

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES
ET GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE "PHYSIQUE ET APPLICATIONS"

BP 812 Yaoundé
email: crfd_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING
UNIT FOR "PHYSICS AND APPLICATIONS"

PO BOX 812 Yaoundé
email: crfd_stg@uy1.uninet.cm

LABORATOIRE DE PHYSIQUE NUCLEAIRE, ATOMIQUE, MOLECULAIRE ET
BIOPHYSIQUE

ANALYSE FRACTIONNAIRE DES NIVEAUX D'ENERGIES DES NOYAUX TRIAxiaux A L'AIDE DU HAMILTONIEN DE BOHR

Thèse

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du
Diplôme de Doctorat/PhD en Physique

Option: Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection

Par :

AHMADOU KATARKALAH

Matricule 12W0566
Master en Physique

Sous la direction de:

BEN-BOLIE Germain Hubert

*Professeur
Université de Yaoundé I*





DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE
DOCTORAT/Ph.D

Nous, Professeurs SAÏDOU, HONA Jacques et Professeur OWONO OWONO Luc Calvin, respectivement Examineurs et Président du jury de la thèse de Doctorat/Ph.D de Monsieur AHMADOU KATARKALAH Matricule 12W0566, préparée sous la direction du Professeur BEN-BOLIE Germain Hubert, intitulée : « Analyse fractionnaire des niveaux d'énergies des noyaux triaxiaux à l'aide du Hamiltonien de Borh », soutenue le Jeudi, 27 Avril 2023, en vue de l'obtention du grade de Docteur/Ph.D en Physique, Spécialité Physique nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique, Option Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection attestons que toutes les corrections demandées par le Jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé le ...17 MAI 2023.....

Examineurs

Pr. SAÏDOU

Pr. HONA Jacques

Le Président du Jury

Pr. OWONO OWONO Luc
Calvin



Université de Yaoundé I

Faculté des Sciences

Département de Physique

**ANALYSE FRACTIONNAIRE DES NIVEAUX D'ENERGIE DES
NOYAUX TRIAXIAUX A L'AIDE DU HAMILTONIEN DE BOHR**

THÈSE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat/PhD en Physique

Option: **Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection**

Par

AHMADOU KATARKALAH

Matricule: 12W0566

Master en Physique

Sous la Direction de

BEN-BOLIE Germain Hubert

Professeur

Université de Yaoundé I

Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique

Copyright ©AHMADOU KATARKALAH, katarkalah91@gmail.com

Année 2023

Dédicaces

Je remercie Dieu le tout puissant, qui par son amour m'a donné la force, le courage, l'abnégation, et guidé sur le chemin de la persévérance, afin que je puisse surmonter les moments difficiles.

Je dédie cette thèse à :

A mon papa EPOUPA BOSSAMBO Valentin ;

A la mémoire de mon feu père MALIKI SIRIWA ;

A ma maman BANG EPOUPA Christiane Marie Florence ;

A ma mère ZALAI AMINATOU ;

A mon feu oncle BOUBA DJINGUI ;

A mon oncle GOLEY ADAMOU.

Remerciements

D'entrée de jeu, je tiens à exprimer ma profonde gratitude au Professeur BEN-BOLIE Germain Hubert, qui en 2018 m'avait accepté au sein du Laboratoire de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I où j'ai commencé mon master 2. Et malgré des difficultés rencontrées dans mes travaux, il m'a orienté jusqu'à l'accomplissement de cette thèse.

J'exprime mes remerciements particuliers au Docteur ELE ABIAMA Patrice, qui malgré ses différentes occupations au Ministère de la Recherche Scientifique, m'a encadré, orienté et travaillé avec moi depuis 2018 en Master 2 jusqu'à la thèse.

Je remercie chaleureusement le Professeur OWONO ATEBA Pierre qui est le fondateur du Laboratoire de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I et qui continu à nous assister avec ses précieux conseils.

Ma reconnaissance va tout particulièrement aussi au Professeur EMA'A EMA'A Jean- Marie pour son soutien remarquable et consistant dans l'accomplissement de ce travail.

Je remercie également les Docteurs NGOUMBI, TAKEMBO NTAHKIE Clovis, ALI ZARMA et MVOGO Alain pour leurs conseils et encouragements.

Je remercie grandement le Professeur KOFANE Timoléon Crépin et le Professeur NDJAKA Jean-Marie Bienvenu pour leurs conseils et leurs encouragements pour l'avancement de cette Thèse.

J'exprime ma gratitude à tous les enseignants du Département de Physique et plus particulièrement aux Professeurs NJANDJOCK NOUCK Philippe, PEMHA ELKANA, TCHAWOUA Clément, EKOBEA FOUA Henri Paul, WOAFU Paul, SAÏDOU, ZEKENG Serge, HONA Jacques, MBANE BIOUELE César, NDOP Joseph, BODO Bertrand, EYEBE FOUA, NOUAYOU Robert, VONDOU Débertini, OWONO OWONO Luc Calvin, BOYOMO ONANA Marthe, FEWO Serge Ibrid, NANA ENGO Serge, DJUIDJE Françoise, NANA NBENJO Roméo, SIEWE SIEWE Martin, Pr Mbinack Clément, Dr ABDOURAHIMI, Pr ENYEGUE A NYAM Françoise, Dr MELI'I Jorelle Larissa et à Dr CHAMANI.

Aux Honorables membres du jury, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider cette soutenance.

Je remercie très particulièrement tous les membres du Laboratoire de Physique Nucléaire pour leurs aides, assistances et l'amitié, particulièrement, aux Docteurs, NGA OGONDO Dieu-donné, ATANGANA LIKENE André Aimé pour son aide précieuse, TAKOUKAM SOH Serge Didier, à TANKOU TAGNE Alain Sylvain, TAMIAN FOTSO Kévin Adelphe, EBODE ONYIE Fabien, NDOUVADE KANAGO Vivien Ulrich, MBIDA Serge, AKAMBA MBEMBE Bertrand, ADJABA Jean Liboire, TJOCK-MBAGA Thomas, NGUIMSSING Brice Martial, AWE Richard, KOYANG François, YIA ETOLO Hervé Didier, NNOMO MANGA Richard, MAH TSILA Phi-

lippe, ANEMENA ETOGA Emmanuel, NDIMANTCHI AYوبا, GONDJI Dieu Soufit, NJOBO Jean Paul Justice, SOULEYMANOU HAMAN ADAMA, KITCHA SIME Fayette, NDZONO Victor Paulin.

En fin, je tiens à remercier premièrement mon papa EPOUPA BOSSAMBO Valentin, pour son amour, ses conseils et l'éducation reçu de lui ont fait de moi l'homme que je suis aujourd'hui. Je remercie dans la même lancée ma chère maman BANG EPOUPA Christiane Marie florence, qui a toujours su m'encourager et me motiver sans relache. Je remercie ma mère ZALAI AMINATOU, celle qui ne m'a pas souvent épargné le fouet à chaque fois que j'essayais d'éviter le chemin de l'école. J'adresse mes remerciements d'une part à mes frères et soeurs EPOUPA NGALLE Frantz Guy, EPOUPA BOSSAMBO Loic Hardy Globert, EPOUPA BOSSAMBO AGNES Vanessa, EPOUPA MBONGA Jean Pierre, BANG DOOH Paul Kevin, BANG WONDJE Sandra Aline. Et d'autre part à mes frères et soeurs : SOUTARAI SOUTARAI Bonheur, KOYANG MALIKI, KAHOUMLA MALIKI Fabrice, TCHIOUTOU MALIKI, WIYA KATARKALAH Meda Christella. Enfin les ami(e)s : NAI HALI NAI Esaie, Violette WASNA Princesse, DOBA Michael, YAP Jean Emile.

Liste des Abréviations

DFC : Dérivée Fractionnaire Conformable

HBFC : Hamiltonien de Bohr Fractionnaire Conformable

PKM : Potentiel de Killingbeck plus Morse

PIQT : Potentiel Inverse à Quatre Termes

PFIQT : Potentiel Fractionnaire Inverse à Quatre Termes

CCG : Coefficient de Clebsch Gordon

RQN : Résonance Quadrupolaire Nucléaire

rms : root means square

u : unité de masse atomique

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Liste des Abréviations	iv
Table des matières	v
Liste des Figures	vii
Listes des Tableaux	ix
Abstract	xi
Résumé	xii
Chapitre I Revue de la littérature sur la structure du noyau atomique	6
I.1 Introduction	6
I.2 Généralités sur le noyau atomique	6
I.2.1 Présentation de l'atome	7
I.2.2 Formes des noyaux atomiques	8
I.2.3 Le noyau de platine	8
I.3 Les symétries en physique nucléaire	10
I.3.1 Théorème de Noether	10
I.3.2 La symétrie de parité	11
I.3.3 La symétrie de rotation	12
I.4 Nombres magiques	14
I.5 Radioactivité des noyaux	14
I.6 Défaut de masse et énergie de liaison d'un noyau	17
I.6.1 Défaut de masse d'un noyau	17
I.6.2 Énergie de liaison du noyau	17
I.7 Descriptions des modèles nucléaires	18
I.7.1 Modèles macroscopiques (Modèle collectif)	18
I.7.2 Modèle de la goutte liquide	20
I.7.3 Modèles microscopiques	21
I.7.4 modèle en couches	21

I.7.5	Modèle de Nilsson	22
I.8	Déformations dans les noyaux atomiques	24
I.8.1	L'approche macroscopique	24
I.8.2	Mouvement collectif dans les noyaux	24
I.8.3	Mode vibrationnel	25
I.8.4	Mode rotationnel	27
I.8.5	Déformations triaxiale	30
I.9	Etat de l'art sur le calcul des énergies et des transitions nucléaires à l'aide du hamiltonien de Bohr.	31
I.10	Conclusion	33
Chapitre II Théorie quantique des transitions d'énergie dans le noyau		34
II.1	Introduction	34
II.2	Présentation générale du modèle du Hamiltonien de Bohr	34
II.3	Moments des transitions quadrupôlaires électriques	36
II.4	Outils théoriques et méthodes	39
II.4.1	Méthode étendue de Nikiforov-Uvarov classique	39
II.4.2	Notion de dérivée fractionnaire conformable	41
II.4.3	Formulation fractionnaire conformable de la méthode étendue de Nikiforov-Uvarov	42
II.4.4	L'équation bi-confluente de Heun	44
II.5	Application à la résolution de l'équation de modèle BHFC pour le PIQT	47
II.5.1	Techniques de séparations des différents types de mouvements des déformations nucléaires	47
II.5.2	Solution de la partie γ	50
II.5.3	Solution de la partie β	50
II.6	Conclusion	55
Chapitre III Résultats et discussion		57
III.1	Introduction	57
III.2	Présentation des résultats et discussion	57
III.2.1	Ratios intra et inter-bande	63
III.2.2	Triaxialité des nucléides	66
III.3	Conclusion	75
Conclusion Générale		77
Appendix		79
Liste des Publications issue de la thèse		81
Références Bibliographiques		82

Table des figures

Figure 1	Défaut de masse d'un noyau atomique[85]	18
Figure 2	Énergie de liaison par nucléon[86]	19
Figure 3	Énergie de liaison par nucléon, d'après la formule semi-empirique de Bethe -Weizsäcker, avec la contribution des différents termes [91]	19
Figure 4	Énergie surfacique[90]	21
Figure 5	Les différentes formes correspondant aux différents ordres multipolaires[100].	25
Figure 6	Evolution en temps des modes vibratoires[101].	26
Figure 7	Schéma de l'occupation des orbitales nucléaires dans le modèle en couches.	27
Figure 8	(a) : Noyau de forme oblate développé sur des harmoniques sphériques avec un coefficient $\beta_2 \approx -0.40$ et (b) : Noyau de forme prolata développé sur des harmoniques sphériques avec un coefficient $\beta_2 \approx 0.35$. [102]	29
Figure 9	Noyau triaxial dans son référentiel intrinsèque où sont représentés l'angle θ entre le vecteur rotation $\vec{\omega}$ et l'axe Ox et l'angle α entre les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ et moment angulaire total \vec{J} [107].	30
Figure 10	Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande de l'état fondamental ($n = 0, n_\omega = 0$) de l'isotope ^{196}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].	67
Figure 11	Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande β ($n = 1, n_\omega = 0$) de l'isotope ^{192}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].	68
Figure 12	Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande de l'état fondamental ($n = 0, n_\omega = 0$) de l'isotope ^{196}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].	69
Figure 13	Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande β ($n = 1, n_\omega = 0$) de l'isotope ^{194}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].	70
Figure 14	Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande de l'état fondamental ($n = 0, n_\omega = 0$) de l'isotope ^{196}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].	71

Figure 15	Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande β ($n = 1, n_\omega = 0$) de l'isotope ^{196}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].	71
Figure 16	Energie fractionnaire de l'isotope de ^{192}Pt dans la bande de l'état fondamental, en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].	72
Figure 17	Energie fractionnaire de l'isotope de ^{192}Pt dans la bande β , en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].	72
Figure 18	Energie fractionnaire de l'isotope de ^{194}Pt dans la bande de l'état fondamental, en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].	73
Figure 19	Energie fractionnaire de l'isotope de ^{194}Pt dans la bande β , en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].	73
Figure 20	Energie fractionnaire de l'isotope de ^{196}Pt dans la bande de l'état fondamental, en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].	74
Figure 21	Energie fractionnaire de l'isotope de ^{196}Pt dans la bande β , en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].	74

Liste des tableaux

Table 1	Présentation générale des propriétés du platine.	10
Table 2	Paramètres libres obtenus pour le potentiel fractionnaire inverse à quatre termes[27, 47].	58
Table 3	Comparaison des valeurs théoriques dans la bande de l'état fondamental, la bande γ et la bande β des rapports d'énergie fractionnaire normalisée (au premier niveau excité de la bande de l'état fondamental à l'unité) avec les données expérimentales[78] et celles obtenues pour le potentiel de Morse[79], le potentiel de Morse plus Killingbeck[17] et le potentiel inverse de quatre termes[27] pour l'isotope du ^{192}Pt en considérant plusieurs valeurs de α	59
Table 4	Comparaison des valeurs théoriques dans la bande de l'état fondamental, la bande γ et la bande β des rapports d'énergie fractionnaire normalisée (au premier niveau excité de la bande de l'état fondamental à l'unité) avec les données expérimentales[78] et celles obtenues pour le potentiel de Morse[79], le potentiel de Morse plus Killingbeck[17] et le potentiel inverse de quatre termes[27] pour l'isotope du ^{194}Pt en considérant plusieurs valeurs de α	60
Table 5	Comparaison des valeurs théoriques dans la bande de l'état fondamental, la bande γ et la bande β des rapports d'énergie fractionnaire normalisée (au premier niveau excité de la bande de l'état fondamental à l'unité) avec les données expérimentales[78] et celles obtenues pour le potentiel de Morse[79], le potentiel de Morse plus Killingbeck[17] et le potentiel inverse de quatre termes[27] pour l'isotope du ^{196}Pt en considérant plusieurs valeurs de α	61
Table 6	Comparaison des valeurs des taux de transitions B(E2) fractionnaires en considérant les bandes $g \rightarrow g$, γ -pair $\rightarrow g$, γ -impair $\rightarrow g$, γ -pair $\rightarrow \gamma$ -pair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -impair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -pair, $\beta \rightarrow \beta$ pour le potentiel inverse à quatre termes fractionnaire conformable, les données expérimentales[48] et ceux de esM[79], esMK[17], Nga[27] et Hammad[28] pour l'isotope ^{192}Pt	63
Table 7	Comparaison des valeurs des taux de transitions B(E2) fractionnaires en considérant les bandes $g \rightarrow g$, γ -pair $\rightarrow g$, γ -impair $\rightarrow g$, γ -pair $\rightarrow \gamma$ -pair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -impair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -pair, $\beta \rightarrow \beta$ pour le potentiel inverse à quatre termes fractionnaire conformable, les données expérimentales[48] et ceux de esM[79], esMK[17], Nga[27] et Hammad[28] pour l'isotope ^{194}Pt	64

Table 8 Comparaison des valeurs des taux de transitions $B(E2)$ fractionnaires en considérant les bandes $g \rightarrow g$, γ -pair $\rightarrow g$, γ -impair $\rightarrow g$, γ -pair $\rightarrow \gamma$ -pair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -impair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -pair, $\beta \rightarrow \beta$ pour le potentiel inverse à quatre termes fractionnaire conformable, les données expérimentales[48] et ceux de esM[79], esMK[17], Nga[27] et Hammad[28] pour l'isotope ^{196}Pt	65
---	----

Abstract

In this thesis, we suggest a new nuclear model capable of determining the nuclear energies of excited nuclei of fractional $Z(5)$ symmetry. From a novel analytical solution of the Conformable Fractional Bohr Hamiltonian we study the motion of atomic nuclei in presence of a four inverse power terms potential in β -part of the collective nuclear potential. This potential is generalized to the conformable fractional domain. The new expression for the wave functions and energy spectra are obtained using the conformable fractional extended Nikiforov-Uvarov method. The effect of the conformable fractional formulation is studied on root mean square deviation, and normalized fractional eigen energies of ground state band, γ -band and β -band of ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt atomic nuclei. The $B(E2)$ transition rates are calculated within the fractional domain. The results were compared with experimental data, the classical Bohr Hamiltonian model with four inverse power terms potential, and other relevant theoretical works. We discuss on how the fractional parameter α acts on the spectra of triaxial nuclei. The results provided by our new approach are found to be in good agreement with experimental data and improved compared to previous works.

Keywords : Bohr Hamiltonian, four inverse power terms potential, triaxial nuclei, conformable fractional extended Nikiforov-Uvarov method, energy spectra.

Résumé

Dans cette thèse, nous proposons un nouveau modèle nucléaire capable de déterminer les énergies nucléaires des noyaux excités de symétrie fractionnaire $Z(5)$. À partir d'une nouvelle solution analytique du hamiltonien de Bohr fractionnaire conforme, nous étudions le mouvement des noyaux atomiques en présence d'un potentiel de quatre termes de puissance inverse en la variable collective β du potentiel nucléaire. Ce potentiel est généralisé au domaine fractionnaire conforme. La nouvelle expression des fonctions d'onde et du spectre d'énergie est obtenue à l'aide de la méthode de Nikiforov-Uvarov étendue généralisée au domaine fractionnaire conforme. L'effet de la formulation fractionnaire conforme est étudié sur la racine de l'écart quadratique moyen et sur les énergies propres fractionnaires normalisées de la bande d'état fondamental, la bande γ et la bande β pour les isotopes de ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt . Les taux de transition quadripolaires électriques $B(E2)$ sont calculés dans le domaine fractionnaire. Les résultats sont comparés avec les données expérimentales, le modèle du hamiltonien de Bohr classique avec le potentiel inverse à quatre termes, et d'autres travaux théoriques pertinents. Nous discutons de la façon dont le paramètre fractionnaire α agit sur les spectres des noyaux triaxiaux. Les résultats fournis par notre nouvelle approche s'avèrent être en bon accord avec les données expérimentales et améliorés par rapport aux travaux précédents.

Mots clés : Hamiltonien de Bohr, potentiel à quatre termes de puissance inverse, noyaux triaxiaux, méthode de Nikiforov-Uvarov étendue fractionnaire conforme, spectres d'énergie.

Introduction Générale

Vers la fin du XX^e siècle, des outils théoriques ont été développés en physique nucléaire dans le but de décrire certaines propriétés des noyaux atomiques. La découverte et l'étude de la structure des noyaux représentent aujourd'hui une partie importante de la recherche dans le domaine de la physique du noyau atomique. L'accumulation des connaissances et la découverte de nouveaux phénomènes d'année en année nous incitent à nous intéresser à des situations de plus en plus exotiques et à des noyaux de plus en plus éloignés de la vallée de stabilité. Ces recherches permettent de tester les modèles nucléaires et vérifier les prédictions expérimentales.

Depuis les années 30, nous savons que les effets quantiques de couches sont d'une importance capitale en physique nucléaire. L'effet de couche le plus remarquable est exprimé par le concept de nombres magiques. Les noyaux magiques correspondent à des noyaux dont le nombre de protons et de neutrons sont magiques. Les recherches actuelles en physique nucléaire sont souvent orientées vers la découverte de nouveaux nombres magiques. Afin de bien comprendre ces effets de couches dans leur généralité, il est important d'explorer toute la charte des noyaux. L'un des axes de cette recherche concerne l'étude des noyaux lourds et très lourds.

De nos jours, la recherche fondamentale dans le domaine de la physique nucléaire est beaucoup plus focalisée sur les nombres magiques déformés éloignés de la vallée de stabilité, sur la découverte et la prédiction des prochains nombres magiques correspondant à des noyaux super-lourds de forme sphérique. En effet, la plupart des modèles font des prédictions sur de nouveaux nombres magiques et plus globalement une région de noyaux très lourds ayant une stabilité accrue, appelée îlot de stabilité super-lourde.

Le noyau le plus lourd actuellement découvert possède 118 protons (il a été approuvé en 2016) et seulement 3 situations ont été observées [1, 2].

Ainsi l'étude de la structure de noyaux aussi lourds n'est pas encore possible actuellement, et cette région de noyaux de masse extrême reste encore peu connue. Par conséquent, les études des structures quantiques détaillées sont réalisées pour des noyaux plus légers, autour de la région du fermium ($Z=100$) puisqu'ils peuvent être peuplés avec des sections efficaces relativement

importantes. D'autre part ces noyaux, grâce à leur déformation, nous donnent indirectement des informations sur les noyaux plus lourds sphériques (en lien avec l'îlot de stabilité) et permettent ainsi de tester plus précisément les modèles théoriques.

Vers la fin du XX^e siècle, des outils théoriques ont été développés en physique nucléaire dans le but de décrire certaines propriétés des noyaux atomiques. Parmi ces nombreux outils, le hamiltonien de Bohr est généralement utilisé pour étudier les propriétés des noyaux atomiques [3] telles que les symétries critiques ponctuelles[4] et les transitions de formes du modèle de bosons[5]. Les symétries critiques ponctuelles impliquent la symétrie $E(5)$ [6, 7], qui est liée aux transitions de formes du second ordre[8] entre la forme sphérique et les noyaux de forme γ instable, puis nous avons la symétrie $X(5)$ [9] qui correspond aux transitions de phase du premier ordre entre les noyaux de formes sphériques et les noyaux prolates déformés[6, 10]. Depuis l'introduction des symétries ponctuelles critiques, un grand nombre de modèles ont été suggérés pour trouver des solutions au problème aux valeurs propres liées à l'équation du Hamiltonien de Bohr. Ceci a été motivé par la découverte de nombreux potentiels solubles. En général, les potentiels de type oscillateur harmonique sont utilisés pour la partie γ [9, 11, 12], et pour la partie dépendante de la variable β , les potentiels les plus couramment utilisés sont le potentiel de Wood-Saxon potential[13], le potentiel de Morse[14, 15, 16, 17], le potentiel de Killibeck[17, 18], le potentiel de Killibeck plus Morse[17], le potentiel de Kratzer[19, 20], le potentiel de Kratzer écranté[20], le potentiel de Davisson[18, 21], le potentiel de Sextic[22] et le potentiel de Hulthen[23, 24]. Dans la symétrie ponctuelle critique $E(5)$, le potentiel d'interaction ne dépend pas de la variable collective γ , pendant que dans le cas de la symétrie $X(5)$, le potentiel d'interaction peut être séparé en deux parties linéairement indépendentes, la partie γ qui est du type oscillateur harmonique, centrée autour de $\gamma = 0$. Cette configuration est associée aux noyaux prolates déformés. La variable β quant à elle, décrit la magnitude de la déformation[5, 10]. De plus, la symétrie $E(5)$ peut être assimilable à une transition entre la symétrie vibrationnelle $U(5)$ et la symétrie $O(6)$ des noyaux γ instables, alors que la symétrie $X(5)$ correspond à la transition de la forme sphérique vibrationnelle $U(5)$ aux noyaux déformés allongés $SU(3)$ [5, 10].

Depuis deux décennies, plusieurs travaux ont été menés pour obtenir des solutions des symétries $X(5)$ et $E(5)$. Des solutions spéciales de l'équation du hamiltonien de Bohr sont présentées dans les références[25, 26]. Dans la référence[13], les solutions de l'équation du hamiltonien de Bohr présentées de 2005 jusqu'en 2015. En 2018, B. T. Mbadjoun et al. [17] ont utilisé le potentiel

de Killingbeck plus Morse pour résoudre l'équation du hamiltonien de Bohr. En 2019, Nga et al.[27] ont étudié le hamiltonien de Bohr pour les noyaux triaxiaux sous l'influence d'un potentiel inverse à quatre termes et ont obtenu le spectre d'énergie pour la partie en β . En 2020, Omon et al.[20] ont étudié le modèle du Hamiltonien de Bohr avec un potentiel de Kratzer écranté et ont obtenus le spectre d'énergie pour les noyaux triaxiaux. . Récemment, une nouvelle catégorie de symétries ponctuelles critiques a été introduite dans la référence[28]. Ce nouveau type de symétries ponctuelles critiques nommées symétrie ponctuelle critique fractionnaire conforme $E^\alpha(5)$ a été étudiée en utilisant la version fractionnaire conforme de l'équation du hamiltonien de Bohr à la fois avec un potentiel de puits infini et avec le potentiel de Kratzer[28, 29] en la variable β .

En effet, diverses définitions peuvent être trouvées pour la dérivée fractionnaire. Parmi les définitions les plus courantes on peut nommer la dérivée de Caputo, les définitions de Riemann-Liouville, Riesz et GrunwaldLetnikov[30, 31].]. Ces formulations de dérivée fractionnaire, définies globalement par intégrale fractionnaire, sont largement utilisées dans le calcul différentiel non entier. Par conséquent, les dérivées fractionnaires se comportent comme des opérateurs non locaux et ne satisfont pas les propriétés classiques standard des dérivées entières telles que le quotient, le produit, et la règle de chaîne qui nous permettent d'obtenir des solutions analytiques dans le calcul usuel des nombres entiers. Pour cette raison, il y a beaucoup de difficultés dans le maniement mathématique des opérations algébriques dans le domaine du calcul non entier. En 2014, Khalil et al.[32] introduit une nouvelle définition de la dérivée fractionnaire, connue sous le nom de dérivée fractionnaire conforme. Cette nouvelle définition de la dérivée fractionnaire a attiré l'attention des scientifiques dans différents domaines de la physique, puis de nouveaux résultats significatifs ont été présentés[33, 34, 35]. Les systèmes d'ordre fractionnaire sont utiles pour étudier le comportement anormal des systèmes en physique, d'où l'intérêt de cette étude. De nombreuses équations d'ondes quantiques, d'équations différentielles et nombreuses équations d'intérêt physique ont été redéfinies à l'aide de la dérivée fractionnaire conforme. Récemment, Hammad et al.[28] ont étudié une nouvelle catégorie de symétries de points critiques en utilisant la formulation fractionnaire conforme de l'équation du hamiltonien de Bohr. Ils ont obtenu les expressions analytiques des fonctions propres et des niveaux d'énergie du hamiltonien de Bohr fractionnaire conforme avec un potentiel de puits infini en variable β . Dans la référence[33], Tasbozan et al. ont utilisé la technique d'expansion de la fonction elliptique de Ja-

cobi pour obtenir les équations non linéaires de Kdv-mKdV et de Boussinesq combinées dans le domaine fractionnaire dans le temps. Dans la référence[36], l'auteur a utilisé l'analyse fractionnaire conforme pour étudier le rotateur rigide symétrique fractionnaire. Dans la référence[37] les états propres et les énergies propres de l'équation d'onde de Schrödinger fractionnaire en dimension N sont obtenues analytiquement en utilisant le pseudo potentiel harmonique et les résultats ont été appliqués pour calculer les spectres de masse des quarkonia lourds. Dans la référence [38], le potentiel de Hulthen, le potentiel d'oscillateur harmonique et le potentiel de Wood-Saxon sont résolus analytiquement en utilisant l'équation de Schrödinger fractionnaire. Dans la référence[39], Hosseini et al. ont obtenu des solutions analytiques de diverses équations différentielles fractionnaires non linéaires en utilisant des dérivées fractionnaires temporelles conformes et l'équation non linéaire de Boussinesq. Dans la référence[34], Chung et al. ont étudié l'équation de Schrödinger fractionnaire conforme en présence du potentiel de Killbeck et du potentiel hyperbolique. Le but de cette thèse est d'étudier les solutions de l'équation de Schrödinger pour le hamiltonien de Bohr fractionnaire conforme avec un potentiel inverse à quatre termes en utilisant la méthode de Nikiforov-Uvarov étendue et généralisée au domaine fractionnaire conforme et appliquer les résultats obtenus à l'étude des propriétés de quelques noyaux triaxiaux. Au meilleur de notre connaissance, la méthode de Nikiforov-Uvarov étendue et généralisée au domaine fractionnaire conforme n'a pas encore été considéré dans les travaux précédents pour ce qui est de l'équation du hamiltonien de Bohr. Afin de mettre en valeur l'importance de cette approche, nous avons appliqué les résultats de ce travail en montrant notamment que cette généralisation au domaine fractionnaire nous permet d'accéder à une grande variété de modèles de potentiels d'interaction, et dont les résultats peuvent être directement comparés aux données expérimentales disponibles.

L'objectif de cette thèse est de résoudre le problème de manque de variables continues dans les modèle nucléaire en incluant les effets mémoire dans description des noyaux. Le travail comporte trois chapitres. Au premier chapitre, nous intéressons aux généralités sur les modèles nucléaires. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation du modèle du hamiltonien de Bohr dans l'espace fractionnaire, nous présentons le potentiel nucléaire utilisé et les méthodes de résolution de l'équation de Schrödinger associée au hamiltonien Bohr, après quoi une résolution analytique est faite. Le troisième chapitre est consacré à la présentation des résultats du modèle, leur analyse et leur discussion en rapport avec les résultats expérimentaux et d'autres travaux

théoriques pertinents. Ce travail s'achève par une conclusion et des perspectives.

REVUE DE LA LITTÉRATURE SUR LA STRUCTURE DU NOYAU ATOMIQUE

I.1 Introduction

Dans ce chapitre nous introduirons brièvement les concepts de base qui nous seront utiles pour la discussion et la compréhension des expériences (rotateur rigide, modèle de Nilsson...). Nous détaillons également les modèles nucléaires théoriques qui ont été utilisés pour comparer expérience et théorie. La notion de structure nucléaire permet de décrire le mode d'arrangement des nucléons dans les noyaux et vise à établir des lois et des principes afin de pouvoir construire des modèles à caractère prédictif. Ces caractéristiques structurelles peuvent être mises en évidence par l'observation des modes de décroissance des noyaux plus instables encore dont ils sont les descendants. Le noyau n'étant pas ponctuel, il s'agit d'un problème à A -corps. Ces A constituants, les nucléons, sont répartis en Z protons et N neutrons en mouvement et en interaction les uns par rapport aux autres. Les nucléons interagissant entre eux, il faut tenir compte de ces corrélations, ce qui conduit à un problème d'une grande complexité mathématique. Dans ce premier chapitre, nous allons d'abord étudier la structure du noyau atomique dans ses détails, puis nous présentons les modèles nucléaires utilisés afin d'expliquer les états d'énergies du noyau atomique et quelques déformations. Par la suite, nous présenterons quelques forces nucléaires, ces caractéristiques et les aspects énergétiques.

I.2 Généralités sur le noyau atomique

En 1897, Joseph John Thomson montre que l'atome n'est pas une particule élémentaire mais qu'il contient lui-même des particules négatives, appelées électrons. Quelques années plus tard, il établit le premier modèle de l'atome : les électrons, chargés négativement, sont immergés dans un nuage de charge positive uniforme, comme des prunes dans un pudding[40]. Thomson affine

son modèle : à l'intérieur du noyau, les électrons tournent sur des orbites circulaires stabilisées par le fait que lorsqu'un électron s'éloigne du centre du nuage positif, il sent une force d'attraction proportionnelle à son éloignement, comme un ressort. Il essaie d'expliquer le spectre rayonné par l'atome comme résultat de l'énergie de diverses orbites : Mais en 1909, Geiger et Marsden [41] bombardent une fine feuille d'or avec des particules alpha (noyau de l'atome d'hélium). La majorité des particules traverse la feuille d'or en subissant une légère déviation, mais certaines sont rejetées en arrière. Deux années plus tard, Rutherford arrive à la conclusion que ce phénomène ne peut se produire que si la charge positive est concentrée dans une petite partie centrale de l'atome, appelée noyau atomique, dont la taille est de l'ordre de 10^{-14} m : l'atome est " en grande partie formé de vide [42]". Il propose alors un autre modèle de l'atome, selon lequel les électrons tournent autour du noyau comme les planètes gravitent autour du Soleil. D'après les idées actuelles de la Physique Moderne, l'atome est comparable à un système planétaire dont le centre est le noyau (renferment la totalité de sa masse), chargé positivement et surtout autour duquel gravitent des électrons négatifs.

I.2.1 Présentation de l'atome

Les atomes sont des particules qui composent la matière. Au centre de l'atome, il y a un noyau, composé de neutrons et de protons. Autour de ce noyau se trouvent des particules en mouvement très rapide, des électrons. Dans un atome, il y a autant de protons que de neutrons, chargés positivement, que d'électrons, chargés négativement : un atome est électriquement neutre. Le nombre de protons est le numéro atomique Z . La somme des protons et des neutrons est le nombre de masse A . l'atome est constitué d'un noyau et d'électrons. Le noyau est constitué de protons et de neutrons. Chaque atome est défini par son numéro atomique Z , qui correspond au nombre de protons présents dans le noyau. Le noyau renferme deux types de particules. D'abord nous avons le proton, qui a une charge de $+1.60 \times 10^{-19}$ Coulomb, ce qui correspond à la charge élémentaire pour une masse de $+1.673 \times 10^{-27}$ Kg. Ensuite nous avons le neutron qui a une charge électrique nulle pour une masse de $+1.675 \times 10^{-27}$ Kg. Le noyau a une charge positive. Les neutrons et les protons constituent les nucléons qui sont maintenus ensemble par interaction forte. L'électron a une charge de -1.60×10^{-19} Coulomb. Sa charge est négative et opposée à celle du proton et une masse de 9.109×10^{-31} Kg, il est donc 1800 fois moins lourd que le proton. La masse d'un atome est donc sensiblement la même que la masse de son noyau. Dans un noyau, on

distingue : Les isobares : noyaux ayant le même nombre de masse A et Z différents ; Les isotopes : noyaux ayant le même numéro atomique Z , mais un nombre différent de neutron ; Les isotones : noyaux ayant le même nombre de neutrons N , mais de Z différents ; Les isomères nucléaires ont le même nombre de neutrons et de protons, mais pas la même énergie. La manière la plus commune d'écrire un noyau particulier est souvent abrégée par A_ZX où A est le nombre de nucléons ($A = Z + N$) et X est l'élément chimique.

I.2.2 Formes des noyaux atomiques

La forme de noyau est une propriété fondamentale en physique nucléaire. En effet, elle varie rapidement en fonction du nombre de nucléons en ajoutant ou en retranchant un nucléon ou encore en augmentant le spin du noyau. Un noyau peut également présenter différents types de déformations à des énergies d'excitations très similaires, c'est ce qu'on appelle coexistence de forme. Une attention particulière est accordée à la recherche de nouvelles formes exotiques dans des noyaux situés loin de la vallée de stabilité ainsi qu'à la compréhension de la structure nucléaire des éléments les plus lourds. Il est à noter également que, la structure en couche du noyau joue également un rôle important dans l'évolution de la déformation le long des chaînes isotopiques, pour les noyaux à couches ouvertes. Dans la configuration où les couches sont complètement remplies, on a alors affaire à un noyau magique qui est de forme sphérique. La plupart des noyaux ont des couches partiellement remplies et préfèrent être déformés. Les formes de noyaux les plus couramment rencontrées sont aplaties (oblates) et allongées (prolates) et peuvent changer d'un noyau à l'autre. En outre, il est possible pour un noyau de changer de forme en fonction de son énergie d'excitation. D'après les lois de la mécanique quantique, le noyau atomique peut se trouver à la fois dans un état allongé et aplati.

I.2.3 Le noyau de platine

A l'état pur, le platine est un métal ayant la couleur de l'étain, malléable, ductile et plus dur que l'argent. Il ne ternit pas dans l'air ou ne se dissout pas dans un acide sulfurique. Le platine se classe 55^e en abondance parmi les éléments de la croûte terrestre. On le trouve à l'état natif sous forme assez pure ou alliée à d'autres métaux. Des pépites pesant jusqu'à 10,5 kilogramme ont été trouvées. Le platine est parfois un sous-produit de certaines mines de nickel et de cuivre. La plupart du platine utilisé aujourd'hui provient d'Afrique du Sud ou de Russie.

Origine du platine

Le platine a été découvert par les explorateurs espagnols en Colombie et finalement ramené vers l'Europe en 1735. Lorsque le platine fut découvert, on le nomma "Platina" qui signifie "petit argent" sous-entendant une faible valeur. Les orpailleurs de la Colombie étaient depuis longtemps conscients du platine qui souvent était trouvé sous forme de pépites lourdes et blanchâtre lors de l'orpaillage de l'or dans les ruisseaux et les rivières. Ces derniers conservaient ces pépites de platine pensant qu'il s'agissait d'or qui n'avait pas encore atteint la maturité. C'est au fil des ans que les procédés de raffinage et de fusion furent développés, de nombreuses utilisations ont été trouvées pour ce métal des plus précieux aux propriétés étonnantes.

Isotopes du platine

Le platine est un métal de transition appartenant à la période 6 du tableau de classification des éléments atomiques et dont le numéro atomique est $Z = 78$. Il possède 37 isotopes connus, de nombre de masse variant entre 166 et 202, et 13 isomères nucléaires. Parmi les isotopes du platine, cinq sont stables parmi lesquels : ^{192}Pt , ^{194}Pt , ^{195}Pt , ^{196}Pt et ^{198}Pt . Le platine possède cinq isotopes naturels allant de l'isotope 192 à l'isotope 198. Les isotopes 195 et 194 sont les plus abondants, présents quasiment à des proportions identiques. L'isotope 196 est également très présent car représente en proportion un quart de ces isotopes naturels. Les isotopes 198 et 192 sont nettement moins abondants, car moins stables. Il existe un seul et unique radioisotope du platine naturel. Celui-ci a un nombre de masse de 190 et est très peu présent sur terre. Ce radioisotope demeure relativement stable avec une période (ou demi-vie) de 650 milliards d'années et se désintègre selon le processus de radioactivité α .

Il existe de nombreux isotopes synthétiques du platine obtenus dans les laboratoires de recherche en radiochimie. Les isotopes plus légers que le platine naturel ont des nombres de masses allant de 166 à 189. Chacun de ces isotopes a deux modes de désintégration possibles : α ou β^+ . Plus l'isotope est léger, plus la désintégration α prédomine, par contre plus l'on se rapproche des isotopes naturels, plus la désintégration β^+ s'accroît puis prédomine. Les isotopes plus lourds que les isotopes naturels du platine sont nettement moins nombreux et ont des nombres de masses de 199 à 202. Ces isotopes se désintègrent principalement selon une radioactivité β^- .

TABLE 1 – Présentation générale des propriétés du platine.

Informations générales	
Symbole	Pt
Numéro atomique	78
Famille	Métaux de transition
Groupe (colonne)	10
Période (ligne)	6
Sous-couche électronique	d
Propriétés atomiques	
Nombre de neutrons du ^{192}Pt	114
Nombre de neutrons du ^{194}Pt	116
Nombre de neutrons du ^{195}Pt	117
Nombre de neutrons du ^{196}Pt	118
Nombre de neutrons du ^{198}Pt	120
Propriétés cristallographiques	
Structure cristalline	Cubique à faces centrées
Dimension de la cellule unitaire	$a = 392.40\text{pm}$
Groupe d'espace	Fm3p
Propriétés physico-chimiques	
Densité	21.5 à 25°C
Electronégativité	2.28
Masse molaire atomique (g/mol)	195.1
Point de fusion	1768°C
Point d'ébullition	3825°C
Nombre d'oxydation	+2, +4
Volume molaire	$9.09\text{ cm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ (293K)
Résistivité électrique	$10.6\mu\Omega \cdot \text{cm}$ (20°C)
Conductivité thermique	$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$

I.3 Les symétries en physique nucléaire

I.3.1 Théorème de Noether

La symétrie est un concept essentiel pour le physicien. Le principe de base énoncé par Pierre Curie dès 1894 est précurseur des liens entre physique et symétrie : "Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets générés" [43]. Dans la continuité des liens entre la physique et les symétries, l'une des principales découvertes théoriques est due à la mathématicienne Emmy Noether[44].

Théorème L'invariance par symétrie d'un modèle est associée à l'existence d'une quantité conservée. Mathématiquement cela se traduit en termes de variable(s) cyclique(s), ce sont des variables absentes du lagrangien ou du hamiltonien. Par exemple pour l'oscillateur harmonique le hamiltonien s'écrit comme :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mr^2\omega^2. \quad (\text{I.1})$$

En coordonnées sphériques, les variables ϕ et θ sont absentes dans l'expression du hamiltonien, ce qui témoigne de l'invariance par rotation (la dépendance ne concerne que le module de r). La quantité conservée associée à cette invariance est le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Dans le cas d'un oscillateur harmonique "déformé", le hamiltonien devient en coordonnées cylindriques :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_t^2\rho^2 + \omega_z^2z^2). \quad (\text{I.2})$$

La symétrie concernée ici est celle de la révolution autour de l'axe z . La variable ϕ étant absente du hamiltonien, la quantité conservée associée est la projection L_z de l'opérateur \vec{L} sur l'axe z . Plus généralement, cette propriété est explicitée avec l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (\text{I.3})$$

Dans notre second exemple on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0, \\ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= mr^2\dot{\phi} = Cte \Leftrightarrow L_z = Cte. \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

Ces invariances permettent de définir les systèmes étudiés et sont primordiales dans la construction du lagrangien du système. En mécanique quantique, les symétries permettent aussi de définir la dégénérescence des états étudiés.

I.3.2 La symétrie de parité

La parité ou symétrie par rapport à l'origine consiste à transformer un vecteur en son opposé :

$$\vec{r} \longrightarrow -\vec{r}. \quad (\text{I.5})$$

L'opérateur couramment utilisé pour définir la parité est l'opérateur $\hat{\Pi}$. Les relations de commutation pour les principaux vecteurs s'écrivent :

$$[\hat{\Pi}, \hat{L}] = [\hat{\Pi}, \hat{S}] = [\hat{\Pi}, \hat{J}] = [\hat{\Pi}, \hat{p}] = [\hat{\Pi}, \hat{r}] = 0. \quad (\text{I.6})$$

$\hat{\Pi}$ est un opérateur unitaire, hermitique et $\hat{\Pi}^2 = 1$. De plus il possède comme valeurs propres $\pi = \pm 1$. Les états possédant comme valeur propre +1 sont des états dit pairs, les états possédant comme valeur propre -1 sont les états impairs.

I.3.3 La symétrie de rotation

L'opérateur de rotation dans un espace à 3 dimensions tournant d'un angle θ autour de l'axe porté par le vecteur est défini comme [45] :

$$R_{\vec{n},\theta} = e^{\frac{1}{i\hbar}\theta\vec{n}\cdot\vec{L}}, \quad (\text{I.7})$$

le vecteur \vec{L} représentant le moment cinétique et θ l'angle de la rotation. Dans l'approche du champ moyen, un noyau déformé dans son état fondamental brise la symétrie de rotation et peut faire émerger des spectres rotationnels. En effet pour un noyau sphérique, l'application de la rotation sur les fonctions d'onde du problème ajoute un simple facteur de phase. Or la fonction d'onde est définie à un facteur de phase près puisque c'est le carré du module de celle-ci qui est observé. Par la suite nous considérons un noyau de symétrie axiale en rotation autour de l'axe perpendiculaire à la symétrie [22]. L'invariance euclidienne (l'isotropie de l'espace) permet toujours d'écrire le hamiltonien \hat{H} du système sous transformation par rotation :

$$\hat{H}' = R_{\vec{n},\theta} \hat{H} R_{\vec{n},\theta}^{-1}. \quad (\text{I.8})$$

Lorsque le système est invariant par rotation (comme c'est le cas pour un noyau sphérique par exemple), il vient :

$$\hat{H}' = \hat{H} = R_{\vec{n},\theta} \hat{H} R_{\vec{n},\theta}^{-1}. \quad (\text{I.9})$$

Soit :

$$[\hat{H}, R] = 0. \quad (\text{I.10})$$

L'opérateur hamiltonien du système commute avec l'opérateur de rotation. Puisque L^2 commute avec toutes les composantes de \vec{L} , on obtient également

$$[\hat{H}, L^2] = 0. \quad (\text{I.11})$$

Il est possible de généraliser l'opérateur de rotation au spin S et en fin au moment cinétique total J d'un noyau :

$$R_{\vec{n}, \theta} = e^{\frac{1}{i\hbar} \theta \vec{n} \cdot \vec{J}}. \quad (\text{I.12})$$

L'axe \vec{n} peut être défini à l'aide de 2 des 3 angles d'Euler (α, β) , θ correspondant au troisième angle (γ)

$$R_{\vec{n}, \theta} = R(\alpha, \beta, \gamma). \quad (\text{I.13})$$

L'orientation d'un corps dans l'espace à 3 dimensions dans un repère peut être décrite par les 3 angles d'Euler (α, β, γ) . De plus, en mécanique quantique la fonction d'onde d'un tel système peut être représenté par 3 nombres quantiques tels que illustrés sur la figure 1.1 :

- le moment angulaire total I ;
- La composante de I selon z : $I_z = M$ (dans le repère O, x, y, z du laboratoire);
- Les composantes de I dans un repère intrinsèque du noyau (repère O, x_0, y_0, z_0); plus précisément la troisième composante nommée $K = I_{z'}$.

Les états seront notés à l'aide de ces trois nombres quantiques : $|IKM\rangle$. Le passage d'un référentiel à l'autre s'exprime à l'aide des matrices \mathcal{D} :

$$\mathcal{D}_{MK}^I(\alpha, \beta, \gamma) = \langle IM | R(\alpha, \beta, \gamma) | IK \rangle, \quad (\text{I.14})$$

$$|IKM\rangle_{oxyz} = \sum_{M'} \mathcal{D}_{MM'}^I(\alpha, \beta, \gamma) |IKM'\rangle_{ox'y'z'}. \quad (\text{I.15})$$

I.4 Nombres magiques

On dit que le nombre de protons ou de neutrons d'un noyau est magique lorsqu'il est égal à l'un des nombres suivants : 2, 8, 20, 28, 50 et 126. Ces nombres rappellent la structure en couches du cortège électronique de l'atome ; en effet, si les couches K, L, M, N, O, ... peuvent avoir respectivement au maximum 2, 8, 8, 18, 18, ... électrons, le nombre d'occupation des couches complètes est successivement : 2, 10, 18, 36, 54, ...

Avec le succès éclatant de la théorie électronique des atomes, ces nombres magiques qui semblent suggérer une périodicité des propriétés des noyaux, ont été le fil conducteur des théoriciens vers la recherche d'un modèle en couches du noyau.

Dans la nature, on constate que les éléments se répartissent de la manière suivante :

- Parmi les noyaux P-P, ceux qui sont les plus abondants sont les isotopes du calcium (avec 6 isotopes), de l'étain (12 isotopes), soit pour $Z = 20$ et $Z = 50$; et les isotones tels que $N = 20$ (5 isotones), 28 (5 isotones), 50 (6 isotones) et 82 (7 isotones) ;

- Il n'apparaît que 2 isotones stables parmi les noyaux pairs-impairs dans les cas suivants : $N = 20$ (37 Cl et 39 K), $N = 50$ (87 Rb et 89 Y) et $N = 82$ (139 La et 141Pm) ;

- L'abondance relative d'un isotope de A pair ne dépasse pas, en général, 60, sauf pour les éléments suivants : 88 Sr ($N = 50$) avec 82, ;132 Ba($N = 82$) avec 72 ; et 140 Ce($N = 82$) avec 90.

I.5 Radioactivité des noyaux

La radioactivité est la transformation spontanée d'un noyau atomique instable ou radioactif (dit père) en un autre noyau plus stable (dit fils) en émettant une particule ou un photon qui emporte leur trop plein d'énergie. Ainsi, le noyau d'un isotope radioactif va se transformer spontanément en un noyau d'un isotope plus stable du même élément, ou bien encore en un noyau d'un isotope plus stable d'un autre élément chimique. Sur le globe terrestre, le nombre de noyaux stables et de noyaux radioactifs naturellement présents est d'environ 300. Ce nombre est porté à environ 2000 à partir des réactions nucléaires effectuées en laboratoire. Si l'on reporte sur un graphique le nombre de neutrons N en fonction du nombre de protons Z déterminant tous les noyaux possibles, on obtient le diagramme des nucléides stables et radioactifs. On se rend compte que tout noyau en dehors de cette ligne de stabilité, va tendre à devenir stable par un mode ou un autre de transformation ou encore mode de radioactivité ou encore

mode de désintégration. En fonction de la nature du rayonnement émis, on peut distinguer : la désintégration α (émission de la particule ${}^4_2\text{He}$), la désintégration β^+ (émission de la particule ${}^0_{+1}e$) et la capture électronique, la désintégration β^- (émission de la particule ${}^0_{-1}e$), désexcitation γ (émission de la particule γ) et la conversion interne.

- Désintégration α :

Au cours de ce processus, il y a émission d'une particule d'hélium. Cette dernière est émise en parallèle avec un photon γ selon l'équation :



C'est une radioactivité produite par interaction forte.

- Désintégration β^- :

Le noyau expulse un électron. En effet, un neutron se transforme en proton et l'émission de l'électron s'accompagne de l'émission d'un anti-neutrino (particule de masse nulle). La réaction qui la gouverne s'écrit :



C'est une radioactivité produite par interaction faible.

- Désintégration β^+ :

Le noyau expulse un positron (particule de charge $+e$ et de même masse que l'électron). Un proton du noyau se transforme en neutron et l'émission du positron s'accompagne de l'émission d'un neutrino (particule de masse nulle). La transformation s'écrit :

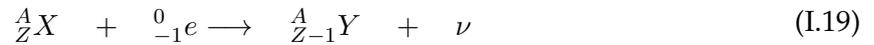


C'est une radioactivité produite par interaction faible.

- Capture électronique :

La capture électronique apparaît presque toujours en compétition avec le processus désintégration β^+ . C'est un processus au cours duquel un électron du cortège électronique entourant le noyau (en général, un électron proche du noyau). Cette capture, tout comme le processus de désintégration β^+ , conduit à la transformation d'un proton du noyau en neutron. La capture

s'écrit :



C'est une radioactivité produite par interaction faible.

- Désexcitation γ

La plupart des réactions radioactives s'accompagnent de l'émission d'un rayonnement électromagnétique γ de même nature que la lumière visible mais de plus grande énergie (de plus courte longueur d'onde). Le noyau obtenu à l'issue d'une désintégration est souvent dans un état excité : il possède un trop plein d'énergie et il perd cet excès d'énergie en émettant ce rayonnement.

Tout comme les atomes, les noyaux peuvent se trouver dans un état excité. La désexcitation d'un noyau X^* vers son état fondamental X se fait soit par transition directe si l'énergie du photon γ émis est égale à l'énergie d'excitation du noyau,



soit par cascade de rayonnements γ dont la somme des énergies est égale l'énergie d'excitation du noyau



- Conversion interne

Lorsqu'un noyau est dans un état excité, il peut retrouver son état fondamental de deux manières : par transmission directe de l'énergie du photon hors du noyau ou par transmission directe de l'énergie de désexcitation à un électron du cortège électronique.

Ces rayonnements très énergétiques sont très dangereux par leur capacité à détruire les cellules vivantes (ils sont utilisés pour détruire des cellules malades en radiothérapie).

I.6 Défaut de masse et énergie de liaison d'un noyau

I.6.1 Défaut de masse d'un noyau

Le défaut de masse correspond à la transformation d'une partie de la masse des nucléons en énergie de liaison des nucléons suivant la relation d'Einstein :

$$E = mc^2. \quad (\text{I.22})$$

De cette relation, il est pratique d'exprimer l'unité de la masse en MeV/c^2 même si le MeV est une unité d'énergie. La masse d'un noyau ${}^A_Z X$ est inférieure à la somme des masses de ses nucléons pris individuellement.

$$M(A, Z) < Zm_p + (A - Z)m_n = Zm_p + Nm_n. \quad (\text{I.23})$$

Cette différence de masse est appelée défaut de masse du noyau atomique et est noté $\Delta(A, Z)$ tel que :

$$\Delta(A, Z) = Zm_p + Nm_n - M(A, Z). \quad (\text{I.24})$$

I.6.2 Énergie de liaison du noyau

L'énergie qu'il faut fournir pour séparer tous les nucléons d'un noyau s'appelle énergie de liaison[91, 86]. Elle est pratiquement la même dans tous les noyaux, approximativement 8 milliards d'électron volts. On peut la comprendre grâce à un modèle identifiant le noyau à une goutte liquide. A une énergie totale proportionnelle au nombre de nucléons (terme de volume), il faut soustraire une correction due a la présence d'une surface (équivalente à une tension superficielle) et une autre due a la répulsion coulombienne des protons comme pour une goutte chargée

$$\mathcal{E}_L = \Delta(A, Z)c^2 = (Zm_p + Nm_n - M(A, Z))c^2 \quad (\text{I.25})$$

Il est question ici d'exprimer les équivalences relatives aux unités du système international[83] des différents constituants du noyau atomique.

- Unité de masse atomique u : $1u = 1,66054 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.5 \text{ MeV}/c^2$
 - Masse de l'électron : $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg} = 5.4858 \times 10^{-4} u = 0,511 \text{ MeV}/c^2$
 - Masse du proton : $m_p = 1,67264 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,007276 u = 938,28 \text{ MeV}/c^2$
 - Masse du neutron : $m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,008665 u = 939,57 \text{ MeV}/c^2$
- où c est la célérité de la lumière dans le vide qui est de l'ordre de $3 \times 10^8 \text{ m/s}^{-1}$.

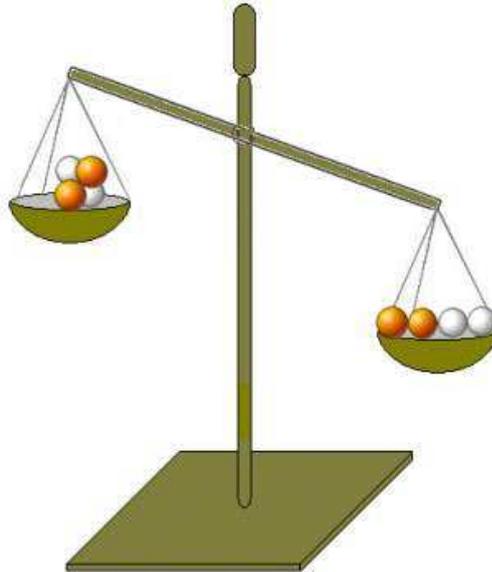


FIGURE 1 – Défaut de masse d'un noyau atomique[85]

I.7 Descriptions des modèles nucléaires

En physique nucléaire, il y a deux classes importantes de modèles qui servent à étudier les propriétés des noyaux : Les modèles macroscopiques et les modèles microscopiques [2].

I.7.1 Modèles macroscopiques (Modèle collectif)

À partir des années 1930, Niels Bohr s'intéresse à la physique nucléaire. Il propose le modèle dit "de la goutte liquide" afin d'expliquer la structure du noyau et la fission nucléaire. Ce sont les modèles à interaction forte (modèles collectifs) sont des modèles où le mouvement d'un nucléon est considéré fortement lié au mouvement des autres nucléons. Un exemple de ces modèles est le modèle de la goutte liquide.

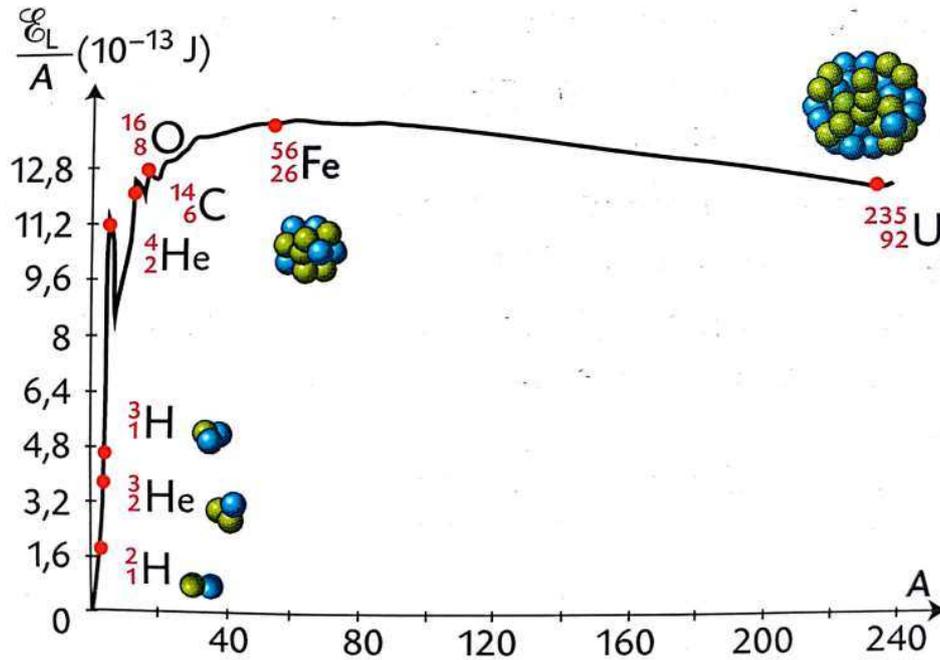


FIGURE 2 – Énergie de liaison par nucléon[86]

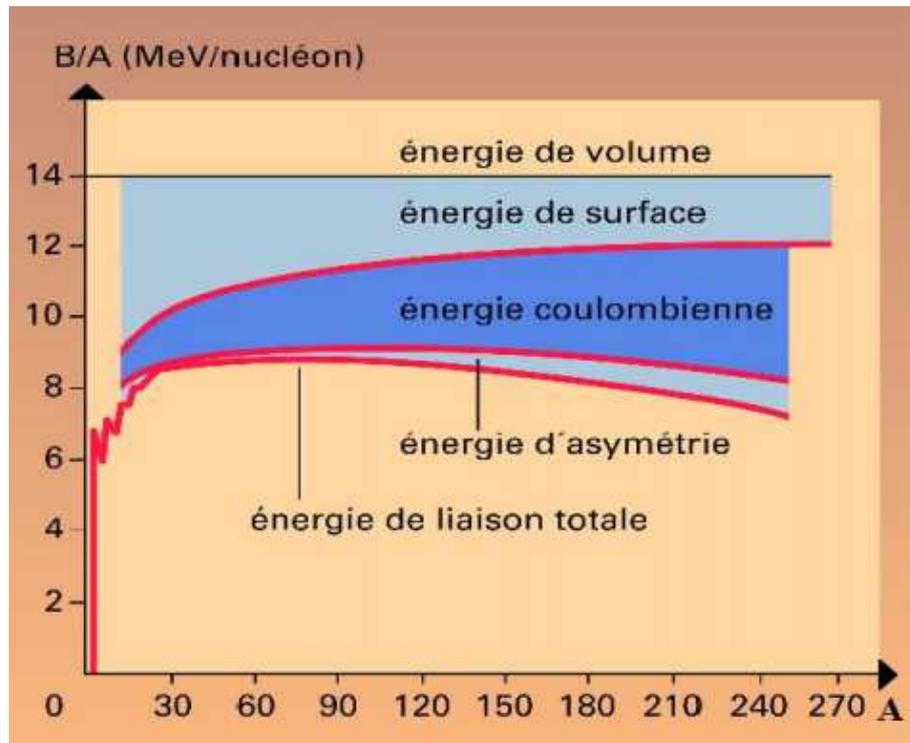


FIGURE 3 – Énergie de liaison par nucléon, d'après la formule semi-empirique de Bethe - Weizsäcker, avec la contribution des différents termes [91]

I.7.2 Modèle de la goutte liquide

Ce modèle est un des premiers modèles, basé sur la courte portée des forces nucléaires. Un nucléon donné interagit fortement avec ses voisins, comme les molécules dans une goutte liquide [3,4]. Les propriétés du noyau peuvent être décrites à l'aide du rayon, de la densité, et de l'énergie de volume [5]. Ce modèle a eu un grand succès en permettant d'obtenir les propriétés nucléaires de base. Dans ce cas, le noyau est assimilé un fluide quantique de nucléons. Les nucléons sont contenus dans le noyau par l'interaction forte, comme les molécules d'un liquide sont contenues dans une goutte. Ce fluide est dit quantique, car la longueur d'onde des nucléons est grande par rapport à leurs tailles, permettant de négliger les notions de position et trajectoire des nucléons. Dans ce modèle, telle une goutte chargée dans un liquide, le noyau est caractérisé par son rayon et son énergie de liaison. Son volume est donc proportionnel au nombre de nucléons. Ces derniers n'interagissent qu'avec leurs voisins immédiats, d'où l'apparition du modèle de la goutte liquide, décrit par la formule de Bethe et Von Weizscker [48] :

$$B({}^A X_Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_p \delta(A). \quad (\text{I.26})$$

- Terme volumique

Le terme $a_v A$ traduit l'attraction entre chacun des nucléons du noyau atomique due à l'interaction forte ou force d'interaction nucléaire[90]. Chaque nucléon apporte une même quantité d'énergie de liaison. L'interaction forte possède un rayon d'action très court, limitant les nucléons à interagir uniquement avec leurs plus proches voisins ce qui est proportionnel au nombre de nucléons A . On a

$$B_1 = a_v A; \quad a_v = 15,4 \text{ MeV}. \quad (\text{I.27})$$

- Terme surfacique

Le terme surface $a_s A^{2/3}$, est introduit pour tenir compte du fait que volume du noyau étant limité, les nucléons situés à la surface du noyau et qui sont en contact avec ceux-ci ont moins de voisins que ceux se trouvant à l'intérieur du noyau[90]. Ce terme est équivalent à la tension de surface pour les liquides et est proportionnel à $A^{2/3}$.

- Terme coulombien

Les nucléons ne subissent pas qu'une force attractive. Les protons se repoussent mutuellement sous l'action de l'interaction électromagnétique[90]. Ce terme coulombien est donné par la relation

$$B_3 = -a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}; \quad a_c = 0,695 \text{ MeV}. \quad (\text{I.28})$$

- Terme d'asymétrie[90] noté B_4 et est donné par

$$B_4 = -a_a \frac{(N-Z)^2}{A}; \quad a_a = 22,4 \text{ MeV}. \quad (\text{I.29})$$

- Terme d'appariement[90] noté B_5 et est donné par

$$B_5 = a_p \delta(A) \quad \text{et} \quad a_p = 11,2 \text{ MeV} \quad (\text{I.30})$$

Il permet ainsi de rendre compte de l'écart d'énergie de liaison entre noyaux pairs-pairs et impairs-impairs et de l'existence d'un plus grand nombre de noyaux pairs-pairs stables.

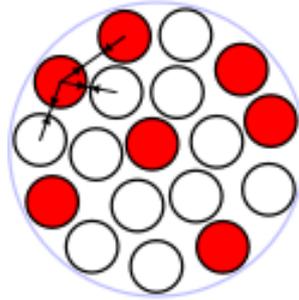


FIGURE 4 – Énergie surfacique[90]

I.7.3 Modèles microscopiques

I.7.4 modèle en couches

Le modèle en couches est un modèle de structure nucléaire comparable à bien des égards au modèle planétaire atomique. Il constitue la pierre angulaire de la physique nucléaire en ce sens que son ambition est de rendre compte de la structure des noyaux en termes microscopiques, c'est-à-dire l'aide des propriétés individuelles de ses constituants. Sa démarche, pour contourner le problème à N corps, consiste à recourir, dans un premier temps, à l'approximation dite du potentiel moyen en espérant traiter ensuite toutes les interactions résiduelles des nucléons comme des perturbations. Dans ce modèle, chaque nucléon défini dans un état donné, est représenté comme évoluant individuellement dans un potentiel moyen. Un nucléon est un fermion, objet quantique dont certaines valeurs en énergie seulement, sont accessibles. Il est défini par un ensemble de nombres quantiques : n, l, s, j, m :

- n est le nombre quantique principal définissant le nombre de noeuds dans la partie radiale

de la fonction d'onde.

- l nombre quantique azimutal.

- j est le nombre quantique associé à la résultante du couplage entre le moment angulaire orbital l et le moment angulaire de spin $s = 1/2$ et $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$.

- m est le nombre quantique magnétique $-l \leq m \leq l$.

En accord avec le principe de Pauli, seul un type de nucléon peut être dans un état quantique défini par les nombres quantiques $|nljm\rangle$. À l'inverse du modèle de la goutte liquide où l'on considère les mouvements collectifs des nucléons comme responsables du comportement du noyau, tels que la rotation, la vibration ou la déformation de celui-ci, ce modèle s'intéresse au caractère individuel du nucléon, dans le but de reproduire les nombres magiques. Dans ce modèle, les excitations du noyau sont dues à la promotion des nucléons vers les états de particule individuelle élevés dans le puits de potentiel.

I.7.5 Modèle de Nilsson

Afin de reproduire le comportement des noyaux déformés, il est nécessaire d'introduire un modèle prenant en compte ces déformations. Les premiers physiciens ayant apporté une généralisation phénoménologique du modèle en couches pour les formes nucléaires déformées sont Nilsson[114], Moszkowski[115] et Gottfried[116]. Cette première généralisation a été nommée : le "modèle de Nilsson". L'idée principale est de rendre les constantes d'oscillateur différentes dans les trois directions de l'espace[117], le potentiel de l'oscillateur déformé est donc :

$$V(r) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (\text{I.31})$$

Dans les cas déformés, la densité de distribution suit le potentiel en conséquence de la courte portée de l'interaction nucléon-nucléon, ainsi nous pouvons définir une surface géométrique nucléaire qui consiste en tous les points (x, y, z) avec :

$$\frac{1}{2}m\bar{\omega}_0^2 R^2 = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (\text{I.32})$$

où $\hbar\bar{\omega}_0 = 41A^{-1/3}MeV$ est la constante de l'oscillateur pour le noyau sphérique équivalent. Cela décrit une ellipsoïde avec les axes X, Y et Z donnés par :

$$\bar{\omega}_0 R = \omega_x X = \omega_y Y = \omega_z Z \quad (\text{I.33})$$

La condition d'incompressibilité de la matière nucléaire requiert que le volume de l'ellipsoïde soit le même que la sphère, d'ou $R^3 = XYZ$, et impose une condition sur les fréquences de l'oscillateur :

$$\bar{\omega}_0^3 = \omega_x \omega_y \omega_z \quad (\text{I.34})$$

A présent, supposons qu'il y ait une symétrie axiale autour de l'axe z , c'est-à-dire que $\omega_x = \omega_y$

et que la petite déviation de la forme sphérique soit donnée par le paramètre δ .

Nous pouvons alors définir :

$$\begin{aligned}\omega_x^2 &= \omega_y^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right) \\ \omega_z^2 &= \omega_0^2 \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right)\end{aligned}\tag{I.35}$$

qui remplit les conditions de conservation de volume imposées par l'Eq. (I.42) au premier ordre avec $\omega_0 = \bar{\omega}_0$. La conservation de volume au deuxième ordre peut être remplie en utilisant la formule :

$$\bar{\omega}_0^6 = \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right) \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right)^2 \omega_0^6\tag{I.36}$$

soit au second ordre

$$\omega_0 \approx \left(1 + \frac{2}{9}\delta^2\right) \bar{\omega}_0.\tag{I.37}$$

En utilisant l'expression explicite pour l'harmonique sphérique Y_{20} , nous pouvons écrire le potentiel comme :

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 - \beta_0 m\omega_0^2 r^2 Y_{20}(\theta, \phi)\tag{I.38}$$

où β_0 est relatif à δ via l'équation :

$$\beta_0 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\delta\tag{I.39}$$

Nous pouvons à présent écrire le Hamiltonien de ce modèle :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2 - \beta_0 m\omega_0^2 r^2 Y_{20}(\theta, \phi) - \hbar\bar{\omega}_0\eta(2\hat{l}\cdot\hat{s} + \mu\hat{l}^2)\tag{I.40}$$

Le terme spin-orbite est conventionnellement paramétré avec la constante η , et le terme en \hat{l}^2 est paramétré par μ , qui introduit phénoménologiquement l'abaissement de l'énergie des états une particule proche de la surface nucléaire, afin de corriger la forte hausse du potentiel de l'oscillateur harmonique. η et μ peuvent être différents pour les protons et les neutrons et dépendent du nombre de nucléons.

Le diagramme de Nilsson pour la région $50 \leq N \leq 82$ et la déformation ($\varepsilon_4 = \varepsilon_2^2/6$), calculés par Bengtsson et Ragnarsson[118] est présenté sur la figure 1. Dans cette figure, les énergies à une particule sont tracées en unités de fréquence de l'oscillateur $\hbar\omega_0 = 41A^{-1/3}$ MeV en fonction de la déformation ε_2 , avec ($\varepsilon_4 = \varepsilon_2^2/6$).

Le paramètre de déformation quadrupolaire de Nilsson ε_2 peut être défini en termes de $\delta = \frac{\Delta R}{R_{r.m.s}}$ où $R_{r.m.s}$ est la racine carrée du rayon du noyau et ΔR est la différence entre les axes

semi-majeur et semi-mineur de l'ellipsoïde nucléaire, comme dans [119] :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{6}\delta^2 + \frac{5}{18}\delta^3 + \frac{37}{216}\delta^4 + \dots \quad (\text{I.41})$$

Ce type de diagramme est essentiel pour comprendre de nombreuses propriétés des noyaux déformés. Notons qu'il existe aussi des généralisations des potentiels de Woods-Saxon et d'autres interactions réalistes pour les noyaux déformés.

I.8 Déformations dans les noyaux atomiques

I.8.1 L'approche macroscopique

Dans le domaine de la physique nucléaire il existe plusieurs modèles théoriques qui décrivent et interprètent les propriétés nucléaires des noyaux dans les différentes régions de la carte des nucléides. Ces modèles sont de deux types [2] :

-Les modèles microscopiques ou d'excitation des particules individuelles qui prennent en compte le mouvement de chaque nucléon dans un noyau, par exemple le Modèle en Couche, les modèles de Hartree-Fock et Hartree-Fock-Bogoliubov.

-Les modèles macroscopiques ou collectifs décrivent le mouvement d'ensemble des nucléons, par exemple le Modèle de Bohr qui est plus connu et sa version algébrique le Modèle collectif algébrique (ACM). Mais, dans la plupart des situations, les propriétés nucléaires peuvent être interprétées en termes de corrélations entre les mouvements collectifs et l'excitation des particules individuelles.

I.8.2 Mouvement collectif dans les noyaux

Les observations expérimentales des énergies de niveaux excités, leurs spins et le rapport d'intensité, nous offrent la base pour l'investigation théorique de la structure nucléaire. Un grand nombre de propriétés observées de noyaux impliquent l'existence du mouvement d'ensemble des nucléons, ces phénomènes s'appellent le mouvement collectif. Dans ce cas, il est plus approprié de les décrire en utilisant les coordonnées macroscopiques telles que la masse, le volume et les paramètres de déformation (β, γ) [13]. Les excitations des noyaux permettent d'étudier des effets collectifs dans le milieu nucléaire. Différents types d'excitation sont permises au noyau. Dans ce chapitre, des excitations collectives des nucléons nous intéressent particulièrement parce qu'elles permettent d'étudier les noyaux comme l'objet en entier. Les excitations collectives sont représentées par deux types de mouvement : -Des vibrations de noyaux (états à N phonons, déformation dynamique axiale ou triaxiale, résonances géantes). -Des rotations collectives autour de l'axe perpendiculaire à l'axe de symétrie du noyau (bande de rotation). Ces deux types d'excitations collectives conduisent en général à des schémas de niveaux "réguliers" et l'évolution dynamique de la forme du noyau. Ainsi, la présence d'un certain type d'excitation nous aide à déduire la forme du noyau.

Dans cette section, nous présenterons deux types de mouvements collectif : rotation et vibration, ainsi que les formes du noyau engendrées par ces mouvements collectifs. Le modèle central qui décrit le comportement collectif des nucléons dans des noyaux est le modèle de Bohr-Mottelson [13]. Ce modèle fut introduit comme le modèle hydrodynamique collectif prenant en compte le couplage du mouvement des nucléons individuels avec les oscillations de la surface nucléaire. Dans les sous-sections suivantes, nous présenterons les conséquences phénoménologiques liées à ce modèle.

I.8.3 Mode vibrationnel

Dans de nombreux cas, un noyau peut être considéré comme une goutte liquide. Nombre de propriétés peuvent être interprétées comme le résultat de la relation entre la tension de surface et l'énergie interne d'une goutte. Une telle approximation nous permet d'examiner les différents types d'excitations nucléaires issus du mouvement vibratoire. Afin de décrire les différentes vibrations de surface nucléaire accessibles aux noyaux, on

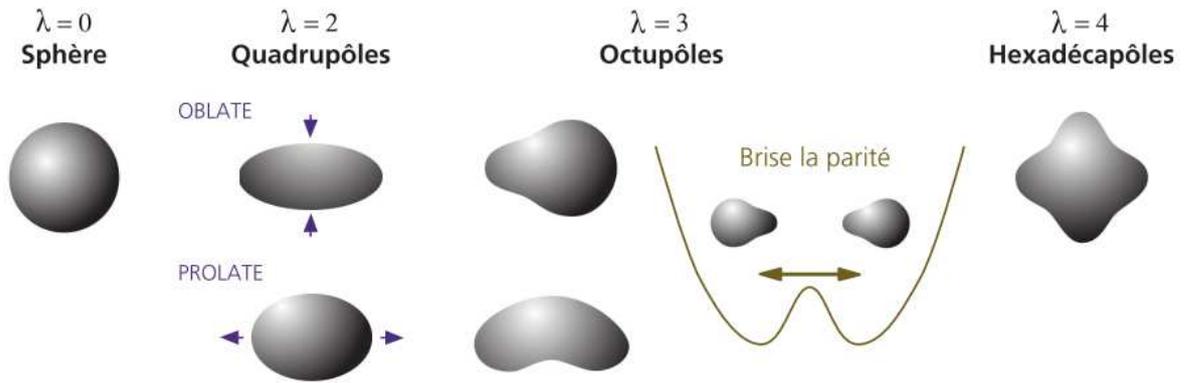


FIGURE 5 – Les différentes formes correspondant aux différents ordres multipolaires[100].

peut paramétriser leur surface par des fonctions harmoniques sphériques :

$$R(\theta, \varphi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right), \quad (\text{I.42})$$

où $R(\theta, \varphi, t)$ est la distance entre le centre du noyau et sa surface dépendant de l'angle (θ, ϕ) à l'instant t . Le rayon d'équilibre R_0 correspond au rayon de la sphère ayant le même volume que le noyau déformé. Les amplitudes dépendantes du temps $\alpha_{\lambda\mu}^*(t)$ sont les paramètres de la forme du noyau et servent ainsi de coordonnées collectives. Ils décrivent les vibrations de surface nucléaire. $Y_{\lambda\mu}$ sont les harmoniques sphériques.

Le mode avec l'ordre $\lambda=0$ est dit vibration respiratoire. Il correspond au cas où un noyau acquiert une énergie d'excitation, et se met en oscillations autour de son état d'équilibre en conservant sa forme, comme il est illustré sur la figure 4.1a. Ce type de vibration correspond

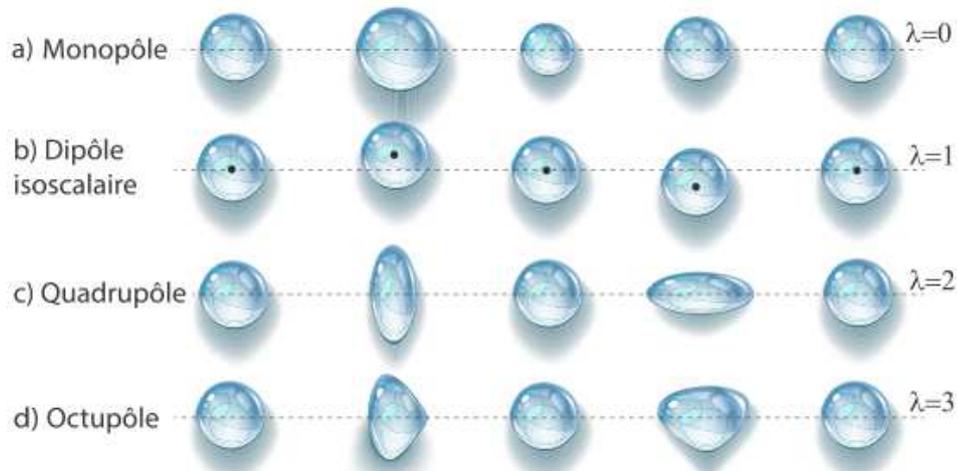


FIGURE 6 – Evolution en temps des modes vibratoires[101].

à l'oscillation de densité de matière nucléaire. Comme la matière nucléaire est très faiblement compressible, les vibrations respiratoires dans les noyaux exigent beaucoup d'énergie. Cependant, dans la plupart des cas, l'énergie d'excitation des noyaux est trop faible pour compresser la matière nucléaire mais elle est suffisante pour la déformer et faire vibrer la forme du noyau. Les différents types de vibration de la forme des noyaux sont cités en dessous.

Le mode d'ordre $\lambda = 1$ correspond au déplacement du centre de masse, comme il est montré sur la figure 4.1b. Un tel mode d'excitation ne doit pas être pris en compte dans les excitations nucléaires. Mais, si les protons et les neutrons se déplacent autour du centre de masse en sens opposé, alors nous avons un mode de type E1. Ce mode vibratoire s'appelle "La résonance géante" et il n'arrive que dans le cas d'excitation à haute énergie (8-20 MeV).

Le mode $\lambda = 2$ décrit l'oscillation quadripolaire qui est présenté sur la figure 4.1c et ce mode d'oscillation correspond aux excitations collectives les plus importantes de basse énergie du noyau. Ainsi, la vibration quadripolaire forme un multiplet d'états excités dont la dégénérescence est donnée par le nombre de phonons vibratoires apportés. Du coup, l'excitation $\lambda = 2$ est perue comme l'excitation d'un phonon qui porte deux unités de moment angulaire (unité \hbar). L'excitation de deux phonons aboutit à trois états excités de moment angulaire 0^+ , 2^+ et 4^+ (un triplet), tandis que l'excitation de trois phonons peut créer les états de spin 0^+ , 2^+ , 3^+ , 4^+ et 6^+ . La levée de dégénérescence de ces états s'interprète alors en termes d'interaction entre des phonons. Ainsi, la vibration quadripolaire conduit en général aux schémas de niveaux avec un rapport d'énergie entre les deux premiers niveaux excités 4_1^+ et 2_1^+ , $\frac{E(4_1^+)}{E(2_1^+)} = 2$ pour la vibration harmonique mais habituellement ce rapport varie entre 2 et 2.5 dans les situations réalistes.

Le mode avec $\lambda = 3$ correspond au cas d'oscillation octupolaire, figure 4.1d. Dans le cas des isotopes pairs-pairs, la déformation octupolaire est le principal mode d'asymétrie et elle est souvent associée à la bande de parité négative. Il faut noter que la forme d'équilibre d'un noyau peut varier rapidement avec son énergie d'excitation ou en ajoutant ou retirant un nucléon ou en augmentant le spin du noyau. Par exemple, un noyau peut être sphérique dans son état fondamental

alors que l'excitation de particules peut conduire à une forme allongée ou aplatie. Les noyaux peuvent aussi présenter différentes déformations à des énergies d'excitations très similaires, ce phénomène s'appelle la coexistence de forme.

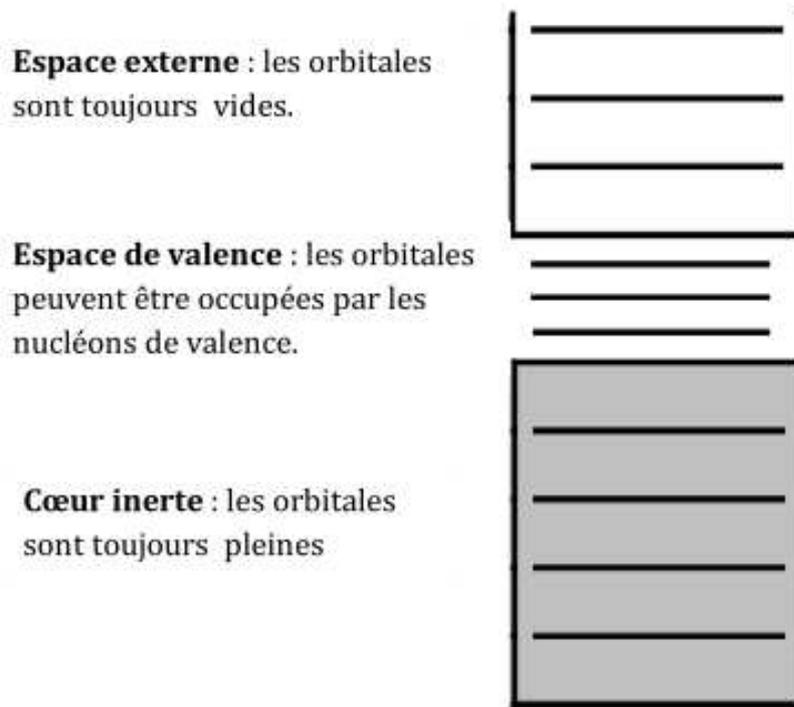


FIGURE 7 – Schéma de l'occupation des orbitales nucléaires dans le modèle en couches.

I.8.4 Mode rotationnel

La rotation se traduit par la présence de moment angulaire suivant un axe donné. Dans le cas de la rotation collective, le noyau tourne globalement autour de cet axe de rotation. Il doit pour cela être déformé, car la mécanique quantique interdit une rotation autour d'un axe de symétrie. Dans la plupart des cas, les noyaux ont la déformation quadripolaire ($\lambda=2$) décrite par la formule I.22. Ainsi, il y a cinq paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$. Les paramètres de forme peuvent être exprimés par la transformation du système des coordonnées :

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = \sum_{\nu=-2}^2 \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} a_{\nu\mu'}^* D_{\mu\mu'}^{(\nu)}(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma). \quad (\text{I.43})$$

Les formes des noyaux sont définies par les valeurs de λ ainsi qu'il suit :
 - $\gamma = 0^0$, l'axe de symétrie est le plus long, les noyaux déformés ont une déformation "prolate", forme allongée.

- $\gamma = 60^\circ$, l'axe de symétrie est le plus court, les noyaux ont une déformation "oblate", forme aplatie.

- $0^\circ < \gamma < 60^\circ$ pas de symétrie axiale, le noyau devient triaxial, ce qui signifie que ses trois axes principaux ont des longueurs différentes.

Où D est la matrice de rotation de Wigner. Les paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$ sont indépendants du temps dans le système de coordonnées du corps fixe. Selon la forme du noyau, on peut réduire les paramètres de déformation nucléaire dans l'équation (4.2). Par exemple, pour le cas d'un noyau de symétrie axiale où la rotation collective est perpendiculaire à l'axe de symétrie intrinsèque, $\mu = 0$ et $\alpha_{\lambda 0}$ sont désignés par β . Ainsi, la déformation quadripolaire positive $\beta > 0$ signifie que le rayon polaire est plus grand que le rayon équatorial (la forme prolate) et la déformation quadripolaire correspond à la forme oblate $\beta < 0$ où le rayon équatorial est plus grand que le rayon polaire. Il est d'usage d'exprimer des déformations quadripolaires dans un référentiel de corps fixe avec des axes 1,2,3. Si les axes du système de coordonnées choisi sont orientés le long des axes principaux d'inertie du système corps fixe, alors $a_{2,-1} = a_{2,1} = 0$, $a_{2,-2} = a_{2,2}$. Par conséquent, les coefficients non-nuls $a_{2,2}$ et $a_{2,0}$ sont suffisants pour décrire la forme du noyau. Ces coefficients sont souvent exprimés en termes de paramètres de Hill-Wheeler :

$$a_{2,0} = \beta \cos \gamma \quad , \quad a_{2,-2} = a_{2,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \gamma \quad (\text{I.44})$$

où β représente l'amplitude de la déformation quadripolaire. Le facteur $1/\sqrt{2}$ a été choisi de telle sorte que $\sum |\alpha_{\lambda\mu}| = \alpha_0 + 2\alpha_2^2 = \beta^2$. L'angle γ , dénommé paramètre de triaxialité, a été accepté comme étant la manière la plus pratique pour décrire la forme des noyaux. En utilisant les expressions I. et I., la surface du noyau peut être décrite en fonction de β et γ comme :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \cos \gamma Y_{20}(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma (Y_{22}(\theta, \varphi) + Y_{2-2}(\theta, \varphi)) \right] \quad (\text{I.45})$$

En introduisant les expressions des harmoniques sphériques, l'Eq. (I.30) devient :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(\cos \gamma (3 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} \sin \gamma \sin^2 \theta \cos 2\varphi \right) \right] \quad (\text{I.46})$$

Dans cette formule, nous voyons que le paramètre β permet de mesurer l'étendue de la déformation et le paramètre γ montre l'éloignement à la symétrie axiale. La valeur négative de β indique que le noyau a la forme oblate et la valeur positive décrit la forme prolate, comme illustré sur la

figure 13.

$$\begin{aligned}
 R_1 = R_{x'} &= R\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(-\cos \gamma + \sqrt{3} \sin \gamma \right) \right] \\
 R_2 = R_{y'} &= R\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(-\cos \gamma - \sqrt{3} \sin \gamma \right) \right] \\
 R_3 = R_{z'} &= R(0, 0) = R_0 \left[1 + 2\beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \cos \gamma \right]
 \end{aligned} \tag{I.47}$$

D'une manière générale, on a

$$R_k(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right) \right], \quad \text{pour } k(1, 2, 3). \tag{I.48}$$

Les formes nucléaires peuvent être alors représentées schématiquement dans un plan (β, γ) (figure 14).

Dans cette formule, nous voyons que le paramètre β permet de mesurer l'étendue de la déformation et le paramètre γ montre l'éloignement de la symétrie axiale. La valeur négative de β indique que le noyau a la forme oblate [102] et la valeur positive décrit la forme prolate, comme c'est illustré sur la figure 4.2a. Nous pouvons apercevoir dans la formule (4.4) qu'il y a une certaine redondance des valeurs de β et γ . Par exemple, si nous avons les valeurs positives de β , la forme d'un noyau sera prolate pour $\gamma = 0^0, 120^0, 240^0$, comme c'est illustré sur la figure 4.2b. Cependant, l'axe de symétrie est différent dans chaque cas : l'axe z pour $\gamma = 0^0$, l'axe y pour $\gamma = 120^0$ et l'axe x pour $\gamma = 240^0$. De la même manière, la forme oblate peut être obtenue pour les paramètres $\gamma = 60^0, 180^0, 300^0$. Ainsi, les valeurs de variable dans l'intervalle $[0^0, 60^0]$ sont suffisantes pour décrire toutes les formes du noyau.

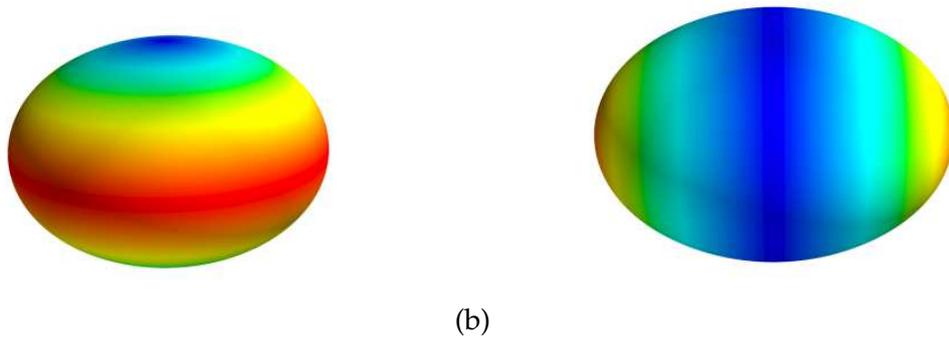


FIGURE 8 – (a) : Noyau de forme oblate développé sur des harmoniques sphériques avec un coefficient $\beta_2 \approx -0.40$ et (b) : Noyau de forme prolate développé sur des harmoniques sphériques avec un coefficient $\beta_2 \approx 0.35$. [102]

I.8.5 Déformations triaxiale

La déformation axiale est généralement suffisante pour décrire les noyaux dans leurs états fondamentaux. De nombreux calculs sur des noyaux déformés considèrent uniquement la déformation axiale. Pour les noyaux faiblement déformés, proches des fermetures de couches (noyaux de transition), il est nécessaire de prendre en compte la déformation triaxiale (déformation non-axiale car γ n'est pas un multiple de 60). Lorsque le cœur du noyau tourne, la déformation maximisant l'énergie de liaison évolue tant à passer par une déformation triaxiale[103]. Si un noyau triaxial ne possède pas de symétrie axiale alors, il englobe plusieurs phénomènes physiques qui apparaissent dans le schéma de niveaux. Il est possible dans ce cas, de faire pivoter le noyau suivant un axe n'appartenant pas à un des plans principaux du référentiel intrinsèque. Parmi les modes d'excitations d'un noyau, il y en a deux qui caractérisent de manière univoque un noyau triaxial en rotation : c'est le mode "wobbling"[91] et la chiralité.

Au moment où le noyau oscille dans l'espace dans la direction de l'axe de rotation, on parle de mouvement de "wobbling", ce qui se traduit dans le schéma de niveaux par une bande parallèle à une bande yrast[106] légèrement plus excitée. Elle est fortement connectée à celle-ci par des transitions dipolaires. Une oscillation du signe de l'angle α entre l'axe du moment angulaire et l'axe de rotation va être la source du moment de wobbling (voir figure 15).

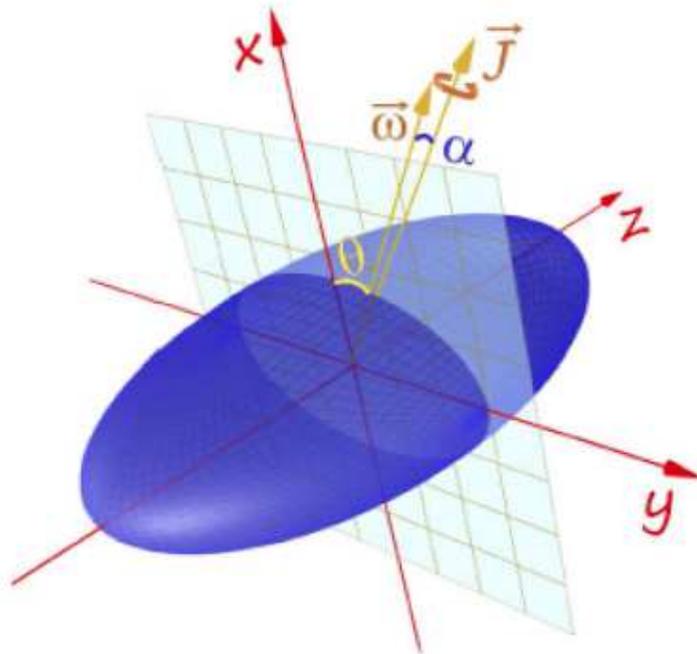


FIGURE 9 – Noyau triaxial dans son référentiel intrinsèque où sont représentés l'angle θ entre le vecteur rotation $\vec{\omega}$ et l'axe Ox et l'angle α entre les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ et moment angulaire total \vec{J} [107].

Un autre phénomène typique de la triaxialité est la chiralité. Il se manifeste par deux bandes dipolaires (constituées de transitions magnétiques dipolaires M1) de configurations identiques,

mais dont l'axe de rotation pointe dans deux directions différentes de l'espace, symétriques par rapport au plan perpendiculaire à l'axe long de l'ellipsoïde. Comme ces deux bandes partagent la même configuration elles sont idéalement dégénérées en énergie, mais dans la réalité un décalage apparaît. Ce comportement a été observé dans les noyaux autour du ^{134}Pr [108, 109], du ^{128}Cs [110], du ^{104}Rh [111, 112] et du ^{198}Tl [113]. La déformation triaxiale s'avère stable sur une gamme limitée de spin à bas spin. De plus, il n'est pas facile de la mettre en évidence expérimentalement.

I.9 Etat de l'art sur le calcul des énergies et des transitions nucléaires à l'aide du hamiltonien de Bohr.

Depuis deux décennies déjà, plusieurs travaux ont été menés pour obtenir des solutions des symétries $Z(5)$, $X(5)$ et $E(5)$. Des solutions spéciales de l'équation du hamiltonien de Bohr sont présentées dans les références[25, 17, 27, 26] pour différents modèles de potentiel, nous citerons ici quelque modèle pertinents.

Modèle du potentiel de Hulthen : c'est un potentiel généralement utilisé pour décrire les propriétés des noyaux. En 2015, M. Chabab et al. ont résolu l'équation du hamiltonien de Bohr le potentiel de Hulthen dans la variable β avec un terme en forme d'anneau pour la variable γ [23]. Le potentiel de Hulthen est une variante du potentiel coulombien qui est typique du phénomène d'échange de gluons à petite distance. Les valeurs prédites par ce modèle présentent un écart assez important par rapport aux données expérimentales disponibles. Cet écart est due au fait que le potentiel de Hulthen ne prend pas bien en compte les effets du confinement à grande distance. L'expression du potentiel de Hulthen est

$$V(\beta) = -V_0 \frac{e^{-\mu\beta}}{1 - e^{-\mu\beta}}, \quad (\text{I.49})$$

où V_0 est la force du potentiel et μ le paramètre d'écran.

Le modèle du potentiel de Coulomb dépendant de l'énergie

En 2016, dans le but de compléter le modèle de Chabab, R. Budaca propose un modèle dans lequel les paramètres du potentiel dépendent de l'énergie[46]. En partant de l'hypothèse selon laquelle cette dépendance énergie pourrait permettre de prendre implicitement en compte les effets liés au confinement à grande distance. Les résultats de son modèle sont meilleurs que ceux de Chabab, mais les écarts restent toujours considérables par rapport aux valeurs expérimentales. L'expression du potentiel de Coulomb pour le modèle de Budaca est

$$V(\beta) = -\frac{V_0(E_{n,L})}{\beta}, \quad (\text{I.50})$$

où $V_0(E_{n,L})$ est le paramètre du potentiel dépendant de l'énergie.

Le modèle du potentiel de Killingbeck

En 2018, B. T. Mbadjoun [17] a utilisé le potentiel de Killingbeck plus Morse pour résoudre l'équation du hamiltonien de Bohr. Le potentiel de Killingbeck est une forme étendue du po-

tentiel de Cornell et qui peut s'obtenir via un développement de Taylor du potentiel de Yukawa. Il obtient des résultats meilleurs que les travaux précédents avec un écart à l'expérience assez réduit. Cependant, son modèle ne reproduit pas correctement les transitions des états énergétiques dans le noyau. L'expression des potentiels de Morse et Killingbeck sont respectivement

$$\begin{aligned}
 V(\beta) &= \\
 e^{-k(\beta-\beta_0)} - e^{-2k(\beta-\beta_0)} & \\
 V(\beta) &= \\
 -\frac{a}{\beta} + \frac{b}{\beta^2} + c\beta + d\beta^2. &
 \end{aligned}
 \tag{I.51}$$

Le modèle classique du potentiel inverse à quatre termes En 2019, Nga et al.[27] ont étudié le hamiltonien de Bohr pour les noyaux triaxiaux sous l'influence d'un potentiel inverse à quatre termes et ont obtenu le spectre d'énergie pour la partie en β . Dans ce modèle, le potentiel proposé possède des singularités en zéro, il est attractif et respecte les propriétés de confinement. Son modèle prédit des valeurs proches des résultats expérimentaux à la fois pour les énergies et pour les transitions quadrupolaires. Malgré le succès de ce modèle, il présente cependant une incomplétude, il n'intègre pas les effets mémoires nécessaires pour l'étude collective des systèmes quantiques, et qui rendraient certainement les résultats meilleurs que ceux fournis par le traitement classique de la référence [27]. Le potentiel inverse à quatre termes est donné par

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta} + \frac{d}{\beta^2} + \frac{c}{\beta^{1/2}} + \frac{b}{\beta^{3/2}}.
 \tag{I.52}$$

Le modèle du potentiel de Kratzer écranté En 2020, Omon et al.[20] ont étudié le modèle du Hamiltonien de Bohr avec un potentiel de Kratzer écranté et ont obtenu le spectre d'énergie pour les noyaux triaxiaux de plomb et de xenon. Le potentiel de Kratzer écranté est donné par :

$$V(\beta) = \left(-\frac{a}{\beta} + \frac{b}{\beta^2} \right) e^{-k\beta}.
 \tag{I.53}$$

Le modèle fractionnaire du potentiel inverse à quatre termes Très récemment, K. Ahmadou et al., ont repris les travaux de Nga et al. sous une nouvelle formulation introduite dans la référence[32] à savoir la dérivée fractionnaire conformable. Dans ce travail, un nouveau type de symétries ponctuelles critiques nommé symétrie ponctuelle critique fractionnaire conforme $E^\alpha(5)$ a été étudiée en utilisant la version fractionnaire conforme de l'équation du hamiltonien de Bohr à avec le potentiel inverse à quatre termes[47] en la variable β . Les résultats comme on pouvait s'y attendre sont meilleurs que ceux des travaux antérieurs et sont assez intéressants en ce sens que plusieurs sous-modèles jusqu'ici encore inexplorés sont directement accessibles via cette formulation : c'est l'effet mémoire. Ce qui justifie l'intérêt de ce travail

La version fractionnaire conformable du potentiel inverse à quatre termes[47]

potentiel inverse à quatre termes est donné par

$$V(\beta^\alpha) = \frac{a}{\beta^\alpha} + \frac{d}{\beta^{2\alpha}} + \frac{c}{\beta^{\alpha/2}} + \frac{b}{\beta^{3\alpha/2}} \quad (\text{I.54})$$

avec a, b, c, d les paramètres du potentiel et α le paramètre fractionnaire

I.10 Conclusion

Dans ce chapitre, après une brève historique de la physique nucléaire énumérant quelques chronologies importantes qui ont des études de la structure nucléaire, telle que la découverte du noyau et de ses composants, protons, neutrons et électrons, nous avons abordé l'étude de la carte regroupant les noyaux connus, détectés ou non jusqu'à ce jour. Ensuite, différents modèles nucléaires ont été introduits, tels que le modèle de la goutte liquide et le modèle en couches. Enfin, une introduction à la déformation dans les noyaux a été effectuée afin de comprendre l'étude des noyaux déformés dans la suite de notre travail.

Dans ce chapitre, nous avons également étudié le noyau du platine et ses isotopes puis, défini le noyau atomique depuis l'atome jusqu'à ses composants. Les différentes interactions dans le noyau atomique (interaction forte, interaction faible et interaction électromagnétique) peuvent entraîner les déformations (rotation et vibration) de celui-ci. Ces mécanismes sont responsables d'une quantité d'énergie permettant soit de lier, soit de séparer les constituants du noyau en fonction du nombre de protons et de neutrons en son sein. Dans la suite, nous utiliserons le potentiel fractionnaire inverse à quatre termes pour bâtir un nouveau modèle, prenant en compte les vibrations et les rotations des nucléides.

THÉORIE QUANTIQUE DES TRANSITIONS D'ÉNERGIE DANS LE NOYAU

II.1 Introduction

La déformation (vibration et rotation) des noyaux atomiques est la conséquence des interactions entre nucléons. Les différentes interactions (nucléaire ou forte, magnétique et faible) décrivent des mouvements bien connus non seulement de part leur rapidité mais aussi couplés entre eux. Il s'agit cependant de bâtir un modèle décrivant l'évolution des mouvements des noyaux atomiques.

II.2 Présentation générale du modèle du Hamiltonien de Bohr

L'équation fondamentale de la mécanique relativiste dont l'état du système est décrit par une fonction d'onde peut être représentée par un vecteur de l'espace des états. L'équation du Hamiltonien de Bohr nous permet donc de suivre l'évolution sphérique du noyau atomique pour décrire ses déformations en utilisant des modèles de potentiel. Parmi ces potentiels, les plus simples sont les singuliers qui semblent être très importants dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie [120]. Plutôt dans [121], il a été mentionné que les interactions dans le monde réel étaient probablement singulières, ce qui explique la richesse de la littérature à ce potentiel. Comme illustré, on peut citer : le potentiel oscillateur harmonique[122], le potentiel de Coulomb et le potentiel de Kratzer[123], potentiel de Davidson[124, 53], le potentiel de Killingbeck[54, 55], potentiel Quartique[56], potentiel sextique[57, 58]. Une sous-classe de potentiels singuliers sont les potentiels fractionnaires singuliers qui sont des rationnels de loi de puissance dotés de pouvoirs rationnels. Cette sous-classe de potentiels a le mérite d'avoir été utilisée pour décrire l'interaction quark-antiquark[59], des modèles présentant une résonance[60] de forme et pour étudier les spectres de l'état fondamental des noyaux pairs[61]. Suite à une utilisation aussi répandue, il est nécessaire de savoir que ces potentiels peuvent également être utilisés avec succès pour étudier le hamiltonien de Bohr. il est important de noter ici que, c'est la première fois qu'un potentiel fractionnaire inverse à quatre termes[62] sera utilisé pour étudier le Hamiltonien de Bohr. Ce potentiel combine un potentiel de puissance fractionnaire singulier avec un potentiel de puissance entier singulier.

le hamiltonien de Bohr se présente généralement sous sa forme sphérique. Cependant, le mouvement présentant les déformations des nucléides est régi par l'équation de Schrödinger suivante :

$$\widehat{H}\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = E\psi(\beta, \gamma, \theta_i). \quad (\text{II.1})$$

Le Hamiltonien H est donné par l'expression[3, 91, 55] :

$$\widehat{H} = E_c + V(\beta, \gamma), \quad (\text{II.2})$$

où E_c est l'énergie cinétique donnée par l'expression :

$$E_c = \frac{\widehat{p}^2}{2B}, \quad (\text{II.3})$$

avec

$$\widehat{p}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right]. \quad (\text{II.4})$$

L'opérateur de hamiltonien peut donc se mettre sous la forme :

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V(\beta, \gamma). \quad (\text{II.5})$$

Supposons que le hamiltonien s'écrive sous la forme :

$$\widehat{H} = T_{vib} + T_{rot} + V(\beta, \gamma) \quad (\text{II.6})$$

avec $T_{vib} = T_\beta + T_\gamma$, le Hamiltonien se rapportant aux vibrations des nucléides tels que :

$$T_\beta = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \quad (\text{II.7})$$

et

$$T_\gamma = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \quad (\text{II.8})$$

T_{rot} représente le Hamiltonien relatif aux rotations des nucléides

$$T_{rot} = \frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] \quad (\text{II.9})$$

où β et γ sont les coordonnées intrinsèques, qualifiant les différentes déformations liées aux vibrations des nucléides ; les \widehat{Q}_k^2 sont les composantes du moment angulaire, $k = 1, 2, 3$ représentent les trois axes de coordonnées ; $\theta_i (i = 1, 2, 3)$ sont les angles d'Euler ; E_c est l'énergie cinétique du nucléide qui s'identifie aux diverses rotations effectuées par les nucléides, \hat{p} est l'opérateur impulsion du mouvement ; $V(\beta, \gamma)$ est l'énergie potentielle du système, B est la masse totale du nucléide en mouvement et $\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ est la fonction d'onde.

En combinant les Eq. (II.60) et (II.64), nous obtenons :

$$-\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] \psi(\beta, \gamma, \theta_i) \quad (\text{II.10})$$

$$+ V(\beta, \gamma) \psi(\beta, \gamma, \theta_i) = E \psi(\beta, \gamma, \theta_i)$$

C'est l'équation générale des mouvements de déformations des nucléides. Cette équation sera utilisée dans la suite dans notre travail.

II.3 Moments des transitions quadrupolaires électriques

Le moment quadrupolaire électrique est un caractère fondamental associé au noyau atomique. Ce moment est lié à la répartition non purement sphérique au sein du noyau. En effet, sa mesure nous permet de sonder la déformation géométrique du noyau de sa forme sphérique. Les méthodes de mesure du moment quadrupolaire consistent à étudier l'énergie d'interaction hyperfine électrique entre le moment quadrupolaire et le gradient du champ électrique dû aux électrons atomiques. L'une des méthodes est la résonance quadrupolaire nucléaire (RQN), qui consiste à observer les transitions entre les niveaux d'énergies éclatées par l'effet de l'interaction quadrupolaire et induites par un champ de radiofréquences.

Le moment quadrupolaire électrique a pour fonction première de déterminer les excitations possibles que l'on peut avoir au niveau des nucléides lorsqu'on a un gain ou une perte d'énergie. Il permet de déterminer les différentes transitions et d'avoir d'amples informations sur le nucléide, c'est-à-dire des informations sur ses couches et sous-couches. Il permet aussi de donner tous les détails que l'on ne peut retrouver lorsqu'on a juste des énergies de chaque niveau, celui-ci singularise et particularise chaque nucléon en indiquant s'il se trouve au niveau fondamental, γ ou β . L'équation quadrupolaire électrique[53, 70] est régie par :

$$T_{\mu}^{(E2)} = t\beta \left[D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right) \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right]. \quad (\text{II.11})$$

Dans cette équation, θ_i sont les angles d'Euler et t un scalaire, tandis que $D^{(2)}$ sont des fonctions de Wigner des associées aux angles d'Euler, μ est le niveau concerné et L le nombre quantique du moment angulaire.

- Pour $\gamma = \frac{\pi}{6}$, l'opérateur quadrupolaire se réduit à :

$$T_{\mu}^{(E2)} = -\frac{t\beta}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right). \quad (\text{II.12})$$

Ainsi, les différentes probabilités de transitions B(E2)[74, 75] des niveaux i vers les niveaux f sont définies par :

$$B(E2; L_i\alpha_i \longrightarrow L_f\alpha_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle L_f\alpha_f || T^{(E2)} || L_i\alpha_i \rangle|^2}{2L_i + 1}, \quad (\text{II.13})$$

où $L_i\alpha_i$ et $L_f\alpha_f$ représentent les énergies des niveaux i et f respectivement et $|\langle L_f\alpha_f || T^{(E2)} || L_i\alpha_i \rangle|^2$ est une quantité matricielle calculée à partir du théorème de Wigner-Eckart[74]. Ces éléments de matrice sont donnés par :

$$\langle L_f M_f \alpha_f | T_{\mu}^{(E2)} | L_i M_i \alpha_i \rangle = \frac{\langle L_f \alpha_f || T^{(E2)} || L_i \alpha_i \rangle}{\sqrt{2L_f + 1}} \langle L_i 2 L_f | M_i \mu M_f \rangle. \quad (\text{II.14})$$

La fonction d'onde associée à cette transition est donnée par :

$$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} \left[D_{\mu,\alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu,-\alpha}^{(L)}(\theta_i) \right] \xi_{n,n_{\omega},L,n_{\tilde{\gamma}}}(\beta) \eta_{n_{\tilde{\gamma}}}(\tilde{\gamma}). \quad (\text{II.15})$$

Pour calculer les éléments de la matrice de l'opérateur quadrupolaire de l'Eq. (II.49), l'intégrale à travers $\tilde{\gamma}$ est égale à l'unité à cause de la méthode de normalisation[53] des fonctions d'ondes. L'intégrale à travers les angles d'Euler est déformée par l'intégrale principale des trois fonctions de Wigner[74] et l'intégrale à travers β prend la forme

$$I(n_i, L_i, \alpha_i, n_f, L_f, \alpha_f) = \int \beta \xi_{n_i, L_i, \alpha_i}(\beta) \xi_{n_f, L_f, \alpha_f}(\beta) \beta^4 d\beta. \quad (\text{II.16})$$

où les facteurs β et β^4 proviennent de l'opérateur quadrupolaire et l'élément de volume respectivement. Dans le but de calculer l'intégrale Eq. (II.50), la fonction bi-confluent de Heun est supposée être une série polynomiale correspondant à l'ordre de l'énergie.

En utilisant le théorème de Wigner-Eckart, l'Eq. (II.48) prend la forme

$$B(E2; L_i, \alpha_i \longrightarrow L_f, \alpha_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{t^2}{2} \frac{1}{(1+\delta_{\alpha_i,0})(1+\delta_{\alpha_f,0})} \times \\ \left[(L_i, 2, L_f | \alpha_i, 2, \alpha_f) + (L_i, 2, L_f | \alpha_i, -2, \alpha_f) + (-1)^{L_i} (L_i, 2, L_f | -\alpha_i, 2, \alpha_f) \right]^2 \times \\ [I(n_i, L_i, \alpha_i, n_f, L_f, \alpha_f)]^2. \quad (\text{II.17})$$

Les trois coefficients Clebsch-Gordon apparaissant au dessus de l'équation ont été déduits par ses propriétés (seulement les transitions $\Delta\alpha = \pm 2$ sont permises). En effet, le premier CCG ne disparaît que si $\alpha_i + 2 = \alpha_f$, tandis que le second CCG ne disparaît que si $\alpha_i - 2 = \alpha_f$ et le troisième CCG ne disparaît que si $\alpha_i + \alpha_f = 2$. Ce dernier peut être valable que dans quelques cas

particuliers. Les résultats de la partie angulaire de cette équation sont connus[76]. Ces conditions montrent que les isotopes 192, 194 et 196 du platine sont des bons candidats pour respecter la configuration des noyaux triaxiaux.

L'état fondamental est caractérisé par $n_\omega = L - \alpha = 0$ et ses transitions sont caractérisées par $\alpha_i = L_i$ et $\alpha_f = L_f$. En normalisant les taux de B(E2) pour les faibles transitions au sein de l'état fondamental nous obtenons

$$R_{g \rightarrow g}(L + 2 \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L + 2)_g \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.18})$$

Les niveaux paires de la bande γ sont caractérisés par $n_\omega = L - \alpha = 2$, qui signifie que $\alpha = L - 2$. Pour l'état fondamental, $n_{\omega f} = 0$, $n_f = 0$ et pour la bande γ des valeurs paires de L , $n_{\omega i} = 2$, $n_i = 0$ et le taux de transition est donnée par

$$R_{\gamma\text{-pair} \rightarrow g}(L \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-pair}} \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.19})$$

Pour la bande γ des valeurs impaires de L , $n_{\omega i} = 1$, $n_i = 0$ [48] et le taux de transition des niveaux impairs de la bande γ vers l'état fondamental sont donnés par

$$R_{\gamma\text{-impair} \rightarrow g}(L \rightarrow L + 1) = \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-impair}} \rightarrow (L + 1)_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.20})$$

Pour les transitions des niveaux impairs de la bande γ vers les niveaux impairs de la bande γ inférieurs, on a

$$R_{\gamma\text{-pair} \rightarrow \gamma\text{-pair}}(L + 2 \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L + 2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.21})$$

Les transtions des niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L vers niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L inférieures sont données par

$$R_{\gamma\text{-impair} \rightarrow \gamma\text{-impair}}(L \rightarrow L - 1) = \frac{B(E2; (L + 2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.22})$$

De même, pour les niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L vers les niveaux de bande γ pour les valeurs paires de L , on a

$$R_{\gamma\text{-impair} \rightarrow \gamma\text{-pair}}(L \rightarrow L - 1) = \frac{B(E2; L_\gamma \rightarrow (L - 1)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.23})$$

Pour le premier état excité, c'est-à-dire pour les niveaux de la bande β , $n_{\omega f} = 0$, $n_f = 1$ et

$$R_{\beta\text{-band} \rightarrow \beta\text{-band}}(L \rightarrow L - 1) = \frac{B(E2; L_{\beta\text{-band}} \rightarrow (L - 1)_{\beta\text{-band}})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \quad (\text{II.24})$$

II.4 Outils théoriques et méthodes

II.4.1 Méthode étendue de Nikiforov-Uvarov classique

La méthode de Nikiforov-Uvarov (NU) est une méthode puissante et efficace qui donne des spectres d'énergie et une fonction propre pour de nombreuses équations d'onde quantique. Cette technique est appliquée à toute équation hypergéométrique dont la forme est la suivante[65] :

$$\psi''(\omega) + \frac{\bar{\tau}(\omega)}{\sigma(\omega)}\psi'(\omega) + \frac{\bar{\sigma}(\omega)}{\sigma^2(\omega)}\psi(\omega) = 0, \quad (\text{II.25})$$

où $\bar{\tau}(\omega)$ est un polynôme au plus du premier degré, $\sigma(\omega)$ et $\bar{\sigma}(\omega)$ sont des polynômes au plus du second degré et $\psi(\omega)$ est une fonction de type hypergéométrique et une fonction différentielle de second ordre au plus.

La méthode étendue Nikiforov-Uvarov (ENU) est obtenue en changeant les conditions aux limites de la méthode NU et est utilisée pour résoudre toute équation différentielle du second ordre qui possède au plus quatre points singuliers [66]. Une équation avec les conditions aux limites de la méthode ENU est réduite par une transformation de coordonnées appropriées sous la forme suivante :

$$\psi''(\omega) + \frac{\bar{\tau}(\omega)}{\sigma(\omega)}\psi'(\omega) + \frac{\bar{\sigma}(\omega)}{\sigma^2(\omega)}\psi(\omega) = 0, \quad (\text{II.26})$$

tels que $\bar{\tau}(\omega)$, $\sigma(\omega)$ et $\bar{\sigma}(\omega)$ sont des polynômes de deuxième, troisième et quatrième degrés, respectivement. Pour implémenter la méthode ENU, on commence par écrire la fonction $\psi(\omega)$ comme le produit de deux fonctions $\phi(\omega)$ and $Y(\omega)$ telle que

$$\psi(\omega) = \phi(\omega)Y(\omega), \quad (\text{II.27})$$

où $\phi(\omega)$ et $Y(\omega)$ sont des fonctions de type hypergéométrique, $Y(\omega)$ correspond à la solution du polynôme de l'Eq. (II.2).

En remplaçant l'Eq. (II.3) dans l'Eq. (II.2), nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$Y''(\omega) + \left(2\frac{\phi'(\omega)}{\phi(\omega)} + \frac{\bar{\tau}(\omega)}{\sigma(\omega)}\right)Y'(\omega) + \left(\frac{\phi''(\omega)}{\phi(\omega)} + \frac{\phi'(\omega)\bar{\tau}(\omega)}{\phi(\omega)\sigma(\omega)} + \frac{\bar{\sigma}(\omega)}{\sigma^2(\omega)}\right)Y(\omega) = 0. \quad (\text{II.28})$$

Introduisons les nouveaux polynômes suivants :

$$\frac{\phi'(\omega)}{\phi(\omega)} = \frac{\pi(\omega)}{\sigma(\omega)}, \quad (\text{II.29})$$

$$\tau(\omega) = \bar{\tau}(\omega) + 2\pi(\omega), \quad (\text{II.30})$$

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \bar{\sigma}(\omega) + \pi^2(\omega) + \pi(\omega)(\bar{\tau}(\omega) - \sigma'(\omega)) + \pi'(\omega)\sigma(\omega), \quad (\text{II.31})$$

$$\frac{\tilde{\sigma}(\omega)}{\phi(\omega)} = h(\omega), \quad (\text{II.32})$$

$$h(\omega) - \pi'(\omega) = G(\omega) \quad (\text{II.33})$$

$$\pi(\omega) = \frac{\sigma'(\omega) - \bar{\tau}(\omega)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(\omega) - \bar{\tau}(\omega)}{2}\right)^2 - \bar{\sigma}(\omega) + G(\omega)\sigma(\omega)}, \quad (\text{II.34})$$

$\tau(\omega)$, $\tilde{\sigma}(\omega)$ et $h(\omega)$ sont des polynômes respectivement du second degré, de degré quatre et du premier degré. Les fonctions $\pi(\omega)$ sont déterminées lorsque l'expression explicite du polynôme $G(\omega)$ sous la racine carrée est connue. Les mêmes fonctions (sous la racine carrée) sont des polynômes au plus du second degré. Ensuite, l'Eq. (II.4) peut être réduite sous la forme :

$$\sigma(\omega)Y''(\omega) + \tau(\omega)Y'(\omega) + h(\omega)Y(\omega) = 0. \quad (\text{II.35})$$

En différenciant l'Eq. (II.11) une fois, nous obtenons une forme compréhensible donnée par :

$$\sigma(\omega)Y'''(\omega) + (\tau(\omega) + \sigma'(\omega))Y''(\omega) + (\tau'(\omega) + h(\omega))Y'(\omega) + h'(\omega)Y(\omega) = 0. \quad (\text{II.36})$$

Il s'agit d'une équation différentielle de type hypergéométrique étendue. Etant donné que toutes les dérivées de l'Eq. (II.12), ont la même forme, alors on peut la différencier n fois en utilisant la nouvelle représentation $Y^n(\omega) = v_n(\omega)$ [66, 67, 68] :

$$\begin{aligned} \sigma(\omega)v_n^{(3)}(\omega) + (\tau(\omega) + (n+1)\sigma'(\omega))v_n''(\omega) + \left((n+1)\tau'(\omega) + \frac{n(n+1)}{2}\sigma'(\omega) + h(\omega) \right) v_n'(\omega) + \\ \left((n+1)h'(\omega) + \frac{n(n+1)}{2}\tau''(\omega) + \frac{n(n+1)(n-1)}{6}\sigma^{(3)}(\omega) \right) v_n(\omega) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

Dans l'Eq. (II.13), si le coefficient de $v_n(\omega)$ est égal à zéro, alors le polynôme $h_n(\omega)$ est définie comme :

$$h_n(\omega) = -\frac{n}{2}\tau'(\omega) + \frac{n(n-1)}{6}\sigma''(\omega) + C_n, \quad (\text{II.38})$$

C_n est la constante d'intégration.

Afin d'obtenir la solution aux valeurs propres du problème par la méthode ENU, les polynômes $h(\omega)$ et $h_n(\omega)$ sont égaux et $Y(\omega) = Y_n(\omega)$ est une solution particulière de degré n de l'Eq. (II.11). La fonction $\phi(\omega)$ est définie comme une dérivée logarithmique donnée dans l'Eq. (II.5), puis les spectres de fonctions propres peuvent être obtenus analytiquement.

II.4.2 Notion de dérivée fractionnaire conformable

Nous rappelons ici quelques notions importantes du calcul fractionnaire conformable nécessaire pour la formulation fractionnaire de la méthode de Nikiforov-Uvarov étendue. La dérivée fractionnaire n'est autre que la généralisation de la dérivée habituelle à un ordre non entier. Il existe dans la littérature plusieurs définitions de la notion de dérivée fractionnaire telles que la dérivée fractionnaire de Caputo, la dérivée fractionnaire de Riesz et la formulation de Riemann-Liouville. Le concept de dérivée fractionnaire selon Caputo[31] présente un grand intérêt dans le domaine des sciences fondamentales et appliquées car il s'applique davantage mieux à l'utilisation des conditions initiales ainsi que qu'à la gestion des conditions aux limites. Pour une fonction donnée $\psi(t)$ de la variable t , la dérivée fractionnaire de Caputo est définie de la manière suivante :

$${}^C D_t^\alpha \psi(t) = \int_{t_0}^t K_\alpha(t-y) \psi^{(n)}(y) dy, \quad t_0 < t, \quad (\text{II.39})$$

avec

$$K_\alpha(t-y) = \frac{(t-y)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}, \quad (\text{II.40})$$

où $\psi^{(n)}(t)$ représente la dérivée classique $n - i\text{ème}$ de la fonction $\psi(t)$, et $K_\alpha(t-y)$ est le kernel ou noyau de l'opérateur ${}^C D_t^\alpha$. En effet, le noyau $K_\alpha(t-y)$ est fixé pour un nombre réel α donné, et possède une singularité au point $t = y$. Dans le but de redéfinir le concept de dérivée fractionnaire utilisant des noyaux exponentiels lisses et non singuliers, Caputo et Fabrizio [64] ont proposé une nouvelle formule de dérivée fractionnaire de la forme

$$D_t^\alpha \psi(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \exp\left[-\frac{\alpha(t-y)}{1-\alpha}\right] \dot{\psi}(y) dy, \quad (\text{II.41})$$

où $M(\alpha)$ est une fonction de normalisation satisfaisant la condition $M(0) = M(1) = 1$. Récemment, une toute nouvelle formulation du concept de dérivée fractionnaire baptisée dérivée fractionnaire conformable a été proposée par Khalil et al.[32]. Pour une fonction donnée $\psi(t)$ la dérivée fractionnaire conformable d'ordre α est définie de la manière suivante

$$D_t^\alpha \psi(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(t - \epsilon t^{1-\alpha}) - \psi(t)}{\epsilon}, \quad 0 < t \quad (\text{II.42})$$

$$\psi(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(t), \quad (\text{II.43})$$

ou encore,

$$D^\alpha [\psi_{nl}(t^\alpha)] = t^{1-\alpha} \psi_{nl}(t^\alpha), \quad (\text{II.44})$$

$$D^\alpha [D^\alpha \psi_{nl}(t^\alpha)] = (1 - \alpha) t^{1-2\alpha} \psi'_{nl}(t^\alpha) + t^{2-2\alpha} \psi''_{nl}(t^\alpha), \quad (\text{II.45})$$

avec $0 < \alpha \leq 1$. Cette formulation est très simple et fournit une extension naturelle des opérateurs différentiels au domaine fractionnaire, c'est-à-dire aux opérateurs différentiels d'ordre non entier. De plus, l'opérateur différentiel fractionnaire conforme est linéaire et satisfait aux propriétés usuelles de la dérivée classique telles que la dérivée d'un produit, la règle de dérivation en chaîne et la dérivée du quotient de deux fonctions[33].

II.4.3 Formulation fractionnaire conformable de la méthode étendue de Nikiforov-Uvarov

Comme il a été mentionné précédemment, la méthode de Nikiforov-Uvarov (NU) est utilisée en mécanique quantique pour obtenir les fonctions propres et valeurs propres des équations de type Schrödinger. La méthode NU a été généralisée au cas étendu (ENU) en changeant les conditions aux limites de la méthode NU et est utilisée pour trouver des solutions de n'importe quelle équation différentielle du second ordre qui a au plus quatre points singuliers. Pour plus de détails, on peut se référer aux travaux[27],[71] et [72]. Dans la référence [33], la méthode de Nikiforov-Uvarov a été étendue au calcul non entier et appliquée sur quelques équations différentielles d'intérêt physique pour tester la validité du modèle. Dans la référence [73], la méthode ENU est généralisée au domaine fractionnaire conformable et appliquée sur l'équation de Schrödinger pour les systèmes quark-antiquark lourds. Le but de cette partie est de formuler le prolongement fractionnaire conforme de la méthode étendue de Nikiforov-Uvarov (CFENU) à partir de sa version classique formulée dans le cadre du calcul différentiel entier. L'équation de base de la méthode fractionnaire conformable étendue de Nikiforov-Uvarov, peut être écrite sous la forme [73]

$$D^\alpha [D^\alpha \psi(\omega)] + \frac{\bar{\tau}(\omega)}{\sigma(\omega)} D^\alpha \psi(\omega) + \frac{\bar{\sigma}(\omega)}{\sigma^2(\omega)} \psi(\omega) = 0, \quad (\text{II.46})$$

où $\bar{\tau}(\omega)$, $\sigma(\omega)$ et $\bar{\sigma}(\omega)$ sont des fonctions au plus de degré 2α , 3α , et 4α respectivement. En utilisant la propriété clé [33, 73] de la dérivée fractionnaire conforme donnée par les équations Eq.(II.44) et Eq.(II.45), on peut réécrire Eq.(II.46) comme

$$(1 - \alpha) \omega^{1-2\alpha} \psi'(\omega) + \omega^{2-2\alpha} \psi''(\omega) + \frac{\bar{\tau}(\omega)}{\sigma(\omega)} \omega^{1-\alpha} \psi'(\omega) + \frac{\bar{\sigma}(\omega)}{\sigma^2(\omega)} \psi(\omega) = 0, \quad (\text{II.47})$$

puis après un peu d'algèbre, Eq.(II.47) devient

$$\psi''(\omega) + \frac{(1-\alpha)\sigma(\omega)\omega^{-\alpha} + \bar{\tau}(\omega)}{\omega^{1-\alpha}\sigma(\omega)}\psi'(\omega) + \frac{\bar{\sigma}(\omega)}{\omega^{2-2\alpha}\sigma^2(\omega)}\psi(\omega) = 0. \quad (\text{II.48})$$

Ensuite, nous introduisons les expressions suivantes pour les paramètres fractionnaires

$$\bar{\tau}_f(\omega) = (1-\alpha)\sigma(\omega)\omega^{-\alpha} + \bar{\tau}(\omega) \quad (\text{II.49})$$

$$\sigma_f(\omega) = \omega^{1-\alpha}\sigma(\omega) \quad (\text{II.50})$$

$$\bar{\sigma}_f(\omega) = \bar{\sigma}(\omega). \quad (\text{II.51})$$

À partir de là, nous pouvons écrire la forme standard de l'équation de Nikiforov-Uvarov étendue généralisée au domaine fractionnaire conformable

$$\psi''(\omega) + \frac{\bar{\tau}_f(\omega)}{\sigma_f(\omega)}\psi'(\omega) + \frac{\bar{\sigma}_f(\omega)}{\sigma_f^2(\omega)}\psi(\omega) = 0. \quad (\text{II.52})$$

En posant $\psi(\omega) = \phi(\omega)Y(\omega)$, l'Eq.(II.52) se réduit à une équation de type hypergéométrique

$$\sigma_f(\omega)Y''(\omega) + \bar{\tau}_f(\omega)Y'(\omega) + h(\omega)Y(\omega) = 0 \quad (\text{II.53})$$

où $\phi(\omega)$ est solution de l'équation

$$\frac{\phi'(\omega)}{\phi(\omega)} = \frac{\pi_f(\omega)}{\sigma_f(\omega)}, \quad (\text{II.54})$$

et la fonction $h(\omega)$ est donnée par

$$h(\omega) = \pi_f'(\omega) + G(\omega). \quad (\text{II.55})$$

Dans l'équation (II.53), $Y(\omega)$ est une fonction de type hypergéométrique dont les polynômes vérifient une relation de type Rodrigues

$$Y_{\alpha,n}(\omega) = \frac{B_n}{\rho(\omega)} \frac{d^n}{d\omega^n} [\sigma_f^n(\omega)\rho(\omega)]. \quad (\text{II.56})$$

où la fonction poids $\rho(\omega)$ vérifie l'équation

$$(\sigma_f(\omega)\rho(\omega))' = \tau_f(\omega)\rho(\omega). \quad (\text{II.57})$$

La fonction $\pi_f(\omega)$ requise pour cette méthode est donnée par :

$$\pi_f(\omega) = \frac{\sigma'_f(\omega) - \bar{\tau}_f(\omega)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'_f(\omega) - \bar{\tau}_f(\omega)}{2}\right)^2 - \bar{\sigma}_f(\omega) + G(\omega)\sigma_f(\omega)}, \quad (\text{II.58})$$

où la fonction $\pi(\omega)$ est un polynôme de degré au plus égal à 2α . La fonction $h_n(\omega)$ est déterminée à partir de l'équation

$$h_n(\omega) = -\frac{n}{2}\tau'(\omega) - \frac{n(n-1)}{6}\sigma''_f(\omega) + C_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{II.59})$$

C_n étant une constante d'intégration et

$$\tau(\omega) = \bar{\tau}_f(\omega) + 2\pi_f(\omega). \quad (\text{II.60})$$

Afin d'obtenir la solution de l'équation aux valeurs propres du problème par la méthode fractionnaire conformable étendue de Nikiforov-Uvarov [33, 73], les polynômes $h(\omega)$ et $h_n(\omega)$ doivent être égaux et $Y(\omega) = Y_{\alpha,n}(\omega)$ est une solution particulière de degré n de l'équation (II.53).

II.4.4 L'équation bi-confluente de Heun

Pendant la résolution de l'équation de Schrödinger pour un potentiel donné, le système peut éventuellement présenter une relation de dépendance entre les paramètres du potentiel. L'équation bi-confluente de Heun permet justement de ressortir explicitement la constante de couplage C_n entre les paramètres du potentiel. Pour ce faire, cherchons les conditions pour lesquelles nous avons des solutions polynomiales sous la forme $Y(\omega) = \sum_{k=0}^n a_k \omega^k$. Cette classe d'équations contient un nombre très important d'équations différentielles telle que l'équation confluyente de Heun, l'équation bi-confluente de Heun et l'équation générale de Heun [66, 69], qui sont pour la plupart étudiées individuellement dans la littérature.

Considérons une forme particulière de l'équation bi-confluente de Heun dont la forme canonique est donnée par :

$$\frac{d^2 Y(\omega)}{d\omega^2} + \left(\frac{1 + \alpha'}{\omega} - \beta' - 2\omega \right) \frac{dY(\omega)}{d\omega} + \left((\gamma' - \alpha' - 2) - \frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] \frac{1}{\omega} \right) Y(\omega) = 0, \quad (\text{II.61})$$

où $Y(\omega) = \text{HeunB}(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \omega)$ sont les fonctions bi-confluentes de Heun. Supposons que les solutions de l'équations de l'Eq. (II.22) peuvent s'écrire comme :

$$Y(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k, \quad (\text{II.62})$$

et donc nous avons

$$\frac{dY(\omega)}{d\omega} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \omega^{k-1}, \quad (\text{II.63})$$

$$\frac{d^2Y(\omega)}{d\omega^2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) \omega^{k-2}, \quad (\text{II.64})$$

En remplaçant les Eq. (II.16), (II.17) et (II.18) dans l'Eq. (II.15), nous obtenons l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) \omega^{k-2} + \left(\frac{1+\alpha'}{\omega} - \beta' - 2\omega \right) \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \omega^{k-1} + \\ \left((\gamma' - \alpha' - 2) - \frac{1}{2} [\delta' + (1+\alpha')\beta'] \frac{1}{\omega} \right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega^k = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.65})$$

d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) \omega^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} (1+\alpha') a_k k \omega^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \beta' k \omega^{k-1} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \omega^k + \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\gamma' - \alpha' - 2) \omega^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\delta' + (1+\alpha')\beta'] a_k \omega^{k-1} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.66})$$

cette équation est encore équivalente à

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+2} (i+2)(i+1) \omega^i + \sum_{i=-1}^{\infty} (1+\alpha') a_{i+2} (i+2) \omega^i - \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+1} \beta' i \omega^i - 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i i \omega^i + \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i (\gamma' - \alpha' - 2) \omega^i - \frac{1}{2} \sum_{i=-1}^{\infty} [\delta' + (1+\alpha')\beta'] a_{i+1} \omega^i = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

où $i = k - 2$. En regroupant tous les termes du même ordre en ω , nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\{ (1+\alpha') a_1 - \frac{1}{2} [\delta' + (1+\alpha')\beta'] a_0 \right\} \omega^{-1} + \\ \left\{ 2(2+\alpha') a_2 - \left(\frac{1}{2} [\delta' + (1+\alpha')\beta'] + \beta' \right) a_1 + (\gamma' - \alpha' - 2) a_0 \right\} + \\ \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ (i+2)(i+2+\alpha') a_{i+2} - \left(\frac{1}{2} [\delta' + (1+\alpha')\beta'] + (i+1)\beta' \right) a_{i+1} + (\gamma' - \alpha' - 2 - 2i) a_i \right\} \omega^i = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.68})$$

Donc l'Eq. (II.68) donne les relations de récurrence pour les coefficients :

$$\begin{aligned}
(1 + \alpha')a_1 &= \frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta']a_0, \\
2(2 + \alpha')a_2 &= \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] + \beta'\right)a_1 - (\gamma' - \alpha' - 2)a_0, \\
(i + 2)(i + 2 + \alpha')a_{i+2} &= \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] + (i + 1)\beta'\right)a_{i+1} - (\gamma' - \alpha' - 2 - 2i)a_i, \quad i \geq 0.
\end{aligned} \tag{II.69}$$

Considérons un choix approprié de a_0 et posons $a_0 = 1$. Les relations précédentes de l'Eq. (II.69) s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
(1 + \alpha')a_1 &= \frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'], \\
2(1 + \alpha')(2 + \alpha')a_2 &= \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] + \beta'\right)\frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] - (1 + \alpha')(\gamma' - \alpha' - 2), \\
6(1 + \alpha')(2 + \alpha')(3 + \alpha')a_3 &= \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] + 2\beta'\right) \times \\
&\quad \left\{ \left(\frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] + \beta'\right)\frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'] - (\gamma' - \alpha' - 2) \right\} - \\
&\quad 2(2 + \alpha')(\gamma' - \alpha' - 4)\frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'].
\end{aligned} \tag{II.70}$$

En considérant les changements dans la notation, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
A_0 &= a_0 = 1, \\
A_1 &= (1 + \alpha')a_1 = \frac{1}{2}[\delta' + (1 + \alpha')\beta'], \\
A_2 &= 2(1 + \alpha')(2 + \alpha')a_2, \\
A_3 &= 3 \times 2 \times (1 + \alpha')(2 + \alpha')(3 + \alpha')a_3, \\
A_i &= i!(1 + \alpha')_i a_i, \quad i \geq 0,
\end{aligned} \tag{II.71}$$

où

$$(1 + \alpha')_i = \frac{\Gamma(i + 1 + \alpha')}{\Gamma(1 + \alpha')} = \begin{cases} (1 + \alpha')(2 + \alpha')(3 + \alpha') \dots (i + \alpha'), & i = 1, 2, 3, \dots \\ 1, & i = 0 \end{cases} \tag{II.72}$$

Supposons maintenant que α' n'est pas un entier négatif, les fonctions bi-confluentes de Heun

peuvent s'écrire :

$$HeunB(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \omega) = \sum_{k \geq 0}^{\infty} \frac{A_k}{(1 + \alpha')_k} \frac{\omega^k}{k!} \quad (\text{II.73})$$

où

$$A_{k+2} = \left\{ (1+k)\beta' + \frac{1}{2}[\delta' + (1+\alpha')\beta'] \right\} A_{k+1} - (1+k)(1+k+\alpha')(\gamma' - \alpha' - 2 - 2k)A_k, \quad k \geq 0. \quad (\text{II.74})$$

II.5 Application à la résolution de l'équation de modèle BHFC pour le PIQT

Afin d'appliquer les outils de l'analyse fractionnaire, nous partons de la version classique de l'équation de Schrödinger pour le hamiltonien de Bohr. Le phénomène de couplage dû au mouvement observé lors des déformations (forme sphérique, forme allongée, forme aplatie,...) et lors des interactions (forte, électromagnétique, faible), rend complexe la résolution de l'Eq. (II.10). À cet effet, nous nous proposons d'utiliser des techniques de séparation des variables afin de séparer les mouvements suivant les variables β et γ .

II.5.1 Techniques de séparations des différents types de mouvements des déformations nucléaires

Le potentiel $V(\beta, \delta)$ et la fonction d'onde $\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ étant quasiment séparables[16, 77], nous aboutissons à deux équations hypergéométriques correspondant respectivement aux mouvements de rotation et vibration dûs aux variables β et γ des nucléides. Pour cela, posons :

$$V(\beta, \gamma) = V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2} \quad (\text{II.75})$$

où $V_1(\beta)$ et $V_2(\gamma)$ sont les énergies potentielles suivant les coordonnées β et γ respectivement.

En substituant l'Eq. (II.75) dans l'Eq. (II.5), le Hamiltonien s'écrit

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2}. \quad (\text{II.76})$$

De même la fonction d'onde s'écrit

$$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) \quad (\text{II.77})$$

où $\chi(\beta)$ et $\eta(\gamma)$ représentent les fonctions d'onde suivant les coordonnées β et γ respectivement, tandis que $D(\theta_i)$ est la composante angulaire de la fonction d'onde, appelée fonction d'onde de

Wigner et qui est une fonction symétrique ayant pour expression :

$$D(\theta_i) = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)] \quad (\text{II.78})$$

ici, L est le nombre quantique du moment angulaire, α est la projection du moment quantique angulaire par rapport aux coordonnées fixes et $\nu = 1, 2, 3, \dots$. Dans la pratique, le découplage de l'équation du Hamiltonien n'est possible que pour les nucléides triaxiaux dont le mouvement de rotation a une énergie potentielle minimale (c'est-à-dire $\gamma = \frac{\pi}{6}$) [55]. Sinon, le découplage n'est plus possible parce que les différents mouvements décrits par les nucléides restent liés et donc la séparation des variables est quasi impossible.

Posons

$$W = \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)}. \quad (\text{II.79})$$

Puisque $\gamma = \frac{\pi}{6}$, alors :

$$W = \widehat{Q}_1^2 + 4\widehat{Q}_2^2 + 4\widehat{Q}_3^2. \quad (\text{II.80})$$

Le moment angulaire total, \widehat{Q} qui représente la somme des composantes des moments angulaires suivants les différents axes est

$$\widehat{Q} = \widehat{Q}_1^2 + \widehat{Q}_2^2 + \widehat{Q}_3^2 \quad (\text{II.81})$$

Compte tenu de l'expression de \widehat{Q} , l'Eq. (II.75) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} W &= 4(\widehat{Q}_1^2 + \widehat{Q}_2^2 + \widehat{Q}_3^2) - 3\widehat{Q}_1^2 \\ &= 4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2. \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

En tenant compte de toutes les expressions précédentes, l'Eq. (II.10) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} (4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2) \right] \chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) \\ + \left(V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2} \right) \chi(\beta)\eta(\gamma)\Theta(\theta_i) = E\chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) \end{aligned} \quad (\text{II.83})$$

En appliquant l'opérateur \widehat{Q}^2 [77] sur la fonction d'onde de Wigner, l'Eq. (II.73) s'écrit

$$\begin{aligned} \widehat{Q}^2 \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)] \\ = 4L(L+1) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [\Theta_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)]. \end{aligned} \quad (\text{II.84})$$

De même, en appliquant \widehat{Q}_1^2 sur la fonction de Wigner, l'Eq. (II.84) devient

$$\begin{aligned} & \widehat{Q}_1^2 \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)] \\ & = (\alpha^2 + L - \alpha) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)]. \end{aligned} \quad (\text{II.85})$$

L désigne le nombre quantique du moment angulaire et α la projection du moment quantique angulaire par rapport aux axes fixes.

Remplaçons maintenant les Eqs. (II.84) et (II.85) dans dans le troisième terme de l'opérateur Hamiltonien de l'Eq. (II.83) nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[-\frac{1}{4\beta^2} (4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2) \right] \chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) &= \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \chi(\beta)\eta(\gamma) \left(4\widehat{Q}^2 D(\theta_i) - 3\widehat{Q}_1^2 D(\theta_i) \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \chi(\beta)\eta(\gamma) \left(4L(L+1)D(\theta_i) - 3(\alpha^2 + L - \alpha)D(\theta_i) \right). \end{aligned} \quad (\text{II.86})$$

Multiplions maintenant l'Eq. (II.78) par $-\frac{2B}{\hbar^2}$ et posons

$$\begin{aligned} v_1(\beta) &= \frac{2B}{\hbar^2} V_1(\beta), \\ v_2(\beta) &= \frac{2B}{\hbar^2} V_2(\beta), \\ \xi &= \frac{2B}{\hbar^2} E. \end{aligned} \quad (\text{II.87})$$

Notons également que les effets de la projection de α sur les coordonnées fixes font introduire les nombres quantiques apparents n_ω [81,82] tels que $n_\omega = L - \alpha$ avec $L = n_\omega, n_\omega+2, n_\omega+4, \dots$ Pour $n_\omega = 0$, le nucléide est dans son état fondamental[81]. Après séparation des variables, nous obtenons deux équations différentielles, l'une en la variable γ et l'autre en la variable β :

$$\left[-\frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \omega(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \lambda \eta(\gamma), \quad (\text{II.88})$$

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{4L(1+L) - 3\alpha^2 + 4\lambda}{4\beta^2} + u(\beta) \right] \psi(\beta) = \xi \psi. \quad (\text{II.89})$$

L'Eq. (II.88) représente l'équation décrivant les mouvements de rotation γ tandis que les mouvements de vibration β sont décrites par l'Eq. (II.89). Les solutions de l'équation décrivant les mouvements de rotation des nucléides sont connues. En ce qui concerne les mouvements de vibration, qui ont pour rôle d'expliquer les différentes déformations observées des nucléides, un potentiel appelé, potentiel fractionnaire inverse à quatre termes [62] sera appliqué à cette équation : c'est la première fois que ce type de potentiel est utilisé pour expliquer les déformations des nucléides.

II.5.2 Solution de la partie γ

Il est bien connu que l'énergie potentielle ayant un minimum d'environ $\frac{\pi}{6}$ est celle convenable pour modéliser des noyaux triaxiaux formés par l'oscillation de la structure nucléaire[47, 63]. La surface d'énergie potentielle correspondante doit avoir un minimum autour de $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Aussi lorsque le nucléide est en rotation, il passe de la forme elliptique à la forme sphérique et vice-versa. Dans la suite, le potentiel harmonique peut être considéré par

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{2}\tilde{c}\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right)^2, \quad (\text{II.90})$$

où \tilde{c} est définie comme étant la rigidité du potentiel. En insérant cette équation dans l'Eq. (II.88) et en résolvant l'équation obtenue, nous obtenons l'énergie et les fonctions d'ondes normalisées[16, 47] respectivement

$$\lambda_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{2\tilde{c}}\left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2}\right), \quad \tilde{n}_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.91})$$

$$\eta_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n_{\tilde{\gamma}}}\sqrt{\pi}n_{\tilde{\gamma}}!}} H_{n_{\tilde{\gamma}}}\left((\tilde{c}/2)^{1/4}\tilde{\gamma}\right) \exp\left(-(\tilde{c}/2)^{1/2}\tilde{\gamma}^2/2\right), \quad (\text{II.92})$$

avec $\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{6}$, $n_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots$ est le nombre quantique de l'oscillateur, $H_{n_{\tilde{\gamma}}}$ est le polynôme de Hermite.

II.5.3 Solution de la partie β

Pour la partie β , nous considérons le potentiel fractionnaire inverse à quatre termes [62, ?] suivant

$$u(\beta) = \frac{d}{\beta^{1/2}} + \frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^{3/2}} + \frac{b}{\beta^2}, \quad (\text{II.93})$$

où a, b, c et d sont des coefficients constants qui sont déterminés par ajustement avec des données expérimentales. Le potentiel réduit est sans dimension puisqu'il s'agit du potentiel multiplié par $\frac{2B}{\beta^2}$ et donc les paramètres a, b, c et d sont sans unité. Ce potentiel est réduit à celui de Coulomb si $b = c = d = 0$, au potentiel inverse de racine carrée si $b = a = c = 0$, au potentiel de Kratzer si $d = c = 0$, au potentiel fractionnaire inverse à deux termes si $a = b = 0$. En considérant le potentiel inverse de quatre termes, l'Eq.(II.89) peut se réécrire comme

$$\left[\frac{1}{\beta^4} \frac{d}{d\beta} \beta^4 \frac{d}{d\beta} - \frac{4L(1+L) - 3\zeta^2 + 4\lambda}{4\beta^2} - u(\beta) \right] \psi(\beta) = -\xi\psi, \quad (\text{II.94})$$

en définissant le paramètre p comme : $p = \frac{4L(1+L) - 3\zeta^2 + 4\lambda}{4}$, l'équation (II.89) se met sous la forme

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{4}{\beta} \frac{d}{d\beta} - \frac{p}{\beta^2} - \frac{d}{\beta^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{\beta} - \frac{c}{\beta^{\frac{3}{2}}} - \frac{b}{\beta^2} + \xi \right] \psi(\beta) = 0. \quad (\text{II.95})$$

Il convient d'effectuer les transformations $\psi(\beta) = \beta^{-2}\phi(\beta)$ et $z = \sqrt{\gamma\beta}$, il est clair que si $\gamma > 0$, alors l'Eq.(II.94) devient

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \frac{4dz}{\gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{4a}{\gamma} - \frac{4(2+b+p)}{z^2} - \frac{4c}{\gamma^{\frac{1}{2}}z} + \frac{4z^2}{\gamma^2}\xi \right] \phi(z) = 0. \quad (\text{II.96})$$

En faisant ensuite la transformation $\phi(z) = z^{1/2}f(z)$, l'Eq.(II.95) devient

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \frac{1}{z^2} [B_1 z^4 - B_3 z^3 - B_4 z^2 - B_2 z - B_0] f(z) = 0, \quad (\text{II.97})$$

où

$$\begin{aligned} \text{I} : B_0 &= \frac{35}{4} + 4b + 4p, \\ \text{II} : B_1 &= \frac{4\xi}{\gamma^2}, \\ \text{III} : B_2 &= \frac{4c}{\gamma^{1/2}}, \\ \text{IV} : B_3 &= \frac{4d}{\gamma^{3/2}}, \\ \text{V} : B_4 &= \frac{4a}{\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{II.98})$$

À ce stade, nous introduisons la dérivée fractionnaire conformable de la manière suivante

$$D^\alpha [D^\alpha f(z)] + \frac{1}{z^{2\alpha}} [b_1 z^{4\alpha} - b_3 z^{3\alpha} - b_4 z^{2\alpha} - b_2 z^\alpha - b_0] f(z) = 0, \quad (\text{II.99})$$

où le potentiel donné par l'Eq.(II.93) et la dérivée ordinaire $\frac{\partial}{\partial z}$ ont été remplacés par leurs versions fractionnaires conformables,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &\longrightarrow D^\alpha \\ u(z^\alpha) &= \frac{d\sqrt{\gamma}}{z^\alpha} + \frac{a\gamma}{z^{2\alpha}} + \frac{c\gamma^{\frac{3}{2}}}{z^{3\alpha}} + \frac{b\gamma^2}{z^{4\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{II.100})$$

D'après la méthode fractionnaire conformable de Nikiforov-Uvarov étendue, nous avons $\bar{\tau} = 0$, $\sigma = z^\alpha$ et $\bar{\sigma} = B_1 z^{4\alpha} - B_3 z^{3\alpha} - B_4 z^{2\alpha} - B_2 z^\alpha - B_0$. L'Eq.(II.45) permet de transformer l'Eq.(II.97) en

$$\frac{d^2}{dz^2}f(z) + \frac{(1-\alpha)}{z} \frac{d}{dz}f(z) + \frac{1}{z} [B_1 z^{4\alpha} - B_3 z^{3\alpha} - B_4 z^{2\alpha} - B_2 z^\alpha - B_0] f(z) = 0 \quad (\text{II.101})$$

où nous avons $\bar{\tau}_f = 1 - \alpha$, $\sigma_f = z$ and $\bar{\sigma}_f = B_1 z^{4\alpha} - B_3 z^{3\alpha} - B_4 z^{2\alpha} - B_2 z^\alpha - B_0$. L'Eq.(II.58) permet de calculer la fonction $\pi_f(z^\alpha)$ sous la forme :

$$\pi_f(z^\alpha) = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - B_1 z^{4\alpha} + B_3 z^{3\alpha} + B_4 z^{2\alpha} + B_2 z^\alpha + B_0 + zG(z^\alpha)}. \quad (\text{II.102})$$

Nous supposons maintenant que la fonction $G(z^\alpha)$ est de la forme $G(z^\alpha) = Bz^{2\alpha-1} + Az^{\alpha-1}$, ce qui permet à la fonction sous la racine de devenir quadratique

$$\pi_f(z^\alpha) = \frac{\alpha}{2} \pm (Rz^{2\alpha} + Qz^\alpha + P) \quad (\text{II.103})$$

En comparant les Eqs.(II.102) et (II.103), on obtient les quatres ensemble de solutions suivantes pour les inconnues R, Q, P, B and A en fonction des paramètres B_0, B_1, B_2, B_3 and B_4

$$\begin{array}{l} \text{I :} \\ \text{II :} \\ \text{III :} \\ \text{IV :} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} R = -\sqrt{-B_1} \\ Q = -\frac{B_3}{2\sqrt{-B_1}} \\ P = -\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ B = -B_4 + \frac{B_3^2}{4\sqrt{-B_1}^2} + 2\sqrt{-B_1}\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ A = -B_2 + B_3 \frac{\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}}}{\sqrt{-B_1}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R = -\sqrt{-B_1} \\ Q = -\frac{B_3}{2\sqrt{-B_1}} \\ P = \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ B = -B_4 + \frac{B_3^2}{4\sqrt{-B_1}^2} - 2\sqrt{-B_1}\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ A = -B_2 - B_3 \frac{\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}}}{\sqrt{-B_1}} \end{array} \right. \quad (\text{II.104})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{-B_1} \\ Q = \frac{B_3}{2\sqrt{-B_1}} \\ P = -\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ B = -B_4 + \frac{B_3^2}{4\sqrt{-B_1}^2} - 2\sqrt{-B_1}\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ A = -B_2 - B_3 \frac{\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}}}{\sqrt{-B_1}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{-B_1} \\ Q = \frac{B_3}{2\sqrt{-B_1}} \\ P = \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ B = -B_4 + \frac{B_3^2}{4\sqrt{-B_1}^2} + 2\sqrt{-B_1}\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ A = -B_2 + B_3 \frac{\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}}}{\sqrt{-B_1}} \end{array} \right. \quad (\text{II.105})$$

Par intégration directe de l'Eq.(II.54), nous obtenons deux solutions pour la fonction ϕ , données par

$$\begin{array}{l} \text{I :} \\ \text{II :} \end{array} \phi_{1f}(z) = K_1 z^{\frac{\alpha}{2}-P} \exp \left[-\frac{1}{2\alpha} (Rz^{2\alpha} + 2Qz^\alpha) \right],$$

$$\phi_{2f}(z) = K_2 z^{\frac{\alpha}{2}+P} \exp \left[\frac{1}{2\alpha} (Rz^{2\alpha} + 2Qz^\alpha) \right]. \quad (\text{II.105})$$

Pour la suite, nous choisissons la solution (II.105).I. Cette solution est bien définie si $Q > 0$, $R > 0$ et $P < 0$ ainsi, l'ensemble III des paramètres nous fournit des solutions physiquement acceptables.

Puisque les fonctions $h_f(z)$ et $h_{nf}(z)$ doivent être égales, en se servant des Eqs.(II.55) et (II.59)

on obtient la relation suivante

$$Bz^{2\alpha-1} + Az^{\alpha-1} \pm (2\alpha Rz^{2\alpha-1} + \alpha Qz^{\alpha-1}) = C_n - n [\pm(2\alpha Rz^{2\alpha-1} + \alpha Qz^{\alpha-1})], \quad (\text{II.106})$$

où C_n est une constante d'intégration dont le rôle est de coupler les paramètres du potentiel. L'équation ci-dessus nous conduit à deux choix distincts ++ et --, qui sont donnés par

$$\text{I} : \begin{cases} 2\alpha R + B = -2n\alpha R \\ A + \alpha Q = C_n - n\alpha Q \end{cases} \quad \text{II} : \begin{cases} -2\alpha R + B = 2n\alpha R \\ A - \alpha Q = C_n + n\alpha Q \end{cases} \quad (\text{II.107})$$

En remplaçant les expressions de $\tau_f(z)$ et $h_f(z)$ et en se servant des Eqs.(II.106) et (II.107), l'Eq.(II.53) peut s'écrire sous la forme

$$zY''(z) + (1 \pm 2(Rz^{2\alpha} + Qz^{\alpha} + P)) Y'(z) + (C_n - n[\pm(2\alpha Rz^{2\alpha-1} + \alpha Qz^{\alpha-1})]) Y(z) = 0 \quad (\text{II.108})$$

Il y a deux possibilités d'écriture pour l'équation ci dessus

$$\text{I} : zY''(z) + (1 + 2P + 2Qz^{\alpha} + 2Rz^{2\alpha}) Y'(z) + (C_n - 2n\alpha Rz^{2\alpha-1} - n\alpha Qz^{\alpha-1}) Y(z) = 0,$$

$$\text{II} : zY''(z) + (1 - 2P - 2Qz^{\alpha} - 2Rz^{2\alpha}) Y'(z) + (C_n + 2n\alpha Rz^{2\alpha-1} + n\alpha Qz^{\alpha-1}) Y(z) = 0 \quad (\text{II.109})$$

En considérant le cas donné par l'Eq.(II.109), nous obtenons

$$Y''(z) + z^{\alpha-1} \left[\frac{1 - 2P}{z^{\alpha}} - 2Q - 2Rz^{\alpha} \right] Y'(z) + z^{2\alpha-2} \left[2n\alpha R + \frac{z^{1-\alpha} C_n + n\alpha Q}{z^{\alpha}} \right] Y(z) = 0 \quad (\text{II.110})$$

Pour résoudre l'équation ci-dessus, on part du changement de variable $x = \zeta z$ qui transforme l'Eq.(II.110) à la forme suivante

$$Y''(x) + x^{\alpha-1} \left[\frac{1 - 2P}{x^{\alpha}} - \frac{2Q}{\zeta^{\alpha}} - \frac{2R}{\zeta^{2\alpha}} x^{\alpha} \right] Y'(x) + x^{2\alpha-2} \left[\frac{2n\alpha R}{\zeta^{2\alpha}} + \frac{n\alpha Q \zeta^{-\alpha} + \zeta^{-1} C_n x^{1-\alpha}}{x^{\alpha}} \right] Y(x) = 0 \quad (\text{II.111})$$

Nous introduisons à ce stade une généralisation fractionnaire de l'équation biconfluente de Heun [27, 33], qui s'écrit sous la forme canonique suivante

$$Y''(t) + t^{\alpha-1} \left(\frac{1 + \alpha'}{t^{\alpha}} - \beta' - 2t^{\alpha} \right) Y'(t) + t^{2\alpha-2} \left((\gamma' - \alpha' - 2) - \frac{1}{2} [\delta' + (1 + \alpha') \beta' t^{1-\alpha}] \frac{1}{t^{\alpha}} \right) Y(t) = 0, \quad (\text{II.112})$$

où $y(t) = \text{HeunB}(\alpha', \beta', \gamma', \delta', t)$ sont les fonctions biconfluentes de Heun. En comparant les Eqs.(II.111) et (II.112), on obtient $\zeta = R^{\frac{1}{2\alpha}}$ et notre equation biconfluente de Heun s'écrit sous la forme

$$Y''(x) + \frac{1}{x^{\alpha-1}} \left[\frac{1 - 2P}{x^{\alpha}} - \frac{2Q}{\sqrt{R}} - 2x^{\alpha} \right] Y'(x) + \frac{1}{x^{2\alpha-2}} \left[2n\alpha - \frac{C_n x^{1-2\alpha}}{R^{\frac{1}{2\alpha}}} - \frac{nQ\alpha}{\sqrt{R} x^{\alpha}} \right] Y(x) = 0 \quad (\text{II.113})$$

En développant la fonction $Y(x)$ en série entière, on a

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{II.114})$$

et en introduisant cette expression dans l'Eq.(II.113), nous obtenons la relation de récurrence suivante pour les coefficients du développement en série entière

$$(n+2) [n+1 + (1-2P)x^{2-2\alpha}] a_{n+2} + \left(\frac{2Q}{\sqrt{R}}(n+1) - \frac{C_n}{R^{\frac{1}{2\alpha}}} x^{4-4\alpha} - \frac{nQ\alpha}{\sqrt{R}} x^{3-3\alpha} \right) a_{n+1} + (2n\alpha x^{2-2\alpha} - 2n) a_n = 0 \quad (\text{II.115})$$

Pour des grandes valeurs de n , la série doit être tronquée. Pour cela, nous devons évaluer les coefficients de a_{n+2} à zéro, ce qui requiert que les coefficients de a_{n+1} et a_n doivent être tous deux nuls [18]. Alors les équations de contraintes suivantes sont obtenues

$$\begin{aligned} \text{I} : [n+1 + (1-2P)x^{2-2\alpha}] &= 0, \\ \text{II} : [2n\alpha x^{2-2\alpha} - 2n] &= 0, \\ \text{III} : \left[\frac{2Q}{\sqrt{R}}(n+1) - \frac{C_n}{R^{\frac{1}{2\alpha}}} x^{4-4\alpha} - \frac{nQ\alpha}{\sqrt{R}} x^{3-3\alpha} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.116})$$

Le système ci-dessus n'étant pas solvable analytiquement, nous introduisons une valeur caractéristique de x et de la constante C_n comme

$$\begin{aligned} x = N &= \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2-2\alpha}}, \\ C_n &= \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left[(n+2) \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - n\alpha^{\frac{3}{2}} \right] Q. \end{aligned} \quad (\text{II.117})$$

En utilisant l'Eq.(II.117), la relation II de l'Eq.(II.107) et l'ensemble III des paramètres dans l'Eq.(II.104), la contrainte sur d et les énergies propres fractionnaires sont respectivement obtenues sous la forme

$$d = - \frac{2c \left[c^2 - a \left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^2 \right]}{\left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^3 \left(n+1 + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)} \quad (\text{II.118})$$

ensuite, la partie en variable β qui correspond aux valeurs propres d'énergies fractionnaires conforme est donnée par la relation suivante

$$\xi_{L,n,n\omega,n\tilde{\gamma}}^{(\alpha)} = - \frac{\left[c^2 - a \left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^2 \right]^2}{\left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^4 \left(n + 1 + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^2} \quad (\text{II.119})$$

et le paramètre γ est donné par :

$$\gamma = \frac{2c \left[c^2 - a \left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^2 \right]}{\left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^2 \left(n + 1 + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)} \quad (\text{II.120})$$

Les niveaux d'énergie de chaque nucléide sont obtenus en utilisant l'équation (II.119). Pour ce qui est des rapports d'énergie fractionnaires normalisés au premier état excité $E_{2^+_{0,0}}^{(\alpha)} - E_{0^+_{0,0}}^{(\alpha)}$, nous utilisons la relation suivante

$$R_{L,n,n\omega}^{(\alpha)} = \frac{E_{L^+_{n,n\omega}}^{(\alpha)} - E_{0^+_{0,0}}^{(\alpha)}}{E_{2^+_{0,0}}^{(\alpha)} - E_{0^+_{0,0}}^{(\alpha)}}. \quad (\text{II.121})$$

où $E_{L^+_{n,n\omega}}^{(\alpha)}$ représente l'énergie du noyau dans l'état $L^+_{n,n\omega}$

Dans l'Eq. (II.121), les énergies de niveaux dépendent des paramètres libres a , b , c et \tilde{c} qui sont choisis de tels sortes que les résultats théoriques soient les plus proches possibles des résultats expérimentaux. Suivant les valeurs du paramètre fractionnaire α , nous avons calculé dans le même tableau, le facteur qualité de mesure $\sigma^{(\alpha)}$. Ce facteur est la déviation moyenne des prédictions théoriques par rapport aux données expérimentales. Il est donnée par la relation suivante

$$\sigma^{(\alpha)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M \left(E_i(exp) - E_i^{(\alpha)}(th) \right)^2}{M}}. \quad (\text{II.122})$$

où $E_i(exp)$ et $E_i^{(\alpha)}(th)$ sont les énergies expérimentale et théorique de niveau i respectivement et M le nombre des énergies de niveau considéré.

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, il était question de trouver les solutions analytiques fractionnaires conformables de notre modèle à partir de l'équation hypergéométrique régissant les systèmes étudiés. Cette équation des mouvements des nucléides étant couplée par les différents paramètres du système, nous avons adopté des techniques mathématiques appropriées pour résoudre le problème. Parmi ces techniques :

– La méthode de séparation des variables, qui nous a permis d'obtenir deux équations du mouvement, indépendantes en fonction des paramètres du système à partir du Hamiltonien de Bohr de notre modèle ; l'une régissant des mouvements de rotation et qui est fonction du paramètre rotation γ et l'autre décrivant les mouvements de vibration des nucléides qui est une fonction du paramètre de vibration β .

– La méthode fractionnaire conformable de Nikiforov-Uvarov étendue nous a été utile dans la résolution de l'équation des mouvements de vibration du noyau. Elle nous a conduit à l'obtention des valeurs propres d'énergies fractionnaires, élargissant ainsi le spectre des valeurs propres d'énergies accessibles.

– L'équation fractionnaire bi-confluente de Heun, nous a été nécessaire pour compléter la fonction propre du système et pour déterminer la constante d'intégration C_n qui a pour effet de coupler les paramètres du potentiel.

Nous présentons dans la suite, les résultats théoriques de notre modèle. Une comparaison sera faite avec les résultats expérimentaux trouvés dans la littérature et d'autres modèles théoriques pertinents tels que le potentiel de Morse, le potentiel de Killingbeck plus Morse et le potentiel inverse à quatre termes classique. Ensuite, une discussion liée à la validation de notre modèle sera présentée.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

III.1 Introduction

La construction d'un modèle nucléaire ne repose pas toujours sur tous les noyaux présents dans la nature. Dans le chapitre précédent, dans un formalisme basé sur le calcul fractionnaire conformable, nous avons élaboré un modèle nucléaire pour la détermination des rapports d'énergie de la bande de l'état fondamental, de la bande γ et la bande β par rapport au premier état excité applicable aux noyaux déformés.

Dans ce chapitre, les valeurs théoriques de ces rapports d'énergie fractionnaires sont calculés ainsi que les transitions quadrupolaires électriques fractionnaires $B(E^{\alpha}2)$ pour les noyaux triaxiaux 192, 194 et 196 du platine. De plus, les rapports des moments de transitions quadrupolaires électriques fractionnaires $B(E^{\alpha}2)$, de ces noyaux ont également été calculés. Ainsi donc, nous présentons les résultats théoriques obtenus et nous les comparons avec les résultats expérimentaux et les valeurs théoriques des modèles proposés par Inci[16], Tchana[17] et Nga[27].

III.2 Présentation des résultats et discussion

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus pour les isotopes 192, 194 et 196 du platine. Pour les faibles bandes d'énergie, nous avons $n_{\tilde{\gamma}} = 0$. Ainsi, la bande de l'état fondamental est donnée en considérant $n = 0$ et $n_{\omega} = 0$. Pour la bande γ , $n = 0$ et $n_{\omega} = 1$ pour les valeurs impaires de L tandis que $n = 0$ et $n_{\omega} = 2$) pour les valeurs paires de L . La bande β quand à elle, est identifiée pour $n = 1$ et $n_{\omega} = 0$. Dans la suite du travail, l'abréviation "AK" indiquera les résultats obtenus pour le présent travail[47].

Le tableau 1 présente les paramètres libres utilisés dans ce travail. Il est à rappeler que a , b et c sont les paramètres du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes, tandis que \tilde{c} est un paramètre qui décrit la rigidité du potentiel harmonique. Le paramètre d du PFIQT est une contrainte car dépend de l'énergie de niveau du noyau (voir Eq. (II.110)). Les valeurs des paramètres du potentiel ont été calculées à partir d'un ajustement avec des données expérimentales.

L'Eq.(II.118) montre que le paramètre d du potentiel est une fonction de la valeur propre de l'énergie fractionnaire. Les prédictions de notre modèle sont comparées aux données expérimentales[78], potentiel classique à quatre termes de puissance inverse pour les isotopes du platine[27], le potentiel Morse[79] et le potentiel Morse plus Killingbeck[17]. La comparaison est effectuée à différentes valeurs du paramètre fractionnaire et les résultats sont répertoriés dans le tableau 3 pour l'isotope ^{192}Pt , Tableau 4 pour l'isotope ^{194}Pt et Tableau 5 pour l'isotope ^{196}Pt .

En physique nucléaire, l'obtention des données expérimentales dépend des phénomènes

TABLE 2 – Paramètres libres obtenus pour le potentiel fractionnaire inverse à quatre termes[27, 47].

Parameter	¹⁹² Pt	¹⁹⁴ Pt	¹⁹⁶ Pt
a	-183.390	-183.390	-183.390
b	47.420	47.420	47.420
c	-107.920	-107.920	-107.920
\bar{c}	1762.766	1561.738	754.171

étudiés. Pour les noyaux chauds, l'idéal serait de disposer, sur la totalité de l'espace entourant la cible, de détecteurs capables d'identifier et de mesurer la totalité des produits de réaction, c'est-à-dire un ensemble de noyaux et de neutrons. Cet objectif ne peut pas être totalement atteint pour des raisons assez évidentes de zones mortes (enveloppes de détecteurs, passage de la cible et du faisceau) mais aussi à cause de phénomènes d'interaction des particules avec la matière qui reposent essentiellement sur leur charge électrique ou la mise en mouvement de particules chargées. Si le dispositif expérimental favorise la détection des fragments chargés (noyaux), ce sera au détriment de celle des neutrons et inversement. Les deux dispositifs peuvent coexister mais au prix de couvertures angulaires réduites pour chacun. Le choix de favoriser la détection des fragments chargés sur une grande couverture spatiale avait conduit à la construction et l'installation, au Ganil, de multi-détecteurs dans une grande chambre à vide.

✠ Platine 192.

Le tableau 2 présente, les valeurs des rapports d'énergie de la bande de l'état fondamental ($0_g^+, 2_g^+, 4_g^+, 6_g^+, 8_g^+, 10_g^+$) et 12_g^+), de la bande γ ($2_\gamma^+, 3_\gamma^+, 4_\gamma^+, 5_\gamma^+, 6_\gamma^+, 7_\gamma^+, 8_\gamma^+$ et 9_γ^+) et la bande β ($0_\beta^+, 2_\beta^+$ et 4_β^+ et 6_β^+) par rapport au premier état excité de l'isotope 192 du platine.

D'après le tableau 2, on peut voir que nos résultats sont meilleurs que ceux du potentiel de Morse plus Killingbeck [17], du potentiel de Morse[79] pour $\alpha = 0,6$ 0,9 et améliorés par rapport ceux du PIQT classique [27] pour $\alpha = 0.60.7$. Les valeurs de $\sigma^{(\alpha)}$ diminuent lorsque α tend vers des valeurs inférieures. En effet, pour illustrer l'impacte du domaine fractionnaire sur les états déformés du platine 192, nous avons représentés sur la Fig.4, les variations des énergies fractionnaires pour la bande de l'état fondamental et la bande β de l'isotope 192 Pt. L'énergie du système est tracée en fonction du nombre quantique de moment cinétique L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α . On observe que l'énergie augmente de manière monotone quand le nombre quantique L augmente. Pour les valeurs du paramètre α proche de 1 (cas classique) les courbes se rapprochent. Alors que pour les faibles valeurs de α les courbes sont décalées vers le bas par rapport à la courbe $\alpha = 1$. Pour le cas particulier $\alpha = 0.5$ le potentiel obtenu

$$V(\beta^\alpha) = \frac{a}{\beta^{1/2}} + \frac{d}{\beta} + \frac{c}{\beta^{1/4}} + \frac{b}{\beta^{3/4}} \tag{III.1}$$

possède les valeurs énergétiques les plus faibles. Au niveau de chaque bande prise individuellement, nous avons pu faire les remarques suivantes.

Bande de l'état fondamental

TABLE 3 – Comparaison des valeurs théoriques dans la bande de l'état fondamental, la bande γ et la bande β des rapports d'énergie fractionnaire normalisée (au premier niveau excité de la bande de l'état fondamental à l'unité) avec les données expérimentales[78] et celles obtenues pour le potentiel de Morse[79], le potentiel de Morse plus Killingbeck[17] et le potentiel inverse de quatre termes[27] pour l'isotope du ^{192}Pt en considérant plusieurs valeurs de α .

L_{band}	Exp.	esM	esKM	Nga.	AK($\alpha = 0.9$)	AK($\alpha = 0.8$)	AK($\alpha = 0.7$)	AK($\alpha = 0.6$)
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.479	2.475	2.598	2.488	2.519	2.519	2.513	2.500
6_g^+	4.314	4.317	3.597	4.267	4.386	4.385	4.361	4.312
8_g^+	6.377	6.492	4.836	6.148	6.427	6.426	6.367	6.251
10_g^+	8.624	9.001	6.285	7.992	8.499	8.497	8.388	8.177
2_γ^+	1.935	1.907	2.307	1.917	1.932	1.932	1.929	1.923
3_γ^+	2.910	2.364	2.743	2.763	2.803	2.803	2.795	2.778
4_γ^+	3.795	4.815	3.877	4.720	4.871	4.870	4.839	4.777
5_γ^+	4.682	5.060	4.016	4.939	5.106	5.106	5.071	5.001
6_γ^+	5.905	7.875	5.635	7.207	7.607	7.605	7.520	7.354
7_γ^+	6.677	7.647	5.503	7.040	7.419	7.417	7.337	7.179
8_γ^+	8.186	11.203	7.545	9.349	10.074	10.071	9.913	9.611
0_β^+	3.776	3.567	5.177	2.805	2.840	2.967	3.545	3.344
2_β^+	4.547	4.568	5.617	3.625	3.705	3.819	4.352	4.139
4_β^+	6.110	6.087	6.338	4.851	5.012	5.119	5.579	5.340
σ		0.988	0.935	0.705	0.835	0.811	0.694	0.643

- Les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques du potentiel de Morse sauf dans l'état $2_g^+(2_{0,0})$; les valeurs expérimentales sont supérieures aux valeurs théoriques du potentiel de Killingbeck plus Morse sauf dans l'état $2_g^+(2_{0,0})$ alors que les valeurs expérimentales sont supérieures aux valeurs théoriques de PIQT classique et PIQT fractionnaire sauf dans l'état $2_g^+(2_{0,0})$.

- Les valeurs théoriques de PKM sont inférieures aux valeurs théoriques de PFIQT sauf dans l'état $2_g^+(2_{0,0})$. - Dans l'ensemble de la bande, les valeurs de PIQT fractionnaire sont proches de celles de PIQT classique lorsque le paramètre fractionnaire α est proche de 1.

Bande γ

- Les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques du potentiel de Morse sauf dans les états $2_\gamma^+(2_{0,2})$ et $3_\gamma^+(3_{0,1})$; les valeurs expérimentales sont supérieures aux valeurs théoriques du potentiel de Killingbeck plus Morse sauf dans les états $2_\gamma^+(2_{0,2})$ et $4_\gamma^+(4_{0,2})$ alors que les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques de PIQT classique et PIQT fractionnaire sauf dans les états $2_\gamma^+(2_{0,2})$ et $3_\gamma^+(3_{0,1})$.

- Les valeurs théoriques de PIQT classiques sont inférieures aux valeurs théoriques de PIQT fractionnaire lorsque α prend de faibles valeurs. - Dans l'ensemble de la bande, les valeurs de

TABLE 4 – Comparaison des valeurs théoriques dans la bande de l'état fondamental, la bande γ et la bande β des rapports d'énergie fractionnaire normalisée (au premier niveau excité de la bande de l'état fondamental à l'unité) avec les données expérimentales[78] et celles obtenues pour le potentiel de Morse[79], le potentiel de Morse plus Killingbeck[17] et le potentiel inverse de quatre termes[27] pour l'isotope du ^{194}Pt en considérant plusieurs valeurs de α .

L_{band}	Exp.	esM	esKM	Nga.	AK($\alpha = 0.9$)	AK($\alpha = 0.8$)	AK($\alpha = 0.7$)	AK($\alpha = 0.6$)
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.470	2.445	2.486	2.484	2.516	2.516	2.510	2.497
6_g^+	4.279	4.280	4.488	4.252	4.374	4.374	4.349	4.298
8_g^+	6.392	6.509	6.728	6.114	6.400	6.379	6.339	6.221
10_g^+	8.671	9.148	9.073	8.932	8.450	8.448	8.338	8.122
2_γ^+	1.894	1.888	1.836	1.916	1.930	1.930	1.927	1.921
3_γ^+	2.809	2.716	2.788	2.757	2.799	2.799	2.791	2.773
4_γ^+	3.743	4.784	5.016	4.701	4.857	4.856	4.824	4.760
5_γ^+	4.563	5.034	5.272	4.9018	5.090	5.090	5.054	4.983
6_γ^+	5.863	7.956	8.053	7.158	7.568	7.567	7.480	7.310
7_γ^+		7.717	7.841	6.994	7.382	7.381	7.279	7.137
8_γ^+	8.186	11.503	10.920	9.265	10.004	10.001	9.841	9.533
0_β^+	3.858	2.349	3.716	2.774	2.816	2.933	3.509	3.311
2_β^+	4.603	3.350	4.717	3.591	3.672	3.784	4.314	4.104
4_β^+	5.817	4.881	6.254	4.811	4.975	5.079	5.535	5.298
σ		1.202	0.989	0.717	0.834	0.810	0.691	0.646

PIQT fractionnaire sont proches de celles de PIQT classique lorsque le paramètre fractionnaire α est proche de 1.

Bande β

- Les valeurs expérimentales des états $0_\beta^+(0_{1,0})$ et $4_\beta^+(4_{1,0})$ sont supérieures et inférieure dans l'état $2_\beta^+(2_{1,0})$ aux valeurs théoriques du potentiel de Morse ; les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques du potentiel de Killingbeck plus Morse ; les valeurs expérimentales sont largement supérieures aux valeurs théoriques de PIQT classique et PIQT fractionnaire lorsque $\alpha \rightarrow 1$.

- Toutes les valeurs théoriques du potentiel de Morse sont inférieures aux valeurs théoriques du potentiel de Killingbeck plus Morse ; les valeurs théoriques du potentiel de Morse sont largement supérieures aux valeurs théoriques du PIQT classique et du PIQT fractionnaire.

- Dans l'ensemble de la bande, les valeurs de PIQT fractionnaire sont proches de celles de PIQT classique lorsque le paramètre fractionnaire α est proche de 1.

Nous constatons aussi que la comparaison entre les facteurs qualité de mesure nous donne $\sigma_{Ahmadou} < \sigma_{Nga} < \sigma_{Tchana} < \sigma_{Inci} < 1$.

En plus, on constate que les données expérimentales n'ont pas prévu les rapports d'énergie

TABLE 5 – Comparaison des valeurs théoriques dans la bande de l'état fondamental, la bande γ et la bande β des rapports d'énergie fractionnaire normalisée (au premier niveau excité de la bande de l'état fondamental à l'unité) avec les données expérimentales[78] et celles obtenues pour le potentiel de Morse[79], le potentiel de Morse plus Killingbeck[17] et le potentiel inverse de quatre termes[27] pour l'isotope du ^{196}Pt en considérant plusieurs valeurs de α .

L_{band}	Exp.	esM	esKM	Nga.	AK($\alpha = 0.9$)	AK($\alpha = 0.8$)	AK($\alpha = 0.7$)	AK($\alpha = 0.6$)
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.465	2.500	2.321	2.463	2.500	2.500	2.493	2.477
6_g^+	4.290	4.440	3.440	4.170	4.312	4.312	4.294	4.225
8_g^+	6.333	6.767	4.823	50930	6.255	6.254	6.189	6.054
10_g^+	8.558	9.489	6.432	7.609	8.189	8.197	8.068	7.826
2_γ^+	1.936	1.923	1.993	1.905	1.923	1.923	1.919	1.912
3_γ^+	2.854	2.795	2.483	2.729	2.778	2.778	2.768	2.748
4_γ^+	3.636	4.969	3.752	4.598	4.778	4.777	4.742	4.667
5_γ^+	4.525	5.230	3.907	4.804	5.003	5.002	4.963	4.880
6_γ^+	5.644	8.263	5.711	6.899	7.362	7.360	7.266	7.073
7_γ^+		8.016	5.564	6.747	7.186	7.185	7.096	6.913
8_γ^+	7.730	11.900	7.825	8.816	9.634	9.631	9.460	9.118
0_β^+	3.192	3.512	4.931	2.613	2.557	2.764	3.225	3.146
2_β^+	3.828	4.542	5.427	3.418	3.506	3.608	4.120	4.925
4_β^+	4.818	6.140	6.235	4.604	4.784	4.879	5.313	5.085
σ		1.450	1.075	0.602	0.766	0.765	0.739	0.652

de niveau $12_g^+(12_{0,0})$, $9_\gamma^+(9_{0,1})$ et $6_\beta^+(6_{1,0})$ alors qu'on aurait pu continuer la série.

✠ Platine 194

Bande de l'état fondamental

- Les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques du PM sauf dans l'état $2_g^+(2_{0,0})$; toutes les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques de PKM; les valeurs expérimentales sont supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT sauf dans l'état $2_g^+(2_{0,0})$.

- La plupart des valeurs théoriques de PM sont inférieures aux valeurs théoriques de PKM; de même, toutes les valeurs théoriques de PM sont supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT sauf dans l'état $2_g^+(2_{0,0})$.

- Les valeurs théoriques de PKM sont toutes supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT.

Bande γ

- Les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques du PM sauf dans les états $2_\gamma^+(2_{0,2})$ et $3_\gamma^+(3_{0,1})$; les valeurs expérimentales sont supérieures aux valeurs théoriques de PKM sauf dans les états $2_\gamma^+(2_{0,2})$ et $3_\gamma^+(3_{0,1})$; les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques de PFIQT sauf dans les états $2_\gamma^+(2_{0,2})$.

- Les valeurs théoriques de PM s'alternent avec les valeurs théoriques de PKM ; les valeurs théoriques de PM sont supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT sauf dans les états $2_{\gamma}^{+}(2_{0,2})$ et $3_{\gamma}^{+}(3_{0,1})$.

- Les valeurs théoriques de PKM sont supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT sauf dans l'état $2_{\gamma}^{+}(2_{0,2})$.

Bande β

- Toutes les valeurs expérimentales sont supérieures aux valeurs théoriques du PM ; les valeurs expérimentales sont supérieures aux valeurs théoriques de PKM sauf dans l'état $6_{\beta}^{+}(6_{1,0})$; les données expérimentales sont largement supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT.

- Toutes les valeurs théoriques de PM sont inférieures aux valeurs théoriques de PKM ; les valeurs théoriques $0_{\beta}^{+}(0_{1,0})$ et $2_{\beta}^{+}(2_{1,0})$ de PM sont inférieures et celle $4_{\beta}^{+}(4_{1,0})$ inférieure aux valeurs théoriques de PFIQT.

- Toutes les valeurs théoriques de PKM sont largement au-dessus des valeurs théoriques de PFIQT.

Nous constatons aussi que la comparaison entre les facteurs qualité de mesure nous donne $\sigma_{PFIQT} < \sigma_{PKM} < \sigma_{PM} < 1$.

En plus, on constate que les données expérimentales n'ont pas prévu les rapports d'énergie de niveau $12_{\beta}^{+}(12_{0,0})$, $7_{\gamma}^{+}(7_{0,1})$, $9_{\gamma}^{+}(9_{0,1})$ et $6_{\beta}^{+}(6_{1,0})$ alors qu'on aurait pu continuer la série.

✠ Platine 196

Bande de l'état fondamental

- Les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques du PM ; toutes les valeurs expérimentales sont supérieures aux valeurs théoriques de PKM ; les valeurs expérimentales sont supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT.

- Les valeurs théoriques de PM sont toutes supérieures aux valeurs théoriques de PKM ; de même, toutes les valeurs théoriques de PM sont supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT.

- Les valeurs théoriques de PKM sont toutes inférieures aux valeurs théoriques de PFIQT.

Bande γ

- Les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques du PM sauf dans les états $2_{\gamma}^{+}(2_{0,2})$ et $3_{\gamma}^{+}(3_{0,1})$; les valeurs expérimentales s'alternent aux valeurs théoriques de PKM ; les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques de PFIQT sauf dans les états $2_{\gamma}^{+}(2_{0,2})$ et $3_{\gamma}^{+}(3_{0,1})$.

- Les valeurs théoriques de PM sont supérieures aux valeurs théoriques de PKM sauf dans l'état $2_{\gamma}^{+}(2_{0,2})$; toutes les valeurs théoriques de PM sont supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT.

- Les valeurs théoriques de PKM sont inférieures aux valeurs théoriques de PFIQT sauf dans l'état $2_{\gamma}^{+}(2_{0,2})$.

Bande β

- Toutes les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques du PM ; les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques de PKM ; les données expérimentales sont supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT sauf dans l'état $4_{\beta}^{+}(4_{1,0})$.

- Toutes les valeurs théoriques de PM sont inférieures aux valeurs théoriques de PKM ; les valeurs théoriques de PM sont supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT.

- Toutes les valeurs théoriques de PKM sont supérieures aux valeurs théoriques de PFIQT.

Nous remarquons aussi que la comparaison entre les facteurs qualité de mesure nous donne $\sigma_{PFIQT} < \sigma_{PKM} < \sigma_{PM} < 1$.

En plus, on constate que les données expérimentales n'ont pas prévu les rapports d'énergie de niveau $12_g^+(12_{0,0}), 7_\gamma^+(7_{0,1}), 9_\gamma^+(9_{0,1})$ et $6_\beta^+(6_{1,0})$ alors qu'on aurait pu continuer la série.

III.2.1 Ratios intra et inter-bande

TABLE 6 – Comparaison des valeurs des taux de transitions B(E2) fractionnaires en considérant les bandes $g \rightarrow g, \gamma\text{-pair} \rightarrow g, \gamma\text{-impair} \rightarrow g, \gamma\text{-pair} \rightarrow \gamma\text{-pair}, \gamma\text{-impair} \rightarrow \gamma\text{-impair}, \gamma\text{-impair} \rightarrow \gamma\text{-pair}, \beta \rightarrow \beta$ pour le potentiel inverse à quatre termes fractionnaire conforme, les données expérimentales[48] et ceux de esM[79], esMK[17], Nga[27] et Hammad[28] pour l'isotope ^{192}Pt .

Transition	^{192}Pt					Le présent travail (^{192}Pt)				
	Exp.	esM	esKM	Nga	Z(5)-CFK	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.563	1.563	0.725	1.464	1.576	1.464	1.465	1.465	1.466	1.466
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	1.224	2.213	0.988	1.968	2.350	1.970	1.971	1.973	1.973	1.974
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$		2.735	1.225	2.391	3.238	2.394	2.397	2.400	2.402	2.403
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$		3.163	1.434	2.824		2.831	2.836	2.840	2.843	2.846
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$	1.910	1.586	0.440	1.495	1.596	0.747	0.748	0.748	0.748	0.748
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$		0.350	1.265	0.310	0.369	0.310	0.310	0.311	0.311	0.311
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$				0.176	0.233	0.176	0.176	0.177	0.177	0.177
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$				0.118		0.118	0.118	0.118	0.118	0.118
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.670	1.236	0.143	1.113	1.297	1.059	1.059	1.059	1.060	1.060
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$				0.882	1.184	0.803	0.803	0.803	0.804	0.804
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$				0.771	1.203	0.669	0.670	0.670	0.670	0.671
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$		0.734	1.553	0.656	0.746	0.328	0.328	0.328	0.329	0.329
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$		1.081	1.739	0.937	1.297	0.938	0.940	0.941	0.941	0.942
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$		1.715	1.890	1.561	2.623	1.564	1.568	1.570	1.573	1.574
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$		1.250	1.259	1.101	1.338	1.102	1.103	1.104	1.104	1.105
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$		1.943	1.472	1.699	2.410	1.702	1.704	1.706	1.708	1.709
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	1.790	2.147	0.431	1.952	2.218	1.954	1.955	1.956	1.956	1.957
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$				1.198	1.643	2.401	2.404	2.407	2.409	2.410
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$				1.233	2.030	2.472	2.477	2.482	2.485	2.488
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$				1.135		1.534	1.239		0.704	0.835
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$				2.007		4.452		2.082	2.086	2.459

Le modèle hamiltonien de Bohr fractionnaire conforme a été utilisé pour calculer les taux de transition $B(E^{(\alpha)}2)$ pour les isotopes 192, 194 et 196 de Platine. Les transitions quadrupolaires

TABLE 7 – Comparaison des valeurs des taux de transitions B(E2) fractionnaires en considérant les bandes $g \rightarrow g$, γ -pair $\rightarrow g$, γ -impair $\rightarrow g$, γ -pair $\rightarrow \gamma$ -pair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -impair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -pair, $\beta \rightarrow \beta$ pour le potentiel inverse à quatre termes fractionnaire conforme, les données expérimentales[48] et ceux de esM[79], esMK[17], Nga[27] et Hammad[28] pour l'isotope ^{194}Pt .

Transition	^{194}Pt					Le présent travail (^{194}Pt)				
	Exp.	esM	esKM	Nga	Z(5)-CFK	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.73	1.630	1.530	1.466	1.579	1.466	1.467	1.467	1.467	1.467
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	1.370	2.334	1.914	1.974	2.361	1.975	1.977	1.978	1.979	1.980
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$	1.02	2.835	2.147	2.402	3.264	2.402	2.408	2.411	2.413	2.415
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$	0.69	3.187	2.256	2.843		2.850	2.855	2.860	2.863	2.866
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$	1.810	1.653	0.936	1.496	1.599	0.748	0.748	0.749	0.749	0.749
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.406	0.370	2.419	0.311	0.371	0.311	0.311	0.311	0.312	0.312
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$				0.177	0.234	0.177	0.177	0.177	0.177	0.178
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$				0.118		0.119	0.119	0.119	0.119	0.119
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$		1.305	0.289	1.115	1.303	1.116	1.117	0.118	0.118	0.119
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$				0.886	1.194	0.888	0.889	0.890	0.891	0.891
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$				0.777	0.218	0.778	0.780	0.781	0.782	0.783
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	0.428	0.776	3.013	0.658	0.748	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$		1.112	2.917	0.941	1.308	0.943	0.944	0.945	0.946	0.947
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$		1.697	2.765	1.572	2.657	1.576	1.580	1.583	1.585	1.586
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$		1.316	2.376	1.105	1.344	1.106	1.107	1.107	1.108	1.108
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$		1.994	2.466	1.708	2.432	1.711	1.713	1.716	1.717	1.718
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$		2.264	0.883	1.956	2.226	1.958	1.959	1.960	1.961	1.961
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$				1.204	1.657	2.413	2.416	2.419	2.421	2.423
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$				1.242	2.057	2.491	2.497	2.502	2.505	2.508
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$				1.137		1.540	1.048		0.699	0.833
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$				2.018		4.471			2.071	2.456

observées ici sont les suivantes : état fondamental \rightarrow état fondamental, γ -pair \rightarrow état fondamental, γ -impair \rightarrow état fondamental, γ -pair $\rightarrow \gamma$ -pair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -impair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -pair, $\beta \rightarrow \beta$. En plus, il est important de savoir que les résultats des tableaux 5,6 et 7 ont été obtenus en utilisant les règles de sélections imposées par les coefficients de Clebsch-Gordon (CCG) c'est-à-dire que les transitions permises sont celles qui vérifient l'équation $\Delta\zeta = \pm 2$. Pour évaluer les transitions permises, on calcule la valeur de $\Delta\zeta = \zeta_f - \zeta_i$. Les paramètres fixes pour chaque niveau sont :

- l'état fondamental s'identifie par $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 0, 0)$;
- la bande γ pour les valeurs paires de L s'obtient avec $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 2, 0)$;
- la bande γ pour les valeurs impaires de L s'obtient avec $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 1, 0)$;
- la bande β s'identifie pour $(n, n_\omega, n_\gamma) = (1, 0, 0)$.
- Les transitions $(4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0})$ et $(7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2})$ sont des exemples de transitions permises par

TABLE 8 – Comparaison des valeurs des taux de transitions B(E2) fractionnaires en considérant les bandes $g \rightarrow g$, γ -pair $\rightarrow g$, γ -impair $\rightarrow g$, γ -pair $\rightarrow \gamma$ -pair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -impair, γ -impair $\rightarrow \gamma$ -pair, $\beta \rightarrow \beta$ pour le potentiel inverse à quatre termes fractionnaire conforme, les données expérimentales[48] et ceux de esM[79], esMK[17], Nga[27] et Hammad[28] pour l'isotope ^{196}Pt .

Transition	^{196}Pt					Le présent travail (^{196}Pt)				
	Exp.	esM	esKM	Nga	Z(5)-CFK	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.490	1.540	0.814	1.475	1.665	1.476	1.476	1.477	1.477	1.477
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	0.950	2.141	1.105	2.004	2.682	2.006	2.008	2.009	2.011	2.011
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$	1.090	2.597	1.365	2.464	4.055	2.469	2.473	2.476	2.478	2.480
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$		2.955	1.590	2.950		2.958	2.965	2.970	2.974	2.977
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$		1.564	0.491	1.505	1.679	0.753	0.753	0.753	0.753	0.754
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.420	0.339	1.411	0.315	0.420	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	0.394			0.181	0.285	0.181	0.181	0.181	0.181	0.182
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$				0.122		0.122	0.122	0.123	0.123	0.123
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$		1.200	0.160	1.131	1.458	1.132	1.133	1.134	1.135	1.135
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$				0.910	1.476	0.911	0.913	0.914	0.915	0.916
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$				0.807	1.672	0.809	0.811	0.812	0.814	0.815
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	0.430	0.716	1.737	0.664	0.817	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	1.208	1.022	1.934	0.967	1.646	0.968	0.970	0.971	0.972	0.973
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$		1.589	2.089	1.639	3.830	1.644	1.649	1.652	1.655	1.657
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$		1.205	1.407	1.123	1.544	1.124	1.125	1.126	1.127	1.127
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$		1.834	1.637	1.758	3.119	1.762	1.765	1.768	1.770	1.771
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$		2.094	0.483	1.979	2.444	1.981	1.982	1.984	1.984	1.985
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$				1.238	2.081	2.482	2.486	2.490	2.493	2.495
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$				1.296	2.935	2.601	2.608	2.614	2.618	2.621
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$				1.146		1.569			0.675	0.821
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$				2.078		4.580	3.050		2.017	2.437

la règle de sélection des CCG. En effet, $\alpha_i=L_i-(n_\omega)_i$ et $\alpha_f=L_f-(n_\omega)_f$

- $(4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}) : \varsigma_i=4 - 0=4, \varsigma_f=2 - 0=2$ et on trouve $\Delta\varsigma=2$;
- $(7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2}) : \varsigma_i=7 - 1=6, \varsigma_f=6 - 2=4$ et on trouve $\Delta\varsigma=2$.

• Les transitions $(0_{1,0} \rightarrow 2_{0,2})$ et $(3_{0,1} \rightarrow 2_{0,0})$ sont des exemples de transitions non permises par la règle de sélection des CCG. En effet, $\varsigma_i=L_i-(n_\omega)_i$ et $\varsigma_f=L_f-(n_\omega)_f$

- $(0_{1,0} \rightarrow 2_{0,2}) : \varsigma_i=0 - 0=0, \varsigma_f=2 - 2=0$ et on trouve $\Delta\varsigma=0$;
- $(3_{0,1} \rightarrow 2_{0,0}) : \varsigma_i=2 - 0=2, \alpha_f=3 - 1=2$ et on trouve $\Delta\varsigma=0$.

La transition d'une bande f à une bande i est dite non permise si l'énergie de transition est insuffisante ou très grande pour se retrouver au niveau indiqué.

En effet, les résultats de notre modèle sont repertoriés dans les tableaux 5,6,7. Les prédictions du présent travail ont été comparées à ceux des modèles théoriques exactement solubles disponibles, puisque le nombre de données expérimentales disponibles sur les taux de transition B(E2)

est trop faible. On voit que les résultats obtenus pour les taux de transition B(E2) de la bande de l'état fondamental, et les bandes γ sont proches des résultats des références [15, 25, 26, 47, 49]. Lorsque $\alpha \rightarrow 1$, nos résultats sont très proches de la limite classique de Nga et al.[25]. Dans la référence [26], Hammad et al., ont étudié le Hamiltonien de Bohr fractionnaire $Z(5)$ conforme avec le potentiel de Kratzer. Ils ont obtenu les taux de transition B(E2) pour les noyaux atomiques ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt en considérant $\alpha = 0.9$. Nos résultats sont proches de ceux des prédictions de Morse[47]. Alors que pour de grandes valeurs de α , nos résultats sont très proches de ceux de la référence [25]. De plus, pour les transitions à faible énergie dans la bande de l'état fondamental et la bande γ , nos résultats sont proches de ceux de la référence [26]. Dans les transitions de bande β des isotopes ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt , nos résultats sont en bon accord avec ceux de référence [25] lorsque $\alpha = 0.5$, et sont proches des données expérimentales disponibles. Comme mentionné précédemment, la valeur particulière $\alpha = 0.5$ correspond au potentiel ayant les meilleures valeurs d'énergie. Pour le cas de ce potentiel particulier pour lequel le paramètre fractionnaire est $\alpha = 0.5$, nos résultats sont très proches de ceux des références [54, 47, 25]. Comparés aux résultats de Hammad et al.[26], nos résultats sont meilleurs. Cela est dû au fait que le potentiel inverse à quatre termes est un potentiel déjà assez riche dans sa forme, puisqu'il comprend le potentiel de Kratzer et le potentiel fractionnaire inverse à deux termes. Ce qui montre que notre modèle est bien applicable aux isotopes ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt du platine.

III.2.2 Triaxialité des nucléides

La figure 16 représente l'allure du PFIQT dans l'état fondamental ($n = 0, n_\omega = 0$) pour $L = 4$ les isotopes ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt du platine, grâce aux paramètres libres a, b, c et l'énergie dans l'état. Ces courbes ont l'allure d'une gaussienne renversée c'est-à-dire qu'elles confinent. De ces courbes, on constate que pour une déformation β fixée, l'interaction entre nucléons est plus forte dans l'isotope 196 du platine, moins forte dans l'isotope 194 du platine et faible dans l'isotope 192 du platine. Ces courbes montrent que les isotopes 192, 194 et 196 du platine subissent des déformations mais dont l'énergie vérifie l'équation du mouvement du système.

La figure 20 donne l'évolution du PFIQT dans la bande de son état fondamental ($n = 0, n_\omega = 0$), prenant en compte les paramètres libres du tableau 3, pour l'isotope ^{192}Pt et en fonction du paramètre déformation β et du nombre quantique du moment magnétique.

Ces courbes qui ont la forme d'une gaussienne renversée montrent que :

- Le potentiel garde la même allure quelque soit l'état du noyau,
- le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$.
- le potentiel confine plus lorsque $0.1 < \beta < 0.2$,
- plus le nombre quantique du moment magnétique augmente, plus le puits du potentiel est profond et plus l'interaction entre nucléons devient faible.

Cette variation du potentiel est due au fait que le paramètre d du PFIQT est une contrainte fonction de l'énergie c'est-à-dire fonction de l'état du noyau atomique.

La figure 21 donne l'évolution du PFIQT dans la bande de son état fondamental ($n = 0, n_\omega = 0$), prenant en compte les paramètres libres du tableau 3, pour l'isotope ^{194}Pt et en fonction

du paramètre déformation β et du nombre quantique du moment magnétique.

Ces courbes qui ont la forme d'une gaussienne renversée montrent que :

- Le potentiel garde la même allure quelque soit l'état du noyau,
- le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$.
- le potentiel confine plus lorsque $0.1 < \beta < 0.2$,
- plus le nombre quantique du moment magnétique augmente, plus le puits du potentiel est profond et plus l'interaction entre nucléons devient faible.

Cette variation du potentiel est due au fait que le paramètre d du PFIQT est une contrainte fonction de l'énergie c'est-à-dire fonction de l'état du noyau atomique.

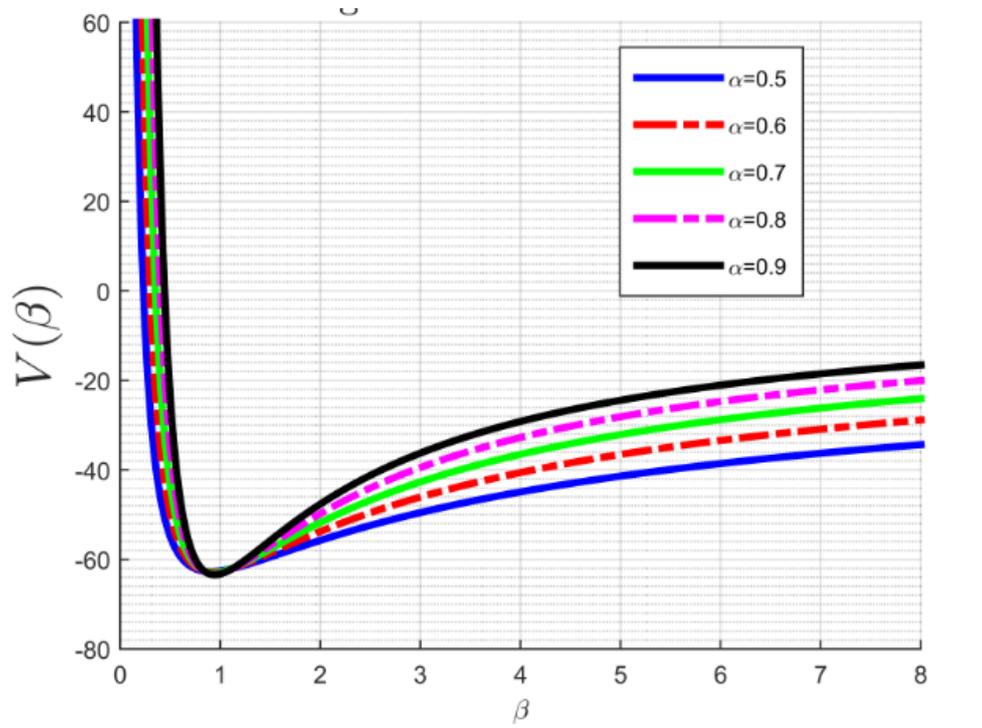


FIGURE 10 – Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande de l'état fondamental ($n = 0, n_{\omega} = 0$) de l'isotope ^{196}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].

Les figures 1,3,5 donnent l'évolution du PIQT fractionnaire dans la bande de son état fondamental ($n = 0, n_{\omega} = 0$), prenant en compte les paramètres libres du tableau 3, respectivement pour les isotopes de $^{192,194,196}Pt$ et en fonction du paramètre de déformation β et du nombre quantique du moment magnétique, pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire.

Ces courbes qui ont la forme d'une gaussienne renversée montrent que :

- Le potentiel garde la même allure quelque soit l'état du noyau,
- le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$.
- le potentiel confine plus lorsque $0.15 < \beta < 0.25$,
- plus le nombre quantique du moment magnétique augmente, plus le puits du potentiel est profond et plus l'interaction entre nucléons devient faible.

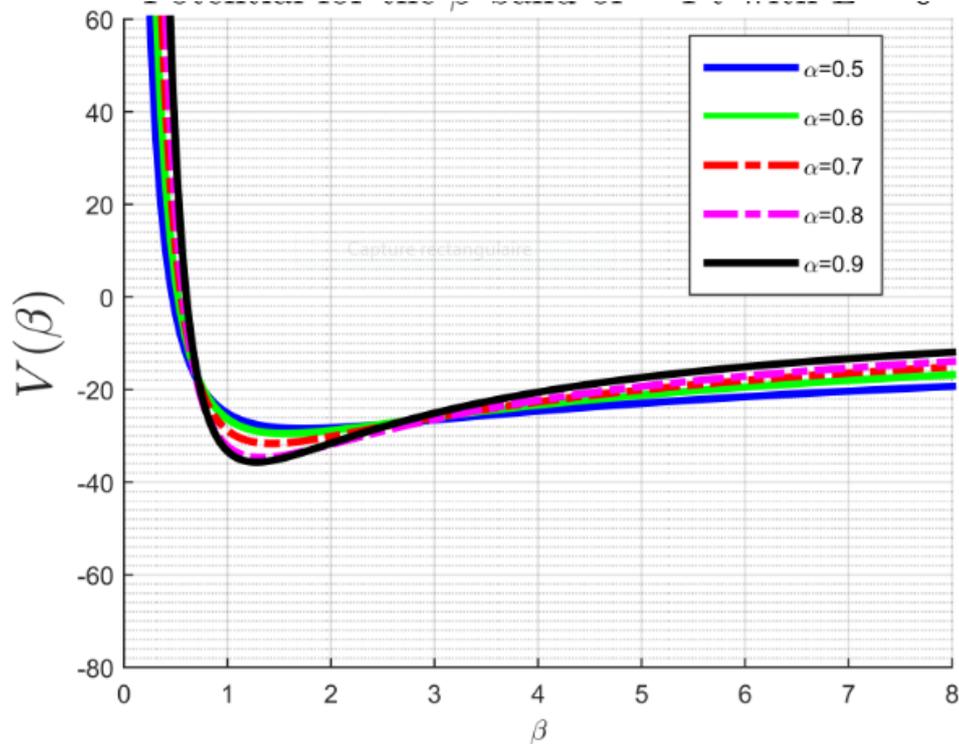


FIGURE 11 – Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande β ($n = 1$, $n_\omega = 0$) de l'isotope ^{192}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].

Cette variation du potentiel est due au fait que le paramètre d du PFIQT est une contrainte fonction de l'énergie c'est-à-dire fonction de l'état du noyau atomique.

Les figures 2,4,6 donnent l'évolution du PIQT fractionnaire dans la bande γ c'est-à-dire ($n = 0$, $n_\omega = 1$) pour les valeurs de L impaires et ($n = 0$, $n_\omega = 2$) pour les valeurs de L paires, prenant en compte les paramètres libres du tableau 3, respectivement pour les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ et en fonction du paramètre déformation β et du nombre quantique du moment magnétique pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire.

Ces courbes qui ont la forme d'une gaussienne renversée montrent que :

- Le potentiel garde la même allure quelque soit l'état du noyau,
- le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$.
- le potentiel confine plus lorsque $0.1 < \beta < 0.2$,
- plus le nombre quantique du moment magnétique augmente, plus le puit du potentiel est profond et plus l'interaction entre nucléons devient faible.

Cette variation du potentiel est due au fait que le paramètre d du PFIQT est une contrainte fonction de l'énergie c'est-à-dire fonction de l'état du noyau atomique.

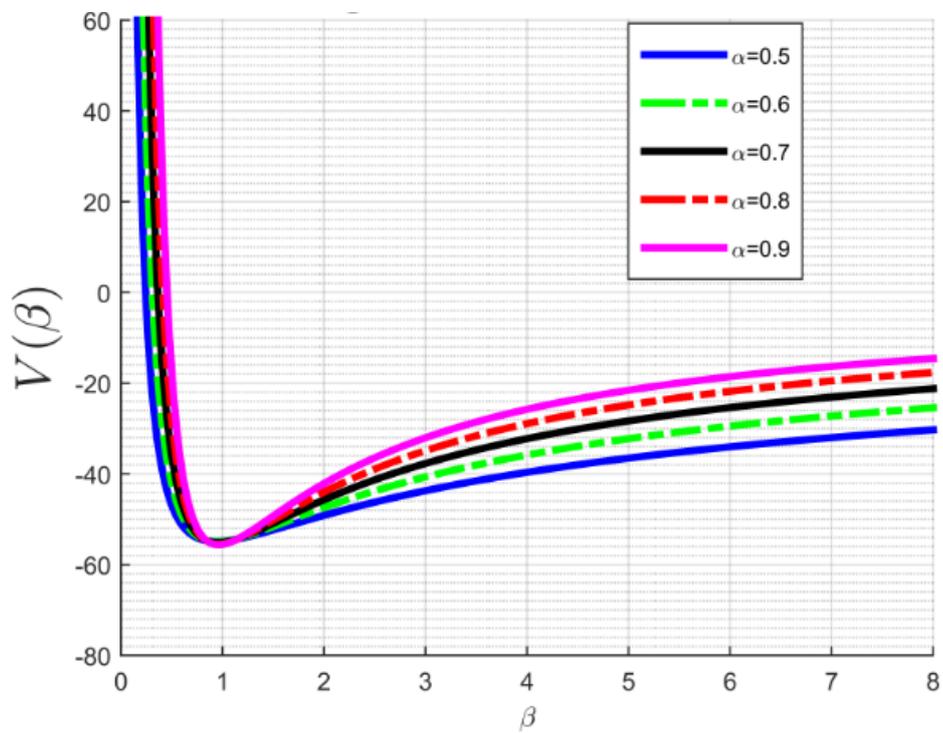


FIGURE 12 – Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande de l'état fondamental ($n = 0, n_\omega = 0$) de l'isotope ^{196}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].

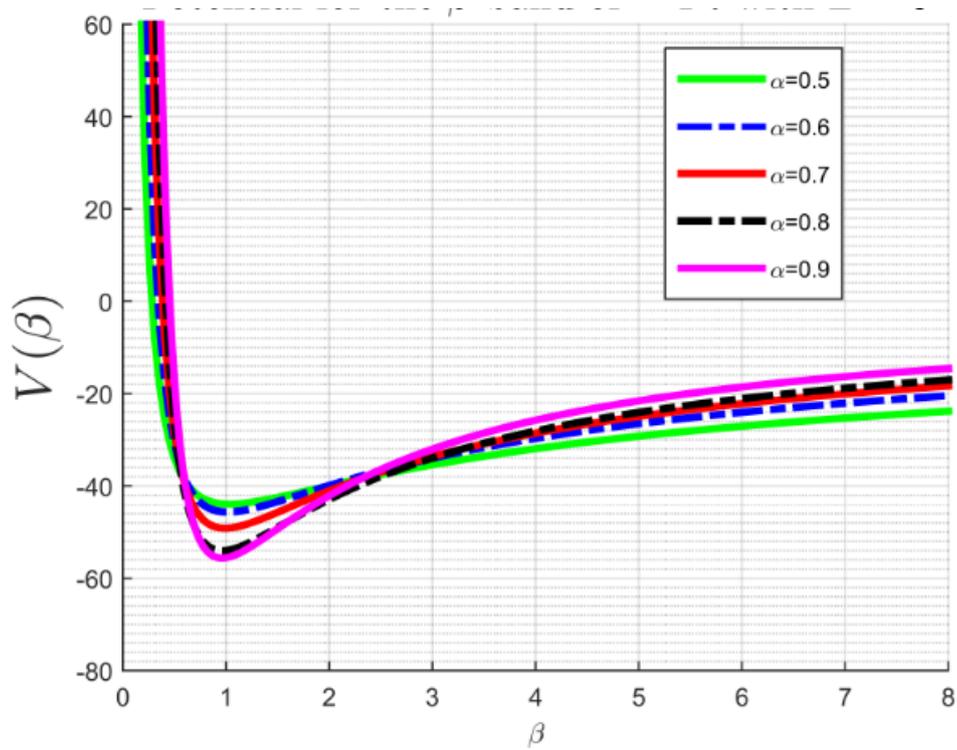


FIGURE 13 – Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande β ($n = 1$, $n_\omega = 0$) de l'isotope ^{194}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].

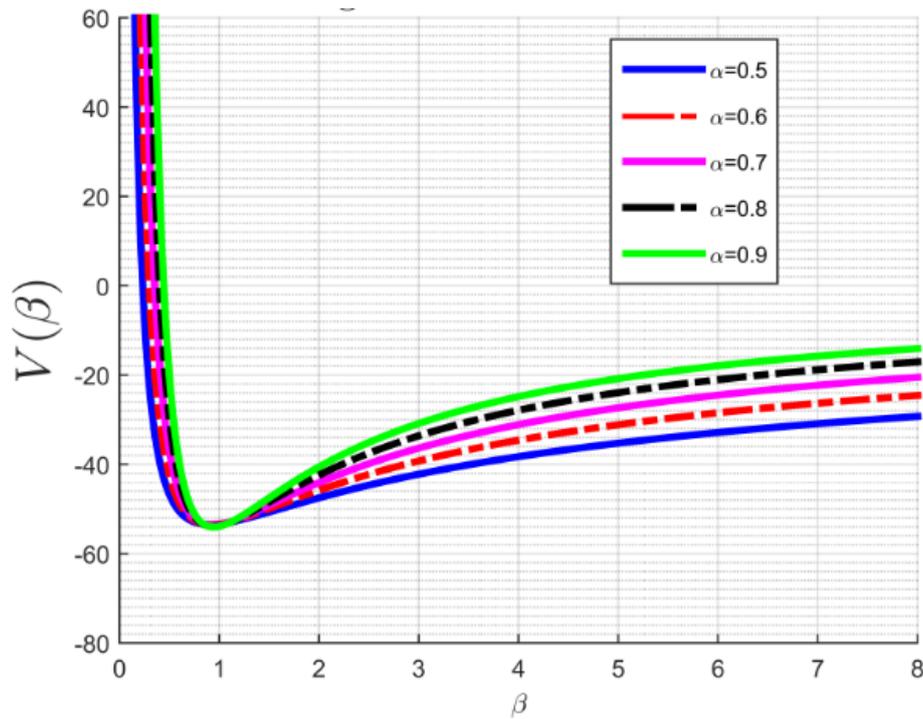


FIGURE 14 – Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande de l'état fondamental ($n = 0, n_{\omega} = 0$) de l'isotope ^{196}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].

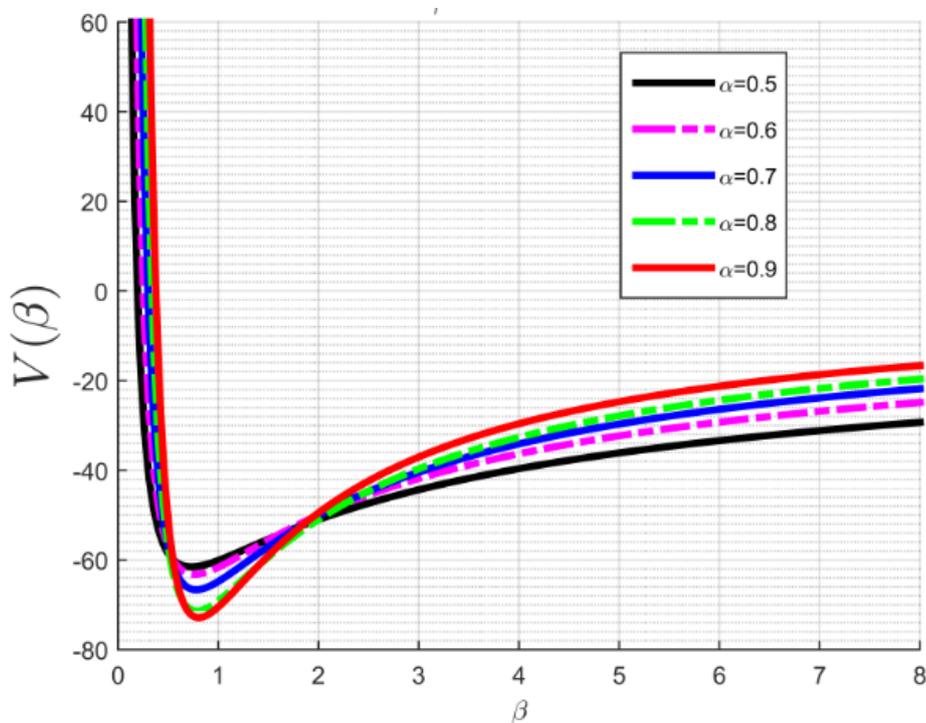


FIGURE 15 – Variations du potentiel fractionnaire inverse à quatre termes dans la bande β ($n = 1, n_{\omega} = 0$) de l'isotope ^{196}Pt , prenant en compte les paramètres libres du tableau 1, pour différentes valeurs de α [47].

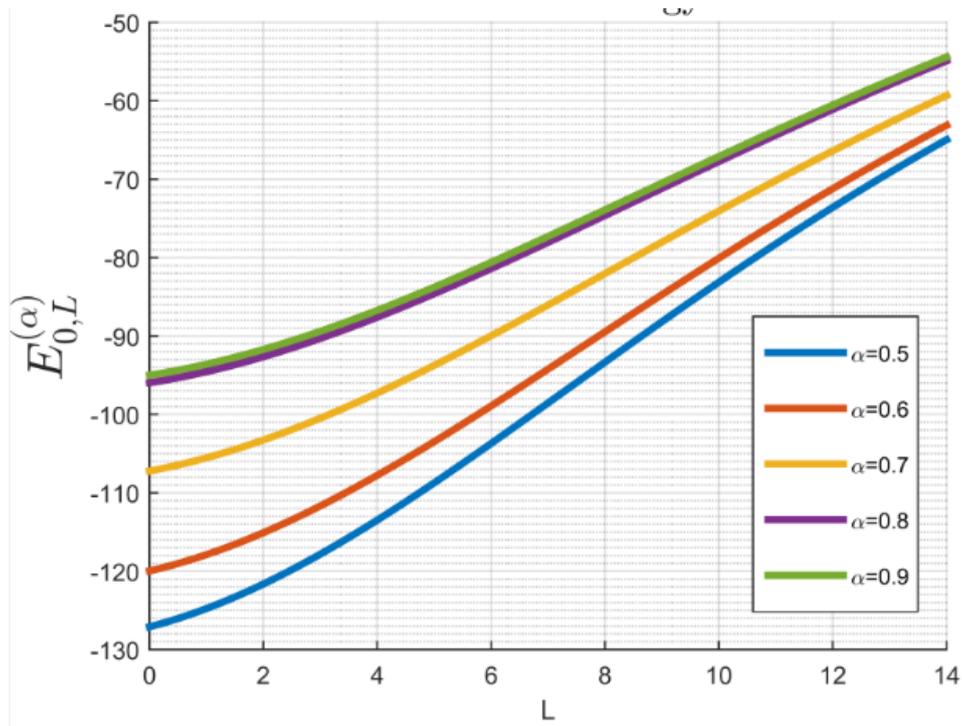


FIGURE 16 – Energie fractionnaire de l’isotope de ^{192}Pt dans la bande de l’état fondamental, en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].

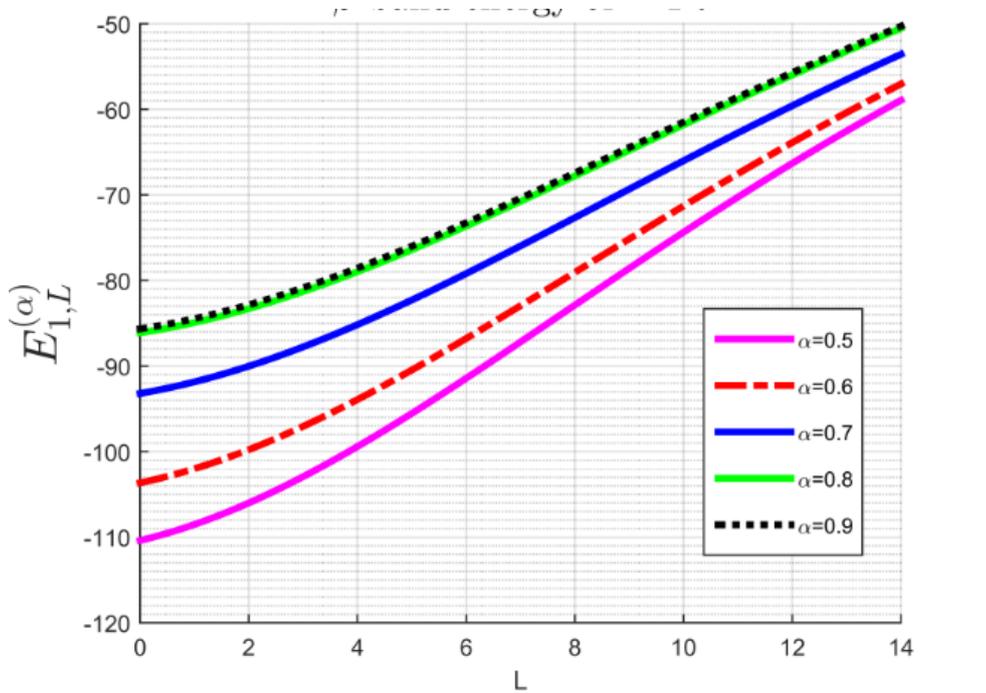


FIGURE 17 – Energie fractionnaire de l’isotope de ^{192}Pt dans la bande β , en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].

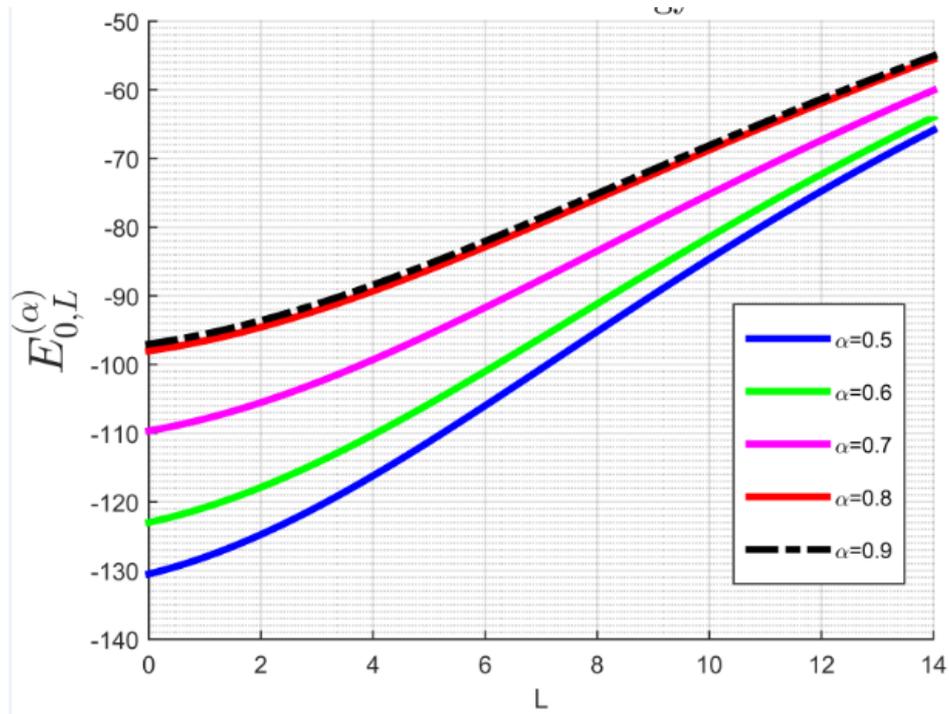


FIGURE 18 – Energie fractionnaire de l’isotope de ^{194}Pt dans la bande de l’état fondamental, en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].

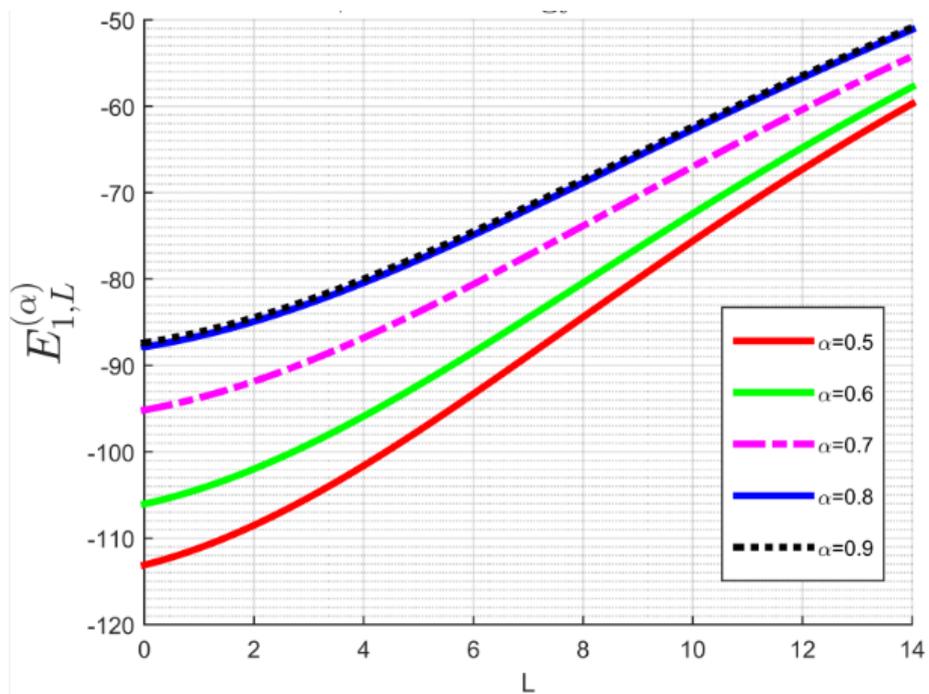


FIGURE 19 – Energie fractionnaire de l’isotope de ^{194}Pt dans la bande β , en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].

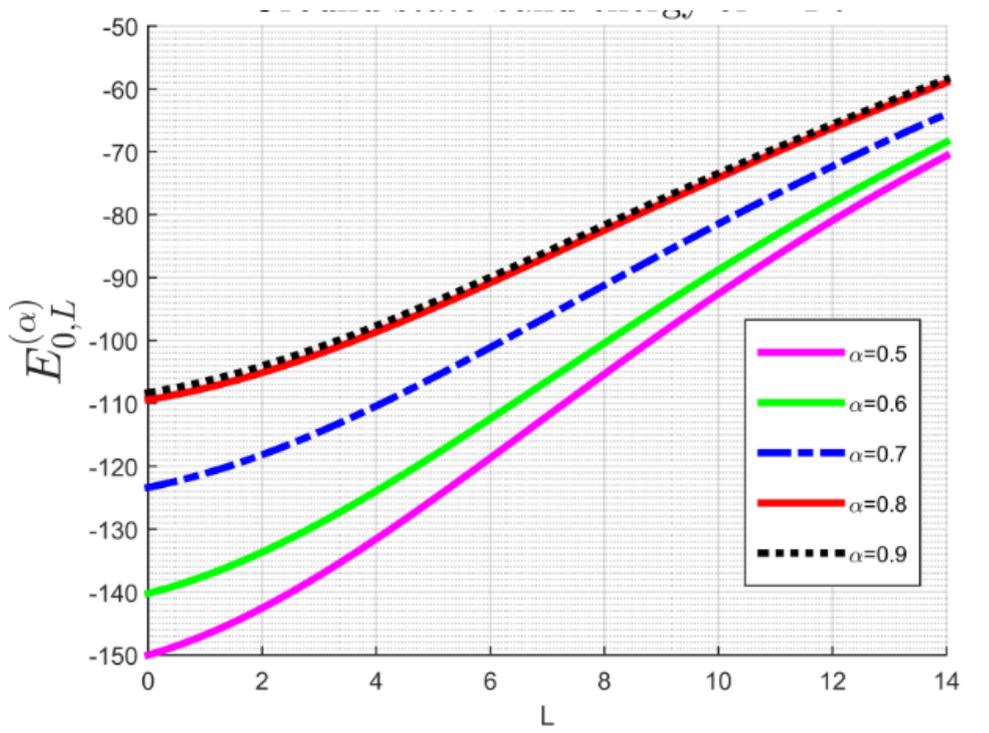


FIGURE 20 – Energie fractionnaire de l’isotope de ^{196}Pt dans la bande de l’état fondamental, en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].

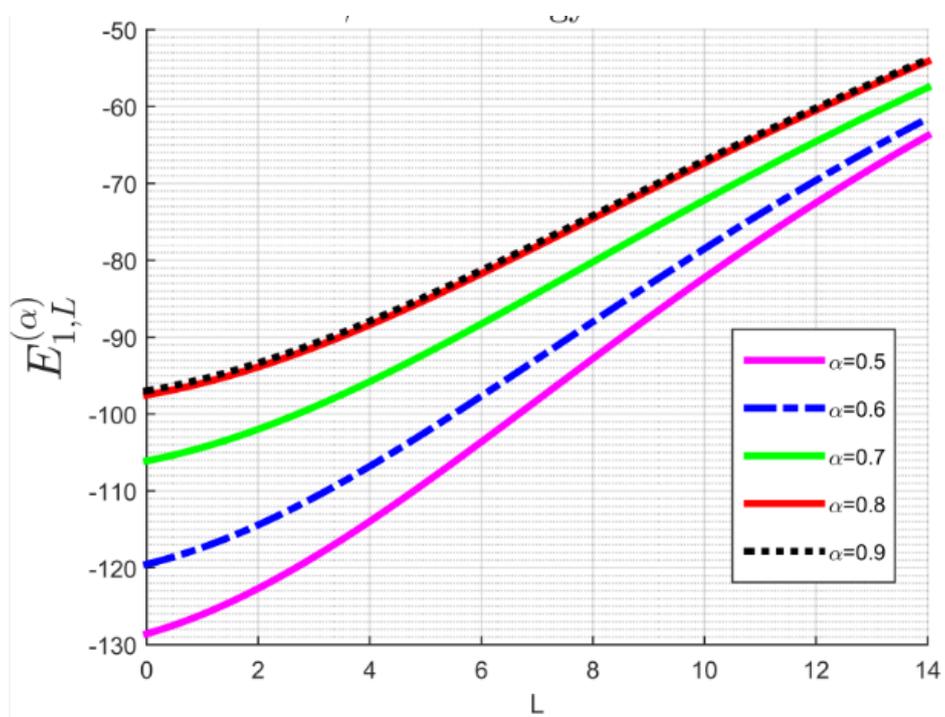


FIGURE 21 – Energie fractionnaire de l’isotope de ^{196}Pt dans la bande β , en fonction du moment angulaire L pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire α [47].

La figure 4 donne l'évolution du PFIQT dans la bande γ c'est-à-dire ($n = 0, n_\omega = 1$) pour les valeurs de L impairs et ($n = 0, n_\omega = 2$) pour les valeurs de L pairs, prenant en compte les paramètres libres du tableau 3, pour l'isotope ^{194}Pt et en fonction du paramètre déformation β et du nombre quantique du moment magnétique.

Ces courbes qui ont la forme d'une gaussienne renversée montrent que :

- Le potentiel garde la même allure quelque soit l'état du noyau,
- le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$.
- le potentiel confine plus lorsque $0.1 < \beta < 0.2$,
- plus le nombre quantique du moment magnétique augmente, plus le puit du potentiel est profond et plus l'interaction entre nucléons devient faible.

Cette variation du potentiel est due au fait que le paramètre d du PFIQT est une contrainte fonction de l'énergie c'est-à-dire fonction de l'état du noyau atomique.

La figure 25 donne l'évolution du PFIQT dans la bande γ c'est-à-dire ($n = 0, n_\omega = 1$) pour les valeurs de L impairs et ($n = 0, n_\omega = 2$) pour les valeurs de L pairs, prenant en compte les paramètres libres du tableau 3, pour l'isotope ^{196}Pt et en fonction du paramètre déformation β et du nombre quantique du moment magnétique.

Ces courbes qui ont la forme d'une gaussienne renversée montrent que :

- Le potentiel garde la même allure quelque soit l'état du noyau,
- le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$.
- le potentiel confine plus lorsque $0.1 < \beta < 0.2$,
- plus le nombre quantique du moment magnétique augmente, plus le puits du potentiel est profond et plus l'interaction entre nucléons devient faible. En effet, ceci est lié au fait que le terme de barrière centrifuge dépend du nombre quantique du moment magnétique.

Cette variation du potentiel est due au fait que le paramètre d du PFIQT est une contrainte fonction de l'énergie c'est-à-dire fonction de l'état du noyau atomique.

La figure 3 représente l'évolution du PFIQT dans la bande β ($n = 1, n_\omega = 0$), prenant en compte les paramètres libres du tableau 3, pour l'isotope ^{192}Pt et en fonction du paramètre déformation β et du nombre quantique du moment magnétique.

Ces courbes qui ont la forme d'une gaussienne renversée montrent que :

- Le potentiel garde la même allure quelque soit l'état du noyau,
- le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$.
- le potentiel confine plus lorsque $0.1 < \beta < 0.2$,
- plus le nombre quantique du moment magnétique augmente, plus le puits du potentiel est profond et plus l'interaction entre nucléons devient faible.

Cette variation du potentiel est due au fait que le paramètre d du PIQT est une contrainte fonction de l'énergie c'est-à-dire fonction de l'état du noyau atomique.

III.3 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de mettre en évidence la structure triaxiale des isotopes 192, 194 et 196 du platine dans un formalisme utilisant les outils du calcul fractionnaire. Ce modèle

est testé sur quelques isotopes du platine. Les énergies fractionnaire conformables ont permit de calculer les énergies d'excitation des nucléons pour passer d'un état vers un autre ainsi que certaines probabilités de transitions fractionnaires $B(E^{(\alpha)}2)$. Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats expérimentaux et ceux obtenus à partir de d'autres modèles pertinents tels que le potentiel de Morse, le potentiel de Killingbeck plus Morse, mais également le potentiel inverse à quatre termes calssique. En considérant différentes valeurs du paramètre fractionnaire α , ces résultats ont été utilisés pour tracer les allures du PIQT fractionnaire dans la bande de l'état fondamental et la bande β et aussi de représenter les valeurs propres d'énergie fractionnaires dans la bande de l'état fondamental et dans la bande β .

Conclusion Générale

Dans notre étude intitulée "ANALYSE FRACTIONNAIRE DES NIVEAUX D'ENERGIE DES NOYAUX TRIAXIAUX A L'AIDE DU HAMILTONIEN DE BOHR", nous nous proposons d'élaborer :

- un modèle qui prenne en compte les interactions au sein des noyaux ;
- un modèle qui prenne en compte les déformations (vibration et rotation) des noyaux atomiques

un modèle formulé dans l'espace fractionnaire qui prenne en compte les effets mémoire.

Nous avons bâti ce travail autour de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, après une brève historique de la physique nucléaire énumérant quelques éléments importants qui caractérisent l'étude de la structure nucléaire, telle que les composants du noyau, protons, neutrons, la carte regroupant les noyaux connus, détectés ou non à ce jour. Nous avons ressorti que les différentes interactions dans le noyau atomique (interaction forte, interaction faible et interaction électromagnétique) peuvent entraîner les déformations (rotation et vibration) de celui-ci. Ces mécanismes sont responsables d'une quantité d'énergie permettant soit de lier, soit de séparer les constituants du noyau en fonction du nombre de protons et de neutrons en son sein. Aussi, nous avons également étudié le noyau du platine, ses propriétés car il est un noyau déformé d'une grande importance dans l'industrie, la bijouterie et la santé et dont les données expérimentales existent. Ensuite, différents modèles de physique nucléaire ont été introduits, tels que le modèle de la goutte liquide et le modèle en couches. Enfin, une introduction à la déformation dans les noyaux a été effectuée afin de comprendre la structure des noyaux déformés.

Ensuite dans le deuxième chapitre, nous avons formulé le modèle du hamiltonien de Bohr fractionnaire conformable. Ensuite, en utilisant la technique de séparation des variables, nous avons pu scinder des équations dont l'une dépend du paramètre déformation β (partie β) et l'autre du paramètre déviation γ (partie γ). Une résolution de l'équation fractionnaire du hamiltonien de Bohr avec le PIQT a été résolue pour les noyaux triaxiaux. Pour la partie β , nous avons adopté le potentiel inverse de quatre termes, tant dis que pour la partie γ , nous avons adopté un potentiel en forme de l'oscillateur harmonique avec un minimum en $\gamma = \pi/6$. Dans la suite, après application de la méthode fractionnaire étendue de Nikiforov-Uvarov, l'énergie propre fractionnaire du système et le paramètre de contrainte sur l'énergie ont été déduites à l'aide de l'équation bi-confluente de Heun.

Enfin dans le chapitre trois, l'expression analytique des valeurs propres d'énergie nous ont permis d'évaluer les valeurs théoriques des rapports d'énergie fractionnaire des états et les taux de transition fractionnaire $B(E^{\alpha 2})$ et nous les avons comparés aux données expérimentales et à d'autres travaux théoriques pertinents utilisant les potentiels Morse, Killingbeck plus Morse et le

potentiel inverse à quatre termes pour les isotopes 192, 194 et 196 du Platine. Notre modèle Nous a permis d'obtenir des résultats plus proches des résultats expérimentaux que ceux obtenus par les auteurs ayant utilisés les potentiels Morse, Killingbeck plus Morse et le potentiel inverse à quatre termes classique. En effet, la formulation fractionnaire a eu pour effet de rapprocher nos résultats aux valeurs expérimentales lorsque α est petit. Un fait assez intéressant concernant notre modèle est qu'il intègre les effets mémoire

La présente étude nous a permis :

- d'améliorer le modèle sur les noyaux déformés ;
- d'appliquer une nouvelle méthode au hamiltonien de Bohr pour sa résolution ;
- d'obtenir à partir de notre méthode de résolution, une contrainte liée à notre potentiel et qui est modifié par l'énergie du système.
- d'intégrer dans le modèle du hamiltonien de Bohr les effets mémoire induits par le paramètre fractionnaire.

Toutefois, nous constatons que le modèle réalisé n'est pas applicable qu'aux noyaux déformés. Dans l'avenir, nous comptons élaborer un modèle applicable à un grand nombre de noyaux, qu'il soit déformé ou pas. En outre, nous allons étendre la formulation de dérivé utilisée dans le cadre de ce travail à une dérivée fractionnaire d'ordre non uniforme.

Appendices

ANNEXE : Ratios des moments de transitions quadrupôlaires électriques B(E2)

$$\begin{aligned}
 R_{\text{ground} \rightarrow \text{ground}}(L+2 \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L+2)_g \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{2L+1}{2L+5} (1 + \delta_{L,0}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)} \quad (\text{III.2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \text{ground}}(L \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-even}} \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{15}{(L+1)(2L+3)} (1 + \delta_{L,2}) \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)} \quad (\text{III.3})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \text{ground}}(L \rightarrow L+1) &= \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-odd}} \rightarrow (L+1)_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{(L+2)} \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-1; n=0, L+1, L+1)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)} \quad (\text{III.4})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \gamma\text{-even}}(L+2 \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{L(2L-1)(2L+1)}{(2L+3)(L+2)(2L+5)} (1 + \delta_{L,2}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L; n=0, L, L-2)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)} \quad (\text{III.5})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \gamma\text{-odd}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{L(2L+1)}{(L+2)(2L+5)} \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+1; n=0, L, L-1)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)} \quad (\text{III.6})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\gamma\text{-odd}\rightarrow\gamma\text{-even}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; L_\gamma \rightarrow (L-1)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
&= \frac{5(2L-3)(2L-1)}{L(L+1)(2L+1)} (1 + \delta_{L,3}) \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-1; n=0, L-1, L-3)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
\end{aligned} \tag{III.7}$$

$$\begin{aligned}
R_{\beta\text{-band}\rightarrow\beta\text{-band}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; L_{\beta\text{-band}} \rightarrow (L-1)_{\beta\text{-band}})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
&= \frac{5}{2} \frac{2L+1}{2L+5} (1 + \delta_{L,0}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
\end{aligned} \tag{III.8}$$

Liste des Publications

[1] K. Ahmadou, A. Atangana Likéné, J. M. Ema'a Ema'a, C. N. Takembo, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, Conformable fractional Bohr Hamiltonian with a four inverse power terms potential for triaxial nuclei, *Int. Jour. of Mod. Phys. E*, vol. 31 4 (2022) 2250039.

Bibliographie

- [1] Yu. Ts. Oganessian et al., *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 162501
- [2] Paul J. Karol et al. UPAC Technical Report, *Pure Appl. Chem.* **88** (2016)155160.
- [3] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nuclear Structure Vol. II : Nuclear Deformations* (Benjamin, New York)(1975).
- [4] R. F. Casten and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3584 (2000).
- [5] F. Iachello and A. Arima, *Interaction Boson Model*, (Cambridge University Press, Cambridge,) (1987).
- [6] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85** 3580 (2000).
- [7] P. Cejnar et al., *Rev. Mod. Phys.* **82** 2155 (2010).
- [8] R. F. Casten et al., *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **34** R285 (2007).
- [9] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **87** 052502 (2001).
- [10] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **91** 132502 (2003).
- [11] L. Wilets, M. Jean, *Phys. Rev.* **102** (1956) 788.
- [12] A. S. Davydov, *Nucl. Phys.* **24** (1961) 682.
- [13] M. Capak, D. Petrellis, B. Gonul, D. Bonatsos, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **42** (2015) 095102.
- [14] I. Inci, D. Bonatsos, I. Boztosun *Phys. Rev. C* **84** (2011) 024309.
- [15] I. Boztosun, D. Bonatsos, I. Inci, *Phys. Rev. C* **77** (2008) 044302.
- [16] I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E* **23**, (2014) 1450053.
- [17] B. T. Mbadjoun, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama, G. H. Ben-Bolie, P. O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **27** (2018) 1850072.
- [18] H. Sobhani, H. Hassanabadi, W. S. Chung, *Nucl. Phys. A* **973** (2018) 33.
- [19] L. Fortunato, A. Vitturi, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys.* **29** (2003) 1341.
- [20] Y. Omon, J. M. Ema'a Ema'a, P. E. Abiama, G. H. Ben-Bolie, P. O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **29** (2020) 2050082.
- [21] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 064312.
- [22] G. Levai, J. M. Arias *Phys. Rev. C* **69** (2004) 014304.
- [23] M. Chabab, A. Lahbas, M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51** (2015) 131.
- [24] M. Chabab, A. Lahbas, M. Oulne, *Int. J. Mod. Phys. E* **24** (2015) 1550089.
- [25] P. Baganu et al., *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **43** (2016) 093003.

- [26] L. Fortunato, *Eur. Phys. J. A* **26** (2005) s01.
- [27] D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **28**, 1950106(2019)
- [28] M. M. Hammad et al, *Nucl. Phys. A* **1015** (2021) 122307.
- [29] M. M. Hammad, *Phys. Scr.* **96** (2021) 115304.
- [30] K.S. Miller, *An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, 1993.
- [31] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, USA, 1999.
- [32] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, *J. Comput. Appl. Math.* **264** (2014) 65.
- [33] H. Karayer, D. Demirhan, F. Büyükkili, *Commun. Theor. Phys.* **66** (2016) 12.
- [34] W.S. Chung, S. Zare, H. Hassanabadi, *Commun. Theor. Phys.* **67** (2017) 250.
- [35] F.S. Mozaffari, H. Hassanabadi, H. Sobhani, W.S. Chung, *J. Korean Phys. Soc.* **72** (2018) 980.
- [36] R. Herrmann, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **34** (2007) 607.
- [37] T. Das, U. Ghosh, S. Sarkar, arXiv :1802.0437v1 (2018)
- [38] O. Tasbozan, Y. Cenciz, A. Kurt, *Eur. Phys. J. Plus* **131** (2016) 244.
- [39] K. Hosseini, A. Bekir, R. Ansari, *Opt. Quant. Electron* **49** (2017) 131.
- [40] E. Feenberg, *Phys. Rev.* **77** (1950) 771
- [41] J. Rainwater, *Phys. Rev.* **79** (1950) 432
- [42] E. Caurier, G. Martinez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves and A. P. Zuker, *Rev. Mod. Phys.* **77** (2005) 427
- [43] Pierre Curie. Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique. *J. Phys. Theor. Appl.*, **3**(1) :395415, (1894). 21
- [44] Sylvie Benzoni-Gavage. Symétries et lois de conservation ou le premier théorème de noether, <http://math.univ-lyon1.fr/benzoni/expose-Noether.pdf>.
- [45] Claude Aslangul. Mécanique quantique 2 : développements et applications à basse énergie. de boeck, (2008). 22, 46
- [46] R. Budaca, *Eur. Phys. J. A* . **52** (2016) 314.
- [47] K. Ahmadou, A. Atangana Likéné, J. M. Ema'a Ema'a, C. N. Takembo P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **31**, 2250039(2022)
- [48] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588**, (2004) 172.
- [49] E. Predazzi and T. Regge, *Nuovo Cimento* **24** (1962) 518.
- [50] A. S. Davydov and A. A. Chaban, *Nucl. Phys.* **20** (1960) 499.
- [51] L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys.* **29** (2003) 1341.
- [52] D. Bonatsos et al., *Phys. Lett. B* **584** (2004) 40.
- [53] I. Yigitoglu and D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.

- [54] H. Sobhani, H. Hassanabadi and W. S. Chung, *Nucl. Phys. A* **85** (2018) 3580.
- [55] H. Neyazi, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, *Nucl. Phys. A* **945** (2015) 80.
- [56] R. Budaca, *Eur. Phys. J. A* . **5** (2014) 50.
- [57] G. Lévai and J. Arias, *Phys. Rev. C* **81** (2010) 044304.
- [58] P. Baganu and R. Budaca, *J. Phys. G* **42** (2015) 105106.
- [59] F. H. Stillinger, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 1891.
- [60] X. Song, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **17** (1991) 49.
- [61] R. Herrmann, *Fractional Calculus An Introduction for Physicists*(World Scientific, Singapore, 2011).
- [62] A. Lemieux and A. K. Bose, *Annales de l'I H P. Sect. A n°3* (1969) 10.
- [63] J. Meyer-ter-Vehn, *Nucl. Phys. A* **249** (1975) 111.
- [64] M. Caputo, M. Fabrizio, *Prog. Fract. Dier. Appl.* **1** (2015) 73.
- [65] A. V. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematics Physics*, (Birkhäuser, Boston, 1988).
- [66] H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkiliç, *J. of Math. Phys.* **56** (2015) 063504.
- [67] H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkiliç, *Rep. Math. Phys.* **76**(3) 271-281 (2015).
- [68] H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkiliç, *J. of Math. Phys.* **59** (2018) 053501.
- [69] A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations*(Oxford University Press, New York, 1995).
- [70] D. Bonatsos and al., *Phys. Rev. C* **76** (2007) 064312.
- [71] Al-Jamel, *Mod. Phys. Lett. A* **33**, 1850185(2018)
- [72] H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkilic, *J. math. Phys.* **59**, 053501(2008)
- [73] Al-Jamel, *Int. J. Mod. Phys. A* **34**, 1950054(2019)
- [74] A. R. Edmonds, *Angular Momentum In Quantum Mechanics*(Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957).
- [75] N. Soheibi, M. Hamzavi, M. Eshghi and Sameer M. Ikhdaïr, *Int. J. Mod. Phys. E* **26** (2017) 1750073.
- [76] E. R. Marshalek, *Theory of Collective Vibrations of Even-Even Spheroidal Nuclei*(Lawrence Radiation Lab, 1962).
- [77] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588**, (2004) 172.
- [78] H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkilic, *Phys. Lett. B* **588**, 172(2004)
- [79] I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E* **23**, (2014) 1450053.
- [80] H. Sobhani, H. Hassanabadi and W. S. Chung, arXiv :1804.08090 (2018).
- [81] G. A. Marid, N. T. Jarallah and H. M. Abduljabbar, *Results in Phys.* **11** (2018) 406.
- [82] N. Oulebsir, *Rappels de cours et recueil dexercices de physique nucléaire*(Lawrence Radiation Lab, 2016).

- [83] C. Amsler and al., *Phys. Lett. B* **667** (2008) 1.
- [84] T. Ruedas, *Radioactive heat production of six geologically important nuclides*, G3, (2017) 006997.
- [85] <http://freephysique.free.fr/cours>
- [86] <https://www.ilephysique.net/sujet-reaction-de-fusion-300005.html>
- [87] <https://www.investissementmetaux.fr/platinum/>
- [88] H. A. Bethe and R. F. Bacher, *Rev. Mod. Phys.* **8** (1936) 82.
- [89] C. F. V. Weizsäcker, *Zur Theorie der Kernmassen*(Zeitschrift für Physik, New York, 1935).
- [90] https://fr.wikibooks.org/wiki/Le_noyau_atomique/Le_modèle_de_la_goutte_liquide.
- [91] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nuclear Structure, volume I et II* (World Scientific, Amsterdam, 1968).
- [92] D. L. Hill, J. A. Wheeler, *Phys. Rev***89** (1953) 1102.
- [93] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics* (Ed. Wiley, Oregon State University, 1988).
- [94] M. G. Mayer, *Phys. Rev.* **74** (1948) 235.
- [95] M. G. Mayer, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1969.
- [96] O. Haxel, J. H. D. Jensen, H. E. Suess, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1766.
- [97] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear structure : Nuclear Deformations*, Vol. II (World Scientific, Singapore, 1999).
- [98] K. L. G. Heyde, *The nuclear shell model*(Springer, Verlag, 1996).
- [99] H. A. Bethe, R. F. Bacher, *Rev. Mod. Phys.* **75** (1949) 1969.
- [100] B. J. P. Gall, *Ann. Phys. Fr.* **24** (1999) 1-93.
- [101] Y. Gratchev, *Etude expérimentale et théorique de la structure nucléaire des isotopes de sélénium riches en neutrons*,(Grenoble Alpes, 2016)669698.
- [102] R. Briselet, *Etude de la structure de noyaux de mendelevium* (Université Paris-Saclay, 2016)
- [103] S. Nilsson and I. Ragnarsson, *Shapes and Shells in Nuclear Structure*(Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
- [104] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear many-Body Problem*(Springer, Berlin,1980).
- [105] A. Bohr, B. Mottelson, *Phys. Rev.* **90** (1953) 717.
- [106] S. Bouneau et al., *Z. Phys.* **A358** (1997) 179.
- [107] Y. Shi, J. Dobaczewski, S. Frauendorf, W. Nazarewicz, J. C. Pei, F. R. Xu and N. Nikolov, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 092501.
- [108] K. Starosta, T. Koike, C. J. Chiara, D. B. Fossan, D. R. LaFosse, A. A. Hecht, C. W. Beausang, M. A. Caprio, J. R. Cooper, R. Krcken, J. R. Novak, N. V. Zamfir, K. E. Zyranski, D. J. Hartley, D. L. Balabanski, Jing-ye Zhang, S. Frauendorf and V. I. Dimitrov, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 971.
- [109] S. Mukhopadhyay, D. Almeded, U. Garg, S. Frauendorf, T. Li, P. V. Madhusudhana Rao, X. Wang, S. S. Ghugre, M. P. Carpenter, S. Gros, A. Hecht, R. V. F. Janssens, F. G. Kondev, T. Lauritsen, D. Seweryniak and S. Zhu, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 172501.

- [110] E. Grodner, J. Srebrny, A. A. Pasternak, I. Zalewska, T. Morek, Ch. Droste, J. Mierzejewski, M. Kowalczyk, J. Kownacki, M. Kisieliński, S. G. Rohoziński, T. Koike, K. Starosta, A. Kordyasz, P. J. Napiorkowski, M. Wolińska-Cichocka, E. Ruchowska, W. Póciennik, and J. Perkowski, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 172501.
- [111] C. Vaman, D. B. Fossan, T. Koike, K. Starosta, I. Y. Lee and A. O. Macchiavelli, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 032501.
- [112] J. Timár, P. Joshi, K. Starosta, V.I. Dimitrov, D.B. Fossan, J. Molnr, D. Sohler, R. Wadsworth, A. Algora, P. Bednarczyk, D. Curien, Zs. Dombri, G. Duchene, A. Gizon, J. Gizon, D.G. Jenkins, T. Koike, A. Krasznahorkay, E.S. Paul, P.M. Raddon, G. Rainovski, J.N. Scheurer, A.J. Simons, C. Vaman, A.R. Wilkinson, L. Zolnai and S. Frauendorf, *Phys. Lett. B* **598** (2004) 178.
- [113] E. A. Lawrie, P. A. Vymers, J. J. Lawrie, Ch. Vieu, R. A. Bark, R. Lindsay, G. K. Mabala, S. M. Maliage, P. L. Masiteng, S. M. Mullins, S. H. T. Murray, I. Ragnarsson, T. M. Ramashidzha, C. Schück, J. F. Sharpey-Schafer, and O. Shirinda, *Phys. Rev. C* **78** (2008) 021305.
- [114] S. Nilsson, *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab* **29** (1955).
- [115] S. A. Moszkowski, *Phys. Rev.* **99** (1955) 803.
- [116] K. Gottfried, *Phys. Rev.* **103** (1956) 1017.
- [117] W. Greiner and J. Maruhn, *Nuclear Models*(Springer, 1996).
- [118] T. Bengtsson and I. Ragnarsson, *Phys. Rev.* **103** (1956) 1017.
- [119] K. Lobner, M. Vetter, and V. Honig, *Nucl. Phys. A* **436(1)** (1985) 14.
- [120] D. Agboola and Y. Z. Zhang, *J. Phys. A : Math. Theor.* **46** (2013) 505301.
- [121] E. Predazzi and T. Regge, *Nuovo Cimento* **24** (1962) 518.
- [122] A. S. Davydov and A. A. Chaban, *Nucl. Phys.* **20** (1960) 499.
- [123] L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys.* **29** (2003) 1341.
- [124] D. Bonatsos et al., *Phys. Lett. B* **584** (2004) 40.

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/360253447>

Conformable fractional Bohr Hamiltonian with a four inverse power terms potential for triaxial nuclei

Article in *International Journal of Modern Physics E* · April 2022

DOI: 10.1142/S0218301322500392

CITATION

1

READS

145

6 authors, including:



Ahmadou Katarkalah
University of Yaounde I

2 PUBLICATIONS 1 CITATION

[SEE PROFILE](#)



André Aimé Atangana Likéné
University of Yaounde I

9 PUBLICATIONS 11 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Clovis N. Takembo
University of Buea: College of Technology

18 PUBLICATIONS 231 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Patrice Ele Abiama
Institute for Geological and Mining Research

41 PUBLICATIONS 220 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Complex behavior in neural and cardial networks under electromagnetic radiation [View project](#)



Investigation of natural radioactivity in the areas identified as HBRA [View project](#)

Conformable fractional Bohr Hamiltonian with a four inverse power terms potential for triaxial nuclei

K. Ahmadou^{*,¶}, A. Atangana Likéné^{*,§,||}, J. M. Ema'a Ema'a^{†,**},
C. N. Takembo^{*,††}, P. Ele Abiama^{*,‡,‡‡} and G. H. Ben-Bolie^{*,§§}

**Laboratory of Atomic, Molecular and Nuclear Physics,
Department of Physics, Faculty of Science,
University of Yaounde I, P. O. Box 812,
Yaounde, Cameroon*

*†Higher Teachers' Training College,
Department of Physics, University of Ngaoundéré,
P. O. Box 55, Bertoua, Cameroon*

*‡Department of Electrical and Electronic Engineering,
College of Technology, University of Buea,
P. O. Box 63, Buea, Cameroon*

*§Nuclear Technology Section (NTS),
Institute of Geological and Mining Research,
P. O. Box 4110, Yaounde, Cameroon*

¶katarkalah91@gmail.com

||aandreaime@yahoo.fr

***emaajm@yahoo.fr*

††takembontahkie@yahoo.com

‡‡eleabiama2003@yahoo.fr

§§gbenbolie@yahoo.fr

Received 12 January 2022

Revised 28 March 2022

Accepted 28 March 2022

Published 18 May 2022

In this paper, we look for a novel analytical solution of the Conformable Fractional Bohr Hamiltonian in the presence of a four inverse power terms potential in β -part of the collective nuclear potential. The new expression for the wave functions and energy spectra is obtained using the conformable fractional extended Nikiforov–Uvarov method. The effect of the conformable fractional formulation is studied on root mean square deviation, and normalized fractional eigen energies of ground state band, γ -band and β -band of ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt atomic nuclei. The $B(E2)$ transition rates are calculated within the fractional domain. We compare our results with the experimental data, the classical Bohr Hamiltonian model with four inverse power terms potential, and other relevant theoretical works. We discuss on how the fractional parameter α acts on the spectra

[¶]Corresponding author.

of triaxial nuclei. The results provided by our new approach are found to be in good agreement with the experimental data and improved compared to previous works.

Keywords: Bohr Hamiltonian; four inverse power terms potential; triaxial nuclei; conformable fractional extended Nikiforov–Uvarov method; energy spectra.

PACS Number(s): 21.60.Fw, 21.10.Re, 70.25.+k, 04.10.Mn

1. Introduction

Bohr Hamiltonian is usually employed to study properties of atomic nuclei¹ such as critical point symmetries² and shape transition of the boson model.³ The critical point symmetries include $E(5)$,^{4,5} which is related to the second-order phase transition⁶ between spherical, and γ -unstable nuclei and $X(5)$ ⁷ which corresponds to the first-order phase transition between spherical and prolate deformed nuclei.^{4,8} Since the introduction of critical point symmetries, a large number of models have been suggested for finding solutions of the eigenvalue problem related to the Bohr Hamiltonian equation. This was motivated by the discovery of many solvable potentials. In General, we usually have harmonic oscillator type potential for the γ -part,^{7,9,10} and for the β -part the most commonly used potentials are Wood–Saxon potential,¹¹ Morse,^{12–15} Killibeck potential,^{15,16} Killingbeck plus Morse,¹⁵ Kratzer,^{17,18} screened Kratzer,¹⁸ Davisson potential,¹⁶ Sextic²⁰ and Hulthen.^{21,22} In $E(5)$ critical point symmetry, the potential model does not depend on the collective γ -variable, while in the $X(5)$ symmetry, the potential model can be separated into two linearly independent parts, the γ -part which is a harmonic oscillator type, centered around $\gamma = 0$, which is associated with prolate deformed nuclei and β -variable that describes the magnitude of the deformation.^{3,8} Furthermore, $E(5)$ symmetry can be assimilated to a transition between vibrational $U(5)$ and γ -unstable nuclei $O(6)$ whereas the $X(5)$ symmetry correspond to the transition from the vibrational spherical shape $U(5)$ to prolate deformed nuclei $SU(3)$.^{3,8}

For the last two decades, several works have been carried out to obtain solutions of $X(5)$ and $E(5)$ symmetries. Special solutions of the Bohr Hamiltonian equation are presented in Refs. 23 and 24. In Ref. 11, solutions of the Bohr Hamiltonian equation are presented from 2005 up to 2015. In 2018, Mbadjoun¹⁵ used the Killingbeck plus Morse potential to solve the Bohr Hamiltonian equation. In 2019, Nga *et al.*²⁵ investigated the Bohr Hamiltonian for triaxial nuclei under the influence of the four inverse power terms potential and obtained the energy spectrum for the β -part. In 2020, Omon *et al.*¹⁸ studied the Bohr Hamiltonian with screened Kratzer potential and obtained the energy spectrum for triaxial nuclei. Recently, a new category of the critical point symmetries have been introduced in Ref. 26. This new type of critical point symmetries named the $E^\alpha(5)$ conformable fractional critical point symmetry was studied using the conformable fractional version of the Bohr Hamiltonian both with infinite well potential and with the Kratzer potential^{26,27} in β -part.

Various definitions can be found for the fractional derivative. Among the most common definitions we can name the Caputo derivative, Riemann–Liouville, Riesz

and Grunwald–Letnikov definitions.^{28,29} These formulations of fractional derivative, which are defined globally using fractional integral, are widely employed in noninteger differential calculus. Hence, fractional derivatives behave like nonlocal operators and do not satisfy standard classical properties of integer derivatives such as quotient, product and chain rules which allow us to obtain analytical solutions in the usual integer calculus. For this reason, there are many difficulties in the mathematical handling of algebraic operations in the domain of noninteger calculus. In 2014, Khalil *et al.*³⁰ introduced a new definition of fractional derivative, known as conformable fractional derivative (CFD). This new definition of fractional derivative attracted the attention of scientists in different domain of physics, and then significant new results have been presented.^{31–33} Fractional-order systems are useful for studying the abnormal behavior of dynamical systems in physics, hence the interest of this study. Many quantum wave equations and differential equations of physical interest have been redefined using the CFD. Recently, Hammad *et al.*²⁶ studied a new category of the critical point symmetries using the conformable fractional Bohr Hamiltonian (CFBH). They obtained the analytical expressions of eigenfunctions and the energy levels of CFBH with infinite well potential in β -variable. In Ref. 31, Tasbozan *et al.* used the Jacobi elliptic function expansion technique to obtain nonlinear conformable time-fractional combined Kdv–mKdV and Boussinesq equation. In Ref. 34, the author used conformable fractional analysis to study fractional symmetric rigid rotor. In Ref. 35 eigenstates and eigen energies for the N -dimensional fractional Schrödinger wave equation are obtained analytically using the pseudo harmonic potential, and the results were applied to compute the mass spectra of heavy quarkonia. In Ref. 36, Hulthen potential, harmonic oscillator potential and Wood–Saxon potential are solved analytically using the fractional Schrödinger. In Ref. 37, Hosseini *et al.* found analytical solutions of various nonlinear fractional differential equations using conformable time fractional derivatives and nonlinear Boussinesq equations. In Ref. 32, Chung *et al.* investigated conformable fractional Schrödinger equation in the presence of killingbeck and hyperbolic potentials.

The aim of this paper is to study the CFBH with a four inverse power terms potential using the conformable fractional extended Nikiforov–Uvarov (CF-ENU) method, and apply the obtain results to different triaxial nuclei. To the best of our knowledge, the CF-ENU is not considered in recent works on Bohr Hamiltonian equation. In order to bring highlight the importance of this approach, we applied the results of this work by showing in particular that this generalization to fractional domain allows us to access a large variety of potential models, whose results could directly be compared to the available experimental data.

This paper is organized as follows: In Sec. 2, we present the theoretical tools required for this work. Basic concepts of fractional calculus are briefly explained. The extended Nikiforov–Uvarov (ENU) will be generalized to the conformal fractional domain. In Sec. 3, the Bohr Hamiltonian is presented and the CFD is implemented to the Bohr Hamiltonian equation for the potential $V(\beta) = \frac{d}{\beta^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^{\frac{3}{2}}} + \frac{b}{\beta^2}$

to obtain the CFBH equation (CFBHE), and then solutions are obtained using the ENU method. In Sec. 4, the model will be tested at different values of the fractional parameter for selected atomic nuclei such as ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt , then our results will be presented and compared with other relevant works. Finally, the summary and conclusion are presented.

2. Theoretical Tools

2.1. Conformable fractional derivative

Fractional derivative is the generalization of usual derivative to noninteger order. There are several definitions of fractional derivative such as Caputo, Riemann–Liouville and Riesz fractional derivatives. Caputo derivative²⁹ is of great interest in fundamental and applied science as it is more applicable to the use of initial and boundary conditions. The Caputo derivative of a function $\psi(t)$ is defined as follows:

$${}^C D_t^\alpha \psi(t) = \int_{t_0}^t K_\alpha(t-y) \psi^{(n)}(y) dy, \quad t_0 < t, \quad (1)$$

with

$$K_\alpha(t-y) = \frac{(t-y)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}, \quad (2)$$

where $\psi^{(n)}(t)$ is the n th derivative of the function $\psi(t)$ and $K_\alpha(t-y)$ is the kernel. The kernel $K_\alpha(t-y)$ is fixed for a given real number α , and has a singularity at $t=y$. In order to redefine fractional derivatives using nonsingular smooth exponential kernels, Caputo and Fabrizio³⁹ proposed a new formula of fractional derivative of the form

$$D_t^\alpha \psi(t) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \exp\left[-\frac{\alpha(t-y)}{1-\alpha}\right] \psi(y) dy, \quad (3)$$

where $M(\alpha)$ is a normalization function satisfying $M(0) = M(1) = 1$. Recently, the concept of CFD was proposed by Khalil *et al.*³⁰ For a given function $\psi(t)$ the CFD of order α is given by

$$D_t^\alpha \psi(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(t - \epsilon t^{1-\alpha}) - \psi(t)}{\epsilon}, \quad 0 < t, \quad (4)$$

$$\psi(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(t), \quad (5)$$

and then,

$$D^\alpha [\psi_{nl}(t^\alpha)] = t^{1-\alpha} \psi_{nl}(t^\alpha), \quad (6)$$

$$D^\alpha [D^\alpha \psi_{nl}(t^\alpha)] = (1-\alpha)t^{1-2\alpha} \psi'_{nl}(t^\alpha) + t^{2-2\alpha} \psi''_{nl}(t^\alpha), \quad (7)$$

with $0 < \alpha \leq 1$. This formulation is very simple and provides a natural extension of differential operators with noninteger order. Moreover, conformable fractional differential operator is linear and satisfy properties of usual derivative such as the derivative of a product, chain rule and the quotient of two functions.³¹

2.2. Conformable fractional extended Nikiforov–Uvarov method

The Nikiforov–Uvarov (NU) method is used in quantum mechanics to obtain the eigenfunctions and eigenvalues of Schrödinger type equations. The NU was generalized to the ENU method by changing the boundary conditions of NU method and is used to find solutions of any second-order differential equation which has at most four singular points. For more details, one can refer to Refs. 25, 41 and 42. In Ref. 31, the NU method was extended to noninteger calculus and applied on some differential equations of physical interest to test the applicability of the model. In Ref. 43, ENU is generalized to CFD domain and applied on Schrödinger equation for heavy quarkonia systems. The aim of this section is to formulate the CF-ENU method from its classical (integer) version. The basic equation of CF-ENU method, can be written in the form⁴³

$$D^\alpha [D^\alpha \psi(\omega)] + \frac{\bar{\tau}(\omega)}{\sigma(\omega)} D^\alpha \psi(\omega) + \frac{\bar{\sigma}(\omega)}{\sigma^2(\omega)} \psi(\omega) = 0, \quad (8)$$

where $\bar{\tau}(\omega)$, $\sigma(\omega)$ and $\bar{\sigma}(\omega)$ are functions, of at most 2α , 3α and 4α degree, respectively. Using the key property^{31,43} of CFD given by Eqs. (6) and (7), one can write Eq. (8) as

$$(1 - \alpha)\omega^{1-2\alpha}\psi'(\omega) + \omega^{2-2\alpha}\psi''(\omega) + \frac{\bar{\tau}(\omega)}{\sigma(\omega)}\omega^{1-\alpha}\psi'(\omega) + \frac{\bar{\sigma}(\omega)}{\sigma^2(\omega)}\psi(\omega) = 0, \quad (9)$$

then after a little algebra, Eq. (9) becomes

$$\psi''(\omega) + \frac{(1 - \alpha)\sigma(\omega)\omega^{-\alpha} + \bar{\tau}(\omega)}{\omega^{1-\alpha}\sigma(\omega)}\psi'(\omega) + \frac{\bar{\sigma}(\omega)}{\omega^{2-2\alpha}\sigma^2(\omega)}\psi(\omega) = 0. \quad (10)$$

Then we introduce the following expressions for the fractional parameters:

$$\bar{\tau}_f(\omega) = (1 - \alpha)\sigma(\omega)\omega^{-\alpha} + \bar{\tau}(\omega), \quad (11)$$

$$\sigma_f(\omega) = \omega^{1-\alpha}\sigma(\omega), \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}_f(\omega) = \bar{\sigma}(\omega). \quad (13)$$

From this, we can write the standard form of the generalized ENU equation to the fractional domain

$$\psi''(\omega) + \frac{\bar{\tau}_f(\omega)}{\sigma_f(\omega)}\psi'(\omega) + \frac{\bar{\sigma}_f(\omega)}{\sigma_f^2(\omega)}\psi(\omega) = 0. \quad (14)$$

Setting $\psi(\omega) = \phi(\omega)Y(\omega)$, reduces Eq. (14) to a hypergeometric type equation

$$\sigma_f(\omega)Y''(\omega) + \bar{\tau}_f(\omega)Y'(\omega) + h(\omega)Y(\omega) = 0, \quad (15)$$

where $\phi(\omega)$ solves the equation

$$\frac{\phi'(\omega)}{\phi(\omega)} = \frac{\pi_f(\omega)}{\sigma_f(\omega)}, \quad (16)$$

and

$$h(\omega) = \pi'_f(\omega) + G(\omega). \quad (17)$$

In Eq. (15), $Y(\omega)$ is a hypergeometric type function whose polynomial satisfies a Rodrigues-like relation

$$Y_{\alpha,n}(\omega) = \frac{B_n}{\rho(\omega)} \frac{d^n}{d\omega^n} [\sigma_f^n(\omega)\rho(\omega)], \quad (18)$$

where the weight function $\rho(\omega)$ satisfies the condition

$$(\sigma_f(\omega)\rho(\omega))' = \tau_f(\omega)\rho(\omega). \quad (19)$$

The function $\pi_f(\omega)$ required for this method is given by

$$\pi_f(\omega) = \frac{\sigma_f'(\omega) - \bar{\tau}_f(\omega)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_f'(\omega) - \bar{\tau}_f(\omega)}{2}\right)^2 - \bar{\sigma}_f(\omega) + G(\omega)\sigma_f(\omega)}, \quad (20)$$

where $\pi(\omega)$ is a polynomial of at most 2α degree. The function $h_n(\omega)$ is determined from the equation

$$h_n(\omega) = -\frac{n}{2}\tau'(\omega) - \frac{n(n-1)}{6}\sigma_f''(\omega) + C_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (21)$$

where C_n is an integration constant and

$$\tau(\omega) = \bar{\tau}_f(\omega) + 2\pi_f(\omega). \quad (22)$$

In the order to obtain the eigenvalue solution of the problem by CF-ENU method,^{31,43} the polynomials $h(\omega)$ and $h_n(\omega)$ are equal and $Y(\omega) = Y_{\alpha,n}(\omega)$ is a particular solution of degree n of Eq. (15).

3. Solutions of the CFBH Using the CF-ENU

The Bohr Hamiltonian is used to describe the structure of an atomic nucleus around the critical point of transition between the spherical and deformed shapes. In collective variables,⁴⁴ the Bohr Hamiltonian is defined through the formula:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (23)$$

where (β, γ) are the internal collective coordinates, \widehat{Q}_k (with $k = 1, 2, 3$) are angular momentum components in the intrinsic frame and B is the mass parameter. Let us introduce the following expressions ξ and $v(\beta, \gamma)$ such that $\xi = \frac{2BE}{\hbar^2}$, $v(\beta, \gamma) = \frac{2BV(\beta, \gamma)}{\hbar^2}$, which are the reduced energies and the reduced potential, respectively.

In order to separate the Hamiltonian into its variables, we assume that the reduced potential and the wave function are exactly separable. The suitable forms

are $v(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{\omega(\gamma)}{\beta^2}$, $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \psi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i)$ where θ_i ($i = 1, 2, 3$) are the Euler angles and D is the Wigner function; with the γ -part of the potential having a minimum at $\gamma = \frac{\pi}{6}$, one can write the total angular momentum as

$$W = \sum_{k=1}^3 \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} = 4(\widehat{Q}_1^2 + \widehat{Q}_2^2 + \widehat{Q}_3^2) - 3\widehat{Q}_1^2, \quad (24)$$

by using the following symmetric wave function:

$$D(\theta_i) = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\varsigma,0})}} [D_{\mu,\varsigma}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu,-\varsigma}^{(L)}(\theta_i)], \quad (25)$$

the eigenvalue is $4L(L+1) - 3\varsigma^2$, where L is the angular momentum and ς is the projection quantum number of angular momentum on the body-fixed x' axis. In practice, instead of using ς , we can use the wobbling quantum number $n_\omega = L - \varsigma$.^{45,46} The energy bands are characterized by $L = n_\omega, n_\omega + 2, n_\omega + 4, \dots$, (with $n_\omega > 0$) next to the ground state band (with $n_\omega = 0$).⁴⁵

Henceforth, the γ and β dependent Schrödinger equation are

$$\left[-\frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \omega(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \lambda \eta(\gamma), \quad (26)$$

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{4L(1+L) - 3\varsigma^2 + 4\lambda}{4\beta^2} + u(\beta) \right] \psi(\beta) = \xi \psi. \quad (27)$$

3.1. Solution of the γ part

Triaxial shapes are formed by the oscillation of nuclear structure, the corresponding potential energy surface should have a minimum around $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Henceforth, the following harmonic potential can be considered

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{2} \tilde{c} \left(\gamma - \frac{\pi}{6} \right)^2, \quad (28)$$

where \tilde{c} is defined as the stiffness of the potential. Combining Eqs. (26) and (28) and solving obtained equation, gives the energy eigenvalue and the normalized eigenfunctions,^{14,47} respectively, as

$$\lambda_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{2\tilde{c}} \left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2} \right), \quad \tilde{n}_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots, \quad (29)$$

$$\eta_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n_{\tilde{\gamma}}} \sqrt{\pi n_{\tilde{\gamma}}}}} H_{n_{\tilde{\gamma}}}((\tilde{c}/2)^{1/4} \tilde{\gamma}) \exp(-(\tilde{c}/2)^{1/2} \tilde{\gamma}^2/2), \quad (30)$$

with $\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{6}$, $n_{\tilde{\gamma}}$ is the radial quantum number, $H_{n_{\tilde{\gamma}}}$ is the Hermite polynomials.

3.2. Solution of the β part

For the β part, we assume four inverse power terms potential²⁵

$$u(\beta) = \frac{d}{\beta^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^{\frac{3}{2}}} + \frac{b}{\beta^2}, \quad (31)$$

where a, b, c and d are constant coefficients that are determined by fitting with the experimental data. Equation (27) can be written as

$$\left[\frac{1}{\beta^4} \frac{d}{d\beta} \beta^4 \frac{d}{d\beta} - \frac{4L(1+L) - 3\zeta^2 + 4\lambda}{4\beta^2} - u(\beta) \right] \psi(\beta) = -\xi\psi, \quad (32)$$

defining the parameter p as: $p = \frac{4L(1+L) - 3\zeta^2 + 4\lambda}{4}$, Eq. (32) can be written as

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{4}{\beta} \frac{d}{d\beta} - \frac{p}{\beta^2} - \frac{d}{\beta^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{\beta} - \frac{c}{\beta^{\frac{3}{2}}} - \frac{b}{\beta^2} + \xi \right] \psi(\beta) = 0. \quad (33)$$

It is convenient to make the transformations $\psi(\beta) = \beta^{-2}\phi(\beta)$ and $z = \sqrt{\gamma\beta}$, it is obvious that if $\gamma > 0$, henceforth Eq. (33) becomes

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \frac{4dz}{\gamma^{\frac{3}{2}}} - \frac{4a}{\gamma} - \frac{4(2+b+p)}{z^2} - \frac{4c}{\gamma^{\frac{1}{2}}z} + \frac{4z^2}{\gamma^2}\xi \right] \phi(z) = 0. \quad (34)$$

Making further the transformation $\phi(z) = z^{1/2}f(z)$, Eq. (34) becomes

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \frac{1}{z^2} [B_1 z^4 - B_3 z^3 - B_4 z^2 - B_2 z - B_0] f(z) = 0, \quad (35)$$

where

$$\begin{aligned} \text{I} : B_0 &= \frac{35}{4} + 4b + 4p, \\ \text{II} : B_1 &= \frac{4\xi}{\gamma^2}, \\ \text{III} : B_2 &= \frac{4c}{\gamma^{1/2}}, \\ \text{IV} : B_3 &= \frac{4d}{\gamma^{3/2}}, \\ \text{V} : B_4 &= \frac{4a}{\gamma}. \end{aligned} \quad (36)$$

Then, we introduce CFD as follows:

$$D^\alpha [D^\alpha f(z)] + \frac{1}{z^{2\alpha}} [b_1 z^{4\alpha} - b_3 z^{3\alpha} - b_4 z^{2\alpha} - b_2 z^\alpha - b_0] f(z) = 0, \quad (37)$$

where the potential given by Eq. (31) by its conformable fractional version

$$u(z^\alpha) = \frac{d\sqrt{\gamma}}{z^\alpha} + \frac{a\gamma}{z^{2\alpha}} + \frac{c\gamma^{\frac{3}{2}}}{z^{3\alpha}} + \frac{b\gamma^2}{z^{4\alpha}}. \quad (38)$$

For the CF-ENU method, we have $\bar{\tau} = 0$, $\sigma = z^\alpha$ and $\bar{\sigma} = B_1 z^{4\alpha} - B_3 z^{3\alpha} - B_4 z^{2\alpha} - B_2 z^\alpha - B_0$. Using Eq. (7), we transform Eq. (37) as

$$\frac{d^2}{dz^2}f(z) + \frac{(1-\alpha)}{z} \frac{d}{dz}f(z) + \frac{1}{z}[B_1 z^{4\alpha} - B_3 z^{3\alpha} - B_4 z^{2\alpha} - B_2 z^\alpha - B_0]f(z) = 0, \quad (39)$$

where we have $\bar{\tau}_f = 1 - \alpha$, $\sigma_f = z$ and $\bar{\sigma}_f = B_1 z^{4\alpha} - B_3 z^{3\alpha} - B_4 z^{2\alpha} - B_2 z^\alpha - B_0$. Using Eq. (20), $\pi_f(z^\alpha)$ is found as

$$\pi_f(z^\alpha) = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - B_1 z^{4\alpha} + B_3 z^{3\alpha} + B_4 z^{2\alpha} + B_2 z^\alpha + B_0 + zG(z^\alpha)}. \quad (40)$$

We assume the function $G(z^\alpha)$ in the form $G(z^\alpha) = Bz^{2\alpha-1} + Az^{\alpha-1}$, which makes the function under the square root become quadratic

$$\pi_f(z^\alpha) = \frac{\alpha}{2} \pm (Rz^{2\alpha} + Qz^\alpha + P). \quad (41)$$

Comparing Eqs. (40) and (41) yields the following four sets of solutions for the unknowns R, Q, P, B and A in terms of the problem parameters B_0, B_1, B_2, B_3 and B_4

$$\text{I : } \left\{ \begin{array}{l} R = -\sqrt{-B_1} \\ Q = -\frac{B_3}{2\sqrt{-B_1}} \\ P = -\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ B = -B_4 + \frac{B_3^2}{4\sqrt{-B_1}^2} + 2\sqrt{-B_1}\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ A = -B_2 + B_3 \frac{\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}}}{\sqrt{-B_1}} \end{array} \right.$$

$$\text{II : } \left\{ \begin{array}{l} R = -\sqrt{-B_1} \\ Q = -\frac{B_3}{2\sqrt{-B_1}} \\ P = \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ B = -B_4 + \frac{B_3^2}{4\sqrt{-B_1}^2} - 2\sqrt{-B_1}\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ A = -B_2 - B_3 \frac{\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}}}{\sqrt{-B_1}} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \text{III : } & \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{-B_1} \\ Q = \frac{B_3}{2\sqrt{-B_1}} \\ P = -\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ B = -B_4 + \frac{B_3^2}{4\sqrt{-B_1}^2} - 2\sqrt{-B_1}\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ A = -B_2 - B_3 \frac{\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}}}{\sqrt{-B_1}} \end{array} \right. \\
 \text{IV : } & \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{-B_1} \\ Q = \frac{B_3}{2\sqrt{-B_1}} \\ P = \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ B = -B_4 + \frac{B_3^2}{4\sqrt{-B_1}^2} + 2\sqrt{-B_1}\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ A = -B_2 + B_3 \frac{\sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}}}{\sqrt{-B_1}} \end{array} \right.
 \end{aligned} \tag{42}$$

By the direct integration of Eq. (16), we have two solutions for ϕ which are given by

$$\begin{aligned}
 \text{I : } \phi_{1f}(z) &= K_1 z^{\frac{\alpha}{2}-P} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha}(Rz^{2\alpha} + 2Qz^\alpha)\right], \\
 \text{II : } \phi_{2f}(z) &= K_2 z^{\frac{\alpha}{2}+P} \exp\left[\frac{1}{2\alpha}(Rz^{2\alpha} + 2Qz^\alpha)\right].
 \end{aligned} \tag{43}$$

Let us choose the solution (43)I. The solution is well defined if $Q > 0$, $R > 0$ and $P < 0$ and then the set III of parameters provides us physically acceptable solutions.

Because the functions $h_f(z)$ and $h_{nf}(z)$ are equal, then using Eqs. (17) and (21), the following relation can be obtained

$$Bz^{2\alpha-1} + Az^{\alpha-1} \pm (2\alpha Rz^{2\alpha-1} + \alpha Qz^{\alpha-1}) = C_n - n[\pm(2\alpha Rz^{2\alpha-1} + \alpha Qz^{\alpha-1})], \tag{44}$$

where C_n is an integration constant which couples with the parameters of potential. The above equation leads us to have two distinct choices $++$ and $--$, which are

given by

$$\mathbf{I} : \begin{cases} 2\alpha R + B = -2n\alpha R, \\ A + \alpha Q = C_n - n\alpha Q, \end{cases} \quad \mathbf{II} : \begin{cases} -2\alpha R + B = 2n\alpha R, \\ A - \alpha Q = C_n + n\alpha Q. \end{cases} \quad (45)$$

Substituting $\tau_f(z)$ and $h_f(z)$ using Eqs. (17) and (22), respectively, Eq. (15) can be written as

$$zY''(z) + (1 \pm 2(Rz^{2\alpha} + Qz^\alpha + P))Y'(z) + (C_n - n[\pm(2\alpha Rz^{2\alpha-1} + \alpha Qz^{\alpha-1})])Y(z) = 0. \quad (46)$$

We have two possibilities in writing the above equation

$$\begin{aligned} \mathbf{I} : zY''(z) + (1 + 2P + 2Qz^\alpha + 2Rz^{2\alpha})Y'(z) \\ + (C_n - 2n\alpha Rz^{2\alpha-1} - n\alpha Qz^{\alpha-1})Y(z) = 0, \\ \mathbf{II} : zY''(z) + (1 - 2P - 2Qz^\alpha - 2Rz^{2\alpha})Y'(z) \\ + (C_n + 2n\alpha Rz^{2\alpha-1} + n\alpha Qz^{\alpha-1})Y(z) = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Considering Eq. (47)II, we have

$$Y''(z) + z^{\alpha-1} \left[\frac{1-2P}{z^\alpha} - 2Q - 2Rz^\alpha \right] Y'(z) + z^{2\alpha-2} \left[2n\alpha R + \frac{z^{1-\alpha}C_n + n\alpha Q}{z^\alpha} \right] Y(z) = 0. \quad (48)$$

To solve the above equation, we start by changing the variable $x = \zeta z$ which maps Eq. (48) to the following equation:

$$Y''(x) + x^{\alpha-1} \left[\frac{1-2P}{x^\alpha} - \frac{2Q}{\zeta^\alpha} - \frac{2R}{\zeta^{2\alpha}} x^\alpha \right] Y'(x) + x^{2\alpha-2} \left[\frac{2n\alpha R}{\zeta^{2\alpha}} + \frac{n\alpha Q \zeta^{-\alpha} + \zeta^{-1} C_n x^{1-\alpha}}{x^\alpha} \right] Y(x) = 0. \quad (49)$$

Let us introduce a particular generalization of biconfluent Heun equation,^{25,31} which is written in the canonical form as

$$Y''(t) + t^{\alpha-1} \left(\frac{1+\alpha'}{t^\alpha} - \beta' - 2t^\alpha \right) Y'(t) + t^{2\alpha-2} \left((\gamma' - \alpha' - 2) - \frac{1}{2} [\delta' + (1+\alpha')\beta' t^{1-\alpha}] \frac{1}{t^\alpha} \right) Y(t) = 0, \quad (50)$$

where $y(t)=\text{HeunB}(\alpha', \beta', \gamma', \delta', t)$ are the biconfluent Heun equation. Comparing Eqs. (49) and (50) gives $\zeta = R^{\frac{1}{2\alpha}}$ and our biconfluent Heun equation is written as

$$Y''(x) + \frac{1}{x^{\alpha-1}} \left[\frac{1-2P}{x^\alpha} - \frac{2Q}{\sqrt{R}} - 2x^\alpha \right] Y'(x) + \frac{1}{x^{2\alpha-2}} \left[2n\alpha - \frac{C_n x^{1-2\alpha}}{R^{\frac{1}{2\alpha}}} - \frac{nQ\alpha}{\sqrt{R}x^\alpha} \right] Y(x) = 0. \quad (51)$$

Then, the expanded solutions of Eq. (51) as a series of the form

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{52}$$

and substituting into Eq. (52), the following recurrence relation is obtained for the coefficient of the series expansion:

$$(n + 2)[n + 1 + (1 - 2P)x^{2-2\alpha}]a_{n+2} + \left(\frac{2Q}{\sqrt{R}}(n + 1) - \frac{C_n}{R^{\frac{1}{2\alpha}}}x^{4-4\alpha} - \frac{nQ\alpha}{\sqrt{R}}x^{3-3\alpha} \right) \times a_{n+1} + (2n\alpha x^{2-2\alpha} - 2n)a_n = 0. \tag{53}$$

For large values of n , the series must be cutoff. Thus, we should equate the coefficients of a_{n+2} to zero, which requires that the coefficients of a_{n+1} and a_n should be equal to zero.¹⁶ Then the following constraints are obtained

$$\begin{aligned} \text{I} : [n + 1 + (1 - 2P)x^{2-2\alpha}] &= 0, \\ \text{II} : [2n\alpha x^{2-2\alpha} - 2n] &= 0, \\ \text{III} : \left[\frac{2Q}{\sqrt{R}}(n + 1) - \frac{C_n}{R^{\frac{1}{2\alpha}}}x^{4-4\alpha} - \frac{nQ\alpha}{\sqrt{R}}x^{3-3\alpha} \right] &= 0. \end{aligned} \tag{54}$$

We obtain a characteristic value of x and the constant C_n as

$$\begin{aligned} x = N &= \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2-2\alpha}}, \\ C_n &= \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left[(n + 2) \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - n\alpha^{\frac{3}{2}} \right] Q. \end{aligned} \tag{55}$$

Using Eq. (55), the relation II in Eq. (45) and the set III of parameters in Eq. (42), the constraints on d and the fractional energy eigenvalues are obtained, respectively, as

$$\begin{aligned} d = - \frac{2c \left[c^2 - a \left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^2 \right]}{\left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^3, \tag{56} \\ \times \left(n + 1 + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right) \end{aligned}$$

then β -part that corresponds to the conformable fractional energy is given by the following relation:

$$\begin{aligned} \xi_{L,n,n_\omega,n\tilde{\gamma}}^{(\alpha)} &= \frac{\left[c^2 - a \left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^2 \right]^2}{\left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^4, \\ &\quad \times \left(n + 1 + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^2 \end{aligned} \quad (57)$$

and then the parameter γ is given by

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2c \left[c^2 - a \left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^2 \right]}{\left(n \left[\frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{-2} - \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{2} \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} + \frac{1}{2} \right] + \frac{R^{\frac{1}{2\alpha}}}{\sqrt{R}} \alpha^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^2. \\ &\quad \times \left(n + 1 + \sqrt{B_0 + \frac{\alpha^2}{4}} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

4. $B(E2)$ Transition Rates

In this subsection, conformable fractional $B(E2)$ transition rates are calculated for $^{192,194,196}\text{Pt}$ atomic nuclei. The general quadrupole operator^{19,50} is given by

$$T_\mu^{(E2)} = t\beta \left[D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i)) \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right], \quad (59)$$

where θ_i are the so-called Euler angles and t is a scale factor, while $D^{(2)}$ stands for the Wigner function where index term μ represents the angular momentum quantum number ς (projection ς along the body-fixed \hat{x}' axis).

For triaxial nuclei ($\gamma \approx \frac{\pi}{6}$), the quadrupole operator⁵⁰ takes the form

$$T_\mu^{(E2)} = -\frac{t\beta}{\sqrt{2}} (D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i)), \quad (60)$$

and the $B(E2)$ transition rates^{51,52} are given by

$$B(E2; L_i \zeta_i \rightarrow L_f \zeta_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle L_f \zeta_f || T^{(E2)} || L_i \zeta_i \rangle|^2}{2L_i + 1}, \quad (61)$$

and then, from the Wigner–Eckart theorem⁵¹ the reduced matrix elements can be written as

$$\langle L_f M_f \zeta_f | T_{\mu}^{(E2)} | L_i M_i \zeta_i \rangle = \frac{\langle L_f \zeta_f || T^{(E2)} || L_i \zeta_i \rangle}{\sqrt{2L_f + 1}} \langle L_i 2L_f | M_i \mu M_f \rangle. \quad (62)$$

To calculate the matrix elements of the quadrupole operator of Eq. (60), the integral over $\tilde{\gamma}$ is equal to unity because of normalization method,⁵⁰ the integral over the Euler angles is performed by means of standard integrals of the three Wigner functions⁵¹ and the integral over β takes the form

$$I(n_i, L_i, \zeta_i, n_f, L_f, \zeta_f) = \int \beta \xi_{n_i, L_i, \zeta_i}(\beta) \xi_{n_f, L_f, \zeta_f}(\beta) \beta^4 d\beta, \quad (63)$$

where β and β^4 factors comes from the quadrupole operator and volume element, respectively. Using the Wigner–Eckart theorem, Eq. (61) takes the form

$$\begin{aligned} B(E2; L_i \zeta_i \rightarrow L_f \zeta_f) &= \frac{5}{16\pi} \frac{t^2}{2} \frac{1}{(1 + \delta_{\zeta_i, 0})(1 + \delta_{\zeta_f, 0})} \times [(\langle L_i 2L_f | \zeta_i 2\zeta_f \rangle + \langle L_i 2L_f | \zeta_i - 2\zeta_f \rangle) \\ &+ (-1)^{L_f} \langle L_i 2L_f | \zeta_i - 2 - \zeta_f \rangle]^2 \times [I(n_i, L_i, \zeta_i, n_f, L_f, \zeta_f)]^2. \end{aligned} \quad (64)$$

The Clebsch–Gordon coefficients appearing in the above equation have been deduced by its properties (only $\Delta\zeta = \pm 2$ transitions are allowed).

5. Numerical Results and Discussion

The fractional energy level of each nucleus can be obtained by using Eq. (57) and normalized to $2_{0,0}^+$ state of the ground state band using the formula:

$$R_{L_n, n_\omega}^{(\alpha)} = \frac{E_{L_n^+, n_\omega}^{(\alpha)} - E_{0_{0,0}^+}^{(\alpha)}}{E_{2_{0,0}^+}^{(\alpha)} - E_{0_{0,0}^+}^{(\alpha)}}. \quad (65)$$

Table 1. Free parameters of classical four inverse power terms potential taken from Ref. 25.

Parameter	¹⁹² Pt	¹⁹⁴ Pt	¹⁹⁶ Pt
a	-183.390	-183.390	-183.390
b	47.420	47.420	47.420
c	-107.920	-107.920	-107.920
\bar{c}	1762.766	1561.738	754.171

In Table 1, the free parameters used to evaluate Eq. (57) are listed for each platinum isotope. The four free parameters a , b , c and \bar{c} of the above equation were selected from fitting with the experimental data. In this work, we consider the $^{192,194,196}\text{Pt}$ isotopes since they are the most suitable choice for triaxial nuclei.¹⁴ As described in Refs. 15 and 25, we consider three energy bands, namely: the ground state band, the γ -band and the β -band. The ground state band is described by $n = 0$ and $n_\omega = 0$. The γ -band is distinguished by $(n = 0, n_\omega = 1)$ and $(n = 0, n_\omega = 2)$, respectively, for the odd and the even values of L . The β -band is given by $n = 1$ and $n_\omega = 0$. In order to assess the proximity of our results to the experimental data, the fractional root mean square deviation was calculated using the formula^{15,25}

$$\sigma^{(\alpha)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (E_i(\text{exp}) - E_i^{(\alpha)}(\text{th}))^2}{M}}. \quad (66)$$

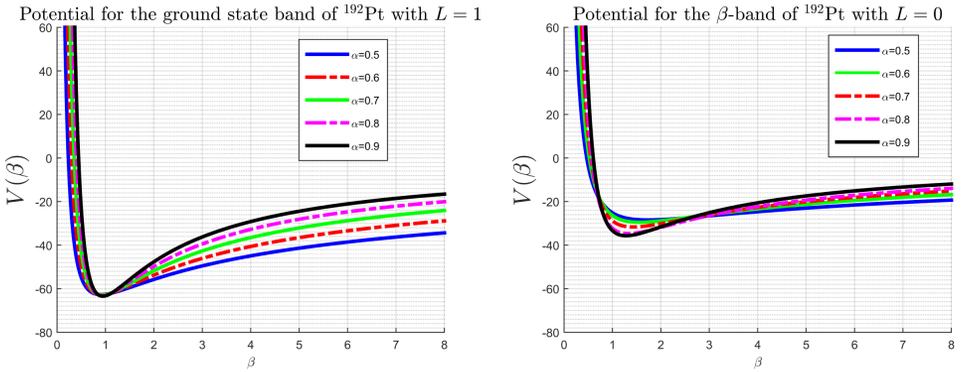


Fig. 1. Variation of the fractional four inverse power terms potential for the ground state band and the β -band of ^{192}Pt as a function of β at different values of α .

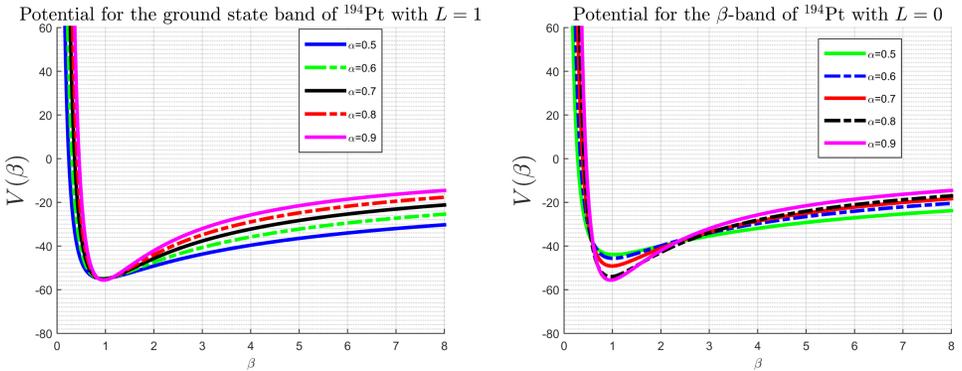


Fig. 2. Variation of the fractional four inverse power terms potential for the ground state band and the β -band of ^{194}Pt as a function of β at different values of α .

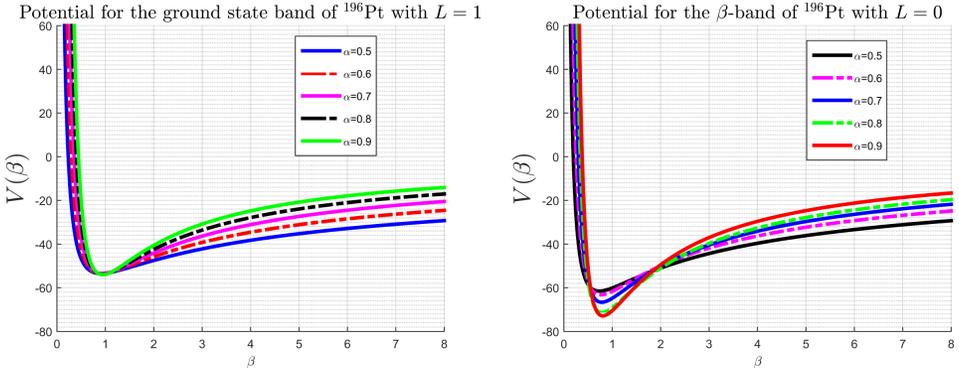


Fig. 3. Variation of the fractional four inverse power terms potential for the ground state band and the β -band of ^{196}Pt as a function of β at different values of α .

For each isotope of platinum, the fractional four inverse power terms potential has been represented as a function of β at different values of α in ground state band and β -band. The plots of the fractional potential are presented for ^{192}Pt isotope in Fig. 1, ^{194}Pt isotope in Fig. 2 and ^{196}Pt isotope in Fig. 3. Equation (56) shows that the parameter d of the potential is a function of the fractional energy eigenvalue. The predictions of our model are compared with the experimental data, classical four inverse power terms potential for platinum isotopes,²⁵ Morse potential¹⁴ and Morse plus Killingbeck potential.¹⁵ Comparison is performed at different values of

Table 2. Comparison of normalized conformable fractional eigen energies for ground state bands, β -bands and γ -bands with experimental data⁴⁸ and those from esM,¹⁴ esMK¹⁵ and Nga²⁵ for ^{192}Pt isotope at different values of α .

L_{band}	Exp.	esM	esKM	Nga.	Our ($\alpha = 0.9$)	Our ($\alpha = 0.8$)	Our ($\alpha = 0.7$)	Our ($\alpha = 0.6$)
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.479	2.475	2.598	2.488	2.519	2.519	2.513	2.500
6_g^+	4.314	4.317	3.597	4.267	4.386	4.385	4.361	4.312
8_g^+	6.377	6.492	4.836	6.148	6.427	6.426	6.367	6.251
10_g^+	8.624	9.001	6.285	7.992	8.499	8.497	8.388	8.177
2_γ^+	1.935	1.907	2.307	1.917	1.932	1.932	1.929	1.923
3_γ^+	2.910	2.364	2.743	2.763	2.803	2.803	2.795	2.778
4_γ^+	3.795	4.815	3.877	4.720	4.871	4.870	4.839	4.777
5_γ^+	4.682	5.060	4.016	4.939	5.106	5.106	5.071	5.001
6_γ^+	5.905	7.875	5.635	7.207	7.607	7.605	7.520	7.354
7_γ^+	6.677	7.647	5.503	7.040	7.419	7.417	7.337	7.179
8_γ^+	8.186	11.203	7.545	9.349	10.074	10.071	9.913	9.611
0_β^+	3.776	3.567	5.177	2.805	2.840	2.967	3.545	3.344
2_β^+	4.547	4.568	5.617	3.625	3.705	3.819	4.352	4.139
4_β^+	6.110	6.087	6.338	4.851	5.012	5.119	5.579	5.340
σ		0.988	0.935	0.705	0.835	0.811	0.694	0.643

Table 3. Comparison of normalized conformable fractional eigen energies for ground state bands, β -bands and γ -bands with experimental data⁴⁸ and those from esMK,¹⁵ esM¹⁴ and Nga²⁵ for ¹⁹⁴Pt isotope at different values of α .

L_{band}	Exp.	esM	esKM	Nga.	Our ($\alpha = 0.9$)	Our ($\alpha = 0.8$)	Our ($\alpha = 0.7$)	Our ($\alpha = 0.6$)
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.470	2.445	2.486	2.484	2.516	2.516	2.510	2.497
6_g^+	4.279	4.280	4.488	4.252	4.374	4.374	4.349	4.298
8_g^+	6.392	6.509	6.728	6.114	6.400	6.379	6.339	6.221
10_g^+	8.671	9.148	9.073	8.932	8.450	8.448	8.338	8.122
2_γ^+	1.894	1.888	1.836	1.916	1.930	1.930	1.927	1.921
3_γ^+	2.809	2.716	2.788	2.757	2.799	2.799	2.791	2.773
4_γ^+	3.743	4.784	5.016	4.701	4.857	4.856	4.824	4.760
5_γ^+	4.563	5.034	5.272	4.9018	5.090	5.090	5.054	4.983
6_γ^+	5.863	7.956	8.053	7.158	7.568	7.567	7.480	7.310
7_γ^+		7.717	7.841	6.994	7.382	7.381	7.279	7.137
8_γ^+	8.186	11.503	10.920	9.265	10.004	10.001	9.841	9.533
0_β^+	3.858	2.349	3.716	2.774	2.816	2.933	3.509	3.311
2_β^+	4.603	3.350	4.717	3.591	3.672	3.784	4.314	4.104
4_β^+	5.817	4.881	6.254	4.811	4.975	5.079	5.535	5.298
σ		1.202	0.989	0.717	0.834	0.810	0.691	0.646

Table 4. Comparison of normalized conformable fractional eigen energies for ground state bands, β -bands and γ -bands with experimental data⁴⁸ and those from esMK,¹⁵ esM¹⁴ and Nga²⁵ for ¹⁹⁶Pt isotope at different values of α .

L_{band}	Exp.	esM	esKM	Nga.	Our ($\alpha = 0.9$)	Our ($\alpha = 0.8$)	Our ($\alpha = 0.7$)	Our ($\alpha = 0.6$)
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.465	2.500	2.321	2.463	2.500	2.500	2.493	2.477
6_g^+	4.290	4.440	3.440	4.170	4.312	4.312	4.294	4.225
8_g^+	6.333	6.767	4.823	50930	6.255	6.254	6.189	6.054
10_g^+	8.558	9.489	6.432	7.609	8.189	8.197	8.068	7.826
2_γ^+	1.936	1.923	1.993	1.905	1.923	1.923	1.919	1.912
3_γ^+	2.854	2.795	2.483	2.729	2.778	2.778	2.768	2.748
4_γ^+	3.636	4.969	3.752	4.598	4.778	4.777	4.742	4.667
5_γ^+	4.525	5.230	3.907	4.804	5.003	5.002	4.963	4.880
6_γ^+	5.644	8.263	5.711	6.899	7.362	7.360	7.266	7.073
7_γ^+		8.016	5.564	6.747	7.186	7.185	7.096	6.913
8_γ^+	7.730	11.900	7.825	8.816	9.634	9.631	9.460	9.118
0_β^+	3.192	3.512	4.931	2.613	2.557	2.764	3.225	3.146
2_β^+	3.828	4.542	5.427	3.418	3.506	3.608	4.120	4.925
4_β^+	4.818	6.140	6.235	4.604	4.784	4.879	5.313	5.085
σ		1.450	1.075	0.602	0.766	0.765	0.739	0.652

the fractional parameter and the results are listed in Table 2 for ^{192}Pt isotope, Table 3 for ^{194}Pt isotope and Table 4 for ^{196}Pt isotope.

Normalized fractional energy eigenvalues of the ground state band, γ -band and β -band are reported in Table 2 for ^{192}Pt . It can be seen that our results are better than those from esMK,¹⁵ esM¹⁴ for $\alpha = 0.6-0.9$ and improved compared to those from Nga²⁵ for $\alpha = 0.6-0.7$. The values of σ decrease as α goes to lower values. Then in Fig. 4, the variations of fractional energies for ground state band and β -band of ^{192}Pt are presented and plotted as a function of the angular momentum quantum number L at different values of α . It is observed that the energy increases monotonically with increasing L . For values of α close to 1 (classical case) the curves get closer. Then for lower values of α the curves are shifted down. For $\alpha = 0.5$ the particular potential $u(\beta) = \frac{d}{\beta^{\frac{1}{4}}} + \frac{a}{\beta^{\frac{1}{2}}} + \frac{c}{\beta^{\frac{3}{4}}} + \frac{b}{\beta}$ has the lowest energy values.

Table 3 presents normalized fractional energy eigenvalues of the ground state band, γ -band and β -band for ^{194}Pt . From this, it can be observed that our results

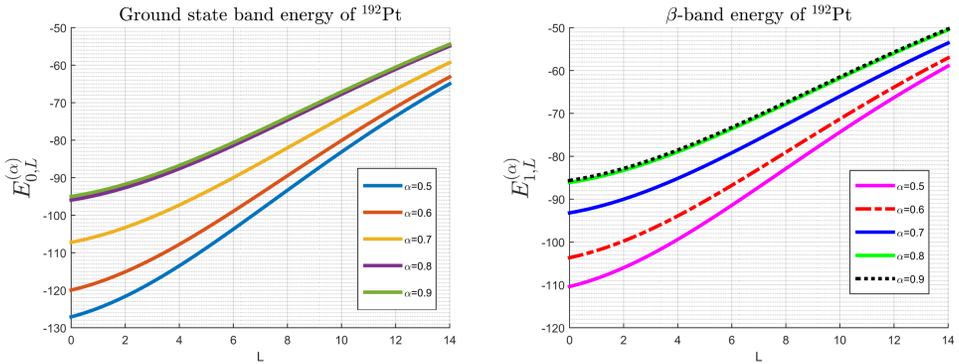


Fig. 4. Fractional ground state band and β -band energy of ^{192}Pt as a function of the angular momentum at different values of α .

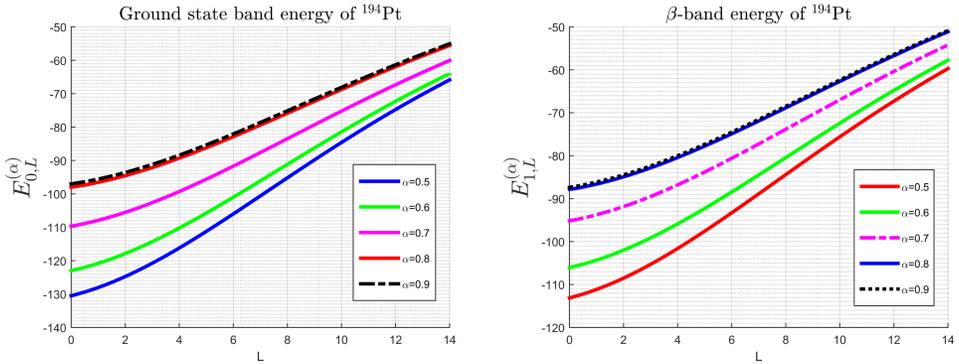


Fig. 5. Fractional ground state band and β -band energy of ^{194}Pt as a function of the angular momentum at different values of α .

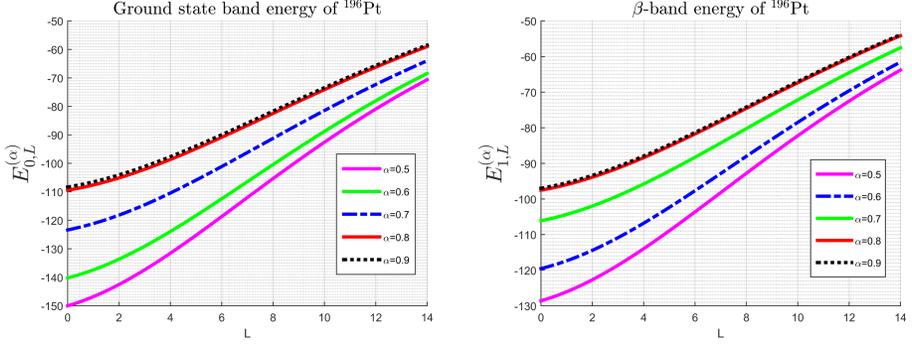


Fig. 6. Fractional ground state band and β -band energy of ^{196}Pt as a function of the angular momentum at different values of α .

Table 5. Comparison of values of fractional $B(E2)$ transition considering ground \rightarrow ground, γ -even \rightarrow ground, γ -odd \rightarrow ground, γ -even \rightarrow γ -even, γ -odd \rightarrow γ -odd, γ -odd \rightarrow γ -even, $\beta \rightarrow \beta$ bands for fractional inverse power terms potential with the experimental data⁵³ and those from esM,¹⁴ esMK,¹⁵ Nga²⁵ and Hammad²⁶ for ^{192}Pt isotope.

Transition	^{192}Pt					This work (^{192}Pt)				
	Exp.	esM	esKM	Nga	$Z(5)$ -CFK	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.563	1.563	0.725	1.464	1.576	1.464	1.465	1.465	1.466	1.466
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	1.224	2.213	0.988	1.968	2.350	1.970	1.971	1.973	1.973	1.974
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$		2.735	1.225	2.391	3.238	2.394	2.397	2.400	2.402	2.403
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$		3.163	1.434	2.824		2.831	2.836	2.840	2.843	2.846
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$	1.910	1.586	0.440	1.495	1.596	0.747	0.748	0.748	0.748	0.748
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$		0.350	1.265	0.310	0.369	0.310	0.310	0.311	0.311	0.311
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$				0.176	0.233	0.176	0.176	0.177	0.177	0.177
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$				0.118		0.118	0.118	0.118	0.118	0.118
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.670	1.236	0.143	1.113	1.297	1.059	1.059	1.059	1.060	1.060
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$				0.882	1.184	0.803	0.803	0.803	0.804	0.804
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$				0.771	1.203	0.669	0.670	0.670	0.670	0.671
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$		0.734	1.553	0.656	0.746	0.328	0.328	0.328	0.329	0.329
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$		1.081	1.739	0.937	1.297	0.938	0.940	0.941	0.941	0.942
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$		1.715	1.890	1.561	2.623	1.564	1.568	1.570	1.573	1.574
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$		1.250	1.259	1.101	1.338	1.102	1.103	1.104	1.104	1.105
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$		1.943	1.472	1.699	2.410	1.702	1.704	1.706	1.708	1.709
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	1.790	2.147	0.431	1.952	2.218	1.954	1.955	1.956	1.956	1.957
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$				1.198	1.643	2.401	2.404	2.407	2.409	2.410
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$				1.233	2.030	2.472	2.477	2.482	2.485	2.488
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$				1.135		1.534	1.239		0.704	0.835
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$				2.007		4.452		2.082	2.086	2.459

are in good agreement with the experimental data for $\alpha = 0.6, 0.7$, and improved in comparison with those from esMK,¹⁵ esM¹⁴ for all values of α , and improved compared to those of Nga²⁵ for $\alpha = 0.6, 0.7$. Figure 5 illustrates the effect of fractional order on energy bands at different values of α . The curves are shifted down for small values of α .

In Table 4 normalized fractional energies are presented for the ground state band, γ -band and β -band of ^{196}Pt . We obtained results close to the experimental data⁴⁸ which are better than those provided by Morse potential¹⁴ and Killingbeck plus Morse potential.¹⁵ Figure 6 shows the plot of fractional energy bands at different values of α . These curves present a behavior similar to that of the curves illustrated by Figs. 4 and 5.

Moreover, for each of the platinum isotopes considered in this study, the depth of the potential well is independent of alpha and is the same when considering the ground state band. On the other hand, in the β -band the depth of the well depends on the fractional parameter α . The potential well becomes shallower when alpha is small.

The CFBH model has been used to calculate $B(E2)$ transition rates for $^{192,194,196}\text{Pt}$ isotopes. The results of our model are listed in Tables 5–7. The predictions of this work were compared with those from the available theoretical exactly solvable models, since the number of available experimental data of $B(E2)$ transition rates is too small. We can see that the results obtained for the $B(E2)$ transition rates of the ground and γ bands are close to the results of Refs. 14, 15, 25, 26 and 48.

Table 6. Comparison of values of fractional $B(E2)$ transition considering ground \rightarrow ground, γ -even \rightarrow ground, γ -odd \rightarrow ground, γ -even \rightarrow γ -even, γ -odd \rightarrow γ -odd, γ -odd \rightarrow γ -even, $\beta \rightarrow \beta$ bands for fractional inverse power terms potential with the experimental data⁵³ and those from esM,¹⁴ esMK,¹⁵ Nga²⁵ and Hammad²⁶ for ^{194}Pt isotope.

Transition	^{194}Pt					This work (^{194}Pt)				
	Exp.	esM	esKM	Nga	$Z(5)$ -CFK	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$
$4^+_g \rightarrow 2^+_g$	1.73	1.630	1.530	1.466	1.579	1.466	1.467	1.467	1.467	1.467
$6^+_g \rightarrow 4^+_g$	1.370	2.334	1.914	1.974	2.361	1.975	1.977	1.978	1.979	1.980
$8^+_g \rightarrow 6^+_g$	1.02	2.835	2.147	2.402	3.264	2.402	2.408	2.411	2.413	2.415
$10^+_g \rightarrow 8^+_g$	0.69	3.187	2.256	2.843		2.850	2.855	2.860	2.863	2.866
$2^+_g \rightarrow 2^+_g$	1.810	1.653	0.936	1.496	1.599	0.748	0.748	0.749	0.749	0.749
$4^+_g \rightarrow 4^+_g$	0.406	0.370	2.419	0.311	0.371	0.311	0.311	0.311	0.312	0.312
$6^+_g \rightarrow 6^+_g$				0.177	0.234	0.177	0.177	0.177	0.177	0.178
$8^+_g \rightarrow 8^+_g$				0.118		0.119	0.119	0.119	0.119	0.119
$3^+_g \rightarrow 4^+_g$		1.305	0.289	1.115	1.303	1.116	1.117	0.118	0.118	0.119
$5^+_g \rightarrow 6^+_g$				0.886	1.194	0.888	0.889	0.890	0.891	0.891
$7^+_g \rightarrow 8^+_g$				0.777	0.218	0.778	0.780	0.781	0.782	0.783
$4^+_g \rightarrow 2^+_g$	0.428	0.776	3.013	0.658	0.748	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311
$6^+_g \rightarrow 4^+_g$		1.112	2.917	0.941	1.308	0.943	0.944	0.945	0.946	0.947
$8^+_g \rightarrow 6^+_g$		1.697	2.765	1.572	2.657	1.576	1.580	1.583	1.585	1.586
$5^+_g \rightarrow 3^+_g$		1.316	2.376	1.105	1.344	1.106	1.107	1.107	1.108	1.108
$7^+_g \rightarrow 5^+_g$		1.994	2.466	1.708	2.432	1.711	1.713	1.716	1.717	1.718
$3^+_g \rightarrow 2^+_g$		2.264	0.883	1.956	2.226	1.958	1.959	1.960	1.961	1.961
$5^+_g \rightarrow 4^+_g$				1.204	1.657	2.413	2.416	2.419	2.421	2.423
$7^+_g \rightarrow 6^+_g$				1.242	2.057	2.491	2.497	2.502	2.505	2.508
$2^+_g \rightarrow 0^+_g$				1.137		1.540	1.048		0.699	0.833
$4^+_g \rightarrow 2^+_g$				2.018		4.471			2.071	2.456

When $\alpha \rightarrow 1$, our results are very close to the classical limit from Nga *et al.*²⁵ In Ref. 26, Hammad *et al.* investigated the $Z(5)$ -CFBH with Kratzer potential. They obtained $B(E2)$ transition rates for ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt atomic nuclei considering $\alpha = 0.9$. Our results are close to those from Morse predictions.¹⁴ Whereas for large values of α , our results are very close to those from Ref. 25. Moreover, for low energy transitions in ground state band and γ band, our results are close to those from.²⁶

In the β -band transitions of $^{192,194,196}\text{Pt}$ isotopes, our results are in good agreement with those from Ref. 25 when $\alpha = 0.5$, and are close to the available experimental data. As mentioned previously, the particular value $\alpha = 0.5$ corresponds to the potential $V(\beta) = \frac{d}{\beta^{1/4}} + \frac{a}{\beta^{1/2}} + \frac{c}{\beta^{3/4}} + \frac{b}{\beta}$. For this particular potential for which the fractional parameter is $\alpha = 0.5$, our results are very close to those from Refs. 14, 25 and 53. Compared to the results of Hammad *et al.*,²⁶ our results are better. This is due to the fact that the four-term inverse potential is a potential that is already quite rich in its form, since it includes the Kratzer potential and the two-term inverse fractional potential.

Table 7. Comparison of values of fractional $B(E2)$ transition considering ground \rightarrow ground, γ -even \rightarrow ground, γ -odd \rightarrow ground, γ -even \rightarrow γ -even, γ -odd \rightarrow γ -odd, γ -odd \rightarrow γ -even, $\beta \rightarrow \beta$ bands for fractional inverse power terms potential with experimental data⁵³ and those from esM,¹⁴ esMK,¹⁵ Nga²⁵ and Hammad²⁶ for ^{196}Pt isotope.

Transition	^{196}Pt					This work (^{196}Pt)				
	Exp.	esM	esKM	Nga	$Z(5)$ -CFK	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.5$
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.490	1.540	0.814	1.475	1.665	1.476	1.476	1.477	1.477	1.477
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	0.950	2.141	1.105	2.004	2.682	2.006	2.008	2.009	2.011	2.011
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$	1.090	2.597	1.365	2.464	4.055	2.469	2.473	2.476	2.478	2.480
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$		2.955	1.590	2.950		2.958	2.965	2.970	2.974	2.977
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$		1.564	0.491	1.505	1.679	0.753	0.753	0.753	0.753	0.754
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.420	0.339	1.411	0.315	0.420	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	0.394			0.181	0.285	0.181	0.181	0.181	0.181	0.182
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$				0.122		0.122	0.122	0.123	0.123	0.123
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$		1.200	0.160	1.131	1.458	1.132	1.133	1.134	1.135	1.135
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$				0.910	1.476	0.911	0.913	0.914	0.915	0.916
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$				0.807	1.672	0.809	0.811	0.812	0.814	0.815
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	0.430	0.716	1.737	0.664	0.817	0.332	0.332	0.332	0.332	0.332
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	1.208	1.022	1.934	0.967	1.646	0.968	0.970	0.971	0.972	0.973
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$		1.589	2.089	1.639	3.830	1.644	1.649	1.652	1.655	1.657
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$		1.205	1.407	1.123	1.544	1.124	1.125	1.126	1.127	1.127
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$		1.834	1.637	1.758	3.119	1.762	1.765	1.768	1.770	1.771
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$		2.094	0.483	1.979	2.444	1.981	1.982	1.984	1.984	1.985
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$				1.238	2.081	2.482	2.486	2.490	2.493	2.495
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$				1.296	2.935	2.601	2.608	2.614	2.618	2.621
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$				1.146		1.569			0.675	0.821
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$				2.078		4.580	3.050		2.017	2.437

6. Conclusion

In this work, a generalization of the Bohr Hamiltonian equation for the four inverse power terms potential to conformable fractional domain is suggested. The CF-ENU was used to obtain the eigenvalues of the energies of the Bohr Hamiltonian equation. The numerical results for fractional energy spectra were presented in Tables 2–4 and compared with the experimental data and other relevant theoretical works using Morse potential and Killingbeck plus Morse potential for ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt isotopes. At different values of the fractional parameter, our results were found to be in good agreement with the experimental data and improved in comparison with predictions from classical four inverse power terms potential, Killingbeck plus Morse potential and the classical Morse potential. Next, $B(E2)$ transition rates were calculated and compared with other theoretical predictions and the available experimental data. At the end of this study, it appears that the fractional domain takes a particularly interesting aspect in the sense that it allows simultaneous access to several classical models sometimes not yet studied. Thus, our results obtained in the fractional domain could reproduce at best the experimental data and would therefore be a good candidate for the search for new states of triaxial nuclei and for the calculation of the transitions between these states.

References

1. A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure Vol. II: Nuclear Deformations* (Benjamin, New York, 1975).
2. R. F. Casten and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3584.
3. F. Iachello and A. Arima, *Interaction Boson Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
4. F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3580.
5. P. Cejnar et al., *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 2155.
6. R. F. Casten et al., *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **34** (2007) R285.
7. F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 052502.
8. F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 132502.
9. L. Wilets and M. Jean, *Phys. Rev.* **102** (1956) 788.
10. A. S. Davydov, *Nucl. Phys.* **24** (1961) 682.
11. M. Capak, D. Petrellis, B. Gonul and D. Bonatsos, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **42** (2015) 095102.
12. I. Inci, D. Bonatsos and I. Boztosun, *Phys. Rev. C* **84** (2011) 024309.
13. I. Boztosun, D. Bonatsos and I. Inci, *Phys. Rev. C* **77** (2008) 044302.
14. I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E* **23** (2014) 1450053.
15. B. T. Mbadjoun, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama, G. H. Ben-Bolie and P. O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **27** (2018) 1850072.
16. H. Sobhani, H. Hassanabadi and W. S. Chung, *Nucl. Phys. A* **973** (2018) 33.
17. L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.* **29** (2003) 1341.
18. Y. Omon, J. M. Ema'a Ema'a, P. E. Abiama, G. H. Ben-Bolie and P. O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **29** (2020) 2050082.
19. D. Bonatsos, D. Lenis and N. Minkov, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 064312.
20. G. Levai and J. M. Arias, *Phys. Rev. C* **69** (2004) 014304.
21. M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51** (2015) 131.

22. M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Int. J. Mod. Phys. E* **24** (2015) 1550089.
23. P. Baganu *et al.*, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **43** (2016) 093003.
24. L. Fortunato, *Eur. Phys. J. A* **26** (2005) s01.
25. D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **28** (2019) 1950106.
26. M. M. Hammad *et al.*, *Nucl. Phys. A* **1015** (2021) 122307.
27. M. M. Hammad, *Phys. Scr.* **96** (2021) 115304.
28. K. S. Miller, *An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* (John Wiley and Sons, New York, 1993).
29. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations* (Academic Press, USA, 1999).
30. R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef and M. Sababheh, *J. Comput. Appl. Math.* **264** (2014) 65.
31. H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkiliç, *Commun. Theor. Phys.* **66** (2016) 12.
32. W. S. Chung, S. Zare and H. Hassanabadi, *Commun. Theor. Phys.* **67** (2017) 250.
33. F. S. Mozaffari, H. Hassanabadi, H. Sobhani and W. S. Chung, *J. Korean Phys. Soc.* **72** (2018) 980.
34. R. Herrmann, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **34** (2007) 607.
35. T. Das, U. Ghosh and S. Sarkar, arXiv:1802.0437v1.
36. O. Tasbozan, Y. Cenciciz and A. Kurt, *Eur. Phys. J. Plus* **131** (2016) 244.
37. K. Hosseini, A. Bekir and R. Ansari, *Opt. Quant. Electron.* **49** (2017) 131.
38. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations* (Academic Press, New York, 1999).
39. M. Caputo and M. Fabrizio, *Prog. Fract. Dier. Appl.* **1** (2015) 73.
40. H. Sobhani, A. N. Ikot and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **132** (2017) 240.
41. Al-Jamel, *Mod. Phys. Lett. A* **33** (2018) 1850185.
42. H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkilic, *J. Math. Phys.* **59** (2008) 053501.
43. Al-Jamel, *Int. J. Mod. Phys. A* **34** (2019) 1950054.
44. A. Bohr, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* **26** (1952) 14.
45. J. Meyer-ter-Vehn, *Nucl. Phys. A* **249** (1975) 111.
46. A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure: Nuclear Deformations*, Vol. II (World Scientific, Singapore, 1999).
47. A. Lemieux and A. K. Bose, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A* **3** (1969) 10.
48. H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkilic, *Phys. Lett. B* **588** (2004) 172.
49. E. A. Elkorchi, M. Chabab, A. El Batoul, A. Lahbas and M. Oulne, arXiv:1903.06504v1[nucl.th].
50. I. Yigitoglu and D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
51. A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957).
52. N. Soheibi, M. Hamzavi, M. Eshghi and S. M. Ikhdair, *Int. J. Mod. Phys. E* **26** (2017) 1750073.
53. D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588** (2004) 172.