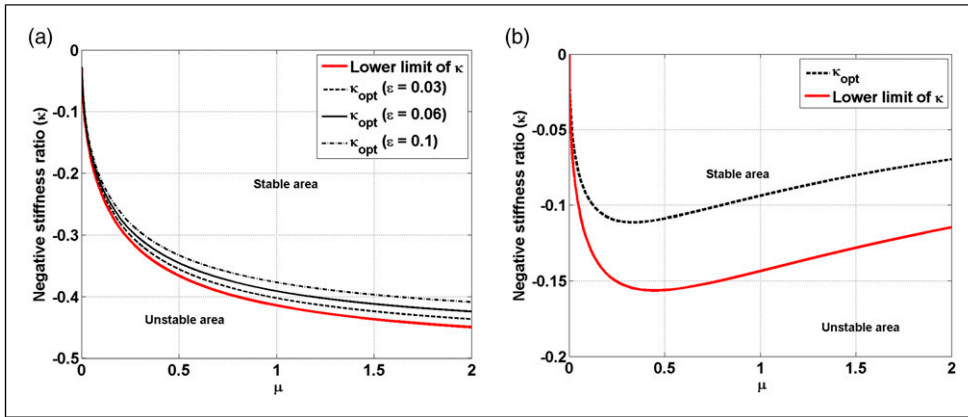


Figure 5. Graphical representations of optimum negative stiffness ratios relevant to each base excitation with their stability boundary (a) for base displacement and (b) for base acceleration.

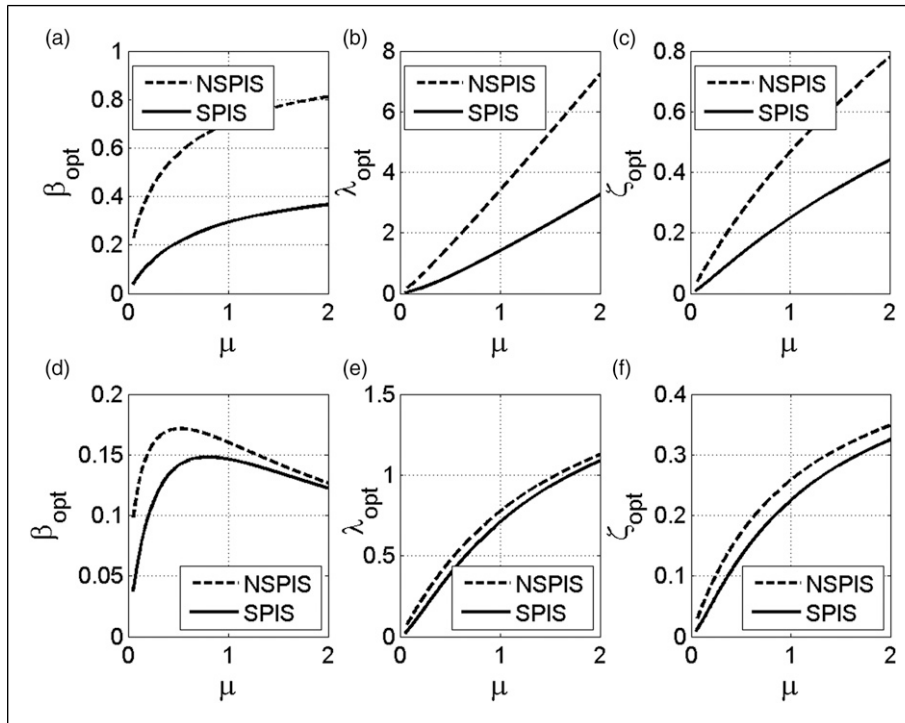


Figure 6. Effect of negative stiffness and inertance mass on the optimum parameters for both NSPIS (dashed lines) and series-parallel inerter system (solid lines) for each base excitation. Here, (a), (b), and (c) are relevant to base displacement, whereas (d), (e), and (f) are for base acceleration, in which (a), (b), (d), and (e) are the stiffness ratios; (c) and (f) are the damping ratios.

the stability boundary denoted by equation (36) by fixing a small ε .

To validate the results on the optimization of κ in both excitation cases, Figure 5 plots the optimum negative stiffness ratios with the stability boundary on κ . The red line represents the stability boundary on κ below which the system becomes unstable. One can observe that for any inertia mass ratio μ and for any coefficient $\varepsilon > 0$, the

optimal negative stiffness ratios remain valid located above the stability boundary on κ in each excitation case, which guarantees the stability of the system.

For a better understanding of the role of the inertance mass ratio and the optimum negative stiffness ratio on the optimum parameters, summarized in Table 2, two-dimensional graphs are presented in Figure 6. The solid line corresponds to SPIS ($\kappa = 0$), and the dashed line is

Table 2. Optimal design parameters of the series-parallel inerter system with and without negative stiffness for both excitation cases.

System	λ	β	ζ	κ
(a): Base acceleration excited				
SPIS*	$2\mu\sqrt{\mu^2 + \mu}/(1 + \mu)^2$	$(1 + \mu - \sqrt{\mu^2 + \mu})\mu/(1 + \mu)^2$	$\sqrt{20(\sqrt{\mu^2 + \mu} - \mu)\mu^3/17(1 + \mu)^2(\mu + \sqrt{\mu^2 + \mu})}$	-
NSPIS	$\frac{2(\mu - \kappa)\sqrt{\mu^2 + \mu}}{(1 + \mu)^2}$	$(1 + \mu - \sqrt{\mu^2 + \mu})(\mu - \kappa)/(1 + \mu)^2$	$\sqrt{20(\mu - \kappa)^2(\sqrt{\mu^2 + \mu} - \mu)\mu/17(1 + \mu)^2(\mu + \sqrt{\mu^2 + \mu})}$	$2\mu(1 + \mu) - (2\mu + 1)\sqrt{\mu^2 + \mu}/2\mu(1 + \mu) - \sqrt{\mu^2 + \mu}$
(b): Base displacement excited				
SPIS**	$2\mu\sqrt{\mu^2 + \mu}/(1 + \mu)$	$(\mu + 1 - \sqrt{\mu^2 + \mu})\mu/(1 + \mu)$	$\sqrt{\mu^3[2(1 + \mu)\sqrt{\mu^2 + \mu} - 2\mu^2 - 3\mu]/2(1 + \mu)\sqrt{\mu^2 + \mu} + 2\mu^2 + 3\mu}$	-
NSPIS	$\frac{2(\mu - \kappa)\sqrt{\mu^2 + \mu}}{(1 + \mu)(1 + \kappa)}$	$\frac{(\mu + 1 - \sqrt{\mu^2 + \mu})(\mu - \kappa)}{(1 + \mu)(1 + \kappa)}$	$\sqrt{\mu(\kappa - \mu)^2[2(1 + \mu)\sqrt{\mu^2 + \mu} - 2\mu^2 + \kappa - 3\mu]/(1 + \kappa)^3[2(1 + \mu)\sqrt{\mu^2 + \mu} + 2\mu^2 - \kappa + 3\mu]}$	$\mu - 1 - \sqrt{\mu^2 + \mu} + \sqrt{(1 + \mu)(2\mu + 1 - 2\sqrt{\mu^2 + \mu})}/2(1 + \kappa)$

Notes: SPIS, series-parallel inerter system.

* The optimal parameters of SPIS are obtained after setting $\kappa = 0$ in equations (22), (23), and (27), respectively, for base acceleration excitation.

** The optimal parameters of SPIS are obtained after setting $\kappa = 0$ in equation (28) for base displacement excitation.

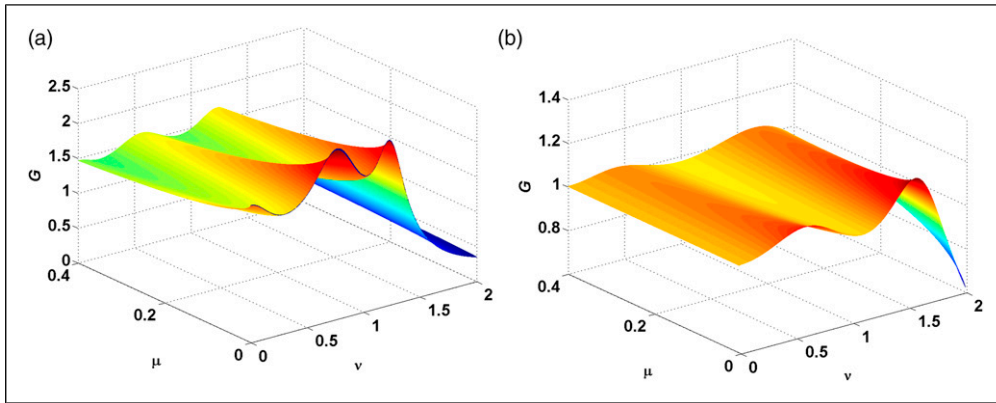


Figure 7. Contour plot of normalized displacement amplitude of the primary system with the NSPIS versus the inertia mass ratio μ for $\kappa = \kappa^{opt}$ (a) under base acceleration and (b) under base displacement.

Table 3. Normalized displacement amplitude at the fixed points of the primary system with three dampers.

	TMD*	SPIS**	NSPIS
(a): Base acceleration excited			
$ X_1/A_g _{\max}$	$\sqrt{2(1+\mu)^2/\mu}$	$\sqrt{1+1/\mu}$	$\sqrt{\mu(1+\mu)/(\mu-\kappa)^2}$
(b): Base displacement excited			
$ X_1/Y _{\max}$	$\sqrt{1+2/\mu}$	$\sqrt{1+1/\mu}$	$\sqrt{\mu(1+\mu)/(\mu-\kappa)^2}$

Notes: SPIS, series-parallel inerter system; TMD, tuned mass damper.

* Warburton (1982) for base acceleration and Den Hartog for base displacement.

** The normalized amplitude at the fixed points of the primary system with SPIS is obtained after setting $\kappa = 0$ in equation (24).

linked to the NSPIS with an optimal negative stiffness ratio ($\kappa = \kappa_{opt}$). The results indicate that when the mass ratio increases, the effect of the optimal negative stiffness ratio becomes greater in the case of base displacement-excited (Figure 6(a) and (c)), which results in the difference between the solid and dashed lines. However, in the case of base acceleration-excited (Figure 6(d) and (f)), the effect of the optimal negative stiffness is almost constant with the increase in the inertia mass ratio. Figure 6 also shows that for any given inertia mass ratio, the optimal parameters of the NSPIS are greater than those of the SPIS, which justifies that the inclusion of the negative stiffness in the proposed series-parallel inerter system has the effect of increasing the values of the design parameters. Moreover, a smaller inertia mass ratio μ is more beneficial to get a small λ_{opt} , β_{opt} , and ζ_{opt} for SPIS and NSPIS in both harmonic excitation cases.

Figure 7 depicts the contour plot of normalized displacement of the primary system controlled with the NSPIS. One can observe that the damping effect improves as μ increases. However, the slow decay of the peak amplitude as μ increases shows that the normalized displacement of the primary mass controlled with the NSPIS is not

sensitive to the variation of μ for a larger absolute κ . Moreover, as the design parameters increase as μ increases (see Figure 6), choosing a large inertia mass ratio increases the manufacturing cost. Furthermore, the inclusion of negative stiffness can considerably reduce manufacturing costs because, for a small inertia mass ratio (implying small values of design parameters), an effective reduction in the response of the primary system can be obtained.

4. Performance evaluation of the NSPIS

In Table 3, we summarize all normalized displacement amplitudes of the primary system at fixed points controlled by three types of dampers (namely, TMD, SPIS, and NSPIS) in the two cases of harmonic excitation mentioned in this study (namely, base acceleration-excited and base displacement-excited). Because the mass ratio of the TMD is normally quite small and practically less than 0.25, the normalized displacement amplitudes at the fixed points of the primary system for the same mass ratio are plotted in Figure 8 over the range of $0 < \mu < 0.2$ for a reasonable comparison with the TMD. As shown in Figure 8(a), if using the NSPIS in the case of the base acceleration-excited primary structure, 58.05–86.69% improvement can be obtained as compared with the TMD, and 35.02–81.09% improvement can also be obtained as compared with SPIS. Furthermore, in the case of the base displacement-excited primary structure in Figure 8(b), if using the NSPIS, 65–97% improvement can be obtained as compared with the TMD and 53–96% improvement can also be obtained as compared with SPIS. These results also show that SPIS is superior to the TMD. Figure 8 also shows that the NSPIS system is advantageous for a small μ .

In addition, the frequency responses of the primary system equipped with the three types of dampers mentioned above are shown in Figure 9. The inertia mass ratio or mass ratio imposed as $\mu = 0.05$. Two comparison

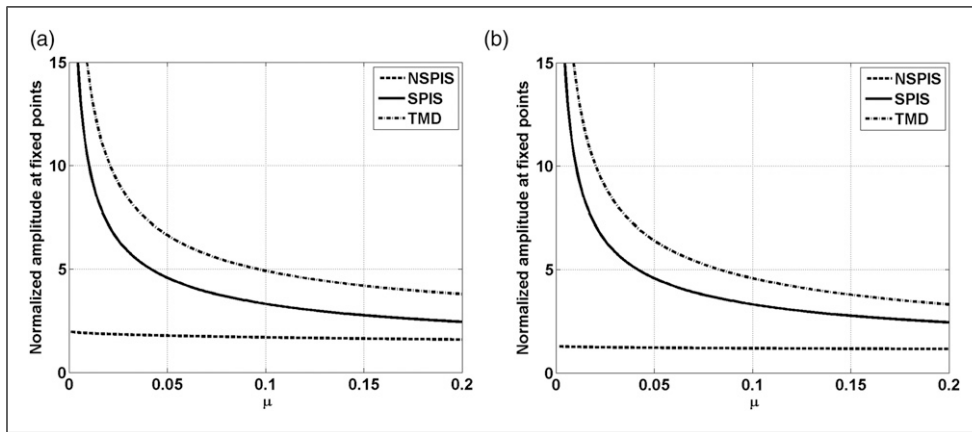


Figure 8. Comparison of the normalized amplitudes at the fixed points of primary mass controlled by three dampers tuned mass damper, series–parallel inerter system, and NSPIS for various mass ratio or inertance mass ratio μ (a) under base displacement and (b) under base acceleration.

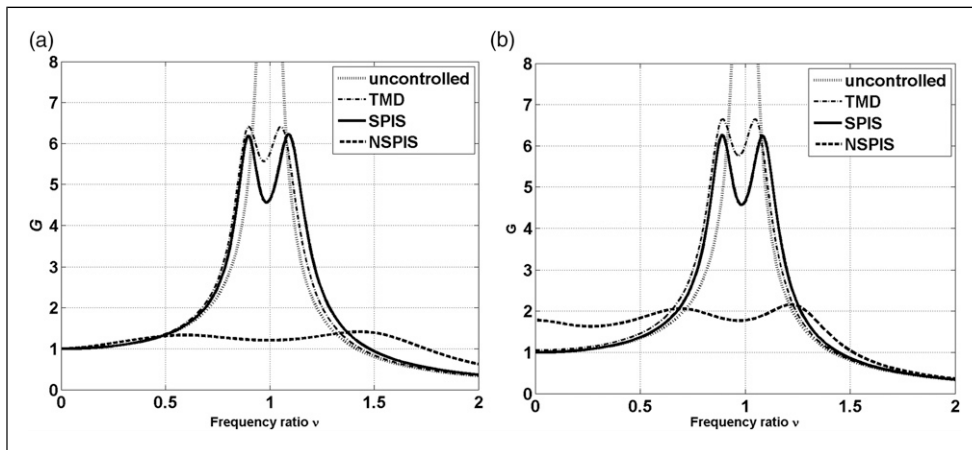


Figure 9. Comparison between tuned mass damper, series–parallel inerter system, and NSPIS in the frequency response of the primary system under optimum parameters when $\mu = 0.05$ (a) under base displacement and (b) under base acceleration.

Table 4. Suppression frequency bandwidths of vibration and peak vibration amplitude of the primary system with three types of dampers under $\mu = 0.05$

	TMD*	SPIS	NSPIS
(a): Base acceleration excited			
Suppression bandwidth	0.159	0.163	0.317
Peak vibration	6.646	6.261	2.158
(b): Base displacement excited			
Suppression bandwidth	0.163	0.166	0.821
Peak vibration	6.406	6.224	1.414

Notes: SPIS, series–parallel inerter system; TMD, tuned mass damper.
 * Warburton (1982) for base acceleration and Den Hartog (1956) for base displacement.

characteristics are envisaged, namely, the maximum vibration amplitude of the primary system and suppression bandwidth (SBW) as illustrated in Figure 2. Accordingly, their values corresponding to different dampers are summarized in Table 4. It is true that in the case of base acceleration–excited primary structure, the main disadvantage of negative stiffness is to amplify the vibration amplitude in low frequencies. Nevertheless, the justification for its use in the control system is characterized by the larger suppression bandwidth and minimal vibration amplitude of the primary system. More precisely, relative to the TMD and SPIS, the NSPIS can enlarge the suppression bandwidth by 49.84% and 48.58% and reduce the peak vibration amplitude by 67.53% and 65.53%, respectively. Whereas in the case of base displacement–excited primary structure, not

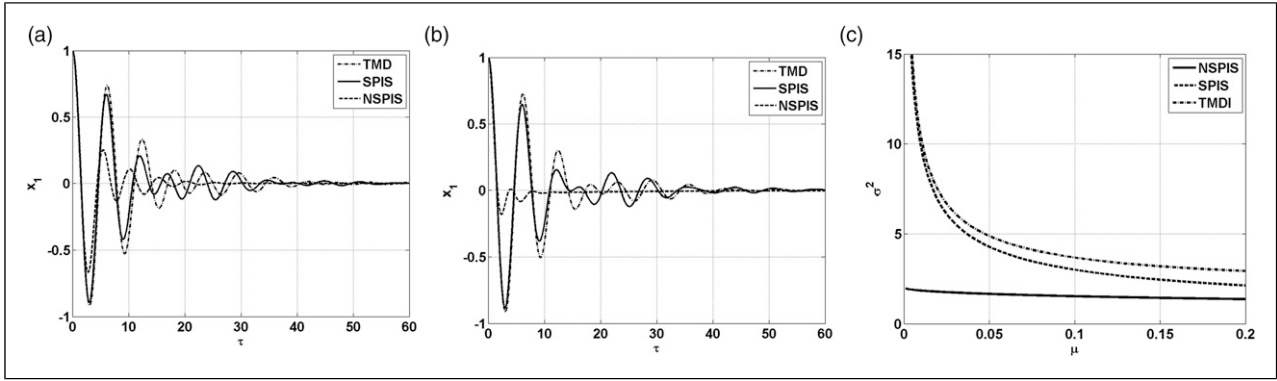


Figure 10. (a) and (b) are relevant to transient response under $\mu = 0.1$ for initial conditions as $(1, 0, 0, 0)$; (c) is the comparison of different mean square responses of the primary system versus μ under random base acceleration excitation (a) is the result with the design-based optimum parameters versus base acceleration (b) is the result with the design-based optimum parameters versus base displacement.

amplification of the vibration amplitude in the low frequency region is observed because of the negative stiffness ratio. So, relative to the TMD and SPIS, the NSPIS can enlarge the suppression bandwidth by 80% and 79.8% and reduce the peak vibration amplitude by 78% and 77.3%, respectively. These results also show that the SPIS is superior to the TMD.

A numerical simulation in the time domain is also carried out to study the control performance of three different absorbers with respect to transient vibrations. Figure 10(a) and (b) plots the temporal responses of the primary system. The simulation is performed under free vibration (namely, $a(t) = y(t) = 0$) with a large mass ratio $\mu = 0.1$ for a better visual effect. As evident from Figure 10(a) and (b), SPIS (when $\kappa = 0$) and TMD render a similar attenuation performance of transient response of the primary system in terms of the peak vibration amplitude and the stabilization time. In addition, the NSPIS with negative stiffness outperforms the SPIS and TMD in terms of much shorter stabilization times and lower peak amplitude of the primary system. Finally, Figure 10(a) and (b) suggests that the optimum parameters for base displacement-excited are more preferable than the optimum parameters for base acceleration-excited in terms of the peak vibration amplitude and the stabilization time.

5. The response of the primary system under random excitation

The primary system is usually subjected to random excitation in practical engineering, so it is very important and meaningful to investigate the system response to random excitation. For example, suppose that the primary system is subjected to random ground acceleration excitation with zero mean value and constant power spectral density $S(\omega) = S_0$ (ideal white noise). The dimensionless mean square

response $\bar{\sigma}$ (Asami, 1991) of the primary system relevant to the different absorbers can be expressed as

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{E[x_1^2]}{2\pi S_0 \omega_0} \quad (41)$$

where the mean square value of x_1 of the object mass m can be calculated as

$$E[x_1^2] = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|^2 d\omega = S_0 \omega_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|^2 dv \quad (42)$$

Substituting (42) into (41) then (5) according to (6) and (7), one obtains

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{X_1}{\delta_{st}} \right|^2 dv = F\zeta + \frac{G}{\zeta} \quad (43)$$

1. For NSPIS

$$\begin{cases} F = (\kappa^2 + (2\beta + 2\lambda - 2\mu)\kappa + (\beta + \lambda)(\beta + \lambda - 2)\mu \\ \quad + (\beta + \lambda)^2 + \mu^2) / \lambda^2 (\kappa - \mu)^2 \\ G = \left\{ \begin{aligned} &\kappa^3 + (3\beta - 2\mu)\kappa^2 + [(2\mu + 3)\beta^2 - 4\mu\beta + \mu^2]\kappa \\ &+ (1 + \mu)^2\beta^3 - (\mu^2 + 2\mu)\beta^2 + \beta\mu^2 \end{aligned} \right\} / \\ \quad 4[(1 + \beta)\kappa + \beta](\mu - \kappa)^2 \end{cases} \quad (44)$$

2. For SPIS

$$\begin{aligned} F &= \frac{(\beta + \lambda)(\beta + \lambda - 2)\mu + (\beta + \lambda)^2 + \mu^2}{\lambda^2 \mu^2}, \\ G &= \frac{(1 + \mu)^2 \beta^3 - (\mu^2 + 2\mu)\beta^2 + \beta\mu^2}{4\beta\mu^2} \end{aligned} \quad (45)$$

3. For TMD

$$F = \frac{\alpha(1+\mu)^3}{\mu};$$

$$G = \frac{(1+\mu)^4\alpha^4 + (\mu^3 - 3\mu - 2)\alpha^2 + 1}{4\alpha\mu} \quad (46)$$

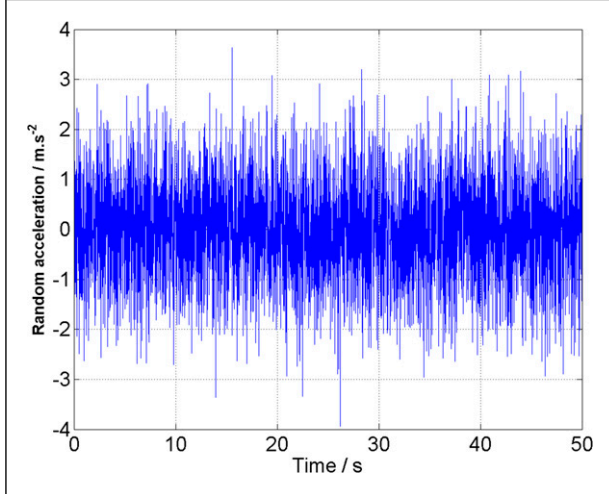


Figure 11. The time history of the random acceleration excitation.

The mean square response of the primary system with three dampers under optimal parameters for various inertance mass or mass ratio can be obtained as shown in Figure 10(c). It is shown that the NSPIS demonstrates the smallest mean square responses over $0.001 < \mu < 0.2$. Figure 10(c) also shows that the NSPIS system is advantageous for a small μ .

In order to get more realistic results, 50-second random excitation is constructed, which is composed of 5000 normalized random numbers with zero mean value and unit variance, respectively. The time history of the random excitation is shown in Figure 11. Here, we take the primary mass $m = 1\text{kg}$ and stiffness of the primary system $k_1 = 100\text{N/m}$. Then, the parameters for the absorbers in this paper can be calculated according to Table 2. Based on the fourth-order Rouge-Kutta method under the optimum parameters (see Table 2), the time history response of the primary system without damper and with different considered damper can be obtained. The time history of these primary systems is shown in Figure 12a–d. The response variances and decrease ratios for the different primary systems with different damper are summarized in Table 5. From Figure 12 and Table 5, it could also be concluded that the NSPIS with negative stiffness in this paper is the most effective system under random excitation with respect to TMD and SPIS (without negative stiffness).

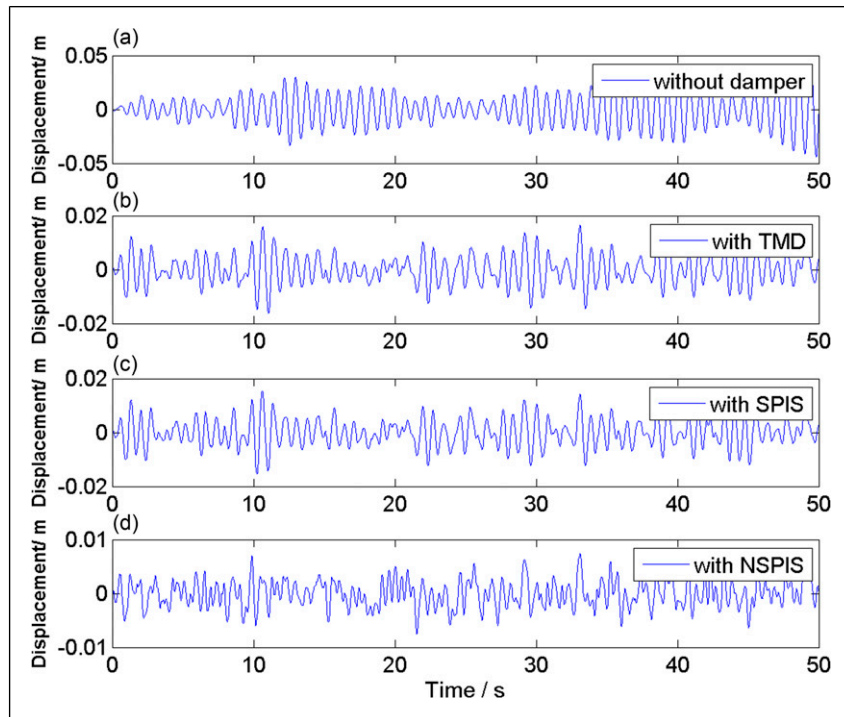


Figure 12. The time history of the primary system with different damper. (a) without damper (b) with TMD (c) with SPIS and (d) with NSPIS. Note: TMD: tuned mass damper; SPIS: series parallel inerter system; NSPIS: series parallel inerter-system with negative stiffness.

Table 5. The variance and decrease of the displacement of the primary system.

Models	Variance	Decrease (%)
Without damper	2.0082×10^{-04}	
TMD	2.5760×10^{-05}	87.17
SPIS	2.4243×10^{-05}	87.93
NSPIS	1.1987×10^{-05}	94.03

Note: TMD: tuned mass damper; SPIS: series parallel inerter system; NSPIS: series-parallel inerter system with negative stiffness.

6. Conclusion

In this work, a series–parallel inerter system with negative stiffness (NSPIS) is proposed, for which the stability analysis is correctly discussed for the first time in this article. Moreover, two inputs are considered for the design: sinusoidal base acceleration and sinusoidal base displacement. A parametric analysis to evaluate the effect of inertance mass and negative stiffness ratios on the optimum designed parameters is carried out. The performance comparisons are done among NSPIS, series–parallel inerter system (SPIS), and TMD considering both harmonic excitation, transient excitation, and random (white noise) excitation. Under harmonic excitation, the results showed that the NSPIS presents better vibration control in terms of decreasing the peak vibration amplitude and widening the frequency bandwidth when compared to TMD and SPIS, respectively, for the same mass ratio. In the case of base acceleration–excited primary structure, the NSPIS can be reduce the peak vibration amplitude by 67.53% and 65.53% and enlarge suppression bandwidth by 49.84% and 48.58%, respectively, compared to TMD and SPIS when $\mu = 0.05$. Whereas in the case of the base displacement–excited primary structure, the NSPIS can be reduce the peak vibration amplitude by 80% and 79.8% and enlarge suppression bandwidth by 78% and 77.3%, respectively, compared to TMD and SPIS when $\mu = 0.05$. The further comparison among the three dampers under random (white noise) excitation also shows that the NSPIS is superior to the SPIS and TMD. These results show that the inclusion of the negative stiffness in the proposed inerter-based isolator can significantly improve the vibration control performance for a small inertance mass ratio.

Acknowledgements

The authors would like to thank the associate editor and the anonymous reviewers for their helpful suggestions.

Declaration of conflicting interests

The author(s) declared no potential conflicts of interest with respect to the research, authorship, and/or publication of this article.

Funding

The author(s) received no financial support for the research, authorship, and/or publication of this article.

ORCID iD

Marcial Baduidana  <https://orcid.org/0000-0002-3421-9321>

References

- Abe M and Fujino Y (1994) Dynamic characterization of multiple tuned mass dampers and some design formulas. *Earthquake Eng Struct Dyn* 23(8): 813–835.
- Anajafi H and Medina RA (2018a) Comparison of the seismic performance of a partial mass isolation technique with conventional TMD and base-isolation systems under broad-band and narrow-band excitations. *Engineering Structures* 158: 110–123.
- Anajafi H and Medina RA (2018b) Robust design of a multi-floor isolation system. *Structural Control and Health Monitoring* 25(4): e2130.
- Asami T (1991) Optimum design of dynamic absorbers for a system subjected to random excitation. *JSME Int J Ser III* 34(2): 218–226.
- Asami T Mizukawa Y and Ise T (2018) Optimal design of double-mass dynamic vibration absorbers minimizing the mobility transfer function. *Journal of Vibration and Acoustics* 40: 061012–061014.
- Asami T and Nishihara O (1999) Analytical and experimental evaluation of an air damped dynamic vibration absorber: Design optimizations of the three-element type model. *Journal of Vibration and Acoustics* 121(3): 334e342.
- Basili M, De Angelis M and Pietrosanti D (2018) Modal analysis and dynamic response of a two-adjacent single degree of freedom systems linked by spring-dashpot-inerter elements. *Engineering Structures* 174: 736–752.
- Basili M, De Angelis M and Pietrosanti D (2019) Defective two adjacent single degree of freedom systems linked by spring-dashpot-inerter for vibration control. *Engineering Structures* 188: 480–492.
- Chen MZQ, Hu Y and Chen G (2016) Application of semi-active inerter in semi-active suspensions via force tracking. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 138(4): 041014.
- Crandall SH and Mark WD (1963) *Random Vibration in Mechanical Systems*. New York: Academic Press.
- Domenico D and Ricciardi G (2018a) Improving the dynamic performance of base-isolated structures via tuned mass damper and inerter devices: A comparative study. *Structural Control and Health Monitoring* 25(10): e2234.
- Domenico D and Ricciardi G (2018b) An enhanced base isolation system equipped with optimal tuned mass damper inerter (TMDI). *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 47(5): 1169–1192.
- Domenico D and Ricciardi G (2018c) Optimal design and seismic performance of tuned mass damper inerter (TMDI) for structures with nonlinear base isolation systems. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 47(12): 2539–2560.
- Domenico D, Deastra P, Ricciardi G, et al. (2019) Novel fluid inerter based tuned mass dampers for optimized structural control of base-isolated buildings. *Journal of the Franklin Institute* 356(14): 7626–7649.

- Den Hartog JP (1956) *Mechanical Vibrations*. New York: McGraw-Hill.
- Den Hartog JP (1985) *Mechanical Vibrations*. New York: Dover Publications Inc
- Frahm H (1909) *Device for Damped Vibration of Bodies*. US Patent, 989958.
- Giaralis A and Petrini F (2017) Wind-induced vibration mitigation in tall buildings using the tuned mass-damper-inerter. *Journal of Structural Engineering* 143(9): 04017127.
- Gonzales-Buelga A, et al. (2017) Assessing the effect of nonlinearities on the performance of tuned inerter damper: Effect of nonlinearities on a tuned inerter damper performance. *Structure Control Health Monitoring* 24(3): e1879.
- Guo H, Li H, Chen WD, et al. (2018) A quasi-zero-stiffness vibration isolation system based on unsymmetric composite laminate (in Chinese). *Journal of Vibration and Shock* 37(20): 222–227.
- Gutierrez Soto M and Adeli H (2013) Tuned mass damper. *Archives Computational Methods Engineering* 20(4): 419–431.
- Hu Y, Chen MZQ and Shu Z (2014) Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements. *Journal of Sound and Vibration* 333(8): 2212–2225.
- Hu Y, Chen MZQ, Shu Z, et al. (2015) Analysis and optimization for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution. *Journal of sound and Vibration* 346: 17–36.
- Ikago K, Saito K and Inoue N (2012) Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper. *Earthquake Engineering Structure Dynamics* 41: 453–474.
- Iwata Y (1982) On the construction of the dynamic vibration absorbers (in Japanese). *Prepr Jpn Soc Mech Eng* 820(8): 150–152.
- Jiang Y Zhao Z Zhang R, et al. (2020) Optimal design based on analytical solution for storage tank with inerter isolation system. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 129: 105924.
- Korde UA, Wickersham MA and Carr SG (2018) The effect of a negative capacitance circuit on the out-of-plane dissipation and stiffness of a piezoelectric membrane. *Smart Materials and Structures* 17(3): 035017.
- Lazar IF Neild SA and Wagg DJ (2016) Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers. *Engineering Structures* 122: 62–71.
- Lazar IF, Neild SA and Wagg DJ (2014) Using an inerter-based device for structural vibration suppression. *Earthquake Engineering Structure Dynamics* 43(8): 1129–1147.
- Luo H, Zhang R and Weng D (2016) Mitigation of liquid sloshing in storage tanks by using a hybrid control method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 90: 183–195.
- Marian L and Giaralis A (2014a) Tuned mass-damper-inerter for harmonic vibrations suppression, attached mass reduction, and energy harvesting. *Smart Structures and Systems* 19(6): 665–678.
- Marian L and Giaralis A (2014b) Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems. *Probabilistic Engineering Mechanics* 38: 156–164.
- Neubauer M, Oleskiewicz R, Poop K, et al. (2006) Optimization of damping and absorbing performance of shunted piezo elements utilizing negative capacitance. *Journal of Sound and Vibration* 298: 84–107.
- Neubauer MW and allaschek J (2013) Vibration damping with shunted piezoceramics: Fundamentals and technical applications. *Mechanical Systems and Signal Processing* 36: 36–52.
- Ormondroyd J and Den Hartog JP (1928) The theory of the dynamic vibration absorber. *ASME Journal of Applied Mechanics* 50(7): 9–22.
- Palacios-Quiñonero F, Rubió-Massegú J, Rossell JM, et al. (2019) Design of inerter-based multi-actuator systems for vibration control of adjacent structures. *Journal of the Franklin Institute* 356(14): 7785–7809.
- Pan C and Zhang R (2018) *Design of Structure With Inerter System Based on Stochastic Response Mitigation Ratio*. 25(6): John Wiley sons Ltd, 1–21.
- Radu A, Lazar IF and Neild SA (2019) Performance-based seismic design of tuned inerter dampers. *Structural Control and Health Monitoring* 26: e2346.
- Ren MZ (2001) A variant design of the dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration* 245(4): 762e770.
- Saitoh M (2012) On the performance of gyro-mass devices for displacement mitigation in base isolation systems. *Structural Control and Health Monitoring* 19(2): 246–259.
- Sara YZ, et al. (2016) Passive vibration suppression using inerters for a multi-storey building structure. *J. Phys. Conf. Ser.* 744: 012044.
- Sara YZ, Jiang JZ and Neild S (2017) Passive vibration control: A structure-immittance approach. *P Roy Soc A-Math Phys* 473: 2017001.
- Shen Y, Peng H, Li X, et al. (2017) Analytically optimal parameters of dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Mechanical Systems and Signal Processing* 85(15): 193–203.
- Shen Y, Wang X, Yang S, et al. (2016) Parameters optimization for a kind of dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Math Problem Eng Jul. Art* 2016: 9624325.
- Smith MC (2002) Synthesis of mechanical networks: The inerter. *IEEE Transaction on Automatic Control* 47(10): 1648–1662.
- Sugimura Y, et al. (2012) Response control effect of steel building structure using tuned viscous mass damper. In: 15th world conference on Earthquake engineering (WCEE), Lisbon, Portugal Sept, 2012, 24–28. volume 1(38).
- Tributsch A and Adam C (2012) Evaluation and analytical approximation of tuned mass damper performance in an Earthquake environment. *Smart Struct Syst* 10: 155–179.
- Wang Q, Qiao H, De Domenico D, et al. (2019a) Wind-induced response control of high-rise buildings using inerter-based vibration absorbers. *Applied Sciences* 9(23): 5045.
- Wang X, Shen YJ, Yang SP, et al. (2017) Parameters optimization of three-element type dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Journal of Vibration Engineering* 30(2): 177–184.
- Wang X, Ten H, Yongjun S, et al. (2019b) Parameters optimization and performance evaluation for the novel inerter-based dynamic vibration absorbers with negative stiffness. *Journal of sound and Vibration* 463: 114941.
- Wang XR, Shen YJ and Yang SP (2016) H_∞ optimization of the grounded three-element type dynamic vibration absorber. *Chin. J.Dyn. Contr* 14(05): 448e453.
- Warburton GB (1982) Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. *Earthquake Engineering Structure Dynamics* 10: 381–401.

- Xiuchang H, Su Z and Hua H (2019) Optimal parameters for dynamic vibration absorber with negative stiffness in controlling force transmission to rigid foundation. *International Journal of mechanical sciences* 152: 88–98.
- Yamaguchi H (1988) Damping of transient vibration by a dynamic absorber (in Japanese). *Trans Jpn Soc Mech Eng Ser C* 54(499): 561–568.
- Zhang R, Zhao Z and Dai K (2019) Seismic response mitigation of a wind turbine tower using a tuned parallel inerter mass system. *Engineering Structures* 180: 29–39.
- Zhou S, Jean-Mistral C and Simon C (2019) Closed-form solutions to optimal parameters of dynamic vibration absorbers with negative stiffness under harmonic and transient excitation. *Journal of sound and Vibration* 157–158: 528–541.
- Zuo L (2009) Effective and robust vibration control using series multiple tuned-mass-dampers. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 131(3): 031003.

APPENDIX. Parameters optimization of TMD

For the conventional TMD given in [Figure 1\(c\)](#), the most widely used method for optimal design is the FPT proposed

by [Den Hartog \(1956\)](#). TMD also exhibits two fixed points and the tuning procedure can be described as follows: first, the optimal frequency tuning ratio α is determined by balancing the amplitude of vibration at the two fixed points; then, we choose the optimal damping ratio ζ with which the frequency response in the two invariant frequencies is flattened. Then, the tuning parameters of the TMD are as follows

For base displacement ([Den Hartog. 1956](#))


$$\begin{aligned}\alpha &= \omega_m/\omega_0 = 1/(1+\mu), \\ \zeta &= c_2/(2m_0\omega_m) = \sqrt{3\mu/8(1+\mu)}\end{aligned}\quad (49)$$

For base acceleration ([Warburton. 1982](#))

$$\begin{aligned}\alpha &= \omega_m/\omega_0 = \sqrt{(2-\mu)/2(1+\mu)^2}, \\ \zeta &= c_2/(2m_0\omega_m) = \sqrt{3\mu/8(1+\mu)(1-\mu/2)}\end{aligned}\quad (50)$$

where the mass ratio is defined as $\mu = m_0/m$, and the natural frequencies are $\omega_m = \sqrt{k_2/m_0}$ and $\omega_0 = \sqrt{k_1/m}$.

Optimum design for a novel inerter-based vibration absorber with an amplified inertance and grounded stiffness for enhanced vibration control

Journal of Vibration and Control
2021, Vol. 0(0) 1–17
© The Author(s) 2021
Article reuse guidelines:
sagepub.com/journals-permissions
DOI: 10.1177/10775463211013221
journals.sagepub.com/home/jvc


Marcial Baduidana^{1,2}  and Aurelien Kenfack-Jiotsa^{1,2,3}

Abstract

This article presents the results of the study of a novel inerter-based vibration absorber with an amplified inertance mechanism and grounded stiffness, to control excessive vibrational movements of an excited primary structure. The inerter vibration absorber used in this study acts as a passive tuned inerter damper. An undamped primary structure model with a single degree of freedom controlled by the proposed inerter vibration absorber is developed and used to derive the equations of motion of the coupled system. The optimum frequency ratio and the optimum damping ratio of inerter vibration absorber are found using the fixed point theory for harmonic force-excited primary structures. Then, the optimum grounded stiffness ratio is deduced. Based on the inclusion of an amplified inertance mechanism, it is found that for given inertance mass ratio, the change in the amplification ratio results in three cases for the optimum grounded stiffness ratio, that is, negative, zero, and positive. From these three cases of grounded stiffness, the inerter vibration absorber with positive grounded stiffness has demonstrated the best control performance. Under optimum parameters, the results indicate that the inerter vibration absorber in this article outperforms some existing inerter vibration absorbers under the harmonic excitation, in terms of decreases in the peak vibration response of the primary system and widens the suppression bandwidth. Finally, the further comparison among the inerter vibration absorber under random (white noise) excitation also shows that the model in this article is superior to other inerter vibration absorbers in terms of smallest mean square response and smallest variance of the time history of the primary system.

Keywords

inerter, amplified inertance, grounded stiffness, negative stiffness, fixed point theory

1. Introduction

Safety of structures is the key point in engineering practices. There are several procedures to improve the performance of structures to ensure that occupants (e.g., for buildings) are safe and comfortable. Vibration control of structures is crucial to confirm their protection in the event of sudden dynamic forces. The goal of structural vibration control is to remove and control any undesirable vibration effects (such as winds, earthquakes, and ground movement) formed by dynamic forces that could potentially impair the performance of the structure. Therefore, the two very common passive vibration control approaches are vibration isolation, insertion of a vibration isolator between the source and the receiver of vibration (primary system), and vibration absorption, attachment of a vibration absorber (a secondary mass or system) to the considered primary structure.

Although many vibration control systems (Asami and Nishihara, 1999; Den Hartog, 1956; Ren, 2001 and Wang

et al, 2016) have been investigated so far and widely used in engineering practice, there are inherent limitations to the amount of vibration absorption they can achieve. Since then, the traditional dynamic vibration absorber (DVA) (Den Hartog, 1956), also known as the tuned mass damper

¹Laboratory of Mechanics, Materials and Structures, Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaounde I, Cameroon

²Nonlinear and Complex Systems Physics Group, Departement of Physics, The Higher Teacher Training College, University of Yaounde I, Cameroon

³Department of Physics, Higher Teacher Training College, University of Yaounde I, Cameroon

Received: 20 November 2020; accepted: 5 April 2021

Corresponding author:

Marcial Baduidana, Laboratory of Mechanics, Materials and Structures, Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaounde I, P.O. Box 47, Yaounde, Cameroun.

Email: badui1310@yahoo.fr

(TMD), is arguably the most widely used in the literature. However, the major disadvantage of this device is that its vibration absorption performance depends on the large mass ratio (Korenev and Reznikov, 1993); it is quite limited when the mass ratio is small. Moreover, in the seismic performance of traditional passive control systems, studies in the past (e.g., see Anajafi and Medina, 2018a, 2018b; Tributsch and Adam, 2012) have identified the following deficiencies: TMD (or DVA) systems are not robust against variation in the parameters of the structure and ground excitation; detuning may significantly reduce the efficiency of DVA systems; TMDs (or DVAs) need a relatively large mass to be efficient that is associated with significant drawbacks (e.g., practical problems and conflict with the building architecture); and the drift demands exposed on the TMDs (or DVAs) itself are usually significant. Therefore, increasing the dynamic performance of passive TMDs (or DVAs) involves the addition of new mechanical elements. Meanwhile, many studies have been conducted to improve the efficacy and robustness of DVAs using multiple DVAs in parallel or series (Abe and Fujino, 1994; Anajafi and Medina, 2018b; Zuo, 2009).

During the last few years, the concept of TMD has been developed and improved thanks to the introduction of the inerter device (Marian and Giaralis, 2014 and Wang et al., 2018). The inerter device is an option to reduce the weight of the secondary mass of the TMDs while aiming to achieve similar performance as a system with higher physical mass. An inerter is a two-terminal mechanical device which converts relative translational displacement into the localized rotation of an element and produces a resisting force proportional to the relative acceleration of its terminals (Smith, 2002). This element was initially conceived as the missing mechanical element in the force-current analogy between mechanical and electrical networks (Smith, 2002). According to the layout form of the inerter, damper, and spring, several passive inerter-based mechanical networks have been developed and investigated (Baduidana and Kenfack, 2020; Hu et al., 2015 and Sara et al., 2017 and), in which the tuned inerter damper (TID) (Lazar et al., 2014 and Shen et al., 2019) and the tuned viscous mass damper (TVMD) (Ikago et al., 2012) have been identified for suppressing vibration in civil engineering structures. Recently, the optimal design of TVMD with linear and non-linear viscous damping for single-degree-of-freedom (SDOF) systems subjected to harmonic excitations was studied by Huang et al. (2019). Inerter-based devices have been also investigated for mitigation of the liquid sloshing in storage tanks (Jiang et al., 2020; Luo et al., 2016), to enhance the properties of tuned mass dampers (Domenico and Ricciardi, 2018a and De Domenico et al., 2019), for seismic protection of building structures (Radu et al., 2019; De Domenico et al., 2020a, 2020b), for seismic protection of wind turbine towers (Zhang et al., 2019), for improving the seismic performance of base-isolated structures (Domenico

and Ricciardi, 2018b, 2018c and Saitoh, 2012), for vibration suppression of cables (Lazar et al., 2016), for wind-induced vibration mitigation of tall buildings using the tuned mass damper inerter (Giaralis and Petrini, 2017 and Wang et al., 2019a, 2019b), for vehicle suppression (Chen et al., 2016; Hu et al., 2014), and for vibration control of adjacent structures (Basili et al., 2018, 2019; Palacios-Quiñonero et al., 2019). As the vibration control performance of structures requires a high mass ratio, inerter-based vibration absorbers (IVAs) can be a good substitute for DVAs in vibration control. Studies on vibration isolation without inerters have also shown good performance in Xu et al. (2012, 2013, and 2019).

When the primary system is under force excitation, the operating mode of IVAs is the same as that of TMDs (or DVAs) and, for both, the performances are regulated by the ratio between the mass (equivalent) of the absorber and the mass of the primary system. Thus, a high mass ratio would be beneficial for improved control. However, for a TMD, this mass ratio is limited (Inman, 2008), whereas an IVA can work better for a high equivalent mass ratio because of the inerter device that constitutes it (Ikago et al., 2012). For the purpose of the latter, two main different technological solutions have been proposed to realize the inerter element, the rack-and-pinion inerter and the screwball inerter (Palacios-Quiñonero et al., 2019; Papageorgiou et al., 2008). Both these solutions take advantage of large inertial effect generated by a rotating flywheel. In the rack-and-pinion inerter, the torque transmission from the rack to the flywheel occurs through a series of gears, whereas in the screwball inerter, the linear motion of the screw is directly converted to the rotary motion of the flywheel. However, during the theoretical design of the IVA, the inerter is idealized as a simple element b (inertance) linearly proportional to the relative acceleration of its two terminals (Smith, 2002). But, many parasitic effects on the real inerter such as ratcheting, backlash, and friction phenomena (for both the mechanical of the device) have been observed experimentally in Gonzales-Buelga et al. (2017) and De Domenico et al. (2019). Nevertheless, improvement and modifications of the inerter device have been proposed (see e.g., Brzeski et al., 2015; Zheng and Wang, 2018).

To achieve high mass ratio absorbers, some classical arrangements of the TID based on the concept of the IVA are improved by an amplified inertance (of inerter) (Alotta and Failla, 2020). In the same order, Zhibao et al. (2020) propose an enhanced tuned mass damper using an inertial amplification mechanism. They found that the tuned inerter dampers (TIDs) with an amplified inertance and the tuned mass damper with an inertial amplification mechanism are more effective than classic TIDs and conventional TMDs, respectively. However, low-frequency vibration control remains a major concern. Although low-frequency vibration can be effectively isolated by

reducing the natural frequency of the system, there are always some limitations whether by reducing the stiffness or increasing the mass of the isolation system directly. Studies in the past (e.g., see Shen et al., 2016, 2017; Wang et al., 2017; Zhou et al., 2019, and Xiuchang et al., 2019) have tried to apply negative stiffness devices to suppress vibration and achieved some remarkable results. They showed that the inclusion of negative stiffness in vibration absorbers (VAs) could by its characteristics make the system unstable. Moreover, the main drawback of negative stiffness is to amplify the vibration amplitude of primary system in low-frequency regions (e.g., see Shen et al., 2016, 2017; Wang et al., 2017; Zhou et al., 2019). Nevertheless, the justification of its use in a control scheme could be twofold: improved frequency responses over a larger area around resonance and reduced cumulative mean square response of primary systems (Zhou et al., 2019). Amplified inertance (of inerter) mechanisms and negative stiffness devices have shown good performance in the field of vibration control (e.g., see Alotta and Failla, 2020; Li et al., 2016 and Wang et al., 2019a, 2019b). However, to the authors' knowledge, the simultaneous introduction of these two devices in arrangement of one of the configurations of the IVA is missing in the literature.

Therefore, the focus of this present article is to carry out a thorough optimization analysis for one type of IVA enhanced by an amplified inertance (AI) and grounded stiffness (GS), AIGS-IVA, which is aimed to improve low-frequency control performance of the considered IVA. It can be found that the control performance is only determined by the value of the amplified mass ratio $\mu\beta^2$ (where μ is the inertance mass ratio and β is the amplification ratio). Therefore, for given select values of the mass ratio and the amplification ratio, there are three cases for the optimum GS; that is, negative, zero, and positive. Thus, from these three cases, the positive GS resulted in a much smaller primary system response than its static response without control. Moreover, in all three cases, the frequency responses of the primary system with the enhanced IVA are significantly improved over a larger area around resonance.

This article is organized as follows. In the next section, the theoretical derivation and the stability analysis are performed. In Section 3, closed-form solutions to optimal parameters of the AIGS-IVA system are derived based on the H_∞ optimization criterion to minimize the maximum amplitude response to harmonic inputs of the primary system. After that, the result analysis of the design objectives based on the optimum parameters is found in the same section. Section 4 compares in the frequency domain and time domain, the performance of AIGS-IVA with respect to other IVAs which can be retrieved as special cases of AIGS-IVA suppressing some terms selectively. Finally, some conclusions are drawn in Section 5.

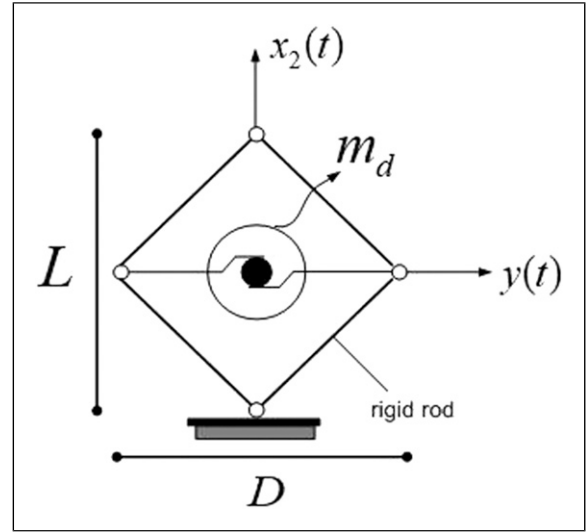


Figure 1. Schematic implementation of an amplified inertance.

2. Theoretical derivation and stability analysis

2.1. Implementation of an amplified inertance

As a large mass ratio results in a large vibration suppression, the amplification mechanism of inertance is always beneficial. Thus, the schematic implementation of an amplified inertance is shown in Figure 1 (Alotta and Failla, 2020). Based on this figure, the inerter is inserted in a rhombus truss structure; the rods are modeled as rigid and their inertial properties are assumed to be negligible compared with those of the inerter and the SDOF system. Under the deformations effect of the device as shown in Figure 1, the resisting force exerted by inerter is proportional to the relative acceleration between its two terminals as

$$f_{m_d}(t) = -2\ddot{y}(t)m_d \quad (1)$$

where $y(t)$ is the displacement of one end, as illustrated in Figure 1. Thus, under the assumption of small displacement, $y(t)$ is related to $x_2(t)$ by the following relation

$$y(t) = -x_2(t) \frac{L}{2D} \quad (2)$$

According to Alotta and Failla (2020), by imposing the equilibrium of the rods, the reaction of the rhombus truss to the motion $x_2(t)$, in the direction of the diagonal with length L , is obtained as

$$f(t) = \ddot{x}_2(t)m_d \left(\frac{L}{D}\right)^2 = m_d\beta^2\ddot{x}_2(t) \quad (3)$$

where the ratio $\beta = (L/D)$ between the diagonals of the rhombus truss is the amplification coefficient of the inertance mass m_d . Therefore, β must be greater than unity.

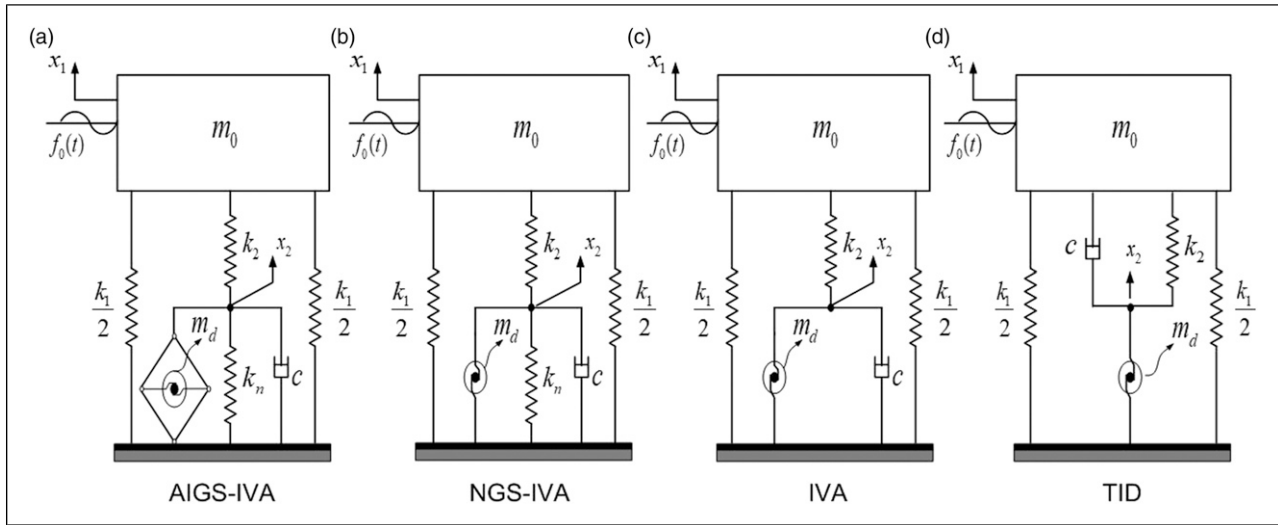


Figure 2. Schematic model of the undamped SDOF system with (a) AIGS-IVA, (b) NGS-IVA, (c) IVA, and (d) TID. Note: TID: tuned inerter damper; IVA: inerter vibration absorber; AIGS-IVA: amplified inertance mechanism and grounded stiffness-inerter vibration absorber; SDOF: single degree of freedom; NGS-IVA: negative grounded stiffness-inerter vibration absorber.

However, based on the study by [Alotta and Failla \(2020\)](#), values of β larger than three must not be taken into account because they can be reached with extreme geometries of the rhombus truss. It should also be mentioned that $\beta = 1$ corresponds to the case of nonamplification and $\beta < 1$ is the case of reduced inertance mass. In the remainder of the document, the inertance amplifying device is introduced into an IVA configuration for study.

2.2. Equation of motion of the AIGS-IVA

The mechanical system of a primary structure equipped with an AIGS-IVA under investigation is presented in [Figure 2\(a\)](#). In this configuration, the controlled primary structure is modeled as an undamped SDOF system, with a stiffness k_1 , a mass m_0 , and zero damping ([Den Hartog 1956](#)). Similarly, the stiffness, inertance mass, and damping coefficients related to AIGS-IVA are, respectively, labeled as k_2 , k_n , m_d , and c . Finally, [Figures 2\(b\) and \(c\)](#) show the nonamplified inertance systems, with negative GS (NGS-IVA in [Figure 2\(b\)](#)) and without GS (IVA in [Figure 2\(c\)](#)). Therefore, these systems can be rewritten as special cases of AIGS-IVA by removing certain terms selectively. Finally, in [Figure 1 \(d\)](#), the conventional model of the IVA is shown, that is, the TID taken here as a reference for evaluating the performance of the proposed IVAs in this article.

Although the negative stiffness device mainly exhibits geometrical nonlinearity, the negative stiffness device, if properly designed, is approximately linear in a given displacement range ([Zhou et al., 2017](#)). Therefore, for convenience of analytical derivation in this study, the force–displacement relationships of the negative stiffness device is assumed to be linear in this article, which was also adopted

by some research works on the negative stiffness device ([Antoniadis et al., 2015](#); [Pasala et al., 2013](#)).

To optimize the response of primary structures in [Figure 2](#) equipped with these control systems, the equation of motion of the AIGS-IVA-SDOF system should be written as

$$\begin{cases} m_0 \ddot{x}_1 + k_2(x_1 - x_2) + k_1 x_1 = f_0(t) \\ \beta^2 m_d \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c \dot{x}_2 + k_n x_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

where x_1 and x_2 are the displacements of the primary structure and AIGS-IVA, respectively.

Using the following parametric transformation

$$\mu = \frac{m_d}{m_0}, \quad \eta = \frac{k_n}{k_2}, \quad \alpha = \frac{\omega_d}{\omega_0}, \quad \zeta = \frac{c}{2\beta^2 m_d \omega_d} \quad (5)$$

equation (4) becomes

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \mu \beta^2 \alpha^2 (x_1 - x_2) + x_1 = F_0(\tau) k_1^{-1} \\ \ddot{x}_2 + \alpha^2 (x_2 - x_1) + 2\zeta \alpha \dot{x}_2 + \eta \alpha^2 x_2 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

In equations (5) and (6), μ is the inertance mass ratio, η is the GSs ratio, α is the frequency ratio, and ζ is the damping ratio. $\tau = \omega_1 t$ is the considered scaled time.

2.3. The analytical solution to harmonic force excitation

In equation (6), $F_0(\tau)$ is configured as $F_0(\tau) = f_0 e^{j\Omega \tau}$ where f_0 is the magnitude of the force excitation. Therefore, the steady-state displacement response of each degree of freedom of the system can be represented by $x = X e^{j\Omega \tau}$. Furthermore, $\Omega = \omega/\omega_0$ is the dimensionless forced

frequency normalized with respect to the natural frequency of the primary system ω_0 , and ω_d is the corner frequency of the AIGS-IVA. The two frequencies ω_0 and ω_d are thus

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_0}}, \quad \omega_d = \sqrt{\frac{k_2}{\beta^2 m_d}} \quad (7)$$

By substituting $x = Xe^{j\Omega\tau}$ into equation (6), the dimensionless complex dynamic magnification factor from the force excitation $F(\tau) = f_0 e^{j\Omega\tau}$ to the displacement of the main structure can be written as

$$\frac{X_1}{\delta_{st}} = \frac{(j\Omega)^2 + N_1(j\Omega) + N_0}{(j\Omega)^4 + D_3(j\Omega)^3 + D_2(j\Omega)^2 + D_1(j\Omega) + D_0} \quad (8)$$

where j is the imaginary unit, $\delta_{st} = f_0/k_1$ is the static deflection, and the other parameters are as follows

$$\begin{cases} N_1 = 2\xi\alpha \\ N_0 = \alpha^2(1 + \eta) \\ D_3 = 2\xi\alpha \\ D_2 = \alpha^2(1 + \eta + \mu\beta^2) + 1 \\ D_1 = 2\xi\alpha(1 + \mu\beta^2\alpha^2) \\ D_0 = \alpha^2(1 + \eta + \eta\mu\beta^2\alpha^2) \end{cases} \quad (9)$$

It is apparent that the complex dynamic magnification factor of coupled systems without an amplified inertance relevant to NGS-IVA (Figure 2(c)) can be achieved by setting $\beta = 1$ into equation (8) according to (9). Similarly, the complex dynamic magnification factor of primary system without GS and an amplified inertance is relevant to IVA (Figure 2(c)) after setting $\beta = 1$ and $\eta = 0$, simultaneously. In these conditions, NGS-IVA and IVA can be rewritten as special cases of the proposed AIGS-IVA.

By collecting the real and imaginary parts in the numerator and denominator of equation (8) according to (9) and supposing $A(\Omega)$ is the normalized amplitude magnification factor of the primary system, the steady-state response can be established as

$$A(\Omega) = \left| \frac{X_1}{f_0/k_1} \right| = \sqrt{\frac{4\xi^2 I_1^2 + R_1^2}{4\xi^2 Q_0^2 + P_0^2}} \quad (10)$$

and the four components are given by

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha\Omega, \\ R_1 &= \alpha^2(1 + \eta) - \Omega^2 \\ Q_0 &= \alpha\Omega(1 + \mu\beta^2\alpha^2 - \Omega^2) \\ P_0 &= \alpha^2(1 + \eta + \eta\mu\beta^2\alpha^2) - [1 + \alpha^2(1 + \eta + \mu\beta^2)]\Omega + \Omega^4 \end{aligned} \quad (11)$$

2.4. Stability analysis of system

According to the characteristic of the GS k_n , it is relevant to specify the admissible limit on its value, within which the

coupled system remains stable. The stability of the static equilibrium of the coupled system with GS relevant to AIGS-IVA can be analyzed by applying the Routh–Hurwitz criterion to the characteristic equation of the system given by

$$s^4 + D_3s^3 + D_2s^2 + D_1s + D_0 = 0 \quad (12)$$

Note that the characteristic equation of the system given by equation (12) is the denominator of equation (8) replacing $j\Omega$ by the Laplace variable s . According the Routh–Hurwitz stability criterion, the coupled system is asymptotically stable if and only if all its eigenvalues (of equation (12)) lie in the left half of the complex plan and all the coefficients D_i in the characteristic equation (12) should also be positive. Accordingly, the coupled system AIGS-IVA is stable if the following conditions are satisfied

$$D_3 > 0, D_1 > 0, D_0 > 0, D_1 D_2 D_3 > D_1^2 + D_0 D_3^2 \quad (13)$$

By substituting the coefficients D_i ($i = 0, \dots, 3$) (see equation (9)) into (13), a unique constraint on the GS ratio η relevant to guarantee the stability of AIGS-IVA can be satisfied as follows

$$\eta > -1 + \frac{\mu\beta^2\alpha^2}{1 + \mu\beta^2\alpha^2} \quad (14)$$

$\mu\beta^2\alpha^2/(1 + \mu\beta^2\alpha^2)$ in equation (14) increases for all positive values of $\mu\beta^2\alpha^2$, which means that the lower bound of η is greater than -1 , meaning that the absolute value of the GS k_n must always be less than that of the stiffness k_2 of the IVA. Nonetheless, the effective upper limit on η will be derived in the next sections because the analytical formulation of the frequency ratio α could be expressed as a function of η , μ , and β in the following.

3. Parameter optimization and result analysis

3.1. Closed-form solutions to α , ξ and η

Assume that the undamped SDOF primary structure in Figure 2(a) equipped with the proposed AIGS-IVA is subjected to harmonic force excitation $f_0(t)$ so that the H_∞ optimization is adopted to tuning the optimum parameters. Thus, given fixed values for the inertance mass ratio μ and the amplification coefficient β , it is sought to determine optimal values of frequency ratio α , damping ratio ξ , and GS ratio η , respectively, such that the amplitude magnification factor of the primary structure is minimized. To this aim, the optimum tuning ratio, the optimum frequency ratio, the optimum damping ratio, and the optimum GS ratio of AIGS-IVA-SDOF are derived by using fixed-points theory of Den Hartog (1956).

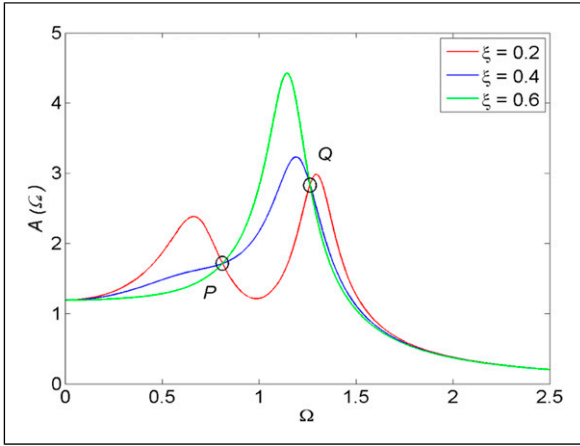


Figure 3. Normalized amplitude magnification factor of the primary system equipped with an amplified inertance mechanism and grounded stiffness-inerter vibration absorber under $\mu = 0.1$, $\alpha = 1.3$, $\beta = 1.2$, and $\eta = -0.4$ for various damping ratios.

Figure 3 presents the graphs of the amplitude magnification factor $A(\Omega)$ based on equation (10) versus the frequency ratio Ω corresponding to some different values of the AIGS-IVA's damping ratio ζ . From Figure 3, we can observe two stationary points P and Q independent of ζ , where the different damped curves intercept. Because the two stationary points are intersection points of graphs $A(\Omega)$, their location on the frequency axes can be determined by letting $\zeta = 0$ and $\zeta = \infty$ in equation (10), which will give the first tuning condition to find the optimal values of α , η , and ζ . We obtain

$$A(\Omega)|_{\zeta=0} = \left| \frac{R_1}{P_0} \right|, \quad A(\Omega)|_{\zeta=\infty} = \left| \frac{I_1}{Q_0} \right| \quad (15)$$

By equating these two expressions, a quartic equation in Ω^2 is obtained

$$\begin{aligned} \Omega^4 + a_1\Omega^2 + a_0 &= 0 \\ a_1 &= -[1 + \alpha^2(1 + \eta + \mu\beta^2)] \\ a_0 &= \alpha^2[1 + \eta + (1/2 + \eta)\mu\beta^2\alpha^2] \end{aligned} \quad (16)$$

which is equivalent to

$$(\Omega^2 - \Omega_P^2)(\Omega^2 - \Omega_Q^2) = \Omega^4 - (\Omega_P^2 + \Omega_Q^2)\Omega^2 + \Omega_P^2\Omega_Q^2 = 0 \quad (17)$$

Comparing (16) and (17), we can conclude that

$$\Omega_P^2 + \Omega_Q^2 = 1 + \alpha^2(1 + \eta + \mu\beta^2) \quad (18)$$

At the second step, the highs of Ω_P and Ω_Q are adjusted to be equal, that is, we have

$$\left| \frac{I_1}{Q_0} \right|(\Omega_P) = \left| \frac{I_1}{Q_0} \right|(\Omega_Q) \quad (19)$$

Accordingly, one can get

$$\Omega_P^2 + \Omega_Q^2 = 2(1 + \mu\beta^2\alpha^2) \quad (20)$$

Combining (18) and (20), we obtain an optimal value of the first tuning ratio as a function of μ and η , that is, the optimum frequency ratio α_{opt} is as follows

$$\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{1}{1 + \eta - \mu\beta^2}} \quad (21)$$

To yield a real value for α_{opt} and practical meaning, the GS ratio η should be bounded by the following

$$-1 < -1 + \mu\beta^2 < \eta < \eta_{up} \quad (22)$$

where η_{up} is the upper limit of GS η defined in the rest of the article.

The two fixed points can be obtained under this condition as

$$\Omega_P^2 = \frac{2(1 + \eta) - \sqrt{\mu\beta^2}}{2(1 + \eta - \mu\beta^2)}, \quad \Omega_Q^2 = \frac{2(1 + \eta) + \sqrt{\mu\beta^2}}{2(1 + \eta - \mu\beta^2)} \quad (23)$$

and the magnification factor at P and Q can be obtained

$$A|_{P,Q} = (1 + \eta - \mu\beta^2) \sqrt{\frac{2}{\mu\beta^2}} \quad (24)$$

Without loss of generality, the vibration amplitude at the fixed points is considered as the H_∞ norm of frequency response of primary system in the following context, namely, $A|_{P,Q} = \|A\|_\infty$.

At this time, there still exist two adjustable parameters other than the optimum frequency ratio. That is, the GS ratio η and the damping ratio ζ . From Figure 3, there is another intersection point O , which is also independent of the damping of the AIGS-IVA. According to equation (24), it is clear that a GS η will make the three fixed points much lower; this means one can get a better vibration control. Because the fixed point O is the zero frequency point, substituting $\Omega = 0$ into equation (10), the value of $A(\Omega)|_{\Omega=0}$ at the fixed points O under the optimum frequency ratio α_{opt} defined by equation (21) is formulated as

$$A(\Omega)|_{\Omega=0} = \frac{(\eta + 1)(1 + \eta - \mu\beta^2)}{(1 + \eta)^2 - \mu\beta^2} \quad (25)$$

Thus, to find the optimum GS ratio of the AIGS-IVA for the undamped primary system, a suitable choice of the GS ratio η could be found, whereby all fixed points P , Q , and O are adjusted to equal heights, namely, $A^2(\Omega)|_{\Omega=0} = A^2(\Omega)|_{\Omega_{P,Q}}$. That is

$$\frac{2(1 + \eta - \mu\beta^2)^2}{\mu\beta^2} = \frac{(\eta + 1)^2(1 + \eta - \mu\beta^2)^2}{[(1 + \eta)^2 - \mu\beta^2]^2} \quad (26)$$

This approach is also adopted in [Baduidana et al. \(2021\)](#) because of the characteristics of the negative stiffness and the goal of minimizing the peak vibration amplitude. However, there are two more cases to consider in this article because of the implementation of an amplified inertance, that is, zero and positive GS.

Solving equation (26) yields five GS ratios as

$$\begin{aligned} \eta_{1,2} &= -1 \pm \sqrt{\mu\beta^2/2} \\ \eta_3 &= -1 + \mu\beta^2 \\ \eta_{4,5} &= -1 \pm \sqrt{2\mu\beta^2} \end{aligned} \quad (27)$$

According to equations (14) and (21), there is a dependence between the frequency ratio α and the GS ratio η leading to the explicit expression for the lower limit of η . Thus, by substituting the optimal frequency ratio equation (21) into the general stability condition in equation (14), an inequality on η can be obtained as

$$[\mu\beta^2 - (1 + \eta)^2](-1 + \mu\beta^2 + \eta) > 0 \quad (28)$$

Suggesting that η should locate within the interval $(\eta_L, \eta_{I1}) \cup (\eta_{I2}, \eta_{up}]$, with the lower, intermediate, and upper limits defined by

$$\eta_L = -1 - \sqrt{\mu\beta^2}, \eta_{I1} = -1 + \sqrt{\mu\beta^2}, \eta_{I2} = -1 + \mu\beta^2, \eta_{up}^{cste} \quad (29)$$

By combining equations (29) and (22) always for any positive $(\mu; \beta)$, it is noticeable that the allowable bound on η is then reduced to

$$\eta \in (\eta_{I2}, \eta_{up}] \quad (30)$$

According to equation (27), it is also noticeable that η_2 and η_5 are less than -1 and $\eta_2 < \eta_{I2}$, whereas $\eta_3 = \eta_{I2}$ always holds for any positive $(\mu; \beta)$. Therefore, the last possible solution on η satisfies $\eta_{I2} < \eta_4 < \eta_{up}$ only for any $\mu\beta^2 < 2$, which should be then retained. Accordingly, the optimum GS ratio η_{opt} for the AIGS-IVA is formulated as

$$\eta_{opt} = \eta_4 = -1 + \sqrt{2\mu\beta^2} \quad (31)$$

It should be mentioned that from $\mu\beta^2 < 2$ and η_{opt} , the upper limit on GS ratio η can be found again as $\eta_{up} = 1$. This is the threshold value below which η_{opt} has practical meaning. However, in keeping with the mechanics of the system in [Figure 2\(a\)](#) and with the inclusion of an inertance amplification mechanism, the AIGS-IVA can work interestingly for three cases of the set of GS ratios of η_{opt} , that is, negative, zero and positive. That is as follows

$$\begin{cases} \eta_{opt} < 0, & \text{if } 0 < \mu\beta^2 < 1/2 \\ \eta_{opt} = 0, & \text{if } \mu\beta^2 = 1/2 \\ \eta_{opt} < 0, & \text{if } 1/2 < \mu\beta^2 < 2 \end{cases} \quad (32)$$

Note that the complexity of the negative stiffness system is also a factor to be considered in actual engineering. Nevertheless, [Xiuchang et al. \(2019\)](#) reported that the cross-ply composite laminates with residual thermal stress are able to realize negative stiffness ([Guo et al., 2018](#)). Besides the mechanical device, piezoelectric material shunted with the resistance-inductance-negative capacitor is also a feasible way to implement negative stiffness ([Korde et al. 2018](#); [Neubauer and Wallaschek, 2013](#); [Neubauer et al., 2006](#)). However, this review does not mention mechanisms involving prestressed springs, which are probably the most widespread. Therefore, for the construction of the AIGS-IVA, a ball screw inerter ([Ikago et al., 2012](#)) and a negative stiffness device ([Pasala et al., 2013](#)) are recommended.

Finally, at the third step, one adjusts the damping ratio so as to make the maximum amplitude of the primary system at the fixed points. The condition can be achieved when the derivatives of the amplitude amplification factor are zero at the two fixed points

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega}(\Omega_P) = \frac{\partial A}{\partial \Omega}(\Omega_Q) = 0 \quad (33)$$

Solving equation (33) and substituting equations (21) and (23) into the results, respectively, we can get

$$\xi_P^2 = \frac{3\mu\beta^2}{4(2 + 2\eta - \sqrt{2\mu\beta^2})}, \xi_Q^2 = \frac{3\mu\beta^2}{4(2 + 2\eta + \sqrt{2\mu\beta^2})} \quad (34)$$

and taking an average of ξ_P^2 and ξ_Q^2 , we can get the optimum damping ratio ξ_{opt} as

$$\xi_{opt} = \sqrt{\frac{3(1 + \eta)\mu\beta^2}{4[2(\eta + 1)^2 - \mu\beta^2]}} \quad (35)$$

As this time, all the optimal parameters of the AIGS-IVA in this article are obtained based on the fixed point theory (FPT). It can be found that the parameter optimization purposes are basically achieved. However, by setting $\beta = 1$ in equations (21), (31), and (35); $\beta = 1$ and $\eta = 0$ together in equations (21) and (35), the parameter optimization for NGS-IVA and IVA can be rewritten, respectively.

3.2. Result analysis for AIGS-IVA

In practice, the amplified mass ratio $\mu\beta^2$ depends on the specific engineering requirements. Therefore, the influence of this parameter on the design parameters α , ξ , and η is worthy of a special attention. To validate the optimal solutions, simulations are first conducted on the system as

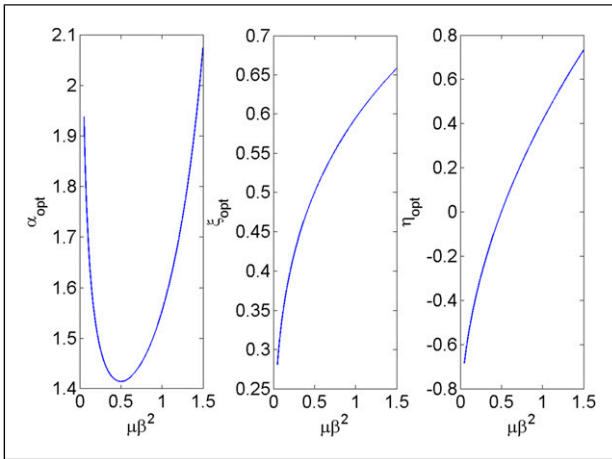


Figure 4. Relationships between amplified mass ratio and optimum parameters.

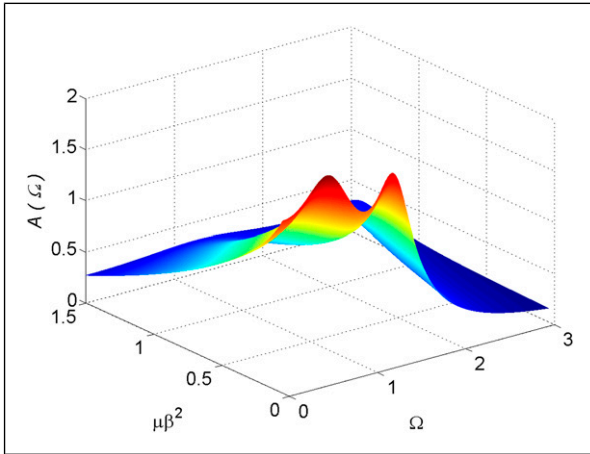


Figure 5. Contour plot of the normalized amplitude magnification factor of primary system equipped with an amplified inertia mechanism and a grounded stiffness-inerter vibration absorber for different $\mu\beta^2$ ratio.

a function of the amplified mass ratio $\mu\beta^2$. The optimum solutions of the frequency ratio α , damping ratio ξ , and GS ratio η of the AIGS-IVA system derived from the analytical equations (21), (31), and (35) are presented in Figure 4 for varying the amplified mass ratio $\mu\beta^2$ in the range of 0.05–1.5. The optimum frequency ratio α_{opt} decreases rapidly at first when the amplified mass ratio $\mu\beta^2$ is very small ($\mu\beta^2 \leq 0.5$) and then quickly increases as $\mu\beta^2 > 0.5$. However, both for $\mu\beta^2 \leq 0.5$ and $\mu\beta^2 > 0.5$, this indicates that for the given amplified mass ratio $\mu\beta^2$, the AIGS-IVA system has a stiffer spring to achieve the best control performance. The optimum damping ratio ξ_{opt} increases along with increases the amplified mass ratio $\mu\beta^2$. This indicates that a larger amplified mass ratio $\mu\beta^2$ requires a high damping for the AIGS-IVA system to achieve the best control performance.

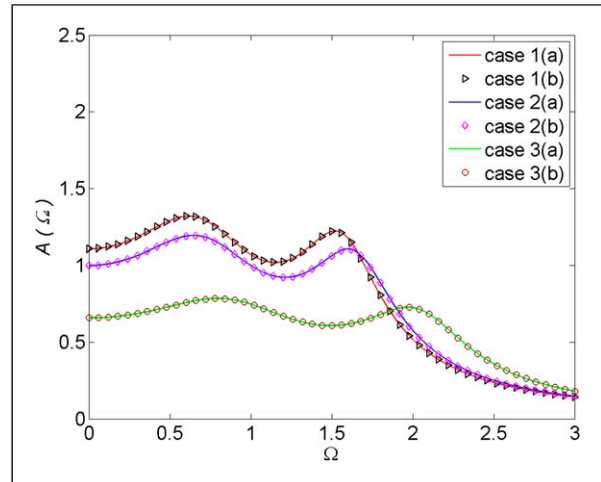


Figure 6. Normalized amplitude magnification factor of primary system equipped with an amplified inertia mechanism and a grounded stiffness-inerter vibration absorber in three different cases of grounded stiffness η_{opt} .

Finally, the optimum GS ratio η_{opt} increases along with increases the amplified mass ratio $\mu\beta^2$. Clearly, according to the range of $\mu\beta^2$, η_{opt} exhibits three different cases of values labeled as Case 1 (negative values), Case 2 (zero values), and Case 3 (positive values).

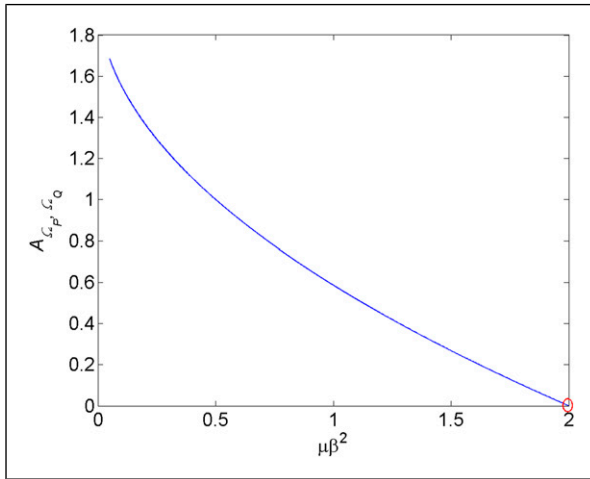
The damping effect gets better as the amplified mass ratio $\mu\beta^2$ increases, as shown in Figure 5. However, the quick decay of the peak amplitude as $\mu\beta^2$ increases shows that the normalized displacement of the primary system controlled with the AIGS-IVA is sensitive to the variation of β for a larger value of η . Moreover, as the system needs a stiffer spring and high damping to achieve the best control performance, choosing a large inertia mass ratio increases the manufacturing cost. Nevertheless, the implementation of an amplified inertia can considerably reduce manufacturing costs because, for a small inertia mass ratio with a larger amplification $\beta > 1$, an effective reduction in the response of the primary system can be obtained.

Furthermore, Figure 6 illustrates the damping effect related to each case of tuning GS ratio η_{opt} as previously mentioned and labeled as Case 1, Case 2 and Case 3, and each them includes case (a) and case (b) with different values of μ and β , but the same value of $\mu\beta^2$, according to the specific parameters in Table 1. Obviously, as in Figures 4 and 5, it can once again be seen from Figure 6 that the control performance is only tuned by the value of the amplified mass ratio $\mu\beta^2$. In other words, according to Figure 6 and Table 1, the system has the same control performance regardless of the values of μ and η as long as the values of $\mu\beta^2$ are equal.

In terms of control performance, it can be found that the configuration of AIGS-IVA in Case 3 is the best, followed

Table 1. Parameters of the system in different cases of η_{opt} .

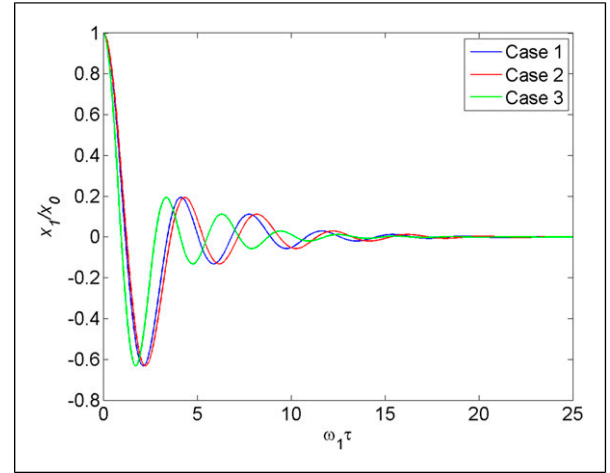
Cases		η_{opt}	μ	β	$\mu\beta^2$
Case 1	(a)	-0.106	0.1	2	0.4
	(b)	-0.106	0.125	$\sqrt{3.2}$	0.4
Case 2	(a)	0	0.1	$\sqrt{5}$	0.5
	(b)	0	0.125	2	0.5
Case 3	(a)	0.342	0.1	3	0.9
	(b)	0.342	0.125	$\sqrt{7.2}$	0.9

**Figure 7.** Normalized displacement at the fixed points with respect to $\mu\beta^2$.

by Case 2, and then by Case 1. Although the control performance is the best in Case 3, it requires a high value of $\mu\beta^2$, whereas Cases 1 and 2 require a lower value of $\mu\beta^2$. But $\mu\beta^2$ cannot be arbitrarily chosen because of the limitation on the amplification coefficient β in practice (Alotta and Failla, 2020). For further explanation, Figure 7 shows the normalized displacement of the fixed points with different $\mu\beta^2$. Theoretically speaking, the response at fixed points decreases with the increase of the value of $\mu\beta^2$. However, it can be found that there is a limit to the values of $\mu\beta^2$, as previously mentioned.

Finally, to further investigate the damping effect of the different cases of optimum GS ratio, Figure 8 shows the dimensionless transient response x_1/x_0 of the primary system after an initial displacement x_0 is given to the primary mass. The vibration of the system designed in Case 3 decayed more rapidly than that of other systems designed using Case 1 and Case 2. Nevertheless, for all these cases, swing-back vibration does not occur when the system stabilizes.

Usually, the inertance mass ratio μ and the amplification coefficient β are determined based on the design requirements. However, a high inertance mass ratio can be produced by the inerter device without increasing the volume

**Figure 8.** Transient response to initial displacement x_0 .

of the system (Ikago et al., 2012; Smith, 2002). Meanwhile, the inertance amplification mechanism adds some dead load to the system but it is negligible. Therefore, the combination of these two devices must take into account the actual conditions. Nevertheless, the range of values of β is physically defined in Alotta and Failla (2020) and adopted in this article. Moreover, the remarkable positive effect of the combination of these two devices with a GS included in the considered IVA deserves special attention for the practice of engineering. But first, the control performance of the proposed AIGS-IVA compared with other IVAs is highlighted in the next section.

3.3. Remarks

At this stage, some remarks are in order to summarize the main results.

1. The amplification mechanism in the AIGS-IVA allows to achieve high mass ratios by adding a small dead load to the system, which allows the system to quickly achieve high damping ratios (see Figure 4). This effect is already achieved by simple IVAs, but the proposed AIGS-IVA in this article could be even more effective for the same given mass ratio.
2. For numerical applications, the values of the amplification ratio β must be taken in the interval of one at three for structural geometry reasons (Alotta and Failla, 2020). However, $\beta = 1$ is the unamplified case of inertance, which corresponds to NGS-IVA in Figure 2(b). So NGS-IVA is a special case of AIGS-IVA in this study. Values of β less than unity are not considered in this study because they reduce inertance and will lead to an amplification in the response of the primary system.
3. The geometry of the motion amplifier mechanism was chosen in this study as the simplest possible without

generality. However, the real mechanism may be different in reality and surely be further improved or modified with the goal of getting a larger motion amplification ratio and better performance than those presented in this study for AIGS-IVA.

4. The inclusion of negative stiffness in the vibration absorbers (Shen et al., 2016, 2017; Wang et al., 2017; Xiuchang et al., 2019; Zhou et al., 2019) or isolation systems (Baduidana et al., 2021) significantly improves the response of the primary system. However, obtaining negative stiffness is difficult in engineering practice. Therefore, the inclusion of an inertance amplifying mechanism in the proposed AIGS-IVA not only results in positive stiffness or zero stiffness of grounded negative stiffness but also to a significant improvement in the response of the primary system beyond that of the system with negative stiffness (see Figure 6). Moreover, AIGS-IVA with the positive GS resulted in a much smaller primary system response than its static response without control.
5. The advantage of the amplification mechanism also relates to the viscous damper and the spring, respectively. The motion amplification mechanism when also installed at the level of the viscous damper and the spring IVAs can allow to adopt viscous damper and springs with characteristics considerably inferior to the real requested viscosity and stiffness, but with strokes lower than in the case where they are not amplified, if they tuned by the fixed point theory.
6. The formulation of the results of this study is based on the hypothesis of small displacements of the primary structure. Here, to justify this assumption, it is noticed that the magnification factor of the primary system with AIGS-IVA in three cases has small magnitudes (see Figure 6). This is relevant because, if the magnification factor is a small displacement of the SDOF system, as is generally in some engineering structures, the stroke length of the system (i.e., the relative

movement x_2-x_1) will correspond to small displacements $x_2(t)$ (see Figure 1) along a diagonal of the rods. However, because $y(t) = -\beta x_2(t)/2$, being $y(t)$ the displacement along the other diagonal of the rods and the fact that $1 < \beta < 4$ for structural reasons (see Alotta and Failla, 2020), it can be concluded that the assumption of small displacements made at the base of the whole of the formulation can be regarded as reasonably correct.

7. The IVA devices proposed in this article, in particular the AIGS-IVA, have been studied with an emphasis on application to an SDOF system. The devices are also suitable for application on MDOF or continuous systems for future research. However, in the real application for MDOF structures, the suboptimal tuning parameters of these devices may follow the approach taken in (Kun and Nyangi, 2020).

4. Performance comparison

Until now, the optimal design of all types of IVA systems, AIGS-IVA, NGS-IVA, and IVA in Figure 2, has been based on the fixed point theory (FPT) (Den Hartog, 1956). The solutions for tuning parameters of the TID are introduced in this article (Gonzales-Buelga et al., 2017). These solutions are necessary to clarify the control performance of the IVAs illustrated in Figure 2. Therefore, all the optimal parameters of the four models (AIGS-IVA, NGS-IVA, IVA, and TID) are summarized in Table 2.

To illustrate the control performance of the presented AIGS-IVA, numerical investigation will be performed to simulate the dynamics in both frequency and time domains.

4.1. The case under harmonic excitation

To compare the control performance of absorbers in the frequency domain, the values of the optimal parameters in Table 2 are given in Table 3. The frequency curves

Table 2. Optimal parameters of various types of absorbers based on the fixed point theory.

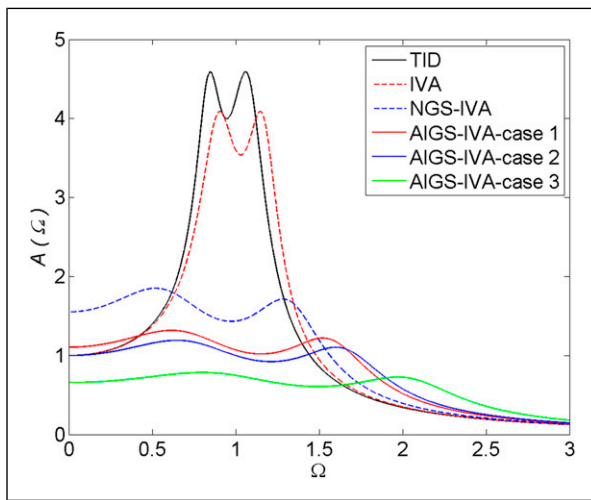
Models	α_{opt}	ζ_{opt}	η_{opt}
TID	$\frac{1}{1+\mu}$	$\sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}}$	—
IVA	$\sqrt{\frac{1}{1-\mu}}$	$\sqrt{\frac{3\mu}{4(2-\mu)}}$	—
NGS-IVA	$\sqrt{\frac{1}{1+\eta-\mu}}$	$\sqrt{\frac{3\mu(1+\eta)}{8(\eta+1)^2-4\mu}}$	$-1 + \sqrt{2\mu}$
AIGS-IVA	$\sqrt{\frac{1}{1+\eta-\mu\beta^2}}$	$\sqrt{\frac{3\mu\beta^2(1+\eta)}{8(\eta+1)^2-4\mu\beta^2}}$	$-1 + \sqrt{2\mu\beta^2}$

Note: TID: tuned inerter damper; IVA: inerter vibration absorber; NGS-IVA: negative grounded stiffness-inerter vibration absorber; AIGS-IVA: amplified inertance mechanism and grounded stiffness-inerter vibration absorber.

Table 3. Values of parameters used in the presented comparison.

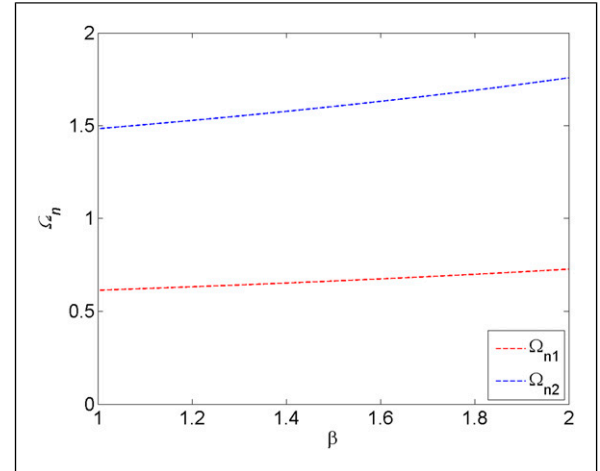
Models	μ or $\mu\beta^2$	α_{opt}	ζ_{opt}	η_{opt}
TID	$\mu = 0.1$	0.909	0.185	—
IVA	$\mu = 0.1$	1.054	0.199	—
NGS-IVA	$\mu = 0.1$	1.697	0.334	-0.553
AIGS-IVA	Case 1 $\mu\beta^2 = 0.4$	1.422	0.473	-0.106
	Case 2 $\mu\beta^2 = 0.5$	1.414	0.500	0
	Case 3 $\mu\beta^2 = 0.9$	1.505	0.579	0.342

Note: TID: tuned inerter damper; IVA: inerter vibration absorber; NGS-IVA: negative grounded stiffness-inerter vibration absorber; AIGS-IVA: amplified inertance mechanism and grounded stiffness-inerter vibration absorber.

**Figure 9.** Comparison of control performance with other inerter vibration absorbers.

responses of primary systems with the four different aforementioned types of absorbers are shown in Figure 9 under harmonic excitation based on the same mass ratio as $\mu = 0.1$. Accordingly, the values of the specific parameter β , relevant to each case of the GS ratio for the proposed AIGS-IVA in this article, can be found in Table 1. Note that the values of β cannot be chosen greater than 3.5 (Alotta and Failla, 2020).

From the comparison in Figure 9, it can be concluded that the AIGS-IVA in this article in all three cases can not only suppress the vibration amplitude of the primary system in the resonance region significantly but also extend the efficient frequency range of vibration absorption. It can also be seen that based on the optimum parameters, the AIGS-IVA control performance with positive GS is the best among three cases, while its performance slightly declines in the high frequency range. The change in natural frequencies due to the inclusion of the amplified inertance mechanism can be more given explanation for this performance decline. The dimensionless natural frequencies can be obtained by

**Figure 10.** Evolution of the two dimensionless natural frequencies as a function of amplification ratio β under $\mu = 0.1$.**Table 4.** Vibration amplitude of the primary system at the fixed points when controlled by the four vibration absorbers.

	TID	IVA	NGS-IVA	AIGS-IVA
A_{max}	$\sqrt{1 + \frac{2}{\mu}}$	$\sqrt{\frac{2(1-\mu)^2}{\mu}}$	$2 - \sqrt{2\mu}$	$2 - \sqrt{2\mu\beta^2}$

Note: TID: tuned inerter damper; IVA: inerter vibration absorber; NGS-IVA: negative grounded stiffness-inerter vibration absorber; AIGS-IVA: amplified inertance mechanism and grounded stiffness-inerter vibration absorber.

setting the denominator of equation (10) equal to zero so that one can get

$$\Omega_{n1,2} = \sqrt{\frac{1 + \eta \pm \sqrt{\mu\beta^2}}{1 + \eta - \mu\beta^2}} \quad (36)$$

Figure 10 shows the evolution of the two dimensionless natural frequencies as a function of the amplification ratio β for the given inertance mass ratio as $\mu = 0.1$. From this figure, it can be seen that as the amplification ratio increases, the two natural frequencies increase. Shifting the two natural frequencies toward the high-frequency range results in a slight decrease in the performance of the AIGS-IVA with positive stiffness in the high-frequency range.

Although the performance of the AIGS-IVA with positive stiffness slightly declines in the high-frequency range, its performance in the low-frequency range has been improved by making the response of the primary system much smaller than its static response without the IVA. Moreover, its performances in the medium-frequency range can be explained by the smallest vibration amplitude at fixed points within the whole admissible range of the inertance mass ratio μ as shown in Table 4, for select amplification ratio β . Nevertheless, it should be mentioned that the vibration

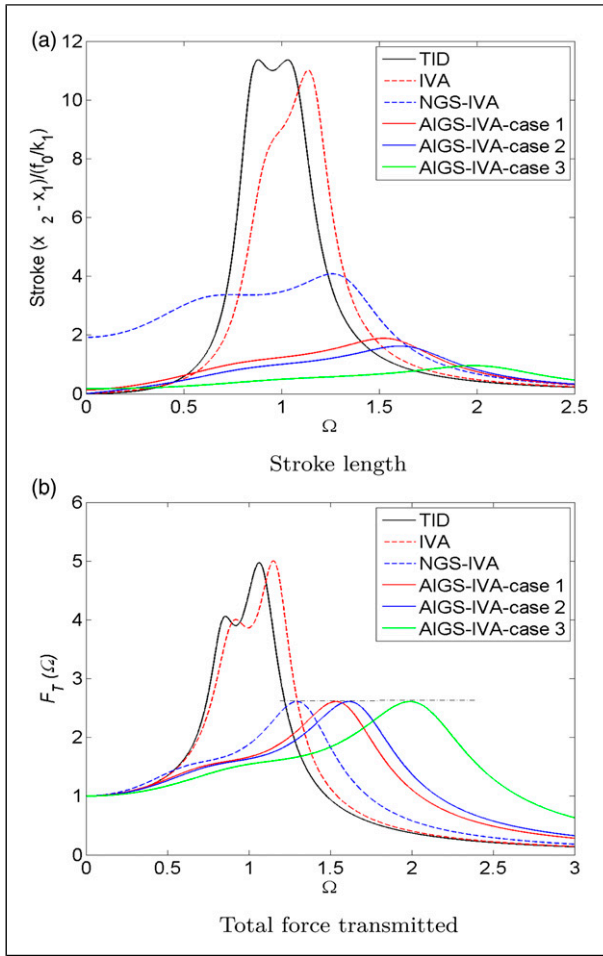


Figure 11. Frequency response curves of (a) the stroke length and (b) the total force transmitted to the ground.

amplitude at the fixed points is slightly different from the peak amplitude due to the suboptimal nature of methodologies based on fixed points.

More benefit could be introduced into the control performance by using the AIGS-IVA device. Figure 11(a) demonstrates the frequency response of relative motion between primary mass and slip points of the IVA devices, also termed as the stroke length, under harmonic force excitation. One can remark that the AIGS-IVA device in all three cases can reduce significantly the peak vibration amplitude of the stroke length compared with its IVA counterparts, which facilitates its practical implementation in a more strict environment.

Another aspect to take into account is the total force transmitted to the ground. Figure 11(b) shows the frequency response curves of the total force transmitted to the ground, relevant for each IVA under the optimum parameters based on the minimization of the amplification factor of the primary system as in Section 3. It can be seen that IVAs with

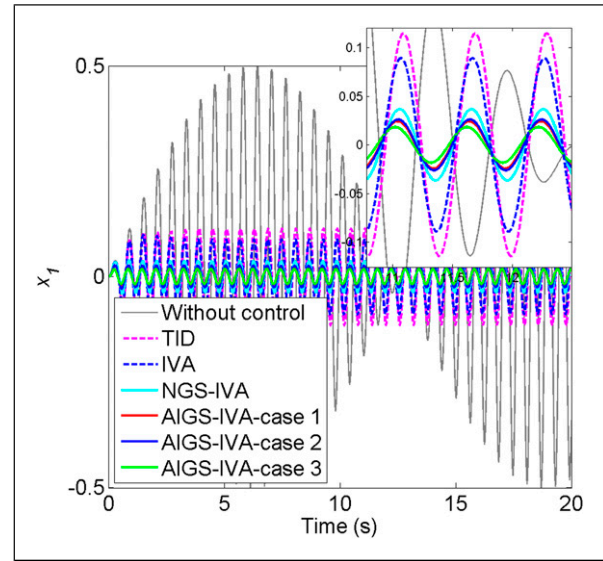


Figure 12. Normalized displacement response of the primary system under a harmonic force excitation input at the forced frequency $\Omega = 1.05$.

GS are more efficient than their IVA counterparts without GS. However, AIGS-IVA in the three cases has the same resonance peak, and the right shifting of the resonance area due to the amplification ratio β is observed, which shows that β has no effect on the reduction of the peak response concerning AIGS-IVA in the three cases. Nevertheless, the responses of the proposed systems can be improved by minimizing the transfer function corresponding to the total force transmitted to the ground using the fixed point theory (Den Hartog, 1956)

Next, the time history analysis for harmonic excitation is conducted to validate the efficiency of the proposed AIGS-IVA system in three cases. The governing equations of the systems are set up in a MATLAB environment and solved by using the fourth-order Runge–Kutta method under optimum parameters in Table 3. Here, we take the primary mass as $m_0 = 1k_g$ and stiffness of the primary system as $k_1 = 100 N/m$. For the IVAs, including the TID, the inertance mass ratio is set as $\mu = 0.1$. And for the performed time histories, it is assumed that the structures are at rest for $t = 0$.

The dimensionless harmonic force excitation motion ($F(\tau) = f_0 \sin(\Omega\tau)$) with its forced frequency ratio selected as $\Omega = 1.05$ is imposed. Figure 12 shows the normalized displacement response of the primary structure with or without absorbers. Clearly, the primary structure without any inerter-based vibration absorber shows a typical beating phenomenon and results in a large response. When IVAs, including the TID are used, the response of the primary system is mitigated, with a large reduction provided by the AIGS-IVA with positive stiffness, as predicted by the previous comparisons.

Although the proposed AIGS-IVA system in three cases has the best capability of vibration control, featured by the broadest suppression bandwidth and the smaller vibration amplitude of controlled system under harmonic excitation, the performances of this device must also be evaluated for random vibration excitation regarding the considered NGS-IVA, IVA, and TID systems in this article.

4.2. The case under random excitation

The primary system is usually subject to random excitation in practical engineering, so it is very important and meaningful to investigate the system response to random excitation. When the vibration isolation system is subjected to random excitation with zero mean and power spectral density (PSD) as $S(\omega)=S_0$, PSD functions of the displacement response of the four considered types of dampers in this article are, respectively

$$S_*(\omega) = |X_{1*}|^2 S_0 \quad (37)$$

where * denotes the considered damper. Then, the mean square response of the primary system with each inerter vibration absorber system can be expressed as

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_T^2 = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{1T}|^2 d\omega = \frac{\pi S_0 U_T}{2\mu\zeta\alpha\omega_0^3} \\ \sigma_I^2 = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{1I}|^2 d\omega = \frac{\pi S_0 U_I}{2\mu\zeta\alpha^5\omega_0^3} \\ \sigma_N^2 = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{1N}|^2 d\omega = \frac{\pi S_0 U_N}{2\mu\zeta\alpha^5\omega_0^3(1 + \eta + \eta\mu\alpha^2)} \\ \sigma_{AI}^2 = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{1AI}|^2 d\omega = \frac{\pi S_0 U_{AI}}{2\mu\zeta\alpha^5\omega_0^3(1 + \eta + \eta\mu\beta^2\alpha^2)} \end{array} \right. \quad (38)$$

where the subscriptions T , I , N , and A are related to the TID, the IVA (Figure 2(c)), the NGS-IVA (Figure 2(b)) with the negative GS element, and A the proposed AIGS-IVA (Figure 2(a)) in this article, respectively. The four other parameters U_i ($i=T, I, N$, and A) are listed as equation (39).

According to the values of the optimum parameters given in Table 3, the mean square response of the primary systems with all absorbers can be obtained as

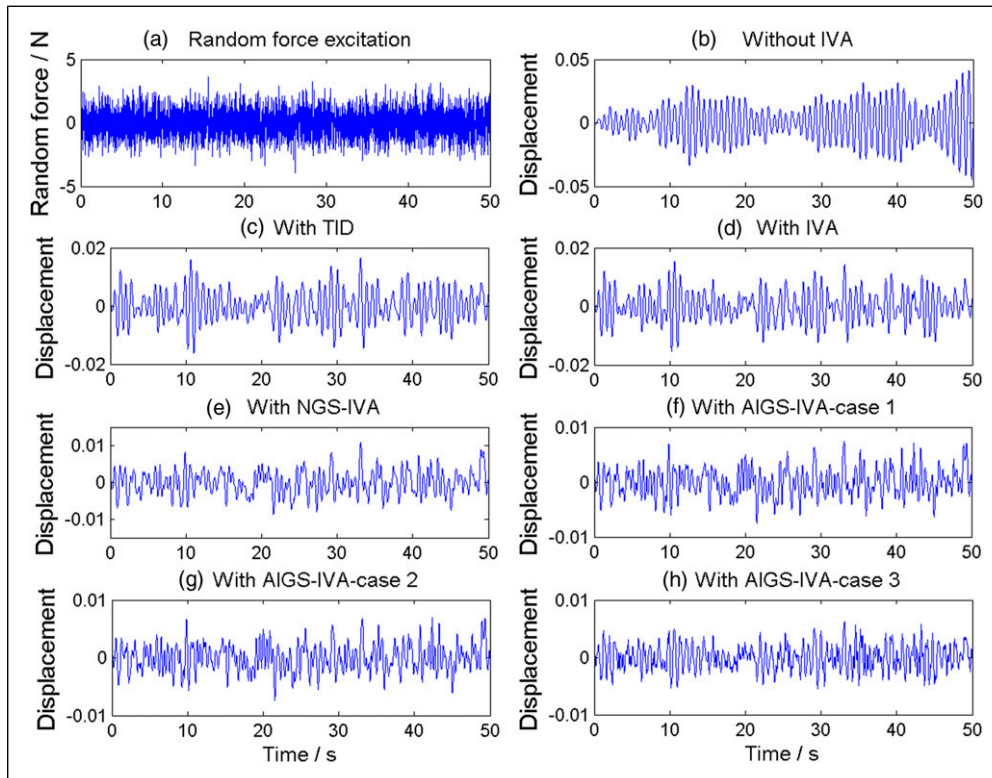


Figure 13. Time history of the random excitation and the primary system displacement with different absorbers.

$$\left\{ \begin{array}{l} U_T = 1 + \alpha^4(1 + \mu)^2 + \alpha^2(4\mu\xi^2 + 4\xi^2 - \mu - 2) \\ U_I = 1 + \alpha^4 + \alpha^2(4\xi^2 + \mu - 2) \\ U_N = 1 + \eta + \alpha^4[(1 + \eta)^3 - 2\eta\mu(1 + \eta - 2\xi) + \eta\mu^2] \\ \quad + \alpha^2[4\xi^2 + \mu - 2 + 2\eta(-2 - \eta + 2\xi^2 + \mu)] \\ U_{AI} = 1 + \eta + \alpha^4[(1 + \eta)^3 - 2\eta\mu\beta^2(1 + \eta - 2\xi) + \eta\mu^2\beta^4] \\ \quad + \alpha^2[4\xi^2 + \mu\beta^2 - 2 + 2\eta(-2 - \eta + 2\xi^2 + \mu\beta^2)] \end{array} \right. \quad (39)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_T^2 = \frac{6.401\pi S_0}{\omega_0^3}, \\ \sigma_I^2 = \frac{5.780\pi S_0}{\omega_0^3}, \\ \sigma_N^2 = \frac{2.736\pi S_0}{\omega_0^3}, \\ \sigma_{AI1}^2 = \frac{1.644\pi S_0}{\omega_0^3}, \\ \sigma_{AI2}^2 = \frac{1.414\pi S_0}{\omega_0^3}, \\ \sigma_{AI3}^2 = \frac{0.755\pi S_0}{\omega_0^3} \end{array} \right. \quad (40)$$

Table 5. Variance and decrease of the displacement and acceleration of the primary system.

Models	Variance	Decrease (%)
(a) Displacement		
Without IVA	2.0082×10^{-4}	
TID	2.5760×10^{-5}	87.17
IVA	2.4243×10^{-5}	87.93
NGS-IVA	1.1987×10^{-5}	94.03
AIGS-IVA		
Case 1	7.1776×10^{-6}	96.42
Case 2	6.6192×10^{-6}	96.70
Case 3	4.2705×10^{-6}	97.87
(b) Acceleration		
Without IVA	4.0508×10^{-4}	
TID	1.0438×10^{-4}	74.23
IVA	1.1179×10^{-4}	72.40
NGS-IVA	1.0397×10^{-4}	74.33
AIGS-IVA		
Case 1	1.0639×10^{-4}	73.74
Case 2	1.0737×10^{-4}	73.49
Case 3	1.1582×10^{-4}	71.41

Note: TID: tuned inerter damper; IVA: inerter vibration absorber; NGS-IVA: negative grounded stiffness-inerter vibration absorber; AIGS-IVA: amplified inerter mechanism and grounded stiffness-inerter vibration absorber.

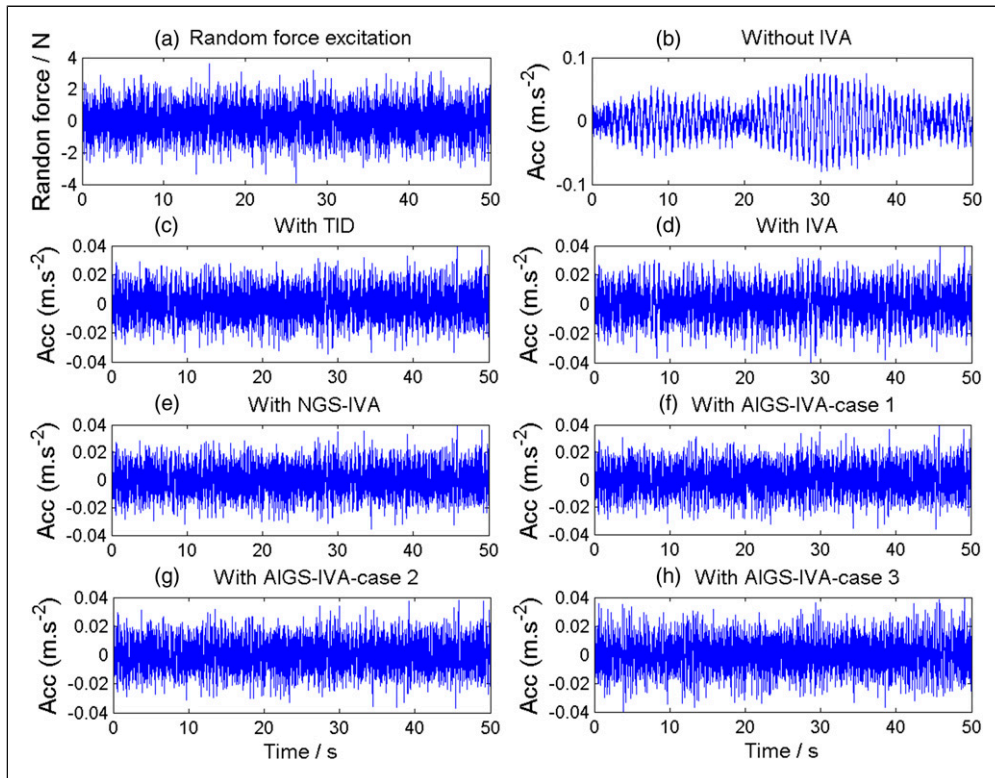


Figure 14. Time history of the random excitation and the primary system acceleration with different absorbers.

where, the σ_{AI1}^2 , σ_{AI2}^2 , and σ_{AI3}^2 denote the mean squares of the presented AIGS-IVA in Case 1, Case 2, and Case 3, respectively.

From the resulting mean square of the main mass displacement response in equation (39), the IVA with an amplified inertance and GS demonstrates the smallest mean square responses of the primary system, which results in the best control performance than other IVAs and TID even under the random excitation. Furthermore, the IVA with an amplified inertance and positive GS in the three cases of AIGS-IVA also shows the best performance under the random excitation.

To get more realistic results, 50 s random excitation is constructed, which is composed of 5000 normalized random numbers with zero mean value and unit variance, respectively. The time history of the random excitation is shown in Figure 13(a). Here, we also take the primary mass $m_0 = 1k_g$ and stiffness of the primary system $k_1 = 100 N/m$. Then, the parameters for the absorbers in this article can be calculated according to Table 2 and summarized in Table 3.

Based on the fourth-order Runge–Kutta method under the optimum parameters, the time history response of the primary system without an absorber and with different considered dampers can be obtained. The time history of these primary systems is shown in Figure 13(b)–(h). The response variances and decrease ratios for the different primary system with different absorbers are summarized in Table 5 for different performance indexes.

From Figure 13 and Table 5(a), it could also be concluded that the IVA with an amplified inertance and positive GS in the three cases of AIGS-IVA is the most effective system under random excitation.

Taking into account the protection of nonstructural elements consists in limiting the acceleration of the primary structure under random force excitation as in Figure 14(a). From Figure 14(b)–(h) and Table 5(b), it is clearly shown that compared with the uncontrolled primary system, the controlled primary systems are far less exposed to vibrations. However, the performance of AIGS-IVA in Case 3 is slightly inferior to that of the two other cases and the IVA counterpart. This means that the amplification of the inertance leads to a slight decrease in performance.

5. Conclusion

In this article, a new type of inerter-based vibration absorber with an amplified inertance mechanism and GS device (AIGS-IVA) is proposed and studied. The proposed IVA is optimized based on the fixed point theory. The optimum parameters are summarized in Table 2. The optimization results show that for given inertance mass ratio, the change of the system amplification ratio results in three possible values of the optimum GS, that is, negative stiffness when $0 < \mu\beta^2 < 1/2$, zero stiffness when $\mu\beta^2 = 1/2$,

and positive stiffness when $1/2 < \mu\beta^2 < 2$. After studying the control performance of the proposed IVA with respect to other considered IVAs including the TID, the results demonstrate that the IVA proposed in this article in three cases can present the best control performance, featured by the broadest suppression bandwidth and the minimal vibration amplitude of the primary system and the stroke length under the harmonic excitation. In the same excitation case, the AIGS-IVA significantly reduced the total force transmitted to the ground compared with its IVA counterpart. In the case of random excitation, the model in this article is also a great advantage as it has a good vibration reduction effect. Furthermore, the model control performance with positive GS is the best among three cases. Although the use of an amplified inertance system can increase the effective inertance mass of the AIGS-IVA resulting in the best control performance, there is a limit of the values for the amplification ratio and no optimum value.

Future research efforts will be devoted to investigating other mass amplification mechanisms and their applicability to MDOF systems, the effect of damping on the main structure, as well as the nonlinear response of the proposed AIGS-IVA system in this article.

Acknowledgements

The authors would like to thank the associate editor and the anonymous referees for their valuable comments and suggestions, which helped us to improve the manuscript.

Declaration of conflicting interests

The author(s) declared no potential conflicts of interest with respect to the research, authorship, and/or publication of this article.

Funding

The author(s) received no financial support for the research, authorship, and/or publication of this article.

ORCID iD

Marcial Baduidana  <https://orcid.org/0000-0002-3421-9321>

References

- Abé M and Fujino Y (1994) Dynamic characterization of multiple tuned mass dampers and some design formulas. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 23(8): 813–835.
- Alotta G and Failla G (2020) Improved inerter-based vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences* 192: 106087.
- Anajafi H and Medina RA (2018a) Comparison of the seismic performance of a partial mass isolation technique with conventional TMD and base-isolation systems under broad-band and narrow-band excitations. *Engineering Structures* 158: 110–123.

- Anajafi H and Medina RA (2018b) Robust design of a multi-floor isolation system. *Structural Control and Health Monitoring* 25(4): e2130.
- Antoniadis I, Chronopoulos D, Spitas V, et al. (2015) Hyper-damping properties of a stiff and stable linear oscillator with a negative stiffness element. *Journal of Sound and Vibration* 346: 37–52.
- Asami T and Nishihara O (1999) Analytical and experimental evaluation of an air damped dynamic vibration absorber: design optimizations of the three-element type model. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 121(3): 334–342.
- Baduidana M and Kenfack-Jiotsa A (2020) Optimal design of inerter-based isolators minimizing the compliance and mobility transfer function versus harmonic and random ground acceleration excitation. *Journal of Vibration and Control* 0(0): 1–14.
- Baduidana M, Wang X and Kenfack-Jiotsa A (2021) Parameters optimization of series parallel inerter system with negative stiffness in controlling a single-degree-of-freedom system under base excitation. *Journal of Vibration and Control* 0(0): 1–18.
- Basili M, De Angelis M and Pietrosanti D (2018) Modal analysis and dynamic response of two adjacent single-degree-of-freedom systems linked by spring-dashpot-inerter elements. *Engineering Structures* 174: 736–752.
- Basili M, De Angelis M and Pietrosanti D (2019) Defective two adjacent single degree of freedom systems linked by spring-dashpot-inerter for vibration control. *Engineering Structures* 188: 480–492.
- Brzeski P, Kapitaniak T and Perlikowski P (2015) Novel type of tuned mass damper with inerter which enables changes of inertance. *Journal of Sound and Vibration* 349: 56–66.
- Chen MZQ, Hu Y and Chen G (2016) Application of semi-active inerter in semi-active suspensions via force tracking. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 138(4): 041014.
- De Domenico D and Ricciardi G (2018a) Improving the dynamic performance of base-isolated structures via tuned mass damper and inerter devices: a comparative study. *Structural Control and Health Monitoring* 25(10): e2234.
- De Domenico D and Ricciardi G (2018b) An enhanced base isolation system equipped with optimal tuned mass damper inerter (TMDI). *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 47(5): 1169–1192.
- De Domenico D and Ricciardi G (2018c) Optimal design and seismic performance of tuned mass damper inerter (TMDI) for structures with nonlinear base isolation systems. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 47(12): 2539–2560.
- De Domenico D, Deastra P, Ricciardi G, et al. (2019) Novel fluid inerter based tuned mass dampers for optimised structural control of base-isolated buildings. *Journal of the Franklin Institute* 356(14): 7626–7649.
- De Domenico D, Qiao H, Wang Q, et al. (2020a) Optimal design and seismic performance of multi-tuned mass damper inerter (MTMDI) applied to adjacent high-rise buildings. *The Structural Design of Tall and Special Buildings* 29(14): e1781.
- De Domenico D, Ricciardi G and Zhang R (2020b) Optimal design and seismic performance of tuned fluid inerter applied to structures with friction pendulum isolators. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 132: 106099.
- Den Hartog JP (1956) *Mechanical Vibrations*. New York, USA: McGraw-Hill.
- Giaralis A and Petrini F (2017) Wind-induced vibration mitigation in tall buildings using the tuned mass-damper-inerter. *Journal of Structural Engineering* 143(9): 04017127.
- Gonzales-Buelga, A, et al. (2017) Assessing the effect of nonlinearities on the performance of tuned inerter damper: effect of nonlinearities on a tuned inerter damper performance. *Structure Control Health Monitoring* 24(3): e1879.
- Guo H, Li H, Chen WD, et al. (2018) A quasi-zero-stiffness vibration isolation system based on unsymmetric composite laminate (in Chinese). *Journal of Vibration and Shock* 37(20): 222–227.
- Hu Y, Chen MZQ and Shu Z (2014) Passive vehicle suspensions employing inerters with multiple performance requirements. *Journal of Sound and Vibration* 333(8): 2212–2225.
- Hu Y, Chen MZQ, Shu Z, et al. (2015) Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution. *Journal of Sound and Vibration* 346: 17–36.
- Huang Z, Hua X, Chen Z, et al. (2019) Optimal design of TVMD with linear and nonlinear viscous damping for SDOF systems subjected to harmonic excitation. *Structural Control and Health Monitoring* 26(10): e2413.
- Ikago K, Saito K and Inoue N (2012) Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 41: 453–474.
- Inman DJ (2008) *Engineering Vibration*. 3rd edition. Upper Saddle River: Prentice-Hall.
- Jiang Y, Zhao Z, Zhang R, et al. (2020) Optimal design based on analytical solution for storage tank with inerter isolation system. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 129: 105924.
- Korde UA, Wickersham MA and Carr SG (2018) The effect of a negative capacitance circuit on the out-of-plane dissipation and stiffness of a piezoelectric membrane. *Smart Materials and Structures* 17(3): 035017.
- Korenev BG and Reznikov LM (1993) *Dynamic Vibration Absorbers: Theory and Technical Applications*. New York, USA: Wiley.
- Kun Y and Nyangi P (2020) H_∞ Optimization of Tuned inerter damper with negative stiffness device subjected to support excitation. *Shock and Vibration* 2020: 7608078.
- Lazar IF, Neild SA and Wagg DJ (2014) Using an inerter-based device for structural vibration suppression. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 43(8): 1129–1147.
- Lazar IF, Neild SA and Wagg DJ (2016) Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers. *Engineering Structures* 122: 62–71.
- Li H-N, Qu C, Huo L, et al. (2016) Equivalent bilinear elastic single degree of freedom system of multi-degree of freedom structure with negative stiffness. *Journal of Sound and Vibration* 365: 1–14.
- Luo H, Zhang R and Weng D (2016) Mitigation of liquid sloshing in storage tanks by using a hybrid control method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 90: 183–195.
- Marian L and Giaralis A (2014) Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems. *Probabilistic Engineering Mechanics* 38: 156–164.

- Neubauer M and Wallaschek J (2013) Vibration damping with shunted piezoceramics: fundamentals and technical applications. *Mechanical Systems and Signal Processing* 36: 36–52.
- Neubauer M, Oleskiewicz R, Popp K, et al. (2006) Optimization of damping and absorbing performance of shunted piezo elements utilizing negative capacitance. *Journal of Sound and Vibration* 298: 84–107.
- Palacios-Quinonero F, Rubió-Massequé J, Rossell JM, et al. (2019) Design of inerter-based multi-actuator systems for vibration control of adjacent structures. *Journal of the Franklin Institute* 356(14): 7785–7809.
- Papageorgou C, Houghton NE and Smith MC (2008) Experimental testing and analysis of inerter devices. *Journal of dynamics system-testing ASME* 131(1): 011001.
- Pasala DTR, Sarlis AA, Nagarajaiah S, et al. (2013) Adaptive negative stiffness: new structural modification approach for seismic protection. *Journal of Structural Engineering* 139(7): 1112–1123.
- Radu A, Lazar IF and Neild SA (2019) Performance-based seismic design of tuned inerter dampers. *Structural Control and Health Monitoring* 26(3): e2346.
- Ren MZ (2001) A variant design of the dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration* 245(4): 762–770.
- Saitoh M (2012) On the performance of gyro-mass devices for displacement mitigation in base isolation systems. *Structural Control and Health Monitoring* 19(2): 246–259.
- Sara YZ, Jiang JZ and Neild S (2017) Passive vibration control: a structure-immittance approach. *Proceedings of The Royal Society A* 473: 2017001.
- Shen Y, Wang X, Yang S, et al. (2016) Parameters optimization for a kind of dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Mathematical Problems in Engineering* 2016(4): 1–10.
- Shen Y, Peng H, Li X, et al. (2017) Analytically optimal parameters of dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Mechanical Systems and Signal Processing* 85(15): 193–203.
- Shen W, Niyitangamahoro A, Feng Z, et al. (2019) Tuned inerter dampers for civil structures subjected to earthquake ground motions: optimum design and seismic performance. *Engineering Structures* 198: 109470.
- Smith MC (2002) Synthesis of mechanical networks: the inerter. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(10): 1648–1662.
- Tributsch A and Adam C (2012) Evaluation and analytical approximation of tuned mass damper performance in an earthquake environment. *Smart Structures and Systems* 10: 155–179.
- Wang XR, Shen YJ and Yang SP (2016) H_∞ optimization of the grounded three-element type dynamic vibration absorber. *Chin. Journal of Dynamical and Control System* 14(05): 448–453.
- Wang XR, Shen YJ, Yang SP, et al. (2017) Parameters optimization of three-element type dynamic vibration absorber with negative stiffness. *Journal of Vibration Engineering & Technologies* 30(2): 177–184.
- Wang X, Liu X, Shan Y, et al. (2018) Analysis and optimization of the novel inerter-based dynamic vibration absorbers. *IEEE Access* 6: 33169–33182.
- Wang M, Sun F-F, Yang J-Q, et al. (2019a) Seismic protection of SDOF systems with a negative stiffness amplifying damper. *Engineering Structures* 190: 128–141.
- Wang Q, Qiao H, De Domenico D, et al. (2019b) Wind-induced response control of high-rise buildings using inerter-based vibration absorbers. *Applied Sciences* 9(23): 5045.
- Xiuchang H, Zhiwei S and Hongxing H (2019) Optimal parameters for dynamic vibration absorber with negative stiffness in controlling force transmission to a rigid foundation. *International Journal of mechanical sciences* 152: 88–98.
- Xu Z-D, Tu Q and Guo Y-F (2012) Experimental study on vertical performance of multidimensional earthquake isolation and mitigation devices for long-span reticulated structures. *Journal of Vibration and Control* 18(13): 1971–1985.
- Xu Z-D, Guo Y-F, Wang S-A, et al. (2013) Optimization analysis on parameters of multi-dimensional earthquake isolation and mitigation device based on genetic algorithm. *Nonlinear Dynamics* 72(4): 757–765.
- Xu Z-D, Huang X-H, Xu F-H, et al. (2019) Parameters optimization of vibration isolation and mitigation system for precision platforms using non-dominated sorting genetic algorithm. *Mechanical Systems and Signal Processing* 128: 191–201.
- Zhang R, Zhao Z and Dai K (2019) Seismic response mitigation of a wind turbine tower using a tuned parallel inerter mass system. *Engineering Structures* 180: 29–39.
- Zheng G and Wang W (2018) Modeling, testing and characteristic analysis of a planetary flywheel inerter. *Shock and Vibration* 2018: 1–12.
- Zhibao C, Antonio P, Zhifei S, et al. (2020) Enhanced tuned mass damper using an inertial amplification mechanism. *Journal of Sound and Vibration* 475: 115267.
- Zhou J, Xiao Q, Xu D, et al. (2017) A novel quasi-zero-stiffness strut and its applications in six-degree-of-freedom vibration isolation platform. *Journal of Sound and Vibration* 394: 59–74.
- Zhou S, Jean-Mistral C and Chesne S (2019) Closed-form solutions to optimal parameters of dynamic vibration absorbers with negative stiffness under harmonic and transient excitation. *International Journal of Mechanical Sciences* 157–158: 528–541.
- Zuo L (2009) Effective and robust vibration control using series multiple tuned-mass-dampers. *ASME Journal of Vibration and Acoustics* 131(3): 031003.