

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix - Travail – Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

CENTRE DE RECHERCHE ET DE
FORMATION DOCTORALE EN
SCIENCES, TECHNOLOGIES ET
GEOSCIENCES

B.P. : 812 Yaoundé

E-mail : crfd_stg@uy1.uninet.cm



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace - Work – Fatherland

THE UNIVERSITY OF YAOUNDE I

POSTGRADUATE SCHOOL OF
SCIENCE, TECHNOLOGY AND
GEOSCIENCES

Po Box : 812 Yaoundé

E-mail : crfd_stg@uy1.uninet.cm

LABORATOIRE D'ENERGIE ET DES SYSTEMES ELECTRIQUES ET ELECTRONIQUES
LABORATORY OF ENERGY AND THE ELECTRIC AND ELECTRONIC SYSTEMES

**APPROCHE ÉLECTRIQUE DE LA TRANSMISSION D'INFLUX
NERVEUX À PARTIR DES SYSTEMES DE COUPLAGE
THERMO-PHOTOSENSIBLE**

THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat/Ph.D de Physique
Option : Systèmes électriques et électroniques

Par

FOSSI TAGNE Jules Volhmer Revest

Matricule : 17T5829

Master de Physique

Sous la direction de :

Rose NGONO MBALLA

Maître de Conférences, Université de
Yaoundé I

Jacques ATANGANA

Professeur, Université de Yaoundé
I

Année 2023





DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DEPARTMENT OF PHYSICS

ATTESTATION DE CORRECTION DE LA THESE DE
DOCTORAT/Ph.D

Nous soussignés, Professeur **OWONO OWONO Luc Calvin** et Professeur **MBINACK Clément**, respectivement Président et Examineur du jury de la Thèse de Doctorat/Ph.D de Monsieur **FOSSI TAGNE Jules Vollmer Revest** Matricule : 17T5829, préparée sous la direction des Professeurs **ATANGANA Jacques** et **NGONO MBALLA Rose**, intitulée : « APPROCHE ÉLECTRIQUE DE LA TRANSMISSION D'INFLUX NERVEUX À PARTIR DES SYSTÈMES DE COUPLAGE THERMOPHOTOSENSIBLE », soutenue le 23 Mai 2023 en vue de l'obtention du grade de Docteur/Ph.D en Physique, Spécialité Énergie, Systèmes Électriques et Électroniques, Option Systèmes Électriques et Électroniques, attestons que toutes les corrections demandées par le jury de soutenance ont été effectuées.

En foi de quoi, la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Fait à Yaoundé, le **20 JUIN 2023**

Examineur

Pr. MBINACK Clément

Le Président de jury

Pr. OWONO OWONO
Luc Calvin



Visa du Chef de Département

Professeur

Déclaration

Je déclare que cette thèse intitulée : **APPROCHE ÉLECTRIQUE DE LA TRANSMISSION D'IN-FLUX NERVEUX À PARTIR DES SYSTEMES DE COUPLAGE THERMO-PHOTOSENSIBLE** est mon travail original. Toutes les sources que j'ai utilisées ou citées ont été indiquées et reconnues au moyen de références complètes, et que ce document n'a été soumis dans aucun autre établissement universitaire.

FOSSI TAGNE Jules Volhmer Revest

Matricule : 17Y5829

Signé :

Date : SEPTEMBRE 2023

Dédicace

À mon épouse KAMGAM DAYO Ariane,

en témoignage de ma reconnaissance pour tous les sacrifices endurés lors de ces travaux de Thèse.

Remerciements

Ce travail n'aurait pas pu voir le jour sans la volonté et la grâce de Dieu le Tout Puissant. Il m'a accordé l'inspiration, la forme, la volonté, le courage, les moyens et l'espoir. Par ailleurs, c'est le fruit d'un environnement de travail moral et intellectuel assez soutenu et à cet effet, qu'il me soit permis, au terme de cette thèse qui a commencé depuis l'année académique 2017 – 2018, d'exprimer du fond du cœur ma sincère gratitude, ma profonde reconnaissance et mes vifs remerciements

- ♠ Au recteur de l'Université de Yaoundé I, le **Professeur Maurice Aurélien SOSSO** pour avoir mis à notre disposition un cadre idoine de formation, lequel a éveillé en nous un sens élevé de responsabilité, d'engagement pour un travail bien accompli. Ce cadre nous a également permis d'acquiescer le savoir être nécessaire pour notre bonne insertion dans la communauté scientifique de plus en plus rigoureuse et ses exigeante. Nous restons convaincu que sa rigueur scientifique et ses conseils multiformes feront de nous un scientifique avéré, performant et compétitif dans les années à venir ;
- ♠ Au coordonnateur du Centre de Recherche et de la Formation Doctorale en Sciences, Technologies et Géosciences de l'Université de Yaoundé I (CRFD-STG), le **Professeur Luc Calvin OWONO OWONO** pour m'avoir donné une chance d'entrer dans cette prestigieuse école ;
- ♠ À mon Directeur de thèse le **Professeur Jacques ATANGANA**, professeur à l'Ecole Normale Supérieure de l'Université de Yaoundé I, pour sa confiance en notre modeste personne, ses encouragements permanents tout au long de ce travail, ainsi que pour la volonté et l'abnégation dont il a fait montre en acceptant de diriger ce travail malgré ses lourdes responsabilités ;
- ♠ À mon Co-Directeur de thèse le **Dr. Rose NGONO MBALLA**, professeur à la Faculté de Médecine et des Sciences Biomédicales de l'Université de Yaoundé I, pour sa confiance, ses conseils et ses encouragements tout au long de ce travail ;
- ♠ Aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'accepter de lire et d'évaluer ce travail de thèse ;
- ♠ À tous les Enseignants du Département de Physique de l'Université de Yaoundé I au premier rang desquels son Chef, le **Professeur Jean-Marie Bienvenu NDJAKA**. nous pensons particulièrement à ceux du laboratoire d'Energie et des Systemes Electrique et Electronique pour les enseignements de qualité qu'ils ont su nous transmettre durant les années passées en D1, D2 et D3 de notre formation.
- ♠ Aux Chef du Laboratoire d'Energie, des systèmes électriques et électroniques, le **Professeur Bernard Essimbi Zobo**, pour m'avoir accueilli au sein de ce laboratoire et de m'avoir apporté de précieux conseils tant théoriques que techniques.

- ♠ Aux **Professeur Aurelien KENFACK DJIOTSA, Professeur Clement Frédéric MBINACK** et **Professeur Bertrand BODO** pour avoir contribué à l'amélioration de la qualité de ce manuscrit. Je vous remercie beaucoup pour les critiques lors de la phase de pré-soutenance.
- ♠ À la communauté scientifique de l'université de de Ngaoundéré, ce séminaire présidé par le doyen de la faculté des sciences le **Professeur Edima Hélène Carole** était articulé : ATELIER DE COORDINATION DES ACTIVITÉS DE RECHERCHES, sous le thème : Applications médicales du transport intelligent des informations dans les environnements biologiques.
- ♠ Aux enseignants de l'Université de Buea **Dr. NJITACKE Zeric, Dr. FOZIN Theophile, Dr. TSA-FAK Nestor** pour leur disponibilité, leurs conseils et leur précieuse aide face aux difficultés rencontrées.
- ♠ À mes aînés académiques et camarades de promotion **Dr. FEUDJIO Florent, Dr. NDI Mireille, Dr. LEUTCHO Gervais, Dr. DJAZET Alain, M. DJIOKO Jean Paul, M. TANKEU WILLIAM** pour leurs différents mots d'encouragement.
- ♠ À mon papa **M. TAGNE FOKA Vincent** et à ma maman **Mme. MAKUEU FOKA Micheline** pour tout leur amour, leur conseil, leur soutien moral et financier, leur regard vigilant d'éducateurs soucieux de l'avenir de leur progéniture, élément sans lesquels je n'aurais pu acquérir certaines aptitudes.
- ♠ À ma tendre épouse **KAMGAM DAYO Ariane** qui a toujours été à mes côtés et a toujours su trouver les mots pour m'encourager à travailler davantage.
- ♠ À mes beaux parents **Papa KAMGAM DIEUDONNEE** et **Maman KAMDOM ANNE FLORE** pour leur amour et leur encouragement.
- ♠ À mes frères et soeurs **MOKAM Lucrèce, FOKA Kosmovie, ZEPANG Hans, FOKA Emmanuel, KAMGAM Phalone, KAMGAM Hermann, MBOPDA Loïc** pour leur soutien multiformes, qui ont toujours été à mes côtés.
- ♠ À Mes tantes, oncles et cousin(e)s **M. DEFFO Pythagore, Mme. MEKAMDJO Dorette, M. KOEGNE Seraphin, M. GUEYEP Olivier** pour leur attention et leurs encouragements dans l'accomplissement de ce travail.
- ♠ Je ne saurais m'empêcher d'adresser un grand merci à **TIEFANG Williams** et **NGUEDE Henri**, pour avoir su me redonner confiance dans les instants de doute, ainsi que pour des moments de complicité et de bonheur qu'ils m'offrent chaque jour.

Table des matières

Déclaration	i
Dédicace	ii
Remerciements	iii
Table des matières	v
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	xiv
Liste des abréviations	xv
Résumé	xvi
Abstract	xvii
Introduction générale	1
Chapitre 1 REVUE DE LA LITTÉRATURE	6
1.1 Physiologie du neurone	6
1.1.1 Structure du neurone	6
1.1.2 Influx nerveux	10
1.1.3 Dynamique des synapses biologiques	14
1.1.4 Activités électriques dans un neurone	16
1.1.5 Concept de base de la dynamique chaotique	18
1.2 Littérature liée à la modélisation neuronale	18
1.2.1 Modèles traditionnels de neurones	19
1.2.2 Comparaison entre les modèles de neurones	24
1.3 Effets biophysiques sur la dynamique neuronale	25
1.4 Communication neuronal : nouveau types de couplage des neurones	27
1.4.1 Synapses à Jonction Josephson (JJ)	28
1.4.2 Synapses memristives	30
1.5 Synchronisation des neurones	31
1.5.1 Synchronisation complète	33

1.5.2 Synchronisation de phase	33
Chapitre 2 MATRIELS ET MÉTHODES	35
2.1 Modélisation des modèles de neurone FHN thermo-photosensible étudié dans cette thèse	35
2.1.1 Modélisation du modèle de neurone FHN thermo-photosensible	36
2.1.2 Modélisation de deux neurones FHN thermo-photosensible couplé via une synapse à la Jonction Josephson	39
2.1.3 Modélisation de deux neurones FHN hybrides couplé via une synapse memristive	44
2.2 Méthodes analytiques	48
2.2.1 Points fixes	49
2.2.2 Méthode Cardan	49
2.2.3 Stabilité des systèmes dynamiques	50
2.2.4 Critères de Routh-Hurwitz	52
2.3 Méthodes de simulation numérique	53
2.3.1 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	53
2.3.2 Outils de calcul pour la caractérisation des états dynamiques des modèles neuronaux	54
2.4 Méthodes d'analyse des circuits électriques	55
2.4.1 Lois de Kirchhoff	56
2.4.2 Implémentation du circuit électronique PSpice	56
2.4.3 Implémentation du circuit à microcontrôleur	57
Chapitre 3 RÉSULTATS ET DISCUSSION	60
3.1 Effets de la lumière et de la température sur la dynamique d'un neurone	60
3.1.1 Analyse d'équilibre biologique et stabilité	60
3.1.2 Propriétés dynamiques du système neuronal	63
3.1.3 Approche électronique à travers une carte à microcontrôleur	71
3.2 Effets des synapses sur la dynamique des neurones	72
3.2.1 Couplage neuronaux via une synapse à jonction Josephson	73
3.2.2 Couplage neuronaux via une synapse à memristor	86
3.2.3 Contrôle des comportements coexistants dans des neurones couplés	96
Conclusion Générale	99
Bibliographiques	102
LISTE DES PUBLICATIONS ISSUES DE LA THESE	117

Liste des figures

Figure1.1	Schéma d'un neurone biologique[58]	7
Figure1.2	Schéma simplifié présentant l'organisation des phospholipides en bicouche.	8
Figure1.3	Illustration de la diversité morphologique des neurones : A) cellule unipolaire, B) cellule pseudo unipolaire, C) cellule bipolaire et D) cellules multipolaires [68].	9
Figure1.4	Les concentrations intracellulaire et extracellulaire des ions [58].	10
Figure1.5	Mesure du potentiel de repos. A l'équilibre, il est de $-70mV$	11
Figure1.6	La membrane neuronale au repos peut être considérée comme une pile électrique, dont le pôle négatif serait situé à l'intérieur de la cellule et le pôle positif à l'extérieur. Dans cette analogie, les canaux ioniques peuvent être vus comme des résistances variables en fonction de leur ouverture ou fermeture.	12
Figure1.7	Un potentiel d'action[58]	13
Figure1.8	Schéma d'une synapse chimique entre deux neurones ¹	15
Figure1.9	Schéma d'une synapse électrique entre deux neurones ²	16
Figure1.10	Représentation des différents états dynamiques dans lesquels un neurone peut fonctionner : (a) spiking, (b) Bursting et (c) Chaotic Bursting [78].	17
Figure1.11	La membrane cellulaire est considérée comme un circuit électrique [59].	19
Figure1.12	Le simulateur électronique du modèle Bonhoeffer-van der Pol (BvP) de FitzHugh Nagumo [184].	26
Figure1.13	Schéma de principe des circuits neuronaux fonctionnels. (a) Circuit neuronal thermosensible composé d'une thermistance; (b) Circuit neuronal dépendant de la lumière composé d'un phototube; (c) Circuit neuronal auditif composé d'une céramique piézoélectrique [121].	27
Figure1.14	Schéma d'une jonction Josephson, dans laquelle deux supraconducteurs (S) sont couplés l'un à l'autre à travers un film mince non-supraconducteur (noté F). [121].	28
Figure1.15	Quatre éléments de circuit définis axiomatiquement [139]. Memristor est l'élément de circuit à 2 bornes caractérisé par une relation constitutive entre deux variables mathématiques (charge q et flux ϕ).	30

1. <http://www.lecorpshumain.fr/corpshumain/img-fiches/fonctionnement/transmission-influx-3.jpg>

2. <http://recap-ide.blogspot.com/2014/10/physiologie-de-linflux-nerveux.html>

Figure2.1	Schéma de principe du circuit neuronal sous les effets de lumière et la température. NR est une résistance non linéaire, C est le condensateur, L représente une bobine d'induction, R_T et R'_T désignent des thermistances, R_P est une résistance linéaire et E est une source de tension constante. K désigne la cathode et A représenté l'anode du phototube.	37
Figure2.2	Un graphique de la relation entre la tension et le photocourant [12]	37
Figure2.3	Topologie de couplage de deux neurones biologiques via une Jonction Josephson (JJ)	40
Figure2.4	Schéma de principe de deux circuits neuronaux FHN thermo-photosensible couplé via la jonction Josephson et une résistance. NR_j est une résistance non linéaire, C_j est le condensateur, L_j représente une bobine d'induction, R_{T_j} et R'_{T_j} désignent des thermistances, R_{P_j} est une résistance linéaire et E_j est une source de tension constante. K_j désigne la cathode et A_j représente l'anode dans le phototube avec $j = 1, 2$	40
Figure2.5	Circuit électronique du modèle de deux neurones FHN thermo-photosensible couplé via une Jonction Josephson	43
Figure2.6	Topologie de couplage de deux neurones biologiques via un memristor multistable.	44
Figure2.7	Schéma de principe de deux circuits neuronaux FHN sous l'effets Photoélectrique et Thermique couplé via une synapse memristif. NR_1 et NR_2 sont des résistances non linéaires, C_1 et C_2 sont des condensateurs, L_1 et L_2 représentent des bobines d'inductions, E_1 et E_2 sont des sources de tension constante, R_T et R_{2T} désignent des thermistances, R_P et R_1 sont des résistances linéaires et A et K désignent respectivement l'anode et la cathode du phototube.	45
Figure2.8	Circuit électronique de deux neurones hybrides couplés via un memristor multistable	48
Figure2.9	La Carte Arduino Mega 2650.	58
Figure2.10	Schéma expérimental de l'implémentation de la dynamique neuronale basé sur une carte à microcontrôleur.	58
Figure3.1	Le discriminant de Cardan et les points d'équilibre varient avec l'évolution du temps sous différentes valeurs de température T' . (a) Discriminant de Cardan, (b) nombre et valeurs des points d'équilibre. Considérons : $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \varepsilon_P = \varepsilon_0 = 0.175, \omega'_T = \omega_P = 0.05$ and $A_0 = A_P = 1$	62
Figure3.2	Représentation des solutions des valeurs propres du polynôme caractéristique 3.7 dans le plan complexe ($\text{Re}(\lambda), \text{Im}(\lambda)$) pour $1 \leq T' \leq 10$	64
Figure3.3	Diagramme de bifurcation montrant la coordonnée du potentiel de membrane $x(t)$ et le graphique correspondant de l'exposant de Lyapunov maximum en fonction de T' . Les valeurs des autres paramètres sont définies dans le texte.	65
Figure3.4	Simulation numérique de la série temporelle (a) et son attracteur dans le plan ($y-x$) (b), illustrant la complexité du système pour $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \varepsilon_P = 0.175, \varepsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5, T' = 5, A_P = 0.01, \omega'_T = 0.7$ et $\omega_P = 0.7$	65

- Figure3.5** Diagrammes de bifurcations calculés en modifiant les paramètres de bifurcation (ω_P, A_P, ω'_T) à $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5$. Pour a) $T' = 5, A_P = 0.01, \omega'_T = 0.7$; b) $T' = 5, \omega_P = 0.7, \omega'_T = 0.7$; et c) $T' = 5, A_P = 0.01, \omega_P = 0.7$ 66
- Figure3.6** Diagramme de bifurcation à deux paramètres, montrant les comportements présentés par le potentiel membranaire du neurone dans les espaces (T', A_P) (a) et (ω_P, A_P) (b) à $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5, \omega'_T = 0.7$. Pour a) $\omega_P = 0.7$ et b) $T' = 5$. Sur la base de ces diagrammes à deux paramètres, le comportement irrégulier (chaotique) est associé à la couleur bleue tandis que le comportement régulier (périodique) est associé à la couleur noire. 66
- Figure3.7** Simulation numérique de la série temporelle du potentiel de membrane dans le neurone sous différents paramètres de bifurcation à $a = 0, 7, b_0 = 0, 8, c = 0, 1, \epsilon_P = 0, 175, \epsilon_0 = 0, 175, A_0 = 0, 5$. Pour Resting (a) $T' = 1, A_P = 0.2, \omega_P = 0.001, \omega'_T = 0.001$; Spiking (b) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.35, \omega'_T = 0.7$; Bursting (c) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.7, \omega'_T = 0.7$ et Attracteur illustrant la complexité du système (d) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.7, \omega'_T = 0.7$ 67
- Figure3.8** Diagramme de bifurcation montrant la coordonnée du potentiel de membrane $x(t)$ et le graphique correspondant de l'exposant maximal de Lyapunov en fonction de b_0 , montrant le doublement de période inverse (RPD), la crise extérieure (EC) et la crise intérieure (IC) avec $T' = 5, a = 0.7, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5, A_P = 0.01, \omega'_T = 0.7, \omega_P = 0.7$ 68
- Figure3.9** Évolution temporelle $x(t)$ près de la crise intérieure, complétant la fenêtre de période-4 pour : a) $b_0 = 0.6945 < b_c$, b) $b_0 = 0.6952 > b_c$, c) $b_0 = 0.6961 > b_c$ 69
- Figure3.10** Diagrammes de bifurcation montrant la coordonnée du potentiel de membrane $x(t)$ en fonction du paramètre de contrôle b_0 pour l'arbre de Feigenbaum ré-émergent : (a), bulle primaire pour $b_0 = 1$; (b), bulle de période-4 pour $b_0 = 0, 9$; (c) et (d), arbre de ré-émergence Feigenbaum complet à $b_0 = 0, 8$ et $b_0 = 0, 7$. Considérant $T' = 5, a = 0.7, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_P = 0.01, \omega'_T = 0.7, \omega_P = 0.7$ 70
- Figure3.11** Formation d'un attracteur avec une forme de bulle chaotique (a) et la première carte de retour correspondante avec deux points critiques (b) pour une valeur spécifique $A_0 = 0.544$. Les autres valeurs sont sélectionnées comme dans la Figure (3.10c). . . . 71
- Figure3.12** Dispositif d'acquisition expérimentale implémentée à base du microcontrôleur. . . . 71
- Figure3.13** Résultats expérimentaux de la série temporelle du potentiel de membrane dans le modèle de neurone sous différents paramètres de bifurcation avec $a = 0, 7, b_0 = 0, 8, c = 0, 1, \epsilon_P = 0, 175, \epsilon_0 = 0, 175, A_0 = 0, 5$. Pour Resting (a) $T' = 1, A_P = 0.2, \omega_P = 0.001, \omega'_T = 0.001$; Spiking (b) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.35, \omega'_T = 0.7$; Bursting (c) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.7, \omega'_T = 0.7$ et Attracteur illustrant la complexité du système (d) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.7, \omega'_T = 0.7$ 72

- Figure3.14** Diagramme à deux paramètres avec leur plus grand exposant de Lyapunov (a) et la fonction d'erreur (b), montrant les comportements présentés par le potentiel de membrane de chaque neurone et l'erreur qui existe entre ces deux neurones lorsque le courant maximal de la jonction Josephson (α) et la résistance du canal de couplage (β) varient avec une condition initiale fixe (0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001). Pour le diagramme à deux paramètres (a), les comportements réguliers (périodiques) sont représentés par une couleur bleue car les comportements irréguliers (chaotiques) sont matérialisés par une couleur jaune citron ou rouge en constante évolution pour la plupart des exposants négatifs de Lyapunov. et Positifs. D'après le schéma en (b), l'erreur nulle (synchronisation complète) est représentée par une couleur en bleu et l'erreur non nulle (pas de synchronisation) est associée à la couleur jaune citron ou rouge. 74
- Figure3.15** Diagramme de bifurcation représentant les maxima locaux du potentiel de membrane du premier neurone (a) et Variation de la fonction d'erreur de synchronisation maximale (b) par rapport au courant maximal de la jonction Josephson (α). Les autres paramètres sont définis comme suit : $a = 0.7, b_0 = 0.6, c = 0.1, \epsilon_P = \epsilon_0 = 0.175, T' = 5, A_0 = 0.5, A_P = 0.01, \omega'_T = \omega_P = 0.7, g = 0.1, \beta = 0.02$ et les valeurs initiales sont fixées à (0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001) 75
- Figure3.16** Formation d'attracteurs et projections de certaines solutions d'un espace de phase à cinq dimensions sur les plans (y_1, x_1) et (y_2, x_2) pour les deux neurones. Pour (a) $\alpha = 0,03$; (b) $\alpha = 0,088$; (c) $\alpha = 0,5$ et (d) $\alpha = 1,3$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.15. 76
- Figure3.17** Évolution temporelle du potentiel de membrane est calculée pour les deux neurones FHN en sélectionnant différentes valeurs du paramètre appliqué α : pour (a) $\alpha = 0.03$; (b) $\alpha = 0.088$; (c) $\alpha = 0.5$ et (d) $\alpha = 1.3$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.15. 77
- Figure3.18** Évolution de la fonction d'erreur calculée pour différentes valeurs du paramètre α . Pour (a) $\alpha = 0.03$; (b) $\alpha = 0.088$; (c) $\alpha = 0.5$ et (d) $\alpha = 1.3$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.15. 78
- Figure3.19** Diagramme de bifurcation représentant en (a) les maxima locaux du potentiel de membrane du premier neurone et en (b) la variation de la fonction d'erreur de synchronisation maximale en fonction du paramètre β du couplage de tension. Les autres paramètres sont définis comme suit : $a = 0.7, b_0 = 0.6, c = 0.1, \epsilon_P = \epsilon_0 = 0.175, T' = 5, A_0 = 0.5, A_P = 0.01, \omega'_T = \omega_P = 0.7, g = 0.1, \alpha = 0.02$ et les valeurs initiales sont fixées à (0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001). 78
- Figure3.20** Formation d'attracteurs et projections de certaines solutions d'un espace de phase à cinq dimensions sur les plans (y_1, x_1) et (y_2, x_2) pour les deux neurones. Pour (a) $\beta = 0.01$; (b) $\beta = 0.0188$; (c) $\beta = 0.02$ et (d) $\beta = 0.08$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.19. 79

- Figure3.21** Évolution temporelle du potentiel de membrane est calculée pour les deux neurones FHN en sélectionnant différentes valeurs du paramètre appliqué β . Pour (a) $\beta = 0.01$; (b) $\beta = 0.0188$; (c) $\beta = 0.02$ et (d) $\beta = 0.08$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.19. 80
- Figure3.22** Évolution de la fonction d'erreur calculée pour différentes valeurs du paramètre β . Pour (a) $\beta = 0.01$; (b) $\beta = 0.0188$; (c) $\beta = 0.02$ et (d) $\beta = 0.08$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.19. 81
- Figure3.23** Formation d'attracteurs chaotiques des neurones maîtres et esclaves respectivement dans les plans (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sans activation du canal de couplage. Pour a) $T'_1 = 5$ et b) $T'_2 = 2.6$. Les autres valeurs des paramètres sont définies dans le test. 82
- Figure3.24** Diagramme de bifurcation représentant les maxima locaux du potentiel de membrane du premier neurone et la variation de la fonction d'erreur de synchronisation maximale par rapport au courant maximal de la jonction Josephson (α) (a,b) et en fonction du paramètre β de la tension de couplage (c,d) avec $g = 0.1$. Pour le diagramme a,b) $\beta = 0, 02$ et c,d) $\alpha = 0, 02$ 82
- Figure3.25** a) erreur de phase entre les potentiels de membrane des neurones maître (Neurone 1) et esclave (Neurone 2) par rapport au courant maximal de la jonction Josephson (α), b) évolution temporaire des potentiels de membrane du neurone maître (couleur bleue), du neurone esclave (couleur noire) et la différence des deux neurones (couleur rouge), c) la formation de l'attracteur dans le plan (x_1, x_2) entre les neurones maître et esclave et d) la projection du diagramme de phase sur les plans (x_1, y_1) présentés par la couleur bleue et (x_2, y_2) matérialisés par la couleur noire. Pour (A_i) $g = 0.01$, (A_{ii}) $g = 0.03$, (A_{iii}) $g = 0.2$ et (A_{iv}) $g = 0.5$ 83
- Figure3.26** Simulation sur Pspice montrant les attracteurs dans le plan (x_1, x_2) pour a) $R_{51} = R_{52} = 1M\Omega$, b) $R_{51} = R_{52} = 200k\Omega$, c) $R_{51} = R_{52} = 50k\Omega$ et d) $R_{51} = R_{52} = 20k\Omega$ 85
- Figure3.27** Simulation sur Pspice montrant la série temporaire du potentiel de membrane du premier neurone et du second neurone ainsi que l'erreur de phase entre les potentiels de membrane pour a) $R_{51} = R_{52} = 1M\Omega$, b) $R_{51} = R_{52} = 200K\Omega$, c) $R_{51} = R_{52} = 50K\Omega$ and d) $R_{51} = R_{52} = 20K\Omega$ 86
- Figure3.28** Boucles d'hystérésis pincées du memristor multistable piloté par un stimulus sinusoïdal $v = A\sin(2\pi Ft)$. (a) $F = 1$, $\varphi_0 = 0$ et différente valeur de A . (b) $A = 1.4$, $\varphi_0 = 0$ et différente valeur de F . (c) $F = 1$, $A = 1.4$ et différente valeur de φ_0 87
- Figure3.29** Diagrammes d'exposant de Lyapunov à deux paramètres montrant le plus grand exposant de Lyapunov λ_{max} dans les plans $I_0 - f$, $f - k$ and $I_0 - k$ permettant d'observer les différents comportements des neurones couplent via la synapse memristive. Les paramètres varient comme suit a, b) $k = 1$, $-1 < I_0 < 0.5$ et $0 < f < 0.2$, c, d) $I_0 = -0.26$, $0 < f < 0.2$ et $0 < k < 2$ et e, f) $f = 0.1$, $-1 < I_0 < 0.5$ et $0 < k < 2$. Les diagrammes de gauche et de droite sont obtenus respectivement avec les états initiaux $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1)$ et $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 4.1)$ 88

- Figure3.30** Diagrammes de bifurcation montrant les maxima locaux du flux d'état interne du synapse memrisitif φ_{max} par rapport à l'intensité du photocourant I_0 ainsi que leurs graphes d'exposant de Lyapunov pour les valeurs de $k = 1$ et $f = 0.1$. Les diagrammes du haut et du bas sont obtenus respectivement avec les conditions initiaux $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1)$ et $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 4.1)$ 89
- Figure3.31** Evolution temporelle des différentes variables d'états des neurones couplés $(x_1, y_1, x_2, y_2, \varphi)$ et la formation de son attracteur dans le plan $(\varphi - x_1)$ pour différentes valeurs de l'intensité du photocourant I_0 appliqué. Les graphes a,c) montrent un éclatement périodique pour $I_0 = 0.18$ tandis-que les graphes b,d) présentent un éclatement chaotique pour $I_0 = 0.3$ 90
- Figure3.32** Coexistence d'attracteurs hétérogènes respectivement dans les plans (φ, x_1, y_1) (a) et (φ, x_2, y_2) (b) obtenus avec des états initiaux différents $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, \varphi_0)$ où $\varphi_0 = \{0.1, 2.1, 4.1, 6.1, 8.1, 10.1\}$. le diagramme de bifurcation des conditions initiales (c) montrant les maxima locaux du potentiel de membrane du neurone photosensible par rapport à φ_0 . Ces graphiques sont obtenus pour $k = 0, 2$ et $I_0 = -0, 26$. 91
- Figure3.33** (a) Diagramme de bifurcation montrant la dynamique dépendante de φ_0 avec la condition initiale $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, \varphi_0)$. (b) bassin d'attraction dans le plan $(x_{10} - \varphi_0)$ ainsi que les maxima locaux de φ montrant la coexistence d'attracteurs homogènes de positions différentes. Ces graphiques sont obtenus pour $k = 1, 67$ et $I_0 = -0, 26$. 92
- Figure3.34** Coexistence homogène d'attracteurs dans le plan (φ, x_1, y_1) obtenu avec différents états initiaux $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, \varphi_0)$ où $\varphi_0 = \{0.1, 4.1, 8.1, 12.1, 16.1, 20.1, 24.1, 28.1, 32.1, 36.1\}$ montrant des attracteurs chaotiques (a) et des attracteurs périodiques (b). 93
- Figure3.35** a) erreur de phase entre les potentiels de membrane des neurones photosensible et thermosensible par rapport à l'état initial φ_0 , b) évolution temporaire des potentiels de membrane du neurone photosensible (couleur bleue), du neurone thermosensible (couleur noire) et de la différence des deux neurones (couleur rouge), c) Formation de l'attracteur sur le plan (x_1, x_2) entre les deux neurones et en d) les portraits de phase sur les plans (x_1, y_1) présentés par la couleur bleue et (x_2, y_2) matérialisé par la couleur noire avec les paramètres suivants : $a = 0.7, b = b_0 = 0.8, c = 0.1, \xi_1 = \xi_0 = 0.15, T' = 5, f = 0.1, \alpha = 20, \beta = 1$ et $I_0 = -0.26$. Les graphiques A_i, A_{ii}, A_{iii} et A_{iv} sont obtenus respectivement avec les valeurs de la force de couplage $k = \{0.005, 0.05, 0.1, 2\}$ 94
- Figure3.36** Formation d'attracteurs dans Pspice pour différentes valeurs de l'intensité du photocourant I_0 appliqué. (a) schéma de tir d'éclatement chaotique pour $R_{14} = 55.55k\Omega$ et (b) schéma de tir d'éclatement périodique pour $R_{14} = 33.33k\Omega$ avec $R_{15} = R_{35} = 10k\Omega$ et la condition initiale $(0.2V, 0.1V, 0.2V, 0.1V, 0.1V)$ 95

- Figure3.37** Coexistence de certains attracteurs homogènes obtenus sur Pspice avec les états initiaux $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, W(0))$ où les valeurs de $W(0)$ sont sélectionnées respectivement comme suit $0.1V$, $2.1V$ et $4.1V$. On considère $R_{14} = 38.76k\Omega$ et $R_{15} = R_{35} = 5.96k\Omega$ 96
- Figure3.38** Diagramme de bifurcation à deux paramètres (ε, φ_0) en fonction φ_{max} (a) montrant la dynamique des neurones couplés lorsqu'un contrôleur à rétroaction est appliqué. En (b) formation de l'attracteur désiré dans le plan (φ, x_1, y_1) avec des conditions initiales différentes pour une valeur de $\varepsilon = 8.75$ 97

Liste des tableaux

Tableau1.1	Ici, on présente le tableau de Izhikevich [110] traduit en français. Il compare les différents modèles neuronaux selon les caractéristiques biologiques des neurones impulsionnels. Le nombre d'opérations à virgule flottante par seconde (FLOPS) mesure la vitesse d'une résolution informatique.	25
Tableau3.1	Points d'équilibres DC, valeurs propres et la stabilité.	63
Tableau3.2	Paramètres de circuit du modèle neuronal couplé via la jonction Josephson pour les simulations Pspice	84

Liste des abréviations

- **ADN** : *Acide Désoxyribo Nucléique.*
- **ODE** : *Equations Différentielles Ordinaires.*
- **RK4** : *Runge-Kutta d'Ordre 4.*
- **JJ** : *Jonction Josephson.*
- **EL** : *Exposant de Lyapunov.*
- **HH** : *Hodgkin-Huxley.*
- **FHN** : *FitzHugh-Nagumo.*
- **HR** : *Hindmarsh-Rose.*
- **ML** : *Morris-Lecar.*
- **IF** : *Integrate-and-Fire.*
- **LIF** : *Leaky-Integrate-and-Fire.*
- **SQUID** : *Superconducting Quantum Interference Device.*
- **RSFQ** : *Rapid Single Flux Quantum.*
- **HB** : *Bifurcation de Hopf.*
- \Re_e, \Im_m : *Partie réelle, Partie imaginaire.*
- **ddp** : *Différence de potentiel.*
- **LCK** : *Loi de Courant de Kirchhoff.*
- **LVK** : *Loi de Tension de Kirchhoff.*
- **CTN** : *Coefficient de température négatif.*
- **CTP** : *Coefficient de température positif.*
- **DAC** : *Digital to Analogical Converter.*
- **ICSP** : *In Circuit Serial Programming.*
- **PWM** : *Pulse Width Modulation.*
- **EDI** : *Environnement de Développement Intégré.*
- **USB** : *Universal Serial Bus.*

Résumé

Le cerveau humain est un organe constitué des milliers de neurones interconnectés via des synapses. Il est la source de nos pensées, émotions, perceptions, actions et de nos souvenirs. L'avancé des neurosciences au cours de ces dernières années, nous donne une compréhension globale de l'activité du cerveau. Ainsi, des travaux récents ont montré que des effets biophysiques tels que la lumière, la température et le son pour ne citer que ceux-là, peuvent influencer la dynamique neuronale. Dans cette thèse, nous proposons et analysons des modèles de neurones FitzHugh-Nagumo thermo-photosensible qui prennent en compte l'effet de la lumière et de la température. En considérant ces effets agissant simultanément sur la dynamique neuronale, les principales propriétés de ce modèle sont attentivement analysées à travers des techniques analytiques, numériques et expérimentales. Il en ressort que la variation de la température modifie le nombre et la nature des points d'équilibre du système neuronal et induit une bifurcation de Hopf, montrant que le neurone peut passer d'un état de repos à un état oscillatoire et inversement. De plus, plusieurs activités électriques importantes du neurone telles que le repos, le dopage, la salve, le chaos et autres phénomènes complexes peuvent être observés lorsqu'il y a variation de la lumière et de la température. En outre, l'effet des couplages synaptiques entre deux neurones a également fait l'objet de plusieurs analyses, et des résultats importants ont été relevés. En considérant une synapse à Jonction Josephson pour coupler deux modèles de neurones thermo-photosensible, nous avons pu démontrer que ces neurones peuvent subir une synchronisation complète et une synchronisation de phase lorsque les paramètres de la voie de couplage sont bien définis. Par la suite, en couplant un neurone photosensible et un neurone thermosensible à travers une synapse à memristor, nous avons pu dégager des phénomènes captivants tels que les extrêmes multistabilités homogène et hétérogène lorsque la variable d'état interne du memristor change périodiquement. En plus de ces résultats passionnants, nous avons remarqué qu'il est très difficile pour deux neurones différents couplés d'atteindre une synchronisation complète. Par contre, une synchronisation de phase peut se produire lorsque les paramètres du canal sont activés. Par conséquent, l'augmentation de la force de couplage dans ce dernier modèle permet d'atteindre le régime de synchronisation de phase entre les deux neurones. Puis, afin de contrôler le phénomène de multistabilité nous avons introduit dans ce modèle neuronal un terme de rétroaction dépendant de l'une des variables d'état dynamique des neurones. Nous montrons qu'il est possible pour un modèle de neurone de passer d'un état multistable à un état monostable. Les résultats analogiques et expérimentaux obtenus fournissent la preuve de la fiabilité et de la précision des modèles proposés.

Mots clés : *Neurone, Phototube, Thermistance, Jonction Josephson, Memristor, Synchronisation.*

Abstract

The human brain is an organ made up of thousands of neurons interconnected via synapses. It is the source of our thoughts, emotions, perceptions, actions and memories. Advances in neuroscience over the past few years have given us a comprehensive understanding of brain activity. Thus, recent work has shown that biophysical effects such as light, temperature and sound, to name a few, can influence neuronal dynamics. In this thesis, we propose and analyze models of thermo-photosensitive FitzHugh-Nagumo neurons that take into account the effect of light and temperature. Considering these effects acting simultaneously on neuronal dynamics, the main properties of this model are carefully analyzed through analytical, numerical and experimental techniques. It emerges that the temperature variation modifies the number and the nature of the equilibrium points of the neuronal system and induces a bifurcation of Hopf showing that the neuron can pass from a state of rest to an oscillatory state and vice versa. Moreover, several important electrical activities of the neuron such as rest, doping, burst, chaos and other complex phenomena can be observed when there is variation of light and temperature. In addition, the effect of synaptic couplings between two thermo-photosensitive neurons have also been the subject of several analyzes and important results have been noted. By considering a synapse at the Josephson Junction to couple two models of thermo-photosensitive neurons, we were able to demonstrate that these neurons can undergo complete synchronization and phase synchronization when the parameters of the coupling pathway are well defined. Subsequently, by coupling a photosensitive neuron and a heat-sensitive neuron through a memristor synapse, we were able to identify fascinating phenomena such as the extremes of homogeneous and heterogeneous multistabilities when the internal state variable of the memristor changes periodically. In addition to these exciting results, we noticed that it is very difficult for two different coupled neurons to achieve full synchronization. On the other hand, phase synchronization can occur when the channel parameters are activated. Therefore, increasing the coupling strength in this last model achieves the phase synchronization regime between the two neurons. Then, in order to control the phenomenon of multistability, we introduced into this neural model a feedback term depending on one of the dynamic state variables of the neurons. We show that it is possible for a neuron model to go from a multistable state to a monostable state. The analog and experimental results obtained provide proof of the reliability and accuracy of the proposed models.

Keywords : *Neurons, Phototube, Thermistor, Josephson Junction, Memristor, Synchronization.*

Introduction générale

L'ingénierie neuromorphique est un domaine interdisciplinaire qui s'inspire de la biologie, de la physique, des mathématiques, de l'informatique et de l'ingénierie électronique. Sa finalité est d'assurer la conception des systèmes neuronaux artificiels, à l'aide d'une architecture et des principes approchant ceux des systèmes nerveux biologiques [1]. En effet, il est connu que le cerveau humain est le siège central des activités physico-chimiques et électriques. A ce titre, il est constitué des milliers de neurones interconnectés par le biais de synapses formant un réseau neuronal assez complexe. Cette particularité confère à ce réseau, des potentialités lui permettant de réagir différemment de manière optimal en présence des stimuli externes [2–4], par le biais des mécanismes de neurotransmission synaptique appropriés. Il est observé dans l'actif de ces potentialités du réseau neuronal, sa forte capacité de gérer et d'optimiser les connexions par un établissement des circuits synaptiques adéquats. Ceci pour l'atteinte sans faute par des signaux des cibles destinataires via des phénomènes de plasticité synaptique et de synchronisation des ondes cérébrales. Animées en permanence par un désir d'approcher ce réseau neuronal robuste par des systèmes et modèles électriques artificiels, de nombreuses recherches scientifiques parcourent le monde. Ceci afin de développer des circuits électroniques fonctionnels et efficaces pouvant approcher, prédire ou alors interpréter au mieux la neurotransmission à l'aide d'un système électrique. Les avancés dans ce sens ont produit des modèles mathématiques des neurones et à partir desquels, des circuits électriques furent proposés. On citera ainsi celui de FitzHugh-Nagumo (FHN), le plus utilisé au regard de sa simplicité algébrique et sa similitude avec celui de Hodgkin-Huxley (HH). Le traitement de la dynamique associée à ces modèles a porté des analyses sur les éventualités de bifurcations, de transitions de synchronisation y compris les sélections des motifs sur le réseau neuronal. Des investigations poussées sur ces modèles [5–8], ou encore ceux de neurones couplés ou en réseaux [9–11], ainsi que ceux dépendante des phénomènes biophysiques [12–14], montre qu'il peut y avoir génération des comportements tels que les états de repos, d'éclatement voire chaotiques [15] ou complexes. De cette analyse, il se dégage que la cinétique locale et les modes de couplage associés dans ces modèles de neurones [16] conduisent à différents modes de déclenchements [17], avec contrôle de la stabilité et de la synchronisation [18–20]. Malgré cette forte activité scientifique dans ce domaine, les recherches avancées sont toujours en pleine exploration des outils théoriques associés aux technologies appropriées. Ceci afin de proposer des modèles assez complexes et mieux outillés en termes d'interprétation, d'analyse et d'approche des prédictions de certaines fonctions neuronales du cerveau humain.

Fondamentalement, certains neurones biologiques peuvent être sensibles à des classes de signaux commandés. Les neurones photosensibles ou visuels [21, 22], sensibles aux signaux optiques et au flux lumineux constituent un cas de figure. Nous signaleront également les neurones auditifs [23] sensibles aux ondes acoustiques, les neurones thermosensibles [24, 25] qui détectent les changements de température et bien d'autres. Ceux-ci peuvent convertir puis coder des signaux de toutes natures en signaux électriques neuronaux afin d'assurer la propagation et la transmission au cerveau via les neurones du ganglion spiral pour décodage. Les recherches en neurosciences et dans l'intelligence artificielle furent accentuées. Ceci dans le but de modéliser, concevoir, expliquer ou encore, interpréter les mécanismes de fonctionnement des activités électriques neuronales dans le système nerveux. Comme outils d'usage, on citera certaines classes de biomatériaux utilisés comme candidats tests dans les circuits neuronaux pour assurer les opérations de détection et codage des signaux. La céramique piézoélectrique utilisée comme capteur sensible pour la détection des signaux sonores externes dans un neurone auditif [14] en constitue un autre. Ceci grâce à ses potentialités de convertir des ondes mécaniques en ondes électriques, aux tensions de sortie multivariables en fonction de l'excitation induite. Un autre atout de ce capteur est celui d'assurer un passage direct des ondes électriques sans perte de synchronisation au niveau de la jonction gap dans la zone présynaptique et postsynaptique. Des activités de recherche similaires proposeront un neurone visuel [12] en procédant au couplage d'un phototube sur un circuit neuronal. Ce qui fera une avancée pertinente dans le domaine. Il sera ainsi démontré que les variations successives de la puissance lumineuse imposeront au neurone des comportements particuliers parfois inattendus. L'intensification de ces investigations sera axée sur l'identification des meilleurs circuits neuronaux aux couplages appropriés, capables de déclencher une excitation voulue dans un microenvironnement bien défini pour une transmission synaptique envisagée. Le couplage de champ électrique via une connexion de condensateur et qui explique le mécanisme physique du couplage différentiel [26-28] en constitue un exemple. Il en est de même du couplage de champ magnétique via une bobine d'induction redéfini par couplage Intégral [29] entre des circuits non linéaires. En outre, il est constaté qu'un couplage variable de tension via une résistance ou une jonction gap, associée à un inducteur et un condensateur, déclenche le couplage du champ physique avec suppression de l'effet Joule. Nous noterons aussi que la combinaison des composants électroniques permet de construire une synapse hybride pour les circuits neuronaux [30]. Ces synapses de nature électrique et chimique peuvent non seulement coder des stimuli externes mais, permettent également le couplage des neurones biologiques. Malgré ces fortes avancées, les résultats obtenus restent en permanente exploitation. La préoccupation fondamentale reste la recherche des meilleurs composants pour des circuits neuronaux de haute perfection. Il s'agit d'explorer ceux jugés assez aptes à assurer une synchronisation dans un microenvironnement synaptique conforme aux approches biologiques.

Dans cette approche, la jonction Josephson (JJ), caractérisée par des phénomènes tels la quantification du flux magnétique et l'effet Josephson fut repéré comme l'un des meilleurs candidats dans cet exercice [31-33]. En effet, sa grande sensibilité offre une possibilité aux neurologistes de l'utiliser pour quantifier les champs magnétiques des organismes vivants, plus précisément du cerveau siège d'un champ magnétique très faible. La caractéristique principale de cette jonction est son courant de Jonction. Celui-ci dépend de l'erreur de phase sur la jonction. Un champ magnétique externe peut générer une erreur de

phase additive sur la jonction. Ce qui pourra modifier de façon efficace ce courant de jonction. Si les circuits neuronaux proposés adoptent des comportements en rapport avec la synchronisation, il existe d'autres comportements physiques qui entrent en jeu. Ceux-ci pouvant traduire certains comportements de la neurotransmission biologique. Ils peuvent ainsi être observés par des apparitions sporadiques de certains effets physiques lorsqu'on passe d'un circuit à un autre. Il devient nécessaire d'explorer autant de schémas possibles en proposant des circuits neuronaux aussi variés que possible et aptes à produire des réponses opérationnelles, pouvant s'adapter aux multiples situations dynamiques de cette neurotransmission biologique. Ce qui permettra d'envisager des prédictions sur la dynamique éventuelle sur ce qui se passera pendant la neurotransmission synaptique. En effet, il est constaté au cours de la traversé synaptique, une multitude d'éventualités des cas d'interconnexions associées à une complexité d'établissement des liaisons virtuelles générées pendant la neurotransmission synaptique. Dans un souci d'approcher par des circuits électriques la dynamique biologique de cette neurotransmission synaptique, l'une des possibilités serait d'établir une carte de comportements de la dynamique de la neurotransmission avec les effets synaptique associés dans des circuits neuronaux à jonction à Josephson. Ainsi, plusieurs circuits non linéaires intégrant la jonction Josephson ont été explorés pour comprendre la dynamique des circuits chaotiques [34] et les neurosciences computationnelles [35–38].

Le memristor découvert pour la première fois en 2008 par Hewlett Packard [39] caractérisé par sa non-linéarité, sa non-volatilité et sa faible puissance, est considéré comme le quatrième élément électronique de base [40]. A cet effet, des modèles théoriques, des modèles de circuits, des modèles de matériaux et des modèles typiquement mathématiques du memristor ont été largement développés [41, 42]. Ainsi, le développement des nouveaux systèmes neuromorphiques [43] a beaucoup évolué grâce aux propriétés intrinsèques multiples du memristors, plus précisément des memristors mathématiques. Rappelons que ces memristors interconnecté aux modèles originaux de neurones, ont cette capacité d'imiter les fonctions biologiques telles que les processus d'enregistrement, de sélection, de stockage, d'apprentissage, de réflexion et de transfert de données dans le cerveau humain. Par conséquent, ils peuvent jouer le même rôle que les synapses biologiques. Dès lors, plusieurs théories importantes sur les memristors mathématiques ont été développées et classées [44] pour faciliter la recherche dans ce domaine. Sur la base de ces théories, la fonction quadratique [45], la fonction de valeur absolue [46] ainsi que la fonction tangente hyperbolique [10] ont été utilisées pour mettre en place des memristors mathématiques exploitables dans des réseaux de neurones artificiels et beaucoup d'autres. De plus, les scientifiques et les technologues ont actuellement développé des modèles de memristors actifs localement avec une ou deux boucles d'hystérésis pincées coexistantes qui sont stables dans différentes conditions initiales [47–49]. Ces avancées importantes ont suscité l'attention des scientifiques du monde entier qui concentrent aujourd'hui leurs réflexions sur l'étude des systèmes multistables à base de memristors [50].

La multistabilité est caractérisée par la coexistence de plus de deux états stables pour le même ensemble de paramètres en utilisant des conditions initiales différentes dans un système dynamique non linéaire donné, en particulier les neurones dans notre cas [51, 52]. Ainsi, plusieurs travaux prenant en compte un réseau de neurones de Hopfield conçu à base de memristors ont permis de mettre en évidence ce phénomène de multistabilité qui joue un rôle important dans la compréhension de la dynamique cérébrale

[53–55]. Il décrit les processus de mémorisation et de traitement de l’information dans les neurones biologiques. Compte tenu de la croissance exponentielle des dispositifs mathématiques memristifs et de leurs similitudes avec les synapses biologiques [56, 57], il est important d’explorer le phénomène de multistabilité lorsque plusieurs modèles neuronaux sont couplés via des memristors. Cela permet de mieux comprendre la dynamique complexe de l’activité électrique générée dans les neurones biologiques et de contrôler le phénomène si nécessaire. Dans cette thèse, après avoir considéré les effets simultanés de la lumière et de la température sur la dynamique neuronale, nous avons évalué quantitativement l’effet des couplages synaptiques sur le processus de communication entre neurones. A l’aide d’un contrôleur, nous avons par ailleurs présenté un paradigme de solution qui peut aider à corriger certaines pathologies neurologiques en imposant la dynamique souhaitée au neurone malade.

L’objectif général de notre thèse est d’étudier l’effet de la lumière et de la température sur la dynamique, la synchronisation et le contrôle des oscillateurs neuronaux, en considérant le célèbre modèle neuronal introduit par FitzHugh-Nagumo (FHN) en 1962. Cet objectif peut être subdivisé en quatre objectifs spécifiques, à savoir :

1. ► A partir du modèle FHN, proposer un modèle de neurone thermosensible prenant en compte l’effet de la lumière et de la température, puis étudiez les différents comportements de l’activité électrique du neurone, qui se produisent lorsque le milieu cellulaire est exposé simultanément à la lumière et à la température.
2. ► Montrer à partir d’une carte à microcontrôleur d’une part et des simulations électroniques d’autre part, qu’il est possible de reproduire en temps réel les signaux électriques d’un neurone.
3. ► Proposer deux topologies de communication entre deux neurones, la première utilisant une jonction Josephson et la seconde utilisant un memristor comme couplage synaptiques, pour évaluer la propagation du signal et le processus de codage entre les neurones.
4. ► Proposer, une stratégie permettant de contrôler le comportement de multistabilité dans la dynamique neuronale.

Pour atteindre les objectifs ci-dessus, ce travail est organisé comme suit :

Dans le chapitre 1, nous présentons brièvement quelques notions de base nécessaires à la modélisation des neurones et quelques travaux importants concernant la dynamique des neurones. Ensuite, nous décrivons d’une manière succincte quelques modèles neuronaux qui ont été mis en place suite aux travaux innovants de Hodgkin-Huxley, et présentons un tableau comparatif de quelques modèles de neurones les plus utilisés en neurodynamique. Plus loin, nous analysons l’impact de quelques effets biophysiques sur l’activité électrique du neurone, suivie d’une section sur la communication entre les neurones. Enfin, nous présentons quelques généralités sur la synchronisation des oscillateurs neuronaux.

Dans le chapitre 2, nous nous concentrons sur la méthodologie utilisée pour réaliser les objectifs de cette thèse. Nous présentons les méthodes théoriques, numériques et expérimentales qui seront exploitées pour atteindre les résultats. Les méthodes fondamentales des sciences non linéaires nécessaires à l’analyse des oscillateurs neuronaux sont présentées ainsi que les différents modèles de neurones explorés dans cette thèse.

Dans le chapitre 3, nous présentons les résultats obtenus et les discussions. D'abord, nous évaluons l'effet simultané de la lumière et de la température sur la dynamique du modèle de neurones proposé par FitzHugh-Nagumo en 1962. Ensuite, nous évaluons les effets des couplages synaptiques sur la dynamique des neurones FHN homogènes et hybride. En premier lieu, nous proposons de coupler deux modèles de neurones FHN thermo-photosensible via une synapse à Jonction Josephson pour étudier les mécanismes de synchronisation (synchronisation complète et de synchronisation de phase) lorsque les paramètres de couplages sont apprivoisés. En second lieu, nous proposons de coupler deux modèles de neurones hybrides à travers une synapse à memristor multistable. Pour finir, nous proposons une approche de contrôle des régimes coexistants dans des modèles de neurones couplés.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale dans laquelle nous résumons les principales contributions présentées dans cette thèse et proposons quelques perspectives pour les travaux futures.

REVUE DE LA LITTÉRATURE

Introduction

La motivation majeure en neurosciences est axée sur la compréhension et le suivi de la transmission des signaux nerveux. Ceci nécessite une base scientifique nécessaire capable d'assurer une modélisation de neurones biologiques. Elle requiert à cet effet, la maîtrise des notions fondamentales sur l'anatomie et la physiologie du neurone, son comportement électrique, ainsi que la dynamique de transmission des signaux basée sur des concepts de propagation du potentiel électrique. L'étude des comportements dynamiques s'appuie sur la réalisation des modèles mathématiques capables de satisfaire certaines exigences biophysiques tant sur la dynamique neuronale que sur la neurotransmission, y compris la synchronisation synaptique.

1.1 Physiologie du neurone

Le terme neurosciences, apparu au cours du XX^{eme} siècle, est utilisé pour désigner l'ensemble des sciences qui permettent l'étude du fonctionnement du système nerveux. Elles concernent donc principalement la biologie et la médecine, mais attirent aujourd'hui d'autres disciplines scientifiques telles que la chimie, la psychologie, l'informatique, les mathématiques ou encore la physique[58]. Parmi ces disciplines, certaines s'intéressent à des éléments constituant le système nerveux, pour essayer de comprendre leur fonctionnement individuel avant de les faire interagir pour aller progressivement vers la compréhension du tout. D'autres, au contraire, s'intéressent au comportement global du système nerveux afin de comprendre comment il est constitué et organisé. Cependant, quelle que soit l'approche choisie, il est important de préciser l'échelle à laquelle on s'intéresse.

1.1.1 Structure du neurone

Le neurone est un mot issu du grec ancien ($\nu\epsilon\tilde{\upsilon}\rho\nu$) qui signifie nerf ou fibre. Il fut introduit dans le vocabulaire médical en 1881 par l'anatomiste allemand H.W. Waldeyer. Il désigne l'unité fondamentale du système nerveux qui assure la transmission d'un signal bioélectrique appelé influx nerveux et qui permet la communication et le traitement de l'information à partir du cerveau, à travers tout le corps. Malgré une diversité de dimensions et de formes, ces unités fondamentales sont toutes des cellules

nerveuses constituées d'un corps cellulaire, dont la taille varie de 4μ à 130μ , prolongé d'un côté par des dendrites et de l'autre par un axone, lui-même prolongé par des terminaisons axonales, tel que le présente la Figure.1.1. Le nombre de neurones dans le cerveau humain est estimé à 100 milliards. Ils sont capables de créer un réseau complexe, avec parfois plus de 100 milles synapses par neurone. La concentration en neurones peut également être importante dans d'autres organes, à l'instard de l'intestin où le nombre est estimé à 200 millions.

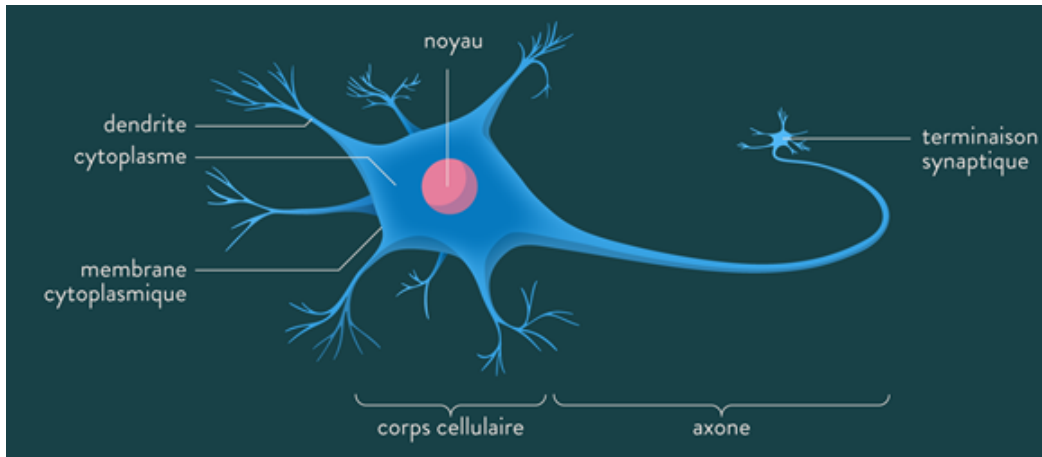


Figure 1.1 – Schéma d'un neurone biologique[58]

Comme toutes les cellules, un neurone forme un compartiment microscopique complexe dont le corps cellulaire contient un **cytoplasme**, un **noyau** et une **membrane plasmique**. Pour mieux appréhender cette thèse, il est important de parcourir les références [59–65] qui permettent de comprendre les notions de base sur le neurone. La description ci-après détaille le rôle de chacun de ces éléments.

La **membrane cellulaire**, encore appelée **membrane plasmique**, délimite une cellule et sépare le cytoplasme du milieu extérieur. Elle est composée d'une bicouche de lipides. Chaque lipide membranaire est constitué d'une tête polaire hydrophile orientée vers l'extérieur de la membrane et d'une queue hydrophobe orientée vers l'intérieur. L'épaisseur d'une membrane est d'environ 7.5nm (voir Figure 1.2). Elle fusionne à quelques endroits, laissant des ouvertures appelées **pores nucléaires**, permettant l'échange de molécules entre le cytoplasme et le noyau.

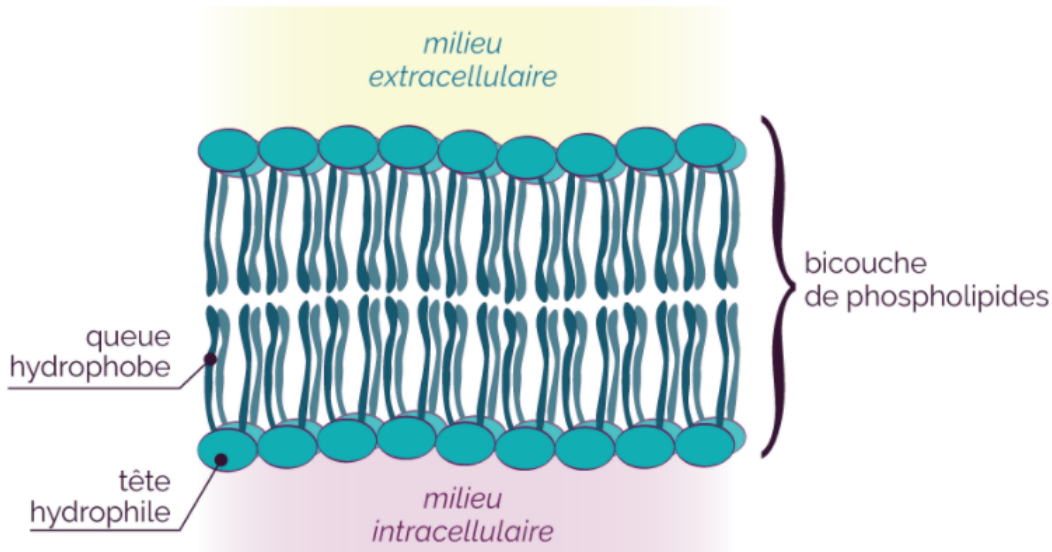


Figure 1.2 – Schéma simplifié présentant l'organisation des phospholipides en bicouche.

Le **cytoplasme** désigne le contenu d'une cellule vivante et la région comprise entre la membrane plasmique et le noyau. Dans le cytoplasme se trouvent des organites cellulaires, entourés ou non d'une membrane, flottant dans un liquide appelé **cytosol** et ayant chacun des fonctions propres.

Le **noyau** est une grosse structure entourée d'une double membrane, qui la sépare du cytoplasme. Le noyau contient le génome nucléaire constitué d'ADN. Il est donc indispensable à la vie du neurone.

Les **dendrites** prolongent le corps cellulaire des neurones. Ils ont pour fonction de recevoir et de conduire l'influx nerveux (signal) provenant d'autres cellules nerveuses, vers le corps cellulaire du neurone. S'il est excité, il enverra alors un influx nerveux par le biais de l'axone, vers un autre neurone, vers un muscle ou un autre type tissulaire. Elles s'opposent à l'axone pour plusieurs raisons :

- Les dendrites reçoivent l'influx nerveux, tandis que l'axone le transmet ;
- Les dendrites sont nombreuses tandis que l'axone est unique.

L'**axone** est un long prolongement qui émerge du corps cellulaire du neurone. Il est aussi prolongé par des terminaisons axonales ou synaptiques. Sa longueur est variable et peut atteindre plus d'un mètre (par exemple, l'axone du calmar géant). Son extrémité se divise en branches qui se connectent à d'autres neurones par l'intermédiaire d'une structure particulière : la synapse. L'axone transmet les messages de notre organisme (une douleur, un mouvement), sous forme de signaux de nature électrique.

Les neurones sont classés selon leur nombre de prolongements, leur forme anatomique, leur fonction et leur type de neurotransmetteurs.

Selon le nombre de prolongements (voir Figure 1.3), on distingue des neurones **unipolaires** (qui n'ont qu'un seul prolongement), **pseudo unipolaire** (qui contient un prolongement divisé en deux branches ; une branche se dirige vers la périphérie et l'autre vers la moelle épinière) **bipolaires** (qui ont un prolongement afférent et un prolongement efférent) et **multipolaires** (qui ont des prolongements multiples : un seul axone, mais de nombreux dendrites).

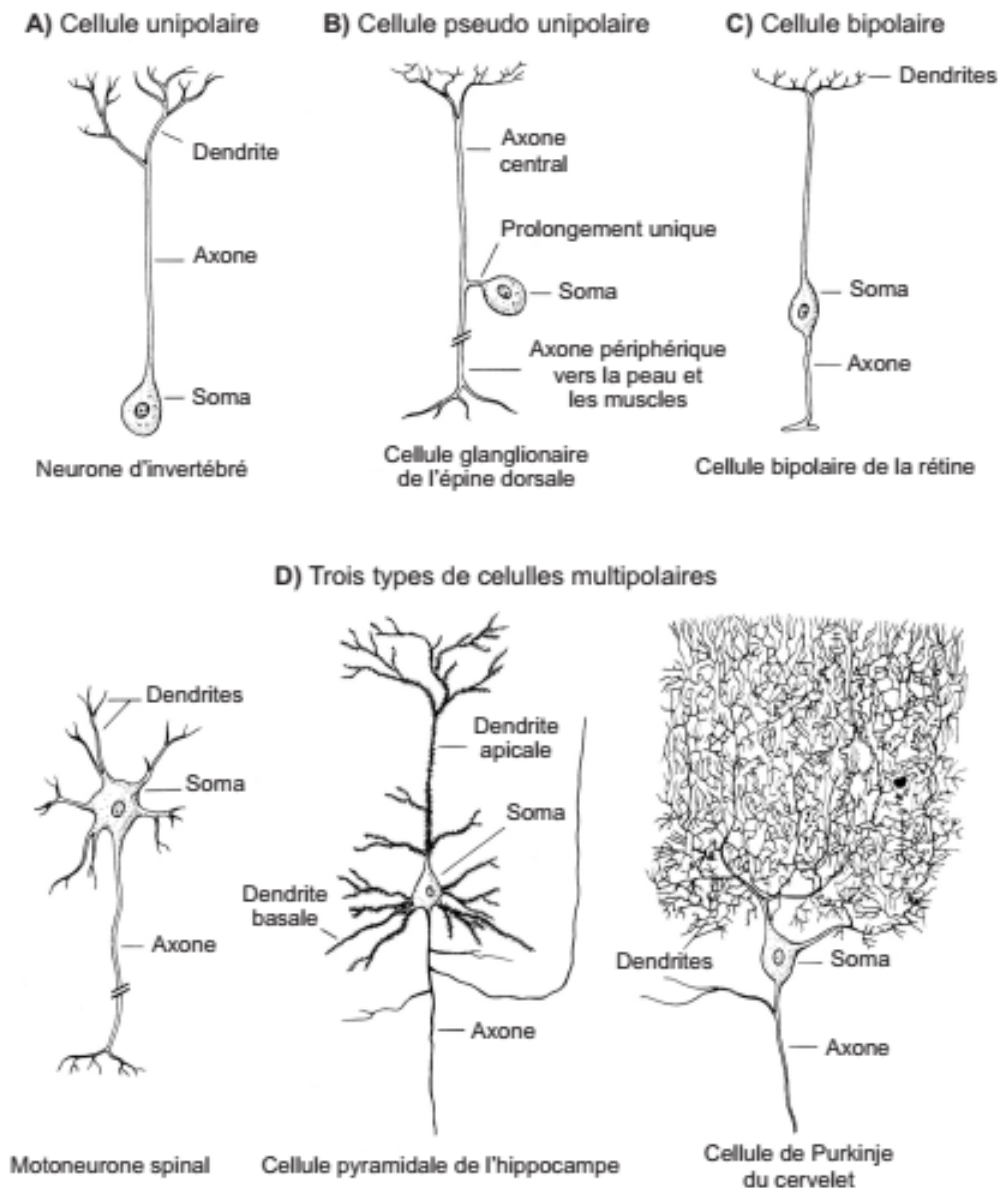


Figure 1.3 – Illustration de la diversité morphologique des neurones : A) cellule unipolaire, B) cellule pseudo unipolaire, C) cellule bipolaire et D) cellules multipolaires [68].

En ce qui concerne la forme anatomique, on distingue par exemple dans le cerveau, les cellules **pyramidales** qui se trouvent dans la matière grise ou cortex cérébral ; les cellules en **étoile** qui se trouvent également dans le cortex cérébral et les cellules de **Purkinje**, très nombreuses que l'on trouve exclusivement dans le cervelet (voir Figure 1.3).

Quant à la fonction, on distingue :

- Le neurone **efférent** qui est aussi appelé neurone **moteur**. Il transmet des impulsions en direction centrifuge. C'est à dire, le système nerveux central vers la périphérie ;
- Le neurone **afférent** qui est aussi appelé neurone **sensitif**. C'est une cellule nerveuse qui transporte les influx de la périphérie vers le système nerveux central ;
- L'**inter-neurone** est un neurone multipolaire qui établit de multiples connexions entre un réseau afférent et un réseau efférent. Comme les motoneurones (voir Figure 1.3), leur corps cellulaire est

toujours situé dans le Système nerveux central. La majorité des inter-neurones sont inhibiteurs et sécrètent un neurotransmetteur caractéristique.

1.1.2 Influx nerveux

L'**influx nerveux** est le potentiel électrique se déplaçant sur l'axone après que le neurone ait été stimulé. L'excitabilité est la propriété à la base du fonctionnement du neurone. Elle est la capacité à réagir à un stimulus et à le convertir en influx nerveux. La conductivité est la capacité de propagation et de transmission de l'influx nerveux¹.

La transmission de l'influx nerveux se fait des dendrites jusqu'à l'axone. En effet l'arbre somato-dendritique représente le pôle récepteur du neurone et l'axone (ou collatérales) représente le pôle émetteur du neurone. Il est important de noter que l'axone joue également le rôle de récepteur. La communication entre neurones se fait grâce :

- Aux potentiels d'action conduit au niveau des axones sur de longues distances avec peu de pertes.
- Aux potentiels gradués conduit au niveau des dendrites sur de courtes distances avec des pertes importantes.

1.1.2.1 Potentiel de repos

Les neurones, comme toutes les cellules de l'organisme, sont soumises à une différence de potentiel membranaire (ddp) due aux différences de concentration ioniques de part et d'autre de la membrane. Les ions Na^+ et Cl^- sont en majorité du côté extracellulaire et les ions K^+ et les protéines sont majoritaires du côté intracellulaire. La Figure 1.4 nous présente les concentrations des ions autour de la membrane plasmique [58].

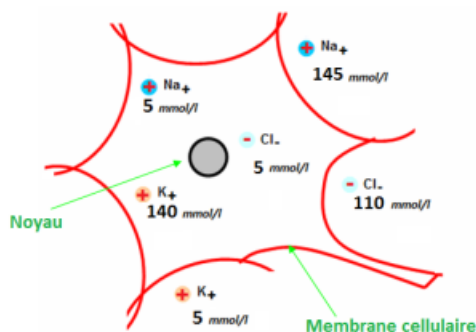


Figure 1.4 – Les concentrations intracellulaires et extracellulaires des ions [58].

Notons que les ions K^+ sont ceux qui possèdent la plus grande conductance au sein de la membrane, ils attirent donc le potentiel de membrane vers son potentiel d'équilibre ($-80mV$) donné par l'équation de **Nernst**. En effet, le gradient de concentration des ions potassiques les pousse à sortir de la cellule, mais l'existence de charge positive dans le milieu extracellulaire crée un gradient électrique de sens contraire au gradient de concentration des ions K^+ . Autrement dit, le potentiel de repos est atteint à l'équilibre, lorsque les forces dues au gradient électrique (qui poussent à faire rentrer les ions K^+ dans la cellule)

1. [http : //www.cours-pharmacie.com/physiologie/systeme-nerveux.html](http://www.cours-pharmacie.com/physiologie/systeme-nerveux.html)

sont égales aux forces dues au gradient de concentration (qui poussent à faire sortir les ions K^+ de la cellule). Ainsi, on arrive à un équilibre des forces. La différence de potentiel est alors de $-70mV$ (voir Figure 1.5). Elle se maintient même si Na^+ parvient à rentrer dans la cellule, et ceci par régulation des pompes Na^+/K^+ . Notons que le potentiel de membrane est nul lorsque la concentration en ions chargés négativement est égale à la concentration en ions chargés positivement entre le milieu intracellulaire et extracellulaire. Il y a ainsi un léger surplus d'ions chargés positivement dans le milieu extracellulaire et un léger surplus d'ions chargés négativement dans le milieu intracellulaire. Ces excès d'ions s'accumulent contre la membrane (tel qu'un condensateur électrique) et sont à l'origine du potentiel de repos² de $-70mV$ qui existe entre l'intérieur et l'extérieur de la cellule. Notons que la valeur du potentiel de repos n'est pas toujours de $-70mV$. Elle varie en fonction du type de cellules.

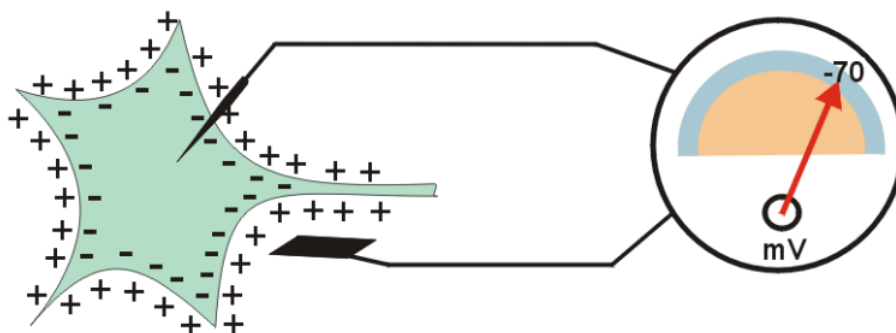


Figure 1.5 – Mesure du potentiel de repos. À l'équilibre, il est de $-70mV$.

1.1.2.2 Canaux ioniques

Un canal ionique est une protéine membranaire qui permet le passage à grande vitesse d'un ou plusieurs ions. Il existe de nombreux types de canaux ioniques. Ils peuvent être sélectivement perméables à un ion tel que le sodium, le calcium, le potassium ou l'ion chlorure, ou bien à plusieurs ions à la fois. Les canaux ioniques sont présents dans la membrane de toutes les cellules (voir Figure 1.6). Ils ont un rôle central dans la physiologie des cellules excitables comme les neurones ou les cellules musculaires et cardiaques.

Selon la nature du stimulus gouvernant l'ouverture des canaux, on distingue plusieurs types de canaux ioniques. Deux groupes sont majoritaires : certains restent toujours ouverts et contribuent à établir le potentiel de repos (par exemple les canaux à chlorure), tandis que l'ouverture d'autres canaux est déterminée par le potentiel transmembranaire, ceux-ci sont appelés canaux voltage-dépendants (par exemple les canaux sodiques et potassiques). Ces canaux ioniques voltage-dépendants ont un nombre important de propriétés qui déterminent leur arrivée. Pour pouvoir répondre à un stimulus, ils doivent posséder certains types de capteurs de différences de potentiel qui, lorsqu'ils sont déclenchés, peuvent ouvrir le canal. Ce taux d'activation est variable en fonction du type de canal étudié.

2. [http : //www.ebiologie.fr/cours/s/15/transport-a-travers-les-membranes-cellulaires](http://www.ebiologie.fr/cours/s/15/transport-a-travers-les-membranes-cellulaires)

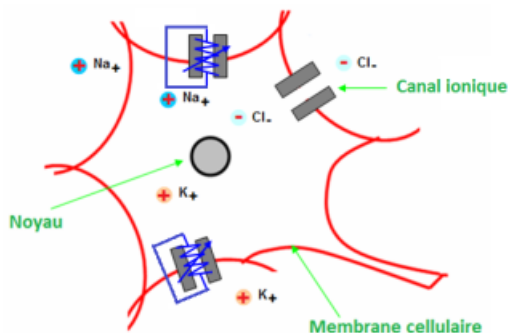


Figure 1.6 – La membrane neuronale au repos peut être considérée comme une pile électrique, dont le pôle négatif serait situé à l’intérieur de la cellule et le pôle positif à l’extérieur. Dans cette analogie, les canaux ioniques peuvent être vus comme des résistances variables en fonction de leur ouverture ou fermeture.

1.1.2.3 Potentiel d’équilibre

Le potentiel d’équilibre se réfère en général à un ion donné tel que Na^+ , K^+ ou Cl^- , etc. Il est donné par l’équation de Nernst et dépend, par conséquent, des concentrations extra et intracellulaires à un moment donné. Lorsqu’un canal membranaire existe pour cet ion donné, un équilibre ou un gradient est créé de part et d’autre de la membrane créant à la fois :

- Une différence transmembranaire de concentration, appelée **gradient chimique** ;
- Une différence transmembranaire de potentiel électrique, appelée **gradient électrique**.

Lorsque cet ion passe d’un milieu à un autre, ce double gradient est créé. Posons l’hypothèse que l’ion S chargé positivement soit plus important dans le milieu intracellulaire :

- Le gradient chimique tend à faire passer l’ion S dans le milieu extracellulaire par diffusion simple pour tenter d’équilibrer les concentrations, le milieu extracellulaire va s’enrichir d’une charge positive, tandis que la charge du milieu intracellulaire devient plus négative qu’avant ;
- Le gradient électrique tend à faire rapatrier l’ion S dans le milieu intracellulaire pour annuler la différence de charges apparue.

Ces deux forces sont donc opposées en direction. Lorsqu’elles auront atteint un équilibre dans leur valeur absolue, alors il ne pourra plus y avoir de mouvements de l’ion S : on dit que l’ion S aura atteint son équilibre électrochimique. Si on calcule, à l’aide de l’équation de Nernst, le potentiel de membrane que l’ion S aura créé quand l’équilibre électrochimique a été atteint, la valeur donnée sera celle du potentiel d’équilibre pour l’ion S ,

$$E_S = \frac{RT}{ZF} \ln \left(\frac{[S]_{ext}}{[S]_{int}} \right), \quad (1.1)$$

où E_S est le potentiel d’équilibre, ou potentiel de Nernst de l’ion S , les quantités $[S]_{ext}$ et $[S]_{int}$ sont les concentrations d’ion S de part et d’autre de la membrane cellulaire, R est la constante des gaz parfaits ($R = 8.314 J.K^{-1}.Mol^{-1}$), T est la température en Kelvin, F est la constante de Faraday en Coulomb ($F = 9600 C$) et Z est l’électrovalence, par exemple $Z(K^+) = +1$, $Z(Na^+) = +1$, $Z(Cl^-) = -1$

1.1.2.4 Potentiel gradué

Le potentiel gradué est une inversion locale et de courte durée du potentiel membranaire. Il apparaît au niveau des dendrites et des corps cellulaires, il est déclenché par une stimulation extérieure à la cellule (inversion locale de la polarité membranaire). Suite à cette stimulation, il apparaît un courant électrique local qui se propage bilatéralement par rapport au point de stimulation et dont l'intensité diminue avec la distance. Il est dit gradué, car son voltage est proportionnel à l'intensité de la stimulation. Ce potentiel gradué arrivera jusqu'au corps cellulaire et si son voltage est suffisant, il y aura formation d'un potentiel d'action.

1.1.2.5 Potentiel d'action

L'activité d'un neurone est provoquée par un stimulus qui peut être très variable. Lorsque le stimulus est suffisamment important, il déclenche un potentiel d'action. Le potentiel d'action est un changement transitoire du potentiel membranaire par rapport à son niveau de repos. Il ne se déclenche que si le stimulus est supérieur à une valeur seuil. L'amplitude du potentiel d'action est alors bien plus importante que celle du stimulus. Si le stimulus est inférieur à la valeur seuil, le potentiel d'action n'est pas déclenché. Ainsi, lorsque la valeur seuil du stimulus est atteinte, les phénomènes membranaires ne dépendent plus de la force du stimulus, c'est la loi du tout ou rien. Le potentiel d'action se propage ainsi le long de la membrane cellulaire, la polarité électrique passant de part en part d'environ $-70mV$ à environ $+40mV$. Cette inversion de polarité est provoquée par des mouvements d'ions à travers la membrane cellulaire grâce à des canaux ioniques.

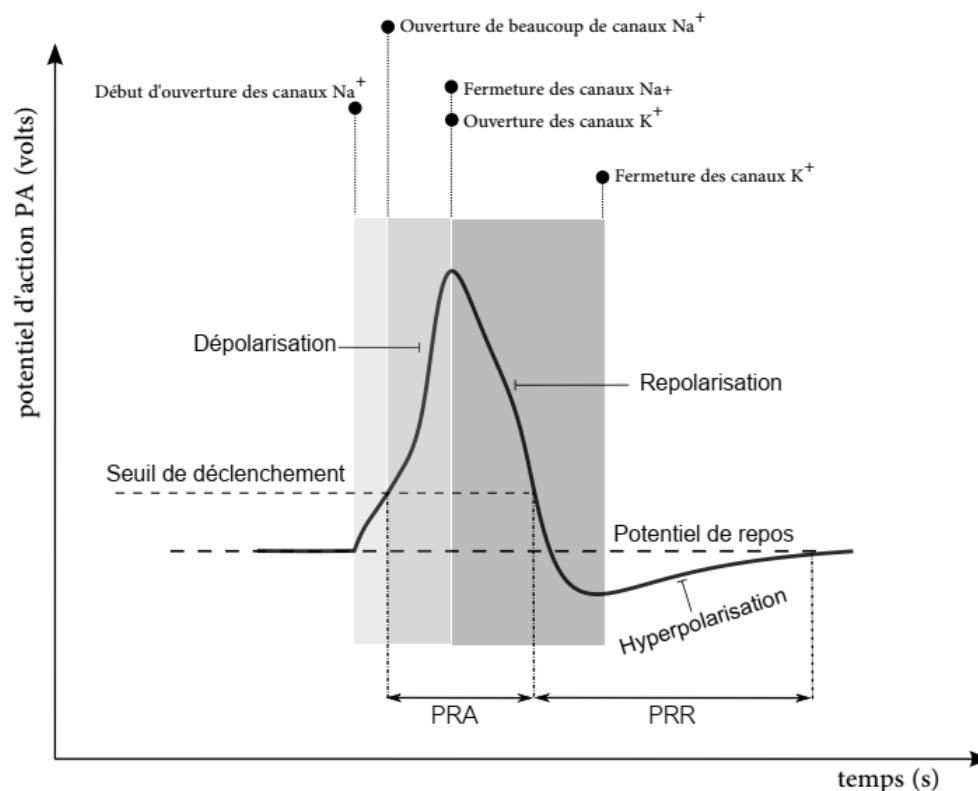


Figure 1.7 – Un potentiel d'action[58]

Le potentiel d'action est initié par une modification transitoire de la perméabilité membranaire permettant la diffusion des ions Na^+ et K^+ le long de leur gradient de concentration. Au repos, ce sont principalement les canaux potassiques qui sont ouverts et le potentiel de repos est proche du potentiel d'équilibre du potassium. Suite à un stimulus, une **dépolarisation** graduelle est initiée par des mouvements d'ions sodiques et potassique. Lorsque la dépolarisation atteint un seuil donné, des canaux sodiques potentiels dépendants s'ouvrent sous l'action de protéines. Le potentiel de membrane s'inverse alors et se rapproche du potentiel d'équilibre du sodium sans l'atteindre. Au sommet du potentiel d'action, les canaux sodiques se ferment, les canaux potassiques s'ouvrent, et le potentiel se rapproche de la valeur de repos. C'est la période de **repolarisation**. A la fermeture des canaux sodiques, certains canaux potassiques sont encore ouverts ce qui induit une **hyperpolarisation**. Une fois les canaux potassiques fermés le potentiel retrouvent sa valeur de repos. A noter que la fermeture des canaux potassiques est due à la fermeture de l'extrémité intracellulaire du canal par une portion de l'une des protéines du canal. L'ouverture des canaux potassiques est déclenchée par les détecteurs qui répondent à la même dépolarisation qui ouvrent les canaux sodiques mais avec du retard. Le potentiel d'action se propage le long des tissus excitables [66].

1.1.3 Dynamique des synapses biologiques

En 1897, Charles Sherrington a suggéré que les neurones effectuent des contacts fonctionnels avec d'autres neurones et d'autres types de cellules à travers les synapses. Entre-temps, l'existence de telles structures a été démontrée par microscopie électronique, 50 ans plus tard [67]. De nos jours, nous définissons la synapse comme l'ensemble des jonctions spécialisées par lesquelles les cellules du système nerveux communiquent entre elles et aux cellules non neuronales telles que les muscles ou les glandes. C'est aussi la région dans laquelle deux neurones sont les plus proches l'un de l'autre. La cellule transmettant un signal est appelée cellule **pré-synaptique** tandis que la cellule qui reçoit le signal est la cellule **post-synaptique**. Ces régions peuvent être présentes dans tout le neurone.

Le système nerveux central (SNC) est un tissu hautement connecté. Chaque neurone échange des informations avec environ 10^4 autres neurones [68]. Il existe au moins trois modes de communication différents entre les neurones : les **synapses chimiques**, les **synapses électriques** et l'**interaction éphaptique**.

1.1.3.1 Synapses chimiques

La forme prédominante de communication entre les neurones du cerveau des vertébrés est la synapse chimique [60]. Dans ce type de synapse, il existe une séparation de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres appelée fente synaptique (voir Figure 1.8). Dans les terminaux pré-synaptiques, il existe des collections de vésicules synaptiques, chacune contenant des milliers de molécules de neurotransmetteurs. Les vésicules libèrent des neurotransmetteurs dans la fente synaptique lorsque le neurone pré-synaptique se déclenche. Dans ce cas, les neurotransmetteurs subissent un processus de diffusion dans l'espace extracellulaire de la fente synaptique. Les molécules de neurotransmetteurs pourraient ainsi être liées aux récepteurs cellulaires post-synaptiques provoquant l'ouverture de canaux ioniques. Ainsi, le potentiel de

membrane change, et s'il dépasse un certain seuil, le neurone post-synaptique se déclenchera en réponse à une stimulation, concluant la communication. A noter que dans ce cas il existe une différence anatomique entre deux cellules bien définies, ce qui rend ce type de communication unidirectionnelle.

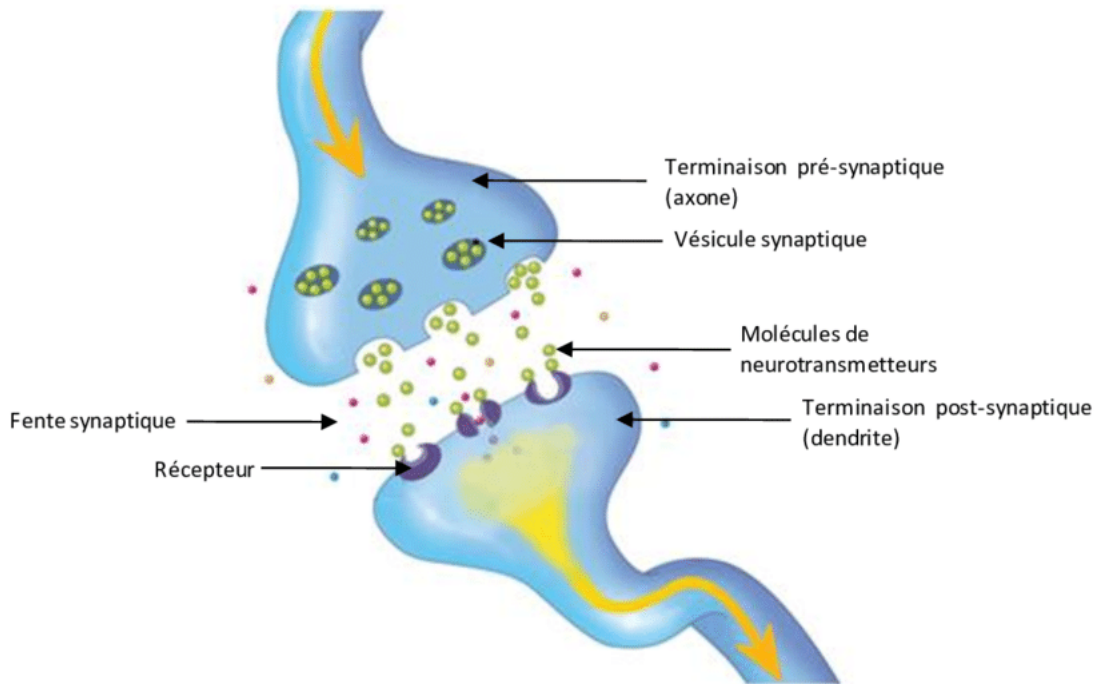


Figure 1.8 – Schéma d'une synapse chimique entre deux neurones ³.

La variation résultante du potentiel de membrane des neurones post-synaptiques dépend du nombre de canaux ouverts en raison de la liaison des neurotransmetteurs et du type de neurotransmetteur. Il existe un grand nombre de neurotransmetteurs, différents les uns des autres. Certains d'entre eux agissent [69] afin d'exciter (augmenter son potentiel membranaire ou dépolariser) le neurone post-synaptique tandis que d'autres inhibent son activité (diminuer le potentiel membranaire ou hyperpolariser) [70].

1.1.3.2 Synapses électriques

Les synapses électriques se produisent par l'interaction électrique entre les cellules. Dans ce cas, les membranes des neurones sont situées très près les unes des autres et se connectent par des canaux spécialisés appelés jonctions lacunaires (voir Figure 1.9). Ce sont des protéines qui ont des canaux plus larges que les pores des canaux ioniques : ainsi, diverses substances sont simplement libres de se propager par ces canaux. Il existe également un flux de courant entre les neurones, ce qui signifie que ces connexions sont davantage bidirectionnelles. Ils ont été impliqués dans l'explication de la propagation de la synchronie neuronale [71]. La preuve du rôle des jonctions lacunaires dans l'apparition d'une activité rythmique rapide a été mise en évidence préalablement par des observations selon lesquelles des oscillations rapides peuvent être générées dans des conditions où la transmission synaptique chimique est bloquée [72]. Les jonctions lacunaires présentent également deux avantages évidentes par rapport aux synapses chimiques pour l'induction de la synchronisation sans décalage. Premièrement, ils ne sont pas affectés par les retards synaptiques puisqu'aucun neurotransmetteur n'est utilisé. Deuxièmement, le

couplage électronique entre cellules agit principalement via des mécanismes de diffusion et tend donc à homogénéiser le potentiel membranaire des cellules impliquées. Ainsi, les jonctions lacunaires peuvent être considérées comme étant de nature synchronisant plutôt que de classe excitatrice ou inhibitrice [71]. On pense que les synapses électriques sous-tendent l'homogénéisation du déclenchement entre les neurones et favorisent la synchronie dans les réseaux modérément distribués [71, 73].

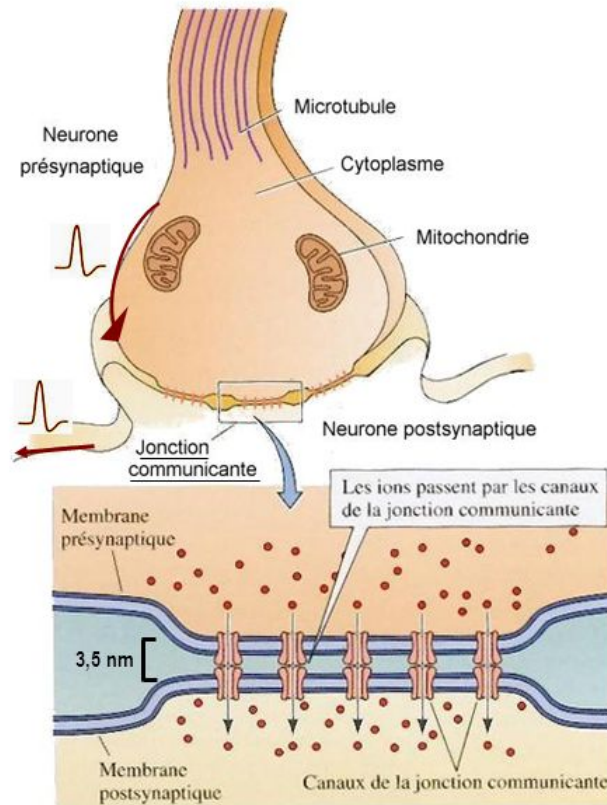


Figure 1.9 – Schéma d'une synapse électrique entre deux neurones⁴.

1.1.3.3 Interaction éphaptique

La transmission éphaptique est une forme de communication au sein du système nerveux, distincte des systèmes de communication directe comme les synapses électriques et les synapses chimiques[74]. Elle peut se référer au couplage de fibres nerveuses adjacentes causées par l'échange d'ions, ou elle peut se référer au couplage de fibres nerveuses à la suite de champs électriques locaux¹. Dans l'un ou l'autre cas, la transmission éphaptique peut influencer la synchronisation et le moment du déclenchement du potentiel d'action dans les neurones. On pense que la myélinisation inhibe les interactions éphaptiques.

1.1.4 Activités électriques dans un neurone

Les neurones sont des éléments importants dans les propriétés computationnelles du cerveau [75–77]. Le potentiel membranaire du neurone noté V_m est la variable physique la plus importante lors de ce calcul. Il peut changer rapidement dans le temps ([76, 77]). Cette modification du potentiel membranaire est principalement causée par l'interaction entre les neurones qui se produit par la transmission de

signaux électrochimiques (processus biophysique). Il est dit plus haut, qu'il existe dans un neurone un corps cellulaire, souvent appelé le soma, qui à l'extérieur contient quelques branches de dendrites et un axone, où les dendrites peuvent être considérées comme des canaux d'entrée et l'axone comme le canal de sortie d'un neurone, respectivement. Causé par des courants ioniques circulant à travers la membrane du neurone à l'intérieur du corps cellulaire, le potentiel de membrane du neurone changera avec le temps, ce qui entraînera des signaux électriques qui se propagent à travers l'axone. Ces signaux électriques peuvent être classés dans les trois états distincts suivants :

- **Repos (Resting)** : en l'absence de stimuli (par de réception de neurotransmetteurs), le courant ionique net traversant la membrane du neurone est nul et le potentiel membranaire est constant. Tous les neurones ont un potentiel de repos négatif, variant entre $-90mV$ et $-30mV$.
- **Pics (Spiking)** : si un neurone est stimulé (reçoit des neurotransmetteurs), son potentiel de membrane changera. Premièrement, étant donné que le stimulus est de type excitateur, en raison des courants ioniques excitateurs, le potentiel de membrane devient plus positif. À un certain point, les courants ioniques inhibiteurs domineront les courants excitateurs et le potentiel de membrane commencera à diminuer. Le résultat est un potentiel d'action ou un pic. Lorsqu'un neurone produit des pics successifs, on parle de pics toniques (tonic spiking), comme illustré à la Figure 1.9(a).
- **Éclatement (Bursting)** : au lieu de pics toniques, un neurone peut également produire des trains de pics successifs suivis d'une période de repos relativement longue (comme illustré à la Figure 1.9(b) appelées rafales. Si le nombre de pointes par rafale est irrégulier, comme représenté sur la Figure 1.9(c) on parle d'éclatement chaotique (Chaotic Bursting).

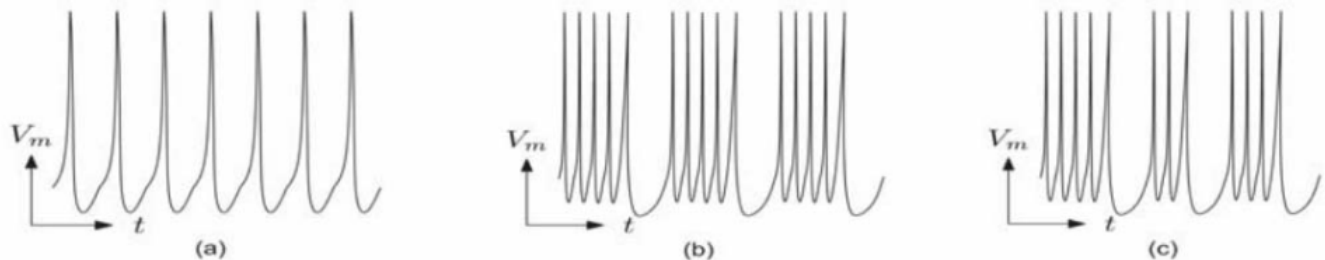


Figure 1.10 – Représentation des différents états dynamiques dans lesquels un neurone peut fonctionner : (a) spiking, (b) Bursting et (c) Chaotic Bursting [78].

L'une des propriétés remarquables que possède le neurone est sa capacité à fonctionner dans un mode dynamique chaotique dans lequel aucun nombre fixe de pointes ne se produit au cours de chaque rafale. En général, un tel comportement chaotique fait référence à des systèmes déterministes qui présentent un mouvement compliqué (apériodique) en raison d'une dépendance sensible aux conditions initiales. Depuis probablement le début du XX^e siècle, les scientifiques sont familiarisés avec le comportement chaotique, qui semble se produire dans plusieurs types de systèmes très différents. Quelques exemples bien connus sont le fameux oscillateur électrique de Van der Pol forcé périodiquement [79], l'oscillateur de Lorenz décrivant les rouleaux de convection dans l'atmosphère [80] et le système de Rössler [81] qui est utile dans la modélisation des équilibres des réactions chimiques.

1.1.5 Concept de base de la dynamique chaotique

La neurodynamique est un sujet interdisciplinaire des neurosciences et de la théorie des systèmes dynamiques [82]. Son but est d'étudier les caractéristiques dynamiques des systèmes nerveux biologiques et leur évolution dans le temps, en particulier le comportement de tir, la propriété chaotique, les phénomènes de synchronisation et de bifurcation en appliquant la théorie des systèmes dynamiques, en particulier la pensée et la méthode de la dynamique non linéaire.

Du point de vue de la dynamique chaotique, les caractéristiques dynamiques comprennent le chaos, le chaos transitoire et l'hyperchaos. Le **chaos** est un comportement dynamique particulier [46, 51], qui existe largement dans toutes sortes de systèmes non linéaires naturels, en particulier les systèmes neuronaux biologiques [83]. Selon la théorie de Lyapunov, le chaos a au moins un exposant de Lyapunov positif. Et le **chaos transitoire** est un comportement dynamique que l'existence du chaos est sur un temps fini [84]. De plus, l'**hyperchaos** est défini comme un chaos avec deux ou plusieurs exposants de Lyapunov positifs [85], ce qui est plus compliqué que le chaos. D'une manière générale, la trajectoire dynamique du chaos est appelée **attracteurs**. Un **attracteur** est appelé **attracteur caché** si son bassin d'attraction ne croise aucun voisinage ouvert des équilibres du système, ou sinon, il est appelé **attracteur auto-excité** [86]. Généralement, multi-scroll les attracteurs sont plus complexes par rapport au single-scroll [87].

Du point de vue de la stabilité, la dynamique chaotique contient des **attracteurs coexistants** [88], une **multistabilité** [89] et une **multistabilité extrême** [90]. Le phénomène des attracteurs coexistants est un phénomène dynamique complexe qui contient deux types de comportements chaotiques différents sous deux états initiaux différents. La coexistence de trois états dynamiques ou plus sous différents états initiaux est appelée multistabilité. La multistabilité signifie qu'une riche diversité d'états stables existe dans un système non linéaire, qui reflète les caractéristiques des systèmes complexes. Et le phénomène de la coexistence d'une infinité d'attracteurs est appelé multistabilité extrême. De plus, du point de vue du domaine temporel, la dynamique chaotique peut être divisée en **pic chaotique**, **éclatement chaotique** et **déclenchement chaotique** [91]. Généralement, le pic chaotique comprend des pics de périodes ou d'amplitudes différentes. L'éclatement chaotique comprend différents nombres ou amplitudes d'éclatements. Et le tir du chaos est une séquence temporelle complètement chaotique et sans règle. Il convient de souligner que tous les pics chaotiques, les éclatements chaotiques et les déclenchements chaotiques sont des comportements chaotiques avec au moins un exposant de Lyapunov positif.

1.2 Littérature liée à la modélisation neuronale

Après avoir observé les mécanismes qui conduisent à la naissance et à la propagation du potentiel d'action, le problème serait maintenant de construire des méthodes permettant de prédire les déplacements ioniques de part et d'autre de la membrane plasmique (déplacements qui, comme on l'a dit plus haut sont à la base du fonctionnement d'un neurone et, bien entendu, du système nerveux) et qui concordent avec les principales caractéristiques de l'excitabilité, les différentes étapes de la propagation du potentiel d'action et les propriétés de l'influx nerveux [76]. L'objectif de la modélisation est de pouvoir mettre en place un jeu d'équations reliant les paramètres déterminants qui contiennent en eux l'essentiel

du fonctionnement neuronal. Cela a été largement étudié au cours des cinquante dernières années et, par conséquent, le modèle mathématique de référence décrivant la cellule nerveuse a été développé par Hodgkin et Huxley en 1952 [92]. Ce modèle de Hodgkin et Huxley (HH) sera investi et amélioré par la suite, ainsi apparaîtront les modèles de Fitzhugh-Nagumo [94, 95], Hindmarsh-Rose [99–101] et bien d'autres. Dans cette section, nous résumons quelques modèles de neurones artificiels qui ont largement contribué au développement de la neurodynamique.

1.2.1 Modèles traditionnels de neurones

1.2.1.1 Modèle de neurone Hodgkin et Huxley (HH)

En 1952, Hodgkin et Huxley [92] ont établi un modèle qui décrit la cinétique empirique de l'influx nerveux. Ce modèle, conçu sur la base des expériences électrophysiologiques avec des axones géants de calmar dont le diamètre est de 0.5mm , mesure les réponses électriques du neurone et prédit correctement les principales caractéristiques de l'excitabilité, comme l'allure du potentiel d'action et la vitesse de conduction. Le même axone dans le cortex humain a un diamètre mille fois plus petit. Ils ont proposé un schéma électrique constitué d'une capacité, de résistances et de sources de tension liées pour modéliser la membrane (voir Figure 1.11).

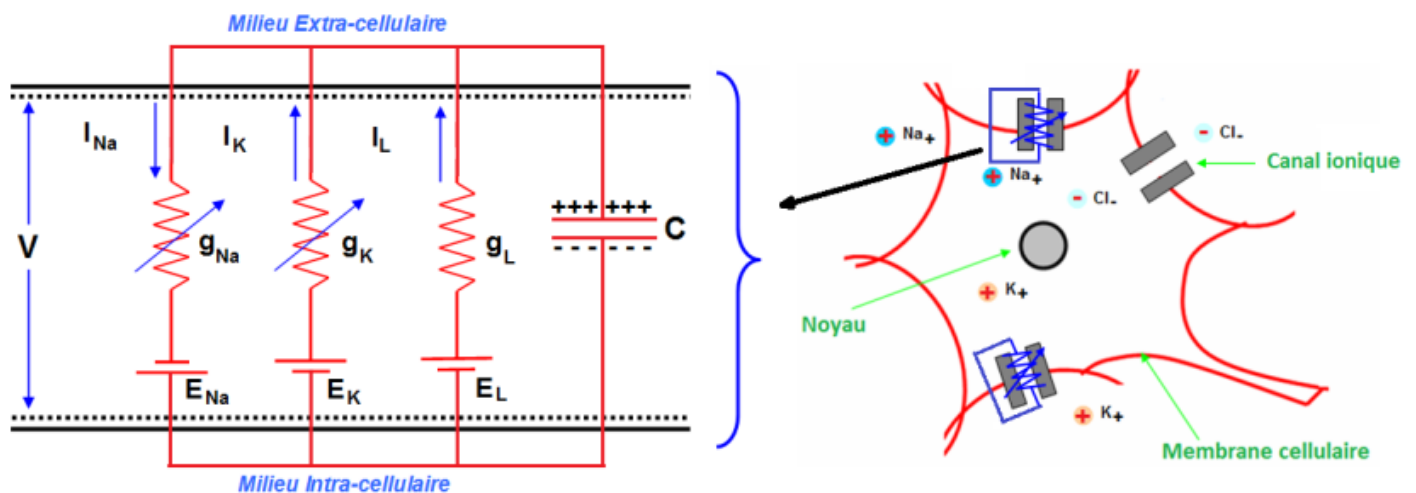


Figure 1.11 – La membrane cellulaire est considérée comme un circuit électrique [59].

Des courants ioniques traversent cette membrane par l'intermédiaire d'ions qui voyagent entre les milieux intérieur et extérieur de la cellule. Cela est dû au fait que la concentration des ions des deux côtés de la membrane est différente selon une loi bien connue en thermodynamique qui s'appelle la loi de Nernst définie plus haut. Ce modèle est donné par quatre équations couplées non linéaires, une pour

le potentiel de membrane V , et trois pour les variables de déclenchement, m, n et h [93] :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m \frac{dV}{dt} = I_{ion} + I_{syn} + I_{ext} \\ \frac{dm}{dt} = \frac{m_{\infty}(V) - m}{\tau_m(V)} \\ \frac{dh}{dt} = \frac{h_{\infty}(V) - h}{\tau_h(V)} \\ \frac{dn}{dt} = \frac{n_{\infty}(V) - n}{\tau_n(V)} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Avec : $I_{ion} = -g_{Na}m^3h(V - E_{Na}) - g_Kn^4(V - E_K) - g_L(V - E_L)$

où I_{ion} , I_{syn} et I_{ext} représentent respectivement le courant ionique, le courant synaptique et le stimulus externe. Le courant ionique I_{ion} est lié aux variables de déclenchement de m, n, h et décrit le transport ionique à travers la membrane. Les constantes g_{Na}, g_K et g_L sont les conductances maximales pour l'ion sodium (Na^+), l'ion potassium (K^+) et les canaux de fuite, et E_{Na}, E_K, E_L sont les potentiels d'inversion correspondants. $m_{\infty}, h_{\infty}, n_{\infty}$ et τ_m, τ_h, τ_n représentent les valeurs de saturation et les temps de relaxation des variables de déclenchement.

Les différentes variables dans le modèle de HH ont un sens biologique. La génération des impulsions dans ce modèle est similaire à celle des neurones biologiques, ce qui donne beaucoup de force à ce modèle. La modélisation par ordinateur, ou bien par des circuits électroniques, d'un tel modèle à quatre équations différentielles est toutefois assez complexe, tandis que l'analyse dynamique de ce système en est très compliquée, alors une simplification à deux dimensions peut se révéler nécessaire. Le passage d'un système à quatre équations différentielles à un système à deux dimensions, c'est-à-dire supprimer deux équations sans changer beaucoup la dynamique du système, est obtenu en remplaçant 2 variables par leurs valeurs à l'état d'équilibre. Il est à noter que l'établissement de ce système d'équations a permis à Hodgkin et Huxley d'obtenir le prix Nobel de Physiologie et Médecine en 1963.

Afin de réduire le modèle de Hodgkin-Huxley, on considère que la dynamique de la variable d'activation du canal du sodium m est très rapide par rapport aux autres variables n, h et V . Cela conduit à approximer m par la fonction sigmoïde $m_{\infty}(V)$. De plus, la comparaison entre $\tau_n(V)$ et $\tau_h(V)$ montre que ces deux paramètres temporels sont presque les mêmes. Les deux fonctions $n_{\infty}(V)$ et $-h_{\infty}(V)$ sont aussi similaires à une constante additive et une constante multiplicative près. Avec ces deux observations, les deux variables n et $1 - h$ sont remplacées par une autre variable w qu'on peut appeler "variable de recouvrement". La généralisation de cette représentation par une approximation linéaire donne :

$$(b - h) = an \quad (1.3)$$

où a et b sont des constantes. Avec la nouvelle variable, on peut écrire

$$w = (b - h) = an \quad (1.4)$$

avec $h = b - w$, $n = w/a$ et $m = m_{\infty}(V)$. On a alors

$$\frac{dw}{dt} = \frac{w_{\infty}(V) - w}{\tau_w(V)} \quad (1.5)$$

Avec les simplifications ci-dessus, le système d'équation 1.2 se réduit alors au système suivant :

$$\begin{cases} C_m \frac{dV}{dt} = I_{ion} + I_{syn} + I_{ext} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{w_\infty(V) - w}{\tau_w(V)} \end{cases} \quad (1.6)$$

Avec :

$$I_{ion} = -g_{Na}m_\infty(V)^3(b-w)(V - E_{Na}) - g_K(w/a)^4(V - E_K) - g_L(V - E_L)$$

Tous les détails de la simplification du modèle de HH à 4 dimensions vers un modèle à 2 dimensions sont donnés dans [61]. Vue sa complexité en terme de calcul, d'autres modèles neuronaux ont été développés.

1.2.1.2 Modèles Integrate-and-Fire (IF) et Leaky-Integrate-and-Fire (LIF)

En raison de la complexité du modèle d'origine de HH qui est difficile à exploiter, un modèle impulsionnel simple à une dimension appelé "intègre et tire", en anglais "Integrate-And-Fire (IF)" [102] a souvent été utilisé pour comprendre la dynamique des neurones, comme le codage et la mémoire dans les neurones. Il a été introduit au tout début du vingtième siècle par Louis Edouard Lapicque (1866-1952), et caractérisant la charge et la décharge d'un condensateur à travers une résistance.

Le modèle "intègre et tire avec fuite" ou Leaky-Integrate-and-Fire (LIF) [103, 104] est l'une des versions la plus utilisée dans la simulation neuronale :

$$\tau_m \frac{dV}{dt} = (E_L - V(t)) + R_m I_{ext}(t) \quad (1.7)$$

Ici, τ_m est la constante de temps. V est la tension membranaire et E_L le potentiel de repos. R_m est la résistance totale de la membrane et I_{ext} le courant d'excitation. Il existe aussi une autre version appelée "Exponential Integrate and Fire" [105].

1.2.1.3 Modèle de neurone FitzHugh-Nagumo (FHN)

En 1961, Richard Fitzhugh a proposé un modèle qu'il appelle Bonhoeffer-Van DerPol model [94], qui est une simplification du modèle de Hodgkin-Huxley en dimension quatre présenté précédemment. Le circuit équivalent a été proposé par Nagumo et al en 1962 [95]. On retrouve donc ce modèle sous le nom de neurone de FitzHugh-Nagumo (FHN). Bien que le modèle de HH soit plus réaliste biophysiquement, seules les projections des trajectoires en quatre dimensions peuvent être observées. Le modèle de FHN de dimension deux, permet donc d'avoir une vue des solutions complètes. Cela permet d'avoir une explication géométrique de phénomènes importants liés à l'excitabilité et aux mécanismes de génération de potentiels d'action [94, 95]. Le modèle FHN reflète les principales caractéristiques de l'activité de décharge des neurones biologiques et peut être décrit par [96] :

$$\begin{cases} C \frac{dx}{dt} = \frac{1}{a} \left(x - \frac{x^3}{3} - y + I_{ext} \right) \\ \frac{dy}{dt} = ax - by + c \end{cases} \quad (1.8)$$

où x est le potentiel de membrane (variable rapide), y est le courant ionique (variable lente) et I_{ext} est le stimulus externe. Les constantes a, b, c sont des paramètres du modèle.

1.2.1.4 Modèle de neurone Morris-Lecar (ML)

En 1981, Morris et Lecar (ML) [97] ont proposé un modèle de neurone HH simplifié appelé modèle ML. Ce modèle de neurone est un modèle de neurone biologique développé pour reproduire la variété du comportement oscillatoire en relation avec l'ion calcium (Ca^{2+}) et la conductance K^+ dans les fibres de balane géante. Ce modèle est un système bidimensionnel d'équations différentielles non linéaires [98] :

$$\begin{cases} C \frac{dV}{dt} = -g_{Ca} M_{\infty}(V) (V - V_{Ca}) - g_K W (V - V_K) - g_L (V - V_L) + I_{ext} \\ \frac{dW}{dt} = \tau_W (W_{\infty}(V) - W) \end{cases} \quad (1.9)$$

avec :

$$\begin{cases} M_{\infty}(V) = 0.5 + 0.5 \tanh\left(\frac{V - V_1}{V_2}\right) \\ W_{\infty}(V) = 0.5 + 0.5 \tanh\left(\frac{V - V_3}{V_4}\right) \\ \tau_W(V) = \frac{1}{\tau_W} \cosh\left(\frac{V - V_3}{2V_4}\right) \end{cases}$$

où V et W représentent les variables pour le potentiel de membrane et le canal de grille, respectivement. C est la capacité de la membrane, et g_{Ca} , g_K et g_L désignent respectivement la conductance maximale de Ca^{2+} , la conductance maximale de K^+ et la conductance maximale du courant de fuite. I_{ext} est un stimulus externe. V_{Ca} , V_K et V_L sont des potentiels d'état stable pour Ca^{2+} , K^+ et les canaux ioniques de fuite, respectivement. $M_{\infty}(V)$ et $W_{\infty}(V)$ définissent les valeurs stables de la probabilité d'ouverture pour le calcium et le potassium, où V_1 , V_2 , V_3 et V_4 sont des paramètres d'états stables et τ_W est le paramètre du système.

1.2.1.5 Modèle de neurone Hindmarsh-Rose (HR)

En 1984, Hindmarsh et Rose (HR) [99] ont développé un puissant modèle HR qui peut non seulement faciliter le calcul, mais aussi générer la plupart des comportements de déclenchement présentés par de vrais neurones biologiques, tels que la quiescence, le pic de déclenchement, et des tirs en rafale. Le modèle HR comprend un modèle 2D et un modèle 3D. Le modèle de neurone HR 2D est considéré par de nombreux chercheurs comme idéaliste dans l'étude du déclenchement réel des neurones. Son expression mathématique est [100]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - ax^3 + bx^2 + I_{ext} \\ \frac{dy}{dt} = c - dx^2 - y \end{cases} \quad (1.10)$$

où x et y désignent le potentiel membranaire et les variables de récupération du neurone, a , b , c et d sont les paramètres du modèle et I_{ext} est le stimulus externe. Le modèle neuronal 3D HR est décrit par

le système dynamique suivant [101] :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - ax^3 + bx^2 - z + I_{ext} \\ \frac{dy}{dt} = c - dx^2 - y \\ \frac{dz}{dt} = r(s(x + \varepsilon) - z) \end{cases} \quad (1.11)$$

où la variable d'état x représente le potentiel de membrane, y décrit l'échange d'ions à travers la membrane neuronale par des canaux ioniques rapides, et z est un courant d'adaptation à évolution lente. I_{ext} imite le courant externe pour les neurones biologiques, et r est un petit paramètre qui contrôle la vitesse de variation de la variable lente z , ε définit le potentiel de repos du système. Et a, b, c, d, s, r sont des paramètres système.

1.2.1.6 Modèle neuronal de Chay

En 1985, pour reproduire les comportements de décharge des cellules β , Chay [106] a développé un modèle neuronal tridimensionnel capable de simuler l'éclatement et la décharge chaotique. Le modèle de Chay est décrit à l'aide des trois équations différentielles suivantes [107] :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = -I_{ion} - I_{kv} - I_{kc} - I_L + I_{ext} \\ \frac{dn}{dt} = \frac{(n_{\infty} - n)}{\tau_n} \\ \frac{dC}{dt} = \rho(m_{\infty}^3 h_{\infty} (V_c - V) - k_c C) \end{cases} \quad (1.12)$$

Avec :

$$\begin{cases} I_{ion} = g_{ion} m_{\infty}^3 h_{\infty}^3 (V - V_{ion}) \\ I_{kv} = g_{kv} n^4 (V - V_k) \\ I_{kc} = g_{kc} \left(\frac{C}{1 + C} \right) (V - V_k) \\ I_L = g_L (V - V_L) \end{cases}$$

Où V , n et C sont le potentiel de membrane, la probabilité d'ouverture des canaux K^+ dépendant de la tension et la concentration intracellulaire de Ca^{2+} , respectivement. I_{ion} , I_{kv} et I_{kc} sont respectivement le courant ionique mixte $Na^+ - Ca^{2+}$ entrant, le courant ionique K^+ sortant dépendant de la tension et le courant ionique K^+ sortant dépendant du calcium. Et I_L et I_{ext} sont respectivement le courant de fuite et le stimulus externe. V_{ion} , V_K et V_L sont des potentiels d'inversion pour les ions mixtes $Na^+ - Ca^{2+}$, K^+ et de fuite, respectivement. g_{ion} , g_{kv} , g_{kc} et g_L représentent les conductances maximales, où les indices font référence au canal ionique mixte dépendant de la tension, au canal K^+ dépendant de la tension, au canal K^+ dépendant de Ca^{2+} et aux canaux de fuite, respectivement. m_{∞} et h_{∞} sont les probabilités d'activation et d'inactivation du canal mixte, respectivement. n_{∞} est la valeur en régime permanent de n .

1.2.1.7 Modèle neuronal de Izhikevich

Ce modèle a été développé par Izhikevich E.M. [108] en 2003. Il a proposé un autre type de formalisme permettant de reproduire le comportement des neurones excitables en utilisant deux équations simples qui sont :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0,04v^2 + 5v + 140 - v + I_{ext} \\ \frac{du}{dt} = a(bv - u) \end{cases} \quad (1.13)$$

Où v représente la tension de la membrane, u la variable de recouvrement et I_{ext} le courant d'excitation.

Notons que, tous les modèles de neurone unique peuvent être simplifiés en un modèle de neurone commun, sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dV_{mem}}{dt} = f(V_{mem}, V_y, \dots, I_{ext}) \\ \frac{dV_y}{dt} = f(V_{mem}, V_y, \dots) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} \quad (1.14)$$

où V_{mem} représente le potentiel membranaire du neurone, divers autres V_y représentent certaines variables d'état induites par divers canaux ioniques. I_{ext} est le stimulus externe.

Pour avoir plus d'informations sur les différents modèles mathématiques des neurones biologiques, il est important de consulter les références [109–117].

1.2.2 Comparaison entre les modèles de neurones

Les caractéristiques biologiques de neurones impulsionnels sont données en détail dans [110]. Le tableau 1.1 montre la comparaison entre les modèles de neurones les plus célèbres. Selon la forme, la fréquence, l'amplitude, la nature excitatrice ou inhibitrice de l'impulsion du courant appliqué, le neurone peut ou ne peut pas répondre à chaque type d'excitation. Comme cela est indiqué dans le tableau 1.1, il existe des modèles qui répondent presque à tous les types d'excitation, et qui sont très riches en comportement neuronal comme les modèles de HH, FHN et bien d'autre. En effet, le modèle HH nécessite beaucoup de ressources informatiques (simulation) ou matérielles (modélisation électronique) pour être étudié et sa mise en œuvre. Par contre, le modèle de FHN qui ne consomme pas trop de ressources, simple à étudier et à concevoir peut-être le modèle idéal pour reproduire les différents comportements des neurones biologiques. De plus, son modèle électrique donne la possibilité de le coupler avec des dispositifs biophysiques afin d'étudier certains effets biophysiques telles que la lumière et la température sur la dynamique d'un neurone. Tout au long de cette thèse, nous utiliserons ce modèle de FHN pour observer l'influence de la lumière et de la température sur l'activité neuronale. Le chercheur pourra ainsi choisir entre tel ou tel modèle en fonction de la plausibilité biologique [110].

	Hodgkin-Huxley	Wilson	Morris-Lecar	Hindmarsh-Rose	Fitzhugh-Nagumo	Izhikevich (2003)	Quadratic integrate and fire	Resonate and fire	Integrate and fire or burst	Integrate and fire with adapt	Integrate and fire	Modèles
	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-	Sens biophysique
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	Émission régulière d'impulsions
	+	+	+	+	+	+	-	+	+	-	-	Impulsion phasique (brève)
	+	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-	Émission régulière de bursts
						+	-	-	+	-	-	Salve (burst) phasique
			-		-	+	-	-	-	-	-	Modèle mixte (burst puis impulsions)
	+	+	-	+	-	+	-	-	+	+	-	Adaptation de la fréquence d'impulsions
	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	Type I
	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	Type II
	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	Latence de l'impulsion
	+	+	+	+	+	+	-	+	-	-	-	Oscillations sous le seuil
	+	+	+	+	+	+	-	+	-	-	-	Résonateur
	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	Intégrateur
	+	+	+	+	+	+	-	+	+	-	-	Impulsion rebondie
	+	+		+	-	+	-	-	+	-	-	Salve (burst) rebondie
	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	Seuil variable
	+		-	+	+	+	+	+	+	-	-	Bistabilité entre état de repos et oscillations
	+	+	-	+	-	+	-	+	+	+	-	Dépolarisation après le passage du potentiel d'action
	+	+	+	+	+	+	-	+	+	-	-	Excitation : graduelle et brusque
	+		+	+	+	+	-	-	-	-	-	Inhibition induite des impulsions
			-		-	+	-	-	-	-	-	Inhibition induite des bursts
	+		-	+	-	+	-	+		-	-	Chaos
1200	180	600	120	72	13	7	10	13	10	15		Nombre de FLOPS

Tableau 1.1 – Ici, on présente le tableau de Izhikevich [110] traduit en français. Il compare les différents modèles neuronaux selon les caractéristiques biologiques des neurones impulsifs. Le nombre d'opérations à virgule flottante par seconde (FLOPS) mesure la vitesse d'une résolution informatique.

1.3 Effets biophysiques sur la dynamique neuronale

Les neurones de différentes régions fonctionnelles du cerveau peuvent percevoir et coder une variété de stimuli externes (la lumière, la température, le son et bien d'autre) et le système nerveux est alors excité pour guider les démarches les plus appropriées dans le corps [14, 21–25]. Alors, l'implication des astrocytes [118] se connectant aux neurones modifiera les schémas de déclenchement des activités neuronales car le flux de calcium est modifié pour réguler le courant de canal et les potentiels de

membrane. Ainsi, l'estimation et la régulation des neurones biologiques deviennent un défi lorsque l'effet biophysique et la structure anatomique sont pris en compte [82, 189].

Il est établi depuis longtemps que la lumière exerce des effets importants sur le cerveau et notre bien-être. La lumière n'est pas uniquement indispensable à la vision, mais joue aussi un rôle essentiel dans un ensemble de fonctions dites "non-visuelles" comme la synchronisation de notre horloge biologique avec l'alternance jour-nuit. La lumière constitue également un stimulant puissant[21] pour l'éveil et la cognition. Elle est couramment utilisée pour améliorer la performance, et pour lutter contre la somnolence. Les mécanismes qui sous-tendent ces effets positifs de la lumière ne sont que très peu connus.

Durant les 10 dernières années, des scientifiques ont découvert un nouveau type de cellule sensible à la lumière dans l'œil (photorécepteur) appelé mélanopsine. Ce nouveau photorécepteur est essentiel pour transmettre l'information lumineuse vers de nombreux centres du cerveau dits "non-visuels". Les recherches en laboratoire ont montré que sans ce photorécepteur, les fonctions non-visuelles sont perturbées, l'horloge biologique est dérégulée et fonctionne en "roue libre" par rapport à l'alternance jour-nuit, et l'effet stimulant de la lumière est compromis.

Dans certaines conditions, le son, la lumière et la température peuvent être considéré comme une onde électromagnétique. Alors, La rencontre d'un champ électromagnétique et d'un milieu biologique provoque une interaction entre les charges électriques, induisant un courant électrique qui peut provoquer un effet biologique. Il est montré par Coureau et al [119] que cet effet n'est pas nocif pour la santé tant que l'organisme parvient à compenser.

- Les basses fréquences < 10 MHz provoquent une stimulation électrique du système nerveux, en particulier au niveau des nerfs et des muscles.
- Les hautes fréquences > 100 MHz provoquent une absorption d'énergie et un effet thermique avec échauffement des tissus. En fonction de l'énergie absorbée par le milieu biologique, la thermorégulation empêche une élévation de température, jusqu'à une certaine dose.

L'apparition d'un champ électromagnétique dans la cellule devient complexe lorsqu'une variété d'ions intracellulaires et extracellulaires sont pompés et échangés dans la cellule ou à travers les canaux membranaires. De manière expérimentale, un circuit neuronal simple [184] peut être conçu en incorporant un condensateur, une bobine d'induction et certains composants électriques non linéaires ensemble dans des boucles fermées comme le montre la Figure 1.12.

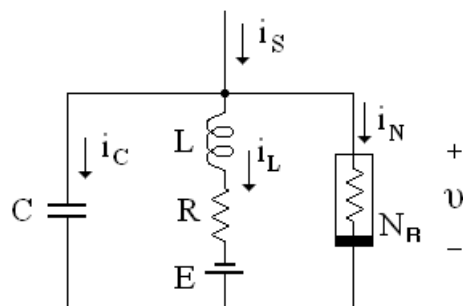


Figure 1.12 – Le simulateur électronique du modèle Bonhoeffer-van der Pol (BvP) de FitzHugh Nagumo [184].

La tension de sortie aux bornes du condensateur est utilisée pour reproduire la propriété dynamique du potentiel de membrane, et le champ interne peut être capable d'estimer la distribution du champ électrique statique du neurone biologique. Une bobine d'induction dans le circuit neuronal est souvent utilisée pour décrire l'effet du champ magnétique lorsque les ions se propagent le long des canaux ioniques. De même, l'implication des composants électriques non linéaires du circuit neuronal peut également assurer la reproduction et l'activation de la réponse/relation non linéaire entre les courants de canal et le potentiel de membrane. En conséquence, le circuit neuronal peut améliorer sa fonction biophysique spécifique en tant que capteur intelligent lorsque des composants électriques spécifiques sont couplés dans des circuits de dérivation. Par exemple, une thermistance peut être connectée (Figure 1.13(a)) pour améliorer sa dépendance dynamique à la température car tout changement de température peut ajuster le courant de canal à travers la thermistance et ainsi les modes de déclenchement du circuit neuronal sont complètement contrôlés [13]. Un phototube (Figure 1.13(b)) peut convertir l'éclairage externe en photocourant, ce qui peut exciter le circuit neuronal, puis le circuit neuronal fonctionnel est régulé dans les schémas de tir et sa dynamique devient complètement dépendante de la lumière [12]. Un dispositif piézoélectrique (Figure 1.13(c)) peut recevoir et coder l'onde acoustique externe en convertissant l'énergie de vibration en énergie de champ électromagnétique propagée dans le circuit neuronal, et un circuit neuronal auditif peut être obtenu [14]. Ainsi, un seul neurone fonctionnel peut percevoir et détecter un signal spécifique, et la coopération entre plusieurs neurones fonctionnels [120] peut estimer plus de stimuli externes différents de manière synchrone lorsque différents circuits neuronaux fonctionnels sont connectés pour développer un réseau.

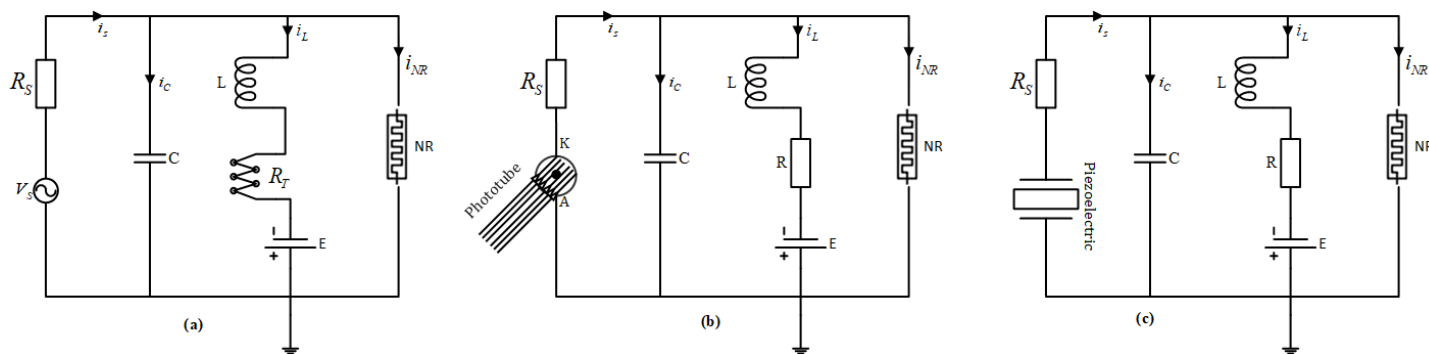


Figure 1.13 – Schéma de principe des circuits neuronaux fonctionnels. (a) Circuit neuronal thermosensible composé d'une thermistance ; (b) Circuit neuronal dépendant de la lumière composé d'un phototube ; (c) Circuit neuronal auditif composé d'une céramique piézoélectrique [121].

1.4 Communication neuronal : nouveau types de couplage des neurones

En neurosciences, un réseau de neurones d'écrit un ensemble de neurones physiquement interconnectés. L'interaction entre chaque neurone est principalement due à des processus électrochimiques. Chaque neurone communique avec son voisin grâce à une interface constituée de dendrites (post-synaptiques), connectées par des synapses à d'autres neurones et d'un axone (pré-synaptiques). Si la somme des potentiels des signaux entrant au niveau des dendrites d'un neurone dépasse le seuil synaptique, le

neurone produit un potentiel d'action et le signal électrique est transmis le long de l'axone pour atteindre le neurone suivant. Ainsi, des synapses chimiques[122], électriques[123, 124], hybrides [27, 120], à Jonction Josephson (JJ)[125] et memristive[126, 127] peuvent être utilisés pour relier plusieurs neurones. Dans le cadre de cette Thèse, nous nous intéressons au cas des synapses à Jonction Josephson et memristives.

1.4.1 Synapses à Jonction Josephson (JJ)

Les jonctions Josephson (JJ) font partie de ces microstructures qui sondent tellement précisément les matériaux qu'elles permettent d'étudier les phénomènes microscopiques et les régimes quantiques. Il s'agit donc d'un excellent outil pour étudier la théorie de la supraconductivité. Elles ont des propriétés très intéressantes et peuvent servir dans plusieurs domaines de microélectronique :

- C'est le principe du SQUID (Superconducting Quantum Interference Device), le plus fin détecteur de champ magnétique (et donc de courant). Un SQUID est constitué de deux jonctions en parallèles dans une boucle [128].
- C'est aussi le constituant de base de la logique rapide dite RSFQ (Rapid Single Flux Quantum) où elles jouent le rôle du transistor et autoriseraient des cadences en centaines de GHz [129].
- C'est aussi un des détecteurs de photons les plus performants (STJ). Ces dispositifs combinent une sensibilité ultime atteignant la détection de photons uniques dans une large bande spectrale (des rayons X au proche infrarouge) avec une bonne résolution en énergie [130, 131].

Les jonctions Josephson (JJ) sont basées sur l'effet Josephson, qui dicte le comportement d'un courant de paires de Cooper (Supraconducteur) en présence d'une barrière mince et étroite non-supraconducteur (F) entre deux électrodes supraconducteurs(S) comme le montre la Figure .

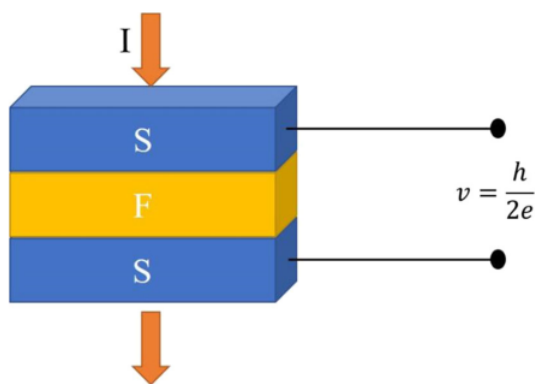


Figure 1.14 – Schéma d'une jonction Josephson, dans laquelle deux supraconducteurs (S) sont couplés l'un à l'autre à travers un film mince non-supraconducteur (noté F). [121].

La jonction est modélisée en trois régions. Dans les régions S , on admet que les électrons forment des paires (appelées paires de Cooper) à l'origine de la supraconductivité. Le supraconducteur de la région S , peut être décrit par une fonction d'onde complexe, supposée uniforme dans S , et notée ψ [132]. La physique d'une jonction Josephson peut alors se comprendre comme le couplage entre les deux supraconducteurs par pénétration partielle de ψ dans la région centrale. Celle-ci est ici décrite

comme une barrière de potentiel. Elle est caractérisée par deux équations principales, la première décrit la relation courant-phase de maillon faible (équation 1.15) et la seconde donne l'évolution de phase supraconductrice ϕ (équation 1.16).

$$I(t) = I_c \sin(\varphi(t)) \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV(t)}{h} \quad (1.16)$$

où $V(t)$ est la tension aux bornes de la jonction Josephson et $I(t)$ le courant à travers la jonction Josephson. I_c est un paramètre de la jonction nommé courant critique et h est la constante de Planck ($\approx 1.054 \times 10^{-34} J \cdot s$). Le courant critique de la jonction Josephson dépend des propriétés des supraconducteurs et peut également être affecté par des facteurs environnementaux tels que la température et le champ magnétique appliqué de l'extérieur.

Lorsqu'on applique une différence de potentiel V entre les deux électrodes, la différence d'énergie est : $\Delta E = 2eV$. De ces équations de Josephson découlent directement trois effets principaux⁵ :

- L'effet DC Josephson est observé en absence de tout champ électromagnétique extérieur. Il est vérifié lorsque $V(t) = 0$. Un supercourant J de paires de Cooper est observé jusqu'à une densité de courant maximum J_0 dépendant de la hauteur énergétique et de l'épaisseur de la barrière. Ce courant continu Josephson est proportionnel au sinus de la phase Josephson (différence de phase aux bornes de l'isolant, qui reste constante dans le temps), et peut prendre des valeurs comprises entre $-I_c$ et I_c .
- L'effet AC Josephson est observé lorsqu'on applique une différence de potentiel continue V_0 entre les deux électrodes, le courant de paires de Cooper devient oscillatoire et il y a émission d'une onde électromagnétique de fréquence f , donnée par la relation de Planck, $E = h \cdot f$. Dans ce cas, on obtient : $f = \frac{2eV}{h} = \frac{V}{\varphi_0}$ avec φ_0 le quantum de flux. Cela signifie qu'une jonction Josephson peut agir comme un parfait convertisseur tension-fréquence.
- L'effet de mélange ou L'effet AC Josephson inverse est observé si en plus d'une tension appliquée continue V_0 , on envoie une micro-onde de fréquence f sur le dispositif [133]. Ce dernier émet une onde à une fréquence $f_0 = V_0/\varphi_0$, qui se mélange avec la fréquence extérieure f . On obtient un palier continu dans la caractéristique du courant J en fonction de V_0 chaque fois que $f_0 = n \cdot f$, avec n entier. Cela signifie qu'une jonction Josephson peut agir comme un convertisseur fréquence-tension parfait, [134] qui est la base théorique de l'étalon de tension Josephson.

Ces trois effets ont été mis en évidence expérimentalement par de nombreuses équipes et sont très bien établis. Ils ont également conduit à de nombreuses applications. En outre, certaines, importantes, sont fondées sur l'influence d'un champ magnétique sur l'effet Josephson. Car le champ magnétique a un effet important sur la supraconductivité ; il contrôle la phase de la fonction d'onde des paires de Cooper. Lorsqu'on mesure le courant au travers d'une jonction Josephson en faisant varier le champ magnétique, on observe que le courant de paires maximum I_{max} est contrôlé par le flux magnétique φ . Vu l'importance des propriétés intrinsèques de cette Jonction, nous allons dans le cadre de cette thèse l'utiliser pour coupler deux neurones.

5. https://stringfixer.com/fr/Josephson_effect

1.4.2 Synapses memristives

Memristor (pour MEMory RESISTOR) est le quatrième élément de circuit fondamental en plus des résistances, des inductances et des condensateurs (voir la Figure 1.15(a)) reliant la relation manquante entre la charge q et le flux (ϕ). Il a été postulé par Chua en 1971 [40] et mis en œuvre plus tard (en tant que dispositif nanoélectronique TiO_2) dans le laboratoire Hewlett-Packard (HP) par Stanley Williams et son équipe [39].

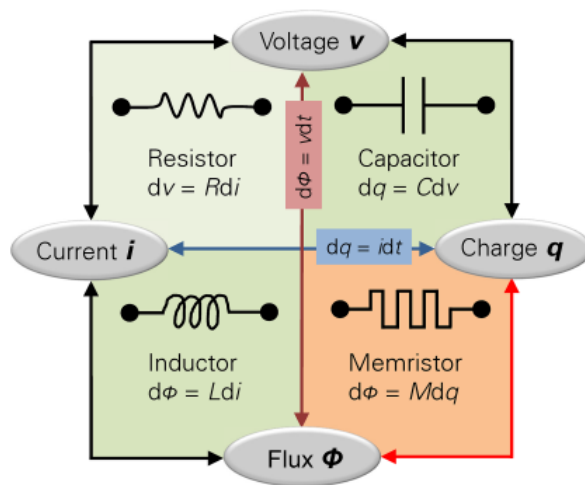


Figure 1.15 – Quatre éléments de circuit définis axiomatiquement [139]. Memristor est l’élément de circuit à 2 bornes caractérisé par une relation constitutive entre deux variables mathématiques (charge q et flux ϕ).

Conceptuellement, le memristor est un élément non linéaire à deux bornes avec une résistance variable appelée memristance qui dépend de la quantité de charge électrique qui l’a traversé dans une direction donnée [140, 208]. Un système memristif est caractérisé par deux équations, l’équation de conduction ”quasi-statique” (équation 1.17) qui relie la tension aux bornes du dispositif au courant qui le traverse à un instant donné via une résistance généralisée :

$$v = R(w, i) i \quad (1.17)$$

et l’équation dynamique (1.18), qui affirme explicitement que la dérivée de la variable d’état w est une fonction f d’elle-même et du courant traversant le dispositif,

$$\frac{dw}{dt} = f(w, i) \quad (1.18)$$

Ici, l’équation (1.17) est l’équation normale ($I - V$) qui relie la tension au courant à travers un terme résistif. Cependant, pour les systèmes memristifs, la résistance R (appelée memristance) dépend non seulement des entrées instantanées v et i mais aussi d’une ou d’un ensemble de variable(s) d’état interne w . w à son tour spécifie comment la variable d’état change en fonction de l’état actuel et des entrées instantanées. Puisqu’ici seule la dynamique de w (c’est-à-dire sa vitesse) est déterminée, la valeur complète de w ne peut être obtenue qu’à partir d’une intégrale de temps. En clair, cela implique que les memristors ont la particularité de mémoriser la quantité de charge électrique précédente qui les a traversés et pendant combien de temps le courant a été appliqué. Une extension de la notion de systèmes

memristifs a ensuite été donnée par Chua et Kang (1976), permettant a ces systèmes de dépendre d'un état. Il est important de souligner que ni le flux (ϕ) ni la charge q n'apparaissent explicitement dans aucune de ces deux équations (1.17) et (1.18). Mais si $w = q$, $R(w, i) = R(w) = R(q)$ et $f(w, i) = i$, les Equations (1.17) et (1.18) ramener à la définition originale d'un memristor [139]. Aussi, à partir de ce formalisme mathématique généralisé, trois classes de memristors [44, 87, 139] ont été définies en fonction des relations constitutives suivantes :

- Memristor commandé en tension avec $G = \frac{i}{v} = g(w, v)$ et $\frac{dw}{dt} = f(w, i)$
- Memristor à charge contrôlée avec $\varphi = \hat{\varphi}(q)$ et $R(q) = \frac{v}{i} = \frac{d\hat{\varphi}(q)}{dq}$
- Memristor contrôlé par le flux avec $q = \hat{q}(\varphi)$ et $G(\varphi) = \frac{i}{v} = \frac{d\hat{q}(\varphi)}{d\varphi}$

Ici, R et G sont respectivement appelés la memristance et la memductance. La caractéristique courant-tension ($i - v$) du memristor est une boucle d'hystérésis pincée qui passe toujours par l'origine dans le plan tension-courant lorsqu'il est piloté par un signal de tension ou de courant périodique qui se traduit par une réponse périodique de la même fréquence [44, 140, 141].

Bien que le concept de memristor ait été introduit au début, un véritable memristor physique a été découvert en 2008 [39]. Après cela, divers dispositifs différents ont été identifiés comme des memristors, et des modèles de memristors correspondants, pouvant imiter approximativement les boucles d'hystérésis pincées mesurées ont été développés et appliqués [41, 220].

Comme il est bien connu de tous, un memristor est un dispositif électronique à deux bornes dont la memductance peut être modulée avec précision par la charge ou le flux qui le traverse. En outre, le memristor bénéficie de nombreuses caractéristiques biomimétiques telles que l'échelle nanométrique, la non-linéarité, la programmabilité et la mémorabilité [142]. Par conséquent, le memristor a deux fonctions biomimétiques importantes. D'une part, le memristor peut être utilisé pour imiter des fonctions synaptiques telle que la plasticité. De nombreux résultats de recherche montrent que le mécanisme de déplacement des particules nanométriques dans les memristors est très similaire au comportement des neurotransmetteurs en mouvement dans les synapses [143]. Ainsi, un memristor peut être considéré comme une synapse neurale artificielle. De plus, de nombreux résultats expérimentaux ont démontré que les dispositifs de memristor à l'échelle nanométrique peuvent soutenir la plasticité synaptique [144, 145]. En conséquence, l'utilisation de memristors comme synapses dans des modèles de neurones et de réseaux de neurones peut établir des modèles de neurones et de réseaux de neurones artificiels plus réalistes.

1.5 Synchronisation des neurones

L'étude de synchronisation est omniprésente dans beaucoup de systèmes naturels et dans les sciences non-linéaires. Le mot synchronisation vient du grec *syn* (commun) et *chronos* (temps) et signifie avoir le même comportement au même moment (voir par exemple [147–149]). Il existe plusieurs types de synchronisations, Nous citerons entre autres :

- la synchronisation identique ou complète, qui signifie généralement que l'un des systèmes copie le comportement de l'autre. Les systèmes dont tous les éléments sont synchronisés sont dits synchrones.

- On sait que beaucoup d'oscillateurs couplés, grâce à de faibles interactions, font apparaître un phénomène de synchronisation ;
- la synchronisation généralisée, qui est une extension de la synchronisation identique impliquant une relation fonctionnelle entre les deux systèmes couplés. Dans le cas où cette relation est l'identité, on retrouve la synchronisation identique ;
 - la synchronisation de phase, qui permet à au moins deux systèmes couplés de se réaliser avec une même période et simultanément.

Depuis la découverte de Huygen C. en 1673 [150] sur la synchronisation, elle a trouvé beaucoup d'applications, dans des domaines variés tels que la biologie, la physique, la mathématique, l'informatique, les télécommunications, l'électronique et le traitement du signal [151–161, 161–163, 188, 205], etc.

On donne ici quelques motivations de l'étude du phénomène de synchronisation dans le cas particulier du cerveau. Plusieurs travaux récents (voir [158, 162, 163]) indiquent que la capacité impressionnante de calcul et de stockage du cerveau sont favorisées par la capacité des différentes populations de neurones à se synchroniser. Ainsi, la synchronisation a été identifiée comme jouant un rôle fondamental dans la communication, en augmentant la capacité d'interaction entre les différentes zones du cerveau. Il y a maintenant un consensus sur le fait qu'elle joue un rôle dans plusieurs aspects de la fonction cognitive du cerveau. Plusieurs travaux avaient déjà émis l'hypothèse que la synchronisation de différentes régions de neurones indiquaient la perception du même objet (voir [153, 159, 160]). Il convient de préciser ce qu'on entend par synchronisation. Dans le cadre de la synchronisation des neurones, on s'intéresse plus généralement à la synchronisation de fréquences. Ainsi, le concept de synchronisation neuronale renvoie à l'idée que les oscillations de l'activité d'un groupe de neurones, dans une certaine bande, étroite, de fréquences, peuvent se mettre transitoirement en phase avec celles d'un autre groupe de neurones. Ce verrouillage de phase passager joue différents rôles et peut notamment faciliter la communication d'informations entre les groupes neuraux, et même remplir des fonctions computationnelles⁶. On a montré que dans l'électroencéphalographie (EEG) et le magnétoencéphalographie (MEG), les modulations de la synchronisation de θ (4 – 7hertz), alpha (8 – 15hertz), et gamma (30 – 50hertz), à la fois à l'intérieur des régions cérébrales et entre elles, sont toutes associées à des fonctions cognitives, y compris la perception, la mémoire, l'attention et la conscience. La synchronisation complète que l'on considère ici, est intrinsèquement liée au phénomène de synchronisation mais devrait être affinée pour s'appliquer exactement aux applications.

Citons pour conclure ce paragraphe un exemple de synchronisation pathologique : l'épilepsie. L'épilepsie⁷ est un problème neurologique avec une hyperactivité cérébrale qui se manifeste par des convulsions ou même une perte de conscience. Elle est causée par un dysfonctionnement passager du cerveau. Lors d'une crise d'épilepsie, les neurones produisent soudainement une décharge électrique anormale dans certaines zones cérébrales. Un grand nombre de neurones déchargent alors des potentiels d'action de manière synchronisée. Pourtant comme on l'a dit, la synchronisation des neurones est une propriété intrinsèque de l'activité normale du cerveau. Il semblerait que dans le cas de l'épilepsie, cette synchro-

6. <http://lettre-cdf.revues.org/916>.

7. <http://cerveau.pagesperso-orange.fr/Maladies/MaladiesMentalesEpilepsie.html>.

nisation s'emballerait. Plusieurs causes peuvent expliquer cet "emballement" :

- une surexcitabilité des neurones ;
- une diminution du niveau d'inhibition du réseau neuronal.

Dans cette section, nous donnerons quelques exemples des types de synchronisation généralement utilisés dans la littérature en ce qui concerne le domaine de la neurodynamique.

1.5.1 Synchronisation complète

La synchronisation identique est aussi appelée synchronisation complète [155]. C'est la forme de synchronisation du chaos la plus simple et la plus typique observée pour deux systèmes identiques. Elle est identifiée comme la coïncidence d'états de systèmes en interaction [215]. D'une manière mathématique, on utilise des fonctions de couplage pour modéliser des connexions synaptiques entre plusieurs neurones. Biologiquement, on s'intéresse à appliquer ces fonctions de couplage à la première variable, qui représente le potentiel de membrane. Pour un système de deux oscillateurs chaotiques couplés : $\dot{u} = \varsigma(u, v)$ et $\dot{v} = \psi(u, v)$ où u et v sont les variables d'espace de phase, ς et ψ sont les fonctions non linéaires correspondantes, la synchronisation complète au sens direct implique que $|v(t) - u(t)| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour toute combinaison de conditions initiales $u(0)$ et $v(0)$ et une force de couplage assez importante [164, 165]. Cette propriété est représentée par la présence d'une diagonale dans le plan (u, v) . L'objectif de cette étude sur la synchronisation complète est donc de trouver la force de couplage minimale pour obtenir cette propriété. La synchronisation complète de deux systèmes chaotiques a été réalisée pour la première fois par Pecora et Carroll en 1990 en utilisant la méthode de remplacement [164]. La synchronisation complète est obtenue dans des systèmes identiques correctement couplés. Cependant, dans les systèmes physiques réels, il peut y avoir des discordances de paramètres et donc les systèmes ne sont pas identiques.

1.5.2 Synchronisation de phase

La synchronisation de phase est le processus par lequel deux ou plusieurs signaux cycliques ont tendance à osciller avec une séquence répétitive d'angles de phase relatifs. La synchronisation de phase est généralement appliquée à deux formes d'onde de même fréquence avec des angles de phase identiques à chaque cycle. Cependant, il peut être appliqué s'il existe une relation entière de fréquence, de sorte que les signaux cycliques partagent une séquence répétitive d'angles de phase sur des cycles consécutifs. Ces relations entières sont appelées langues d'Arnold qui découlent de la bifurcation de la carte du cercle. La différence de phase entre les oscillations des neurones est définie par [140, 149] : $\Delta(\theta) = \langle |\theta_1(t) - \theta_2(t)| \rangle$, où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne dans le temps et la phase instantanée de la série temporelle x_i , $i = 1, 2$ est obtenue comme [149, 155] :

$$\theta_i(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\tilde{x}_i(t)}{x_i(t)} \right) \quad (1.19)$$

$\tilde{x}_i(t)$ représente la transformée de Hilbert de x_i . Dans les simulations, la différence de phase instantanée des deux potentiels de membrane $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est obtenue via cette transformée de Hilbert comme

[149] :

$$\theta_1(t) - \theta_2(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\tilde{x}_1(t)}{x_1(t)} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\tilde{x}_2(t)}{x_2(t)} \right) \quad (1.20)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons brièvement présenté quelques notions de base nécessaires à la modélisation de neurones, et quelques travaux importants concernant ces neurones. Nous avons pu constater qu'une multitude de modèles neuronaux ont été mis en place suite aux travaux innovants de Hodgkin-Huxley. Et qu'à chaque fois, les principaux enjeux étaient de répondre aux contraintes de coût, de temps de calcul et d'exigence biologique. Sur l'aspect biologique, il a été constaté que la lumière et la température ayant des impacts majeurs sur l'activité électrique du neurone sont très rarement pris en compte dans l'étude dynamique du comportement des neurones. Par conséquent, dans cette thèse, nous étudierons en profondeur l'effet de la lumière et de la température sur le modèle de neurone de FitzHugh-Nagumo (FHN) et évaluerons également l'échange et le codage d'informations entre les neurones lorsqu'ils sont soumis à ces différents effets biophysiques.

MATERIELS ET MÉTHODES

Introduction

Ce chapitre présente les différents matériels et méthodes exploités dans cette thèse. Nous allons d'abord déduire les équations dynamiques qui régissent le circuit électronique étudié à l'aide de lois électriques bien connues. L'application de ces lois nous permettra de générer un ensemble d'équations qui seront résolues en utilisant une méthode analytique ou numérique, ou une combinaison des deux. Comme tous nos systèmes sont régis par des équations non linéaires, des méthodes analytiques seront utilisées autant que possible pour suivre et analyser la stabilité des points fixes. Alors que les méthodes numériques seront utilisées pour résoudre les équations différentielles des mouvements en fonction de l'objectif d'intérêt. Dans la première section de ce chapitre, une description des différents circuits électroniques étudiés est également présentée ainsi que leurs modèles mathématiques correspondants. Enfin, Un examen de certaines méthodes d'analyse est présenté dans la section 2.2.1. Vient ensuite l'exposition des méthodes numériques utilisées pour obtenir les résultats présentés dans cette thèse.

2.1 Modélisation des modèles de neurone FHN thermo-photosensible étudié dans cette thèse

Comme il est montré au chapitre §1, le comportement du neurone peut être décrit par des équations mathématiques faisant intervenir ses principales caractéristiques, notamment les mécanismes ioniques qui régissent le fonctionnement d'un neurone et la nature du stimuli externes. La connaissance d'un système d'équations dynamiques sans dimension, en l'occurrence non linéaire, appelé modèle substitutif du neurone dans le système dynamique, permet, grâce à des outils de référence, d'avoir des informations vitales sur son fonctionnement et donc, sur le système nerveux. Dans cette section nous présenterons les différentes configurations des modèles neuronaux sous les effets de la lumière et/ou de la température que nous explorerons tout au long de cette thèse.

2.1.1 Modélisation du modèle de neurone FHN thermo-photosensible

Les neurones biologiques peuvent recevoir des entrées et capturer une variété de stimuli externes, qui peuvent être codés et transmis sous forme de signaux électriques différents. Ainsi, le potentiel de la membrane est ajusté pour activer les modes de cuisson concernés. En effet, des modèles de neurones fiables devraient prendre en compte les effets biophysiques intrinsèques et le codage fonctionnel. Une question fascinante et importante est le mécanisme physique de la transcription des signaux externes. Les signaux externes peuvent être transmis sous forme de courant transmembranaire ou de tension pour générer des potentiels d'action. Nous présentons dans cette section un modèle de neurone thermo-photosensible pour estimer le codage non linéaire et les réponses de neurone FitzHugh-Nagumo (FHN) simple [180–182], qui est décrit comme l'oscillateur Bonhoeffer-van der Pol [183, 184] piloté simultanément par des signaux optiques et de la chaleur. De ce fait, la lumière et la température ayant un impact sur l'activité du neurone, peuvent être codées et transmises sous forme de signaux électriques. Elles peuvent alors servir de stimuli externes pour les neurones biologiques.

2.1.1.1 Description du modèle et schéma

Un oscillateur Bonhoeffer-van der Pol peut être activé pour générer des modèles d'éclatement et de dopage en appliquant une excitation périodique externe rigoureusement modulée. Par conséquent, il est souvent utilisé pour étudier la dynamique des activités neuronales. Lors de la construction de circuits neuronaux, le forçage externe peut être traité comme une source de tension ou une source de courant [184]. Ce circuit simple peut en outre être utilisé pour modéliser la stabilité de synchronisation entre les neurones. En raison des propriétés physiques du phototube et de la thermistance, qui peuvent convertir respectivement de la lumière et la température en un courant électrique, un phototube et une thermistance peuvent être utilisés pour exciter et réguler les activités neuronales. Dans ce modèle de neurone, nous avons utilisé une bobine d'induction pour générer un courant variant dans le temps, un condensateur pour générer une tension de sortie (potentiel de la membrane), et une résistance non linéaire pour induire une relation non linéaire entre la tension et le courant. Le phototube est utilisé comme source d'excitation et deux thermistances sont utilisées, l'une pour détecter les changements de température dans le circuit neuronal et l'autre pour l'exciter. Ainsi, le circuit neuronal peut être excité simultanément et en continu par un photocourant provenant d'un éclairage externe et la propriété matérielle de la cathode du phototube et un courant de dérivation provenant d'une source de chaleur externe. Ces composants associés comme dans la Figure 2.1 montrent qu'il est possible que la fonction du circuit neuronal puisse être améliorée.

La caractéristique de la résistance non linéaire (NR) connectée dans le circuit [94, 183] sont estimées par :

$$i_{NR} = -\frac{1}{\rho} \left(V - \frac{V^3}{3V_0^2} \right) \quad (2.1)$$

où ρ et V_0 sont des paramètres de normalisation de la résistance non linéaire et V est la tension aux bornes de la résistance non linéaire et du condensateur.

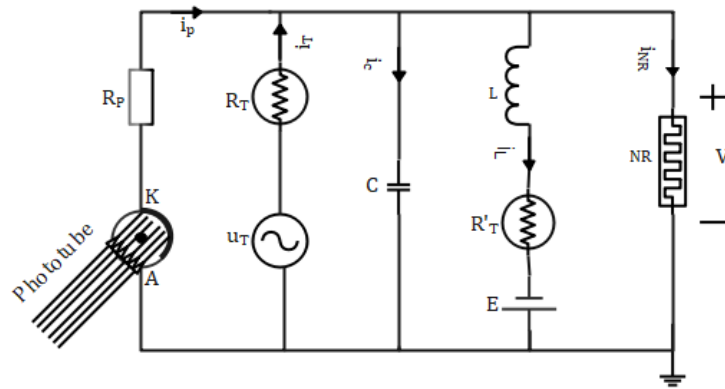


Figure 2.1 – Schéma de principe du circuit neuronal sous les effets de lumière et la température. NR est une résistance non linéaire, C est le condensateur, L représente une bobine d'induction, R_T et R'_T désignent des thermistances, R_P est une résistance linéaire et E est une source de tension constante. K désigne la cathode et A représenté l'anode du phototube.

L'effet photoélectrique [185–187] est un phénomène dans lequel des électrons dans certains matériaux sont excités par des photons pour former un courant lorsqu'une onde électromagnétique au-dessus d'une certaine fréquence est appliquée. Pour une étude physique expérimentale plus approfondie, un phototube est conçu comme une source de tension et un composant de contrôle dans des circuits non linéaires. Une photocellule est un dispositif de conversion photoélectrique de base, basé sur l'effet photoélectrique externe. Une cellule photoélectrique peut convertir des signaux lumineux en signaux électriques dans certaines bandes de fréquences. Les photocellules sont caractérisées en tant que photocellules sous vide ou photocellules à gaz. La structure typique d'une cellule photoélectrique consiste à aspirer la coque de verre sphérique, à recouvrir la surface de l'hémisphère intérieur d'une couche de matériau photoélectrique comme cathode et à placer une petite pièce de métal sphérique ou annulaire comme anode. Si la bille est remplie d'un gaz inerte à basse pression, il devient une photocellule gonflable. Les photoélectrons entrent en collision avec les molécules de gaz pendant leur vol vers l'anode et ionisent le gaz, ce qui augmente la sensibilité des photocellules. Les métaux utilisés comme photocathodes intègrent les métaux alcalins, le mercure, l'or et l'argent. Sur la base de tests expérimentaux, la relation tension-photocourant du phototube est représentée sur la Figure 2.2.

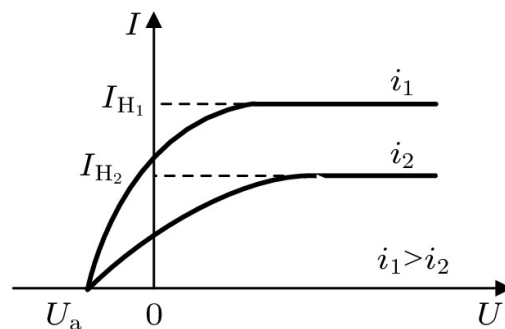


Figure 2.2 – Un graphique de la relation entre la tension et le photocourant [12]

En utilisant une approche mathématique, la courbe de la Figure 2.2 est estimée en utilisant une variété de fonctions non linéaires comme suit :

$$\begin{cases} I_a = \frac{2I_H}{\pi} \arctan(U - U_a) \\ I_b = I_H \frac{\exp(U - U_a) - \exp(U - U_a)}{\exp(U - U_a) + \exp(U - U_a)} \\ I_c = \frac{I_H}{1 + (I_H - 1) \exp(U - U_a)} \end{cases} \quad (2.2)$$

U et I représentent respectivement la tension et le courant du phototube. I_{H1} et I_{H2} sont les courants maximaux (courants de saturation) émis par le phototube lorsque les intensités lumineuses (i_1 et i_2) sont suffisamment fortes. U_a désigne la tension de coupure inverse et dépend des propriétés du matériau de la cathode du phototube. A partir de l'équation 2.2 on observe trois types de fonctions non linéaires qui peuvent être sélectionnés pour représenter la relation entre la tension et le photocourant à travers le phototube. Pour plus de simplicité et de cohérence avec les variables de la Figure 2.1, nous considérons dans cette thèse que le photocourant à travers le phototube est sélectionné comme le premier type (I_a) dans l'équation 2.2, et est défini par :

$$i_P = \frac{2I_H}{\pi} \arctan(V_p - V_a) \quad (2.3)$$

où V_a désigne la tension de coupure inverse, V_P et I_H décrivent la tension et le courant de saturation aux bornes du phototube, respectivement.

Une thermistance est un composant électronique dont la résistance électrique varie en fonction de la température. C'est l'un des principaux capteurs de température utilisés en électronique. Elles sont constituées d'un matériau semi-conducteur d'oxyde métallique encapsulé dans une petite bille d'époxy ou de verre. Chaque capteur a une résistance nominale propre qui varie de manière proportionnelle en fonction de la température selon une approximation linéaire. Les thermistances ont soit un coefficient de température négatif (CTN), soit un coefficient de température positif (CTP). Dans le premier cas (CTN), le plus courant, la thermistance a une résistance qui diminue lorsque la température augmente, tandis que dans le second (CTP), on constate une résistance accrue lorsque la température augmente. La relation entre la résistance de la thermistance et la température T est estimée par :

$$R_T = R_\infty e^{\left(\frac{B}{T}\right)} \quad (2.4)$$

où le paramètre de matériau B est déterminé par l'énergie d'activation q et la constante de Boltzmann K avec la dépendance $B = q/K$.

En appliquant les lois de Kirchhoff définies plus haut, les équations de circuit de la Figure 2.1 peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} C \frac{dV}{dt} = i_P + \frac{U_T - V}{R_T} - i_L - i_{NR} \\ L \frac{di_L}{dt} = V - R'_T i_L + E \end{cases} \quad (2.5)$$

où V désigne la tension de sortie aux bornes du condensateur C et i_L est le courant d'induction aux bornes de l'inductance L . Les paramètres R_T et R'_T sont des résistances liées à la thermistance et L, C, E

représentent respectivement l'inductance, la capacité et la tension constante. De plus, u_T est une tension alternative variable dans le temps appliquée à la thermistance pour générer un courant de forçage défini par : $u_T = B_T \cos(\omega_T t)$, où B_T est l'amplitude du terme périodique dans la source de tension et ω_T la fréquence angulaire.

Le phototube peut générer un photocourant i_P qui peut être calculé par la relation :

$$i_P = \frac{2I_H}{\pi} \arctan(V_p - V_a) = \frac{V_P - V}{R_P} \quad (2.6)$$

En combinant les équations 2.4, 2.5 et 2.6 et en appliquant la norme de transformation d'échelle sur les variables et paramètres, nous obtenons les expressions ci-contre :

$$\begin{cases} x = \frac{V}{V_0}, y = \frac{\rho i_L}{V_0}, \tau = \frac{t}{\rho C}, T' = \frac{T}{T_0} = \frac{T}{B}, a = \frac{E}{V_0}, b(T') = \frac{R'_T}{\rho} = b_0 \exp\left(\frac{1}{T'}\right), \\ c = \frac{\rho^2 C}{L} \varepsilon_P = \frac{\rho}{R_P}, \varepsilon_T(T') = \frac{\rho}{R_T} = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{1}{T'}\right), \omega_T = \rho C \omega'_T \\ u_P = \frac{\rho V_P}{R_P V_0} = \varepsilon_P \frac{V_P}{V_0}, A_T(T') = \frac{\rho B_0}{R_T V_0} = A_0 \exp\left(-\frac{1}{T'}\right) \end{cases} \quad (2.7)$$

Ainsi, nous pouvons réécrire l'équation 2.5 comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x \left(1 - \varepsilon_P - \varepsilon_T(T')\right) - y - \frac{1}{3}x^3 + u_P + A_T(T') \cos(\omega'_T \tau) \\ \frac{dy}{d\tau} = c \left(x - b(T')y + a\right) \end{cases} \quad (2.8)$$

où x et y sont respectivement le potentiel de la membrane et la variable de récupération du courant transmembranaire. On obtient ainsi un neurone dépendant de la température et des stimuli externes qui peuvent modifier la dynamique du neurone en générant des modes de tir lorsque certains paramètres intrinsèques sont bien définis. En fin de compte, la dynamique des neurones thermo-photosensibles peut être entièrement contrôlée par la chaleur et la lumière. Dans le cas pratique et par souci de simplification, le phototube est considéré comme une source de tension périodique définie par $u_P = A_P \cos(\omega_P \tau)$ où A_P et ω_P désignent respectivement l'amplitude et la pulsation du signal.

2.1.2 Modélisation de deux neurones FHN thermo-photosensible couplé via une synapse à la Jonction Josephson

Le cerveau est le siège d'activités physico-chimiques et électriques [2-4]. L'interconnexion et l'échange d'informations dans un système nerveux s'effectuent par le biais de synapses. Ces synapses peuvent être de nature chimique, électrique et bien d'autre. Ils convertissent un potentiel d'action déclenché dans un neurone pré-synaptique en un signal dans un neurone post-synaptique. La propagation de ces signaux dans les neurones biologiques est associée à des mouvements d'ions, donc à des courants électriques. Cette propagation se traduit par la génération de champs électriques et magnétiques dans le cerveau. Des potentiels électriques de l'ordre de quelques dizaines de microvolts sont facilement détectés par électroencéphalographie. Cependant, il est beaucoup plus difficile de détecter les champs magnétiques cérébraux. Vu la grande sensibilité de la Jonction Josephson (JJ) dans la détection du champ

magnétique[33], nous nous proposons de coupler deux circuits neuronaux FHN pilotés simultanément par un phototube et une thermistance via une JJ (Figure 2.3). Ainsi, ce montage nous permet d'améliorer la sensibilité du circuit neuronal sous l'effet de la lumière et de la température et d'estimer une possibilité de synchronisation des deux circuits neuronaux à travers une synapse à JJ.

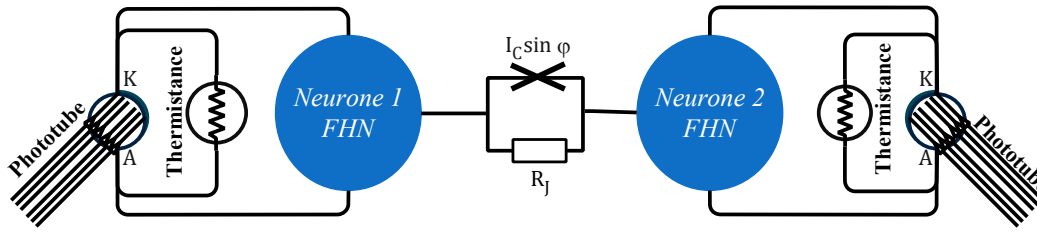


Figure 2.3 – Topologie de couplage de deux neurones biologiques via une Jonction Josephson (JJ)

2.1.2.1 Description du modèle et schéma

Il est connu que le modèle de neurone biologique simplifié prend en compte deux variables (potentiel de la membrane et courant transmembranaire) et un courant de forçage externe est introduit pour modifier l'excitabilité, afin de générer différents types de schémas de déclenchement tels que des états de repos, de pointe, d'éclatement et chaotiques. Dans cette configuration, une variable représentant le potentiel de la membrane est utilisée comme activateur, tandis qu'une autre variable lente est utilisée pour la variable de récupération de courant transmembranaire. Nous considérons dans cette partie deux modèles de neurones identiques comme décrit dans la section 2.1.1 et les couplons à travers une synapse à JJ. Pour des raisons de simplicité, nous utilisons une JJ idéal en parallèle avec une résistance linéaire R_j pour ouvrir un canal de couplage. Par conséquent, les circuits couplés sont illustrés à la Figure 2.4.

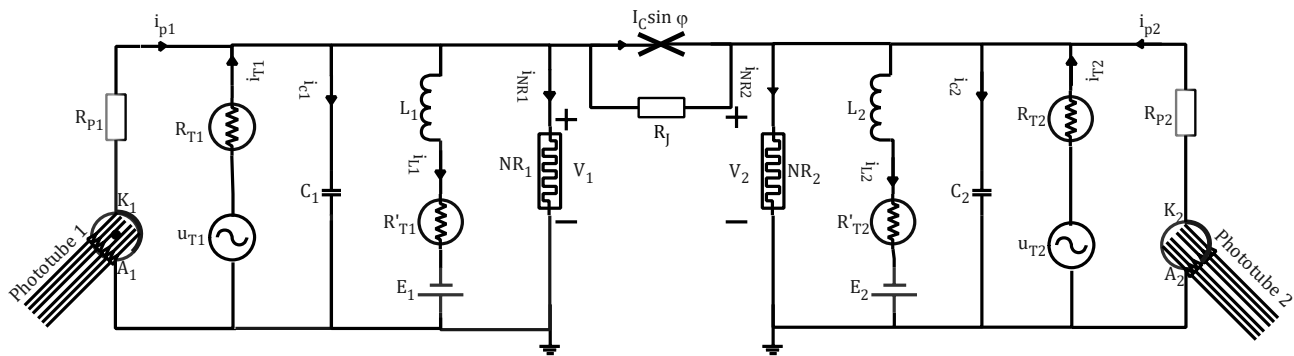


Figure 2.4 – Schéma de principe de deux circuits neuronaux FHN thermo-photosensible couplé via la jonction Josephson et une résistance. NR_j est une résistance non linéaire, C_j est le condensateur, L_j représente une bobine d'induction, R_{T_j} et R'_{T_j} désignent des thermistances, R_{P_j} est une résistance linéaire et E_j est une source de tension constante. K_j désigne la cathode et A_j représente l'anode dans le phototube avec $j = 1, 2$

La synapse du neurone biologique a une structure anatomique complexe et peut capter différents types de stimuli externes. Le canal de couplage constitué d'une résistance linéaire et d'une JJ permet la construction d'une synapse hybride fonctionnelle. En particulier, l'implication de Josephson peut estimer l'effet du champ magnétique externe sur la synapse de couplage en modifiant l'erreur de phase dans la

JJ, ainsi le courant de jonction est régulé de manière efficace et appropriée. Par conséquent, ce canal de couplage peut décrire les principales propriétés biophysiques de la synapse artificielle et il peut être d'avantage utilisé dans les réseaux de neurones artificie.

Les caractéristiques des résistances non linéaires, les photocourants délivrés par les phototubes et les résistances aux bornes des thermistances sont définies respectivement par les équations 2.4, 2.5 et 2.6. En appliquant la loi de Kirchhoff sur la Figure 2.4 et en considérant que le canal de couplage est entièrement activé, les équations du circuit peuvent être décrites comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \frac{dV_1}{dt} = i_{P1} + \frac{V_{T1} - V}{R_{T1}} - i_{L1} + \frac{1}{\rho} \left(V_1 - \frac{V_1^3}{3V_0^2} \right) - I_c \sin \varphi - \frac{(V_1 - V_2)}{R_j} \\ L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = V_1 - R'_{T1} i_{L1} + E_1 \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} = i_{P2} + \frac{V_{T2} - V}{R_{T2}} - i_{L2} + \frac{1}{\rho} \left(V_2 - \frac{V_2^3}{3V_0^2} \right) + I_c \sin \varphi + \frac{(V_1 - V_2)}{R_j} \\ L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = V_2 - R'_{T2} i_{L2} + E_2 \\ \frac{h}{2e} \frac{d\varphi}{dt} = V_1 - V_2 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où V_j désigne la tension de sortie aux bornes du condensateur C_j et i_{L_j} est le courant d'induction aux bornes de l'inductance L_j . Les paramètres R_{T_j} , R'_{T_j} sont des résistances liées à la thermistance et L_j, C_j, E_j représentent respectivement l'inductance, la capacité et la tension constante avec $j = (1, 2)$. De plus, V_{T_j} est une tension alternative variable dans le temps appliquée à la thermistance pour générer un courant de forçage défini par : $V_{T_j} = B_{T_j} \cos(\omega_{T_j} t)$ où B_{T_j} est l'amplitude du terme périodique dans la source de tension et ω_{T_j} la fréquence angulaire. I_c et φ désignent respectivement le courant de jonction maximal et l'erreur de phase de la jonction. Les paramètres h et e désignent la constante de Planck et la charge de l'électron.

Le phototube peut générer un photocourant i_P qui peut être calculé par la relation :

$$i_{P_j} = \frac{2I_H}{\pi} \arctan(V_{P_j} - V_a) = \frac{V_{P_j} - V_j}{R_{P_j}} \quad (2.10)$$

Dans le cas pratique et par souci de simplification, le phototube est considéré comme une source de tension périodique appelée signal d'attaque définie par $u_{P_j} = A_{P_j} \cos(\omega_{P_j} \tau)$, où A_{P_j} et ω_{P_j} désignent respectivement l'amplitude et la pulsation du signal et $j = (1, 2)$. En combinant les équations (2.4), (2.9) et (2.10) et en appliquant la norme de transformation d'échelle sur les variables et paramètres, on obtient les expressions ci-contre :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j = \frac{V_j}{V_0}, y_j = \frac{\rho i_{L_j}}{V_0}, \tau_j = \frac{t}{\rho C_j}, T_j' = \frac{T_j}{T_0} = \frac{T_j}{B}, a = \frac{E_j}{V_0}, b(T_j') = \frac{R'_{T_j}}{\rho} = b_0 \exp\left(\frac{1}{T_j'}\right), \\ c = \frac{\rho^2 C_j}{L_j} \xi_{P_j} = \frac{\rho}{R_{P_j}}, \xi_{T_j}(T_j') = \frac{\rho}{R_{T_j}} = \xi_0 \exp\left(-\frac{1}{T_j'}\right), \omega_{T_j} = \rho C_j \omega'_{T_j}, \\ u_{P_j} = \frac{\rho V_{P_j}}{R_{P_j} V_0} = \xi_{P_j} \frac{V_{P_j}}{V_0}, \alpha = \frac{I_c}{V_0}, \beta = \frac{\rho}{R_j}, g = \frac{2e\rho C V_0}{h}, j = \{1, 2\} \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Pour simplifier, considérons le cas de deux circuits neuronaux identiques sélectionnés avec les mêmes paramètres et couplés via la JJ et une résistance linéaire. Ainsi, les équations du système couplé sont réécrites par :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{d\tau} = x_1 \left(1 - \xi_0 e^{-\frac{1}{\tau_1}} - \xi_P \right) - y_1 - \frac{1}{3} x_1^3 + A_P \cos(\omega_P \tau) + A_0 e^{-\frac{1}{\tau_1}} \cos(\omega'_T \tau) - \alpha \sin z - \beta(x_1 - x_2) \\ \frac{dy_1}{d\tau} = c \left(-b_0 e^{\frac{1}{\tau_1}} y_1 + a + x_1 \right) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = x_2 \left(1 - \xi_0 e^{-\frac{1}{\tau_2}} - \xi_P \right) - y_2 - \frac{1}{3} x_2^3 + A_P \cos(\omega_P \tau) + A_0 e^{-\frac{1}{\tau_2}} \cos(\omega'_T \tau) + \alpha \sin z + \beta(x_1 - x_2) \\ \frac{dy_2}{d\tau} = c \left(-b_0 e^{\frac{1}{\tau_2}} y_2 + a + x_2 \right) \\ \frac{dz}{d\tau} = g(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (2.12)$$

où x_j et y_j sont respectivement le potentiel membranaire et la variable de récupération du courant transmembranaire. z désigne l'erreur de phase entre la jonction Josephson.

Vu son aspect dynamique, ce modèle de neurone couplé peut induire les mêmes comportements qu'un neurone biologique lorsque les paramètres intrinsèques sont correctement sélectionnés. De plus, les paramètres intrinsèques (α, β, g) liés au canal de couplage peuvent être ajustés pour détecter une éventuelle approche de synchronisation entre les deux circuits neuronaux.

Afin d'évaluer la synchronisation complète, la fonction d'erreur est calculée par la relation.

$$\theta(e_x, e_y) = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (2.13)$$

De plus, la définition de la synchronisation de phase et de l'erreur de phase peut être obtenue en appliquant la transformation de Hilbert [82, 188] sur la série temporelle échantillonnée (x_1, x_2) . Ils sont définis par :

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t) = -\frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1(\tau)}{t - \tau} d\tau, \hat{x}_2(t) = -\frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ \Delta\phi = \phi_1(t) - \phi_2(t) = \arctan\left(\frac{\hat{x}_1(t)}{x_1(t)}\right) - \arctan\left(\frac{\hat{x}_2(t)}{x_2(t)}\right) \end{cases} \quad (2.14)$$

où PV désigne l'intégrale de la valeur principale de Cauchy, et $\Delta\phi$ la fonction d'erreur de phase.

2.1.2.2 Implémentation du circuit électronique Pspice

L'objectif de cette section est de concevoir un circuit électronique capable de reproduire efficacement la dynamique de deux neurones FHN thermosensibles et photosensibles couplés via une jonction Josephson idéale et une résistance linéaire. Pour implémenter ce circuit électronique, nous utilisons une approche basée sur des amplificateurs opérationnels [190–195]. Le schéma de principe du simulateur électronique complet utilisé pour simuler la dynamique du modèle de neurone couplé via le JJ et une résistance linéaire décrite par le système (2.12) est conçu comme illustré à la Figure 2.5 .

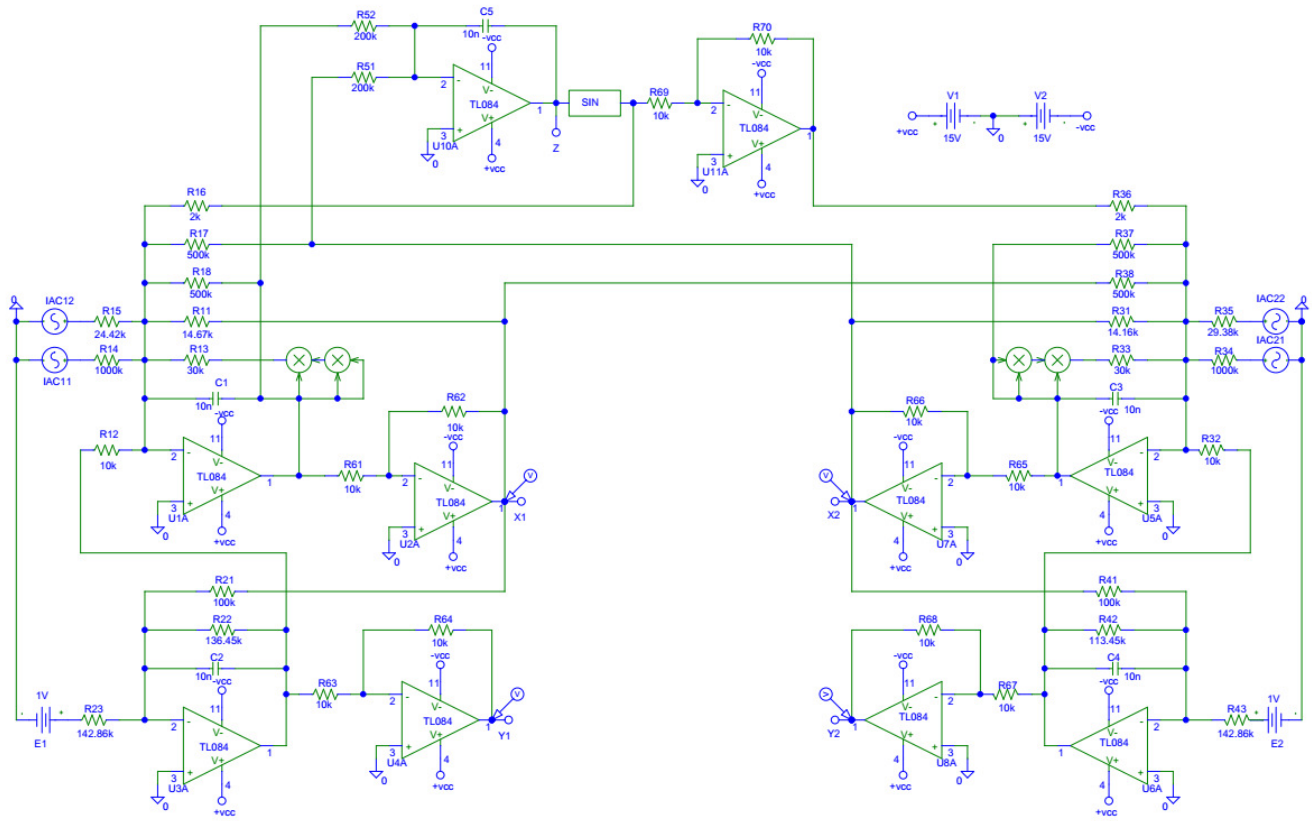


Figure 2.5 – Circuit électronique du modèle de deux neurones FHN thermo-photosensible couplé via une Jonction Josephson

Le dispositif électronique est constitué de deux canaux de circuit représentant physiquement les deux neurones. Le canal du circuit neuronal est conçu sur la base de composants électroniques discrets tels que des résistances, des condensateurs, des amplificateurs opérationnels de type TL084 et des multiplicateurs électroniques de type AD633JN (MULT). En appliquant les lois de Kirchhoff au circuit de la Figure 2.5, les équations suivantes sont décrites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = \frac{R}{R_{11}} X_1 - \frac{R}{R_{12}} Y_1 - \frac{R\gamma^2}{R_{13}} X_1^3 + \frac{R}{R_{14}} I_{AC11} + \frac{R}{R_{15}} I_{AC12} - \frac{R}{R_{16}} \sin(Z) - \frac{R}{R_{17}} X_1 + \frac{R}{R_{18}} X_2 \\ \dot{Y}_1 = \frac{R}{R_{21}} X_1 - \frac{R}{R_{22}} Y_1 + \frac{R}{R_{23}} E_1 \\ \dot{X}_2 = \frac{R}{R_{31}} X_2 - \frac{R}{R_{32}} Y_2 - \frac{R\gamma^2}{R_{33}} X_2^3 + \frac{R}{R_{34}} I_{AC21} + \frac{R}{R_{35}} I_{AC22} + \frac{R}{R_{36}} \sin(Z) + \frac{R}{R_{37}} X_1 - \frac{R}{R_{38}} X_2 \\ \dot{Y}_2 = \frac{R}{R_{41}} X_2 - \frac{R}{R_{42}} Y_2 + \frac{R}{R_{43}} E_2 \\ \dot{Z} = \frac{R}{R_{51}} X_1 - \frac{R}{R_{52}} X_2 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Ici, X_i est une variable d'état représentant le potentiel de membrane et Y_i la variable d'état représentant la variable de récupération avec $i = 1, 2$. E_i est un paramètre externe et $I_{AC_{ij}} = A \cos(\omega_s \cdot t)$ représente la source d'excitation utilisée pour exciter les différents neurones avec $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$. Notons que A désigne l'amplitude de la source d'excitation et ω_s sa pulsation. Une comparaison entre les équations

2.12 et 2.15 permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} = \frac{R}{1 - \varepsilon_0 e^{-\frac{1}{T_1}} - \varepsilon_P}; R_{31} = \frac{R}{1 - \varepsilon_0 e^{-\frac{1}{T_2}} - \varepsilon_P}; R_{12} = R_{32} = R; R_{13} = R_{33} = 3\gamma^2 R; \\ R_{14} = R_{34} = \frac{RA}{A_p}; R_{15} = \frac{RA}{A_0 e^{-\frac{1}{T_1}}}; R_{35} = \frac{RA}{A_0 e^{-\frac{1}{T_2}}}; R_{21} = R_{41} = \frac{R}{c}; R_{22} = \frac{R}{cb_0 e^{\frac{1}{T_1}}}; \\ R_{42} = \frac{R}{cb_0 e^{\frac{1}{T_2}}}; R_{24} = R_{44} = \frac{RE}{c \cdot a}; R_{16} = R_{36} = \frac{R}{\alpha}; R_{17} = R_{37} = R_{18} = R_{38} = \frac{R}{\beta}; \\ R_{51} = R_{52} = \frac{R}{g}; \omega_s = \frac{\omega_p}{RC} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

2.1.3 Modélisation de deux neurones FHN hybrides couplé via une synapse memristive

Selon les données scientifiques fiables, le modèle de neurone biologique le plus simple est constitué de deux variables, l'une représentant le potentiel membranaire et l'autre la variable de récupération du courant transmembranaire. En plus de ces variables, un courant d'excitation est introduit afin de générer différents types de modèles de déclenchement. Ainsi, le neurone FitzHugh-Nagumo (FHN) en fait partie. Ce neurone a fait l'objet de plusieurs études et a permis de concevoir des neurones biologiques sensibles à certains signaux contrôlés tels que : les neurones auditifs [14, 23], les neurones photosensibles ou visuels [21, 22] et les neurones thermosensibles [24, 25]. Nous considérons dans cette sous-section deux neurones FHN, l'un photosensible [12] piloté par un photocourant provenant d'un phototube et l'autre thermosensible [13] contrôlé par une thermistance. De plus, un memristor multistable est utilisé pour connecter les deux neurones comme le montre la Figure 2.6. Ce memristor joue donc le même rôle que les synapses biologiques dans le système nerveux.

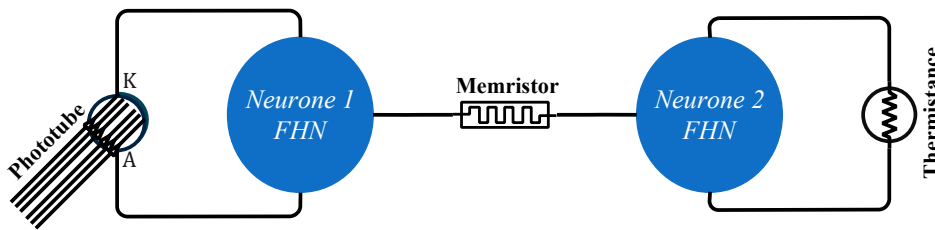


Figure 2.6 – Topologie de couplage de deux neurones biologiques via un memristor multistable.

2.1.3.1 Modèle et schéma d'un système de neurones memristifs multistables

A- Description du memristor multistable

Les synapses neurales biologiques font partie du circuit qui relie les organes sensoriels, tels que ceux qui ressentent la douleur ou le toucher, du système nerveux périphérique au cerveau. Les synapses relient les neurones du cerveau aux neurones du reste du corps, et ces neurones aux muscles. Par analogie, le memristor peut être utilisé pour remplir cette fonction et décrire les effets de l'induction électromagnétique entre ces neurones biologiques [196]. Conformément à la théorie des memristors [44], un modèle

générique de memristor à flux contrôlé a été proposé par Lin et al [87] et défini comme suit :

$$\begin{cases} i = H(\varphi)v = \varphi v \\ \frac{d\varphi}{dt} = \sin(\pi\varphi) + v \end{cases} \quad (2.17)$$

où v , i et $H(\varphi)$ désignent respectivement la tension, le courant et la memductance du memristor. Notez que cette dynamique du memristor défini dans l'équation (2.17) est fonction d'un stimulus externe v et du flux d'état interne du memristor (φ). Nous apporterons plus d'information de ce memristors au chapitre §3.

B- Modèle et schéma de couplage neuronal

Afin de construire ce modèle de neurone, nous couplons à travers le memristor défini au paragraphe précédent deux neurones FHN, l'un exposé sous l'effet de la lumière (neurone photosensible) et l'autre exposé sous l'effet de la température (neurone thermosensible) comme le montre la Figure 2.7.

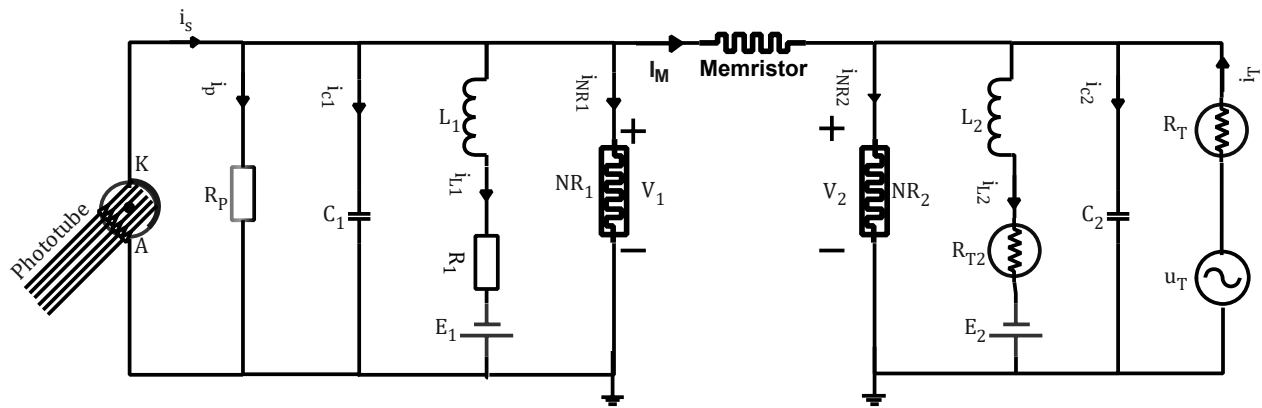


Figure 2.7 – Schéma de principe de deux circuits neuronaux FHN sous l'effets Photoélectrique et Thermique couplé via une synapse memristif. NR_1 et NR_2 sont des résistances non linéaires, C_1 et C_2 sont des condensateurs, L_1 et L_2 représentent des bobines d'inductions, E_1 et E_2 sont des sources de tension constante, R_T et R_{2T} désignent des thermistances, R_P et R_1 sont des résistances linéaires et A et K désignent respectivement l'anode et la cathode du phototube.

Il est important de préciser que les courants aux bornes des résistances non linéaires sont définis par comme à l'équation 2.4. De même la résistance aux bornes de la thermistance est définie comme à l'équation 2.6. En outre, la relation entre le photocourant et la tension aux bornes du Phototube est évaluée par :

$$i_S = \frac{2I_H}{\pi} \arctan(V_s - V_a) \quad (2.18)$$

où V_a désigne la tension de coupure inverse et selon les propriétés matérielles de la cathode du Phototube, V_S et I_H , respectivement, décrivent la tension et le courant de saturation aux bornes du Phototube.

En appliquant la loi de Kirchhoff sur la Figure 2.7 et en considérant que le courant d'induction $I_M = H(\varphi)(V_1 - V_2)$ à travers le memristor est actif, les équations dynamiques du circuit peuvent être

décrites comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \frac{dV_1}{dt} = i_S - \frac{V_1}{R_P} - i_{L1} + i_{NR1} - I_M \\ L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = V_1 - R_1 i_{L1} + E_1 \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{V_T - V_2}{R_T} - i_{L2} + i_{NR2} + I_M \\ L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = V_2 - R_{T2} i_{L2} + E_2 \\ \frac{d\varphi}{dt} = \sin(\pi\varphi) + (V_1 - V_2) \end{array} \right. \quad (2.19)$$

où V_i désigne la tension de sortie aux bornes du condensateur C_i et i_{L_i} le courant d'induction aux bornes de l'inductance L_i avec $i = (1, 2)$. Les paramètres R_T et R_{T2} sont des résistances liées à la thermistance et L_i, C_i, E_i sont respectivement l'inductance, la capacité et la tension constante. On note $U_T = A_T \cos(2\pi f_0 t)$ une tension alternative appliquée à la thermistance R_T pour générer un courant de forçage externe. A_T et f_0 représentent l'amplitude et la fréquence de la source externe. I_M et $H(\varphi) = \varphi$ désignent respectivement le courant d'induction et la variable de flux d'état interne du memristor.

Pour l'analyse dynamique et les simulations numériques, nous combinons les équations 2.4, 2.18 et 2.19 et appliquons la norme de transformation d'échelle sur les variables et les paramètres, ce qui donne les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = \frac{V_i}{V_0}, y_i = \frac{\rho i_{L_i}}{V_0}, \tau = \frac{t}{\rho C}, T' = \frac{T}{B}, a = \frac{E}{V_0}, c = \frac{\rho^2 C}{L}, b(T') = \frac{R_{T2}}{\rho} = b_0 \exp\left(\frac{1}{T'}\right), \xi_P = \frac{\rho}{R_P}, \\ f = \rho C f_0, \xi_T(T') = \frac{\rho}{R_T} = \xi_0 \exp\left(-\frac{1}{T'}\right), I_P = \frac{\rho i_S}{V_0}, A_T(T') = \frac{\rho A_T}{R_T V_0} = A_0 \exp\left(-\frac{1}{T'}\right), \varphi' = \frac{\varphi}{k_0}, \\ k_0 = \rho C V_0, \alpha = \rho C, \beta = \alpha V_0, k = \rho, C_1 = C_2 = C L_1 = L_2 = L, E_1 = E_2 = E, i = \{1, 2\} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Sur la base des équations 2.19 et 2.20, le système dynamique sans dimension du neurone couplé via un memristor peut être réécrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = (1 - \xi_P)x_1 - y_1 - \frac{1}{3}x_1^3 + I_0 \arctan(x_1 - 1) - k\varphi(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_1 = c(x_1 - by_1 + a) \\ \dot{x}_2 = (1 - \xi_0 e^{-\frac{1}{T'}})x_2 - y_2 - \frac{1}{3}x_2^3 + A_0 e^{-\frac{1}{T'}} \cos(2\pi f t) + k\varphi(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = c(x_2 - b_0 e^{\frac{1}{T'}} y_2 + a) \\ \dot{\varphi} = \alpha \sin(\pi\varphi) + \beta(x_1 - x_2) \end{array} \right. \quad (2.21)$$

où x_i et y_i désignent respectivement les potentiels de membrane et les variables de récupération de courant transmembranaire des deux neurones couplés. Le phototube est considéré comme une source de courant stable et défini par $i_S = I_0 \arctan(x_1 - 1)$. Ici, I_0 est l'amplitude du courant de saturation à travers le phototube. Les paramètres intrinsèques (k, α, β) sont des coefficients basés sur le courant d'induction et le flux d'état interne du memristor. Une bonne sélection des paramètres intrinsèques du memristor et des stimuli externes peut induire des états de repos, pics, d'éclatement voire chaotiques. De plus, une dynamique complexe abondante (multistabilité) peut se présenter. Considérant que les deux

neurones ne sont pas identiques, et qu'il peut y avoir transfert d'énergie le long de la synapse memristive lorsque le canal de couplage est excité, il est intéressant d'analyser l'approche de la synchronisation de phase entre les deux circuits neuronaux. L'évaluation de la synchronisation de phase et de l'erreur de phase peut être obtenue en appliquant la transformation de Hilbert sur la série temporelle échantillonnée [82, 188] définie par :

$$\begin{cases} \hat{x}_1(t) = -\frac{1}{\pi}PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1(\tau)}{t-\tau} d\tau; \hat{x}_2(t) = -\frac{1}{\pi}PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2(\tau)}{t-\tau} d\tau \\ \Delta\phi = \phi_1(t) - \phi_2(t) = \arctan\left(\frac{\hat{x}_1(t)}{x_1(t)}\right) - \arctan\left(\frac{\hat{x}_2(t)}{x_2(t)}\right) \end{cases} \quad (2.22)$$

2.1.3.2 Implémentation du circuit électronique Pspice

Dans cette section, il s'agit de réaliser un calculateur électronique capable de reproduire à l'identique la dynamique du système couplé de deux neurones via une synapse memristive. Pour cela, nous exploitons une approche basée sur des amplificateurs opérationnels [53, 190–192, 194, 195] pour implémenter ce calculateur électronique. Ainsi, la Figure 2.8 présente le schéma de principe du simulateur électronique complet du système neuronal memristif décrit par le système (2.21). Le calculateur neuronal est conçu à base de composants électroniques discrets tels que des résistances, des condensateurs, des amplificateurs opérationnels de type *TL084* fonctionnant sur une plage de tension allant de $-18V$ à $18V$ et des multiplicateurs électroniques (*MULT*) de type *AD633JN* et bien d'autres.

En appliquant les lois de Kirchhoff au circuit de la Figure 2.8, les équations suivantes sont décrites :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \frac{R}{R_{11}}X_1 - \frac{R}{R_{12}}Y_1 - \frac{R}{R_{13}}X_1^3 + \frac{R}{R_{14}}\arctan(X_1 - 1) - \frac{R}{R_{15}}W(X_1 - X_2) \\ \dot{Y}_1 = \frac{R}{R_{21}}X_1 - \frac{R}{R_{22}}Y_1 + \frac{R}{R_{23}}E_1 \\ \dot{X}_2 = \frac{R}{R_{31}}X_2 - \frac{R}{R_{32}}Y_2 - \frac{R}{R_{33}}X_2^3 + \frac{R}{R_{34}}I_{AC} + \frac{R}{R_{35}}W(X_1 - X_2) \\ \dot{Y}_2 = \frac{R}{R_{41}}X_2 - \frac{R}{R_{42}}Y_2 + \frac{R}{R_{43}}E_2 \\ \dot{W} = \frac{R}{R_{51}}\sin(\pi W) - \frac{R}{R_{52}}(X_1 - X_2) \end{cases} \quad (2.23)$$

Ici, X_i est une variable d'état représentant le potentiel de membrane, Y_i la variable d'état représentant la variable de récupération et W la variable d'état représentant le flux interne du memristor multistable avec $i = 1, 2$. E_i est un paramètre externe et $I_{AC} = A \cos(2\pi ft)$ représente la source d'excitation utilisée pour exciter le neurone thermosensible. Notons que A désigne l'amplitude du courant d'excitation et f sa fréquence. En égalisant les équations (2.21) et (2.23), on obtient les paramètres du circuit électronique suivants :

$$\begin{cases} R_{11} = \frac{R}{1 - \varepsilon_P}; R_{31} = \frac{R}{1 - \varepsilon_0 e^{-\frac{1}{T}}}; R_{12} = R_{32} = R; R_{13} = R_{33} = 3\gamma^2 R; R_{14} = \frac{R}{I_0}; \\ R_{34} = \frac{RA}{A_0 e^{-\frac{1}{T}}}; R_{15} = R_{35} = \frac{R}{k}; R_{21} = R_{41} = \frac{R}{c}; R_{42} = \frac{R}{cb_0 e^{\frac{1}{T}}}; R_{22} = \frac{R}{cb}; \\ R_{23} = R_{43} = \frac{RE}{c \cdot a}; R_{51} = \frac{R}{\alpha}; R_{52} = \frac{R}{\beta}; f_s = \frac{f}{RC}; E_1 = E_2 = E_3 = E \end{cases} \quad (2.24)$$

Le circuit électronique conçu sur la Figure 2.8 et simulé par le logiciel de simulation électronique Pspice permet de reproduire les mêmes comportements dynamiques observés lors de simulations numériques du système neuronal memristif défini à l'équation 2.21.

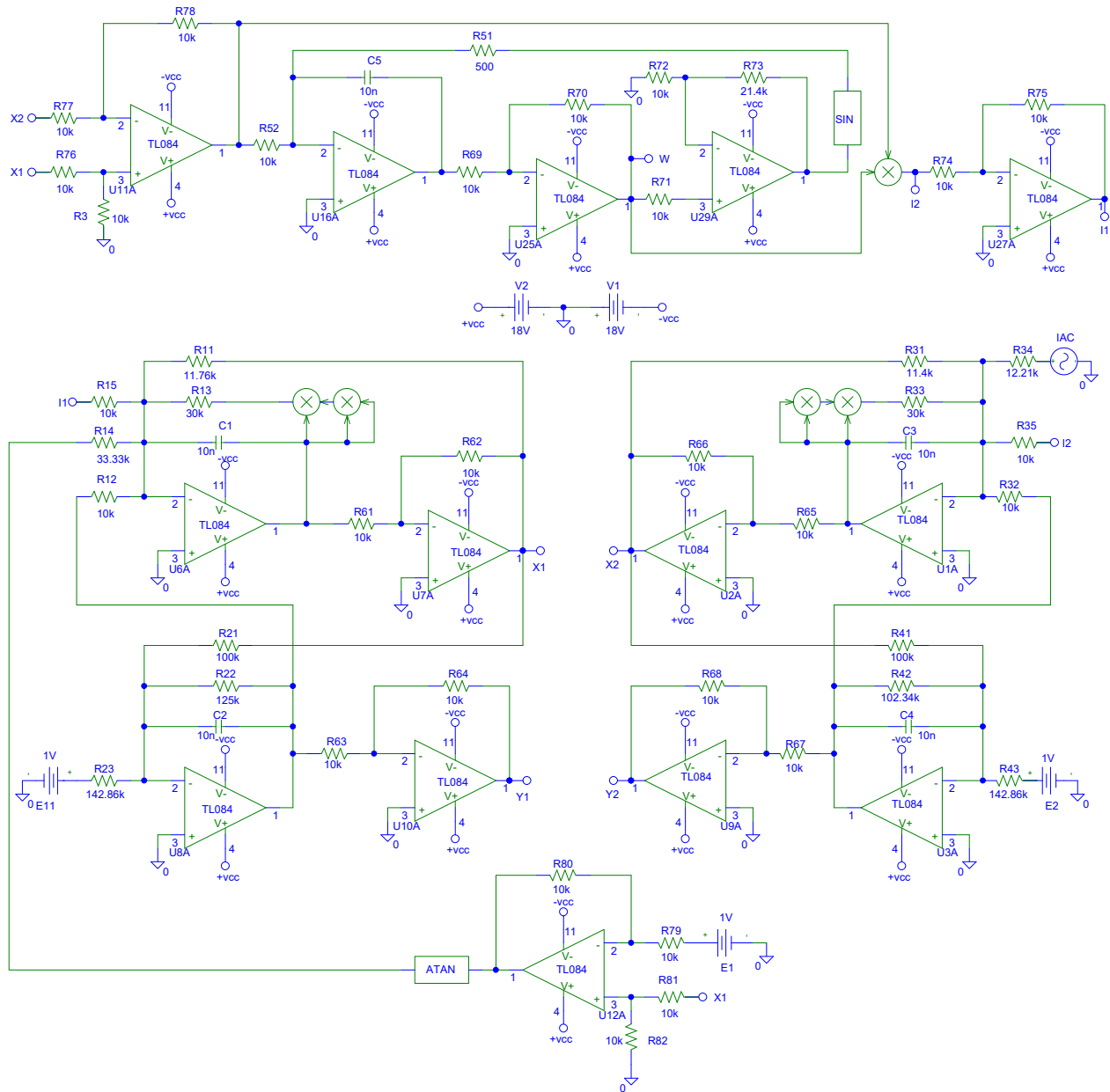


Figure 2.8 – Circuit électronique de deux neurones hybrides couplés via un memristor multistable

2.2 Méthodes analytiques

Dans cette thèse, les propriétés de base des équations différentielles ordinaires (*ODE*) décrivant la dynamique de nos différents modèles de neurones est un sous ensemble de la théorie des systèmes dynamiques. Ces systèmes peuvent aussi être discrets ou à dérivées partielles, et sont en général non linéaires. Leurs études imposent la maîtrise des outils mathématiques relevant de l'analyse des systèmes

d'équations différentielles non linéaires tels que la recherche des points d'équilibres et leurs stabilités. Ces derniers seront étudiés de manière approfondie en utilisant les méthodes Cardan et Routh-Hurwitz.

2.2.1 Points fixes

On appelle système dynamique, un système (physique) représenté par un ensemble de n équations différentielles munies de conditions initiales et structuré de la manière suivante

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X, \alpha, t), \\ X(0) &= \bar{X}.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Ici X est un vecteur de variables d'états de dimension n , F un vecteur de fonctions scalaires des variables X de dimension n aussi, α un vecteur de paramètre de dimension p , et t la variable libre du problème qui est souvent le temps. \bar{X} est le vecteur des conditions initiales (valeur de X à $t = 0$). Suivre la dynamique du système, correspond à observer l'évolution du vecteur X dans un espace vectoriel ε appelé espace des phases. L'application qui fait passer un vecteur de ε à un autre au cours du temps est appelé flot [167].

D'une façon générale, on appelle points d'équilibre ou encore points fixes, l'ensemble des points $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ pour lesquels la vitesse est nulle. En d'autres termes, le système n'évolue plus dans le temps et les solutions sont stationnaires. Cet état est déterminé en supposant que toutes les dérivées temporelles sont nulles. Un point d'équilibre est donc défini par les relations suivantes

$$\frac{dX}{dt} = 0. \quad \text{soit} \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = 0.\tag{2.26}$$

Lors des recherches des points d'équilibres, on peut aboutir à une équation de degré 3. Dans ce cas on est amené à utiliser la méthode de Cardan pour trouver les solutions réelles. Cette méthode est explicitée dans le paragraphe suivant.

2.2.2 Méthode Cardan

La méthode de Cardan, proposée par Jérôme Cardan en 1545, est une méthode de résolution des équations polynomiales du troisième degré. Soit un polynôme du troisième degré avec des coefficients réels.

$$P(X) = X^3 + AX^2 + BX + C = 0.\tag{2.27}$$

En utilisant la transformation de Tschirnhauss pour éliminer le coefficient devant X^2 en posant : $X = Z + \frac{A}{3}$, elle se ramène à une équation de la forme

$$Q(Z) = Z^3 + pZ + q = 0.\tag{2.28}$$

Avec $p = B - \frac{A^2}{3}$ et $q = C - \frac{AB}{3} + \frac{2A^3}{27}$. Il suffira de calculer les racines de Q pour obtenir celles de $P(X)$. La méthode Cardan permet d'obtenir les expressions appelées formules de Cardan, qui donnent les solutions de l'équation (2.28) en fonction de p et q et par conséquent celle de l'équation (2.27)

Formules de Cardan

Nous présentons les différentes situations selon le signe du discriminant de Cardan donné par l'expression : $\Delta = 4p^3 + 27q^2$.

— Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet une seule racine réelle donner par :

$$X = \left(-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{A}{3}.$$

— Si $\Delta < 0$, le polynôme P admet 3 racines réelles qui sont :

$$\begin{aligned} X_1 &= \left(-\frac{q}{2} + J \left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - J \left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{A}{3}; \\ X_2 &= J \left(-\frac{q}{2} + J \left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} + J^2 \left(-\frac{q}{2} - J \left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{A}{3}; \\ X_3 &= J^2 \left(-\frac{q}{2} + J \left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} + J \left(-\frac{q}{2} - J \left(-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{A}{3}; \end{aligned}$$

avec

$$J = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2j\pi}{3}} \quad o \quad j^2 = -1.$$

Soit

$$X_k = 2 - \frac{p}{3} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right) - \frac{A}{3} \quad o \quad k = 1, 2, 3.$$

— Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet 2 racines réelles dont un double qui sont :

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{3q}{p} - \frac{A}{3}, \\ X_2 &= X_3 = \frac{3p}{2q} - \frac{A}{3}. \end{aligned}$$

Cette méthode sera utiliser pour trouver les points d'équilibres et étudiés leurs stabilités.

2.2.3 Stabilité des systèmes dynamiques

La stabilité d'un système dynamique d'équations différentielles non linéaires s'étudie autour des points fixes. La méthode consiste a déterminé leur propriété de stabilité locale. Si un point fixe est stable, alors le système dynamique est stable autour de ce point.

Stabilité des points d'équilibres

Le principe de base de la méthode repose sur la linéarisation du système non linéaire décrit autour du point d'équilibre en considérant des variables locales :

$$u(t) = X(t) - X_e. \tag{2.29}$$

Pour linéariser, on recherche le système d'équations qui gouverne le vecteur $u(t)$ en faisant une approximation du premier ordre au voisinage du point d'équilibre :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = F_1(X_e) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Big|_{x_{1e}} u_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \Big|_{x_{2e}} u_2 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \Big|_{x_{ne}} u_n, \\ \dot{u}_2 = F_2(X_e) + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \Big|_{x_{1e}} u_1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \Big|_{x_{2e}} u_2 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \Big|_{x_{ne}} u_n, \\ \vdots \\ \dot{u}_n = F_n(X_e) + \frac{\partial F_n}{\partial x_1} \Big|_{x_{1e}} u_1 + \frac{\partial F_n}{\partial x_2} \Big|_{x_{2e}} u_2 + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \Big|_{x_{ne}} u_n. \end{cases} \quad (2.30)$$

Soit $\dot{u}_i = \sum_{j=1}^n F_i(X_e) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} u_j$ où les dérivées partielles sont calculées au point d'équilibre.

En utilisant les relations définissant le point d'équilibre, c'est-à-dire $F_i(X_e) = 0$ pour $i \in [1, n]$, après substitution des coordonnées locales dans les équations (2.30) et en négligeant les termes d'ordre supérieurs à 1 dans le développement de Taylor, nous obtenons le système linéarisé suivant :

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} u_j = A u_i, \quad (2.31)$$

avec

$$A = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X_e} \quad (2.32)$$

La matrice des dérivées partielles que nous notons $A = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right]_{i \in [1, n], j \in [1, n]}$ s'appelle la matrice Jacobienne. En écologie, cette matrice est souvent appelée matrice de communauté lorsque les variables x_i désignent des abondances de populations.

Les solutions de ce système linéaire dépendent des valeurs propres de cette matrice A , solutions de l'équation caractéristique

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (2.33)$$

qui est un polynôme de degré n . Rappelons qu'un polynôme de degré n à coefficients réels admet au plus n racines réelles et que si λ est une racine complexe alors son complexe conjugué $\bar{\lambda}$ est également une racine. La condition de stabilité du point d'équilibre porte sur les n valeurs propres λ_k de cette matrice Jacobienne

Théorème 1 :

- $X_e(x_{1e}, x_{2e}, \dots, x_{ne})$ est asymptotiquement stable $\leftrightarrow \forall k, \Re(\lambda_k) < 0$, où $\Re(\lambda_k)$ est la partie réelle de la valeur propre λ_k . Pour avoir la stabilité asymptotique, il faut et il suffit que toutes les valeurs propres de la matrice du système linéarisé soient de partie réelle négative.
- $X_e(x_{1e}, x_{2e}, \dots, x_{ne})$ est un point d'équilibre instable si au moins une des valeurs propre de la matrice A est à partie réelle strictement positive.

2.2.4 Critères de Routh-Hurwitz

La condition de stabilité d'un point d'équilibre nécessite de vérifier que toutes les valeurs propres de la matrice jacobéenne ont des parties réelles négatives. En pratique, il n'est pas toujours facile de calculer les valeurs propres de la matrice du système linéarisé. Cependant, il existe des critères permettant de conclure sur la stabilité locale d'un point d'équilibre sans calculer explicitement les valeurs propres. Ces critères importants qui donnent des conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les racines du polynôme caractéristique (avec des coefficients réels) se trouvent dans la moitié gauche du plan complexe sont appelés critères de Routh-Hurwitz. Lorsque les critères de Routh-Hurwitz énoncés dans le théorème suivant sont satisfaits, toute solution de l'équation différentielle converge vers le point fixe étudié.

Théorème 2 : Soit l'équation caractéristique obtenue à partir de la matrice jacobéenne d'un système donné autour d'un de ses points fixes :

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (2.34)$$

où les λ_i sont les solutions de l'équation (2.38) représentent les valeurs propres de la matrice analytique A et les coefficients a_i , $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ sont des réelles. Le théorème de stabilité de Routh-Hurwitz se base d'une part sur le signe de a_i , $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ et, d'autre part, sur le signe d'un certain nombre de déterminants définis comme suite :

$$H_1 = a_1, H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, H_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

. Où $a_k = 0$ si $k > n$

$$\mathbf{L'équilibre est asymptotiquement stable} \Leftrightarrow \forall k \in [1, n], H_k > 0.$$

Il faut donc vérifier que les n déterminants H_k sont strictement positifs. Il s'agit de conditions nécessaires et suffisantes de stabilité asymptotique locale, c'est-à-dire que les valeurs propres de la matrice Jacobienne calculée au point d'équilibre ont toutes une partie réelle négative.

En trois dimensions, l'équation caractéristique s'écrit sous la forme suivante :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

, et les conditions de stabilité obtenues en appliquant les critères de Routh-Hurwitz sont :

$$\begin{cases} H_1 > 0, \\ H_2 > 0 \\ H_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0, \\ a_1a_2 - a_3 > 0, \\ a_3 > 0. \end{cases}$$

2.3 Méthodes de simulation numérique

La simulation numérique ou informatique désigne l'exécution d'un programme informatique sur un ordinateur ou réseau en vue de simuler un phénomène physique réel et complexe. Elle est rapidement devenue incontournable non seulement pour modéliser des systèmes naturels en physique, chimie et biologie, mais également pour des systèmes humains en économie et sciences sociales. En ce qui concerne les sciences physiques, on y fait souvent face à des problèmes qui, quand bien même ils ont une expression analytique, demeurent dans la plupart des cas très difficiles à exploiter et, nécessitent ainsi le recours de l'outil informatique. Dans cette section, nous énumérons quelques méthodes et techniques numériques généralement utilisées pour résoudre non seulement les équations algébriques non linéaires, les équations différentielles, mais aussi pour exploiter les caractéristiques de la réponse d'un système.

2.3.1 La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) est une technique d'approximation des solutions des équations différentielles ordinaires (EDO). Elle a été élaborée pour la première fois par le mathématicien C. Runge en 1894 et améliorée par M. W. Kunta en 1901. Cette méthode s'appuie sur les techniques numériques d'intégration des trapèzes et de Simpson. Elles sont très stables et faciles à implémenter. Considérons donc le système de 2 équations différentielles ordinaire du premier ordre suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(t, x, y), \\ \dot{y} &= f_2(t, x, y), \quad \text{avec } x(0) = x_0, y(0) = y_0\end{aligned}\tag{2.35}$$

La méthode de RK4 permet de trouver les valeurs des variables x et y à des intervalles de temps successifs $\Delta t = h$. Le schéma itératif de la méthode de RK4 est donné par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + \frac{L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4}{6}, \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4}{6}, \quad \text{ou } i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots\end{aligned}\tag{2.36}$$

Avec :

$$\begin{aligned}L_1 &= hf_1(t_i, x_i, y_i); L_2 = hf_1\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{L_1}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right), \\ K_1 &= hf_2(t_i, x_i, y_i); K_2 = hf_2\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{L_1}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right), \\ Q_1 &= hf_3(t_i, x_i, y_i); Q_2 = hf_3\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{L_1}{2}, y_i + \frac{K_1}{2}\right), \\ L_3 &= hf_1\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{L_2}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right); L_4 = hf_1\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + L_3, y_i + K_3\right), \\ K_3 &= hf_2\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{L_2}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right); K_4 = hf_2\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + L_3, y_i + K_3\right), \\ Q_3 &= hf_3\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{L_2}{2}, y_i + \frac{K_2}{2}\right); Q_4 = hf_3\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + L_3, y_i + K_3\right).\end{aligned}$$

2.3.2 Outils de calcul pour la caractérisation des états dynamiques des modèles neuronaux

2.2.2.1 Séquences temporelles

En neurodynamique, les séquences temporelles sont un des outils essentiels pour identifier l'activité électrique du neurone. Elles sont également appelées séries temporelles ou histoires temporelles. Cet important outil offre la possibilité de visualiser les différents comportements neuronaux à travers l'évolution temporelle du potentiel de membrane. En effet, lorsque les séquences temporelles décrivent une courbe qui n'oscille pas dans le temps, on dit que le neurone est à l'état de repos (Resting en anglais). Lorsque l'évolution temporelle de cette membrane est plutôt décrite par une alternance entre un état de repos et des impulsions régulières ou irrégulières non répétitives, on parle d'état de pic (Spiking en anglais). En revanche, lorsque la série temporelle décrit plutôt une alternance entre l'état de repos et une répétition de l'état de pic, on parle d'état d'éclatement (Bursting). Cet éclatement peut donc être régulier (on parle dans ce cas d'éclatement périodique) ou irrégulier (on parle dans ce cas d'éclatement chaotique ou d'éclatement quasi-périodique). De plus, cet outil offre également la possibilité de pouvoir observer les différentes transitions qui se produisent généralement dans la cellule lorsqu'elle subit des perturbations de toutes sortes. A noter que pour identifier chacune de ces activités de tir, il faudra éliminer la période transitoire [168].

2.3.2.2 Plan de phase

L'espace des phases représente l'image globale des trajectoires en portrait de phase pour une valeur spécifique du paramètre de bifurcation. En d'autres termes, il s'agit d'un espace mathématique ayant des directions de coordonnées orthogonales qui représentent chacune des variables nécessaires pour spécifier l'état instantané du système [169]. Les espaces de phase sont un outil important pour l'étude des systèmes dynamiques [170]. Ils révèlent des informations telles que la présence d'un attracteur, d'un répulseur ou d'un cycle limite pour une valeur de paramètre donnée. Ainsi, un système stationnaire ou d'équilibre est représenté par un point fixe dans le plan de phase. Un système périodique est représenté par des trajectoires irrégulières dans le plan de phase appelé cycle limite. Un comportement chaotique est caractérisé par des trajectoires irrégulières dans le plan de phase, appelé attracteur étranger. La principale limite de cet outil est qu'il est très difficile de distinguer la quasi périodicité et tir d'éclatement chaotique. Dans cette thèse, pour représenter les espaces de phase ou les portraits de phase, nous utiliserons les variables d'état du système neuronal.

2.3.2.3 Diagramme de bifurcation

Dans l'étude des systèmes dynamiques non linéaires, le diagramme de bifurcation montre les comportements asymptotiquement (orbites périodiques à points fixes, ou attracteurs chaotiques) d'un système en fonction du paramètre de contrôle du système. En d'autres termes, le diagramme de bifurcation fournit des modèles de transitions et d'instabilités lorsque certains paramètres de contrôle sont variés [171]. Le mot bifurcation signifie une fois de plus un changement qualitatif soudain dans la nature d'une solution lorsque le paramètre de bifurcation atteint une valeur critique. Il est obtenu en utilisant l'algorithme

de Runge-Kutta avec la particularité que l'on calcule la vitesse $\dot{x}(t)$ de la variable scalaire unique $x(t)$ à un instant t puis on calcule la même vitesse $\dot{x}(t + \Delta t)$ à un moment $t + \Delta t$. Un test est alors effectué selon que l'on veut représenter les maxima locaux (dans ce cas il faut vérifier la condition $\dot{x}(t) > 0$ et $\dot{x}(t + \Delta t) < 0$), les minima locaux (dans ce cas la condition $\dot{x}(t) < 0$ et $\dot{x}(t + \Delta t) > 0$ doit être vérifiée) ou les moyennes locales (dans ce cas la condition $\dot{x}(t) \times \dot{x}(t + \Delta t) < 0$ doit être vérifié). Pour chacun de ces cas, nous représentons sur l'axe des ordonnées du diagramme le point de coordonnées $\frac{x(t)+x(t+\Delta t)}{2}$ et sur l'axe des abscisses la valeur correspondante du paramètre de contrôle. A noter qu'un de ces diagrammes de bifurcation (maxima locaux, minima locaux ou moyennes locales) est suffisant pour avoir l'information souhaitée sur la dynamique du système car ils ont tous les mêmes caractéristiques.

2.3.2.4 Exposants Lyapunov

L'exposant de Lyapunov (EL) mesure la sensibilité dynamique d'un système suite à une petite variation de ses conditions initiales. C'est l'un des indicateurs par excellence de la présence du chaos dans un système. En effet, si d_i représente la distance entre le i^{eme} point de la trajectoire perturbée au temps t_i par rapport à la trajectoire de référence, et d_{0i} cette distance au temps t_{0i} , alors l'exposant maximum de Lyapunov sera défini par [172, 173] :

$$\lambda_{max} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i - t_{0i})} \ln \left| \frac{d_i}{d_{0i}} \right|. \quad (2.37)$$

Ainsi, un système dynamique sera qualifié de quasi-périodique, de périodique ou de chaotique lorsque λ_{max} sera nul, négatif ou positif.

2.3.2.5 Exposants de Lyapunov à deux paramètres

Lorsqu'il y a deux paramètres ou plus dans le système, il est plus pratique et instructif de tracer les régions dans lesquelles les exposants de Lyapunov (EL) sont positifs, nuls et négatifs dans le plan des deux paramètres. Ces diagrammes seront appelés exposants de Lyapunov à deux paramètres. Ils fourniront une analyse globale du système à l'aide de la construction de diagrammes colorés appropriés en faisant varier simultanément deux paramètres du système avec la couleur comme intensité du EL choisi. Cette technique permet d'avoir une vue un peu générale sur la dynamiques neuronale. Le spectre EL est calculé en utilisant l'algorithme Runge-Kutta du quatrième ordre.

2.4 Méthodes d'analyse des circuits électriques

Il est question dans cette section de présenter les méthodes d'analyse des circuits électriques qui ont permis d'obtenir les équations différentielles matérialisant la dynamique neuronale ainsi que les avantages de la simulation analogique. Cette dernière nous permettra de valider nos simulations numériques, et une confirmation de tous ces résultats sera faite par des études expérimentales.

2.4.1 Lois de Kirchhoff

Les lois de Kirchhoff sont deux égalités qui traitent du courant (loi du courant de Kirchhoff (LCK)) et de la différence de potentiel (loi de tension de Kirchhoff (LVK)) dans le modèle à éléments localisés des circuits électriques. Ils sont cruciaux dans l'analyse de tout circuit localisé [174] et sont énoncés comme suit :

LCK : La somme algébrique des courants dans un réseau de conducteurs se rencontrant en un point est nulle. Ce qui s'écrit mathématiquement comme

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (2.38)$$

où n est le nombre total de branches avec des courants circulant vers ou à partir du nœud.

LVK : La somme algébrique des tensions dans toute boucle fermée est égale à zéro. L'expression mathématique est

$$\sum_{k=1}^n V_k = 0 \quad (2.39)$$

où n est le nombre total de tensions mesurées. Ces lois associées à d'autres analyses de circuits électriques basiques et bien connues (comme la loi d'Ohm) seront utilisées pour écrire un modèle mathématique équivalent décrivant chacun de nos systèmes électroniques.

2.4.2 Implémentation du circuit électronique PSpice

Les ordinateurs sont largement utilisés pour l'analyse et la conception des circuits [174], et plusieurs logiciels sont ainsi fournis pour résoudre des problèmes en simulant le comportement de circuits électriques et électroniques plutôt qu'en résolvant des ensembles d'équations. Le logiciel PSpice est l'un des packages couramment utilisés, car il offre une capacité d'analyse plus complète comme l'analyse transitoire. Nous utiliserons cet outil pour vérifier d'abord l'exactitude de notre modèle mathématique (avec les hypothèses considérées), ensuite que la gamme de leurs paramètres de contrôle. L'implémentation du circuit analogique Pspice se présente comme des préliminaire pour des réalisations expérimentales en laboratoire, parce que la conception de circuits électroniques nécessite des méthodes précises d'évaluation des performances des circuits. En raison de l'énorme complexité des circuits intégrés modernes (par exemple, amplificateur opérationnel, multiplicateur analogique, etc.), l'analyse de circuit assisté par ordinateur est essentielle et peut fournir des informations sur les performances du circuit qu'il est presque impossible d'obtenir avec des mesures de prototypes en laboratoire.

Ps spice (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis)[179] est un outil puissant pour étudier la dynamique non linéaire et le chaos dans les circuits électroniques contenant une variété de composants, tels que, transistors, diodes, résistances, condensateurs, amplificateurs opérationnels, multiplicateur analogique (AD633) et bien d'autre. Il contient des modèles pour les éléments de circuit communs, actifs et passifs, et il est capable de simulant la plupart des circuits électroniques. Nous utilisons dans le cadre de cette thèse ce programme informatique pour simuler la dynamique complexe de nos différents systèmes neuronaux.

2.4.3 Implémentation du circuit à microcontrôleur

Les technologies intégrées dominent actuellement la technologie mondiale. Ils utilisent des logiciels et du matériel informatique sur de petites puces pour des applications spécifiques dans divers domaines, en particulier pour des examens médicaux. Les principaux composants de technologies intégrées sont des microprocesseurs et des microcontrôleurs qui sont des composants intégrés uniques contenant des circuits électroniques spécialisés et des fonctions qui sont principalement applicables à la conception de systèmes biomédicaux et autres. Ils deviennent de plus en plus bon marché, polyvalents, facilement programmables et sont de petite taille. C'est pourquoi ils sont largement utilisés dans plusieurs domaines technologiques. Au cours des six dernières années, il a été démontré que les microcontrôleurs peuvent être utilisés en dynamique non linéaire pour les principales applications du phénomène de chaos : la cryptographie du chaos [175–178]. Ceci est particulièrement intéressant car le simulateur de microcontrôleur est plus fiable et plus robuste que les simulateurs numériques qui ont jusqu'à présent été utilisés pour fournir des régimes dynamiques non linéaires. Par ailleurs, dans le simulateur de microcontrôleur, les bruits produits par les courants parasites sont pris en compte et sont fortement limités pour approximer la réalité. Outre le chaos, les systèmes dynamiques non linéaires présentent divers comportements dynamiques complexes et spéciaux, dont certains sont représentatifs de ce qui se passe dans les systèmes biologiques et chimiques. Nous allons utiliser dans le cadre de cette thèse, le microcontrôleur Arduino à carte Mega pour générer les différentes activités électriques qu'on peut observer dans la dynamique neuronale. Il s'agit ici d'utiliser des circuits à microcontrôleurs pour générer de vrais signaux électriques spéciaux ayant les formes obtenues à partir des simulations numériques des systèmes. C'est une entrée intéressante dans l'étude des systèmes dynamiques non linéaires, en raison de sa simplicité à générer des signaux électriques réels tenant compte du bruit qui ne peuvent être obtenus à partir de la simulation numérique classique (les résultats de la simulation numérique ne peuvent pas être convertis en signaux électriques) ou qui peuvent être obtenus en utilisant des montages expérimentaux coûteux et plus complexes.

La carte Arduino Mega 2650 est une carte électronique open source et facile à utiliser, à faible coût, basée sur le microcontrôleur ATMEGA2650 avec les spécifications suivantes : une prise d'alimentation utilisée pour fournir la tension de service nécessaire, un oscillateur linéaire à quartz 16 MHz utilisé comme oscillateur à cristal, un en-tête ICSP utilisé pour charger les programmes, 54 broches numériques qui peuvent être défini comme entrée ou sortie, 16 entrées analogiques et 14 broches numériques pouvant être utilisées comme sorties PWM, une connexion USB pour la communication avec l'ordinateur via l'environnement de développement intégré (EDI) du logiciel open source Arduino 1.6.9 et un bouton de réinitialisation (voir Figure 2.9). Le langage de programmation utilisé ici dans l'EDI du logiciel Arduino est le **C/Arduino**, qui est très fermé et compatible avec le langage de **programmation C**.

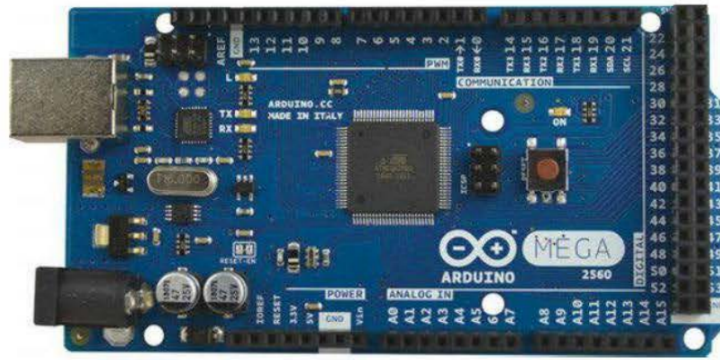


Figure 2.9 – La Carte Arduino Mega 2560.

Le système conçu sera réalisé en utilisant le schéma de la Figure 2.10.

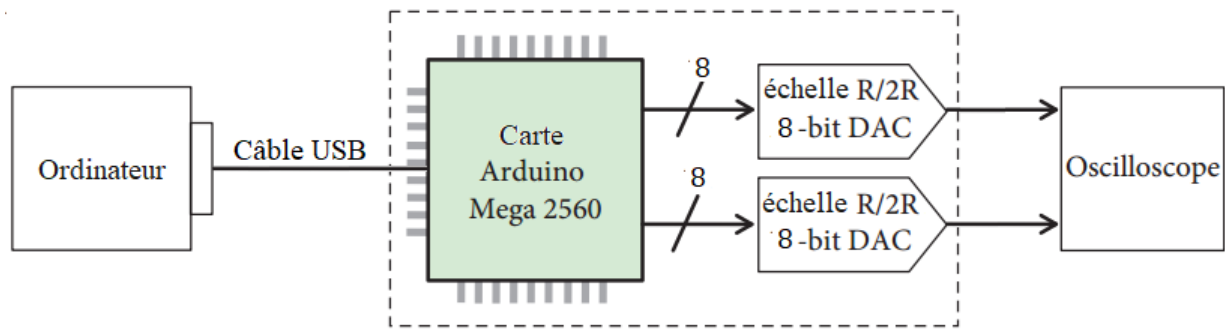


Figure 2.10 – Schéma expérimental de l'implémentation de la dynamique neuronale basé sur une carte à microcontrôleur.

Cette configuration expérimentale se compose d'une plate-forme Arduino Mega 2560 et d'un réseau de résistances en échelle $R-2R$ connectés sur une maquette, qui agissent comme un DAC (convertisseur numérique-analogique) avec des résistances $R = 10k\Omega \mp 5\%$ et $2R = 20k\Omega \pm 5\%$ respectivement. La plate-forme communique avec un ordinateur via une connexion USB. Les sorties du réseau de résistances $R-2R$ sont connectées aux deux canaux X et Y de l'oscilloscope numérique Rigol DS1052E. Ces canaux reçoivent les signaux analogiques après leur conversion via le réseau $R-2R$. Des prises spéciales ont été conçues pour connecter directement les 16 broches des entrées/sorties numériques A_0 à A_7 du port A et B_0 à B_7 du port B au réseau de résistances $R-2R$. Les calculs d'implémentations sont effectués par le microcontrôleur et sont tels que l'amplitude des signaux de sortie peuvent être ajustés dans la plage de tension $0-5V$ et sont envoyés aux ports A et B qui sont connectés aux réseaux $R-2R$. Les réseaux $R-2R$ convertissent à leur tour les signaux numériques en signal analogique ; les transmettent à l'oscilloscope qui les affiche. Dès que les programmes sont chargés, l'ordinateur joue le rôle d'alimentation en fournissant une tension de $5V$ et un courant maximum de $40mA$. Cette configuration pratique sera examinée dans le chapitre §3 pour confirmer que tous les phénomènes observés ne sont pas des artefacts et peut-être utilisé pour caractériser les propriétés dynamique des systèmes neurologiques en temps réel.

Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif de décrire avec précision les différents outils théoriques, numériques et expérimentaux qui seront utilisés dans le chapitre suivant. Nous avons commencé par décrire explicitement les modèles de neurones qui font l'objet de cette thèse ainsi que leurs circuits électroniques équivalents. Enfin, nous avons présenté les méthodes analytiques, puis les méthodes numériques. Ensuite, nous avons présenté les outils informatiques de caractérisation des activités électriques des modèles de neurones et les méthodes d'analyse des circuits de ces modèles.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

Introduction

Nous présentons et discutons dans ce chapitre les résultats de nos travaux de thèse liés à l'étude de la transmission d'influx nerveux à partir des systèmes de couplages thermo-photosensible décrits au chapitre §2. Afin de répondre à la problématique posée dans notre thèse, nous utilisons les différentes méthodes analytiques, numériques et électroniques présentées au chapitre §2. Pour mener à bien ce travail, nous organisons ce chapitre comme suit : Dans la première section, nous analysons les impacts de la lumière et de la température sur la dynamique d'un neurone. Ces études sont essentiellement basées sur l'analyse des propriétés de stabilité et des propriétés dynamiques du modèle neuronal. La deuxième section est consacrée principalement à l'étude des effets synaptiques sur la dynamiques des neurones thermo-photosensible couplés. Dans cette section, nous examinerons deux configurations neuronale. Premièrement, nous couplons deux neurones thermo-photosensibles à travers une synapse à Jonction Josephson et en suite nous couplons deux neurones hybrides via une synapse à memristors. Des investigations sur ces modèles neuronaux, nous permettrons de mettre en évidence ces propriétés dynamiques et une approche de synchronisation.

3.1 Effets de la lumière et de la température sur la dynamique d'un neurone

Dans cette section, nous nous concentrerons principalement sur le nouveau modèle de neurone FHN thermosensible excitée de façon simultanée par un phototube et une thermistance comme décrit au système 2.8 du chapitre §2. Cette configuration nous permettra d'analyser les impacts de la lumière et de la température sur l'activité électrique du neurone thermosensible. A cet effet, nous étudierons les propriétés de base, y compris le point d'équilibre et sa stabilité, les diagrammes de bifurcation, le spectre de Lyapunov, les séries temporelles du potentiel de membrane ainsi que les portraits de phase.

3.1.1 Analyse d'équilibre biologique et stabilité

Il est possible d'observer le comportement qualitatif de l'évolution du circuit neuronal en faisant une analyse sur l'équilibre biologique. En considérant le système 2.8, le point d'équilibre en courant alternatif

(AC) est obtenu en résolvant le système d'équation $\frac{dx}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} = 0$, soit :

$$\begin{cases} x \left(1 - \varepsilon_0 e^{-\frac{1}{T'}} - \varepsilon_P \right) - y - \frac{1}{3}x^3 + A_P \cos(\omega_P t) + A_0 e^{-\frac{1}{T'}} \cos(\omega'_T t) = 0 \\ c \left(x - b_0 e^{\frac{1}{T'}} y + a \right) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

En se servant de la section 2.2.1 et des travaux de [45, 197], on obtient le point d'équilibre AC, $S_e = \left(\chi, \frac{(a+\chi)e^{-\frac{1}{T'}}}{b_0} \right)$ dans lequel χ peut être obtenu en résolvant numériquement l'équation 3.2 par la méthode de Cardan définie dans la section 2.2.2.

$$P(\chi) = \chi^3 + p\chi + q \quad (3.2)$$

Où :

$$p = 3 \left(\left(\varepsilon_0 + \frac{1}{b_0} \right) e^{-\frac{1}{T'}} + \varepsilon_P - 1 \right) \quad \text{et} \quad q = 3 \left(\frac{ae^{-\frac{1}{T'}}}{b_0} - A_P \cos(\omega_P t) - A_0 e^{-\frac{1}{T'}} \cos(\omega'_T t) \right)$$

Ainsi, Les racines de l'équation 3.2 sont définies comme suit :

$$\chi_1 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \quad (3.3)$$

$$\chi_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \quad (3.4)$$

$$\chi_3 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \quad (3.5)$$

avec

$$\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3$$

Selon le discriminant de Cardan, lorsque $\Delta > 0$, il existe une racine réelle et deux racines complexes. Puisque le point d'équilibre ne peut pas être un nombre complexe, un point d'équilibre est obtenu à partir de l'équation 3.3. Cependant, lorsque $\Delta = 0$, les deux racines complexes (équations 3.3 et 3.5) évoluent vers une racine réelle, ce qui permet d'obtenir à partir de l'équation 3.2 deux racines réelles. Par conséquent, le circuit neuronal admet deux points d'équilibre. De même, lorsque $\Delta < 0$, il y a trois racines réelles dans l'équation 3.2, qui montre que le circuit neuronal a trois points d'équilibre et peut être obtenu à partir des équations 3.3, 3.4 et 3.5.

Dans le cas du circuit neuronal présenté à la Figure 2.1, lorsque la température T' varie de 0,5 à 5, le discriminant de Cardan Δ et le nombre de points d'équilibre évoluant avec le temps sont présentés sur la Figure 3.1. On peut observer sur la Figure 3.1a que Δ est une fonction périodique du temps. Le signe du discriminant de Cardan dépend alors de la valeur de la température T' et varie avec le temps. Pour $T' = 0.5$, $\Delta > 0$ ou $\Delta < 0$ ainsi, le nombre de points d'équilibre évolue entre trois, deux et un et pour $T' = 5$, $\Delta > 0$ ce qui conduit à un point d'équilibre, comme le montre la Figure 3.1b.

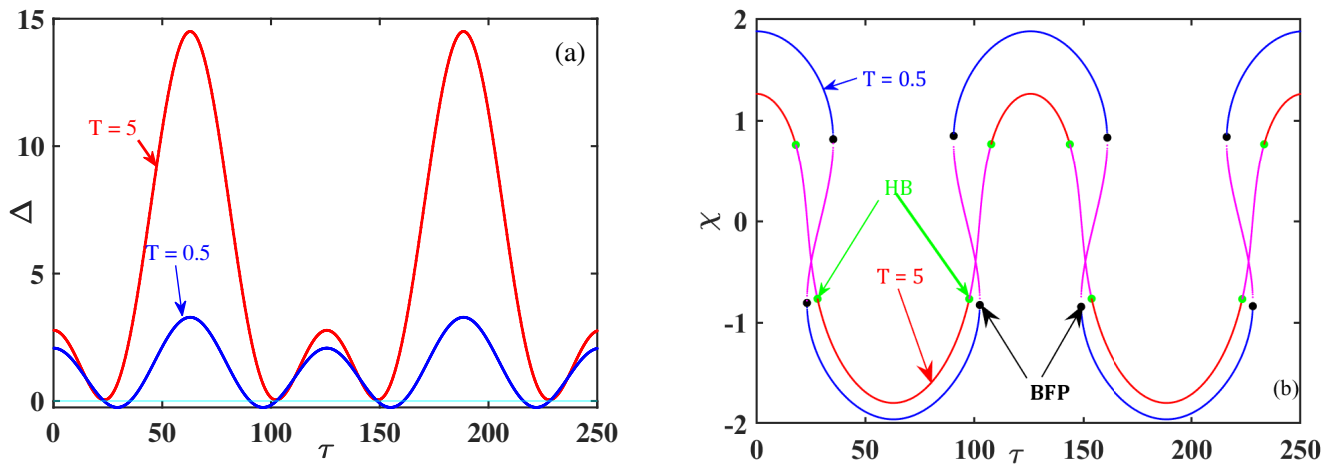


Figure 3.1 – Le discriminant de Cardan et les points d'équilibre varient avec l'évolution du temps sous différentes valeurs de température T' . (a) Discriminant de Cardan, (b) nombre et valeurs des points d'équilibre. Considérons : $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \varepsilon_P = \varepsilon_0 = 0.175, \omega_T' = \omega_P = 0.05$ and $A_0 = A_P = 1$.

Afin de déterminer et analyser la stabilité des points d'équilibres, et les bifurcations locales susceptibles de se produire dans le système (2.11) en changeant les paramètres, nous linéarisons le système (2.11) autour du point équilibre (S_e), et nous deduisons la matrice Jacobienne 2×2 suivante :

$$J_{S_e} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_0 e^{-\frac{1}{T'}} - \varepsilon_P - \chi^2 & -1 \\ c & -cb_0 e^{\frac{1}{T'}} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Ainsi, nous pouvons en déduire de l'équation 3.7 deux valeurs propres, ceci en résolvant le polynôme caractéristique d'équation $P(\lambda) = \det(J_{S_e} - \lambda I)$ avec I une matrice identité.

$$P(\lambda) = \lambda^2 + m_1 \lambda + m_2 \quad (3.7)$$

Où :

$$m_1 = \left(cb_0 e^{\frac{1}{T'}} - 1 + \varepsilon_0 e^{-\frac{1}{T'}} + \varepsilon_P + \chi^2 \right) \quad \text{et} \quad m_2 = cb_0 \left(\varepsilon_0 + (\chi^2 + \varepsilon_P - 1) e^{\frac{1}{T'}} \right) + c$$

En fonction de ces valeurs propres au point d'équilibre AC, les stabilités du système sont déterminées par le signe du discriminant Δ .

- $\Delta > 0$, il existe deux racines réelles négatives au seul point d'équilibre AC.
- $\Delta = 0$, il y a deux racines réelles négatives pour un point d'équilibre, une racine nulle et une racine réelle négative pour l'autre point d'équilibre.
- $\Delta < 0$, il existe soit deux paires de racines complexes conjuguées à parties réelles négatives et une paire de racines réelles de signes opposés, soit une paire de racines réelles de signes négatifs, une paire de racines réelles de signes opposés et une paire de racines complexes conjuguées à des parties réelles négatives pour les trois points d'équilibre.

Nous pouvons conclure de ce qui est dit précédemment que lorsque $\Delta > 0$, on a un nœud stable ou un foyer stable ou un point critique qui peut conduit à une bifurcation de Hopf (HB), pour $\Delta = 0$ on a

un nœud stable et un point de bifurcation de pli (FBP) et pour $\Delta < 0$, on obtient deux foyers stables et un nœud instable ou un foyer stable, un nœud stable et un nœud instable.

Dans un cas particulier, considérons que le circuit neuronal n'est pas excité, c'est-à-dire $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \varepsilon_P = \varepsilon_0 = 0.175$, $\omega_P = \omega'_T = 0$ et $A_0 = A_P = 0$. Le point d'équilibre AC devient un point d'équilibre DC qui n'évolue plus dans le temps [45, 198]. Selon les valeurs du paramètre T' , la stabilité de chaque point d'équilibre DC est obtenue en résolvant le polynôme 3.7. Les valeurs propres qui caractérisent la stabilité de ces points sont calculées et regroupées dans le Tableau 3.1 suivant :

Tableau 3.1 – Points d'équilibres DC, valeurs propres et la stabilité.

Values T'	Points d'équilibres S_e	Valeurs propres λ_1 and λ_2	Stabilité
0.5	$(-1.4626, -0.1290)$	$\lambda_1 = -0.7659; \lambda_2 = -1.1632$	Nœud stable
	$(1.2716, 0.3335)$	$\lambda_{1,2} = -0.7034 \pm 0.2956j$	Foyer stable
	$(0.1910, 0.1507)$	$\lambda_1 = 0.6865, \lambda_2 = -0.5128$	Nœud- instable
1	$(-1.2858, -0.2694)$	$\lambda_1 = -0.4368, \lambda_2 = -0.6734$	Nœud- stable
2	$(-1.1340, -0.3291)$	$\lambda_{1,2} = -0.3495 \pm 0.2294j$	Foyer stable
3	$(-1.0766, -0.3373)$	$\lambda_{1,2} = -0.2855 \pm 0.2641j$	Foyer stable
4	$(-1.0475, -0.3383)$	$\lambda_{1,2} = -0.2556 \pm 0.2768j$	Foyer stable
5	$(-1.0301, -0.3378)$	$\lambda_{1,2} = -0.2385 \pm 0.2831j$	Foyer stable

En observant le Tableau 3.1, nous constatons que la stabilité du circuit neuronal est fonction du paramètre lié à la température T' . De ce fait, il est important d'étudier l'effet de la température sur la stabilité du point d'équilibre, ce qui nous permettra de mettre en exergue et d'expliquer les différents phénomènes de bifurcation locaux. Ainsi, la Figure 3.2 donne une représentation des solutions des valeurs propres dans le plan complexe pour les valeurs de T' variant de 1 à 10. La présence symétrique de paires complexes de valeurs propres conjuguées le long de l'axe des réels montre une possibilité d'existence d'une bifurcation de Hopf [199, 200].

3.1.2 Propriétés dynamiques du système neuronal

Pour mettre en évidence les différents phénomènes importants qui peuvent agir dans le modèle de neurone thermo-photosensible sous les effets simultanés de la lumière et de la température, nous résolvons numériquement le système (2.8) non linéaire à l'aide de l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de temps $h = 0,001$. Nous posons comme valeurs initiales $(x_0, y_0) = (0.2, 0.1)$. Les séries temporelles échantillonnées et les attracteurs sont générés à partie du logiciel Matlab version 2018. Pour simplifier les études numériques, nous remplaçons le temps sans dimension t par τ . Comme cela est bien connu, l'excitabilité du neurone peut être modifiée par un courant de forçage externe. Par conséquent, nous considérons que le phototube et les thermistances sont définis comme indiqué dans la Section 2.1.1. Notons également que tous les calculs sont effectués à l'aide des paramètres variables et de constantes en mode étendu.

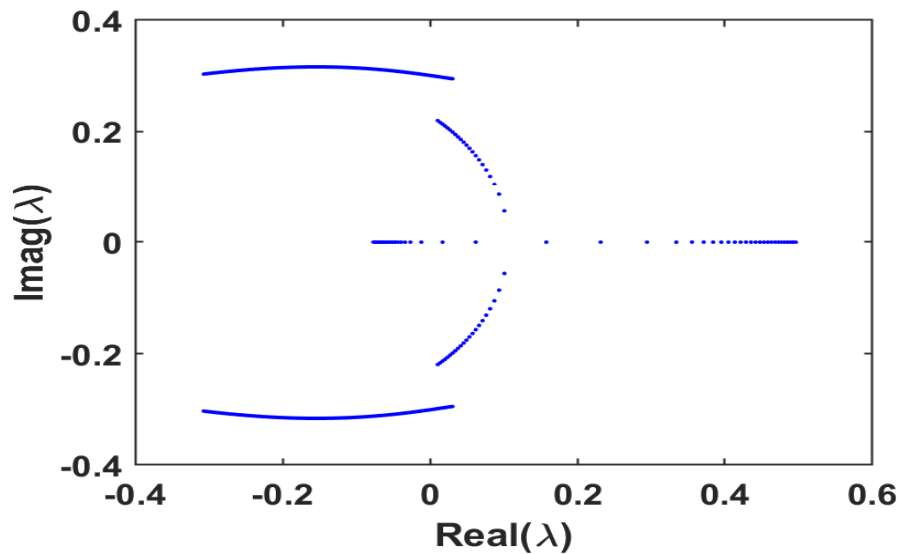


Figure 3.2 – Représentation des solutions des valeurs propres du polynôme caractéristique 3.7 dans le plan complexe $(\text{Re}(\lambda), \text{Im}(\lambda))$ pour $1 \leq T' \leq 10$.

3.1.2.1 Différentes activités électriques neuronale induit simultanément par la lumière et la température

Le diagramme de bifurcation ainsi que l'exposant de Lyapunov sont des indicateurs permettant de mieux comprendre et apprécier les comportements chaotiques et périodiques d'un système dynamique (orbites périodiques à points fixes, ou attracteurs chaotiques). Ceux-ci sont obtenus lorsque certains paramètres de contrôle du système varient [201]. Pour mieux comprendre la dynamique complexe du modèle, nous avons tracé l'évolution temporelle des variables d'état, ainsi que quelques portraits de phase.

Sur la Figure 3.3, nous présentons la bifurcation et l'exposant maximum de Lyapunov par rapport au paramètre décrivant la température captée par le neurone lorsqu'il est excité simultanément par un phototube et une thermistance. On considère que T' varie dans l'intervalle $[0.3, 10]$ et les valeurs des autres paramètres sont fixées comme suit : $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \varepsilon_P = \varepsilon_0 = 0.175, \omega'_T = \omega_P = 0.7, A_0 = 0.5$ et $A_P = 0.01$. Le diagramme de bifurcation (Figure 3.3a) est obtenu en considérant les maxima du potentiel de membrane $x(t)$ et le graphique équivalent de l'exposant de Lyapunov est présenté (Figure 3.3b).

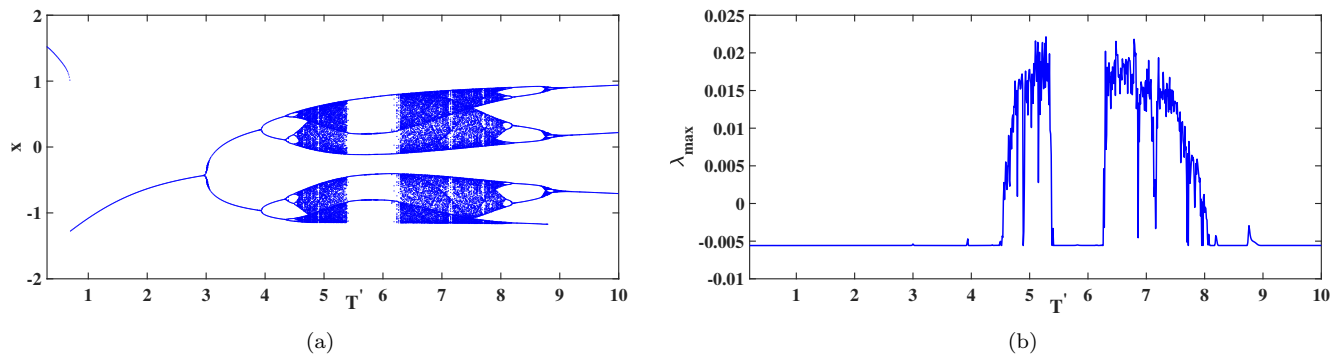


Figure 3.3 – Diagramme de bifurcation montrant la coordonnée du potentiel de membrane $x(t)$ et le graphique correspondant de l'exposant de Lyapunov maximum en fonction de T' . Les valeurs des autres paramètres sont définies dans le texte.

Notons que si $\lambda_{\max} < 0$ le système n'oscille pas, si $\lambda_{\max} = 0$, il évolue vers un état périodique et lorsque $\lambda_{\max} > 0$, l'état chaotique est observé. En regardant de près l'évolution des valeurs de bifurcation et de λ_{\max} , on peut identifier différentes transitions vers l'état chaotique comme le doublement de période ou les scénarios de crise [202]. Pour une valeur de $T' = 5$, l'exposant de Lyapunov maximal correspondant est $\lambda_{\max} = 0.0178$. Vu qu'il est positif, on peut conclure qu'il y a un comportement chaotique dans ce modèle et bien d'autres phénomènes dynamiques très riches. Pour illustrer ce qui est dit précédemment, nous présentons sur les Figures 3.4a et 3.3b respectivement la série temporelle du potentiel de membrane et le portrait de phase dans le plan $(y-x)$, d'un comportement chaotique du modèle neuronal sous l'effet simultané de la lumière et de la température.

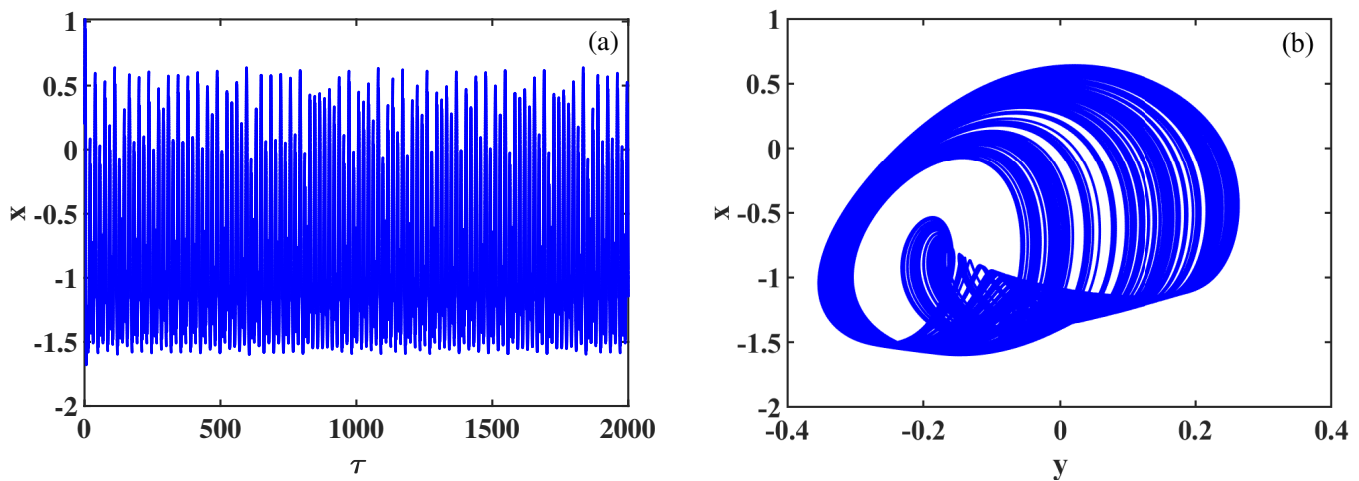


Figure 3.4 – Simulation numérique de la série temporelle (a) et son attracteur dans le plan $(y-x)$ (b), illustrant la complexité du système pour $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5, T' = 5, A_P = 0.01, \omega'_T = 0.7$ et $\omega_P = 0.7$.

Notons que la dynamique du nouveau modèle neuronal dépend fortement de la sélection des paramètres intrinsèques. Afin de confirmer que ce modèle peut présenter la dynamique essentielle du comportement neurologique, nous présentons sur la Figure 3.5 les diagrammes de bifurcations des paramètres $(\omega_P, A_P, \omega'_T)$, les diagrammes de bifurcation à deux paramètres dans les espaces (T', A_P) (voir la Figure 3.6a) et (ω_P, A_P) (voir la Figure 3.6b) ou les régimes irréguliers (chaotiques) du neurone sont matérialisés

par la couleur bleue et les régimes réguliers (périodiques) représentés par la couleur noire puis les séries temporelles sur la Figure 3.7.

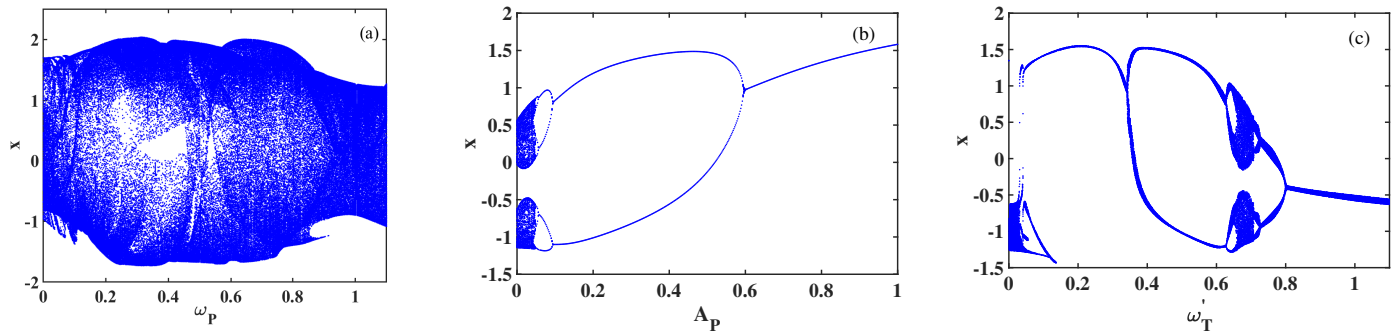


Figure 3.5 – Diagrammes de bifurcations calculés en modifiant les paramètres de bifurcation (ω_P , A_P , ω_T) à $a = 0.7$, $b_0 = 0.8$, $c = 0.1$, $\epsilon_P = 0.175$, $\epsilon_0 = 0.175$, $A_0 = 0.5$. Pour a) $T' = 5$, $A_P = 0.01$, $\omega_T' = 0.7$; b) $T' = 5$, $\omega_P = 0.7$, $\omega_T' = 0.7$; et c) $T' = 5$, $A_P = 0.01$, $\omega_P = 0.7$.

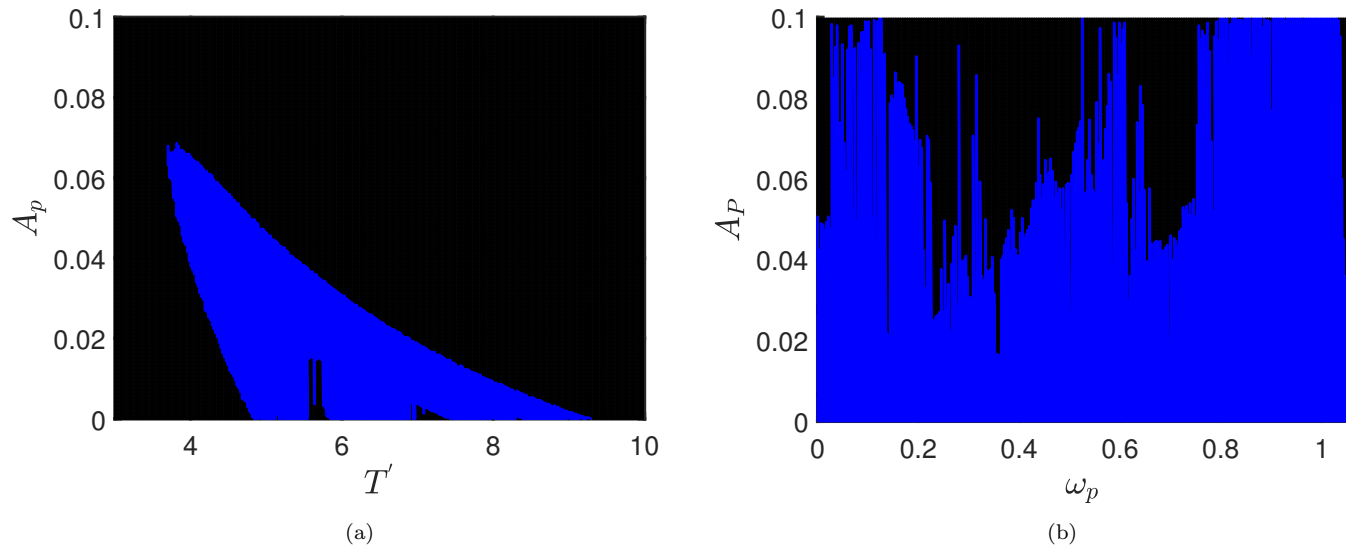


Figure 3.6 – Diagramme de bifurcation à deux paramètres, montrant les comportements présentés par le potentiel membranaire du neurone dans les espaces (T', A_P) (a) et (ω_P, A_P) (b) à $a = 0.7$, $b_0 = 0.8$, $c = 0.1$, $\epsilon_P = 0.175$, $\epsilon_0 = 0.175$, $A_0 = 0.5$, $\omega_T' = 0.7$. Pour a) $\omega_P = 0.7$ et b) $T' = 5$. Sur la base de ces diagrammes à deux paramètres, le comportement irrégulier (chaotique) est associé à la couleur bleue tandis que le comportement régulier (périodique) est associé à la couleur noire.

Sur la Figure 3.7, on peut voir que le réglage approprié en paramètres de bifurcations, permet d'avoir des comportements passionnants tels que l'état de repos (Figure 3.7a), l'état de pic (Figure 3.7b) et l'état d'eclatement (Figure 3.7c). La Figure 3.7d présente le portrait de phase dans le plan $(y - x)$ de la série temporelle de la Figure 3.7c. Aux vues de ces résultats, nous pouvons approuver que ce modèle peut fonctionner efficacement comme un neurone biologique.

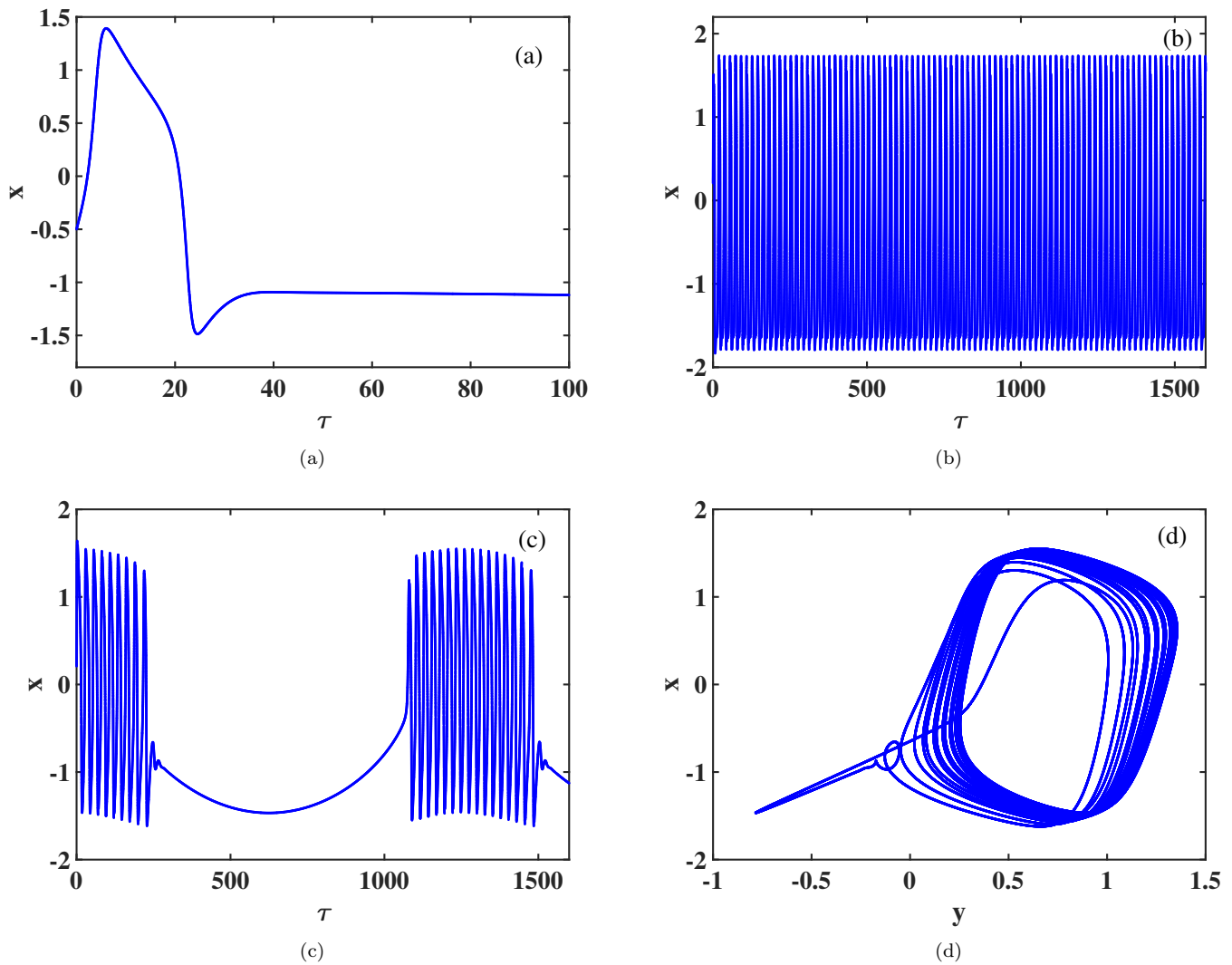


Figure 3.7 – Simulation numérique de la série temporelle du potentiel de membrane dans le neurone sous différents paramètres de bifurcation à $a = 0,7, b_0 = 0,8, c = 0,1, \epsilon_P = 0,175, \epsilon_0 = 0,175, A_0 = 0,5$. Pour Resting **(a)** $T' = 1, A_P = 0,2, \omega_P = 0,001, \omega_T' = 0,001$; Spiking **(b)** $T' = 5, A_P = 0,5, \omega_P = 0,35, \omega_T' = 0,7$; Bursting **(c)** $T' = 5, A_P = 0,5, \omega_P = 0,7, \omega_T' = 0,7$ et Attracteur illustrant la complexité du système **(d)** $T' = 5, A_P = 0,5, \omega_P = 0,7, \omega_T' = 0,7$.

3.1.2.2 Comportement intermittent

Pour mettre en évidence les différents phénomènes complexes des neurones, nous nous proposons d'effectuer une analyse sur le paramètre de contrôle b_0 . Ainsi, le diagramme de bifurcation selon le paramètre b_0 est présenté sur la Figure 3.8a avec $b_0 \in [0,44, 1]$. Cette figure nous montre qu'il existe une certaine valeur de b_0 où l'on observe un changement brutal du régime neurologique aussi appelé crise [202–204] et même des bifurcations telles que doublement de période et nœud en selle. Ces phénomènes complexes tels que la cascade de doublement de période (PD), le doublement de période inverse (RPD), la crise intérieure et extérieure (IC et EC) sont présentés dans cette figure.

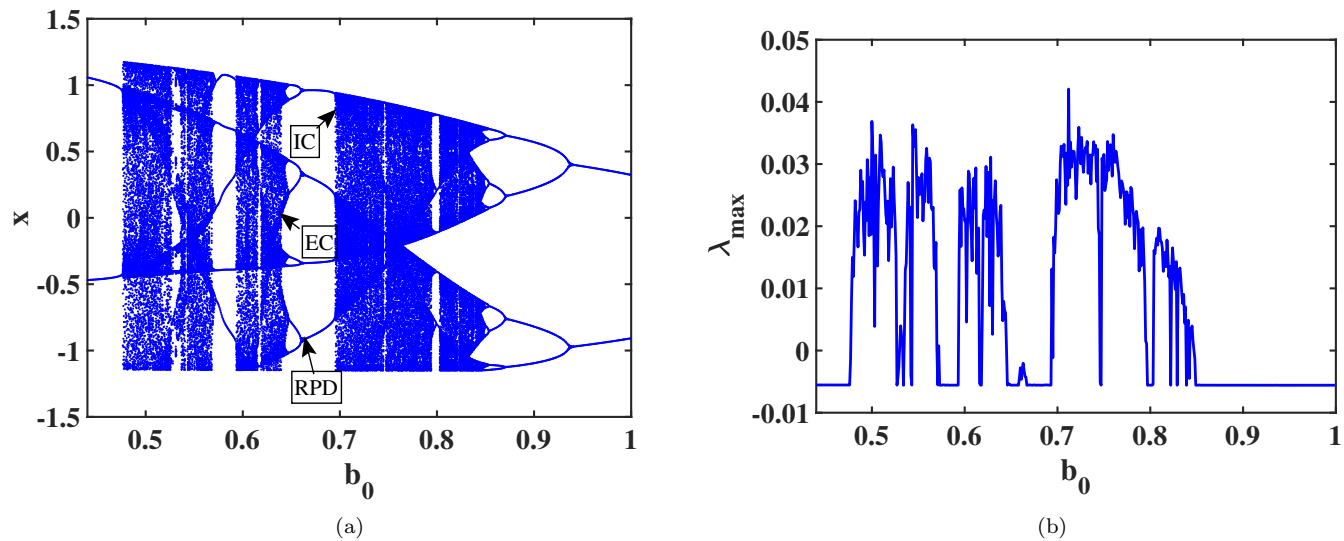


Figure 3.8 – Diagramme de bifurcation montrant la coordonnée du potentiel de membrane $x(t)$ et le graphique correspondant de l'exposant maximal de Lyapunov en fonction de b_0 , montrant le doublement de période inverse (RPD), la crise extérieure (EC) et la crise intérieure (IC) avec $T' = 5$, $a = 0.7$, $c = 0.1$, $\epsilon_P = 0.175$, $\epsilon_0 = 0.175$, $A_0 = 0.5$, $A_P = 0.01$, $\omega'_T = 0.7$, $\omega_P = 0.7$.

Sur ce diagramme, nous retrouvons des zones où le mouvement chaotique est rapidement détruit lorsque le paramètre de contrôle passe par une valeur appelée valeur critique de crise. Ce type de phénomène est appelé crise extérieure ou catastrophe de ciel bleu comme indiqué dans les référence [202–204]. De plus, il existe d'autres domaines du paramètre de contrôle où la crise détruit plutôt que de créer un attracteur chaotique. On assiste à une augmentation brutale de l'attracteur chaotique, car le paramètre mentionné ci-dessus varie en fonction de sa valeur critique. Ces phénomènes sont connus sous le nom de comportements intermittents. Ici, l'attracteur chaotique entre en collision avec des orbites stables et instables dans leurs bassins d'attraction. Dès lors, il apparaît que la trajectoire se déplace sur une orbite périodique pendant un intervalle de temps significatif. Lorsque la trajectoire s'échappe de cette orbite périodique, elle évolue sur l'attracteur chaotique et une explosion chaotique est observée. Le comportement intermittent est caractérisé par des phases dites laminaires, pendant lesquelles le comportement est quasi périodique pendant un temps défini. Par exemple, la Figure 3.9 illustre les comportements intermittents provoqué par la variation de la température à partir des séries chronologiques. Immédiatement après la crise, l'orbite traverse une bande de période-4 comme le montre la Figure 3.9a. Pour des valeurs de b_0 supérieures à 0,6945, on observe que les fluctuations sont apparemment périodiques pendant de longues périodes de temps, mais ce comportement régulier semble être brusquement perturbé par une poussée chaotique. Cette poussée a une durée définie, et lorsqu'elle disparaît, le système revient à un comportement périodique comme le montrent les Figures 3.9b et 3.9c. Au moins trois types de sortie intermittente sont observés dans le système. L'éclatement intermittent décrit le deuxième type de crise susceptible d'apparaître dans un système dynamique [212].

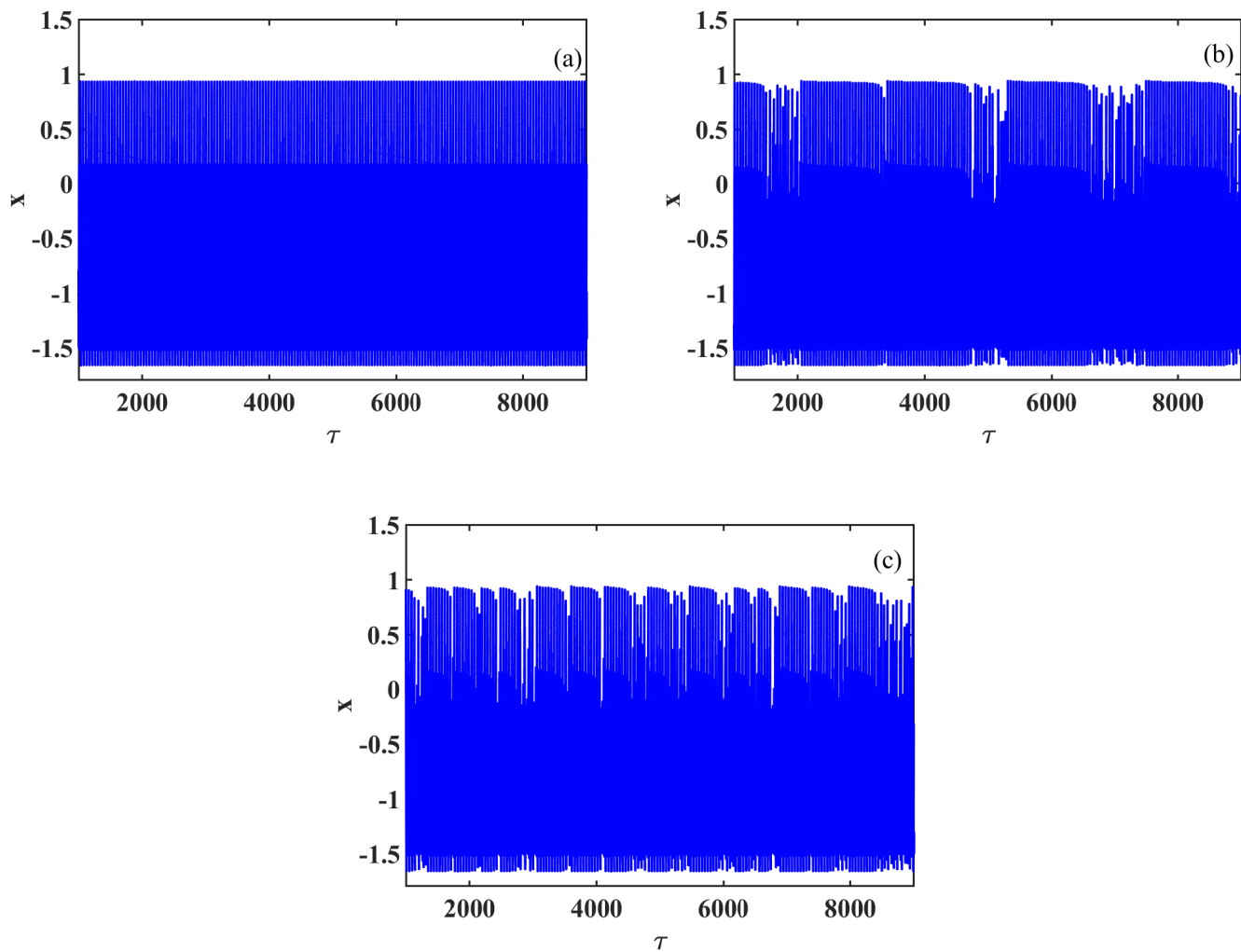


Figure 3.9 – Évolution temporelle $x(t)$ près de la crise intérieure, complétant la fenêtre de période-4 pour : **a)** $b_0 = 0.6945 < b_c$, **b)** $b_0 = 0.6952 > b_c$, **c)** $b_0 = 0.6961 > b_c$.

3.1.2.3 Antimonotonicité

Contrairement aux bifurcations obtenues précédemment, des orbites périodiques peuvent apparaître, puis être détruites au moyen de séquences de bifurcations inverses. Dawson et al[213], en 1992 a qualifié ce type de comportement d'antimonotonicité. Il est la création et l'annihilation simultanées d'orbites périodiques. Il a déjà été trouvé dans plusieurs classes de systèmes non linéaires dont l'oscillateur de Van der Pol [214], le circuit de Chua [213], le système Jerk et sa variante et bien d'autres [215]. Ce phénomène est observé dans ce nouveau modèle de neurone excité simultanément par un phototube et une thermistance en faisant varier la valeur de l'amplitude du signal de l'excitateur thermique A_0 dans la plage $0 < A_0 < 2$ pour plusieurs valeurs discrètes du paramètre b_0 . La Figure 3.10 présente les résultats des diagrammes de bifurcation obtenus en traçant les maxima locaux du potentiel de membrane $x(t)$ en fonction du paramètre de contrôle A_0 illustrant le phénomène d'antimonotonicité.

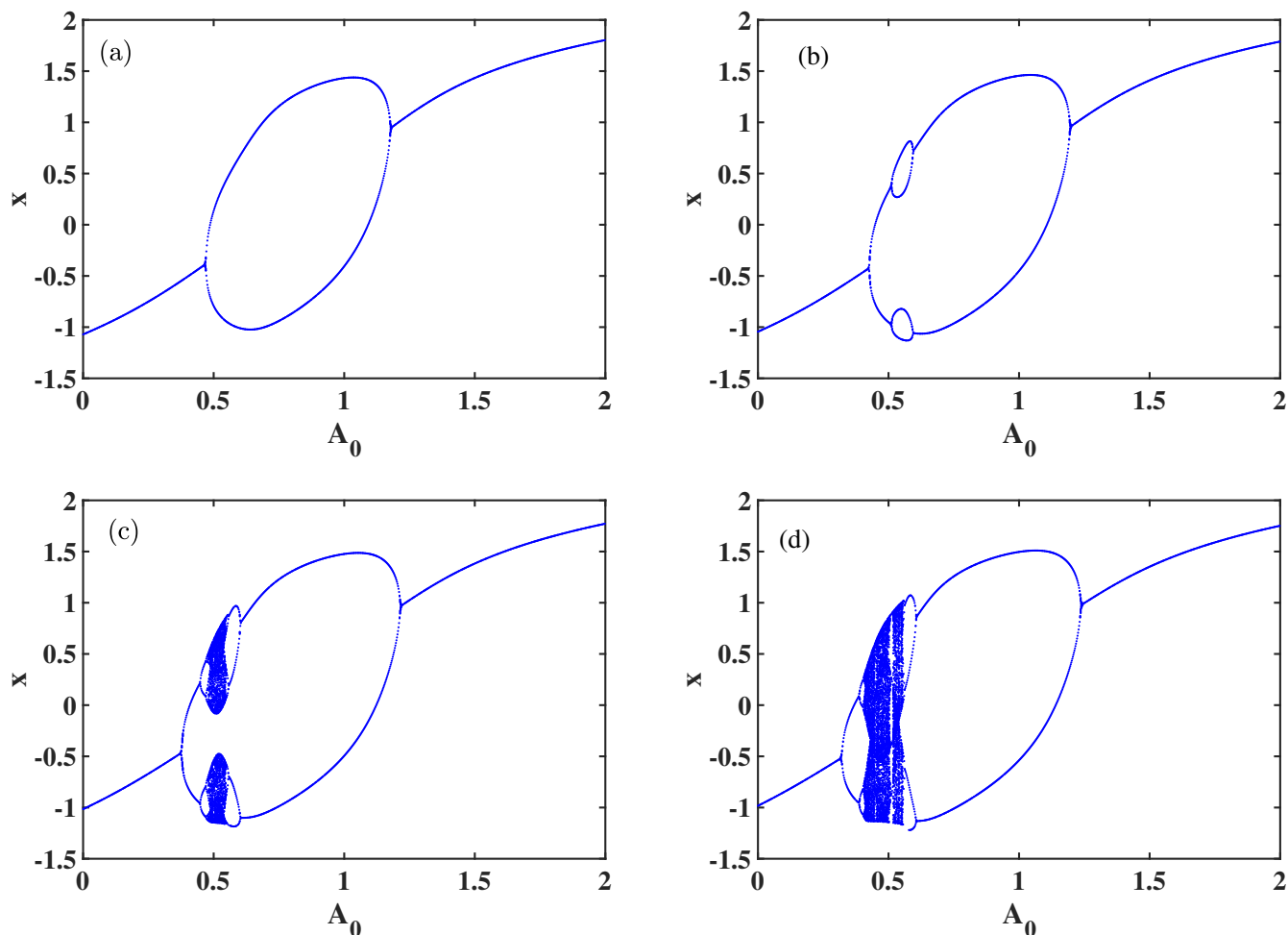


Figure 3.10 – Diagrammes de bifurcation montrant la coordonnée du potentiel de membrane $x(t)$ en fonction du paramètre de contrôle b_0 pour l’arbre de Feigenbaum ré-émergent : (a), bulle primaire pour $b_0 = 1$; (b), bulle de période-4 pour $b_0 = 0,9$; (c) et (d), arbre de ré-émergence Feigenbaum complet à $b_0 = 0,8$ et $b_0 = 0,7$. Considérant $T' = 5, a = 0.7, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_P = 0.01, \omega_T' = 0.7, \omega_P = 0.7$.

Sur cette figure, on observe une bulle primaire pour $b_0 = 1$. Une bulle de période-4 est observée à $b_0 = 0,9$. Des bulles plus pleines sont créées jusqu’à ce que le chaos se produise, lorsque la diminution est encore plus importante (arbre de ré-émergence Feigenbaum complet à $b_0 = 0,8$ et $b_0 = 0,7$, respectivement). Pour illustrer l’existence d’une bulle chaotique présentée par le diagramme de bifurcation de la Figure 3.10c, nous traçons sur la Figure 3.11 un attracteur avec une forme de bulle chaotique (Figure 3.11a) pour une valeur spécifique de $A_0 = 0,544$ et la première carte de retour correspondante (Figure 3.11b) avec deux points critiques qui il prend en charge l’apparition d’antimotonicité dans le modèle neuronal.

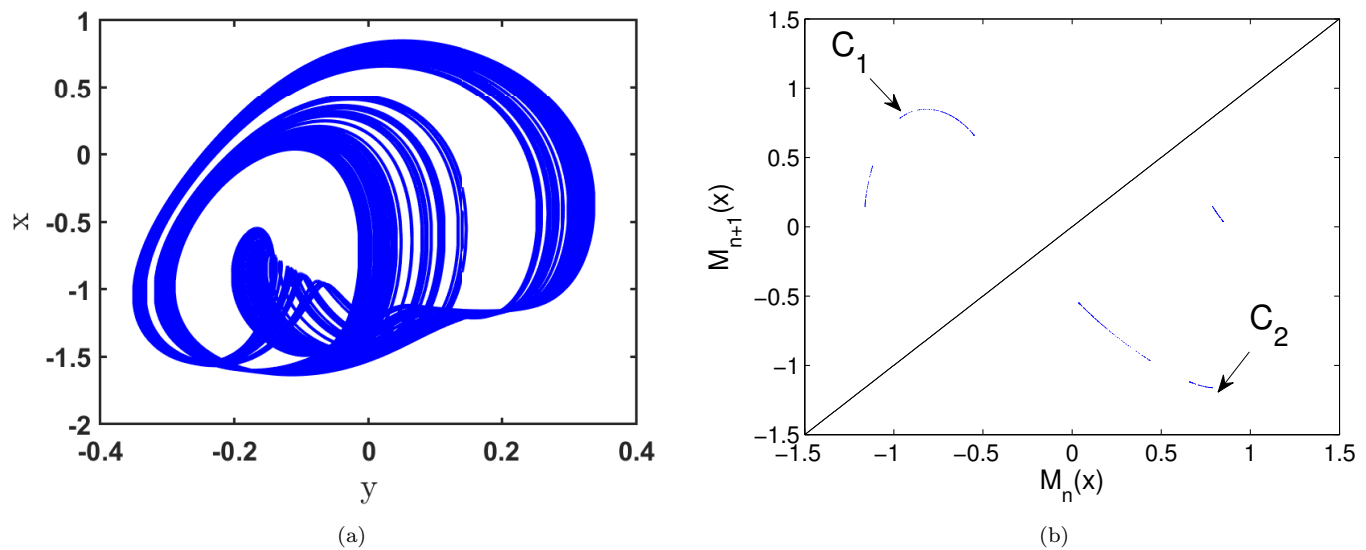


Figure 3.11 – Formation d'un attracteur avec une forme de bulle chaotique (a) et la première carte de retour correspondante avec deux points critiques (b) pour une valeur spécifique $A_0 = 0.544$. Les autres valeurs sont sélectionnées comme dans la Figure (3.10c).

3.1.3 Approche électronique à travers une carte à microcontrôleur

Le circuit a été réalisé selon le schéma de conception des Figures 2.9 et 2.10. Le dispositif du montage d'acquisition expérimentale est représentée par la Figure 3.12

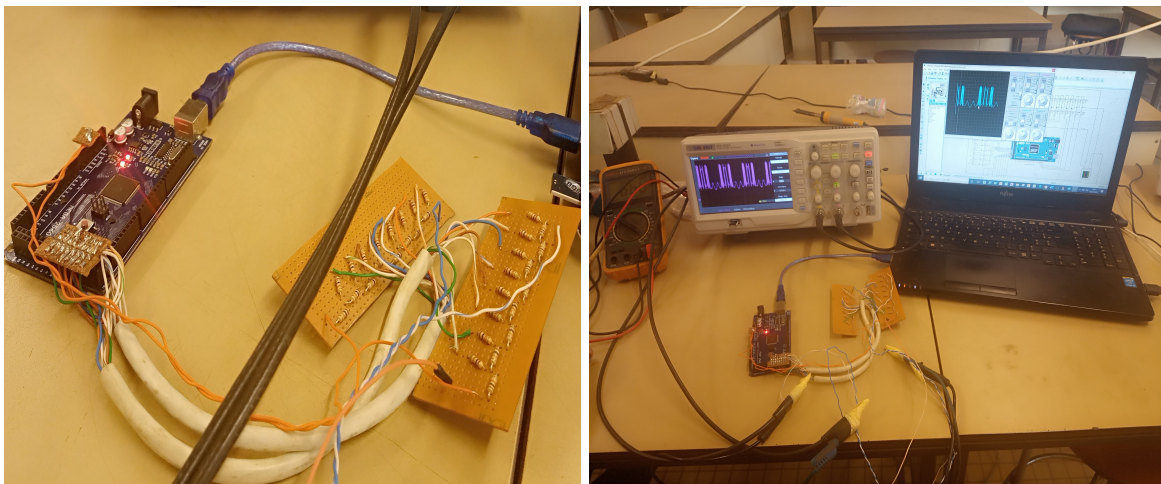


Figure 3.12 – Dispositif d'acquisition expérimentale implémentée à base du microcontrôleur.

La configuration proposée ci-dessus est capable de reproduire les comportements de progression du neurone biologique décrits par les équations *ODE*. Les séquences complètes de bifurcation décrites dans la Section 3.1.2 sont vues dans cette configuration. En utilisant les paramètres de la Figure 3.7, des exemples de résultats expérimentaux liés à ces différents comportements sont illustrés à travers la Figure 3.13. Sur cette figure, on observe l'évolution temporelle du potentiel de la membrane du système obtenu expérimentalement. On peut voir à partir de ces résultats expérimentaux une similitude avec les

résultats numériques. Ce dispositif à microcontrôleur est donc un outil fiable et rapide pour concevoir des circuits électroniques capables de donner une prédiction appropriée de la dynamique des neurones biologiques.

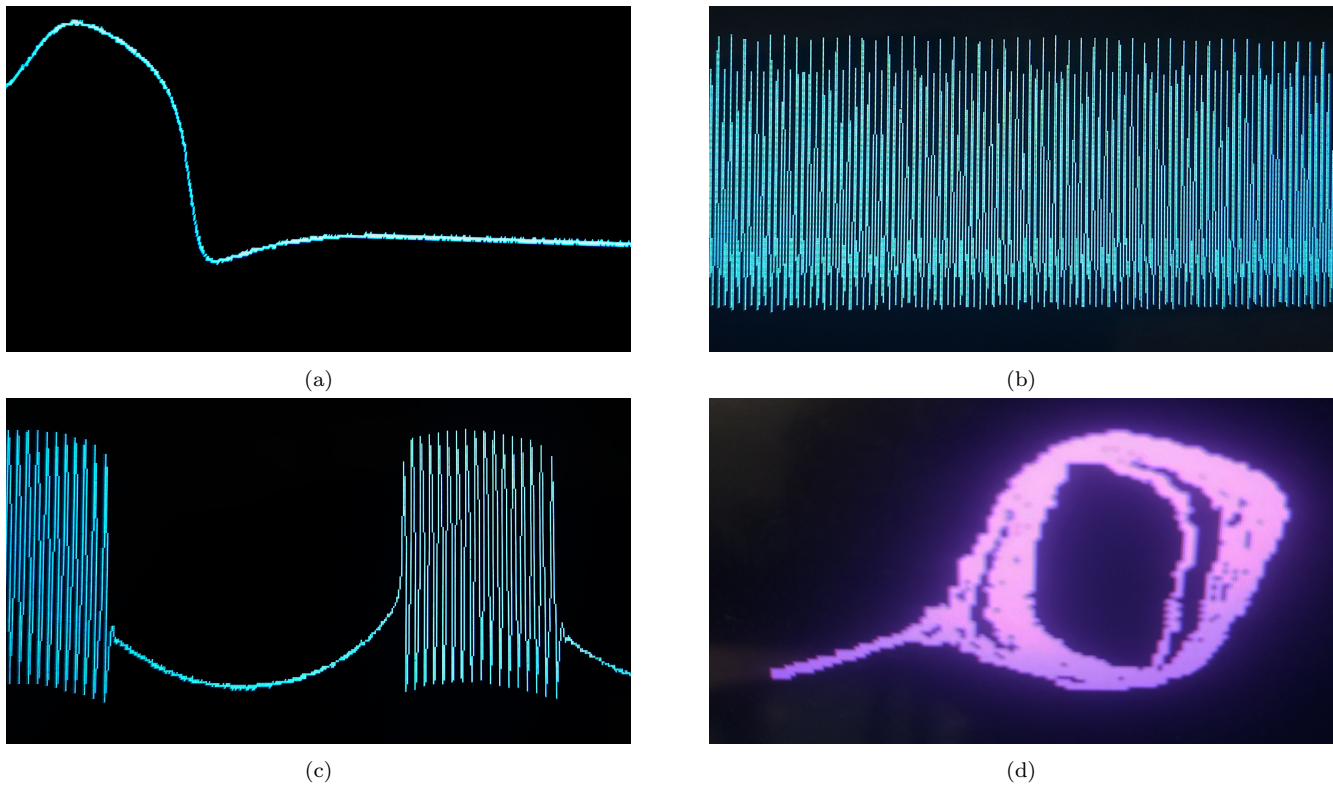


Figure 3.13 – Résultats expérimentaux de la série temporelle du potentiel de membrane dans le modèle de neurone sous différents paramètres de bifurcation avec $a = 0,7, b_0 = 0,8, c = 0,1, \epsilon_P = 0,175, \epsilon_0 = 0,175, A_0 = 0,5$. Pour Resting (a) $T' = 1, A_P = 0.2, \omega_P = 0.001, \omega_T' = 0.001$; Spiking (b) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.35, \omega_T' = 0.7$; Bursting (c) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.7, \omega_T' = 0.7$ et Attracteur illustrant la complexité du système (d) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.7, \omega_T' = 0.7$.

3.2 Effets des synapses sur la dynamique des neurones

Bien que les circuits neuronaux proposés dans la littérature s'adaptent aux comportements en rapport avec la synchronisation, d'autres comportements physiques pouvant faire l'objet des interprétations biologiques peuvent varier d'un circuit à un autre. Il devient nécessaire d'explorer autant de piste possibles en proposant des circuits neuronaux variés capables de donner des réponses opérationnelles pouvant s'adapter aux multiples situations qui entre en jeu pendant la traversée synaptique. Cette considération est en rapport avec la complexité de la dynamique synaptique, ce qui justifie l'instance investigation sur les cartes de comportements et de traitement de ces dynamiques. Dans cette section, il est important de faire des investigations sur la dynamique de deux neurones post-synaptique et pré-synaptique couplés via des synapses à jonction Josephson et à memristor. Ainsi, nous considérons les topologies définies dans les Sections 2.2.2 et 2.2.3 du chapitre §2 pour mettre en évidence quelques propriétés dynamiques de ces systèmes. De ce fait, nous nous servons des méthodes d'analyses classiques des systèmes dynamiques non-linéaires tels que : les diagrammes de bifurcation, le spectre de Lyapunov, les séries temporelles du

potentiel de membrane ainsi que les portraits de phase.

3.2.1 Couplage neuronal via une synapse à jonction Josephson

Les synapses de nature électriques ou chimiques peuvent coder des stimuli externes et peuvent également être utilisées pour le couplage des neurones biologiques. Malgré ces fortes avancées, les résultats obtenus restent en constante exploitation. La préoccupation fondamentale reste de savoir quelles sont les meilleurs composants et avec quel circuit neuronal la synchronisation dans l'environnement synaptique sera jugée assez parfaite. La jonction Josephson (JJ), caractérisée par les phénomènes de quantification du flux magnétique et l'effet Josephson, fut la meilleure candidate dans cet exercice [31–33]. Ainsi, sa grande sensibilité donne la possibilité aux neurologistes de l'utiliser pour quantifier les champs magnétiques des organismes vivants plus précisément du cerveau où règne un champ magnétique très faible. La caractéristique principale d'une jonction Josephson est son courant de Jonction. En effet ce courant dépend de l'erreur de phase de jonction. Un champ magnétique externe peut générer une erreur de phase additive sur la jonction, ce qui peut modifier de façon efficace ce courant de jonction. Ainsi, plusieurs circuits non linéaires intégrant la JJ sont explorés pour comprendre la dynamique des circuits chaotiques [34] et les neurosciences computationnelles [35–38, 219]. Dans cette sous section, nous considérons le circuit neuronale de la Section 2.2.3 défini au chapitre §2 pour une analyse des éventuels types de synchronisation pouvant être observés dans ce modèle de neurone couplé via la JJ. Il est important de noter qu'il est possible pour deux circuits neuronaux identiques pilotés par le même stimulus, de produire une synchronisation complète. Lorsqu'on applique à deux circuits neuronaux des stimuli différents, il est très difficile d'obtenir une synchronisation complète mais la synchronisation de phase peut se produire que lorsque le courant maximal de la jonction Josephson et le coefficient d'induction g sont bien sélectionnés.

Pour l'analyse non linéaire, l'algorithme Runge-Kutta du quatrième ordre est appliqué pour trouver des solutions numériques du système dynamique avec un pas de temps 0.01. Les valeurs initiales des variables sont sélectionnées comme suit (0, 2, 0, 1, 0.02, 0.01, 0.001). Les valeurs des paramètres intrinsèques sont définies par $a = 0.7$, $b_0 = 0.6$, $c = 0.1$, $\xi_P = \xi_0 = 0.175$. Notons que le courant de forçage produit simultanément par un phototube et une thermistance dans le neurone FHN (voir la Figure 2.5) peut être réglé pour détecter la sélection de mode et la transition dans les activités neuronales comme montré a la section précédente. Ainsi, pour les valeurs des paramètres suivants $\omega_P = \omega'_T = 0.7$, $A_P = 0.01$, $A_0 = 0.5$ et $T' = 5$ le modèle de neurone FHN thermosensible et photosensible présente un comportement chaotique.

3.2.1.1 Synchronisation complète

Considérons deux neurones FHN thermo-photosensible identiques pris à l'état chaotique et couplés via la jonction Josephson et une résistance linéaire comme le montre la Figure 2.5. Une variation des paramètres intrinsèques de la jonction Josephson et de la résistance linéaire dans le canal de couplage nous permet de trouver une éventuelle stabilité de synchronisation. Par conséquent, le diagramme à deux paramètres ainsi que leur plus grand exposant de Lyapunov (Figure 3.14a) et la fonction erreur

(Figure 3.14b), nous permettent de montrer que la variation de ces deux paramètres peut induire à des comportements périodiques et chaotique, puis également à une synchronisation complète.

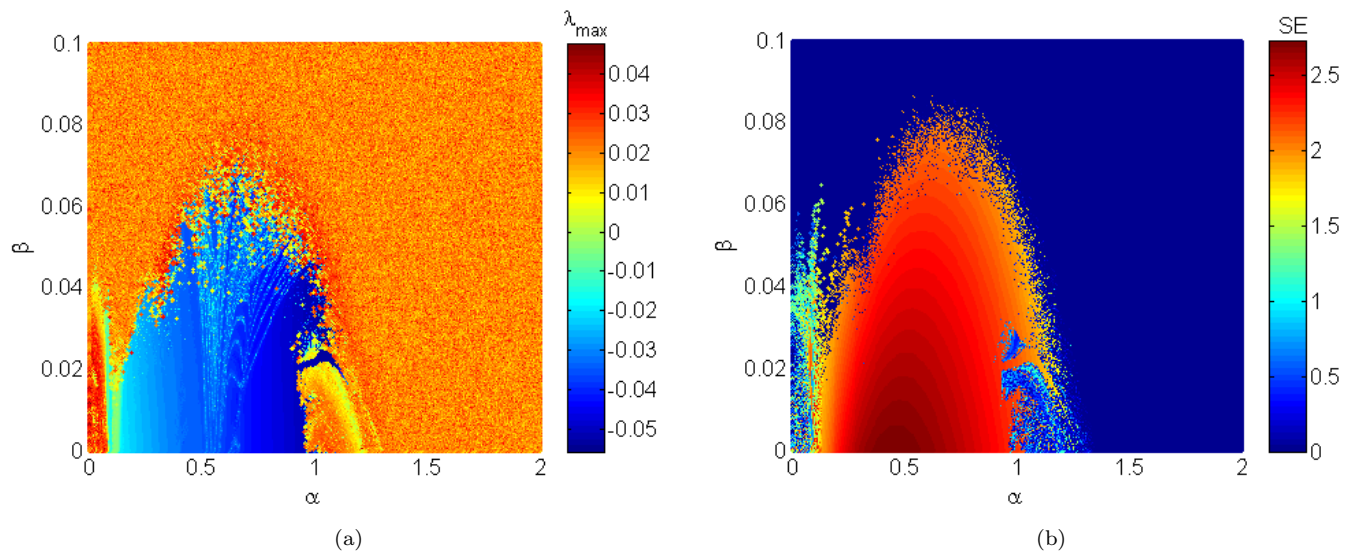


Figure 3.14 – Diagramme à deux paramètres avec leur plus grand exposant de Lyapunov (a) et la fonction d’erreur (b), montrant les comportements présentés par le potentiel de membrane de chaque neurone et l’erreur qui existe entre ces deux neurones lorsque le courant maximal de la jonction Josephson (α) et la résistance du canal de couplage (β) varie avec une condition initiale fixe (0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001). Pour le diagramme à deux paramètres (a), les comportements réguliers (périodiques) sont représentés par une couleur bleue car les comportements irréguliers (chaotiques) sont matérialisés par une couleur jaune citron ou rouge en constante évolution pour la plupart des exposants négatifs de Lyapunov. et Positifs. D’après le schéma en (b), l’erreur nulle (synchronisation complète) est représentée par une couleur en bleu et l’erreur non nulle (pas de synchronisation) est associée à la couleur jaune citron ou rouge.

Pour le diagramme à deux paramètres (Figure 3.14a), les comportements réguliers (périodiques) sont représentés par une couleur bleue tant disque les comportements irréguliers (chaotiques) sont matérialisés par une couleur verte ou rouge en constante évolution pour la plupart des exposants de Lyapunov négatifs et positifs. Sur la base du diagramme en (Figure 3.14b), l’erreur nulle (synchronisation complète) est représentée par une couleur en bleu et l’erreur non nulle (pas de synchronisation) est associé à la couleur verte ou rouge. On peut donc constater que l’augmentation d’un paramètre dans le canal de couplage conduit le système a une synchronisation complète.

Pour une meilleure illustration, nous considérons dans ce qui suit, la valeur de la résistance du canal de couplage ($\beta = 0.02$). Ainsi, nous discutons de l’effet du paramètre α sur la dynamique du modèle de neurone FHN thermo-photosensible. Par conséquent, sur la Figure 3.15a le diagramme de bifurcation représentant les maximas locaux du potentiel membranaire du premier neurone par rapport au courant maximal de la JJ (α) est présenté. Nous constatons que la modification du paramètre de contrôle (α) peut engendrer des oscillations périodiques et chaotiques lorsque les paramètres intrinsèques sont fixés. De plus, des phénomènes complexes tels que les crises extérieures (EC), les crises intérieures (IC) et les doublements de période inverse (RPD) peuvent être observés dans ce système. Dès lors, on peut remarquer que pour une valeur ($\alpha = 1.25$) le système passe d’un régime périodique à un régime chaotique à travers une crise interne (IC). La Figure 3.15b présente le diagramme de bifurcation des

maximas locaux de la fonction d'erreur θ par rapport au courant maximal de la JJ (α). On remarque que pour des valeurs de $\alpha < 1.25$, la dynamique d'erreur maximale est supérieure à zéro ($\theta_{max} > 0$) montrant que le système n'est pas synchronisé. Pour des valeurs de $\alpha \geq 1.25$, la dynamique d'erreur maximale bascule brusquement vers zéro ($\theta_{max} = 0$) conduisant ainsi à une synchronisation complète. Ainsi, nous pouvons affirmer que l'implication du couplage via la synapse hybride peut induire l'apparition de différents modèles de déclenchement et ainsi les activités neuronales peuvent être régulées via le couplage de canaux.

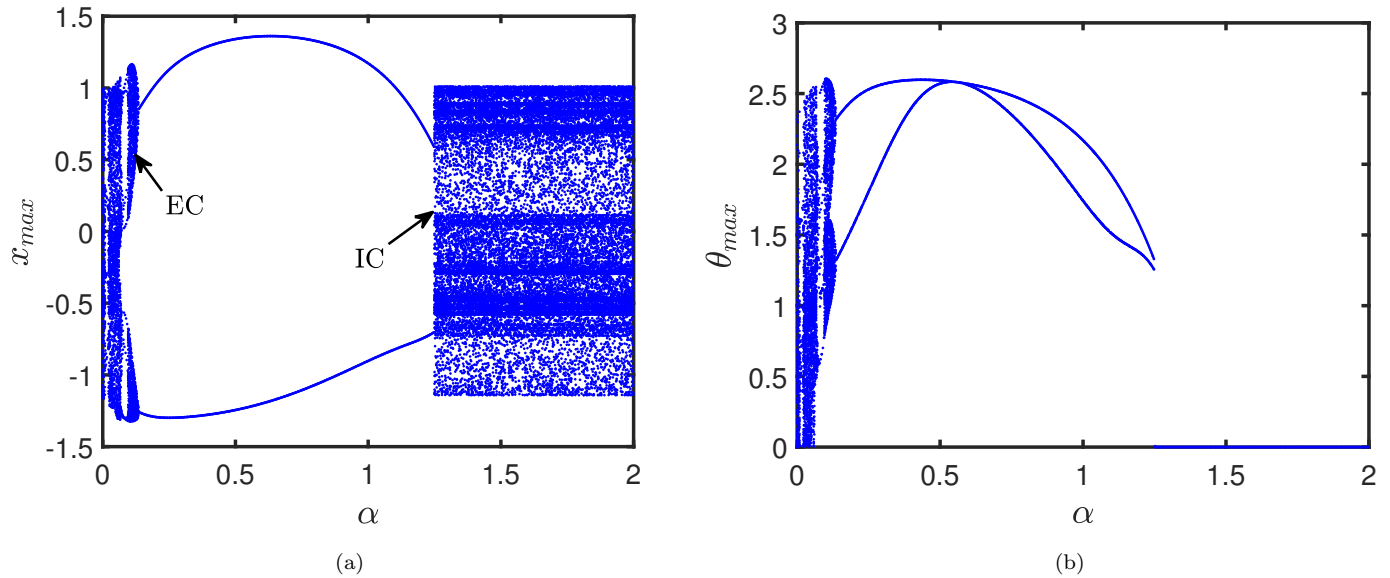


Figure 3.15 – Diagramme de bifurcation représentant les maxima locaux du potentiel de membrane du premier neurone (a) et Variation de la fonction d'erreur de synchronisation maximale (b) par rapport au courant maximal de la jonction Josephson (α). Les autres paramètres sont définis comme suit : $a = 0.7, b_0 = 0.6, c = 0.1, \epsilon_P = \epsilon_0 = 0.175, T' = 5, A_0 = 0.5, A_P = 0.01, \omega_T' = \omega_P = 0.7, g = 0.1, \beta = 0.02$ et les valeurs initiales sont fixées à $(0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001)$

Pour plus d'illustration, nous montrons à travers la Figure 3.16 les différents attracteurs formés lorsque l'intensité du courant dans la jonction Josephson varie. On peut remarquer à travers cette figure que deux circuits neuronaux FHN thermo-photosensible ayant des comportements chaotiques et couplés via une jonction Josephson et une résistance linéaire peuvent être anéantis pour conduire à un comportement périodique et à une synchronisation chaotique lorsque certains paramètres de la dynamique du neurone sont bien définis. L'augmentation du paramètre α au-delà d'une certaine valeur seuil nous permet de trouver la stabilité d'une synchronisation complète.

La Figure 3.17 présentant les séries temporelles échantillonnées des deux circuits neuronaux FHN couplés nous permet de constater que ces deux circuits atteignent une synchronisation complète lorsque l'intensité du couplage est au-delà du seuil. Pour une intensité de couplage inférieure au seuil, ces deux circuits neuronaux présentent un verrouillage de phase dans la série temporelle échantillonnée pour la tension de sortie et le potentiel de membrane. L'observation de la Figure 3.18 nous présente une estimation de l'évolution de la fonction d'erreur pour des valeurs discrètes du paramètre α .

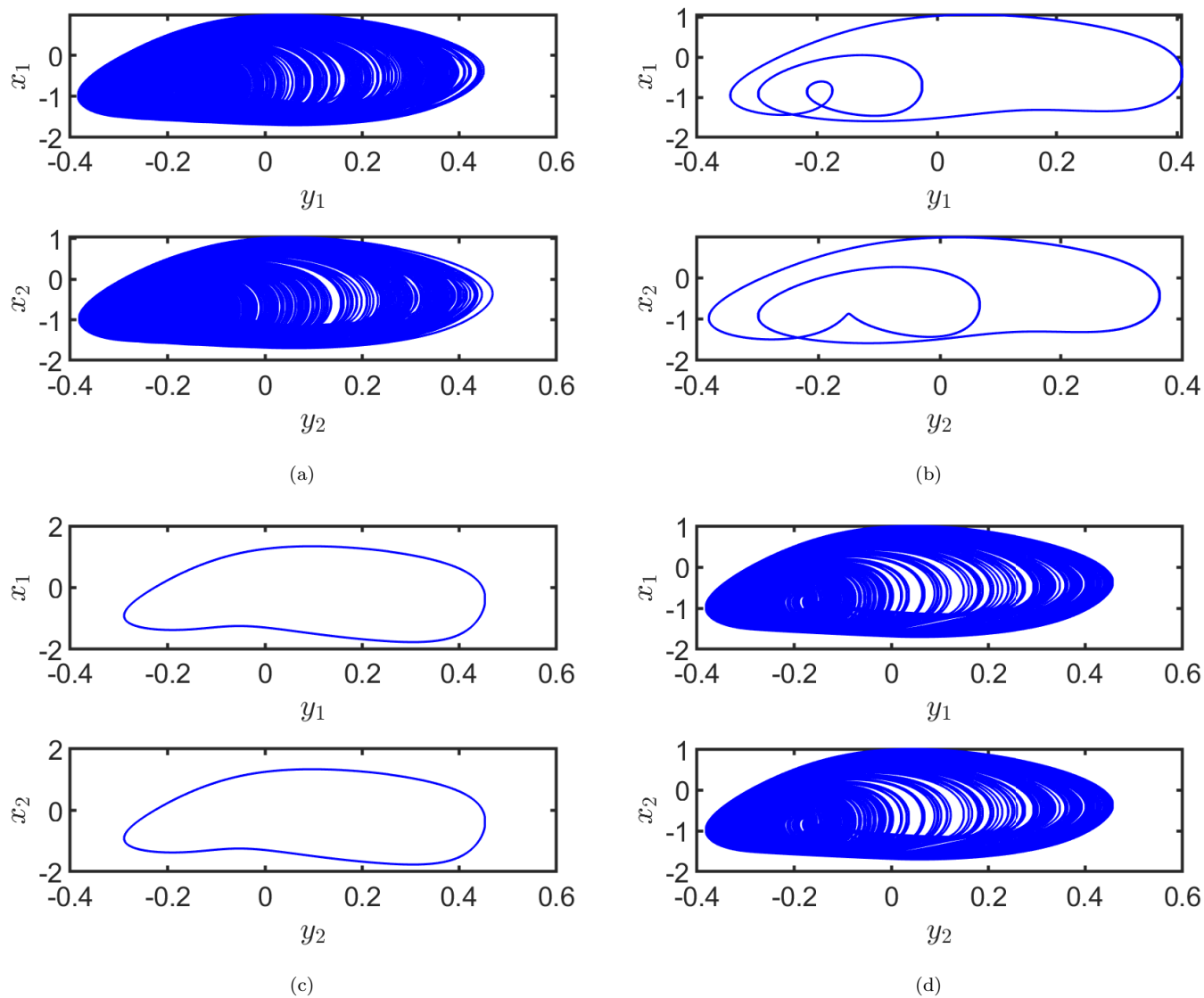


Figure 3.16 – Formation d'attracteurs et projections de certaines solutions d'un espace de phase à cinq dimensions sur les plans (y_1, x_1) et (y_2, x_2) pour les deux neurones. Pour (a) $\alpha = 0,03$; (b) $\alpha = 0,088$; (c) $\alpha = 0,5$ et (d) $\alpha = 1,3$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.15.

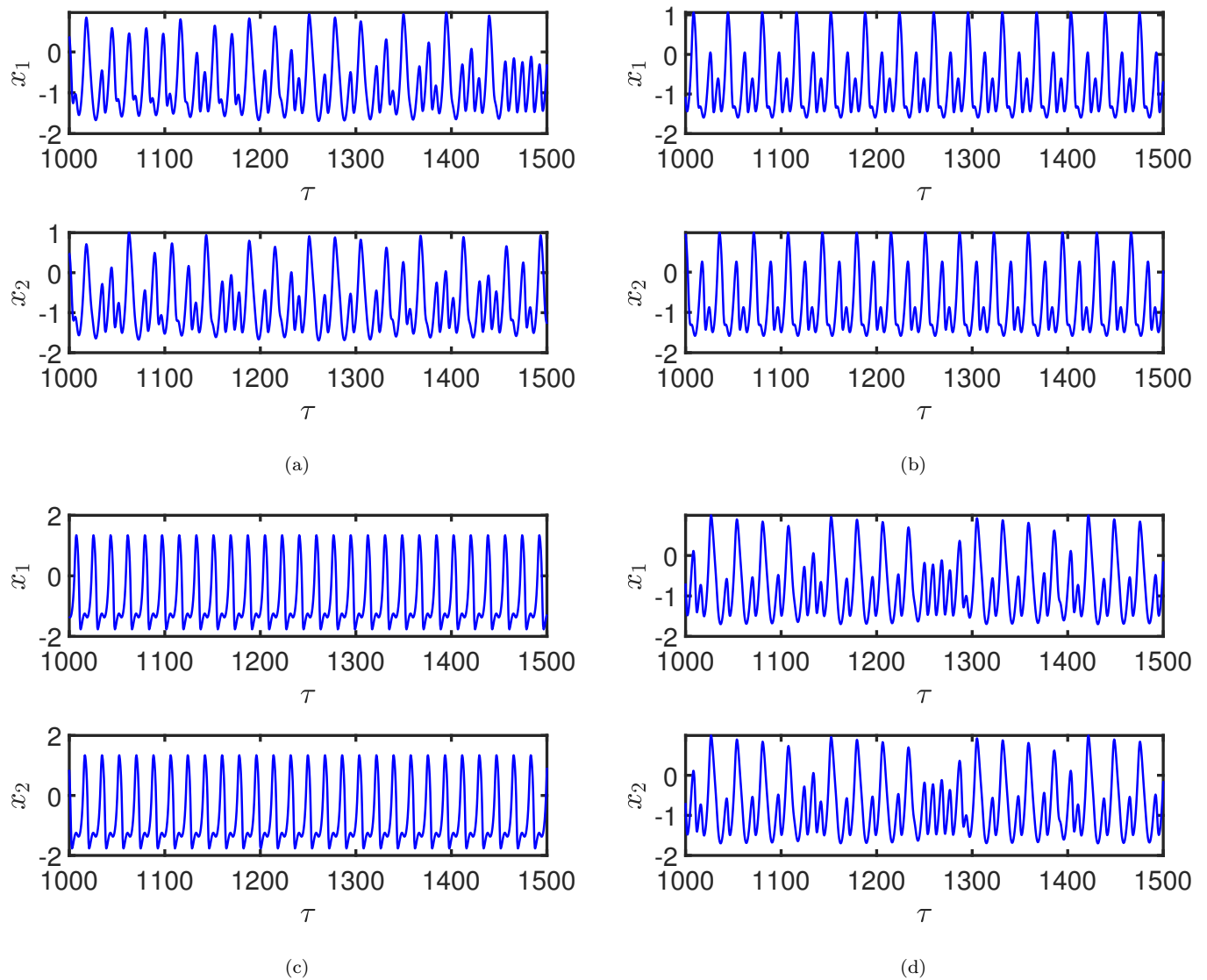


Figure 3.17 – Évolution temporelle du potentiel de membrane est calculée pour les deux neurones FHN en sélectionnant différentes valeurs du paramètre appliqué α : pour (a) $\alpha = 0.03$; (b) $\alpha = 0.088$; (c) $\alpha = 0.5$ et (d) $\alpha = 1.3$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.15.

La résistance dans le canal de couplage comme montrée à la Figure 2.5 peut être à la cause d'un couplage de tension en absorbant de l'énergie calorifique et pouvant améliorer le pompage d'énergie. Dans le cas où le canal de couplage réagit essentiellement sous l'influence du couplage de tension via la résistance, une synchronisation complète peut être obtenue lorsqu'on augmente de façon continue l'intensité de couplage. Il est bien de noter que cette synchronisation est atteinte lorsque le couplage de champ via la jonction Josephson est maintenue active. Ainsi, nous pouvons dans un second cas, discuter de l'effet du paramètre β lorsque le paramètre lié au couplage de champ est activé à une valeur de $\alpha = 0.02$. De ce fait, les diagrammes de bifurcations de la Figure 3.19 représentent les maximas locaux du potentiel membranaire du premier neurone en (a) et de la fonction d'erreur en (b) en fonction du paramètre β du couplage de tension.

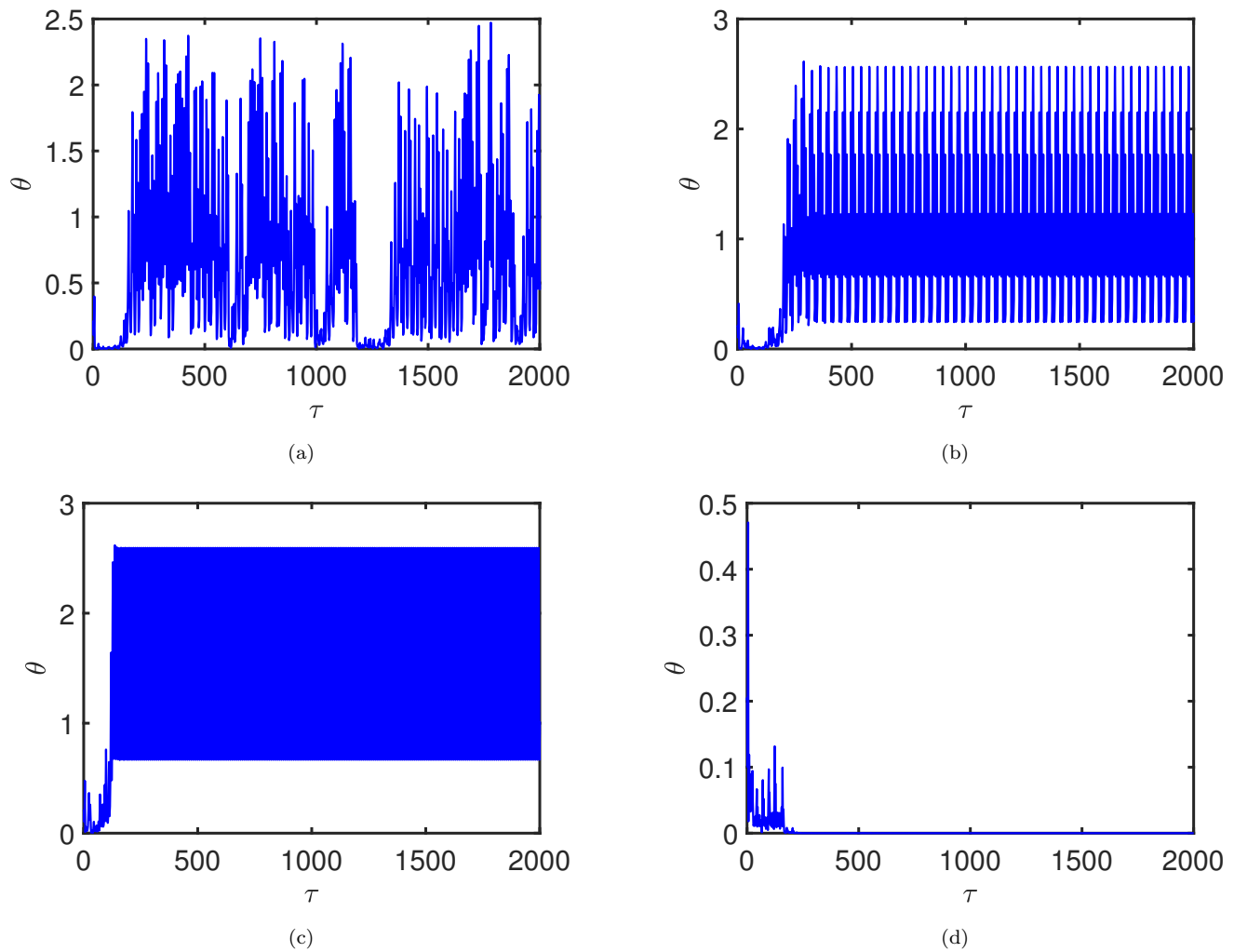


Figure 3.18 – Évolution de la fonction d’erreur calculée pour différentes valeurs du paramètre α . Pour (a) $\alpha = 0.03$; (b) $\alpha = 0.088$; (c) $\alpha = 0.5$ et (d) $\alpha = 1.3$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.15.

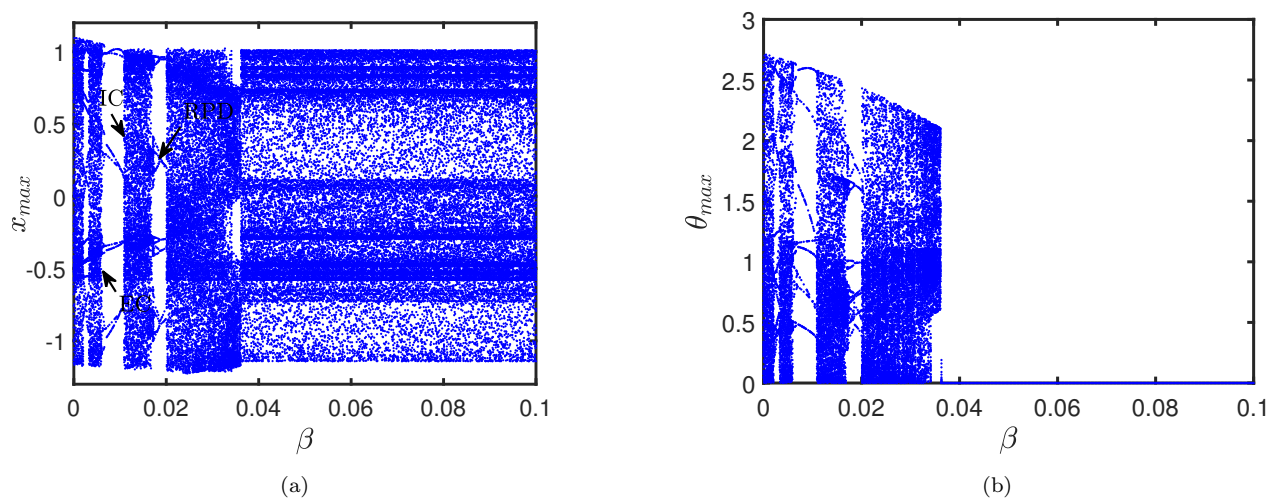


Figure 3.19 – Diagramme de bifurcation représentant en (a) les maxima locaux du potentiel de membrane du premier neurone et en (b) la variation de la fonction d’erreur de synchronisation maximale en fonction du paramètre β du couplage de tension. Les autres paramètres sont définis comme suit : $a = 0.7, b_0 = 0.6, c = 0.1, \epsilon_P = \epsilon_0 = 0.175, T' = 5, A_0 = 0.5, A_P = 0.01, \omega_T' = \omega_P = 0.7, g = 0.1, \alpha = 0.02$ et les valeurs initiales sont fixées à $(0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001)$.

En observant la Figure 3.19a, nous constatons que l'évolution du paramètre β peut engendrer des comportements périodiques et même chaotiques. En outre, les phénomènes complexes tels que les crises extérieures (EC), les crises intérieures (IC) et les doublements de période inverse (RPD) sont également observés dans le modèle [203, 205, 206]. A travers le diagramme de la Figure 3.19b, on peut remarquer que les circuits neuronaux peuvent être synchronisés lorsque β est au-delà d'une certaine valeur seuil. Il peut être observé à travers ces diagrammes que les circuits neuronaux peuvent être synchronisés lorsque β est au-delà d'une certaine valeur seuil. Pour une bonne illustration, nous montrons à travers la Figure 3.20, les différents portraits de phases lorsque les valeurs du paramètre β lié à la résistance linéaire du couplage de tension est pris de façon discrète.

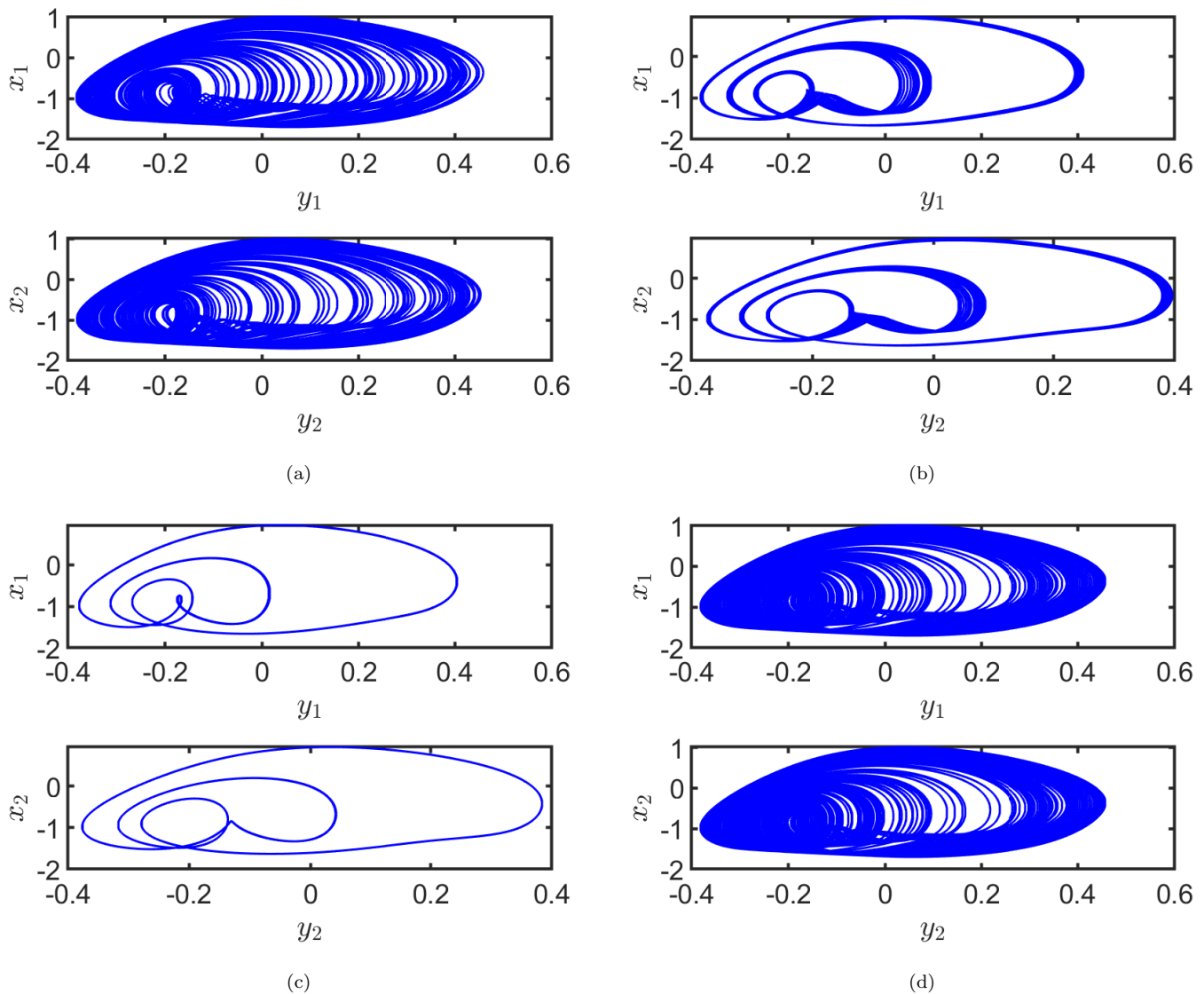


Figure 3.20 – Formation d'attracteurs et projections de certaines solutions d'un espace de phase à cinq dimensions sur les plans (y_1, x_1) et (y_2, x_2) pour les deux neurones. Pour (a) $\beta = 0.01$; (b) $\beta = 0.0188$; (c) $\beta = 0.02$ et (d) $\beta = 0.08$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.19.

Compte tenu de ce qui précède, nous pouvons affirmer que le couplage de tension via une résistance linéaire joue un rôle très important dans la régulation des comportements de synchronisation lorsque deux

neurones FHN chaotiques couplés sont pris en compte. Par conséquent, les oscillations périodiques, les oscillations chaotiques et même les oscillations d'écartement peuvent progresser vers une synchronisation complète en supprimant les comportements chaotiques des neurones FHN initiaux. Ces résultats sont observés à travers les Figures 3.19 et 3.20. Sur la Figure 3.21. Nous traçons les séries temporelles échantillonnées pour le potentiel de membrane des circuits neuronaux FHN couplés. En outre, la fonction d'erreur est calculée pour estimer la dépendance de la synchronisation sur le paramètre β pour la résistance du canal de couplage, et les résultats sont présentés sur la Figure 3.22. De ces résultats, nous pouvons constater et confirmer qu'une synchronisation complète est atteinte lorsqu'on augmente l'intensité du couplage de tension β au-delà du seuil d'acceptation, comme exemple $\beta = 0.125$.

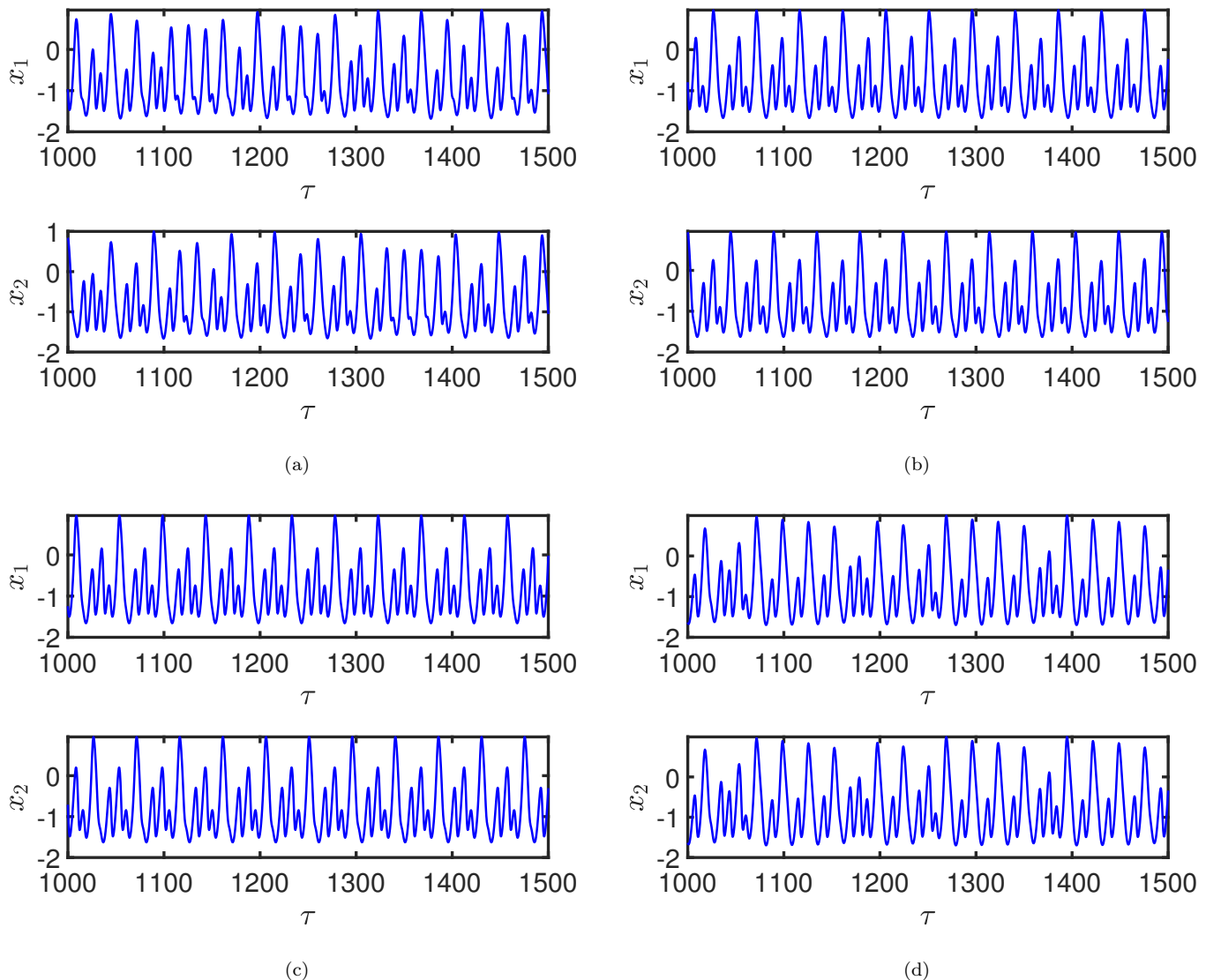


Figure 3.21 – Évolution temporelle du potentiel de membrane est calculée pour les deux neurones FHN en sélectionnant différentes valeurs du paramètre appliqué β . Pour (a) $\beta = 0.01$; (b) $\beta = 0.0188$; (c) $\beta = 0.02$ et (d) $\beta = 0.08$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.19.

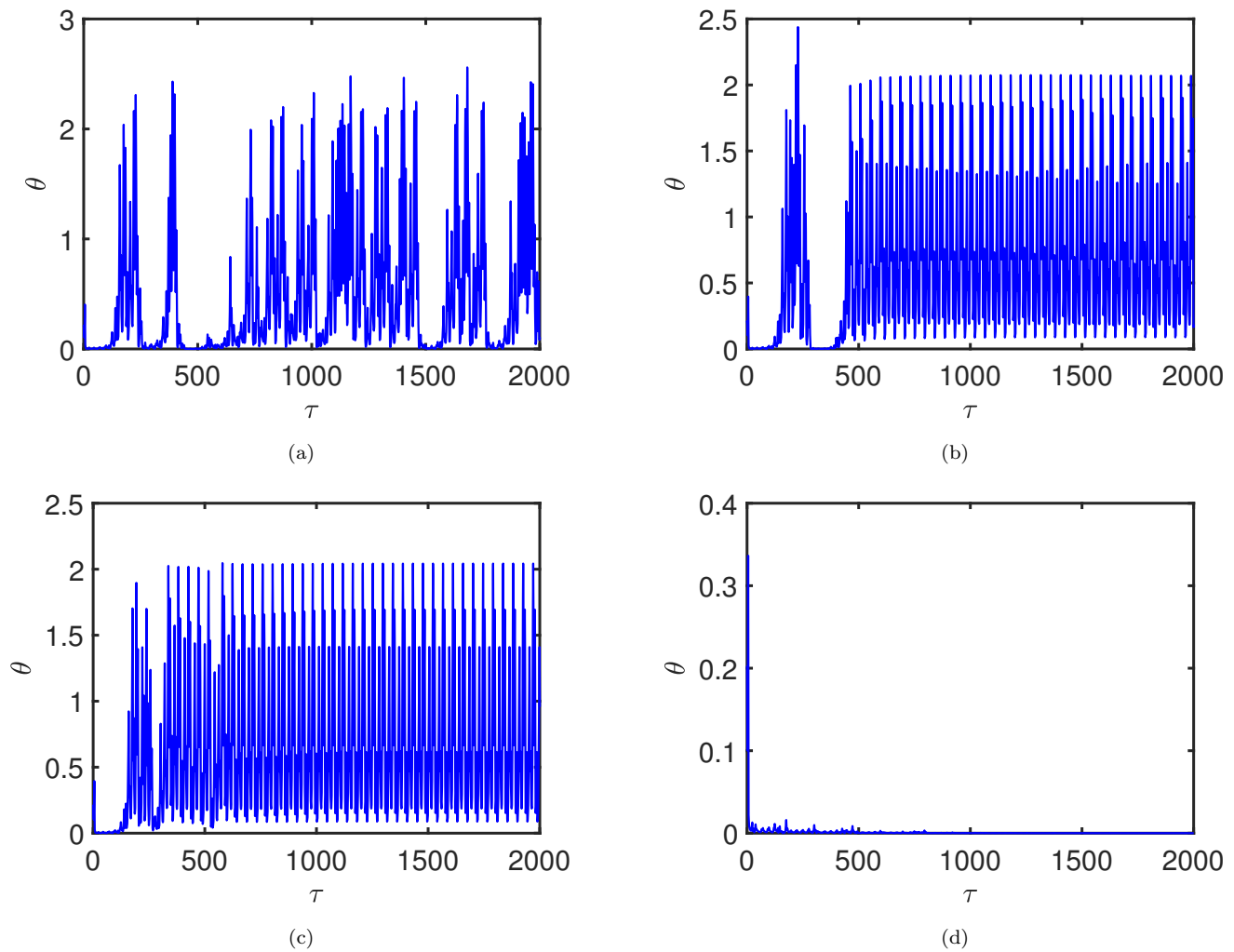


Figure 3.22 – Évolution de la fonction d’erreur calculée pour différentes valeurs du paramètre β . Pour (a) $\beta = 0.01$; (b) $\beta = 0.0188$; (c) $\beta = 0.02$ et (d) $\beta = 0.08$. Les autres valeurs des paramètres sont définies comme dans la Figure 3.19.

De tout ce qui précède, nous pouvons confirmer que deux neurones identiques dépendant de la lumière et de la température peuvent quitter d’une non-synchronisation à une synchronisation complète stable lorsque les paramètres du canal de couplage sont bien sélectionnés.

3.2.1.2 Synchronisation de Phase

Il est bien connu que, l’activité électrique d’un neurone biologique dépend fortement de son courant de forçage externe. Ainsi, il est important de mener des études lorsque nous considérons deux oscillateurs neuronaux présentant des modes d’oscillation différents en appliquant des courants de forçages externes différents provenant de la lumière et de la chaleur. Pour plus de simplicité, les paramètres du phototube et de la thermistance des deux neurones FHN thermo-photosensible sont définis comme : $\omega_{P1} = \omega'_{T1} = \omega_{P2} = \omega'_{T2} = 0.7$, $A_{P1} = A_{P2} = 0.01$, $A_{O1} = A_{O2} = 0.5$, $T_1' = 5$ et $T_2' = 2.6$.

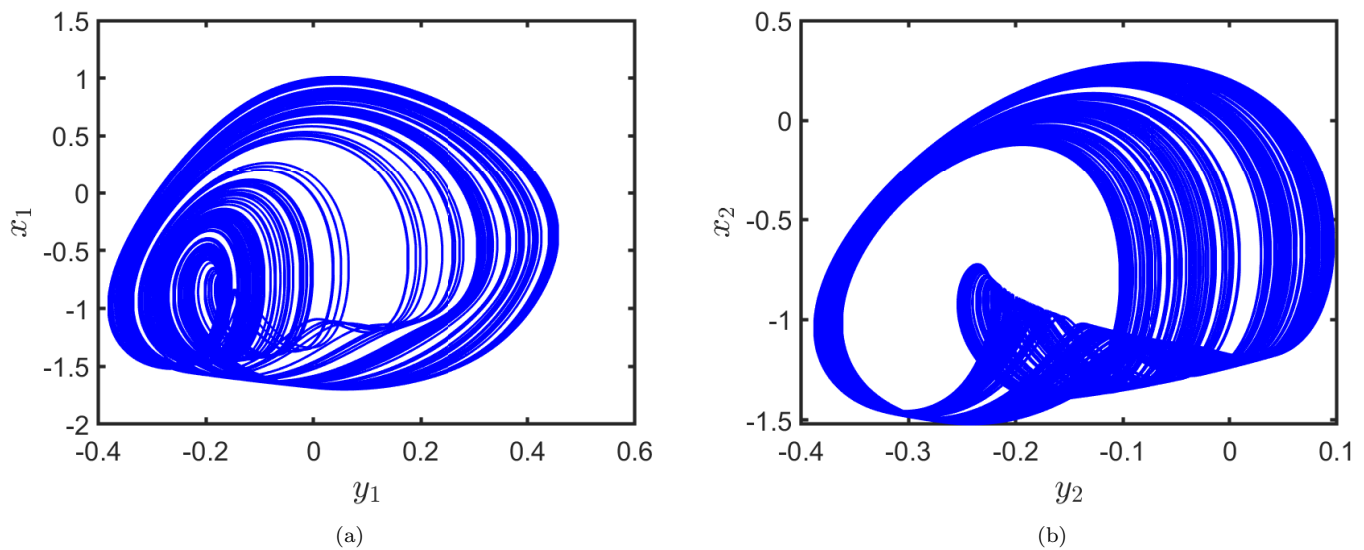


Figure 3.23 – Formation d’attracteurs chaotiques des neurones maîtres et esclaves respectivement dans les plans (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sans activation du canal de couplage. Pour a) $T_1' = 5$ et b) $T_2' = 2.6$. Les autres valeurs des paramètres sont définies dans le test.

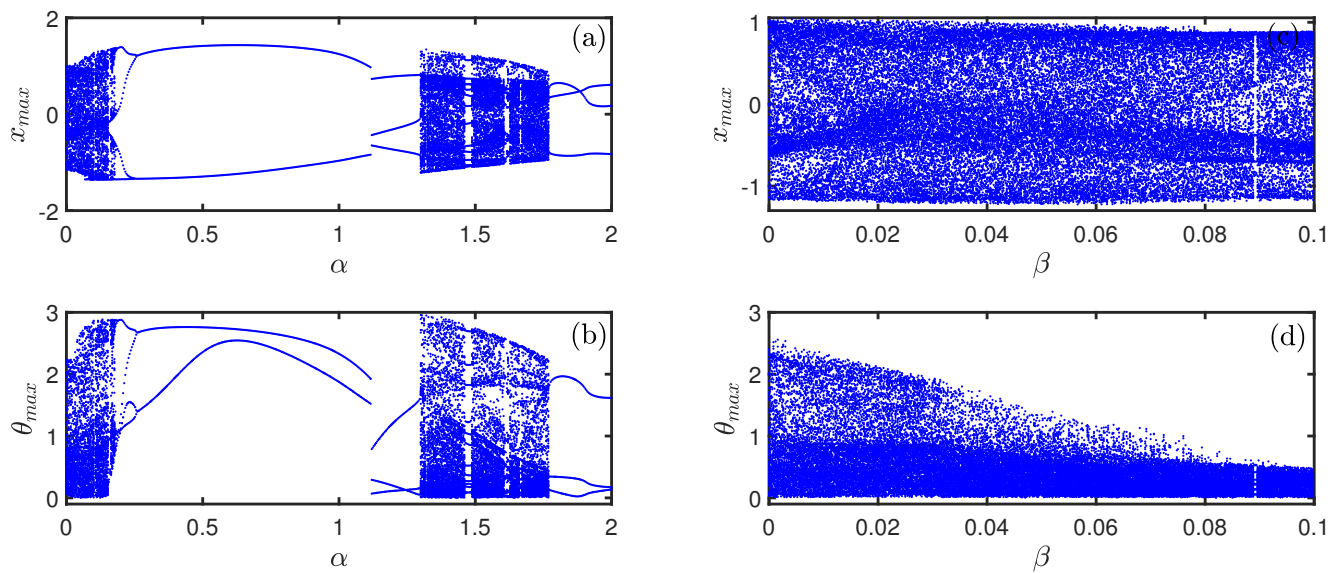


Figure 3.24 – Diagramme de bifurcation représentant les maxima locaux du potentiel de membrane du premier neurone et la variation de la fonction d’erreur de synchronisation maximale par rapport au courant maximal de la jonction Josephson (α) (a,b) et en fonction du paramètre β de la tension de couplage (c,d) avec $g = 0.1$. Pour le diagramme a,b) $\beta = 0,02$ et c,d) $\alpha = 0,02$.

La Figure 3.23, nous présente les portraits de phases des différents modes d’oscillation des deux neurones avec suppression du canal de couplage. En approchant les paramètres du canal de couplage, nous montrons à travers les diagrammes de bifurcations de la Figure 3.24 les maxima locaux du potentiel membranaire du premier neurone et de la fonction d’erreur par rapport au courant maximal de la Jonction Josephson (α) (a) et du couplage de tension β (b) respectivement. De cette figure, nous

remarquons qu'il est difficile et voir même impossible d'atteindre une synchronisation complète lorsque les paramètres intrinsèques du canal de couplage sont d'avantage augmentés. Pour cela, il est intéressant de chercher à savoir si la synchronisation de phase peut être atteinte. Ainsi, les courbes de la Figure 3.25 nous permettant de confirmer qu'il peut y avoir stabilité d'une synchronisation de phase lorsque l'intensité du couplage (g), l'intensité maximal du courant de la jonction Josephson (α) est activée et le paramètre β fixé à 0.02. Il est calculé sur ces figures, l'erreur de phase entre les potentiels membranaires des neurones maître et esclave par rapport au courant maximal de la Jonction Josephson (α) (Figure 3.25a), l'évolution temporaire des potentiels membranaires du neurone maître (couleur bleue), du neurone esclave (couleur noire) et de la différence des deux neurones (couleur rouge) (Figure 3.25b), les portraits de Phase sur dans le plan (x_1, x_2) entre les neurones maître et esclave (Figure 3.25c) et les portraits de phase sur les plans (x_1, y_1) présenté par la couleur bleue et (x_2, y_2) matérialisé par la couleur noire (Figure 3.25d) pour des valeurs de l'intensité du couplage g différentes. Nous constatons que l'augmentation de la valeur de l'intensité du couplage g permet d'atteindre et d'améliorer de façon efficace la stabilité de la synchronisation de phase. En conséquence, en modifiant les propriétés physiques des canaux de couplage, l'approche de synchronisation entre les neurones dépendant de la lumière et de la température peut être régulée efficacement.

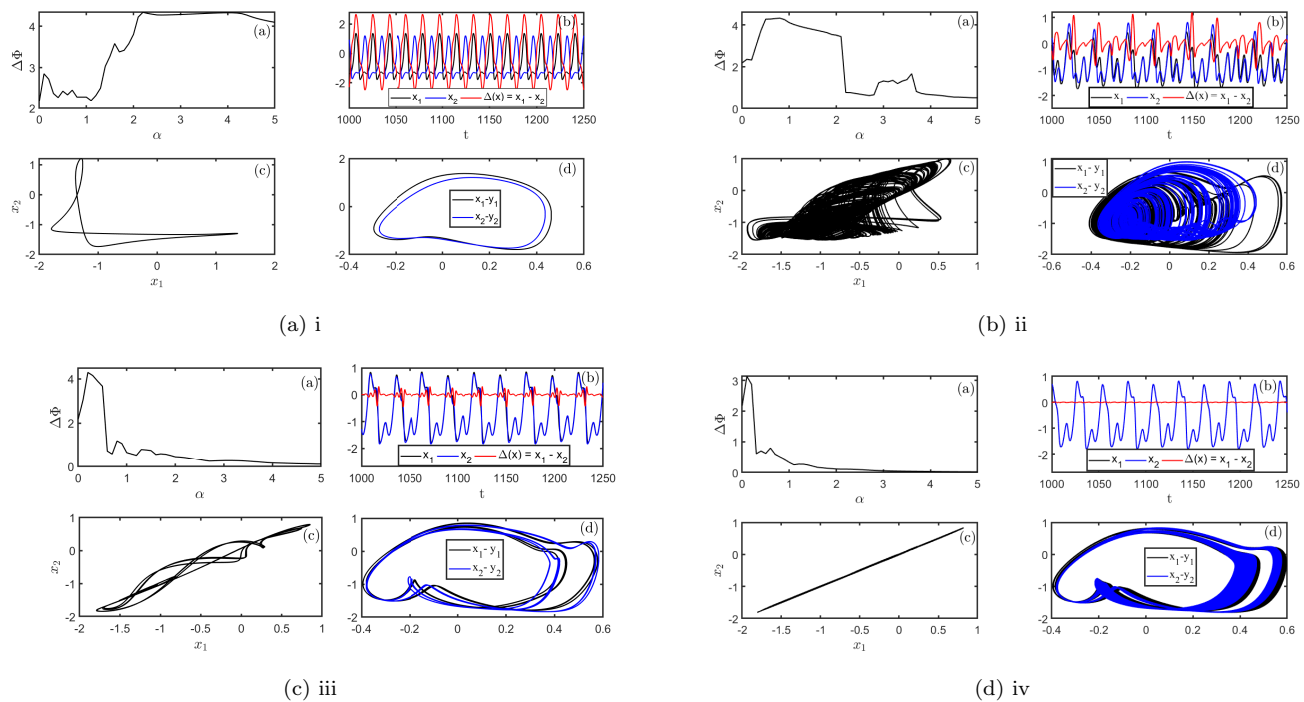


Figure 3.25 – a) erreur de phase entre les potentiels de membrane des neurones maître (Neurone 1) et esclave (Neurone 2) par rapport au courant maximal de la jonction Josephson (α), b) évolution temporaire des potentiels de membrane du neurone maître (couleur bleue), du neurone esclave (couleur noire) et la différence des deux neurones (couleur rouge), c) la formation de l'attracteur dans le plan (x_1, x_2) entre les neurones maître et esclave et d) la projection du diagramme de phase sur les plans (x_1, y_1) présentés par la couleur bleue et (x_2, y_2) matérialisés par la couleur noire. Pour (A_i) $g = 0.01$, (A_{ii}) $g = 0.03$, (A_{iii}) $g = 0.2$ et (A_{iv}) $g = 0.5$.

3.2.1.3 Approche électronique sur Pspice

En gardant à l'esprit que le processus de mise à l'échelle temporelle offre aux instruments analogiques la possibilité de travailler avec leurs bandes passantes, l'unité de temps ici est 10^{-4} . En effet, ce procédé offre la possibilité de simuler le comportement du système à une fréquence donnée en effectuant une mise à l'échelle temporelle appropriée consistant à exprimer la variable temporelle MATLAB τ pour la variable temporelle de calcul Pspice t : $t = RC\tau = 10^{-n}\tau$ avec $n \in \mathbb{N}$ [192]. Les amplificateurs opérationnels sont polarisés à $\pm 12V$ grâce à une source de tension symétrique, et les différents paramètres du circuit utilisés pour mettre en œuvre deux neurones FHN thermo-photosensibles couplés via la JJ dans le logiciel de simulation électronique Pspice sont définis dans le Tableau 3.2 ceci en considérant un temps constant $\tau = RC = 10k\Omega \times 10nF = 100\mu s$, c'est-à-dire $R = 10k\Omega$ et $C = 10nF$. De plus, le gain multiplicateur est $\gamma = 10$, $x_i = X_i/1V$ et $y_i = Y_i/1V$.

Tableau 3.2 – Paramètres de circuit du modèle neuronal couplé via la jonction Josephson pour les simulations Pspice .

Neurone 1			Neurone 2		
Paramètres	Désignation	Value	Paramètres	Désignation	Value
R_{11}	Résistance	$14.7k\Omega$	R_{31}	Résistance	$14.2k\Omega$
R_{12}	Résistance	$10k\Omega$	R_{32}	Résistance	$10k\Omega$
R_{13}	Résistance	$30k\Omega$	R_{33}	Résistance	$30k\Omega$
R_{14}	Résistance	$1M\Omega$	R_{34}	Résistance	$1M\Omega$
R_{15}	Résistance	$24.4k\Omega$	R_{35}	Résistance	$29.4k\Omega$
R_{21}	Résistance	$100k\Omega$	R_{41}	Résistance	$100k\Omega$
R_{22}	Résistance	$136.5k\Omega$	R_{42}	Résistance	$113.5k\Omega$
R_{23}	Résistance	$142.9k\Omega$	R_{43}	Résistance	$142.9k\Omega$
C_1, C_2	Condensateur	$10nF$	C_3, C_4	Condensateur	$10nF$
Canal de couplage (Jonction Josephson et résistance linéaire)					
R_{16}, R_{36}	Résistance	$2k\Omega$	$R_{17}, R_{18}, R_{37}, R_{38}$	Résistance	$500k\Omega$
R_{51}, R_{52}	Résistance	Variable	C_5	Condensateur	$10nF$

Les simulations Pspice du circuit neuronal conçu à la Figure 2.6 nous permettent de reproduire les mêmes comportements dynamiques observés lors de l'intégration du modèle de neurone décrit par l'Equation 2.17, et de confirmer également la possibilité d'obtenir une synchronisation complète ou une synchronisation de phase lorsque les paramètres intrinsèques du canal de couplage sont modifiés et les conditions initiales fixées à $(0.2V, 0.1V, 0.02V, 0.01V, 0.001V)$. Pour plus d'illustration, nous considérons ici l'état des neurones comme défini à la Figures 3.25. Par conséquent, nous montrons à travers les Figures 3.26 et 3.27 que le modèle peut atteindre une synchronisation de phase lorsqu'on fait varier les résistances R_{51} et R_{52} à partir de l'intensité du couplage g . Nous pouvons constater à travers ces figures que nous tendons vers une synchronisation de phase lorsque les valeurs des résistances R_{51} et R_{52} diminuent c'est-à-dire que l'intensité du couplage augmente, ce qui reste en accord avec les analyses théoriques effectuées dans la section précédente. En définitive, nous pouvons affirmer que le circuit neuronal de la Figure 2.6 peut être utilisé pour implémenter le modèle de neurone FHN thermo-photosensible couplé à travers une

jonction Josephson et une résistance linéaire.

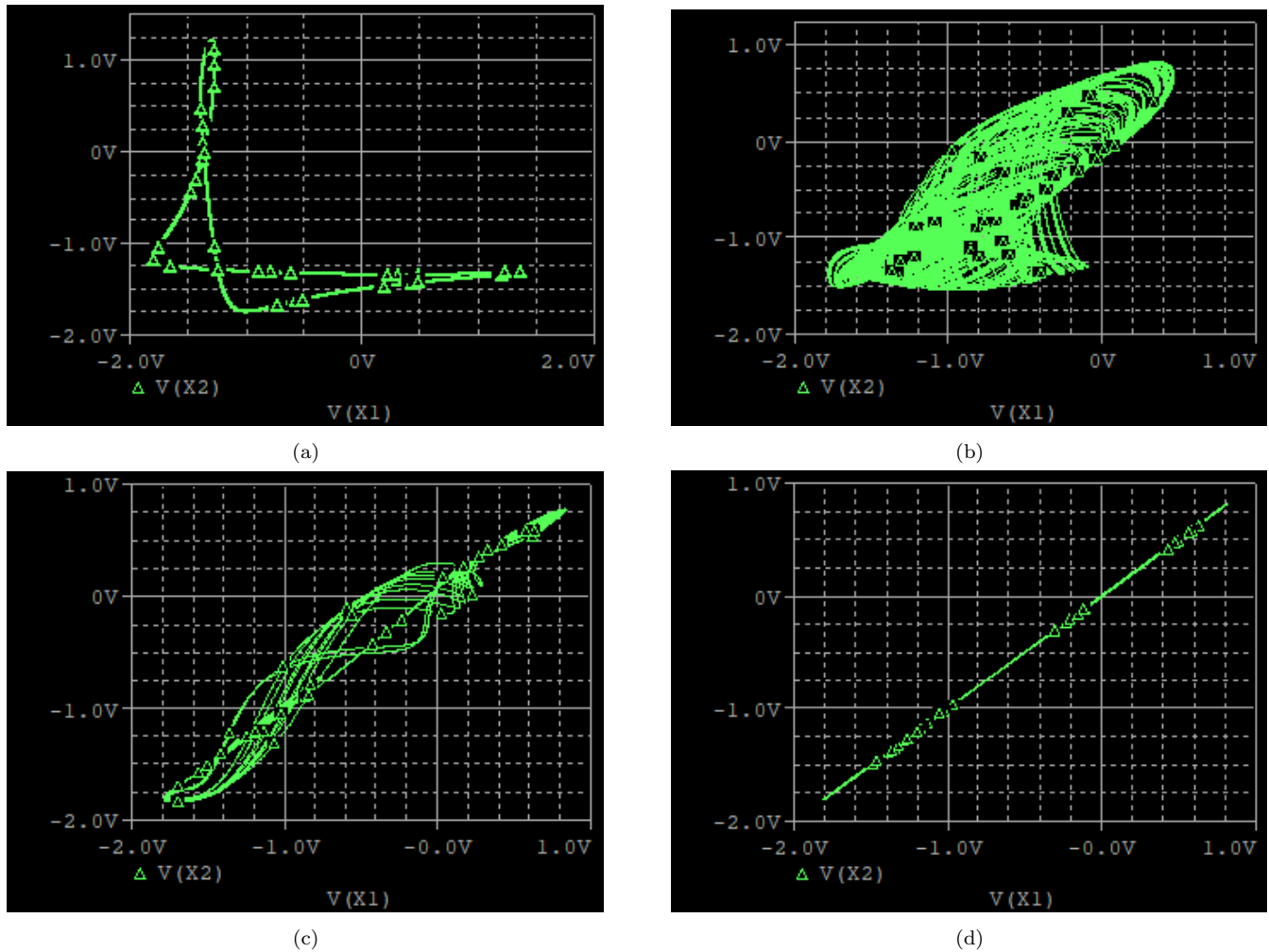


Figure 3.26 – Simulation sur Pspice montrant les attracteurs dans le plan (x_1, x_2) pour a) $R_{51} = R_{52} = 1M\Omega$, b) $R_{51} = R_{52} = 200k\Omega$, c) $R_{51} = R_{52} = 50k\Omega$ et d) $R_{51} = R_{52} = 20k\Omega$.

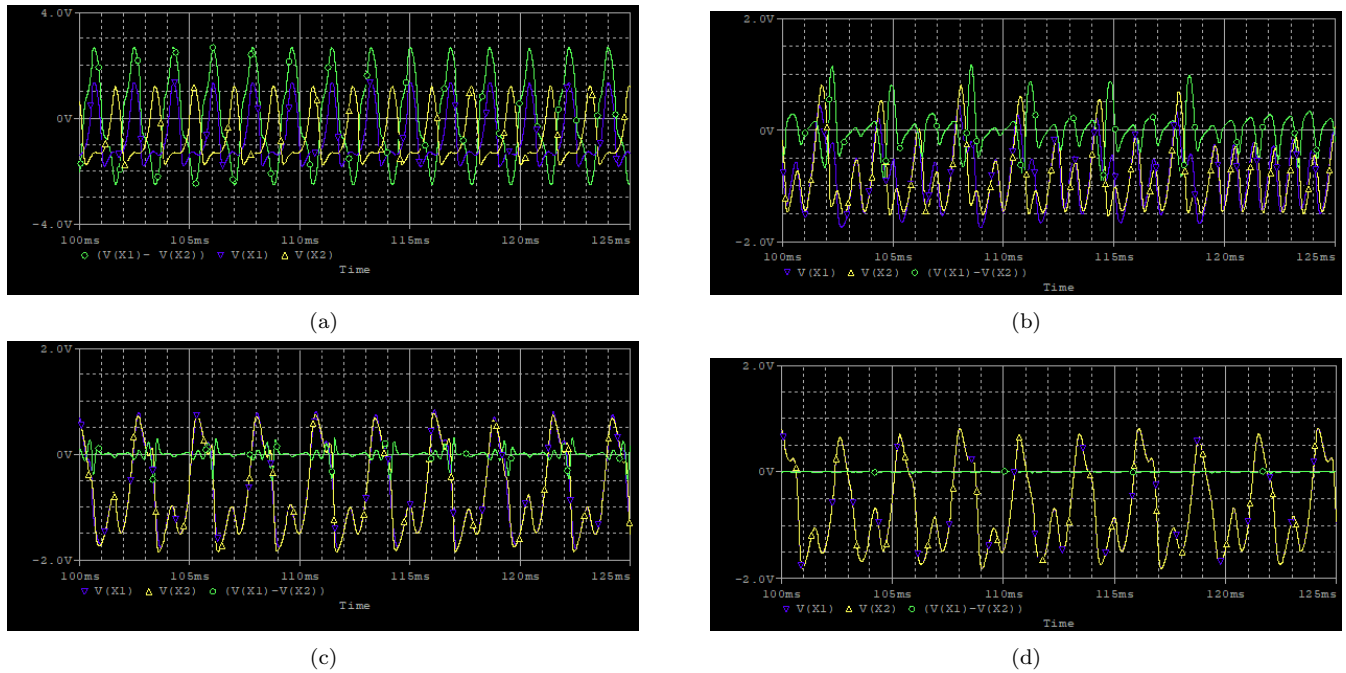


Figure 3.27 – Simulation sur Pspice montrant la série temporelle du potentiel de membrane du premier neurone et du second neurone ainsi que l’erreur de phase entre les potentiels de membrane pour a) $R_{51} = R_{52} = 1M\Omega$, b) $R_{51} = R_{52} = 200K\Omega$, c) $R_{51} = R_{52} = 50K\Omega$ and d) $R_{51} = R_{52} = 20K\Omega$.

3.2.2 Couplage neuronal via une synapse à memristor

Quatre décennies après que Chua ait postulé l’existence du memristor comme quatrième quatuor manquant dans la famille des éléments de circuit fondamentaux comprenant des résistances, des condensateurs et des inductances, Strukov et al. (2008) des laboratoires Hewlett-Packard ont conçu le premier exemple physique approximatif d’un memristor en tant que dispositif nanoélectronique de TiO_2 [39]. En tant qu’élément non linéaire, la caractéristique courant-tension ($i - v$) du memristor est une boucle d’hystérésis pincée dont la forme varie avec la fréquence et tend vers une ligne droite lorsque la fréquence tend vers l’infini [140, 208]. Cette propriété non linéaire a été bien exploitée dans la littérature en remplaçant les éléments non linéaires dans plusieurs circuits existants par des émulateurs de memristor actifs ou passifs [207–211]. Dorénavant, dans cette section, il sera d’un grand intérêt d’étudier l’effet du synapse à memristor dans le circuit neuronale défini dans la Section 2.1.3 définie au chapitre §2.

3.2.2.1 Synapse à Memristor

Il est bien de noter que la dynamique du modèle de memristor définie à l’équation 2.17 est fonction d’un stimulus externe et du flux d’état interne du memristor. Afin de présenter la caractéristique tension - courant du memristor définie à l’équation 2.17, nous considérons le stimulus externe comme une tension sinusoïdale décrit par $v = A \sin(2\pi Ft)$, où A désigné l’amplitude de la tension sinusoïdale et F sa fréquence. La Figure 3.28 nous permet d’observer des boucles d’hystérésis pincées du memristor dans le plan tension-courant $v - i$ pour différentes valeurs de l’amplitude A , la fréquence F et de l’état initial du flux (φ) lorsque les autres paramètres sont fixés. Les Figures 3.28a et 3.28b sont obtenues respectivement en fixant $F = 1$ et $A = 1.4$ avec $\varphi_0 = 0$. Au regard de ces figures, on constate que ces boucles d’hystérésis

pincées traversent tous l'origine dans le plan $v - i$ lorsque l'amplitude et la fréquence du stimulus sont approuvées. La Figure 3.28c est obtenue en fixant $F = 1$ et $A = 1.4$ pour différentes valeurs de l'état initial φ_0 . A travers cette figure, on peut constater que la variation des états initiaux φ_0 induire à un changement des boucles d'hystérésis pincées dans le plan $v - i$, ce qui nous permet d'affirmer que ce modèle de memristor peut induire une extrême multistabilité d'où le nom de memristor multistable.

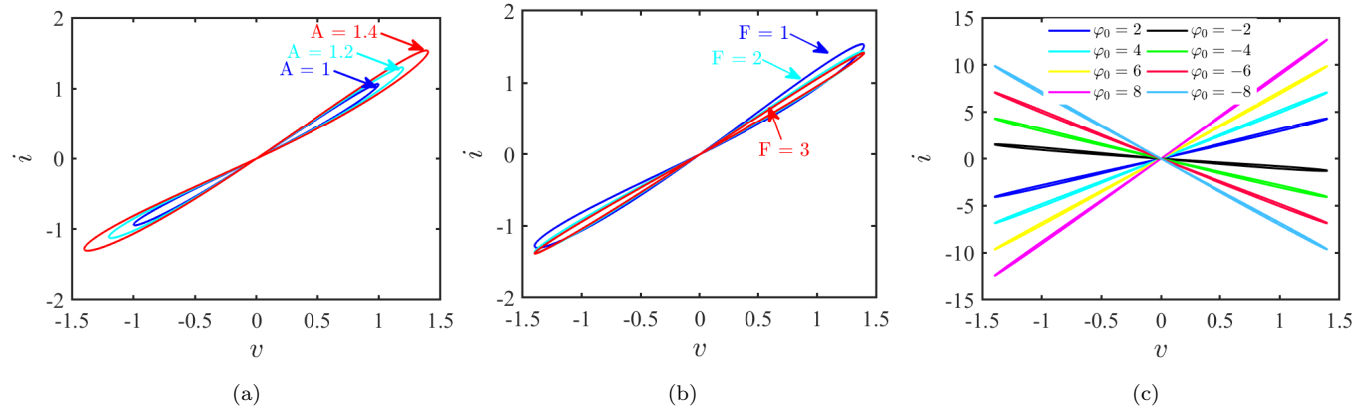


Figure 3.28 – Boucles d'hystérésis pincées du memristor multistable piloté par un stimulus sinusoïdal $v = A \sin(2\pi Ft)$. (a) $F = 1$, $\varphi_0 = 0$ et différente valeur de A . (b) $A = 1.4$, $\varphi_0 = 0$ et différente valeur de F . (c) $F = 1$, $A = 1.4$ et différente valeur de φ_0 .

3.2.2.2 Propriétés dynamique induite par les paramètres intrinsèques du modèle neuronal multistable

Le but principal de cette section consiste à faire des investigations intégrales sur la dynamique du modèle de neurone couplé via une synapse memristif. A cet effet, l'algorithme Runge-Kutta du quatrième ordre est appliqué pour trouver des solutions numériques du système dynamique avec un pas de temps $h = 0.001$. Afin de caractériser la dynamique complexe non linéaire des neurones couplés, nous utilisons des outils d'analyse tels que les graphes d'exposant de Lyapunov à un et deux paramètres, les diagrammes de bifurcation, les diagrammes temporelles, les portraits de phases et les bassins d'attractions. Les analyses sont faites en considérant les valeurs des paramètres intrinsèques suivantes $a = 0.7$, $b_0 = b = 0.8$, $c = 0.1$, $\xi_P = \xi_0 = 0.15$, $A_0 = 1$, $T' = 5$, $\alpha = 20$ et $\beta = 1$.

A- Régime chaotique

Afin de mettre en évidence la dynamique complète des deux neurones couplés via une synapse memristif, nous utiliserons comme paramètres de bifurcation les variables liés aux courants de forçage externes produit par le phototube I_0 et par la thermistance f ainsi que le force de couplage k .

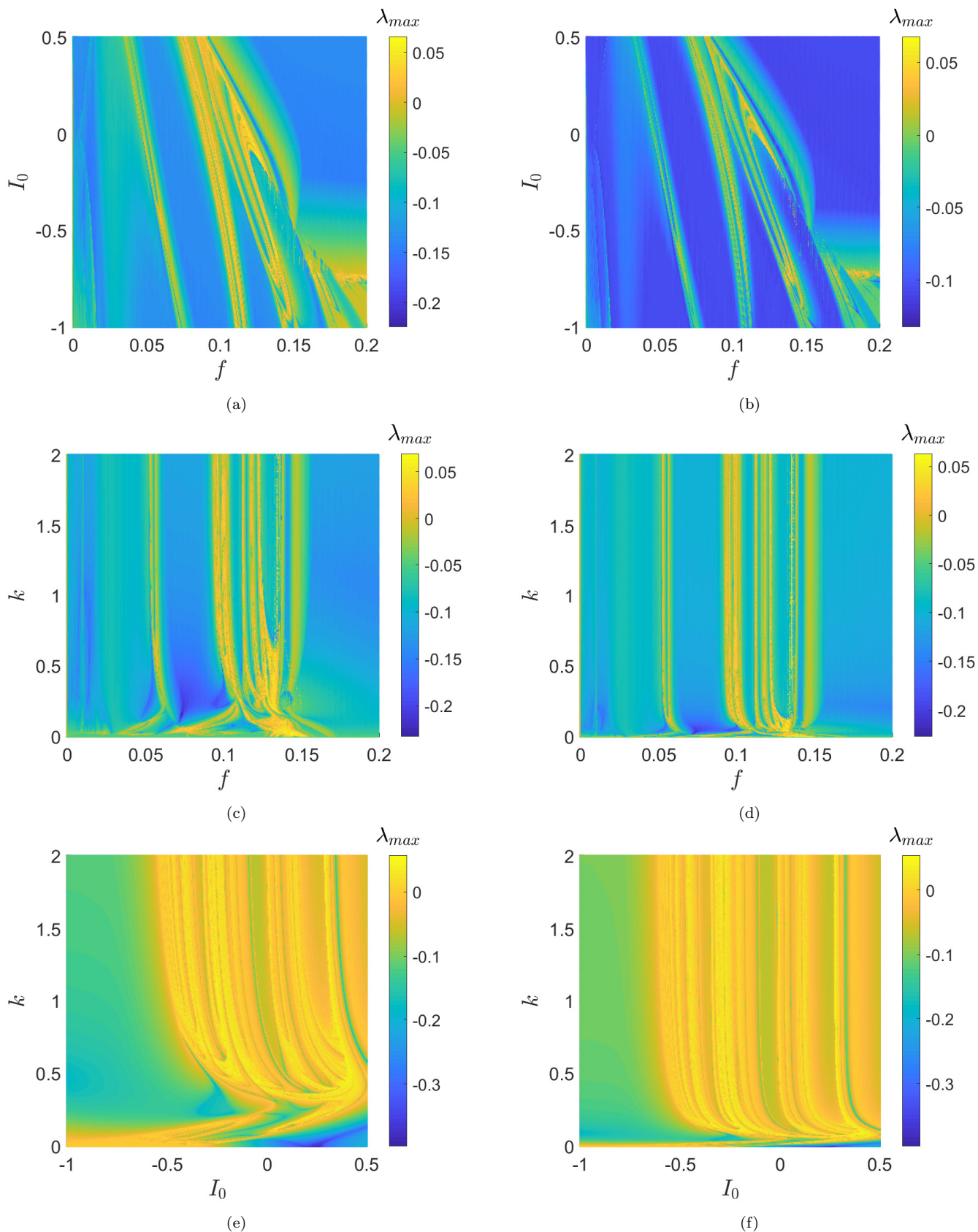


Figure 3.29 – Diagrammes d’exposant de Lyapunov à deux paramètres montrant le plus grand exposant de Lyapunov λ_{max} dans les plans $I_0 - f$, $f - k$ and $I_0 - k$ permettant d’observer les différents comportements des neurones couplant via la synapse memristive. Les paramètres varient comme suit a, b) $k = 1$, $-1 < I_0 < 0.5$ et $0 < f < 0.2$, c, d) $I_0 = -0.26$, $0 < f < 0.2$ et $0 < k < 2$ et e, f) $f = 0.1$, $-1 < I_0 < 0.5$ et $0 < k < 2$. Les diagrammes de gauche et de droite sont obtenus respectivement avec les états initiaux $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1)$ et $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 4.1)$.

La Figure 3.29 nous présente des diagrammes d'exposant de Lyapunov à deux paramètres. Ceux de gauche sont obtenus avec la condition initiale $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1)$ et ceux de droite avec la condition initiale $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 4.1)$. En regardant de près les Figures 3.29a - 3.29f, nous remarquons que les diagrammes de gauche et de droite présentent des zones de divergences lorsque les paramètres de contrôle sont ajustés. Cette divergence nous permet de justifier que ce modèle couplé puisse engendrer la coexistence de plusieurs attracteurs, ceux-ci étant dûs aux phénomènes des branches parallèles. En outre, la variation de l'exposant de Lyapunov mis en exergue sur ces diagrammes nous permet de comprendre que le modèle couplé présente des comportements réguliers (périodiques) lorsque $\lambda_{\max} < 0$ et des comportements irréguliers (chaotiques) lorsque $\lambda_{\max} > 0$.

Pour une meilleure illustration des différents comportements qu'on pourra observer pendant la transition entre les activités électriques dans le modèle, nous représentons sur la Figure 3.30 les diagrammes de bifurcation par rapport au maxima locaux de la variable d'état φ et l'exposant de Lyapunov maximum correspondant lorsque le courant de saturation I_0 du phototube varie dans l'intervalle $I_0 \in [-1, 0.5]$.

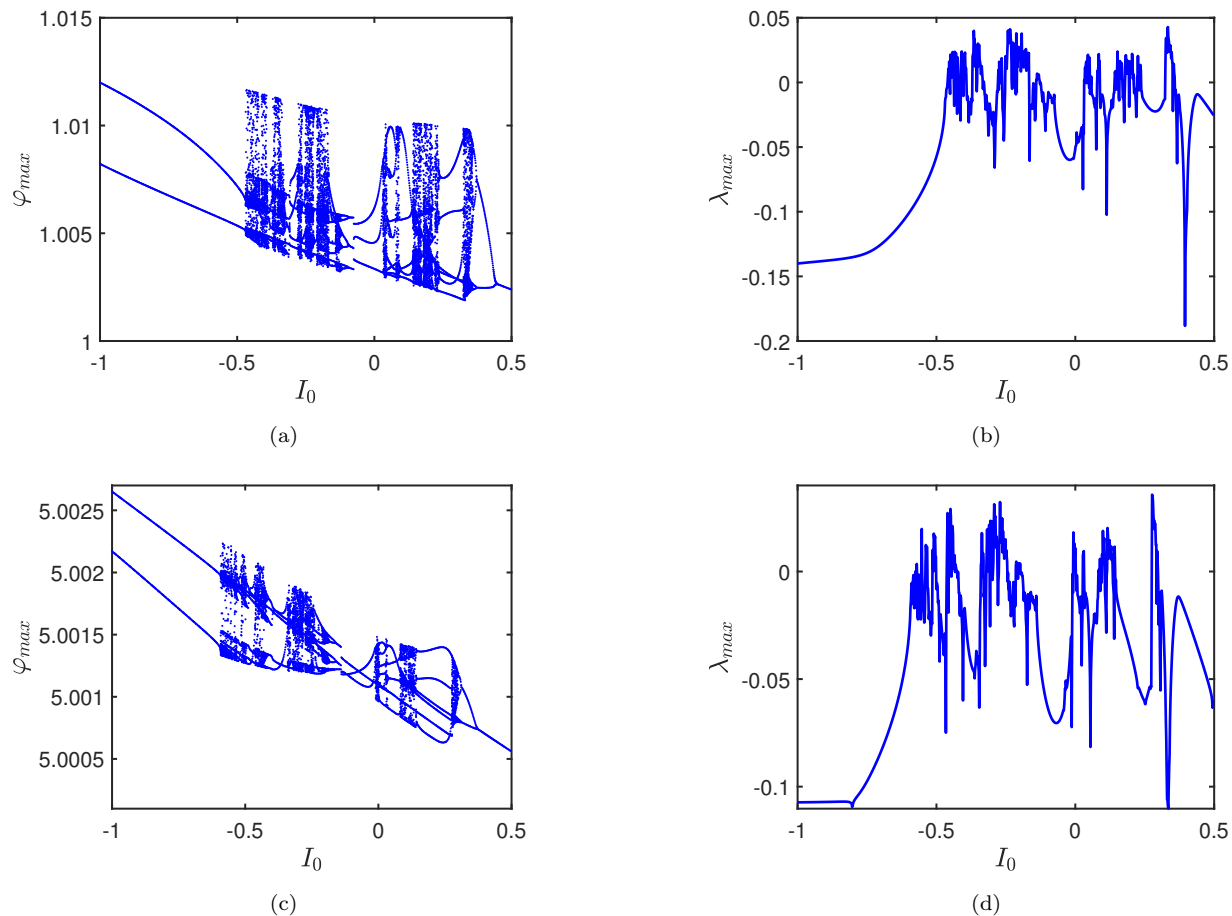


Figure 3.30 – Diagrammes de bifurcation montrant les maxima locaux du flux d'état interne du synapse memristif φ_{max} par rapport à l'intensité du photocourant I_0 ainsi que leurs graphes d'exposant de Lyapunov pour les valeurs de $k = 1$ et $f = 0.1$. Les diagrammes du haut et du bas sont obtenus respectivement avec les conditions initiales $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1)$ et $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 4.1)$.

Les Figures 3.30a et 3.30b sont obtenues respectivement avec les conditions $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1)$

et $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 4.1)$. Par conséquent, les Figures 3.31a et 3.31b présentent les séries temporelles des différentes variables d'états de la dynamique couplée. Ainsi, la Figure 3.31a met en lumière le comportement d'éclatement chaotique tandis que la Figure 3.31b présente un comportement d'éclatement périodique. Une correspondance dans le plan de phase (φ, x_1) de ces deux comportements (d'éclatement chaotique et périodique) est symbolisé respectivement sur les Figures 3.31c et 3.31d et est obtenue avec une même condition initiale $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1)$.

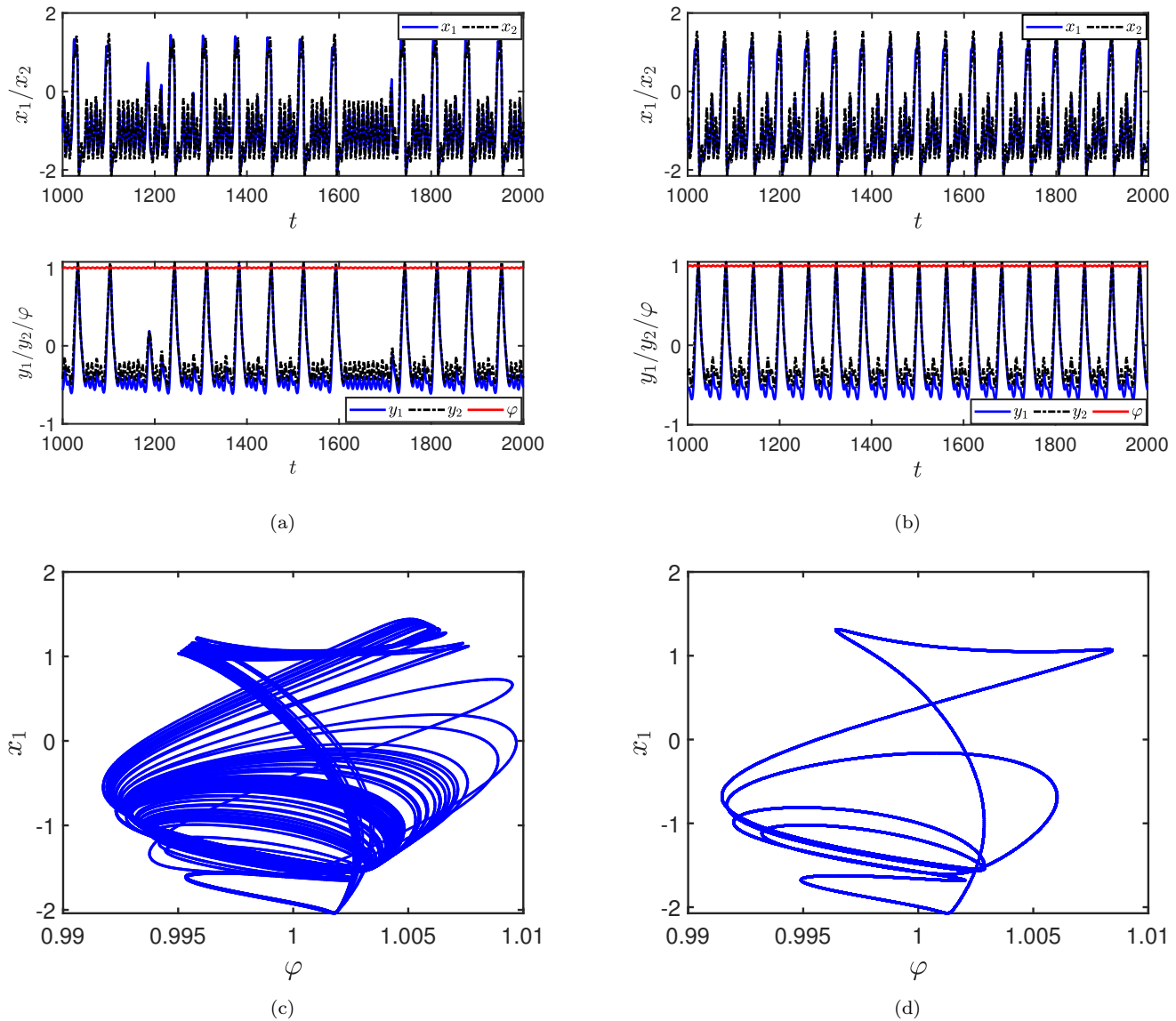


Figure 3.31 – Evolution temporelle des différentes variables d'états des neurones couplés $(x_1, y_1, x_2, y_2, \varphi)$ et la formation de son attracteur dans le plan $(\varphi - x_1)$ pour différentes valeurs de l'intensité du photocourant I_0 appliqué. Les graphes a,c) montrent un éclatement périodique pour $I_0 = 0.18$ tandis-que les graphes b,d) présentent un éclatement chaotique pour $I_0 = 0.3$.

En superposant les diagrammes de bifurcations des Figures 3.30a et 3.30b, on remarque qu'ils sont décalés par rapport à la variable lorsque la condition initiale est modifiée. Ceci nous permet de prédire que ce modèle neuronal couplé peut être sensible aux conditions initiales. Ce qui peut modifier qua-

litativement et quantitativement la dynamique et provoquer d'autres comportements dynamiques plus complexes.

B- Coexistence d'une infinité des régimes dynamiques

Dans la section précédente il a été montré que la dynamique des neurones couplés via une synapse à memristor est sensible à la variation des conditions initiales. En tenant compte de cette hypothèse, il est intéressant dans cette section de montrer que ce modèle neuronal couplé peut engendrer une extrême multistabilité lorsque le flux interne d'état initiale φ_0 varie. Ce phénomène très riche se manifeste par la présence d'une infinité d'attracteurs coexistants pour un rang de paramètres bien définis. Ces attracteurs peuvent être de nature homogène (attracteurs chaotiques coexistant ou attracteurs périodiques coexistant) ou hétérogène (attracteurs chaotiques et périodiques coexistant) pour une force de couplage fixe du memristor multistable.

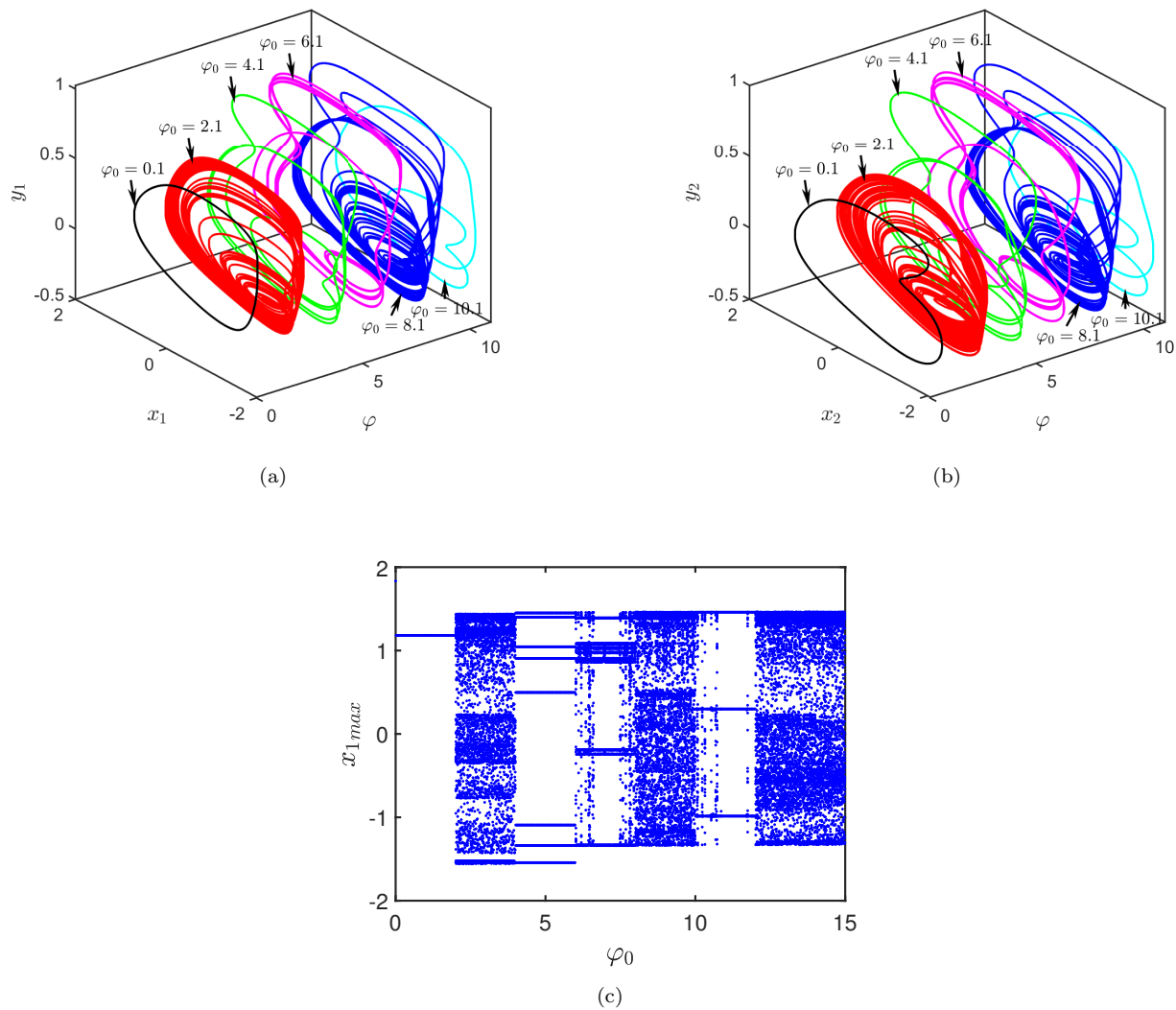


Figure 3.32 – Coexistence d'attracteurs hétérogènes respectivement dans les plans (φ, x_1, y_1) (a) et (φ, x_2, y_2) (b) obtenus avec des états initiaux différents $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, \varphi_0)$ où $\varphi_0 = \{0.1, 2.1, 4.1, 6.1, 8.1, 10.1\}$. le diagramme de bifurcation des conditions initiales (c) montrant les maxima locaux du potentiel de membrane du neurone photosensible par rapport à φ_0 . Ces graphiques sont obtenus pour $k = 0, 2$ et $I_0 = -0, 26$.

Dans ce qui suit, nous considérons le courant de saturation $I_0 = -0.26$. Pour $k = 0.2$, une infinité d'attracteurs hétérogènes peuvent survenir lorsque les conditions d'états initiales $(x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}, \varphi_0)$ sont bien sélectionnées. Pour illustrer cette affirmation, nous présentons sur la Figures 3.32 six attracteurs hétérogènes (attracteurs périodiques et chaotiques) coexistants pour six conditions d'états initiales différentes $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1\theta)$ où $\theta = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Les Figures 3.32a et 3.32b représentent respectivement les différents attracteurs hétérogènes coexistants dans les plans (x_1, y_1, φ) et (x_2, y_2, φ) . Le diagramme de bifurcation des maxima locaux du potentiel membranaire du neurone photosensible en fonction de l'état initiale $\varphi_0 \in [0, 15]$ est présenté sur la Figure 3.32c. Il nous permet de justifier que les attracteurs peuvent changer de comportement lorsque l'état initiale varie avec un pas d'environ 2.

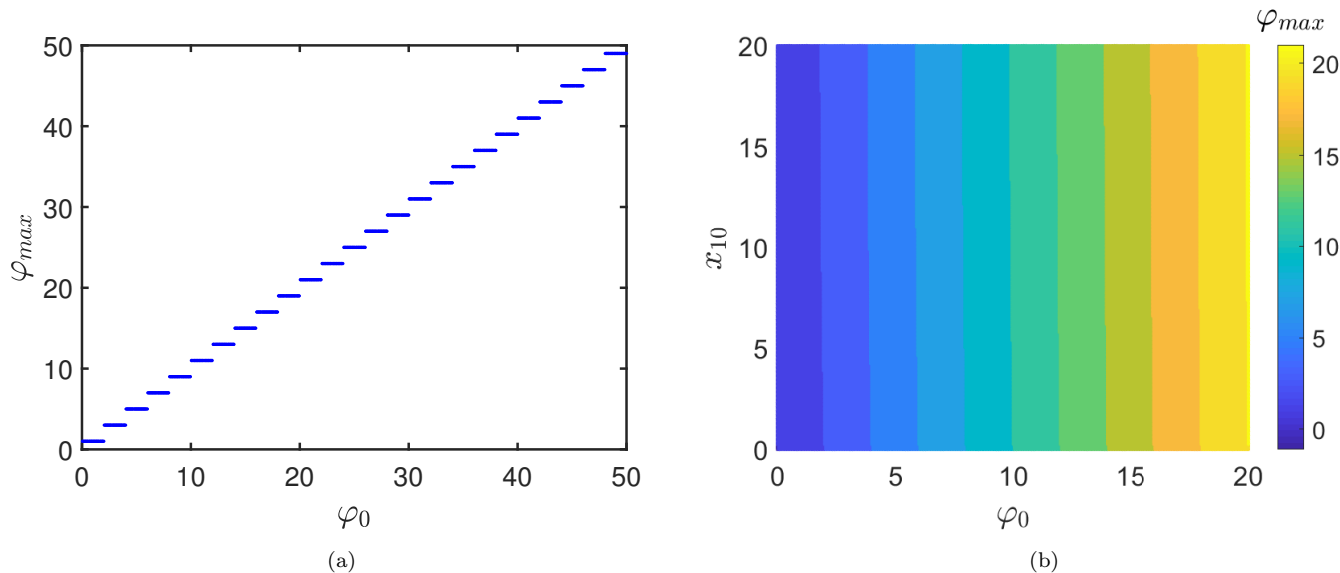


Figure 3.33 – (a) Diagramme de bifurcation montrant la dynamique dépendante de φ_0 avec la condition initiale $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, \varphi_0)$. (b) bassin d'attraction dans le plan $(x_{10} - \varphi_0)$ ainsi que les maxima locaux de φ montrant la coexistence d'attracteurs homogènes de positions différentes. Ces graphiques sont obtenus pour $k = 1,67$ et $I_0 = -0,26$.

Lorsque $k = 1.67$, une infinité d'attracteurs homogènes coexistants de natures chaotiques peuvent également se manifester quand les l'états initiaux $(x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}, \varphi_0)$ sont modifiés. Afin de montrer la coexistence d'une éventuelle infinité d'attracteurs chaotiques homogènes, nous traçons sur la Figures 3.33 le diagramme de bifurcation des maxima locaux du flux d'état interne du memristor multistable en fonction de $\varphi_0 \in [0, 50]$. A travers cette figure, nous constatons que le système neuronal à memristor multistable défini à l'équation 2.21 génère une infinité d'attracteurs chaotiques a des positions différentes lorsque φ_0 augmente avec un pas égal à 2. En outre, la Figures 3.33b montrant le bassin d'attraction local dans le plan (x_{10}, φ_0) nous permet de comprendre d'avantage cette dynamique homogène. Quand nous observons ce bassin d'attraction local, nous remarquons que les différentes régions colorées ont une structure homogène et la position de chaque attracteur est fonction des maxima locaux du flux d'état interne du memristor multistable. Sur la Figures 3.34a, des attracteurs chaotiques homogènes à plusieurs positions sont présentées. Par analogie, ces deux neurones couplés à travers une synapse à memristor multistable peut également générer une infinité d'attracteurs périodiques homogènes à positions varient lorsque φ_0 augmente avec le même pas égal à 2 comme le montre la Figures 3.34b. En

explorant tous ces résultats, nous constatons que la dynamique du système neuronal memristif génère une infinité d'attracteurs coexistants hétérogènes ou homogènes dépendants fortement des états initiaux du système et de la force du couplage k .

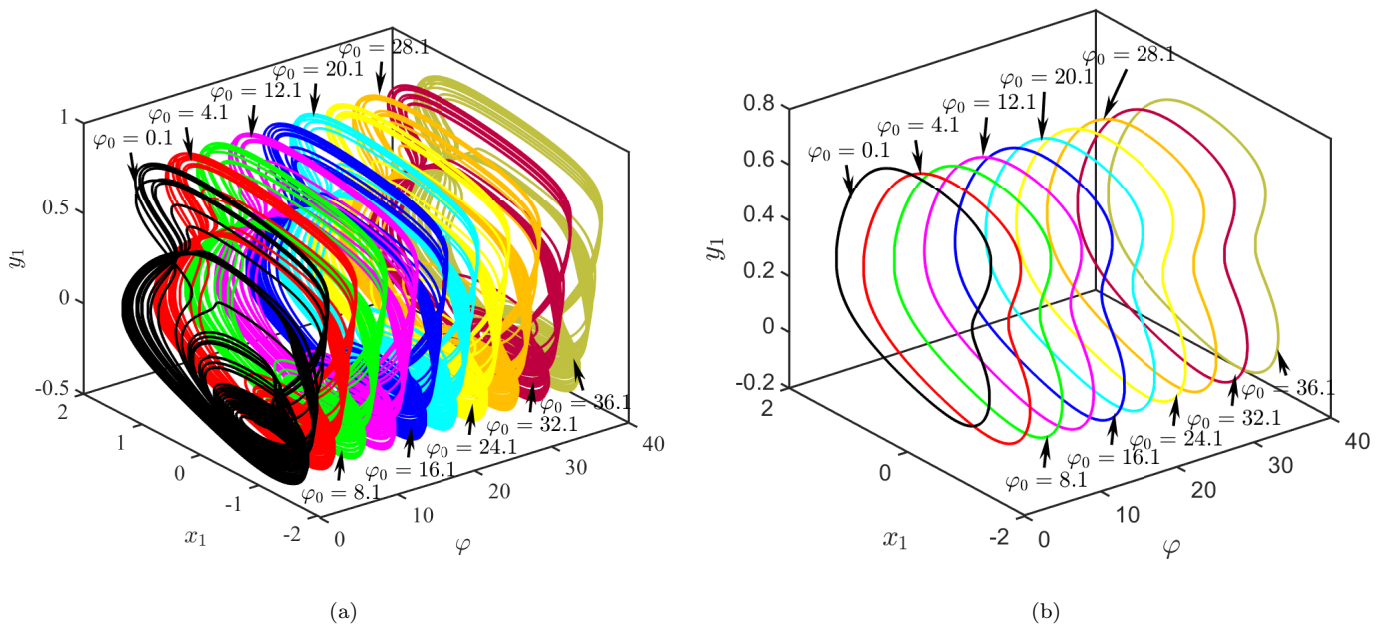


Figure 3.34 – Coexistence homogène d'attracteurs dans le plan (φ, x_1, y_1) obtenu avec différents états initiaux $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, \varphi_0)$ où $\varphi_0 = \{0.1, 4.1, 8.1, 12.1, 16.1, 20.1, 24.1, 28.1, 32.1, 36.1\}$ montrant des attracteurs chaotiques (a) et des attracteurs périodiques (b).

C- Synchronisation de Phase

Dans cette section, il est important de chercher à vérifier si une éventuelle synchronisation de phase peut être atteinte entre le neurone photosensible et thermosensible couplé via une synapse à memristor multistable. Les courbes de la Figures 3.35 nous permettent de montrer qu'il peut y avoir stabilité d'une synchronisation de phase lorsque l'état initiale (φ_0) et la force de couplage (k) sont activées. Il est calculé sur ces figures, l'erreur de phase entre les potentiels membranaires des neurones photosensible et thermosensible par rapport à la condition état initiale ((φ_0)) (Figures 3.35a), l'évolution temporelle des potentiels membranaires du neurone photosensible (couleur bleue), du neurone thermistance (couleur noire) et de la différence des deux neurones (couleur rouge) (Figures 3.35b), les portraits de Phase sur le plan (x_1, x_2) entre ces neurones (Figures 3.35c) et les portraits de phase sur les plans (x_1, y_1) présenté par la couleur bleue et (x_2, y_2) matérialisé par la couleur noire (Figures 3.35d) pour des valeurs de la force du couplage k différentes. Nous constatons que l'augmentation de la valeur de la force de couplage k permet d'atteindre et d'améliorer de façon efficace la stabilité de la synchronisation de phase.

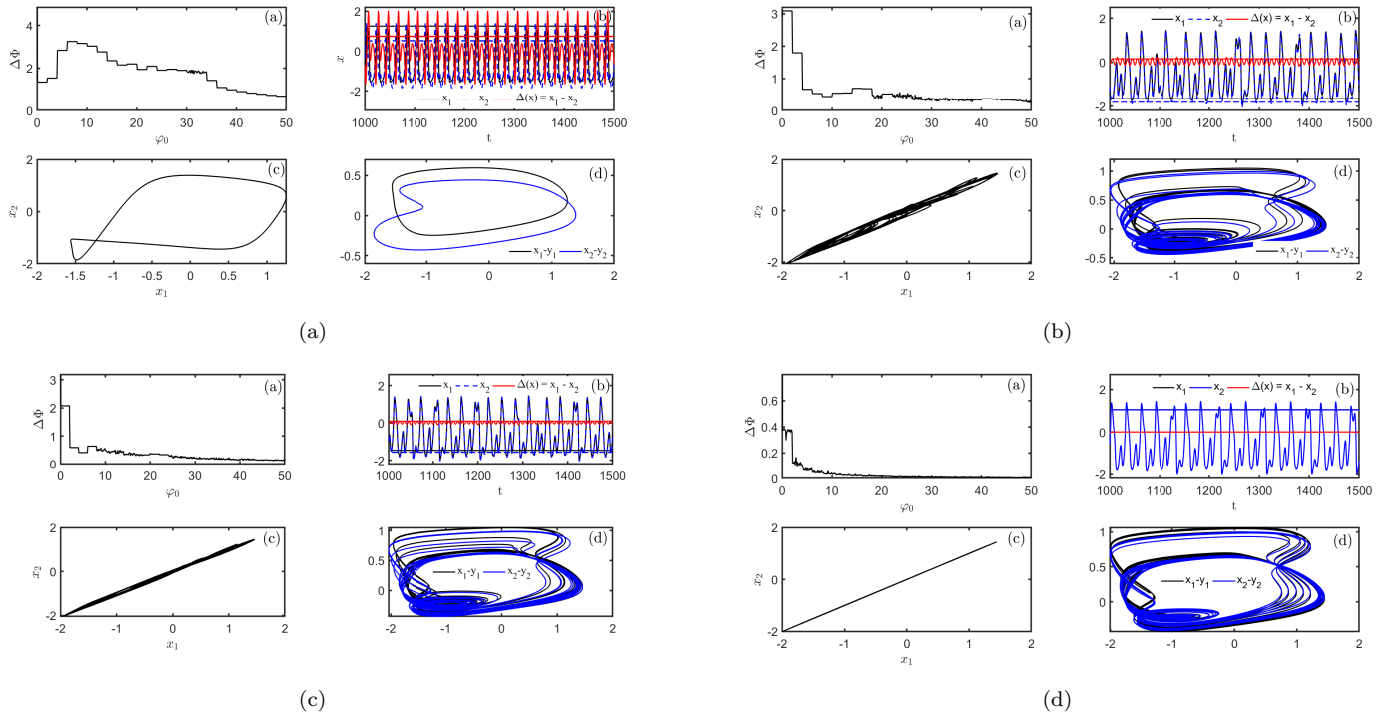


Figure 3.35 – a) erreur de phase entre les potentiels de membrane des neurones photosensible et thermosensible par rapport à l'état initial φ_0 , b) évolution temporaire des potentiels de membrane du neurone photosensible (couleur bleue), du neurone thermosensible (couleur noire) et de la différence des deux neurones (couleur rouge), c) Formation de l'attracteur sur le plan (x_1, x_2) entre les deux neurones et en d) les portraits de phase sur les plans (x_1, y_1) présentés par la couleur bleue et (x_2, y_2) matérialisé par la couleur noire avec les paramètres suivants : $a = 0.7, b = b_0 = 0.8, c = 0.1, \xi_1 = \xi_0 = 0.15, T' = 5, f = 0.1, \alpha = 20, \beta = 1$ et $I_0 = -0.26$. Les graphiques A_i, A_{ii}, A_{iii} et A_{iv} sont obtenus respectivement avec les valeurs de la force de couplage $k = \{0.005, 0.05, 0.1, 2\}$.

3.2.2.3 Approche électronique sur Pspice

Le but de cette section est de présenter les résultats de simulation expérimentale sur Pspice du circuit électronique du modèle de deux neurones FHN photosensible et thermosensible couplés via un memristor multistable présenté dans la Section 2.4.3 du chapitre §2. En gardant à l'esprit que le processus de mise à l'échelle temporelle offre aux instruments analogiques la possibilité de travailler avec leurs bandes passantes, l'unité de temps ici est 10^{-4} . En effet, ce procédé offre la possibilité de simuler le comportement du système à une fréquence donnée en effectuant une mise à l'échelle temporelle appropriée consistant à exprimer la variable temporelle MATLAB τ pour la variable temporelle de calcul Pspice t : $t = RC\tau = 10^{-n}\tau$ avec $n \in N$ [192]. En considérant un temps constant soit $R = 10K\Omega$ et $C = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 10nF$, le multiplicateur de gain $\gamma = 10, x_i = X_i/1V, y_i = Y_i/1V$ et les expressions définies à l'équation 2.24, les différentes valeurs des paramètres du circuit électronique sont définies comme suit : $R_{11} = 11.76K\Omega; R_{31} = 11.4K\Omega; R_{12} = R_{32} = R = 10K\Omega; R_{13} = R_{33} = 30K\Omega; R_{14} = \text{variable}; R_{34} = 12.21K\Omega; R_{15} = R_{35} = \text{variable}; R_{21} = R_{41} = 100K\Omega; R_{42} = 102.34K\Omega; R_{22} = 125K\Omega; R_{23} = R_{43} = 142.8K\Omega; R_{51} = 500\Omega; R_{52} = 10K\Omega; f_s = 1000Hz; E_1 = E_2 = E_3 = E = 1V$ et $A = 1V$.

Le Circuit électronique conçu à la Figure 2.8 et simulé par le logiciel de simulation électronique Pspice permet de reproduire les mêmes comportements dynamiques observés lors des simulations numériques du

système neuronal memristif défini à l'équation 2.21. Pour illustrer cette affirmation, nous présentons les résultats Pspice montrant deux attracteurs (Figures 3.36a et 3.36b) générant des comportements d'éclatement chaotique et périodique comme observés à la Figure 3.31c et 3.31d. Nous montrons également sur la Figures 3.37 que ce circuit électronique est capable d'exhiber une infinité d'attracteurs homogène coexistants de nature chaotique. On peut bien observer à travers ce diagramme que les attracteurs conçus dans le plan (w, x_1) sont presque identiques avec une nature chaotique, donc homogène où $w = \varphi$. Par analogique, il peut également générer une infinité d'attracteurs non-homogènes (hétérogènes) coexistants lorsque les paramètres sont bien sélectionnés. Au regard de ces résultats de simulations, nous pouvons affirmer que ce circuit électronique de la Figure 2.8 peut être utilisé pour implémenter le couplage de deux neurones via un synapse à memristor multistable.

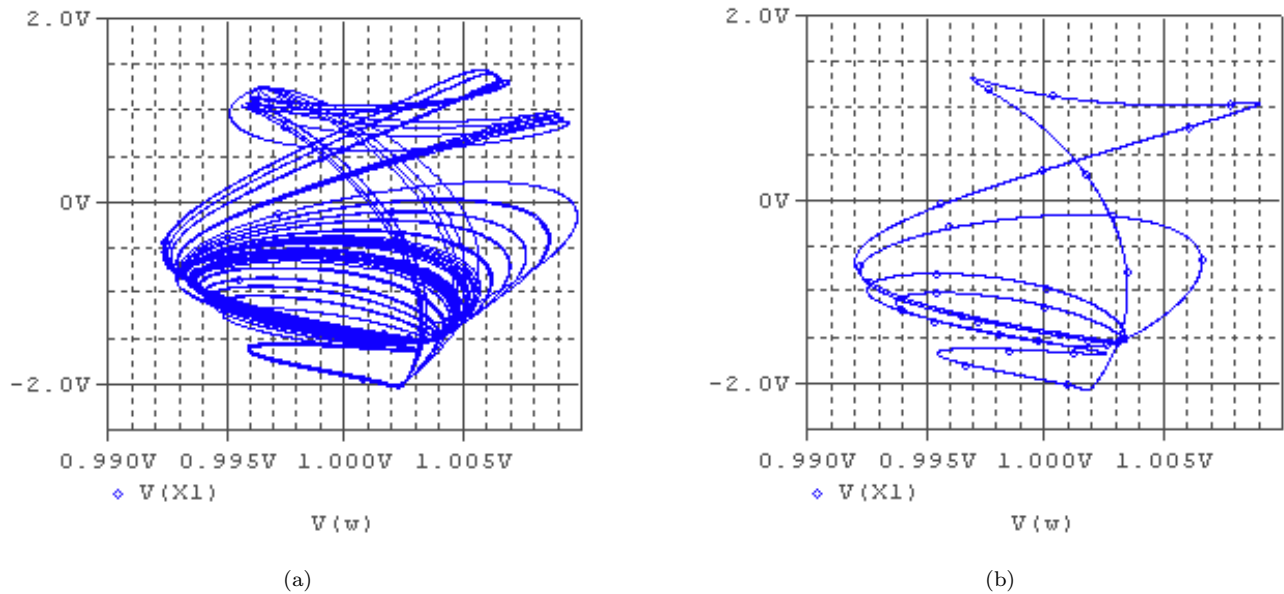


Figure 3.36 – Formation d'attracteurs dans Pspice pour différentes valeurs de l'intensité du photocourant I_0 appliqué. (a) schéma de tir d'éclatement chaotique pour $R_{14} = 55.55k\Omega$ et (b) schéma de tir d'éclatement périodique pour $R_{14} = 33.33k\Omega$ avec $R_{15} = R_{35} = 10k\Omega$ et la condition initiale $(0.2V, 0.1V, 0.2V, 0.1V, 0.1V)$.

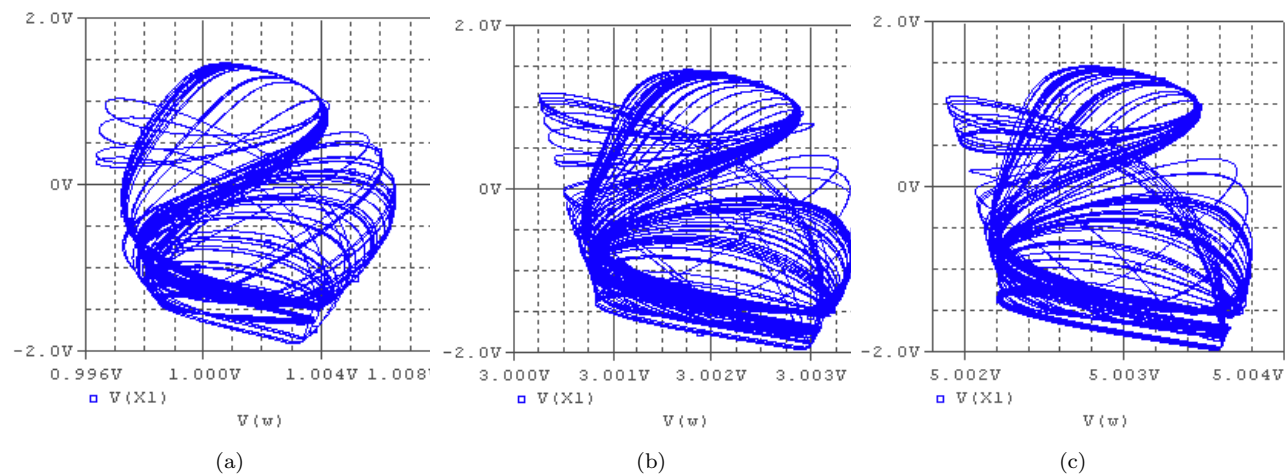


Figure 3.37 – Coexistence de certains attracteurs homogènes obtenus sur Pspice avec les états initiaux $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, W(0))$ où les valeurs de $W(0)$ sont sélectionnées respectivement comme suit $0.1V$, $2.1V$ et $4.1V$. On considère $R_{14} = 38.76k\Omega$ et $R_{15} = R_{35} = 5.96k\Omega$.

3.2.3 Contrôle des comportements coexistants dans des neurones couplés

Le phénomène de multistabilité dans l'étude de la dynamique cérébrale est très important pour justifier une crise d'épilepsie (comportement périodique) qui coexiste avec un état normal du cerveau (comportement chaotique) [116, 216]. Ceci dit, il est très intéressant de contrôler ce phénomène de multistabilité, afin d'éliminer l'état pathologique du cerveau (épilepsie). En tenant compte des études menées précédemment, le phénomène de multistabilité produit dans le modèle a deux neurones couplés via une synapse à memristor définie à l'équation 2.21 est contrôlable car la position et l'état initial de chaque attracteur peuvent être bien sélectionnés. Sur la base des travaux de Kiran et al [218], le schéma de commande permettant de sélectionner un attracteur spécifique dans une dynamique multistable à m -dimensions $\dot{X} = G(X)$ a été proposé comme suit :

$$\dot{X} = G(X) - \varepsilon h(X)C \times (X - B) \quad (3.8)$$

Où X et $G(X)$ désignent le vecteur m -dimension des variables d'état et le champ vectoriel respectivement. ε est la force de rétroaction, $C = \{C_{ij}\}$ est une matrice, $h(X)$ est un terme dépendant de l'espace et le vecteur B représente le point fixe instable au voisinage de l'attracteur souhaité.

Afin de conserver les propriétés dynamiques du système, on considère :

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{et } B_{i=1} = b \quad (3.9)$$

La fonction $h(X)$ peut être défini comme :

$$h(X) = \begin{cases} 1 & \text{if } X \in R' \\ 0 & \text{if } X \notin R' \end{cases} \quad (3.10)$$

Où $R' \subset R$ est un sous-ensemble de l'espace d'état complet et R est un sous-ensemble du système. Il est à noter que le choix de R' dépend de l'espace d'états du système considéré. Régulièrement, R' est

sélectionné de telle sorte que la trajectoire de l'attracteur souhaité n'existe pas dans cet espace R' . Par conséquent, le terme de rétroaction s'annule lorsque la dynamique du système est dirigée d'un attracteur donné vers l'attracteur désiré pour le choix de $h(X)$, ce qui permet au système dynamique de passer d'un système multistable vers un système monostable pour un ensemble de paramètres choisis.

En guise d'exemple, nous appliquons cette méthode de contrôle décrite précédemment sur le système neuronal memristif défini à l'équation 2.21. En considérant que la dynamique présente une infinité d'attracteurs homogènes de nature chaotiques comme indiqué dans la Section 3.2.2 précisément à la Figures 3.34a, Il est question pour nous de supprimer les attracteurs chaotiques à flux important pour en rester uniquement avec l'attracteur chaotiques à flux faible en conservant la dynamique intrinsèque du système. Le couplage rétroactif est introduit le long de la variable φ avec une force de rétroaction ϵ comme indiqué dans l'équation 3.11.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - \xi_P)x_1 - y_1 - \frac{1}{3}x_1^3 + I_0 \arctan(x_1 - 1) - k\varphi(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_1 = c(x_1 - by_1 + a) \\ \dot{x}_2 = (1 - \xi_0 e^{-\frac{1}{T'}})x_2 - y_2 - \frac{1}{3}x_2^3 + A_0 e^{-\frac{1}{T'}} \cos(2\pi ft) + k\varphi(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = c(x_2 - b_0 e^{\frac{1}{T'}} y_2 + a) \\ \dot{\varphi} = \alpha \sin(\pi\varphi) + \beta(x_1 - x_2) - \epsilon h(\varphi)(\varphi - b) \end{cases} \quad (3.11)$$

Nous définissons une région de l'espace d'états R' telle que $\varphi \in [1.1, 50]$. La fonction $h(\varphi)$ est donc définie par :

$$h(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1.1 < \varphi < 50 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.12)$$

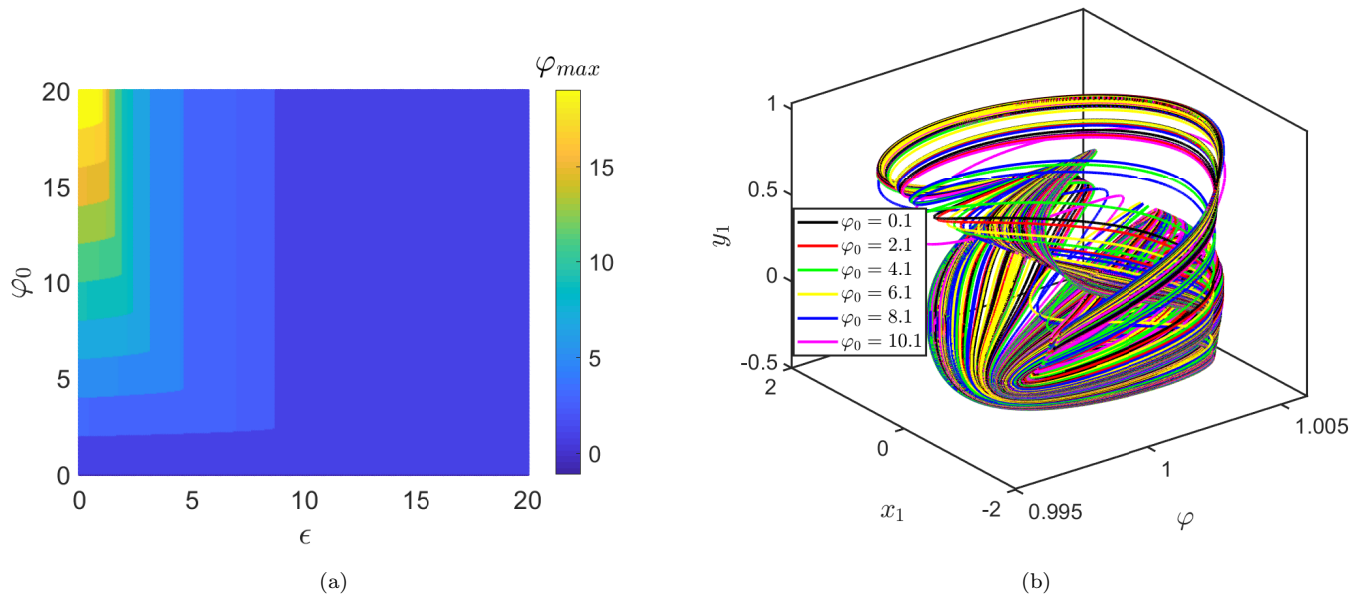


Figure 3.38 – Diagramme de bifurcation à deux paramètres (ϵ, φ_0) en fonction φ_{max} (a) montrant la dynamique des neurones couplés lorsqu'un contrôleur à rétroaction est appliqué. En (b) formation de l'attracteur désiré dans le plan (φ, x_1, y_1) avec des conditions initiales différentes pour une valeur de $\epsilon = 8.75$.

La Figure 3.38a, montre un diagramme des maxima locaux de la variable φ à deux paramètres (φ et ε) pour une valeur de sélectionnée dans la zone de l'attracteur souhaitée. Nous remarquons que, lorsque la force de rétroaction ε augmente, la dynamique du système neuronal memristif tend vers la dynamique souhaitée quelle que soit la variation de l'état initial φ_0 . Ainsi, cette monostabilité est atteinte lorsque la valeur de la force de rétroaction est $\varepsilon = 8.75$. En observant la Figure 3.38b, nous affirmons que tous les attracteurs chaotiques commutent vers l'attracteur désiré bien que φ_0 varie. Nous pouvons conclure que pour une valeur de la force de rétroaction $\varepsilon > 8.75$, la dynamique du système neuronal memristif transite d'un système multistable vers un système monostable.

Conclusion

Ce chapitre a présenté les résultats obtenus à partir de nos enquêtes et discussions connexes. En appliquant la méthodologie et les méthodes élaborées dans le deuxième chapitre, nous avons commencé par évaluer l'effet simultané de la lumière et de la température sur la dynamique du modèle de neurones proposé par FitzHugh-Nagumo en 1962. Il découle de ces premiers résultats que la lumière et la température peuvent influencer qualitativement et quantitativement les propriétés dynamiques du neurone. Par la suite, nous avons évalué les effets des couplages synaptiques sur la dynamique des neurones FHN homogènes et hybride. Premièrement, nous proposons de coupler deux modèles de neurones FHN thermo-photosensibles via une synapse à Jonction Josephson pour étudier les mécanismes de synchronisation (synchronisation complète et de synchronisation de phase) lorsque les paramètres de couplages sont apprivoisés. Ensuite, nous proposons de coupler deux modèles de neurones hybrides à travers une synapse à memristor multistable. Les résultats de nos investigations sur ce dernier modèle nous présentent une complexité de ces propriétés dynamiques et une synchronisation de phase pouvant survenir lorsque les propriétés du canal de couplage sont modification. Pour finir, nous proposons une approche de contrôle des régimes coexistants dans des modèles de neurones couplés. Pour chacun des modèles de neurones couplés ou non, des simulations sur des cartes à microcontrôleur ou des simulations PSpice sont présentées pour montrer la faisabilité et la validité du modèle proposé.

Conclusion Générale

Contributions

De nos jours, il est important de réaliser des systèmes neuronaux artificiels capables de modéliser l'activité électrique des neurones biologiques en prenant en compte la quasi-totalité des propriétés de l'environnement intracellulaire et extracellulaire dans lequel ils se trouvent. C'est dans cet esprit que nous proposons et analysons dans le cadre de cette thèse les modèles améliorés de FitzHugh-Nagumo (FHN) qui prennent en compte les effets photoélectriques et thermoélectriques. Rappelons que ces effets se produisent lorsque le milieu cellulaire est exposé simultanément à la lumière et à la température. ces effets peuvent induire des fluctuations du potentiel membranaire due à la modification de la concentration en ions dans la cellule. Pour atteindre nos objectifs définis à l'introduction générale, nous avons, dans le premier chapitre, présenté les notions de biologie et de neurophysiologie qui permettent de comprendre les différentes étapes de la modélisation mathématique du fonctionnement des neurones. Ensuite, plusieurs modèles neuronaux ont été présentés en partant du célèbre modèle de Hodgkin-Huxley (HH). Il est bien de noter que ces multitudes modèles neuronaux ont été implémentés suite aux travaux innovants de Hodgkin-Huxley dont l'objectif étaient de répondre aux contraintes de coût et de temps de calcul, ainsi qu'aux impératifs biologiques. Nous nous sommes intéressés par la suite au modèle (FHN). Compte tenu de l'importance des effets biophysiques sur la dynamique des neurones biologiques, il est à noter que la lumière ou la température peuvent jouer un grand rôle dans la dynamique cérébrale. Ainsi, la littérature nous a permis de comprendre que ces effets pris simultanément sont très rarement pris en compte dans l'étude dynamique du comportement des neurones. Dans le deuxième chapitre, les différents outils théoriques, numériques et expérimentaux utilisés pour trouver les différents résultats ont été présentés brièvement. Nous avons commencé par présenter les méthodes analytiques, puis les méthodes numériques. Par la suite, nous avons présenté les outils informatiques pour la caractérisation des activités électriques des modèles de neurones et les méthodes d'analyse des circuits de ces modèles. Et enfin, nous avons décrit explicitement les modèles de neurones qui font l'objet de cette thèse, ainsi que leurs circuits électroniques équivalents. Le chapitre trois quant à lui est subdivisé en deux grandes parties essentielles. Dans la première partie, les outils standards pour l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires sont utilisés, pour évaluer l'effet simultané de la lumière et de la température sur la dynamique du modèle neuronal proposé par FitzHugh-Nagumo en 1962. Rappelons que dans cette configuration neuronale, un phototube et deux thermistances sont utilisés pour activer le neurone. Le phototube capte

la lumière et la converti en un photo-courant pouvant exciter le neurone, tandis qu'une thermistance converti une source de chaleur en un courant électrique pouvant également exciter le neurone. enfin, une autre thermistance est utilisé pour percevoir les changements de température dans le neurone. Cet assemblage nous permet d'avoir ainsi un modèle de neurone sensible à la lumière et à la température. Sur la base de ce modèle, les principales propriétés telles que le point d'équilibre et sa stabilité, les diagrammes de bifurcation, le spectre de Lyapunov, les séries temporelles du potentiel de membrane et les portraits de phase sont étudiés en profondeur. Il a été démontré par une analyse détaillée que la variation de température produite par la thermistance modifie le nombre et la nature des points d'équilibre du système et induit également une bifurcation de Hopf. Il est également vérifié que le neurone peut passer d'un état de repos à un état oscillatoire et inversement. De plus, pour une large gamme de valeur des courants d'excitations produit par le phototube et la thermistance, le neurone présente des comportements complexes et variés du potentiel membranaire tels que des états de repos, de pointe, d'éclatement et même chaotiques et des phénomènes très riches et complexes. Ces phénomènes complexes sont, entre autres, des bifurcations telles que le dédoublement de période, le dédoublement de période inverse, l'intermittence (crise) et l'antimotonicité. Par ailleurs, il a été démontré qu'il est possible de reproduire expérimentalement les activités électriques du modèle neuronal en utilisant une carte à microcontrôleur associé à des réseaux de résistances $R-2R$ servant de conversion des signaux numériques en signaux analogiques. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous présentons les résultats liés à deux topologies de communication entre deux neurones. Dans la première topologie, une synapse hybride conçu à l'aide d'une jonction Josephson idéale en parallèle avec une résistance linéaire est utilisé pour coupler deux neurones thermo-photosensibles pilotés simultanément par un phototube et une thermistance. Cette configuration nous permet l'évaluation du champ magnétique externe dans le circuit neuronal. Les résultats de nos investigations ont permis de comprendre que pour des faibles valeurs des paramètres du canal de couplage, on observe que chaque neurone génère sa propre dynamique. Au fur et à mesure que ces paramètres évoluent, les neurones interagissent entre eux pour produire des dynamiques régulières et irrégulières. Lorsque les valeurs des paramètres du canal de couplage atteignent une valeur suffisamment grande, les deux neurones présentent la même dynamique. Ainsi, on peut observer une synchronisation complète lorsque les circuits neuronaux FHN sont identiques et une synchronisation de phase lorsque les circuits neuronaux FHN sont différents. Pour confirmer ces résultats, des simulations électroniques réalisées avec le logiciel PSpice ont été réalisés à partir de son circuit électronique équivalent présenté au chapitre 2. On constate que les simulations électroniques réalisées sont en harmonie avec les simulations numériques. Par conséquent, ce circuit électronique peut être envisagé pour estimer l'effet du champ magnétique sur la synchronisation lorsqu'on couple les neurones sous l'action du champ magnétique. Dans la deuxième topologie, un memristor est utilisé comme synapse pour coupler deux neurones hybrides l'un exposé à la lumière et l'autre à la température, afin de déterminer l'effet du couplage synaptique sur le système neuronal. Sur la base des techniques traditionnelles d'analyse des systèmes non-linéaires, on montre que le réseau neuronal memristif peut générer des phénomènes riches et complexes tels que les comportements d'éclatements chaotiques et périodiques, la coexistence d'une infinité d'attracteurs homogènes chaotiques ou périodiques et la coexistence d'une infinité d'attracteurs hétérogènes lorsque les

paramètres intrinsèques du memristor multistable sont apprivoisés. De plus, l'apparition d'une stabilité de synchronisation phase est observé lorsque la force de couplage augmente quel que soit l'état initiale du memristor. Afin de contrôler le phénomène d'extrême multistabilité homogène et de pouvoir sélectionner un attracteur désiré, une méthode de contrôle basé sur le terme rétroaction est appliqué au réseau de neurone memristif. Cette technique assez efficace, permet de transiter d'un système multistable vers un système monostable. Ces résultats ont été confirmés par des simulations électroniques faites avec le logiciel Pspice grâce à son circuit électronique équivalent.

Perspectives

Malgré les résultats assez intéressants obtenus dans cette thèse, d'autres points d'intérêt seront résolus dans un futur proche pour compléter et mieux comprendre l'activité neuronale. Nous aimerions mentionner entre autres les points suivants :

- Proposer et analyser un modèle de neurone artificiel qui prend en compte les effets simultanés de la lumière, la température et le son respectivement à travers une phototube, une thermistance et une céramique piézoélectrique.
- A l'aide des simulations PSpice présentées dans cette thèse, construire de véritables circuits électroniques pour modéliser et contrôler artificiellement les différents comportements neuronaux.

Bibliographie

- [1] D. Ham, H. Park, S. Hwang, K. Kim, Neuromorphic electronics based on copying and pasting the brain. *Nat.Electron.* **4**, 635-644, (2021).
- [2] Z. Aram, S. Jafari, J. Ma, J. C. Sprott, S. Zendehtrouh, & V.T. Pham, Using chaotic artificial neural networks to model memory in the brain, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* **44**, 449-59, (2017).
- [3] C. Borgers, *An introduction to modeling neuronal dynamics*, Springer International Publishing, 17, (2017).
- [4] A. Mondal, R. Kumar Upadhyay, J. Ma, B.K. Yadav, & S.K. Sharma, Bifurcation analysis and diverse firing activities of a modified excitable neuron model, *Cogn Neurodyn*, **13**, 393-407, (2017).
- [5] S. Zhang, J. Zheng, X. Wang, Z. Zeng, A novel noequilibrium HR neuron model with hidden homogeneous extreme multistability. *Chaos Solitons Fractals* **145**, 110761, (2021).
- [6] E.M. Ngouonkadi, H. Fotsin, P.L. Fotso, V.K. Tamba, H.A. Cerdeira, Bifurcations and multistability in the extended Hindmarsh-Rose neuronal oscillator. *Chaos Solitons Fractals* **85**, 151-163, (2016).
- [7] Z. Hou, J. Ma, X. Zhan, L. Yang, Y. Jia, Estimate the electrical activity in a neuron under depolarization field. *Chaos, Solitons Fractals.* **142**, 110522, (2021).
- [8] M.S. Kafraj, F. Parastesh, S. Jafari, Firing patterns of an improved Izhikevich neuron model under the effect of electromagnetic induction and noise. *Chaos Solitons Fractals.* **137**, 109782, (2020).
- [9] Z.T. Njitacke, I.S. Doubla, S. Mabekou, J. Kengne, Hidden electrical activity of two neurons connected with an asymmetric electric coupling subject to electromagnetic induction : coexistence of patterns and its analog implementation. *Chaos Solitons Fractals* **137**, 109785, (2020).
- [10] H. Bao, Y. Zhang, W. Liu, et al., Memristor synapse coupled memristive neuron network : synchronization transition and occurrence of chimera. *Nonlinear Dyn.* **100**, 937-950, (2020).
- [11] Y. Leng, D. Yu, Y. Hu, et al., Dynamic behaviors of hyperbolic-type memristor-based Hopfield neural network considering synaptic crosstalk. *Chaos* **30**(3), 33108, (2020).
- [12] Y. Liu, W.J. Xu, J. Ma, et al., A new photosensitive neuron model and its dynamics, *Front. Inf. Technol. Electron. Eng.* (2020), doi :10.1631/FITEE.1900606.

- [13] Xu, Y., Guo, Y., Ren, G., Ma, J. : Dynamics and stochastic resonance in a thermosensitive neuron. *Appl. Math. Comput.* **385**, 125427, (2020)
- [14] P. Zhou, Z. Yao, J. Ma, et al., A piezoelectric sensing neuron and resonance synchronization between auditory neurons under stimulus. *Chaos, Solitons Fractals*, **145** : 110751, (2021), <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110751>.
- [15] H.G. Gu, B.B.Pan, G. R. Chen, & L.X. Duan, Biological experimental demonstration of bifurcations from bursting to spiking predicted by theoretical models. *Nonlinear Dyn.* **78**, 391-407, (2014).
- [16] J. Ma, X. Song, J. Tang, et al., Wave emitting and propagation induced by autapse in a forward feedback neuronal network, *Neurocomputing* **167**, 378-389, (2015).
- [17] L. Lu, Y. Jia, J.B. Kirunda, et al., Effects of noise and synaptic weight on propagation of subthreshold excitatory postsynaptic current signal in a feed-forward neural network, *Nonlinear Dyn* **95**, 1673-1686, (2019).
- [18] M. Ge, Y. Jia, Y. Xu, et al., Wave propagation and synchronization induced by chemical autapse in chain Hindmarsh-Rose neural network, *Appl Math Computation* **352**, 136-145,(2019)
- [19] J.Tang, J. Zhang, J. Ma, et al., Noise and delay sustained chimera state in small world neuronal network, *Sci China Technol Sci* **62**, 1134-1140, (2019).
- [20] H. Zhang, Q. Wang, M. Perc, et al., Synaptic plasticity induced transition of spike propagation in neuronal networks, *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* **18**, 601-615, (2013).
- [21] F. Gabbiani, H.G. Krapp, C. Koch, et al., Multiplicative computation in a visual neuron sensitive to looming. *Nature*, **420**(6913) :320-324, (2002), <https://doi.org/10.1038/nature01190>.
- [22] M. Dipoppa, A. Ranson, M. Krumin, et al., Vision and locomotion shape the interactions between neuron types in mouse visual cortex. *Neuron*, **98**(3) :602-615, (2018), <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2018.03.037>.
- [23] C.K. Machens, H. Schütze, A. Franz, et al., Single auditory neurons rapidly discriminate conspecific communication signals. *Nature Neuroscience*, **6**(4) :341-342, (2003), <https://doi.org/10.1038/nn1036>.
- [24] T. Nakayama, Thermosensitive neurons in the brain. *The Japanese Journal of Physiology*, **35**(3) :375-389, (1985), <https://doi.org/10.2170/jjphysiol.35.375>.
- [25] M. Ruchty, F. Roces, C.J. Kleineidam, Detection of minute temperature transients by thermosensitive neurons in ants. *Journal of Neurophysiology*, **104**(3) :1249-1256, (2010), <https://doi.org/10.1152/jn.00390.2010>.
- [26] S.C. Leshner-Pérez, C. Zhang, S. Takayama, Capacitive coupling synchronizes autonomous microfluidic oscillators, *Electrophoresis* **39** (8) 1096-1103, (2018).

- [27] Z. Liu, J. Ma, G. Zhang, et al., Synchronization control between two Chua's circuits via capacitive coupling, *Appl. Math. Comput.* **360** 94-106, (2019).
- [28] Y. Xu, Z. Yao, A. Hobiny, et al., Differential coupling contributes to synchronization via a capacitor connection between chaotic circuits, *Front. Inf. Technol. Electron. Eng.* **20** (4) 571-583, (2019).
- [29] Z. Yao, J. Ma, Y. Yao, et al., Synchronization realization between two nonlinear circuits via an induction coil coupling, *Nonlinear Dyn.* **96** 205-217, (2019).
- [30] Z. Liu, C. Wang, G. Zhang, Y. Zhang, Synchronization between neural circuits connected by hybrid synapse. *Int J Mod Phys B.* **33** :1950170, (2019).
- [31] C. Hens, P. Pal, S.K. Dana, Bursting dynamics in a population of oscillatory and excitable Josephson junctions. *Phys Rev E*, **92** : 022915, (2015).
- [32] T. Hongray, J. Balakrishnan, S.K. Dana, Bursting behaviour in coupled Josephson junctions. *Chaos*, **25** : 123104, (2015).
- [33] K. Segall, S. Guo, P. Crotty et al., Phase-flip bifurcation in a coupled Josephson junction neuron system. *Physica B-Condensed Matter*, **455** : 71-75, (2014).
- [34] J.M. Shainline, S.M. Buckley, R.P. Mirin et al., Superconducting optoelectronic circuits for neuro-morphic computing. *Phys Rev Appl*, **7** : 034013, (2017).
- [35] R. Cheng, U.S. Goteti, M.C. Hamilton, Spiking neuron circuits using superconducting quantum phase-slip junctions. *J Appl Phys*, **124** : 152126, (2018).
- [36] M.J.A Díaz, O. Téquita, F.Naranjo, Neuronal synchronization of electrical activity, using the Hodgkin-Huxley model and RCLSJ circuit. *Ingenieria y Ciencia*, **12** : 93-106, (2016).
- [37] J.M. Shainline S.M. Buckley, A.N. McCaughan et al. Circuit designs for superconducting optoelectronic loop neurons. *J Appl Phys*, **124** : 152130, (2018).
- [38] K. Segall, M. LeGro, S. Kaplan et al. Synchronization dynamics on the picosecond time scale in coupled Josephson junction neurons. *Phys Rev E*, **95** : 032220, (2017).
- [39] D.B. Strukov, G.S. Snider, D.R. Stewart, et al., The missing memristor found. *Nature* **453**(7191), 80-83, (2008).
- [40] L.O. Chua, L. : Memristor-the missing circuit element. *IEEE Trans. Circuit Theory* **18**(5), 507-519, (1971).
- [41] Y. Tan, C. Wang, A simple locally active memristor and its application in HR neurons. *Chaos* **30**(5), 53118, (2020).
- [42] K. Usha, P. A. Subha, Hindmarsh-Rose neuron model with memristors. *BioSystems* **178** :1-9, (2019).

- [43] B. Hu, Z. H. Guan, N. Xiong et al, Intelligent impulsive synchronization of nonlinear interconnected neural networks for image protection. *IEEE Trans. Ind. Informat.*, vol. **14**, no. 8, pp. 3775-3787, (2018)
- [44] L.O. Chua, Everything you wish to know about memristors but are afraid to ask. *Radioengineering* 24(2), 89-157, (2015).
- [45] B. Bao, A. Hu, H. Bao, Q.M. Xu, Chen, H. Wu, Three-Dimensional Memristive Hindmarsh-Rose Neuron Model with Hidden Coexisting Asymmetric Behaviors. **11**, 3872573, (2018). <https://doi.org/10.1155/2018/3872573>
- [46] X. Chen, S. Qian, F. Yu, et al., Pseudorandom number generator based on three kinds of four-wing memristive hyperchaotic system and its application in image encryption. *Complexity*, 8274685 (2020).
- [47] P. Jin, G. Wang, H.H. Iu, T. Fernando, A locally active memristor and its application in a chaotic circuit. *IEEE Trans. Circuits Syst. II Exp. Briefs* 65(2), 246-250, (2017).
- [48] H. Chang, Z. Wang, Y. Li, G. Chen, Dynamic analysis of a bistable bi-local active memristor and its associated oscillator system. *Int. J. Bifurc. Chaos* 28(8), 1850105, (2018).
- [49] A. Ascoli, S. Slesazeck, H. Mahne, R. Tetzlaff, T. Mikolajick, Nonlinear dynamics of a locally-active memristor. *IEEE Trans. Circuits Syst. I Reg. Pap.* 62(4), 1165-1174, (2015).
- [50] M. D. Marco, M. Forti and L. Pancioni, Convergence and multistability of nonsymmetric cellular neural networks with memristors. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Syst.*, vol. 47, no. 10, pp. 2970-2983, (2017).
- [51] X. Zhang, C. Wang, W. Yao, et al., Chaotic system with bondorbital attractors. *Nonlinear Dyn.* 97(4), 2159-2174, (2019).
- [52] Q. Lai, A. Akgul, X.W. Zhao, H. Pei, Various types of coexisting attractors in a new 4D autonomous chaotic system. *Int. J. Bifurc. Chaos* 27(9), 1750142, (2017).
- [53] B.C. Bao, H. Qian, J. Wang, Q. Xu, M. Chen, H.G. Wu, Y.J. Yu. Numerical analyses and experimental validations of coexisting multiple attractors in hopfield neural network. *Nonlinear Dyn.*, 90(4) :2359-69, (2017).
- [54] M. Chen, X. Ren, H. Wu et al, Periodically varied initial offset boosting behaviors in a memristive system with cosine memductance. *Front. Inform. Technol. Elect. Eng.*, vol. 20, no. 12, pp. 1706-1716, (2019).
- [55] H. Lin, C. Wang, Y. Sun and W. Yao , Firing multistability in a locally active memristive neuron model. *Nonlinear Dyn.*, (2020). doi.org/10.1007/s11071-020-05687-3.
- [56] C. Wang, L. Xiong, J. Sun and W. Yao, Memristor-based neural networks with weight simultaneous perturbation training. *Nonlinear Dyn.* 95(4), 2893-2906, (2019).

- [57] Z.I. Mannan, S.P. Adhikari, C. Yang, R.K. Budhathoki, H. Kim and L.O. Chua, Memristive imitation of synaptic transmission and plasticity. *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* 30(11), 3458-3470, (2019).
- [58] V. L. E. PHAN, Analyse asymptotique de réseaux complexes de systèmes de réaction - diffusion, Thèse en Mathématiques, Université du Havre, Paris, 188 pages, (2015).
- [59] B.G. Ermentrout et D. H. Terman , *Mathematical Foundations of Neurosciences*, Springer, (2009).
- [60] F. Gabbiani et S. Cox, *Mathematics for Neuroscientists*, 1st Edition, Academic Press (2010).
- [61] W. Gerstner et W. M. Kistler, *Spiking Neuron Models, single neurons, populations, plasticity*, Cambridge University Press (2002).
- [62] E.M. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience : The Geometry of Excitability and Bursting*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England (2005).
- [63] E.M. Izhikevich, *Dynamical systems in Neuroscience*, MIT Press, Cambridge (2007).
- [64] J. P. Keener et J. Sneyd, *Mathematical Physiology*, Springer (2009).
- [65] T.P. Trappenberg, *Fundamentals of Computational Neuroscience*, 2nd edition, Oxford University Press, ISBN13 : 9780199568413, ISBN10 : 0199568413 (2010).
- [66] E. R. Kandel, J.H. Schwartz et T.M. Jessell, *Principles of Neural Science*. 4th ed. McGraw-Hill, New York, (2000).
- [67] L.R. Squire, F.E. Bloom, S.K. McConnell, J.L. Roberts, N.C Spitzer, M.J. Zigmond, *Fundamental Neuroscience*, Acad. Press, Amsterdam.
- [68] E. Kandel, *Essentials of Neural Science and Behavior*, Appleton & Lange Norwalk, 23 :425-451, (1995).
- [69] L. G. Brock, J. S. Coombs, J. C. Eccles J.C. The recording of potentials from moto-neurons with an intracellular electrode, *J. Physiol.*, 117 :431-460. (1952)
- [70] J. Rinzel, D. Terman, X. J. Wang, B. Ermentrout, Propagating activity patterns in largescale inhibitory neuronal networks, *Science*, 279 :1351-1355, (1998).
- [71] M.V.L. Bennet et R.S. Zukin, Electrical coupling and neuronal synchronization in the mammalian brain, *Neuron*, 41 :495-511, (2004).
- [72] A. Draghun, R.D. Traub, D. Schmitz, J.G.R. Jefferys, Electrical coupling underlies highfrequency oscillations in the hippocampus in vitro, *Nature*, 394 :189-192, (1998).
- [73] M. Migliore, M.L. Hines, G.M. Shepherd, The role of distal dendritic gap junctions in synchronization of mitral cell axonal output, *J. Comp. Neurosc.*, 18 :151-161, (2005).

- [74] M. Kamermans et I. Fahrenfort, Ephaptic interactions within a chemical synapse : hemichannel-mediated ephaptic inhibition in the retina, *Current Opinion in Neurobiology*, 14 : 531-541, (2004). DOI 10.1016/j.conb.2004.08.016
- [75] C. Koch, *Biophysics of Computation : Information Processing in Single Neurons*, Oxford University Press, (2004).
- [76] F. Giovannini, *Mathematical modelling of neural oscillations in hippocampal memory networks during waking and under general anaesthesia*, PhD thesis in Modeling and Simulation, Université de Lorraine, France, 168 pages, (2017)
- [77] T. Bullock, M. Bennet, D. Johnston, R. Josephson, E. Marder, R. D. Fields , *The neuron doctrine*, *Science*, 310 :791-793, (2005).
- [78] K. M. Wouapi, *Electric and magnetic field effect on the dynamics and synchronization of neural oscillators : case of the Hindmarsh-Rose neuron model*, PhD thesis in Physics, Université de Dschang, Cameroun, 203 pages, (2020).
- [79] B. Van der Pol, *Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance*, *Philosophical Magazine*, 3 :65-80, (1927).
- [80] E. Lorenz, *Deterministic non-periodic flow*, *J. Atmos. Sci.*, 20 :130-141, (1963).
- [81] O. Rössler, *An equation for continuous chaos*, *Phys. Lett.*, 57A :397-398, (1967).
- [82] J. Ma, Z. Yang, L. Yang, et al., *A physical view of computational neurodynamics*. *J. Zhejiang Univ. Sci.* 20(9), 639-659, (2019).
- [83] S.N. Sarbadhikari, K. Chakrabarty, *Chaos in the brain : a short review alluding to epilepsy, depression, exercise and lateralization*. *Med. Eng. Phys.* 23(7), 447-457 (2001).
- [84] A. Yousefpour, H. Jahanshahi, P. Munoz, et al., *A fractional-order hyper-chaotic economic system with transient chaos*. *Chaos Soliton Fract.* 130, 109400, (2020).
- [85] F. Yu, S. Qian, X. Chen, et al., *Chaos-based engineering applications with a 6D memristive multistable hyperchaotic system and a 2D SF-SIMM hyperchaotic map*. *Complexity*, 6683284, (2021).
- [86] Z. Wang, Z. Wei, K. Sun, et al., *Chaotic flows with special equilibria*. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 229(6), 905-919, (2020).
- [87] H. Lin, C. Wang, F. Yu, et al. : *An extremely simple multi-wing chaotic system : dynamics analysis, encryption application and hardware implementation*. *IEEE Trans. Ind. Electron.* (2020). <https://doi.org/10.1109/TIE.2020.3047012>
- [88] A. Bayani, K. Rajagopal, A.J.M. Khalaf, et al. : *Dynamical analysis of a new multistable chaotic system with hidden attractor : antimonotonicity, coexisting multiple attractors, and offset boosting*. *Phys. Lett. A* 383(13),1450-1456, (2019).

- [89] N. Wang, G. Zhang, N. Kuznetsov, et al. : Hidden attractors and multistability in a modified Chua's circuit. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 92, 105494, (2021).
- [90] H. Chang, Y. Li, G. Chen, et al. : Extreme multistability and complex dynamics of a memristor-based chaotic system. *Int. J. Bifurcat. Chaos* 30(08), 2030019, (2020).
- [91] H. Lin, C. Wang, Y. Sun, et al., Firing multistability in a locally active memristive neuron model. *Nonlinear Dyn.* 100(4), 3667-3683 (2020).
- [92] A.L. Hodgkin, A.F. Huxley, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 117(4), 500-544. (1952).
- [93] V. Baysal, Z. Sarac, E. Yilmaz, Chaotic resonance in Hodgkin-Huxley neuron. *Nonlinear Dyn.* 97(2), 1275-1285, (2019).
- [94] R. Fitzhugh, : Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.* 1(6), 445-466, (1961).
- [95] J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa, An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE* 50(10), 2061-2070, (1962).
- [96] E.N. Davison, Z. Aminzare, B. Dey, et al., Mixed mode oscillations and phase locking in coupled FitzHugh-Nagumo model neurons. *Chaos* 29(3), 33105, (2019).
- [97] C. Morris, H. Lecar, Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophys. J.* 35(1), 193-213, (1981).
- [98] M. Xing, X. Song, Z. Yang, et al., Bifurcations and excitability in the temperature-sensitive Morris-Lecar neuron. *Nonlinear Dyn.* 100(3), 2687-2698, (2020).
- [99] J.L. Hindmarsh, R.M. Rose, A model of the nerve impulse using two first-order differential equations. *Nature* 296(5853), 162-164, (1982).
- [100] Y. Yang, X. Liao, Filippov Hindmarsh-Rose neuronal model with threshold policy control. *IEEE Trans. Neural Netw.* 30(1), 306-311, (2019).
- [101] A.S. Etémé, C.B. Tabi, A. Mohamadou, et al., Longrange memory effects in a magnetized Hindmarsh-Rose neural network. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 84, 105208, (2020).
- [102] L. Lapicque, Recherches quantitatives sur l'excitation électrique des nerfs traitée comme une polarisation, *J. Physiol. Pathol. Gen.*, vol. 9, no. 1, pp. 620-635, (1907).
- [103] H. C. Tuckwell, Introduction to theoretical neurobiology : volume 2, nonlinear and stochastic theories, vol. 8. Cambridge University Press, (2005).
- [104] A. N. Burkitt, A review of the integrate-and-fire neuron model : I. homogeneous synaptic input, *Biological cybernetics*, vol. 95, no. 1, pp. 1-19, (2006).

- [105] N. Fourcaud-Trocmé, D. Hansel, C. Van Vreeswijk, and N. Brunel, How spike generation mechanisms determine the neuronal response to fluctuating inputs, *The Journal of neuroscience*, vol. 23, no. 37, pp. 11628-11640, (2003).
- [106] T.R. Chay, Chaos in a three-variable model of an excitable cell. *Physica D* 16(2), 233-242, (1985).
- [107] F. Zhu, R. Wang, K. Aihara, et al., Energy-efficient firing patterns with sparse bursts in the Chay neuron model. *Nonlinear Dyn.* 100(3), 2657-2672, (2020).
- [108] E. M. Izhikevich et al., Simple model of spiking neurons, *IEEE Transactions on neural networks*, vol. 14, no. 6, pp. 1569-1572, (2003).
- [109] E. M. Izhikevich, Resonate-and-fire neurons, *Neural networks*, 14 :883-894, (2001).
- [110] E. M. Izhikevich, Which model to use for cortical spiking neurons ?, *IEEE transactions on neural networks*, 15(5) :1063-1070, (2004).
- [111] H.R. Wilson et J.D. Cowan, Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons, *Biophys. J.*, 12 :1-23,(1972).
- [112] H.R. Wilson et J.D. Cowan, A mathematical theory of the functional dynamics of cortical and thalamic nervous tissue. *kybernetik*, 13 :55,(1973).
- [113] Y. Kuramoto, *Chemical oscillations, waves and turbulence ?*, Courier Corporation, 51 pages, (2003).
- [114] E. B. Ngouonkadi, Dynamics, control and synchronisation of some models of neuronal oscillators, Ph.D thesis in Electronics, University of Dschang, Cameroon, 293 pages (2016).
- [115] Z.T. Njitacke et J. Kengne, Complex dynamics of a 4D Hopfield neural networks (HNNs) with a nonlinear synaptic weight : coexistence of multiple attractors and remerging Feigenbaum trees. *Int. J. Electron Commun (AEU)*, 93 :242-252. (2018).
- [116] Z.T. Njitacke, J. Kengne, H.B. Fotsin, A plethora of behaviors in a memristor based Hopfield neural networks (HNNs), *Int. J. Dyn. Control.*,(2018). <https://doi.org/10.1007/s40435-018-0435-x>.
- [117] W.S. McCulloch et W. Pitts, A logical calculus of the ideas immanent of nervous activity, *Math. Biosci.*, 5 :115-133, (1943).
- [118] S. Guo, J. Tang, J. Ma, et al., Autaptic modulation of electrical activity in a network of neuron-coupled astrocyte. *Complexity* 4631602, (2017).
- [119] G. Coureau, Effets sanitaires des champs électromagnétiques et tumeurs du système nerveux central, PhD thesis in epidemiology, Université Bordeaux 2, France, 255 pages, (2013).
- [120] Z. Yao, P. Zhou, Z. Zhu, et al., Phase synchronization between a light-dependent neuron and a thermosensitive neuron. *Neurocomputing*, 423 :518-34, (2021).
- [121] Z. Yao, et C. Wang, Control the collective behaviors in a functional neural network. *Chaos, Solitons Fractals*, 152 : 111361, (2021). <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111361>.

- [122] N. Burić, K. Todorović, N. Vasović, Synchronization of bursting neurons with delayed chemical synapses. *Phys Rev E*. ;78 :036211, (2008).
- [123] A. Shaffer, A.L. Harris, R. Follmann, J.E. Rosa, Bifurcation transitions in gap-junction coupled neurons. *Phys Rev E*. ;94 :042301, (2016).
- [124] J.F. Zhou, E.H. Jiang, B.L. Xu, k. Xu, C. Zhou, W.J. Yuan. Synaptic changes modulate spontaneous transitions between tonic and bursting neural activities in coupled Hindmarsh-Rose neurons. *Phys Rev E*. ;104 :054407, (2021).
- [125] Y. Zhang, W. ChunNi, T. Jun, M. Jun, R. GuoDong, Phase coupling synchronization of FHN neurons connected by a josephson junction. *Sci China Technol Sci*. ;63 :2328-38, (2020).
- [126] Y. Li, Simulation of memristive synapses and neuromorphic computing on a quantum computer. *Phys Rev Res*. ;3 :023146, (2021).
- [127] G. Zhang, D. Guo, F. Wu, J. Ma, Memristive autapse involving magnetic coupling and excitatory autapse enhance firing. *Neurocomputing*. ;379 :296-304, (2020).
- [128] D. Koelle, R. Kleiner, F. Ludwig, E. Dantsker, et J. Clarke, High-transition temperature superconducting quantum interference devices. *Rev. Mod. Phys.* 71(3),631 ?686, (1999).
- [129] Arkady Fedorov, Alexander Shnirman, Gerd Schon, et Anna Kidiyarova-Shevchenko, Reading out the state of a flux qubit by josephson transmission line solitons. *Phys.Rev. B* 75(22), 224504, (2007).
- [130] A. G. Kozorezov, J. K. Wigmore, Roland den Hartog, D. Martin, P. Verhoeve, et A. Peacock, Quasiparticle diffusion and the energy resolution of superconducting tunneling junctions as photon detectors. i. theory. *Phys. Rev. B* 66(9), 094510, (2002).
- [131] Roland den Hartog, A. G. Kozorezov, J. K. Wigmore, D. Martin, P. Verhoeve, A. Peacock, A. Poelaert, et G. Brammertz, Quasiparticle diffusion and the energy resolution of superconducting tunneling junctions as photon detectors. ii. experiment. *Phys. Rev. B* 66(9), 094511 (2002).
- [132] A. Barone, G. Paterno, *Physique et applications de l'effet Josephson* . New York : John Wiley & Fils, (1982). ISBN 978-0-471-01469-0 .
- [133] D.N. Langenberg, D.J. Scalapino, B.N. Taylor, R.E. Eck, Tensions continues induites par les micro-ondes à travers les jonctions Josephson. *Lettres de Physique* . 20 (6) : 563-565, (1966). doi :10.1016/0031-9163(66)91114-0.
- [134] M.T. Levinsen, R.Y. Chiao, M.J. Feldman, B.A. Tucker, Un étalon de tension à effet alternatif Josephson inverse. *Lettres de Physique Appliquée* . 31 (11) : 776-778, (1977). doi : 10.1063/1.89520.
- [135] J.J. Hopfield, Neurons with graded response have collective computational properties like those of 2-state neurons. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 81(10), 3088-3092, (1984).
- [136] H. Lin, C. Wang, C. Chen, et al., Neural bursting and synchronization emulated by neural networks and circuits. *IEEE Trans.Circuits Syst. I. Reg. Pap.* 68(8), 3397-3410, (2021).

- [137] L.O. Chua, L. Yang, Cellular neural networks : theory. *IEEE Trans. Circuits Syst.* 35(10), 1257-1272, (1988).
- [138] L. Wang, W. Liu, H. Shi, et al., Cellular neural networks with transient chaos. *IEEE Trans. Circuits Syst. II Express Briefs* 54(5), 440-444, (2007).
- [139] A. Adamatzky and L.O. Chua, *Memristor Networks*, Springer science& Business Media, (2013).
- [140] S. P. Adhikari, M.P. Sah, H. Kim, et al., Three fingerprints of memristor. *IEEE Trans. Circuits Syst. I Regul. Pap.* 60(11), 3008-3021, (2013).
- [141] M. Zhu, C. Wang, Q. Deng, et al., Locally active memristor with three coexisting pinched hysteresis loops and its emulator circuit. *Int. J. Bifurcat. Chaos* 30(13), 2050184, (2020).
- [142] M.P. Sah, H. Kim, L.O. Chua, Brains are made of memristors. *IEEE Circ. Syst. Mag.* 14(1), 12-36 (2014)
- [143] W. Cai, F. Ellinger, R. Tetzlaff, Neuronal synapse as a memristor : modeling pair-and triplet-based STDP rule. *IEEE Trans. Biomed. Circuits Syst.* 9(1), 87-95, (2014).
- [144] Y. Li, Y. Zhong, L. Xu, et al., Ultrafast synaptic events in a chalcogenide memristor. *Sci. Rep.* 3(1), 1-7, (2013).
- [145] L. Liu, W. Xiong, Y. Liu, et al., Designing highperformance storage in HfO₂/BiFeO₃ memristor for artificial synapse applications. *Adv. Electron. Mater.* 6(2), 1901012, (2020).
- [146] C. Wang, S. Guo, Y. Xu, et al., Formation of autapse connected to neuron and its biological function. *Complexity* 5436737, (2017).
- [147] M.A. Aziz-Alaoui, Synchronization of Chaos, *Encyclopedia of Mathematical Physics*, Elsevier, Vol. 5, p. 213-226, (2006).
- [148] M.A. Aziz-Alaoui, Emergent Properties in Natural and Artificial Dynamical Systems, *Complex Emergent Properties and Chaos (De-)synchronization*, in M.Aziz-Alaoui, et C.Bertelle (eds.), *Understanding Complex Systems*. Springer-Verlag, Heidelberg, p. 129-147, (2006).
- [149] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kuths, *Synchronization*, Cambridge University Press, (2003).
- [150] C. Huygens (Hugenii), *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Parissis, Muguet (France), 1973, traduction anglaise *The pendulum clock*, Iowa State University Press, Ames, (1986).
- [151] I. Belykh, V. Belykh, M. Hasler, Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems, *Physical Review E*, V. 62, N5, p. 6332-6345, (2000).
- [152] R.J. Elble, W.C. Koller, *Tremor*, John Hopkins University Press, Baltimore (1990).
- [153] J. Engel, T.A. Pedley , *Epilepsy : A comprehensive textbook*, Lippincott-Raven, Philadelphia (1975).

- [154] R.C. Elson, A.I. Selverston, R. Huerta, N.F. Rulkov, M.I. Rabinovich, H.D.I. Abarbanel, Synchronization behaviour of two coupled biological neurons, *Phys.Rev.Lett.*, 81(25) :5692- 5695, (1998).
- [155] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares, C.S. Zhou, Synchronization of chaotic systems, *Physics reports* 366, 1-101, (2002).
- [156] X. Shi, Q.S. Lu, Firing patterns and complete synchronization of coupled Hindmarsh-Rose neurons, *Physical Chinese Society*, 14 (1), 77-85, (2005).
- [157] I. Belykh, E. De Lange, M. Hasler, Synchronization of bursting neurons : What matters in the network topology, *Phys. Rev. Lett.* 188101, (2005).
- [158] R. Sarpeshkar, Analog versus digital : extrapolating from electrics to neurobiology, *Neural Comput.* 10, 1601-1638, (doi : 10.1162/089976698300017052) (1998).
- [159] W. Singer, C.M. Gray, Visual feature intergration and the temporal correlation hypothesis, *Annu.Rev.Neurosci.*, 18, p. 555-586 (1995).
- [160] W. Singer, Striving for coherence, *Nature*, 397(4), p. 391-393 (1999).
- [161] M. Stopfer, S. Bhagavan, B.H. Smith, G. Laurent, Impaired odour discrimination on desynchronization of odour-encoding neuronal assemblies, *Nature*, 390(6), p. 70-74 (1997).
- [162] P. Fries, A mechanism for cognitive dynamics : neural communications through neuronal coherence, *Trends Cogn. Neurosci.* 9, p. 474-480. (doi : 10.1016/j.tics.2005.08.011) (2005).
- [163] D. Papo, J. M. Buldu, S. Boccaletti, E. T. Bullmore, Complex network theory and the brain, *Phil. Trans. R. Soc. B* 369, 20130520 (2014).
- [164] L.M. Pecora and T.L. Carroll, Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64, pp.821-824 (1990).
- [165] T. Yamada and H. Fujisaka, Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems. II. The mapping approach. In *Proceedings of Theor.Phys.*, 70(5) pp.1240-1248 (1983).
- [166] P.J. Neefs, Experimental synchronisation of Hindmarsh-Rose neurons in complex networks, Master's thesis, Eindhoven University of Technology, Netherlands, 118 p. (2009)
- [167] Jacques Le Bourlot, cours d'introduction aux systèmes dynamiques dissipatifs, (2009)
- [168] F. T. Fozin, Hyperchaos and multistability in coupled resonant circuits : analysis, control and synchronization with applications to communications, Ph.D thesis in Electronics, University of Dschang, Cameroun, 150 pages. (2018).
- [169] Parvathi M.R. : Nonlinear Dynamics of Nd :YAG lasers : Hopf bifurcation, Multistability and Chaotic Synchronization, PhD thesis in Science and Technology, Cochin University, India, 174 pages. (2009).

- [170] Kengne R. : Etude de quelques oscillateurs chaotiques à ordre fractionnaire fonctionnant aux hautes fréquences : application à la cryptographie digitale, Ph.D thesis in Electronics, University of Dschang, Cameroun, 174 pages. (2018).
- [171] S.H., Friedman M., Mallinckrodt A.J., Mckay S. : Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chimestry and engineering, *Comput Phys*, 8(5) :532. (1994).
- [172] R. L. V. Taylor, *Attractors : Nonstrange to Chaotic*, SIAM Undergraduate Research Online, 4, 72-80 (2011).
- [173] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A Wastano, Determining Lyapunov exponents from time series, *Phys D*, 16 :285-317 (1985).
- [174] Robbins :*Circuit Analysis - Theory and Practice*, 3e edn, Cengage. (2003).
- [175] R. Chiu, M. Mora-Gonzalez, D. Lopez-Mancilla, Implementation of a Chaotic Oscillator into a Simple Microcontroller, *Int. Conf. Electronics Engineering and Computer Science*, IERI Procedia 4, 247-52 (2013).
- [176] H. Hamiche, S. Guermah, R. Saddaoui, K. Hannoun, M. Laghrouche, S. Djennoune, Analysis and implementation of a novel robust transmission scheme for private digital communications using Arduino Uno board. *Nonlinear Dyn*, 81, 1921-32 (2015).
- [177] M. A. Murillo-Escobar, C. Cruz-Hernández, F. Abundiz-Pérez, R. M. López-Gutiérrez, Implementation of an improved chaotic encryption algorithm for real-time embedded systems by using a 32-bit microcontroller, *Microprocessors and Microsystems*, 45, 297-309 (2016).
- [178] R.S. Thepi, D.U. Simo, P.Woafu, Microcontroller Control/Synchronization of the Dynamics of Van der Pol Oscillators Submitted to Disturbances, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. simul*, (2017). doi.org/10.1515/ijnsns-2017-0025.
- [179] H.R. Muhammad and M.R. Hasan, *Spice for power electronics and electric power*, Taylor and Francis, 545 pages, (2006).
- [180] S. Binczak, S. Jacquir, J.M. Bilbault et al., Experimental study of electrical FitzHugh-Nagumo neurons with modified excitability. *Neur Networks*, 19(5) :684-693, (2006). <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2005.07.011>
- [181] D.Cubero, J.P. Baltanás, J. Casado-Pascual, Highfrequency effects in the FitzHugh-Nagumo neuron model. *Phys Rev E*, 73(6) :061102, (2006). <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.061102>
- [182] V.A. Gaiko, Multiple limit cycle bifurcations of the FitzHugh-Nagumo neuronal model. *Nonl Anal Theory Methods Appl*, 74(18) :7532-7542, (2011). <https://doi.org/10.1016/j.na.2011.08.017>
- [183] J.P. Keener, Analog circuitry for the van der Pol and FitzHugh-Nagumo equations. *IEEE Trans Syst Man Cybern*, SMC-13(5) :1010-1014, (1983).<https://doi.org/10.1109/TSMC.1983.6313098>

- [184] I.M. Kyprianidis, V. Papachristou, I.N. Stouboulos et al., Dynamics of coupled chaotic Bonhoeffer-van der Pol oscillators. *WSEAS Trans Syst*, 11(9) :516-526, (2012).
- [185] D. Brust, Band-theoretic model for the photoelectric effect in silicon. *Phys Rev*, 139(2A) :A489, (1965). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.139.A489>.
- [186] P. Agostini, G. Petite, Photoelectric effect under strong irradiation. *Contemp Phys*, 29(1) :57-77, (1988). <https://doi.org/10.1080/00107518808213751>.
- [187] A.T. Georges, Theory of the multiphoton photoelectric effect : a stepwise excitation process. *Phys Rev B*, 51(19) : 13735-13738, (1995).
- [188] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths J., Phase synchronization in regular and chaotic systems. *Int. J. Bifurc. Chaos* 10 (10) 2291-2305, (2000).
- [189] S.Y. Ma, Z. Yao, Y. Zhang et al., Phase synchronization and lock between memristive circuits under field coupling. *Int. J. Electron. Commun. (AEÜ)* 105 177-185, (2019).
- [190] D.C. Hamill, Learning about chaotic circuits with SPICE. *IEEE Trans Educ.*, 36 :28-35, (1993).
- [191] C.I. Johnson, Analog computer techniques. New York : Mc-GrawHill, (1963).
- [192] J. Kengne, J.C. Chedjou, G. Kenne, K.Kyamakya, G.H. Kom, Analog circuit implementation and synchronization of a system consisting of a van der pol oscillator linearly coupled to a duffing oscillator. *Nonlinear Dyn.*, 70 :2163-73. (2012).
- [193] P. Louodop, H. Fotsin, M. Kountchou, L.B.M. Ngouonkadi, H.A. Cerdeira, S. Bowong, Finite-time synchronization of tunnel-diode-based chaotic oscillators. *Phys Rev E.*, 89 :032921, (2014).
- [194] Z.T. Njitacke, I.S. Doubla, J. Kengne, & A. Cheukem, Coexistence of firing patterns and its control in two neurons coupled through an asymmetric electrical synapse, *Chaos* 30, 023101,(2020).
- [195] X. Wu, J. Ma, L. Yuan et al., Simulating electric activities of neurons by using PSPICE. *Nonlinear Dyn.*, 75 :113-26, (2014)
- [196] K. Li, H. Bao, H. Li et al., Memristive rulkov neuron model with magnetic induction effects. *IEEE Trans. Ind. Informat.* (2021). doi. 10.1109/TII.2021.3086819.
- [197] Q. Xu, Q. Zhang, B. Bao, Y. Hu, *IEEE Access* 5, 21039, (2017).
- [198] K.M. Wouapi, H.B. Fotsin, P. Louodop, K.F. Feudjio, Z.T. Njitacke, T.H. Djeudjo, *Cognitive Neurodynamics* 14, 375, (2020).
- [199] J. Kengne, S. Jafari, Z.T. Njitacke, A.K. Yousefi, A. Cheukem, *Commun Nonlinear Sci. Numer Simul.* 52, 62, (2017).
- [200] K.M. Wouapi, H.B. Fotsin, K.F. Feudjio, Z.T. Njitacke ZT, *SN Appl Sci.* 1, 1715 (2019).
- [201] S.H. Strogatz, M. Friedman, A.J. Mallinckrodt, S. Mckay, *Comput Phys.* 8, 532 (1994)

- [202] E.B.N. Megam, H.B. Fotsin, P.F. Louodop, T.V. Kamdoum TV, A.C. Hilda, Chaos Solitons Fractals 85, 151 (2016).
- [203] C. Grebogi, E. Ott, & J.A. Yorke, Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos. Physica D 7, 181-200 (1983).
- [204] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, J.A. Yorke, Phys Rev A 36, 5365 (1987).
- [205] A. Pikovsky, G. Osipov, M. Rosenblum, M. Zaks, & J. Kurths, Attractor-Repeller Collision and Eyelet Intermittency at the Transition to Phase Synchronization. Physical Review Letters, 79(1), 47-50 (1997). doi :10.1103/physrevlett.79.47
- [206] M. Desroches, B. Krauskopf et H.M. Osinga, Mixed-mode oscillations and slow manifolds in the self-coupled FitzHugh-Nagumo system. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 18(1), 015107 (2008). doi :10.1063/1.2799471.
- [207] A. Buscarino, L. Fortuna, M. Frasca, and L.V. Gambuzza, A gallery of chaotic oscillators based on hp memristor. International Journal of Bifurcation and Chaos 23(05), 1330015 (2013).
- [208] A. Buscarino, L. Fortuna, M. Frasca and L. Valentina Gambuzza, A chaotic circuit based on hewlett-packard memristor. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 22(2), 023136 (2012).
- [209] A. Ishaq Ahamed, K. Srinivasan, K. Murali and M. Lakshmanan, Observation of chaotic beats in a driven memristive chua's circuit. International Journal of Bifurcation and Chaos 21(03), 737-757 (2011).
- [210] J. Kengne, M.F. Tsotsop, E.K. Mbe, H. Fotsin and G. Kenne, On coexisting bifurcations and hyperchaos in a class of diode-based oscillators : a case study. International Journal of Dynamics and Control pp. 1-12 (2016).
- [211] B. Bao, T. Jiang, Q. Xu, M. Chen, H. Wu and Y. Hu, Coexisting infinitely many attractors in active band-pass filter-based memristive circuit. Nonlinear Dynamics 86(3), 1711-1723 (2016).
- [212] K.F. Florent, J.M. Dongo, R.N. Mballa, C.L. Gninzanlong , K.M. Wouapi, B. Mokhtari, F. Biya-Motto, J. Atangana, Chaos, Solitons and Fractals 134, 109689 (2020).
- [213] L. Kocarev, K. Halle, K. Eckert, L. Chua, Int J Bifurcation Chaos **3**, 1051 (1993).
- [214] M. Bier, T.C. Boutis ,Phys Lett A **104**, 239 (1984).
- [215] Z.T. Njitacke, J. Kengne, J Circuits Syst Comput. **28**, 1950121 (2019).
- [216] S. Panahi, Z. Aram, S. Jafari, M. Ma, J.C. Sprott, Modeling of epilepsy based on chaotic artificial neural network. Chaos, Solitons Fractals, 105150-6 (2017).
- [217] Z.T. Njitacke, J. Kengne, H.B. Fotsin, A plethora of behaviors in a memristor based Hopfield neural networks (HNNs). Int J Dyn Control 7(1) :36-52 (2018).

- [218] Y. Kiran, K.K. Neeraj, D.S. Manis, Intermittent feedback induces attractor selection. *Phys. Rev. E* 95, 042215 (2017).
- [219] P. Crotty, D. Schult, K. Segall, Josephson junction simulation of neurons. *Phys Rev E*, 82 : 011914 (2010).
- [220] W. Xie, C. Wang, H. Lin, A fractional-order multistable locally active memristor and its chaotic system with transient transition. state jump. *Nonlinear Dyn.* 104(4), 4523-4541 (2021)

LISTE DES PUBLICATIONS ISSUES DE LA THESE

1. **Jules Fossi Tagne**, Hélène Carole Edima, Zeric Tabekoueng Njitacke, Florent Feudjio Kemwoue, Rose Ngono Mballa and Jacques Atangana, *Bifurcations analysis and experimental study of the dynamics of a thermosensitive neuron conducted simultaneously by photocurrent and thermistance*, Eur. Phys. J. Spec. Top, (2021). <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-021-00311-w>
2. **Jules Tagne Fossi**, Vandi Deli, Hélène Carole Edima, Zeric Tabekoueng Njitacke, Florent Feudjio Kemwoue and Jacques Atangana, *Phase synchronization between two thermo-photoelectric neurons coupled through a Josephson Junction*, Eur. Phys. J. B, 95 :66, (2022). <https://doi.org/10.1140/epjb/s10051-022-00324-x>
3. **Jules Tagne Fossi**, Vandi Deli, Zeric Tabekoueng Njitacke, Hélène Carole Edima, Florent Feudjio Kemwoue and Jacques Atangana, *Phase synchronization, extreme multistability and its control with selection of a desired pattern in hybrid coupled neurons via a memristive synapse*, Nonlinear Dyn, (2022). <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07489-1>



Bifurcations analysis and experimental study of the dynamics of a thermosensitive neuron conducted simultaneously by photocurrent and thermistance

Jules Fossi Tagne^{1,6,a}, Hélène Carole Edima^{2,b}, Zeric Tabekoueng Njitacke^{3,c}, Florent Feudjio Kemwoue^{1,6,d}, Rose Ngono Mballa^{4,e}, and Jacques Atangana^{5,6,f}

¹ Laboratory of Energy-Electric and Electronic Systems, Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812 Yaoundé, Cameroon

² National School of Agro-Industrial Sciences, Food Microbiology and Biotechnology Laboratory, University of Ngaoundéré, Ngaoundéré, Cameroon

³ Department of Electrical and Electronic Engineering, College of Technology (COT), University of Buea, P.O. Box 63, Buea, Cameroon

⁴ Galenic Pharmacy and Pharmaceutical Legislation Laboratory, Faculty of Medicine and Biomedical Sciences, University of Yaoundé I, Yaoundé, Cameroon

⁵ Department of Physics, Higher Teacher Training College Yaoundé, University of Yaoundé I, Yaoundé, Cameroon

⁶ Centre d'Excellence Africain des Technologies de l'Information et de la Communication (CETIC) Université de Yaoundé I, Yaoundé, Cameroon

Received 10 April 2021 / Accepted 25 October 2021

  The Author(s), under exclusive licence to EDP Sciences, Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2021

Abstract The literature contains evidence that the membrane potential of a biological neuron exhibits several behaviors such as quiescent, spiking, bursting and chaotic states when the external excitation current is adjusted. This paper proposes a model of the photosensitive neuron and the thermosensitive one driven simultaneously, by optical signals and heat acting as the external exciter current. The analysis of the equilibrium points and the stability of the model is carried out. It is shown that the temperature variation produced by the thermistor modifies the number and the nature of the equilibrium points of the system. This temperature also induces a Hopf bifurcation showing that the neuron can go from a state of rest to an oscillatory state and vice versa. The excitation current produced by the phototube and the thermistor makes it possible to generate behaviors already observed in the literature (biological characteristics of the neuron) and complex phenomena. These complex phenomena are among others, bifurcations such as period-doubling, reverse period-doubling, intermittence (crisis) and antimonotonicity. Finally, an on-board system implementation of this neuron model is presented using microcontroller technology. It can be seen that these special behaviors can be easily produced in their actual electrical nature. This constitutes an important tool that can be applied in biomedical technology for the design of artificial neurons.

1 Introduction

The human brain is a cavity made up of several neurons or nerve cells forming an intelligent nervous system [1, 2]. It is made up of numerous functional blocks which process signals and encode information of all kinds [3]. To play its role well, neurons must be sensitive to different stimuli and respond appropriately and quickly. Therefore, several models are presented to study the

dynamic behaviors of the electrical activity of neurons more precisely the mode of selection of neurons. Among these dynamic models, we can cite the Hodgkin–Huxley neuron [4, 5], two- and three-dimensional Hindmarsh–Rose (HR) neuron [6, 7], Morris Lecar neuron [8], Izhikevich neuron [9], Hopfield neural network [10–12] and many others. Behaviors such as quiescent, spiking, bursting and chaotic states are generally observed in some of these models [6]. To this end, theoretical and in-depth studies were carried out, in particular the bifurcation analysis, the synchronization transition and the selection of models on the neural network. In addition, other phenomena such as the coexistence of attractors and antimonotonicity have been discovered in certain neuron models [11–15]. For example, Njitacke et al. [12, 13] have demonstrated from the Hopfield model

^a e-mail: jules_fossi@yahoo.fr

^b e-mail: edimacarole@yahoo.fr

^c e-mail: zerictabekoueng@yahoo.fr

^d e-mail: kemwoueflorent@yahoo.com

^e e-mail: princessrose@hotmail.fr

^f e-mail: atanganajaques@yahoo.fr (corresponding author)

the coexistence of six disconnected stable states and the phenomenon of antimonotonicity. It has also been shown that the regulation of electrical activities in the nervous systems has greatly evolved, thanks to astrocytes [16]. As a result, some models of astrocyte networks coupled to neurons [17–20] have been proposed to detect signal processing and propagation between neurons. Electrical activities in neural models and biological experiments have been widely studied to uncover a potential mechanism for information encoding and signal processing in the nervous system [21–24]. It has been shown that the dynamics of the neuron depend on the local kinetics of the node and the topology of connection between the nodes [25–27]. Thus, to make more reliable models of neurons or highly intelligent artificial neurons, it is necessary to take into account the effects and biophysical properties. As a result, several studies have also been carried out on the dynamics of neurons under the effect of the magnetic field [28, 29, 31–33, 49]. This property of the magnetic field has generally been explored using different configurations of memristor [34, 35]. Furthermore, both capacitor and inductor are important electronic components for the construction and connection of nonlinear circuits, and a time varying field can be induced in these components [36] to capture and pump energy of the field through the coupling channels. In particular, electric field coupling via a capacitor connection explains the physical mechanism of differential coupling [37–39] while magnetic field coupling via an induction coil provides a new definition of integral coupling [40, 41] between non-linear circuits.

Light and temperature can be encoded and transmitted as electrical signals that can impact neuron activity. They can serve as external stimuli for biological neurons. It is well to note that the combination of these electronic components allows to construct a hybrid synapse for neural circuits [42–45]. For this, recent work has shown that it is possible to use components such as the phototube and the thermistor to produce a forcing current to excite the biological neuron [46–48]. Thus, the phototube taken as a voltage source was used to capture external high-frequency optical signals (light) to activate the FHN neuron [46]. They were able to show that the variation in light intensity and its frequency produces the same behaviors sought in neuronal activity. Still in the same vein, these two electronic components mentioned above have been associated [47, 48] to improve the intelligent function of the neural circuit and feasible neuron models are proposed to estimate the effect of temperature and lighting. For example, in Ref. [48], The photocurrent through the phototube plays the exciting role of the neural circuit as a signal source (voltage source and current) and the thermistor in this neural circuit is sensitive to temperature and to the effect of heat because channel current through thermistor can be adjusted by temperature. Given the complexity of the mathematical model, the authors in their work were unable to use theoretical and numerical tools to predict the phenomena that may arise in the biological neuron. In addition, he does not manage to experiment with these models, due to this

complexity of the mathematical equations. This is why in this work, we propose a new model of thermosensitive neuron excited simultaneously by a phototube and a thermistor. The phototube is used as a voltage source to pick up external light to convert it into current (photocurrent) and the thermistor is also used to pick up external heat all of which can excite the neuron. In addition, another thermistor is used to sense temperature changes in the neural circuit. This assembly allows us to improve the sensitivity of this artificial neuron. To resolve the shortcomings of the previous work, and to highlight the rich behaviors of this neuron model, we propose to use the bifurcation theory, the Lyapunov exponent graphs and the phase prototypes to show the phenomena resting, peaking, bursting and chaotic as presented in previous works. In addition, we also show other complex behaviors (crisis and antimonotonicity) that can occur in the model and we end up proposing an implementation of the embedded system of this model.

This scientific contribution is organized as follows. In Sect. 2, we present the functional neural circuit as well as the dynamics of the neuron model, which can encode light and heat simultaneously. Next, we perform an in-depth analysis of the stability of the neural model in Sect. 3. In Sect. 4, we present numerical results and discussions highlighting complex phenomena. While Sect. 5 presents the procedure for carrying out the experimental circuit as well as the experimental results. The conclusion is given in Sect. 6.

2 Description of the model and diagram

In this neuron model, we used an induction coil to generate a time varying current, a capacitor to generate an output voltage (membrane potential), and a nonlinear resistance to induce a nonlinear relationship between the voltage and current. Drawing inspiration from work [46, 47], an update of the neural circuit proposed in Ref. [48] is presented. The phototube is used as the excitation source and two thermistors are used, one to sense temperature changes in the neural circuit and the other to excite it. Thus, the neural circuit can be simultaneously and continuously excited by a photocurrent from external illumination and the material property of the phototube cathode and a branch current from an external heat source. These associated components as in Fig. 1 show that it is possible that the function of the neural circuit may be improved.

The resistances of the thermistors depend on the temperature and are given by the relation $R_T = R_\infty e^{\left(\frac{B}{T}\right)}$, where the parameter of the material B is determined by the activation energy q and the Boltzmann constant K with the dependence $B = q/K$. On the other hand, the current i_{NR} across the non-linear resistor [46] can be estimated by:

$$i_{NR} = -\frac{1}{\rho} \left(V - \frac{V^3}{3V_0^2} \right), \quad (1)$$

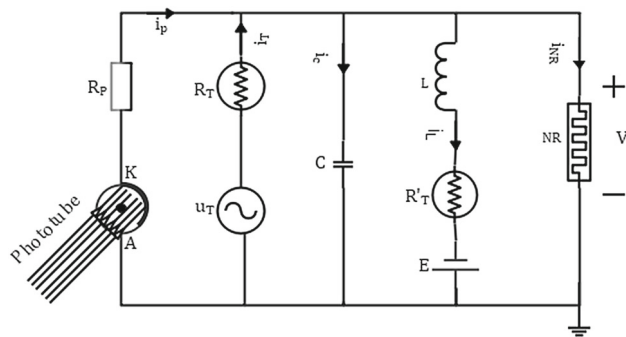


Fig. 1 Schematic diagram of the neural circuit under photoelectric and thermal effects. NR is a nonlinear resistance, C is the capacitor, L represents an induction coil, R_T and R'_T denote thermistors, R_P is a linear resistance, and E is a constant voltage source. K designates the cathode and A represents the anode in the phototube

where ρ is the normalized resistance parameter, V_0 represents the cut-off voltage and V is the voltage across the nonlinear resistor.

The relation between the photocurrent and the voltage across the phototube is evaluated by :

$$i_P = \frac{2I_H}{\pi} \arctan(V_p - V_a), \quad (2)$$

where V_a denotes the reverse cut-off voltage, V_p and I_H describe the saturation voltage and current across the phototube, respectively.

By applying Kirchhoff's laws, the circuit equations in Fig. 1 can be obtained by:

$$\begin{cases} C \frac{dV}{dt} = i_P + \frac{U_T - V}{R_T} - i_L - i_{NR} \\ L \frac{di_L}{dt} = V - R_T i_L + E \end{cases}, \quad (3)$$

where V denotes the output voltage across capacitor C and i_L is the induction current across inductance L . The parameters R_T , R'_T are resistances linked to the thermistor and L , C , E represent inductance, capacitance and constant voltage, respectively. Furthermore u_T is a time varying alternating voltage applied to the thermistor to generate forcing current defined by: $u_T = B_T \cos(\omega_T t)$, where B_T is the amplitude of the periodical term in the voltage source and ω_T the angular frequency.

The phototube can generate a photocurrent i_P which can be calculated by the relation:

$$i_P = \frac{2I_H}{\pi} \arctan(V_p - V_a) = \frac{V_P - V}{R_P}. \quad (4)$$

By combining Eqs. (1), (3) and (4) and by applying the scale transformation norm on the variables and

parameters, we obtain the expressions opposite:

$$\begin{cases} x = \frac{V}{V_0}, y = \frac{\rho i_L}{V_0}, \tau = \frac{t}{\rho C}, T' = \frac{T}{T_0} = \frac{T}{B} \\ a = \frac{E}{V_0}, b(T') = \frac{R'_T}{R_T} = b_0 \exp\left(\frac{1}{T'}\right), c = \frac{\rho^2 C}{L} \\ \varepsilon_P = \frac{\rho}{R_P}, \varepsilon_T(T') \\ = \frac{\rho}{R_T} = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{1}{T'}\right), \omega_T = \rho C \omega'_T \\ u_P = \frac{\rho V_P}{R_P V_0} \\ = \varepsilon_P \frac{V_P}{V_0}, A_T(T') = \frac{\rho B_0}{R_T V_0} = A_0 \exp\left(-\frac{1}{T'}\right) \end{cases} \quad (5)$$

So, we can rewrite Eq. (2) as follows:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x \left(1 - \varepsilon_P - \varepsilon_T(T')\right) - y - \frac{1}{3}x^3 + u_P \\ \quad + A_T(T') \cos(\omega'_T \tau) \\ \frac{dy}{d\tau} = c \left(x - b(T')y + a\right) \end{cases} \quad (6)$$

where x and y are, respectively, the potential of the membrane and the variable of recovery of the transmembrane current. We, thus, obtain a neuron dependent on temperature and external stimuli that can modify the dynamics of the neuron by generating firing modes when certain intrinsic parameters are well defined. Ultimately, the dynamics of the heat and photosensitive neuron can be completely controlled by heat and light.

In the practical case and for the sake of simplification, the phototube is considered as a periodic voltage source defined by $u_P = A_P \cos(\omega_P \tau)$, where A_P and ω_P denote, respectively, the amplitude and the angular frequency of the signal.

3 Equilibrium point and stability analysis

It is possible to observe the qualitative behavior of the evolution of the neural circuit by making an analysis on the equilibrium point. The equilibrium point AC is obtained by solving the system of equation $\frac{dx}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} = 0$, that is to say :

$$\begin{cases} x \left(1 - \varepsilon_0 e^{-\frac{1}{T'}} - \varepsilon_P\right) - y - \frac{1}{3}x^3 + A_P \cos(\omega_P t) \\ \quad + A_0 e^{-\frac{1}{T'}} \cos(\omega'_T t) = 0 \\ c \left(x - b_0 e^{\frac{1}{T'}} y + a\right) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Inspired by the work of [49,50], we obtain the AC equilibrium point $S_e = \left(\chi, \frac{(a+\chi)e^{-\frac{1}{T'}}}{b_0}\right)$ in which χ can be solved numerically by

$$P(\chi) = \chi^3 + p\chi + q \quad (8)$$

Or $p = 3 \left(\left(\varepsilon_0 + \frac{1}{b_0} \right) e^{-\frac{1}{T'}t} + \varepsilon_P - 1 \right)$ and $q = 3 \left(\frac{ae^{-\frac{1}{T'}t}}{b_0} - A_P \cos(\omega_P t) - A_0 e^{-\frac{1}{T'}t} \cos(\omega'_T t) \right)$.

The roots of Eq. (8) are defined as follows:

$$\chi_1 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, \quad (9)$$

$$\chi_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, \quad (10)$$

$$\chi_3 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2} \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \times \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, \quad (11)$$

Or

$$\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3.$$

According to Cardan discriminant [49], when $\Delta > 0$, there is a real root and two complex roots. Since the equilibrium point cannot be a complex number, an equilibrium point is obtained from Eq. (10). However, when $\Delta = 0$, the two complex roots Eq. (9) and Eq. (11) evolve towards a real root, which makes it possible to obtain from Eq. (8) two real roots. Therefore, the neural circuit admits two points of equilibrium. Likewise, when $\Delta < 0$, there are three real roots in Eq. (8), which shows that the neural circuit has three points of equilibrium and can be obtained from Eqs. (9), (10) and (11).

In the case of our specified circuit, when the parameter T' varies from 0.5 to 5, the Cardan discriminant Δ and the number of equilibrium points with the evolution of time are presented in Fig. 2. It can be seen in Fig. 2a that Δ is a periodic function of time. The sign of the Cardan discriminant depends on the value of and varies with the evolution of time. For $T' = 0.5$, the number of equilibrium points goes from three to two, to one, to two, to three and for $T' = 5$, which leads to an equilibrium point, as shown in Fig. 2b.

At the AC equilibrium point, the Jacobian matrix obtained from system (6) is:

$$J_{S_e} = \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon_0 e^{-\frac{1}{T'}t} - \varepsilon_P - \chi^2 & -1 \\ c & -cb_0 e^{\frac{1}{T'}t} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

We can deduce from Eq. (12) two eigenvalues, this by solving the characteristic polynomial of equation $P(\lambda) = \det(J_{S_e} - \lambda I)$ with I an identity matrix.

$$P(\lambda) = \lambda^2 + m_1 \lambda + m_2. \quad (13)$$

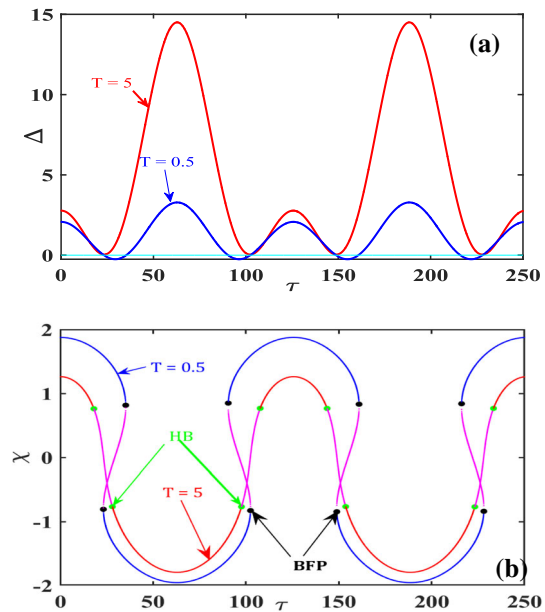


Fig. 2 The Cardan discriminant and the equilibrium points vary with the evolution of time under different values of temperature T' . **a** Cardan discriminant, **b** number and values of equilibrium points. Considering $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \varepsilon_P = \varepsilon_0 = 0.175, \omega'_T = \omega_P = 0.05$ and $A_0 = A_P = 1$

Or:

$$m_1 = \left(cb_0 e^{\frac{1}{T'}t} - 1 + \varepsilon_0 e^{-\frac{1}{T'}t} + \varepsilon_P + \chi^2 \right) \quad \text{and} \\ m_2 = bc \left(\varepsilon_0 + (\chi^2 + \varepsilon_P - 1) e^{\frac{1}{T'}t} \right) + c. \quad (14)$$

As a function of these eigenvalues at the AC equilibrium point, the stabilities of the system are determined by the sign of the discriminant Δ .

- For $\Delta > 0$, there are two negative real roots at the single AC equilibrium point.
- For $\Delta = 0$, there are two negative real roots for one point of equilibrium, a zero root and a negative real root for the other point of equilibrium.
- For $\Delta < 0$, there are either two pairs of conjugate complex roots with negative real parts and a pair of real roots of opposite signs, or a pair of real roots of opposite signs, a pair of real roots of opposite signs and a pair of complex roots conjugated to negative real parts for the three points of equilibrium.

We can conclude from what is said previously that when $\Delta > 0$, we have a stable node or a stable focus or a critical point which can lead to a Hopf bifurcation (HB), for $\Delta = 0$ we have a stable node and a fold bifurcation point (FBP) and for $\Delta < 0$, we obtain two stable foci and an unstable node or a stable focus, a stable node and an unstable node.

In a particular case, consider that the neural circuit is not excited, i.e. $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \varepsilon_P =$

Table 1 DC equilibrium points, eigenvalues and stability

Values T'	Equilibrium points S_e	Eigenvalues λ_1 and λ_2	Stability
0.5	(-1.4626, -0.1290)	$\lambda_1 = -0.7659; \lambda_2 = -1.1632$	Stable node point
	(1.2716, 0.3335)	$\lambda_{1,2} = -0.7034 \pm 0.2956j$	Stable node-foci
	(0.1910, 0.1507)	$\lambda_1 = 0.6865, \lambda_2 = -0.5128$	Unstable saddle points
1	(-1.2858, -0.2694)	$\lambda_1 = -0.4368, \lambda_2 = -0.6734$	Stable node point
2	(-1.1340, -0.3291)	$\lambda_{1,2} = -0.3495 \pm 0.2294j$	Stable node-foci
3	(-1.0766, -0.3373)	$\lambda_{1,2} = -0.2855 \pm 0.2641j$	Stable node-foci
4	(-1.0475, -0.3383)	$\lambda_{1,2} = -0.2556 \pm 0.2768j$	Stable node-foci
5	(-1.0301, -0.3378)	$\lambda_{1,2} = -0.2385 \pm 0.2831j$	Stable node-foci

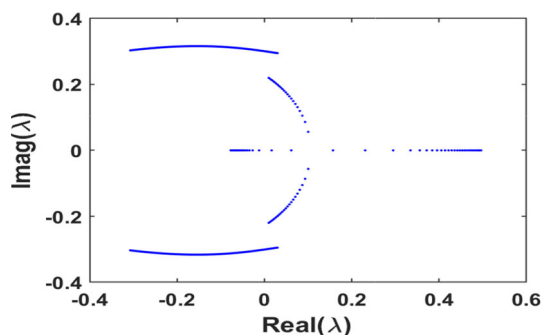


Fig. 3 Representation of the solutions of the eigenvalues of the characteristic polynomial Eq. 13 in the complex plane ($Real(\lambda), Imag(\lambda)$) for $1 \leq T' \leq 10$

$\varepsilon_0 = 0.175$, $\omega_P = \omega_T' = 0$ and $A_0 = A_P = 0$. The AC equilibrium point becomes a DC equilibrium point no longer changing over time [49, 51]. According to the values of the parameter T' , the stability of each DC equilibrium point is obtained by solving polynomial Eq. (7). The eigenvalues which characterize the stability of these points are calculated and gathered in the following Table 1:

Looking at Table 1, we see that the stability of the neural circuit is a function of the temperature parameter T' . Therefore, it is important to study the effect of temperature on the stability of the equilibrium point, which will allow us to highlight and explain the different local bifurcation phenomena. Thus, Fig. 3 gives a representation of the solutions of the eigenvalues in the complex plane for the values T' of varying from 1 to 10. The symmetric presence of complex pairs of conjugate eigenvalues along the real axis shows a possibility of the existence of a Hopf bifurcation [52, 53].

4 Dynamic analysis of the model

4.1 Bifurcation and intermittent behaviour

To highlight the different important phenomena that can act in the FHN model under the simultaneous effects of a phototube and a thermistor, we numerically solve the nonlinear system (6) using the Runge-Kutta

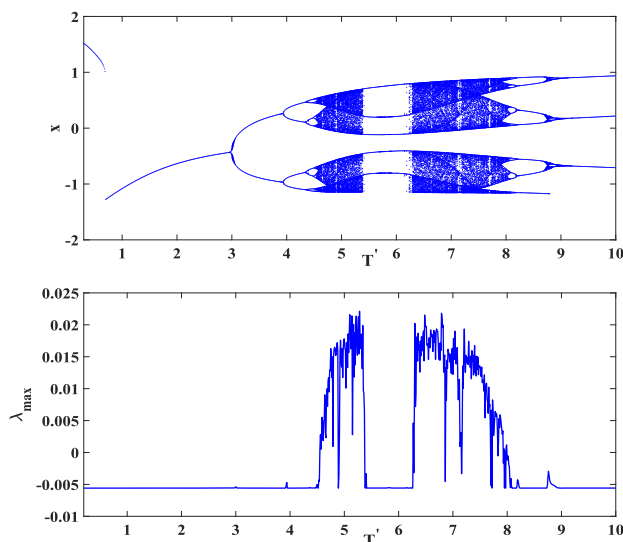


Fig. 4 Bifurcation diagram showing the coordinate of the membrane potential $x(t)$ and the corresponding graph of the maximum Lyapunov exponent versus T' . The other parameters' values are defined in the text

algorithm of order 4 with a time step $h = 0.001$. We set as initial values $(x_0, y_0) = (0.2, 0.1)$. The sampled time series and the attractors are generated in part Matlab 2018. To simplify the numerical studies, we replace the dimensionless time t by τ to have the figures presenting the sampled time series. As is well known, the excitability of the neuron can be modified by an external forcing current. Therefore, we consider that the phototube and thermistors are defined as said in Sect. 2 see Fig. 1 and Eq. (6). Note also that all calculations are performed using variable parameters and constants in extended mode.

The bifurcation diagram as well as the Lyapunov exponent are indicators allowing to better understand and appreciate the chaotic and periodic behaviors of a dynamic system (periodic orbits with fixed points, or chaotic attractors). These are obtained when certain system control parameters vary [59]. To better understand the complex dynamics of the model, we have plotted the temporal evolution of the state variables, as well as some phase portraits.

Fig. 5 Numerical simulation of: time series (a) and two dimensional views (b) of the attractor projected, illustrating the complexity of the system for $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5, T' = 5A_P = 0.01, \omega'_T = 0.7$ and $\omega_P = 0.7$

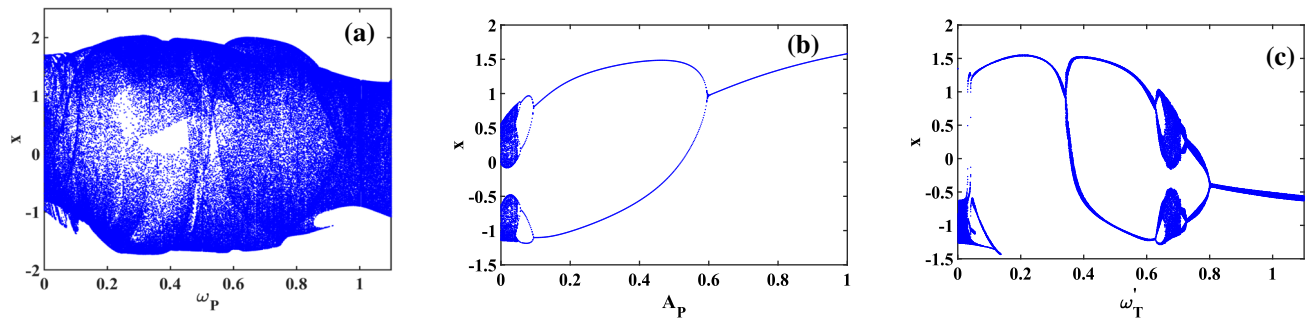
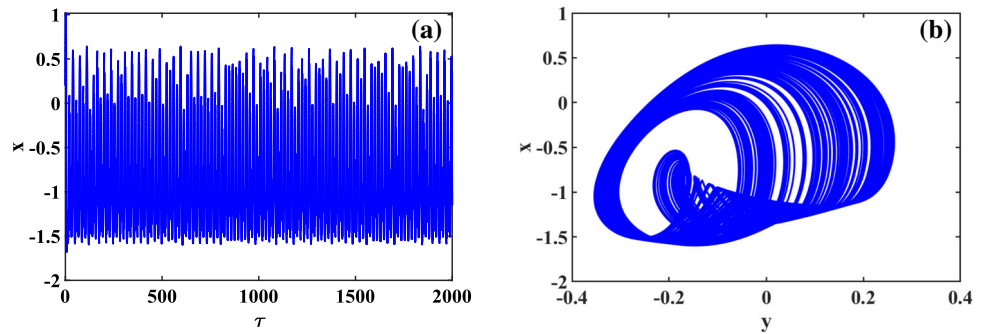


Fig. 6 Bifurcation diagrams calculated by changing the bifurcation parameters $(\omega_P, A_P, \omega'_T)$ at $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5$. For **a** $T' = 5A_P = 0.01, \omega'_T = 0.7$; **b** $T' = 5, \omega_P = 0.7, \omega'_T = 0.7$; and **c** $T' = 5A_P = 0.01, \omega_P = 0.7$

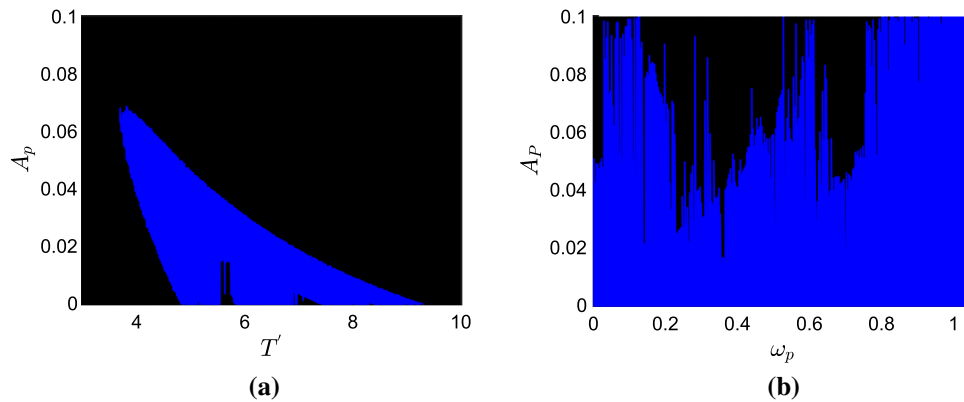


Fig. 7 Two parameters bifurcation diagram, showing the behaviors exhibited by the membrane potential of the neuron in the spaces (T', A_P) (a) and (ω_P, A_P) (b) at $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5, \omega'_T = 0.7$

0.7. For **a** $\omega_P = 0.7$ and **b** $T' = 5$. Based on these two-parameter diagrams, the irregular (chaotic) behavior is associated with the blue color while the regular (periodic) behavior is associated with the black color

In Fig. 4, we present the bifurcation and maximum Lyapunov exponent with respect to the parameter describing the temperature picked up by the neuron when it is simultaneously excited by a phototube and a thermistor. We consider that T' varies in the interval $0.3 < T' < 10$ and the values of the parameters set as follows: $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \epsilon_P = \epsilon_0 = 0.175, \omega'_T = \omega_P = 0.7, A_0 = 0.5$ and $A_P = 0.01$. The bifurcation diagram is obtained by considering the maxima of the membrane potential $x(t)$ and the equivalent graph of the Lyapunov exponent is presented.

Note that if $\lambda_{\max} < 0$, the system does not oscillate, if $\lambda_{\max} = 0$, it evolves into a periodic state and when $\lambda_{\max} > 0$, the chaotic state is observed. By looking

closely at the evolution of the bifurcation and λ_{\max} values, one can identify different transitions to the chaotic state such as period doubling or crisis scenarios [10]. For a value of $T' = 5$, the corresponding maximum Lyapunov exponent is $\lambda_{\max} = 0.0178$. Seen it is positive, we can conclude that there is a chaotic behavior in this model and many other very rich dynamic phenomena.

To illustrate what is said previously, we present in Fig. 5a and b, respectively, the time series of the membrane potential and of the phase portrait in the plane $(y - x)$, of a chaotic behavior of the FHN model under the simultaneous effect of the phototube and thermistor.

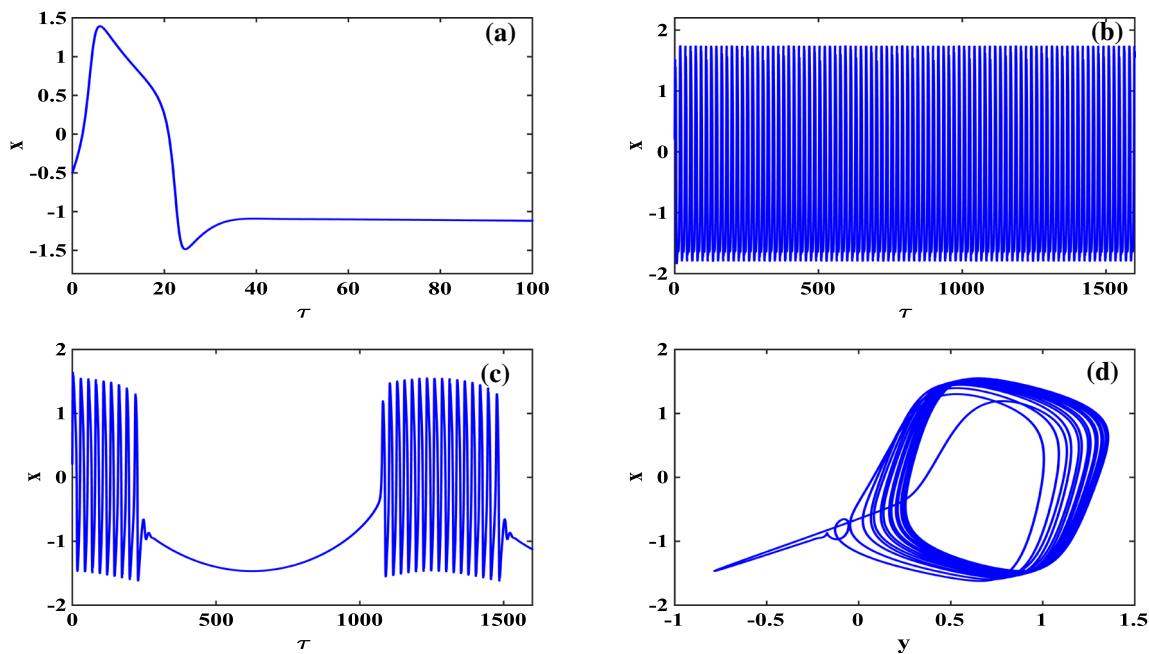


Fig. 8 Numerical simulation of the time series of membrane potential in neuron under different bifurcation parameters at $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5$, For Quiescent **a** $T' = 1A_P = 0.2, \omega_P =$

$0.001, \omega_T' = 0.001$; Spiking **b** $T' = 5A_P = 0.5, \omega_P = 0.35, \omega_T' = 0.7$; Bursting **(c)** $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.7, \omega_T' = 0.7$ and Attractor illustrating the complexity of the system **(d)** $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.7, \omega_T' = 0.7$

Note that the dynamics of the new FHN model depend greatly on the selection of intrinsic parameters. To confirm that this model can still present the essential dynamics of neurological behavior. We present in Fig. 6 the diagrams of bifurcations of the parameters $(\omega_P, A_P, \omega_T')$, then the diagrams of bifurcation with two parameters in the spaces (T', A_P) (see Fig. 7a) and (ω_P, A_P) (see Fig. 7b) or the irregular (chaotic) behaviors of the neuron are materialized by the blue color and the regular behaviors (periodic) represented by the black color and then the time series in Fig. 8. On this last figure, we can see that the settings appropriate in parameters of bifurcations, allows us to have exciting behaviors such as the state of rest Fig. 8a, the peak state Fig. 8b and the state of rupture Fig. 8c. Figure 8d presents the phase portrait in the plane $(y - x)$ of the time series of Fig. 8c. In view of these results, we can approve, that this model can function effectively as a biological neuron.

To highlight the various complex phenomena of neurons, we propose to perform an analysis on the control parameter b_0 . Thus, the diagram of bifurcation according to the parameter b_0 is presented in Fig. 9 with $b_0 \in [0.44, 1]$. This figure shows us that there is a certain value of b_0 where we observe a sudden change in neurological behavior also called crisis [10, 60, 61] and even bifurcations such as period doubling and saddle-node. These complex phenomena such as period doubling cascade (PD), reverse period doubling (RPD), interior and exterior crisis (IC and EC) are presented in this figure.

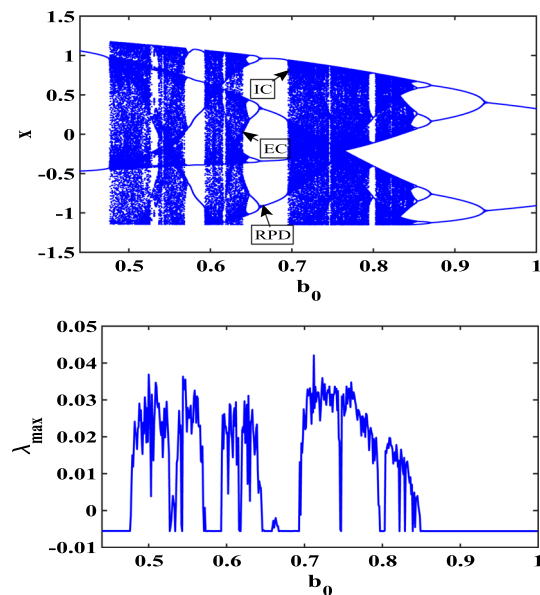


Fig. 9 Bifurcation diagram showing the coordinate of the membrane potential $x(t)$ and the corresponding graph of the maximal Lyapunov exponent versus b_0 , showing reverse period doubling (RPD), exterior crisis (EC) and interior crisis (IC) with: $T' = 5, a = 0.7, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5, A_P = 0.01, \omega_T' = 0.7, \omega_P = 0.7$

In this diagram, we find areas where the chaotic movement is quickly destroyed when the control parameter passes through a value called the critical crisis

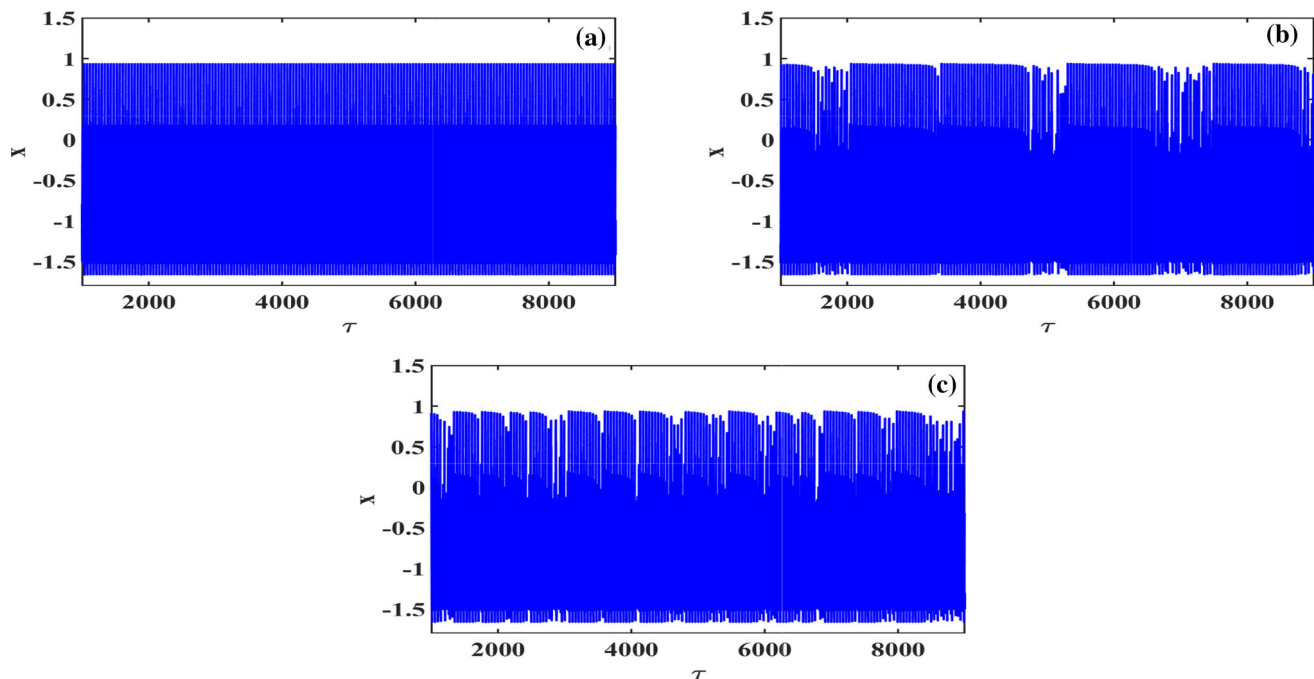


Fig. 10 Time evolution $x(t)$ near the interior crisis, completing the period-4 window for **a** $b_0 = 0.6945 < b_c$, **b** $b_0 = 0.6952 > b_c$, **c** $b_0 = 0.6961 > b_c$

value. This type of phenomenon is called external crisis or blue sky catastrophe as outlined in Ref. [10,60,61]. In addition, there are other areas of the control parameter where the crisis destroys rather than creating a chaotic attractor. There is a sudden increase in the chaotic attractor, because the parameter mentioned above varies according to its critical value. These phenomena are known by the name of intermittent behaviors. Here, the chaotic attractor collides with stable and unstable orbits in their pools of attraction. Thus, it appears that the trajectory moves in a periodic orbit for a significant time interval. When the trajectory escapes from this periodic orbit, it evolves on the chaotic attractor and a chaotic explosion is observed. Intermittent behavior is characterized by so-called laminar phases, during which the behavior is almost periodic for a finite time. For example, Fig. 10 illustrates the intermittent caused by a crisis from time series. Immediately after the crisis, the orbit traverses a period-4 band as shown in Fig. 10a. For b_0 values greater than 0.6945, we observe that the fluctuations are apparently periodic for long periods of time, but this regular behavior seems to be abruptly disturbed by a chaotic surge. This surge has a finite duration and when it disappears the system reverts to periodic behavior as shown in Fig. 10b and c. At least three types of intermittent output are observed in the system. Intermittent burst describes the second type of crisis likely to appear in a dynamic system [58].

4.2 Antimonotonicity

Unlike the bifurcations obtained previously, periodic orbits can arise and then be destroyed by means of reverse bifurcation sequences. Dawson et al. in 1992

named this type of antimonotonicity behavior which is the simultaneous creation and annihilation of periodic orbits. It has already been found in several classes of nonlinear systems including the Van der Pol oscillator [64], the Chua circuit [65], the Jerk system and its variant and many others [9]. This phenomenon is observed in the FHN neuron model under the simultaneous effect of a phototube and a thermistor (system (6)) by varying the value of the signal amplitude of the thermal exciter A_0 in the range $0 < A_0 < 2$ for several discrete values of the parameter b_0 . Figure 11 presents the results of the bifurcation diagrams obtained by plotting the local maxima of the membrane potential $x(t)$ in terms of the control parameter A_0 illustrating the phenomenon of antimonotonicity. In this figure, we observe a primary bubble for $b_0 = 1$. A bubble of period 4 is observed at $b_0 = 0.9$. Fuller bubbles are created until chaos occurs, when the decrease is even greater (full Feigenbaum fusion tree at $b_0 = 0.8$ and $b_0 = 0.7$, respectively). To illustrate the existence of a chaotic bubble presented by the bifurcation diagram of Fig. 11c, we plot in Fig. 12 an attractor with a chaotic bubble shape for a specific value of $A_0 = 0.544$ and the corresponding first return map with two critical points that it supports the occurrence of antimonotonicity in the neural model.

5 Experimental procedure and results

5.1 The experimental procedure

The Arduino Mega module was used during the experimental phase for its simplicity, speed and precision. The

Fig. 11 Bifurcation diagrams showing the coordinate of the membrane potential $x(t)$ in terms of the control parameter b_0 for remerging Feigenbaum tree (bubbling): (a), primary bubble for $b_0 = 1$; (b), period-4 bubble for $b_0 = 0.9$; (c) and (d), full Feigenbaum remerging tree at $b_0 = 0.8$ and $b_0 = 0.7$. Considering $T' = 5, a = 0.7, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_P = 0.01, \omega_T' = 0.7, \omega_P = 0.7$.

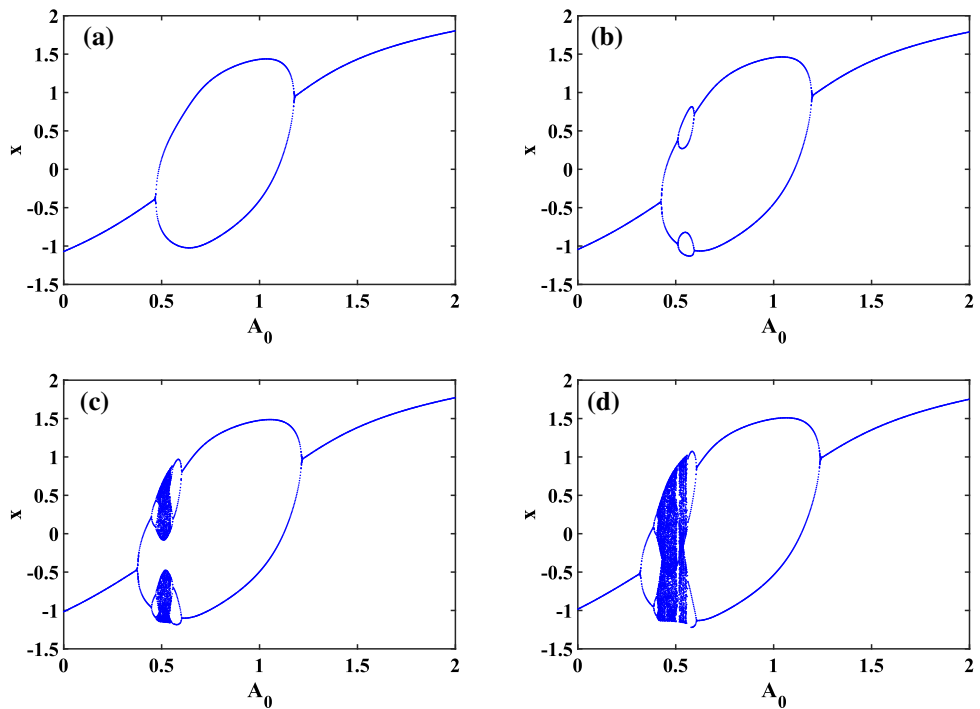
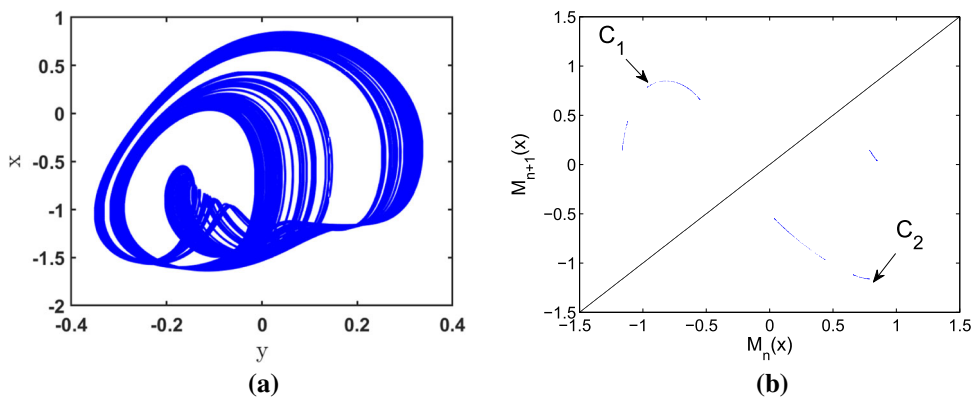


Fig. 12 Formation of an attractor with a chaotic bubble shape (a) and the corresponding first return map with two critical points (b) for a specific value $A_0 = 0.544$. The other values are selected as in Fig. 11c



Arduino Mega board is based around the ATmega2560 microcontroller with the following specifications: a power jack used to provide the necessary voltage, a 16 MHz quartz used as crystal oscillator to clock program instructions, an ICSP header used to load programs, 54 digital pins that can be set as input or output, 16 analog inputs, 3 serial communication ports and 14 digital pins that can be used as PWM outputs, a USB connection for communication with the computer via the Integrated Development Environment (IDE) of the open-source Arduino software 1.8.9 and a reset button (see Fig. 13). The programming language used here in the Arduino software IDE is C/Arduino, which is very closed and compatible with the C programming language.

The experimental setup consists of an Arduino Mega board and two arrays of $R - 2R$ scale resistors, which act as a DAC (digital to analog converter) with resistors $R = 10\text{ k}\Omega \pm 5\%$ and $2R = 20\text{ k}\Omega \pm 5\%$, respectively (see Fig. 14). The Arduino board communicates with a com-

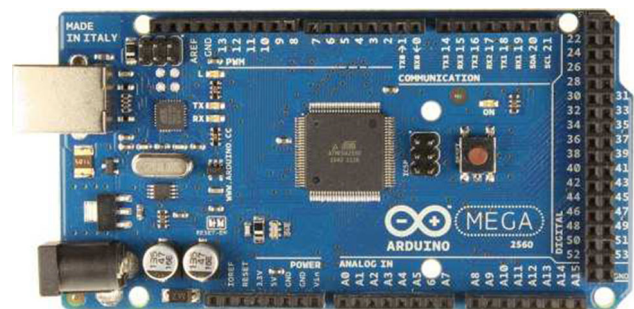
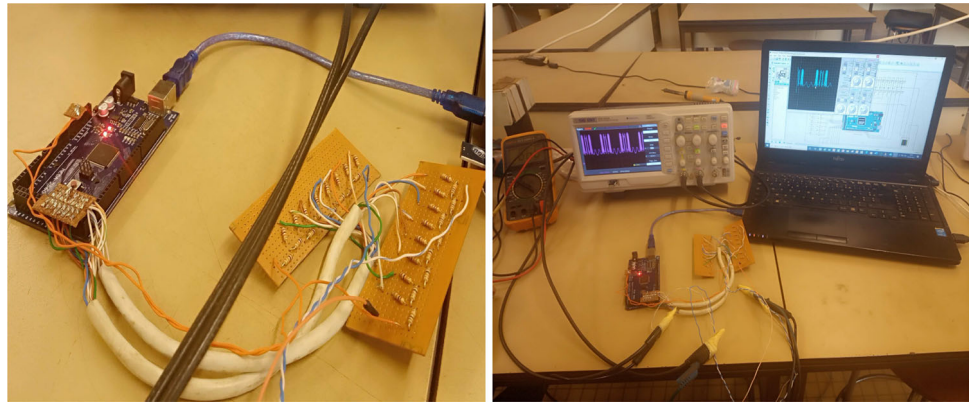


Fig. 13 The Arduino Mega board

puter through a USB connection. The outputs of the R-2R resistor network are connected to the two X and Y channels of the Siglent SDS1052A digital oscilloscope as shown in Fig. 14. These channels receive the analog signals after their conversion via the $R - 2R$ network. Special sockets have been designed to directly connect

Fig. 14 The Arduino Mega connected to the DAC R-2R network and experimental Setup



the networks of resistors $R-2R$ to port A and C which consist of 8 digital input/output pins, respectively, A0–A7 and C0–C7. The digital calculations performed by the microcontroller are sent to port A and C which is connected to the $R-2R$ network. $R-2R$ networks in turn convert digital signals to analog signals; transmit them to the oscilloscope which displays them. As soon as the program is loaded, the computer acts as a power supply producing a voltage of 5 V and a maximum current of 40 mA. The first $R-2R$ network connected to port A of the Arduino board is connected to channel X is responsible for viewing the system (Eq.(6)) variable x , while the second connected to port C, linked to channel Y, is responsible for viewing the variable y . The pins of ports A and C are defined as digital output. Using Euler's discretization method, a program is written in C/Arduino language to perform calculations. The various nonlinear dynamic states of the neural circuit are calculated inside the microcontroller before being displayed on the digital oscilloscope as shown in Fig. 14. The current configuration offers:

- The ability to manage all states of any nonlinear oscillator without the need for the electronic circuit of the oscillator itself.
- It is simple, inexpensive and very precise.
- The C/Arduino programming language is very simple, close to C/C++, and its development environment is easy to use. It takes into account all types of higher order linear and nonlinear oscillators, using only the explicit form of the differential equation.
- It occupies a very small memory space.
- The curves of the SIGLENT digital oscilloscope are displayed instantly after loading the programs. This gives a very high speed in obtaining the experimental results.
- The operations only require programming and loading into the microcontrollers.
- All data from experimental simulations can be stored in the SIGLENT digital oscilloscope and saved to a USB stick for processing.

5.2 Experimental results

The configuration proposed above is capable of reproducing the behaviors of the progression of the biological neuron described by the ODE equations. The complete bifurcation sequences described in Sect. 4 are seen in this setup. Using the parameters of Fig. 8, examples of experimental results related to these different behaviors are illustrated through Fig. 15. In Fig. 15, we observe the temporal evolution of the potential of the membrane of the system obtained experimentally. We can see from these experimental results a similarity with numerical results. Therefore, this microcontroller device is a reliable and fast tool for designing electronic circuits capable of giving an appropriate prediction of the dynamics of biological neurons.

6 Conclusion

In this manuscript, a photosensitive and thermosensitive neuron model has been proposed in which a phototube and two thermistors are used to activate the neuron. Simultaneously using a phototube as a voltage source capturing light (optical signals) by converting it into a photocurrent, a thermistor converting heat into electric current and a second thermistor to perceive temperature changes in the neuron. It was shown through a detailed analysis the stability of the equilibrium points and the existence of a Hopf bifurcation. When the parameters of the phototube and the thermistor are varied, the dynamics of the model present complex and varied behaviors of the membrane potential such as quiescent, spiking, bursting and even chaotic states and complex phenomena such as period-doubling bifurcation, reverse period-doubling bifurcation, interior crisis, exterior crisis and antimonotonicity. Then, an implementation of the neural circuit was made by connecting an Arduino Mega board and $R-2R$ network resistors to convert the digital signals into analog signals. Qualitatively, the electrical signals which were obtained in an oscilloscope thanks to the experimental simulations show a perfect cohesion with numerical results. As integrated circuit technology dominates

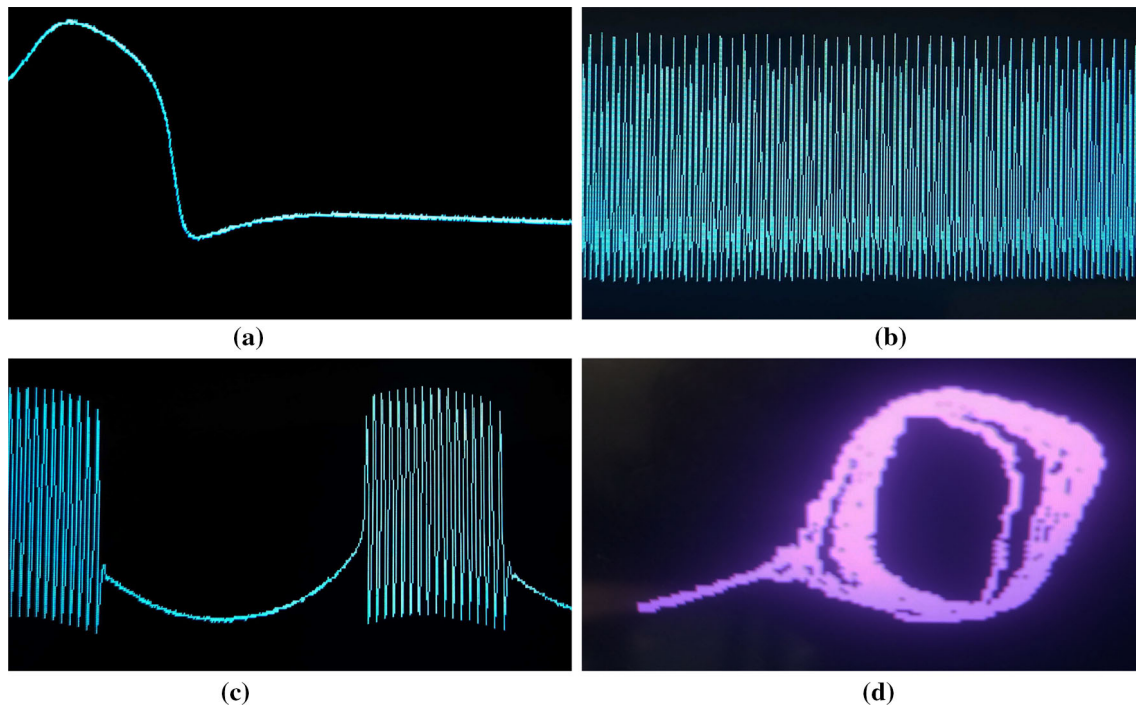


Fig. 15 Experimental results of the time series of membrane potential in neuron under different bifurcation parameters at $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \epsilon_P = 0.175, \epsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5$, For Quiescent (a) $T' = 1, A_P = 0.2, \omega_P =$

$0.001, \omega_T' = 0.001$; Spiking (b) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.35, \omega_T' = 0.7$; Bursting (c) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.7, \omega_T' = 0.7$ and Attractor illustrating the complexity of the system (d) $T' = 5, A_P = 0.5, \omega_P = 0.7, \omega_T' = 0.7$

the world today, these results could find applications in biomedical technology for the design of artificial neurons.

Acknowledgements Jules Fossi Tagne thanks the Faculty of Sciences of the University of Ngaoundéré for its important contribution. Zeric Tabekoung Njitacke has been supported by the Polish National Science Centre under the Grant OPUS 14 No.2017/27/B/ST8/01330.

References

1. C. Börgers, Springer International. **17**(2017)
2. A. Mondal, R.U. Kumar, J. Ma, B.K. Yadav, S.K. Sharma, Cogn Neurodyn. **13**, 393 (2019)
3. Z. Aram, S. Jafari, J. Ma, J.C. Sprott, S. Zendeirouh, V.T. Pham, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. **44**, 449 (2017)
4. Y. Xu, Y. Jia, M.Y. Ge, Neurocomputing **283**, 196 (2018)
5. H. Gu, PLoS ONE **8**, e81759 (2013)
6. H. Gu, B.B. Pan, G.R. Chen, L.X. Duan, Nonlinear Dyn. **78**, 391 (2014)
7. X.Y. Wu, J. Ma, L.H. Yuan, Y. Liu, Nonlinear Dyn. **75**, 113 (2014)
8. K.K. Mineeja, R.P. Ignatius, Nonlinear Dyn. **92**, 1881 (2018)
9. Z.T. Njitacke, J. Kengne, J Circuits Syst Comput. **28**, 1950121 (2019)
10. E.B.N. Megam, H.B. Fotsin, P.F. Louodop, T.V. Kamdoum TV, A.C. Hilda, Chaos Solitons Fractals **85**, 151 (2016)
11. Z.T. Njitacke, J. Kengne, T.F. Fonzin, B. Leutcha, H.B. Fotsin, Int J Dyn Control. **7**, 823 (2019)
12. Z.T. Njitacke, J. Kengne, Int. J. Electron. Commun. (AEU) **93**, 242 (2018)
13. Z.T. Njitacke, S.D. Isaac, J. Kengne, A.N. Negou, G.D. Leutcho, Eur. Phys. J. Spec. Top. **229**, 1133 (2020)
14. B. Bao, H. Qian, Q. Xu, M. Chen, J. Wang, Y. Yu, Front. Comput. Neurosci. **1**, 1 (2017)
15. B. Bao, H. Qian, J. Wang, Q. Xu, M. Chen, H. Wu, Y. Yu, Nonlinear Dyn. **90**, 2359 (2017)
16. L.E. Clarke, B.A. Barres, Nat. Rev. Neurosci. **14**, 311 (2013)
17. J. Tang, J. Zhang, J. Ma et al., Sci. China Technol. Sci. **60**, 1011 (2017)
18. P.G. Hadon, G. Carmignoto, Physiol. Rev. **86**, 1009 (2006)
19. M. Zonta, M.C. Angulo, S. Gobbo et al., Nat. Neurosci. **6**, 43 (2003)
20. S. Guo, J. Tang, J. Ma et al., Complexity **2017**, 4631602 (2017)
21. D. Noble, Nature **188**, 495 (1960)
22. P. Bernardi, G.D. Inzeo, IEEE Trans. Biomed. Eng. **41**, 125 (1994)
23. D.T. Kaplan, J.R. Clay, T. Manning et al., Phys. Rev. Lett. **76**, 4074 (1996)
24. W. Rall, Biophys. J. **2**, 145 (1962)

25. Y. Kim, J. Park, Y.K. Choi, *Antioxidants* **8**, 121 (2019)
26. C. Wang, J. Ma, *Int. J. Mod. Phys. B* **32**, 1830003 (2018)
27. J. Ma, Z. Yang, L. Yang et al., *J. Zhejiang Univ. Sci. A* **20**, 639 (2019)
28. L.V. Mi, C. Wang, G. Ren, J. Ma, X. Song, *Nonlinear Dyn.* **85**, 1479 (2016)
29. M. Ge, Y. Jia, Y. Xu, L. Yang, *Nonlinear Dyn.* **91**, 515 (2017)
30. B. Bao, A. Hu, H. Bao, Q.M. Xu, H. Chen, *Wu, Article ID* **11**, 3872573 (2018)
31. H. Bao, W. Liu, A. Hu, *Nonlinear Dyn.* **95**, 43 (2018)
32. C.N. Takembo, A. Mvogo, H. Ekobena, H.P. Fouda, T.C. Kofané, *Nonlinear Dyn.* **95**, 1079 (2018)
33. C.N. Takembo, A. Mvogo, H. Ekobena, H.P. Fouda, T.C. Kofané, *Nonlinear Dyn.* **95**, 1067 (2019)
34. S. Mostaghimi, F. Nazarimehr, S. Jafari, J. Ma, *Appl Math Comput* **348**, 42 (2019)
35. K. Usha, P.A. Subha, *BioSystems.* **178**, 1 (2019)
36. G. Ren, Y. Xu, C. Wang, *Nonlinear Dyn.* **88**, 893 (2017)
37. M. Abdelouahab, R. Lozi, L.O. Chua et al., *Int. J. Bifur. Chaos* **24**, 1430023 (2014)
38. Y.M. Xu, Z. Yao, A. Hobiny et al., *Front. Inform. Technol. Electron. Eng.* **20**, 571 (2019)
39. M. Wickramasinghe, I.Z. Kiss, *Phys. Rev. E* **88**, 062911 (2013)
40. Z. Yao, J. Ma, Y. Yao et al., *Nonlin. Dyn.* **96**, 205 (2019)
41. A. Pavlov, E. Steur, N.V. De Wouw et al., *Conference on decision and control* **5263**(2009)
42. Z. Liu, C. Wang, G. Zhang et al., *Int. J. Mod. Phys. B* **33**, 1950170 (2019)
43. H.D. Landahl, A.S. Householder, *Psychometrika* **4**, 255 (1939)
44. H. Yonezu, A. Miho, T. Himeno et al., *Electr. Lett.* **25**, 670 (1989)
45. L. Zhao, Q. Hong, X. Wang et al., *Neurocomput.* **314**, 207 (2018)
46. Y. Liu, W. Xu, J. Ma, F. AlzahraniL, A. Hobiny, *Front. Inf. Technol. Electron. Eng* **21**, 1387 (2020)
47. Y. Xu, Y. Guo, G. Ren, J. Ma, *Appl. Math. Comput.* **385**, 125427 (2020)
48. Y. Xu, M. Liu, Z. Zhu, J. Ma, *Chin. Phys. B.* **29**, 098704 (2020)
49. B. Bao, A. Hu, Q. Xu, H. Bao, H. Wu, M. Chen, *Nonlinear Dyn.* **92**, 1695 (2018)
50. Q. Xu, Q. Zhang, B. Bao, Y. Hu, *IEEE Access* **5**, 21039 (2017)
51. K.M. Wouapi, H.B. Fotsin, P. Louodop, K.F. Feudjio, Z.T. Njitacke, T.H. Djeudjo, *Cognitive Neurodynamics* **14**, 375 (2020)
52. J. Kengne, S. Jafari, Z.T. Njitacke, A.K. Yousefi, A. Cheukem, *Commun Nonlinear Sci. Numer Simul.* **52**, 62 (2017)
53. K.M. Wouapi, H.B. Fotsin, K.F. Feudjio, Z.T. Njitacke ZT, *SN Appl Sci.* **1**, 1715 (2019)
54. S. Wiggins, Springer-Verlag. New York **2**, 844 (1990)
55. Y.A. Kuznetsov, *Elements of applied bifurcation theory.* Springer-Verlag, New York **112**, 195 (1998)
56. F. Wu, J. Ma, G. Zhang, *Appl Math Comput.* **347**, 590 (2019)
57. R.T. Siewe, U.S. Domguia, P. Wofo, *commun.Nonlinear Sci.Numer.simul.* **69**, 359 (2018)
58. K.F. Florent, J.M. Dongo, R.N. Mballa, C.L. Gninzanlong, K.M. Wouapi, B. Mokhtari, F. Biya-Motto, J. Atangana, *Chaos. Solitons and Fractals* **134**, 109689 (2020)
59. S.H. Strogatz, M. Friedman, A.J. Mallinckrodt, S. Mckay, *Comput Phys.* **8**, 532 (1994)
60. C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, *Physica D* **7**, 181 (1983)
61. C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras, J.A. Yorke, *Phys Rev A* **36**, 5365 (1987)
62. R.H. Abraham, H.B. Stewart, *Physica D* **21**, 394 (1986)
63. C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, *Sci New Ser.* **238**, 632 (1987)
64. M. Bier, T.C. Boutis, *Phys Lett A* **104**, 239 (1984)
65. L. Kocarev, K. Halle, K. Eckert, L. Chua, *Int J Bifurcation Chaos* **3**, 1051 (1993)



Phase synchronization between two thermo-photoelectric neurons coupled through a Josephson Junction

Jules Tagne Fossi^{1,6,a}, Vandi Deli^{2,b}, Hélène Carole Edima^{3,c}, Zeric Tabekoueng Njitacke^{4,7,d}, Florent Feudjio Kemwoue^{1,6,e}, and Jacques Atangana^{5,f}

¹ Laboratory of Energy-Electric and Electronic Systems, Department of Physics, Faculty of Science, University of Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon

² Department of Pharmaceutical Sciences, Faculty of Medicine and Pharmaceutical Sciences, University of Douala, Douala, Cameroon

³ National School of Agro-Industrial Sciences, Food Microbiology and Biotechnology Laboratory, University of Ngaoundéré, Ngaoundéré, Cameroon

⁴ Department of Electrical and Electronic Engineering, College of Technology (COT), University of Buea, P.O.Box 63, Buea, Cameroon

⁵ Department of Physics, Higher Teacher Training College Yaoundé, University of Yaoundé I, Yaoundé, Cameroon

⁶ Centre d'Excellence Africain des Technologies de l'Information et de la Communication (CETIC) Université de Yaoundé I, Yaoundé, Cameroon

⁷ Department of Automation, Biomechanics and Mechatronics, Lodz University of Technology, Lodz, Poland

Received 6 December 2021 / Accepted 21 March 2022

  The Author(s), under exclusive licence to EDP Sciences, SIF and Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2022

Abstract. The transmission and encoding of information in the brain has been the subject of much research. The aim is to improve biophysical functions and to design reliable artificial synapses for the connection of several biological neurons. In this manuscript, it is coupled through a hybrid synapse two FitzHugh–Nagumo neural circuits driven simultaneously by a phototube and a thermistor. The hybrid synapse is based on an ideal Josephson Junction in parallel with a linear resistance. This configuration allows the evaluation of the external magnetic field in the neural circuit. Using the standard scale transformation on the physical variables and parameters, we obtain the mathematical model of the coupled neurons. A bifurcation analysis on the intrinsic parameters of the coupling channel is carried out to demonstrate the complete synchronization and phase synchronization. It can be seen a synchronization stability when the parameters of the coupling channel are well defined. To practically confirm these results, an electronic circuit is designed using discrete electronic components and multipliers. Thanks to the simulations in the PSpice software, we see that this circuit can well and well be used to estimate the effect of the external magnetic field on a coupled neural circuit and predict a stable synchronization.

1 Introduction

The brain is the seat of physico-chemical and electrical activities [1–3]. The interconnection and exchange of information in a nervous system takes place through synapses. These synapses can be chemical or electrical in nature. They convert an action potential triggered

in a presynaptic neuron into a signal in the postsynaptic cell. The propagation of these signals in biological neurons is associated with movements of ions, therefore, with electric currents. This propagation results in the generation of electric and magnetic fields in the brain. Electrical potentials of the order of a few tens of microvolts are easily detected by electroencephalography. However, it is much more difficult to detect brain magnetic fields. Consequently, several works on the dynamics of neurons and neural networks have been conducted to set up generic or even mathematical models that best imitate the electrical activities of the brain. We can cite among others: the Hodgkin–Huxley (HH) neuron [4], the Hindmarsh–Rose (HR) neuron [5, 6], the FitzHugh–Nagumo (FHN) neuron [7], the Morris Lecar (ML) neuron [8], the Chay neuron [9], and the network of Hopfield neurons (HNN) [10]. Behaviors such as quiescent, spiking, bursting and chaotic states are generally observed in some of these models [11]. For this pur-

Vandi Deli, Hélène Carole Edima, Zeric Tabekoueng Njitacke, Florent Feudjio Kemwoue and Jacques Atangana contributed equally to this work.

^a e-mail: jules_fossi@yahoo.fr (corresponding author)

^b e-mail: vandideli39@gmail.com

^c e-mail: edimacarole@yahoo.fr

^d e-mail: zerictabekoueng@yahoo.fr

^e e-mail: kemwoueflorent@yahoo.com

^f e-mail: atanganajaques@yahoo.fr (corresponding author)

pose, the local kinetics and the coupling modes of these neural models [12, 13] can be adjusted to obtain the different trigger modes [14] and the stability of the synchronization can also be completely controlled [15–18].

From a biophysical aspect, certain biological neurons can be sensitive to certain controlled signals. Among these, we can cite photosensitive or visual neurons [19–21] which are sensitive to optical signals and to light, auditory neurons [22–24] which perceive acoustic waves, thermosensitive neurons [25–29] which detect changes in temperature and much more. These can encode and transmit signals of all kinds into neural electrical signals to be propagated to the brain via spiral ganglion neurons for decoding. Thus, the progression of neurosciences and artificial intelligence more precisely the design of artificial neurons has greatly evolved in recent years with the work of several researchers. Their objective was to model, design and understand the operating mechanism of electrical activities neurons in a nervous system. In this context, certain class of biomaterials can be integrated into neural circuits to detect and encode signals. Therefore, several more physical electrical components can be integrated into neural circuits to sense and encode signals. Zhou et al. [24] who used a piezoelectric ceramic as a sensitive sensor to detect external sound signals in an auditory neuron is an example. This electrical component can convert mechanical waves into electrical waves characterized by multivariate output voltages depending on the induced excitation. Moreover, it is observed a direct passage of the electric waves without loss of synchronization at the level of the junction gaps in the presynaptic and postsynaptic zone. In the same sense, a visual neuron will be proposed following the work of Yong et al. [30] by coupling a phototube on a neural circuit. This proposal will be the subject of a progress in the field. It will thus be demonstrated that light variations can lead to complex behaviors such as the presence of rests, spikes, bursts and chaotic states. If the impact of light is associated with the effect of temperature through appropriate neural devices, new behaviors appear to justify the impact of temperature [27, 28]. thermosensitive neurons can also exhibit different triggering modes like a biological neuron. Work will, therefore, be intensified to determine the best neural circuits with the appropriate coupling, triggering the desired excitation in the environment desired for a synaptic transmission envisaged [35–45]. For example, electric field coupling via a capacitors connection explains the physical mechanism of differential coupling [35, 46–48]. Magnetic field coupling via an induction coil provides a new definition of integral coupling [45] between nonlinear circuits. The memristor coupled to circuits and neural networks makes it possible to improve the memory capacity of neural circuits and to find a synchronization approach between these circuits. Thus, memristive synapses are obtained [39, 49, 50]. Note that these memristive synapses are used to couple two neurons to create a neural network [51, 52]. In addition, the variable voltage coupling via a resistor or a gap junction, associated with an inductor and a capacitor, triggers the physical field coupling

and the Joule effect is removed. It is well to remember that the combination of electronic components makes it possible to construct a hybrid synapse for neural circuits [53]. These synapses of an electrical and chemical nature can encode external stimuli and can also be used for the coupling of biological neurons. Despite these strong advances, the results obtained remain in constant use. The fundamental concern remains to know which are the best components and with which neural circuit the synchronization in the synaptic environment will be judged to be quite perfect.

The Josephson Junction (JJ), characterized by the phenomena of the quantization of magnetic flux and the Josephson effect, was the best candidate in this exercise [54–56]. While the proposed neural circuits adapt to synchronization-related behaviors, other physical behaviors that may be subject to biological interpretations may vary from circuit to circuit. It becomes necessary to explore as many avenues as possible by proposing various neural circuits capable of giving operational responses that can adapt to the multiple situations that come into play during the synaptic crossing. This consideration is related to the complexity of synaptic dynamics, which justifies the investigation of behavioral maps and the processing of these dynamics. Thus, several nonlinear circuits integrating the JJ are explored to understand the dynamics of chaotic circuits [57] and computational neurosciences [58–63]. Galvanized by studies on neural circuit couplings [64–68], by the high sensitivity of the JJ to detect the magnetic field and by work on photosensitive neurons and thermosensitive neurons [27, 28, 30, 31], we propose in this manuscript to couple two thermosensitive and photosensitive FHN neural circuits driven simultaneously by a phototube and a thermistor via a JJ. Thus, this assembly allows us to improve the sensitivity of the neural circuit under the effect of light and temperature and to estimate a possibility of synchronization of the two neural circuits through a hybrid synapse.

This scientific contribution is organized as follows. In Sect. 2, the functional neural circuit of two neurons subjected to the simultaneous action of light and temperature and then coupled with a hybrid synapse is presented. Then, classical methods of analysis of nonlinear dynamics such as bifurcation diagrams, Lyapunov spectrum graphs and phase portraits are exploited in Sect. 3, to estimate a synchronization dependence (complete synchronization or a phase synchronization) in the coupled circuit. In Sect. 4, PSpice simulations are performed. The conclusion is given in Sect. 5.

2 Model and scheme

It is known that the simplified biological neuron model takes into account two variables and an external forcing current is introduced to modify the excitability to generate different types of triggering patterns such as quiescent, spiking, bursting and chaotic states. In this configuration, one variable representing the membrane

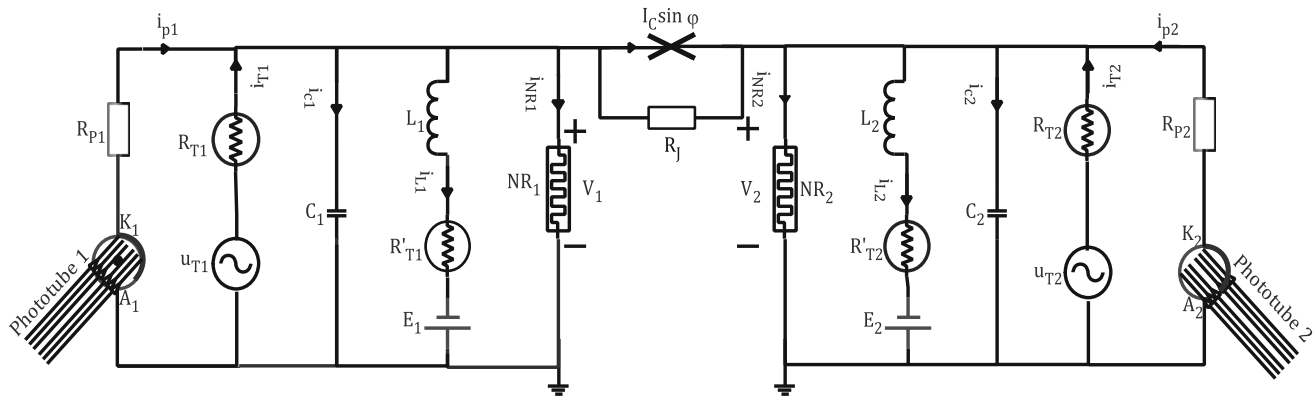


Fig. 1 Schematic diagram of two neural circuits FHN under the photoelectric and thermal effects couple via the Josephson Junction and a resistor. NR_j is a nonlinear resistance, C_j is the capacitor, L_j represents an induction coil, R_{Tj} and R'_{Tj} denote thermistors, R_{Pj} is a linear resistance, and E_j is a constant voltage source. K_j designates the cathode and A_j represents the anode in the phototube with $j = 1, 2$

potential is used as an activator, while another slow variable is used for the transmembrane current recovery variable. Drawing inspiration from work [27, 28, 30, 31], we consider in this article a model of a thermosensitive and photosensitive FHN neuron driven simultaneously by a phototube and thermistors as defined in Ref. [31]. The forcing current comes simultaneously and continuously from a photocurrent, from external lighting and the material properties of the phototube cathode and from a branch current from an external heat source controlled by thermistors. In order to couple two FHN neurons driven simultaneously by light and temperature, we use for reasons of simplicity, an ideal JJ in parallel with a linear resistor R_j to open a coupling channel. Therefore, the coupled circuits are shown in Fig. 1.

The synapse of the biological neuron has a complex anatomical structure and it can capture different types of external stimuli. The coupling channel consisting of a linear resistance and a JJ allows the construction of a functional hybrid synapse. In particular, the Josephson involvement can estimate the effect of the external magnetic field on the coupling synapse by changing the phase error in the JJ, thus the Junction current is regulated efficiently and appropriately. Therefore, this coupling channel can describe the main biophysical properties of the artificial synapse and it can be further used in artificial neural networks.

The resistances of the thermistors depend on the temperature and are given by the relation $R_T = R_\infty e^{(\frac{B}{T})}$ where the parameter of the material B is determined by the activation energy q and the Boltzmann constant K with the dependence $B = q/K$. On the other hand, the currents i_{NR} at the terminals of the nonlinear resistors [30, 31] can be estimated by

$$i_{NR} = -\frac{1}{\rho} \left(V - \frac{V^3}{3V_0^2} \right), \tag{1}$$

where ρ is the normalized resistance parameter, V_0 represents the cutoff voltage and V is the voltage across the nonlinear resistor.

The relation between the photocurrent and the voltage [28, 30] at the terminals of the phototube is evaluated by

$$i_P = \frac{2I_H}{\pi} \arctan(V_p - V_a), \tag{2}$$

where V_a denotes the reverse cutoff voltage, V_p and I_H describe the saturation voltage and current across the phototube, respectively.

Applying Kirchoff's law in Fig. 1 and considering that the coupling channel is fully activated, the circuit equations can be described as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \frac{dV_1}{dt} = i_{P1} + \frac{V_{T1} - V}{R_{T1}} - i_{L1} + \frac{1}{\rho} \left(V_1 - \frac{V_1^3}{3V_0^2} \right) \\ \quad - I_c \sin \varphi - \frac{(V_1 - V_2)}{R_j} \\ L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = V_1 - R'_{T1} i_{L1} + E_1 \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} = i_{P2} + \frac{V_{T2} - V}{R_{T2}} - i_{L2} + \frac{1}{\rho} \left(V_2 - \frac{V_2^3}{3V_0^2} \right) \\ \quad + I_c \sin \varphi + \frac{(V_1 - V_2)}{R_j} \\ L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = V_2 - R'_{T2} i_{L2} + E_2 \\ \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt} = V_1 - V_2 \end{array} \right. \tag{3}$$

where V_j denotes the output voltage across capacitor C_j and i_{Lj} is the induction current across inductance L_j . The parameters R_{Tj} , R'_{Tj} are resistances linked to the thermistor and L_j, C_j, E_j represent inductance, capacitance and constant voltage, respectively, with $j = (1, 2)$. Furthermore, V_{Tj} is a time-varying alternating voltage applied to the thermistor to generate forcing current defined by: $V_{Tj} = B_{Tj} \cos(\omega_{Tj} t)$ where

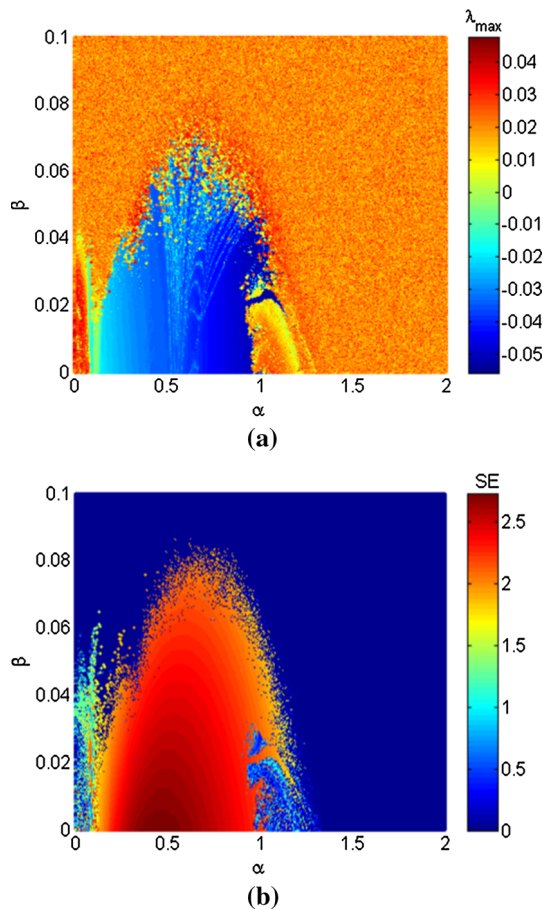


Fig. 2 Two-parameter diagram along with their largest Lyapunov exponent (a) and the error function (b), showing the behaviors exhibited by the membrane potential of each neuron and error that exists between these two neurons when the maximum current of the Josephson Junction (α) and the resistance of the coupling channel (β) are varied with a fixed initial condition (0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001). For the two-parameter diagram (a), the regular behavior (periodic) are represented by a blue color as hard the irregular (chaotic) behaviors are materialized by a lemon yellow or red color in constant evolution for most of the negative Lyapunov exponents and positives. Based on the diagram in b, the zero error (complete synchronization) is represented by a color in blue and the non-zero error (no synchronization) is associated with the color lemon yellow or red

B_{T_j} is the amplitude of the periodical term in the voltage source and ω_{T_j} the angular frequency. I_c and φ denote, respectively, the maximum junction current and the phase error for the junction. The parameters h and e denote Planck's constant and the charge of the electron.

The phototube can generate a photocurrent i_P which can be calculated by the relation

$$i_{P_j} = \frac{2I_H}{\pi} \arctan(V_{P_j} - V_a) = \frac{V_{P_j} - V_j}{R_{P_j}}. \quad (4)$$

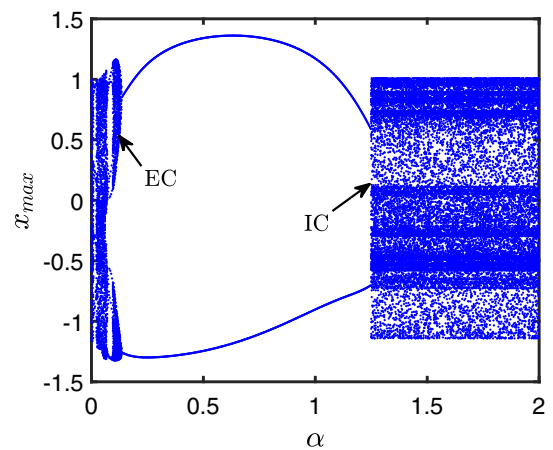


Fig. 3 Bifurcation diagram representing the local maxima of the membrane potential of the first neuron with respect to the maximum current of the Josephson junction (α). The other parameters are defined as follows: $a = 0.7, b_0 = 0.6, c = 0.1, \epsilon_P = \epsilon_0 = 0.175, T' = 5, A_0 = 0.5, A_P = 0.01, \omega_T' = \omega_P = 0.7, g = 0.1, \beta = 0.02$ and the initial values are fixed at (0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001)

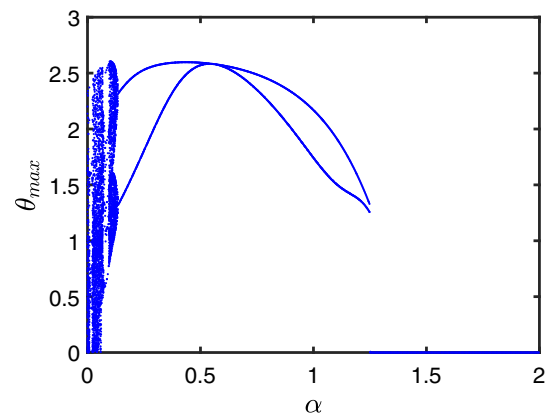


Fig. 4 Variation of the maximum synchronization error function $\left(\theta_{\max} = \sqrt{(x_{1 \max} - x_{2 \max})^2 + (y_{1 \max} - y_{2 \max})^2}\right)$ with respect to the maximum current of the Josephson junction (α). The other values of the parameters are defined in Fig. 3

In the practical case and for the sake of simplification, the phototube is considered as a periodic voltage source called attack signal defined by $u_{P_j} = A_{P_j} \cos(\omega_{P_j} \tau)$, where A_{P_j} and ω_{P_j} denote, respectively, the amplitude and the angular frequency of the signal and $j = (1, 2)$.

By combining Eqs. (1), (3) and (4) and by applying the scale transformation norm on the variables and parameters, we obtain the expressions opposite:

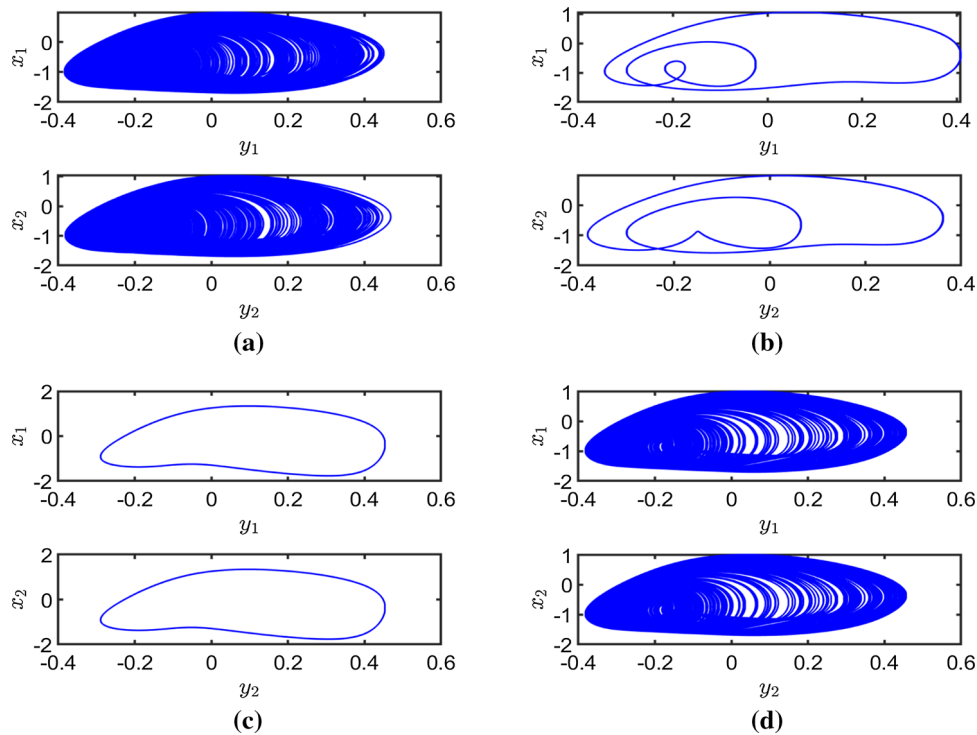


Fig. 5 Formation of attractors and projections of certain solutions from a five-dimensional phase space onto the planes (y_1, x_1) and (y_2, x_2) for the two FHN neurons. For **a** $\alpha = 0.03$; **b** $\alpha = 0.088$; **c** $\alpha = 0.5$ and **d** $\alpha = 1.3$. The other values of the parameters are defined in Fig. 3

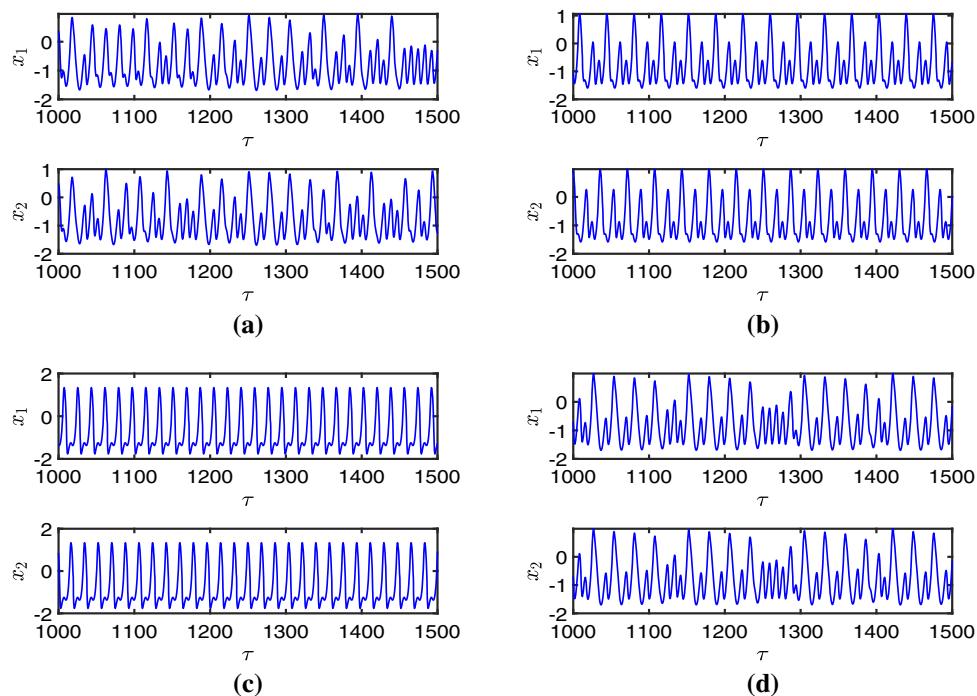


Fig. 6 Temporal evolution of membrane potential is calculated for the two FHN neurons by selecting different values of the applied parameter α : for **a** $\alpha = 0.03$; **b** $\alpha = 0.088$; **c** $\alpha = 0.5$ and **d** $\alpha = 1.3$. The other values of the parameters are defined in Fig. 3

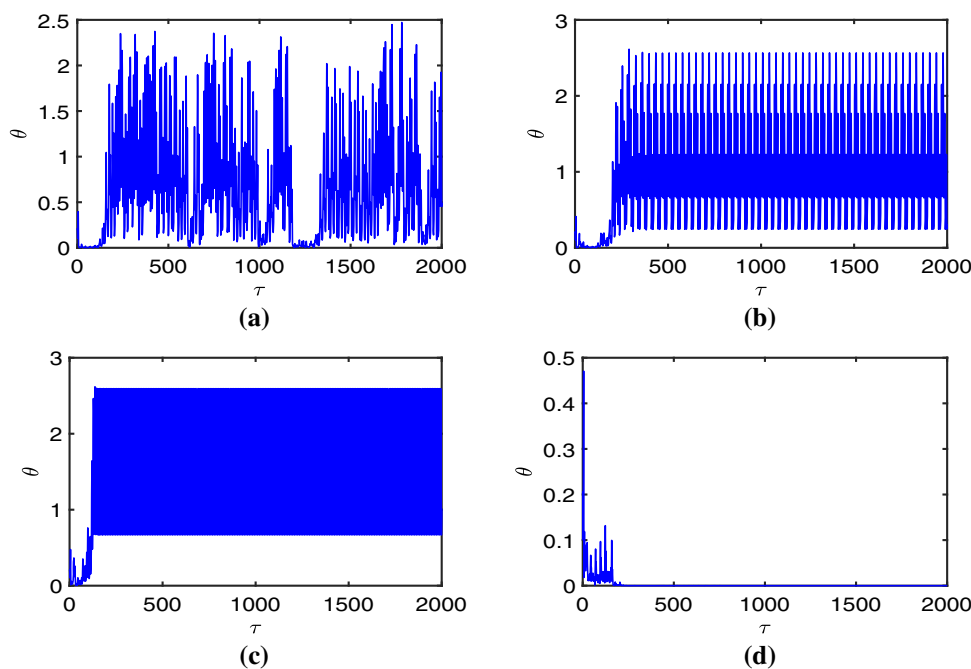


Fig. 7 Evolution of error function is calculated by setting different values for parameter α . For **a** $\alpha = 0.03$; **b** $\alpha = 0.088$; **c** $\alpha = 0.5$ and **d** $\alpha = 1.3$. The other values of the parameters are defined in the Fig. 3

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j = \frac{V_j}{V_0}, y_j = \frac{\rho^i L_j}{V_0}, \tau_j = \frac{t}{\rho C_j}, T_j' = \frac{T_j}{T_0} = \frac{T_j}{B} \\ a = \frac{E_j}{V_0}, b(T_j') = \frac{R_{T_j}}{\rho} = b_0 \exp\left(\frac{1}{T_j'}\right), c = \frac{\rho^2 C_j}{L_j} \\ \xi_{P_j} = \frac{\rho}{R_{P_j}}, \xi_{T_j}(T_j') = \frac{\rho}{R_{T_j}} = \xi_0 \exp\left(-\frac{1}{T_j'}\right) \\ \omega_{T_j} = \rho C_j \omega'_{T_j}, u_{P_j} = \frac{\rho V_{P_j}}{R_{P_j} V_0} = \xi_{P_j} \frac{V_{P_j}}{V_0} \\ \alpha = \frac{I_c}{V_0}, \beta = \frac{\rho}{R_j}, g = \frac{2e\rho C V_0}{h}, j = \{1, 2\} \end{array} \right. \quad (5)$$

For simplicity, consider the case of two identical neural circuits selected with the same parameters and coupled by the JJ and a linear resistor. Thus, coupled systems are rewritten by

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{d\tau} = x_1 \left(1 - \xi_0 e^{-\frac{1}{T_1'}} - \xi_P \right) - y_1 - \frac{1}{3} x_1^3 + \\ \quad A_P \cos(\omega_P \tau) + A_0 e^{-\frac{1}{T_1'}} \cos(\omega_T' \tau) - \alpha \sin z \\ \quad - \beta(x_1 - x_2) \\ \frac{dy_1}{d\tau} = c \left(-b_0 e^{\frac{1}{T_1'}} y_1 + a + x_1 \right) \\ \frac{dx_2}{d\tau} = x_2 \left(1 - \xi_0 e^{-\frac{1}{T_2'}} - \xi_P \right) - y_2 - \frac{1}{3} x_2^3 + \\ \quad A_P \cos(\omega_P \tau) + A_0 e^{-\frac{1}{T_2'}} \cos(\omega_T' \tau) + \alpha \sin z \\ \quad + \beta(x_1 - x_2) \\ \frac{dy_2}{d\tau} = c \left(-b_0 e^{\frac{1}{T_2'}} y_2 + a + x_2 \right) \\ \frac{dz}{d\tau} = g(x_1 - x_2) \end{array} \right. \quad (6)$$

where x_j and y_j are the membrane potential and the transmembrane current recovery variable, respectively.

Seen in its dynamic aspect, the thermosensitive and photosensitive FHN neuron can induce periodic, spike, burst and even chaotic firing patterns when the intrinsic parameters are properly selected. In addition, the intrinsic parameters (α, β, g) related to the coupling channel can be adjusted to detect a possible synchronization approach between the two neural circuits. To evaluate the complete synchronization, the error function is calculated by the relation

$$\theta(e_x, e_y) = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (7)$$

In addition, the definition of phase synchronization and phase error can be obtained by applying the Hilbert transformation [69,70] on the sampled time series (x_1, x_2) . They are defined by

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1(t) = -\frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1(\tau)}{t - \tau} d\tau; \\ \hat{x}_2(t) = -\frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ \Delta\phi = \phi_1(t) - \phi_2(t) \\ \quad = \arctan\left(\frac{\hat{x}_1(t)}{x_1(t)}\right) - \arctan\left(\frac{\hat{x}_2(t)}{x_2(t)}\right) \end{array} \right. \quad (8)$$

where PV denotes the integral of the principal Cauchy value, and $\Delta\phi$ the phase error function [70]

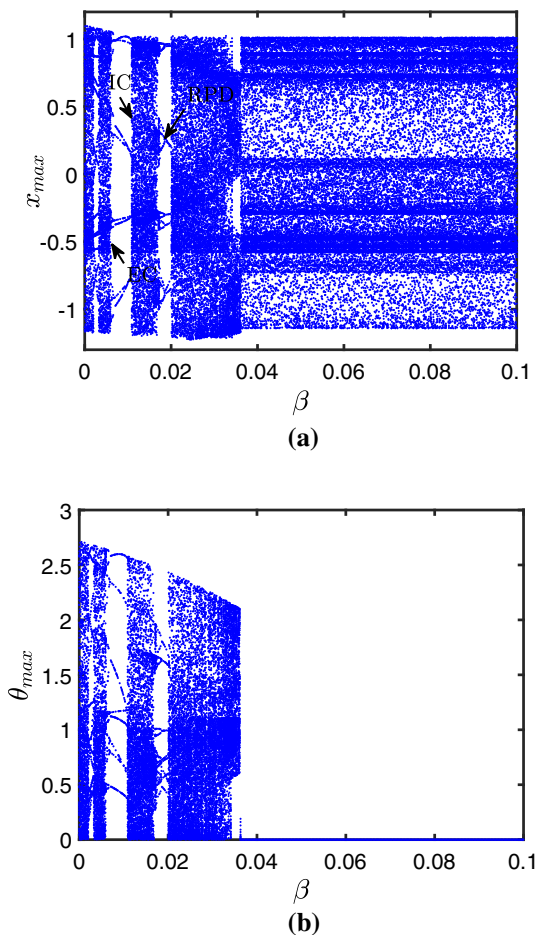


Fig. 8 Bifurcation diagram representing in **a** the local maxima of the membrane potential of the first neuron and in **b** the variation of the maximum synchronization error function as a function of the parameter β of the coupling of voltage. The other parameters are defined as follows: $a = 0.7, b_0 = 0.6, c = 0.1, \epsilon_P = \epsilon_0 = 0.175, T' = 5, A_0 = 0.5, A_P = 0.01, \omega_T = \omega_P = 0.7, g = 0.1, \alpha = 0.02$ and the initial values are fixed at $(0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001)$

It is possible for two identical neural circuits to drive by the same stimulus, to produce complete synchronization. When applying different stimuli to two neural circuits, it is very difficult to achieve full synchronization, but phase synchronization can occur when the maximum current of the JJ and the induction coefficient g are properly selected.

To study the symmetry of the coupled system, we will focus on a single uncoupled neuron. Since the neurons are coupled through a Josephson Junction which is initially symmetry, it cannot influence the overall symmetry of the coupled system. Note that, the model will be symmetric if and only if for a couple of solutions (x_1, y_1) , the system will remain invariant against the transformation of the solution $(-x_1, -y_1)$. In the case of our system, we note the presence of exciting forces on the line \dot{x}_1 and a constant a on the line \dot{y}_1 . Hence, the presence of the external forces and the constant make

the symmetry non-existent in the single neuron hence make the symmetry non-existent in the coupled neuron model.

3 Numerical results and discussion

For nonlinear analysis, the fourth-order Runge–Kutta algorithm is applied to find numerical solutions of the dynamic system with a time step 0.01. The initial values of the variables are selected as follows $(0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001)$. The values of the intrinsic parameters are defined by $a = 0.7, b_0 = 0.6, c = 0.1, \xi_P = \xi_0 = 0.175$. Note that the forcing current produced simultaneously by a phototube and a thermistor in the FHN neuron (see Fig. 1) can be tuned to detect mode selection and transition in neuronal activities. Thus, for the following parameter values $\omega_P = \omega_T = 0.7, A_P = 0.01, A_0 = 0.5$ and $T' = 5$, the thermosensitive and photosensitive FHN neuron model exhibits chaotic behavior.

Consider two identical thermosensitive and photosensitive FHN neurons taken in a chaotic state and coupled via the Josephson Junction and a linear resistor (Fig. 1). A variation of the intrinsic parameters of the JJ and of the linear resistance in the coupling channel allows us to find a possible synchronization stability. Therefore, the diagram with two parameters together with their largest Lyapunov exponent (Fig. 2a) and the error function (Fig. 2b), allows us to show that the variation of these two parameters can induce to periodic and chaotic behaviors, and then also to complete synchronization. For the two-parameter diagram (a), the regular behavior (periodic) are represented by a blue color as hard the irregular (chaotic) behaviors are materialized by a green or red color in constant evolution for most negative Lyapunov exponents and positive. Based on the diagram in (b), the zero error (complete synchronization) is represented by a color in blue and the non-zero error (no synchronization) is associated with the color green or red. It can, therefore, be argued that increasing one parameter in the coupling channel leads the system to complete synchronization.

For a better illustration, we consider in what follows the value of the resistance of the coupling channel $\beta = 0.02$. Thus, we discuss the effect of the parameter α on the dynamics of the thermosensitive and photosensitive FHN neuron model. Therefore, in Fig. 3 the bifurcation diagram representing the local maxima of the membrane potential of the first neuron with respect to the maximum current of the JJ is presented. We contact that the modification of the control parameter (α) can generate periodic and chaotic oscillations when the intrinsic parameters are fixed. In addition, complex phenomena such as exterior crisis (EC) and interior crisis (IC) can be observed in this system [31–33]. To this end, we can notice that for a value ($\alpha = 1.25$) the system goes from a periodic state to a chaotic state through an interior crisis (IC).

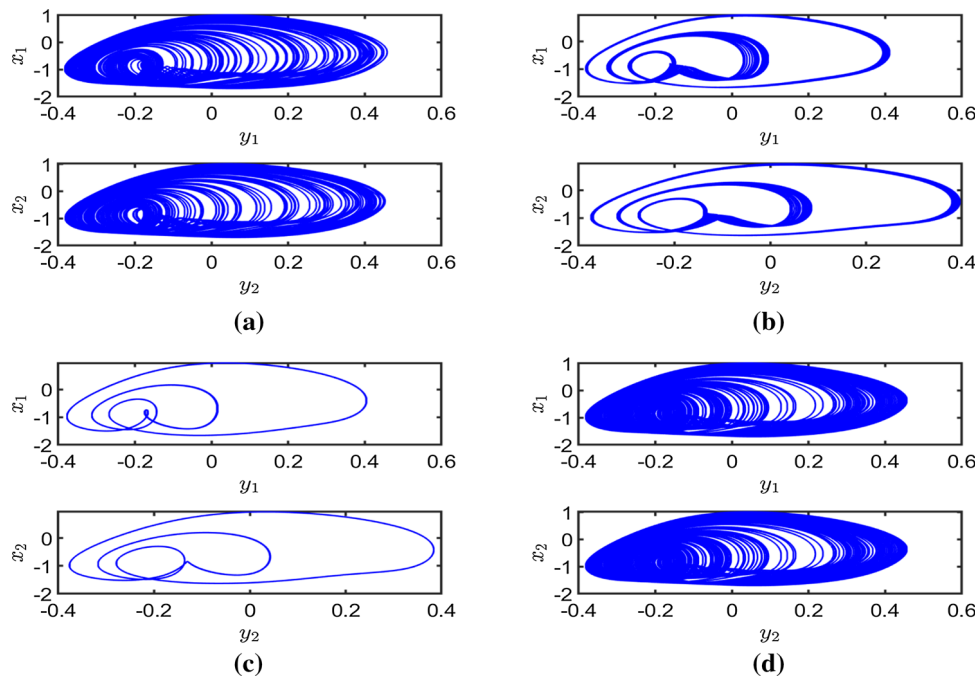


Fig. 9 Formation of attractors and projections of certain solutions from a five-dimensional phase space onto the planes (y_1, x_1) and (y_2, x_2) for the two FHN neurons. For **a** $\beta = 0.01$; **b** $\beta = 0.0188$; **c** $\beta = 0.02$ and **d** $\beta = 0.08$. The other values of the parameters are defined in Fig. 7

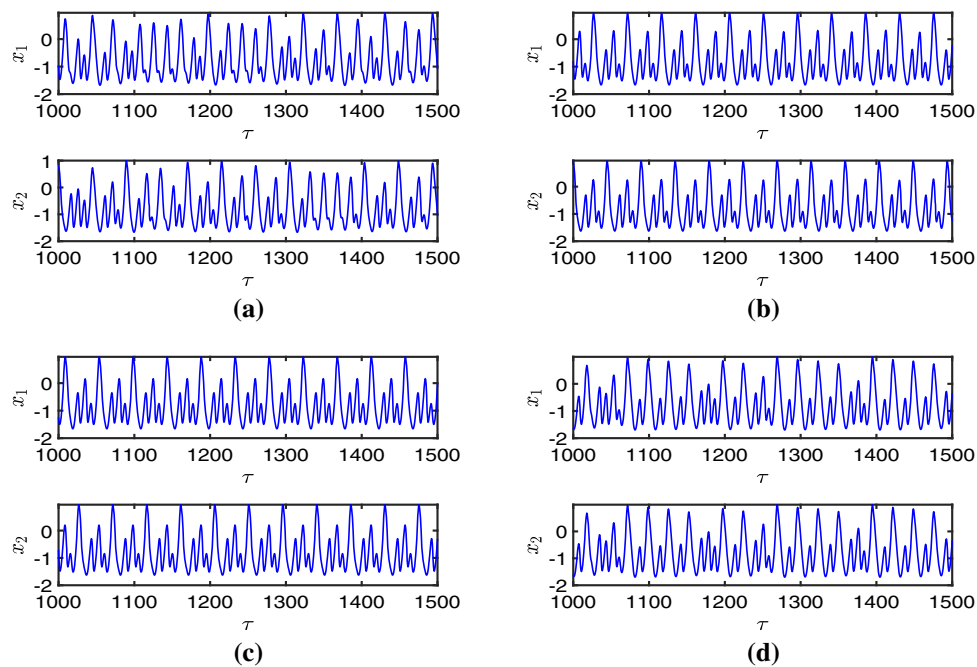


Fig. 10 Temporal evolution of membrane potential is calculated for the two FHN neurons by selecting different values of the applied parameter β For **a** $\beta = 0.01$; **b** $\beta = 0.0188$; **c** $\beta = 0.02$ and **d** $\beta = 0.08$. The other values of the parameters are defined in Fig. 7

Figure 4 presents the variation of the maximum synchronization error function θ_{\max} with respect to the maximum current of the JJ. Note that for values of $\alpha < 1.25$, the maximum error dynamics is greater than zero ($\theta_{\max} > 0$) showing that the system is not syn-

chronized. For values of $\alpha \geq 1.25$, the maximum error dynamic suddenly switches to zero ($\theta_{\max} = 0$) thus leading to complete synchronization. Thus, we can state that the involvement of coupling via hybrid synapse can induce the appearance of different trigger patterns and

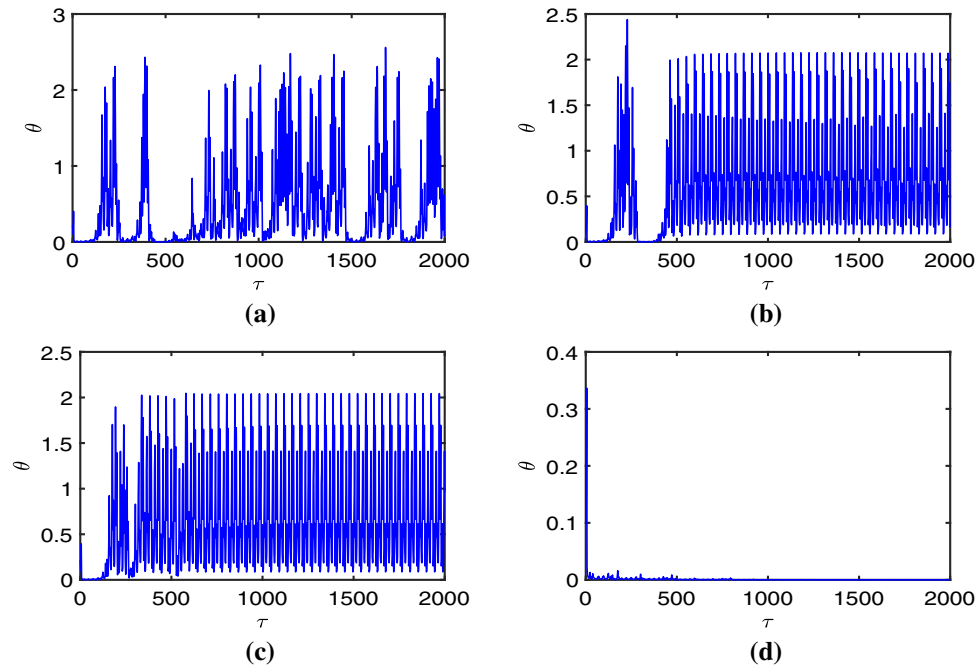


Fig. 11 Evolution of error function is calculated by setting different values for parameter β . For **a** $\beta = 0.01$; **b** $\beta = 0.0188$; **c** $\beta = 0.02$ and **d** $\beta = 0.08$. The other values of the parameters are defined in Fig. 7

thus neuronal activities can be regulated via channel coupling.

For more illustration, we show through Fig. 5 the different attractors formed when the intensity of the current in the JJ varies. We can notice through this figure that two thermosensitive and photosensitive FHN neural circuits having chaotic behaviors and coupled via a JJ and a linear resistance can be annihilated to lead to periodic oscillation and chaotic synchronization when certain parameters of the dynamics of the neuron are well defined. Increasing the α parameter beyond a certain threshold value allows us to find the stability of complete synchronization.

In addition, Fig. 6 of the sampled time series of the two coupled FHN neural circuits allows us to see that these two circuits achieve complete synchronization when the intensity of the coupling is beyond the threshold. For a coupling current below the threshold, these two neural circuits exhibit phase lock in the time series sampled for the output voltage and the membrane potential. The observation of Fig. 7 presents an estimate of the evolution of the error function for discrete values of the parameter α .

Resistance in the coupling channel as shown in Fig. 1 can be the cause of voltage coupling by absorbing heat energy and possibly improving energy pumping. In the case where the coupling channel reacts primarily under the influence of voltage coupling through the resistor, complete synchronization can be achieved by continuously increasing the coupling current. It should be noted that this synchronization is achieved when the field coupling via the JJ is kept active. Thus, in a second case, we can discuss the effect of the param-

eter β when the parameter related to field coupling is activated at a value of $\alpha = 0.02$. Therefore, the bifurcation diagrams in Fig. 8 represent the local maxima of the membrane potential of the first neuron in (a) and of the error function in (b) as a function of the parameter β of the coupling of voltage. By observing Fig. 8a, we contact that the evolution of the parameter β can generate periodic and even chaotic oscillations. In addition, complex phenomena such as outer crises (EC), inner crises (IC) and reverse period doubling (RPD) are also observed in the model [31–34]. Through the diagram of Fig. 8b, we can notice that the neural circuits can be synchronized when β is beyond a certain threshold value. For a good illustration, we show through Fig. 8, the different phase portraits when the values of the parameter β related to the linear resistance of the voltage coupling is taken in a discrete way. In view of this, we can state that voltage coupling via linear resistance played a very important role in the regulation of synchronization behaviors when two chaotic coupled FHN neurons are taken into account. Therefore, periodic oscillations, chaotic oscillation, and even gap oscillations can progress to complete synchronization by suppressing the chaotic behaviors of the initial FHN neurons. These results are observed through Figs. 8 and 9. In Fig. 10, we plot the sampled time series for the membrane potential of the coupled FHN neural circuits. Further, the error function is calculated to estimate the dependence of the timing on the parameter β for the resistance of the coupling channel, and the results are shown in Fig. 11. From these results, we can see and confirm that a complete synchronization is reached when increasing the intensity of the voltage

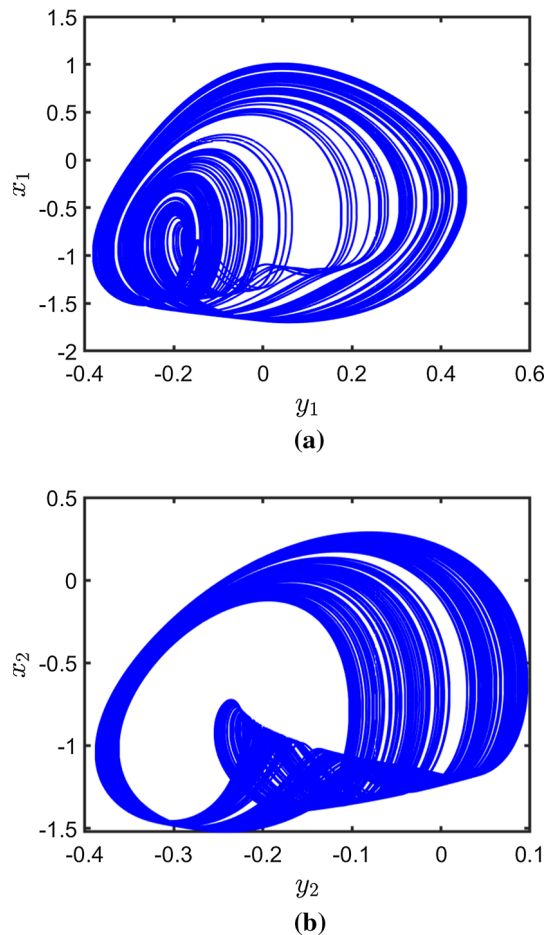


Fig. 12 Formation of chaotic attractors of master and slave neurons, respectively, in planes (x_1, y_1) and (x_2, y_2) without activation of the coupling channel. For **a** $T'_1 = 5$ and **b** $T'_2 = 2.6$. The other values of the parameters are defined in the test and the initial values are fixed at $(0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001)$

coupling β beyond the acceptance threshold, for example $\beta = 0.037$.

From all the above, we can confirm that two identical light- and temperature-dependent neurons can exit from no-synchronization to stable complete synchronization when the coupling channel parameters (α, β) are properly selected. It is well known that the electrical activity of a biological neuron is highly dependent on its external forcing current. Thus, it is important to conduct studies when we consider two neural oscillators with different oscillation modes by applying different external forcing currents from light and heat. For simplicity, the parameters of the Phototube and the Thermistor of the two thermosensitive and photosensitive FHN neurons are defined as: $\omega_{P1} = \omega_{T1} = \omega_{P2} = \omega_{T2} = 0.7, A_{P1} = A_{P2} = 0.01, A_{O1} = A_{O2} = 0.5, T'_1 = 5$ and $T'_2 = 2.6$. Figure 11 presents the phase portraits of the different modes of oscillation of the two neurons with removal of the coupling channel. By taming the parameters of the coupling channel, we show through

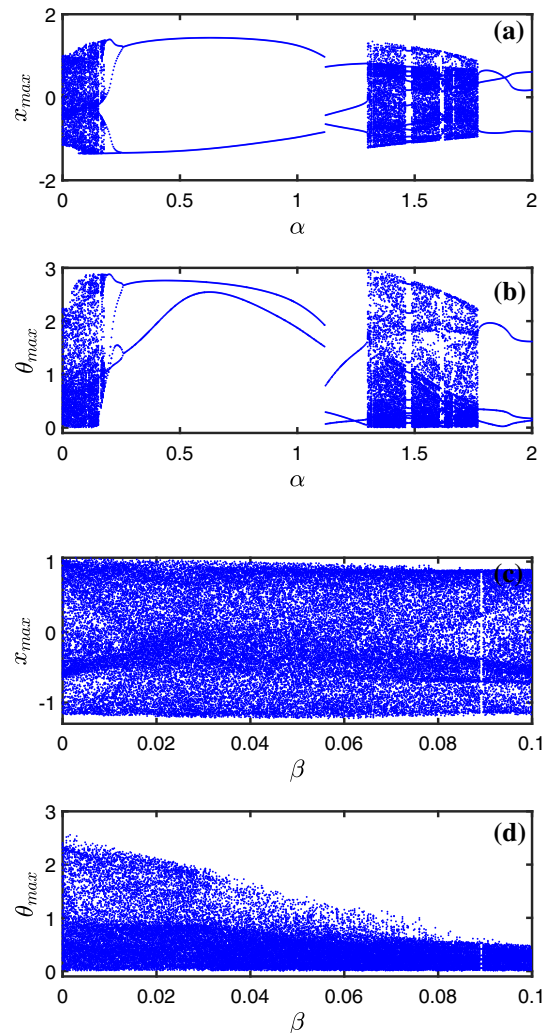


Fig. 13 Bifurcation diagram representing the local maxima of the membrane potential of the first neuron and the variation of the maximum synchronization error function with respect to the maximum current of the Josephson Junction (α) (**a, b**) and a function of the parameter β of the coupling voltage (**c, d**). For the diagram **a, b** $\beta = 0.02$ and **c, d** $\alpha = 0.02$. The other parameters are defined as follows: $a = 0.7, b_0 = 0.6, c = 0.1, \epsilon_P = \epsilon_0 = 0.175, A_0 = 0.5, T'_1 = 5, T'_2 = 2.6, A_P = 0.01, \omega'_T = \omega_P = 0.7, g = 0.1$ and the initial values are fixed at $(0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001)$

the bifurcation diagrams of Fig. 13 the local maxima of the membrane potential of the first neuron and of the error function with respect to the maximum current of the jj (α) (**a**) and the voltage coupling β (**b**), respectively. From this figure, we notice that it is difficult and even impossible to achieve complete synchronization when the intrinsic parameters of the coupling channel are further increased. For this, it is interesting to study whether phase synchronization can be achieved. Thus, the curves of Fig. 14 allow us to confirm that there can be stability of a phase synchronization when the intensity of the coupling (g) , the maximum intensity of the current of the JJ (α) is enabled and the

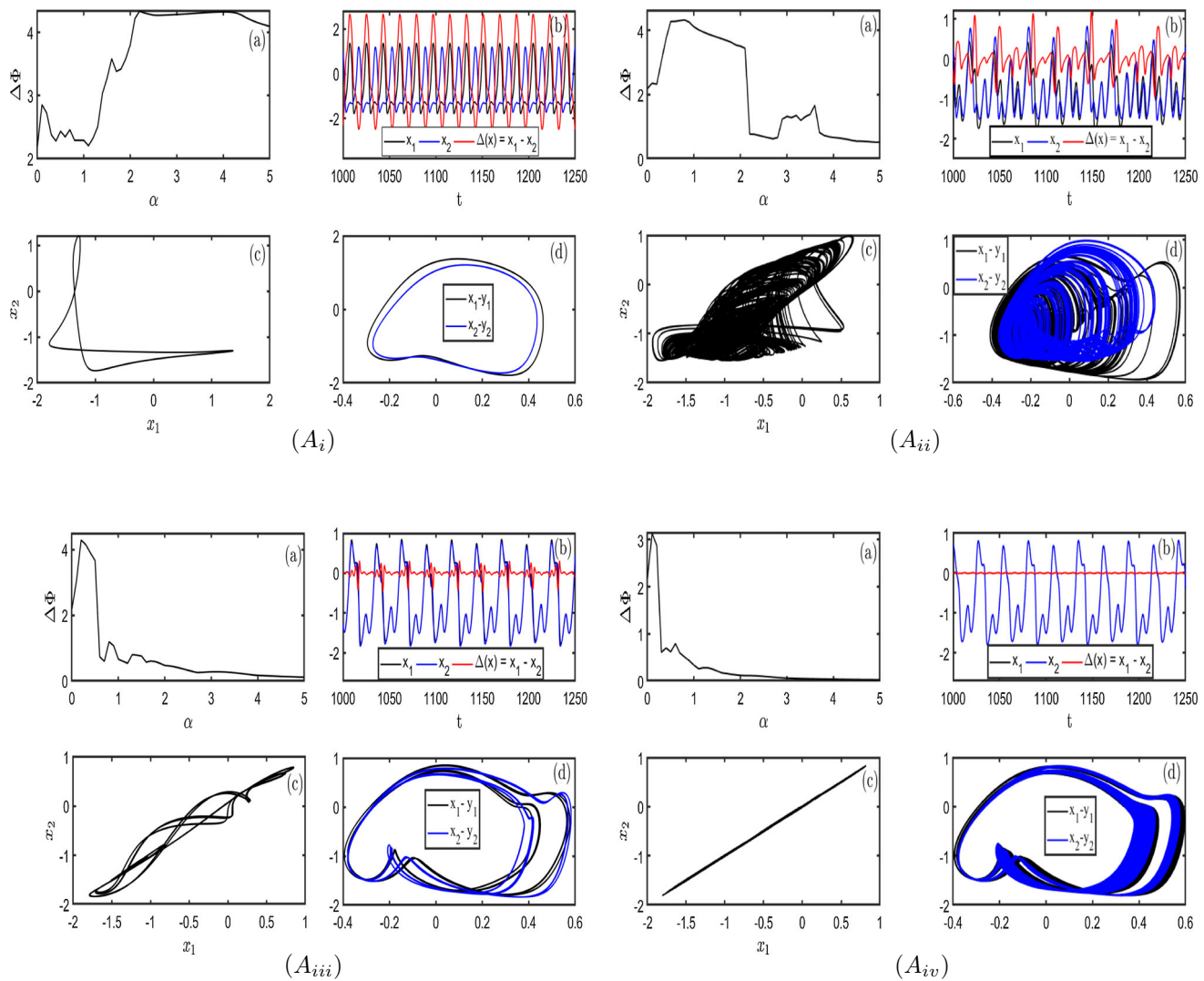


Fig. 14 **a** Phase error between the membrane potentials of the master and slave neurons with respect to the maximum current of the Josephson Junction (α), **b** temporary evolution of the membrane potentials of the master neuron (blue color), of the slave neuron (color black) and the difference of the two neurons (red color), **c** formation of the attractor in the plane (x_1, x_2) between the master and slave neurons and **d** the projection of the phase diagram onto the planes (x_1, y_1) presented by the color blue and (x_2, y_2) materialized by the color black. For (A_i) $g = 0.01$, (A_{ii}) $g = 0.03$, (A_{iii}) $g = 0.2$ and (A_{iv}) $g = 0.5$. The other parameters are defined as follows: $a = 0.7, b_0 = 0.8, c = 0.1, \xi_P = \xi_0 = 0.175, A_0 = 0.5, T'_1 = 5, T'_2 = 2.6, A_P = 0.01, \omega'_T = \omega_P = 0.7, k = 0.8, \beta = 0.02$ and the initial values are fixed at $(0.2, 0.1, 0.02, 0.01, 0.001)$

β parameter set to 0.02. it is calculated on these figures, the phase error between the membrane potentials of the master and slave neurons with respect to the maximum current of the JJ (α) (Fig. 14a), the temporary evolution of the membrane potentials of the master neuron (blue color), of the slave neuron (black color) and of the difference of the two neurons (red color) (Fig. 14b), the Phase portraits on the plane (x_1, x_2) between the master neurons and slave (Fig. 14c) and the phase portraits on the planes (x_1, y_1) presented by the color blue and (x_2, y_2) materialized by the color black (Fig. 14d) for values of the intensity of the coupling g different. We find that increasing the value of the coupling intensity g effectively achieves and improves the stability of Phase synchronization. Accordingly,

by modifying the physical properties of the coupling channels, the synchronization approach between light- and temperature-dependent neurons can be regulated efficiently.

4 Circuit implementation and simulation

The goal of this section is to design an electronic circuit capable of efficiently reproducing the dynamics of two Thermosensitive and Photosensitive FHN neurons coupled via a Josephson Junction and a linear resistor. To implement this electronic circuit, we use an approach based on operational amplifiers [65,71–81].

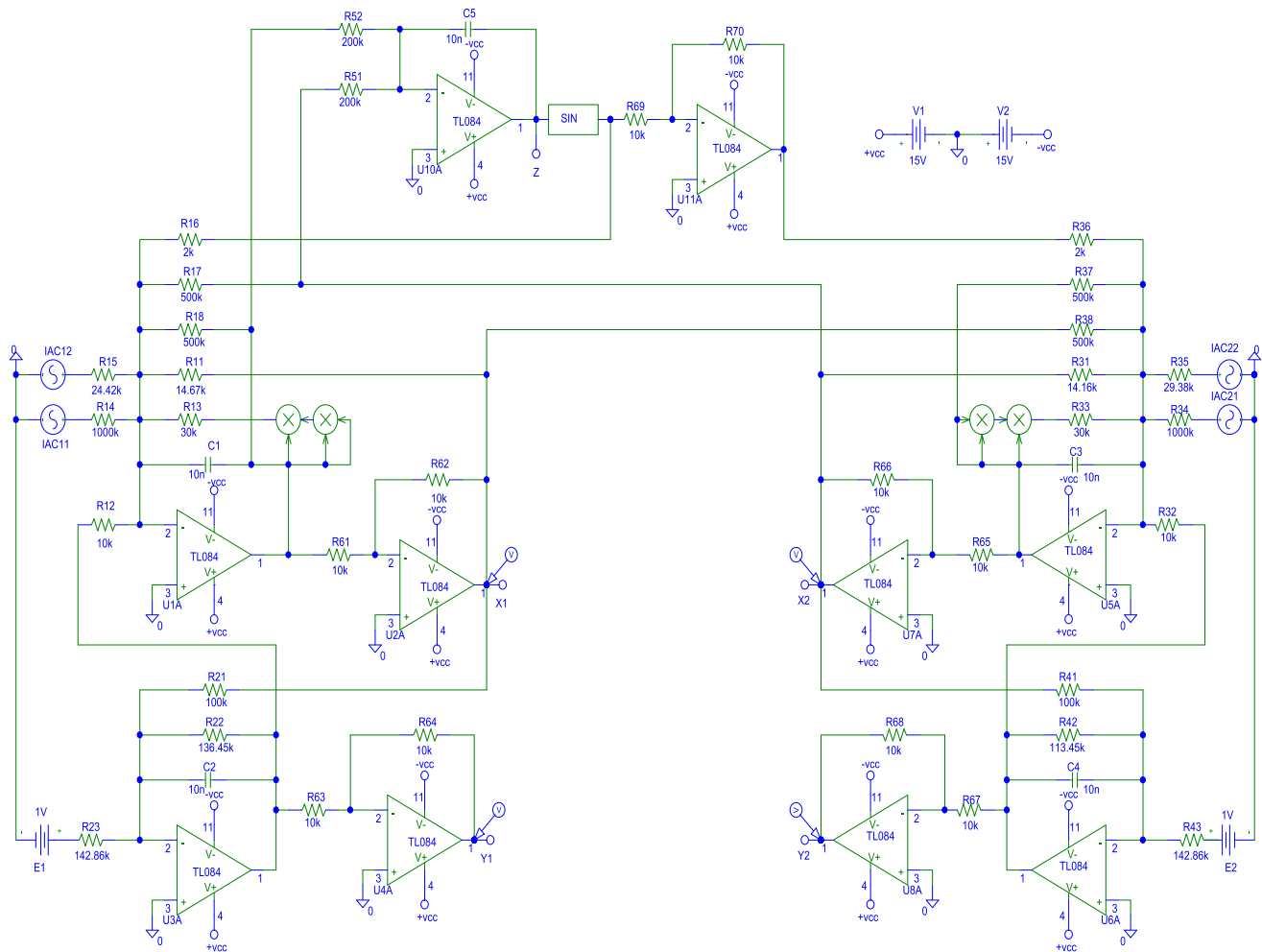


Fig. 15 Electronic circuit of the coupled model of the thermosensitive and photosensitive FHN neuron

Table 1 Circuit parameters of the neural model coupled via the Josephson junction for Pspice simulations

Neuron 1			Neuron 2		
Parameters	Designation	Value	Parameters	Designation	Value
R_{11}	Resistance	$14.7k\Omega$	R_{31}	Resistance	$14.2k\Omega$
R_{12}	Resistance	$10k\Omega$	R_{32}	Resistance	$10k\Omega$
R_{13}	Resistance	$30k\Omega$	R_{33}	Resistance	$30k\Omega$
R_{14}	Resistance	$1M\Omega$	R_{34}	Resistance	$1M\Omega$
R_{15}	Resistance	$24.4k\Omega$	R_{35}	Resistance	$29.4k\Omega$
R_{21}	Resistance	$100k\Omega$	R_{41}	Resistance	$100k\Omega$
R_{22}	Resistance	$136.5k\Omega$	R_{42}	Resistance	$113.5k\Omega$
R_{23}	Resistance	$142.9k\Omega$	R_{43}	Resistance	$142.9k\Omega$
C_1, C_2	Capacitance	10 nF	C_3, C_4	Capacitance	10 nF
Coupling channel (Josephson Junction and linear resistance)					
R_{16}, R_{36}	Resistance	$2k\Omega$	$R_{17}, R_{18}, R_{37}, R_{38}$	Resistance	$500k\Omega$
R_{51}, R_{52}	Resistance	Editable	C_5	Capacitance	$10nF$

The schematic diagram of the complete electronic simulator used to simulate the dynamics of the neuron model coupled via the jj and a linear resistance described by the system (9) is designed as shown in Fig. 15. The electronic device consists of two channels of circuit physically representing the two neurons. The neural circuit

channel is designed based on discrete electronic components such as resistors, capacitors, TL084 type Operational Amplifiers and AD633JN type electronic multipliers (MULT). Drawing inspiration from work [65, 71–81]. and applying Kirchhoff’s laws to the circuit in Fig. 15, the following equations are described:

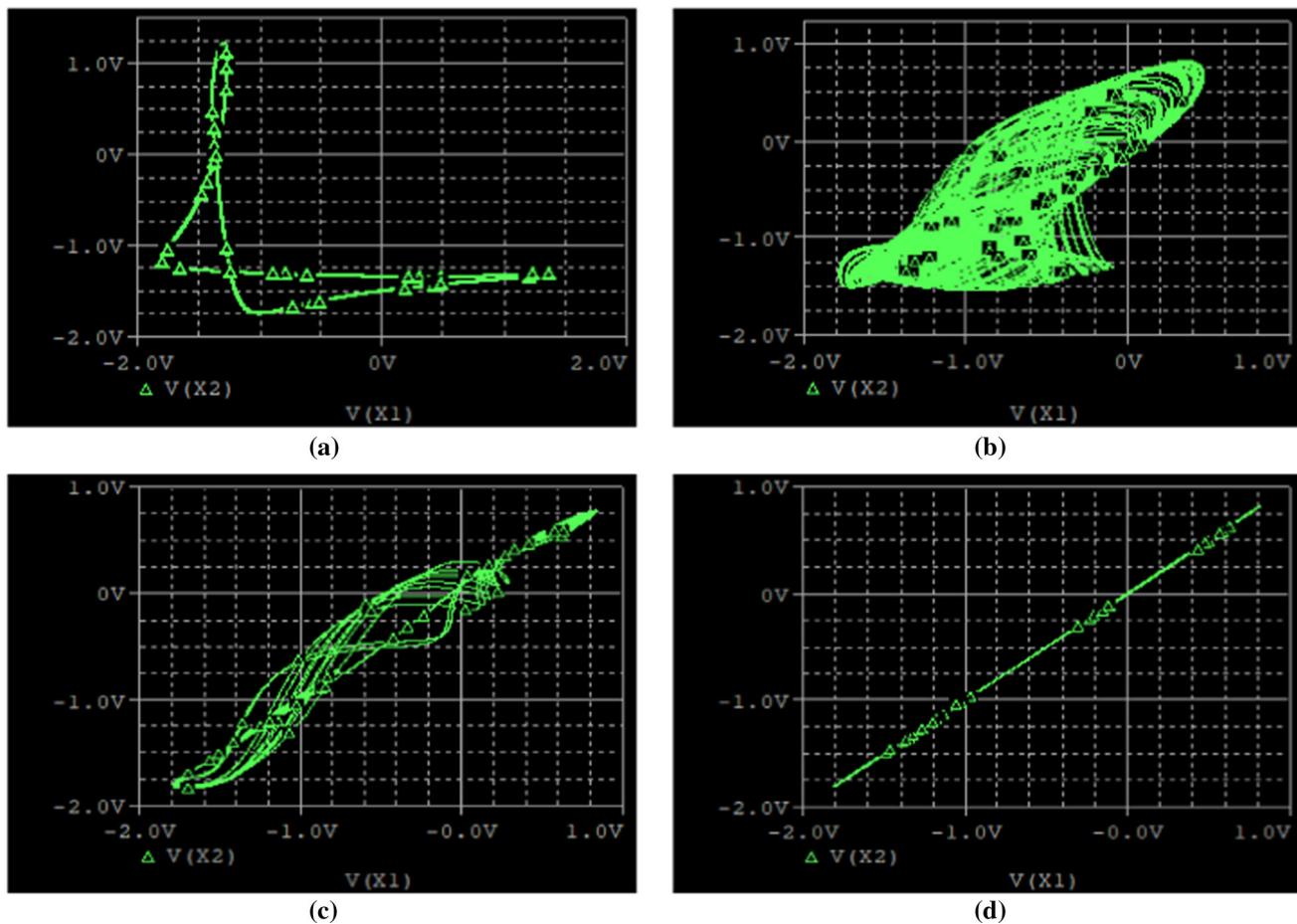


Fig. 16 Simulation on Pspice showing the attractors in the plane (x_1, x_2) for **a** $R_{51} = R_{52} = 1M\Omega$, **b** $R_{51} = R_{52} = 200k\Omega$, **c** $R_{51} = R_{52} = 50k\Omega$ and **d** $R_{51} = R_{52} = 20k\Omega$. The initial condition is fixed at $(0.2V, 0.1V, 0.02V, 0.01V, 0.001V)$

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \frac{R}{R_{11}}X_1 - \frac{R}{R_{12}}Y_1 - \frac{R\gamma^2}{R_{13}}X_1^3 + \frac{R}{R_{14}}I_{AC11} + \\ \frac{R}{R_{15}}I_{AC12} - \frac{R}{R_{16}}\sin(Z) - \frac{R}{R_{17}}X_1 + \frac{R}{R_{18}}X_2 \\ \dot{Y}_1 = \frac{R}{R_{21}}X_1 - \frac{R}{R_{22}}Y_1 + \frac{R}{R_{23}}E_1 \\ \dot{X}_2 = \frac{R}{R_{31}}X_2 - \frac{R}{R_{32}}Y_2 - \frac{R\gamma^2}{R_{33}}X_2^3 + \frac{R}{R_{34}}I_{AC21} + \\ \frac{R}{R_{35}}I_{AC22} + \frac{R}{R_{36}}\sin(Z) + \frac{R}{R_{37}}X_1 - \frac{R}{R_{38}}X_2 \\ \dot{Y}_2 = \frac{R}{R_{41}}X_2 - \frac{R}{R_{42}}Y_2 + \frac{R}{R_{43}}E_2 \\ \dot{Z} = \frac{R}{R_{51}}X_1 - \frac{R}{R_{52}}X_2 \end{cases} \quad (9)$$

Here, X_i is a state variable representing the membrane potential and Y_i the state variable representing the recovery variable with $i = 1, 2$. E_i is an external parameter and $I_{ACij} = A \cos(\omega_s \cdot t)$ represents the excitation source used to excite the different neurons with $i = 1, 2$ and $j = 1, 2$. Note that $A = 1V$ denotes the AC amplitude and ω_s its pulsation.

A comparison between Eqs. (9) and (6) allows us to write:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{R}{1 - \epsilon_0 e^{-\frac{1}{\tau_1 T}} - \epsilon_P}; \\ R_{31} &= \frac{R}{1 - \epsilon_0 e^{-\frac{1}{\tau_2 T}} - \epsilon_P}; \\ R_{12} &= R_{32} = R; R_{13} = R_{33} = 3\gamma^2 R; \\ R_{14} &= R_{34} = \frac{RA}{A_p}; \\ R_{15} &= \frac{RA}{A_0 e^{-\frac{1}{\tau_1 T}}}; \\ R_{35} &= \frac{RA}{A_0 e^{-\frac{1}{\tau_2 T}}}; \\ R_{21} &= R_{41} = \frac{R}{c}; \\ R_{22} &= \frac{R}{cb_0 e^{\frac{1}{\tau_1 T}}}; \end{aligned}$$

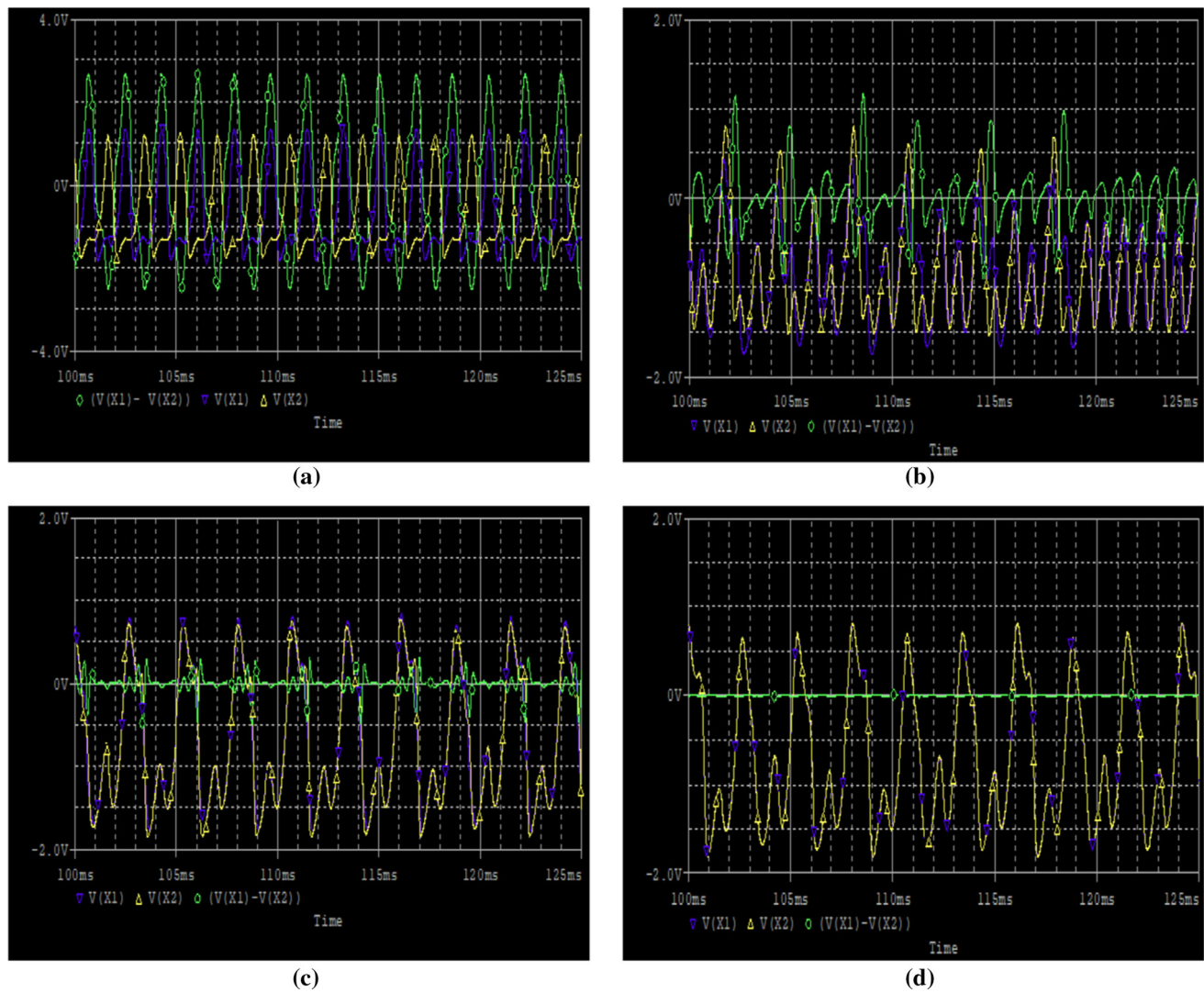


Fig. 17 Simulation on Pspice showing the temporary series of the membrane potential of the first neuron and of the second neuron as well as the phase error between the membrane potentials for **a** $R_{51} = R_{52} = 1 \text{ M } \Omega$, **b** $R_{51} = R_{52} = 200 \text{ K } \Omega$, **c** $R_{51} = R_{52} = 50 \text{ K } \Omega$ and **d** $R_{51} = R_{52} = 20 \text{ K } \Omega$. The initial condition is fixed at (0.2 V, 0.1 V, 0.02 V, 0.01 V, 0.001 V)

$$R_{42} = \frac{R}{cb_0 e^{\frac{1}{T_2}}};$$

$$R_{24} = R_{44} = \frac{RE}{c \cdot a};$$

$$R_{16} = R_{36} = \frac{R}{\alpha};$$

$$R_{17} = R_{37} = R_{18} = R_{38} = \frac{R}{\beta};$$

$$R_{51} = R_{52} = \frac{R}{g} \text{ and } \omega_s = \frac{\omega_p}{RC}.$$

Consider a constant time $\tau = RC = 10k\Omega \times 10nF = 100\mu s$, i.e., $R = 10K\Omega$ and $C = 10nF$. In addition, the multiplier gains $\gamma = 10$, $x_i = X_i/1V$ and $y_i = Y_i/1V$. Therefore, we present in Table 1 the different parameters of the circuit used to implement two thermosensitive and photosensitive FHN neurons coupled via the

JJ and a linear resistor in the OrCAD electronic simulation software package as shown in Fig. 15.

The PSpice simulations of the neural circuit designed in Fig. 15 allows us to reproduce the same dynamic behaviors observed during the integration of the neuron model described by Eq. (6) and also confirm the possibility of obtaining complete synchronization or phase synchronization when the intrinsic parameters of the coupling channel are changed. For further illustration, we consider here the state of neurons as defined in Fig. 12. Therefore, we show through Figs. 16 and 17 that the model can achieve phase synchronization when varying the resistors R_{51} and R_{52} from the intensity of the coupling g . We can see from these figures that we tend towards a phase synchronization when the values of the resistors R_{51} and R_{52} decrease, that is to say that the intensity of the coupling increases, which remains in agreement with the analyzes. theoretical perform in

Sect. 3. Ultimately, we can state that the neural circuit of Fig. 15 can be used to implement the thermosensitive and photosensitive FHN neuron model coupled through a JJ and a linear resistor.

5 Conclusion

In this paper, an ideal JJ in parallel with a linear resistance is used to couple two neural circuits FHN simultaneously dependent on light and temperature. Here, the phototube is used to pick up light and convert it to a photocurrent, a first thermistor is used to convert heat into electrical current, and a second thermistor is used to sense temperature changes in a neural circuit. For low values of the coupling channel parameters, it is observed that each neuron generates its own dynamics. As these parameters evolve, neurons interact with each other to produce regular and irregular dynamics. When the values of the coupling channel parameters reach a sufficiently large value, the two neurons exhibit the same dynamics. Therefore, one can observe complete synchronization when the FHN neural circuits are identical and phase synchronization when the FHN neural circuits are different. To confirm these results, we performed the equivalent electronic circuit of this neuron model. It can be seen that the electronic simulations made with the PSpice software are in agreement with the numerical simulations. Ultimately, this electronic circuit can be considered to estimate the effect of the magnetic field on synchronization when coupled neurons and neural networks under the action of the magnetic field.

Acknowledgements Jules Fossi Tagne thanks the Faculty of Sciences of the University of Ngaoundéré for its important contribution. Zeric Tabekoueng Njitacke has been supported by the Polish National Science Centre under the Grant OPUS 14 No.2017/27/B/ST8/01330.

Author contributions

All the authors have contributed equitably in the production and interpretation of the results and then in the writing of this manuscript.

Data Availability Statement This manuscript has no associated data or the data will not be deposited. [Authors' comment: All the information's were given in the paper to generate the results in the paper; there is no need of the deposited data.]

Declarations

Conflict of interest The authors declare that they have no known competing financial interests or personal rela-

tionships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

References

1. Z. Aram, S. Jafari, J. Ma, J.C. Sprott, S. Zendeherouh, V.T. Pham, Using chaotic artificial neural networks to model memory in the brain. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **44**, 449–59 (2017)
2. C. Borgers, *An Introduction to Modeling Neuronal Dynamics*, vol. 17 (Springer, Berlin, 2017)
3. A. Mondal, R. KumarUpadhyay, J. Ma, B.K. Yadav, S.K. Sharma, Bifurcation analysis and diverse firing activities of a modified excitable neuron model. *Cogn. Neurodyn.* **13**, 393–407 (2017)
4. A.L. Hodgkin, A.F. Huxley, A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol. Lond.* **117**, 500 (1952)
5. J.L. Hindmarsh, R.M. Rose, A model of the nerve impulse using two first-order differential equations. *Nature* **296**, 162–164 (1982)
6. J.L. Hindmarsh, R.M. Rose, A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.* **221**, 87–102 (1984)
7. R. Fitzhugh, Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.* **1**, 445–466 (1961)
8. C. Morris, H. Lecar, Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophys. J.* **35**, 193–213 (1981)
9. T.R. Chay, Chaos in a three-variable model of an excitable cell. *Phys. D.* **16**, 233–242 (1985)
10. J.J. Hopfield, Neurons with graded response have collective computational properties like those of 2-state neurons. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **81**, 3088–3092 (1984)
11. H.G. Gu, B.B. Pan, G.R. Chen, L.X. Duan, Biological experimental demonstration of bifurcations from bursting to spiking predicted by theoretical models. *Nonlinear Dyn.* **78**, 391–407 (2014)
12. J. Ma, X. Song, J. Tang et al., Wave emitting and propagation induced by autapse in a forward feedback neuronal network. *Neurocomputing* **167**, 378–389 (2015)
13. Y. Xu, Y. Jia, H. Wang et al., Spiking activities in chain neural network driven by channel noise with field coupling. *Nonlinear Dyn.* **95**, 3237–3247 (2019)
14. L. Lu, Y. Jia, J.B. Kirunda et al., Effects of noise and synaptic weight on propagation of subthreshold excitatory postsynaptic current signal in a feed-forward neural network. *Nonlinear Dyn.* **95**, 1673–1686 (2019)
15. M. Ge, Y. Jia, Y. Xu et al., Wave propagation and synchronization induced by chemical autapse in chain Hindmarsh-Rose neural network. *Appl. Math. Comput.* **352**, 136–145 (2019)
16. M. Ge, Y. Jia, J.B. Kirunda et al., Propagation of firing rate by synchronization in a feed-forward multilayer Hindmarsh-Rose neural network. *Neurocomputing* **320**, 60–68 (2018)
17. J. Tang, J. Zhang, J. Ma et al., Noise and delay sustained chimera state in small world neuronal network. *Sci. China Technol. Sci.* **62**, 1134–1140 (2019)

18. H. Zhang, Q. Wang, M. Perc et al., Synaptic plasticity induced transition of spike propagation in neuronal networks. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18**, 601–615 (2013)
19. M. Dipoppa, A. Ranson, M. Krumin et al., Vision and locomotion shape the interactions between neuron types in mouse visual cortex. *Neuron* **98**(3), 602–615 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2018.03.037>
20. F. Gabbiani, H.G. Krapp, C. Koch et al., Multiplicative computation in a visual neuron sensitive to looming. *Nature* **420**(6913), 320–324 (2002). <https://doi.org/10.1038/nature01190>
21. S. Peron, F. Gabbiani, Spike frequency adaptation mediates looming stimulus selectivity in a collision-detecting neuron. *Nat. Neurosci.* **12**(3), 318–326 (2009). <https://doi.org/10.1038/nn.2259>
22. P. Heil, First-spike latency of auditory neurons revisited. *Curr. Opin. Neurobiol.* **14**(4), 461–467 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.conb.2004.07.002>
23. C.K. Machens, H. Schütze, A. Franz et al., Single auditory neurons rapidly discriminate conspecific communication signals. *Nat. Neurosci.* **6**(4), 341–342 (2003). <https://doi.org/10.1038/nn1036>
24. P. Zhou, Z. Yao, J. Ma et al., A piezoelectric sensing neuron and resonance synchronization between auditory neurons under stimulus. *Chaos Solitons Fract.* **145**, 110751 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110751>
25. T. Nakayama, Thermosensitive neurons in the brain. *Jpn. J. Physiol.* **35**(3), 375–389 (1985). <https://doi.org/10.2170/jjphysiol.35.375>
26. M. Ruchty, F. Roces, C.J. Kleineidam, Detection of minute temperature transients by thermosensitive neurons in ants. *J. Neurophysiol.* **104**(3), 1249–1256 (2010). <https://doi.org/10.1152/jn.00390.2010>
27. Y. Xu, M.H. Liu, Z.G. Zhu et al., Dynamics and coherence resonance in a thermosensitive neuron driven by photocurrent. *Chin. Phys. B* **29**(9), 098704 (2020). <https://doi.org/10.1088/1674-1056/ab9dee>
28. Y. Xu, Y.Y. Guo, G.D. Ren et al., Dynamics and stochastic resonance in a thermosensitive neuron. *Appl. Math. Comput.* **385**, 125427 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125427>
29. L. Zhang, S. Jones, K. Brody et al., Thermosensitive transient receptor potential channels in vagal afferent neurons of the mouse. *Am. J. Physiol. Gastrointest. Liv. Physiol.* **286**(6), G983–G991 (2004). <https://doi.org/10.1152/ajpgi.00441.2003>
30. L. Yong, X. Wan-jiang, M. Jun, A. Faris, H. Aatef, *A new photosensitive neuron model and its dynamics*. *Inform. Technol. Electron. Eng. Front.* (2020). <https://doi.org/10.1631/FITEE.1900606>
31. T.J. Fossi, H.C. Edima, T.Z. Njitacke, K.F. Feudjio, N.R. Mballa, J. Atangana, Bifurcations analysis and experimental study of the dynamics of a thermosensitive neuron conducted simultaneously by photocurrent and thermistance. *Phys. J. Spec. Top. Eur.* (2021). <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-021-00311-w>
32. C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yoke, Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos. *Phys. D* **7**, 181–200 (1983)
33. A. Pikovsky, G. Osipov, M. Rosenblum, M. Zaks, J. Kurths, Attractor-repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.* **79**(1), 47–50 (1997). <https://doi.org/10.1103/physrevlett.79.47>
34. M. Desroches, B. Krauskopf, H.M. Osinga, Mixed-mode oscillations and slow manifolds in the self-coupled FitzHugh–Nagumo system. *Chaos Interdiscip. J. Nonlinear Sci.* **18**(1), 015107 (2008). <https://doi.org/10.1063/1.2799471>
35. M. Abdelouahab, R. Lozi, L.O. Chua et al., *Int. J. Bifur. Chaos* **24**, 1430023 (2014)
36. M. Ge, Y. Jia, Y. Xu, L. Yang, Mode transition in electrical activities of neuron driven by high and low frequency stimulus in the presence of electromagnetic induction and radiation. *Nonlinear Dyn.* **91**(1), 515–23 (2017)
37. Lv. Mi, C. Wang, G. Ren, J. Ma, X. Song, Model of electrical activity in a neuron under magnetic flow effect. *Nonlinear Dyn.* **85**(3), 1479–90 (2016)
38. S. Mostaghimi, F. Nazarimehr, S. Jafari, J. Ma, Chemical and electrical synapse modulated dynamical properties of coupled neurons under magnetic flow. *Appl. Math. Comput.* **348**, 42–56 (2019)
39. G. Ren, Y. Xu, C. Wang, Synchronization behavior of coupled neuron circuits composed of memristors. *Nonlinear Dyn.* **88**, 893–901 (2017)
40. C.N. Takembo, A. Mvogo, H. Ekobena, H.P. Fouda, T.C. Kofane, Localized modulated wave solution of diffusive FitzHugh–Nagumo cardiac networks under magnetic flow effect. *Nonlinear Dyn.* **95**(2), 1079–98 (2018)
41. C.N. Takembo, A. Mvogo, H. Ekobena, H.P. Fouda, N. Kofane, Effect of electromagnetic radiation on the dynamics of spatiotemporal patterns in memristor based neuronal network. *Nonlinear Dyn.* **95**, 1067 (2019)
42. K. Usha, P.A. Subha, Hindmarsh-Rose neuron model with memristors. *Biosystems* **178**, 1–9 (2019)
43. K.M. Wouapi, H. Fotsin, F.P. Louodop, K.F. Feudjio, T.Z. Njitacke, T.H. Djeudjo, Various firing activities and finite-time synchronization of an improved Hindmarsh-Rose neuron model under electric field effect. *Cogn. Neurodyn.* (2020). <https://doi.org/10.1007/s11571-020-09570-0>
44. Y. Zhao, X. Sun, Y. Liu, J. Kurths, Phase synchronization dynamics of coupled neurons with coupling phase in the electromagnetic field. *Nonlinear Dyn.* **93**(3), 1315–1324 (2018). <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4261-7>
45. Z. Yao, J. Ma, Y. Yao et al., Synchronization realization between two nonlinear circuits via an induction coil coupling. *Nonlinear Dyn.* **96**, 205–217 (2019)
46. S.C. Leshar-Pérez, C. Zhang, S. Takayama, Capacitive coupling synchronizes autonomous microfluidic oscillators. *Electrophoresis* **39**(8), 1096–1103 (2018)
47. Z. Liu, J. Ma, G. Zhang et al., Synchronization control between two Chua's circuits via capacitive coupling. *Appl. Math. Comput.* **360**, 94–106 (2019)
48. Y. Xu, Z. Yao, A. Hobiny et al., Differential coupling contributes to synchronization via a capacitor connection between chaotic circuits. *Front. Inf. Technol. Electron. Eng.* **20**(4), 571–583 (2019)
49. Y. Leng, D. Yu, Y. Hu et al., Dynamic behaviors of hyperbolic-type memristor-based Hopfield neural network considering synaptic crosstalk. *Chaos* **30**(3), 33108 (2020)

50. Z. Wang, F. Parastesh, K. Rajagopal et al., Delay induced synchronization in two coupled chaotic memristive Hopfield neural networks. *Chaos Soliton Fract.* **134**, 109702 (2020)
51. B. Bao, Q. Yang, D. Zhu, Y. Zhang, Q. Xu, M. Chen, Initial-induced coexisting and synchronous firing activities in memristor synapse-coupled Morris-Lecar bi-neuron network. *Nonlinear Dyn.* **99**(3), 2339–2354 (2019). <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05395-7>
52. H. Bao, Y. Zhang, W. Liu et al., Memristor synapse coupled memristive neuron network: synchronization transition and occurrence of chimera. *Nonlinear Dyn.* **100**, 937–950 (2020)
53. Z. Liu, C. Wang, G. Zhang et al., Synchronization between neural circuits connected by hybrid synapse. *Int. J. Mod. Phys. B* **33**, 1950170 (2019)
54. C. Hens, P. Pal, S.K. Dana, Bursting dynamics in a population of oscillatory and excitable Josephson junctions. *Phys. Rev. E* **92**, 022915 (2015)
55. T. Hongray, J. Balakrishnan, S.K. Dana, Bursting behaviour in coupled Josephson junctions. *Chaos* **25**, 123104 (2015)
56. K. Segall, S. Guo, P. Crotty et al., Phase-flip bifurcation in a coupled Josephson junction neuron system. *Phys. B Condens. Matter.* **455**, 71–75 (2014)
57. J.M. Shainline, S.M. Buckley, R.P. Mirin et al., Superconducting optoelectronic circuits for neuromorphic computing. *Phys. Rev. Appl.* **7**, 034013 (2017)
58. R. Cheng, U.S. Goteti, M.C. Hamilton, Spiking neuron circuits using superconducting quantum phase-slip junctions. *J. Appl. Phys.* **124**, 152126 (2018)
59. P. Crotty, D. Schult, K. Segall, Josephson junction simulation of neurons. *Phys. Rev. E* **82**, 011914 (2010)
60. M.J.A. Diaz, O. Tequita, F. Naranjo, Neuronal synchronization of electrical activity, using the Hodgkin-Huxley model and RCLSJ circuit. *Ingenieria y Ciencia* **12**, 93–106 (2016)
61. J.M. Shainline, S.M. Buckley, A.N. McCaughan et al., Circuit designs for superconducting optoelectronic loop neurons. *J. Appl. Phys.* **124**, 152130 (2018)
62. J.M. Shainline, S.M. Buckley, A.N. McCaughan et al., Superconducting optoelectronic loop neurons. *J. Appl. Phys.* **126**, 044902 (2019)
63. K. Segall, M. LeGro, S. Kaplan et al., Synchronization dynamics on the picosecond time scale in coupled Josephson junction neurons. *Phys. Rev. E* **95**, 032220 (2017)
64. Z.T. Njitacke, I.S. Doubla, S. Mabekou, J. Kengne, Hidden electrical activity of two neurons connected with an asymmetric electric coupling subject to electromagnetic induction: coexistence of patterns and its analog implementation, *Chaos. Solit. Fract.* **137**, 109785 (2020)
65. Z.T. Njitacke, I.S. Doubla, J. Kengne, A. Cheukem, Coexistence of firing patterns and its control in two neurons coupled through an asymmetric electrical synapse. *Chaos* **30**, 023101 (2020)
66. Z. Yao, P. Zhou, Z. Zhu et al., Phase synchronization between a light-dependent neuron and a thermosensitive neuron. *Neurocomputing* **423**, 518–34 (2021)
67. X.F. Zhang, Wang C.N., Ma J., et al., Control and synchronization in nonlinear circuits by using a thermistor. *Mod. Phys. Lett. B* (2020). <https://doi.org/10.1142/S021798492050267X> In press
68. Y. Zhang, C.N. Wang, J. Tang et al., Phase coupling synchronization of FHN neurons connected by a Josephson junction. *Sci. China Technol. Sci.* **61**, 2328–38 (2020)
69. A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, Phase synchronization in regular and chaotic systems. *Int. J. Bifurc. Chaos* **10**(10), 2291–2305 (2000)
70. S.Y. Ma, Z. Yao, Y. Zhang et al., Phase synchronization and lock between memristive circuits under field coupling. *Int. J. Electron. Commun. (AEÜ)* **105**, 177–185 (2019)
71. B.C. Bao, H. Qian, J. Wang, Q. Xu, M. Chen, H.G. Wu, Y.J. Yu, Numerical analyses and experimental validations of coexisting multiple attractors in hopfield neural network. *Nonlinear Dyn.* **90**(4), 2359–69 (2017)
72. D.C. Hamill, Learning about chaotic circuits with SPICE. *IEEE Trans. Educ.* **36**, 28–35 (1993)
73. C.I. Johnson, *Analog Computer Techniques* (McGrawHill, New York, 1963)
74. J. Kengne, J.C. Chedjou, G. Kenne, K. Kyamakya, G.H. Kom, Analog circuit implementation and synchronization of a system consisting of a van der pol oscillator linearly coupled to a duffing oscillator. *Nonlinear Dyn.* **70**, 2163–73 (2012)
75. P. Louodop, H. Fotsin, M. Kountchou, L.B.M. Ngouonkadi, H.A. Cerdeira, S. Bowong, Finite-time synchronization of tunnel-diode-based chaotic oscillators. *Phys. Rev. E* **89**, 032921 (2014)
76. K. Michaux, L. Patrick, B. Samuel, F. Hilaire Saïdou, analog circuit design and optimal synchronization of a modified Rayleigh system. *Nonlinear Dyn.* <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2694-4>
77. M.S. Patel, U. Patel, A. Sen, G.C. Sethia, C. Hens, S.K. Dana, U. Feudel, K. Showalter, C.N. Ngonghala, R.E. Amritkar, Experimental observation of extreme multistability in an electronic system of two coupled Rossler oscillators. *Phys. Rev. E* **89**, 022918 (2014)
78. V.T. Pham, S. Jafari, S. Vaidyanathan, C.K. Volos, X. Wang, A novel memristive neural network with hidden attractors and its circuitry implementation. *Sci. China Technol. Sci.* **59**, 358–63 (2016)
79. J.D. Sitt, J. Aliaga, Versatile biologically inspired electronic. *Phys. Rev. E* **76**, 051919 (2007)
80. D.H. Sheingold, *Nonlinear Circuits Handbook* (Analog Devices, Norwood, 1976)
81. X. Wu, J. Ma, L. Yuan et al., Simulating electric activities of neurons by using PSPICE. *Nonlinear Dyn.* **75**, 113–26 (2014)



ORIGINAL PAPER

Phase synchronization, extreme multistability and its control with selection of a desired pattern in hybrid coupled neurons via a memristive synapse

Jules Tagne Fossi · Vandi Deli · Zeric Tabekoueng Njitacke · Joseph Marie Mendimi · Florent Feudjio Kemwoue · Jacques Atangana

Received: 16 January 2022 / Accepted: 22 April 2022
© The Author(s), under exclusive licence to Springer Nature B.V. 2022

Abstract The memristor is a nonlinear electronic nanodevice with incredible biomimetic characteristics generally used by neurologists, more specifically in neuromorphics, to design artificial neural systems, also called memristive neuron networks. In this manuscript, a photosensitive FitzHugh–Nagumo neuron (FHN) model and a thermosensitive FHN neuron model coupled via a memristive synapse with a sinus memductance are presented. Basic traditional methods of analysis of nonlinear systems have been used to demonstrate that the coupled neurons exhibit periodic and

chaotic bursting behaviors under the influence of light. Phenomena of extreme homogeneous and heterogeneous multistability can be observed when the internal memristor state variable changes periodically. It is also reported that the model can achieve phase synchronization stability as the coupling strength increases. A feedback term dependent on a dynamic state variable of the coupled neurons is introduced to switch the model from an extreme multistable state to a monostable state. This control technique eliminates all undesired patterns among the coexisting ones. Finally, electronic circuit simulations of the memristive neuron system are performed by Pspice to confirm the numerical results.

Vandi Deli, Zeric Tabekoueng Njitacke, Joseph Marie Mendimi, Florent Feudjio Kemwoue and Jacques Atangana contributed equally to this work.

Keywords Phototube · Thermistor · Memristive synapse · Phase synchronization · Extreme multistability

J. Tagne
Laboratory of Energy-Electric and Electronic Systems,
Department of Physics, Faculty of Science, University of
Yaoundé I, P.O. Box 812, Yaoundé, Cameroon

V. Deli
Department of Pharmaceutical Sciences, Faculty of
Medicine and Pharmaceutical Sciences, University of
Douala, Douala, Cameroon
e-mail: vandideli39@gmail.com

Z. T. Njitacke
Department of Electrical and Electronic Engineering,
College of Technology (COT), University of Buea,
P.O.Box 63, Buea, Cameroon
e-mail: zericTabekoueng@yahoo.fr

J. M. Mendimi
Department of Morphological Sciences and Morbid
Anatomy, Faculty of Medicine and Biomedical Sciences,
Yaoundé, Cameroon
e-mail: mendimajo@gmail.com

J. Atangana
Department of Physics, Higher Teacher Training College
Yaoundé, University of Yaoundé I, Yaoundé, Cameroon
e-mail: atanganajaques@yahoo.fr

F. F. Kemwoue
Centre d'Excellence Africain des Technologies de
l'Information et de la Communication (CETIC) Université
de Yaoundé I, Yaoundé, Cameroon
e-mail: jules_fossi@yahoo.fr

Z. T. Njitacke
Department of Automation, Biomechanics and Mechatronics,
Lodz University of Technology, Lodz, Poland

Published online: 07 May 2022

Springer

1 Introduction

Neuromorphic engineering is an interdisciplinary subject that draws on biology, physics, mathematics, computer science and electronic engineering to design artificial neural systems whose architecture and design principles are based on those of biological nervous systems [1]. It is well to remember that the human brain is made up of thousands of neurons interconnected through synapses thus forming an incredibly complex neural network that can react differently in the presence of external stimuli [2–4]. Therefore, phenomena related to synaptic plasticity and brain wave synchronization have enabled researchers to reproduce functional and efficient electronic circuits that can best mimic the electrical activities of the brain. Thus, several of these circuits were designed on the basis of mathematical models of neurons such as the Hodgkin–Huxley neuron model (HH) [5], the Hindmarsh–Rose (HR) 2D and 3D neuron models [6,7], the Izhikevich neuron model [8], the Morris–Lecar neuron model [9], the FitzHugh–Nagumo neuron model (FHN) [10], the Chay neuron model [11], the Hopfield neural network model [12,13], the Rulkov neuron model [14] and many others. It emerges from previous studies that models of single or extended neurons [15–18], models of coupled or networked neurons [19–22] and those dependent on biophysical phenomena such as light [23], temperature [24] and sound [25] can generate behaviors such as rest, peak, burst and chaotic states [26] and many other very rich and complex phenomena. In light of all that has been done to date, scientists continue to explore this area with a view to developing more complex dynamics such as hidden chaos, with the goal of better understanding the neural functions of the human brain.

The discovery in 2008 of the Hewlett-Packard (HP) memristor [27] has enabled research in the field of computational neurodynamics to expand considerably. The memristor characterized by its nonlinearity, nonvolatility and low power is considered to be the fourth basic electronic element [28]. Theoretical models, circuit models, material models, and typically mathematical models of the memristor have all been widely developed for this purpose [29–33]. Thus, the development of new neuromorphic systems [34] has evolved a lot thanks to the multiple intrinsic properties of memristors more precisely of mathematical memristors. Recall that these memristors, interconnected with original mod-

els of neurons, have the ability to mimic biological functions such as the process of recording, selecting, storing, learning, thinking and transferring data in the human brain. Therefore, they can play the same role as biological synapses. In view of this, several important theories on mathematical memristors have been developed and classified [35,36] to facilitate research in the field. On the basis of these theories, the quadratic function [37], the absolute value function [38] as well as the hyperbolic tangent function [20,22] have been used to set up mathematical memristors that can be exploited in artificial neural networks and many others. For example, it was reported in [39] that the effect of electromagnetic radiation can be analyzed in the memristive HR neuron model designed on the basis of a magnetically driven memristor. Likewise, two HR neurons coupled across a memristive synapse, describing the phenomenon of peak time-dependent plasticity learning, have been proposed by Baran et al [40]. Their digital investigations revealed that this memristive device can generate complex behaviors such as chaos and hyperchaos. In addition, scientists and technologists have currently developed locally active memristor models with one or two coexisting pinched hysteresis loops that are stable under different initial conditions [41–43]. This important work has aroused the attention of scientists all over the world who today have focused their reflections on the study of multistable systems based on memristors [44,45].

Multistability is characterized by the coexistence of more than two stable states for the same set of parameters by using different initial conditions in a given nonlinear dynamical system, particularly neurons in our case [46,47]. Thus, several works taking into account a Hopfield neuron network designed on the basis of memristors have been carried out in order to highlight this phenomenon of multistability which plays an important role in the understanding of cerebral dynamics [48–52]. This phenomenon of Multistability characterizing the nature of the brain describes the processes of memorizing and processing information in biological neurons. Given the exponential growth of mathematical memristive devices and their similarities to biological synapses [53,54], it is important to explore the phenomenon of multistability when several neural models are coupled via memristors. This thus makes it possible to better understand the complex dynamics of the electrical activity generated in biological neurons and to control the phenomenon if necessary. Galvanized

by these studies and these considerations, we propose in this manuscript to couple two models of FHN neurons, one subject to the light effect [23] and the other subject to the temperature effect [24] via a memristive synapse as defined in ref. [49,52]. In this configuration, the memristive synapse is considered as a biological synapse. Theoretical, numerical and experimental analyses of this memristive coupled neuron allow us to see that the model can generate several models of firing patterns, heterogeneous or homogeneous multistability at different positions and phase synchronization when the intrinsic parameters of the memristive synapse are varied. Under these conditions, we can observe that it is also possible to apply a controller in order to select a desired behavior when we have heterogeneous or homogeneous multistability.

The organization of this scientific contribution is arranged as follows. In Sect. 2, we model a memristive synapse and design a memristive system made up of two FHN neurons subjected, respectively, to the effects of light and temperature. By exploiting classical methods of analysis of nonlinear dynamics such as two-parameter Lyapunov exponent diagrams, bifurcation diagrams, phase portraits, multistability at different positions and synchronization of phase are noted in Sect. 3. Then, a feedback control method is applied to the memristive system to select a desired behavior. In Sect. 4, Pspice simulations are performed in order to validate the numerical results. The conclusion is given in Sect. 5.

2 Model and diagram of a multistable memristive neuron system

According to the literature, the simplest biological neuron model consists of two variables, one representing the membrane potential and the other the transmembrane current recovery variable. In addition to these variables, an excitation current is introduced in order to generate different types of triggering patterns such as quiescent, peak, burst and chaotic states. Thus, the FitzHugh–Nagumo neuron (FHN) is one of them. This neuron has been the subject of several studies and has made it possible to design biological neurons sensitive to certain controlled signals such as: auditory neurons [55,56], photosensitive or visual neurons [57,58] and thermosensitive neurons [59,60]. We consider in this work two FHN neurons, one photosensitive [23] driven

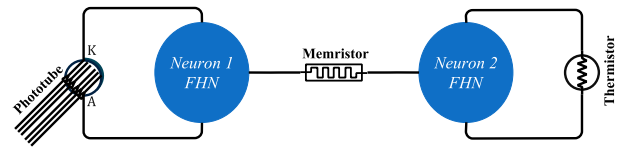


Fig. 1 The coupling topology of two biological neurons via a multistable memristor

by a photocurrent coming from a phototube and the other thermosensitive [24] controlled by a thermistor. In addition, a multistable memristor is used to connect both neurons as shown in Fig. 1. This memristor thus plays the same role as synapses in the coupled neurons.

2.1 Description of the multistable memristor

Biological neural synapses are part of the circuit that connects sensory organs, such as those that sense pain or touch, from the peripheral nervous system to the brain. Synapses connect neurons in the brain to neurons in the rest of the body, and these neurons to muscles. By analogy, the memristor can be used to perform this function and describe the effects of electromagnetic induction between these biological neurons [61]. In accordance with the theory of memristors [36], a generic model of a flux-controlled memristor has been proposed by Lin et al [49,52] and defined as follows:

$$\begin{cases} i = H(\varphi)v = \varphi v \\ \frac{d\varphi}{dt} = \sin(\pi\varphi) + v \end{cases} \quad (1)$$

where v , i and $H(\varphi)$ denote, respectively, the voltage, the current and the memductance of the memristor. Note that this dynamic of this memristor defined in Eq.(1) is a function of an external stimulus v and the internal state flux of the memristor (φ).

In order to present the voltage–current characteristic of the memristor defined in Eq.(1), we consider the external stimulus as a sinusoidal voltage described by $v = A \sin(2\pi Ft)$, where A denotes the amplitude of the sinusoidal voltage and F its frequency. Fig. 2 allows us to observe pinched hysteresis loops of the memristor in the voltage–current plane $v - i$ for different values of the amplitude A , the frequency F and the initial state of flux (φ) when the other parameters are set. Fig. 2a and b is obtained by fixing $F = 1$ and $A = 1.4$ with $\varphi_0 = 0$, respectively. From these figures, we can see that these pinched hysteresis loops all cross the origin in the voltage-current plane ($v - i$) when the amplitude and frequency of the stimulus are approved. Fig. 2c is

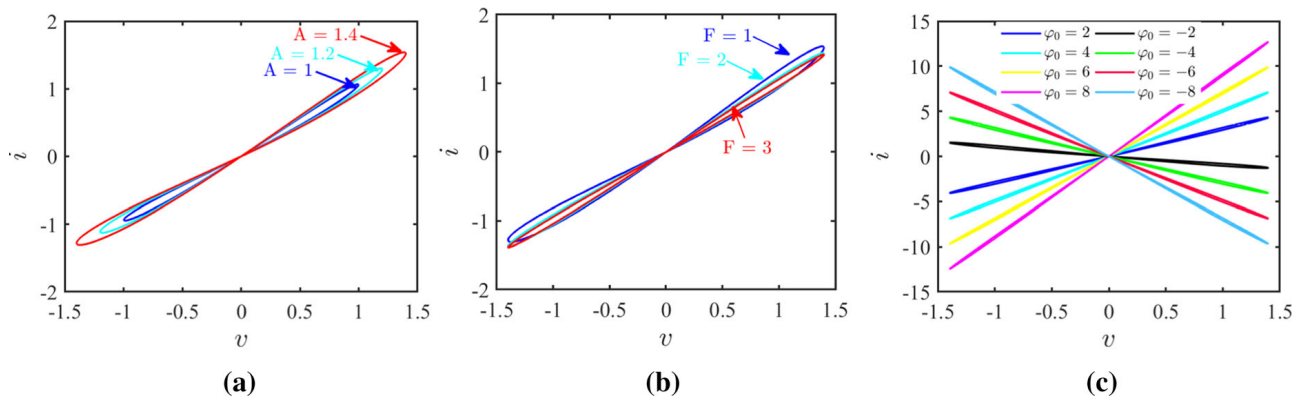


Fig. 2 Multistable memristor pinched hysteresis loops driven by $v = A \sin(2\pi Ft)$ a sinusoidal stimulus. a) $F = 1$, $\varphi_0 = 0$ and different value of A . b) $A = 1.4$, $\varphi_0 = 0$ and different value of F . c) $F = 1$, $A = 1.4$ and different value of φ_0

obtained by fixing $F = 1$ and $A = 1.4$ for different values of the initial state φ_0 . Through this figure, we can see that the variation of the initial states φ_0 induces a change in the pinched hysteresis loops in the plane $(v - i)$, which allows us to affirm that this memristor model is a multistable memristor.

2.2 Neuron coupling model and scheme

In order to build our coupled neurons, we couple through the multistable memristor defined in the previous paragraph two FHN neurons, one exposed under the effect of light (photosensitive neuron) and the other exposed under the effect of temperature (thermosensitive neuron) as shown in Fig. 3. It is important to specify that the currents at the terminals of the nonlinear resistors [23,24,62] are defined by:

$$i_{NR_i} = -\frac{1}{\rho} \left(V_i - \frac{V_i^3}{3V_0^2} \right) \tag{2}$$

where ρ is the normalized resistance parameter, V_0 represents the cut-off voltage and V_i is the voltage across the nonlinear resistor with $i = (1, 2)$.

Moreover, the thermal resistances [24] dependent on the temperature are estimated by the relation $R_T = R_\infty e^{\left(\frac{B}{T}\right)}$ where the parameter of the material B is determined by the activation energy q and the Boltzmann constant K with the dependence $B = \frac{q}{K}$.

In Furthermore, the relation between the Photocurrent and the voltage [23] at the terminals of the Phototube is evaluated by $i_S = \frac{2I_H}{\pi} \arctan(V_S - V_a)$. Where V_a denote the reverse cut-off voltage and depending on

the material properties of the cathode of the Phototube, V_S and I_H , respectively, describe the voltage and the saturation current at the terminals of the Phototube.

Applying Kirchhoff's Law in Fig. 3 and considering that the induction current $I_M = H(\varphi)(V_1 - V_2)$ through the memristor is active, the dynamic equations of the circuit can be described as follows.

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_1}{dt} = i_S - \frac{V_1}{R_P} - i_{L1} + i_{NR1} - I_M \\ L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = V_1 - R_1 i_{L1} + E_1 \\ C_2 \frac{dV_2}{dt} = \frac{V_T - V_2}{R_T} - i_{L2} + i_{NR2} + I_M \\ L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = V_2 - R_{T2} i_{L2} + E_2 \\ \frac{d\varphi}{dt} = \sin(\pi\varphi) + (V_1 - V_2) \end{cases} \tag{3}$$

where V_i denotes the output voltage across capacitor C_i and i_{L_i} the induction current across inductance L_i with $i = (1, 2)$. The parameters R_T , R_{T2} are resistances linked to the thermistor, and L_i, C_i, E_i are, respectively, inductance, capacitance and constant voltage. We denote by $U_T = A_T \cos(2\pi f_0 t)$ an alternating voltage applied to the thermistor R_T to generate an external forcing current. A_T and f_0 represent the amplitude and frequency of the external source. I_M and $H(\varphi) = \varphi$ denote, respectively, the induction current and the internal state flux variable of the multi-stable memristor.

For dynamic analysis and numerical simulations, we combine Eqs. (1-3) and apply the scale transformation standard on the variables and parameters, resulting in

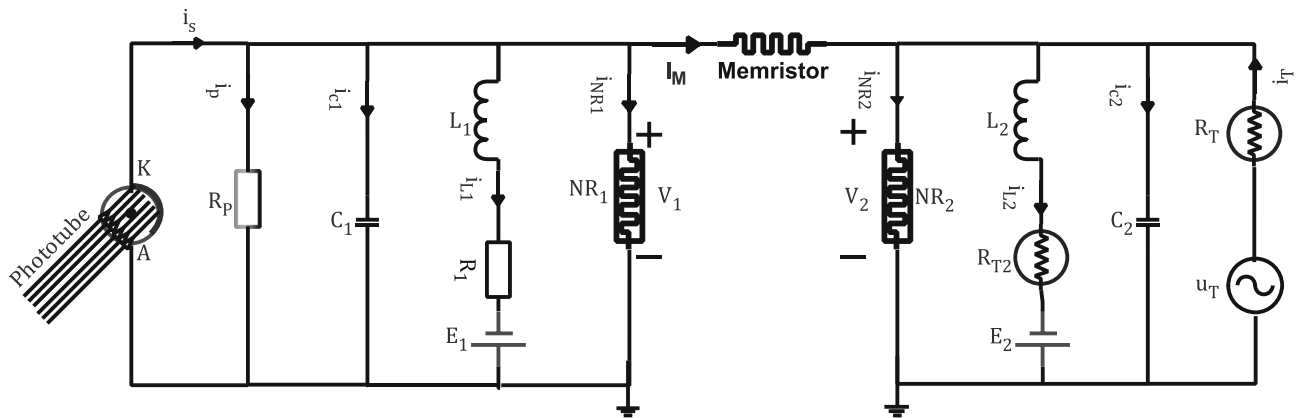


Fig. 3 Schematic diagram of two neural circuits FHN under Photoelectric and Thermal effects couple via a memristive synapse. NR_1 and NR_2 are nonlinear resistors, C_1 and C_2 are capacitors, L_1 and L_2 represent induction coils, E_1 and E_2 are

constant voltage sources, and denote thermistors, R_P and R_1 are resistors linear. A and K denote, respectively, the anode and the cathode of the phototube

the following expressions:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = \frac{V_i}{V_0}, y_i = \frac{\rho i L_i}{V_0}, \tau = \frac{t}{\rho C}, T' = \frac{T}{B}, a = \frac{E}{V_0} \\ c = \frac{\rho^2 C}{L}, b(T') = \frac{RT_2}{\rho} = b_0 \exp\left(\frac{1}{T'}\right), \xi_P = \frac{\rho}{R_P} \\ f = \rho C f_0, \xi_T(T') = \frac{\rho}{R_T} = \xi_0 \exp\left(-\frac{1}{T'}\right), \\ I_P = \frac{\rho i_s}{V_0}, A_T(T') = \frac{\rho A_T}{R_T V_0} = A_0 \exp\left(-\frac{1}{T'}\right) \\ \alpha = \rho C, \beta = \alpha V_0, k = \rho, C_1 = C_2 = C \\ L_1 = L_2 = L, E_1 = E_2 = E, i = \{1, 2\} \end{array} \right. \quad (4)$$

Based on Eqs. (3 and 4), the dimensionless dynamic system of the neuron coupled via a memristor can be rewritten as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = (1 - \xi_P)x_1 - y_1 - \frac{1}{3}x_1^3 + I_0 \arctan(x_1 - 1) \\ \quad - k\varphi(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_1 = c(x_1 - by_1 + a) \\ \dot{x}_2 = (1 - \xi_0 e^{-\frac{1}{T'}})x_2 - y_2 - \frac{1}{3}x_2^3 \\ \quad + A_0 e^{-\frac{1}{T'}} \cos(2\pi f t) \\ \quad + k\varphi(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = c(x_2 - b_0 e^{\frac{1}{T'}} y_2 + a) \\ \dot{\varphi} = \alpha \sin(\pi\varphi) + \beta(x_1 - x_2) \end{array} \right. \quad (5)$$

where x_i and y_i denote, respectively, the membrane potentials and the transmembrane current recovery variables of the two coupled neurons. The Phototube is considered a stable current source and defined by $i_S = I_0 \arctan(x_1 - 1)$. Here, I_0 is the magnitude of

the saturation current across the phototube. The intrinsic parameters (k, α, β) are coefficients based on the induction current and the internal state flux of the memristor. A good selection of the intrinsic parameters of the memristor and of the external stimuli can induce states of rest, spikes, bursts and even chaotic; moreover, an abundant complex dynamics (multistability) can present itself. Considering that the two neurons are not identical, and that there can be transfer of energy along the hybrid synapse when the coupling channel is excited, it is interesting to analyze the approach of the phase synchronization between the two neural circuits. The evaluation of phase synchronization and phase error can be obtained by applying the Hilbert transformation on the sampled time series [61,62] defined by:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1(t) = -\frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1(\tau)}{t - \tau} d\tau; \\ \hat{x}_2(t) = -\frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2(\tau)}{t - \tau} d\tau \\ \Delta\phi = \phi_1(t) - \phi_2(t) \\ \quad = \arctan\left(\frac{\hat{x}_1(t)}{x_1(t)}\right) - \arctan\left(\frac{\hat{x}_2(t)}{x_2(t)}\right) \end{array} \right. \quad (6)$$

where PV denotes the integral of the principal Cauchy value.

3 Numerical results and discussions

The main goal of this section is to perform a deep investigation of the dynamics of the neuron model coupled via a memristive synapse. For this purpose, the fourth-order Runge–Kutta algorithm is applied to find numerical solutions of the dynamic system with a time step 0.005. In order to characterize the complex nonlinear dynamics of coupled neurons, we use analysis tools such as one and two parameter Lyapunov exponent graphs, bifurcation diagrams, temporal diagrams, phase portraits and the amusement pools. The analyses are carried out by considering the values of the following intrinsic parameters: $a = 0.7$, $b_0 = b = 0.8$, $c = 0.1$, $\xi_P = \xi_0 = 0.15$, $A_0 = 1$, $T' = 5$, $\alpha = 20$ and $\beta = 1$.

3.1 General dynamics of coupled hybrid neurons

In order to demonstrate the complete dynamics of the neuron model coupled via a memristive synapse, we will use as bifurcation parameters the variables linked to the external forcing currents produced by I_0 the phototube and by the thermistor f as well as the coupling force k . Fig. 4 shows two-parameter Lyapunov exponent plots. Those on the left are obtained with the initial condition $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1)$ and those on the right with the initial condition $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 4.1)$. Looking closely at Fig. 4a–c), we notice that the left and right diagrams show areas of discrepancy when the control parameters are adjusted. This divergence allows us to justify that this coupled model can generate the coexistence of several attractors due to the phenomena of parallel branches.

In addition, the variation of the Lyapunov exponent highlighted on these diagrams allows us to understand that the coupled model exhibits regular (periodic) behaviors when $\lambda_{\max} < 0$ and irregular (chaotic) behaviors for $\lambda_{\max} > 0$. For a better illustration of the different behaviors that can be observed during the transition between the electrical activities in the model, we represent in Fig. 5 the diagrams bifurcations compared to the local maxima of the state variable φ and the maximum Lyapunov exponent. Corresponding when the saturation current I_0 of the phototube varies in the interval $I_0 \in [-1, 0.5]$. Fig. 5a–d is obtained, respectively, with the conditions $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1)$ and $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 4.1)$. Therefore, Fig. 6a and b

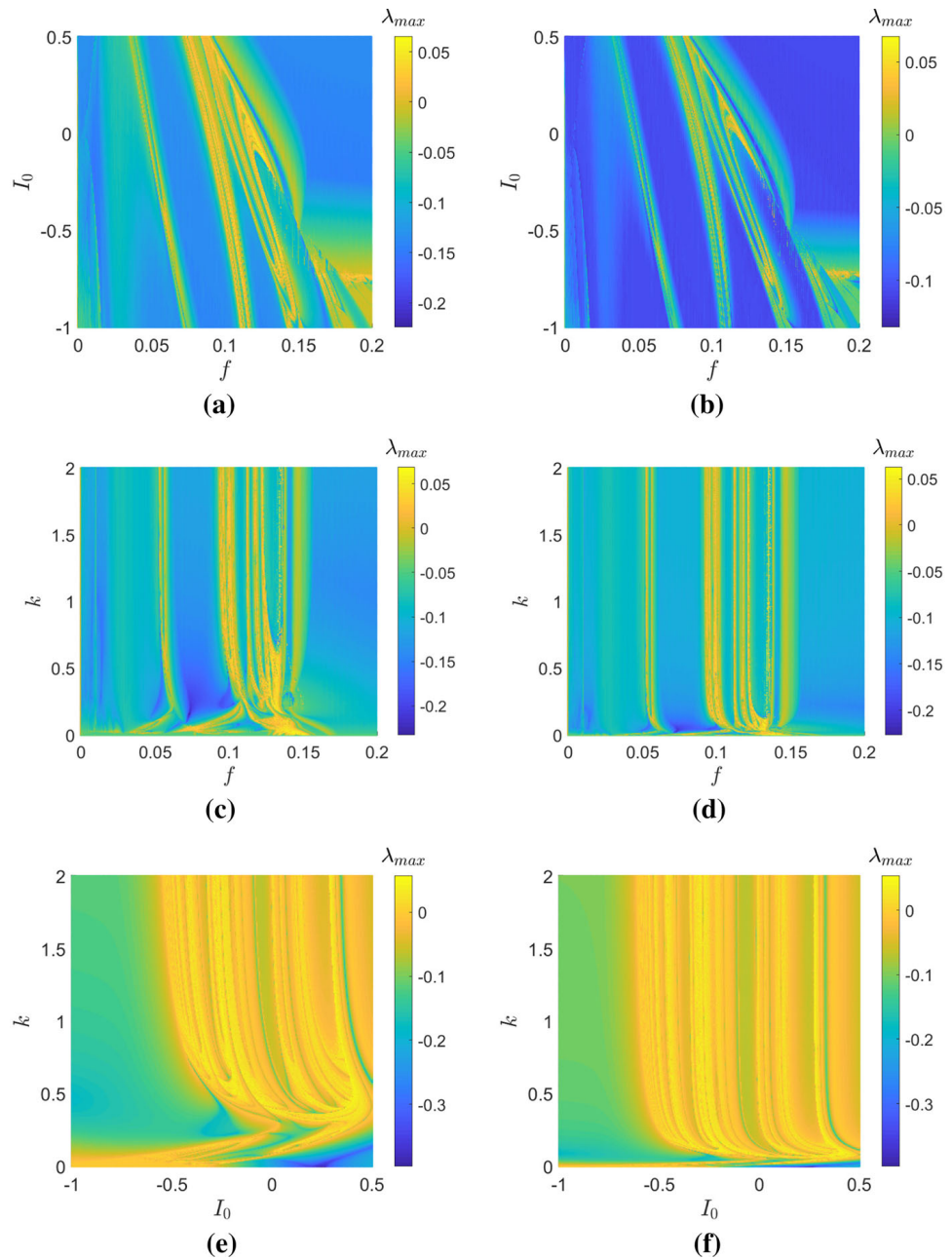
presents the time series of the different state variables of the coupled dynamics. Thus, Fig. 6a highlights chaotic burst behavior, while Fig. 6b shows periodic burst behavior. A correspondence in the phase plane (φ, x_1) of these two behaviors (chaotic and periodic bursting) is symbolized, respectively, in Fig. 6c and d and are obtained with the same initial condition $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1)$. By superimposing the bifurcation diagrams of Fig. 5a and b, we notice that they are offset with respect to the variable when the initial condition is modified. This allows us to predict that this coupled neural model can be sensitive to initial conditions. This can qualitatively and quantitatively modify the dynamics and cause other more complex dynamic behaviors.

3.2 Coexistence of an infinite number of attractors

In the previous section, it was shown that the dynamics of neurons coupled via a memristive synapse is sensitive to the variation of the initial conditions. Taking into account this hypothesis, it is interesting in this section to show that this coupled neural model can generate extreme multistability when the internal flux of initial state varies. This very rich phenomenon is manifested by the presence of an infinite number of coexisting attractors for a row of well-defined parameters. These attractors can be homogeneous (coexisting chaotic attractors or coexisting periodic attractors) or heterogeneous (chaotic and periodic attractors coexisting) for a fixed coupling force of the multistable memristor.

In the following, we consider the saturation current $I_0 = -0.26$. For $k = 0.2$, an infinite number of heterogeneous attractors can arise when the initial state conditions $(x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}, \varphi_0)$ are well selected. To illustrate this assertion, we present in Fig. 7 six heterogeneous attractors (periodic and chaotic attractors) coexisting for six different initial state conditions $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1\theta)$ where $\theta = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Fig. 7a and b, respectively, represents the different heterogeneous attractors coexisting in the (x_1, y_1, φ) and (x_2, y_2, φ) planes. The diagram of bifurcation of the local maxima of the membrane potential of the photosensitive neuron as a function of the initial state $\varphi_0 \in [0, 15]$ is presented in Fig. 7c. It allows us to justify that the attractors can change their behavior when the initial state varies with a step of approximately 2.

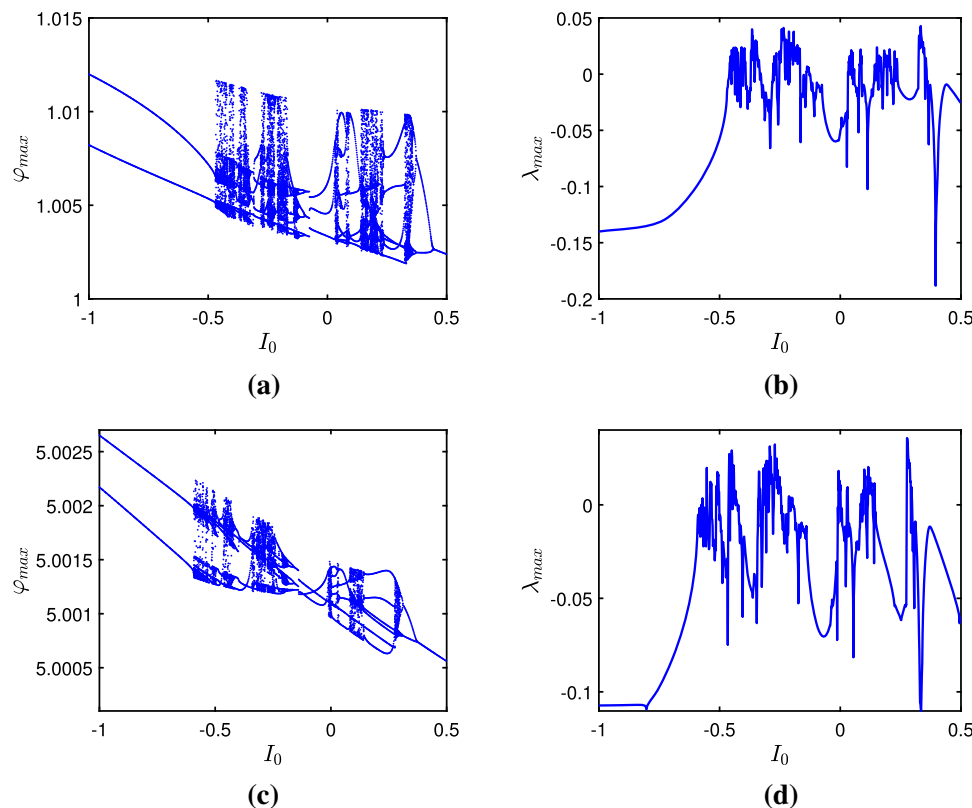
Fig. 4 Two-parameter Lyapunov exponent diagrams showing the largest Lyapunov exponent (λ_{max} in the plans $I_0 - f$, $f - k$ and $I_0 - k$ allowing to observe the different behaviors that the neurons coupled via the memristive synapse can generate. The parameters vary as follows **a, b** $k = 1$, $-1 < I_0 < 0.5$ and $0 < f < 0.2$, **c, d** $I_0 = -0.26$, $0 < f < 0.2$ and $0 < k < 2$ and **e, f** $f = 0.1$, $-1 < I_0 < 0.5$ and $0 < k < 2$. The left and right diagrams are obtained, respectively, with the initial states $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1)$ and $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 4.1)$. The other parameters are defined in the text



When $k = 1.67$, an infinite number of coexisting homogeneous attractors of chaotic nature can also appear when the initial states $(x_{10}, y_{10}, x_{20}, y_{20}, \varphi_0)$ are modified. In order to show the coexistence of a possible infinity of homogeneous chaotic attractors, we plot in Fig. 8a the bifurcation diagram of the local maxima of the internal state flux of the multistable memristor as a function of $\varphi_0 \in [0, 50]$. Through this figure, we see that the memristive neural system defined in Eq.(5) generates an infinite number of chaotic attractors at different positions when φ_0 increasing with a step equal to

2. In addition, Fig. 8b showing the local basin of attraction in the plane (x_{10}, φ_0) allows us to further understand this homogeneous dynamic. When we observe this local basin of attraction, we notice that the different colored regions have a homogeneous structure and the position of each attractor is a function of the local maxima of the internal state flux of the multistable memristor. In Fig. 9a, homogeneous chaotic attractors with several positions are presented. By analogy, these two neurons coupled across a memristive synapse can also generate an infinity of homogeneous periodic attractors

Fig. 5 Bifurcation diagrams showing the local maxima of the memristive synapse internal state flux (φ_{max}) versus the photocurrent intensity I_0 as well as their Lyapunov exponent graphs for the values of $k = 1$ and $f = 0.1$. The left and right diagrams are obtained, respectively, with the initial conditions (0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1) and (0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 4.1). The other parameters are defined in the text



at varying positions when φ_0 increasing with the same pitch equal to 2 as shown in Fig. 9b. By exploring all these results, we find that the dynamics of the memristive neural system generates an infinity of heterogeneous or homogeneous coexisting attractors strongly depending on the initial states of the system and the strength of the coupling k .

3.3 Phase synchronization of coupled hybrid neurons

On this basis, it is important to study whether a possible phase synchronization can be achieved between the photosensitive and thermosensitive neuron coupled via a memristive synapse. The curves in Fig. 10 allow us to show that there can be stability of a phase synchronization when the initial state (φ_0) and the coupling force (k) are activated. It is calculated on these figures, the phase error between the membrane potentials of the photosensitive and thermosensitive neurons compared to the initial state condition (φ_0) Fig. 10a, the temporary evolution of the membrane potentials of the photosensitive neuron (blue color), of the thermistor neuron (black color) and of the difference of the two neurons (red color) Fig. 10b, the Phase portraits in the

plane (x_1, x_2) between these neurons Fig. 10c and the phase portraits on the planes (x_1, y_1) presented by the color blue and (x_2, y_2) materialized by the color black Fig. (10d for different values of the coupling force k . We find that increasing the value of the coupling force k effectively achieves and improves the stability of Phase synchronization.

3.4 Control of multistability in coupled hybrid neurons

The phenomenon of multistability in the study of brain dynamics is very important to justify an epileptic crisis (periodic behavior) which coexists with a normal state of the brain (chaotic behavior) [63,64]. That said, it is very interesting to control this multistability, in order to eliminate the pathological state of the brain (epilepsy). Taking into account previous studies, the multistability phenomenon produced in the model has two neurons coupled via a defined memristive synapse Eq.(5) is controllable if the position and the initial state of each attractor can be well selected. On the basis of the work of Kiran et al [65], the control scheme allowing to select a specific attractor in a multistable dynamic

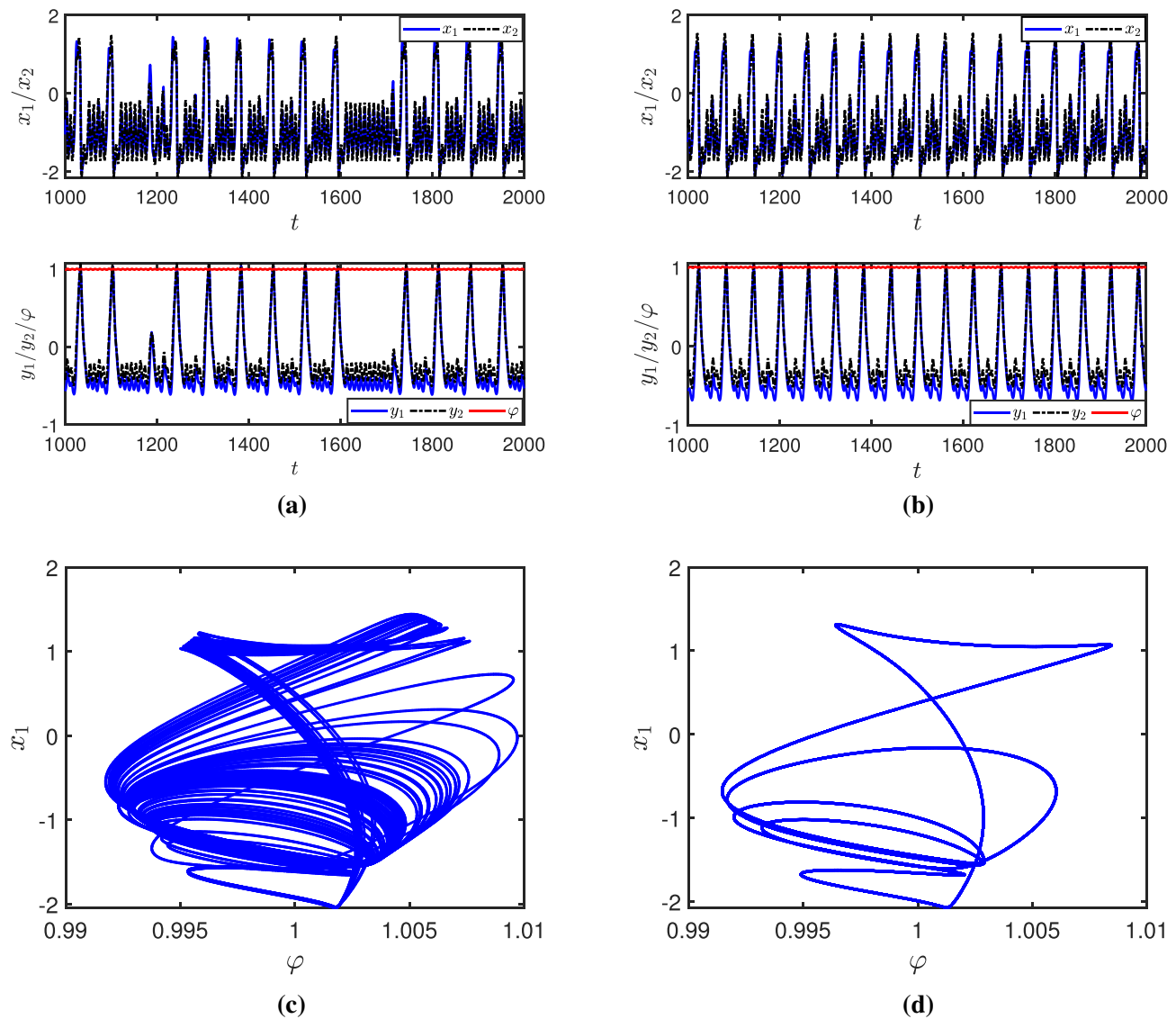


Fig. 6 Temporal evolution of the different state variables of the coupled neuron $(x_1, y_1, x_2, y_2, \varphi)$ and the formation of its attractor in the plane $(\varphi - x_1)$ for different values of the intensity of the photocurrent I_0 applied. Graphs **a, c** show chaotic bursting

for $I_0 = 0.18$, while graphs **b, d** show periodic bursting for $I_0 = 0.3$. They are obtained with the same initial states and the same values of the parameters as defined in Fig. 5 on the left

with m dimensions $\dot{X} = G(X)$ has been proposed as follows:

$$\dot{X} = G(X) - \epsilon h(X)C \times (X - B) \tag{7}$$

where X and $G(X)$ denote the m -dimensional vector of state variables and the vector field, respectively. ϵ is the feedback force, $C = \{C_{ij}\}$ is a matrix, $h(X)$ is a space dependent term, and the vector B represents the unstable fixed point in the neighborhood of the desired attractor. In order to keep these dynamic properties, we

consider $C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ and $B_{i=1} = b$. The function $h(X)$ can be defined as

$$h(X) = \begin{cases} 1 & \text{if } X \in R' \\ 0 & \text{if } X \notin R' \end{cases} \tag{8}$$

where $R' \subset R$ is a subset of the complete state space and R is a subset of the system. It is noted that the choice of R' depends on the state space of the considered system. Regularly, R' is selected such that the trajectory of the desired attractor does not exist in this

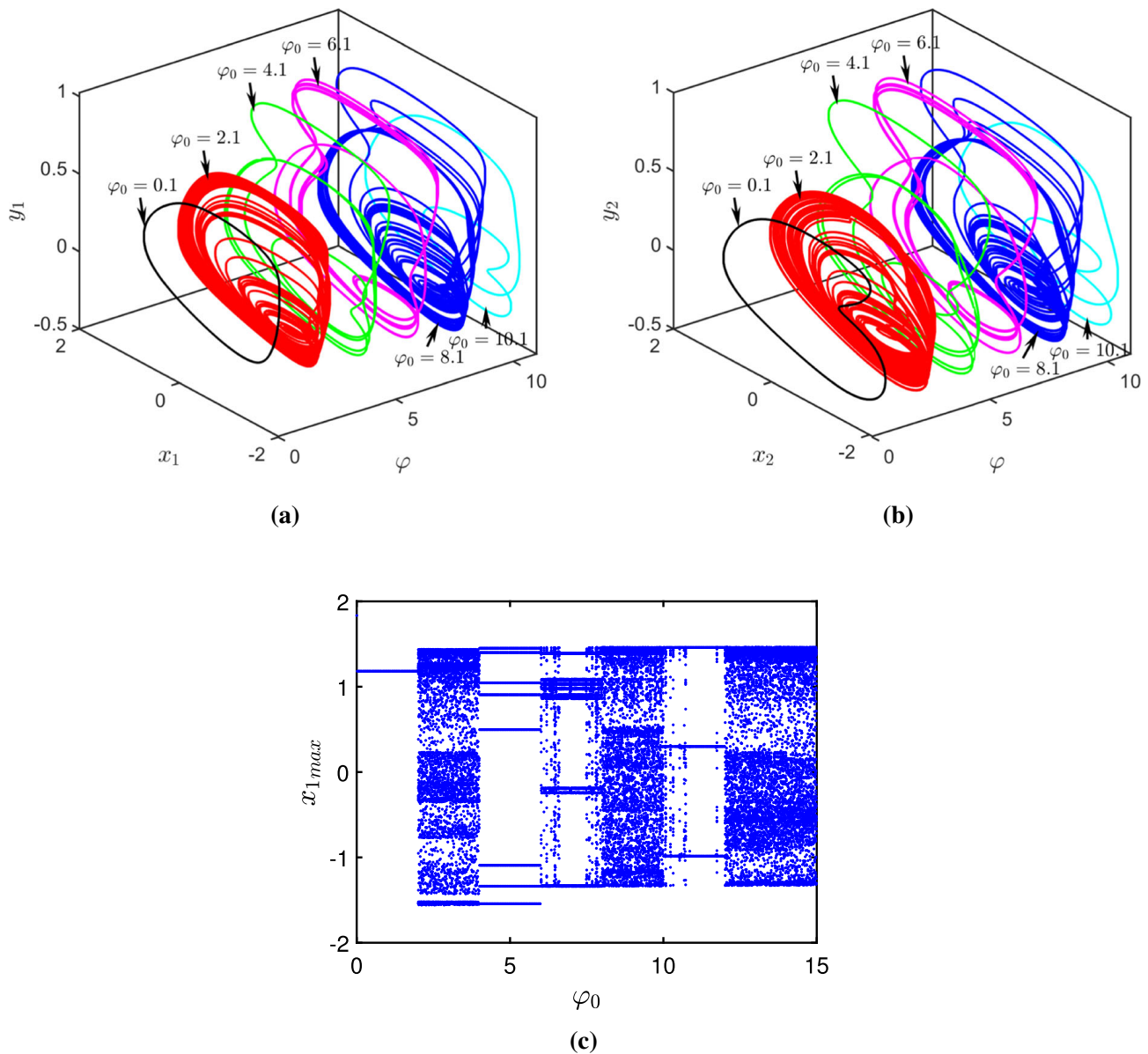


Fig. 7 Coexistence of heterogeneous attractors, respectively, in the planes (φ, x_1, y_1) (a) and (φ, x_2, y_2) (b) obtained with different initial states $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, \varphi_0)$ where $\varphi_0 = \{0.1, 2.1, 4.1, 6.1, 8.1, 10.1\}$. The bifurcation diagram of the ini-

tial conditions (c) showing the local maxima of the membrane potential of the photosensitive neuron with respect to φ_0 . These graphs are obtained for $k = 0.2$ and $I_0 = -0.26$. The other parameters are defined in the text

R' space. Therefore, the feedback term vanishes when the dynamics of the system is directed from a given attractor to the desired attractor for the choice of $h(X)$, allowing the dynamic system to move from a system multistable to a monostable system for a set of selected parameters.

As an example, we apply this control method described above on the memristive neural system defined at Eq.(5). Considering that the dynamic presents

an infinity of homogeneous attractors of chaotic nature as indicated in Sect. 3.3 precisely in Fig. 9a, it is a question for us of removing the chaotic attractors with important flux to remain only with the chaotic attractor with flux. Low while maintaining the intrinsic dynamics of the system. Feedback coupling is introduced along the variable φ with a feedback force ϵ as shown in Eq.(9).

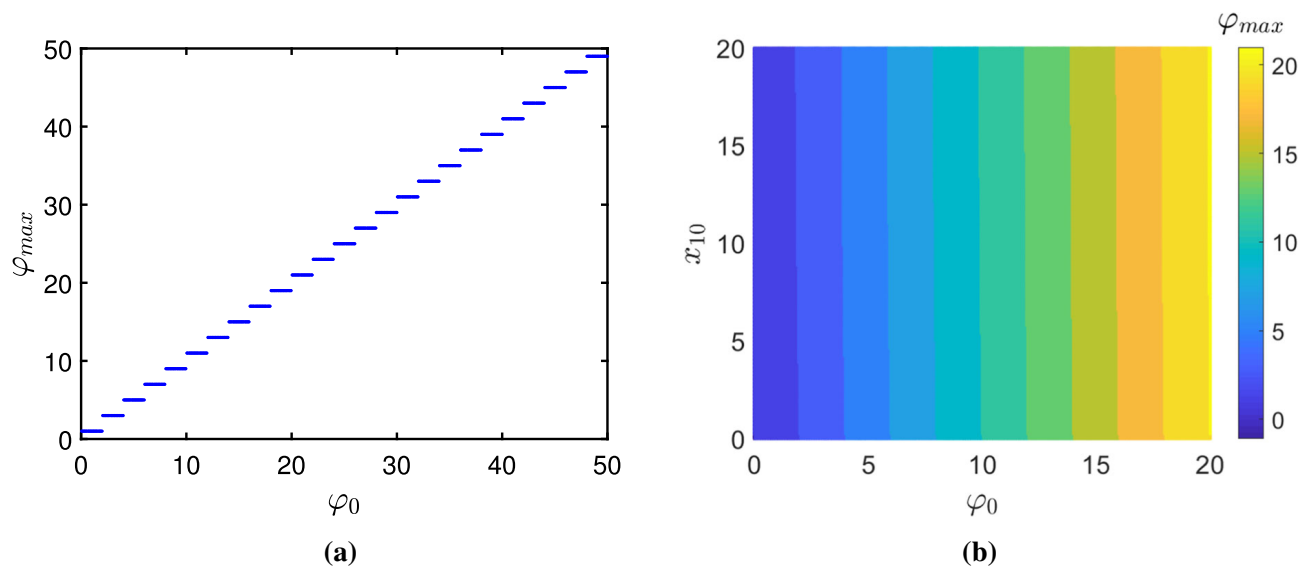


Fig. 8 **a** Bifurcation diagram showing the dependent dynamics of φ_0 with the initial condition $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, \varphi_0)$. **b** basin of attraction in the plane $(x_{10} - \varphi_0)$ as well as the local maxima

of φ showing the coexistence of homogeneous attractors with different positions. These graphs are obtained for $k = 1.67$ and $I_0 = -0.26$. The other parameters are defined in the text

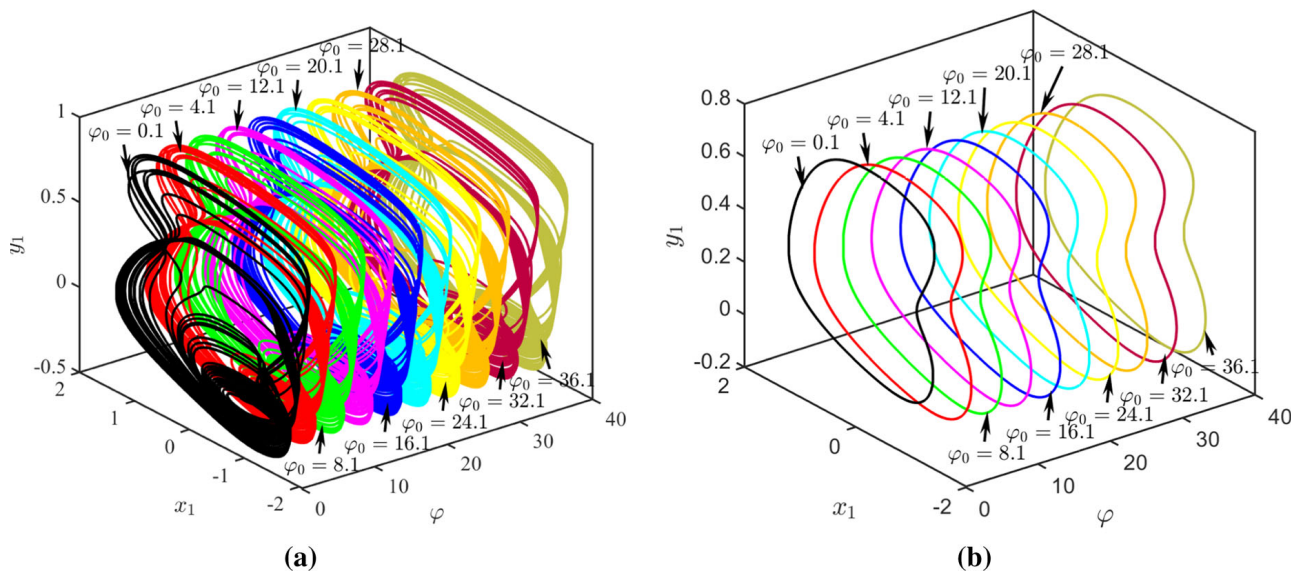


Fig. 9 Homogeneous coexistence of attractors in the plane (φ, x_1, y_1) obtained with different initial states $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, \varphi_0)$ where $\varphi_0 =$

$\{0.1, 4.1, 8.1, 12.1, 16.1, 20.1, 24.1, 28.1, 32.1, 36.1\}$ showing chaotic attractors **(a)** and periodic attractors **(b)**. The other parameters are defined as indicated in Fig. 8

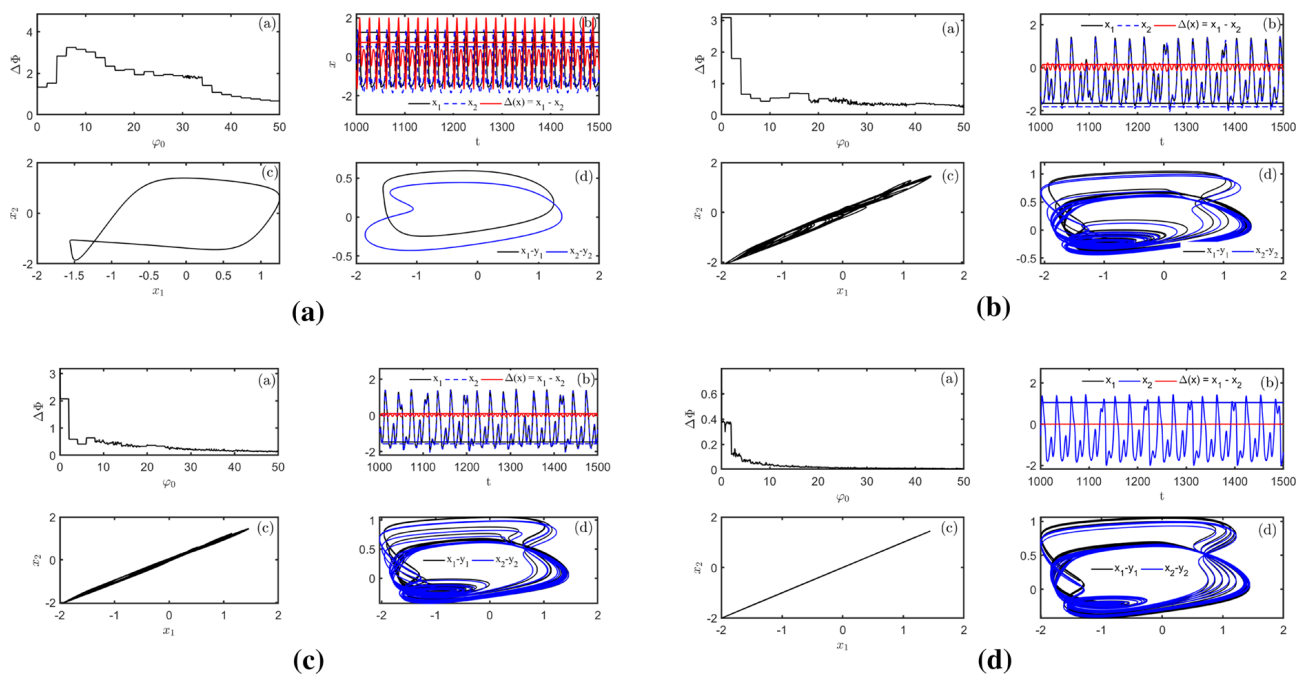


Fig. 10 **a** phase error between the membrane potentials of the photosensitive and thermosensitive neurons compared to the initial state φ_0 , **b** Temporary evolution of the membrane potentials of the photosensitive neuron (blue color), of the thermosensitive neuron (black color) and of the difference of the two neurons (red color), **c** Formation of the attractor on the plane (x_1, x_2) between the two neurons and in **d** the phase portraits

on the planes (x_1, y_1) presented by the color blue and (x_2, y_2) materialized by the color black with the following parameters: $a = 0.7, b = b_0 = 0.8, c = 0.1, \xi_1 = \xi_0 = 0.15, T' = 5, f = 0.1, \alpha = 20, \beta = 1$ and $I_0 = -0.26$. The graphs A_i, A_{ii}, A_{iii} and A_{iv} are obtained, respectively, with the values of the coupling force $k = \{0.005, 0.05, 0.1, 2\}$. (Color figure online)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - \xi_P)x_1 - y_1 - \frac{1}{3}x_1^3 + I_0 \arctan(x_1 - 1) \\ \quad - k\varphi(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_1 = c(x_1 - by_1 + a) \\ \dot{x}_2 = (1 - \xi_0 e^{-\frac{1}{T'}})x_2 - y_2 - \frac{1}{3}x_2^3 \\ \quad + A_0 e^{-\frac{1}{T'}} \cos(2\pi ft) \\ \quad + k\varphi(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = c(x_2 - b_0 e^{\frac{1}{T'}} y_2 + a) \\ \dot{\varphi} = \alpha \sin(\pi\varphi) + \beta(x_1 - x_2) - \varepsilon h(\varphi)(\varphi - b) \end{cases} \quad (9)$$

We define a region of state space R' as $\varphi \in [1.1, 50]$. The function $h(x)$ is therefore defined by

$$h(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1.1 < \varphi < 50 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

Fig. 11a shows a diagram of the local maxima of the variable φ with two parameters (φ and ϵ) for a value of selected in the zone of the desired attractor. We notice that as the feedback force ϵ increases, the dynamics of the memristive neural system tend toward the desired

dynamics regardless of the variation of the initial state φ_0 . Thus, this monostability is reached when the value of the feedback force is $\epsilon = 8.75$. Looking at Fig. 11b, we assert that all chaotic attractors switch to the desired attractor although φ_0 varies. We can conclude that for a value of the feedback force. $\epsilon > 8.75$, the dynamics of the memristive neuron system transitions from a multistable system to a monostable system.

4 Circuit implementation and simulation

In this section, it is a question of realizing an electronic calculator able to reproduce in an identical way the dynamics of the coupled system of two neurons via a memristive synapse. To this end, we exploit an approach based on operational amplifiers [50,66–71] to implement this electronic calculator. Thus, Fig. 12 presents the schematic diagram of the complete electronic simulator of the memristive neural system described by the system (5). The neural calculator

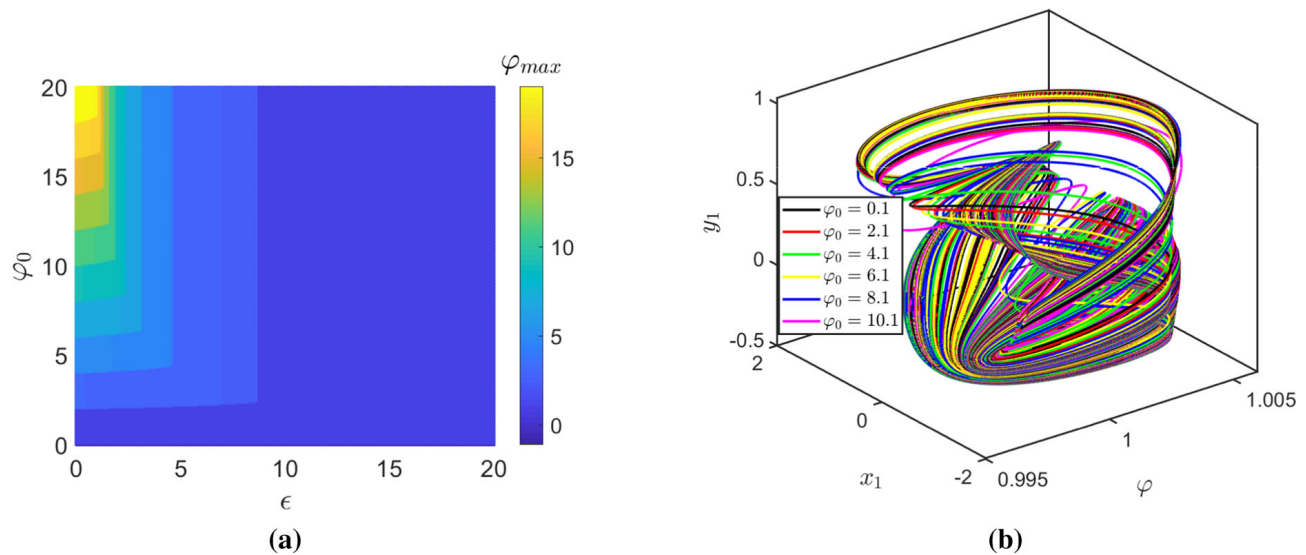


Fig. 11 Two-parameter bifurcation diagram (ϵ, φ_0) versus φ_{max} **a** showing the dynamics of the coupled neurons when a feedback controller is applied. in **b** formation of the desired attractors in

the plane (φ, x_1, y_1) with different initial conditions for a value of $\epsilon = 8.75$. The other parameters are as shown in Fig. 8

is designed based on discrete electronic components such as Resistors, capacitors, Operational Amplifiers type TL084 operating on a voltage range going from -18 to $18V$ and electronic multipliers (MULT) type AD633JN and many others. Applying Kirchhoff’s laws to the circuit of Fig. 12, the following equations are described:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \frac{R}{R_{11}} X_1 - \frac{R}{R_{12}} Y_1 - \frac{R}{R_{13}} X_1^3 \\ \quad + \frac{R}{R_{14}} \arctan(X_1 - 1) \\ \quad - \frac{R}{R_{15}} W(X_1 - X_2) \\ \dot{Y}_1 = \frac{R}{R_{21}} X_1 - \frac{R}{R_{22}} Y_1 + \frac{R}{R_{23}} E_1 \\ \dot{X}_2 = \frac{R}{R_{31}} X_2 - \frac{R}{R_{32}} Y_2 - \frac{R}{R_{33}} X_2^3 + \frac{R}{R_{34}} I_{AC} \\ \quad + \frac{R}{R_{35}} W(X_1 - X_2) \\ \dot{Y}_2 = \frac{R}{R_{41}} X_2 - \frac{R}{R_{42}} Y_2 + \frac{R}{R_{43}} E_2 \\ \dot{W} = \frac{R}{R_{51}} \sin(\pi W) - \frac{R}{R_{52}} (X_1 - X_2) \end{cases} \quad (11)$$

here, X_i is a state variable representing the membrane potential, Y_i the state variable representing the recovery variable and W the state variable representing the

internal flux of the multistable memristor with $i = 1, 2$. E_i is an external parameter, and $I_{AC} = A \cos(2\pi ft)$ represents the excitation source used to excite the thermosensitive neuron. Note that $A = 1V$ denotes the AC amplitude and f its frequency. By equalizing Eqs. (11 and 5), then considering a constant time, i.e., $R = 10K\omega$ and $C = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 10nF$ and the gain multiplier $\gamma = 10$, $x_i = X_i/1V$ and $y_i = Y_i/1V$, we obtain the parameters of the following electronic calculator: $R_{11} = \frac{R}{1-\epsilon_p} = 11.76K\Omega$; $R_{31} = \frac{R}{1-\epsilon_0 e^{-\frac{1}{T}}}} = 11.4K\Omega$; $R_{12} = R_{32} = R = 10K\Omega$; $R_{13} = R_{33} = 3\gamma^2 R = 30K\Omega$; $R_{14} = \frac{R}{I_0} = adjustable$; $R_{34} = \frac{RA}{A_0 e^{-\frac{1}{T}}}} = 12.21K\Omega$; $R_{15} = R_{35} = \frac{R}{k} = adjustable$; $R_{21} = R_{41} = \frac{R}{c} = 100K\Omega$; $R_{42} = \frac{R}{cb_0 e^{\frac{1}{T}}}} = 102.34K\Omega$; $R_{22} = \frac{R}{cb} = 125K\Omega$; $R_{23} = R_{43} = \frac{RE}{c \cdot a} = 142.8K\Omega$; $R_{51} = \frac{R}{\alpha} = 500\Omega$; $R_{52} = \frac{R}{\beta} = 10K\Omega$; $f_s = \frac{f}{RC} = 1000Hz$; $E_1 = E_2 = E_3 = E = 1V$ and $A = 1V$

The electronic computer designed in Fig. 12 and simulate by the electronic simulation software OrCAD makes it possible to reproduce the same dynamic behaviors observed during digital simulations of the memristive neural system defined at Eq. (5). To illus-

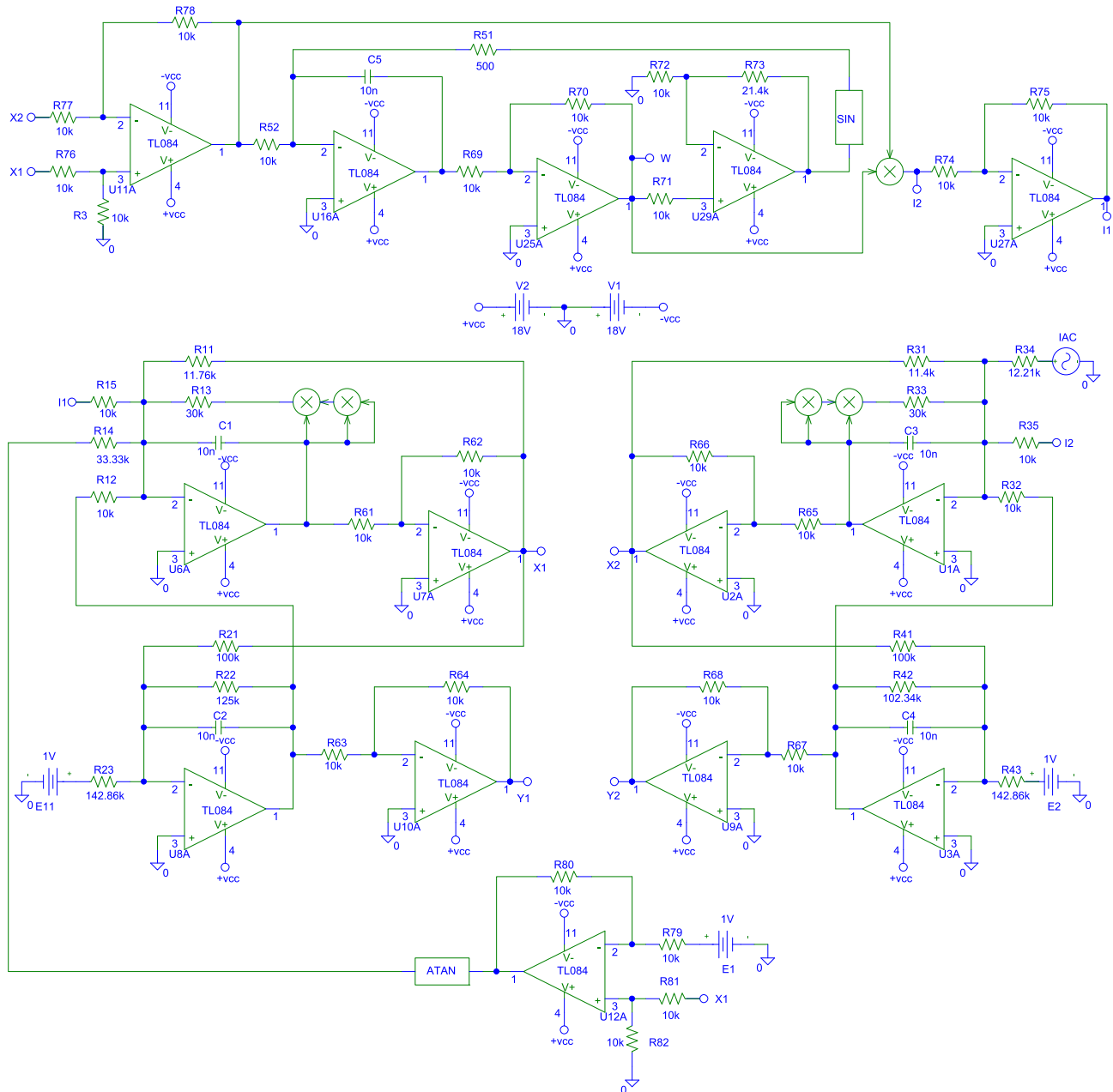


Fig. 12 Electronic circuit of the coupled neurons

trate this assertion, we present the Pspice results showing two attractors Fig. 13a and b generating chaotic and periodic bursting behaviors as observed in Fig. 6c and d. We also show in Fig. 14, that this electronic calculator is able to exhibit an infinity of coexisting homogeneous attractors of chaotic nature. We can see from this diagram that the attractors designed in the plane (w, x_1) are almost identical with a chaotic and therefore homogeneous nature where $w = \varphi$. By analog, it can also generate an infinity of heterogeneous attractors coex-

isting when the parameters are well selected. In view of these simulation results, we can affirm that this electronic calculator of Fig. 12 can be used to implement the memristive neuron system.

5 Conclusion

In this paper, a memristive synapse with sine memductance is used to couple two models of FHN neurons, one

Fig. 13 Formation of attractors in Pspice for different values of the intensity of the photo-current I_0 applied. **a** chaotic bursting firing pattern for $R_{14} = 55.55k\Omega$ and **b** periodic bursting firing pattern for $R_{14} = 33.33k\Omega$ with $R_{15} = R_{35} = 10k\Omega$ and the initial condition $(0.2V, 0.1V, 0.2V, 0.1V, 0.1V)$

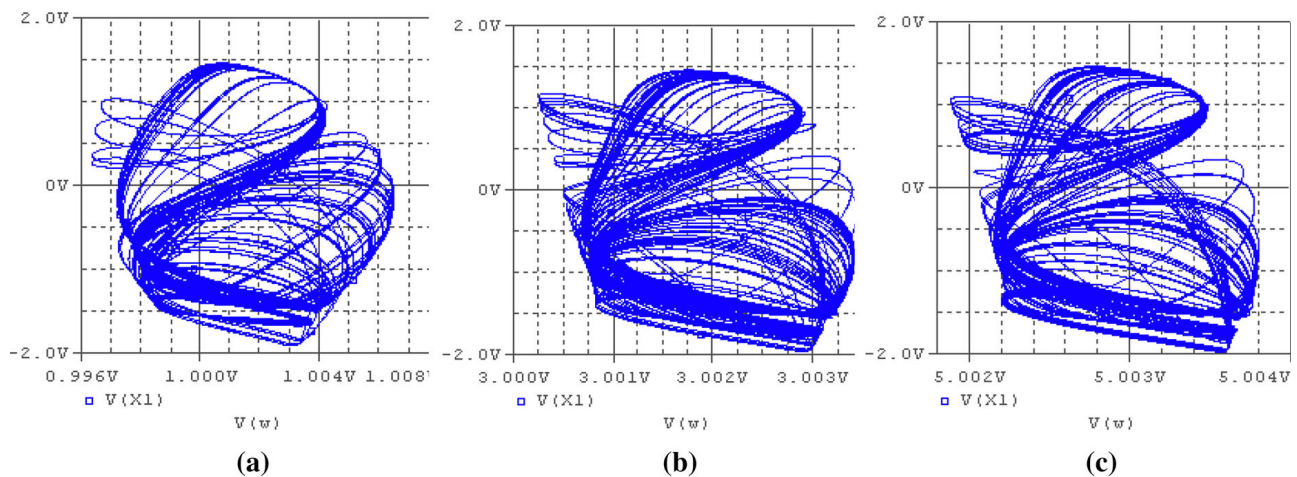
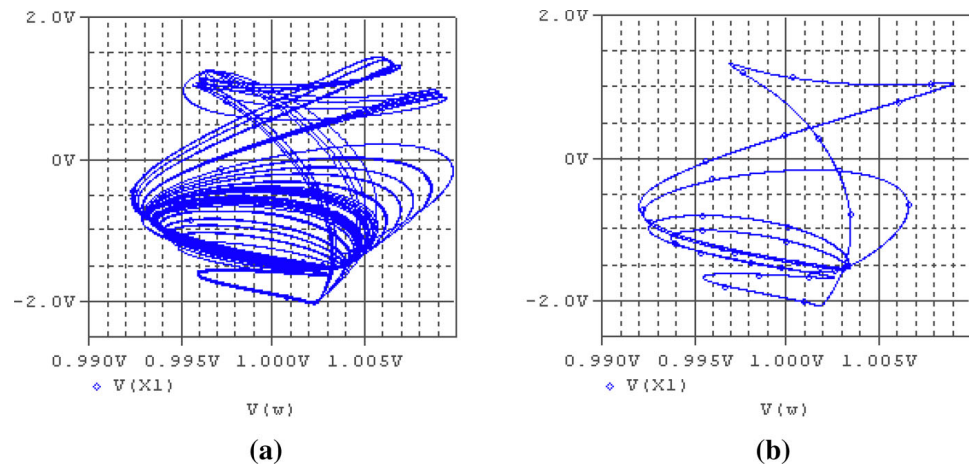


Fig. 14 Coexistence of some homogeneous attractors obtained with the initial states $(0.2, 0.1, 0.2, 0.1, W(0))$ where the values of $W(0)$ are selected, respectively, by $0.1V$, $2.1V$ and $4.1V$. we consider $R_{14} = 38.76k\Omega$ and $R_{15} = R_{35} = 5.96k\Omega$

dependent on the effect of light and the other dependent on the effect of temperature. In this topology, the phototube is used to pick up light and convert it to a photocurrent, and the thermistors are used, respectively, to convert heat into electric current and to sense temperature changes in the neuron. On the basis of traditional techniques for analyzing nonlinear systems, we show that the memristive neural system can generate rich and complex phenomena such as chaotic and periodic bursting behaviors, the coexistence of an infinite number of homogeneous chaotic attractors or periodic and the coexistence of an infinite number of heterogeneous attractors when the intrinsic parameters of the multi stable memristor are tamed. In addition, the onset of phase synchronization stability is observed as the coupling force increases regardless of the initial state of the memristor. A control method based on feedback term is applied to the coupled neurons in order to control the

phenomenon of extreme homogeneous multistability and be able to select a desired attractor. This powerful technique makes it possible to move from a multistable system to a monostable system. To confirm these results, an equivalent electronic circuit of this coupled neuron model has been designed. We can notice that the electronic simulations made with the Pspice software are in agreement with the numerical simulations.

Acknowledgements Jules Fossi Tagne thanks the Faculty of Sciences of the University of Ngaoundéré for its important contribution. Zeric Tabekoueng Njitacke has been supported by the Polish National Science Centre under the Grant OPUS 14 No.2017/27/B/ST8/01330.

Author contributions All authors have contributed equitably in the production and interpretation of the results and then in the writing of this manuscript.

Data availability The data used in this research work are available from the authors by reasonably request.

Declarations

Conflict of interest The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

References

- Ham, D., Park, H., Hwang, S., Kim, K.: Neuromorphic electronics based on copying and pasting the brain. *Nat. Electron.* **4**, 635–644 (2021)
- Aram, Z., Jafari, S., Ma, J., Sprott, J.C., Zendeherouh, S., Pham, V.T.: Using chaotic artificial neural networks to model memory in the brain. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **44**, 449–59 (2017)
- Borgers, C.: An introduction to modeling neuronal dynamics. Springer International Publishing, Cham (2017)
- Mondal, A., Kumar, Upadhyay R., Ma, J., Yadav, B.K., Sharma, S.K.: Bifurcation analysis and diverse firing activities of a modified excitable neuron model. *Cogn. Neurodyn.* **13**, 393–407 (2017)
- Hodgkin, A.L., Huxley, A.F.: A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol. Lond.* **117**, 500 (1952)
- Hindmarsh, J.L., Rose, R.M.: A model of the nerve impulse using two first-order differential equations. *Nature* **296**, 162–164 (1982)
- Hindmarsh, J.L., Rose, R.M.: A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proc. R. Soc. Lond. B Biol. Sci.* **221**, 87–102 (1984)
- Izhikevich, E.M.: Simple model of spiking neurons. *IEEE Trans. Neural Netw.* **14**, 1569–1572 (2003)
- Morris, C., Lecar, H.: Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophys. J.* **35**, 193–213 (1981)
- Izhikevich, E.M., FitzHugh, R.: Fitzhugh-nagumo model. *Scholarpedia* **1**, 1349 (2006)
- Chay, T.R.: Chaos in a three-variable model of an excitable cell. *Physica D.* **16**, 233–242 (1985)
- Njitacke, Z.T., Isaac, S.D., Nestor, T., Kengne, J.: Window of multistability and its control in a simple 3D hopfield neural network: application to biomedical image encryption. *Neural Comput. Appl.* **33**, 1–20 (2020)
- Njitacke, Z.T., Kengne, J., Fotsin, H.: Coexistence of multiple stable states and bursting oscillations in a 4D hopfield neural network. *Circuits Syst. Signal Process* **39**, 3424–3444 (2020)
- Xu, Q., Liu, T., Feng, C.-T., Bao, H., Wu, H.-G., Bao, B.-C.: Continuous non-autonomous memristive Rulkov model with extreme multistability. *Chin. Phys. B* (2021). <https://doi.org/10.1088/1674-1056/ac2f30>
- Zhang, S., Zheng, J., Wang, X., Zeng, Z.: A novel nonequilibrium HR neuron model with hidden homogeneous extreme multistability. *Chaos Solitons Fractals* **145**, 110761 (2021)
- Ngouonkadi, E.M., Fotsin, H., Fotso, P.L., Tamba, V.K., Cerdeira, H.A.: Bifurcations and multistability in the extended hindmarsh-rose neuronal oscillator. *Chaos Solitons Fractals* **85**, 151–163 (2016)
- Hou, Z., Ma, J., Zhan, X., Yang, L., Jia, Y.: Estimate the electrical activity in a neuron under depolarization field. *Chaos Solitons Fractals* **142**, 110522 (2021)
- Kafraj, M.S., Parastesh, F., Jafari, S.: Firing patterns of an improved Izhikevich neuron model under the effect of electromagnetic induction and noise. *Chaos Solitons Fractals* **137**, 109782 (2020)
- Njitacke, Z.T., Doubla, I.S., Mabekou, S., Kengne, J.: Hidden electrical activity of two neurons connected with an asymmetric electric coupling subject to electromagnetic induction: coexistence of patterns and its analog implementation. *Chaos Solitons Fractals* **137**, 109785 (2020)
- Bao, H., Zhang, Y., Liu, W., et al.: Memristor synapse coupled memristive neuron network: synchronization transition and occurrence of chimera. *Nonlinear Dyn.* **100**, 937–950 (2020)
- Leng, Y., Yu, D., Hu, Y., et al.: Dynamic behaviors of hyperbolic-type memristor-based hopfield neural network considering synaptic crosstalk. *Chaos* **30**(3), 33108 (2020)
- Bao, H., Hu, A., Liu, W., Bao, B.: Hidden bursting firings and bifurcation mechanisms in memristive neuron model with threshold electromagnetic induction. *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* **31**(2), 502–511 (2020)
- Liu, Y., Xu, W.J., Ma, J., Alzahrani, F., Hobiny, A.: A new photosensitive neuron model and its dynamics. *Front Inf. Technol. Electron. Eng.* **21**, 1387–1396 (2020)
- Xu, Y., Guo, Y., Ren, G., Ma, J.: Dynamics and stochastic resonance in a thermosensitive neuron. *Appl. Math. Comput.* **385**, 125427 (2020)
- Guo, Y., Zhou, P., Yao, Z., Ma, J.: Biophysical mechanism of signal encoding in an auditory neuron. *Nonlinear Dyn.* **105**, 3603–3614 (2021)
- Gu, H.G., Pan, B.B., Chen, G.R., Duan, L.X.: Biological experimental demonstration of bifurcations from bursting to spiking predicted by theoretical models. *Nonlinear Dyn.* **78**, 391–407 (2014)
- Strukov, D.B., Snider, G.S., Stewart, D.R., Williams, R.S.: The missing memristor found. *Nature* **453**(7191), 80–83 (2008)
- Chua, L.O.: Memristor-the missing circuit element. *IEEE Trans. Circuit Theory* **18**(5), 507–519 (1971)
- Zha, J., Huang, H., Liu, Y.: A novel window function for memristor model with application in programming analog circuits. *IEEE Trans. Cir. Sys. II Brief Pap.* **63**(5), 423–427 (2016)
- Zhang, Y., Wang, X., Li, Y., Friedman, E.G.: Memristive model for synaptic circuits. *IEEE Trans. Cir. Sys. II Brief Pap.* **64**(7), 767–771 (2017)
- Zhang, X., Wang, W., Liu, Q., et al.: An artificial neuron based on a threshold witching memristor. *IEEE Electron. Device Lett.* **39**(2), 308–311 (2018)
- Usha, K., Subha, P.A.: Hindmarsh-Rose neuron model with memristors. *BioSystems* **178**, 1–9 (2019)
- Tan, Y., Wang, C.: A simple locally active memristor and its application in HR neurons. *Chaos* **30**(5), 053118 (2020)
- Hu, B., Guan, Z.H., Xiong, N., et al.: Intelligent impulsive synchronization of nonlinear interconnected neural networks for image protection. *IEEE Trans. Ind. Inf.* **14**(8), 3775–3787 (2018)

35. Chua, L.O.: If it's pinched it's a memristor. *Semicond. Sci. Technol.* **29**(10), 104001 (2014)
36. Chua, L.O.: Everything you wish to know about memristors but are afraid to ask. *Radioengineering* **24**(2), 319–368 (2015)
37. Bao, H., Wang, N., Bao, B., et al.: Initial condition-dependent dynamics and transient period in memristor-based hypogenetic Jerk system with four line equilibria. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **57**, 264–275 (2018)
38. Chen, M., Sun, M., Bao, H., Hu, Y., Bao, B.: Flux-charge analysis of two-memristor-based Chua's circuit: dimensionality decreasing model for detecting extreme multistability. *IEEE Trans. Ind. Electron.* **67**(3), 2197–2206 (2020)
39. Lv, M., Ma, J.: Multiple modes of electrical activities in a new neuron model under electromagnetic radiation. *Neurocomputing* **205**, 375–381 (2016)
40. Baran, A.Y., Korkmaz, N., Öztürk, I., Kılıç, R.: On addressing the similarities between STDP concept and synaptic/memristive coupled neurons by realizing of the memristive synapse based HR neurons. *Eng. Sci. Technol. Int. J.* (2021). <https://doi.org/10.1016/j.jestch.2021.09.008>
41. Jin, P., Wang, G., Iu, H.H., Fernando, T.: A locally active memristor and its application in a chaotic circuit. *IEEE Trans. Circuits Syst. II Exp. Briefs* **65**(2), 246–250 (2017)
42. Chang, H., Wang, Z., Li, Y., Chen, G.: Dynamic analysis of a bistable bi-local active memristor and its associated oscillator system. *Int. J. Bifurc. Chaos* **28**(8), 1850105 (2018)
43. Ascoli, A., Slesazek, S., Mahne, H., Tetzlaff, R., Mikolajick, T.: Nonlinear dynamics of a locally-active memristor. *IEEE Trans. Circuits Syst. I Reg. Pap.* **62**(4), 1165–1174 (2015)
44. Marco, M.D., Forti, M., Pancioni, L.: Convergence and multistability of nonsymmetric cellular neural networks with memristors. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Syst.* **47**(10), 2970–2983 (2017)
45. Bao, H., Chen, M., Wu, H., Bao, B.: Memristor initial-boosted coexisting plane bifurcations and its extreme multistability reconstitution in two-memristor-based dynamical system. *Sci. China Technol. Sci.* **63**(4), 603–613 (2020)
46. Lai, Q., Akgul, A., Zhao, X.W., Pei, H.: Various types of coexisting attractors in a new 4D autonomous chaotic system. *Int. J. Bifurc. Chaos* **27**(9), 1750142 (2017)
47. Zhang, X., Wang, C., Yao, W., Lin, H.: Chaotic system with bondorbital attractors. *Nonlinear Dyn.* **97**(4), 2159–2174 (2019)
48. Chen, M., Ren, X., Wu, H., et al.: Periodically varied initial offset boosting behaviors in a memristive system with cosine memductance. *Front. Inform. Technol. Elect. Eng.* **20**(12), 1706–1716 (2019)
49. Lin, H., Wang, C., Sun, Y., Yao, W.: Firing multistability in a locally active memristive neuron model. *Nonlinear Dyn.* (2020). <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05687-3>
50. Bao, B.C., Qian, H., Wang, J., Xu, Q., Chen, M., Wu, H.G., Yu, Y.J.: Numerical analyses and experimental validations of coexisting multiple attractors in hopfield neural network. *Nonlinear Dyn.* **90**(4), 2359–69 (2017)
51. Chen, C., Chen, J., Bao, H., et al.: Coexisting multi-stable patterns in memristor synapse-coupled Hopfield neural network with two neurons. *Nonlinear Dyn.* **95**(4), 3385–3399 (2019)
52. Lin, H., Wang, C., Hong, Q., et al.: A multi-stable memristor and its application in a neural network. *IEEE Trans. Cir. Sys. II Brief Pap.* **67**(12), 3472–3476 (2020)
53. Wang, C., Xiong, L., Sun, J., Yao, W.: Memristor-based neural networks with weight simultaneous perturbation training. *Nonlinear Dyn.* **95**(4), 2893–2906 (2019)
54. Mannan, Z.I., Adhikari, S.P., Yang, C., Budhathoki, R.K., Kim, H., Chua, L.: Memristive imitation of synaptic transmission and plasticity. *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* **30**(11), 3458–3470 (2019)
55. Machens, C.K., Schütze, H., Franz, A., et al.: Single auditory neurons rapidly discriminate conspecific communication signals. *Nat. Neurosci.* **6**(4), 341–342 (2003). <https://doi.org/10.1038/nm1036>
56. Zhou, P., Yao, Z., Ma, J., et al.: A piezoelectric sensing neuron and resonance synchronization between auditory neurons under stimulus. *Chaos Solitons Fractals* **145**, 110751 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110751>
57. Dipoppa, M., Ranson, A., Krumin, M., et al.: Vision and locomotion shape the interactions between neuron types in mouse visual cortex. *Neuron* **98**(3), 602–615 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2018.03.037>
58. Gabbiani, F., Krapp, H.G., Koch, C., et al.: Multiplicative computation in a visual neuron sensitive to looming. *Nature* **420**(6913), 320–324 (2002). <https://doi.org/10.1038/nature01190>
59. Nakayama, T.: Thermosensitive neurons in the brain. *Jpn. J. Phys.* **35**(3), 375–389 (1985). <https://doi.org/10.2170/jjphysiol.35.375>
60. Ruchty, M., Roces, F., Kleineidam, C.J.: Detection of minute temperature transients by thermosensitive neurons in ants. *J. Neurophys.* **104**(3), 1249–1256 (2010). <https://doi.org/10.1152/jn.00390.2010>
61. Li, K., Bao, H., Li, H., et al.: Memristive Rulkov neuron model with magnetic induction effects. *IEEE Trans. Inf. Inf.* (2021). <https://doi.org/10.1109/THI.2021.3086819>
62. Fossi, T.J., Edima, H.C., Njitacke, T.Z., Feudjio, K.F., Mballa, N.R., Atangana, J.: Bifurcations analysis and experimental study of the dynamics of a thermosensitive neuron conducted simultaneously by photocurrent and thermistance. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* (2021). <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-021-00311-w>
63. Panahi, S., Aram, Z., Jafari, S., Ma, M., Sprott, J.C.: Modeling of epilepsy based on chaotic artificial neural network. *Chaos Solitons Fractals* **105**, 150–6 (2017)
64. Njitacke, Z.T., Kengne, J., Fotsin, H.B.: A plethora of behaviors in a memristor based hopfield neural networks (HNNs). *Int. J. Dyn. Control* **7**(1), 36–52 (2018)
65. Kiran, Y., Neeraj, K.K., Manish, D.S.: Intermittent feedback induces attractor selection. *Phys. Rev. E* **95**, 042215 (2017)
66. Hamill, D.C.: Learning about chaotic circuits with SPICE. *IEEE Trans. Educ.* **36**, 28–35 (1993)
67. Johnson, C.I.: Analog computer techniques. Mc-GrawHill, New York (1963)
68. Kengne, J., Chedjou, J.C., Kenne, G., Kyamakya, K., Kom, G.H.: Analog circuit implementation and synchronization of a system consisting of a van der pol oscillator linearly coupled to a duffing oscillator. *Nonlinear Dyn.* **70**, 2163–73 (2012)
69. Sitt, J.D., Aliaga, J.: Versatile biologically inspired electronic. *Phys. Rev. E* **76**, 051919 (2007)

70. Wu, X., Ma, J., Yuan, L., et al.: Simulating electric activities of neurons by using PSPICE. *Nonlinear Dyn.* **75**, 113–26 (2014)
71. Njitacke, Z.T., Doubla, I.S., Kengne, J., Cheukem, A.: Coexistence of firing patterns and its control in two neurons coupled through an asymmetric electrical synapse. *Chaos* **30**, 023101 (2020)

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.