

Université de Yaoundé I

Faculté des Sciences

Département de Physique

**Etude des états déformés des noyaux de platine à l'aide de la
mécanique quantique supersymétrique**

THÈSE

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat/PhD en Physique

Option: **Physique Nucléaire, Dosimétrie et Radioprotection**

Par

MAH TSILA Philippe

Matricule: 07W428

Master en Physique

Sous la direction de:

BEN-BOLIE Germain Hubert

Professeur

université de Yaoundé I



Laboratoire de Physique Nucléaire, Atomique, Moléculaire et Biophysique

Copyright ©MAH TSILA Philippe, philippetsila87@gmail.com

Année 2023



DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE
DOCTORAT/Ph.D

Nous, Professeurs **NJANDJOCK NOUCK Philippe**, **SAÏDOU**, **BOYOMO ONANA Marthe** et Professeur **OWONO OWONO Luc Calvin**, respectivement Examineurs et Président du jury de la thèse de Doctorat/Ph.D de Monsieur **MAH TSILA Philippe** Matricule **07W428**, préparée sous la direction du Professeur **BEN-BOLIE Germain Hubert**, intitulée : « **ETUDE DES ETATS DES DEFORMES DES NOYAUX DE PLATINE A L'AIDE DE LA MECANIQUE QUANTIQUE SUPERSYMETRIQUE** », soutenue le **Jeudi, 27 Avril 2023**, en vue de l'obtention du grade de Docteur/Ph.D en Physique, Spécialité **Physique des Rayonnements et Biophysique**, attestons que toutes les corrections demandées par le Jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé le **09 MAI 2023**

Examineurs

Pr. NJANDJOCK NOUCK Philippe Pr. SAÏDOU

Pr. BOYOMO ONANA Marthe

Le Président du Jury

Pr. OWONO OWONO Luc Calvin

Le Chef de Département de Physique



Professeur

Dédicace

Je dédie cette thèse :

À Dieu Tout Puissant Créateur du Ciel et de la Terre, qui m'a donné la santé, la sagesse et l'intelligence pour l'aboutissement de cette Thèse .

Remerciements

Je remercie chaleureusement mon Directeur de Thèse, le **Pr. BEN-BOLIE Germain Hubert**, chef de laboratoire de Physique Nucléaire de l'Université de Yaoundé I, pour ses conseils. Il a continué à pérenniser et à coordonner le bon fonctionnement des travaux de recherches dans le laboratoire. Son engagement et son abnégation pour la recherche ont contribué énormément à l'aboutissement de cette thèse. En dépit d'énormes tâches académiques et de ses multiples responsabilités dans l'encadrement de nombreux étudiants de Masters et de Doctorats, il a toujours trouvé le temps pour discuter avec moi, de répondre à mes sollicitations et à mes différentes questions. Je serai toujours reconnaissant à son endroit, car il a contribué énormément à la préparation, à l'aboutissement et à la finalisation de cette thèse.

J'exprime mes remerciements, **Dr. ELE ABIAMA Patrice, Maître de Recherche** qui, malgré ses différentes occupations au Ministère de la Recherche Scientifique. Ses conseils éclairés et ses expériences dans le domaine du nucléaire m'ont été très profitables. Je lui en suis très reconnaissant.

J'exprime ma profonde gratitude au **Pr. OWONO ATEBA Pierre**, Fondateur du Laboratoire de Physique Nucléaire, de l'Université de Yaoundé I.

Je remercie le **Pr. OWONO OWONO Luc Calvin** coordonnateur de l'URFD physique et applications, Vice-Recteur à l'Université de Yaoundé I, pour ses conseils.

J'exprime ma reconnaissance au **Pr. EKOBENA FOU DA Henri Paul**, Vice-Recteur à l'Université de Ngaoundéré.

Je remercie grandement le **Pr. NDJAKA Jean-Marie Bienvenu**, Chef de Département de Physique, et le **Pr. KOFANE Timoléon Crépin**, pour leurs conseils et encouragements dans la finalisation de cette Thèse.

Je remercie particulièrement : **Pr. SAÏDOU** et **Pr. BOYOMO ONANA Marthe**, pour leur encadrement.

Mes remerciements vont également à tous les Enseignants du Département de Physique, en particulier aux Professeurs : **NJANDJOCK NOUCK Philippe**, **HONA Jacques**, **TCHAWOUA Clément**, **WOAFO Paul**, **PEMHA ELKANA**, **BODO Bertrand**, **ENYEGUE A NYAM Françoise**, **ZEKENG Serge**, **VONDOU Débertini**, **FEWO Serge Ibrid**, **NANA ENGO Serge**, **DJUIDJE KENMOE Françoise**, **NANA NBENJO Roméo**, **MVOGO Alain**, **SIEWE SIEWE Martin** et aux Docteurs **MBINACK Clément**, **CHAMANI Roméo**, **ABDOURAHIMI**, **MELI'I Jorelle Larissa**.

Ma reconnaissance va tout particulièrement aussi au **Pr. EMA'A EMA'A Jean- Marie** pour son soutien remarquable et consistant dans l'aboutissement de mes travaux de recherches.

Je remercie également les Docteurs : **NGA ONGODO Dieudonné**, **TAKEMBO Clovis**,

NGOUBI Hénoek, ALI ZARMA, TAKOUKAM SOH Serge, ANEMENA ETOGA Emmanuel, OMON Yves, HAMADOU ISSA et TANKOU TAGNE Alain pour leurs conseils.

J'adresse mes plus sincères remerciements aux Honorables membres du jury de présoutenance et de soutenance, qui ont accepté de juger cette Thèse.

Je tiens à remercier très particulièrement tous les membres du Laboratoire de Physique Nucléaire pour leurs aides et assistances particulièrement, les doctorants MBIDA MBEMBE Serge, AKAMBA MBEMBE Bertrand, EBODE Fabien, ADJABA Jean Liboire, TJOCK-MBAGA Thomas, AWE Richard, KOYANG François, YIA ETOLO Hervé, AHMADOU KATARKALAH, SOULEY-MANOU HAMAN ADAMA et TAMIAN FOTSO Kévin, ATANGANA LIKENE AIME, NDJOBO JUSTICE, AWE RICHARD,.

À tous ceux qui ont contribué et participé de près ou de loin à la rédaction de cette Thèse et qui n'ont pas été cités, je leur adresse ma profonde reconnaissance.

Liste des Abréviations et Symboles

CCG : Coefficients de Clebsch Gordan

MC : Modèle en Couche

MCS : Modèle en Couche Sphérique

Pm : Picomètre

fm : femtomètre

E_l : Energie de liaison

Pt : Platine

CPS : Critical Point Symmetries

MeV : Méga électron Volt

E_c : Energie cinétique du nucléide

$V(\beta, \gamma)$: Energie potentielle du nucléide

\hat{H} : Opérateur Hamiltonien

\hat{p} : Opérateur impulsion du mouvement

B : Masse totale du nucléide

n : Nombre quantique principal

l : Nombre quantique azimutal

j : Nombre quantique associé à la résultante du couplage entre le moment angulaire orbital

-
- s** : Moment angulaire de spin
- m** : Nombre quantique magnétique
- N** : Nombre de couches de l'Oscillateur Harmonique
- n_z : Nombre quantique principal selon l'axe de symétrie
- Λ : Projection du moment orbital \vec{l} sur l'axe de la symétrie
- n_ω : Nombre quantique secondaire
- L** : Nombre quantique cinétique
- a_v : Effet volumique
- a_c : Effet de repulsion coulombienne
- a_s : Effet surfacique
- a_p : Terme d'appariement
- a_a : Terme d'asymétrie
- PWS** : Potentiel de Woods-Saxon
- OH** : Oscillateur Harmonique
- β : Paramètre qui mesure l'étendue de la déformation
- γ : Paramètre qui montre l'éloignement par rapport à la symétrie axiale
- k** : Paramètre de déformation du potentiel
- $P_n^{(\alpha,\beta)}$: Polynôme de Jacobi
- $H_{n\bar{\gamma}}$: Polynôme de Hermite
- $D(\theta_i)$: Composante angulaire de la fonction d'onde appelée fonction de Wigner

$\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$: Fonction d'onde

θ_i : Angle d'Euler : $i = 1, 2, 3$

\hat{Q}_k^2 : Composantes du moment angulaire

\mathbf{k} : Représente les trois axes de coordonnées : $k = 1, 2, 3$

\mathbf{u} : Unité de masse atomique

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Liste des Abréviations	iv
Table des matières	vii
Liste des Figures	x
Abstract	xii
Résumé	xiii
Abstract	xiv
Résumé	xv
Chapitre I Revue de la littérature sur la structure nucléaire	4
I.1 Introduction	4
I.2 Noyau atomique	4
I.2.1 Historique	4
I.2.2 Présentation de l'atome	5
I.2.3 Caractéristiques de l'atome	5
I.3 Généralités sur le noyau	6
I.3.1 Composants du noyau	6
I.3.2 Masse et énergie	6
I.3.3 Défaut de masse atomique : Δm	7
I.3.4 Energie de liaison ou énergie de cohésion : E_l	8
I.3.5 Energie de liaison par nucléon	9
I.4 Différents types de radioactivités	10
I.5 Platine	12
I.5.1 Historique du platine	12
I.5.2 Utilisation du platine	12
I.5.3 Isotopes du platine	13
I.5.4 Importance du platine dans l'industrie	13

I.5.5	Effets du platine sur la santé	13
I.5.6	Effets du platine sur l'environnement	14
I.6	Description des modèles nucléaires	16
I.6.1	Modèle de la goutte liquide	16
I.6.2	Modèle en couches	18
I.7	Déformations et rotations dans les noyaux atomiques	19
I.7.1	Déformations	19
I.7.2	Déformations nucléaires	20
I.7.3	Forces subies par le noyau atomique	20
I.7.4	Rotation	20
I.7.5	Mouvement collectif dans les noyaux	21
I.7.6	Mode vibrationnel	21
I.7.7	Mode rotationnel	22
I.7.8	Approximations du champ moyen	25
I.7.9	Notions de base du modèle en couches sphérique	25
I.7.10	Modèle en couches sphériques	25
I.7.11	Déformation triaxiale	28
I.7.12	Modèle en couche déforme ou modèle de Nilsson	32
I.8	Quelques travaux antérieurs sur les noyaux triaxiaux	35
I.9	Conclusion	36
Chapitre II Matériel et méthode		38
II.1	Introduction	38
II.2	Introduction	38
II.3	Mesure expérimentale de l'énergie de transition par spectroscopie gamma	39
II.4	Présentation du Hamiltonien de Bohr et les solutions des différentes parties de l'équation de Schrödinger	44
II.4.1	Équation de Schrödinger	45
II.5	Potentiels nucléaires	45
II.5.1	Mouvement collectif dans les noyaux	46
II.6	Bases de la mécanique quantique super symétrique	47
II.7	Équations générales des mouvements régissant les déformations et les interactions nucléaires	50
II.8	Équations des déformations nucléaires	50
II.9	Techniques de séparations des mouvements de la déformation et des interactions	53
II.9.1	Méthode de séparation des mouvements de déformations des nucléides	53
II.9.2	Solution de la partie γ	56
II.9.3	Solution de la partie β	56
II.10	Moment de transition quadrupolaire électrique	62
II.10.1	Moment de transition quadrupolaire nucléaire	62
II.11	Conclusion	65

Chapitre III Résultats et discussion	66
III.1 Introduction	66
III.2 Présentation des résultats et discussion	66
III.2.1 Relation intra et inter-bande	68
III.2.2 Effet de l'étalonnage des énergies dans la bande γ	77
III.2.3 Densité de probabilité	81
III.3 Conclusion	84
Conclusion Générale	85
Appendix	86
Publication	88
Références Bibliographiques	89

Table des figures

Figure 1	L'atome dans le modèle de Bohr [50].	5
Figure 2	Défaut de masse d'un noyau atomique [51].	8
Figure 3	Énergie de liaison par nucléon [53].	9
Figure 4	Carte des noyaux classées en fonction de leur nombre de neutrons (en abscisse), leur nombre de protons (en ordonnée) et de leurs instabilités [54].	10
Figure 5	Image du platine [57].	12
Figure 6	Énergie de liaison par nucléon, d'après la formule semi-empirique de Bethe-Weizsäcker, avec la contribution des différents termes [64]	19
Figure 7	Les différentes formes correspondant aux différents ordres multipolaires [71].	22
Figure 8	a) Forme quadrupolaire d'un noyau pour le cas de symétrie axiale ($\gamma = 0$) en haut de la figure, et exemple de la déformation triaxiale ($0^\circ < \gamma < 60^\circ$) présenté en bas de cette figure. b) Évolution de la forme nucléaire dans le plan (β, γ) . Quand γ n'est pas un multiple de 60° le noyau prend une forme triaxiale (la déformation non-axiale) [72].	23
Figure 9	Niveaux d'énergie selon le modèle en couches [76].	27
Figure 10	Noyau triaxial dans son référentiel intrinsèque où sont représentés l'angle θ entre le vecteur rotation $\vec{\omega}$ et l'axe Ox , et l'angle α entre les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ et moment angulaire total \vec{J} [83].	29
Figure 11	Les trois différents types de potentiel [9]	30
Figure 12	Niveaux d'énergie d'une particule individuelle avec/sans le couplage spin-orbite [9]	32
Figure 13	Diagramme de Nilsson pour la région, $0 \leq N \leq 50$ la fréquence de l'oscillateur $\hbar\omega_0 = 41A^{-1/3}$ est donné en fonction de ϵ [18]	34
Figure 14	De la production à la détection.	39
Figure 15	Matrice d'identification ΔE avant la cible.	40
Figure 16	Identification après la cible	41
Figure 17	Effet Doppler corrigé suivant l'angle de correction sur la raie à 885keV du ^{32}Mg	42
Figure 18	Spectre γ ^{32}Mg pour toutes les réactions, inélastique, (d, p) et (d, Helium)	43
Figure 19	Comparaison des premiers états du ^{34}Si avec différents calculs	43
Figure 20	Gamma en coïncidence avec 2^+	44

Figure 21	Representation du potentiel combiné de Hulthen et de Kratzer écranté pour les isotopes de platines $^{192,194,196}\text{Pt}$	77
Figure 22	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et des données expérimentales pour le ^{192}Pt	79
Figure 23	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et des données expérimentales pour le ^{194}Pt	80
Figure 24	Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et l'expérimentale pour le ^{196}Pt	81
Figure 25	Variation de la densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{192}Pt	82
Figure 26	Densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{194}Pt	83
Figure 27	Variation de la densité de probabilité de distribution $ \psi_0(\beta) ^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{196}Pt	84

Abstract

In this Thesis, we study Bohr Hamiltonian model describing the different nuclear interactions, motions and deformations that the atomic nucleus undergoes. This model is solved by relying on the Super symmetric quantum mechanics method and using the Hulthen plus Sreened Kratzer potential to determine the energy of the spectrum and the wave function. We apply this model to the isotopes of $^{192,194,196}\text{Pt}$. Indeed, by using the technique of separating variables, we end up with two equations, one of which is a function of the parameter which represents the rotational motion and the equation of the vibrational motion which is a function of the parameter γ . In order to determine the energy and wave function of the system, the equation containing the β part is solved using the Super symmetric quantum method. Normalized energy ratios, probabilities of electric B(E2) transitions and quadrupole moments are calculated for each isotope of platinum . The calculations of the energies in the ground state band, the β and γ band are obtained using the selection rules imposed by the Clebsch-Gordan coefficients, i.e., the allowed transitions are those which satisfy the equation $\Delta\alpha = \pm 2$. For all the platinum isotopes it appears that the results obtained by our model are found to be in good agreement with experimental data and improved in comparison with predictions from Morse and killingbeck plus Morse potential. This shows that our model is better suited for platinum. For the wave function, we also note that for each energy level, the peak of the probability density distribution increases as the angular momentum quantum number increases. Finally, the various results obtained are mostly in good agreement with the experimental data.

Keywords : Bohr Hamiltonian, Hulthen plus Screened Kratzer potential, triaxial nuclei, Super symmetric quantum mechanics, energy spectra, probabilities of transitions B(E2).

Résumé

Dans cette Thèse, nous étudions le modèle du Hamiltonien de Bohr pour décrire les différentes interactions nucléaires, les mouvements et les déformations que subit le noyau atomique. Ce modèle est résolu en s'appuyant sur la méthode de la mécanique quantique super symétrique et en utilisant le potentiel combiné de Hulthen et de Kratzer écranté pour déterminer l'énergie du spectre et la fonction d'onde. Nous appliquons ce modèle aux isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$. Ainsi, en utilisant la technique de séparation des variables, on aboutit à deux équations dont l'une est fonction du paramètre γ qui représente le mouvement de rotation et l'équation du mouvement de vibration qui est fonction du paramètre β . Afin de déterminer l'énergie et la fonction d'onde du système, l'équation contenant la partie β a été résolue en utilisant la méthode de la mécanique quantique super symétrique. Les rapports des énergies normalisés, les probabilités de transitions électriques B(E2) et les moments quadrupôlaire ont été calculés pour chaque isotope de platine. Les calculs des énergies dans la bande de l'état fondamental, la bande β et γ ont été obtenus en utilisant les règles de sélection imposées par les coefficients de Clebsch-Gordan, c'est-à-dire que, les transitions permises sont celles qui vérifient l'équation $\Delta\alpha = \pm 2$. Pour tous les isotopes de platines, il apparaît que les résultats obtenus par notre modèle sont plus proches des résultats expérimentaux que ceux des modèles de Killingberg combiné Morse et Morse (2010). Ce qui montre que notre modèle est mieux adapté pour le platine. Pour la fonction d'onde, on note également que pour chaque niveau d'énergie, le pic de la distribution de densité de probabilité augmente lorsque le nombre quantique du moment angulaire augmente. Enfin, les différents résultats obtenus sont pour la plupart des cas en bon accord avec les données expérimentales.

Mots clés : Hamiltonien de Bohr, Potentiel combiné de Hulthen et de Kratzer écranté, méthode de la mécanique quantique super symétrique, noyaux triaxiaux, probabilité de transition B(E2).

Abstract

Making autonomous devices

Keywords : Stability ; Stochastic p-bifurcation ; Stochastic resonance ; Probability ; Fractional derivative ; Analog circuit.

Résumé

Rendre des dispositifs autonomes en termes d'énergie correspond bien

Mots clés : Stabilité ; Bifurcation phénoménologique ; Résonance stochastique ; Probabilité ; Dérivée fractionnelle ; Circuit analogique.

Introduction Générale

Dès le début du XX^e siècle, des preuves irréfutables ont été apportées pour dire que la matière pouvait s'expliquer à partir des atomes. Ces atomes sont constitués d'un noyau central et des électrons [1]. En 1911, Ernest Rutherford qui peut être considéré comme l'un des pères de la physique nucléaire, a découvert l'existence du noyau atomique grâce à l'expérience de Rutherford menée par Hans Geiger et Ernest Marsden en 1909, qui démontre l'existence d'une forte densité de charges positives au centre de l'atome, contrairement aux théories de type pudding de l'époque [2]. En 1919, il prouve que des noyaux sont composés de noyaux d'hydrogène et découvre ainsi le proton. En 1932, James Chadwick (Assistant de Rutherford) découvre le neutron. Ainsi, on sait que les noyaux sont composés de protons et de neutrons [3].

Le modèle en couches est un modèle de structure nucléaire comparable à bien des égards au modèle planétaire de l'atome. Il constitue la pierre angulaire de la physique nucléaire en ce sens que son ambition est de rendre compte de la structure des noyaux en terme microscopique, c'est-à-dire à l'aide des propriétés individuelles de ses constituants. Sa démarche, pour contourner le problème à N corps, consiste à recourir, dans un premier temps, à l'approximation dite du potentiel moyen en espérant traiter ensuite toutes les interactions résiduelles des nucléons comme des perturbations.

Tout au long du XX^e siècle, les physiciens ont développé différents modèles théoriques permettant de modéliser les mouvements des nucléons dans le noyau. Mais chacun de ces modèles est valable pour expliquer certaines propriétés du noyau atomique. La recherche qui s'en est suivie a permis de modéliser le noyau comme un fluide constitué de nucléons confinés par l'interaction forte dans un volume fini de l'espace. Par exemple l'un des premiers modèles du noyau, proposé par Weizsäcker en 1935, est celui de la goutte liquide. Le noyau est assimilé à un fluide quantique constitué de nucléons (protons et neutrons)[4]. Le modèle de la goutte liquide offre une bonne description des masses des atomes connus. Ce modèle permet aussi d'expliquer les réactions de fission des noyaux lourds [5], interprétée alors comme le mouvement collectif des nucléons au sein du noyau causé par la répulsion coulombienne entre protons et aboutissant

à la scission si la chaleur de réaction Q devient positive. L'étude des données nucléaires, qui devenaient plus nombreuses et plus précises, confirma l'évidence d'une stabilité accrue de certains noyaux possédant des nombres de neutrons et de protons appartenant à des séquences bien déterminées (les nombres magiques 2, 8, 20, 28, 50, 82 et 126). L'explication donnée par le modèle de particules quantiques indépendantes possédant un couplage spin-orbite important, le modèle en couches [6, 7], a permis de comprendre ces séquences, ainsi que la majorité des spins des noyaux connus jusqu'alors [8]. Cependant, de nombreuses données expérimentales ne pouvaient s'expliquer par ce modèle en couches de particules individuelles, mais étaient comprises comme des phénomènes d'ensemble du noyau des phénomènes collectifs. C'était en particulier le cas de certaines résonances de hautes énergies (les résonances géantes) découvertes par Baldwin et Klaiber [9], et interprétées comme des vibrations dipolaires par Goldhaber et Teller [10], vibrations collectives des neutrons et des protons en opposition de phase. Parmi les données expérimentales mettant en défaut le modèle en couches figurait aussi la mise en évidence de moments quadripolaires dans certains noyaux non magiques, impliquant une déformation importante [11]. On peut ajouter enfin certains états du spectre nucléaire, présentant de fortes analogies avec des modes de vibration ou de rotation du noyau dans sa totalité [12, 13]. La symétrie $E(5)$ [14] est conçue pour décrire la transition de phase de second ordre entre des noyaux sphériques, tandis que la transition de phase de premier ordre entre les noyaux rotatifs déformés à déformations vibrationnelles et à symétrie axiale est décrite par la symétrie $X(5)$ [15, 16]. Cette description est faite à l'aide d'un hamiltonien connu sous le nom de hamiltonien de Bohr ou hamiltonien collectif qui utilise deux variables intrinsèques β et γ avec les trois angles d'Euler (θ, φ, ϕ). β mesure l'écart par rapport à la sphéricité du noyau, tandis que γ spécifie la déformation axiale. Récemment, les solutions analytiques de Iachello [17,18] ont donné un nouvel élan à l'hamiltonien de Bohr, puisqu'elles sont considérées comme des exemples de symétries de points critiques [19]. Ces symétries sont liées aux transitions de phase de forme dans la structure nucléaire. A titre d'illustration, les symétries appelées $Y(5)$ [20] et $Z(5)$ [21], sont liées à la transition de formes axiales à triaxiales et de formes allongées à oblates. L'étude des solutions du hamiltonien de Bohr devrait en fait nous aider à mieux comprendre les transitions de phase de forme et la triaxialité dans les noyaux ainsi que les mécanismes physiques des problèmes associés. Dans ce contexte, une attention particulière est consacrée au développement des solutions analytiques du hamiltonien de Bohr avec différents potentiels pour étudier les transitions de forme des noyaux.

Pour la variable β , certains potentiels réguliers utilisés sont : potentiel de l'oscillateur harmonique [22], potentiels de Coulomb et de Kratzer [23], potentiel de Davidson [24, 25], potentiel de Killingbeck [26, 27], potentiel quartique [28], potentiel sextique [29 - 32], potentiel puits carré [17], potentiel puits fini [33], potentiel de Hülthen [34], potentiel de Manning-Rosen [35,36], potentiel de Eckart [37], potentiel de Morse [38, 39], potentiel de Woods-Saxon [40], potentiel de Killingbeck plus potentiel de Morse [41]. La déformation quadrupolaire, la plus courante parmi les noyaux déformés, est liée aux probabilités de transitions quadripolaires électriques B(E2) entre les états excités, constituant des mesures directes de la collectivité. Pour une forme triaxiale, la surface des noyaux oscillent uniformément sur la coordonnée γ de la forme allongée à la forme oblique [42, 43]. Il est désormais d'usage d'utiliser le potentiel de l'oscillateur harmonique ayant un minimum d'angle autour de $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Notre étude consiste à décrire le comportement des noyaux triaxiaux en utilisant le potentiel couplé de Hulthen et de Kratzer écranté. La méthode de la mécanique quantique super symétrique est utilisée pour déterminer le spectre d'énergie et la fonction d'onde correspondante. Les rapports des énergies normalisés et la probabilité de transition quadripolaire électrique B(E2) des isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ sont calculés et comparés aux données expérimentales.

Dans ce travail, il est question d'utiliser le modèle du Hamiltonien de Bohr en utilisant le potentiel combiné de Hulthen et de Kratzer écranté en s'appuyant sur la méthode de la mécanique quantique super symétrique. Ce modèle est utilisé sur les isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$. Dans le but de déterminer l'énergie du spectre, la fonction d'onde ainsi que la probabilité de transition électrique B(E2). Ce travail est organisé en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la revue de la littérature sur la structure nucléaire.

Le deuxième chapitre présente le traitement quantique des transitions d'énergie dans le noyau.

Le troisième chapitre quant à lui présente les résultats du modèle et discussion. Ce travail s'achève par une conclusion générale suivi des perspectives qui peuvent en découler.

REVUE DE LA LITTÉRATURE SUR LA STRUCTURE NUCLÉAIRE

I.1 Introduction

La notion de structure nucléaire permet de décrire le mode d'arrangement des nucléons dans les noyaux et vise à établir des lois et des principes afin de pouvoir construire des modèles à caractère prédictif. Dans ce premier chapitre, la structure du noyau atomique dans ses détails est présentée ainsi que les modèles nucléaires utilisés afin d'expliquer les états d'énergies du noyau atomique et quelques unes de ces déformations. Par la suite, les forces nucléaires, ses caractéristiques et les aspects énergétiques mis en jeu dans le noyau sont ressortis.

I.2 Noyau atomique

I.2.1 Historique

En 1897, Thomson a montré que l'atome n'est pas une particule élémentaire mais qu'il contient lui-même des particules négatives, appelées électrons. Mais en 1909, Geiger et Marsden [47] bombardent une fine feuille d'or avec des particules alpha (noyau de l'atome d'hélium). La majorité des particules traverse la feuille d'or en subissant une légère déviation, mais certaines sont rejetées en arrière. Deux années plus tard, Rutherford arrive à la conclusion que ce phénomène ne peut se produire que si la charge positive est concentrée dans une petite partie centrale de l'atome, appelée noyau atomique, dont la taille est de l'ordre de 10^{-14} m : l'atome est en grande partie formé de vide [48].

Au cours de l'année 1931, le physicien Chadwick a prouvé l'existence d'une particule neutre. Il a découvert aussi les propriétés de cette particule qu'il nomme *neutron*. Il a déclaré que le noyau atomique est constitué des deux types de particules : les protons et les neutrons. En 1970,

le physicien Gell-Mann a prouvé l'existence des petites particules qui entrent dans la constitution des protons et des neutrons. Il les appelle les quarks. Le noyau atomique est donc constitué des nucléons (formés de Z protons et de N neutrons) à l'intérieur desquels, on y trouve de petites particules appelées quarks [49].

I.2.2 Présentation de l'atome

Les atomes sont des particules qui constituent la matière. Au centre de l'atome, se trouve un noyau, composé de neutrons et de protons autour duquel gravitent les particules en mouvement très rapide, les électrons. Dans un atome, il y a autant de protons que d'électrons. Le nombre de protons est le numéro atomique Z . La somme des protons et des neutrons est le nombre de masse A . Chaque atome est défini par son numéro atomique Z , qui correspond au nombre de protons présents dans le noyau.

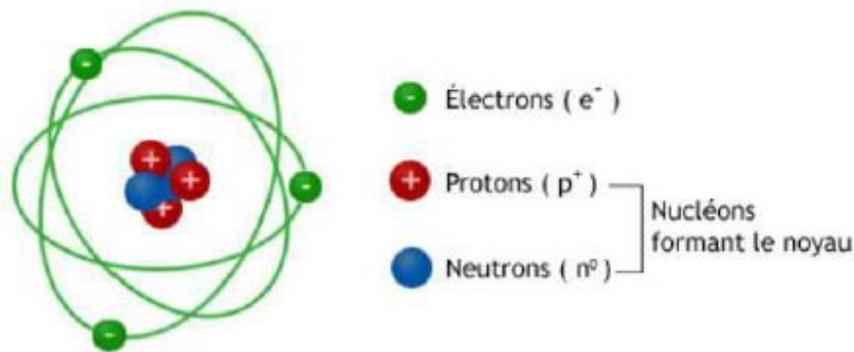


FIGURE 1 – L'atome dans le modèle de Bohr [50].

I.2.3 Caractéristiques de l'atome

L'atome est composé d'un nuage électronique de l'ordre de 100 pm (10^{-10} m ou 1 Å) ainsi que d'un noyau de 10^3 pm soit 10^{-15} m. Le noyau se compose de Z protons et de N neutrons. Le neutron et le proton, de masse à peu près égales, représentent 2 états quantiques d'une même particule fondamentale : le nucléon.

I.3 Généralités sur le noyau

I.3.1 Composants du noyau

Le noyau est constitué de proton et de neutron. Les différents noyaux ou nucléides se distinguent donc par le nombre de protons Z et de neutrons N qui les constituent. Le nombre de protons indique l'élément chimique du noyau considéré. La manière la plus commune de représenter un noyau particulier est ${}^A_Z X_N$, souvent abrégée ${}^A X$, où A est le nombre de masse ($A = Z + N$) et X l'élément chimique. Pour chaque élément, le nombre de neutrons contenu dans le noyau peut varier. Les différents noyaux ainsi formés sont appelés isotopes de l'élément. Rappelons quelques définitions de base :

▷ Nucleide ou nuclide :

Ensemble d'atomes ayant des noyaux identiques . Il est représenté par ${}^A_Z X$, et déterminé par la structure de son noyau : N et Z .

A : Nombre de masse du noyau atomique,

Z : Nombre de charge ou nombre de protons du noyau atomique,

X : Symbole de l'élément chimique correspondant.

Exemples : ${}^{14}_6 C$; ${}^{14}_7 N$.

▷ Isotope :

On parle de noyaux isotopes quand ils ont même nombre Z de protons, mais de nombre de masses A différent. Ils diffèrent par leur nombre de neutrons N .

Exemples : ${}^{12}_6 C$; ${}^{13}_6 C$; ${}^{14}_6 C$

▷ Isobare :

On parle de nucléides isobares lorsqu'ils ont le même nombre de masse A mais de nombre de charges Z différentes.

Exemples : ${}^{14}_6 C$; ${}^{14}_7 N$ et ${}^{14}_8 O$.

▷ Isotone : Ce sont des noyaux qui ont même nombre de neutrons N mais de numéro atomique Z différent.

Exemples : ${}^{15}_7 N$ et ${}^{16}_8 O$.

I.3.2 Masse et énergie

▷ Unité de masse atomique : u.m.a. ou u.

La masse d'un atome peut être exprimée en kilogramme. Mais il faudra manipuler des nombres très petits, car elle est de l'ordre de 10^{-27} kg. C'est pour cette raison qu'une autre unité de masse est utilisée. L'unité de masse atomique est donc égale à un douzième de la masse d'un atome de l'isotope 12 de l'élément carbone.

Enumérons ici quelques valeurs relatives aux unités du système international des constituants du noyau :

- ▷ Unité de masse atomique : $1u = 1,66054 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$,
- ▷ Masse de l'électron : $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg} = 5,4858 \times 10^{-4} u = 0,511 \text{ MeV}/c^2$,
- ▷ Masse de proton : $m_p = 1,67264 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,007276 u = 938,28 \text{ MeV}/c^2$,
- ▷ Masse de neutron : $m_n = 1,675 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1,008665 u = 939,57 \text{ MeV}/c^2$,
- ▷ La célérité de la lumière dans le vide c est de $3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

I.3.3 Défaut de masse atomique : Δm

Dans un noyau atomique, on ne trouve que de protons et de neutrons. Et donc la masse d'un noyau atomique devrait être la somme des masses de protons et de neutrons qui le constituent. L'expérience montre que la masse d'un nucléide au repos donné est inférieure à la somme de masses des nucléons séparés qui le constitue. C'est-à-dire, lors d'une décomposition d'un noyau ${}^A_Z X$, de masse m_X , en ses constituants, on a remarqué que :



$$m_X < Zm_p + Nm_n$$

La différence entre la somme des masses des nucléons séparés au repos (sans interaction) par la masse d'un nucléide au repos représente le défaut de masse atomique. La figure 2 représente le défaut de masse d'un noyau. Si on veut utiliser un formalisme mathématique, pour un nucléide ${}^A_Z X$ donné, on peut exprimer le défaut de masse atomique, noté Δm , par la relation :

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_X,$$

avec Z : nombre de protons ;

m_p : masse de proton ;

$A - Z = N$: nombre de neutrons ;

m_n : masse de neutron,

m_X : masse du noyau au repos.

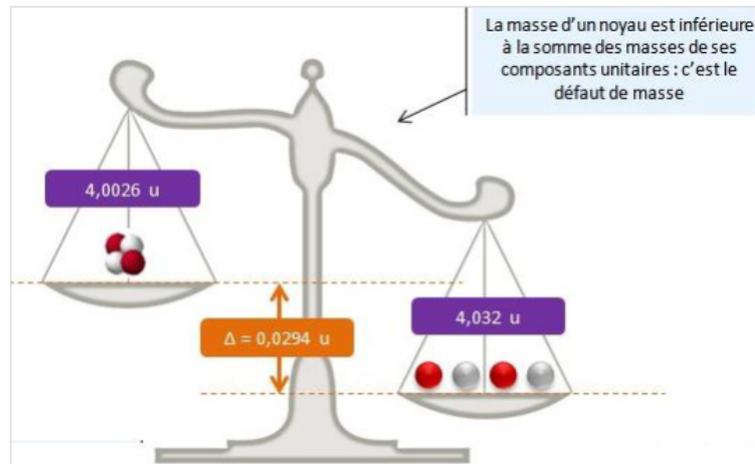


FIGURE 2 – Défaut de masse d'un noyau atomique [51].

I.3.4 Energie de liaison ou énergie de cohésion : E_l

Les nucléons (protons et neutrons) d'un noyau atomique sont confinés dans un très petit volume. Il existe une répulsion électrostatique intense entre les protons, car ils ont la même charge électrique ; ce qui devrait briser le noyau, mais ce n'est pas le cas. Car les nucléons s'attirent aussi par interaction forte. Cette interaction ne modifie pas la taille du noyau, mais elle assure tout simplement la liaison entre les nucléons qu'ils soient protons ou neutrons. Il est donc difficile de séparer les nucléons d'un noyau, car ils sont très liés grâce à l'existence de cette interaction. Pour pouvoir séparer les nucléons d'un noyau en ses constituants, il faut lui apporter une certaine énergie. Cette énergie est appelée Energie de liaison . L'énergie de liaison du noyau, notée E_l , est l'énergie qu'il faut fournir à un noyau pris au repos pour le dissocier en ses différents nucléons obtenus isolés, immobiles et sans interaction entre eux. C'est aussi l'énergie qu'il faut pour séparer les nucléons, pour casser la liaison entre les nucléons [52]. A partir d'une réaction de décomposition d'un noyau en ses différents constituants, on peut trouver l'expression de l'énergie de liaison d'un noyau. En effet soit la réaction de décomposition suivante :

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z) m_n - m_X.$$

Lors de cette réaction, l'énergie doit être conservée. Le noyau A_ZX a une énergie de masse $m_X c^2$ et aussi une énergie de liaison E_l . Les Z protons et les N neutrons séparés ont tout simplement une énergie de masse respectivement $Zm_p c^2$ et $(A - Z) m_n c^2$. En utilisant le principe de la conservation de l'énergie, on a :

$$m_X c^2 + E_l = Zm_p c^2 + (A - Z) m_n c^2$$

alors,

$$E_l = Zm_p c^2 + (A - Z) m_n c^2 - m_X c^2$$

$$E_l = [Zm_p + (A - Z) m_n - m_X] \cdot c^2$$

$$E_l = \Delta m c^2$$

Cette expression montre que, l'énergie de liaison d'un noyau, est une énergie de masse qui correspond au défaut de masse de ce noyau.

I.3.5 Énergie de liaison par nucléon

Chaque noyau a sa propre énergie de liaison. Plus l'énergie de liaison est élevée, plus le noyau est stable. Plus le noyau est lourd, plus l'énergie de liaison est élevée. Cependant, pour bien caractériser la stabilité d'un noyau, les physiciens ont introduit ce qu'on appelle énergie de liaison par nucléon. Comme son nom l'indique, l'énergie de liaison par nucléon, notée par E_N est donnée par la relation : $E_N = \frac{E_l}{A}$. Elle est exprimée en MeV / nucléon. La figure 3 représente l'énergie de liaison par nucléon.

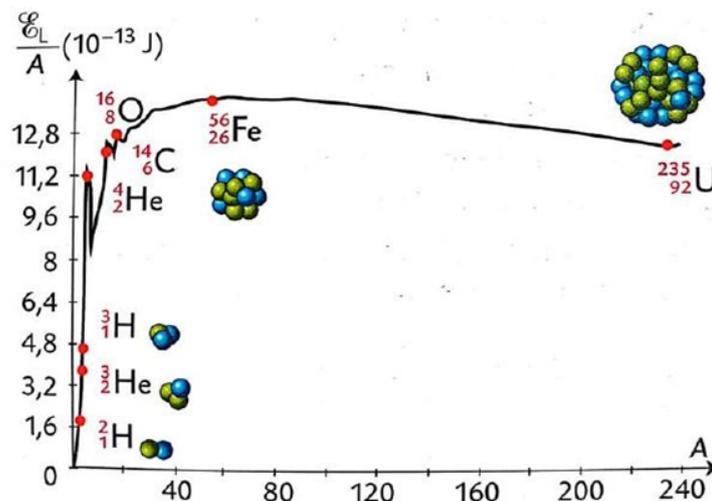


FIGURE 3 – Énergie de liaison par nucléon [53].

La figure 4 est une carte des nucléides ayant été observés, donnant la stabilité (noyaux stables en noir, instables en couleurs) des isotopes en fonction de leur nombre de neutrons en abscisse et de protons en ordonnée. La ligne noire formée par les noyaux stables s'appelle la vallée de stabilité. Cette vallée suit la diagonale pour laquelle le nombre de protons est égal au nombre de neutrons, jusqu'à environ $N = Z = 20$, puis s'en éloigne en restant en dessous. Les noyaux

instables sont indiqués par différentes couleurs selon le type de la radioactivité principale émise. Les noyaux au-dessus de la vallée de stabilité sont trop riches en protons. Ils se libèrent de cette contrainte soit par émission d'un ou plusieurs protons (isotopes rouges), soit par décroissance β^+ (en orange). Les noyaux sous la vallée de stabilité sont trop riches en neutrons. Ils se libèrent de cette contrainte soit en émettant un ou plusieurs neutrons (en violet), soit par décroissance β^- (en bleu). Les noyaux situés au bout de la vallée de stabilité sont instables car ils sont trop lourds. Dans ce cas, ils ont accès à d'autres modes de décroissance tel que la radioactivité α (en jaune), et la fission spontanée (en vert).

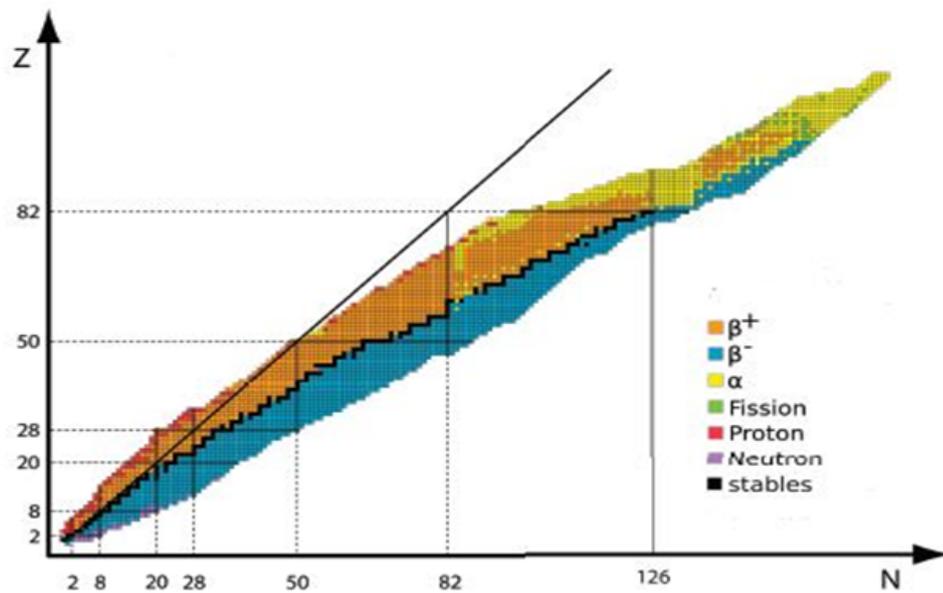


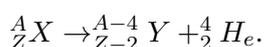
FIGURE 4 – Carte des noyaux classés en fonction de leur nombre de neutrons (en abscisse), leur nombre de protons (en ordonnée) et de leurs instabilités [54].

I.4 Différents types de radioactivités

Il existe trois types de radioactivité. La radioactivité alpha, la radioactivité bêta, (radioactivité bêta moins et la radioactivité bêta plus) et la radioactivité gamma.

▷ Radioactivité alpha (α)

C'est la transformation au cours de laquelle le noyau père donne un noyau fils en émettant un noyau d'hélium (${}^4_2\text{He}$) ou particule α . La réaction de désintégration s'écrit :



◇ Propriétés du rayonnement alpha

Le rayonnement alpha est composé de particules alpha. Ces particules sont fortement ionisantes, mais peu pénétrantes. Elles sont arrêtées par une feuille de papier ou une épaisseur de quelques centimètres d'air (environ 4 cm). Elles sont éjectées à grande vitesse de l'ordre de $2,0 \times 10^7 m/s$ et peuvent parcourir $50 \mu m$ de tissu humain.

▷ Radioactivité β^-

C'est la transformation au cours de laquelle le noyau père expulse un électron, c'est-à-dire qu'il y a une transformation d'un neutron en proton. L'émission de l'électron s'accompagne toujours par l'émission d'antineutrino. Cette réaction de désintégration s'écrit :



▷ Radioactivité β^+

C'est la transformation au cours de laquelle le noyau père expulse un électron positif, c'est-à-dire, qu'il y a une transformation d'un proton en neutron. L'émission de positron s'accompagne toujours par l'émission de neutrino.

La réaction de désintégration s'écrit :



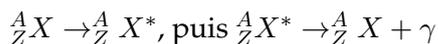
◇ Propriétés du rayonnement bêta

Le rayonnement bêta est constitué par des particules β^- ou de particules β^+ . Ces particules sont plus pénétrantes, mais moins ionisantes que les particules alpha. Elles sont arrêtées par un écran de plexiglas ou par une plaque d'aluminium de quelques centimètres (environ 3 cm). Elles sont émises à grande vitesse de l'ordre de $2,8 \times 10^8 m/s$ et sont dangereuses pour la peau.

▷ Radioactivité gamma

Au même titre que les atomes, les noyaux peuvent se trouver dans un état excité ${}^A_Z X^*$. La désexcitation d'un noyau ${}^A_Z X^*$ vers son état fondamental s'accompagne d'une émission des rayonnements gamma de charge et de masse nulle.

L'équation de cette désintégration est :



◇ Propriétés du rayonnement gamma

Il est constitué d'une onde électromagnétique de très courte longueur d'onde, de l'ordre de picomètre, et de photons qui se déplacent à la vitesse de la lumière et dont la masse est nulle. Ils ne sont pas directement ionisants, mais ils sont très pénétrants et peuvent traverser jusqu'à 20 centimètre de plomb.

I.5 Platine

Le platine est un métal blanc, pur et à la couleur de l'étain, malléable, ductile et plus dur que l'argent. On le trouve à l'état natif sous forme assez pure ou sous forme d'alliage avec d'autres métaux. Le platine est classé 57ème terme d'abondance parmi les éléments de la croûte terrestre. Il ne ternit pas dans l'air ou ne se dissout pas dans un acide unique. La plupart du platine utilisé aujourd'hui provient de l'Afrique du Sud et de la Russie.



FIGURE 5 – Image du platine [57].

I.5.1 Historique du platine

Le platine a été découvert par les explorateurs espagnols en Colombie et finalement ramené vers l'Europe en 1735. Lorsque le platine fut découvert, on le nomma platina qui signifie petit argent sous entendant une faible valeur [58].

I.5.2 Utilisation du platine

De nombreuses utilisations ont été trouvées pour ce métal plus précieux aux propriétés étonnantes. Le platine est utilisé dans des procédés chimiques en tant que catalyseur, comme dans le craquage du pétrole ou la fabrication d'acide. Cette industrie l'utilise également sous

forme de gaz métallique ou fin filet pour catalyser l'oxydation partielle de l'ammoniac. Le platine est également utilisé dans des applications dentaires et notamment dans les alliages pour dents en céramique.

I.5.3 Isotopes du platine

Le platine est un métal de transition appartenant à la sixième période de la classification des éléments atomiques et dont le numéro atomique est $Z = 78$. Il possède 37 isotopes connus, de nombre de masse variant entre 166 et 202. Parmi les isotopes du platine, cinq sont stables : ^{192}Pt , ^{194}Pt , ^{195}Pt , ^{196}Pt et ^{198}Pt .

- Il existe un seul et unique radioisotope du platine naturel. Celui-ci a un nombre de masse de 190 et est très peu présent sur terre soit 0,01%.

- Il existe de nombreux isotopes synthétiques du platine obtenus dans les laboratoires de recherche en radiochimie. Les isotopes plus légers que le platine naturel ont des nombres de masses allant de 166 à 189. Chacun de ces isotopes a deux modes de désintégration possibles : α ou β^+ . Plus l'isotope est léger, plus la désintégration α prédomine. Par contre plus l'on se rapproche des isotopes naturels, plus la désintégration β^+ s'accroît puis prédomine. Les isotopes plus lourds que les isotopes naturels du platine sont nettement moins nombreux et ont des nombres de masses compris entre 199 à 202. Ces isotopes se désintègrent principalement selon une radioactivité β^- .

I.5.4 Importance du platine dans l'industrie

Des catalyseurs au platine sont utilisés dans le raffinage et la transformation du pétrole, ainsi que dans d'autres processus de la production d'essence et de composés aromatiques dans l'industrie pétrochimique. On estime que l'industrie automobile consomme environ 60 % des ressources mondiales de platine.

I.5.5 Effets du platine sur la santé

Le platine est un métal noble. Sa concentration dans le sol, l'eau et l'air est minime. Dans certains endroits, principalement en Afrique du Sud, en Russie et aux Etats Unis, on peut trouver des gisements qui sont très riches en platine. Le platine est utilisé dans certains produits métalliques comme les électrodes et il peut être utilisé comme catalyseur pour un certain nombre

de réactions chimiques. Des dérivés du platine sont souvent utilisés comme médicaments pour soigner le cancer. Les effets du platine sur la santé dépendent fortement du type de liaisons formées, du niveau d'exposition et de l'immunité de la personne exposée. Le platine en tant que métal, n'est pas très dangereux, mais les sels de platine peuvent provoquer des effets importants sur la santé, tels que :

- l'altération de l'ADN,
- le cancer (leucémie, testicule, vessie),
- les réactions allergiques de la peau et des membranes muqueuses,
- les dommages aux organes tels que les intestins, les reins et la moelle osseuse,
- les problèmes d'audition.

Enfin, un des risques du platine est qu'il peut provoquer la potentialisation de la toxicité d'autres produits chimiques dangereux dans le corps.

I.5.6 Effets du platine sur l'environnement

Le platine utilisé dans les produits en métaux n'est pas connu pour provoquer beaucoup de problèmes environnementaux, mais on sait qu'il peut provoquer un état de santé grave dans l'environnement du lieu de travail. Le platine est émis dans l'air par l'intermédiaire des gaz d'échappement des voitures qui utilisent de l'essence au plomb. Par conséquent, le niveau du platine dans l'air peut être plus élevé dans certains endroits, par exemple les garages, les tunnels et sur les terrains des entreprises de transport routier. Les effets du platine sur l'environnement et les animaux n'ont pas encore fait l'objet de recherches intenses. La seule chose que l'on sait est que le platine s'accumule dans les racines des plantes après avoir été absorbé. On n'a pas encore établi clairement si le fait de manger les racines des plantes contenant du platine était nocif pour les animaux ou l'homme.

TABLE 1 – Présentation générale du platine [59].

Informations générales	
Symbole	Pt
Numéro atomique	78
Famille	Métaux de transition
Groupe (colonne)	10
Période (ligne)	6
Sous-couche électronique	d
Propriétés atomiques	
Masse atomique (isotope principal)	195.084 u
Rayon atomique	137.3 pm
Structure électronique	$(K)^2(L)^8(M)^{18}(N)^{32}(O)^{17}(P)^1$
Configuration électronique	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^9 6s^1$
Isotopes les plus stables	
Nombre de neutrons du ^{192}Pt	114
Nombre de neutrons du ^{194}Pt	116
Nombre de neutrons du ^{195}Pt	117
Nombre de neutrons du ^{196}Pt	118
Nombre de neutrons du ^{198}Pt	120
Propriétés cristallographiques	
Structure cristalline	Cubique à faces centrées
Dimension de la cellule unitaire	$a=392.40$ pm
Groupe d'espace	Fm3p
Propriétés physico-chimiques	
Densité	21.5 à 25° C
Electronégativité	2,28
Masse molaire atomique (g/mol)	195,1
Point de fusion	1 768° C
Point d'ébullition	3 825° C
Nombre d'oxydation	+2, +4
Volume molaire	$9.09 \text{ cm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ (293 K)
Résistivité électrique	$10.6 \mu\Omega \cdot \text{cm}$ (20° C)
Conductivité thermique	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

I.6 Description des modèles nucléaires

En physique nucléaire, il existe plusieurs modèles théoriques qui décrivent et interprètent les propriétés nucléaires des noyaux. à savoir :

- les modèles macroscopiques ou modèles collectifs décrivant le mouvement d'ensemble des nucléons à l'exemple du modèle de la goutte liquide.

- les modèles microscopiques ou d'excitation des particules individuelles qui prennent en compte le mouvement de chaque nucléon dans le noyau. Par exemple, le modèle en couches [60].

I.6.1 Modèle de la goutte liquide

Ce modèle est l'un des premiers modèles, basé sur la courte portée des forces nucléaires. Un nucléon donné interagit fortement avec ses voisins, comme les molécules dans une goutte liquide [61, 62]. Les propriétés du noyau peuvent être décrites à l'aide de son rayon, sa densité, et son énergie volumique [63]. Ce fluide est dit quantique, car la longueur d'onde des nucléons est grande par rapport à leurs tailles, permettant de négliger les notions de position et de trajectoire des nucléons. Dans ce modèle, une goutte liquide chargée, est caractérisé par son rayon et son énergie de liaison. Son volume est donc proportionnel au nombre de nucléons. Ces derniers n'interagissent qu'avec leurs voisins immédiats, d'où l'apparition du modèle de la goutte liquide décrit par la formule de Bethe et Von Weizscker [58] :

$$B(N, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_p \delta(A). \quad (\text{I.1})$$

▷ Terme volumique

L'expression $a_v A$, désigne le terme de volume, celui-ci est proportionnel au nombre de nucléons A . Ce terme rend compte de la force nucléaire, donc des interactions entre nucléons. Il considère chaque nucléon comme étant à l'intérieur du volume du noyau et à saturation des interactions avec les autres nucléons. On a

$$a_v \approx 15,41 \text{ MeV}. \quad (\text{I.2})$$

▷ terme surfacique

L'expression $a_s A^{2/3}$, est le terme de surface. Ce terme est une première correction au terme de volume. Il rend compte du fait que les nucléons se trouvant à la surface du noyau ont moins de voisins que ceux situés à l'intérieur du volume. Ils subissent donc moins d'interactions de la part des autres nucléons. Ce terme est donc proportionnel à la dimension de la surface du noyau, $A^{2/3}$, pour lequel, la correction apportée est de :

$$a_s \approx 16,87 \text{ MeV}. \quad (\text{I.3})$$

▷ terme coulombien

Ce terme décrit la baisse de stabilité engendrée par la répulsion coulombienne entre protons. En considérant que le noyau est une sphère ayant une charge uniformément répartie, chacun des Z protons interagit avec un champ électrostatique formé par les $Z - 1$ autres protons. Le terme est donc proportionnel à $Z(Z - 1)$. Ce champ diminue avec la dilution de la charge sur de plus grandes distances. Le terme est donc inversement proportionnel à la distance $A^{1/3}$. Le facteur de proportionnalité prend en compte les différents termes venant de la forme, de la charge élémentaire et vaut :

$$a_c \approx 0,70 \text{ MeV}, \quad (\text{I.4})$$

▷ terme d'asymétrie

Le terme d'asymétrie est noté $a_a \frac{(N-Z)^2}{A}$. Il est connu que les noyaux gagnent en stabilité lorsque les nombres de protons et de neutrons sont égaux. Ce terme est proportionnel à $(N - Z)^2$. Il vaut 0 pour les noyaux ayant $N = Z$. Il contribue à diminuer l'énergie de liaison lorsque le noyau s'écarte de $N = Z$, quand le nombre de protons ou le nombre de neutrons augmente. Pour traduire le fait que les noyaux stables les plus lourds s'écartent de $N = Z$, la contribution de ce terme doit diminuer avec l'augmentation de la masse. De ce fait, il est également inversement proportionnel à A . Un coefficient de proportionnalité est toutefois nécessaire et vaut :

$$a_a \approx 22,44 \text{ MeV}. \quad (\text{I.5})$$

▷ terme d'appariement

Un noyau ayant des nombres pairs de protons Z ou de neutrons N est plus stable qu'un

noyau ayant les deux impairs. Un noyau ayant N et Z pairs est plus stable qu'un noyau ayant A impair. Le dernier terme de l'équation de Bethe et Weizsäcker prend donc comme référence les noyaux avec A impair, pour lesquels la correction vaut 0. Le terme est positif, donc liant, pour les noyaux pairs-pairs, et négatif, donc répulsif, pour les noyaux impairs-impairs. L'amplitude de cette correction vaut :

$$a_p \approx 11,2 \text{ MeV}. \quad (\text{I.6})$$

Il permet ainsi de rendre compte de l'écart d'énergie de liaison entre noyaux pairs-pairs et impairs-impairs et de l'existence d'un plus grand nombre de noyaux pairs-pairs stables.

$$\delta(A) = \begin{cases} +\frac{1}{A^{1/2}}, & \text{pour } Z \text{ et } N \text{ pairs} \\ 0, & \text{pour } Z \text{ ou } N \text{ impair} \\ -\frac{1}{A^{1/2}}, & \text{pour } Z \text{ et } N \text{ impairs} \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

La formule semi-empirique de Bethe-Weizsäcker, constituée de trois termes d'origine classique et deux termes d'origine quantique est donnée par

$$B({}^A X_Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_p \delta(A). \quad (\text{I.8})$$

La figure 6 ci-dessous représente l'énergie de liaison par nucléon.

I.6.2 Modèle en couches

Le modèle en couches est un modèle de structure nucléaire comparable à bien des égards au modèle planétaire atomique. Il constitue la pierre angulaire de la physique nucléaire en ce sens que son ambition est de rendre compte de la structure des noyaux en termes microscopiques, c'est-à-dire à l'aide des propriétés individuelles de ses constituants. Dans ce modèle, chaque nucléon est défini dans un état donné et est représenté comme évoluant individuellement dans un potentiel moyen. Un nucléon est un fermion, objet quantique dont certaines valeurs en énergie seulement, sont accessibles. Il est défini par un ensemble de nombres quantiques : n , l , s , j et m :

- n est le nombre quantique principal définissant le nombre de noeuds dans la partie radiale

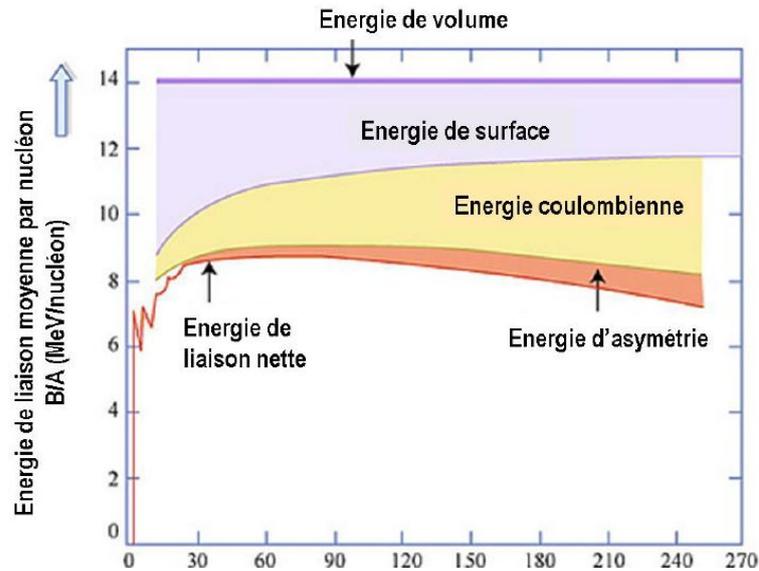


FIGURE 6 – Énergie de liaison par nucléon, d'après la formule semi-empirique de Bethe-Weizsäcker, avec la contribution des différents termes [64]

de la fonction d'onde.

- l nombre quantique azimutal,
- j est le nombre quantique associé à la résultante du couplage entre le moment angulaire orbital l et le moment angulaire de spin $s = 1/2$ et $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$.
- m est le nombre quantique magnétique $-l \leq m \leq l$.

En accord avec le principe de Pauli, seul un type de nucléon peut être dans un état quantique défini par les nombres quantiques n , l , j et m . À l'inverse du modèle de la goutte liquide où l'on considère les mouvements collectifs des nucléons comme responsables du comportement du noyau, tels que la rotation, la vibration ou la déformation de celui-ci, ce modèle s'intéresse au caractère individuel du nucléon, dans le but de reproduire des nombres magiques [64].

I.7 Déformations et rotations dans les noyaux atomiques

I.7.1 Déformations

L'existence de noyaux déformés a été soupçonnée dès les années 1930 par des mesures de moments magnétiques, puis électriques bien avant l'apparition du modèle en couches sphériques. L'abondance de noyaux déformés rend leur étude incontournable et constitue le point central de notre travail. La déformation peut être soit associée à l'état fondamental pour les noyaux situés

entre les nombres magiques sphériques, soit apparaître pour des états excités et/ou à haut moment angulaire.

I.7.2 Déformations nucléaires

La présence de déformations nucléaires est intimement liée au champ moyen. Les nucléons, comme les électrons, ont un moment angulaire j dont la projection sur l'axe de quantification vaut m . Pour une projection m élevée, la distribution est centrée dans le plan équatorial et donc aplatie. A l'inverse, la distribution est centrée dans le plan perpendiculaire et donc allongée pour m faible. La présence de ces orbitales à distribution anisotrope, encore appelées orbitales polarisantes, tend à déformer l'ensemble des nucléons, et donc le champ moyen.

I.7.3 Forces subies par le noyau atomique

Le noyau atomique étant constitué de diverses particules et certaines d'ailleurs chargées, est soumise à plusieurs forces parmi lesquelles nous dénombrons les trois principales qui sont :

⇒ Les forces électriques appliquées à toute particule ayant une charge électrique (proton), caractérisées par une interaction coulombienne d'une intensité relative de 10^{-2} N.

⇒ Les interactions fortes qui permettent de lier les quarks entre eux pour former les hadrons (protons, neutrons). Par contre les électrons, les photons et les neutrinos ne sont pas formés de quarks ; ils sont insensibles aux interactions fortes ; qui sont à leur tour attractives et s'opposent à la répulsion électrostatique. Elles permettent de confiner les protons dans le petit volume qu'est le noyau, d'une portée de 10^{-15} m, d'intensité relative de 1N.

⇒ Les interactions faibles qui agissent à l'intérieur des nucléons en transformant un nucléon en un autre avec émission d'une particule bêta, elles sont caractérisées par une intensité relative de 10^{-36} N et d'une portée de 10^{-18} m. La stabilité d'un noyau dépend de la compétition entre ces trois forces et au dessus d'un certain nombre de protons (92), les noyaux sont instables.

I.7.4 Rotation

Au cours d'une réaction nucléaire, le noyau peut acquérir un moment angulaire appelé couple en Mécanique Classique. Le noyau peut donc roter, à condition que des symétries soient brisées. Par contre, un noyau sphérique de spin et parité 0^+ ne peut tourner car toutes les orientations sont indiscernables. D'un point de vue purement macroscopique, la rotation favorise les

noyaux allongés : pour une même amplitude de déformation, le moment d'inertie d'un noyau aplati est plus faible que celui d'un noyau allongé.

I.7.5 Mouvement collectif dans les noyaux

Les observations expérimentales des énergies de niveaux excités, leurs spins et le rapport d'intensité, nous offrent la base pour l'investigation théorique de la structure nucléaire. Un grand nombre de propriétés observées des noyaux impliquent l'existence du mouvement d'ensemble des nucléons. Ces phénomènes sont appelés mouvements collectifs. Dans ce cas, il est plus approprié de les décrire en utilisant les coordonnées macroscopiques telles que la masse, le volume et les paramètres de déformation (β, γ) . Les excitations collectives sont représentées par deux types de mouvement :

- vibrations des noyaux (états à N photons, déformation dynamique axiale ou triaxiale, résonances géantes).

- rotations collectives autour de l'axe perpendiculaire à l'axe de symétrie du noyau (bande de rotation).

Ces deux types d'excitations collectives conduisent en général à des schémas de niveaux réguliers et à l'évolution dynamique de la forme du noyau. Ainsi, la présence d'un certain type d'excitation nous aide à déduire la forme du noyau.

I.7.6 Mode vibrationnel

Bohr a introduit une paramétrisation de la surface nucléaire qui est décrite par l'expression du rayon développé en harmoniques sphériques ci-dessous [70] :

$$R(\theta, \varphi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^*(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right). \quad (\text{I.9})$$

Où $R(\theta, \varphi, t)$ est la distance entre le centre du noyau et sa surface dépendant de la direction (θ, φ) à l'instant t ; le rayon d'équilibre R_0 correspond au rayon de la sphère ayant le même volume que le noyau déformé; les amplitudes dépendantes du temps $\alpha_{\lambda\mu}^*(t)$ sont les paramètres de la forme du noyau et servent ainsi de coordonnées collectives. Ils décrivent les vibrations de la surface nucléaire et $Y_{\lambda\mu}$ sont les harmoniques sphériques.

Les formes nucléaires correspondant aux différents ordres multipolaires sont représentées dans la figure ci-dessous :

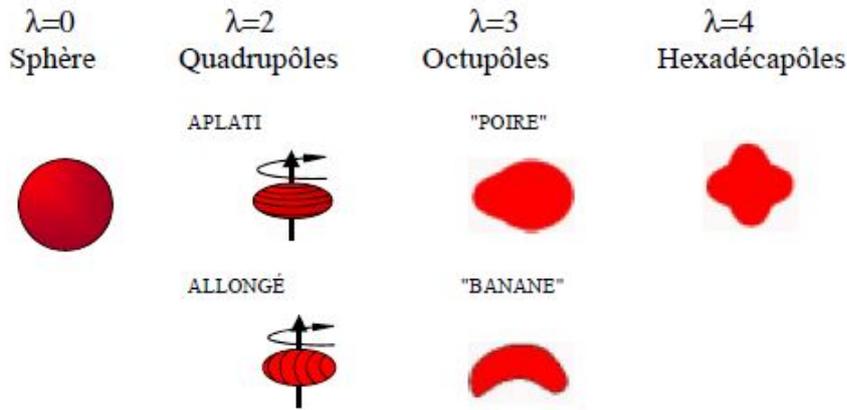


FIGURE 7 – Les différentes formes correspondant aux différents ordres multipolaires [71].

▷ le terme $\lambda = 0$, correspond à la variation du volume sans variation de la forme sphérique et donne naissance à la déformation monopolaire.

▷ le terme $\lambda = 1$, décrit la translation du système et correspond à la déformation dipolaire ; ce mode peut souvent être ignoré lors de l'étude de la forme des noyaux.

▷ le terme $\lambda = 2$, correspond à une déformation quadrupôlaire ; ce type de déformation caractérise la majorité des noyaux. Il sera développé plus en détails par la suite.

▷ le terme $\lambda = 3$, correspond à la déformation octupôlaire. Ce mode se manifeste à travers les bandes de parité négative.

▷ Et enfin, les termes $\lambda = 4$ correspondent à une déformation hexadécapolaire. Afin de se placer dans le référentiel lié au noyau, décrit par les angles d'Euler qui déterminent l'orientation des axes principaux par rapport au référentiel du laboratoire, un changement de variables doit être effectué. Dans une première approximation, on considère uniquement le terme d'ordre $\lambda = 2$ qui est le plus fréquent et qui correspond à une déformation quadrupôlaire.

I.7.7 Mode rotationnel

La rotation se traduit par la présence de moment angulaire suivant un axe donné. Dans le cas de la rotation collective, le noyau tourne globalement autour de cet axe de rotation. Il doit pour cela être déformé, car la mécanique quantique interdit une rotation autour d'un axe de

symétrie. Dans la plupart des cas, les noyaux ont la déformation quadrupolaire ($\lambda=2$) décrite par l'Eq.(I.8). Ainsi, il y a cinq paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$, $\mu=0, \pm 1, \pm 2$. Les paramètres de forme peuvent être exprimés par la transformation du système des coordonnées :

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = \sum_{\nu=-2}^2 \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} a_{\nu\mu'}^* D_{\mu\mu'}^{(\nu)}(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma). \quad (\text{I.10})$$

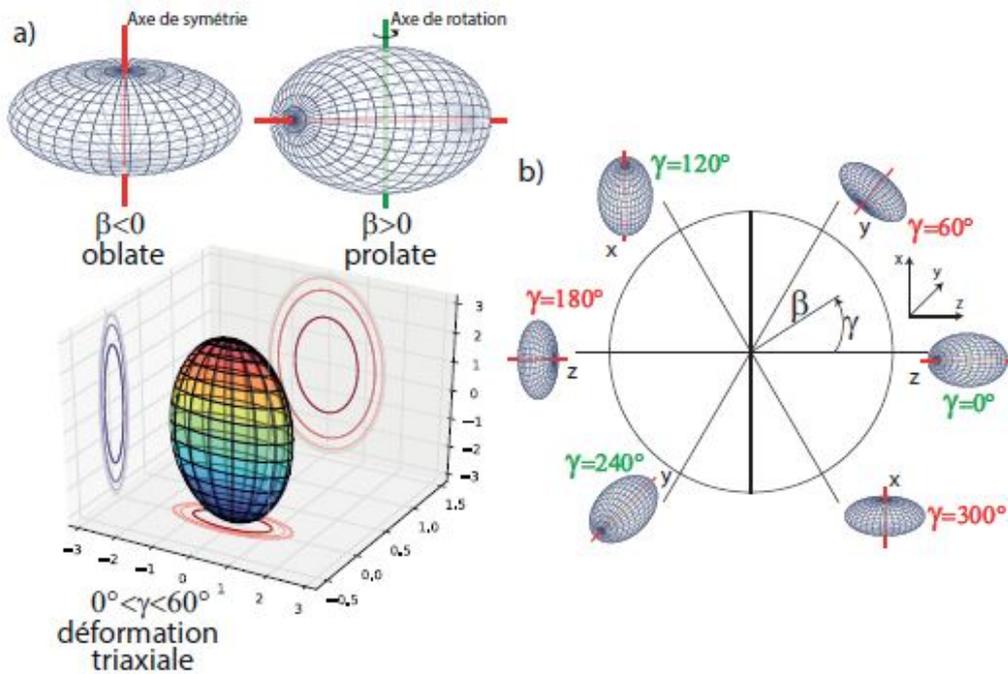


FIGURE 8 – a) Forme quadrupolaire d'un noyau pour le cas de symétrie axiale ($\gamma = 0$) en haut de la figure, et exemple de la déformation triaxiale ($0^\circ < \gamma < 60^\circ$) présenté en bas de cette figure. b) Évolution de la forme nucléaire dans le plan (β, γ) . Quand γ n'est pas un multiple de 60° le noyau prend une forme triaxiale (la déformation non-axiale) [72].

Les formes des noyaux sont définies par les valeurs de γ :

$\Rightarrow \gamma = 0^\circ$, l'axe de symétrie est le plus long, les noyaux déformés ont une déformation prolate, de forme allongée.

$\Rightarrow \gamma = 60^\circ$, l'axe de symétrie est le plus court, les noyaux ont une déformation oblate, de forme aplatie.

$\Rightarrow (0^\circ < \gamma < 60^\circ)$, pas de symétrie axiale, le noyau devient triaxial, ce qui signifie que ses trois axes principaux sont de longueurs différentes.

Les paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$ sont indépendants du temps dans le système de coordonnées

du corps fixe. Selon la forme du noyau, on peut réduire les paramètres de déformation nucléaire dans l'Eq.(I.9). Par exemple, pour le cas d'un noyau de symétrie axiale où la rotation collective est perpendiculaire à l'axe de symétrie intrinsèque, $\mu = 0$ et $\alpha_{\lambda 0}$ sont désignés par λ . Ainsi, la déformation quadripolaire positive $\beta > 0$ signifie que le rayon polaire est plus grand que le rayon équatorial (la forme prolata) et la déformation quadrupolaire correspond à la forme oblate $\beta < 0$ où le rayon équatorial est plus grand que le rayon polaire. Il est d'usage d'exprimer des déformations quadrupolaires dans un référentiel de corps fixe avec des axes 1, 2 et 3. Si les axes du système de coordonnées choisi sont orientés le long des axes principaux d'inertie du système à corps fixe, alors $a_{2,-1} = a_{2,1} = 0$, $a_{2,-2} = a_{2,2}$. Par conséquent, les coefficients non-nuls $a_{2,2}$ et $a_{2,0}$ sont suffisants pour décrire la forme du noyau. Ces coefficients sont souvent exprimés en termes de paramètres de Hill-Wheeler.

$$a_{20} = \beta \cos \gamma, \quad (\text{I.11})$$

et

$$a_{2,-2} = a_{22} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin \gamma. \quad (\text{I.12})$$

Où β représente l'amplitude de la déformation quadrupolaire. Le facteur $1/\sqrt{2}$ a été choisi de tel sorte que $\sum |\alpha_{\lambda\mu}| = \alpha_0 + 2\alpha_2^2 = \beta^2$. L'angle γ , dénommé paramètre de triaxialité, a été accepté comme étant la manière la plus pratique pour décrire la forme des noyaux. En utilisant les Eqs.(I.10 et I.11), la surface du noyau peut être décrite en fonction de β et γ comme :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \cos \gamma Y_{20}(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma (Y_{22}(\theta, \varphi) + Y_{2-2}(\theta, \varphi)) \right] \quad (\text{I.13})$$

En introduisant les expressions des harmoniques sphériques, l'Eq. (I.15) devient :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(\cos \gamma (3 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} \sin \gamma \sin^2 \theta \cos 2\varphi \right) \right] \quad (\text{I.14})$$

Dans cette formule, nous voyons que le paramètre β permet de mesurer l'étendue de la déformation et le paramètre γ montre l'éloignement par rapport à la symétrie axiale. La valeur négative de β indique que le noyau à la forme oblate et la valeur positive décrit la forme prolata, comme

illustré sur la figure 8.

I.7.8 Approximations du champ moyen

Dans cette section, nous présenterons le Modèle en Couches comme l'un des fameux modèles microscopiques. Le modèle en couches du noyau atomique a été développé entre 1948 et 1950 et a permis d'expliquer un grand nombre de propriétés structurales du noyau. Ce modèle, essentiellement quantique, assigne aux nucléons l'occupation d'états définis par quelques nombres entiers (appelés nombres quantiques). De nombreuses conséquences de cette hypothèse sur la structure des niveaux d'énergie des noyaux ont permis d'interpréter les observations expérimentales, par exemple les nombres magiques (c'est-à-dire 2, 8, 20, 28, 50, 82 et 126) de protons ou de neutrons constituant un noyau. L'existence de nombres magiques apparaît comme une preuve de l'existence des couches dans la structure nucléaire.

I.7.9 Notions de base du modèle en couches sphérique

Depuis 1950 et l'explication des nombres magiques [74], le modèle en couches est devenu un outil incontestable en physique nucléaire théorique. Il est basé sur une hypothèse selon laquelle les nucléons bougent indépendamment dans un potentiel, qui représente l'interaction moyenne avec les autres nucléons dans le noyau, en première approximation.

I.7.10 Modèle en couches sphériques

Le plus simple des modèles microscopiques est le modèle en couches sphériques basé sur le fait que les nucléons sont arrangés dans des couches ou des niveaux dans le noyau. Plusieurs propriétés nucléaires peuvent être interprétées, en supposant que les nucléons individuels se déplacent indépendamment dans un potentiel défini par l'interaction avec les autres nucléons.

$$\hat{H}\Psi(1, \dots, A) = E\Psi(1, \dots, A). \quad (\text{I.15})$$

l'Éq.(I.14) est développée sous la forme [3] :

$$\hat{H} = \left\{ \sum_{i=1}^A (\hat{T}_i + \hat{U}_i) \right\} + \left\{ \sum_{i>j}^A \nu_{ij} - \sum_{i=1}^A \hat{U}_i \right\} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1 = \sum_{i=1}^A \hat{h}_i^0 + \sum_{i=1}^A \hat{h}_i^1. \quad (\text{I.16})$$

L'hamiltonien \hat{H}^0 reflète le mouvement indépendant des nucléons plongés dans le potentiel moyen \vec{U}_i créé par les A nucléons [68]. Le choix du potentiel à un corps U doit être tel que \hat{H}^1 soit petit devant \hat{H}^0 afin qu'on puisse le considérer comme une perturbation. \hat{H}^1 porte le nom d'interaction résiduelle. En première approche, cette interaction est considérée comme nulle. Le choix du potentiel moyen central a été fait de manière à reproduire les résultats expérimentaux des noyaux magiques : 2, 8, 20, 28, 50, 82 et 126. Afin de construire une théorie reproduisant telle ou telle propriété physique du noyau, le point de départ est l'équation de Schrödinger : tel que l'Hamiltonien \hat{H} du système étant :

$$\hat{H} \approx - \sum_{i=1}^A \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \sum_{i < j}^A \nu_{ij} \quad (\text{I.17})$$

Le premier terme est l'énergie cinétique des nucléons T et le potentiel de composantes ν_{ij} rend compte de l'interaction nucléon nucléon composée d'une partie nucléaire et d'une partie coulombienne. Une des difficultés des modèles microscopiques est qu'à priori l'interaction nucléon-nucléon n'est pas connue. L'influence qu'aura l'introduction du terme qui tient compte de l'interaction à plus de deux corps n'est pas non plus maîtrisée. Le potentiel de Woods-Saxon est un exemple des potentiels moyens [75] :

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - a_0l^2 - f(r)\vec{l} \cdot \vec{s}, \quad (\text{I.18})$$

où V_0 et a_0 sont respectivement la profondeur du puits de potentiel de Woods-Saxon, la largeur sur laquelle décroît la densité de la matière nucléaire $\rho(r)$, et le rayon moyen du noyau. La profondeur du puits peut être évaluée en ajoutant l'énergie de Fermi des nucléons 37 MeV, et l'énergie moyenne de liaison 8 MeV, c'est à dire que V_0 prend la valeur 50 MeV en générale. En première approximation, ce potentiel est remplacé par le potentiel de l'oscillateur harmonique (OH), avec lequel on obtient des dégénérescences en niveaux énergétiques.

$$V(r) = V_0 + \frac{1}{2}\omega^2r^2m \quad (\text{I.19})$$

et l'expression de ω donne :

$$\omega = \left(\frac{2V_0}{mR} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{I.20})$$

Pour lever la dégénérescence et reproduire les résultats expérimentaux des noyaux dits magiques, un développement de Taylor du potentiel Woods-Saxon au voisinage du zéro, avec l'effet du moment angulaire et de l'interaction spin-orbite fortement attractif est introduit et l'expression du potentiel devient :

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - a_0l^2 - f(r)\vec{l}\cdot\vec{s}. \tag{I.21}$$

Le terme $\vec{l}\cdot\vec{s} = \frac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2)$, et $s = 1/2$, et l'énergie peut être calculé en utilisant la relation ci-dessous :

$$E_{nlj} = -V_0 + \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right) - a_0\hbar^2l(l+1) - \frac{1}{2}f(r)\hbar^2 \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \tag{I.22}$$

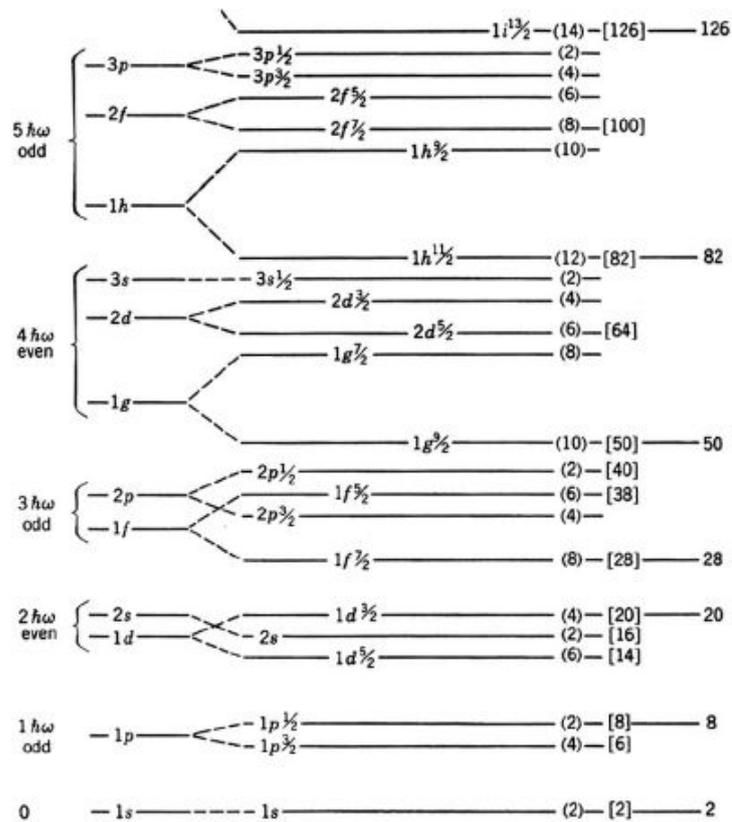


FIGURE 9 – Niveaux d'énergie selon le modèle en couches [76].

Grâce au modèle en couches, on peut reproduire les nombres magiques observés expérimentalement. Cependant, ce modèle n'est valable que pour les noyaux sphériques. La figure 7 ci-dessus, représente les niveaux des énergies selon le modèle en couches.

1.7.11 Déformation triaxiale

Le fait qu'un noyau triaxial ne possède pas de symétrie axiale implique une plus grande richesse de phénomènes physiques qui apparaissent dans le schéma de niveaux d'énergie. Pour une forme triaxiale, il est possible de faire tourner le noyau suivant un axe n'appartenant pas à un des plans principaux du référentiel intrinsèque. Parmi les modes d'excitations d'un noyau, il y en a deux qui caractérisent de manière univoque un noyau triaxial en rotation : le mode wobbling [81] et la chiralité. Lorsque la direction de l'axe de rotation du noyau oscille dans l'espace, on parle alors de mouvement de wobbling ; ce qui se traduit dans le schéma de niveaux par une bande parallèle à la bande yrast[82] légèrement plus excitée. Elle est fortement connectée à celle-ci par des transitions dipolaires. Une oscillation du signe de l'angle α entre l'axe du moment angulaire et l'axe de rotation va être à l'origine du moment de wobbling. Un autre phénomène typique de la triaxialité est la chiralité. Il se manifeste par deux bandes dipolaires (constituées de transitions magnétiques dipolaires M1) de configurations identiques, mais dont l'axe de rotation pointe dans deux directions différentes de l'espace, symétriques par rapport au plan perpendiculaire à l'axe long de l'ellipsoïde. La déformation triaxiale s'avère stable sur une gamme limitée de spin à bas spin. De plus, il n'est pas facile de la mettre en évidence expérimentalement. La figure 9 représente le noyau triaxial dans un référentiel intrinsèque.

$$\text{-Potentiel de woods-saxon : } V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right)}$$

V_0 : Profondeur du puits ≈ -50 MeV ; $R_0 = r_0 A^{1/3}$: Rayon du noyau et r_0 (le rayon réduit) $\approx 1,2$ fm ;
 a : Diffusivité $\approx 0,5$ fm

Les observations montrent que le potentiel de oscillateur harmonique est plus souhaitable pour les noyaux légers tandis que le potentiel de Woods-Saxon est plus adapté aux situations réalistes, car similaire la distribution de masse nucléaire dans le noyau.

Les solutions de l'équation (1.16) peuvent se mettre sous la forme :

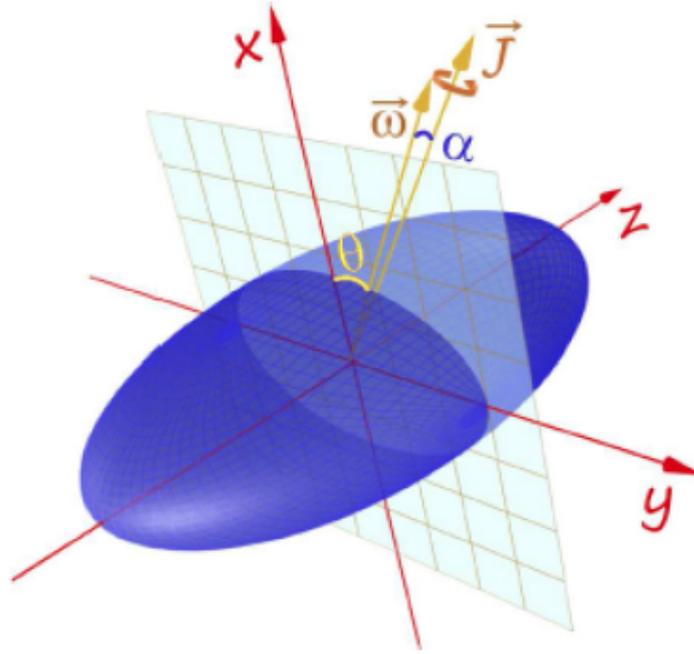


FIGURE 10 – Noyau triaxial dans son référentiel intrinsèque où sont représentés l'angle θ entre le vecteur rotation $\vec{\omega}$ et l'axe Ox , et l'angle α entre les vecteurs rotation $\vec{\omega}$ et moment angulaire total \vec{J} [83].

$$\phi_{nlm} = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta; \varphi), \quad (\text{I.23})$$

$$\hat{l}^2 \phi_{nlm} = \hbar^2 l(l+1) \phi_{nlm}. \quad (\text{I.24})$$

o n : Le nombre quantique radial correspondant au nombre de nud de la fonction d'onde, $n = 1, 2, 3,$

Loprateur l_z est la projection de l sur laxe z et de valeur propre m comprise entre $-l < m < l$.

La partie radiale de la fonction d'onde $u_{nl}(r)$ satisfait l'equation suivante, selon la methode de separation de variable :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\hbar^2}{2M} \frac{l(l+1)}{r^2} - E \right] u_{nl}(r) = 0. \quad (\text{I.25})$$

La rsolution de cette quation nous donne les valeurs propres de lnergie dune particule indivi-



FIGURE 11 – Les trois différents types de potentiel [9]

duelle dans un champ moyen $V(r)$ [9] :

$$E_N = \left(N + \frac{3}{2}\right)\omega_0\hbar. \quad (\text{I.26})$$

o $N = 2(n - 1) + l$: est le nombre quantique principale et l le moment orbital. Ainsi pour chaque valeur de N plusieurs couples de n et l sont possibles, entraînant une forte dégénérescence des niveaux d'énergie. Le nombre de dégénérescence g est donné par la relation suivante :

$$g = 2(2l + 1).$$

Les niveaux d'énergie sont notés par une paire de nombres entiers $(n; l)$

n : Indiquant le nombre de fois que l apparaît dans la séquence des niveaux d'énergie. Les valeurs de l sont notées suivant les lettres :

$$l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$$

$$s, p, d, f, g, h, i, j, k, \dots$$

$$\text{On a : } 1s, 1p, 2s, 1d, 1f, 2p$$

Le potentiel de l'oscillateur harmonique et de Woods-saxon malgré leur succès évident ne sont pas mesurés de reproduire tous les nombres magiques. Pour le cas de l'oscillateur harmonique même avec une dégénérescence accrue on n'arrive toujours pas à avoir le nombre magique 28. Il est donc crucial d'ajouter des termes correctifs correspondant au spin-orbite et aux effets de bords [9] :

$$V(r) = \frac{1}{2}M\omega_0 r^2 - D l^2 - f(r)l.s. \quad (I.27)$$

D : Constante issue des données expérimentales ; l^2 : Introduisant une levée de dégénérescence en l des solutions de l'oscillateur harmonique, l'énergie des états tant pairs par $J = l \pm \frac{1}{2}$; $f(r)$: Une fonction radiale et s : Spin du nucléon

Le terme Dl^2 caractérise l'effet de bords correspondant au deuxième terme non nul du développement en série du potentiel de Woods-saxon et $f(r)l.s$ le terme de l'interaction spin-orbite. Le modèle reproduit correctement tous les nombres magiques, le modèle en couche sphérique apporte une description microscopique du noyau atomique. Les niveaux d'énergies nucléaires du modèle en couche sphérique et les différentes corrections ajoutées sont représentés dans les figures suivantes :

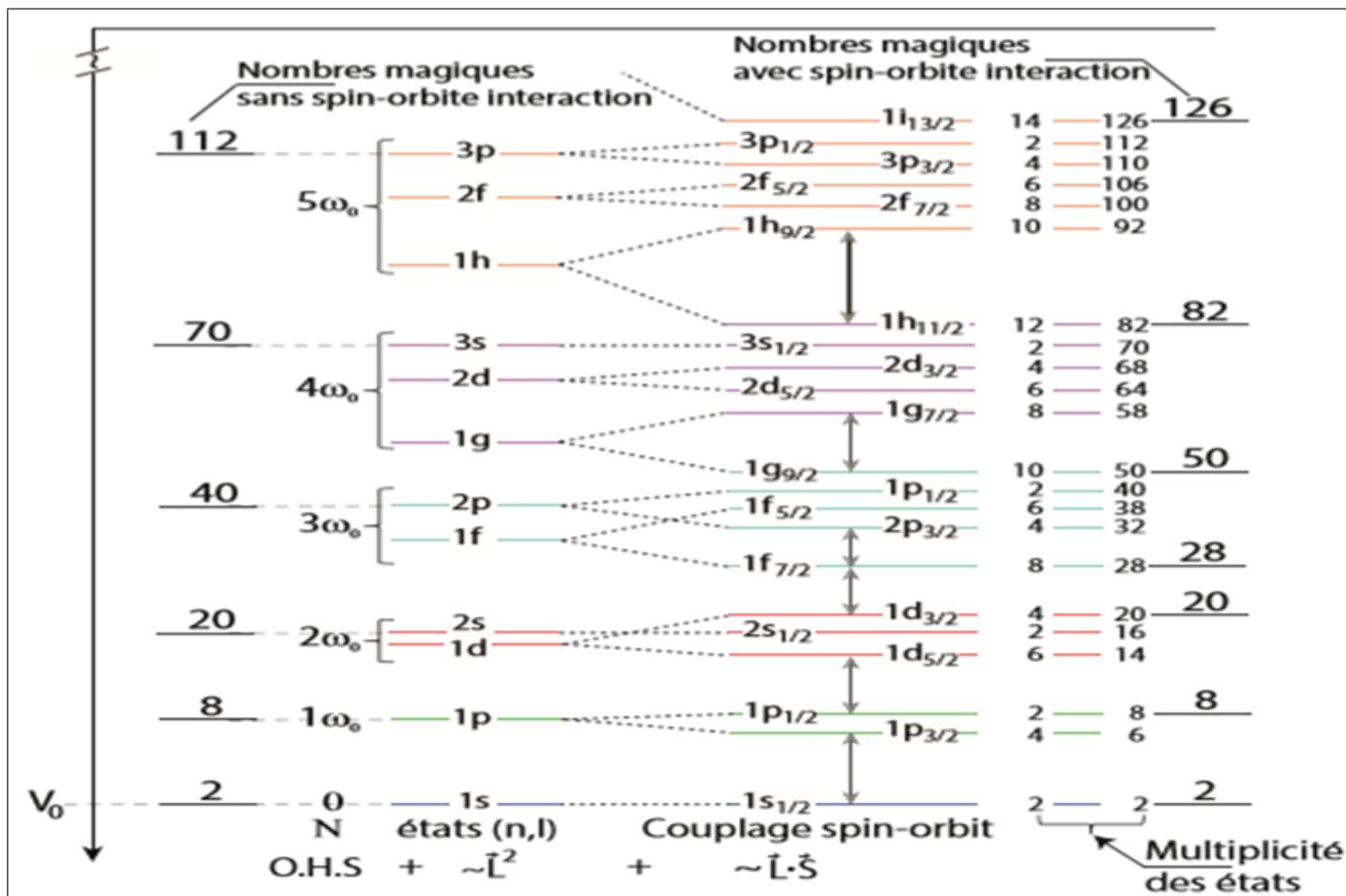


FIGURE 12 – Niveaux d'nergie d'une particule individuelle avec/sans le couplage spin-orbite[9]

La Fig 12 représente les contributions de chaque terme correctif apportés au potentiel de oscillateur harmonique sphérique pour retrouver les quatre derniers nombres magiques (28, 50, 82 et 126)

Le modèle en couche présenté plus haut est un modèle simplifié, prédisant de nombreuses propriétés des nucléides, le spin et la parité nucléaire, le moment dipolaire magnétique et le moment quadripolaire électrique. Cependant, le potentiel utilisé est à symétrie sphérique, il n'est valable que pour les noyaux sphériques, qui sont finalement très rares. D'où une amélioration de ce modèle

I.7.12 Modèle en couche déformé ou modèle de Nilsson

Pour des noyaux ayant une couche remplie à moitié, le modèle en couche ne prédit pas l'interaction spin-orbite. Le mouvement des nucléons occupant les orbitales non-remplies déforme le noyau et ajoute un effet non-sphérique au potentiel. Afin de décrire le comportement des noyaux

dforms, Nilsson a introduit une approche qui ajuste le modle en couche pour prendre en compte ces dformations [17, 18]. Selon ce modle, le dveloppement de Taylor du potentiel de Woods-Saxon peut tre effectu avec les suppositions adoptes par Nilsson, introduisant le potentiel de loscillateur harmonique anisotrope[9].

$$\hat{V} = \frac{1}{2}M (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (\text{I.28})$$

o $\omega_x = \omega_y \neq \omega_z$ et laxe z est laxe de symtrie du noyau dform lhamiltonien de Nilsson se met sous la forme[17] :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \hat{V} - D(\hat{l}^2 - \langle \hat{l}_2 \rangle_N) - f\hat{l}_s. \quad (\text{I.29})$$

Ensuite, il faut paramtrer les frquences de rotation en tenant compte de la condition de conservation du volume nuclaire et en introduisant un paramtre de dformation ϵ

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_0(\epsilon) \left[1 + \frac{1}{3}\epsilon \right] \\ \omega_y = \omega_0(\epsilon) \left[1 + \frac{2}{3}\epsilon \right] \\ \epsilon = \frac{\omega_x - \omega_y}{\omega_0} \end{cases} \quad (\text{I.30})$$

La conservation du volume induit la relation :

$$\omega_0(\epsilon) = \omega_0^0 \left[1 + \frac{2}{3}\epsilon^2 \right]. \quad (\text{I.31})$$

o $\omega_0(\epsilon)$ est la pulsation dforme et ω_0^0 celle de loscillateur de lharmonique sphrique. Le paramtre de dformation ϵ est reli au paramtre β par la relation [9] : $\epsilon \approx 0,95\beta$

La rsolution de lquation de Schrödinger avec ce nouveau potentiel nous donne une nergie suivante :

$$E_N(n_z, n_p, \Lambda) = \sum_{i=x,y,z} \hbar\omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{I.32})$$

n_z : le nombre quantique principal selon laxe ; Λ : Projection du moment orbitale \vec{l} sur laxe de symtrie ; $\Omega = \Sigma + \Lambda$, Ω est la projection du moment angulaire totale J sur laxe de symtrie, Σ est la projection du spin intrinsque sur laxe symtrie.

Le diagramme de Nilsson pour la rgion, $0 \leq Z \leq 50$ en fonction de la dformation ϵ calcul par Bentgsson et Ragnarsson est donn par les figures suivantes [18,19].

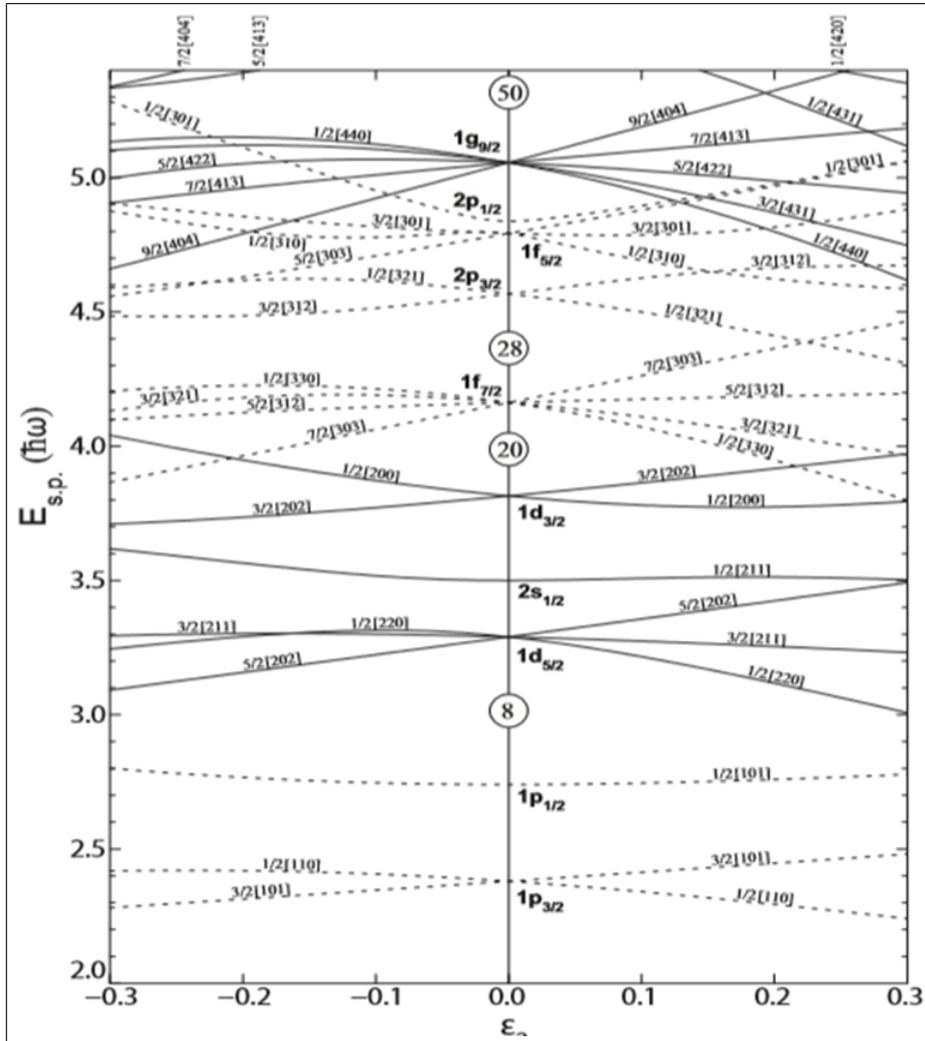


FIGURE 13 – Diagramme de Nilsson pour la rgion, $0 \leq N \leq 50$ la frquence de loscillateur $\hbar\omega_0 = 41A^{-1/3}$ est donn en fonction de ϵ [18]

La Fig 1.10 illustre les diffrentes frquences de l’oscillation des niveaux d’nergie du modle en couche lorsqu’on prend en compte les dformations du noyau. On constate galement que les nombres magiques sont conservs.

I.8 Quelques travaux antérieurs sur les noyaux triaxiaux

Plusieurs scientifiques ont développé des outils théoriques en physique nucléaire pour décrire d'une part les états et les propriétés des noyaux atomiques, d'autre part les modèles dont l'objectif est de réduire les écarts entre les valeurs calculées et d'avoir une structure plus proche de la symétrie $Z(5)$.

Dans le modèle conduit par Chabab et al.[84], la résolution du problème des valeurs propres et des vecteurs propres avec le Hamiltonien collectif de Bohr pour les noyaux triaxiaux de platine et de xénon a trouvé des solutions élogieuses. La partie β du potentiel collectif est considérée comme égale au potentiel de Hulthén tandis que la partie γ est définie par un nouveau potentiel généralisé obtenu à partir d'un potentiel en forme d'anneau. Il ressort de ses travaux que, les différentes énergies calculées et les taux de transitions $B(E2)$ sont en accord avec les données expérimentales et aux résultats théoriques disponibles dans la littérature.

Inci [85], dans ses travaux, ils ont utilisé le potentiel de Morse pour les noyaux triaxiaux. Dans son modèle, il obtient des valeurs propres d'énergie et les fonctions d'onde propres après utilisation de la méthode de séparation des variables β et γ du Hamiltonien de Bohr. Ces résultats ont été appliqués aux isotopes $^{192,194,196}\text{Pt}$ pour générer les spectres énergétiques. Par la suite, les rapports des transitions quadrupolaires électriques $B(E2)$ obtenues, comparés aux résultats expérimentaux et de la symétrie $Z(5)$, montrent que cette méthode ne tient compte que des déformations cylindriques (allongées ou aplaties).

Ema'a et al. [86], dans leurs travaux ont utilisé le Hamiltonien de Bohr avec le potentiel de type exponentiel multiparamétrique sur les noyaux triaxiaux. Dans ses calculs, ils ont obtenu des valeurs propres des énergies et les fonctions d'ondes propres après utilisation de la méthode de séparation des variables. Les résultats obtenus pour les rapports des transitions quadrupolaires électriques $B(E2)$, comparés aux résultats expérimentaux et de la symétrie $Z(5)$, montrent que les résultats obtenus sont meilleurs et le modèle est applicable pour les noyaux triaxiaux.

Tchana [87], par la suite, a utilisé le Hamiltonien de Bohr et le potentiel de Killingbeck associé à celui de Morse pour les noyaux triaxiaux et obtient aussi des résultats plus fiables que ceux de Inci et al. Toutefois, on constate que certains écarts persistent entre ses valeurs calculées et les valeurs expérimentales.

Nga et al.[88], dans leurs travaux ont utilisé un potentiel fractionnaire inverse à quatre termes

(PFIQT) dans le but d'étudier le mouvement de vibrations et de rotations des noyaux triaxiaux en s'appuyant sur le modèle de Hamiltonien de Bohr. En utilisant la technique de séparation des variables, des équations dont l'une dépend du paramètre de déformation β (partie β) et l'autre du paramètre déviation γ (partie γ). Une résolution de l'équation du Hamiltonien de Bohr avec le PFIQT pour les noyaux triaxiaux pour la partie β et pour la partie γ avec un minimum de $\gamma = \pi/6$ lui a permis de trouver l'énergie propre du système et les fonctions d'onde sont ainsi déduites en utilisant l'équation bi-confluente de Heun. Les solutions analytiques de l'énergie et des fonctions d'onde ont permis d'évaluer les valeurs théoriques des rapports des énergies de niveaux et les taux de transition $B(E2)$ et ont été comparées aux données expérimentales et aux autres prédictions théoriques utilisant les potentiels de Morse et de Killingbeck plus de Morse pour les isotopes 192, 194 et 196 du Platine. Les résultats obtenus avec ce modèle sont plus proches des résultats expérimentaux que ceux obtenus par les auteurs ayant utilisés les potentiels de Morse et de Killingbeck plus de Morse.

I.9 Conclusion

Dans ce chapitre, après une brève historique sur la physique nucléaire énumérant quelques chronologies importante qui ont des études sur la structure nucléaire entre autre la découverte du noyau et ses composants, protons, neutrons et électrons. Ensuite nous avons abordé des modèles théoriques pour les noyaux sphériques et déformés. Dans un premier temps, nous avons considéré le noyau comme une goutte liquide et cela nous a permis de reproduire l'expression de l'énergie de liaison par nucléon. c'est uniquement le modèle de la goutte liquide qui n'explique pas la stabilité des noyaux dits magiques. C'est la raison pour laquelle nous avons évoqué un autre modèle qui tient en compte les propriétés quantiques des noyaux et qui a permis de solutionner le problème, c'est le modèle en couche. Dans ce modèle, les nucléons sont placés sur des niveaux d'énergies comme sur les couches électroniques d'un atome. Cependant ce modèle présente aussi des limites car sa validité n'est efficace que pour un petit ensemble de noyaux au voisinage d'une fermeture de couche parceque la plupart des noyaux sont déformés. Enfin, une introduction à la déformation des noyaux a été effectuée faisant ainsi intervenir la rotation et la vibration afin de comprendre l'étude des noyaux déformés dans la suite de notre travail. Dans ce chapitre, nous avons également étudié le noyau du platine et ses isotopes puis, défini le noyau atomique depuis l'atome jusqu'à ses composants. Les différentes interactions

dans le noyau atomique à savoir l'interaction forte, faible, et électromagnétique peuvent causer des déformations telle que la rotation et la vibration de celui ci. Ces mécanismes sont responsables d'une quantité d'énergie permettant soit de lier, soit de séparer les constituants du noyau en fonction du nombre de protons et de neutrons en son sein. Dans la suite, nous utilisons le potentiel couplé de Hulthen et de Kratzer écranté pour bâtir notre modèle qui tient compte des mouvements de vibration et de rotation des nucléides.

MATÉRIEL ET MÉTHODE

II.1 Introduction

La conséquence des interactions entre nucléons est la déformation (vibration et rotation) des noyaux atomiques. Les nucléides effectuent plusieurs types de déformations et des interactions nucléaires, au cours d'une désintégration. Ces déformations s'alternent de la forme elliptique à la forme sphéroïdale en passant par la forme plate et vice-versa. Pour ce qui est des interactions, il s'agit des différentes tensions existantes, nées des forces coulombiennes, gravitationnelles et magnétiques. Ces différentes déformations, combinées aux interactions nucléaires, décrivent des mouvements bien connus non seulement invisibles de par leur rapidité mais aussi couplés entre eux. Qu'il s'agisse des déformations et des interactions, leurs actions procurent des différents types d'énergies. Pour suivre l'évolution de ces mouvements et capitaliser ces énergies, on est obligé de s'intéresser aux phénomènes physiques et bâtir ainsi un modèle tenant compte de tous les paramètres empiriques, internes et externes des forces en présence. Il est donc question de mettre sur pied un système réunissant toutes ces entités suscitées pour avoir des éléments de base décrivant la fois les déformations et les interactions nucléaires appelées équations du mouvement.

II.2 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une expérience réalisée au Grand accélérateur National d'ions Lourds (GANIL) qui a pour but d'étudier et de mesurer les énergies de transition par la spectroscopie gamma des noyaux du ^{32}Mg et le ^{34}Si . Cette expérience a été au GANIL avec le spectromètre VAMOS et le détecteur EXOGAM. Le système de détection permet de considérer les noyaux produits par des réactions inélastiques, de transfert ou de fragmentation d'un faisceau secondaire contenant entre autre des noyaux de ^{32}Mg et le ^{34}Si . Par la suite on étudie un potentiel nucléaire qui nous permettra de déterminer les solutions du Hamiltonien en s'ap-

puyant sur la mécanique quantique supersymétrique qui consiste à factoriser le Hamiltonien de Bohr afin d'obtenir les solutions du modèle utilisé.

II.3 Mesure expérimentale de l'énergie de transition par spectroscopie gamma

Pour étudier la spectroscopie gamma des noyaux ^{32}Mg et ^{34}Si , on accède à leurs états excités lors des différentes réactions (d,p), (d, ^2He) et des réactions inélastiques. On utilise un faisceau primaire de ^{36}S qui interagit avec la cible de tantale de Source d'Ions Secondaires à Supraconducteurs intense (SISSI). La production de la plupart des noyaux de masse inférieure au ^{36}S , dont le ^{32}Mg et le ^{34}Si est faite puis, sélectionnés grace au spectromètre alpha. Ces noyaux sont ensuite acheminés vers le dispositif expérimental, schématisé la figure 13 [89] et peut être décomposé en 3 parties :

⇒ identification du faisceau, ⇒ identification de l'éjectile ⇒ détection gamma

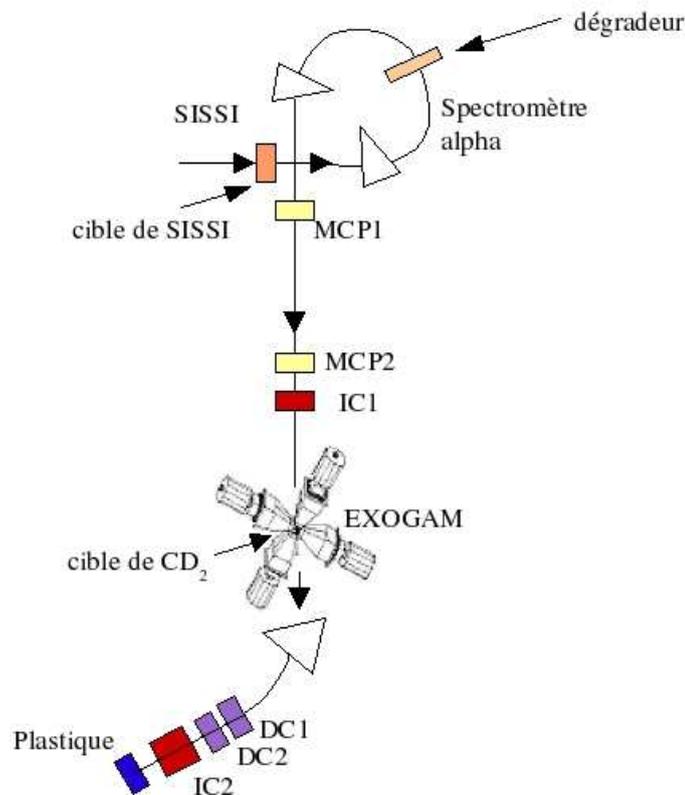


FIGURE 14 – De la production à la détection.

L'identification du faisceau, c'est à du projectile avant la cible, est faite évènement par évènement par les technique ΔE où le temps de vol est obtenu par différence de temps entre deux galettes à mi-crocanaux placées à la sortie du spectromètre alpha (MCPI)et juste avant la cible (MCP2)et la perte d'énergie par une chambre à ionisation (IC1). La figure 14, montre l'identification obtenue où on peut voir entre autre le ^{32}Mg et le ^{34}Si .

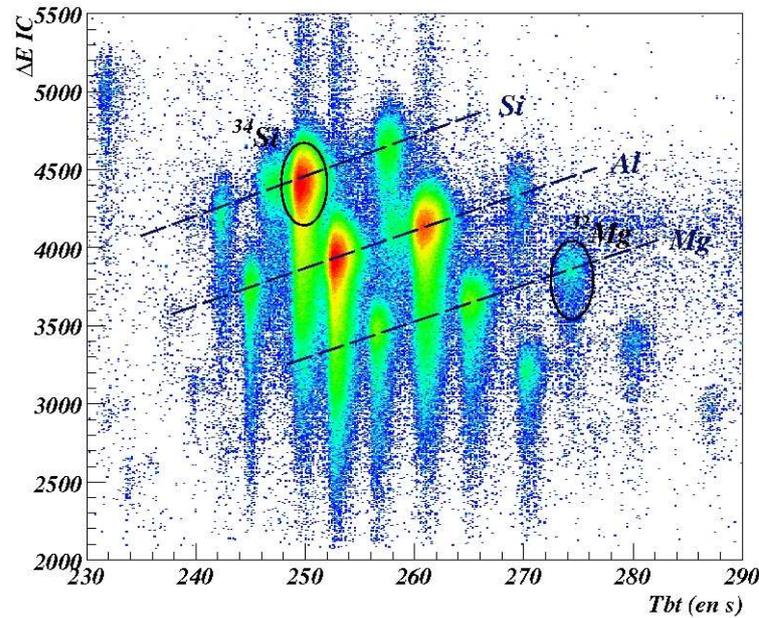


FIGURE 15 – Matrice d'identification ΔE avant la cible.

L'identification après la cible est obtenue grâce aux détecteurs du plan focal du spectromètre VAMOS. Le système de détection est composé de 2 chambres à dérives pour donner la position et une première perte d'énergie, d'une chambre à ionisation qui fournit une seconde perte d'énergie et d'un plastique pour la mesure de l'énergie résiduelle du temps. Avec toutes ces données, on extrait le numéro atomique Z et le rapport $\frac{M}{Q}$ qui permet une identification de élément. La figure 15, montre l'identification : y sont indiqués le le ^{32}Mg , le ^{34}Si et les lignes isotopiques $Z = 12$ (magnésium), $Z = 14$ (silicium).

On utilise pour la détection gamma EXOGAM, constitué pour cette expérience de 11 détecteurs HPGe (High Purity Germanium)segmentés. Chaque détecteur (Clover) est ainsi composé de 4 cristaux, eux-mêmes divisés électriquement en 4 segments. Les détecteurs sont disposés tout autour de la cible de CD2, 4 détecteurs à 45° (angle par rapports au faisceau), 4 à 135° et 3 à 90° . Les noyaux incidents sont une vitesse de $\beta = 0.2$ dans le référentiel du laboratoire. Les gammas,

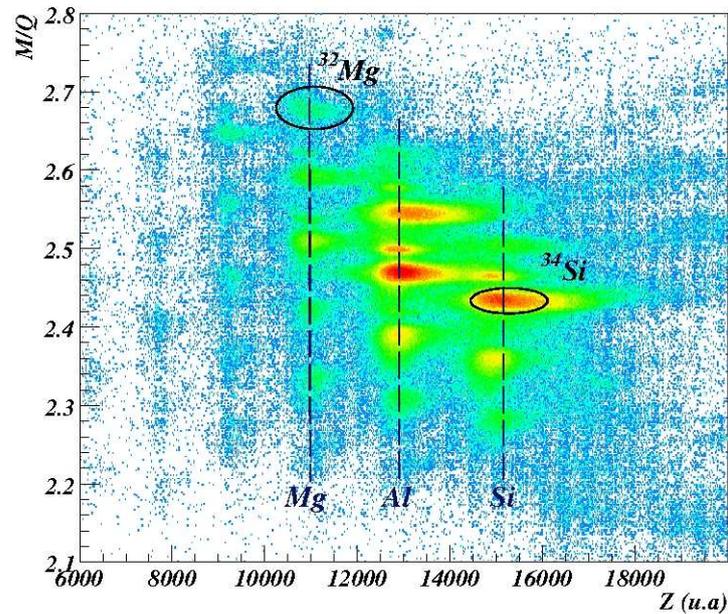


FIGURE 16 – Identification après la cible .

émis dans le référentiel du noyau, sont détectés dans le référentiel du laboratoire. Ces gammas sont donc soumis à l'effet Doppler, qui dépend de l'angle d'émission du gamma pour obtenir une bonne résolution en énergie : la figure 16, illustre cet effet pour la raie gamma à 885keV du ^{32}Mg . Les spectres sont obtenus en considérant les angles moyens de chaque détecteur (Clover) en haut, de chaque cristal (au milieu), et enfin de chaque segment (en bas).

L'expérience permet l'étude de nombre de noyaux riches en neutrons autour de $N = 20$. L'une des caractéristiques de cette expérience est l'identification événement par événement aussi bien avant qu'après la cible. Ceci permet non seulement de réaliser une étude noyau par noyau mais aussi réaction par réaction. En considérant les deux noyaux : ^{32}Mg et ^{34}Si on a :

⇒ ^{32}Mg La fermeture de couche implique une grande énergie d'excitation du premier état et une probabilité faible de transition de ce niveau excité vers le fondamental. Or dans le cas du ^{32}Mg , 12 protons et 20 neutrons, malgré un nombre magique de neutrons, le premier état excité est à 885keV (contre 3.9MeV pour le niveau 2^+ du ^{40}Ca). Ceci illustre la perte de sa magie de $N = 20$ pour le Mg. L'état à 885keV est un état bien connu. Par contre, les informations expérimentales pour l'état à 2.3MeV sont confuses : des expériences précédentes lui ont assignés différents spins et parités. Ainsi, une expérience de spectroscopie gamma en ligne par fragmentation a conclu à un 4^+ [90] alors qu'une expérience de décroissance bêta proposait une parité

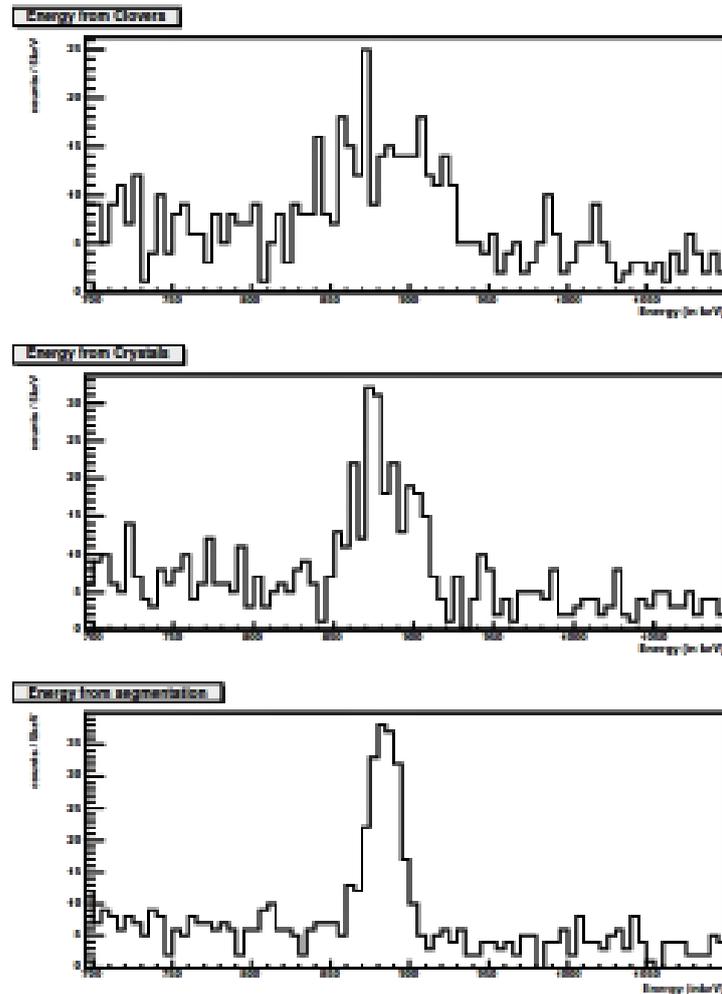


FIGURE 17 – Effet Doppler corrigé suivant l'angle de correction sur la raie à 885keV du ^{32}Mg .

négative [91]. Une troisième expérience de réaction inélastique [92], trouve un meilleur accord avec un 3^- qu'un 4^+ par des considérations de sections efficaces. Dans cette expérience, la population relative 1438keV (état 2.3keV) est mesurée suivant la réaction par rapport à la population du 2^+ comme on peut le voir sur la figure 17. On peut remarquer que la population la plus grande observée est dans la réaction ^{33}Al vers ^{32}Mg , c'est à dire quand on arrache un proton. Avec un modèle très simple cela penche en faveur du 4^+ , mais il faudrait faire des calculs plus rigoureux pour l'affirmer.

⇒ ^{34}Si Les calculs réalisés pour le ^{34}Si dans le cadre du modèle en couches prévoient que l'état fondamental 0^+ correspondant à une configuration sphérique pure, mais qu'un deuxième état 0^+ déformé, correspond à des configurations avec des excitations 2 particules -2 trous, se situe en dessous du premier état excité 2^+ ou juste au dessous (figure 18)[93]. La dernière attribution

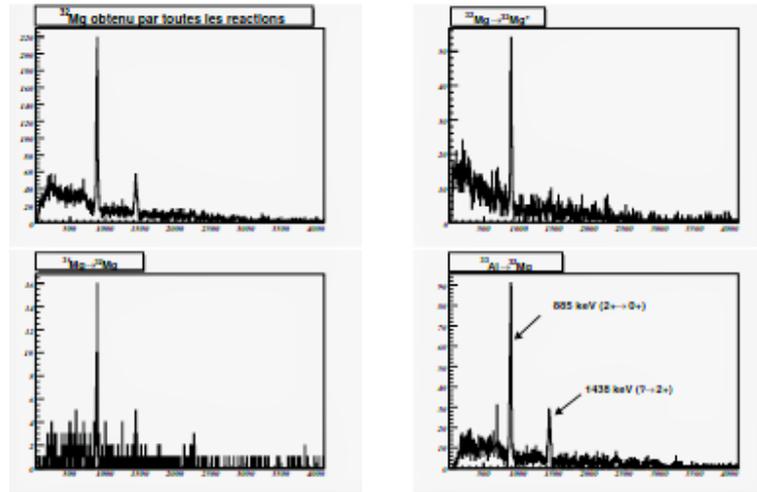


FIGURE 18 – Spectre γ ^{32}Mg pour toutes les réactions, inélastique, (d, p) et (d,Helium)

en date correspondait à un état à 1.48MeV qui avait été suggéré pour la transition 2^+ vers 0_2^+ . Dans cette expérience, grace aux coincidences γ - γ de haute résolution, un spectre conditionné par la transition à 3.3MeV entre le 2^+ et le fondamental (figure 18) a été obtenu. Sur ce spectre, la transition à 1.48MeV apparait clairement, et correspond donc obligatoirement à un état au dessus de l'état 2^+ . Nous excluons donc la possibilité que cette transition corresponde à l'état recherché. La spectroscopie γ des noyaux riches en neutrons autour de $N = 20$ est riche et intéressante.

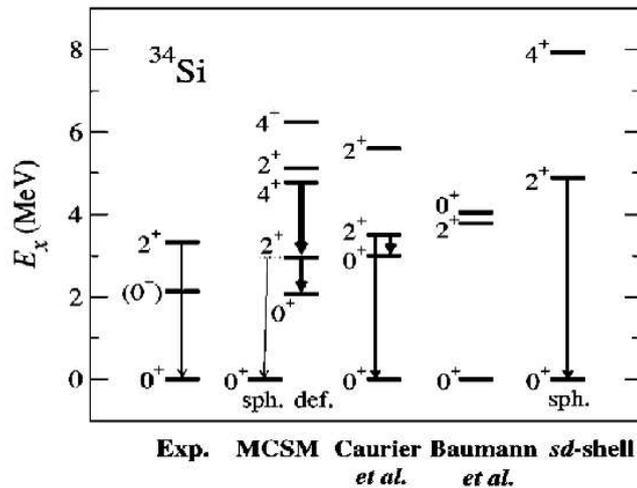


FIGURE 19 – Comparaison des premiers états du ^{34}Si avec différents calculs

La combinaison de deux instruments de haute efficacité EXOGAM et VAMOS est idéale pour

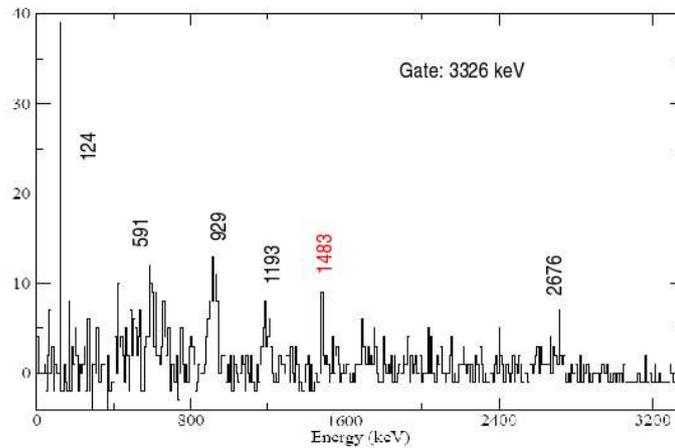


FIGURE 20 – Gamma en coïncidence avec 2^+

ce genre d'étude qui utilise des faisceaux de très intensité. L'identification des noyaux incidents et des éjectiles a permis de distinguer les différentes voies de réaction. L'utilisation de la segmentation des détecteurs (Clovers) d'EXOGRAM a permis une correction précise de l'effet Doppler et l'obtention d'une bonne résolution en énergie pour les γ . Des données de coïncidences $\gamma - \gamma$ de bonne qualité qui permettent d'envisager une meilleure connaissance de schémas de niveaux ont été obtenus.

II.4 Présentation du Hamiltonien de Bohr et les solutions des différentes parties de l'équation de Schrödinger

Le Hamiltonien de Bohr est largement utilisé pour décrire certaines propriétés des noyaux déformés (rotation et vibration)[96]. De nos jours plusieurs tentatives ont été consacrées à la construction des solutions analytiques de l'équation de Schrödinger associée au Hamiltonien de Bohr pour divers types de potentiels dans le but de décrire de manière appropriée les transitions de phase des niveaux atomiques [97,99]. c'est dans ce contexte qu'une attention particulière est consacrée au développement des solutions analytiques du Hamiltonien de Bohr avec le potentiel couplé de Hulthén et Kratzer écranté pour étudier les transitions de formes des noyaux. L'équation fondamentale de la mécanique relativiste dont l'état du système est décrit par une fonction d'onde peut être représentée par un vecteur de l'espace des états. L'équation du Hamiltonien de Bohr nous permet donc de suivre l'évolution sphérique du noyau atomique afin de

décrire ses déformations.

II.4.1 Équation de Schrödinger

Le mouvement présentant les déformations des nucléides est régi par l'équation de Schrödinger suivante :

$$\hat{H}\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = E\psi(\beta, \gamma, \theta_i), \quad (\text{II.1})$$

L'Hamiltonien \hat{H} peut être exprimé comme la somme de deux opérateurs : l'un qui correspond à l'énergie cinétique et l'autre à l'énergie potentielle,

$$\hat{H} = E_c + V(\beta, \gamma), \quad (\text{II.2})$$

avec

$$E_c = \frac{\hat{p}^2}{2B} \quad (\text{II.3})$$

$$\hat{p}^2 = -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} + V(\beta, \gamma) \quad (\text{II.4})$$

portant les Eqs. (II.4) et (II.3) dans l'Eq. (II.2), le Hamiltonien prend la nouvelle forme :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2\pi}{3}k)} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (\text{II.5})$$

II.5 Potentiels nucléaires

Plusieurs travaux ont été publiés sur les solutions de Bohr Modelson en utilisant le potentiel sextic [100-102]. L'un des potentiels généralement utilisés dans le Hamiltonien de Bohr pour déterminer la structure des noyaux est le potentiel de Kratzer [103-105]. Motivé par de nombreuses études avec le potentiel de Kratzer couplé, le Potentiel de Yukawa et son utilisation est répandu dans divers domaines de la science, en particulier dans les domaines de la Physique Nucléaire et moléculaire. Ikot et al. [106] ont proposé une combinaison de ces deux potentiels

appelée potentiel écranté de Kratzer. Dans ce travail, nous allons utiliser un modèle constitué du couplage du potentiel de Hulthen et Katzer écranté dans la solution du Hamiltonien de Bohr afin de déterminer l'énergie du spectre ainsi que la fonction d'onde correspondante.

II.5.1 Mouvement collectif dans les noyaux

Les observations expérimentales des énergies de niveaux excités, leurs spins et le rapport d'intensité, nous offrent la base pour l'investigation théorique de la structure nucléaire. Un grand nombre de propriétés observées dans les noyaux implique l'existence du mouvement d'ensemble des nucléons, ces phénomènes s'appellent le mouvement collectif. Dans ce cas, il est plus approprié de les décrire en utilisant les coordonnées macroscopiques telles que la masse, le volume et les paramètres de déformation (β, γ). Les excitations des noyaux permettent d'étudier des effets collectifs dans le milieu nucléaire. Différents types d'excitation sont permises au noyau. Dans ce chapitre, des excitations collectives des nucléons nous intéressent particulièrement parce qu'elles permettent d'étudier les noyaux comme l'objet en entier. Les excitations collectives sont représentées par deux types de mouvement :

-Des vibrations de noyaux (états à N photons, déformation dynamique axiale ou triaxiale, résonances géantes).

-Des rotations collectives autour de l'axe perpendiculaire à l'axe de symétrie du noyau (bande de rotation).

Ces deux types d'excitations collectives conduisent en général à des schémas de niveaux "réguliers" et l'évolution dynamique de la forme du noyau. Ainsi, la présence d'un certain type d'excitation nous aide déduire la forme du noyau.

Dans cette section, nous présenterons deux types de mouvement collectif : rotation et vibration, ainsi que les formes du noyau engendrées par ces mouvements collectifs

Mode vibrationnel

Dans de nombreux cas, un noyau peut être considéré comme une goutte liquide. Nombre de propriétés peuvent être interprétées comme le résultat de la relation entre la tension de surface et l'énergie interne d'une goutte. Une telle approximation nous permet d'examiner les différents types d'excitations nucléaires issus du mouvement vibratoire.

Mode rotationnel

La rotation se traduit par la présence de moment angulaire suivant un axe donné. Dans le cas de la rotation collective, le noyau tourne globalement autour de cet axe de rotation. Il doit pour cela être déformé, car la mécanique quantique interdit une rotation autour d'un axe de symétrie. Dans la plupart des cas, les noyaux ont la déformation quadripolaire ($\lambda=2$) paramètres de forme $\alpha(t)_{\lambda\mu}^*$, $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$. Les paramètres de forme peuvent être exprimés par la transformation du système des coordonnées :

$$\alpha_{\lambda\mu}^* = \sum_{\nu=-2}^2 \sum_{\mu'=-\lambda}^{\lambda} a_{\nu\mu'}^* D_{\mu\mu'}^{(\nu)}(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma) \quad (\text{II.6})$$

II.6 Bases de la mécanique quantique super symétrique

peu de temps après l'élaboration du modèle standard de la physique des particules, regroupant les particules en deux grands groupes à savoir les bosons et les fermions. Les physiciens se sont rendu compte qu'il y avait un déséquilibre entre les bosons et les fermions du modèle du modèle standard. Ainsi l'hypothèse de la supersymétrie a été suggérée en associant à chaque fermion un super partenaire qui sera un boson et vis versa de ce fait il y aurait un parfait équilibre entre les fermions et les bosons c'est la supersymétrie. À partir de cette façon de voir les choses les physiciens ont implémenté l'idée de supersymétrie dans le cadre de la mécanique quantique. En effet cette idée repose sur la factorisation de l'opérateur Hamiltonien qui décrit les particules en terme d'opérateur de création et d'annihilation (ou destruction) des fermions. une fois l'opérateur Hamiltonien factorisé à partir du potentiel de départ on associe une fonction appelée superpotentiel (suivant l'idée de la supersymétrie). Une fois le superpotentiel obtenu la fonction d'onde de l'état fondamental est dérivée à partir de Riccati ainsi que l'énergie de l'état fondamental. L'utilisation de la supersymétrie pour les niveaux excités impose des restrictions sur la forme du potentiel, celui ci doit obéir à la condition dite d'invariance de forme s'établit à l'aide des potentiels partenaires supersymétrique. Il existe beaucoup de résultats analytiques sur la résolution de l'équation de schrödinger associée au Hamiltonien de Bohr pour certains potentiels d'intérêts physiques. Ces méthodes sont généralement basées sur la résolution du problème aux valeurs propres résultant de l'équation de schrödinger. Elle genère cependant trop

de contraintes pendant la résolution et fournissent les valeurs propres d'énergies en seul bloc. Ce qui ne favorise pas une meilleure prise en compte des niveaux de la bande du fondamental et de la bande γ . La supersymétrie a cet aspect d'assez particulier qu'elle génère moins de contraintes sur les paramètres du potentiel (donne plus de liberté au système), mais également permet de mieux prendre en compte les états énergétiques de la bande du fondamental et de la bande γ . D'où l'intérêt de cette méthode. Dans cette section nous résumons les éléments de la mécanique quantique supersymétrique utilisée pour résoudre l'équation de Schrödinger de l'hamiltonien de Bohr en utilisant le potentiel couplé de Kratzer écranté et de Hulthén. Pour plus de détails sur le sujet, nous proposons la référence [107]. On considère une équation d'onde quantique de type Schrödinger pour l'état fondamental avec une énergie propre égale à zéro (cela se fait en redéfinissant le potentiel en ajoutant un terme constant égal à moins l'énergie de l'état fondamental). Ainsi, la fonction d'onde de l'état fondamental $\psi_0(x)$ obéit à :

$$\hat{H}_1 \psi_0(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_0(x)}{dx^2} + V_1(x) \right) \psi_0(x) = 0 \quad (\text{II.7})$$

Avec :

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}. \quad (\text{II.8})$$

Ensuite, l'opérateur \hat{H}_1 peut être factorisé comme suit :

$$\hat{H}_1 = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{V_1(x)} \right) \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{V_1(x)} \right). \quad (\text{II.9})$$

Puis à partir de l'équation ci-dessus, nous introduisons l'opérateur suivant :

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{V_1(x)} \quad , \quad A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{V_1(x)}. \quad (\text{II.10})$$

Permettant de réécrire \hat{H}_1 comme $\hat{H}_1 = A^\dagger A$. Il s'ensuit que pour un $V_1(x)$ connu, le superpotential $W(x)$ doit satisfaire l'équation de Riccati :

$$V_1(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} + [W(x)]^2. \quad (\text{II.11})$$

En utilisant l'équation (II-4), le super potentiel peut être calculé en fonction de la fonction d'onde de l'état fondamental comme :

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}. \quad (\text{II.12})$$

A partir de l'équation ci-dessus, la fonction d'onde de l'état fondamental peut être obtenue comme suit :

$$\psi_0(x) = N_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy\right) \quad (\text{II.13})$$

De plus, il est possible de construire un nouvel opérateur hamiltonien \hat{H}_2 en intervertissant l'ordre des opérateurs A^\dagger et A on peut écrire :

$$\hat{H}_2 = AA^\dagger$$

qui peut s'écrire plus explicitement comme :

$$\hat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2} + V_2(x), \quad (\text{II.14})$$

où

$$V_2(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} + [W(x)]^2. \quad (\text{II.15})$$

Les potentiels $V_1(x)$ et $V_2(x)$ sont appelés potentiels partenaires super symétriques, ayant de nombreuses propriétés intéressantes. Pour plus de détails, on peut se référer à la référence [107]. Il est important de noter que les fonctions propres et les valeurs propres de \hat{H}_1 et \hat{H}_2 sont liées de la manière suivante :

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} A \psi_{n+1}^{(1)} \quad , \quad \psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} A^\dagger \psi_n^{(2)}. \quad (\text{II.16})$$

et

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad , \quad E_0^{(1)} = 0. \quad (\text{II.17})$$

II.7 Équations générales des mouvements régissant les déformations et les interactions nucléaires

Le physicien Autrichien Erwin Schrödinger avait en 1926, décrit l'équation d'évolution des états dynamiques d'un système quantique [114]. L'état d'un système est décrit par une fonction d'onde ψ qui peut être considéré comme un vecteur de l'espace des états. Le vecteur d'état représente par un paquet d'onde, un groupe d'ondes plus ou moins stable. L'espace des états est associé à un espace de Hilbert construit dans le corps des nombres complexes. Dans ce travail, le mouvement des nucléides sera suivi par l'équation de Schrödinger. Cependant, nous considérerons la forme sphérique de l'équation de Schrödinger pour nous permettre de décrire les interactions nucléaires et les déformations.

II.8 Équations des déformations nucléaires

Dans cette partie, nous partons du Hamiltonien de Bohr sous la forme sphérique en se basant sur l'équation de Schrödinger suivante :

$$\hat{H}\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = E\psi(\beta, \gamma, \theta_i), \quad (\text{II.18})$$

où \hat{H} représente l'opérateur Hamiltonien composé de deux parties, cinétique et potentielle,

E représente l'énergie du nucléide et ψ représente la fonction d'onde du nucléide considéré.

Le Hamiltonien \hat{H} est donné par l'expression [115] :

$$\hat{H} = E_c + V(\beta, \gamma), \quad (\text{II.19})$$

où E_c est l'énergie cinétique donnée par l'expression :

$$E_c = \frac{\hat{p}^2}{2B}, \quad (\text{II.20})$$

avec

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right]. \quad (\text{II.21})$$

En tenant compte des Eqs. (II.20 et II.21), l'Eq. (II.19) prend la forme du Hamiltonien :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V(\beta, \gamma). \quad (\text{II.22})$$

L'introduction de la notion des déformations (rotation et vibration) dans l'expression de l'opérateur Hamiltonien. Donne :

$$\hat{H} = T_{vib} + T_{rot} + V(\beta, \gamma), \quad (\text{II.23})$$

avec

$$T_{rot} = \frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right], \quad (\text{II.24})$$

T_{rot} représente le Hamiltonien relatif aux rotations des nucléides,

$$T_{vib} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right], \quad (\text{II.25})$$

T_{vib} représente les vibrations des nucléides.

Posons : $T_{vib} = T_\beta + T_\gamma$ avec

$$T_\beta = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right], \quad (\text{II.26})$$

et

$$T_\gamma = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} \right]. \quad (\text{II.27})$$

En tenant compte des Eqs. (II.18 et II.22) on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] \psi(\beta, \gamma, \theta_i) \\ + V(\beta, \gamma) \psi(\beta, \gamma, \theta_i) = E \psi(\beta, \gamma, \theta_i), \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

où β et γ sont les coordonnées intrinsèques, qualifiant les différentes déformations liées aux vibrations des nucléides.

Les \widehat{Q}_k^2 sont les composantes du moment angulaire, $k = 1, 2, 3$ représentent les trois axes de coordonnées ;

$\theta_i (i = 1, 2, 3)$ sont les angles d'Euler ;

E_c est l'énergie cinétique du nucléide qui s'identifie aux diverses rotations effectuées par les nucléides ;

\hat{p} est l'opérateur impulsion du mouvement ;

$V(\beta, \gamma)$ est l'énergie potentielle du système ;

B est la masse totale du nucléide en mouvement ;

$\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ est la fonction d'onde.

Dans la théorie quantique, le Hamiltonien du Bohr \hat{H} est appelé observable et E la valeur propre, qui représente l'énergie totale du système étudié.

L'Eq.(II.24) traduit l'équation générale des mouvements de déformation des nucléides pour le système. Cette équation sera utilisée dans la suite de notre travail.

II.9 Techniques de séparations des mouvements de la déformation et des interactions

II.9.1 Méthode de séparation des mouvements de déformations des nucléides

En rappel, l'énergie potentielle $V(\beta, \gamma)$ et la fonction d'onde $\psi(\beta, \gamma, \theta_i)$ étant quasiment séparables [116], on aboutit à deux équations hypergéométriques correspondant respectivement aux mouvements de rotation et vibration dûs aux variables β et γ des nucléides. Pour cela, on pose :

$$V(\beta, \gamma) = V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2}, \quad (\text{II.29})$$

avec $V_1(\beta)$ qui représente l'énergie potentielle suivant la coordonnée β et $V_2(\gamma)$, l'énergie potentielle suivant la coordonnée γ .

En introduisant l'Eq.(II.29) dans l'Eq.(II.28), le Hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2}. \quad (\text{II.30})$$

La fonction d'onde s'écrit :

$$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i), \quad (\text{II.31})$$

avec $\chi(\beta)$ et $\eta(\gamma)$ des fonctions d'ondes suivant les coordonnées β et γ respectivement, tandis que $D(\theta_i)$ est la composante angulaire de la fonction d'onde, appelée fonction d'onde de Wigner, qui est une fonction symétrique ayant pour expression :

$$D(\theta_i) = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)]. \quad (\text{II.32})$$

Dans l'Eq. (II.32), L est le nombre quantique du moment angulaire, α est la projection du moment quantique angulaire par rapport aux coordonnées fixes et $\nu = 1, 2, 3, \dots$. Dans la pratique, le découplage de l'équation du Hamiltonien n'est possible que pour les nucléides triaxiaux dont le

mouvement de rotation a une énergie potentielle minimale (c'est-à-dire $\gamma = \frac{\pi}{6}$) [117]. Dans le cas contraire, les différents mouvements décrits par les nucléides restent liés donc, la séparation des variables est quasi impossible.

Posons :

$$W = \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\widehat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)}. \quad (\text{II.33})$$

Puisque que $\gamma = \frac{\pi}{6}$, alors :

$$W = \widehat{Q}_1^2 + 4\widehat{Q}_2^2 + 4\widehat{Q}_3^2. \quad (\text{II.34})$$

Le moment angulaire total \widehat{Q} , représente la somme des composantes des moments angulaires suivants les différents axes :

$$\widehat{Q} = \widehat{Q}_1^2 + \widehat{Q}_2^2 + \widehat{Q}_3^2 \quad (\text{II.35})$$

Compte tenu de l'expression de \widehat{Q} , l'Eq. (II.28) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} W &= 4(\widehat{Q}_1^2 + \widehat{Q}_2^2 + \widehat{Q}_3^2) - 3\widehat{Q}_1^2 \\ &= 4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2. \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

En tenant compte de toutes les expressions précédentes, l'Eq. (II.24) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} (4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2) \right] \chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) \\ + \left(V_1(\beta) + \frac{V_2(\gamma)}{\beta^2} \right) \chi(\beta)\eta(\gamma)\Theta(\theta_i) = E\chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

En appliquant l'opérateur \widehat{Q}^2 [77] sur la fonction d'onde de Wigner, l'Eq. (II.32) s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{Q}^2 \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)] \\ = 4L(L+1) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [\Theta_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)]. \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

De même, en appliquant \widehat{Q}_1^2 sur la fonction de Wigner, l'Eq. (II.28) devient :

$$\begin{aligned} & \widehat{Q}_1^2 \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)] \\ & = (\alpha^2 + L - \alpha) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\alpha,0})}} [D_{\nu,\alpha}(\theta_i) + (-1)^L D_{\nu,-\alpha}^L(\theta_i)]. \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

L représente le nombre quantique du moment angulaire et α la projection du moment quantique angulaire par rapport aux axes fixes.

L'introduction des Eqs. (II.38 et II.39) dans le troisième terme de l'opérateur Hamiltonien de l'Eq. (II.33), donne :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2B} \left[-\frac{1}{4\beta^2} (4\widehat{Q}^2 - 3\widehat{Q}_1^2) \right] \chi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i) &= \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \chi(\beta)\eta(\gamma) \left(4\widehat{Q}^2 D(\theta_i) - 3\widehat{Q}_1^2 D(\theta_i) \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{8B\beta^2} \chi(\beta)\eta(\gamma) \left(4L(L+1)D(\theta_i) - 3(\alpha^2 + L - \alpha)D(\theta_i) \right). \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

On multiplie maintenant l'Eq. (II.37) par $-\frac{2B}{\hbar^2}$ et on pose :

$$\begin{aligned} v_1(\beta) &= \frac{2B}{\hbar^2} V_1(\beta), \\ v_2(\beta) &= \frac{2B}{\hbar^2} V_2(\beta), \\ \xi &= \frac{2B}{\hbar^2} E. \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

Il faut rappeler que les effets de la projection de α sur les coordonnées fixes font introduire les nombres quantiques apparents n_ω [118] tels que $n_\omega = L - \alpha$ avec $L = n_\omega, n_{\omega+2}, n_{\omega+4}, \dots$. Pour $n_\omega = 0$, le nucléide est dans son état fondamental.

Les Eqs (II.42 et II.43) ci-dessous, décrivent les mouvements de rotation γ et les mouvements de vibration β . Les solutions de l'équation décrivant les mouvements de rotation des nucléides sont connues.

$$\left[-\frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \omega(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \lambda \eta(\gamma), \quad (\text{II.42})$$

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{4L(1+L) - 3\alpha^2 + 4\lambda}{4\beta^2} + u(\beta) \right] \psi(\beta) = \xi \psi. \quad (\text{II.43})$$

II.9.2 Solution de la partie γ

Pour les noyaux triaxiaux, la variable γ oscille uniformément entre $\gamma = 0^\circ$ et $\gamma = 60^\circ$. Supposons que la partie γ du potentiel est un oscillateur harmonique ayant un minimum profond $\gamma = \frac{\pi}{6}$. La surface d'énergie potentielle correspondante doit avoir un minimum autour de $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Aussi, lorsque le nucléide est en rotation, il passe de la forme élliptique à la forme sphérique et vice-versa. Dans la suite, le potentiel harmonique peut être considéré comme :

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{2}\tilde{c}\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right)^2. \quad (\text{II.44})$$

On définit \tilde{c} comme étant la rigidité du potentiel. En insérant l'Eq.(II.44) dans l'Eq. (II.37) et en résolvant l'équation obtenue, on obtient l'énergie et les fonctions d'ondes normalisées[30] respectivement :

$$\lambda_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{2\tilde{c}}\left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2}\right), \quad \tilde{n}_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{II.45})$$

et

$$\eta_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n_{\tilde{\gamma}}}\sqrt{\pi}n_{\tilde{\gamma}}!}} H_{n_{\tilde{\gamma}}}\left((\tilde{c}/2)^{1/4}\tilde{\gamma}\right) \exp\left(-(\tilde{c}/2)^{1/2}\tilde{\gamma}^2/2\right), \quad (\text{II.46})$$

avec $\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{6}$, $n_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots$ est le nombre quantique de l'oscillateur et $H_{n_{\tilde{\gamma}}}$ est le polynôme de Hermite.

II.9.3 Solution de la partie β

Dans cette section, nous considérons le potentiel couplé Kratzer écranté et Hulthen comme le potentiel d'interaction de notre système quantique sous la forme :

$$V(\beta) = V_0 - \frac{be^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})} + \left(\frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^2}\right) e^{-k\beta} \quad (\text{II.47})$$

où a, b, c et V_0 sont des paramètres ajustables et k est le paramètre de blindage du potentiel. Ce potentiel peut être considéré comme un cas général d'autres potentiels selon les valeurs de ses

paramètres :

\implies le potentiel inverse de Yukawa ou de Coulomb écranté [108] si $b = c = V_0$ est défini comme suit :

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta} e^{-k\beta}, \quad (\text{II.48})$$

\implies le potentiel quadratique inverse de Yukawa [109] si $b = c = V_0$ est défini comme suit :

$$V(\beta) = \frac{c}{\beta^2} e^{-k\beta}, \quad (\text{II.49})$$

\implies le potentiel de Kratzer [110] si $b = k = V_0$ est défini comme suit :

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^2}, \quad (\text{II.50})$$

\implies le potentiel de Kratzer écranté [111] si $b = V_0$ défini comme suit :

$$V(\beta) = \left(\frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^2} \right) e^{-k\beta}, \quad (\text{II.51})$$

\implies le potentiel de Coulomb [112] si $b = c = k = V_0$, défini comme suit :

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta}. \quad (\text{II.52})$$

Dans la suite pour avoir une meilleure description de la vibration des noyaux surtout à grande et à petite distance, en effet le potentiel de Kratzer est une forme coulombienne étendue tandis que le potentiel de Hulthen est simplement un coulombien modifié. Le terme d'écrantage quant à lui vient simplement rendre compte (au mieux) des propriétés de confinement. Pour prendre en compte simultanément tous ces aspects, nous utiliserons le potentiel combiné de Hulthen et Kratzer écranté car ce potentiel s'est avéré être la meilleure combinaison possible pour établir un nouveau modèle, en tenant compte des vibrations et des rotations des nucléides. Les solu-

tions de ce modèle sont explorés par la méthode de la mécanique quantique super symétrique pour déterminer l'énergie du spectre, la fonction d'onde ainsi les transitions quadrupolaires électriques B(E2).

En utilisant la transformation, $\psi(\beta) = \frac{1}{\beta^2} \phi(\beta)$ et en remplaçant l'équation (II.43) par l'équation (II.39) on obtient :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \xi - V_0 + \frac{be^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})} - \left(\frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^2} \right) e^{-k\beta} - \frac{W}{\beta^2} \right] \phi(\beta) = 0, \quad (\text{II.53})$$

où, $W = 2 + L(L + 1) - \frac{3\xi^2}{4} + \lambda$.

Pour obtenir des solutions analytiques exactes de l'équation (II.53), nous utilisons l'approximation de Greene-Aldrich [113 ;114] sur la barrière centrifuge et le terme coulombien :

$$\frac{1}{\beta} \approx \frac{k}{(1 - e^{-k\beta})} \quad , \quad \frac{1}{\beta^2} \approx \frac{k^2 e^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})^2}. \quad (\text{II.54})$$

De plus l'Eq(II.54) nous permet d'écrire l'Eq(II.55) comme :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \xi - V_0 + \frac{(b - ak)e^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})} - \frac{k^2 W e^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})^2} - \frac{ck^2 e^{-2k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})^2} \right] \phi(\beta) = 0. \quad (\text{II.55})$$

A partir de l'équation (II.55) on peut extraire le potentiel effectif de notre modèle sous la forme :

$$V_{eff} = V_0 + \frac{(b - ak) \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} - \frac{k^2 W \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} - \frac{ck^2 \exp(-2k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2}. \quad (\text{II.56})$$

Dans la mécanique quantique super symétrique , la fonction d'onde pour l'état fondamental dépend de la forme du super potentiel et s'écrit généralement :

$$\psi_0(\beta) = N_{0l} \exp \left[- \int_0^\beta W(x) dx \right] \quad (\text{II.57})$$

En considérant la super algèbre, l'ansatz suivant est suggéré pour le potentiel :

$$W(\beta) = - \left(A + \frac{B \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} \right) \quad (\text{II.58})$$

$$W^2(\beta) - \frac{dW(\beta)}{d\beta} = A^2 + \frac{2AB \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} + \frac{B^2 \exp(-2k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} - \frac{kB \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} \quad (\text{II.59})$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} A^2 + \frac{2AB \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} + \frac{B^2 \exp(-2k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} - \frac{kB \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} = \\ -\xi_\beta + V_0 - \frac{(b - ak) \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} + \frac{k^2 W \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} + \frac{ck^2 \exp(-2k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

Par identification, le jeu d'équations suivant est obtenu pour les inconnues :

$$\begin{cases} A^2 = -\xi_\beta + V_0 \\ 2AB - kB = k^2 W - b + ak \\ B^2 - 2AB = k^2 c + b - ak \end{cases} \quad (\text{II.61})$$

$$B^2 - kB = k^2 (W + c). \quad (\text{II.62})$$

En utilisant l'équation (II.57), la fonction d'onde de l'état fondamental est obtenue comme suit :

$$\psi_{0L}(\beta) = N_{0L} \exp \left[- \int_0^\beta - \left(A + \frac{B \exp(-kx)}{(1 - \exp(-kx))} \right) dx \right] = N_{0L} \exp(A\beta) (1 - \exp(-kx))^\beta. \quad (\text{II.63})$$

Selon l'équation ci dessus ,la fonction d'onde à l'état fondamental sera physiquement acceptable si $A < 0$ et $B > 0$. Alors la résolution de l'équation (II.61) est donnée par :

$$B_{1,2} = \frac{k}{2} \pm \frac{k}{2} \sqrt{1 + 4(W + c)}. \quad (\text{II.64})$$

En considérant le cas $B > 0$, soit $B = \frac{k}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4(W + c)}\right)$ et en utilisant l'Eq(II.61), on trouve :

$$A = \frac{B}{2} - \frac{(k^2c - b - ak)}{2B}. \quad (\text{II.65})$$

Ensuite en utilisant l'expression de A , l'énergie de l'état fondamental est obtenue comme suit :

$$\xi_{0\beta} = V_0 - \left[\frac{k}{4} \left(1 + \sqrt{1 + 4(W + c)}\right) - \frac{\left(kc + \frac{b}{k} - a\right)}{\left(1 + \sqrt{1 + 4(W + c)}\right)} \right]^2. \quad (\text{II.66})$$

Pour obtenir les potentiels partenaires super symétriques $V_+(\beta)$ et $V_-(\beta)$, nous utilisons l'équation (II.59) comme suit :

$$V_+(\beta) = W^2(\beta) + \frac{dW(\beta)}{dx} = A^2 + \frac{(2AB + kB) \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} + \frac{(B^2 + kB) \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} \quad (\text{II.67})$$

$$V_-(\beta) = W^2(\beta) - \frac{dW(\beta)}{dx} = A^2 + \frac{(2AB - kB) \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} + \frac{(B^2 - kB) \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2}. \quad (\text{II.68})$$

La condition d'invariance est introduite par :

$$R(\beta_1) = V_+(B, \beta) - V_-(B_1, \beta) = [A^2 - A_1^2] \quad (\text{II.69})$$

$$R(\beta_1) = \left(\frac{B}{2} - \frac{(k^2c + b - ak)}{2B} \right)^2 + \left(\frac{B + k}{2} - \frac{(k^2c + b - ak)}{2(B + k)} \right)^2. \quad (\text{II.70})$$

Alors en considérant l'application suivante : $B \rightarrow B + k$ nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} B \rightarrow B_1 = B + k \\ B_2 = B + 2k \\ \cdot \\ \cdot \\ B_n = B + nk \end{array} \right. \quad (\text{II.71})$$

tel que :

$$\begin{aligned} R(\beta_n) &= V_+ [(B(m-1)k, \beta)] - V_- [(B + mk, \beta)] \\ &= \left[\left(\frac{(B+k)m}{2} - \frac{(k^2c + b - ak)}{2(B+k)m} \right)^2 + \left(\frac{B + (m-1)k}{2} - \frac{(k^2c + b - ak)}{2(B + (m-1)k)} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Il apparait clairement que l'expression ci dessus est β - indépendante. Ainsi, nous pouvons calculer les valeurs propres de l'énergie comme suit :

$$\begin{aligned} \xi_{nL} &= \xi_{0L} + \sum_{m=0}^n R(B_m) \\ &= V_0 - \left[\frac{k}{4} \left(1 + \sqrt{1 + 4(W+c)} \right) - \frac{\left(kc - \frac{b}{k} - a \right)}{\left(1 + \sqrt{1 + 4(W+c)} \right)} \right]^2 \\ &\quad - \left(\frac{(B+k)}{2} - \frac{\sigma^2}{2(B+k)} \right)^2 + \left(\frac{B}{2} + \frac{\sigma^2}{2B} \right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{(B+2k)}{2} - \frac{\sigma^2}{2(B+2k)} \right)^2 - \dots - \left(\frac{B(n-1)k}{2} - \frac{\sigma^2}{2(B+(n-1)k)} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{(B+(n-2)k)}{2} - \frac{\sigma^2}{2(B+(n-2)k)} \right)^2 + \left(\frac{B(n-2)k}{2} + \frac{\sigma^2}{2(B+(n-2)k)} \right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{(B+kn)}{2} + \frac{\sigma^2}{2(B+nk)} \right)^2 + \left(\frac{B(n-1)k}{2} - \frac{\sigma^2}{2(B+(n-1)k)} \right)^2. \end{aligned}$$

En faisant un peu d'algèbre, l'équation d'énergie est obtenue comme suit :

$$\xi_{nL} = V_0 - \left[\frac{k \left(1 + \sqrt{9 + 4c + 4L(L+1) - 3\alpha^2 + \lambda} \right)}{4} - \frac{\left(kc + \frac{b}{k} - a \right)}{\left(1 + \sqrt{9 + 4c + 4L(L+1) - 3\alpha^2 + \lambda} \right)} \right]^2 - \left[\frac{k \left(1 + \sqrt{9 + 4c + 4L(L+1) - 3\alpha^2 + \lambda} \right) + 2kn}{4} - \frac{k^2c + b - ka}{k \left(1 + \sqrt{9 + 4c + 4L(L+1) - 3\alpha^2 + \lambda} \right) + 2kn} \right]^2.$$

II.10 Moment de transition quadripolaire électrique

Le moment de transition quadripolaire électrique permet de déterminer les différentes transitions des nucléides.

II.10.1 Moment de transition quadripolaire nucléaire

Le moment de transition quadripolaire nucléaire est un caractère fondamental associé au noyau. Ce moment est lié à la répartition non purement sphérique au sein du noyau. En effet sa mesure nous permet de sonder la déformation géométrique du noyau de sa forme sphérique. Il permet aussi de donner tous les détails sur des énergies de chaque niveau. Celui-ci singularise et particularise chaque nucléon en indiquant s'il se trouve au niveau fondamental, γ ou β . L'équation quadripolaire électrique est régie par [116-123] :

$$T_{\mu}^{(E2)} = t\beta \left[D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right) \sin \left(\gamma - \frac{2\pi}{3} \right) \right], \quad (\text{II.72})$$

où θ_i sont les angles d'Euler, t un scalaire, $D_{\mu,\alpha}^{(2)}(\theta_i)$ sont définies comme des fonctions de Wigner pour les angles d'Euler, μ est le niveau concerné et L le nombre quantique du moment angulaire.

■ Pour $\gamma = \frac{\pi}{6}$, l'opérateur quadripolaire se réduit à :

$$T_{\mu}^{(E2)} = -\frac{t\beta}{\sqrt{2}} \left(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i) \right). \quad (\text{II.73})$$

Ainsi, les différentes probabilités de transitions B(E2) [123-124] des niveaux i vers les niveaux f

sont définies par :

$$B(E2; L_i \alpha_i \longrightarrow L_f \alpha_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle L_f \alpha_f || T^{(E2)} || L_i \alpha_i \rangle|^2}{2L_i + 1}, \quad (\text{II.74})$$

où $L_i \alpha_i$ et $L_f \alpha_f$ représentent les énergies des niveaux i et f respectivement et $|\langle L_f \alpha_f || T^{(E2)} || L_i \alpha_i \rangle|^2$ est une quantité matricielle calculée à partir du théorème de Wigner-Eckart[109]. Ces éléments de matrice sont donnés par :

$$\langle L_f M_f \alpha_f | T_{\mu}^{(E2)} | L_i M_i \alpha_i \rangle = \frac{\langle L_f \alpha_f || T^{(E2)} || L_i \alpha_i \rangle}{\sqrt{2L_f + 1}} \langle L_i 2L_f | M_i \mu M_f \rangle. \quad (\text{II.75})$$

La fonction d'onde associée à cette transition est donnée par :

$$\psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \sqrt{\frac{2L + 1}{16\pi^2 (1 + \delta_{\alpha,0})}} \left[D_{\mu, \alpha}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu, -\alpha}^L(\theta_i) \right] \xi_{n, n_{\omega}, L, n_{\tilde{\gamma}}}(\beta) \eta_{n_{\tilde{\gamma}}}(\tilde{\gamma}). \quad (\text{II.76})$$

Afin de calculer les éléments de la matrice de l'opérateur quadrupolaire de l'Eq. (II.71), l'intégrale à travers $\tilde{\gamma}$ est égale à l'unité à cause de la méthode de normalisation des fonctions d'ondes [91]. L'intégrale à travers les angles d'Euler est déformée par l'intégrale principale des trois fonctions de Wigner et l'intégrale à travers β prend la forme [124] :

$$I(n_i, L_i, \alpha_i, n_f, L_f, \alpha_f) = \int \beta \xi_{n_i, L_i, \alpha_i}(\beta) \xi_{n_f, L_f, \alpha_f}(\beta) \beta^4 d\beta, \quad (\text{II.77})$$

où les facteurs β et β^4 proviennent de l'opérateur quadrupolaire et l'élément de volume respectivement.

En utilisant le théorème de Wigner-Eckart, l'Eq. (II.70) prend la forme :

$$B(E2; L_i, \alpha_i \longrightarrow L_f, \alpha_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{t^2}{2} \frac{1}{(1 + \delta_{\alpha_i, 0})(1 + \delta_{\alpha_f, 0})} \times \\ \left[(L_i, 2, L_f | \alpha_i, 2, \alpha_f) + (L_i, 2, L_f | \alpha_i, -2, \alpha_f) + (-1)^{L_i} (L_i, 2, L_f | -\alpha_i, 2, \alpha_f) \right]^2 \times \\ [I(n_i, L_i, \alpha_i, n_f, L_f, \alpha_f)]^2. \quad (\text{II.78})$$

Les trois coefficients de Clebsch-Gordan (CCG) [125-127] apparaissant dans l'équation ont été déduits par ses propriétés (seulement les transitions $\Delta\alpha = \pm 2$ sont permises). En effet, le premier CCG ne disparaît que si $\alpha_i + 2 = \alpha_f$, tandis que le second CCG ne disparaît que si $\alpha_i - 2 = \alpha_f$ et le troisième CCG ne disparaît que si $\alpha_i + \alpha_f = 2$. Ce dernier ne peut être valable que dans

quelques cas particuliers. Les résultats de la partie angulaire de cette équation sont connus.

L'état fondamental est caractérisé par $n_\omega = L - \alpha = 0$ et ses transitions sont caractérisées par $\alpha_i = L_i$ et $\alpha_f = L_f$ [123-125]. En normalisant les taux de B(E2) pour les faibles transitions au sein de l'état fondamental on obtient :

$$R_{ground \rightarrow ground}(L + 2 \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L + 2)_g \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.79})$$

Les niveaux paires de la bande γ sont caractérisés par $n_\omega = L - \alpha = 2$, ce qui signifie que $\alpha = L - 2$.

Pour l'état fondamental, $n_{\omega f} = 0$, $n_f = 0$ et pour la bande γ des valeurs paires de L , $n_{\omega i} = 2$, $n_i = 0$ et le taux de transition est donné par :

$$R_{\gamma\text{-even} \rightarrow ground}(L \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-even}} \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.80})$$

Pour la bande γ des valeurs impaires de L , $n_{\omega i} = 1$, $n_i = 0$ et le taux de transition des niveaux impairs de la bande γ vers l'état fondamental est donné par :

$$R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow ground}(L \rightarrow L + 1) = \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-odd}} \rightarrow (L + 1)_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.81})$$

Pour les transitions des niveaux impairs de la bande γ vers les niveaux impairs de la bande γ inférieurs, on a :

$$R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \gamma\text{-even}}(L + 2 \rightarrow L) = \frac{B(E2; (L + 2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.82})$$

Les transtions des niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L vers niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L inférieures sont données par :

$$R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \gamma\text{-odd}}(L \rightarrow L - 1) = \frac{B(E2; (L + 2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.83})$$

De même, pour les niveaux de bande γ pour les valeurs impaires de L vers les niveaux de bande

γ pour les valeurs paires de L , on a :

$$R_{\gamma\text{-odd}\rightarrow\gamma\text{-even}}(L \rightarrow L - 1) = \frac{B(E2; L_{\gamma} \rightarrow (L - 1)_{\gamma})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)}. \quad (\text{II.84})$$

Pour le premier état excité, c'est-à-dire pour les niveaux de la bande β , $n_{\omega_f} = 0$, $n_f = 1$ et

$$R_{\beta\text{-band}\rightarrow\beta\text{-band}}(L \rightarrow L - 1) = \frac{B(E2; L_{\beta\text{-band}} \rightarrow (L - 1)_{\beta\text{-band}})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \quad (\text{II.85})$$

II.11 Conclusion

Dans ce chapitre, il était question de trouver les solutions analytiques de notre modèle à partir de l'équation hypergéométrique le régissant. Cette équation des mouvements des nucléides étant couplée par les différents paramètres du système, nous avons utilisé des techniques mathématiques appropriées pour résoudre le problème. Parmi ces techniques : \implies La méthode de séparation des variables, qui nous a permis d'obtenir deux équations du mouvement, indépendantes en fonction des paramètres du système à partir du Hamiltonien de Bohr de notre modèle ; l'une régissant des mouvements de rotation et qui est fonction du paramètre rotation γ et l'autre décrivant les mouvements de vibration des nucléides qui est une fonction du paramètre de vibration β .

\implies La mécanique quantique supersymétrique nous a permis résoudre l'équation des mouvements de vibration. Elle nous a conduit à l'obtention de l'énergie. Dans la suite du travail nous présentons les résultats théoriques obtenus par la solution de notre modèle. Une comparaison avec les résultats expérimentaux trouvés dans la littérature et ceux trouvés en utilisant le potentiel couplé de Hulthen et de Kratzer écranté est faite suivi d'une discussion liée à la validité de notre modèle.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous avons déterminé par la méthode de la mécanique quantique super symétrique, les solutions des équations hypergéométriques qui régissent le modèle du Hamiltonien de Bohr par la détermination des propriétés du noyau du platine. Les différents résultats théoriques obtenus seront comparés aux données expérimentales des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$ (car pour ces isotopes de platine nous avons les résultats expérimentaux dans la littérature pour mieux tester la fiabilité de notre modèle) ainsi que leurs interprétations. Les courbes des effets d'étalonnages sont tracées et comparées à celles de la symétrie Z(5) et les données expérimentales utilisées avec les potentiels de Morse et du couplage Killingbeck Morse.

III.2 Présentation des résultats et discussion

Les énergies de niveau de chaque nucléide sont obtenues en utilisant l'Eq. (II.99). La forme normalisée de l'Eq. (II.99) est [128] :

$$R_{n,L,n_\omega} = \frac{E_{n,L,n_\omega} - E_{0,0,0}}{E_{0,2,0} - E_{0,0,0}}, \quad (\text{III.1})$$

où

n : le nombre quantique principal,

n_ω : le nombre quantique secondaire,

L : le nombre quantique cinétique,

$E_{0,2,0} - E_{0,0,0}$, est défini comme les rapports des énergies normalisées au premier état excité,

E_{L^+,n_ω} , représente l'énergie du noyau dans l'état L_n^+, n_ω .

Ainsi,

\Rightarrow la bande de l'état fondamental est donnée en considérant $n = 0$ et $n_\omega = 0$, la bande γ ,

$n = 0$ et $n_\omega = 1$ pour les valeurs impaires de L , tandis que $n = 0$ et $n_\omega = 2$ pour les valeurs paires de L et la bande β quand à elle, est identifiée pour $n = 1$ et $n_\omega = 0$.

TABLE 2 – Comparaison des résultats théoriques de l'état fondamental, des bandes β et γ des énergies avec esM [133], esKM[134], les données expérimentales [130, 131, 132]

L_{band}	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	Exp	esM	esKM	Our	Exp	esM	esKM	Our	Exp	esM	esKM	Our
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.479	2.475	2.598	2.462	2.470	2.445	2.486	2.462	2.465	2.509	2.321	2.440
6_g^+	4.314	4.317	3.597	4.144	4.299	4.280	4.488	4.143	4.290	4.440	3.440	4.072
8_g^+	6.377	6.492	4.836	5.799	6.392	6.509	6.728	5.797	6.333	6.767	4.823	5.667
10_g^+	8.624	9.001	6.285	7.220	8.671	9.148	9.073	7.212	8.558	9.489	6.432	7.053
2_γ^+	1.935	1.907	2.307	1.906	1.894	1.888	1.863	1.906	1.936	1.923	1.993	1.895
3_γ^+	2.910	2.364	2.743	2.727	2.809	2.716	2.788	2.727	2.845	2.795	2.483	2.699
4_γ^+	3.795	4.815	3.877	4.557	3.743	4.784	5.016	4.556	3.636	4.969	3.752	4.470
5_γ^+	4.682	5.060	4.016	4.753	4.563	5.034	5.272	4.752	4.525	5.230	3.907	4.659
6_γ^+	5.905	7.875	5.635	6.645	5.863	7.956	8.053	6.641	5.644	8.263	5.711	6.487
7_γ^+	6.677	7.647	5.503	6.517		7.717	7.841	6.513		8.016	5.564	6.362
8_γ^+	8.186	11.203	7.545	8.067	8.186	11.503	10.920	8.052	7.730	11.900	7.825	7.923
0_β^+	3.776	3.567	5.117	3.757	3.858	2.349	3.716	3.806	3.192	3.512	4.931	2.785
2_β^+	4.547	4.568	5.617	4.572	4.603	3.350	4.717	4.620	3.828	4.542	5.427	3.609
4_β^+	6.110	6.087	6.338	5.757	5.817	4.881	6.254	5.804	4.318	6.140	6.235	4.795
σ		0.988	0.935	0.478		1.202	0.989	0.505		1.450	1.075	0.558

Nous présentons dans le tableau 2, les valeurs des rapports des énergies de la bande de l'état fondamental (2_g^+ , 4_g^+ , 6_g^+ , 8_g^+ , 10_g^+ , 12_g^+ et 14_g^+), de la bande γ (2_γ^+ , 3_γ^+ , 4_γ^+ , 5_γ^+ , 6_γ^+ , 7_γ^+ , 8_γ^+ et 9_γ^+) et la bande β (0_β^+ , 2_β^+ et 4_β^+) par rapport au premier état excité des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$. Les différentes valeurs des écarts types des trois isotopes ont été présentées. Ce facteur est défini comme la déviation moyenne des prédictions théoriques par rapport aux données expérimentales. Il est donné par la relation suivante [114] :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (E_i^{\text{exp}} - E_i^{\text{theo}})^2}{m-1}}. \quad (\text{III.2})$$

où E_i^{exp} et E_i^{theo} sont les énergies expérimentales et théoriques de niveau i respectivement et m le nombre des énergies de niveau considéré.

Discutons maintenant les différentes valeurs obtenues :

⇒ **Bande de l'état fondamental** : (2_g^+ , 4_g^+ , 6_g^+ , 8_g^+ , 10_g^+ , 12_g^+ et 14_g^+)

-Ces valeurs montre que dans l'état 4_g^+ , la valeur théorique du ^{192}Pt est inférieure à la valeur expérimentale. En ce qui concerne les états 6_g^+ à 10_g^+ , les valeurs théoriques sont inférieures aux

valeurs expérimentales.

-pour les isotopes de ^{194}Pt et ^{196}Pt , toutes les valeurs théoriques obtenues sont inférieures aux données expérimentales dans les 4_g^+ à 10_g^+ .

\implies **Bande γ** : (2_γ^+ , 3_γ^+ , 4_γ^+ , 5_γ^+ , 6_γ^+ , 7_γ^+ , 8_γ^+ et 9_γ^+)

- dans les états 2_γ^+ , 3_γ^+ , 7_γ^+ et 8_γ^+ on constate que les valeurs expérimentales des isotopes du $^{192,194,196}\text{Pt}$ sont supérieures aux valeurs théoriques. Tandis que, dans les états 4_γ^+ , 5_γ^+ , 6_γ^+ et 8_γ^+ , toutes les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques, sauf pour l'isotope du platine 196 pour l'état 5_γ^+ .

\implies **Bande β** : (0_β^+ , 2_β^+ et 4_β^+)

-dans les états de 0_β^+ à 2_β^+ , les valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs théoriques du ^{194}Pt , sauf pour le ^{192}Pt .

- pour le ^{196}Pt , toutes les valeurs théoriques obtenues sont inférieures aux données expérimentales.

Ces différentes valeurs obtenues théoriquement, nous conduisent à tirer la conclusion suivante :

Les valeurs obtenues théoriquement par notre modèle pour les isotopes du platine sont inférieures et meilleures que celles obtenues avec les potentiels de Morse, du couplage kilingberg Morse.

Le potentiel utilisé est applicable aux isotopes de platine. On peut écrire que :

$$\sigma_{th} < \sigma_{esKM} < \sigma_{esM}.$$

III.2.1 Relation intra et inter-bande

Dans cette section, nous allons présenter quelques notions de bases sur les calculs des transitions B(E2) intra et inter-bande obtenues à partir des différentes valeurs dans les tableaux ci-dessous, la comparaison de ces résultats obtenus à partir de notre modèle et comparés avec les données expérimentales pour les isotopes du xénon et du platine. Les transitions quadrupôlaires observées ici sont les suivantes :

état fondamental \longrightarrow état fondamental,

γ -pair \longrightarrow état fondamental,

γ -impair \longrightarrow état fondamental,

γ -pair \longrightarrow γ -pair,

γ -impair \longrightarrow γ -impair,

γ -impair \longrightarrow γ -pair et

$\beta \longrightarrow \beta$.

Il est important de savoir que les résultats du tableau 3 ont été obtenus en utilisant les règles de sélections imposées par les Coefficients de Clebsch-Gordan (CCG), c'est-à-dire que les transitions permises sont celles qui vérifient l'équation $\Delta\alpha = \pm 2$. Afin d'évaluer ces transitions permises, on calcule la valeur de $\Delta\alpha = \alpha_f - \alpha_i$. Les paramètres fixes pour chacune des bandes sont :

- l'état fondamental (gsb) par $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 0, 0)$,

- la bande γ pour les valeurs paires de L s'obtient avec $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 2, 0)$,

- la bande γ pour les valeurs impaires de L s'obtient avec $(n, n_\omega, n_\gamma) = (0, 1, 0)$ et

- la bande β s'identifie pour $(n, n_\omega, n_\gamma) = (1, 0, 0)$.

• Les transitions $(4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0})$ et $(7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2})$ sont des exemples de transitions permises par la règle de sélection des CCG. En effet, $\alpha_i = L_i - (n_\omega)_i$ et $\alpha_f = L_f - (n_\omega)_f$

- $(4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}) : \alpha_i = 4 - 0 = 4, \alpha_f = 2 - 0 = 2$ et on trouve $\Delta\alpha = 2$,

- $(7_{0,1} \rightarrow 6_{0,2}) : \alpha_i = 7 - 1 = 6, \alpha_f = 6 - 2 = 4$ et on trouve $\Delta\alpha = 2$.

• Les transitions $(0_{1,0} \rightarrow 2_{0,2})$ et $(3_{0,1} \rightarrow 2_{0,0})$ sont des exemples de transitions non permises par la règle de sélection des CCG. En effet, $\alpha_i = L_i - (n_\omega)_i$ et $\alpha_f = L_f - (n_\omega)_f$

- $(0_{1,0} \rightarrow 2_{0,2}) : \alpha_i = 0 - 0 = 0, \alpha_f = 2 - 2 = 0$ et on trouve $\Delta\alpha = 0$,

- $(3_{0,1} \rightarrow 2_{0,0}) : \alpha_i = 2 - 0 = 2, \alpha_f = 3 - 1 = 2$ et on trouve $\Delta\alpha = 0$.

En outre, la transition d'une bande f à une bande i est dite non permise si l'énergie de transition est insuffisante ou très grande pour se retrouver au niveau indiqué.

TABLE 3 – Comparaison des transitions B(E2) avec les données expérimentales et la prédiction de Morse [129] des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$.

$L_{n,n_\omega}^i \rightarrow L_{n,n_\omega}^+$	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	Exp	esM	MsK	Our	Exp	esM	MsK	Our	Exp	esM	MsK	Our
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.563	1.563	1.541	1.607	1.73	1.630	1.541	1.716	1.49	1.540	1.541	1.440
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	-	2.213	2.216	2.076	1.37	2.334	2.217	2.207	0.95	2.141	2.210	1.851
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$	-	2.735	2.912	2.301	1.02	2.835	2.913	2.424	1.09	2.597	2.915	1.992
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$	-	3.163	3.740	2.321	0.69	3.187	3.744	2.417	-	2.955	3.747	1.990
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$	1.91	1.586	1.560	1.643	1.81	1.653	1.560	1.756	-	1.564	1.560	1.472
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	-	0.350	0.351	0.325	0.285	0.370	0.351	0.346	0.42	0.339	0.351	0.290
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	-	-	0.216	0.166	-	-	0.217	0.176	-	-	0.217	0.142
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	-	-	0.157	0.097	-	-	0.157	0.096	-	-	0.126	0.073
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.67	1.236	1.224	1.190	-	1.305	1.224	1.268	-	1.200	1.225	1.066
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	-	-	1.057	0.867	-	-	1.058	0.918	-	-	1.058	0.763
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	-	-	1.010	0.654	-	-	1.010	0.685	-	-	1.011	0.551
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	-	0.734	0.728	0.707	0.428	0.776	0.728	0.752	0.430	0.716	0.728	0.629
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	-	1.081	1.170	0.866	-	1.112	1.170	0.907	-	1.022	1.171	0.732
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	-	1.715	2.170	1.124	-	1.697	2.177	1.158	-	1.589	2.170	0.885
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$	-	1.250	1.260	1.147	-	1.316	1.261	1.218	-	1.205	1.261	1.018
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$	-	1.943	2.130	1.551	-	1.994	2.137	1.626	-	1.834	2.139	1.316
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	1.79	2.147	2.117	2.108	-	2.264	2.117	0.882	-	2.094	2.118	1.892
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	-	-	1.451	1.159	-	-	1.452	1.225	-	-	1.453	1.018
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	-	-	1.658	0.988	-	-	1.659	1.031	-	-	1.661	0.825
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$	-	-	0.926	1.318	-	-	1.425	1.411	-	-	1.748	1.201
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$	-	-	0.926	1.872	-	-	1.424	1.997	-	-	2.048	1.705

Dans le tableau 3, nous présentons quelques résultats des transitions B(E2) intra et inter-bande calculés à partir des différentes transitions comparées aux données disponibles dans la littérature. Les différentes transitions quadrupôlaires obtenues dans le tableau 3 sont décrites de la manière suivante :

⇒ les transitions de l'état fondamental.

- dans les états de $4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0} \rightarrow 10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$. Les valeurs théoriques du ^{192}Pt et celles de la prédiction de Morse croissent. Par contre, les données expérimentales décroissent. Pour l'isotope de ^{194}Pt , les valeurs théoriques décroissent par rapport aux données expérimentales et de celles de la prédiction esM qui croissent. Ce qui montre que, les valeurs théoriques sont inférieures par rapport aux données expérimentales et celles de la prédiction de Morse. Et pour l'isotope du ^{196}Pt , nous constatons aussi que, les valeurs théoriques et les données expérimentales et celles de la prédiction de Morse croissent.

⇒ les transitions de γ -pair → état fondamental.

- dans les états de $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0} \rightarrow 8_{0,2} \rightarrow 8_{0,0}$, la valeur expérimentale du ^{192}Pt est supérieure par rapport au valeur obtenue théoriquement ainsi que celle de la prédiction de esM. Les résultats théoriques et celles de la prédiction de Morse décroissent. Pour l'isotope du ^{194}Pt , les valeurs

théoriques sont inférieures aux données expérimentales et celles de la prédiction de Morse dans la bande de transition de $2_{0,2} \rightarrow 2_{0,0}$. La valeur théorique du ^{196}Pt est inférieure à la donnée expérimentale pour la transition $6_{0,2} \rightarrow 6_{0,0}$. En plus, les valeurs théoriques et celles de la prédiction de Morse décroissent.

⇒ les transitions de γ -impair \rightarrow état fondamental

la valeur théorique de l'isotope ^{192}Pt est supérieure par rapport à la donnée expérimentale et est inférieure aux données de la prédiction de esM pour la transition $3_{0,1} \rightarrow 4_{0,0}$. Pour l'isotope du ^{194}Pt , la valeur théorique est inférieure à la prédiction de Morse. Enfin, nous constatons que la valeur théorique du ^{196}Pt est inférieure par rapport aux données de la prédiction de Morse.

⇒ les transitions γ -pair $\rightarrow \gamma$ -pair,

- dans cette gamme de transition de $4_{0,2} \rightarrow 2_{0,2}$ à $8_{0,2} \rightarrow 6_{0,2}$,

les valeurs théoriques du $^{192,194,196}\text{Pt}$ sont inférieures aux données expérimentales et celles de la prédiction de Morse.

⇒ les transitions γ -impair $\rightarrow \gamma$ -impair,

- dans les bandes de transitions de $5_{0,1} \rightarrow 3_{0,1}$ à $9_{0,1} \rightarrow 7_{0,1}$, les différentes valeurs théoriques obtenues sont supérieures aux données de la prédiction de Morse pour les isotopes du $^{192,196}\text{Pt}$ et du ^{194}Pt , seulement dans les transitions des états de $7_{0,1} \rightarrow 5_{0,1}$ à $9_{0,1} \rightarrow 7_{0,1}$.

⇒ les transitions γ -impair $\rightarrow \gamma$ -pair,

- dans cette gamme de transition de $3_{0,1} \rightarrow 2_{0,2}$ à $9_{0,1} \rightarrow 8_{0,2}$, les valeurs théoriques des isotopes du $^{192,194,196}\text{Pt}$ sont inférieures aux données expérimentales et celles de la prédiction de Morse.

⇒ les transitions $\beta \rightarrow \beta$, c'est à dire de $2_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$ à $4_{0,0} \rightarrow 4_{0,0}$:

les valeurs théoriques augmentent pour tous les isotopes étudiés. Mais les données expérimentales et celles de la prédiction ne figurent pas dans la littérature.

On remarque dans le tableau 5 que, plusieurs valeurs expérimentales et celles de la prédiction esM ne figurent pas dans la littérature. L'absence de ces données ne nous permettent pas d'exploiter normalement le tableau 5 et de comparer les valeurs obtenues. Sauf, dans les transitions des états $4_{0,0} \rightarrow 2_{0,0}$ à $10_{0,0} \rightarrow 8_{0,0}$, que nous avons presque toutes les données pour les trois isotopes étudiés.

TABLE 4 – Les valeurs numériques des paramètres utilisés pour chaque isotope.

parameters	¹⁹² Pt	¹⁹⁴ Pt	¹⁹⁶ Pt
V_0	-213.5	-23.5	-23.5
a	-15.704	-15.704	-15.704
b	19.621	19.621	19.621
c	50.457	50.457	30.457
\bar{c}	1852.624	1952.624	1725.624
k	0.214	0.214	0.214

Le tableau 4, présente quelques valeurs des paramètres utilisés pour tracer les courbes des variations du potentiel combiné de Hulthen et de Kratzer écran . Les valeurs de V_0 sont les mêmes pour les isotopes de platine 194 et 196. Celle du platine 192 est 9 fois plus élevée que celles ci en valeurs absolue. Le paramètre a est ajustable et a la même valeur pour les 3 isotopes de platine considérés

TABLE 5 – Comparaison des valeurs théoriques de l'état fondamental, dans la bande γ et β des rapports des énergies normalisées des travaux effectués au Laboratoire par Ema'a[24], Tchana [41] et Nga [115] sur les isotopes du ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt .

L_{band}	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	Ema.	Tcha.	Nga.	Mah.	Ema.	Tcha.	Nga.	Mah.	Ema.	Tcha.	Nga.	Mah.
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.447	2.598	2.488	2.462	2.436	2.486	2.484	2.462	2.423	2.321	2.463	2.440
6_g^+	4.113	3.597	4.267	4.144	4.073	4.488	4.252	4.143	4.029	3.440	4.170	4.072
8_g^+	5.805	4.836	6.148	5.799	5.251	6.728	6.114	5.797	5.626	4.823	5.930	5.667
10_g^+	7.395	6.285	7.992	7.220	7.251	9.073	8.932	7.212	7.095	6.432	7.609	7.053
12_g^+	8.816	7.913				11.431			8.384	8.231		
2_γ^+	1.897	2.307	1.917	1.906	1.892	1.863	1.916	1.906	1.886	1.993	1.905	1.895
3_γ^+	2.708	2.743	2.763	2.727	2.694	2.788	2.757	2.727	2.667	2.483	2.729	2.699
4_γ^+	4.527	3.877	4.720	4.557	4.478	5.016	4.701	4.556	4.423	3.752	4.598	4.470
5_γ^+	4.725	4.016	4.939	4.753	4.671	5.272	4.918	4.752	4.671	3.907	4.804	4.659
6_γ^+	6.726	5.635	7.207	6.645	6.608	8.053	7.158	6.641	6.480	5.711	6.899	6.487
7_γ^+	6.582	5.503	7.040	6.517	6.469	7.841	6.994	6.513		6.469	5.564	
8_γ^+	8.523	7.545	9.349	8.067	8.328	10.920	9.265	8.052	8.120	7.825	8.816	8.555
9_γ^+		7.172				10.390				7.414		
10_γ^+	9.972	9.573			9.703	13.604			9.416	10.056		
11_γ^+												
12_γ^+												
0_β^+	4.133	5.177	2.805	3.757	4.009	3.716	2.774	3.806	3.881	4.931	2.613	2.785
2_β^+	4.818	5.617	3.625	4.572	4.689	4.717	3.591	4.620	4.555	5.427	3.418	3.609
4_β^+	5.820	6.338	4.851	5.757	5.676	6.254	4.811	5.804	5.525	6.235	4.604	4.795
6_β^+	6.989	7.319			6.817	8.171			6.637	7.334		
σ	0.491	0.935	0.705	0.478	0.427	0.989	0.717	0.505	0.692	1.075	0.602	0.558

Le tableau 5 présente une étude comparative des valeurs théoriques des isotopes du platine utilisé dans le Laboratoire de Physique Nucléaire. Ces valeurs théoriques ont été obtenues à l'aide des différents modèles utilisés tels que : le potentiel de type exponentiel multiparamétrique [24] , le potentiel de Killinbeck plus Morse [41], le potentiel fractionnaire inverse à quatre termes [115] et le potentiel écran de Kratzer. Nous observons que, les valeurs théoriques obtenues par notre modèle sont inférieures et meilleures par rapport aux autres types de potentiels utilisés. Et cela se traduit par les relations suivantes :

$$\implies \text{Pour le } ^{192}\text{Pt} : \sigma_{Mah} < \sigma_{Ema'a} < \sigma_{Nga} < \sigma_{Tchana},$$

$$\implies \text{Pour le } ^{194}\text{Pt} : \sigma_{Ema'a} < \sigma_{Mah} < \sigma_{Nga} < \sigma_{Tchana},$$

$$\implies \text{Et enfin, pour le } ^{196}\text{Pt} : \sigma_{Mah} < \sigma_{Nga} < \sigma_{Ema'a} < \sigma_{Tchana}.$$

TABLE 6 – Comparaison des valeurs théoriques des transitions B(E2) des isotopes du ^{192}Pt , ^{194}Pt et ^{196}Pt des travaux effectués au Laboratoire par Ema'a [24], Tchana [41], Nga[115] pour des transitions.

Transition	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	Ema.	Tcha.	Nga.	Mah.	Ema.	Tcha.	Nga.	Mah.	Ema.	Tcha.	Nga.	Mah.
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.562	0.725	1.464	1.607	1.581	1.530	1.466	1.716	1.581	0.814	1.475	1.440
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	1.847	0.988	1.968	2.076	1.900	1.914	1.974	2.207	1.900	1.105	2.004	1.851
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$	2.271	1.225	2.391	2.301	2.382	2.147	2.402	2.424	2.382	1.365	2.464	1.992
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$	2.805	1.434	2.824	2.321	3.075	2.256	2.843	2.417	3.075	1.590	2.950	1.990
$12_g^+ \rightarrow 10_g^+$	3.721	1.611			4.047	2.278			4.047	1.778		
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$	1.585		1.495	0.761	1.643	1.653	1.496	1.756	1.604	1.564	1.505	1.472
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.361		0.310	0.342	0.325	0.370	0.311	0.346	0.371	0.339	0.315	0.290
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	0.225		0.176	0.220	0.166		0.177	0.176	0.233		0.181	0.142
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	0.165		0.118	0.171	0.097		0.118	0.096	0.174	0.122		0.073
$10_\gamma^+ \rightarrow 10_g^+$	0.199				0.144				0.144			
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$		1.236	1.113	1.190		1.305	1.115	1.268		1.200	1.131	1.066
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$			0.882	0.867			0.886	0.918			0.910	0.763
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$			0.771	0.654			0.777	0.685			0.807	0.551
$9_\gamma^+ \rightarrow 10_g^+$			0.771	0.665				0.666				0.665
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	0.733	0.734	0.656	0.707	0.745	3.013	0.658	0.752	0.745	0.716	0.664	0.629
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	1.247	1.739	0.937	0.866	1.308	2.917	0.941	0.907	1.308	1.022	0.967	0.732
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	2.473	1.715	1.561	1.121	2.663	2.765	1.572	1.158	2.663	1.589	1.639	0.885
$10_\gamma^+ \rightarrow 8_\gamma^+$	4.161	1.715			4.575	1.697			4.575	1.589		
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$	1.306	1.259	1.101	1.147	1.346	2.376	1.105	1.218	1.346	1.407	1.123	1.018
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$	2.314	1.472	1.699	1.551	2.440	2.466	1.708	1.626	2.440	1.637	1.758	1.316
$9_\gamma^+ \rightarrow 7_\gamma^+$		1.652		3.118		2.458		3.182		1.827		3.198
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$		0.869	1.952	2.108		2.264	1.956	0.882			1.979	1.892
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$			1.198	1.159			1.204	1.225			1.238	1.018
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$			1.233	0.988			1.242	1.031			1.296	0.825
$9_\gamma^+ \rightarrow 8_\gamma^+$				2.249				2.500				2.611
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$	1.345	0.440	1.135	1.318	1.359	0.936	1.137	1.411	1.359	0.491	1.146	1.201
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$	2.018	1.553	2.007	1.872	2.051	0.000	2.018	1.997	2.051	0.000	2.078	1.705
$6_\beta^+ \rightarrow 4_\beta^+$	2.822	1.739			2.894				2.894			

Le tableau 6 ci-dessus présente aussi la comparaison entre les valeurs théoriques obtenues dans les différentes bandes des états excités des isotopes du platine utilisé dans le Laboratoire à l'aide des différents potentiels utilisés. Nous observons que :

⇒ : dans la bande γ , les valeurs théoriques obtenues par notre modèle dans la plupart des cas sont meilleures par rapport aux autres données.

⇒ : dans les bandes des états fondamentaux et la bande β , les valeurs obtenues théoriquement par notre modèle ne sont pas meilleures.

Nous pouvons donc affirmer que, le couplage des potentiels de Hulthen et écranté de Kratzer est bien applicable et donne de bonnes valeurs par rapport aux autres potentiels utilisés.

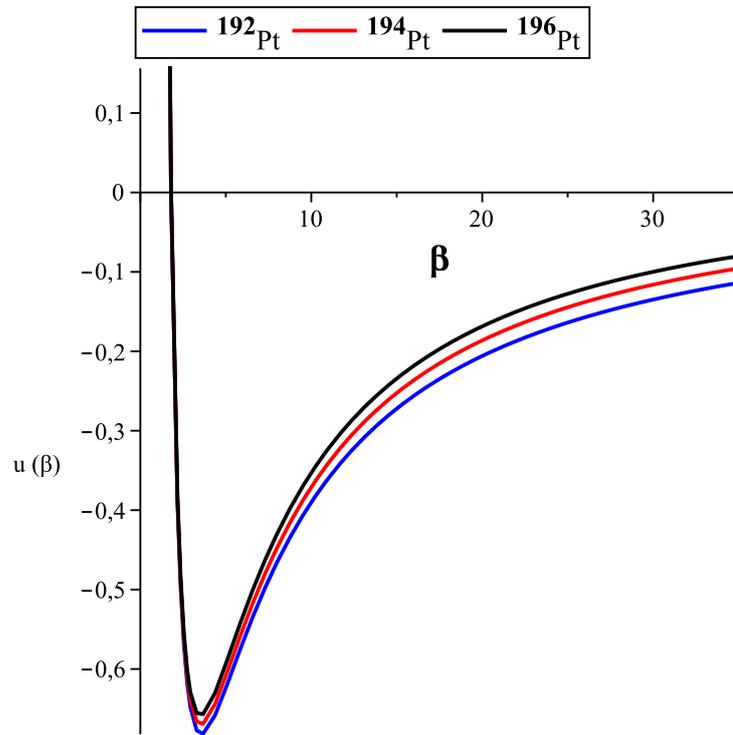


FIGURE 21 – Representation du potentiel combiné de Hulthen et de Kratzer écranté pour les isotopes de platines $^{192,194,196}\text{Pt}$.

La figure 21, nous montre les variations du potentiel combiné de Hulthen et de Kratzer écranté lorsqu'on fixe les valeurs du tableau 4. Les courbes nous présente la forme des gaussiennes renversées et montre que :

lorsque β tend vers une valeur infinie, le potentiel tend vers 0, cela explique qu'il n'y a aucun effet. Le potentiel confine plus lorsque $2 < \beta < 5$, c'est à dire très attractif, plus le puit est profond, le noyau est stable et les interactions nucléons sont faibles.

III.2.2 Effet de l'étalonnage des énergies dans la bande γ

L'effet étalon où staggering effect est défini comme un décalage impair-pair des niveaux d'énergies dans la bande γ . Il représente une grandeur très sensible sur les effets de l'étalonnage dans la bande γ pour la structure de la triaxialité. Cette grandeur consiste à mesurer le déplacement du niveau $(J - 1)_{\gamma}^{+}$ par rapport à la moyenne de ses voisins $(J - 2)_{\gamma}^{+}$ et J_{γ}^{+} . Cette quantité importante est donnée par la formule suivante [129-131] :

$$S(J) = \frac{E(J_{\gamma}^{+}) + E((J - 2)_{\gamma}^{+}) - 2E((J - 1)_{\gamma}^{+})}{E(2_{g}^{+})}, \tag{III.3}$$

où $E(J)$ représente l'énergie de l'état J_γ^+ appartenant à la bande γ , $E(2_g^+)$ est l'énergie du premier état excité de la bande fondamentale. Les valeurs du modèle $Z(5)$, celle de la théorie et les données expérimentales sont représentées sur les différentes courbes ci-dessous. On peut constater sur ces courbes que, la valeur de $S(J)$ est positive pour J pair et négative pour J impair. Afin de voir si la signature dans ce modèle actuel est révélée, nous avons tracé l'effet de l'étalonnage des énergies $S(J)$ en fonction de J pour les isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$. Les figures 11 à 13 présentent les différentes comparaisons des valeurs de $Z(5)$, celles de la théorie et les données expérimentales.

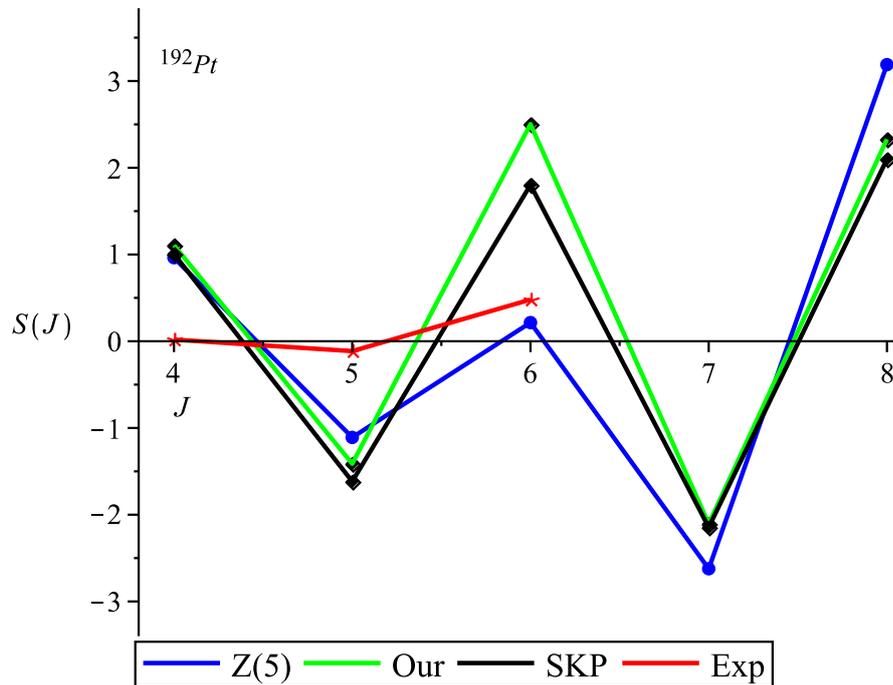


FIGURE 22 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et des données expérimentales pour le ^{192}Pt .

Les courbes présentées dans la figure 22 montrent qu'aux points 6_{γ}^{+} à 8_{γ}^{+} , le décalage est significatif entre la symétrie $Z(5)$ et la théorie. Aux points 4_{γ}^{+} , 5_{γ}^{+} et 7_{γ}^{+} le décalage est très faible. on peut constater que la courbe fournie par notre modèle s'éloigne de celle des prédictions de Kratzer écranté aux points 6_{γ}^{+} et 8_{γ}^{+} , mais se rapproche de la courbe expérimentale au point 5_{γ}^{+} .

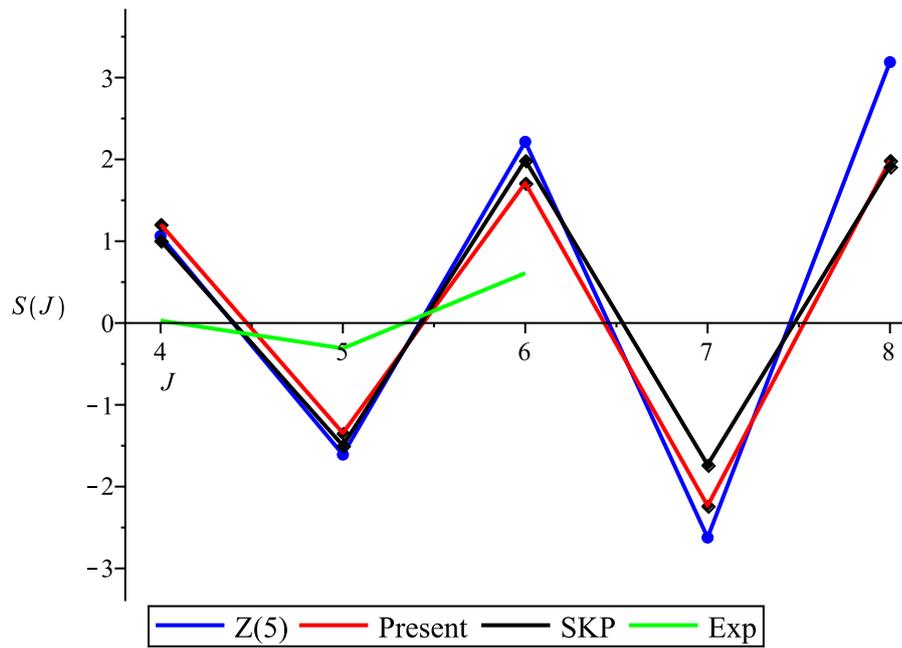


FIGURE 23 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie $Z(5)$ [129] et des données expérimentales pour le ^{194}Pt .

Nous observons sur la figure 23 un petit décalage entre la courbe d'étalonnages de la symétrie $Z(5)$ et notre modèle à chaque point sauf en 8_{γ}^{+} . On constate également que la courbe de notre modèle se rapproche de la courbe expérimentale aux points 5_{γ}^{+} , et aux points 4_{γ}^{+} et 6_{γ}^{+} les courbes se rejoignent.

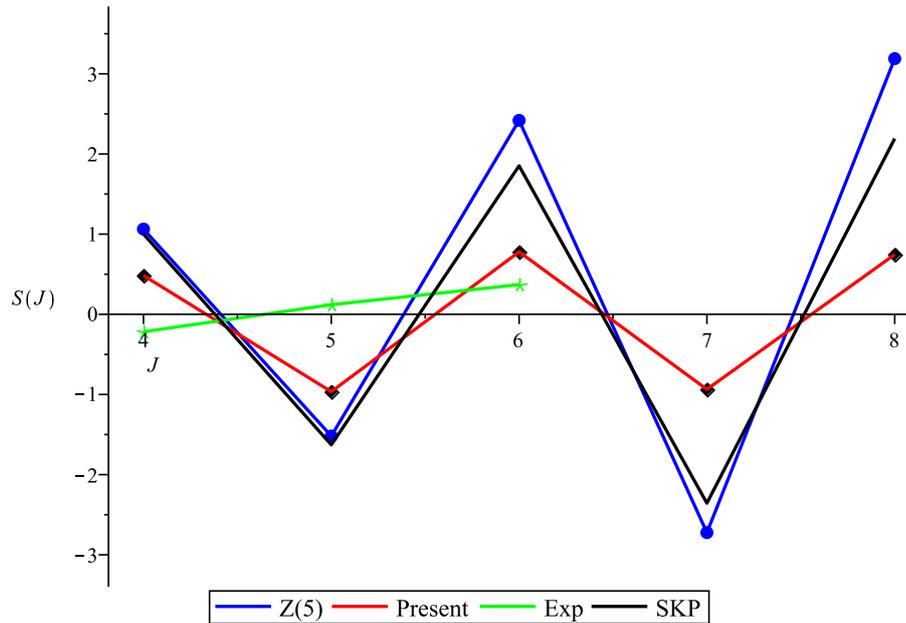


FIGURE 24 – Comparaison entre les effets des étalonnages des valeurs théoriques, de la symétrie Z (5) [129] et l'expérimentale pour le ^{196}Pt .

Au niveau de la figure 24, les courbes présentées montrent qu'aux points 4_{γ}^{+} et 6_{γ}^{+} notre graphe est plus proche du graphe expérimental. De plus, au fur et à mesure que J augmente, le graphe de notre modèle s'éloigne de ceux de la symétrie Z(5) et de la prédiction de Kratzer écranté. Il est évident que pour les noyaux atomiques 192,194,196pt, les graphes s'inscrivent bien dans la bande d'énergie de 4_{γ}^{+} à 6_{γ}^{+} . Mais de 6_{γ}^{+} à 8_{γ}^{+} on peut conclure que notre graphe est plus proche de la symétrie Z(5) et de la prédiction de Kratzer écranté.

III.2.3 Densité de probabilité

La fonction d'onde est une amplitude de probabilité de présence et le carré de sa norme représente la densité volumique de probabilité de présence de la particule. C'est une propriété ponctuelle, car en chaque point de l'espace, on peut calculer cette densité volumique à partir de l'expression de la fonction d'onde.

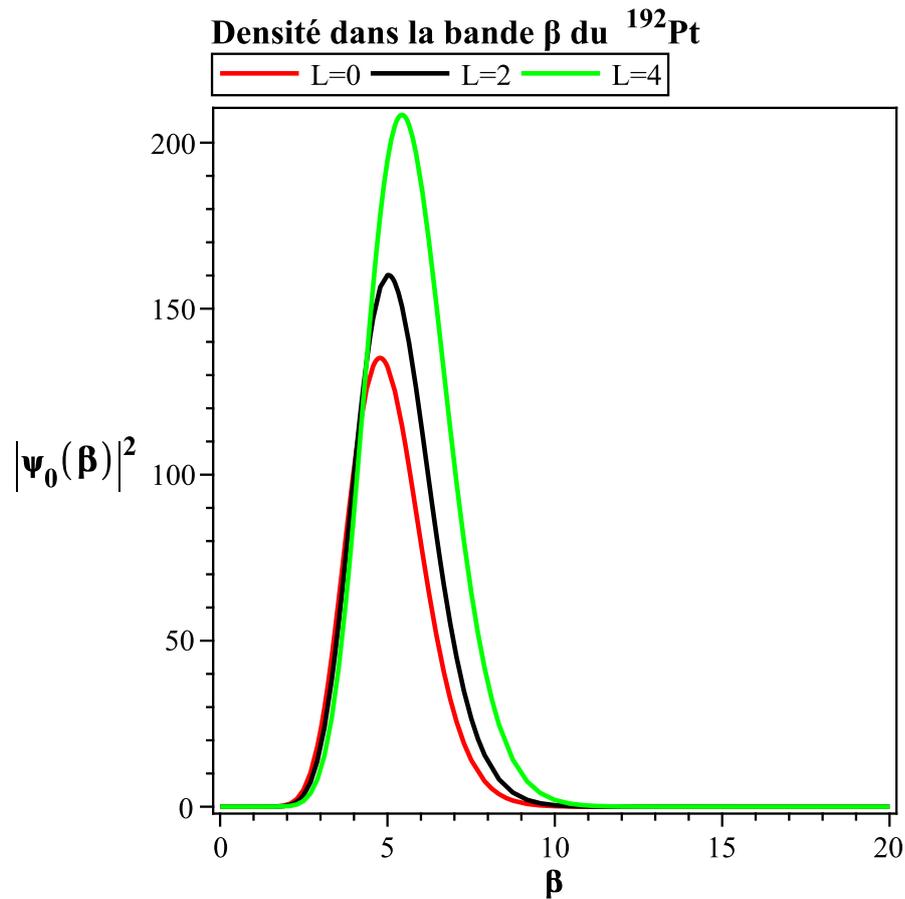


FIGURE 25 – Variation de la densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{192}Pt .

La densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde dans les états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ présente la forme des gaussiennes avec des pics larges, centrés autour des valeurs de $\beta=5$ pour $L=0$ et $\beta=5,5$ pour $L=2$ et $\beta=6$ pour $L=4$. Nous remarquons que, dans la figure 25, lorsque $L=0, 2$ et 4 , les énergies de cohésions entre les nucléons sont importantes.

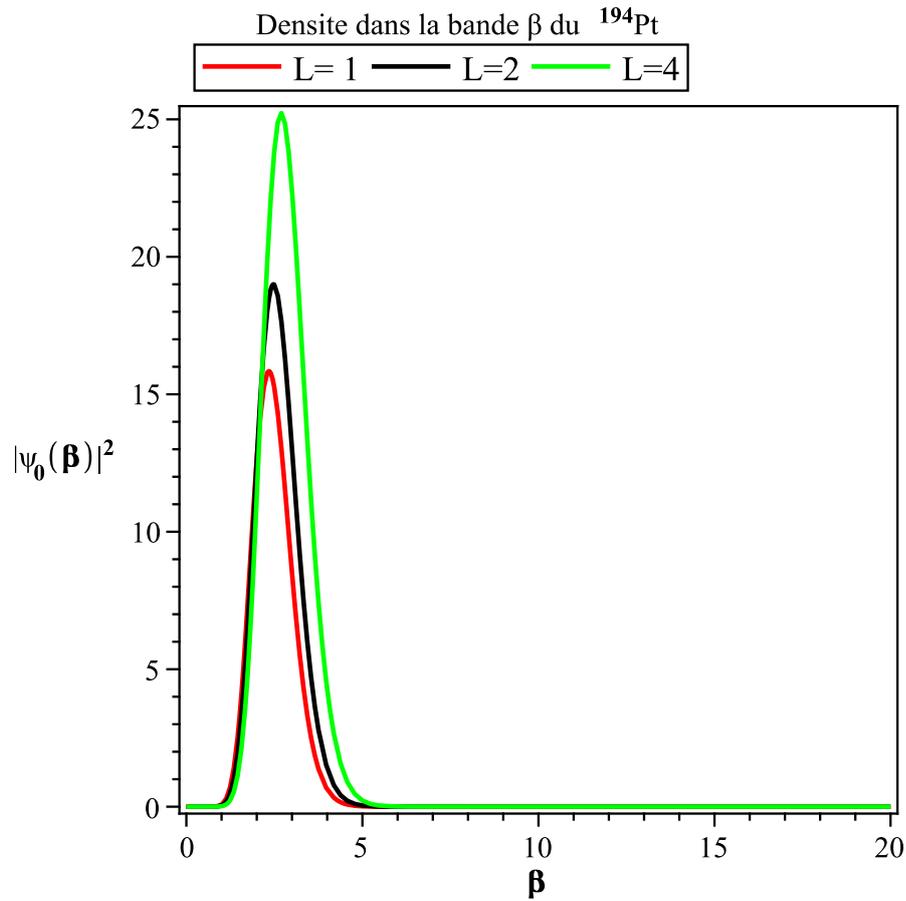


FIGURE 26 – Densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{194}Pt .

La figure 26 présente les courbes de la densité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde dans les états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{194}Pt . Ces courbes présentent des gaussiennes avec des pics étroits, centrés autour des valeurs de $\beta=2,5$ pour $L=0$, $\beta=2,5$ pour $L=2$ et $\beta=3$ pour $L=4$. Et lorsque $L=0$, l'énergie de cohésion entre les nucléons est dense et la densité de distribution augmente lorsque les valeurs de L augmentent ($L=2, 4$).

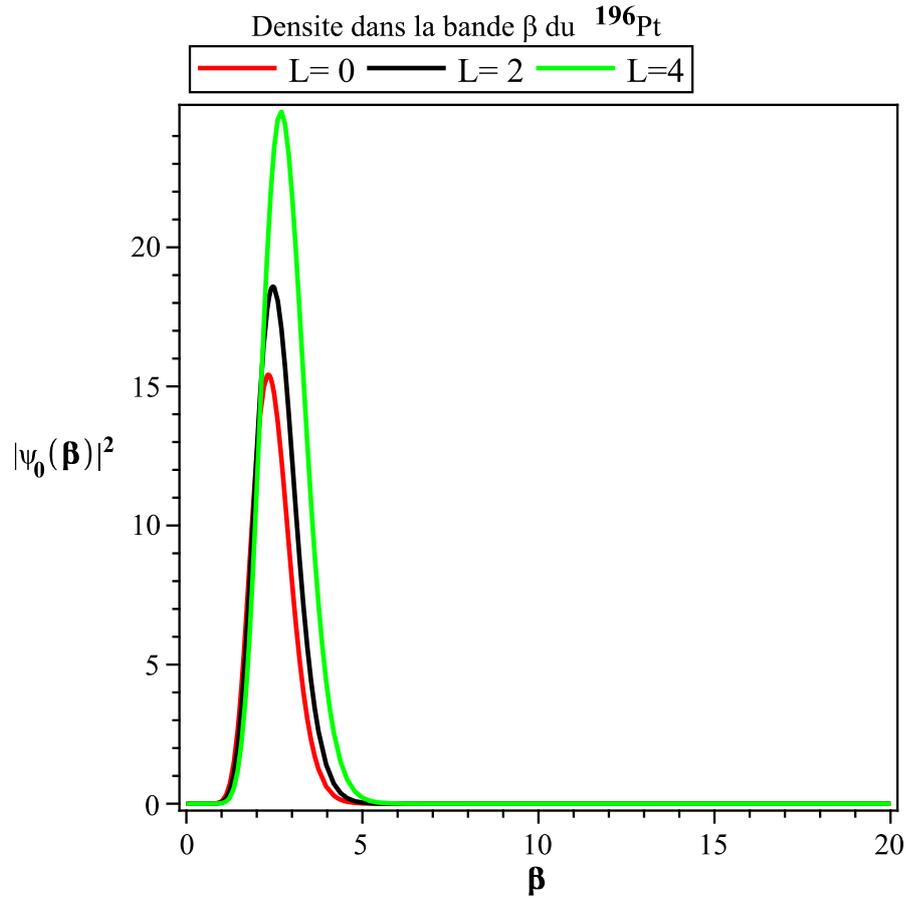


FIGURE 27 – Variation de la densité de probabilité de distribution $|\psi_0(\beta)|^2$ dans la bande de l'état fondamental des fonctions d'onde des états $(0_g^+, 2_g^+, 4_g^+)$ pour l'isotope ^{196}Pt .

Les différentes courbes de la densité présentées dans la figure 27 ont l'allure des gaussiennes avec des pics étroits, centrés autour des valeurs de $\beta = 2,5$ pour $L=0$, $\beta = 2,5$ pour $L=2$ et $\beta = 3$ pour $L=4$. Lorsque les valeurs de L augmentent ($L = 2, 4$), on observe que l'énergie entre les nucléons et la densité de distribution augmentent également.

III.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons évalué notre modèle en calculant les transitions $B(E2)$, les énergies de transitions des noyaux étudiés. Les différentes valeurs obtenues ont été comparées aux données expérimentales aux isotopes du $^{192,194,196}\text{Pt}$. Les effets des étalonnages dans la bande γ ont été calculés et comparés à la symétrie $Z(5)$. Les résultats de notre modèle sont en accord avec les données expérimentales et celles de la symétrie $Z(5)$.

Conclusion Générale et perspectives

Dans ce travail, nous avons étudié un modèle qui nous a permis de décrire la structure nucléaire et les différentes déformations (vibration et rotation) au sein des noyaux atomiques.

Dans le premier chapitre, les caractéristiques de la structure nucléaire ont été présentées à savoir : la découverte du noyau atomique et ses constituants, les différents types de la radioactivité, une étude sur les isotopes du platine a été décrite, suivi de la description des modèles nucléaires à savoir : le modèle de la goutte liquide, le modèle en couches sphériques et le modèle en couches déformées. Enfin, nous avons aussi étudié les différents types de déformation (rotation et vibration) des noyaux.

Dans le second chapitre, nous avons résolu l'équation du Hamiltonien de Bohr en utilisant la technique de séparation des variables, qui nous conduit à l'obtention des solutions de la partie γ et β . L'introduction de la méthode de la mécanique quantique super symétrique nous a permis de déterminer l'énergie du spectre. La partie β de la solution de l'équation du Hamiltonien de Bohr nous a permis en l'utilisant avec le potentiel couplé de Hulthen et écranté de Kratzer pour obtenir l'énergie du spectre du système ainsi que l'expression de la fonction d'onde correspondante. Les différents types de transitions ainsi que les moments quadrupôlaires des isotopes ont été calculés. Par la suite, nous avons calculé l'effet de l'étalonnage $S(J)$, qui nous a permis d'observer les différents effets sur des courbes obtenues. Enfin, les courbes de la densité de la fonction d'onde ont été tracées pour différentes valeurs du moment magnétique (L).

Enfin dans le troisième chapitre, les résultats théoriques des rapports des énergies des niveaux et les taux de transition $B(E2)$ des isotopes de $^{192,194,196}\text{Pt}$ ont été présentés. Les valeurs obtenues théoriquement par notre modèle sont meilleures pour notre étude précisément dans le cas des isotopes du platine. Le tableau 3 montre que, les valeurs des écarts types obtenues théoriquement sont plus petites que celles des données expérimentales. Les résultats obtenus dans les tableaux 2 et 3 montrent que, les valeurs obtenues pour les isotopes du platine sont plus petites et meilleures que les résultats expérimentaux utilisés pour la prédiction de Morse. Nous pouvons donc écrire que : $\sigma_{Pt} < \sigma_{esKM} < \sigma_{esM}$. Ceci montre que, notre modèle améliore les résultats, et il est mieux adapté pour modéliser les noyaux triaxiaux. Ces travaux ont une application dans le domaine de la médecine précisément en radiothérapie on utilise l'énergie de ces différents isotopes de notre modèle pour stopper la prolifération des cellules anormales et en industrie dans la confection des catalyseurs au platine utilisés dans le raffinage et la transformation du pétrole. Toutefois, notre modèle n'a été utilisé que pour les noyaux triaxiaux, dans les travaux futurs nous comptons concevoir un modèle applicable à un grand nombre de noyaux qu'il soit déformé ou pas.

Appendices

ANNEXE : Ratios des moments de transitions quadrupôlares électriques B(E2)

$$\begin{aligned}
 R_{\text{ground} \rightarrow \text{ground}}(L+2 \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L+2)_g \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{2L+1}{2L+5} (1 + \delta_{L,0}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.4}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \text{ground}}(L \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-even}} \rightarrow L_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{15}{(L+1)(2L+3)} (1 + \delta_{L,2}) \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \text{ground}}(L \rightarrow L+1) &= \frac{B(E2; (L)_{\gamma\text{-odd}} \rightarrow (L+1)_g)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{(L+2)} \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-1; n=0, L+1, L+1)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.6}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-even} \rightarrow \gamma\text{-even}}(L+2 \rightarrow L) &= \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{L(2L-1)(2L+1)}{(2L+3)(L+2)(2L+5)} (1 + \delta_{L,2}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L; n=0, L, L-2)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.7}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\gamma\text{-odd} \rightarrow \gamma\text{-odd}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; (L+2)_\gamma \rightarrow (L)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
 &= \frac{5}{2} \frac{L(2L+1)}{(L+2)(2L+5)} \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+1; n=0, L, L-1)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
 \end{aligned} \tag{III.8}$$

$$\begin{aligned}
R_{\gamma\text{-odd}\rightarrow\gamma\text{-even}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; L_\gamma \rightarrow (L-1)_\gamma)}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
&= \frac{5(2L-3)(2L-1)}{L(L+1)(2L+1)} (1 + \delta_{L,3}) \frac{I_\beta^2(n=0, L, L-1; n=0, L-1, L-3)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
\end{aligned} \tag{III.9}$$

$$\begin{aligned}
R_{\beta\text{-band}\rightarrow\beta\text{-band}}(L \rightarrow L-1) &= \frac{B(E2; L_{\beta\text{-band}} \rightarrow (L-1)_{\beta\text{-band}})}{B(E2; 2_g \rightarrow 0_g)} \\
&= \frac{5}{2} \frac{2L+1}{2L+5} (1 + \delta_{L,0}) \frac{I_\beta^2(n=0, L+2, L+2; n=0, L, L)}{I_\beta^2(n=0, 2, 2; n=0, 0, 0)}
\end{aligned} \tag{III.10}$$

Publication

[1] P. Mah Tsila, A. Atangana Likene, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, Bohr Hamiltonian with Hulthen plus screened Kratzer potential using super symmetric quantum mechanics, *Int. Jour. of Mod. Phys. E*, vol.31, No.7 (2022) 2250063.

Bibliographie

- [1] E. Rutherford, *The scattering of alpha and beta-particles by matter and the structure of atoms*, (Phil. Mag., 1911) 669-698.
- [2] J.J. Thomson, *Philosophical Magazine Series* :77 (1904) 39 237.
- [3] J. Chadwick, *The Royal Society*, 77 (1932) 692708.
- [4] J. Rainwater, *Phys. Rev.* **79** (1950) 432.
- [5] C. F. V. Weizscker, *Zeitschrift fur Physik* **96** (1935) 458.
- [6] L. Meitner et al, *A New Type of Nuclear Reaction. Nat* **143** (1939) 239.
- [7] M. G. Mayer, *Nuclei. Phys. Rev* **74** (1948) 235.
- [8] M. G. Mayer, *Phys. Rev* **75** (1949) 1969.
- [9] M. G. Mayer, *Phys. Rev.* **78** (1950) 16.
- [10] G. C. Baldwin et al, *Phys. Rev.* **71** (1947) 3.
- [11] M. Goldhaber et al, *Phys. Rev.* **74** (1948) 1046.
- [12] C. H. Townes et al, *Phys. Rev* **76** (1949) 1415 - 1416.
- [13] A. Bohr et al, *Phys. Rev* **89** (1953) 316 - 317.
- [14] A. Bohr et al, *Nuclei. Phys. Rev* **90** (1953) 719.
- [15] J. P. Elliott, J. A. Evans and P. Park, *Phys. Lett. B.* **16** (1986) 9309.
- [16] D. Bonatsos, E. A. McCutchan, N. Minkov, R. F. Casten, P. Yotov, D. Lenis, D. Petrellis and I. Yigitoglu, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 064312.
- [17] F.F. Ruffino, L. Fortunato, *Computation* **6** **48** (2018) 48.
- [18] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3580.
- [19] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett* **87** (2001) 052502.
- [20] W. Greiner, A.J. Maruhn, *Nuclear Models, Springer, Berlin* **24** (1996).
- [21] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett* **91** (2003) 132502.
- [22] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P.A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588** (2004) 172.
- [23] A.S. Davydov, A.A. Chaban, *Nucl. Phys* **20** (1960) 499.
- [24] J. M. E. Ema'a, B. T. Mbadjoun, A. Zarma, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 490.
- [25] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P.P. Raychev, P.A. Terziev, *Phys. Lett B* **584** (2004) 40.

- [26] I. Yigitoglu, D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
- [27] H. Neyazi, A.A. Rajabi, H. Hassanabadi, *Nucl. Phys. A* **945** (2016) 80.
- [28] H. Sobhani, H. Hassanabadi, W.S. Chung, *Nucl. Phys. A* **85** (2018) 3580.
- [29] R. Budaca, *Eur. Phys. J. A* **5** (2014) 50.
- [30] G. Levai, J. Arias, *Phys. Rev. C* **81** (2010) 044304.
- [31] P. Baganu, R. Budaca, *J. Phys. G* **42** (2015) 105106.
- [32] R. Budaca, P. Baganu, A.I. Budaca, *Phys. Lett. B* **776** (2018) 26.
- [33] G. Levai, A.M. Ishkhanyan, *Mod. Phys. Lett. A* **34** (2019) 1950134.
- [34] I. Inci, I. Boztosun, Y.E. Gonen, *J. Phys. G* **39** (2012) 085112.
- [35] M. Chabab, A. Lahbas, M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51** (2015) 131.
- [36] M. Chabab, A. Lahbas, M. Oulne, *Int. J. Mod. Phys. E* **24** (2015) 1550089.
- [37] M. Chabab, A.E. Batoul, A. Lahbas, M. Oulne, *Nucl. Phys. A* **953** (2016) 158.
- [38] L. Naderi, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **131** (2016) 133.
- [39] I. Boztosun, D. Bonatsos, I. Inci, *Phys. Rev. C* **77** (2008) 044302.
- [40] I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E Int. J. Mod. Phys. E* **23** (2014) 1450053.
- [41] B.T. Mbadjoun, J.M.E. Ema'a, P.E. Abiama, G.H. Ben-Bolie, P.O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **27** (2018) 1850072.
- [42] B. Yamina, Cours de structure de la matière, (2018).
- [43] L. Fortunato, *Eur. Phys. J. A* **26** (2005) 1.
- [44] P. Baganu, L. Fortunato, *J. Phys. G* **43** (2016) 093003.
- [45] L. Wilets and M. Jean, *Phys. Rev* **102** (1956) 788.
- [46] N. V. Zamfir and R. F. Casten, *Phys. Rev. Lett. B* **260** (1991) 265.
- [47] M. Thoennessen, *Reaching the limits of nuclear stability* (2004).
- [48] E. Rutherford, the scattering of alpha and beta-particles by matter and the structure of atoms, *Phil. Mag.*, **43** (1911) 669 - 698.
- [49] M. Capak, D. Petrellis, B. Gonul, D. Bonatsos, *J. Phys. G* **42**, (2015) 095102.
- [50] J. Shergur et al., *Phys. Rev. C* **65** (2002) 034343.
- [51] D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, *Int. Jour. of Mod. Phys. E* **28** (2019) 1950106.
- [52] A. Bohr et B. R. Mottelson, *Nuclear structure*, volume I. (1969).
- [53] M. G. Mayer, On closed shells in nuclei *Phys. Rev* **75** (1949) 1969.
- [54] E. A. McCutchan, D. Bonatsos, N.V. Zamfir, R.F. Casten, *Phys. Rev. C* **76** (2007) 024306.
- [55] N. Walet, *Nuclear and Particle Physics*, UMIST, Manchester, U.K. (1999).
- [56] J. Suhonen, *Theoretical and Mathematical Physics, From Nucleons to Nucleus*, Springer- Verlag (2007).

- [57] D. Boumala, *Thèse de magistère, Université Mentouri Constantine* (2007).
- [58] L. Fortunato, A. Vitturi, *J. Phys. G.* **29** (2003) 1341 Ben-Bolie, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 490.
- [59] Von Weizsacker, C, *Zur Theorie der Kernmassen. Zeitschrift fur Physik* **96** (1935) 1969.
- [60] C. Von Weizsacker, *Ann. Phys. Fr.* **96** (1935).
- [61] S.G. Nilsson, Kgl. Danske Videnskab. Selskab, *Mat. -fys. Medd* **29** (1955).
- [62] S.G. Nilsson and I. Ragnarsson, *Shapes and shells in nuclear structure* (Cambridge university press) **29** (1995) .
- [63] R.M. Clark and A.O. Macchiavelli, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci* **50** (2000) 1.
- [64] M. Kaci, *Thèse de Doctorat, Université Paris-Sud 11, Orsay* (1996).
- [65] A. Bohr et al., Rotational States in Even-Even Nuclei *Phys. Rev.* **90** (1953) 717 - 719.
- [66] A. Bohr and B. Mottelson, *Phys. Rev* **90** (1953) 717.
- [67] P. Ring and P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, ed. W. Beiglöck, Springer-Verlang *New York* **108** (1980).
- [68] J. M. E. Ema'a, B. T. Mbadjoun, A. Zarma, P. Ele Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 490.
- [69] K. L. G. Heyde, *The nuclear shell model* (1996).
- [70] S. Frauendorf and J. Meng *Nuc. Phys. A* **617** (1997) 131.
- [71] K. Lobner, M. Vetter, and V. Honig, *Nucl. Phys. A* **436(1)** (1985) 14.
- [72] O. Haxel, J. H. D. Jensen, H. E. Suess, *Phys. Rev.* **75** (1949) 1766.
- [73] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, volume I et II (World Scientific, Amsterdam, (1968).
- [74] E. A. Lawrie, P. A. Vymers, J. J. Lawrie, Ch. Vieu, R. A. Bark, R. Lindsay, G. K. Mabala, S. M. Maliage, P. L. Masiteng, S. M. Mullins, S. H. T. Murray, I. Ragnarsson, T. M. Ramashidzha, C. Schück, J. F. Sharpey-Schafer, and O. Shirinda, *Phys. Rev. C* **78** (2008) 021305.
- [75] S. Nilsson, *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab* **29** (1955).
- [76] B.T. Mbadjoun, J.M.E. Ema'a, P.E. Abiama, G.H. Ben-Bolie, P.O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **27** (2018) 1850072.
- [77] K. Gottfried, *Phys. Rev.* **103** (1956) 1017.
- [78] W. Greiner and J. Maruhn, *Nuclear Models* (Springer, 1996).
- [79] T. Bengtsson and I. Ragnarsson, *Phys. Rev.* **103** (1956) 1017.
- [80] K. Lobner, M. Vetter, and V. Honig, *Nucl. Phys. A* **436(1)** (1985) 14.
- [81] J. P. Elliott, J. A. Evans and P. Park, *Phys. Lett. B.* **16** (1986) 9309.
- [82] E. Predazzi and T. Regge, *Nuovo Cimento* **24** (1962) 518.
- [83] A. S. Davydov and A. A. Chaban, *Nucl. Phys.* **20** (1960) 499.
- [84] M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51**, (2015) 131.

- [85] S. G. Rohozinski, J. Srebrny and K. Horbaczwska, *Phys. Z* **26** (1974) 8401.
- [86] Y. Shi, J. Dobaczewski, S. Frauendorf, W. Nazarewicz, J. C. Pei, F. R. Xu and N. Nikolov *Phys. Rev. Lett* **108** (2012) 092501.
- [87] S. A. Moszkowski, *Phys. Rev.* **99** (1955) 803.
- [88] I. Ragnarsson, S.G. Nilsson, R.K. Sheline, *Phys. Rep.* **45** (1968) 1.
- [89] M. Gélin , Spectroscopie gamma des noyaux riches en neutrons autour de N=20 (2005).
- [90] L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. Rev* **30** (2004) 627.
- [91] A. S. Davydov and A. A. Chaban, *Nucl. Phys* **20** (1960) 499.
- [92] D. Bonatsos, P. E. Georgoudis, N. Minkov, D. Petrellis and C, Quesne *Phys. Rev. C* **88** (2013) 034316.
- [93] A. Lahbas, P. Baganu and R. Budaca, *Mod. Phys. Lett. A* **35** (2020) 2050085.
- [94] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics Birkhauser, Basel* (1988) .
- [95] G. Lévai and J. Arias, *Phys. Rev. C* **81** (2010) 044304.
- [96] P. Baganu and R. Budaca, *J. Phys. G* **42** (2015) 105106.
- [97] F. H. Stillinger, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 1891.
- [98] X. Song, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **17** (1991) 49.
- [99] R. Herrmann, *Fractional Calculus An Introduction for Physicists*(World Scientific, Singapore, (2011).
- [100] A. Lemieux and A. K. Bose, *Annales de l'I H P. Sect. A n°3* (1969) 10.
- [101] M. Kossow, *Annal. Phys : Quantum field theory and composite fermions in the fractional quantum Hall Effect* (2009) 285 - 377.
- [102] M. Chabab and M. Oulne, *Int. Rev. Phys* **4**, (2010) 331.
- [103] A. V. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematics Physics*, (Birkhäuser, Boston, 1988).
- [104] J. Meyer-ter-Vehn J, *Nucl. Phys.* **249** (1975) 111.
- [105] H. Karayer, D. Demirhan and F. Büyükkiliç, *Rep. Math. Phys.* **76**(3) (2015) 271 - 281.
- [106] C. Tezcan, R. Sever, *Int. J. Theor. Phys* **48** (2009) 337.
- [107] I. Yigitoglu, D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
- [108] C.Lam and Y.Varshni, *Phys. Rev. A* **4** (1971) 1875.
- [109] O.Oluwadare and K.J. Oyewumi, *Chin. Phys. Lett.* **34** (2017) 110301.
- [110] A. Kratzer, *Z. Phys.* **3** (1920) 460.
- [111] K.Hong and J. Noolandi, *J.Chem. Phys. Lett.* **68** (1978)5163
- [112] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **588**, (2004) 172.
- [113] L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys* **29**, (2003) 1341.

- [114] L. Gaudefroy, Thse de Doctorat, Universit de Paris XI Orsay (2005).
- [115] D. Nga Ongodo, J. M. Ema'a Ema'a, P. Ele Abiama, G. H. Ben-Bolie, *Int. Jour. of Mod. Phys. E* **28** (2019) 1950106.
- [116] J. Suhonen, *Theoretical and Mathematical Physics, From Nucleons to Nucleus*, Springer (2007).
- [117] T. R. Rodriguez, J. L. Egidio, *Phys. Rev.* **51**, C81 (2010) 064323.
- [118] E. Caurier, G. Martinez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves, A. P. Zuker, *Ann. Phys* **318**, (2005) 454.
- [119] J. Meyer-ter-Vehn, *Nucl. Phys. A* **249**, (1975) 42.
- [120] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Harcourt Academic Press, San Diego.*, (2001).
- [121] A. Bohr, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid.* **26**, (1952) 454.
- [122] P. A. Butler, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **43**, (2016) 073002.
- [123] Otto Haxel, J. Hans D. Jensen, and Hans E. Suess, *Phys. Rev.* **75**, (1949) 1766.
- [124] A. Johnson, H. Ryde, and S. A. Hjorth, *Ann. Phys* **6**, (1972) 345.
- [125] A. Johnson, H. Ryde, and S.A. Hjorth, *Nucl. Phys. A* **75**, (1949) 753-768.
- [126] S. Mordechai et al., *Phys. Rev. Lett* **60**, (1988) 408.
- [127] J. Meyer-ter-Vehn, *Phys. A* **111**, (1975) 37.
- [128] A. Bohr, B.R. Mottelson, *Nuclear structure : Nuclear Deformations*, (1999).
- [129] M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51**, (2015) 131.
- [130] M. A. Caprio and F. Iachello, *Ann. Phys* **318**, (2005) 454.
- [131] M. Chabab and M. Oulne, *Int. Rev. Phys* **4**, (2010) 331.

Bohr Hamiltonian with Hulthen plus screened Kratzer potential using super symmetric quantum mechanics

P. Mah Tsila^{*,§}, A. Atangana Likéné^{*,†,¶}, J. M. Ema'a Ema'a^{‡,||},
P. Ele Abiama^{*,†,**} and G. H. Ben-Bolie^{*,††}

**Laboratory of Atomic, Molecular and Nuclear Physics,
Department of Physics, Faculty of Science,
University of Yaounde I,
P. O. Box 812, Yaounde, Cameroon*

*†Nuclear Technology Section (NTS),
Institute of Geological and Mining Research,
P. O. Box 4110, Yaounde, Cameroon*

*‡Department of Physics, Higher Teachers' Training College,
University of Bertoua,
P. O. Box 55, Bertoua, Cameroon*

§philippetsila87@gmail.com

¶aandreaime@yahoo.fr

||emaajm@yahoo.fr

***eleabiama2003@yahoo.fr*

††gbenbolie@yahoo.fr

Received 10 May 2022

Revised 24 June 2022

Accepted 26 June 2022

Published 30 July 2022

In this paper, we look for a novel analytical solution of the Bohr Hamiltonian in the presence of the Hulthen plus screened Kratzer potential in β -part of the collective nuclear potential. The new expression for the energy spectra is obtained using the method of super symmetric quantum mechanics. The effect of the Hulthen plus screened Kratzer potential is studied on root mean square deviation, and normalized eigen energies of ground state band, γ -band and β -band of ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt atomic nuclei. The $B(E2)$ transition rates are calculated for the latter potential. Furthermore, our results are compared with experimental data, and other relevant theoretical works. We discuss on how the combination of these two potentials makes it possible to improve the results of energy spectra and quadrupole transitions of triaxial nuclei. We discuss the quantitative and qualitative descriptions concerning the structure of the nucleus using some indicators such as root mean square and staggering of the γ -band. The results provided by our model are found to be in good agreement with experimental data and improved in comparison with previous works.

Keywords: Bohr Hamiltonian; Hulthen plus screened Kratzer potential; triaxial nuclei; super symmetric quantum mechanics; energy spectra.

PACS Number(s): 21.60.Fw, 21.10.Re, 70.25.+k, 04.10.Mn

[§]Corresponding author.

1. Introduction

To study properties of atomic nuclei¹ such as shape phase transitions within the interacting Boson Model (IBM)² or critical point symmetries,³ scientists usually employ the Bohr–Hamiltonian model. Many recent studies on atomic nuclei structure revealed that the Bohr–Hamiltonian model is a good theoretical tool to describe rotation and vibration modes of nuclei at low-energy states. In the equilibrium shape of nuclei, phase transitions correspond to first- and second-order transitions between competing ground state phases induced by variation of nonthermal parameter at zero temperature. As the number of nucleons changes from one nucleus to another, in general, one observes a gradual evolution of different shapes-axially, spherical quadrupole deformed, shapes that are soft with respect to triaxial deformations and octupole shapes.^{4,5} Various nuclear models for the study of nuclear shape phase transitions are presented in the literature.^{3–5} Geometrical and algebraic approaches are needed to describe properties of atomic nuclei. In these two approaches, there is a specific Hamiltonian operator to describe the shape changes of atomic nuclei. From the geometrical point of view, we can study critical point symmetries by solving the collective Hamiltonian operator with an appropriate interaction potential.^{6–8} From algebraic point of view, existence of the shape phase transitions is confirmed by the study of dynamical symmetries of some algebraic structures for which different shapes coincide with particular dynamical symmetries.⁹ Investigation of eigenvalues and eigenfunctions of the Bohr Hamiltonian enables to predict the shape phase transitions of deformed nuclei.¹⁰ Several potential models have been used in the literature to solve Bohr’s Hamiltonian equation. For β -dependent potentials, we can cite the work of Tchana *et al.*¹¹ Ema’a *et al.*¹² Bonatsos *et al.*¹³ and several other authors, see Refs. 14–25. Whereas, for the γ variable part, the potential is generally of the harmonic oscillator type^{7,26,27} or of the periodic type.^{28–30} These different potential models were used to obtain the energy spectra of atomic nuclei using Bohr’s Hamiltonian. According to the type of equation, we are facing several methods for computing the eigenvalues of Schrödinger-type equations.³¹ Among them, one can name approximated algebraic method,¹¹ super symmetric quantum mechanics (SUSY-QM) method,³² Nikiforov–Uvarov (NU) method,^{12,18,24} extended Nikiforov–Uvarov (ENU) method¹⁷ and asymptotic iteration method (AIM).

In this work, we study the Bohr Hamiltonian for triaxial nuclei considering the potential to be of the form $v(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{\omega(\gamma)}{\beta^2}$. We analytically solve the β -part of the resulting Schrödinger equation in the presence of Hulthen plus screened Kratzer potential using the SUSY-QM method. The γ -part of the potential is assumed to be harmonic-oscillator type potential, centered around the value $\frac{\pi}{6}$ which corresponds to triaxial nuclei. The analytical solutions of our theoretical model correspond to the shape transition from the prolate to the oblate form in the nuclei.

This paper is organized as follows. In Sec. 2, we present the theoretical tools needed for this work. The SUSY-QM method relevant to this work will be briefly reviewed. In Sec. 3, the SUSY-QM will be implemented to the radial Schrödinger

equation of Bohr Hamiltonian for a nucleus in presence of the Hulthen plus screened Kratzer potential. In Sec. 4, our model will be tested using some selected atomic nuclei such as ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt , then we present our results and compare them with other relevant works. Finally, the summary and conclusion are presented.

2. Basics of Supersymmetric Quantum Mechanics

In this section, we summarize the basic elements of SUSY-QM used in the following sections to solve the Schrödinger equation of the Bohr Hamiltonian using the Hulthen plus screened Kratzer potential. For more details on the topic, we suggest Ref. 33. We consider a quantum wave equation of Schrödinger-type for the ground state with an eigenenergy equal to zero (this is done by redefining the potential by adding a constant term equal to minus ground state energy). Thus, the ground state wave function $\psi_0(x)$ obeys

$$\hat{H}_1\psi_0(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2} + V_1(x)\right)\psi_0(x) = 0 \quad (1)$$

then

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}. \quad (2)$$

Next, the Hamiltonian operator \hat{H}_1 can be factorized as

$$\hat{H}_1 = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{V_1(x)}\right) \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{V_1(x)}\right). \quad (3)$$

Then from the above equation, we introduce the following operator:

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{V_1(x)}, \quad A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{V_1(x)}, \quad (4)$$

allowing to rewrite \hat{H}_1 as $\hat{H}_1 = A^\dagger A$. It follows that for a known $V_1(x)$, the superpotential $W(x)$ must satisfy the Riccati equation

$$V_1(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} + [W(x)]^2. \quad (5)$$

Using Eq. (2) the superpotential can be calculated in terms of the ground state wave function as

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}. \quad (6)$$

From the above equation, the ground state wave function can be obtained as

$$\psi_0(x) = N_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy\right). \quad (7)$$

Further, it is possible to build a new Hamiltonian operator \hat{H}_2 , by swapping the order of the operators A^\dagger and A one can write:

$$\hat{H}_2 = AA^\dagger \quad (8)$$

which can be written more explicitly as

$$\hat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_0(x)}{dx^2} + V_2(x), \quad (9)$$

where

$$V_2(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} + [W(x)]^2. \quad (10)$$

Potentials $V_1(x)$ and $V_2(x)$ are called super symmetric partner potentials, having many interesting properties. For more details, one can refer to Ref. 33. It is important to note that eigenfunctions and eigenvalues of \hat{H}_1 and \hat{H}_2 are related in the following way:

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} A\psi_{n+1}^{(1)}, \quad \psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} A^\dagger\psi_n^{(2)}, \quad (11)$$

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0. \quad (12)$$

3. Bohr Hamiltonian Equation

In this section, we employ the Bohr Hamiltonian model to describe triaxial nuclei with a stable deformation close to 30° . In collective intrinsic variables^{34,35} the Bohr Hamiltonian operator can be written as

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial\beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial\gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1,2,3} \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (13)$$

where β and γ are the intrinsic collective coordinates, \hat{Q}_k (with $k = 1, 2, 3$) are angular momentum components in the intrinsic frame and B is the mass parameter. Let us introduce the following expressions ξ and $v(\beta, \gamma)$ such that $\xi = \frac{2BE}{\hbar^2}$, $v(\beta, \gamma) = \frac{2BV(\beta, \gamma)}{\hbar^2}$, which are the reduced energies and the reduced potential, respectively.

In order to separate the Hamiltonian into its variables, we assume that the reduced potential and the wave function are, respectively, on the form $v(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{\omega(\gamma)}{\beta^2}$, $\Psi(\beta, \gamma, \theta_i) = \psi(\beta)\eta(\gamma)D(\theta_i)$ where θ_i ($i = 1, 2, 3$) are the Euler angles and D is the Wigner function; with the γ -part of the potential having a minimum at $\gamma = \frac{\pi}{6}$, one can write the angular part as^{16,36}

$$W = \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)} = 4(\hat{Q}_1^2 + \hat{Q}_2^2 + \hat{Q}_3^2) - 3\hat{Q}_1^2. \quad (14)$$

By using the following symmetric wave function³⁷:

$$D(\theta_i) = \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{\zeta,0})}} [D_{\mu,\zeta}^{(L)}(\theta_i) + (-1)^L D_{\mu,-\zeta}^L(\theta_i)], \quad (15)$$

the eigenvalue is $4L(L+1) - 3\zeta^2$, where L is the angular momentum and ζ is the projection quantum number of angular momentum on the body-fixed x' axis.^{1,37}

The energy bands are characterized by $L = n_\omega, n_\omega + 2, n_\omega + 4, \dots$ (with $n_\omega > 0$) next to the ground state band (with $n_\omega = 0$).³⁷

Henceforth, the γ and β -dependent Schrödinger equations are

$$\left[-\frac{1}{\sin(3\gamma)} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin(3\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} + \omega(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \lambda \eta(\gamma), \quad (16)$$

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{4L(1+L) - 3\zeta^2 + 4\lambda}{4\beta^2} + u(\beta) \right] \psi(\beta) = \xi \psi(\beta). \quad (17)$$

3.1. Solution of the γ -part

Triaxial shape is described here by considering a potential energy surface having a minimum around $\gamma = \frac{\pi}{6}$. Henceforth, the following harmonic potential can be considered:

$$\omega(\gamma) = \frac{1}{2} \tilde{c} \left(\gamma - \frac{\pi}{6} \right)^2, \quad (18)$$

where \tilde{c} is defined as the stiffness of the potential. Combining Eqs. (17) and (18) and solving obtained equation for η , gives the energy eigenvalue and the normalized eigenfunctions,^{38,39} respectively, as

$$\lambda_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{2\tilde{c}} \left(n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{2} \right), \quad \tilde{n}_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

$$\eta_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = \sqrt{\frac{(\tilde{c}/2)^{1/4}}{2^{n_{\tilde{\gamma}}} \sqrt{\pi n_{\tilde{\gamma}}}}} H_{n_{\tilde{\gamma}}}((\tilde{c}/2)^{1/4} \tilde{\gamma}) \exp(-(\tilde{c}/2)^{1/2} \tilde{\gamma}^2 / 2), \quad (20)$$

with $\tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{6}$, $n_{\tilde{\gamma}}$ is the radial quantum number, $H_{n_{\tilde{\gamma}}}$ is the Hermite polynomial.

3.2. Solution of the β -part

In this section, we consider the Hulthen plus screened Kratzer potential as the interaction potential of our quantum system in the following form:

$$V(\beta) = V_0 - \frac{be^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})} + \left(\frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^2} \right) e^{-k\beta}, \quad (21)$$

where a , b , c and V_0 are adjustable parameters, and k is the screening parameter of the potential. This potential can be regarded as a general case of other potentials

depending on the values of its parameters:

— the inverse Yukawa or screened Coulomb potential⁴⁰ if $b = c = V_0$, is defined as

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta} e^{-k\beta}, \quad (22)$$

— the inverse quadratic Yukawa potential⁴¹ if $b = c = V_0$, is defined as

$$V(\beta) = \frac{c}{\beta^2} e^{-k\beta}, \quad (23)$$

— the Kratzer potential⁴² if $b = k = V_0$, is defined as

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^2}, \quad (24)$$

— the screened Kratzer potential¹⁸ if $b = V_0$, is defined as

$$V(\beta) = \left(\frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^2} \right) e^{-k\beta}, \quad (25)$$

— the Coulomb potential⁴³ if $b = c = k = V_0$, is defined as

$$V(\beta) = \frac{a}{\beta}. \quad (26)$$

Using the transformation $\psi(\beta) = \frac{1}{\beta^2} \phi(\beta)$ and substituting Eq. (21) into Eq. (17) yield

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \xi - V_0 + \frac{be^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})} - \left(\frac{a}{\beta} + \frac{c}{\beta^2} \right) e^{-k\beta} - \frac{W}{\beta^2} \right] \phi(\beta) = 0, \quad (27)$$

where $W = 2 + L(L + 1) - \frac{3\xi^2}{4} + \lambda$.

To obtain exact analytical solutions of Eq. (27), we use the Greene–Aldrich approximation^{44,45} on the centrifugal barrier and the Coulomb term

$$\frac{1}{\beta} \approx \frac{k}{(1 - e^{-k\beta})}, \quad \frac{1}{\beta^2} \approx \frac{k^2 e^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})^2}. \quad (28)$$

Further, Eq. (28) enables us to write Eq. (27) as

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \xi - V_0 + \frac{(b - ak)e^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})} - \frac{k^2 W e^{-k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})^2} - \frac{ck^2 e^{-2k\beta}}{(1 - e^{-k\beta})^2} \right] \phi(\beta) = 0. \quad (29)$$

From Eq. (29), one can extract the effective potential of our model as

$$V_{\text{eff}} = V_0 + \frac{(b - ak)\exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} - \frac{k^2 W \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} - \frac{ck^2 \exp(-2k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2}. \quad (30)$$

In SUSY-QM, the wave function for the ground state depends on the shape of the super potential and is usually written as

$$\psi_0(\beta) = N_{0l} \exp \left[- \int_0^\beta W(x) dx \right]. \quad (31)$$

Considering the super algebra, the following ansatz is suggested for the potential:

$$W(\beta) = - \left(A + \frac{B \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} \right), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} W^2(\beta) - \frac{dW(\beta)}{d\beta} &= A^2 + \frac{2AB \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} + \frac{B^2 \exp(-2k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} \\ &\quad - \frac{kB \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2}, \end{aligned} \quad (33)$$

and then

$$\begin{aligned} A^2 + \frac{2AB \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} + \frac{B^2 \exp(-2k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} - \frac{kB \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} \\ = -\xi_\beta + V_0 - \frac{(b - ak)\exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} + \frac{k^2 W \exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2} \\ + \frac{ck^2 \exp(-2k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

By identification, the following set of equation is obtained for the unknowns

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2 = -\xi_\beta + V_0, & \text{(i)} \\ 2AB - kB = k^2W - b + ak, & \text{(ii)} \\ B^2 - 2AB = k^2c + b - ak. & \text{(iii)} \end{cases} \quad (35)$$

Using the relations (ii) and (iii) of Eq. (35) yields

$$B^2 - kB = k^2(W + c). \quad (36)$$

Using Eq. (32), the ground state wave function is obtained as

$$\begin{aligned} \psi_{0L}(\beta) &= N_{0L} \exp \left[- \int_0^\beta - \left(A + \frac{B \exp(-kx)}{(1 - \exp(-kx))} \right) dx \right] \\ &= N_{0L} \exp(A\beta)(1 - \exp(-k\beta))^B. \end{aligned} \quad (37)$$

According to the above equation, the ground state wave function will be physically acceptable if $A < 0$ and $B > 0$. Then solving Eq. (36) yields:

$$B_{1,2} = \frac{k}{2} \pm \frac{k}{2} \sqrt{1 + 4(W + c)}. \quad (38)$$

Considering the case $B > 0$, namely $B = \frac{k}{2}(1 + \sqrt{1 + 4(W + c)})$, and using Eq. (34), we find

$$A = \frac{B}{2} - \frac{(k^2c - b - ak)}{2B}. \quad (39)$$

Next, by using the expression of A , the ground state energy is obtained as

$$\xi_{0\beta} = V_0 - \left[\frac{k}{4} (1 + \sqrt{1 + 4(W + c)}) - \frac{\left(kc + \frac{b}{k} - a \right)}{(1 + \sqrt{1 + 4(W + c)})} \right]^2. \quad (40)$$

To obtain the supersymmetric partner potentials $V_+(\beta)$ and $V_-(\beta)$, we use Eq. (31) as follows:

$$\begin{aligned} V_+(\beta) &= W^2(\beta) + \frac{dW(\beta)}{dx} \\ &= A^2 + \frac{(2AB + kB)\exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} + \frac{(B^2 + kB)\exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} V_-(\beta) &= W^2(\beta) - \frac{dW(\beta)}{dx} \\ &= A^2 + \frac{(2AB - kB)\exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))} + \frac{(B^2 - kB)\exp(-k\beta)}{(1 - \exp(-k\beta))^2}. \end{aligned} \quad (42)$$

The shape invariance condition is introduced as

$$R(\beta_1) = V_+(B, \beta) - V_-(B_1, \beta) = [A^2 - A_1^2], \quad (43)$$

$$R(\beta_1) = \left(\frac{B}{2} - \frac{(k^2c + b - ak)}{2B} \right)^2 + \left(\frac{B + k}{2} - \frac{(k^2c + b - ak)}{2(B + k)} \right)^2. \quad (44)$$

Then, considering the following mapping: $B \rightarrow B + k$, we have

$$\begin{aligned} B &\rightarrow B_1 = B + k \\ &B_2 = B + 2k \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &B_n = B + nk, \end{aligned} \quad (45)$$

such that

$$\begin{aligned} R(\beta_n) &= V_+[(B(m - 1)k, \beta)] - V_-[(B + mk, \beta)] \\ &= \left[\left(\frac{(B + k)m}{2} - \frac{(k^2c + b - ak)}{2(B + k)m} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{B + (m - 1)k}{2} - \frac{(k^2c + b - ak)}{2(B + (m - 1)k)} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

It clearly appears that the above expression is β -independent. Thus, we can calculate the energy eigenvalues as follows:

$$\begin{aligned}
 \xi_{nL} &= \xi_{0L} + \sum_{m=0}^n R(B_m) \\
 &= V_0 - \left[\frac{k}{4} (1 + \sqrt{1 + 4(W + c)}) - \frac{\left(kc - \frac{b}{k} - a \right)}{(1 + \sqrt{1 + 4(W + c)})} \right]^2 \\
 &\quad - \left(\frac{(B + k)}{2} - \frac{\sigma^2}{2(B + k)} \right)^2 + \left(\frac{B}{2} + \frac{\sigma^2}{2B} \right)^2 \\
 &\quad - \left(\frac{(B + 2k)}{2} - \frac{\sigma^2}{2(B + 2k)} \right)^2 \\
 &\quad - \dots - \left(\frac{B(n - 1)k}{2} - \frac{\sigma^2}{2(B + (n - 1)k)} \right)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{(B + (n - 2)k)}{2} - \frac{\sigma^2}{2(B + (n - 2)k)} \right)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{B(n - 2)k}{2} + \frac{\sigma^2}{2(B + (n - 2)k)} \right)^2 \\
 &\quad - \left(\frac{(B + kn)}{2} + \frac{\sigma^2}{2(B + nk)} \right)^2 + \left(\frac{B(n - 1)k}{2} - \frac{\sigma^2}{2(B + (n - 1)k)} \right)^2. \quad (47)
 \end{aligned}$$

After some little algebra, the energy equation is obtained as

$$\begin{aligned}
 \xi_{nL} &= V_0 - \left[\frac{k(1 + \sqrt{9 + 4c + 4L(L + 1) - 3\alpha^2 + \lambda})}{4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\left(kc + \frac{b}{k} - a \right)}{(1 + \sqrt{9 + 4c + 4L(L + 1) - 3\alpha^2 + \lambda})} \right]^2 \\
 &\quad - \left[\frac{k(1 + \sqrt{9 + 4c + 4L(L + 1) - 3\alpha^2 + \lambda}) + 2kn}{4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{k^2c + b - ka}{k(1 + \sqrt{9 + 4c + 4L(L + 1) - 3\alpha^2 + \lambda}) + 2kn} \right]^2. \quad (48)
 \end{aligned}$$

4. $B(E2)$ Transition Rates

In this section, $B(E2)$ transition rates are calculated for $^{192,194,196}\text{Pt}$ atomic nuclei. The general quadrupole operator^{13,46} is given by

$$T_{\mu}^{(E2)} = t\beta \left[D_{\mu,0}^{(2)}(\theta_i) \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i)) \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right], \quad (49)$$

where θ_i are the so-called Euler angles and t is a scale factor, while $D^{(2)}$ stands for the Wigner function and index term μ represents the angular momentum quantum number ζ (projection ζ along the body-fixed \hat{x}' axis).

For triaxial nuclei ($\gamma \approx \frac{\pi}{6}$), the quadrupole operator⁴⁶ takes the following form:

$$T_{\mu}^{(E2)} = -\frac{t\beta}{\sqrt{2}}(D_{\mu,2}^{(2)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(2)}(\theta_i)), \quad (50)$$

and the $B(E2)$ transition rates^{47,48} are given by

$$B(E2; L_i\zeta_i \rightarrow L_f\zeta_f) = \frac{5}{16\pi} \frac{|\langle L_f\zeta_f || T^{(E2)} || L_i\zeta_i \rangle|^2}{2L_i + 1}, \quad (51)$$

and then, from the Wigner–Eckart theorem,⁴⁷ the reduced matrix elements can be written as

$$\langle L_f M_f \zeta_f | T_{\mu}^{(E2)} | L_i M_i \zeta_i \rangle = \frac{\langle L_f \zeta_f || T^{(E2)} || L_i \zeta_i \rangle}{\sqrt{2L_f + 1}} \langle L_i 2L_f | M_i \mu M_f \rangle. \quad (52)$$

To calculate the matrix elements of the quadrupole operator of Eq. (50), the integral over $\tilde{\gamma}$ is equal to the unity because of normalization method,⁴⁶ the integral over the Euler angles is deformed by the means standard integrals of the three Wigner functions⁴⁷ and the integral over β takes the following form:

$$I(n_i, L_i, \zeta_i, n_f, L_f, \zeta_f) = \int \beta \xi_{n_i, L_i, \zeta_i}(\beta) \xi_{n_f, L_f, \zeta_f}(\beta) \beta^4 d\beta, \quad (53)$$

where the β and β^4 factors come from the quadrupole operator and volume element, respectively. Using the Wigner–Eckart theorem, Eq. (50) takes the following form:

$$\begin{aligned} B(E2; L_i\zeta_i \rightarrow L_f\zeta_f) &= \frac{5}{16\pi} \frac{t^2}{2} \frac{1}{(1 + \delta_{\zeta_i,0})(1 + \delta_{\zeta_f,0})} \\ &\times [(L_i 2L_f | \zeta_i 2\zeta_f) + (L_i 2L_f | \zeta_i - 2\zeta_f) \\ &+ (-1)^{L_f} (L_i 2L_f | \zeta_i - 2 - \zeta_f)]^2 \\ &\times [I(n_i, L_i, \zeta_i, n_f, L_f, \zeta_f)]^2. \end{aligned} \quad (54)$$

The Clebsch–Gordon coefficients appearing in the above equation have been deduced by its properties (only $\Delta\zeta = \pm 2$ transitions are allowed).

5. Numerical Results

Energy levels of each nucleus can be obtained by mean of Eq. (48) and normalized to $2_{0,0}^+$ state of the ground state band using the formula:

$$R_{L_{n,n\omega}} = \frac{E_{L_{n,n\omega}^+} - E_{0_{0,0}^+}}{E_{2_{0,0}^+} - E_{0_{0,0}^+}}. \quad (55)$$

In Table 1, the free parameters used to evaluate Eq. (48) are listed for $^{192,194,196}\text{Pt}$ isotopes. The six free parameters a , b , c , k , V_0 and \bar{c} of the above equation were selected from fitting the spectra with experimental data. In this

Table 1. Free parameters of the Hulthen plus screened Kratzer potential.

Parameters	^{192}Pt	^{194}Pt	^{196}Pt
V_0	-213.5	-23.5	-23.5
a	-15.704	-15.704	-15.704
b	19.621	19.621	19.621
c	50.457	50.457	30.457
\bar{c}	1852.624	1952.624	1725.624
k	0.214	0.214	0.214

Table 2. Comparison of normalized eigen energies for ground state bands, β -bands and γ -bands with experimental data^{17,18,25} and those from esM,³⁸ esMK,¹¹ and Multiparameter Exponential-Type potential (MET)¹² for ^{192}Pt isotope at different values of α .

L_{band}	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	Exp	esM	esKM	Our	Exp	esM	esKM	Our	Exp	esM	esKM	Our
0_g^+	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2_g^+	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4_g^+	2.479	2.475	2.598	2.462	2.470	2.445	2.486	2.462	2.465	2.509	2.321	2.440
6_g^+	4.314	4.317	3.597	4.144	4.299	4.280	4.488	4.143	4.290	4.440	3.440	4.072
8_g^+	6.377	6.492	4.836	5.799	6.392	6.509	6.728	5.797	6.333	6.767	4.823	5.667
10_g^+	8.624	9.001	6.285	7.220	8.671	9.148	9.073	7.212	8.558	9.489	6.432	7.053
2_γ^+	1.935	1.907	2.307	1.906	1.894	1.888	1.863	1.906	1.936	1.923	1.993	1.895
3_γ^+	2.910	2.364	2.743	2.727	2.809	2.716	2.788	2.727	2.845	2.795	2.483	2.699
4_γ^+	3.795	4.815	3.877	4.557	3.743	4.784	5.016	4.556	3.636	4.969	3.752	4.470
5_γ^+	4.682	5.060	4.016	4.753	4.563	5.034	5.272	4.752	4.525	5.230	3.907	4.659
6_γ^+	5.905	7.875	5.635	6.645	5.863	7.956	8.053	6.641	5.644	8.263	5.711	6.487
7_γ^+	6.677	7.647	5.503	6.517		7.717	7.841	6.513		8.016	5.564	6.362
8_γ^+	8.186	11.203	7.545	8.067	8.186	11.503	10.920	8.052	7.730	11.900	7.825	7.923
0_β^+	3.776	3.567	5.117	3.757	3.858	2.349	3.716	3.806	3.192	3.512	4.931	2.785
2_β^+	4.547	4.568	5.617	4.572	4.603	3.350	4.717	4.620	3.828	4.542	5.427	3.609
4_β^+	6.110	6.087	6.338	5.757	5.817	4.881	6.254	5.804	4.318	6.140	6.235	4.795
σ		0.988	0.935	0.478		1.202	0.989	0.505		1.450	1.075	0.558

work, $^{192,194,196}\text{Pt}$ isotopes are considered since they are the most suitable choice for triaxial nuclei.³⁸ As described in Refs. 11 and 17, we consider three energy bands, namely: the ground state band, the γ -band and the β -band. The ground state band described by $n = 0$ and $n_\omega = 0$. The γ -band is distinguished by $(n = 0, n_\omega = 1)$ and $(n = 0, n_\omega = 2)$, respectively, for the odd and the even values of L . The β -band is given by $n = 1$ and $n_\omega = 0$. Using Eq. (48), the energy levels were determined for each band. In order to evaluate the proximity of our results to experimental data, the root mean square deviation was calculated using the formula^{11,17}

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (E_i(\text{exp}) - E_i(\text{th}))^2}{M}}, \quad (56)$$

where M denotes the number of quantum states, while $E_i(\text{exp})$ and $E_i(\text{th})$ represent the experimental and theoretical energies for the i -level, respectively. The

Table 3. Comparison of values of $B(E2)$ transition considering ground \rightarrow ground, γ -even \rightarrow ground, γ -odd \rightarrow ground, γ -even \rightarrow γ -even, γ -odd \rightarrow γ -odd, γ -odd \rightarrow γ -even, $\beta \rightarrow \beta$ bands for Hulthen plus screened Kratzer potential with experimental data³⁶ and those of esM³⁸ and MsK⁴⁹ for ^{192}Pt , ^{194}Pt and ^{196}Pt isotopes.

$L_{n,n_\omega}^i \rightarrow L_{n,n_\omega}^+$	^{192}Pt				^{194}Pt				^{196}Pt			
	Exp	esM	MsK	Our	Exp	esM	MsK	Our	Exp	esM	MsK	Our
$4_g^+ \rightarrow 2_g^+$	1.563	1.563	1.541	1.607	1.73	1.630	1.541	1.716	1.49	1.540	1.541	1.440
$6_g^+ \rightarrow 4_g^+$	—	2.213	2.216	2.076	1.37	2.334	2.217	2.207	0.95	2.141	2.210	1.851
$8_g^+ \rightarrow 6_g^+$	—	2.735	2.912	2.301	1.02	2.835	2.913	2.424	1.09	2.597	2.915	1.992
$10_g^+ \rightarrow 8_g^+$	—	3.163	3.740	2.321	0.69	3.187	3.744	2.417	—	2.955	3.747	1.990
$2_\gamma^+ \rightarrow 2_g^+$	1.91	1.586	1.560	1.643	1.81	1.653	1.560	1.756	—	1.564	1.560	1.472
$4_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	—	0.350	0.351	0.325	0.285	0.370	0.351	0.346	0.42	0.339	0.351	0.290
$6_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	—	—	0.216	0.166	—	—	0.217	0.176	—	—	0.217	0.142
$8_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	—	—	0.157	0.097	—	—	0.157	0.096	—	—	0.126	0.073
$3_\gamma^+ \rightarrow 4_g^+$	0.67	1.236	1.224	1.190	—	1.305	1.224	1.268	—	1.200	1.225	1.066
$5_\gamma^+ \rightarrow 6_g^+$	—	—	1.057	0.867	—	—	1.058	0.918	—	—	1.058	0.763
$7_\gamma^+ \rightarrow 8_g^+$	—	—	1.010	0.654	—	—	1.010	0.685	—	—	1.011	0.551
$4_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	—	0.734	0.728	0.707	0.428	0.776	0.728	0.752	0.430	0.716	0.728	0.629
$6_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	—	1.081	1.170	0.866	—	1.112	1.170	0.907	—	1.022	1.171	0.732
$8_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	—	1.715	2.170	1.124	—	1.697	2.177	1.158	—	1.589	2.170	0.885
$5_\gamma^+ \rightarrow 3_\gamma^+$	—	1.250	1.260	1.147	—	1.316	1.261	1.218	—	1.205	1.261	1.018
$7_\gamma^+ \rightarrow 5_\gamma^+$	—	1.943	2.130	1.551	—	1.994	2.137	1.626	—	1.834	2.139	1.316
$3_\gamma^+ \rightarrow 2_\gamma^+$	1.79	2.147	2.117	2.108	—	2.264	2.117	0.882	—	2.094	2.118	1.892
$5_\gamma^+ \rightarrow 4_\gamma^+$	—	—	1.451	1.159	—	—	1.452	1.225	—	—	1.453	1.018
$7_\gamma^+ \rightarrow 6_\gamma^+$	—	—	1.658	0.988	—	—	1.659	1.031	—	—	1.661	0.825
$2_\beta^+ \rightarrow 0_\beta^+$	—	—	0.926	1.318	—	—	1.425	1.411	—	—	1.748	1.201
$4_\beta^+ \rightarrow 2_\beta^+$	—	—	0.926	1.872	—	—	1.424	1.997	—	—	2.048	1.705

comparison of the predictions of our model with those from Morse potential, Morse plus Killingbeck potential and experimental data is listed in Table 2. From that table, it appears that for all isotopes of platinum, the agreement is good between theoretical results and experimental predictions^{17,18,25} as indicated by the value of σ for each nucleus. Indeed, the values of σ show that Hulthen plus screened Kratzer potential predictions is better than the results from Morse³⁸ and Killingbeck plus Morse¹¹ potentials, which are also listed in Table 2. It appears that our results are better than those of other theoretical works. Indeed, the solutions obtained by using SUSY-QM method allow a better consideration of the ground state band, which is the band containing the most stable states. Moreover, the combination of screened Kratzer and Hulthen potential provides exact solutions of the Bohr Hamiltonian. The screened Kratzer potential acts like the superposition of Yukawa and inverse quadratic Yukawa potentials which are typical of strong interaction and is appropriate to provide best results. In Table 3, $B(E2)$ transition rates have been calculated using the selection rules of transitions, and the available experimental data are also presented. The transition probabilities are been normalized to the $B(E2; 2_g^+ \rightarrow 0_g^+)$. Finally, Fig. 1 presents Hulthen plus screened Kratzer potential plotted as a function of the deformation variable β using the six considered Pt free

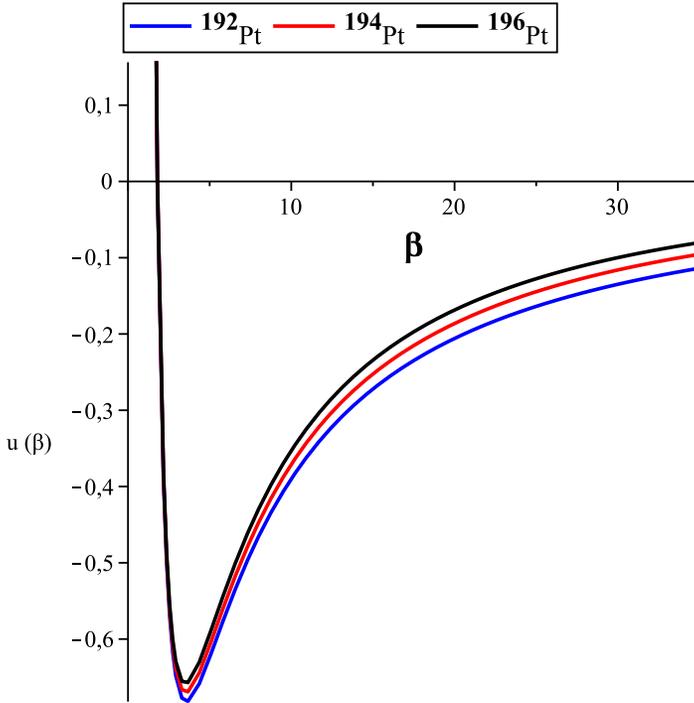


Fig. 1. Representation of the Hulthen plus screened Kratzer potential for $^{192,194,196}\text{Pt}$ atomic nuclei.

parameters of Table 1, for each isotope of platinum. Some unusual $B(E2)$ transitions from γ -band to ground state band such as $2_{\gamma}^{+} \rightarrow 2_g^{+}$, $3_{\gamma}^{+} \rightarrow 4_g^{+}$ are well reproduced by our model in comparison with the predictions from Morse³⁸ and Killingbeck plus Morse prediction.¹¹

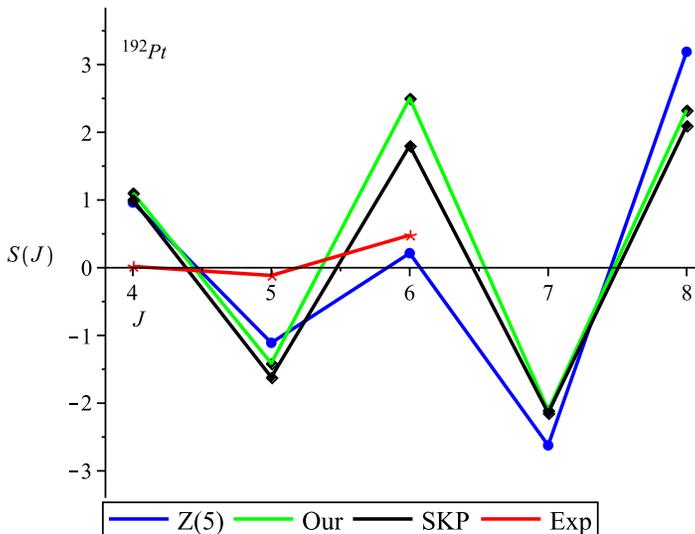


Fig. 2. Comparison between the effects of the staggering of the theoretical values, $Z(5)$ symmetry, screened Kratzer¹⁸ prediction and experimental data for the ^{192}Pt atomic nucleus.

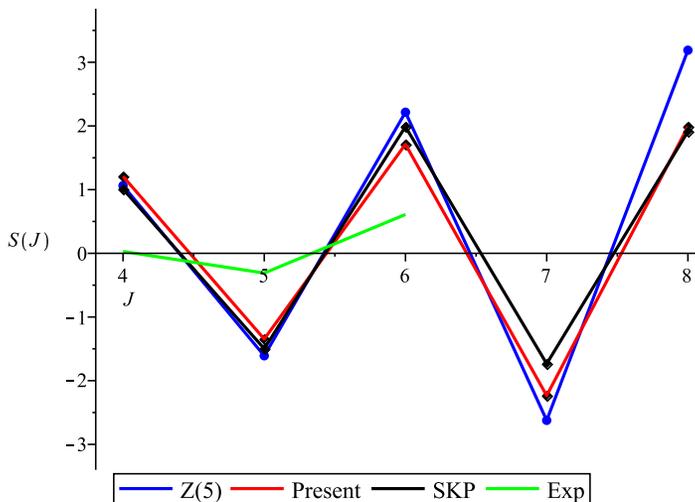


Fig. 3. Comparison between the effects of the staggering of the theoretical values, $Z(5)$ symmetry, screened Kratzer¹⁸ prediction and experimental data for the ^{194}Pt atomic nucleus.

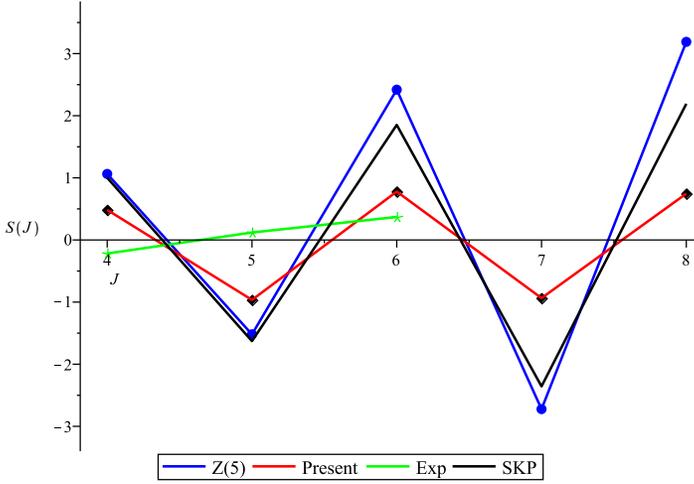


Fig. 4. Comparison between the effects of the staggering of the theoretical values, $Z(5)$ symmetry, screened Kratzer¹⁸ prediction and experimental data for the ¹⁹⁶Pt atomic nucleus.

Moreover, in Figs. 2–4, we propose a quantitative indicator concerning the structure of the nucleus, namely the staggering of the γ -band. The staggering effect is defined as the shift of odd–even energy levels in the γ -band. This quantity is given by the following formula²¹:

$$S(J) = \frac{E(J_{\gamma}^{+})E((J-2)_{\gamma}^{+}) - 2E((J-1)_{\gamma}^{+})}{E(2_{g}^{+})}, \quad (57)$$

where $E(J)$ represents the energy of the J_{γ}^{+} state in the γ -band, and $E(J_{g}^{+})$ is the energy of the first excited state of the ground state band. In Fig. 2 are illustrated the comparisons between the effects of the staggering of the theoretical values, $Z(5)$ model³⁶ which is a parameter free model, screened Kratzer¹⁸ prediction and experimental data for the ¹⁹²Pt atomic nucleus. At the points 6_{γ}^{+} and 8_{γ}^{+} the shift is significant between the $Z(5)$ symmetry and the values of this work. Whereas, at the points 4_{γ}^{+} , 5_{γ}^{+} and 7_{γ}^{+} the shift is very small. One can remark that the curve provided by the present model shifts away from the one of screened Kratzer predictions at the points 6_{γ}^{+} and 8_{γ}^{+} , and get close to experimental curve at the point 5_{γ}^{+} . Figure 3 shows the comparison between the effects of the staggering of the theoretical values, $Z(5)$ symmetry, screened Kratzer¹⁸ prediction and experimental data for the ¹⁹⁴Pt atomic nucleus. Figure 3 presents a very small shift between the $Z(5)$ symmetry, screened Kratzer model and this work at each points except at 8_{γ}^{+} . We note that the curve of this work gets close to the experimental curve at the points 5_{γ}^{+} and 6_{γ}^{+} . At the points 4_{γ}^{+} and 5_{γ}^{+} all the theoretical curves join together. In Fig. 4 are illustrated the comparisons between the effects of the staggering of the theoretical values, $Z(5)$ symmetry,³⁶ screened Kratzer¹⁸ prediction and experimental data for the ¹⁹⁶Pt atomic nucleus. The curves presented in Fig. 4 show that at the points

4_{γ}^{+} , 5_{γ}^{+} and 6_{γ}^{+} our graph is closer to experimental graph^{17,18,25} than the graphs from $Z(5)$ symmetry and screened Kratzer potential. Moreover, as J goes to higher values, the graph of the present model moves away from those of $Z(5)$ symmetry and screened Kratzer prediction. It is obvious that for ^{192,194,196}Pt atomic nuclei, the graphs fit well in the energy band from 4_{γ}^{+} to 6_{γ}^{+} . But from 6_{γ}^{+} to 8_{γ}^{+} , one can conclude that our graph is close to those from $Z(5)$ and screened Kratzer prediction.

6. Conclusion

In this work, a new interaction potential is suggested to study the Bohr Hamiltonian equation for triaxial nuclei. The SUSY-QM method was used to obtain the eigenvalues of the energies of the Bohr Hamiltonian equation. Then numerical results for energy spectra are presented in Table 2 and were compared with experimental data and others theoretical works using Morse and Killingbeck plus Morse potential for ¹⁹²Pt, ¹⁹⁴Pt and ¹⁹⁶Pt isotopes. Further, our results are found to be in good agreement with experimental data and improved in comparison with predictions from Morse and Killingbeck plus Morse potential. Next, $B(E2)$ transition rates are calculated and compared with other relevant theoretical predictions and the available experimental predictions. At the end of this study, it appears that the combination of Hulthen and screened Kratzer potential takes a particularly interesting aspect in the sense that it allows us to obtain good numerical results for the normalized energies and $B(E2)$ transition rates.

References

1. A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol. II: Nuclear Deformations (Benjamin, New York, 1975).
2. F. Iachello and A. Arima, *Interaction Boson Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
3. R. F. Casten and N. V. Zamfir, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3584.
4. K. Heyde and J. L. Wood, *Rev. Mod. Phys.* **83** (2011) 1467.
5. P. A. Butler and W. Nazarewicz, *Rev. Mod. Phys.* **68** (1996) 349.
6. F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 3580.
7. F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 052502.
8. F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 132502.
9. P. Cejnar, J. Jolie and R. F. Casten, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 2155.
10. L. Fortunato, *Eur. Phys. J. A* **26** (2005) 1.
11. B. T. Mbadjoun, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama, G. H. Ben-Bolie and P. O. Ateba, *Int. J. Mod. Phys. E* **27** (2018) 1850072.
12. J. M. E. Ema'a, B. T. Mbadjoun, A. Zarma, P. E. Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 490.
13. D. Bonatsos et al., *Phys. Rev. C* **76** (2007) 064312.
14. D. Bonatsos, P. E. Georgoudis, D. Lenis, N. Minkov and C. Quesne, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 044321.
15. L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G* **29** (2003) 1341.
16. L. Fortunato and A. Vitturi, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **30** (2004) 627.

17. D. Nga Ongodo, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **2811** (2019) 1950106.
18. Y. Omon, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **2920** (2020) 2050082.
19. H. Sobhani, A. N. Ikot and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **132** (2017) 240.
20. H. Sobhani, H. Hassanabadi and W. S. Chung, *Nucl. Phys. A* **85** (2018) 3580.
21. M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Eur. Phys. J. A* **51** (2015) 131.
22. M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne, *Int. J. Mod. Phys. E* **24** (2015) 1550089.
23. M. Chabab, A. El Batoul, A. Lahbas and M. Oulne, *Nucl. Phys. A* **953** (2016) 158.
24. L. Naderi and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **131** (2016) 133.
25. M. Capak, D. Petrellis, B. Gonul and D. Bonatsos, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **42** (2015) 095102.
26. L. Wilets and M. Jean, *Phys. Rev.* **102** (1956) 788.
27. A. S. Davydov, *Nucl. Phys.* **24** (1961) 682.
28. S. De Baerdemacker, L. Fortunato, V. Hellemans and K. Heyde, *Nucl. Phys. A* **769** (2006) 16.
29. A. C. Gheorghie, A. A. Rudata and A. Faessler, *Phys. Lett. B* **648** (2007) 171.
30. A. A. Rudata and P. Baganu, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 034313.
31. H. Hassanabadi, H. Sobhani and A. N. Ikot, *Nucl. Phys. A* **966** (2017) 82.
32. D. Bonatsos, P. E. Georgoudis, N. Minkov, D. Petrellis and C. Quesne, *Phys. Rev. C* **88** (2013) 034316.
33. F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, *Phys. Rep.* **251** (1995) 267, arXiv:hep-th/9405029.
34. A. Bohr, *Mat. -Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **26** (1952) 14.
35. A. Bohr and B. Mottelson, *Mat. -Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **27** (1953) 1.
36. D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, D. Petrellis, P. P. Raychev and P. A. Terziev, *Phys. Lett. B* **584** (2019) 386.
37. J. Meyer-ter-Vehn, *Nucl. Phys. A* **249** (1975) 111.
38. I. Inci, *Int. J. Mod. Phys. E* **23** (2014) 1450053.
39. A. Lemieux and A. K. Bose, *Ann. Inst. Henri Poincare Sec. A* **3** (1969) 10.
40. C. Lam and Y. Varshni, *Phys. Rev. A* **4** (1971) 1875.
41. O. Oluwadare and K. J. Oyewumi, *Chin. Phys. Lett.* **34** (2017) 110301.
42. A. Kratzer, *Z. Phys.* **3** (1920) 460.
43. K. Hong and J. Noolandi, *J. Chem. Phys.* **68** (1978) 5163.
44. W. C. Qiang and S. H. Dong, *Phys. Lett.* **368** (2007) 13.
45. S. H. Dong, W. C. Qiang and G. H. Sun, *J. Phys. A* **40** (2007) 10535.
46. I. Yigitoglu and D. Bonatsos, *Phys. Rev. C* **83** (2011) 014303.
47. A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957).
48. N. Soheibi, M. Hamzavi, M. Eshghi and S. M. Ikhdaïr, *Int. J. Mod. Phys. E* **26** (2017) 1750073.
49. S. H. Adama, D. Nga Ongodo, A. Zarma, J. M. E. Ema'a, P. E. Abiama and G. H. Ben-Bolie, *Int. J. Mod. Phys. E* **30** (2021) 2150105.