

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

FACULTE DES SCIENCES

CENTRE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE EN SCIENCES, TECHNOLOGIES
ET GEOSCIENCES

UNITE DE RECHERCHE ET DE FORMATION
DOCTORALE "PHYSIQUE ET APPLICATIONS"

BP 812 Yaoundé
email: crfd_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

FACULTY OF SCIENCE

POSTGRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
TECHNOLOGY AND GEOSCIENCES

RESEARCH AND POSTGRADUATE TRAINING
UNIT FOR "PHYSICS AND APPLICATIONS"

PO BOX 812 Yaoundé
email: crfd_stg@uy1.uninet.cm

LABORATOIRE DE PHYSIQUE NUCLEAIRE, ATOMIQUE, MOLECULAIRE ET
BIOPHYSIQUE

**ETUDE DU SPECTRE D'ENERGIE DES NOYAUX DEFORMES
DU PLATINE A L'AIDE DU HAMILTONIEN DE BOHR AVEC LA
COMBINAISON DES POTENTIELS DE MORSE ET KRATZER
CRIBLE.**

Thèse

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du
Diplôme de Doctorat/PhD en Physique

Option: Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection

Par :

SOULEYMANOU HAMAN ADAMA

Matricule 12W1100
Master en Physique

Sous la Direction de :

BEN-BOLIE Germain Hubert
Professeur
(Université de Yaoundé I)



Année 2023

Université de Yaoundé I

Faculté des Sciences

Département de Physique

**ETUDE DU SPECTRE D'ENERGIE DES NOYAUX DEFORMES DU
PLATINE A L'AIDE DU HAMILTONIEN DE BOHR AVEC LA
COMBINAISON DES POTENTIELS DE MORSE ET KRATZER
CRIBLE.**

THÈSE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat/PhD en Physique

Option: **Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection**

Par

SOULEYMANOU HAMAN ADAMA

Matricule: 12W1100

Master of Science

Sous la Direction de

BEN-BOLIE Germain Hubert

Professeur

Université de Yaoundé I

Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique

Copyright ©S. Haman Adama, sadamahaman@gmail.com

Année 2023

Dédicace

Je dédie cette thèse à :

Ma maman DIDI HAMADOU qui, par son dévouement, n'a cessé de transmettre des bonnes valeurs morales, le culte de l'effort et du travail bien fait pour mon évolution digne .

Remerciements

Mes remerciements vont :

- Je pense d'abord à mon directeur de thèse, le **Pr. BEN-BOLIE Germain Hubert**, Professeur titulaire au Département de Physique de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I, qui a supervisé ce travail avec un grand intérêt. Ses encouragements ont été constants et progressifs, et j'ai bien bénéficié de ses qualités d'homme de science, de son souci permanent de l'exactitude et surtout de sa vision pour la réorientation de la Physique Nucléaire dans notre pays.

Je voudrais le remercier pour l'abondante documentation qu'il a bien voulu mettre à ma disposition et pour l'encadrement au cours de nos séances des travaux. Les nombreuses discussions que nous avons eues, ont contribué énormément à la réalisation de cette thèse aussi bien sur l'aspect théorique que pratique.

- Au **Pr. NDJAKA Jean Marie Bienvenu**, Chef de Département de Physique, qui a réuni toutes les conditions optimales pour un développement intellectuel en vue d'une formation de qualité des étudiants de tous les Laboratoires du Département de Physique.

- Je remercie chaleureusement le **Pr. Dr.-Ing. OWONO ATEBA Pierre** qui est le fondateur du Laboratoire de Physique Nucléaire de la Faculté des Sciences de l'Université de Yaoundé I et aussi pour ses connaissances des problèmes liés à la Physique Nucléaire.

- Au **Pr. EMA'A EMA'A Jean Marie**, pour son expertise et son soutien constant et indéfectible dans la préparation de cette thèse de Doctorat/PhD et pour toutes nos discussions scientifiques tout au long de ce travail, notamment en ce qui concerne la connaissance profonde des hautes énergies de l'atome.

- Je remercie également les **Docteurs NGA ONGODO Dieudonné, NGOUBI Henock, ANEMENA ETOGA Emmanuel, OMON Yves, TANKOU TAGNE Alain Sylvain, TAKEMBO NTAHKIE Clovis, ALI ZARMA et MVOGO Alain** pour leurs conseils et encouragements.

- Aux **Honorables membres du jury**, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider cette thèse de Doctorat/PhD.

- J'exprime ma gratitude à tous les enseignants du Département de Physique et plus particulièrement aux **Professeurs NJANDJOCK NOUCK Philippe, PEMHA ELKANA, TCHAWOUA Clément, EKOBENA FOU DA Henri Paul, WO AFO Paul, SAÏDOU, ZEKENG Serge, HONA Jacques, MBANE BIOUELE César, NDOP Joseph, BODO Bertrand, EYEBE FOU DA, NOUAYOU Robert, VONDOU Dérbetini, OWONO OWONO Luc Calvin, BOYOMO ONANA Marthe, FEWO Serge Ibrid, NANA ENGO Serge, DJUIDJE Françoise, NANA NBENJO Roméo, SIEWE SIEWE Martin, Mbinack Clément, ENYEGUE A NYAM Françoise** et aux **Docteurs ABDOU-RAHIMI, MELI'I Jorelle Larissa**.

- À mes camarades de promotion **NDIMANTCHI AYOKA, MBA Hilaire, NJOBO Jean Paul**

Justice, FONGANG, GONDI Dieu Suffit, ABBA MOHAMET, NDONGO MENDOUGA et PAYANONG André.

- Je remercie aussi tous les membres du Laboratoire de Physique Nucléaire pour leurs aides, assistances et l'amitié, particulièrement **AHMADOU KATARKALAH, MAH TSILA Philippe, EBODE ONYIE Fabien, MBIDA Serge, TAMIAN FOTSO Kévin Adelphe, TJOCK-MBAGA Thomas, NGUIMSSING Brice Martial, AWE Richard, KOYANG François, YIA ETOLO Hervé Didier, KITCHA SIME Fayette** et **NDZONO Victor-Paulin.**

- À mes camarades de promotion de l'École Nationale Supérieure des Postes, des Télécommunications et des TICs, SUP'PTIC.

- À Mon feu père **HAMAN ADAMA DAOUADA.**

- À mon frère **DELA HAMADOU** et sa femme **ABBE HABIBA**, qui par leurs conseils sans relâche et leurs soutiens financiers ont fait de moi ce que je suis, quoi que je fasse je ne pourrais leur rendre ce qu'ils ont fait pour moi et si je suis arrivé là c'est grâce à eux.

- À tous mes frères et soeurs **DJAWARI MAMA, SALMANA SEPDE, KANPO ETE, MARYAMOU IBRAHIMA, HABIBATOU HAMAN** et **FAOUZIA DJAMILOU.**

- À mon feu cousin **HASSAN** pour m'avoir dit un jour de ne jamais pronocer le mot "Fatigue" car ce mot est pour ceux qui n'ont rien à faire.

Merci à toutes les grandes familles de **GAMBA** et **KALI** donc je fais partie.

Liste des abréviations

CPMK : Combiné des Potentiels de Morse plus Kratzer criblé

ENU : Extended Nikiforov Uvarov

AIM : Asymptotic Iteration Method

HeunC : Confluent de Heun

Pt : Platine

PM : Potentiel de Morse plus Morse

PKM : Potentiel de Killingbeck plus Morse

PFIQT : Potentiel de Fractionnaire Inverse à Quatre Termes

CCG : Coefficient de Clebsch Gordon

Exp. : Expérience

Pt : Platine

MeV : Méga électron Volt

rms : root means square

u : unité de masse atomique

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Liste des abréviations	iv
Table des matières	v
Liste des figures	vii
Abstract	ix
Résumé	x
Chapitre I Revue de la littérature sur les modèles nucléaires	4
I.1 Introduction	4
I.2 Historique de la naissance du noyau atomique	5
I.3 Généralités sur le noyau atomique	6
I.3.1 Présentation de l'atome	6
I.3.2 Les constituants du noyau atomique	6
I.3.3 Interactions dans le noyau atomique	7
I.3.4 Radioactivité des noyaux	8
I.4 Les modèles nucléaires-théoriques pour la description du noyau	16
I.4.1 Modèles macroscopiques (Modèles collectifs)	17
I.4.2 Les modèles microscopiques	24
I.5 Quelques géométries des noyaux atomiques	30
I.5.1 Paramétrisation de la surface nucléaire	30
I.5.2 La déformation triaxiale	36
I.6 Définitions ou explications des termes	37
I.6.1 Le platine	37
I.6.2 La triaxialité	40
I.7 Conclusion	41
Chapitre II Modélisation des transitions d'énergie dans le noyau	42
II.1 Introduction	42

II.2	Présentation du Hamiltonien de Bohr et les solutions des différentes parties de l'équation de Schrödinger	42
II.2.1	Équation de Schrödinger	43
II.2.2	Potentiels nucléaires	44
II.2.3	Mouvement collectif dans les noyaux	45
II.3	Résolution des équations de Schrödinger relatives à la déformation et aux interactions nucléaires	47
II.3.1	Techniques de séparations des différents types de mouvements lors des déformations nucléaires	48
II.3.2	Solutions des équations régissant les rotations (γ) et les vibrations (β) du nucléide	51
II.4	Méthode étendue de Nikiforov-Uvarov	53
II.4.1	Généralités sur la méthode standard de Nikiforov-Uvarov	53
II.4.2	Méthode étendue de Nikiforov-Uvarov avec l'équation de Heun	56
II.5	Résolution de la partie β avec la méthode étendue de Nikiforov-Uvarov	58
II.6	Équation confluyente de Heun	61
II.7	Le spectre d'énergie et la fonction d'onde	64
II.7.1	Le spectre d'énergie	64
II.7.2	La fonction d'onde	65
II.8	Moments des transitions quadripolaires électriques	68
II.9	Conclusion	74
Chapitre III Résultats et discussion		75
III.1	Introduction	75
III.2	Présentation des résultats et discussion	75
III.3	Ratios intra et inter-bande	79
III.3.1	Triaxialité des nucléides	87
III.3.2	Variation du potentiel dûe au paramètre c de la CPMK	88
III.3.3	Effet de l'étalonnage des énergies dans la bande γ	97
III.4	Conclusion	101
Conclusion Générale		102
Appendix		104
Liste des Publications issue de la thèse		106
Références Bibliographiques		107

Liste des figures

Figure 1	La mesure de la masse du noyau $M(A, Z)$ à droite et celle de ses constituants ($Zm_p + Nm_n$) à gauche[59].	14
Figure 2	Énergie de liaison par nucléon[60]	15
Figure 3	Énergie volumique[63]	19
Figure 4	Énergie surfacique[63]	19
Figure 5	Énergie coulombienne[63]	20
Figure 6	Énergie d'assymétrie[63]	21
Figure 7	Énergie d'appariement[63]	21
Figure 8	Énergie de liaison par nucléon avec la contribution de chaque terme[64].	22
Figure 9	Formes correspondant aux différents ordres multipolaires[70].	32
Figure 10	Evolution en temps des modes vibratoires[71].	32
Figure 11	Symétries et formes nucléaires correspondant aux différentes déformations quadrupolaires dans le repère (β, γ) [72]	35
Figure 12	Noyau de forme triaxiale[73]	36
Figure 13	Image du platine[95]	37
Figure 14	Position d'un point en coordonnées P sphériques, la position du point est définie par la distance ρ et par les angles φ et θ	40
Figure 15	Spectre d'énergie de nos résultats théoriques (ligne horizontale noire) comparés aux données expérimentales (ligne horizontale verte) pour l'isotope ^{192}Pt du platine. Les taux de transition $B(E2)$ sont mis en évidence par des flèches et leurs valeurs associées[96].	84
Figure 16	Spectre d'énergie de nos résultats théoriques (ligne horizontale noire) comparés aux données expérimentales (ligne horizontale verte) pour l'isotope ^{194}Pt du platine. Les taux de transitions $B(E2)$ sont mise en évidence par des flèches et leurs valeurs associées[96].	85
Figure 17	Spectre d'énergie de nos résultats théoriques (ligne horizontale noire) comparés aux données expérimentales (ligne horizontale verte) pour l'isotope ^{196}Pt du platine. Les taux de transition $B(E2)$ sont mis en évidence par des flèches et leurs valeurs associées[96].	86
Figure 18	Réprésentation de l'allure de la CPMK pour des isotopes ^{196}Pt , ^{194}Pt et ^{192}Pt du platine dans son état $L_{n,n_\omega} = 4_{0,0}$ en fonction des paramètres libres du Tableau 2[96]	87

Figure 19	Variations de la CPMK dans l' état fondamental ($n = 0, n_{\omega} = 0$), prenant en compte les paramètres numériques du Tableau 2 pour l'isotope ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt respectivement[96].	91
Figure 20	Variations de la CPMK dans la bande γ ($(n = 0, n_{\omega} = 1)$ pour les L impairs et $(n = 0, n_{\omega} = 2)$ pour les L pairs), prenant en compte les paramètres numériques du Tableau 2 pour l'isotope ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt respectivement[96].	94
Figure 21	Variations de la combinaison de la CPMK dans la bande β ($n = 1, n_{\omega} = 0$), prenant en compte les paramètres numériques du Tableau 2 pour l'isotope ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt respectivement[96].	96
Figure 22	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ et les données expérimentales du ^{192}Pt [96].	98
Figure 23	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ et les données expérimentales du ^{194}Pt [96].	99
Figure 24	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ et les données expérimentales du ^{196}Pt [96].	100

Abstract

In this thesis, we propose a new nuclear model capable of studying a deformed system, that of a triaxial nucleus. This model, based on the combination of two potentials, namely the Morse potential and the screened Kratzer potential (CPMK) describes remarkably the nuclear interactions and consequently the deformations undergone by the atomic nucleus. Using Bohr's Hamiltonian equation, we model the motions of the studied nucleus. To solve this equation, a method of separation of variables was used generating two equations : one function of the variable γ , describing the vibrational movement and while the other function of the variable β , describing the movement of rotation in the nucleus. The γ -part is obtained from the potential of the harmonic oscillator while the β -part is resolved in the presence of the (CPMK). Also, the Extended Nikiforov-Uvarov (ENU) method was applied on β to obtain the energy spectrum and the associated eigenfunctions using the Heun Confluent (HeunC). The results demonstrated that a parameter of this potential " c " is a constraint which is a function of energy. This work will be applied to the $^{192,194,196}\text{Pt}$ isotopes of platinum because of their similar properties of conductivity, malleability and the fact they all belong to the family of transition metals. After having calculated the energy spectrum for each platinum isotope, we then compare them with the experimental energy values taken from the literature. In addition, electric quadrupole transition moment probability ratios have been calculated for these isotopes. It emerges from this comparison that our results with our model converge with those obtained by experiment and make the better prediction than that of Morse and Killingbeck plus Morse.

Keywords : Bohr-Hamiltonian ; triaxial nuclei ; Morse plus Kratzer potential ; Extended Nikiforov-Uvarov ; Confluent Heun functions ; wave function ; energy spectra ; $B(E2)$ transition rates.

Résumé

Dans cette thèse, nous introduisons un potentiel dans le modèle nucléaire capable d'étudier un système déformé, celui d'un noyau triaxial. Ce potentiel, basé sur la combinaison de deux potentiels à savoir le potentiel de Morse et celui de Kratzer criblé (CPMK), décrit remarquablement les interactions nucléaires et par conséquent les déformations que subit le noyau atomique. À l'aide de l'équation du Hamiltonien de Bohr nous modélisons les mouvements du noyau étudié. Pour résoudre cette équation, une méthode de séparation des variables a été utilisée générant deux équations : l'une fonction de la variable γ , décrivant le mouvement de vibration et tandis que l'autre fonction de la variable β , décrivant le mouvement de rotation dans le noyau. La partie γ est obtenue à partir du potentiel de l'oscillateur harmonique alors que la partie β est résolue en présence du CPMK. Aussi, la méthode Étendue de Nikiforov-Uvarov (ENU) a été appliquée sur β pour obtenir le spectre d'énergie et les fonctions propres associées en utilisant le confluent de Heun (HeunC). Les résultats obtenus montrent qu'un paramètre de ce potentiel " c " est une contrainte qui est fonction de l'énergie. Ce travail sera appliqué aux isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ du platine à cause de leurs propriétés semblables de conductibilité, malléabilité et le fait qu'ils appartiennent tous à la famille des métaux de transition. Après avoir calculé le spectre d'énergie pour chaque isotope du platine, nous les comparons ensuite aux valeurs d'énergies expérimentales prises dans la littérature. En plus, les rapports de probabilités de moments de transitions quadripolaires électriques ont été calculés pour ces isotopes. Il en ressort de cette comparaison que nos résultats avec notre modèle convergent avec ceux obtenus par l'expérience et font la meilleure prédiction que celle de Morse et Killingbeck plus Morse.

Mots clés : Hamiltonien de Bohr, potentiel de Morse plus Kratzer criblé, noyaux triaxiaux, méthode étendue de Nikiforov-Uvarov, fonction d'onde, spectre énergétique, probabilités de transitions $B(E2)$.

Introduction Générale

Au cours des dernières décennies, les études sur la structure nucléaire ont été concentrées sur les formes de transitions de phase dans les noyaux[1, 2, 3] et elles ont récemment suscité un intérêt significatif tant du point de vue expérimental que théorique. La forme d'un noyau fait partie de ses propriétés fondamentales. Elle est le résultat d'un subtil mélange d'effets macroscopiques et d'effets microscopiques. L'énergie nucléaire au sens microscopique[4] est assimilée à la force de cohésion des nucléons (protons et neutrons) à l'intérieur du noyau d'un atome. Les processus qui libèrent cette énergie sont appelés les réactions nucléaires mais également, la radioactivité (liée à la force nucléaire faible régissant les réactions entre les particules et les neutrons). En effet, dans le souci de répondre au problème d'échanges d'énergies entre la matière et le rayonnement auquel la mécanique classique montrait les limites, les physiciens du XIX^e siècles vont développer une nouvelle mécanique dite "quantique", qui apporte des solutions satisfaisantes à ce problème. Cette nouvelle description des phénomènes physiques se révélera ensuite être un outil très performant dans la compréhension de la structure interne de l'atome, du noyau atomique et la dynamique des systèmes microscopiques grâce à l'équation de Schrödinger.

En 1911, Rutherford, lors de ses expériences faites sur la diffusion des particules alpha sur une cible d'or[4], met en évidence le noyau atomique. Cependant, il réalise que le noyau est en lui-même composé de nucléons. Ces nucléons sont de deux sortes : un, chargé positivement et l'autre étant neutre. Les constituants du noyau atomique ont été effectifs en 1932, par l'identification du proton par Becquerel en 1919 et la découverte du neutron [5] par Chadwick en 1932. Ce modèle planétaire de l'atome présente un gros défaut, car les électrons, quand ils sont accélérés, perdent de l'énergie, et devraient se rapprocher du noyau jusqu'à s'y écraser. Afin de rendre l'atome stable, Bohr crée en 1913, un nouveau modèle de l'atome dans lequel les orbites des électrons sont quantifiées. Les électrons peuvent alors se trouver seulement sur certaines orbites particulières. Ce n'est que lorsque l'électron saute d'une orbite à l'autre qu'il peut émettre ou absorber de l'énergie.

Pour le cas du noyau atomique, plusieurs modèles ont été élaborés en vue d'expliquer la cohésion

et la stabilité du noyau de forme sphérique, à l'instar du modèle de la goutte liquide utilisant les idées classiques et le modèle en couches basé sur la résolution de l'équation de Schrödinger. Cependant, au fur et à mesure que les données expérimentales affluaient, il apparaissait clair que le noyau n'est assurément plus de forme sphérique. Il faut dès lors apporter des modifications à ces modèles pour décrire la structure des noyaux déformés. Ainsi, pour la 1^{ère} fois, Bohr et Mottelson[6, 7] font des travaux pouvant représenter des noyaux qui subissent des déformations nucléaires. Cette description est faite à l'aide d'un hamiltonien connu sous le nom du Hamiltonien de Bohr qui utilise deux variables intrinsèques β (déformation par rapport à la forme sphérique et γ (écart de déviation par rapport à la symétrie de rotation) avec trois angles d'Euler (θ, φ, ϕ)[8, 75].

Récemment, les solutions analytiques de Iachello [1, 2] ont donné un nouvel élan au Hamiltonien de Bohr, puisqu'elles sont considérées comme des exemples des symétries de points critiques. La symétrie $E(5)$ [1] est connue pour décrire la transition de phase du 2nd ordre entre des noyaux sphériques et γ -instables, tandis que la transition de phase de 1^{er} ordre entre les noyaux rotatifs déformés à déformations vibrationnelles et à symétrie axiale est décrite par la symétrie $X(5)$ [2]. Dans ce contexte, une attention particulière est consacrée au développement de solutions analytiques de l'Hamiltonien de Bohr avec différents modèles potentiels pour étudier les transitions de forme des noyaux. Il est à noter que le choix du potentiel est d'une importance capitale pour la résolution du Hamiltonien de Bohr. Pour la variable β , les potentiels ont déjà été utilisés, à l'exemple du potentiel de puits carré[1], du potentiel à puits infinis, potentiel de Kratzer [10, 11, 12, 13], Kratzer criblé[14], Morse[15, 16, 17], Sextic[18, 19, 20, 21, 22, 23, 24], Killingbeck[25, 26], Killingbeck plus Morse[27], Davidson[28, 29], PFIQT [30] et autres. La déformation quadripolaire, la plus courante parmi les noyaux déformés, est liée aux probabilités de transitions quadripolaires, $B(E2)$ entre les états excités, constituants des mesures directes de la collectivité. Pour une forme triaxiale, la surface des noyaux oscille uniformément sur la coordonnée γ de la forme allongée à la forme oblique [31]. Il est désormais commode d'utiliser le potentiel oscillateur harmonique ayant un minimum d'angle autour de $\gamma = \frac{\pi}{6}$ [32, 33] pour les noyaux triaxiaux.

Inci[34], dans ses travaux, utilise le potentiel de Morse pour les noyaux triaxiaux. Dans son modèle, il obtient des valeurs propres d'énergies et les fonctions d'ondes après utilisation de la méthode de séparation des variables β et γ du Hamiltonien ; la partie β est résolue en présence de ce potentiel. Pour faire ça, différentes méthodes de résolutions ont été utilisées, telles que :

méthode de Nikovorov-Uvarov[35, 36, 37, 38, 39], "exact quantization rule" [40, 41], "proper quantization rule" [42, 43, 44], "AIM" [45, 46], "1/N shifted expansion" [47], "factorization method" [48, 49, 50] et autres [51, 52, 53, 54, 55]. Ces résultats ont été appliqués aux isotopes 192, 194 et 196 du platine pour générer les spectres énergétiques. Par la suite Tchana et al, utilisent l'Hamiltonien de Bohr et le potentiel de Killingbeck associé à celui de Morse (PKM) pour les noyaux triaxiaux et obtiennent des résultats plus fiables [27] que ceux de Inci[34]. Toutefois, on constate que certains écarts persistent entre ses valeurs et les valeurs expérimentales. Ce travail a donc pour objectif de réduire ces écarts. En effet dans cette thèse, nous proposons un nouveau modèle permettant constitué de deux potentiels qui sont : les potentiels de Morse et Kratzer criblé dont l'intérêt est d'améliorer les résultats proposés dans les travaux antérieurs.

Pour mener à bien notre étude, le présent document sera articulé sur trois chapitres :

- Le 1^{er} Chapitre sera dédié à la revue de la littérature sur les modèles nucléaires des noyaux sphériques et déformés après avoir traité des généralités sur le noyau atomique et la radioactivité,
- Dans le 2nd Chapitre nous présentons la méthode Étendue de Nikiforov-Uvarov (ENU), l'équation du Heun Confluent (HeunC). Puis nous modélisons notre noyau triaxial à partir du Hamiltonien de Bohr et enfin nous cherchons la solution de cette équation aux moyens de ces méthodes ;
- Le 3^{eme} Chapitre est quant à lui consacré à la présentation des résultats du modèle, de leur discussion et à la comparaison de nos résultats obtenus avec ceux de littérature. Puis suivra une conclusion générale de ce travail plus des perspectives.

REVUE DE LA LITTÉRATURE SUR LES MODÈLES NUCLÉAIRES

I.1 Introduction

En physique nucléaire, l'étude des propriétés statiques des noyaux est importante pour la compréhension de la structure du noyau atomique bien qu'elle ne soit pas accessible au public non spécialiste[27], car elle se présente toujours sous la forme théorique. La matérialisation du phénomène nécessite une représentation symbolique dans l'esprit de la définition littéraire issue du dictionnaire Larousse du mot noyau qui fait référence à une boule imaginaire. Cette façon de voir le noyau comme une boule par le profane, ne fait appel à aucune considération physique notamment les diverses formes qu'il peut prendre, les déformations qu'il peut subir et surtout les interactions qui existent non seulement entre ses constituants et lui, mais aussi avec ses voisins et encore moins les différents chocs dont il est victime (enthalpie, entropie) lors des différents mouvements qu'il effectue dans le milieu ambiant où il se trouve.

Dès lors, naîtra une entité physique et représentative capable de suivre, réguler et donner toutes les informations possibles (position, vitesse, énergie) y afférentes par rapport au noyau atomique : la notion de potentiel nucléaire [56]. C'est pourquoi ce chapitre est consacré à l'étude de quelques généralités sur les modèles nucléaires qui ont permis de comprendre la structure du noyau atomique, en insistant sur les modifications apportées sur ceux-ci, des diverses déformations nucléaires subies ; selon la configuration géométrique du noyau. Nous ferons au préalable la présentation du noyau atomique avec des différentes interactions nucléaires enregistrées et des rappels sur la radioactivité.

I.2 Historique de la naissance du noyau atomique

Autour du IV^e siècle av. J.-C. Leucippe et Démocrite défendent le principe de la théorie atomiste proposant une conception d'un univers discontinu basé sur l'hypothèse que la matière est constituée de petites particules nommées atomes. Ce n'est qu'au XIX^{ème} siècle que les fondements de la théorie atomique moderne sont jetés. En 1911, E.Rutherford découvre le noyau atomique. Il comprend que le noyau est lui-même composé de nucléons ; ces nucléons sont de deux sortes, avec une charge positive - les protons, et neutres - les neutrons[4]. Quelques années plus tard, c'est-à-dire en 1919, il effectua la première réaction nucléaire en bombardant de l'azote avec un faisceau de particules alpha. Cette réaction crée de l'oxygène, de l'énergie et une particule p . Cette dernière possède une charge électrique opposée à celle de l'électron et une masse environ égale à celle de l'hydrogène : le proton venait d'être découvert. Mais ce n'est qu'en 1932 que le neutron sera effectivement découvert par J. Chadwick, en étudiant les rayons neutres émis par le béryllium lorsque celui-ci est bombardé de particules alpha. Chacune a une masse très légèrement supérieure à celle du proton et est électriquement neutre, cela lui vaut son nom : le neutron[57]. Ce modèle planétaire de l'atome présente un gros défaut, car les électrons, quand ils sont accélérés, perdent de l'énergie, et devraient donc se rapprocher du noyau jusqu'à s'écraser. Afin de rendre l'atome stable, N. Bohr crée en 1913 un nouveau modèle de l'atome dans lequel les orbites des électrons sont quantifiées, les électrons peuvent se trouver seulement sur certaines orbites particulières. Ce n'est que lorsque l'électron saute d'une orbite à l'autre qu'il peut émettre ou absorber de l'énergie. Ce modèle a ses limites. Dans années 1930 la formule de masse a été établie par H. Bethe et C.F.V. Weizsäcker et le concept de la goutte liquide modélisant le noyau comme une sphère était conçue. Avec la découverte de la fission des uraniumes (1939), les limites du modèle de la goutte liquide apparaissent aussi évidentes, car il ne décrivait que partiellement la fission de l'Uranium.

Plus tard, des modélisations sont introduites afin de comprendre le noyau, comme en 1949, quand M. Mayer introduit le modèle en couches, et en 1950 et 1951 quand J. Rainwater et N. Bohr introduisent le modèle collectif du noyau déformé, ce qui a conduit à la découverte des nombres dits magiques et à la compréhension des effets quantiques de certains noyaux sphériques ou déformés.

Aujourd'hui, afin de tester la validité des modèles nucléaires actuels, on s'intéresse à l'étude

des noyaux atomiques dans des conditions extrêmes de déformation. Après avoir donné les éléments permettant de cerner d'où vient le noyau, à présent, nous nous intéressons aux généralités sur le noyau atomique.

I.3 Généralités sur le noyau atomique

Dans cette partie, une étude détaillée du noyau de l'atome est présentée. D'abord sa nomenclature est abordée, ensuite les interactions qui permettent aux nucléons de rester ensemble, et donc de maintenir la cohésion du noyau. Enfin les radioactivités, conséquence d'un déséquilibre entre ces interactions sont exposées.

I.3.1 Présentation de l'atome

D'après les idées actuelles de la Physique Moderne, l'atome est comparable à un système planétaire dont le centre est le noyau (renferment la totalité de sa masse), chargé positivement et surtout autour duquel gravitent des électrons. Les atomes sont des particules qui composent la matière. Au centre de l'atome, il y a un noyau, composé de neutrons et de protons. Autour de ce noyau se trouvent des particules en mouvement très rapide, des électrons.

I.3.2 Les constituants du noyau atomique

Les protons et les neutrons qui composent le noyau, sont communément appelés nucléons. Les différents noyaux ou nucléides se distinguent donc par le nombre de protons Z et de neutrons N qui les constituent. Le nombre de protons indique l'élément chimique du noyau considéré. La manière la plus commune d'écrire un noyau particulier est A_ZX , souvent abrégée AX , où :

→ A est le nombre de masse, qui est encore le nombre de nucléons ($A = Z + N$);

→ Z est le numéro atomique, qui est encore le nombre de protons.

Dans un noyau on distingue :

→ les isobares qui sont les noyaux ayant le même nombre de masse A et Z différent ;

→ les isotopes qui sont les noyaux ayant le même numéro atomique Z , mais un nombre différent de neutron ;

→ les isotones qui sont les noyaux ayant le même nombre de neutrons N , mais de Z différents ;

→ les isomères nucléaires ont le même nombre de neutrons et de protons, mais pas la même énergie.

Un proton est constitué de deux quarks up et d'un quark down tandis que le neutron quant à lui est formé de deux quarks down et d'un quark up. Dans le modèle de la Chromodynamique Quantique (CDQ) (Nobel 2004), les protons et les neutrons ne sont pas constitués uniquement de quarks up et down, mais également d'une mer de paires de quarks et d'antiquarks.

Dans la suite, nous nous intéressons aux divers phénomènes qui se passent à l'intérieur du noyau atomique, les interactions qui permettent aux nucléons de rester ensemble, et donc de maintenir sa cohésion.

I.3.3 Interactions dans le noyau atomique

Les interactions ou forces fondamentales, qui régissent tous les échanges physiques sont au nombre de quatre : l'interaction gravitationnelle, l'interaction électromagnétisme, l'interaction forte et l'interaction faible. La première a une très petite intensité. Elle n'intervient pas dans le cadre du noyau. Les trois autres jouent toutes un rôle dans la stabilité ou l'instabilité des noyaux.

I.3.3.a) Interaction forte

L'interaction forte est très intense, mais de très faible portée (10^{-15} m environ, soit la taille des nucléons). Elle permet de lier les quarks entre eux pour former les hadrons, dont elle maintient la cohésion. C'est parmi ces hadrons que se trouvent les neutrons et les protons qui constituent les noyaux, les nucléons étant eux-mêmes un assemblage de 3 quarks. Par contre les électrons, les photons et les neutrinos ne sont pas des quarks. À l'échelle du nucléon, il existe une force résiduelle des interactions fortes entre les 3 quarks. Cette force, appelée force nucléaire, se manifeste à l'échelle du noyau par le fait que chaque nucléon attire ses voisins directs. Plus le nombre de nucléons est important dans le noyau, plus le rapport surface sur volume est petit, et plus l'interaction forte joue un rôle de maintien de la cohésion nucléaire.

I.3.3.b) Interaction électromagnétique

L'électromagnétisme régit les interactions entre particules chargées électriquement. Cette interaction est moins intense que l'interaction forte, mais a une portée infinie. Cette interaction est attractive entre deux particules de charges opposées et répulsive pour des particules de charges de même signe. À l'échelle du noyau, cette interaction est responsable de la répulsion entre protons, appelée répulsion coulombienne. En effet, ceux-ci ont tous une charge électrique positive

et se repoussent.

I.3.3.c) Interaction faible

L'interaction faible est responsable du changement de nature des quarks. Elle est appelée interaction faible car elle est beaucoup moins intense que les interactions électromagnétique ou forte (environ 10⁶ fois moins intense que cette dernière). Le changement de nature des quarks dont est responsable l'interaction faible, permet de changer un neutron en proton, ou inversement.

Au vu de cette configuration, le noyau exploserait du fait de l'interaction coulombienne de répulsion entre les protons dans un si faible volume, s'il n'existerait pas entre les nucléons une force de liaison à courte distance suffisamment grande pour palier d'un côté cet effet et de l'autre maintenir la cohésion en son sein. Cependant, dès l'année 1896 Henri Becquerel découvre le phénomène de la radioactivité lors d'une étude sur l'uranium et confirmée par la suite par Pierre et Marie Curie avec le Radium. La radioactivité est le signe d'une dynamique interne, le noyau n'est donc pas un système statique mais en perpétuel activité et transformation.

I.3.4 Radioactivité des noyaux

La radioactivité est une transformation spontanée, que nous ne pouvons ni arrêter, ni accélérer, ou ralentir, d'un noyau père situé dans un état énergétique instable à un autre noyau (stable ou non) avec émission d'un rayonnement nucléaire (particule ou onde électromagnétique). Au cours de ce phénomène, à tout instant, une fraction fixe et caractéristique des noyaux présents se transforme spontanément en d'autres atomes, tout en émettant simultanément des particules matérielles que sont l'électron, noyau d'hélium et de l'énergie constituée des photons et énergie cinétique. C'est aussi la manifestation spontanée d'une réaction nucléaire dans laquelle un noyau radioactif, dit noyau père, se désintègre en un autre noyau, appelé noyau fils, en émettant une particule α , β^- , β^+ , rayonnement γ , capture électronique ou conversion interne. Le noyau fils ainsi obtenu se rapproche de la vallée de stabilité. On distingue deux types de radioactivités :

→ La radioactivité naturelle : Dans la nature, la plupart des noyaux d'atome sont stables. Cependant, certains atomes ont des noyaux instables. Les noyaux d'atomes se transforment spontanément en d'autres noyaux d'atomes radioactifs ou non. Il existe deux grands groupes de radionucléides naturels :

✓ Des radionucléides d'origine cosmique ou "cosmonucléides" qui se forment par l'action des rayons cosmiques sur des noyaux d'atomes présents dans notre environnement ; ils sont parfois appelés "radionucléides naturels induits" ;

✓ Des radionucléides dits "primordiaux", qui étaient présents au moment de la formation de la terre et que l'on trouve aujourd'hui encore dans l'écorce terrestre. Les radionucléides primordiaux répertoriés au nombre d'une trentaine ont des périodes supérieures à 700 millions d'années et sont peu instables : il leur suffit d'une seule désintégration pour se transformer en noyaux stables. Mais trois d'entre eux ont un comportement particulier, il s'agit de l'Uranium 238, de l'Uranium 235 et du Thorium 232. Ces trois nucléides primordiaux, beaucoup plus lourds que les autres, nécessitent une longue série de désintégration avant d'aboutir à un noyau stable qui, dans les trois cas, est un isotope de Plomb. Ces trois radionucléides peuvent être trouvés en traces dans plusieurs minerais (le phosphate par exemple).

→ La radioactivité artificielle : les radionucléides produits par l'homme ont la particularité essentielle d'avoir été introduits brutalement, à l'échelle du globe, par les essais nucléaires dans l'atmosphère ou l'échelle locale lors des opérations du cycle du combustible des centrales nucléaires.

Les radionucléides artificiels font contaminer l'environnement, les principales causes de cette contamination sont :

✘ les retombées des essais militaires atmosphériques ont libéré des produits de fission en majorité du ^{137}Cs ainsi que les isotopes du Plutonium (^{238}Pu , ^{239}Pu , ^{240}Pu et ^{241}Pu). Ces retombées ont engendré une contamination chronique de l'environnement notamment en ^{137}Cs , qui continue à persister actuellement ;

✘ les retombées dues à l'accident nucléaire de Tchernobyl ;

✘ les activités utilisant ou produisant des radionucléides artificiels pour la médecine, l'industrie, la recherche (sources scellées et non scellées).

Les noyaux dits radioactifs peuvent se désintégrer (transformation de la matière en énergie) suivant plusieurs modes selon la composition de ses nucléons et la nature de l'excitation reçue par le noyau.

Différents types de désintégrations

Lors des désintégrations des noyaux radioactifs, des rayonnements ionisants d'énergie élevées sont émis. Grâce aux travaux de Pierre et Marie Curie, Becquerel et Rutherford, il a été établi que le rayonnement émi par les substances radioactives, renferme trois catégories de radiation, à savoir alpha (α), bêta (β) et la capture électronique. Elles se distinguent par leurs pouvoirs d'ionisation, responsables de leurs pouvoirs de pénétration différents.

✓ Désintégration (α)

Les particules alpha sont des noyaux d'hélium comportant deux protons et deux neutrons (4_2He). L'émission (α) concerne les noyaux lourds. Des atomes dont les noyaux radioactifs sont chargés en protons et neutrons émettent souvent un rayonnement (α). Ils se transforment en un autre élément chimique dont le noyau est plus léger. L'énergie libérée par la désintégration est emportée sous forme d'énergie cinétique par la particule (α) et le noyau de recul. Les rayonnements alpha sont peu pénétrants, facilement arrêtés par une feuille de papier et leur trajet ne dépasse pas quelques dizaines de micromètre dans les tissus biologiques. L'équation générale de la désintégration est donnée par :



C'est une radioactivité produite par l'interaction forte. Elle se passe généralement avec les noyaux à partir de $Z = 84$. En dessous de cette valeur, il existe peu d'émissions alpha.

✓ Désintégration β^-

La radioactivité (β^-) se produit dans les noyaux trop riches en neutrons, se situant sous la vallée de stabilité de la carte des nucléides. Elle est l'émission d'électrons par certains noyaux. Cette émission est accompagnée de celle d'une particule appelée antineutrino électronique ${}^0_0\bar{\nu}$ (particule de masse nulle) . Lors de cette désintégration un des neutrons est transformé en proton. Le noyau résultant est le plus souvent instable car en perdant un électron il ne correspond pas forcément à un isotope stable du nouvel élément.

De manière générale la désintégration (β^-) peut s'écrire sous la forme :



C'est une radioactivité produite par l'interaction faible.

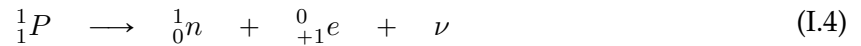
✓ Désintégration β^+

La radioactivité (β^+) correspond à une désintégration accompagnée de l'émission d'un positron ${}^0_{+1} e$, qui est une particule de masse égale à celle de l'électron et de charge électrique opposée. Au cours de cette émission, un des protons est transformé en neutron et un positron est émis ainsi qu'un neutrino ν . Le noyau résultant possède un neutron supplémentaire et un proton en moins et est le plus souvent instable. Le noyau résultant possède un neutron supplémentaire et un proton en moins et est le plus souvent instable.

De manière générale, la désintégration (β^+) peut se mettre sous la forme :



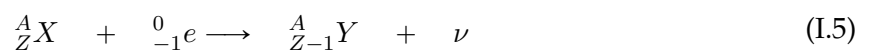
Cette équation se résume au sein du noyau par :



C'est une radioactivité produite par l'interaction faible.

✓ Capture électronique

La désintégration par capture électronique est une désintégration isobarique due à un excès de protons. Le noyau capture un électron des couches internes du cortège électronique de l'atome transforme un proton en un neutron, et émet un neutrino.



C'est une radioactivité produite par interaction faible.

✓ Désexcitation γ

Tout comme les atomes, les noyaux peuvent se trouver dans un état excité. La désexcitation d'un noyau Y^* vers son état fondamental Y se fait soit par transition directe si l'énergie du photon γ émis est égale l'énergie d'excitation du noyau.



L'effet des rayons γ est très différent de celui de particules chargées. Alors que les rayons α et β déposent leur énergie progressivement, les photons γ déposent soit la totalité de leur énergie ou rien. Ils ne produisent aucun effet avant d'interagir avec un noyau ou un électron. Quand ils interagissent, ils mettent en mouvement des particules chargées. Ce sont elles qui déposeront l'énergie dans la matière. Les rayons γ sont des ondes électromagnétiques de très courte longueur d'onde, et donc extrêmement pénétrantes qui causent des gros dommages au corps humain.

Toutes ces désintégrations ne se font pas au hasard, mais suivant un certain nombre de règles et de lois bien précises.

Lois de conservation

Aucours des réactions nucléaires (la radioactivité naturelle ou artificielle, la fission nucléaire, la fusion nucléaire, le bombardement,), un noyau atomique subit une transformation avec formation d'autres produits.

Dans toute réaction nucléaire, de nombreuses lois de conservation du noyau atomique sont observées :

✕ la conservation du nombre de masse ou du nombre de nucléons : cette loi se traduit par $\Sigma A = \text{constante}$. Pour les électrons, les positrons et les neutrons, on considère que $A = 0$;

✕ la conservation de la charge électrique : la charge se conserve quelle que soit la nature de l'interaction. Cette loi se traduit par la relation $\Sigma Z = \text{constante}$. Lorsqu'un électron (de charge négative) ou un positron (de charge positive) intervient dans une réaction nucléaire, on doit considérer que $Z = -1$ et $Z = +1$ respectivement ;

✕ la conservation de la masse-énergie : lors d'une réaction $X(a, b)Y$, la loi relative à la conservation de la masse énergie s'écrit : $(m_a C^2 + T_a) + m_x = (m_b C^2 + T_b) + (m_y C^2 + T_y)$ où m_a, m_b, m_x

et m_y sont les masses au repos ; T_a , T_b et T_y sont les énergies cinétiques ;

✘ la conservation de l'impulsion ou de la quantité du mouvement : les lois de conservation de l'énergie totale et de l'impulsion totale s'appliquent à toutes les interactions et sont le point de départ obligé de tout calcul cinématique. Cette loi est donnée par $\sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_i$ où \vec{p}_f et $\sum \vec{p}_i$ sont les impulsions finales et initiales respectivement ;

✘ la conservation du moment cinétique total : lors d'une interaction nucléaire le moment angulaire ou moment cinétique total est conservé. La loi de conservation s'écrit $\sum \vec{j}_f = \sum \vec{j}_i$ avec $\vec{j} = \vec{L} + \vec{S}$ où \vec{L} est le moment cinétique orbital et \vec{S} est le spin.

Divers types d'émissions et de particules ont été identifiées lors des désintégrations d'un modèle d'un nucléide, cependant la connaissance des masses atomiques et de l'unité de mesure de ces entités sont d'une importance capitale pour la suite de ce travail.

L'unité de masse, la masse atomique et le défaut de masse

a. L'unité de masse atomique en fonction de son équivalent en énergie

Il est question ici d'exprimer les équivalences relatives aux unités du système international des différents constituants du noyau atomique présentés ci-dessus :

- ♣ Unité de masse atomique u : $1u = 1,66054 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.5 \text{ MeV}/c^2$;
 - ♣ Masse de l'électron : $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg} = 5.4858 \times 10^{-4} u = 0,511 \text{ MeV}/c^2$;
 - ♣ Masse du proton : $m_p = 1,67264 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,007276 u = 938,28 \text{ MeV}/c^2$;
 - ♣ Masse du neutron : $m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,008665 u = 939,57 \text{ MeV}/c^2$;
- où c est la célérité de la lumière dans le vide qui est de l'ordre de $3 \times 10^8 \text{ m/s}^{-1}$.

b. la masse atomique

Puisque l'atome neutre est constitué du noyau autour duquel gravitent Z électrons[58] , nous pouvons écrire sa masse sous la forme :

$$M(A, Z) = Zm_p + Nm_n + Zm_e - \frac{\mathcal{E}_l}{C^2}, \quad (\text{I.7})$$

où $M(A, Z)$ est la masse du noyau atomique, Zm_e la masse des électrons qui gravitent autour du noyau et \mathcal{E}_l est l'énergie de cohésion (liaison) du noyau atomique. Nous pouvons tout de suite constater que l'énergie de l'atome est inférieure à l'énergie de ses différents constituants,

cet excédent d'énergie notée E_l est appelé énergie de liaison du noyau atomique. Cette manière de comprendre le noyau atomique s'explique par le schéma ci-dessous :

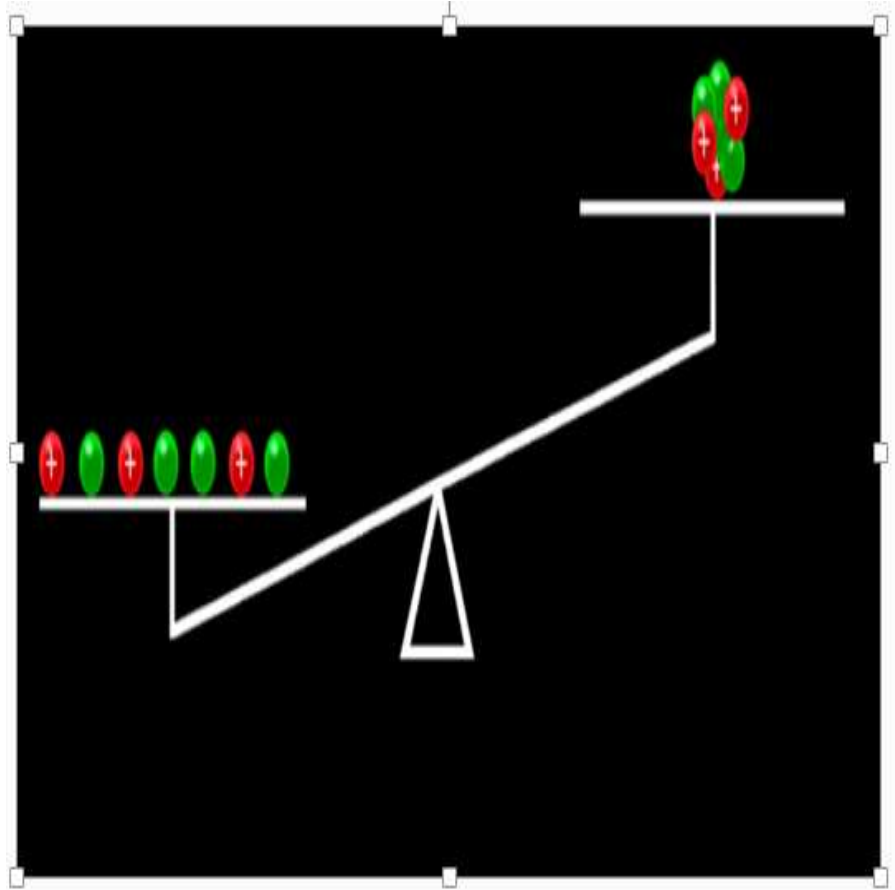


FIGURE 1 – La mesure de la masse du noyau $M(A, Z)$ à droite et celle de ses constituants ($Zm_p + Nm_n$) à gauche[59].

c. Le défaut de masse

La masse d'un noyau est toujours inférieure à la somme de celles de ses constituants, l'excédent de masse est appelé défaut de masse $\Delta(A, Z)$ donné par :

$$\Delta(A, Z) = Zm_p + Nm_n - M(A, Z). \quad (\text{I.8})$$

Cette énergie supplémentaire a pour rôle :

- de maintenir l'ensemble et assurer la cohésion du noyau et ;
- d'assurer la liaison nucléaire.

d. L'énergie de liaison du noyau

C'est l'énergie qu'il faut fournir pour séparer tous les nucléons du noyau. Elle est pratiquement la même dans tous les noyaux, approximativement 8 milliards d'électron volts. On peut la comprendre grâce à un modèle identifiant le noyau à une goutte liquide. À une énergie totale proportionnelle au nombre de nucléons (terme de volume), il faut soustraire une correction due à la présence d'une surface (équivalente à une tension superficielle) et une autre due à la répulsion coulombienne des protons comme pour une goutte chargée

$$\varepsilon_l = \Delta(A, Z)c^2 = (Zm_p + Nm_n - M(A, Z))c^2 \quad (\text{I.9})$$

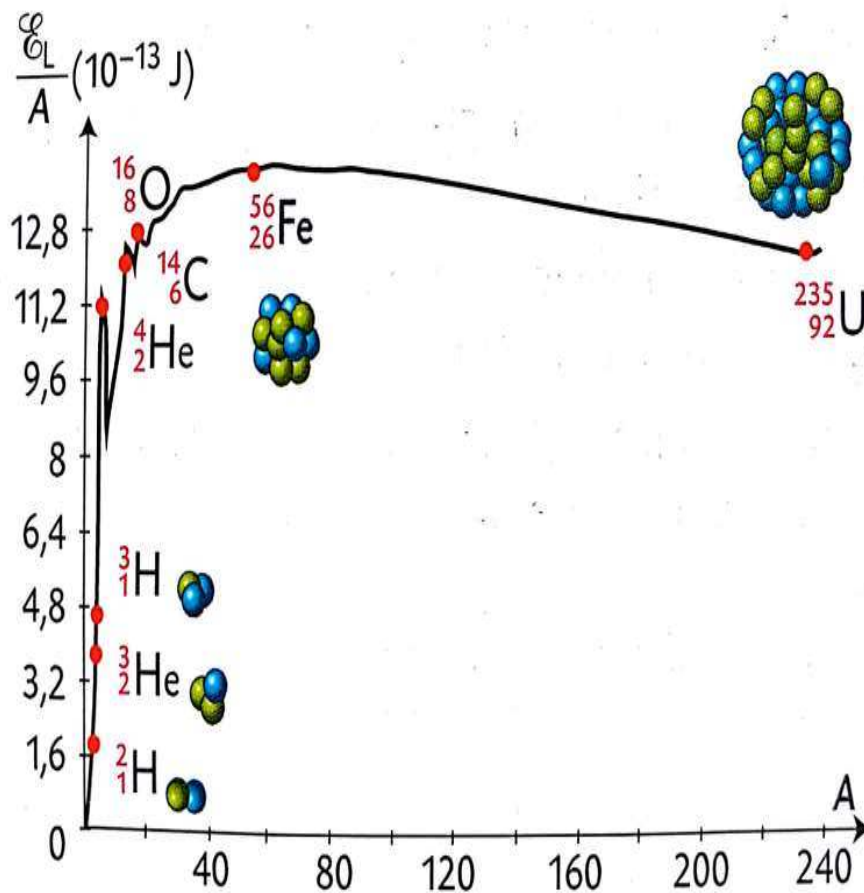


FIGURE 2 – Énergie de liaison par nucléon[60]

e. L'énergie de séparation

→ L'énergie de séparation du "dernier" neutron (neutron le moins lié) \mathcal{E}_n est l'énergie qu'il faudrait fournir au noyau atomique pour lui arracher ce neutron. Elle est donnée par

$$\mathcal{E}_n(A, Z) = (M(A - 1, Z) + m_n - M(A, Z))c^2 \quad (\text{I.10})$$

où $M(A, Z)$ désigne la masse du noyau A_ZX , $M(A - 1, Z)$ désigne la masse du noyau résultant (qui a perdu un neutron), m_n est la masse du neutron et c la célérité de la lumière dans le vide.

→ L'énergie de séparation du "dernier" proton (proton le moins lié) \mathcal{E}_p est l'énergie qu'il faudrait fournir au noyau atomique pour lui arracher ce proton. Elle est donnée par

$$\mathcal{E}_p(A, Z) = (M(A - 1, Z - 1) + m_p - M(A, Z))c^2 \quad (\text{I.11})$$

où $M(A, Z)$ désigne la masse du noyau A_ZX , $M(A - 1, Z - 1)$ désigne la masse du noyau résultant (qui a perdu un proton), m_p est la masse du proton et c la célérité de la lumière dans le vide.

Le noyau atomique subit des mouvements divers qui tendent à le lier ou le séparer de ses constituants (nucléons) et ces différentes manifestations se passent dans l'espace. Pour quantifier, représenter et contrôler toutes les entités permettant de déterminer les paramètres cinématiques d'une particule, la notion de potentiel fut développée. Ainsi à chaque instant ou lieu précis, nous pouvons retrouver l'énergie d'un des constituants du noyau grâce à l'ingéniosité du concept de la mécanique quantique. Il stipule que lorsqu'un opérateur (Hamiltonien) est appliqué à une fonction d'onde, on obtient une valeur propre (énergie). Cependant lorsqu'on l'applique à certains potentiels, la valeur propre et l'observable sont identiques. Les physiciens chercheurs et spécialistes dans ce domaine ont fait naître une multitude de potentiels pour pallier aux déficits et insuffisances constatées pour certains. Dans ce contexte, nous prêterons un regard synoptique sur l'évolution de quelques modèles nucléaires.

I.4 Les modèles nucléaires-théoriques pour la description du noyau

Pour décrire le noyau, prédire ses propriétés, on fait appel à plusieurs modèles. Les modèles macroscopiques et les modèles microscopiques sont deux classes importantes de modèles qui servent à étudier les propriétés des noyaux en physique nucléaire. Le modèle en couche ren-

voyant à l'état microscopique des particules et les modèles collectifs donnant une description macroscopique.

I.4.1 Modèles macroscopiques (Modèles collectifs)

À partir des années 1930, Niels Bohr s'intéresse à la physique nucléaire[61]. Il propose le modèle dit "de la goutte liquide" afin d'expliquer la structure du noyau et la fission nucléaire. Ce sont les modèles à interaction forte (modèles collectifs) où le mouvement d'un nucléon est considéré comme fortement lié au mouvement des autres nucléons. Un exemple de ces modèles est le modèle de la goutte liquide.

I.4.1.a) Modèle de la goutte liquide

Le modèle de la goutte liquide établi par Von-Weizsäcker[62] (1935), Bethe (1936)[61], Niels Bohr et Gamow (1937) est le plus simple qui traite l'atome de manière classique, où le noyau est considéré comme une goutte de matière incompressible de forme sphérique.

Une molécule d'eau est constituée de deux atomes d'hydrogène et d'un atome d'oxygène. En physique nucléaire, le modèle de la goutte liquide est un modèle permettant de déterminer approximativement en une seule formule générale la distribution des énergies de liaison B en fonction du nombre de masse A , du nombre de protons Z et du nombre de neutrons N . L'idée est de traiter la matière nucléonique du noyau comme un liquide. Un peu comme l'eau d'une goutte de pluie, sauf qu'ici les forces de Van Der Waals entre les molécules d'eau sont remplacées par l'interaction nucléaire forte entre les nucléons. Le noyau atomique est donc un "fluide quantique". Il est "fluide" parce que les nucléons au sein du noyau se comportent comme les molécules d'un liquide et "quantique" pour le fait que la longueur d'onde des nucléons est suffisamment grande par rapport à la taille des nucléons pour que la notion de position ou de trajectoire ne soit plus valide. La masse d'un noyau est modélisée comme une goutte liquide, en fonction de masse m_n et m_p du neutron et du proton respectivement et l'énergie du noyau.

$$M(A, Z) = \frac{1}{c^2} E(N, Z) = Nm_n + Zm_p - \frac{1}{c^2} B(A, Z) \quad (\text{I.12})$$

Le tracé B/A qui est l'énergie de liaison par nucléon en fonction du nombre de masse A , montre qu'elle varie faiblement avec A , excepté pour les noyaux légers. Ce qui traduit le ca-

ractère à courte portée de l'interaction nucléaire, chaque nucléon n'interagit donc pas avec tous les constituants du noyau, mais uniquement avec ses proches voisins.

Parmi les expressions qui reproduisent au mieux les résultats des mesures systématiques, Berthe et Weizsäcker ont élaboré une formule semi-empirique décrivant l'énergie de liaison des noyaux qui s'écrit comme suit :

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A, Z); \quad (\text{I.13})$$

où

$$\delta(A, Z) = \delta_0(A, Z) a_p A^{-1/2}; a_p \approx 34. \quad (\text{I.14})$$

Dans cette expression l'énergie de liaison du noyau est la somme de cinq termes dont les trois premiers sont d'origine classique et les deux derniers d'origine quantique :

- Terme volumique

Il correspond à l'énergie de liaison moyenne par nucléon d'un noyau sphérique de rayon $R = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 = 1.2 \text{ fm}$). Le terme $a_v A$ traduit l'attraction entre les nucléons du noyau atomique due à l'interaction forte ou force d'interaction nucléaire. Chaque nucléon apporte une même quantité à l'énergie de liaison. Cette énergie est la même pour tous les nucléons et vaut environ 16 MeV et le coefficient a_v est appelé effet volumique. L'interaction forte possède un rayon d'action très court, limitant les nucléons à interagir uniquement avec leurs plus proches voisins ce qui est proportionnel au nombre de nucléons A . On a

$$B_{vol} = a_v A; \quad a_v = 15,4 \text{ MeV}. \quad (\text{I.15})$$

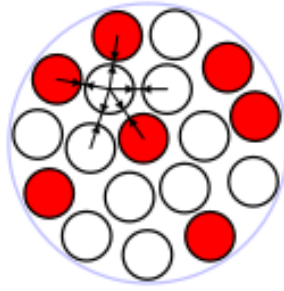


FIGURE 3 – Énergie volumique[63]

- Terme surfacique

Il représente l'énergie de liaison due aux nucléons à la surface du noyau qui sont moins liés que ceux situés au centre du noyau et proportionnelle à la surface d'une sphère de rayon R , soit $4\pi R$. Cette énergie se calcule par la formule ci-après :

$$B_{surf} = sa_s A^{2/3}; \quad a_s = 16,87 \text{ MeV.} \quad (\text{I.16})$$

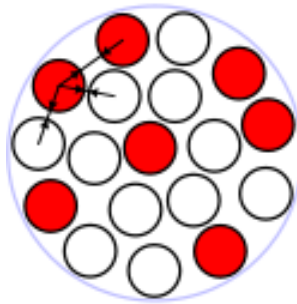


FIGURE 4 – Énergie surfacique[63]

avec a_s , l'effet surfacique.

- Terme coulombien

Les nucléons ne subissent pas qu'une force attractive. Les protons se repoussent mutuellement sous l'action de l'interaction électromagnétique. La considération de ce terme est estimée à l'énergie de Coulomb que l'on calcule en considérant que le noyau est une sphère de rayon R et en prenant en compte la répulsion des Z protons dans le noyau. On constate que chaque proton subit une interaction des autres protons c'est-à-dire $Z - 1$. Ce terme coulombien est aussi

retranché de l'énergie de liaison et est donné par

$$B_{coul} = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}; \quad a_c = 0,695 MeV. \quad (I.17)$$

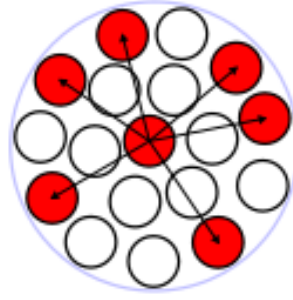


FIGURE 5 – Énergie coulombienne[63]

- Terme d'asymétrie

Les noyaux étant plus stables lorsque le nombre de neutrons et de protons est identique quand l'effet de la répulsion électrostatique est négligé ; il est donc à noter que l'excès de neutrons ou de protons entraîne une augmentation de l'énergie du noyau. Néanmoins, ce terme est donc fonction du nombre de nucléons dans le noyau (un excès de deux protons n'a pas le même effet dans un noyau composé de 50 nucléons que dans un noyau composé de 2 nucléons). Ce terme rend compte du fait de ce phénomène demande juste d'ajouter un terme qui est proportionnel à la différence entre nombre de protons et de neutrons, et inversement proportionnel au nombre de nucléons. Ainsi, l'énergie d'asymétrie vaut :

$$B_{asy} = a_{asy} \frac{(N - Z)^2}{A}; \quad a_{asy} = 22,4 MeV. \quad (I.18)$$

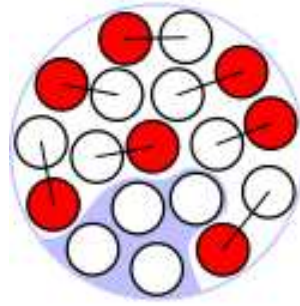


FIGURE 6 – Énergie d'asymétrie[63]

- Terme d'appariement

Il n'existe que 4 noyaux stables ayant N et Z impairs contre 167 noyaux stables avec N et Z pairs. Le terme d'appariement rend compte du fait que les noyaux avec un nombre pair de neutrons ou de protons sont plus stables que les autres. Ce terme a pour effet de diminuer l'énergie de liaison pour les noyaux impairs-impairs (un proton et un neutron célibataires) et de l'augmenter pour les noyaux pairs-pairs. Cependant, pour les noyaux avec Z et N impair, cette énergie est comptée en négativement, soustraite à l'énergie de liaison. Pour les noyaux avec Z et N de parité différente, cette énergie est nulle. On a

$$B_{ap} = a_p \delta_0(A, Z) A^{-1/2}. \quad (\text{I.19})$$

Il permet ainsi de rendre compte de l'écart d'énergie de liaison entre noyaux pairs-pairs et impairs-impairs et de l'existence d'un plus grand nombre de noyaux pairs-pairs stables.

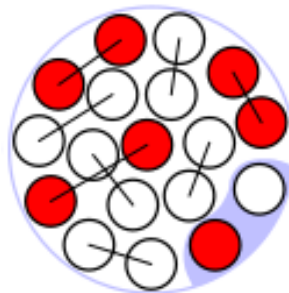


FIGURE 7 – Énergie d'appariement[63]

$$\delta_0(A, Z) = \begin{cases} +1, & \text{pour } Z \text{ et } N \text{ pairs} \\ 0, & \text{pour } Z \text{ ou } N \text{ impair} \\ -1, & \text{pour } Z \text{ et } N \text{ impairs} \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

La contribution de chaque terme dans l'énergie de liaison est illustré dans le tableau suivant :

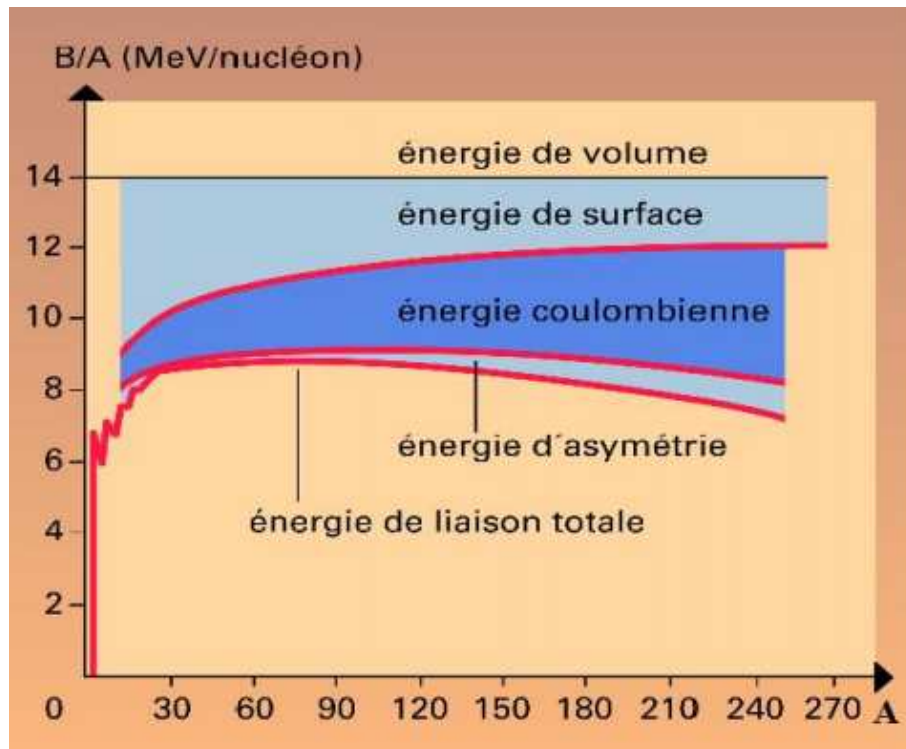


FIGURE 8 – Énergie de liaison par nucléon avec la contribution de chaque terme[64].

L'expression de l'énergie de liaison ci-dessus est semi-empirique puisque les constantes ne peuvent être déterminées qu'expérimentalement ; raison pour laquelle, elle est donc confrontée aux problèmes suivants :

- l'effet coulombien : la répulsion coulombienne entre les protons entraîne une diminution de $B(A, Z)$;
- l'effet d'asymétrie : les noyaux lourds possèdent plus de neutrons que de protons ;
- l'effet d'appariement : une plus grande stabilité pour les noyaux avec N et Z pair-pair, vis-à-vis des noyaux dont N et Z sont impair-impair.

De ces limites, naîtra le modèle atomique.

I.4.1.b) Le modèle atomique

Un modèle atomique est une représentation théorique (ou graphique) des propriétés de l'atome. En effet, l'atome est très petit et, même si au XXI^{ème} siècle des appareils ont permis de l'observer et de le manipuler directement, il est difficile de cerner l'ensemble de ses propriétés. Il est possible de dessiner les atomes selon le modèle atomique simplifié de manière abrégée, en dessinant le noyau avec le nombre de protons et le nombre de neutrons. Le but est de faciliter son étude par le biais de l'abstraction de la logique d'un atome en un schéma.

Il existe plusieurs types de modèles atomiques :

- Le modèle atomique de Schrödinger : en se basant sur les idées de De Broglie selon lesquelles les particules se comportent comme des ondes, le physicien Autrichien Erwin Schrödinger postula en 1926 que le comportement des électrons à l'intérieur des atomes pouvait être expliqué en traitant mathématiquement ces derniers comme des ondes de la matière. Dans ce modèle, les électrons pourraient être mobilisés autour du noyau sous formes d'ondes stationnaires de matière, l'électron n'est plus une bille mais une densité de présence qui entoure le noyau ;

- Le modèle de Démocrite : il affirme que la matière est constituée de particule très petite qu'il soit impossible de briser ou de diviser. Il appelle ces particules atomes (atomos en grec, qui signifie indivisible). Il pense que ces particules sont séparées du vide. Mais Démocrite n'a aucune preuve expérimentale et sa démarche n'est que philosophique ;

- La théorie de Démocrite sera reprise comme hypothèse par le britannique John Dalton. En 1805, il suppose l'existence des atomes et déclare qu'il en existe de plusieurs types. Mais tout comme Démocrite, il n'a pas de preuve expérimentale. En 1808, il propose la première liste de symbole représentant les différents atomes ;

- le modèle atomique de Rutherford fut proposé par le père de la physique nucléaire Ernest Rutherford pour expliquer les résultats de son expérience de la feuille d'or ultra fine. Rutherford a signalé que les atomes possédaient des électrons, lesquels tournent autour d'un noyau central. Ce noyau concentre toute la charge positive de l'atome et presque toute la masse ;

- le modèle atomique de Bohr est un modèle proposé par Bohr pour expliquer comment les électrons peuvent avoir des orbites circulaires stables autour du noyau atomique. Ce modèle fonctionnel ne représente pas l'atome en soi, en tant qu'objet physique, mais explique son fonctionnement par des équations ;

- En fin, il y a lieu de mentionner le modèle atomique de Sommerfeld, une généralisation relativiste du modèle atomique de Bohr. D'après Arnold Sommerfeld, pour certains atomes, les vitesses des électrons atteignaient une fraction remarquable de la vitesse de la lumière. C'est pour cela qu'il a changé le modèle atomique de Bohr, dans lequel les électrons ne tournaient qu'en orbites circulaires, en ajoutant qu'ils pouvaient également en orbites elliptiques.

Face à ces insuffisances notables liées aux trajectoires non spéciales des électrons autour du noyau, le modèle atomique connaîtra des insuffisances et ensuite naîtra le modèle en couches, cas des modèles microscopiques.

I.4.2 Les modèles microscopiques

Développés d'un côté par G. Mayer, J. Hans, D. Jensen, H. E. Suess[65, 66] et de l'autre par P. Wigner et D. Haxel[67]; le modèle en couche nucléaire complètement à l'opposé du modèle de la goutte liquide est une approche microscopique qui permet de décrire les propriétés associées au noyau dont le nombre de protons et/ou de neutrons est égal aux nombres magiques et correspondant à la saturation des couches. Ce modèle doit apporter des résultats en accord avec les propriétés déjà connues. Elle doit être à mesure d'expliquer et de prédire de nouvelles propriétés qui peuvent se révéler expérimentalement.

I.4.2.a) Les nombres magiques

On dit que le nombre de protons ou de neutrons d'un noyau est magique lorsqu'il est égal à l'un des nombres suivants : 2, 8, 20, 28, 50 et 126. Ces nombres rappellent la structure en couches du cortège électronique de l'atome. En effet, si les couches K, L, M, N, O, ... peuvent avoir respectivement au maximum 2, 8, 8, 18, 18, ... électrons, le nombre d'occupation des couches complètes est successivement : 2, 10, 18, 36, 54, ...

Avec le succès éclatant de la théorie électronique des atomes, ces nombres magiques qui semblent suggérer une périodicité des propriétés des noyaux, ont été le fil conducteur des théoriciens vers la recherche d'un modèle en couches du noyau[68].

Dans la nature, on constate que les éléments se répartissent de la manière suivante :

- Parmi les noyaux P-P, ceux qui sont les plus abondants sont les isotopes du calcium (avec 6 isotopes), de l'étain (12 isotopes), soit pour $Z = 20$ et $Z = 50$; et les isotones tels que $N = 20$ (5 isotones), 28 (5 isotones), 50 (6 isotones) et 82 (7 isotones);

- Il n'apparaît que 2 isotones stables parmi les noyaux pair-impairs dans les cas suivants : $N = 20$ (37 Cl et 39 K), $N = 50$ (87 Rb et 89 Y) et $N = 82$ (139 La et 141Pm) ;

- L'abondance relative d'un isotope de A pair ne dépasse pas, en général, 60, sauf pour les éléments suivants : 88 Sr ($N = 50$) avec 82, ;132 Ba($N = 82$) avec 72 ; et 140 Ce($N = 82$) avec 90.

I.4.2.b) Le modèle en couche sphérique

Dès les années 1950 et avec l'explication des nombres magiques, le modèle en couche est devenu un outil incontestable en physique nucléaire théorique car il est établi que dans ce modèle les nucléons se déplacent indépendamment dans un potentiel qui représente l'interaction moyenne avec les autres nucléons. Ce qui était une perturbation au niveau atomique est le potentiel principal dans le noyau. C'est grâce à cette approche qu'il est possible de calculer les niveaux accessibles aux nucléons. Cependant, il est à noter que l'approximation du potentiel moyen n'est valable du fait que le volume occupé par le noyau est 100 fois grand que le volume compacté, qu'occuperaient ces nucléons. Autrement dit, chaque nucléon ne ressent au sein du noyau que la "queue" de la partie attractive des forces nucléaires, la violente répulsion de ces forces à courte distance n'intervenant pas dans le noyau.

La description de la nature quantique du noyau atomique constitué de A nucléons en interaction se fait par la résolution non relativiste de l'équation de Schrödinger tel que, le système d'une particule individuelle dans le potentiel moyen du champ $V(r)$ s'écrit :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2M} \Delta + V(r) \right] \Psi = E \Psi; \quad (\text{I.21})$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \quad (\text{I.22})$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\hat{l}}{\hbar^2} \quad (\text{I.23})$$

Δ : Opérateur laplacien en coordonnées sphériques ; M : Masse du système à A nucléons ; E Energie propre ; Ψ : Fonction d'onde et \hat{l} : Opérateur du moment orbital.

Le choix du potentiel fait apparaitre des difficultés subtiles. L'interaction nucléaire est tout

d'abord moins bien connue en plus le potentiel dans lequel évolue chaque nucléon est créé par les nucléons eux-mêmes. Il est donc nécessaire de faire une hypothèse sur la forme du potentiel. Il peut être de types puits carré (fini ou infini), oscillateur harmonique, Woods-saxon ou bien d'autre, permettant de reproduire les nombres magiques observés.

i) Potentiel du modèle en couche de Woods-Saxon : c'est un potentiel central plus réaliste par rapport à l'oscillateur harmonique (voir ci-dessous), car il ne tend pas vers l'infini comme ce dernier. L'expression du potentiel de Woods-Saxon est

$$V(r) = - \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} \quad (\text{I.24})$$

avec $R_0 = r_0 A^{1/3}$ le rayon du noyau ; $r_0 = 1,2 fm$ le rayon du noyau réduit ; $a \approx 0,5 fm \approx$ la diffusivité ; V_0 : la profondeur du puit ≈ -50 Mev.

Plus tard, d'autres types de potentiels ont été développés dans le but d'améliorer les résultats proposés par le potentiel de Woods-Saxon ; il s'agit notamment des potentiels de Morse, de l'oscillateur harmonique quantique, de Kratzer et Killingbeck qu'il convient d'énumérer dans la suite.

ii) Le potentiel de Morse : Nommé d'après le physicien Philip Morse, le potentiel de Morse est un modèle pratique d'énergie potentielle pour une molécule diatomique. C'est une meilleure approximation pour la structure vibrationnelle de la molécule que celle de l'oscillateur harmonique quantique car il comprend de manière explicite les effets d'une rupture de liaison, comme par exemple l'existence des états non liés. Il prend aussi en compte l'anharmonicité des liaisons réelles et la probabilité non nulle de transition pour les états harmoniques et les bandes de combinaison. La fonction d'énergie potentielle se présente comme suit :

$$V(r) = D_e(1 - \exp -a(r - r_e))^2 + V(r_e) \quad (\text{I.25})$$

où r est la distance entre les atomes, r_e est la longueur de la liaison à l'équilibre, D_e est la profondeur du puits (définie par rapport aux atomes dissociés) et " a " contrôle la largeur du potentiel. La constante de la force de liaison peut être trouvée en prenant la dérivée de la fonction d'énergie potentielle à partir de laquelle on peut montrer que le paramètre a est donné par :

$$a = \sqrt{\frac{K_e}{2D_e}} \quad (\text{I.26})$$

où K_e est la constante de force au minimum du puit.

iii) Le potentiel de Killingbeck : Le potentiel de Killingbeck est la somme du potentiel coulombien plus la partie linéaire dont l'expression générale est donnée par :

$$V(r) = ar^2 + br + \frac{c}{r} + \frac{d}{r^2}; \quad (\text{I.27})$$

la forme réduite du potentiel de Killingbeck notée $br + \frac{c}{r}$, aussi appelée potentiel de Cornell, a reçu beaucoup d'attention autant en physique des particules, plus particulièrement en spectroscopie des mésons où il est utilisé pour décrire des états liés des quarks et d'antiquarks, qu'en physique atomique et moléculaire, où il représente un effet stark radial pour l'atome d'hydrogène. Le potentiel de Cornell a aussi été utilisé avec beaucoup de succès dans des modèles décrivant des systèmes de quarks massifs. Il a été introduit en tant que potentiel mathématiquement simple incorporant les caractéristiques de base des interactions entre quarks et permettant de rendre compte des particularités du spectre de l'énergie des états liés de quarks et d'antiquarks charmés.

iv) Oscillateur harmonique : c'est l'approximation la plus simple et adaptée aux noyaux légers que l'on peut utiliser afin d'expliquer seulement les premiers nombres magiques 2, 8 et 20. Le potentiel de l'oscillateur harmonique correspond au premier terme non nul du développement en série de Taylor du potentiel Woods-Saxon. Il prend la forme :

$$V_{oh}(r) = \frac{1}{2}m\omega^2r^2 \quad (\text{I.28})$$

où m est la masse d'un nucléon et ω la fréquence propre de l'oscillateur.

Les valeurs propres sont données par

$$E_{nl} = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right) = \hbar\omega \left(2n + l + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{I.29})$$

où $N = 2(n-1) + l$ est le nombre quantique principal, l le moment orbital et n le nombre quan-

tique radial. Il en résulte qu'à chaque valeur de N correspondent plusieurs couples possibles de n et l , ce qui entraîne une forte dégénérescence des niveaux d'énergie. La dégénérescence g des niveaux est donnée par la relation suivante

$$g = 2(2l + 1) \quad (\text{I.30})$$

Les niveaux obtenus avec le potentiel de l'oscillateur harmonique sont équidistants et chaque espace entre les niveaux (gap) va constituer une barrière à franchir pour exciter un nucléon. Ceci définit les nombres magiques.

Ces deux potentiels, oscillateur harmonique et Woods-Saxon, ne sont pas en mesure de reproduire tous les nombres magiques. Même avec la dégénérescence accrue pour le potentiel de l'oscillateur harmonique on n'arrive toujours pas à avoir le nombre magique 28, d'où la nécessité d'ajouter un terme correctif qui correspond au couplage spin-orbite.

v) Effet de bord : il correspond au deuxième ordre non nul du développement du potentiel de Woods-Saxon qui s'exprime comme un terme en l^2 . L'expression du potentiel devient :

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - Dl^2 \quad (\text{I.31})$$

où D est une constante positive ajustée sur les valeurs expérimentales d'énergie des niveaux. Le rôle de ce terme est qu'il peut abaisser l'énergie des niveaux de $-Dl(l + 1)$ correspondant au moment angulaire J tel que $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ de la couche considérée

Le modèle en couche présenté plus haut est un modèle simplifié, prédisant de nombreuses propriétés des nucléides, le spin et la parité nucléaire, le moment dipolaire magnétique et le moment quadripolaire électrique. Cependant, le potentiel utilisé est à symétrie sphérique, il n'est que valable pour les noyaux sphériques, qui sont finalement très rares. D'où une amélioration de ce modèle.

I.4.1.c) Modèle en couches déformées de Nilson

Pour des noyaux ayant une couche remplie à moitié, le modèle en couche ne prédit pas l'interaction spin-orbite. Le mouvement des nucléons occupant les orbitales non-remplies déforme le noyau et ajoute un effet non-sphérique au potentiel. Afin de décrire le comportement des noyaux

déformés, Nilsson[69] a introduit une approche qui ajuste le modèle en couche pour prendre en compte ces déformations. Selon ce modèle, le développement de Taylor du potentiel de Woods-Saxon peut être effectué avec les suppositions adoptées par Nilsson, introduisant le potentiel de l'oscillateur harmonique anisotrope.

$$U_{Nilsson} = \frac{1}{2}\mu [\omega_{\perp}(x^2 + y^2) + \omega_{\parallel}z^2] + al^2 - C\vec{l} \cdot \vec{s} \quad (\text{I.32})$$

$\mu = mA/(A - 1)$ est la masse réduite du système à A nucléons, m étant la masse du nucléon libre. Les fréquences de rotation ω_{\perp} et ω_{\parallel} dépendent du paramètre de déformation ε ,

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \omega_x = \omega_y = \omega_{\perp} \\ \omega_z = \omega_{\parallel} \end{cases}$$

La résolution de l'équation de Schrödinger avec ce nouveau potentiel nous donne une énergie suivante :

$$E_d(n_z, n_{\rho}, \Lambda) = \hbar\omega_{\parallel} \left(n_z + \frac{1}{2} \right) + \hbar\frac{1}{2}\omega_{\perp} (2n_{\rho} + \Lambda + 1) \quad (\text{I.33})$$

Où $N = n_x + n_y + n_z = n_z + 2n_{\rho} + \Lambda$

N est la couche de l'oscillateur harmonique ;

n_z est le nombre quantique principal selon l'axe de symétrie ;

Λ est la projection du moment orbital \vec{l} sur l'axe de symétrie ;

$\Omega = \Delta + \Sigma$ avec Σ la projection du spin intrinsèque sur l'axe de symétrie.

Les états propres $\Omega^{\pi} [N n_z \Lambda]$ de l'hamiltonien de Nilsson sont des fonctions d'onde dépendantes des nombres quantiques. π est la parité de l'état, définie par $(-1)^N$.

\vec{j} , \vec{l} et \vec{s} sur l'axe de symétrie sont respectivement Ω, Λ et Σ . La déformation du noyau décrite par le potentiel de Nilsson entraîne une levée de dégénérescence des états quantiques ayant une même valeur du moment angulaire j . Dans le cas des déformations prolates, les orbitales de petit Ω sont plus stabilisées et donc favorisées alors que les orbitales pour lesquelles $j \sim \Omega$ ont des énergies qui augmentent avec la déformation. Cette situation est inversée dans les déformations oblates.

À partir du potentiel radial, Nilsson avait paramétré les fréquences en tenant compte de la condition de conservation du volume nucléaire et en introduisant un paramètre de déformation δ . Il obtient donc :

$$\begin{cases} \omega_{\perp} = \omega_0(\delta) \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right)^{\frac{1}{2}} \\ \omega_{\parallel} = \omega_0(\delta) \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right)^{\frac{1}{2}} \\ \delta = \frac{2(a_x - a_z)}{a_x + a_z} \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

La conservation du volume induit la relation :

$$\omega_0(\delta) = \omega_0^0 \left(1 + \frac{2}{3}\delta^2\right). \quad (\text{I.35})$$

Définissons le rapport $\frac{\omega_z}{\omega_{\perp}}$

- Si $\frac{\omega_z}{\omega_{\perp}} = \frac{1}{1}$, le potentiel est celui de l'oscillateur harmonique sphérique, il y'a des dégénérescences, le noyau est sphérique ;
- Si $\frac{\omega_z}{\omega_{\perp}} = \frac{1}{2}$, le noyau est allongé (prolate) super déformé ;
- Si $\frac{\omega_z}{\omega_{\perp}} = \frac{2}{1}$, le noyau est aplati (oblate).

Le modèle de Nilsson n'est qu'une approximation. Cependant il faut tenir en compte de la déformation (associé à l'état fondamental pour les noyaux non-magiques, les noyaux excités et à haut moment angulaire.

I.5 Quelques géométries des noyaux atomiques

I.5.1 Paramétrisation de la surface nucléaire

Les observations expérimentales des énergies de niveaux excités, leurs spins et le rapport d'intensité, nous offrent la base pour l'investigation théorique de la structure nucléaire. Un grand nombre de propriétés observées de noyaux impliquent l'existence du mouvement d'ensemble des nucléons, ces phénomènes s'appellent le mouvement collectif. Dans ce cas, il est plus approprié de les décrire en utilisant les coordonnées macroscopiques telles que la masse, le volume et les paramètres de déformation (β, γ).

Les excitations des noyaux permettent d'étudier des effets collectifs dans le milieu nucléaire. Différents types d'excitation sont permises dans le noyau. Ici, ce sont des excitations collectives des nucléons qui nous intéressent particulièrement parcequ'elles permettent d'étudier les noyaux comme l'objet en entier. Les excitations collectives sont représentées par deux types de mouvement :

-des vibrations de noyaux (états à N photons, déformation dynamique axiale ou triaxiale, résonances géantes) ;

-des rotations collectives autour de l'axe perpendiculaire à l'axe de symétrie du noyau (bande de rotation).

Ces deux types d'excitations collectives conduisent en général à des schémas de niveaux "réguliers" et l'évolution dynamique de la forme du noyau. Ainsi, la présence d'un certain type d'excitation nous aide déduire la forme du noyau.

Dans cette section, nous présenterons deux types de mouvements collectifs : rotation et vibration, ainsi que les formes du noyau engendrées par ces mouvements collectifs. Le modèle central qui décrit le comportement collectif des nucléons dans des noyaux est le modèle de Bohr-Mottelson . Ce modèle fut introduit comme le modèle hydrodynamique collectif prenant en compte le couplage du mouvement des nucléons individuels avec les oscillations de la surface nucléaire. Dans les sous-sections suivantes, nous présenterons les conséquences phénoménologiques liées à ce modèle.

I.5.1.a) Excitation vibrationnelle

Pour décrire les différentes vibrations de la surface nucléaire accessible aux noyaux, Bohr a introduit la paramétrisation de la surface nucléaire, qui est décrite par une fonction du rayon développé en sphérique :

$$R(\theta, \varphi, t) = R_0 C(\alpha) \sum_{\lambda=2}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi), \quad (\text{I.36})$$

où $R(\theta, \varphi, t)$ est la distance entre le centre du noyau et sa surface dépendant de l'angle (θ, ϕ) à l'instant t ; R_0 est le rayon de la sphère ayant le même volume que le noyau déformé ; $C(\alpha)$ la fonction de conservation du volume ; $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$ est le paramètre déformation et $Y_{\lambda\mu}$ sont les harmo-

riques sphériques.

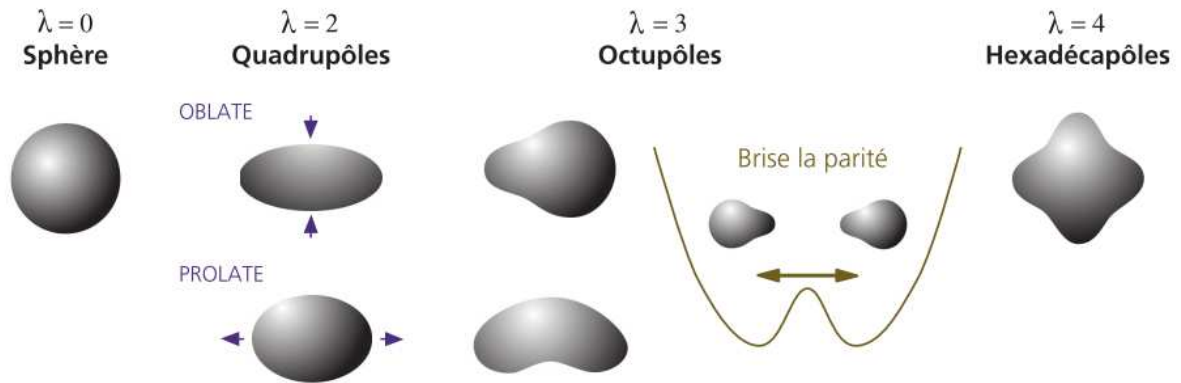


FIGURE 9 – Formes correspondant aux différents ordres multipolaires[70].

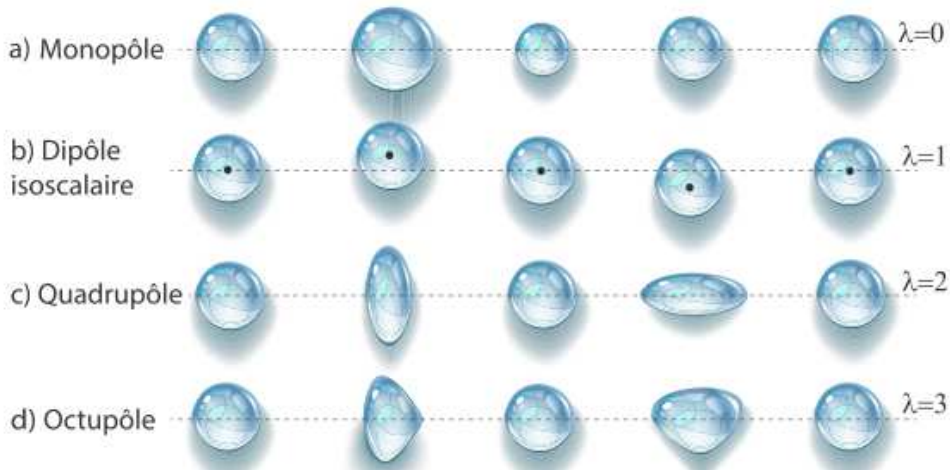


FIGURE 10 – Evolution en temps des modes vibratoires[71].

- $\lambda = 0$: correspond à la variation du volume sans variation de la forme sphérique et donne naissance à la déformation monopolaire ;

- $\lambda = 1$: ce mode correspond à une translation du centre de masse du noyau (mise de côté dans l'étude des formes du noyau) ;

- $\lambda = 2$: ce mode vibration caractérise la majorité des noyaux, qui est une déformation quadrupolaire, le noyau change sa forme de prolate à oblate ;

- $\lambda = 3$ correspond à une déformation octupolaire. Elle est souvent associée à la bande de parité négative. Les noyaux peuvent aussi présenter différentes formes à des énergies similaires. Ce phénomène est appelée coexistence de forme.

- Et enfin, les termes $\lambda = 4$ correspondent à une déformation hexadécapolaire.

I.5.1.b) Mode rotationnel

La rotation se traduit par la présence de moment angulaire suivant un axe donné. Dans le cas de la rotation collective, le noyau tourne globalement autour de cet axe de rotation. Il doit pour cela être déformé, car la mécanique quantique interdit une rotation autour d'un axe de symétrie. Dans la plupart des cas, les noyaux ont la déformation quadripolaire ($\lambda = 2$) décrite par l'Eq. (I.37). Ainsi, il y a cinq paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$. Les paramètres de forme peuvent être exprimés par la transformation du système des coordonnées :

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = \sum_{\nu=-2}^2 \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} a_{\nu\mu'}^* D_{\mu\mu'}^{(\nu)}(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma) \quad (\text{I.37})$$

où $D_{\mu\mu'}^{(\nu)}$ est la matrice de rotation de Wigner. Les paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$ sont indépendants du temps dans le système de coordonnées du corps fixe.

Les formes des noyaux sont définies par les valeurs de γ :

- $\gamma = 0^\circ$, l'axe de symétrie est le plus long, les noyaux déformés ont une déformation "prolate", forme allongée.

- $\gamma = 60^\circ$, l'axe de symétrie est le plus court, les noyaux ont une déformation "oblate", forme aplatie.

- $0^\circ < \gamma < 60^\circ$ pas de symétrie axiale, le noyau devient triaxial, ce qui signifie que ses trois axes principaux ont des longueurs différentes.

Pour les autres valeurs de γ , les déformations restent les mêmes que dans l'intervalle $[0^\circ \text{ et } 60^\circ]$, seul le rôle des axes change.

Selon la forme du noyau, on peut réduire les paramètres de déformation nucléaire. Par exemple, pour le cas d'un noyau de symétrie axiale où la rotation collective est perpendiculaire à l'axe de symétrie intrinsèque, $\mu = 0$ et $\alpha_{\lambda 0}$ sont désignés par β_λ . Ainsi, la déformation quadripolaire positive $\beta > 0$ signifie que le rayon polaire est plus grand que le rayon équatorial (la forme prolate) et la déformation quadripolaire correspond à la forme oblate $\beta < 0$ où le rayon équatorial est plus grand que le rayon polaire. Il est d'usage d'exprimer des déformations quadripolaires dans un référentiel de corps fixe avec des axes 1,2,3. Si on considère que le référentiel

du noyau en rotation est orienté le long des axes principaux d'inertie, pour des raisons de symétrie, les coefficients α_ν se réduisent en deux variables indépendantes a_{20} (étirement du noyau suivant l'axe z tout en conservant la relation entre les axes x et y) et $a_{22} = a_{2-2}$ (représente un étirement du noyau suivant l'axe x par rapport à l'axe y); $a_{22} = a_{2-2}$ et $a_{21} = a_{2-1}$ étant nuls. Par conséquent, les coefficients a_{20} et a_{22} sont suffisant pour décrire la forme du noyau. Ces coefficients sont souvent exprimés selon les conventions de Hill et Wheeler[?]:

$$a_{20} = \beta \cos \gamma, \quad (\text{I.38})$$

et

$$a_{2,-2} = a_{22} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \gamma, \quad (\text{I.39})$$

Où β représente l'amplitude de la déformation quadripolaire. Le facteur $1/\sqrt{2}$ a été choisi de telle sorte que $\sum |\alpha_{\lambda\mu}| = \alpha_0 + 2\alpha_2^2 = \beta^2$. L'angle γ , dénommé paramètre de triaxialité, a été accepté comme étant la manière la plus pratique pour décrire la forme des noyaux. En remplaçant les expressions précédentes dans l'Eq. (I.36), on obtient alors :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \cos \gamma Y_{20}(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma (Y_{22}(\theta, \varphi) + Y_{2-2}(\theta, \varphi)) \right] \quad (\text{I.40})$$

En introduisant les expressions des harmoniques sphériques dans l'équation précédente on aboutit à :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(\cos \gamma (3 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} \sin \gamma \sin^2 \theta \cos 2\varphi \right) \right] \quad (\text{I.41})$$

Dans cette formule, nous voyons que le paramètre β permet de mesurer l'étendue de la déformation et le paramètre γ montre l'éloignement à la symétrie axiale. La valeur négative

de β indique que le noyau a la forme oblate et la valeur positive décrit la forme prolate.

$$\begin{aligned}
 R_1 = R_{x'} &= R\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(-\cos \gamma + \sqrt{3} \sin \gamma \right) \right] \\
 R_2 = R_{y'} &= R\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(-\cos \gamma - \sqrt{3} \sin \gamma \right) \right] \\
 R_3 = R_{z'} &= R(0, 0) = R_0 \left[1 + 2\beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \cos \gamma \right]
 \end{aligned} \tag{I.42}$$

D'une manière générale, on a

$$R_k(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \cos \left(\gamma - \frac{2\pi k}{3} \right) \right], \quad \text{pour } k(1, 2, 3). \tag{I.43}$$

Les formes nucléaires peuvent être alors représentées schématiquement dans un plan (β, γ) fig. (I.11).

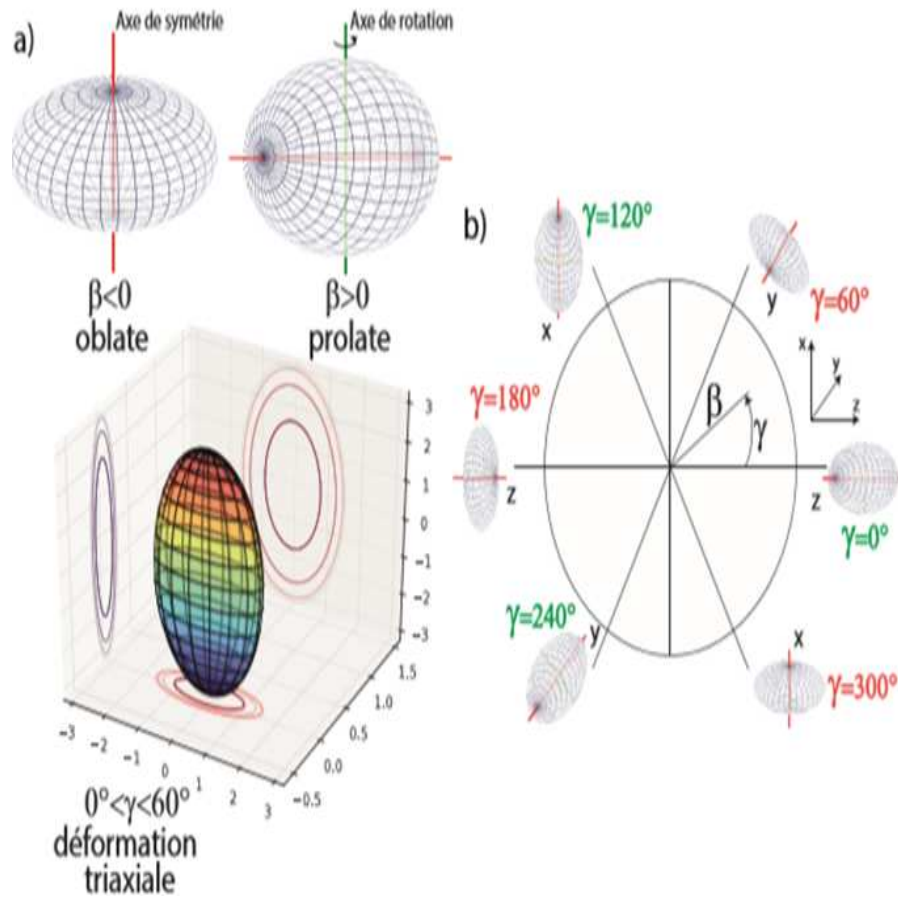


FIGURE 11 – Symétries et formes nucléaires correspondant aux différentes déformations quadrupolaires dans le repère (β, γ) [72]

Les variables de Hill-Wheeler (β, γ) simplifient la description des différentes déformations des noyaux. Dans le paragraphe suivant, nous montrerons que ces variables permettent d'obtenir l'hamiltonien collectif qui décrit les mouvement vibratoire et rotatif invoqués par la déformation d'équilibre d'une forme du noyau.

I.5.2 La déformation triaxiale

- $0^\circ < \gamma < 60^\circ$: le noyau est triaxial et ces trois axes principaux ont des longueurs différentes. Cette forme du noyau implique une plus grande richesse des phénomènes physiques apparaissant dans le schéma des niveaux d'énergie. Pour cette forme, il est possible de faire tourner le noyau sur d'autres axes n'appartenant pas aux plans principaux du référentiel intrinsèque. Parmi les modes d'excitation du noyau, il y en a deux qui se caractérisent de manière univoque à un noyau triaxial : le mode wobbling et la chiralité.

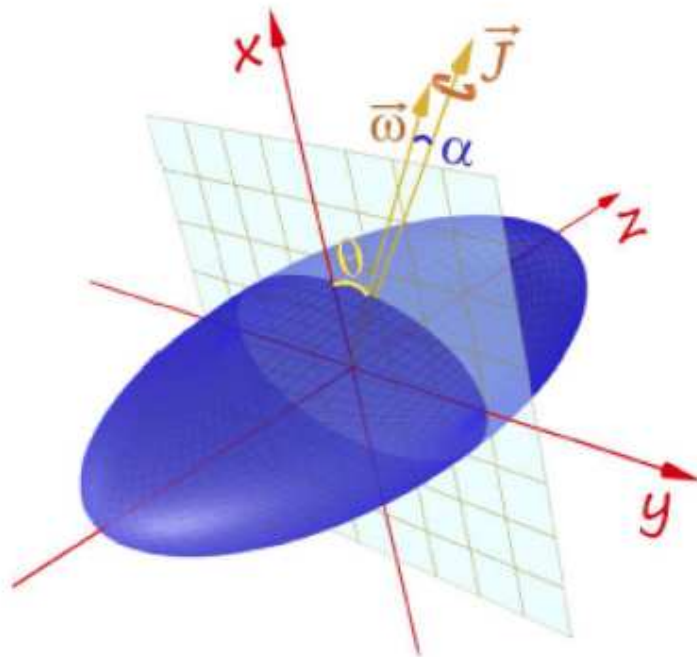


FIGURE 12 – Noyau de forme triaxiale[73]

La réalisation d'un tel modèle nécessite une profonde compréhension des termes décrits précédemment. Dans ce travail, certains termes ont été utilisés et il convient de les définir ou d'expliquer. En fait la définition de tous les détails doit être un impératif pour faciliter la lecture de ce document. Une connaissance très profonde du platine est un impératif pour la simple

raison qu'il a beaucoup d'isotopes ayant des propriétés physico-chimiques semblables.

I.6 Définitions ou explications des termes

I.6.1 Le platine

Le Platine est un élément chimique de symbole Pt et de numréo atomique 78[95]. C'est un métal de transition, dur, malléable, ductile, précieux de couleur gris-blanc. Le platine est un métal noble résistant à la corrosion, et on le trouve dans certains minerais de cuivre ou de nickel, ainsi que sous forme de dépôt natif. Des pépites pesant jusqu'à 10,5 kilogrammes ont été trouvées. Le platine est utilisé en bijouterie, dans les équipements de laboratoire, médecine dentaire, pour certains contacts électriques et dans les pots catalytiques des véhicules.



FIGURE 13 – Image du platine[95]

- Origine du platine

Etymologiquement le "Platine" provient de l'espagnol "platina" qui signifie "petit argent". Ce terme a été choisi lors de sa découverte en Amérique du sud où il était d'abord comme une impureté d'argent. Les orpailleurs de la Colombie étaient depuis longtemps conscients du platine qui souvent était trouvé sous forme de pépites lourdes et blanches-grisâtres lors de l'orpaillage dans les ruisseaux et les rivières. Ces derniers conservaient lesdites pépites de platine pensant qu'il s'agissait d'or qui n'avait pas encore atteint la maturité. C'est au fil des ans que les procédés

de raffinage et de fusion furent développés, de nombreuses utilisations ont été trouvées pour ce métal des plus précieux aux propriétés étonnantes.

- Isotopes du platine

Le platine Pt de numéro atomique 78 possède 37 isotopes connus, de nombre de masse variant entre 166 et 202, et 13 isomères nucléaires. Parmi ces isotopes, cinq sont stables (^{192}Pt , ^{194}Pt , ^{194}Pt , ^{196}Pt et ^{198}Pt). Les isotopes 195 et 194 sont les plus abondants, présents quasiment à des proportions identiques, respectivement 33,8% et 32,9%. L'isotope 196 est également très présent car représente en proportion un quart de ces isotopes naturels. Les isotopes 198 et 192 sont nettement moins abondants, car moins stables, avec respectivement des proportions de 7,2% et 0,79%.

- Isotopes synthétiques

Il existe de nombreux isotopes synthétiques du platine obtenus dans les laboratoires de recherche en radiochimie. Les isotopes plus légers que le platine naturel ont des nombres de masses allant de 166 à 189. Chacun de ces isotopes a deux modes de désintégration possibles : α ou β^+ . Plus l'isotope est légers, plus la désintégration α prédomine, par contre plus l'on se rapproche des isotopes naturels, plus la désintégration β^+ s'accroît puis prédomine. Les isotopes plus lourds que les isotopes naturels du platine sont nettement moins nombreux et ont des nombres de masses de 199 à 202. Ces isotopes se désintègrent principalement selon une radioactivité β^- .

- Importance du platine

Plus lourd et plus résistant que l'or, le platine dans des quantités très faibles aide aujourd'hui à la fabrication de médicaments anti-cancéreux et aussi dans la manufacture d'électrodes pour les bougies d'allumage de voitures. Avec une demande industrielle plus importante que pour l'or, le marché d'investissement du platine est beaucoup plus réduit. Voici ci-dessous un résumé non exhaustif des utilisations du platine dans le monde.

i) Effets du platine sur les automobiles

La plus grande utilisation du platine chaque année est dans le secteur automobile, pour la réduction des émissions toxiques des moteurs à combustion par le biais de convertisseurs catalytiques. Plus de 41% de tout le platine utilisé en 2016 a servi à diminuer les émissions dans les pots catalytiques de voitures diesel. La volonté mondiale de réduire encore plus les émissions verra probablement une croissance de l'utilisation du platine. Avec les économies géantes comme la Chine et l'Inde qui mettent à jour leurs réglementations, en adoptant les standards Euro 5 et en

passant aux nouvelles règles de l'Euro 6, certains analystes prédisent que le marché mondial des convertisseurs catalytiques pourrait croître de 47% en cinq ans, jusqu'en 2021, pour atteindre une valeur de 55 milliards de dollars (soit 49 milliards d'euros).

ii) Effet du platine sur la bijouterie

Les bagues de fiançailles en platine, les alliances, les colliers et autres pendentifs comptent pour plus d'un tiers de l'utilisation du métal chaque année, presque autant que pour les catalyseurs auto. Les bijoux de platine, plus populaires en Chine, sont généralement plus purs que leurs équivalents en or car le métal est plus dense (21,5 g par cm^3 contre 19,3 g par cm^3) et plus résistants. Une alliance en platine identique à une alliance en or 18 carats, pèsera 40% en plus. Bien que les prix du platine pour une once soient en ce moment inférieurs à ceux de l'or, cette forte pureté fait augmenter les prix au détail. C'est la même chose pour les coûts supplémentaires liés au travail de ce métal plus dur et au point de fusion plus élevé (1 758 °C pour le platine contre 1064 °C pour l'or).

iii) Effet du platine sur la santé

Les métaux précieux les moins réactifs, le platine et l'or, ne causent pas d'irritation à la peau ou la chair humaine. Mais le platine est plus résistant et est donc mieux pour les connexions et les fils dans les implants comme les pacemakers, protégeant contre la corrosion des acides du corps. Les estimations indiquent que plus de cinq tonnes par an de platine vont dans les produits biomédicaux dans le monde. Près de 80% d'entre eux sont pour des traitements prouvés (comme les pacemakers et les fils-guides pour mettre en place des cathéters) et le reste pour de nouveaux instruments pour la neuromodulation (pour aider contrôler la douleur et les dysfonctionnements neurologiques) et les endoprothèses (tubes pour écarter les artères et améliorer la circulation sanguine). Des quantités minuscules de platine sont aussi présentes dans les médicaments antinéoplasiques, qui aident à stopper la croissance des tumeurs en bloquant l'ADN des cellules cancéreuses. Si le nom du médicament comprend "platine", il est fort probable qu'une quantité du métal précieux y soit présente. Ils sont en général efficaces contre le cancer du testicule, améliorant le taux de guérison de 10 à 85%. Cette forme de chimiothérapie utilise environ $\frac{3}{4}$ de tonne de platine chaque année.

iv) Effet du platine sur l'agriculture

Les catalyseurs de platine sont vitaux pour préparer de l'acide nitrique, qui sert à 90% à fabriquer chaque année 190 millions de tonnes d'engrais nutritif. Rentrons dans le détail chimique : l'acide nitrique est l'oxydation de l'ammoniaque sous forme gazeuse avec de l'air pour former de l'oxyde nitrique. Pour atteindre une conversion hautement efficace de plus de 95%, ce procédé est initié sous pression sur des gaz catalytiques de métaux précieux faites de platine avec un dixième de rhodium.

- Inconvénient du platine

Il réside au niveau de son prix plus élevé en raison de sa rareté et de sa composition.

I.6.2 La triaxialité

En général, le mot "tri" vient du dictionnaire anglosaxon pour désigner le chiffre trois. En ajoutant la terminologie "axe", nous obtenons le mot "trois-axes". Une molécule est dite triaxiale lorsqu'on peut reprer la position de l'un de ses points M dans l'espace soit en coordonnées cartésiennes par les trois directions \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} ; soit en coordonnées cylindriques par les trois vecteurs \vec{u}_r , \vec{u}_θ et \vec{z} et enfin en coordonnées sphériques par le triplet dirigé par \vec{u}_r , \vec{u}_θ et \vec{u}_φ . Dans le troisième cas qui nous concerne, il faut noter que $0 \leq r \leq R$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$.

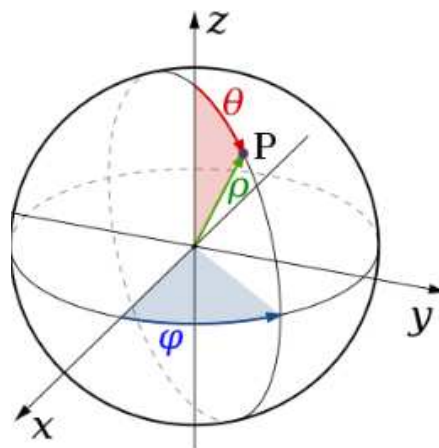


FIGURE 14 – Position d'un point en coordonnées P sphériques, la position du point est définie par la distance ρ et par les angles φ et θ .

Ainsi, dire que les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ du Platine forment un ensemble triaxial signifie tout simplement qu'ils remplissent toutes les conditions et en accord avec les contraintes nécessaires

pour repérer tous les mouvements de rotation, de déformation et des différentes interactions que subissent les nucléides qui se déplacent de façon très désordonnée, à très grande vitesse et diagonalisant parfois le tenseur des contraintes de la matrice issue. Un tel repère triaxial est représenté par la figure ci-dessous :

I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le noyau atomique dans ses moindres détails en passant par les généralités vers la composition de ce dernier. Les différentes forces agissant entre les nucléons montrent qu'il existe divers types de mouvements qui s'opèrent à l'intérieur du noyau et entraînant ainsi un certain nombre de déformations. Ensuite les mécanismes et phénomènes physiques s'opérant à l'intérieur du noyau nous ont permis de savoir qu'il existe une certaine quantité d'énergie capable de lier ou de séparer le noyau atomique de ses différents constituants. Le contrôle de toutes ces entités physiques dans le temps et surtout dans l'espace du point de vue énergétique nous ont donné la latitude de faire appel à la notion de modèles nucléaires en évoquant quelques potentiels. Nous avons enfin modélisé un noyau comme une goutte liquide, ce qui a permis de reproduire globalement l'énergie de liaison par nucléon. Toutefois, ce modèle n'expliquait pas l'excès de stabilité de certains noyaux (magiques). L'introduction d'un autre modèle, dit en couches, qui prend en considération les propriétés quantiques du noyau, a permis de remédier à ce problème, les nucléons étant placés sur des niveaux d'énergie de la même manière que sur les couches électroniques d'un atome. Ce modèle n'est valable que pour un petit ensemble de noyaux, situés au voisinage d'une fermeture de couche du fait que la plupart des noyaux sont déformés. Par conséquent il a fallu modifier le modèle en couches en introduisant la déformation dans la modélisation du noyau (modèle Nilsson) et analyser la forme triaxiale du noyau.

Dans le chapitre suivant, nous choisirons dans le cadre de ce travail, de déterminer le spectre d'énergie nucléaire des noyaux ayant une déformation triaxiale au moyen du Hamiltonien de Bohr en présence de la Combinaison des Potentiels de Morse et Kratzer criblé (CPKM) par la méthode Étendue de Nikiforov-Uvarov et de l'équation de Confluent de Heun (HeunC).

MODÉLISATION DES TRANSITIONS D'ÉNERGIE DANS LE NOYAU

II.1 Introduction

La conséquence des interactions entre nucléons est la déformation (vibration et rotation) des noyaux atomiques. Les nucléides effectuent plusieurs types de déformations et des interactions nucléaires, au cours d'une désintégration. Ces déformations s'alternent de la forme elliptique à la forme sphéroïdale en passant par la forme plate et vice-versa. Pour ce qui est des interactions, il s'agit des différentes tensions existantes, nées des forces coulombiennes, gravitationnelles et magnétiques. Ces différentes déformations, combinées aux interactions nucléaires, décrivent des mouvements bien connus non seulement invisibles de par leur rapidité mais aussi couplés entre eux. Qu'il s'agisse des déformations et des interactions, leurs actions procurent des différents types d'énergies. Pour suivre l'évolution de ces mouvements et capitaliser ces énergies, on est obligé de s'intéresser aux phénomènes physiques et bâtir ainsi un modèle tenant compte de tous les paramètres empiriques, internes et externes des forces en présence. Il est donc question de mettre sur pied un système réunissant toutes ces entités suscitées pour avoir des éléments de bases décrivant à la fois les déformations et les interactions nucléaires appelées équations du mouvement.

II.2 Présentation du Hamiltonien de Bohr et les solutions des différentes parties de l'équation de Schrödinger

En 1900, Planck affirma donc que la matière ainsi que l'énergie rayonnante ont une structure discontinue et que la matière ne peut émettre ou absorber l'énergie rayonnante que par petites unités discrètes appelées quanta. D'après les résultats de l'effet Compton et l'effet photoélectrique,

le physicien Louis-De-Broglie suggère, en 1924 que les particules pourraient aussi dans certains cas, montrer des propriétés d'ondes. Quelques années plus tard, cette prédiction fut vérifiée expérimentalement par les physiciens C. J. Davidson et G. P. Thomson. Ils montrèrent qu'un faisceau d'électrons dispersé par un cristal génère une diffraction caractéristique d'une onde. La notion ondulatoire de la particule (L. De-Broglie 1924), permet au physicien Erwin Schrödinger, de développer une équation d'onde, ou équation de Schrodinger pour décrire les propriétés ondulatoires de la particule.

II.2.1 Équation de Schrödinger

Le mouvement présentant les déformations des nucléides est régi par l'équation de Schrödinger suivante :

$$\hat{H}\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = E\psi(\beta, \gamma, \theta_i), \quad (\text{II.1})$$

L'Hamiltonien \hat{H} peut être exprimé comme la somme de deux opérateurs : l'un qui correspond à l'énergie cinétique et l'autre à l'énergie potentielle,

$$\hat{H} = E_c + V(\beta, \gamma), \quad (\text{II.2})$$

avec

$$E_c = \frac{\hat{p}^2}{2B} \quad (\text{II.3})$$

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \right] \quad (\text{II.4})$$

En remplaçant les Eqs. (II.4) et (II.3) dans l'Eq. (II.2), le Hamiltonien prend la nouvelle forme :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (\text{II.5})$$

II.2.2 Potentiels nucléaires

Le potentiel est la représentation des diverses interactions qu'un élément subit dans un système statique ou dynamique, très souvent de nature singulière. Il est important dans différents domaines des sciences, de l'économie et de l'ingénierie. Il existe deux catégories de potentiel : les potentiels centraux qui ne dépendent que de la distance à l'origine, nous pouvons citer entre autre ; l'oscillateur harmonique, Woods-Saxon, Coulomb, Kratzer, Morse, Killingbeck, Davidson...etc. Et les potentiels non centraux qui eux en plus de la distance au centre, dépendent de l'angle polaire θ , de l'angle azimut ψ entre autre : le potentiel de Makarov, de Hartmann, de Hautot, Kratzer en double anneau, le pseudo-harmonique...etc. Une sous classe de potentiels centraux singuliers sont les potentiels fractionnaires qui ont fait leurs preuves en physique des particules dans la description de l'interaction quark-antiquark. C'est donc l'étude des potentiels centraux qui sera utilisée pour matérialiser l'interaction nucléaire en l'introduisant dans le Hamiltonien de Bohr. Ce nouveau potentiel est la combinaison des potentiels de Morse et Kratzer "criblé".

Il s'écrit de la forme :

$$v_1(\beta) = a \exp(-\alpha\beta) + b \exp(-2\alpha\beta) + \left(\frac{c}{\beta} + \frac{d}{\beta^2} \right) \exp(-\alpha\beta), \quad (\text{II.6})$$

Cas particuliers

→ si $c = d = 0$, ce potentiel se réduit au potentiel de Morse :

$$v_1(\beta) = a \exp(-\alpha\beta) + b \exp(-2\alpha\beta). \quad (\text{II.7})$$

→ si $a = b = 0$, ce potentiel se réduit au potentiel de Kratzer "criblé" :

$$v_1(\beta) = \left(\frac{c}{\beta} + \frac{d}{\beta^2} \right) \exp(-\alpha\beta). \quad (\text{II.8})$$

→ si $a = b = 0$ et $\alpha \rightarrow 0$, ce potentiel se réduit au potentiel de Kratzer standard.

$$v_1(\beta) = \frac{c}{\beta} + \frac{d}{\beta^2} \quad (\text{II.9})$$

→ si $a = b = c = 0$ et $\alpha \rightarrow 0$, ce potentiel se réduit au potentiel central :

$$v_1(\beta) = \frac{d}{\beta^2} \quad (\text{II.10})$$

II.2.3 Mouvement collectif dans les noyaux

Les observations expérimentales des énergies de niveaux excités, leurs spins et le rapport d'intensité, nous offrent la base pour l'investigation théorique de la structure nucléaire. Un grand nombre de propriétés observées de noyaux impliquent l'existence du mouvement d'ensemble des nucléons, ces phénomènes s'appellent le mouvement collectif. Dans ce cas, il est plus approprié de les décrire en utilisant les coordonnées macroscopiques telles que la masse, le volume et les paramètres de déformation (β, γ) . Les excitations des noyaux permettent d'étudier des effets collectifs dans le milieu nucléaire. Différents types d'excitation sont permises au noyau. Dans ce chapitre, des excitations collectives des nucléons nous intéressent particulièrement parce qu'elles permettent d'étudier les noyaux comme objets en entier. Les excitations collectives sont représentées par deux types de mouvements :

- Des vibrations de noyaux (états à N photons, déformation dynamique axiale ou triaxiale, résonances géantes).

- Des rotations collectives autour de l'axe perpendiculaire à l'axe de symétrie du noyau (bande de rotation).

Ces deux types d'excitations collectives conduisent en général à des schémas de niveaux "réguliers" et l'évolution dynamique de la forme du noyau. Ainsi, la présence d'un certain type d'excitation nous aide déduire la forme du noyau.

Dans cette section, nous présenterons deux types de mouvements collectifs : rotation et vibration, ainsi que les formes du noyau engendrées par ces mouvements collectifs

Mode vibrationnel

Dans de nombreux cas, un noyau peut être considéré comme une goutte liquide. Certaines de ses propriétés peuvent être interprétées comme le résultat de la relation entre la tension de surface et l'énergie interne d'une goutte. Une telle approximation nous permet d'examiner les différents types d'excitations nucléaires issus du mouvement vibratoire.

Mode rotationnel

La rotation se traduit par la présence de moment angulaire suivant un axe donné. Dans le cas de la rotation collective, le noyau tourne globalement autour de cet axe de rotation. Il doit pour cela être déformé, car la mécanique quantique interdit une rotation autour d'un axe de symétrie. Dans la plupart des cas, les noyaux ont la déformation quadripolaire ($\lambda=2$) décrite par l'Eq. (I.27). Ainsi, il y a cinq paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$. Les paramètres de forme peuvent être exprimés par la transformation du système des coordonnées :

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = \sum_{\nu=-2}^2 \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} a_{\nu\mu'}^* D_{\mu\mu'}^{(\nu)}(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma) \quad (\text{II.11})$$

Supposons que le Hamiltonien s'écrive sous la forme :

$$\hat{H} = T_{vib} + T_{rot} + V(\beta, \gamma) \quad (\text{II.12})$$

avec $T_{vib} = T_\beta + T_\gamma$, le Hamiltonien se rapportant aux vibrations des nucléides tels que :

$$T_\beta = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \quad (\text{II.13})$$

et

$$T_\gamma = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] \quad (\text{II.14})$$

T_{rot} représente le Hamiltonien relatif aux rotations des nucléides

$$T_{rot} = \frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} \right] \quad (\text{II.15})$$

où β et γ sont les coordonnées intrinsèques, qualifiant les différentes déformations liées aux vibrations des nucléides ; les \hat{Q}_k^2 sont les composantes du moment angulaire, $k = 1, 2, 3$ représentent les trois axes de coordonnées ; $\theta_i (i = 1, 2, 3)$ sont les angles d'Euler[74, 75] ; E_c est l'énergie cinétique du nucléide qui s'identifie au diverses rotations effectuées par les nucléides, \hat{p} est l'opérateur impulsion du mouvement ; $V(\beta, \gamma)$ est l'énergie potentielle du système, B est la masse totale du nucléide en mouvement et $\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ est la fonction d'onde.

En combinant les Eq. (II.1) et (II.2), nous obtenons :

$$-\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} \right] \psi(\beta, \gamma, \theta_i) + V(\beta, \gamma) \psi(\beta, \gamma, \theta_i) = E \psi(\beta, \gamma, \theta_i) [7] \quad (\text{II.16})$$

C'est l'équation générale des mouvements de déformations des nucléides. Nous avons présenté d'entrée de jeu deux types de mouvements. Les déformations étant physiquement décrites par des équations, il nous reste de tabler sur celles matérialisant les interactions nucléaires.

II.3 Résolution des équations de Schrödinger relatives à la déformation et aux interactions nucléaires

Les techniques de séparation des variables ont été optées afin de retrouver séparément ces mouvements suivant les différentes variables : γ et β pour les déformations. Ceci dans l'objectif de résoudre l'Eq. (II.16) qui semble complexe à cause du phénomène de couplage des types de mouvements observés lors des déformations (passage des formes elliptiques, sphérique, plate et vis-versa) et lors des interactions (coulombiennes, magnétiques, gravitationnelles...).

II.3.1 Techniques de séparations des différents types de mouvements lors des déformations nucléaires

Si nous voulons réussir la séparation des variables de l'Eq.(II.1), il sera considéré que le potentiel et la fonction d'onde sont quasiment séparables[76, 77]. Le potentiel $V(\beta, \gamma)$ et la fonction d'onde $\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ étant quasiment séparables, nous aboutissons à deux équations hypergéométriques correspondant respectivement aux mouvements de rotation et vibration dûs aux variables β et γ des nucléides. Pour cela, posons :

$$V(\beta, \gamma) = V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2} \quad (\text{II.17})$$

avec $V_1(\beta)$, l'énergie potentielle suivant la coordonnée β et $V_2(\gamma)$, celle décrite par la coordonnée γ .

En remplaçant l'Eq. (II. 17) dans l'Eq. (II. 16), le Hamiltonien peut se présenter sous la forme :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2}. \quad (\text{II.18})$$

de même la fonction d'onde s'écrit :

$$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \Phi(\beta)\eta(\gamma)\Theta_{M,\alpha}^L(\theta_i), \quad (\text{II.19})$$

où $\Phi(\beta)$ et $\eta(\gamma)$ représentent les fonctions d'ondes suivant les coordonnées β et γ respectivement, tandis que $\Theta_{M,\alpha}^L(\theta_i)$ est la composante angulaire de la fonction d'onde, appelée fonction d'onde de Wigner et qui est un fonction symétrique ayant pour expression :

$$\Theta(\theta_i) = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta\alpha, 0)}} \left[\Theta_{M,\alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L \Theta_{M,-\alpha}^{(L)}(\theta_i) \right], \quad (\text{II.20})$$

Dans cette formule, L est le nombre quantique du moment angulaire, α est la projection du moment quantique angulaire par rapport aux coordonnées fixes. Le découplage de l'équation du Hamiltonien n'est possible que pour les nucléides triaxiaux dont le mouvement de rotation a

une énergie potentielle minimale (c'est-à-dire $\gamma = \frac{\pi}{6}$). Dans le cas contraire, le découplage n'est plus possible parce que les différents mouvements décrits par les nucléides restent liés et dont la séparation des variables est quasi impossible.

Concernant les noyaux atomiques triaxiaux, la surface de l'énergie potentielle a son minimum avec la partie γ à $\gamma = \frac{\pi}{6}$ [78]. On peut écrire le terme du moment quantique angulaire de l'Eq. (II.18) comme :

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} = 4 \left(\hat{Q}_1^2 + \hat{Q}_2^2 + \hat{Q}_3^2 \right) - 3\hat{Q}_1^2. \quad (\text{II.21})$$

ou simplement

$$W = 4\hat{Q}^2 - 3\hat{Q}_1^2, \quad (\text{II.22})$$

où \hat{Q} est le moment angulaire qui représente la somme des composantes des moments angulaires suivants les différents axes et est défini par :

$$\hat{Q}^2 = \hat{Q}_1^2 + \hat{Q}_2^2 + \hat{Q}_3^2 \quad (\text{II.23})$$

En tenant compte de toutes les expressions précédentes, l'Eq. (II.16) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} (4\hat{Q}^2 - 3\hat{Q}_1^2) \right] \Phi(\beta)\eta(\gamma)\Theta(\theta_i) \\ + \left(V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2} \right) \Phi(\beta)\eta(\gamma)\Theta(\theta_i) = E\Phi(\beta)\eta(\gamma)\Theta(\theta_i) \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

En appliquant l'opérateur \hat{Q}^2 sur la fonction d'onde de Wigner, l'Eq. (II.20) s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{Q}^2 \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} \left[\Theta_{M,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L \Theta_{M,-\alpha}^L(\theta_i) \right] \\ = 4L(L+1) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} \left[\Theta_{M,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L \Theta_{M,-\alpha}^L(\theta_i) \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

En appliquant \widehat{Q}_1^2 sur la fonction de Wigner de la même équation (II. 20), on obtient :

$$\begin{aligned} & \widehat{Q}_1^2 \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [\Theta_{M,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L \Theta_{M,-\alpha}^L(\theta_i)] \\ & = (\alpha^2 + L - \alpha) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [\Theta_{M,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L \Theta_{M,-\alpha}^L(\theta_i)]. \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

L désigne le nombre quantique du moment angulaire et α la projection du moment quantique angulaire par rapport aux axes fixes.

Remplaçons maintenant les Eqs. (II.26) et (II.25) dans le troisième terme de l'opérateur Hamiltonien de l'Eq. (II.24) nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[-\frac{1}{4\beta^2} (4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2) \right] \Phi(\beta)\eta(\gamma)\Theta(\theta_i) &= \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \Phi(\beta)\eta(\gamma) (4\widehat{Q}^2\Theta(\theta_i) - 3\widehat{Q}_1^2\Theta(\theta_i)) \\ &= \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \Phi(\beta)\eta(\gamma) (4L(L+1)\Theta(\theta_i) - 3(\alpha^2 + L - \alpha)\Theta(\theta_i)). \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

Multiplions maintenant l'Eq. (II.24) par $-\frac{2B}{\hbar^2}$ et posons

$$\begin{aligned} v_1(\beta) &= \frac{2B}{\hbar^2} V_1(\beta), \\ v_2(\beta) &= \frac{2B}{\hbar^2} V_2(\beta), \\ \xi &= \frac{2B}{\hbar^2} E. \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

$v_1(\beta)$ and $v_2(\gamma)$ sont les potentiels réduits and ξ est nommé énergie réduite.

Les effets de la projection de α sur les coordonnées fixes font introduire les nombres quantiques apparents $n_w = L - \alpha$ [79, 80] où les bandes d'énergie sont caractérisés par $L = n_w, n_w + 2, n_w + 4, \dots$ (avec $n_w \geq 0$), et pour la bande à l'état fondamental on a $n_w = 0$. En pratique, au lieu d'utiliser α , dans certains problèmes, il est recommandé d'utiliser les nombres quantiques oscillants $n_w = L - \alpha$.

En introduisant l'Eq. (II. 22) dans l'Eq. (II. 5) et en utilisant l'Eq. (II. 1), nous obtenons deux équations différentielles aux valeurs propres après quelques calculs, développements mathématiques et séparations des variables comme ci-dessous :

$$\left(-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + v_2(\gamma) \right) \eta(\gamma) = \lambda \eta(\gamma); \quad (\text{II.29})$$

$$\left(-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{4L(L+1) - 3\alpha^2 + 4\lambda}{4\beta^2} + v_1(\beta) \right) \Phi(\beta) = \xi \Phi(\beta). \quad (\text{II.30})$$

Dans les Eqs. (II.29) et (II.30), la première concerne les mouvements de rotations (γ) et la deuxième les mouvements de vibrations (β). Il faut cependant noter que c'est le mouvement de vibration de l'Eq. (II. 30) qui focalise notre attention car il met en exergue l'action combinée des potentiels de Kratzer et de Morse, nouvelle approche introduite dans ce travail. L'utilisation de ce potentiel est une base essentielle permettant d'expliquer les nouveaux mécanismes opérés lors des différentes déformations des nucléides. C'est la première fois que ce type de potentiel est utilisé pour expliquer les déformations des nucléides. Les solutions sont connues et assez triviales, pour ce qui est des mouvements de rotations L'Eq. (II.29).

II.3.2 Solutions des équations régissant les rotations (γ) et les vibrations (β) du nucléide

a. Solutions de la partie γ

L'équation d'inconnue γ est la partie radiale de l'équation de Schrödinger, elle incarne les différentes rotations qu'effectuent le nucléide. Elle est donnée par l'Eq. (II. 29) ci-dessous :

$$\left(-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + v_2(\gamma) \right) \eta(\gamma) = \lambda \eta(\gamma); \quad (\text{II.31})$$

Sa résolution nécessite un choix harmonieux et judicieux de la fonction $v_2(\gamma)$. Et il a été montré la partie γ du potentiel était un oscillateur harmonique dont l'énergie potentielle possède un minimum d'environ $\frac{\pi}{6}$ et est convenable pour modéliser des noyaux triaxiaux formés par l'oscillation de la structure nucléaire.

Aussi lorsque le nucléide est en rotation, il passe de la forme elliptique à la forme sphérique et vice-versa. Dans la suite, le potentiel harmonique peut être considéré par :

$$v_2(\gamma) = \frac{1}{2}\tilde{c}\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right)^2 \quad (\text{II.32})$$

où \tilde{c} est définie comme la rigidité du potentiel. En insérant cette équation dans l'Eq. (II.29) et en résolvant l'équation obtenue, nous obtenons l'énergie et les fonctions d'ondes normalisées[77] respectivement

$$\begin{aligned} \lambda_{\tilde{\gamma}} &= \sqrt{2\tilde{c}}\left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2}\right); \\ n_{\tilde{\gamma}} &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

$$\eta_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n_{\tilde{\gamma}}}\sqrt{\pi}n_{\tilde{\gamma}}!}} H_{n_{\tilde{\gamma}}}\left((\tilde{c}/2)^{1/4}\tilde{\gamma}\right) \exp(-(\tilde{c}/2)^{1/2}\tilde{\gamma}^2/2), \quad (\text{II.34})$$

avec $\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{6}$, $n_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots$ est le nombre quantique de l'oscillateur, $H_{n_{\tilde{\gamma}}}$ est le polynôme de Hermite.

b. Solutions de la partie (β)

Pour la partie β , nous proposons une somme des potentiels de Morse et Kratzer "criblé" $v_1(\beta) = u_M(\beta) + u_{SK}(\beta)$, $u_M(\beta)$ pour le potentiel de Morse et $u_{SK}(\beta)$ pour le potentiel de Kratzer "criblé".

La nouvelle forme de potentiel est introduite comme suit :

$$v_1(\beta) = a \exp(-\alpha\beta) + b \exp(-2\alpha\beta) + \left(\frac{c}{\beta} + \frac{d}{\beta^2}\right) \exp(-\alpha\beta), \quad (\text{II.35})$$

où a , b , c et d sont des coefficients constants qui sont déterminés par ajustement avec des données expérimentales[81]. Le potentiel réduit est sans dimension puisqu'il s'agit du potentiel multiplié par $-\frac{2B}{\hbar^2}$ et donc les paramètres a , b , c et d sont sans unité et seront appelés plus tard les constances du potentiel de Morse plus Kratzer "criblé".

En utilisant l'approximation de Scheme Pekeris[82, 83, 84, 85, 86, 87] dans le potentiel de Kratzer "criblé", nous avons

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{1 - \exp(-\alpha\beta)}; \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{(1 - \exp(-\alpha\beta))^2}. \quad (\text{II.36})$$

Le potentiel $v_1(\beta)$ peut être réécrit comme suit :

$$v_1(\beta) = a \exp(-\alpha\beta) + b \exp(-2\alpha\beta) + \left(\frac{c\alpha}{1 - \exp(-\alpha\beta)} + \frac{d\alpha^2}{(1 - \exp(-\alpha\beta))^2} \right) \exp(-\alpha\beta). \quad (\text{II.37})$$

Considérant l'Eq. (II.30) et en définissant le paramètre p comme : $p = \frac{4L(L+1)-3\alpha^2+4\lambda}{4}$, Eq. (II.38) est dérivée :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{4}{\beta} \frac{d}{d\beta} - \frac{p}{\beta^2} - a \exp(-\alpha\beta) - \right. \\ & \left. b \exp(-2\alpha\beta) - \left(\frac{c\alpha}{1 - \exp(-\alpha\beta)} + \frac{d\alpha^2}{(1 - \exp(-\alpha\beta))^2} \right) \exp(-\alpha\beta) + \xi \right] \Phi(\beta) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

En introduisant un changement de variable approprié tel que : $\Phi(\beta) = \beta^{-2}\phi(\beta)$ dans l'Eq. (II.38), nous obtenons l'Eq. (II.39) qui sera résolu plus tard, par la méthode de Nikiforov-Uvarov Étendue.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{d\beta^2} - \frac{(p+2)\alpha^2}{(1 - \exp(-\alpha\beta))^2} - a \exp(-\alpha\beta) - b \exp(-2\alpha\beta) - \right. \\ & \left. \left(\frac{c\alpha}{1 - \exp(-\alpha\beta)} + \frac{d\alpha^2}{(1 - \exp(-\alpha\beta))^2} \right) \exp(-\alpha\beta) + \xi \right] \phi(\beta) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

II.4 Méthode étendue de Nikiforov-Uvarov

II.4.1 Généralités sur la méthode standard de Nikiforov-Uvarov

Dans un grand nombre de problèmes quantiques, la résolution de l'équation de Schrödinger conduit à la résolution de l'équation différentielle de type[35] :

$$\varphi''(s) + \frac{\bar{\tau}(s)}{\sigma(s)} \varphi'(s) + \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \varphi(s) = 0, \quad (\text{II.40})$$

où $\bar{\tau}(s)$ est un polynôme de degré non supérieur à 1, et $\sigma(s)$ avec $\bar{\sigma}(s)$ sont les polynômes de degré non supérieur à 2 et $\varphi(s)$ est une fonction de type hypergéométrique et une fonction différentielle de second degré. Dans l'approche générale, nous assumons dans l'Eq. (II.40), $\bar{\tau}(s)$, $\sigma(s)$ et $\bar{\sigma}(s)$ sont les polynômes d'au plus $(k-1)$ -ième, k -ième et $(2k-2)$ -ième degré (avec $k \geq 2$) [88] respectivement.

La méthode standard de Nikiforov-Uvarov est utilisée pour transformer des équations de Schrödinger en une différentielle du second ordre. Nous utilisons cette méthode comme suit :

En considérant que $\varphi(s) = \phi(s)y(s)$ et en choisissant une fonction appropriée $\phi(s)$, qui sera éventuellement déterminée, l'Eq. (II.40) est réduite à une simple forme :

$$y''(s) + \left(2\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\bar{\tau}(s)}{\sigma(s)}\right) y'(s) + \left(\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\phi'(s)\bar{\tau}(s)}{\phi(s)\sigma(s)} + \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\right) y(s) = 0. \quad (\text{II.41})$$

Une telle équation peut être encore simplifiée en réécrivant les coefficients de $y'(s)$ et $y(s)$ en termes de certains polynômes nouvellement définis. Pour le coefficient de $y'(s)$, considérons :

$$2\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} + \frac{\bar{\tau}(s)}{\sigma(s)} = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}, \quad (\text{II.42})$$

où τ est un polynôme d'au plus $(k-1)$ -th degré. De plus, nous fixons

$$\tau(s) = \bar{\tau}(s) + 2\pi(s). \quad (\text{II.43})$$

Le nouveau paramètre $\pi(s)$ est un polynôme d'au plus $(k-1)$ -th degré. En combinant (II.42) et (II.43), l'Eq. (II.44) est obtenue

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)}. \quad (\text{II.44})$$

De plus, le terme $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}$ qui apparaît dans le coefficient de $y(s)$ de l'Eq. (II.40), est disposé comme suit :

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} = \left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}\right)' + \left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}\right)^2 = \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}\right)' + \left(\frac{\pi(s)}{\sigma(s)}\right)^2. \quad (\text{II.45})$$

Dans ce cas, le coefficient de $y(s)$ est converti en une forme plus appropriée en prenant l'égalité donnée dans l'Eq. (II.44)

$$\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} + \frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \frac{\bar{\tau}(s)}{\sigma(s)} + \frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} = \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \quad (\text{II.46})$$

où $\tilde{\sigma}(s)$ est un polynôme d'au plus $(k-1)$ -th degré, donné par

$$\tilde{\sigma}(s) = \bar{\sigma}(s) + \pi^2(s) + \pi(s)(\bar{\tau}(s) - \sigma'(s)) + \pi'(s)\sigma(s). \quad (\text{II.47})$$

En substituant les membres du coté droit des Eqs. (II.42) et (II.46) dans l'Eq. (II.41), une équation de type hypergéométrique est obtenue comme suit

$$y''(s) + \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}y'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma(s)}y(s) = 0. \quad (\text{II.48})$$

Si le polynôme $\tilde{\sigma}(s)$ est divisible par $\sigma(s)$, i.e

$$\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma(s)} = h(s), \quad (\text{II.49})$$

où $h(s)$ est un polynôme de degré au plus $(k-2)$ défini comme une équation réduite

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + h(s)y(s) = 0. \quad (\text{II.50})$$

En utilisant l'Eq.(II.49) dans l'Eq.(II.47) et en posant :

$$h(s) - \pi'(s) = g(s). \quad (\text{II.51})$$

qui est un polynôme de degré au plus $(k-2)$ et il a été dérivé une équation quadratique pour le polynôme $\pi(s)$, comme montré ci-dessous

$$\pi^2(s) + (\bar{\tau}(s) - \sigma'(s))\pi(s) + \bar{\sigma}(s) - g(s)\sigma(s) = 0. \quad (\text{II.52})$$

Les racines carrées de l'équation précédente sont données par

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \bar{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \bar{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \bar{\sigma}(s) + g(s)\sigma(s)} \quad (\text{II.53})$$

Pour obtenir toutes les solutions possibles pour le polynôme $\pi(s)$, $g(s)$ sous la racine carrée doit être connu explicitement. Puisque $\pi(s)$ est un polynôme de degré au plus $(k-1)$, l'expression sous la racine carrée doit être le carré d'un polynôme de degré au plus $(k-1)$. Il existe en général plusieurs possibilités pour choisir $g(s)$ de manière à ce que cette dernière condition soit satisfaite. Deux solutions de $\pi(s)$ peuvent être déterminées de l'Eq. (II.53).

II.4.2 Méthode étendue de Nikiforov-Uvarov avec l'équation de Heun

Il convient de remarquer que, dans l'équation de type Heun, nous avons $k = 3$. Donc la méthode standard de Nikiforov Uvarov (NU) est convertie à une nouvelle forme appelée méthode Étendue de Nikiforov-Uvarov (ENU) avec les solutions des fonctions de Heun. La nouvelle forme est définie par :

$$\varphi''(s) + \frac{\tilde{\tau}_{ex}(s)}{\sigma_{ex}(s)}\varphi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}_{ex}(s)}{\sigma_{ex}^2(s)}\varphi(s) = 0 \quad (\text{II.54})$$

où $\tilde{\tau}_{ex}(s)$, $\sigma_{ex}(s)$ et $\tilde{\sigma}_{ex}(s)$ sont les polynômes d'au plus $(3-1)$ ème, 3ème et $(2(3)-2)$ ème degré, i.e., d'au plus second, troisième et quatrième degré respectivement.

Les équations clés deviennent respectivement

$$\pi_{ex}(s) = \frac{\sigma'_{ex}(s) - \tilde{\tau}_{ex}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'_{ex}(s) - \tilde{\tau}_{ex}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}_{ex}(s) + g(s)\sigma_{ex}(s)} = 0. \quad (\text{II.55})$$

C'est un polynôme d'au plus second degré $\tilde{\tau}_{ex}(s)$ et $g(s)$ est un polynôme d'au plus premier degré.

$$\sigma_{ex}(s)y''(s) + \tau_{ex}(s)y'(s) + h(s)y(s) = 0. \quad (\text{II.56})$$

En différentiant l'Eq. (II.50) $(k-2)$ -fois ($k = 3$ pour l'équation de type Heun), i.e. une fois l'Eq. (II.56), on obtient l'Eq. (II.57)

$$\sigma_{ex}(s)y'''(s) + (\tau_{ex}(s) + \sigma'_{ex}(s))y''(s) + (\tau'_{ex}(s) + h(s))y'(s) + h'(s)y(s) = 0. \quad (\text{II.57})$$

En utilisant la nouvelle représentation $y^{(n)}(s) = v_n(s)$ pour l'équation de type Heun ($k = 3$), sa dérivée n ième pourrait être présentée comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^3 \binom{n+k-2}{k-l} \sigma_{ex}^{(k-l)} v_n^{(l)} + \sum_{l=0}^2 \binom{n+k-2}{k-l-1} \tau_{ex}^{(k-l-1)} v_n^{(l)} \\ + \sum_{l=0}^1 \binom{n+k-2}{k-l-2} h^{(k-l-2)} v_n^{(l)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

Après le développement de l'Eq. (II.58), nous avons le résultat ci-dessous :

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{0} \sigma_{ex}^{(0)} v_n^{(3)} + \left[\binom{n+1}{1} \sigma_{ex}^{(1)} + \binom{n+1}{0} \tau_{ex}^{(0)} \right] v_n^{(2)} + \left[\binom{n+1}{2} \sigma_{ex}^{(2)} + \binom{n+1}{1} \tau_{ex}^{(1)} \right. \\ \left. + \binom{n+1}{0} h(0) \right] v_n^{(1)} + \left[\binom{n+1}{3} \sigma_{ex}^{(3)} + \binom{n+1}{2} \tau_{ex}^{(2)} + \binom{n+1}{1} h(0) \right] v_n^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

Nous obtenons finalement l'Eq. (II.60) ci-dessous

$$\begin{aligned} \sigma_{ex} v_n^{(3)} + \left[\frac{(n+1)}{1!} \sigma'_{ex} + \tau_{ex} \right] v_n'' + \left[\frac{(n+1)n}{2!} \sigma''_{ex} + \frac{(n+1)}{1!} \tau'_{ex} + h \right] v_n' \\ + \left[\frac{(n+1)n(n-1)}{3!} \sigma'''_{ex} + \frac{(n+1)n}{2!} \tau''_{ex} + (n+1)h' \right] v_n(s) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

Si le coefficient de v_n de l'Eq. (II.60) est égal à zéro, c'est-à-dire,

$$h_n(s) = -\frac{n(n-1)}{3(3-1)} \sigma''_{ex}(s) - \frac{n}{2!} \tau'_{ex}(s) + C_n = -\frac{1}{6} n(n-1) \sigma''_{ex}(s) - \frac{n}{2} \tau'_{ex}(s) + C_n, \quad (\text{II.61})$$

Il existe une solution particulière $y(s) = y_n(s)$ qui est un polynôme de degré n . En intégrant l'Eq. (II.61) une fois, le polynôme h_n est défini comme

$$h_n(s) = -\frac{n(n-1)}{3(3-1)} \sigma''_{ex}(s) - \frac{n}{2!} \tau'_{ex}(s) + C_n = -\frac{1}{6} n(n-1) \sigma''_{ex}(s) - \frac{n}{2} \tau'_{ex}(s) + C_n, \quad (\text{II.62})$$

avec C_n la constante d'intégration.

II.5 Résolution de la partie β avec la méthode étendue de Nikiforov-Uvarov

L'Eq. (II.39) ne peut se résoudre qu'en utilisant la méthode ENU. Pour cela, il sera avantageux de faire la transformation $x = \exp(-\alpha\beta)$ et après quelques opérations mathématiques l'Eq. (II.38) devient

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha(1-x)}{\alpha x(1-x)} \frac{d}{dx} + \frac{1}{[\alpha x(1-x)]^2} (-Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 - Dx - E) \right] \phi = 0, \quad (\text{II.63})$$

avec

$$\begin{aligned}
A &= b; \\
B &= a - 2b; \\
C &= -2a + b - c\alpha - \xi; \\
D &= a + c\alpha + 2\xi + d\alpha^2; \\
E &= (p + 2)\alpha^2 - \xi.
\end{aligned} \tag{II.64}$$

En procédant à l'identification et à l'appariement de l'Eq. (II.63) avec la méthode ENU, il pourrait être lu

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{ex} &= \alpha(1 - x); \\
\sigma_{ex} &= \alpha x(1 - x); \\
\tilde{\sigma}_{ex} &= -Ax^4 - Bx^3 - Cx^2 - Dx - E.
\end{aligned} \tag{II.65}$$

Nous avons considéré que $g(x) = Qx + P$ pour trouver l'expression du polynôme π_{ex} en provenance de l'Eq. (II.55)

$$\pi_{ex}(x) = -\frac{x}{2}\alpha \pm \sqrt{Ax^4 + (B - \alpha Q)x^3 + \left(\frac{\alpha^2}{4} + C + \alpha Q - \alpha P\right)x^2 + (D + \alpha P)x + E}. \tag{II.66}$$

Puisque π_{ex} est un polynôme d'au plus second degré, l'expression sous la racine carré doit être le carré d'un polynôme d'au plus second degré.

$$\pi_{ex}(x) = -\frac{x}{2}\alpha \pm (\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0). \tag{II.67}$$

Pour déterminer les inconnues $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, P$ et Q en fonction du terme des paramètres A, B, C, D et E ; les équations (II.66) et (II.67) sont comparées. En conséquence, nous avons l'ensemble de solutions suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_2^2 = A; \\ 2\alpha_1\alpha_2 = B - \alpha Q; \\ \alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_2 = \frac{\alpha^2}{4} + C + \alpha Q - \alpha P; \\ 2\alpha_0\alpha_1 = D + \alpha P; \\ \alpha_0^2 = E. \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

Par integration directe de $\frac{\phi'_{ex}(x)}{\phi_{ex}(x)} = \frac{\pi_{ex}(x)}{\sigma_{ex}(x)}$, deux solutions de $\phi_{ex}(x)$ sont derivées. Elles sont données par

$$\begin{cases} \phi_{ex1}(x) = k_1 x^{\alpha_0/\alpha} \exp(-\frac{\alpha_2}{\alpha}x) (1-x)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}; \\ \phi_{ex2}(x) = k_2 x^{-\alpha_0/\alpha} \exp(\frac{\alpha_2}{\alpha}x) (1-x)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}. \end{cases} \quad (\text{II.69})$$

Dans la suite, on s'intéressera uniquement à la fonction d'onde $\phi_{ex2}(x)$ car elle a une solution physiquement acceptable pendant le travail de simulation. Par conséquent, elle est appropriée pour la détermination de la valeur propre et la fonction propre du problème.

En se servant de la relation $h(x) = h_n(x)$ et en utilisant les équations (II.51) et (II.62), on obtient

$$Qx + P - \frac{\alpha}{2} \pm (2\alpha_2x + \alpha_1) = C_n + \frac{n\alpha(2+n)}{3} - n[\pm(2\alpha_2x + \alpha_1)], \quad (\text{II.70})$$

où C_n est une constante d'intégration qui sera déterminée ultérieurement. Selon l'Eq. (II.70), il existe deux possibilités distinctes

$$\mathbf{I} \begin{cases} 2\alpha_2 + Q = -2n\alpha_2 \\ P - \frac{\alpha}{2} + \alpha_1 = C_n + \frac{n(2\alpha+n\alpha-3\alpha_1)}{3} \end{cases} \quad \mathbf{II} \begin{cases} -2\alpha_2 + Q = 2n\alpha_2 \\ P - \frac{\alpha}{2} - \alpha_1 = C_n + \frac{n(2\alpha+n\alpha+3\alpha_1)}{3} \end{cases} \quad (\text{II.71})$$

En remplaçant σ_{ex} , τ_{ex} et h_n dans l'Eq. (II.50), nous avons finalement obtenu

$$\alpha x (1-x) y'' + [\alpha - 2\alpha x \pm 2(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)] y'(x) + \left[C_n + \frac{n\alpha(2+n)}{3} - n(\pm(2\alpha_2 x + \alpha_1)) \right] y(x) = 0. \quad (\text{II.72})$$

La dernière équation peut être réécrite en deux équations différentielles comme

$$\begin{aligned} \text{I} : \alpha x (1-x) y''(x) + (\alpha + 2(\alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha)x + \alpha_2 x^2)) y'(x) + \\ \left[C_n + \frac{n(2\alpha + n\alpha - 3\alpha_1)}{3} - 2n\alpha_2 x \right] y(x) = 0; \\ \text{II} : \alpha x (1-x) y''(x) + (\alpha - 2(\alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha)x + \alpha_2 x^2)) y'(x) + \\ \left[C_n + \frac{n(2\alpha + n\alpha + 3\alpha_1)}{3} + 2n\alpha_2 x \right] y(x) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.73})$$

Pour déterminer la constante d'intégration C_n , nous utiliserons les solutions de l'équation différentielle du Confluent de Heun.

II.6 Équation confluyente de Heun

En choisissant l'Eq. (II. 73 II), elle pourrait être réécrite dans la forme suivante :

$$x(x-1)y''(x) + \left(\frac{2\alpha_2}{\alpha} x^2 + 2\left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha}\right)x - \left(1 - 2\frac{\alpha_0}{\alpha}\right) \right) y'(x) + \left[-\frac{2n\alpha_2}{\alpha} x - \frac{C_n + \frac{n\alpha(2+n)}{3} + n\alpha_1}{\alpha} \right] y(x) = 0. \quad (\text{II.74})$$

Les solutions de l'Eq. (II.74) sont similaires à celles de l'équation différentielle du Confluent de Heun, qui est écrite dans sa forme la plus simple suivante[89, 90, 91]

$$z(z-1)H'' + \left[\alpha' z^2 + (\beta + \gamma - \alpha' + 2)z - (1 + \beta) \right] H' + ((\mu + \nu)z - \mu) H = 0. \quad (\text{II.75})$$

Pour déterminer les paramètres du Confluent de Heun $\alpha', \beta, \gamma, \delta$ et η de ce travail, nous procédons par identification et association de l'Eq.(II.74) à l'Eq. (II.75)

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{2\alpha_2}{\alpha}; \\
\beta &= \frac{-2\alpha_0}{\alpha}; \\
\gamma &= \frac{2}{\alpha}(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2); \\
\mu &= \frac{1}{\alpha}\left(C_n + \frac{n\alpha(2+n)}{3} + n\alpha_1\right); \\
\nu &= \frac{-1}{\alpha}\left(2n\alpha_2 + \left(C_n + \frac{n\alpha(2+n)}{3} + n\alpha_1\right)\right).
\end{aligned} \tag{II.76}$$

HeunC $(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta) z^n$ est une solution particulière unique avec pour condition initiale HeunC $(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta, 0) = 1$. Les coefficients $v_n(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta)$ sont déterminés par la relation de récurrence à trois termes.

$$A_n v_n = B_n v_{n-1} + C_n v_{n-2} \tag{II.77}$$

avec la condition initiale $v_{-1} = 0, v_0 = 1$. Ici

$$\begin{aligned}
A_n &= 1 + \frac{\beta}{n} \rightarrow 1; \\
B_n &= 1 + \frac{-\alpha + \beta + \gamma - 1}{n} + \frac{\eta - (-\alpha + \beta + \gamma)/2 - \alpha\beta/2 + \beta\gamma/2}{n^2} \rightarrow 1; \\
C_n &= \frac{\alpha}{n^2} \left(\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta + \gamma}{2} + n - 1 \right) \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{II.78}$$

quand $n \rightarrow \infty$

δ et η sont liés aux autres paramètres par les équations $\mu = \frac{1}{2}(\alpha' - \beta - \gamma + \alpha\beta - \beta\gamma) - \eta$ et $\nu = \frac{1}{2}(\alpha' + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma) + \delta + \eta$ [89, 90, 91].

Par ailleurs, l'équation de Confluent Heun montre que le paramètre spectral naturel est μ sous la forme d'une matrice triadiagonal $(n+1) \times (n+1)$ défini par

$$\begin{pmatrix} \mu - q_1 & 1(1 + \beta) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n\alpha' & \mu - q_2 + 1\alpha' & 2(2 + \beta) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (n-1)\alpha' & \mu - q_3 + 2\alpha' & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu - q_{n-1} + (n-2)\alpha' & (n-1)(n-1 + \beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\alpha' & \mu - q_n + (n-1)\alpha' & n(n + \beta) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\alpha' & \mu - q_{n+1} + n\alpha' \end{pmatrix}$$

avec $q_N = (N-1)(N + \beta + \gamma)$.

Au premier état excité, c'est-à-dire pour $n = 1$, un polynôme du second degré sera dérivé en fonction de μ

$$\mu^2 - \mu(\gamma + \beta - \alpha' + 2) - n\alpha'(1 + \beta) = 0 \quad (\text{II.79})$$

Après résolution de l'Eq. (II.79), deux solutions de μ sont obtenues comme suit :

$$\mu = \frac{1}{\alpha} \left[(\alpha + \alpha_1) \pm \sqrt{(\alpha + \alpha_1)^2 + 2n\alpha_2(\alpha - 2\alpha_0)} \right]. \quad (\text{II.80})$$

Il y a deux expressions de μ qui proviennent des Eqs (II.76) et (II.80). En les égalant, l'expression de la constante d'intégration C_n est finalement trouvée

$$C_n = (1 - n) \left[\frac{\alpha}{3}n + (\alpha + \alpha_1) \right] \pm \sqrt{(\alpha + \alpha_1)^2 + 2n\alpha_2(\alpha - 2\alpha_0)}. \quad (\text{II.81})$$

Cette constante d'intégration sera utilisée plus tard pour trouver les valeurs du spectre d'énergie et de la fonction d'onde.

II.7 Le spectre d'énergie et la fonction d'onde

II.7.1 Le spectre d'énergie

En substituant la valeur de C_n dans le système (II.71, II) et en utilisant aussi les Eqs. (II.64) et (II.68), le spectre d'énergie et la contrainte sur les coefficients du potentiel sont déterminés.

La dernière équation du système (II.68) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\alpha_0^2 &= E, \\ \alpha_0^2 &= (P + 2)\alpha^2 - \xi\end{aligned}\tag{II.82}$$

En sommant la 2^{ème} et la 3^{ème} équations du même système, on obtient la relation suivante

$$\alpha_1^2 + 2(\alpha_0 + \alpha_2)\alpha_1 + 2\alpha_0\alpha_2 = \frac{\alpha^2}{4} + B + C + D\tag{II.83}$$

En se servant aussi des équations du système (II.64), on aboutit à

$$B + C + D = -b + \xi + d\alpha^2\tag{II.84}$$

En introduisant (II.84) dans (II.83) nous obtenons

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 + 2(\alpha_0 + \alpha_2)\alpha_1 + 2\alpha_0\alpha_2 &= \frac{\alpha^2}{4} - b + \xi + d\alpha^2, \\ \Rightarrow \xi &= \alpha_1^2 + 2(\alpha_0 + \alpha_2)\alpha_1 + 2\alpha_0\alpha_2 + b - (d + \frac{1}{4})\alpha^2\end{aligned}\tag{II.85}$$

En remplaçant ξ par son expression dans l'Eq. (II.82), un polynôme du 2nd degré en fonction de α_0 est obtenu

$$\alpha_0^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_0 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + b - (P + \frac{9}{4} + d)\alpha^2 = 0\tag{II.86}$$

Après résolution de cette équation du second degré, l'expression de α_0 est trouvée

$$\alpha_0 = -(\alpha_1 + \alpha_2) \pm \sqrt{\alpha_2^2 - b + (P + \frac{9}{4} + d)\alpha^2} \quad (\text{II.87})$$

Ainsi l'expression de ξ se résume à

$$\xi = (p + 2)\alpha^2 - \left[-(\alpha_1 + \alpha_2) \pm \left(\sqrt{\alpha_2^2 - b + (p + \frac{9}{4} + d)\alpha^2} \right) \right]^2 \quad (\text{II.88})$$

Remplaçons α_1 et α_2 par leurs expressions provenant des systèmes de l'Eq. (II.71) fonction de n dans l'Eq. (II.88). L'expression du spectre d'énergie est finalement obtenue

$$\xi = (p + 2)\alpha^2 - \left[\left(\sqrt{\left(p + \frac{9}{4} + d \right)} - (n + 1) \right) \alpha - \frac{a}{2\sqrt{b}} \right]^2, n = 0, 1, 2, \dots; \quad (\text{II.89})$$

Et aussi la contrainte sur les coefficients du potentiel est dérivée

$$c = - \left[\frac{a + 2\xi}{\alpha} + \left(d + \frac{3}{2} \right) \alpha + 2 \left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha} \right) \alpha_1 \pm [(\alpha + \alpha_1)^2 + 2n\alpha_2(\alpha - 2\alpha_0)]^{1/2} \right] = c(\xi). \quad (\text{II.90})$$

Force est de constater que le coefficient c du potentiel dépend des autres coefficients de ce même potentiel. Il est aussi fonction de l'énergie ξ . Ce qui voudrait dire, lors de notre simulation les valeurs de a , b et d sont choisies aléatoirement, par contre celle de c est conditionné de ces valeurs.

II.7.2 La fonction d'onde

En rappelant les variables qui ont été utilisées lors de la dérivation de la solution, nous avons la solution de la partie β de la fonction d'onde.

D'abord, on avait choisi la seconde solution de l'Eq. (II.69) du fait qu'elle soit celle, physiquement acceptable durant notre simulation.

$$\phi_{e2}(x) = k_2 x^{-\alpha_0/\alpha} \exp\left(\frac{\alpha_2}{\alpha} x\right) (1-x)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)}. \quad (\text{II.91})$$

Ensuite nous avons aussi posé $x = \exp(-\alpha\beta)$. En introduisant cette variable x par sa valeur dans l'expression précédente on trouve

$$\begin{aligned} \phi_{e2}(\beta) &= k_2 \exp(-\alpha\beta)^{-\alpha_0/\alpha} \exp\left(\frac{\alpha_2}{\alpha} \exp(-\alpha\beta)\right) (1 - \exp(-\alpha\beta))^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)}, \\ &\Rightarrow \phi_{e2}(\beta) = k_2 \exp(\alpha_0\beta + \gamma \exp(-\alpha\beta)) (1 - \exp(-\alpha\beta))^{\frac{1}{2} + \lambda} \end{aligned} \quad (\text{II.92})$$

avec $\lambda = \frac{1}{\alpha}(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$.

Par la suite on se servira également de l'approximation de Pekeris utilisée un peu plus haut, à savoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} &\simeq \frac{\alpha}{1 - \exp(-\alpha\beta)}; \\ &\Rightarrow \exp(-\alpha\beta) \simeq (1 - \alpha\beta) \end{aligned} \quad (\text{II.93})$$

Ainsi on obtient l'expression suivante

$$\phi_{e2}(\beta) = k_2 \exp(\gamma) \exp -(\alpha_2 - \alpha_0)\beta (\alpha\beta)^{\lambda + \frac{1}{2}} \quad (\text{II.94})$$

où $\gamma = \frac{\alpha_2}{\alpha}$

En fin, en faisant appel à ce changement de variable $\Phi(\beta) = \beta^{-2}\phi(\beta)$, mentionné plus haut, on peut se permettre d'écrire :

$$\Phi(\beta) = \beta^{-2}\phi_{e2}(\beta) \times \text{HeunC}(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta, \exp(-\alpha\beta)) \quad (\text{II.95})$$

avec $\text{HeunC}(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta) x^n$

À l'état fondamental c'est à dire pour $n = 0$ on a

$$\begin{aligned}\text{HeunC}(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta, x) &= \sum_{n=0}^0 v_n(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta) x^n, \\ \Rightarrow \text{HeunC}(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta, x) &= v_0 = 1.\end{aligned}\tag{II.96}$$

Au premier état excité c'est-à-dire pour $n = 1$ on a

$$\begin{aligned}\text{HeunC}(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta, x) &= \sum_{n=0}^1 v_n(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta) x^n, \\ \Rightarrow \text{HeunC}(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta, x) &= 1 + v_1 x; \\ \Rightarrow \text{HeunC}(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta, \beta) &= 1 + v_1 \exp(-\alpha\beta); \\ \Rightarrow \text{HeunC}(\alpha', \beta, \gamma, \delta, \eta, \beta) &= 1 + v_1(1 - \alpha\beta)\end{aligned}\tag{II.97}$$

Détermination de v_1

En rappelant l'expression de récurrence à trois termes on peut évaluer v_1

$$\begin{aligned}A_n v_n &= B_n v_{n-1} + C_n v_{n-2}; \\ \Rightarrow A_1 v_1 &= B_1 v_0 + C_1 v_{-1}; \\ \Rightarrow A_1 v_1 &= B_1; \\ \Rightarrow v_1 &= \frac{B_1}{A_1}.\end{aligned}\tag{II.98}$$

en appliquant la condition initiale $v_{-1} = 0, v_0 = 1$.

$$\begin{aligned}A_n &= 1 + \frac{\beta}{n} \rightarrow 1; \\ \Rightarrow A_1 &= 1 + \frac{\beta}{1}.\end{aligned}\tag{II.99}$$

$$\begin{aligned}B_n &= 1 + \frac{-\alpha + \beta + \gamma - 1}{n} + \frac{\eta - (-\alpha + \beta + \gamma)/2 - \alpha\beta/2 + \beta\gamma/2}{n^2} \rightarrow 1; \\ \Rightarrow B_1 &= 1 + \frac{-\alpha + \beta + \gamma - 1}{1} + \frac{\eta - (-\alpha + \beta + \gamma)/2 - \alpha\beta/2 + \beta\gamma/2}{1^2}\end{aligned}\tag{II.100}$$

$$\text{or } \eta = \frac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma + \alpha\beta - \beta\gamma) - \mu$$

$$B_1 = \frac{\alpha - \beta - \gamma}{2} + \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\beta\gamma}{2} + \frac{\gamma + \beta - \alpha}{2} - \frac{\alpha\beta}{2} \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta\gamma}{2} - \mu; \quad (\text{II.101})$$

$$\Rightarrow B_1 = -\mu.$$

on trouve définitivement v_1

$$v_1 = -\frac{\mu}{1 + \beta} \quad (\text{II.102})$$

Cette valeur de v_1 nous aidera dans la suite de notre travail à calculer les fonctions propres à l'état fondamental et au premier état excité en utilisant les moments des transitions quadripolaires électriques.

II.8 Moments des transitions quadripolaires électriques

Le moment quadripolaire électrique permet de déterminer les différentes transitions et d'avoir plus d'informations sur le nucléide, c'est-à-dire des informations au niveau de ses couches et sous-couches. Il a pour fonction première de déterminer les excitations possibles que l'on peut avoir au niveau des nucléides lorsqu'on a un gain ou une perte d'énergie. Il permet aussi de donner tous les détails que l'on ne peut retrouver lorsqu'on a juste des énergies de chaque niveau, celui-ci singularise et particularise chaque nucléon en indiquant s'il se trouve au niveau fondamental, γ ou β .

Le moment quadripolaire électrique est un caractère fondamental associé au noyau atomique. Ce moment est lié à la répartition non purement sphérique au sein du noyau. En effet, sa mesure nous permet de sonder la déformation géométrique du noyau de sa forme sphérique. Les méthodes de mesure du moment quadripolaire consistent à étudier l'énergie d'interaction hyperfine électrique entre le moment quadripolaire et le gradient du champ électrique dû aux électrons atomiques. L'une des méthodes est la Résonance Quadripolaire Nucléaire (RQN), qui consiste à observer les transitions entre les niveaux d'énergies éclatées par l'effet de l'interaction quadripolaire et induites par un champ de radiofréquences. L'équation quadripolaire électrique est définie par [81, 77, 92] :

$$T_{\mu}^{(E2)} = t\beta \left[D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right) \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right]. \quad (\text{II.103})$$

Dans l'Eq. (II.103), t un facteur scalaire et θ_i sont les angles d'Euler tandis que $D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i)$ sont des fonctions de Wigner associées aux angles d'Euler, μ est le niveau concerné et L le nombre quantique du moment angulaire.

Pour l'état instable γ , i.e. $\gamma = \frac{\pi}{6}$, l'opérateur quadripolaire se réduit à :

$$T_{\mu}^{(E2)} = -\frac{t\beta}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right). \quad (\text{II.104})$$

Ainsi, les différentes probabilités transitions $B(E2)$ des niveaux i vers les niveaux f sont définies par[92] :

$$B(E2; L_i\alpha_i \longrightarrow L_f\alpha_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle L_f\alpha_f || T^{(E2)} || L_i\alpha_i \rangle|^2}{2L_i + 1}, \quad (\text{II.105})$$

où $L_i\alpha_i$ et $L_f\alpha_f$ représentent les énergies des niveaux i et f respectivement et $|\langle L_f\alpha_f || T^{(E2)} || L_i\alpha_i \rangle|^2$ est une quantité matricielle calculée à partir du théorème de Wigner-Eckart[93]. Ces éléments de matrice sont donnés par :

$$\langle L_f M_f \alpha_f | T_{\mu}^{(E2)} | L_i M_i \alpha_i \rangle = \frac{\langle L_f \alpha_f || T^{(E2)} || L_i \alpha_i \rangle}{\sqrt{2L_f + 1}} \langle L_i 2L_f | M_i \mu M_f \rangle. \quad (\text{II.106})$$

La fonction d'onde associée à cette transition est donnée par :

$$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \sqrt{\frac{2L + 1}{16\pi^2 (1 + \delta_{\alpha,0})}} \left[D_{\mu,\alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu,-\alpha}^{(L)}(\theta_i) \right] \xi_{n,n\omega,L,n\tilde{\gamma}}(\beta) \eta_{n\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}). \quad (\text{II.107})$$

Pour calculer les éléments de la matrice de l'opérateur quadripolaire de l'Eq. (II.106), l'intégrale à travers $\tilde{\gamma}$ est égale à l'unité à cause de la méthode de normalisation des fonctions d'ondes. L'intégrale à travers les angles d'Euler est déformée par l'intégrale principale des trois fonctions de Wigner et l'intégrale à travers β prend la forme

$$I(n_i, L_i, \alpha_i, n_f, L_f, \alpha_f) = \int \beta \xi_{n_i, L_i, \alpha_i}(\beta) \xi_{n_f, L_f, \alpha_f}(\beta) \beta^4 d\beta. \quad (\text{II.108})$$

où les facteurs β et β^4 proviennent de l'opérateur quadripolaire et l'élément de volume respectivement. Dans le but de calculer l'intégrale de l'Eq. (II.103), la fonction confluent de Heun est utilisée.

À l'état initial on a

$$I = \int_0^\infty \beta \Phi(\beta) \Phi^*(\beta) \beta^4 d\beta = 1. \quad (\text{II.109})$$

or dans cet état $\Phi(\beta) = \Phi^*(\beta)$ et donc on peut écrire

$$I = \int_0^\infty \beta \Phi^2(\beta) \beta^4 d\beta = 1 \quad (\text{II.110})$$

En introduisant $\Phi(\beta)$ par sa valeur provenant de l'Eq.(II.90) dans l'équation précédente on aboutit à

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty N_\beta^{2,i} \exp(2\gamma) \exp[-2(\alpha_2 - \alpha_0)\beta] (\alpha\beta)^{2\lambda+1} (1+v_1)^2 d\beta; \\ \Rightarrow I &= N_\beta^{2,i} \exp(2\gamma) \alpha^{1+2\lambda} (1+v_1)^2 \int_0^\infty \exp[-2(\alpha_2 - \alpha_0)\beta] (\beta)^{2\lambda+1} d\beta = 1 \end{aligned} \quad (\text{II.111})$$

avec N_β la constante de normalisation.

L'équation (II.112) nous permet de trouver cette constante de normalisation en utilisant la table de matière.

$$\begin{aligned} I &= N_\beta^{2,i} \exp(2\gamma) \alpha^{1+2\lambda} (1+v_1)^2 \int_0^\infty \exp[-2(\alpha_2 - \alpha_0)\beta] \beta^{2\lambda+1} d\beta = 1; \\ \Rightarrow N_\beta^{2,i} &= \frac{\exp(-2\gamma)}{\alpha^{1+2\lambda} \times (1+v_1)^2 \times \int_0^\infty \exp[-2(\alpha_2 - \alpha_0)\beta] \beta^{2\lambda+1} d\beta}; \\ \Rightarrow N_\beta^{2,i} &= \frac{\exp(-2\gamma)}{\alpha^{1+2\lambda} \times (1+v_1)^2 \times \frac{\Gamma(2+2\lambda)}{[2(\alpha_2 - \alpha_0)]^{2+2\lambda}}}. \end{aligned} \quad (\text{II.112})$$

En mettant la racine carrée sur l'expression précédente, la constante de normalisation est déterminée

$$N_{\beta}^{1,i} = \frac{\exp(-\gamma) \times [2(\alpha_2 - \alpha_0)]^{1+\lambda}}{\alpha^{\lambda+\frac{1}{2}} \times (1 + v_1) \times \sqrt{\Gamma(2 + 2\lambda)}} \quad (\text{II.113})$$

Lorsque les nucléons des noyaux déformés transitent d'un état initial $|L_i \alpha_i\rangle$ à un état final $|L_f \alpha_f\rangle$ on a

$$I = N_{\beta}^{1,i} N_{\beta}^{1,f} \exp(2\gamma) \alpha^{1+\lambda+\lambda'} (1 + v_1)(1 + v'_1) \frac{\Gamma(3 + \lambda + \lambda') \alpha^{1+\lambda+\lambda'}}{(2\alpha_2 - \alpha_0 - \alpha'_0)^{3+\lambda+\lambda'}} \quad (\text{II.114})$$

Les fonctions propres à l'état fondamental et au premier état excité, sont respectivement

$$\begin{cases} \Phi(\beta) = N_{\beta}^0 \beta^{-\frac{3}{2}+\lambda} \alpha^{\frac{1}{2}+\lambda} \exp(-(\alpha_2 - \alpha_0)\beta) (1 + v_1), n = 0; \\ \Phi(\beta) = N_{\beta}^1 \beta^{-\frac{3}{2}+\lambda} \alpha^{\frac{1}{2}+\lambda} \exp(-(\alpha_2 - \alpha_0)\beta) (1 + v_1)(1 - \alpha\beta), n = 1. \end{cases} \quad (\text{II.115})$$

En utilisant le théorème de Wigner-Eckart, l'Eq. (II.105) prend la forme

$$B(E2; L_i, \alpha_i \longrightarrow L_f, \alpha_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{t^2}{2} \frac{1}{(1 + \delta_{\alpha_i,0})(1 + \delta_{\alpha_f,0})} \times \\ \left[(L_i, 2, L_f | \alpha_i, 2, \alpha_f) + (L_i, 2, L_f | \alpha_i, -2, \alpha_f) + (-1)^{L_i} (L_i, 2, L_f | -\alpha_i, 2, \alpha_f) \right]^2 \times \\ [I(n_i, L_i, \alpha_i, n_f, L_f, \alpha_f)]^2. \quad (\text{II.116})$$

Les trois Coefficients Clebsch-Gordon (CCG) apparaissant au dessus de l'équation ont été déduits par ses propriétés (seulement les transitions $\Delta\alpha = \pm 2$ sont permises). En effet, le premier CCG ne disparaît que si $\alpha_i + 2 = \alpha_f$, tandis que le second CCG ne disparaît que si $\alpha_i - 2 = \alpha_f$ et le troisième CCG ne disparaît que si $\alpha_i + \alpha_f = 2$. Ce dernier peut être valable que dans quelques cas particuliers. Les résultats de la partie angulaire de cette équation sont connus[94]. Ces conditions montrent que les isotopes 192, 194 et 196 du platine sont de bons candidats pour respecter la configuration des noyaux triaxiaux.

L'état fondamental est caractérisé par $n_{\omega} = L - \alpha = 0$ et ses transitions sont caractérisées par $\alpha_i = L_i$ et $\alpha_f = L_f$. En normalisant les taux de B(E2) pour les faibles transitions au sein de l'état

fondamental nous obtenons

$$R_{ground \rightarrow ground}(L+2 \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L+2)_g \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.117})$$

Les niveaux paires de la bande γ sont caractérisés par $n_\omega = L - \alpha = 2$, qui signifie que $\alpha = L - 2$. Pour l'état fondamental, $n_{\omega f} = 0$, $n_f = 0$ et pour la bande γ des valeurs paires de L , $n_{\omega i} = 2$, $n_i = 0$ et le taux de transition est donné par

$$R_{\gamma\text{-even} \rightarrow ground}(L \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-even}} \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.118})$$

Pour la bande γ des valeurs impaires de L , $n_{\omega i} = 1$, $n_i = 0$ et le taux de transition des niveaux impairs de la bande γ vers l'état fondamental est donné par

$$R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow ground}(L \rightarrow L+1) = \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-odd}} \rightarrow (L+1)_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.119})$$

Pour les transitions des niveaux impairs de la bande γ vers les niveaux impairs de la bande γ inférieurs, on a

$$R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \gamma\text{-even}}(L+2 \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.120})$$

Les transtions des niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L vers niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L inférieures sont données par

$$R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \gamma\text{-odd}}(L \rightarrow L-1) = \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.121})$$

De même, pour les niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L vers les niveaux de bande γ pour les valeurs paires de L , on a

$$R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \gamma\text{-even}}(L \rightarrow L-1) = \frac{B(E2; L_\gamma \rightarrow (L-1)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.122})$$

Pour le premier état excité, c'est-à-dire pour les niveaux de la bande β , $n_{\omega f} = 0$, $n_f = 1$ et le taux

de transition est donné par

$$R_{\beta\text{-band}\rightarrow\beta\text{-band}}(L \rightarrow L - 1) = \frac{B(E2; L_{\beta\text{-band}} \rightarrow (L - 1)_{\beta\text{-band}})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \quad (\text{II.123})$$

Les énergies de niveau de chaque nucléide sont obtenues en utilisant l'Eq. (II.88). Avant de le faire, nous devons normaliser les énergies au premier niveau d'état excité pour obtenir des rapports d'énergie normalisés au premier état excité $E_{0,2,0} - E_{0,0,0}$ de la bande de l'état fondamental pour chaque isotope comme [14]

$$R_{n,L,n_w} = \frac{E_{n,L,n_w} - E_{0,0,0}}{E_{0,2,0} - E_{0,0,0}}, \quad (\text{II.124})$$

où

n : le nombre quantique principal,

n_w : le nombre quantique secondaire,

L : le nombre quantique cinétique,

$E_{0,2,0} - E_{0,0,0}$, est défini comme les rapports des énergies normalisées au premier état excité,

E_{n,L,n_w} représente l'énergie du noyau dans l'état L_{n,n_w} .

L'écart type est défini comme la déviation moyenne des prédictions théoriques par rapport aux données expérimentales. Il est donné par la relation suivante :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (E_i^{exp} - E_i^{theo})^2}{M}}, \quad (\text{II.125})$$

L'effet étalon ou staggering effect est défini comme un décalage impair-pair des niveaux d'énergies dans la bande γ et est donné par la formule suivante :

$$S(J) = \frac{E((J)_{\gamma}^+) + E((J - 2)_{\gamma}^+) - 2E((J - 1)_{\gamma}^+)}{E(2_g^+)} \quad (\text{II.126})$$

où $E(J)$ représente l'énergie de l'état J_{γ}^+ appartenant à la bande γ , $E(2_g^+)$ est l'énergie du premier état excité de la bande fondamentale.

II.9 Conclusion

Tout au long de ce chapitre, le travail consistait de proposer à notre modèle physique les solutions analytiques à partir de l'équation hypergéométrique le régissant. Cette équation des mouvements des nucléides étant couplée par les différents paramètres du système, des techniques mathématiques appropriées ont été adoptées, pour résoudre le problème. Parmi ces techniques :

→ La technique de séparation des variables a permis d'obtenir deux équations du mouvement, indépendantes en fonction des paramètres du système à partir du Hamiltonien de Bohr de notre modèle. L'une régissant des mouvements de rotation qui est fonction du paramètre rotation γ et l'autre décrivant les mouvements de vibration des nucléides qui est fonction du paramètre de vibration β .

→ La méthode ENU a été utile dans la résolution de l'équation des mouvements de vibration. Elle a conduit à la détermination de la valeur du spectre de l'énergie.

→ L'équation confluyente de Heun, a été nécessaire pour compléter la fonction propre du système.

Dans le chapitre suivant, les résultats théoriques obtenus par la solution de notre modèle seront présentés. Une comparaison avec les résultats expérimentaux trouvés dans la littérature et ceux trouvés en utilisant le potentiel de Morse et le potentiel de Kratzer est faite suivi d'une discussion liée à la validation de notre modèle.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

III.1 Introduction

Les nucléides prêts à assurer des charges nucléaires doivent obéir à plusieurs règles leur conférant certaines propriétés. Le but est de trouver la probabilité énergétique de transition quadripolaire électrique de passage d'un niveau à un autre[77], de déterminer le spectre d'énergie de la partie radiale du noyau et surtout les fonctions d'ondes associées. En effet, en physique nucléaire, la construction d'un modèle nucléaire ne repose pas toujours sur tous les noyaux radioactifs présent dans la nature. Dans le chapitre précédent nous avons élaboré un modèle nucléaire pour la détermination des rapports d'énergie de la bande de l'état fondamental, de la bande γ et la bande β par rapport au premier état excité applicable aux noyaux déformés. Pour combiner tous ces aspects, on procède au choix d'un modèle constitué :

- ✓ d'un potentiel issu de la combinaison des potentiels de Morse et de Kratzer "criblé" ;
- ✓ de trois isotopes ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt du nucléide de platine.

Dans ce chapitre, les valeurs théoriques des rapports d'énergie sont calculées d'une part, et d'autre part les transitions quadripolaires électriques $B(E2)$ pour les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ du platine. La connaissance profonde et bien détaillée du modèle mis en oeuvre dans ce travail étant terminée, il nous reste à présenter nos résultats obtenus puis, les confronter et les comparer à ceux de la littérature afin d'épiloguer sur la validité d'un tel modèle.

III.2 Présentation des résultats et discussion

Dans cette section, les résultats numériques du spectre d'énergies ont été évalués en utilisant l'Eq. (II.124). De cette équation, les paramètres libres a , b , d et \tilde{c} sont sélectionnés pour obtenir le meilleur ajustement entre les données expérimentales et celles obtenues théoriquement comme le potentiel de Morse. Tout au long de notre étude, quelques isotopes du platine ont été choisies.

TABLE 1 – Comparaison des valeurs théoriques dans la bande de l'état fondamental, la bande γ et la bande β des rapports d'énergie normalisée (au premier niveau excité de la bande de l'état fondamental à l'unité) avec les données expérimentales [81] et celles obtenues par esM [77]

$L_{n,n\omega}$	^{192}Pt			^{194}Pt			^{196}Pt		
	esM	Exp.	Own	esM	Exp.	Own	esM	Exp.	Own
0 _{0,0}	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2 _{0,0}	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4 _{0,0}	2.475	2.479	2.577	2.445	2.470	2.572	2.509	2.465	2.567
6 _{0,0}	4.317	4.314	4.527	4.280	4.299	4.505	4.440	4.290	4.484
8 _{0,0}	6.492	6.377	6.469	6.509	6.392	6.408	6.767	6.333	6.345
10 _{0,0}	9.001	8.624	7.794	9.148	8.671	7.655	9.489	8.558	7.512
12 _{0,0}	11.855	---	---	12.205	---	---	12.615	---	---
3 _{0,1}	2.364	2.910	2.875	2.716	2.809	2.869	2.795	2.854	2.862
5 _{0,1}	5.060	4.682	5.252	5.034	4.563	5.219	5.230	4.525	5.186
7 _{0,1}	7.647	6.677	7.226	7.717	---	---	8.016	---	---
9 _{0,1}	10.548	---	7.955	10.800	---	7.748	11.181	---	7.536
2 _{0,2}	1.907	1.935	1.962	1.888	1.894	1.960	1.923	1.936	1.957
4 _{0,2}	4.815	3.795	5.018	4.784	3.743	4.990	4.969	3.636	4.960
6 _{0,2}	7.875	5.905	7.347	7.956	5.863	7.247	8.263	5.644	7.144
8 _{0,2}	11.203	8.186	7.849	11.503	8.186	7.610	11.900	7.730	7.363
10 _{0,2}	14.853	---	---	15.455	---	---	---	---	---
0 _{1,0}	3.567	3.776	3.058	2.349	3.858	3.025	3.512	3.192	2.993
2 _{1,0}	4.567	4.547	3.836	3.350	4.603	3.800	4.542	3.828	3.763
4 _{1,0}	6.087	6.110	5.027	4.881	5.817	4.980	6.140	4.318	4.933
6 _{1,0}	8.039	---	6.410	6.900	---	6.338	8.235	---	6.265
σ	0.988	---	0.674	1.202	---	0.701	1.450	---	0.640

TABLE 2 – Paramètres libres pour la CPMK utilisés dans ce travail

Parameter	^{192}Pt	^{194}Pt	^{196}Pt
a	10	10	10
b	20	20	20
d	0.06	0.06	0.06
α	0.1832	0.1842	0.1852
\tilde{c}	2152.96	2152.96	2152.96

Nous présentons dans le Tableau 1, les valeurs des rapports des énergies de la bande de l'état fondamental ($0_{0,0}$, $2_{0,0}$, $4_{0,0}$, $6_{0,0}$, $8_{0,0}$ et $10_{0,0}$), de la bande γ ($2_{0,2}$, $3_{0,1}$, $4_{0,2}$, $5_{0,1}$, $6_{0,2}$, $7_{0,1}$ et $8_{0,2}$) et la bande β ($2_{1,0}$, $4_{1,0}$ et $6_{1,0}$) par rapport au premier état excité des isotopes du $^{192,194,196}\text{Pt}$. Les différentes valeurs des écarts types des trois isotopes ont été présentées par la relation (II.125).

où E_i^{exp} et E_i^{theo} sont les énergies expérimentales et théoriques de niveau i -eme respectivement et M le nombre des énergies de niveau considéré.

Bande de l'état fondamental

✠ Platine 192

- dans l'état $10_{0,0}$, la valeur théorique de la CPMK du ^{192}Pt est inférieure à la valeur expérimentale.

Dans les états $4_{0,0}$, $6_{0,0}$ et $8_{0,0}$ les valeurs théoriques sont supérieures aux valeurs expérimentales.

✠ Platine 194

- les valeurs théoriques de la CPMK sont supérieures aux valeurs expérimentales sauf dans l'état $10_{0,0}$.

✠ Platine 196

-les valeurs théoriques de la CPMK sont supérieures aux valeurs expérimentales sauf dans l'état $10_{0,0}$.

Bande γ

✠ Platine 192

- dans la bande γ pour les L impair, les valeurs théoriques de la CPMK sont supérieures aux valeurs expérimentales sauf dans l'état $3_{0,1}$.

- dans la bande γ pour les L pair, les valeurs théoriques de la CPMK sont supérieures aux valeurs expérimentales sauf dans l'état $8_{0,2}$.

✠ Platine 194

- dans la bande γ pour les L impair, les valeurs théoriques de la CPMK sont supérieures aux valeurs expérimentales. On remarque dans l'état $7_{0,1}$, la valeur expérimentale dans cet état n'a pas été fournie lors de l'expérience.

- dans la bande γ pour les L pair, les valeurs théoriques de la CPMK sont supérieures aux valeurs expérimentales dans sauf dans l'état $8_{0,2}$.

✠ Platine 196

- dans la bande γ pour les L impair, les valeurs théoriques de la CPMK sont supérieures aux valeurs expérimentales. Aussi, on remarque dans l'état $7_{0,1}$, la valeur expérimentale dans cet état

n'a pas été fournie lors de l'expérience.

- dans la bande γ pour les L pair, les valeurs théoriques de la CPMK sont supérieures aux valeurs expérimentales dans sauf dans l'état $8_{0,2}$.

Bande β

✠ Platine 192

- toutes les valeurs théoriques de la CPMK sont inférieures aux valeurs expérimentales. La valeur expérimentale n'a pas été fournie par l'expérience dans l'état $6_{1,0}$ et par contre la CPMK donne une valeur de 6.410 dans cet état.

✠ Platine 194

- toutes les valeurs théoriques de la CPMK sont inférieures aux valeurs expérimentales. La valeur expérimentale n'a pas été fournie par l'expérience dans l'état $6_{1,0}$ et par contre la CPMK donne une valeur de 6.338 dans cet état.

✠ Platine 196

- les valeurs théoriques de la CPMK sont inférieures aux valeurs expérimentales sauf dans l'état $4_{1,0}$. La valeur expérimentale n'a pas été fournie par l'expérience dans l'état $6_{1,0}$ et par contre la CPMK donne une valeur de 6.265 dans cet état.

Il en ressort de ce Tableau 1 que, les valeurs obtenues théoriquement par notre modèle pour les isotopes du platine présentent des meilleurs écarts types (le but était d'évaluer déviation moyenne des prédictions théoriques par rapport aux données expérimentales) par rapport au modèle de Inci[77] utilisant le potentiel de Morse (PM). On peut écrire que : $\sigma_{CPMK} < \sigma_{PM}$.

III.3 Ratios intra et inter-bande

Dans cette section, nous allons présenter quelques notions de bases sur les calculs de transitions $B(E2)$ intra et inter-bande obtenues à partir de la l'équation de la fonction d'onde. Les transitions quadripôlaires observées dans ce Tableau sont les suivantes :

- état fondamental \rightarrow état fondamental,
- γ -pair \rightarrow état fondamental,
- γ -impair \rightarrow état fondamental,
- γ -pair \rightarrow γ -pair,
- γ -impair \rightarrow γ -impair,
- γ -impair \rightarrow γ -pair,
- $\beta \rightarrow \beta$.

Il est important de savoir que les résultats du Tableau 3 ont été obtenus en utilisant les règles de sélections imposées par les Coefficients de Clebsch-Gordon (CCG) c'est-à-dire que les transitions permises sont celles qui vérifient l'équation $\Delta\alpha = \pm 2$. Pour évaluer les transitions permises, on calcule la valeur de $\Delta\alpha = \alpha_f - \alpha_i$.

- Les transitions $(4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0})$ et $(7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2})$ sont des exemples de transitions permises par la règle de sélection des CCG. En effet, $\alpha_i = L_i - (n_\omega)_i$ et $\alpha_f = L_f - (n_\omega)_f$

- $(4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}) : \alpha_i = 4 - 0 = 4, \alpha_f = 2 - 0 = 2$ et on trouve $\Delta\alpha = 2$;
- $(7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2}) : \alpha_i = 7 - 1 = 6, \alpha_f = 6 - 2 = 4$ et on trouve $\Delta\alpha = 2$.

- Les transitions $(0_{1,0} \rightarrow 2_{0,2})$ et $(3_{0,1} \rightarrow 2_{0,0})$ sont des exemples de transitions non permises par la règle de sélection des CCG. En effet, $\alpha_i = L_i - (n_\omega)_i$ et $\alpha_f = L_f - (n_\omega)_f$

- $(0_{1,0} \rightarrow 2_{0,2}) : \alpha_i = 0 - 0 = 0, \alpha_f = 2 - 2 = 0$ et on trouve $\Delta\alpha = 0$;
- $(3_{0,1} \rightarrow 2_{0,0}) : \alpha_i = 2 - 0 = 2, \alpha_f = 3 - 1 = 2$ et on trouve $\Delta\alpha = 0$.

En outre, la transition d'une bande f à une bande i est dite non permise si l'énergie de transition est insuffisante ou très grande pour se retrouver au niveau indiqué.

TABLE 3 – Comparaison des valeurs théoriques des raies de transition $B(E2)$ normalisées utilisant la CPMK avec les données expérimentales[81] et celles du PM [77] pour les isotopes ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt

		^{192}Pt			^{194}Pt			^{196}Pt		
$L_{n,n\omega}^{(i)}$	$L_{n,n\omega}^{(f)}$	Exp.	esM	Own	Exp.	esM	Own	Exp.	esM	Own
4 _{0,0}	2 _{0,0}	1.563	1.563	1.541	1.73	1.630	1.541	1.49	1.540	1.541
6 _{0,0}	4 _{0,0}	1.224	2.213	2.216	1.37	2.334	2.217	0.95	2.141	2.210
8 _{0,0}	6 _{0,0}	---	2.735	2.912	1.02	2.835	2.913	1.09	2.597	2.915
10 _{0,0}	8 _{0,0}	---	3.163	3.740	0.69	3.187	3.744	---	2.955	3.747
2 _{0,2}	2 _{0,0}	1.91	1.586	1.560	1.81	1.653	1.560	---	1.564	1.560
4 _{0,2}	4 _{0,0}	---	0.350	0.351	0.285	0.370	0.351	0.42	0.339	0.351
6 _{0,2}	6 _{0,0}	---	---	0.216	---	---	0.217	---	---	0.217
8 _{0,2}	8 _{0,0}	---	---	0.157	---	---	0.157	---	---	0.126
3 _{0,1}	4 _{0,0}	0.67	1.236	1.224	---	1.305	1.224	---	1.200	1.225
5 _{0,1}	6 _{0,0}	---	---	1.057	---	---	1.058	---	---	1.058
7 _{0,1}	8 _{0,0}	---	---	1.010	---	---	1.010	---	---	1.011
9 _{0,1}	10 _{0,0}	---	---	1.023	---	---	1.025	---	---	1.026
4 _{0,2}	2 _{0,2}	---	0.734	0.728	0.428	0.776	0.728	0.430	0.716	0.728
6 _{0,2}	4 _{0,2}	---	1.081	1.170	---	1.112	1.170	---	1.022	1.171
8 _{0,2}	6 _{0,2}	---	1.715	2.170	---	1.697	2.177	---	1.589	2.170
5 _{0,1}	3 _{0,1}	---	1.250	1.260	---	1.316	1.261	---	1.205	1.261
7 _{1,0}	5 _{0,1}	---	1.943	2.130	---	1.994	2.137	---	1.834	2.139
9 _{0,1}	7 _{0,1}	---	2.485	3.125	---	---	3.128	---	2.306	3.131
3 _{0,1}	2 _{0,2}	1.79	2.147	2.117	---	2.264	2.117	---	2.094	2.118
5 _{0,1}	4 _{0,2}	---	---	1.451	---	---	1.452	---	---	1.453
7 _{0,1}	6 _{0,2}	---	---	1.658	---	---	1.659	---	---	1.661
9 _{0,1}	8 _{0,2}	---	---	1.854	---	---	1.857	---	---	1.860
2 _{1,0}	0 _{1,0}	---	---	0.926	---	---	1.425	---	---	1.748
4 _{1,0}	2 _{1,0}	---	---	0.926	---	---	1.425	---	---	2.048
6 _{1,0}	4 _{1,0}	---	---	0.925	---	---	1.424	---	---	2.048

Le Tableau 3, nous présente quelques résultats des transitions $B(E2)$ intra et interbande calculés à partir des différents niveaux comparés aux données disponibles dans la littérature. Les différentes transitions quadripolaires obtenues dans ce même Tableau sont décrites de la manière suivante :

⇒ les transitions de l'état fondamental à l'état fondamental.

- dans les bandes de transition $4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$ à $10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$; les valeurs théoriques de la CPMK du ^{192}Pt et celles de la prédiction de Morse croissent. Par contre, les données expérimentales décroissent. Aussi, toutes les valeurs théoriques de la CPMK sont elles, supérieures aux valeurs théoriques de Morse sauf dans la transition $4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$. Pour l'isotope ^{194}Pt du platine, les valeurs théoriques de la CPMK et celles de la prédiction de Morse croissent. Par contre, les

données expérimentales décroissent. On remarque que, les valeurs théoriques de la CPMK sont inférieures aux valeurs théoriques de Morse sauf dans les bandes $8_{0,0} \rightarrow 6_{0,0}$ et $10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$. Toutes les valeurs théoriques du ^{196}Pt sont supérieures aux données expérimentales et aux résultats de Morse.

⇒ les transitions de γ -pair \rightarrow état fondamental.

-contrairement aux transitions précédentes, dans les bandes de transition $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$ à $8_{0,2} \rightarrow 8_{0,0}$; les valeurs théoriques de la CPMK du ^{192}Pt décroissent. La prédiction de Morse fournit uniquement des valeurs dans les deux bandes $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$ et $4_{0,2} \rightarrow 4_{0,0}$ qui décroissent. Aussi, l'unique valeur expérimentale dans la bande $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$ est elle, supérieure à celle de Morse et la CPMK. Pour l'isotope ^{194}Pt du platine, les valeurs théoriques de la CPMK décroissent. La prédiction de Morse fournit uniquement des valeurs dans les deux bandes $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$ et $4_{0,2} \rightarrow 4_{0,0}$ qui décroissent. Aussi, la valeur expérimentale dans la bande de transition $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$ est supérieure à celle de Morse et la CPMK; et inférieure à ces deux prédictions dans la bande de transition $2_{0,0} \rightarrow 4_{0,2}$. Enfin pour l'isotope ^{196}Pt du platine, les valeurs théoriques de la CPMK décroissent. La prédiction de Morse fournit uniquement des valeurs dans les deux bandes de transition $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$ et $4_{0,2} \rightarrow 4_{0,0}$ qui décroissent. L'unique valeur expérimentale dans la bande $4_{0,2} \rightarrow 4_{0,0}$ est supérieure à celle de Morse et la CPMK.

⇒ les transitions de γ -impair \rightarrow état fondamental.

- dans les gammes de transition $3_{0,1} \rightarrow 4_{0,0}$ à $7_{0,1} \rightarrow 8_{0,0}$; une seule information relative à l'expérimental se trouve dans la bande de transition $3_{0,1} \rightarrow 4_{0,0}$ pour le platine 192. Les autres isotopes ne fournissent pas des données expérimentales. Cette valeur est inférieure à la CPMK et au PM.

⇒ les transitions de γ -pair $\rightarrow \gamma$ -pair.

- dans les bandes de transition $4_{0,2} \rightarrow 2_{0,2}$ à $8_{0,2} \rightarrow 6_{0,2}$; deux valeurs relatives à l'expérimental se trouvent dans la bande de transition $4_{0,2} \rightarrow 2_{0,2}$ pour les platine 194 et 196. L'isotope 192 ne fournit pas des données expérimentales. Ces valeurs sont inférieures à la CPMK et au PM.

⇒ les transitions de γ -impair $\rightarrow \gamma$ -impair.

- dans les bandes de transition $5_{0,1} \rightarrow 3_{0,1}$ à $9_{0,1} \rightarrow 7_{0,1}$; aucune valeur relative à l'expérimental. Par contre les résultats théoriques de la CPMK sont supérieures à ceux du PM.

⇒ les transitions de γ -impair $\rightarrow \gamma$ -pair.

- dans les gammes de transition $3_{0,1} \rightarrow 2_{0,2}$ à $9_{0,1} \rightarrow 8_{0,2}$; une seule information relative à

l'expérimental se trouve dans la bande de transition $3_{0,1} \rightarrow 2_{0,2}$ pour le platine 192. Les autres isotopes ne fournissent pas des données expérimentales. Cette valeur est inférieure à la CPMK.

\Rightarrow les transitions de $\beta \rightarrow \beta$.

Les valeurs théoriques proposés par notre modèle sont presque constantes pour tous les isotopes du platine. Malheureusement dans ces bandes de transition $2_{1,0} \rightarrow 0_{1,0}$ à $6_{1,0} \rightarrow 4_{1,0}$, nous n'avons aucune information concernant l'expérimental et aussi le PM.

Après avoir calculé les facteurs de qualité σ pour l'isotope du platine ^{192}Pt , ce facteur montre que la prédiction du potentiel de Morse plus Kratzer "criblé" CPMK est meilleure que les résultats du potentiel de Morse PM dans le Tableau 1 et aussi de la théorie proposée par Killingbeck plus Morse $\sigma_{CPMK} < \sigma_{PM}$. Dans le Tableau 2, les paramètres libres pour évaluer l'Eq. (III.1) sont répertoriés pour chaque isotope.

En plus, on constate que les données expérimentales n'ont pas prévu les rapports d'énergie de niveau $12_{0,0}$, $7_{0,1}$, $9_{0,1}$ et $6_{1,0}$ alors qu'on aurait pu continuer la série. Il faut également noter que les énergies d'excitations sont normées à l'unité :

- pour mieux rapprocher ce phénomène à la notion de probabilité car il s'identifie à un échantillonnage d'une part et ;
- pour expliquer d'autre part que le départ d'une bande i vers une bande f est un phénomène aléatoire du point de vue énergétique car nous pouvons prévoir mais pas avec certitude les différentes transitions possibles qui s'opèrent dans le noyau atomique.

Les spectres d'énergie des isotopes ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt sont représentés par les figures (15), (16) et (17). Ces figures présentent les bandes étiquetées par des nombres quantiques (n, n_ω, n_γ) spécifiées à la légende en indiquant que :

- l'état fondamental s'identifie (gsb) par $(n, n_\omega, n_\gamma)=(0, 0, 0)$;
- la bande γ pour les valeurs paires de L s'obtient avec $(n, n_\omega, n_\gamma)=(0, 2, 0)$;
- la bande γ pour les valeurs impaires de L s'obtient avec $(n, n_\omega, n_\gamma)=(0, 1, 0)$;
- la bande β s'identifie pour $(n, n_\omega, n_\gamma)=(1, 0, 0)$.

En faisant une étude comparée de ces trois figures, nous nous rendons compte que :

- pour l'état fondamental $(n, n_\omega, n_\gamma)=(0, 0, 0)$, les valeurs des énergies des différentes transitions obtenues pour l'isotope ^{192}Pt sont plus proches de littérature Fig. (15), que celles des deux autres, et ensuite suit l'isotope ^{196}Pt , Fig. (17) et enfin vient le ^{194}Pt , Fig. (16), lorsqu'on rapproche les valeurs.

- pour ce qui est de la bande γ de moment angulaire L impair, la palme d'or revient à l'isotope ^{196}Pt car ses valeurs sont plus proches de celles expérimentales et le deuxième meilleur isotope pour cette phase revient au ^{194}Pt et enfin le ^{192}Pt .

- pour ce qui est de la bande γ de moment angulaire L pair, les valeurs proches de l'expérience proviennent plutôt de l'isotope ^{194}Pt , ensuite de ^{192}Pt et enfin de ^{196}Pt ; qui est une évolution en sens contraire par rapport à celui de l'état fondamental.

- s'agissant de la bande β , les valeurs plus proches de l'expérience reviennent au ^{196}Pt , puis la deuxième place revient à l'isotope ^{192}Pt et enfin au ^{194}Pt .

Il faut cependant noter que sur les Figs. (15), (16) et (17), les énergies théoriques sont représentées avec la couleur noire et à droite tandis que celles dites expérimentales sont en vert et à gauche pour les trois isotopes. De même les valeurs théoriques et expérimentales sont reliées entre elles par des pointillés pour clairement montrer la différence dans le sens d'un apport ou d'une diminution pour un niveau quelconque.

Pour une vue moyenne de ces trois figures citées précédemment, on peut dire que les prédictions théoriques obtenues avec le potentiel de Morse plus Kratzer criblé sont de façon générale en bon accord dans l'état fondamental, les bandes β et γ .

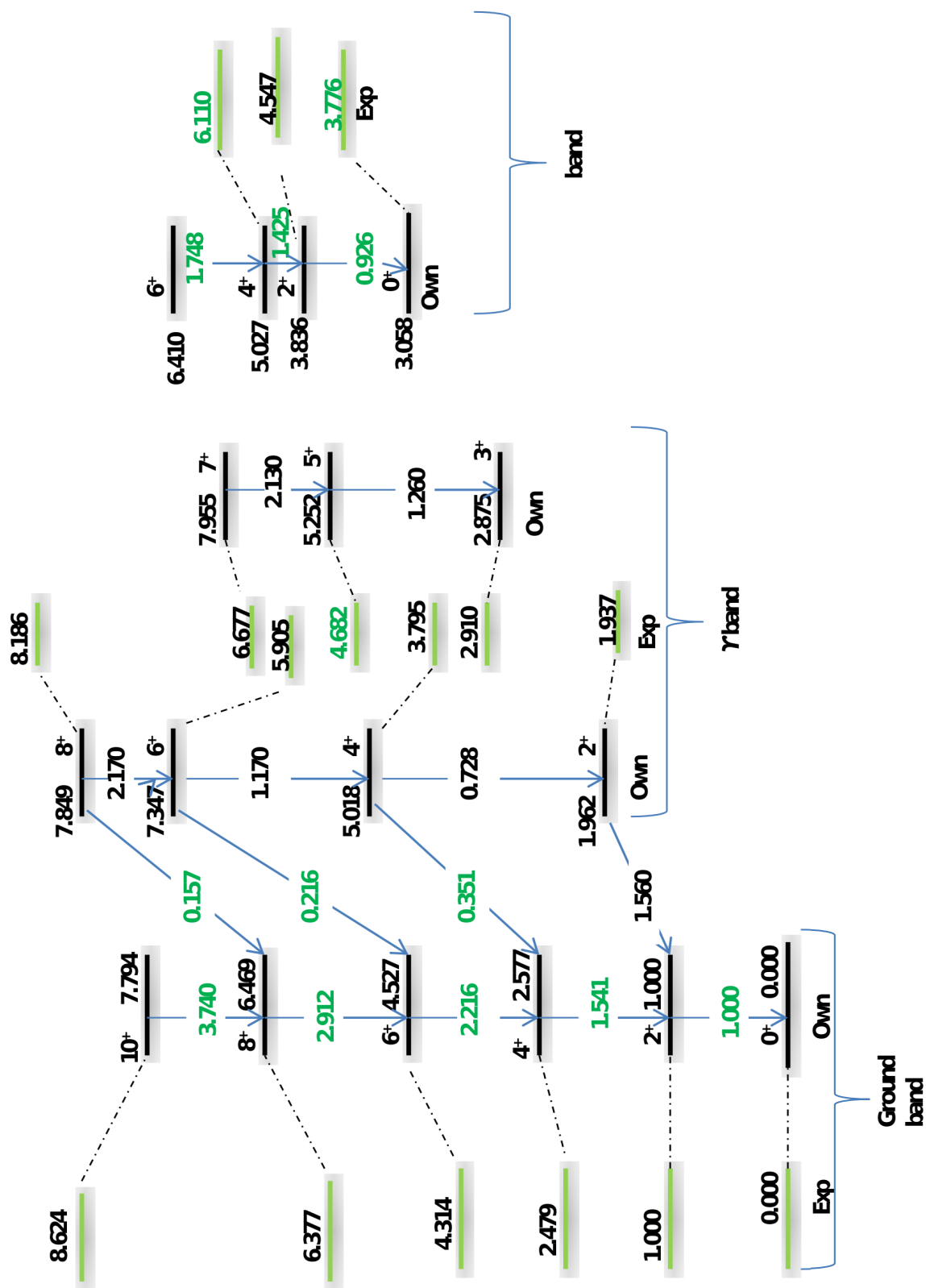


FIGURE 15 – Spectre d’énergie de nos résultats théoriques (ligne horizontale noire) comparés aux données expérimentales (ligne horizontale verte) pour l’isotope ^{192}Pt du platine. Les taux de transition $B(E2)$ sont mis en évidence par des flèches et leurs valeurs associées[96].

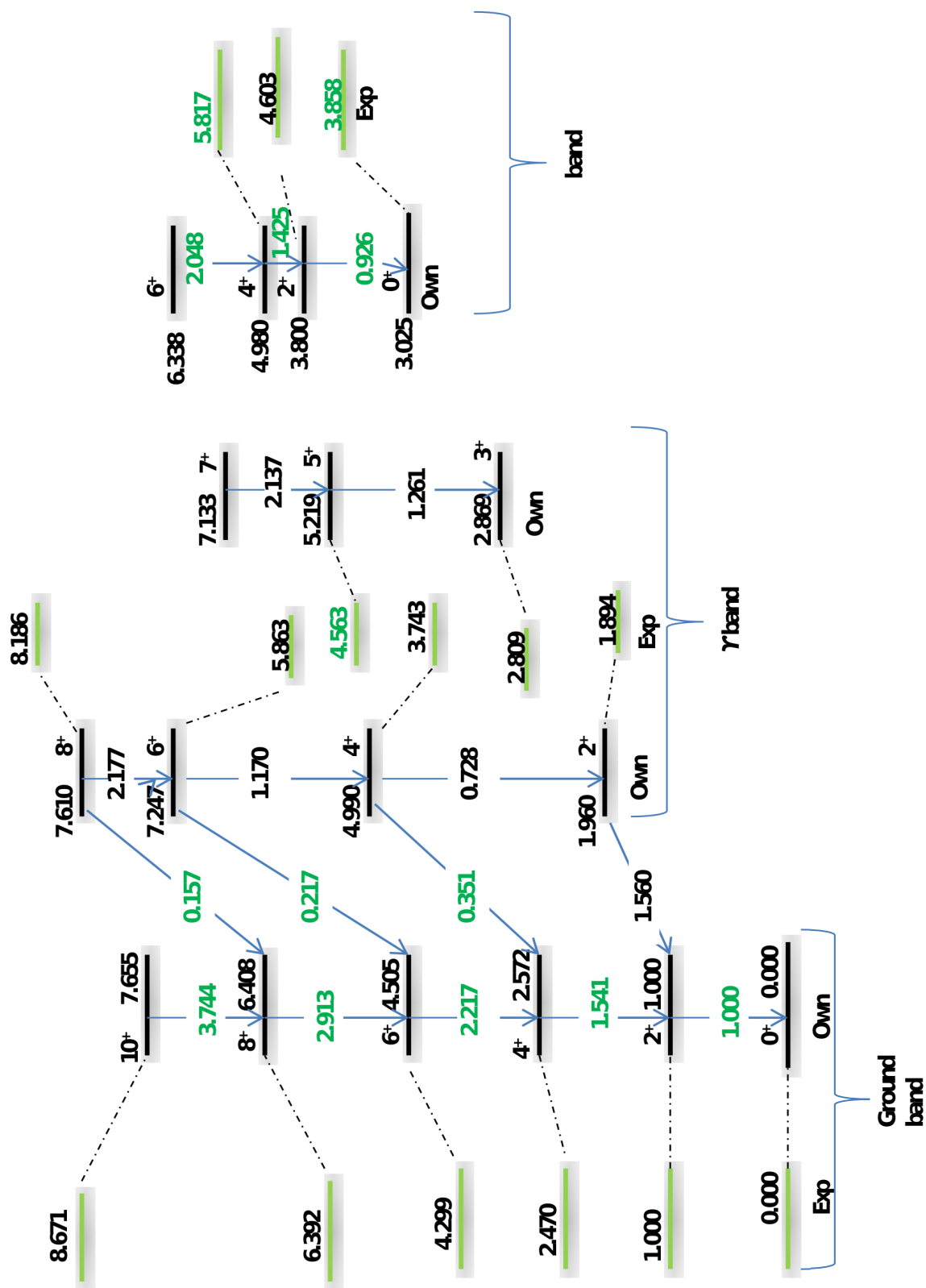


FIGURE 16 – Spectre d’énergie de nos résultats théoriques (ligne horizontale noire) comparés aux données expérimentales (ligne horizontale verte) pour l’isotope ^{194}Pt du platine. Les taux de transitions $B(E2)$ sont mise en évidence par des flèches et leurs valeurs associées[96].

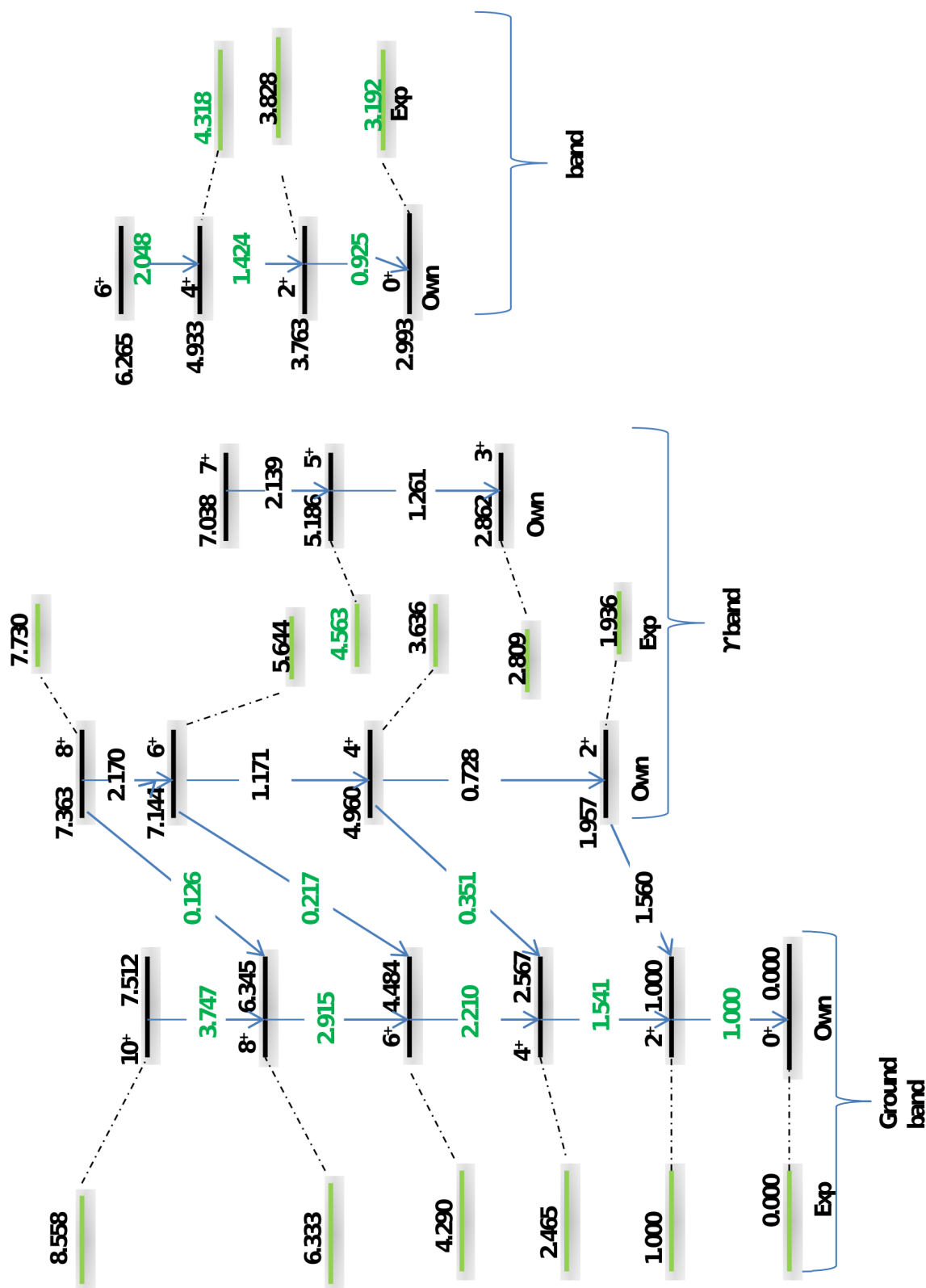


FIGURE 17 – Spectre d’énergie de nos résultats théoriques (ligne horizontale noire) comparés aux données expérimentales (ligne horizontale verte) pour l’isotope ^{196}Pt du platine. Les taux de transition $B(E2)$ sont mis en évidence par des flèches et leurs valeurs associées[96].

La compréhension des résultats de ce travail, a permis de nous interroger si les isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ du platine constituent une triaxialité en utilisant la combinaison des potentiels de Morse et Kratzer criblé (CPMK).

III.3.1 Triaxialité des nucléides

La résolution du Hamiltonien de Bohr du mouvement en présence de la CPMK montre que le paramètre c est une fonction de l'énergie du système c'est-à-dire que $c = c(\xi)$. Le potentiel prend donc la forme :

$$v_1(\beta) = a \exp(-\alpha\beta) + b \exp(-2\alpha\beta) + \left(\frac{c(\xi)}{\beta} + \frac{d}{\beta^2} \right) \exp(-\alpha\beta), \quad (\text{III.1})$$

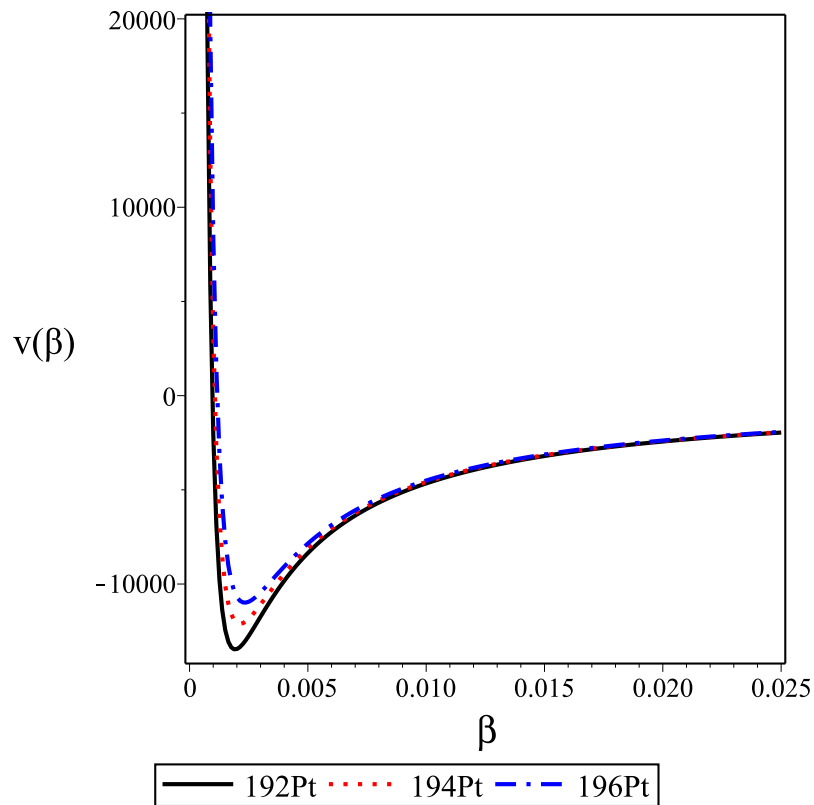


FIGURE 18 – Représentation de l'allure de la CPMK pour des isotopes ^{196}Pt , ^{194}Pt et ^{192}Pt du platine dans son état $L_{n,n\omega} = 4_{0,0}$ en fonction des paramètres libres du Tableau 2[96]

La Fig.(18) représente l'allure de la CPMK dans l'état fondamental ($n = 0, n_\omega = 0$) pour $L = 4$ des isotopes ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt du platine, grâce aux paramètres libres a, b, d et l'énergie dans cet état. Ces trois courbes présentent la forme d'une gaussienne renversée et montrent que :

- la CPMK garde la même forme pour les trois courbes lorsqu'on varie la valeur de α ,
- le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ c'est à dire il y a repulsion,
- et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$ c'est-à-dire il y a aucun effet,
- on remarque aussi que, le potentiel confine plus lorsque $0.001 \leq \beta \leq 0.004$, c'est-à-dire il y a attraction,
- nous constatons aussi que, les courbes s'écartent à partir de $\beta = 0.005$ et elles gardent les mêmes formes et allures jusqu'à l'infini,
- plus le puits du potentiel est profond, le noyau est stable et les interactions entre nucléons sont fortes.

En définitive, on peut dire que le patine ^{192}Pt est plus stable parmi les trois isotopes du platine que nous avons étudiés dans l'état fondamental ($n = 0, n_\omega = 0$) pour $L = 4$.

III.3.2 Variation du potentiel dûe au paramètre c de la CPMK

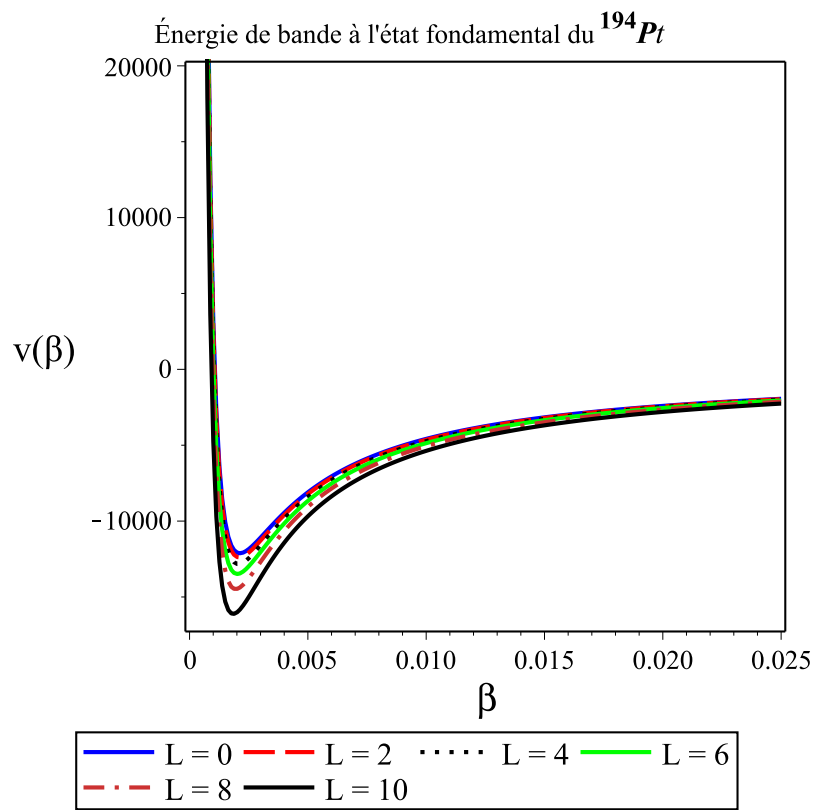
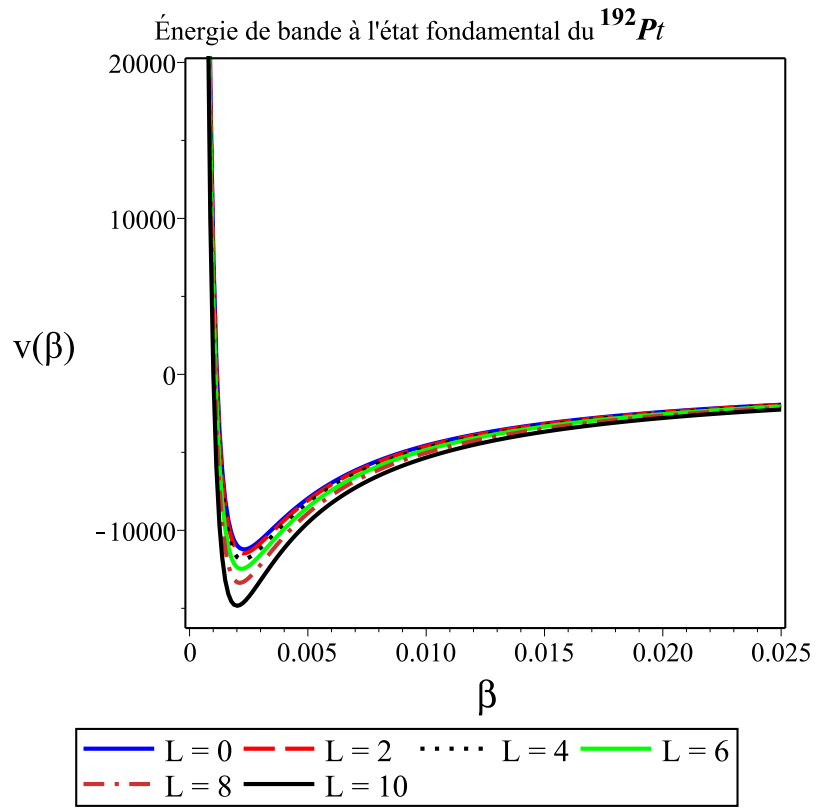
Les courbes des Figs. (19), (20) et (21) présentent les évolutions des énergies d'excitation des différents niveaux (état fondamental, bande β et bande γ) en fonction de la rigidité α du système. Nous constatons que les écarts entre ces courbes ne sont pas très grand quelque soit la valeur de α dans le Tableau 2. Ainsi nous tentons de bâtir avec la CPMK un système stable quelle que soit sa rigidité α . Généralement la résistance, la puissance et le coût d'un système mécanique dépendent du type de matériaux constitutif incorporé.

Les trois courbes de la Fig.(19), nous présentent l'évolution et la variation de la combinaison des potentiels de Morse et Kratzer criblé à l'état fondamental des isotopes ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt respectivement, lorsqu'on fixe les valeurs des paramètres $a = 10$, $b = 20$ et $d = 0.06$; et en faisant aussi varier le paramètre α tel que $\alpha_1 = 0.1832$ pour le ^{192}Pt , $\alpha_2 = 0.1842$ pour le ^{194}Pt et $\alpha_3 = 0.1852$.

Ces différentes courbes présentent la forme gaussienne renversée et montrent que :

- le potentiel garde la même allure quelle que soit l'état du noyau ;
 - le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$;
 - le potentiel confine plus lorsque $0.001 < \beta < 0.003$, c'est-à-dire très attractif,
 - plus le nombre quantique du moment magnétique L augmente, plus le puits du potentiel est profond, plus l'interaction entre nucléons est forte (colle nucléaire) et plus le noyau est stable.
- Les noyaux les plus stables correspondent à $L = 10$.

Cette variation du potentiel est dûe au fait que le paramètre c de la CPMK est une contrainte fonction de l'énergie, c'est-à-dire fonction de l'état du noyau atomique.



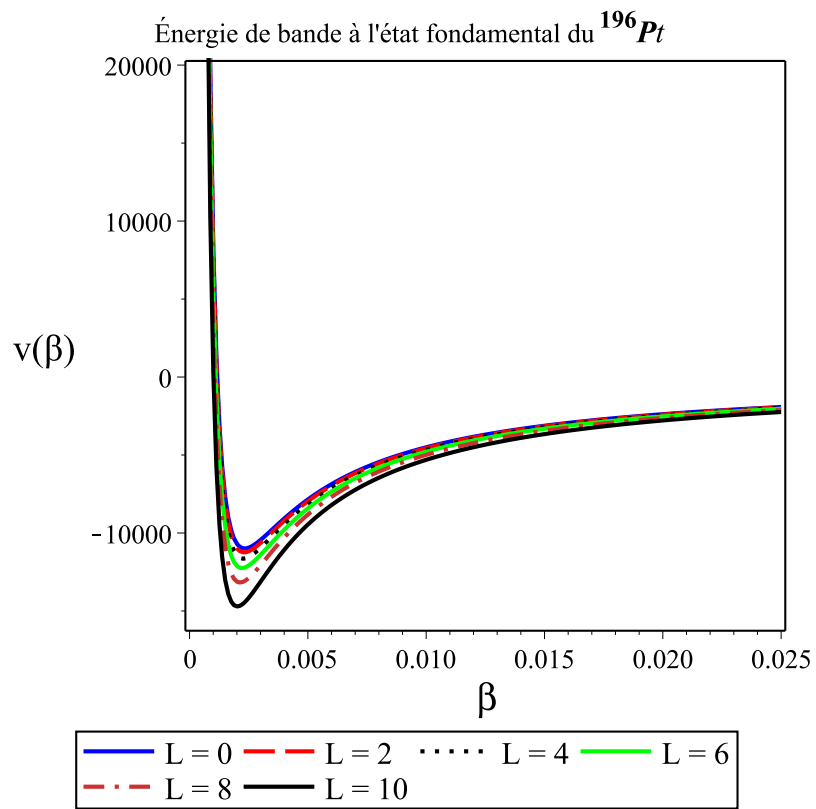


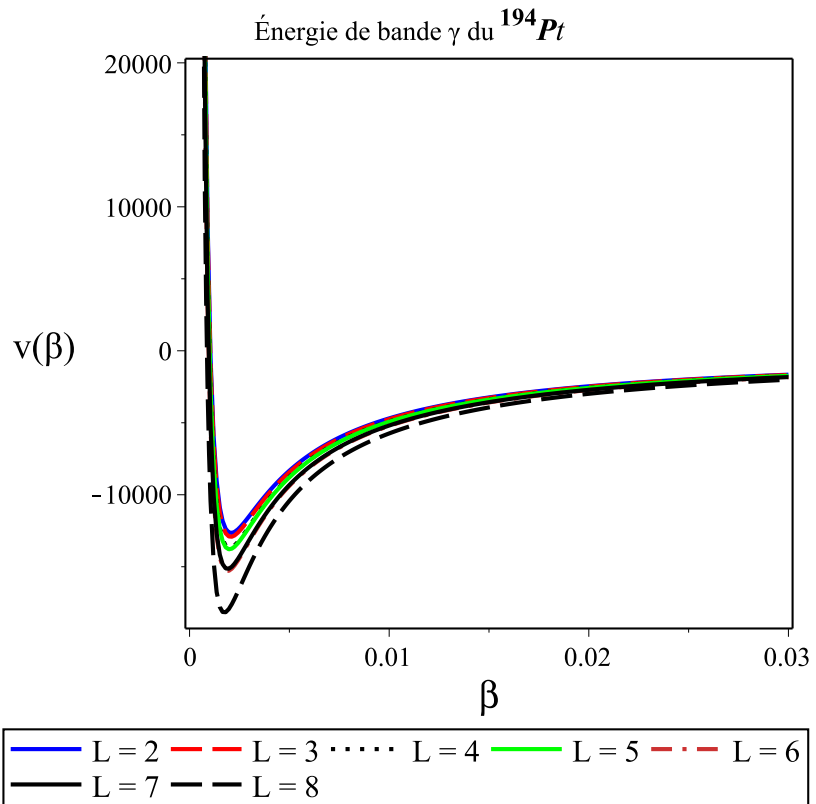
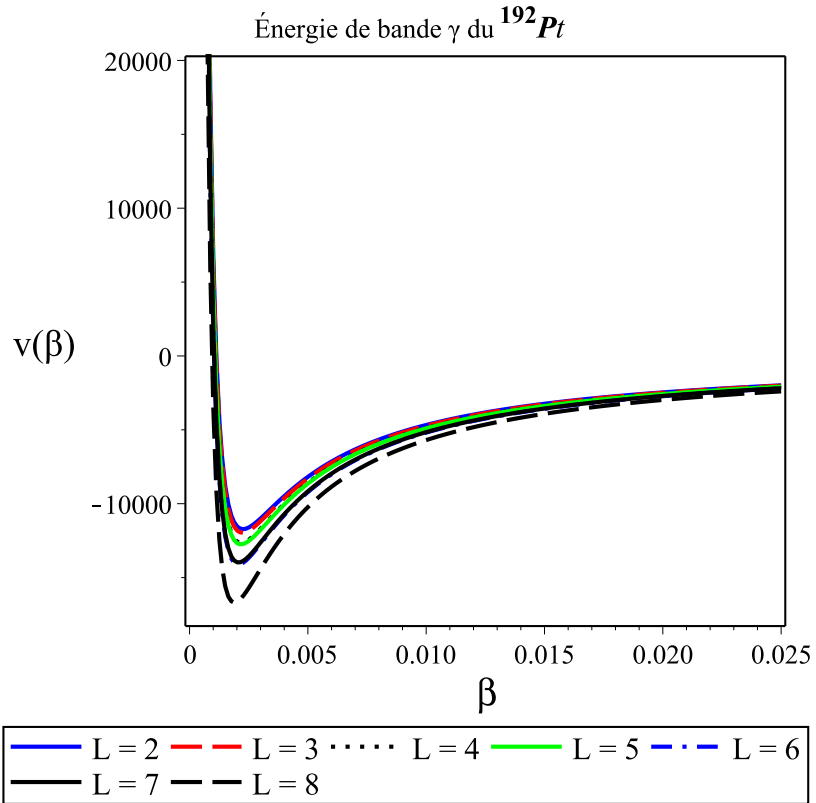
FIGURE 19 – Variations de la CPMK dans l'état fondamental ($n = 0, n_\omega = 0$), prenant en compte les paramètres numériques du Tableau 2 pour l'isotope ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt respectivement[96].

Les trois courbes de la Fig.(20), nous présentent l'évolution et la variation de la combinaison des potentiels de Morse et Kratzer criblé dans la bande γ ($(n = 0, n_\omega = 1)$ pour les L impairs et $(n = 0, n_\omega = 2)$ pour les L pairs) pour les isotopes ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt respectivement, lorsqu'on fixe les valeurs des paramètres $a = 10$, $b = 20$ et $d = 0.06$; et en faisant aussi varier le paramètre α tel que $\alpha_1 = 0.1832$ pour le ^{192}Pt , $\alpha_2 = 0.1842$ pour le ^{194}Pt et $\alpha_3 = 0.1852$.

Ces différentes courbes présentent la forme gaussienne renversée et montrent que :

- le potentiel garde la même allure quel que soit l'état du noyau ;
- le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$ cela explique qu'il y a aucun effet ;
- le potentiel confine plus lorsque $0.001 < \beta < 0.003$, c'est-à-dire très attractif,
- plus le nombre quantique du moment magnétique L augmente, plus le puit du potentiel est profond, plus l'interaction entre nucléons est forte (colle nucléaire) et plus le noyau est stable. Les noyaux les plus stables correspondent à $L = 8$.

Cette variation du potentiel est due au fait que le paramètre c de la CPMK est une contrainte fonction de l'énergie, c'est-à-dire fonction de l'état du noyau atomique.



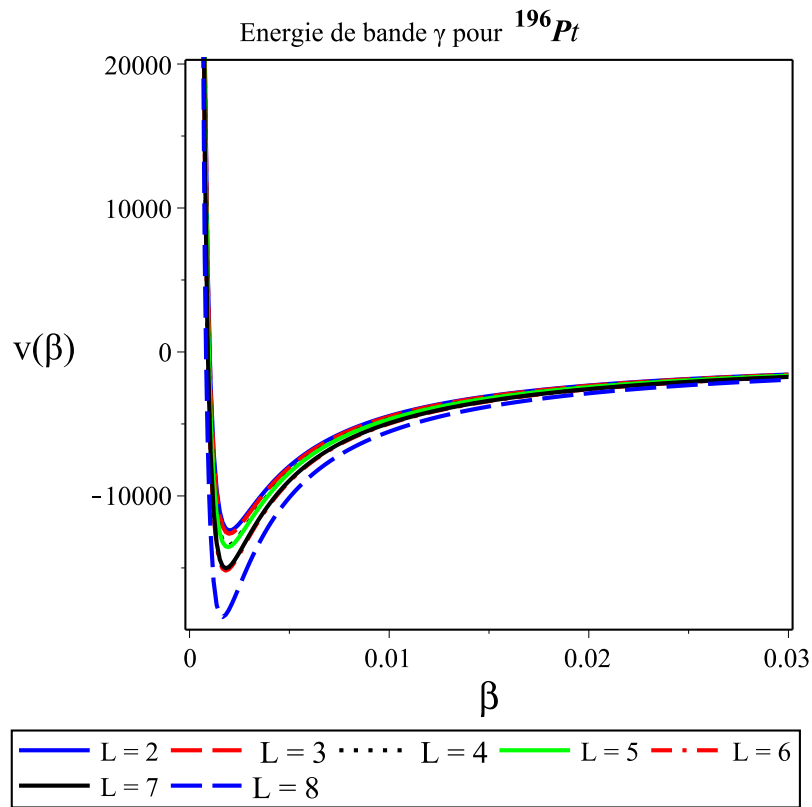
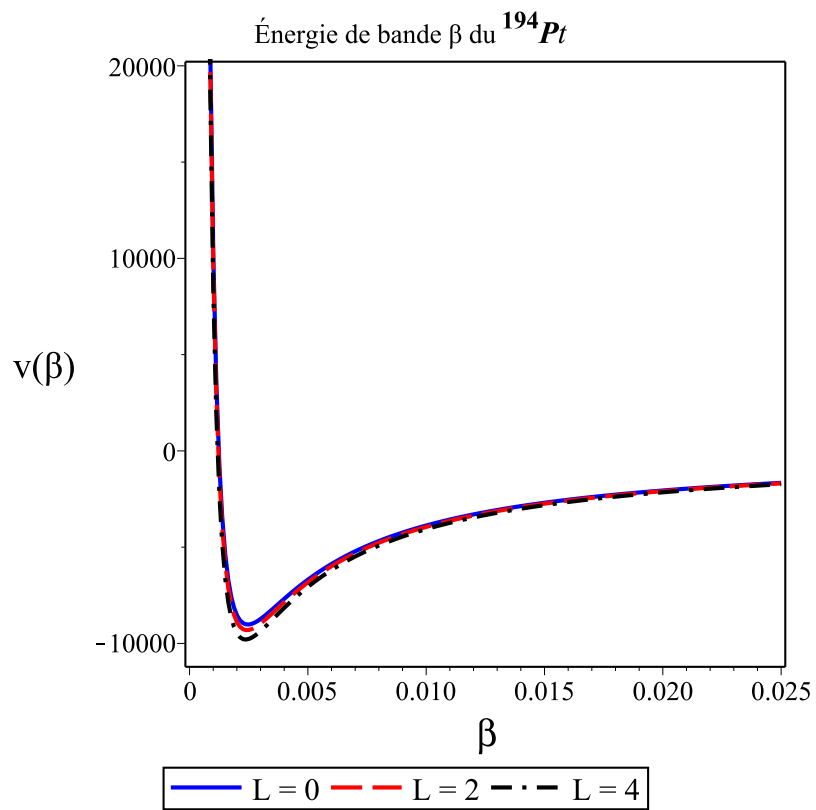
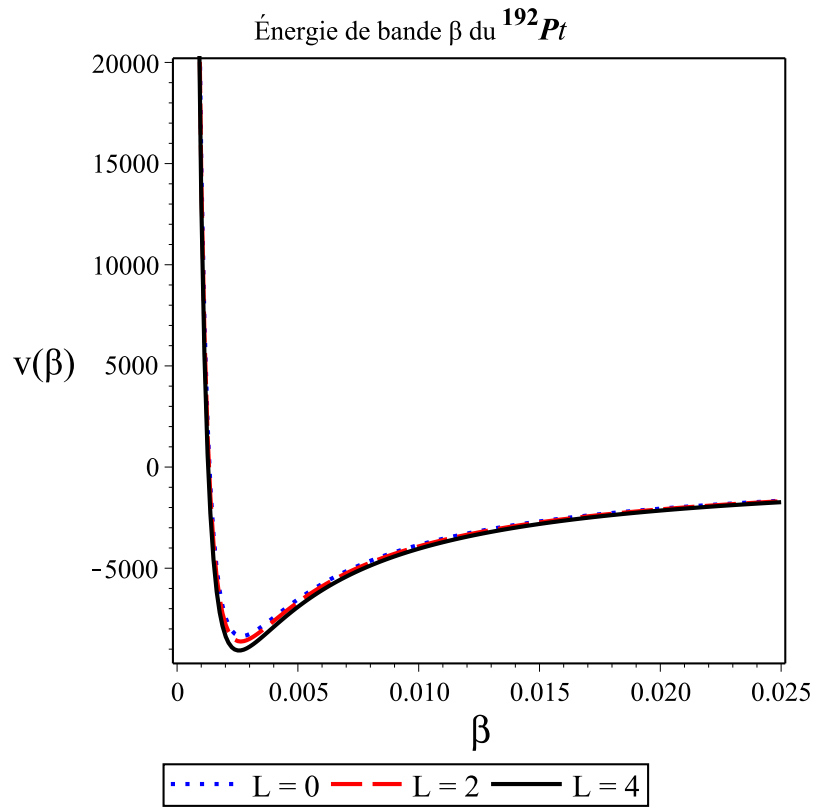


FIGURE 20 – Variations de la CPMK dans la bande γ ($(n = 0, n_\omega = 1)$ pour les L impairs et $(n = 0, n_\omega = 2)$ pour les L pairs), prenant en compte les paramètres numériques du Tableau 2 pour l'isotope ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt respectivement[96].



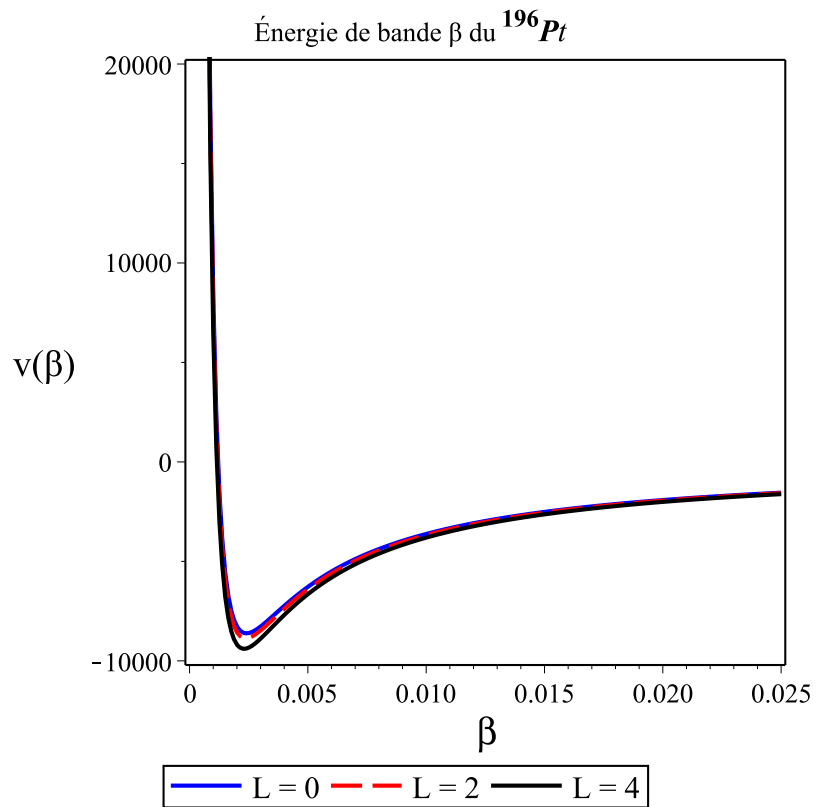


FIGURE 21 – Variations de la combinaison de la CPMK dans la bande β ($n = 1, n_\omega = 0$), prenant en compte les paramètres numériques du Tableau 2 pour l'isotope ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt respectivement[96].

Les trois courbes de la Fig.(21), nous présentent l'évolution et la variation de la combinaison des potentiels de Morse et Kratzer criblé dans la bande β ($n = 1, n_\omega = 0$) pour les isotopes ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt respectivement, lorsqu'on fixe les valeurs des paramètres $a = 10, b = 20$ et $d = 0.06$; et en faisant aussi varier le paramètre α tel que $\alpha_1 = 0.1832$ pour le ^{192}Pt , $\alpha_2 = 0.1842$ pour le ^{194}Pt et $\alpha_3 = 0.1852$.

Ces différentes courbes présentent la forme gaussienne renversée et montrent que :

- le potentiel garde la même allure quel que soit l'état du noyau ;
- le potentiel tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow 0$ et tend vers 0 quand $\beta \rightarrow \infty$;
- le potentiel confine plus lorsque $0.001 < \beta < 0.003$, c'est-à-dire très attractif,
- plus le nombre quantique du moment magnétique L augmente, plus le puits du potentiel est profond, plus l'interaction entre nucléons est forte (colle nucléaire) et plus le noyau est stable. Les noyaux les plus stables correspondent à $L = 4$.

Cette variation du potentiel est due au fait que le paramètre c de la CPMK est une contrainte fonction de l'énergie, c'est-à-dire fonction de l'état du noyau atomique.

III.3.3 Effet de l'étalonnage des énergies dans la bande γ

Il représente une très sensible grandeur sur les effets de l'étalonnage dans la bande γ pour la structure de la triaxialité. Cette grandeur consiste à mesurer le déplacement du niveau $(J - 1)_\gamma^+$ par rapport à la moyenne de ses voisins $(J - 2)_\gamma^+$ et J_γ^+ (voir Eq. II.126).

Les valeurs du modèle $Z(5)$, celle de la théorie et les données expérimentales sont représentées sur les différentes courbes ci-dessous. On peut regarder sur ces courbes que, la valeur de $S(J)$ est positive pour J pair et négative pour J impair. Afin de voir si la signature dans ce modèle actuel est révélée, nous avons tracé l'effet de l'étalonnage des énergies $S(J)$ en fonction de J pour les isotopes du $^{192,194,196}\text{Pt}$. Les figures (22) à (24) présentent les différentes comparaisons des valeurs $Z(5)$, celles de la théorie et les données expérimentales.

On observe sur la Fig. (22) que, l'effet d'étalonnage de la symétrie $Z(5)$ et les valeurs théoriques s'étalent et se superposent entre elles dans les bandes des états des énergies aux points $4_\gamma^+, 5_\gamma^+, 6_\gamma^+$ et 7_γ^+ du ^{192}Pt . Et c'est à partir de l'état d'énergie 8_γ^+ qu'il y a un léger décalage avec la $Z(5)$. Toutefois la CPMK reste en parfait accord avec les données expérimentales dans cet état.

On observe sur la Fig. (23) que, l'effet d'étalonnage de la symétrie $Z(5)$ et les valeurs théoriques s'étalent et se superposent entre elles dans les bandes des états des énergies aux points $4_\gamma^+, 5_\gamma^+, 6_\gamma^+$

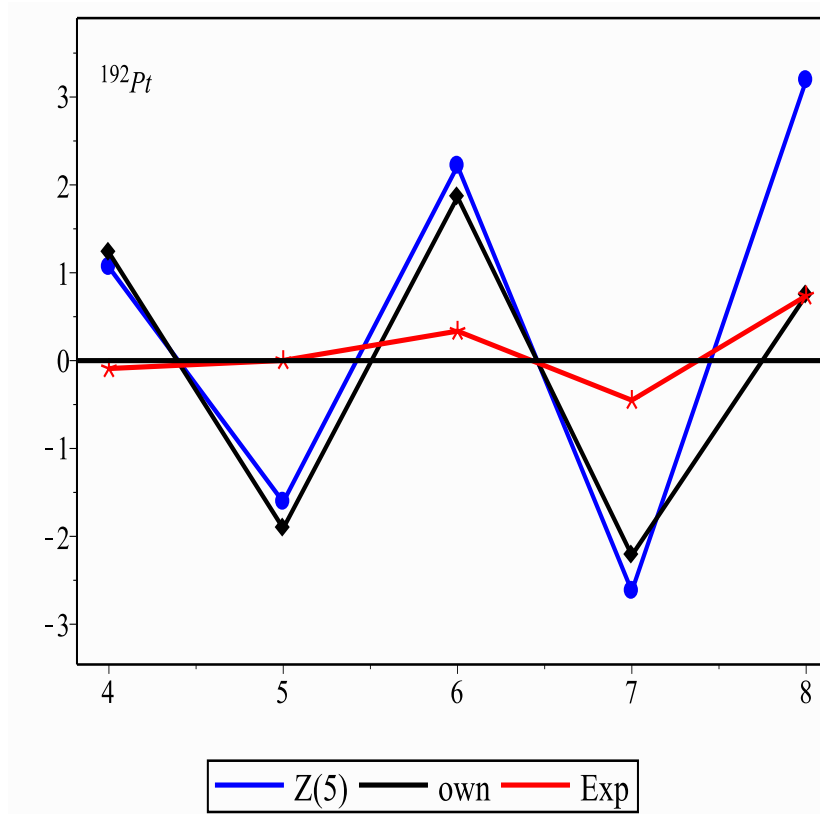


FIGURE 22 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ et les données expérimentales du ^{192}Pt [96].

du ^{194}Pt . Et c'est à partir de l'état d'énergie 8_{γ}^{+} qu'il y a un léger décalage avec la $Z(5)$. Toutefois les données expérimentales dans cet état ne sont pas fournies.

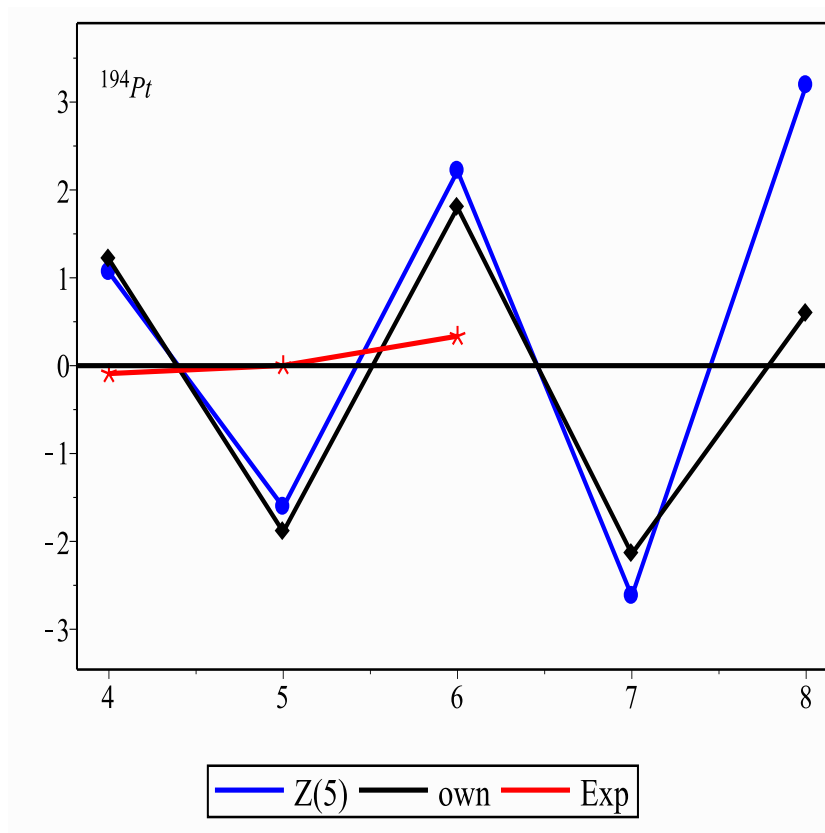


FIGURE 23 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ et les données expérimentales du ^{194}Pt [96].

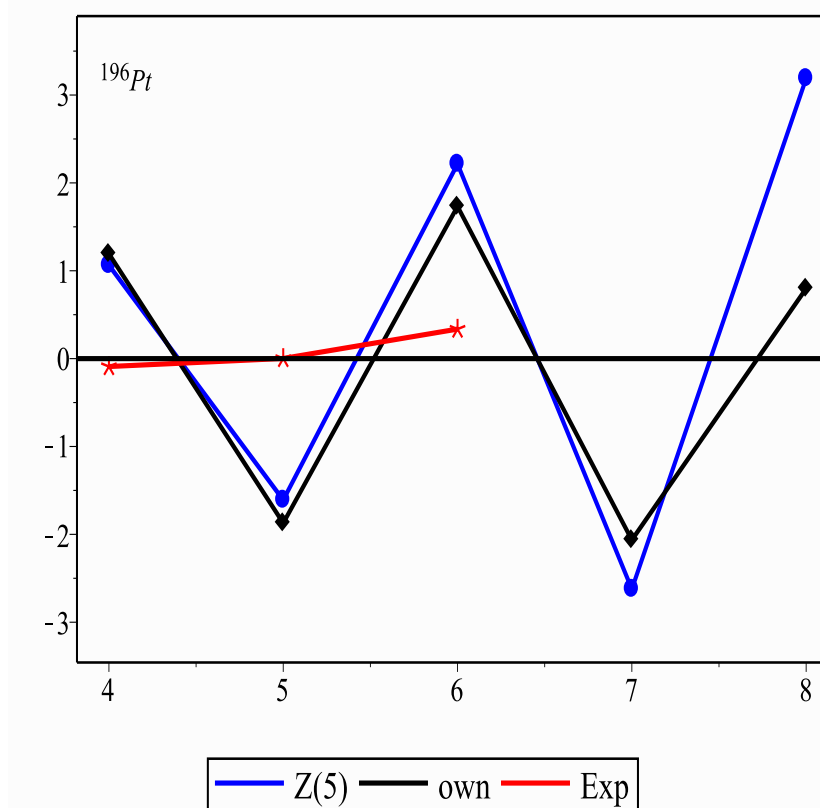


FIGURE 24 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ et les données expérimentales du ^{196}Pt [96].

On observe sur la Fig. (24) que, l'effet d'étalonnage de la symétrie $Z(5)$ et les valeurs théoriques s'étalent et se superposent entre elles dans les bandes des états des énergies aux points 4_{γ}^{+} , 5_{γ}^{+} , 6_{γ}^{+} du ^{196}Pt . Et c'est à partir de l'état d'énergie 8_{γ}^{+} qu'il y a un léger décalage avec la $Z(5)$. Toutefois les données expérimentales dans cet état ne sont pas fournies.

Marid et al 2018[97], ont essayé d'étudier la relation entre la radioactivité de la famille de désintégration de l'uranium et du thorium et leur forme déformée. Grâce aux paramètres de déformation quadrupolaire, ils ont conclu que les séries d'éléments radioactifs avaient une forme déformée qui diminuait avec leur désintégration (α et β) vers la forme sphérique parfaite. De l'Eq. (II.89) du chapitre II, on constate clairement que le paramètre c est fonction de l'énergie $\xi_{L,n,n_{\omega},n_{\gamma}}$. Ce spectre d'énergie est également fonction du nombre quantique du moment angulaire L et du nombre quantique n . Ainsi, avec les paramètres a , b et d fixés comme indiqué dans le Tableau 2, un changement de valeurs du paramètre c modifiera l'état du noyau atomique.

Certaines de ces transitions ont été représentées pour chaque isotope du platine sur les Figs. 15-17. La combinaison des potentiels de Morse et Kratzer criblé a été représentée en utilisant les trois paramètres libres considérés du Tableau 2, pour chaque isotope du platine et ses bandes correspondantes.

III.4 Conclusion

Tout au long de ce chapitre, la structure triaxiale des isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ du platine a été mise en évidence. D'abord les énergies et les fonctions d'ondes étant quantifiées ; les énergies d'excitation des nucléons pour passer d'un état vers un autre sont présentées dans le Tableau 1. À cela s'ajoute le calcul de quelques probabilités de transitions $B(E2)$ présentées dans le Tableau 3. Ensuite ces résultats obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux et ceux obtenus à partir du PM et aussi ceux du PKM. Enfin ces résultats nous ont permis de tracer les allures de la CPMK dans la bande de l'état fondamental, la bande γ et la bande β .

Conclusion Générale

L'objectif de ce travail consistait à proposer un **"modèle permettant la détermination du spectre d'énergie des isotopes 192, 194 et 196 du platine."** Pour cela, nous avons étudié le modèle d'un noyau déformé qui tient en compte des interactions entre les nucléons, en présence d'une combinaison de deux potentiels (Morse et Kratzer criblé).

Dans le premier chapitre, après une brève historique de la physique nucléaire énumérant quelques chronologies importantes qui ont caractérisé les études de la structure nucléaire, nous avons présenté un modèle faisant ressortir : les composantes du noyau atomique, les trois types de radioactivités, les types de forces qui se manifestent au sein du noyau atomique, les différents types de déformations et interactions enregistrées dans le noyau atomique et les énergies de liaisons et de séparations des nucléons. Ensuite nous avons passé en revue les modèles nucléaires que nous avons distingués en deux catégories à savoir les modèles macroscopiques (le modèle de la goutte liquide où le noyau est décrit de manière classique) et le modèle microscopique (le modèle en couche utilise le formalisme quantique, il reprend les idées de la structure de l'atome et le transpose sur le noyau atomique. Malgré l'explication des nombres magiques, il connaît des limites car il n'est valide que pour des noyaux de forme sphérique). En fin, nous avons introduit la notion de paramétrisation de la surface nucléaire qui fait intervenir deux modes d'excitation : la vibration et la rotation.

Le deuxième chapitre a été consacré à la résolution de notre système déformé. Ainsi nous avons obtenu à partir du Hamiltonien de Bohr avec la technique de séparation des variables, des équations dont l'une dépend du paramètre déformation β (partie β) et l'autre du paramètre déviation γ (partie γ). Une résolution de l'équation de hamiltonien de Bohr avec le PMSK pour les noyaux triaxiaux pour la partie β et pour la partie γ avec un minimum de $\pi/6$ a permis de trouver l'énergie propre du système et les fonctions d'onde sont ainsi déduites en utilisant l'équation Confluente de Heun.

Le troisième chapitre porte sur l'analyse et discussion des résultats obtenus à partir de notre modèle. Partant de l'expression analytique de l'énergie, nous avons calculé le rapport des énergies pour chaque niveau (bande) pour les isotopes 192, 194 et 196 du platine. Ensuite nous les avons comparés aux données expérimentales et à d'autres travaux utilisant le potentiel de Morse et le potentiel de Morse Killingbeck plus Morse. De ces comparaisons, il en ressort que nos résultats se rapprochent davantage des valeurs expérimentales. Enfin, la dernière articulation de ce chapitre a consisté à représenter l'allure du combiné des potentiels Morse plus Kratzer criblé, ses variations en fonction d'une contrainte liée à l'énergie du système. Au regard des valeurs des écarts types σ calculés et présentés dans le Tableau 2, nous pensons que notre système semble plus amélioré car toutes nos valeurs sont comprises entre celles expérimentales et celles du PM

car $\sigma_{exp} < \sigma_{CPMK} < \sigma_{PM}$.

En définitive, il en ressort de notre étude que notre travail a amélioré la compréhension sur les noyaux triaxiaux. Par ailleurs, utilisation de l'équation du Hamiltonien de Bohr en présence de notre potentiel proposé, a permis d'une part d'affiner la précision des valeurs d'énergies et d'autre part, l'obtention d'une relation entre la forme du potentiel et les différents paramètres du système nucléaire à savoir : énergies, nombre quantique principal n et le moment magnétique L . Toutefois, nous constatons que le modèle étudié n'est pas applicable qu'aux noyaux déformés. Dans l'avenir, nous comptons élaborer un modèle applicable à un grand nombre de noyaux, qu'ils soient déformés ou pas.

Appendices

ANNEXE : Ratios des moments de transitions quadrupôlaires électriques B(E2)

$$\begin{aligned}
 R_{\text{ground} \rightarrow \text{ground}}(L+2 \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L+2)_g \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{2L+1}{2L+5} (1 + \delta_{L,0}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \text{ground}}(L \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-even}} \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{15}{(L+1)(2L+3)} (1 + \delta_{L,2}) \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.3}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \text{ground}}(L \rightarrow L+1) &= \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-odd}} \rightarrow (L+1)_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{(L+2)} \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-1; n=0, L+1, L+1)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \gamma\text{-even}}(L+2 \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{L(2L-1)(2L+1)}{(2L+3)(L+2)(2L+5)} (1 + \delta_{L,2}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L; n=0, L, L-2)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \gamma\text{-odd}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{L(2L+1)}{(L+2)(2L+5)} \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+1; n=0, L, L-1)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

$$\begin{aligned}
R_{\gamma\text{-odd}\rightarrow\gamma\text{-even}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; L_\gamma \rightarrow (L-1)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
&= \frac{5(2L-3)(2L-1)}{L(L+1)(2L+1)} (1 + \delta_{L,3}) \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-1; n=0, L-1, L-3)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
\end{aligned} \tag{III.7}$$

$$\begin{aligned}
R_{\beta\text{-band}\rightarrow\beta\text{-band}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; L_{\beta\text{-band}} \rightarrow (L-1)_{\beta\text{-band}})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
&= \frac{5}{2} \frac{2L+1}{2L+5} (1 + \delta_{L,0}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
\end{aligned} \tag{III.8}$$

Liste de Publications

[1] S. Haman Adama, D. Nga Ongodo, A. Zarma, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, Bohr Hamiltonian of triaxial nuclei using Morse plus screened Kratzer potentials with the extended Nikiforov-Uvarov method, *Int. Jour. of Mod. Phys. E*, vol. 30 12 (2021) 2150105.

Bibliographie

- [1] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3580.
- [2] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 052502.
- [3] P. Cejnar, J. Jolie and R. F. Casten, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 2155.
- [4] E. Rutherford, *The scattering of alpha and beta-particles by matter and the structure of atoms*, (Phil. Mag., 1911) 669-698.
- [5] J. Chadwick, *The Existence of a Neutron*, (The Royal Society, 1932) 692708.
- [6] A. Bohr, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* **26** (1952) 14.
- [7] A. Bohr and B. Mottelson, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* **27** (1953) 14.
- [8] M. Alimohammadi, H. Hassanabadi and H. Sobhani, *Mod. Phys. Lett. A.* **31** (2016) 1650193.
- [9] M. Baranger and K. Kumar, *Nucl. Phys. A* **122** (1968) 241.
- [10] A. Kratzer, *Phys. Z* **32** (1920) 89.
- [11] L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys.* **29** (2003) 1341.
- [12] L. Fortunato, and A. Vitturi, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys. Rev.* **30** (2004) 627.
- [13] D. Bonatsos, P. E. Georgoudis, N. Minkov, D. Petrellis and C. Quesne, *Phys. Rev. C* **88**, (2013) 034316.
- [14] Y. Omon, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama, G. H. Ben-Bolie and P. O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **29** (2020) 2050082.
- [15] P. M. Morse, *Phys. Rev.* **34**, (1929) 57.
- [16] I. Boztosun, D. Bonatsos and I. Inci, *Phys. Rev. C* **77** (2008) 044302.
- [17] I. Inci, D. Bonatsos and I. Boztosun, *Phys. Rev. C* **84** (2011) 024309.
- [18] G. Lévai and J. M. Arias, *Phys. Rev. C* **69** (2004) 014304.
- [19] A. A. Rudata and P. Baganu, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 034313.
- [20] A. A. Rudata and P. Baganu, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys.* **40** (2013) 025108.
- [21] P. Baganu and R. Budaca, *J. Phys. G* **42** (2015) 105106.
- [22] P. Baganu and R. Budaca, *Phys. Rev. C* **91** (2015) 014306.
- [23] R. Budaca, P. Baganu, M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne *Ann. Phys. (NY)* **375** (2016) 65.
- [24] R. Budaca, P. Baganu, and A. I. Bucada *Phys. Lett. B* **375** (2016) 65.
- [25] H. Neyazi, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, *Nucl. Phys. A* **945** (2015) 80.

- [26] H. Sobhani, H. Hassanabadi and W. S. Chung, *Nucl. Phys. A* **973** (2018) 33.
- [27] B. T. Mbadjoun, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama, G. H. Ben-Bolie and P. O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **27** (2018) 1850072.
- [28] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P.P. Raychev, and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **584**, (2004) 40.
- [29] I. Yigitoglu and D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
- [30] D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, *Int. Jour. of Mod. Phys. E* **28** (2019) 1950106.
- [31] L. Wilets and M. Jean, *Phys. Rev.* **102** (1956) 788.
- [32] R. F. Casten and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3584.
- [33] R. F. Casten and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 052503.
- [34] I. Inci, I. Boztosun and Y. E. Gonen, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **39** (2012) 085112.
- [35] A. V. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematics Physics*, (Birkhäuser, Boston, 1988).
- [36] A. N. Ikot, H. Hassanabadi and T. M. Abbey, *Commun. Theor. Phys.* **64** (2015) 637.
- [37] M. Eshghi, H. Mehraban and S. M. Ikhdair, *Acta. Math. Appl. Sin. Engl. Ser.* **31** (2015) 1131.
- [38] M. G. Miranda, G. H. Sun and S. H. Dong, *Int. J. Mod. Phys. E* **19** (2010) 123.
- [39] M. C. Zhang, G. H. Sun and S. H. Dong, *Phys. Lett. A* **374** (2010) 704.
- [40] S. H. Dong and Gonzalez-Cisneros, *Ann. Phys.* **323** (2008) 1136.
- [41] X. Y. Gu, S. H. Dong and Z. Q. Ma, *J. Phys. A : Math. Theor.* **42** (2009) 035303.
- [42] S. H. Dong and M. Cruz-Irisson, *J. Math. Chem.* **50** (2012) 881.
- [43] W. C. Qiang and S. H. Dong, *EPL* **89** (2010) 10003.
- [44] F. A. Serrano, X. Y. Gu and S. H. Dong, *J. Math. Phys.* **51** (2010) 082103.
- [45] H. Ciftei, R. L. Hall and N. Saad, *Phys. Lett. A* **340** (2005) 288.
- [46] O. Bayrak, I. H. Boztosun and H. Ciftei, *Int. J. Quantum. Chem.* **111** (2011) 1870.
- [47] R. H. Hammed, *J. Basrah. Res.* **38** (2012) 51.
- [48] S. H. Dong, *Factorization Method in Quantum Mechanics*, (Spinger, Netherlands, 2007).
- [49] K. J. Oyewumi, *Int. J. Theor. Phys.* **49** (2010) 1302.
- [50] F. Taskin and G. Kocak, *Chim. Phys. B* **19** (2010) 090314.
- [51] M. C. Onyeaju, J.O.A. Idiodi, A.N Ikot, M. Solaimani and H. Hassanabadi, *J. Opt.* **46** (2017) 254.
- [52] C. Tezcan and R. Server, *Int. J. Theor. Phys.* **48** (2009) 337.
- [53] I. Nasser, M.S. Abdelmonem, H. Bahlouli, and A. D. Alhaidari, *J. Phys. B* **40** (2007) 4245.
- [54] J. Y. Liu, G.U. Zhang, and C.S Jia, *Phys. Lett. A* **377** (2013) 1444.

- [55] H. M. Tang, G.C. Liang, L.H Zhang, F. Zhao and C. S. Jia, *Can. J. Chem.* **92** (2014) 341.
- [56] G. Gamow, *les noyaux Atomiques* (Annales de l'I.H.P., tome 5, no 2 (1935), p.89-114).
- [57] J. Chadwick, *Radioactivity and Radioactive Substances, an Introduction to the study of Radioactive Substances And their Radiations*, **978** (1921) 007587-8.
- [58] T. Ruedas, *Radioactive heat production of six geologically importantt nuclides*, G3, (2017) 006997.
- [59] <http://freephysique.free.fr/cours>
- [60] <https://www.ilephysique.net/sujet-reaction-de-fusion-300005.html>
- [61] H. A. Bethe and R. F. Bacher, *Rev. Mod. Phys.* **8** (1936) 82.
- [62] C. F. V. Weizsäcker, *Zur Theorie der Kernmassen*(Zeitschrift fr Physik, New York, 1935).
- [63] https://fr.wikibooks.org/wiki/Le_noyau_atomique/Le_modèle_de_la_goutte_liquide.
- [64] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, **volume I et II** (World Scientific, Amsterdam, 1968).
- [65] M. G. Mayer, *Phys. Rev.* **74** (1948) 235.
- [66] M. G. Mayer, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1969.
- [67] O. Haxel, J. H. D. Jensen, H. E. Suess, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1766.
- [68] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics* (Ed. Wiley, Oregon State University, 1988).
- [69] S. Nilson and I. Ragnarsson, *Shapes and Shells in Nuclear Structure*(Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
- [70] B. J. P. Gall, *Ann. Phys. Fr.* **24** (1999) 1-93.
- [71] Y. Gratchev, *Etude expérimentale et théorique de la structure nucléaire des isotopes de sélénium riches en neutrons*,(Grenoble Alpes, 2016)669698.
- [72] A. Bohr, B. Mottelson, *Phys. Rev.* **90** (1953) 717.
- [73] Y. Shi, J. Dobaczewski, S. Frauendorf, W. Nazarewicz, J. C. Pei, F. R. Xu and N. Nikolov, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 092501.
- [74] M. Alimohammadi and H. Hassanabadi, *Int. J. Mod. Phys. E.* **26** (2017) 1650193.
- [75] M. Baranger and K. Kumar, *Nucl. Phys. A* **122** (1968) 241.
- [76] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P.P. Raychev, and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **584**, (2004) 40.
- [77] I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E* **23**, (2014) 1450053.
- [78] I. Boztosun, and M. Karokoc, *Chin. Phys. Lett* **24** (2007) 3028.
- [79] J. Meyer-ter-Vehn, *Nucl. Phys. A* **249** (1975) 111.
- [80] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear structure : Nuclear Deformations*, Vol. II (World Scientific, Singapore, 1999).
- [81] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588**, (2004) 172.
- [82] R. L. Greene, and C. Aldrich, *Phys. Rev. A* **14** (1976) 2363.

- [83] S. H. Dong, W. C. Qiang, G.H. Sun and V. B. Bezerra, *J. Phys. A* **40** (2007) 10535.
- [84] G. F. Wei, S. H. Dong, and V. B. Bezerra, *Int. J. Mod. Phys. A* **24** (2009) 161.
- [85] S. H. Dong and X. Y. Gu, *J. Phys. Conf. Ser.* **96** (2008) 012109.
- [86] G. F. Wei and S. H. Dong, *Phys. Scr.* **81** (2010) 035009.
- [87] C. A. Downing, *J. Math. Phys.* **51** (2013) 072101.
- [88] C. Quesne, *Extended Nikiforov-Uvarov method, roots of polynomial solutions, and fonctionnal Bethe ansatz method*, **arXiv :1704.01406v1**
- [89] P. P. Fiziev, *J. Phys. A : Math. Theor.* **43** (2009) 035203.
- [90] Q. Dong, H. I. Garcia Hernandez, G. H. Sun, M. Toutounji and S. H. Dong, *Proc. R. Soc. A*, **476** (2020) 20200050.
- [91] A. M. Ishkhanyan, *Theor. Math. Phys.*, **188** (2016) 980.
- [92] A. Heydari, M. Hamzavi and M. Bigdeli, *Eur. Phys. J.* **133**, (2018) 322.
- [93] A. R. Edmonds, *Angular Momentum In Quantum Mechanics*(Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957).
- [94] E. R. Marshalek, *Theory of Collective Vibrations of Even-Even Spheroidal Nuclei*(Lawrence Radiation Lab, 1962).
- [95] <https://www.investissementmetaux.fr/platinum/>.
- [96] S. Haman Adama, D. Nga Ongodo, A. Zarma, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **12** (2021) 2150105.
- [97] G. A. Marid, N. T. Jarallah and H. M. Abduljabbar, *Results in Phys.* **11** (2018) 406.