

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU



UNITE DE FORMATION ET DE RECHERCHE EN SCIENCES EXACTES ET APPLIQUEES

Département de Mathématiques et Informatique

THESE UNIQUE DE DOCTORAT

présentée en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR de
l'Université de Ouagadougou en Mathématiques Appliquées

Spécialité : Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision

**Data Envelopment Analysis : Méthodologie, Théories et Relation
avec l'Optimisation multicritère.**

**Applications aux systèmes de l'enseignement de base, de la santé
et de quelques entreprises du Burkina Faso.**

Par Jacob Wendpanga Yougbaré

Jury de thèse

Pr. Alexis TSOUKIAS,	Président CNRS, LAMSADE-Université Paris Dauphine, France
Pr. Jacques TEGHEM,	Directeur de recherche Faculté Polytechnique de Mons, Belgique
Pr. Blaise SOME,	Codirecteur Université de Ouagadougou, Burkina Faso
Pr. Simplicie DOSSOU-GBETE,	Rapporteur Université de Pau de des pays de l'Adour, France
Pr. Berthold ULUNGU,	Rapporteur Faculté Polytechnique de Mons, Belgique
Pr. Albert OUEDRAOGO,	Membre du jury Université Saint Thomas d'Aquin, Burkina Faso

Soutenue le 14 Juin 2007

Thèse N° : 042

Résumé

Dans la première partie de ce travail, qui en constitue le cadre général, la méthodologie “*Data Envelopment Analysis*” (DEA), est présentée et illustrée, tant du point de vue modélisations mathématiques que des interprétations économiques. La méthode DEA, proposée initialement par Charnes, Cooper et Rhodes, permet de mesurer l’efficacité technique d’unités de prise de décision (DMU) de n’importe quel système de production, sur base des facteurs ressources et des facteurs résultants. Le modèle de Banker, Charnes et Cooper met lui en évidence les rendements d’échelle variables. L’indice de productivité de Malmquist permet quant à lui d’analyser l’évolution de l’efficacité d’une DMU au cours du temps. Dans cette partie, nous décrivons également l’optimisation multicritère et quelques unes des méthodes de résolution, avant de mettre en évidence les liens entre l’approche DEA et l’approche multicritère. Dans la deuxième partie, consacrée à des aspects théoriques, nous approfondissons les relations entre DEA et la programmation linéaire multicritère en variables entières (MOILP), par de nouveaux résultats et des corrections apportées à des insuffisances et des erreurs que présentait un travail publié. Ces relations entre ces deux approches nous ont ensuite servi de base pour proposer une nouvelle approche interactive de résolution des problèmes MOILP, ainsi qu’un modèle multicritère permettant l’affectation de ressources additionnelles. Ces deux propositions sont basées sur DEA. Dans la troisième partie, consacrée à des applications pour le Burkina Faso, DEA est appliquée pour analyser les performances scolaires et les variations de ces performances de l’enseignement de base, en considérant de multiples facteurs résultants et ressources. Nous l’appliquons aussi pour mesurer et analyser les efficacités de performance et les changements de performance du système de santé. Enfin, cette approche est appliquée à quelques entreprises pour d’une part comparer leur efficacité et d’autre part établir un lien entre l’efficacité DEA et la productivité du capital.

Mots clés: “*Data Envelopment Analysis*” , efficacité, rendements d’échelle variables, indice de productivité de Malmquist, optimisation multicritère, pays en voie de développement, enseignement de base, santé publique

A mon Père

Avant-propos

Avant de présenter le contenu de ce travail, il semble important de mentionner les aides dont nous avons bénéficié dans l'accomplissement de celui-ci. L'inscription en première année de thèse a bénéficié d'une bourse nationale burkinabé. Cette première inscription a permis de postuler pour une bourse de mobilité puisque la bourse nationale ne prenait pas en charge des mobilités éventuelles du candidat. La bourse de mobilité a eu pour rôle de permettre au candidat et au directeur de recherche de travailler ensemble avec un suivi régulier et permanent. C'est la bourse de mobilité de l'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF) qui a été sollicitée et obtenue pour finaliser le travail. Cette bourse AUF a permis de travailler en alternance dans le service de Mathématiques et de Recherche Opérationnelle (MATHRO) de la Faculté Polytechnique de Mons, et le Laboratoire d'Analyse Numérique, d'Informatique et de Biomathématiques (LANI-BIO) de l'Université de Ouagadougou, respectivement 7 et 3 mois par année. Les responsables scientifiques sont respectivement le Professeur Jacques TEGHEM (directeur de recherche) et le Professeur Blaise SOME (codirecteur). La bourse de mobilité AUF ne prend en charge aucun frais relatif aux services d'accueil ; malgré cela, le service MATHRO, a énormément soutenu pour le candidat, en lui fournissant l'accès aux ressources disponibles pour son personnel (machines et matériels didactiques, bibliothèque, services intranet, les services d'impression et de copies, etc.) ainsi que la prise en charge de la participation à des conférences et aux séminaires dans les domaines relatifs à ce travail.

Remerciements

Ce travail n'aurait été réalisé sans l'aide de nombreuses personnes, qui, de près ou de loin, ont participé à la réalisation de celui-ci. Je souhaite ici les remercier, et je m'excuse auprès de celles que j'aurais omis de citer.

Tout d'abord, merci à mes promoteurs pour la confiance qu'ils m'ont accordée. Qu'il me soit permis de remercier, le professeur Jacques Teghem, qui a donné l'opportunité de réaliser ce travail dans les meilleures conditions possibles, en plus de ses encouragements, sa patience, sa disponibilité et sa rigueur scientifique dont j'ai bénéficié. Je ne sais comment je saurai effacer cette dette.

Mes vifs remerciements au professeur Blaise Somé, pour m'avoir aussi accueilli dans son équipe au sein du LANIBIO et pour ses conseils. Je lui exprime toute ma gratitude. Je tiens ensuite à exprimer ma gratitude aux membres du jury, d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse : Pr. Alexis Tsoukiàs de l'Université Paris Dauphine (France) ; Dr. Berthold Ulungu de la Faculté Polytechnique de Mons (Belgique) ; Pr. Simplicie Dossou-Gbété de l'Université de Pau (France) ; Pr. Albert Ouédraogo de l'Université Catholique Saint Thomas d'Aquin (Burkina Faso).

Je tiens aussi à remercier les directeurs respectifs des deux services d'accueil, MATHRO et LANIBIO, ainsi que leurs membres pour l'ambiance conviviale, les bons moments passés en leur compagnie. Particulièrement, Pr. Marc Pirlot, pour sa disponibilité et sa convivialité ; Dr. Longin Somé, pour ses encouragements ; Pr. Philippe Fortemps, pour son aide technique en informatique, Dr. Daniel Tuytens pour son soutien en programmation, Mlle Laurence Wouters pour son aide précieuse à mon intégration dans l'équipe du service MATHRO de Mons.

J'exprime ma gratitude, à l'administration de l'Université de Koudougou pour sa patience, elle qui attendait plus de ma disponibilité.

Enfin, mes remerciements vont à mes parents qui, bien que ne comprenant pas ce que je faisais, m'ont toujours apporté leur soutien et leurs encouragements ; en particulier, ma mère pour son amour infini ; et Robert qui a dû se sacrifier le plus souvent pour moi ; à Ariane, pour finir, qui a dû me supporter avec beaucoup d'amour.

Table des matières

Résumé	iii
Dédicace	iv
Avant-propos	v
Remerciements	vi
Table des matières	vii
Chapitre 1 : Introduction générale	1
1.1 Introduction	1
1.2 Problématique du développement durable au Burkina Faso : le Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté	5
1.3 Objectifs et motivations	8
1.4 Méthodologies	10
1.5 Organisation de la thèse	12
 Partie I : “<i>Data Envelopment Analysis</i>” : méthodologie, théorie, in- terprétation et relations avec l’optimisation multicritère	 14
Chapitre 2 : Panorama de l’approche “<i>Data Envelopment Analysis</i>”	16
2.1 Historique et concepts	17
2.1.1 Historique	17
2.1.2 Concepts de base de l’approche DEA	21
2.2 Modèles de base et interprétations	27
2.2.1 Modèles de Charnes, Cooper et Rhodes	28
2.2.2 Modèles de Banker, Charnes et Cooper	42
2.3 Extensions des modèles de base	51

2.3.1	Analyse multi-périodes ou “Window analysis”	51
2.3.2	Modèle DEA avec incorporation <i>a priori</i> de jugement et DEA/AR	53
2.3.3	Modèle DEA avec des facteurs non discrétionnaires	54
2.3.4	Modèle DEA avec des facteurs indésirables	55
2.3.5	Modèle DEA avec des données catégorielles	56
2.3.6	Modèle DEA avec des données imprécises : IDEA	57
2.4	Autres variantes des modèles CCR et BCC	60
2.4.1	Modèle additif	60
2.4.2	Modèle multiplicatif	64
2.4.3	Modèle “free disposal hull (FDH)”	66
2.4.4	Quelques autres variantes des modèles DEA	68
2.5	Conclusion et commentaires	73
Chapitre 3 :	Mesures des performances par DEA	76
3.1	Définitions et interprétations économiques en utilisant DEA	77
3.1.1	Efficacité et productivité	77
3.1.2	Comparaison des performances et benchmarking par DEA	79
3.2	Analyse micro-économique par DEA	80
3.2.1	Approximation de la technologie de production par DEA	80
3.2.2	Les rendements d’échelle par DEA	82
3.3	Mesure de changement de productivité dans le temps : indice de Malmquist	92
3.3.1	Indices de mesure inputs	92
3.3.2	Détermination de l’indice de Malmquist par DEA	93
3.4	Revue de la littérature de quelques applications avec DEA	100
3.4.1	Applications DEA aux systèmes d’enseignement	101
3.4.2	Applications DEA aux systèmes de santé	102
3.4.3	Applications DEA aux systèmes bancaires	103
3.4.4	Applications DEA aux mesures des performances environnementales	103

3.4.5	Applications DEA aux autres domaines de l'économie	104
3.5	Domaines d'application de DEA pour le cas du CSLP au Burkina Faso .	105
3.5.1	La production agricole	106
3.5.2	Le système de l'éducation	106
3.5.3	Le système national de la santé	107
3.5.4	Autres secteurs	108
3.6	Conclusion et commentaires	108
Chapitre 4 :	La programmation mathématique multicritère	110
4.1	Les concepts de base de la programmation mathématique multicritère .	111
4.1.1	Le problème	111
4.1.2	Définitions	113
4.1.3	Théorèmes de base de caractérisation des solutions efficaces . .	116
4.2	Quelques approches de résolution	118
4.2.1	Théorie de l'utilité multi-attribut	118
4.2.2	Méthodes interactives	119
4.2.3	Goal programming	124
4.3	Cas particuliers des variables entières ou binaires	125
4.3.1	Définitions	125
4.3.2	Quelques approches de résolution	126
4.4	Conclusion et commentaires	131
Chapitre 5 :	Relations entre DEA et les méthodes multicritères	132
5.1	Relations DEA et MCDA	132
5.1.1	Un classement des alternatives basé sur DEA	132
5.1.2	Une approche interactive basée sur DEA	135
5.1.3	Equivalence entre DEA et MCDA	138
5.2	Relations DEA et MOLP	139
5.3	Tentative de méthode de génération des solutions efficaces dans un problème MOBLP à l'aide de DEA : l'article de Liu et al.	140
5.3.1	Propriété de base	141

5.3.2	Principe de la méthode	141
5.4	Conclusion et commentaires	145

Partie II :Contributions théoriques **146**

Chapitre 6 : Relations entre la Pareto optimalité en MOILP et la DEA efficacité **148**

6.1	La Pareto optimalité en MOILP	148
6.2	Comparaison entre BCC efficacité et Pareto optimalité	151
6.3	Illustration	157
6.4	Cas particulier de MOILP avec des contraintes d'égalité	159
6.5	Conclusion et commentaires	160

Chapitre 7 : Méthode de résolution MOILP : méthode interactive DEA-GP **162**

7.1	Principe général de la méthode	162
7.2	Le processus de la méthode	164
7.3	Illustration de la méthode	166
7.4	Commentaires et perspectives	170

Chapitre 8 : Modèle d'affectation multicritère de ressources additionnelles basé sur DEA **171**

8.1	Objectifs	171
8.2	Modélisation du problème MOILP-DEA	172
8.2.1	Détermination des unités de référence et estimation de la fonction "technique" d'amélioration des rendements	172
8.2.2	Détermination des valeurs de rendement d'échelle	174
8.3	Modèle mathématique : MOILP-DEA	175
8.3.1	Contraintes de disponibilité des ressources	175
8.3.2	Les fonctions objectifs	175
8.3.3	MOILP-DEA	176
8.4	Illustration	176

8.5 Conclusion et perspectives	179
--	-----

Partie III : Applications DEA aux systèmes de l'enseignement de base, de la santé et à quelques entreprises au Burkina Faso 180

Chapitre 9 : Analyse des performances du système de l'enseignement de base du Burkina Faso 182

9.1 Objectifs , motivations et politique éducative au Burkina Faso	183
9.2 Etude de cas 1 : mesures des efficacités de performance et de changements de performance des directions régionales et provinciales en 2002 et 2003	188
9.2.1 Modèles, variables et données	188
9.2.2 Résultats, analyses des efficacités de performance et de changements de performance des directions régionales et des provinciales en 2002 et 2003	192
9.2.3 Conclusion et commentaires	204
9.3 Etude de cas 2 : mesures des efficacités de performance et de changements de performance des directions provinciales en 2004 et 2005	205
9.3.1 Modèles, variables et données	205
9.3.2 Résultats et analyses des efficacités de performance des provinces en 2004 et 2005	210
9.3.3 Conclusion et commentaires	220
9.4 Etude de cas 3 : mesures des efficacités de performance et de changements de performance des provinces de 2002 à 2005	220
9.4.1 Modèles, variables et données	220
9.4.2 Résultats et analyses des changements de performance des provinces de 2002 à 2005	222
9.5 Conclusion et perspectives	229

Chapitre 10 : Analyse des performances du système sanitaire du Burkina Faso 235

10.1 Objectifs et motivations	235
10.2 Indicateurs de performance du système national de la santé	236
10.3 Etude de cas 1 : mesure des efficacités de performance et de change- ments de performance des régions sanitaires en 2003 et en 2004	239
10.3.1 Modèle, variables et données	239
10.3.2 Résultats et analyses des efficacités de performance des régions sanitaires en 2003 et en 2004	241
10.4 Etude de cas 2 : mesure des efficacités de performance et de change- ments de performance des districts sanitaires en 2003 et en 2004	244
10.4.1 Modèle, variables et données	244
10.4.2 Résultats et analyses des efficacités de performance des districts sanitaires en 2003 et en 2004	246
10.5 Conclusion et perspectives	250
Chapitre 11 : Analyse des performances de quelques entreprises au Burkina Faso	251
11.1 Mesure des performances des entreprises	252
11.2 Estimation de la relation entre productivité et efficacité technique	257
11.3 Conclusion et commentaires	267
Chapitre 12 : Conclusion générale et perspectives	269
12.1 Synthèse	269
12.2 Contribution à la recherche et commentaires	269
12.3 Perspectives et recommandations	270
12.3.1 Perspectives	270
12.3.2 Recommandations	271
Bibliographie	287

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Introduction

Pour mieux expliquer les objectifs, les motivations et les intérêts de ce travail de recherche, il nous semble très utile de revenir sur le sens même de la discipline, “Recherche Opérationnelle”, à laquelle nous faisons appel, et ses champs d’application. Nous retiendrons quelques phrases et résumés définissant très bien la recherche opérationnelle et l’aide à la décision. La Recherche Opérationnelle (R.O.) “moderne” ¹ connaît ses premières applications publiées et bien exploitées à partir de la deuxième guerre mondiale. “En 1940 Sir P. Blackett est appelé par l’état major britannique pour diriger la première équipe de R.O., pour l’optimisation des problèmes d’implantation des radars de surveillance”. Recherche Opérationnelle ou en anglais “*Operations Research*” (notamment aux USA) ou encore “*Operational Research*” a donc une signification d’origine militaire : “O” pour Opérations militaires et “R” pour Recherches.

“En 1947, G. B. Dantzig propose et diffuse la méthode du simplexe qui permet de résoudre les problèmes de programmation linéaire” (cf. [97]). Aujourd’hui on trouve plusieurs réseaux ou associations des chercheurs en R.O. qui promeuvent la recherche et l’application de la R.O. comme outils incontournable pour l’aide à la décision. Parmi ces réseaux et associations nous citons : “*International Federation of Operational Research Societies (IFORS)*”, “*Institut For Operations Research and Management Science (INFORMS)*”, “*Association of the European Operational Research Societies (EURO)*”, la *Société britannique de R.O. (O.R.S)*, l’*Association Française de R.O. (ROADEF)*, l’*Association Belge de R.O. (ORBEL)*, le *Réseau de l’Ouest et du Centre de l’Afrique pour la R.O. (ROCARO)*, les *Sociétés Sud Africaine, Marocaine, Egyptienne de R.O.*, etc.

¹Philippe Chrétienne 2^{èmes} rencontres des Sciences et Technologies de l’Information du 24 au 26 octobre 2005 ISIMA, CLERMONT-FERRAND

INFORMS propose la définition de la R.O. en se posant tout simplement la question “*What OR is ?*” Pour répondre à cette question, INFORMS considère la R.O. comme “*la discipline d’application des méthodes analytiques avancées pour l’aide à la prise de meilleures décisions*”. En employant des techniques telles que la modélisation mathématique pour analyser des situations complexes, la R.O. donne aux exécutifs la “puissance” de prendre des décisions plus efficaces et d’établir des systèmes plus productifs.

EURO se pose la même question à savoir “*what is Operational Research ?*”. Pour cette association, la R.O. peut être décrite comme “*l’approche scientifique à la solution des problèmes dans la gestion des systèmes complexes*”. “*La R.O. est la discipline des méthodes scientifiques utilisables pour élaborer de meilleures décisions.*”² La recherche opérationnelle peut être donc définie comme l’ensemble des “*méthodes et techniques rationnelles ou scientifiques*” d’analyse et de synthèse des phénomènes d’organisation utilisables pour “*élaborer de meilleures décisions*”. Ainsi par la mathématisation et l’analyse des situations (de l’organisation du monde réel) aussi complexes qu’elles soient, la R.O. constitue une science pour l’aide à la décision et le management. Elle fournit, grâce à l’amélioration des techniques et moyens de calcul informatique, des outils efficaces incluant les méthodes de la simulation informatique, de l’optimisation, des probabilités et statistiques pour l’aide à la décision. Elle tente de définir quelles sont les meilleures stratégies de décision en tenant compte des facteurs importants. Elle permet de mesurer les risques de certaines alternatives de décision et permet d’implémenter des systèmes automatiques et interactifs d’aide à la décision comme l’intelligence artificielle ou les systèmes interactifs d’aide à la décision. En somme, la R.O. permet de mathématiser les processus de prise de décision par la formulation de modèles conceptuels qui sont utilisés pour analyser de façon structurelle et formelle les situations complexes :

- la mathématisation des processus de prise de décision intègre une étape de modélisation du problème. Cette étape permet une analyse et une meilleure compréhension des objectifs, des préférences du décideur, des contraintes (physique, sociale, économique, financière, politique, etc.) du problème. Modéliser dans ce contexte consiste à décrire

²Jean-Charles Billaut Président de la ROADEF en 2006 www.roadef.org, Recherche Opérationnelle et Génie Industriel

de façon logique et raisonnable, par des équations ou inéquations mathématiques les formes, les structures, le fonctionnement et l'organisation du système dans le contexte énoncé.

- il y a une étape de la considération de toutes les solutions possibles ou instances possibles de décision. Cette étape est une étape de résolution du problème formulé. Cette résolution est faite grâce aux méthodes mathématiques généralement schématisées sous forme d'algorithmes implementés (méthodes exactes, heuristiques, métaheuristiques, etc.)
- une autre étape, non moins importante, est l'étape d'évaluation et d'interprétation des résultats. Il convient généralement d'effectuer une analyse de robustesse et de sensibilité des solutions proposées.

Dans un processus de décision d'autres étapes peuvent s'ajouter et être reliées ou inter-agir.

B. Roy définit l'aide à la décision comme *“l'activité de celui qui, prenant appui sur des modèles clairement explicités mais non nécessairement complètement formalisés, aide à obtenir des éléments de réponse aux questions que se pose un intervenant dans un processus de décision, éléments concourant à éclairer la décision et normalement à prescrire, ou simplement à favoriser, un comportement de nature à accroître la cohérence entre l'évolution du processus d'une part, les objectifs et le système de valeurs au service desquels cet intervenant se trouve placé d'autre part”*. Il considère que la R.O. prend appui sur la science de nature à éclairer les décisions et à conduire les processus de décision dans les systèmes organisationnels. La R.O. et l'aide à la décision sont deux faces d'une pièce de monnaie³, l'aide à la décision est à la fois une application et une activité de la R.O. L'aide à la décision fait ressortir ce “qui est objectif de ce qui l'est moins” – délimitation de la forme du problème à partir de la raison, elle contribue à construire logiquement la structure et la forme du problème, à construire un modèle scientifique et un algorithme, et à proposer des conclusions efficaces qui sont des stratégies offrant de meilleures décisions relativement à l'énoncé décrit par le modèle.

³B. Roy, conférence ROADEF 2006

“Life itself is a matter of OR” clame l’EURO, et son président en exercice A. Tsoukias ⁴. Ceci traduit très bien la diversité et la complexité des domaines d’application de la R.O. Nous vivons des situations fréquentes des choix et des décisions dans la vie quotidienne comme : prendre un repas, la manière de s’habiller, le nom à donner à son enfant, le chemin à emprunter pour aller au travail, ce que l’on va faire en famille le week-end, les projets, accepter ou non un contrat, voter tel ou tel candidat, le choix de la filière d’étude, etc. Les domaines de la R.O. sont très diversifiés puisque l’objet même de la R.O. consiste à *“résoudre scientifiquement les problèmes d’optimisation liés aux organisations du monde réel”* ⁴. Elle comprend donc toutes les approches scientifiques pouvant aider à mathématiser une situation réelle de décision. On trouve des applications de la R.O. dans les organisations du monde réel comme l’optimisation dans les télécommunications, l’affectation et la localisation des ressources, la gestion des horaires du personnel et l’élaboration d’emplois du temps, le choix du meilleur partenariat, l’analyse des performances, l’évaluation des politiques publiques, la théorie du choix social, l’ordonnancement des employés, la localisation de nouveaux centres de soins de santé, la stratégie d’intervention pour les préventions, l’implantation de nouvelles écoles, la planification et l’ordonnancement de tâches, la gestion de stocks et de la production, la planification pour l’industrie, l’optimisation des transports et de la chaîne logistique, la gestion du trafic aérien ou ferroviaire benchmarking, l’intelligence artificielle, etc.

Pour toutes ces applications, la R.O. dispose de certains outils scientifiques comme :

- les mathématiques appliquées : optimisation, probabilités et statistiques, algèbre, théorie des graphes, théorie des jeux, théorie de décision, etc. ;
- l’informatique : algorithmique, complexité, etc. pour la résolution des problèmes grâce à l’implémentation des algorithmes conçus.

La R.O. fait parfois recours à d’autres sciences comme l’économie, la sociologie, la psychologie, etc. Pour mieux découvrir la R.O. et ses domaines d’application, le lecteur peut consulter les liens des sites de INFORMS, IFORS, EURO ⁵.

⁴Rapport d’activité de l’EURO

⁵ www.informs.org ; www.scienceofbetter.org ;
www.euro-online.org ; www.ifors.org

1.2 Problématique du développement durable au Burkina Faso : le Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté

Nous décrivons le contexte de la problématique du développement durable qui contient nos sources principales de motivation. Sur le plan mondial les principaux événements qui ont marqué l'engagement des pays pour le développement durable, sont : la création de la commission mondiale de l'environnement et du développement par l'Assemblée Générale des Nations Unies (Commission Brundtland, 1983) ⁶ ; la publication du rapport final *“Notre avenir à tous”* (Commission Brundtland, 1987) ; la création de l'Institut International du Développement Durable (1990) pour la promotion du développement durable dans les décisions ; la Conférence des Nations Unies sur l'environnement et le développement, le *“ sommet de la terre ”* et l'élaboration de l' *“ Agenda 21 ”* ⁷ (Rio de Janeiro, Brésil, 1992, 3 –14 juin) ; la mise en place des 8 Objectifs du Millénaire pour le Développement durable (OMD) (New York, USA , 2000) ; le Sommet mondial pour le développement durable (Johannesburg, Afrique du Sud, 2002, 26 août au 4 septembre). Sur le plan national Burkinabé, les principaux événements qui caractérisent ses engagements, sont : l'adoption de la *“Lettre d'Intention de Politique de Développement Humain Durable (LIPDHD)”* (1995) ; l'adoption du rapport *“Prospective Burkina 2025 ”* (1999) sur la vision du développement du pays à l'horizon 2025 ; l'adoption du *“Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté (CSLP)”* (première version, 28 février 2000 et version révisée, en 2002) ; la mise en place du *“programme d'actions prioritaires pour la mise en œuvre du CSLP (PAP)”* (janvier 2004).

Au Burkina Faso comme tout autre pays ayant opté pour le développement durable, les concepts et perspectives de développement, les champs prioritaires sont définis pour répondre aux objectifs définis dans l' *“ Agenda 21 ”*. Ce type de développement est défini comme le développement qui *“ répond aux besoins du présent sans compromettre la capacité des générations futures de répondre aux leurs ”*. Par *“ besoins”* on entend ceux fondamentaux : l'alimentation, l'emploi, l'énergie, l'eau, l'hygiène (CSLP) [1].

⁶Commission présidée par Madame Gro Harlem Brundtland, premier ministre de la Norvège

⁷ programme commun de développement pour le 21^{ème} siècle

Ce concept de “*besoins*” considéré très primordial par le Burkina Faso, concerne surtout ceux des plus démunis à qui il convient d’accorder la plus grande priorité (CSLP). Il s’agit de “ *garantir la sécurité humaine à tous les Burkinabé par rapport notamment aux besoins primaires comme l’éducation et la santé* ” [2] : la sécurité économique (l’accès à l’éducation, à la formation professionnelle, l’accès à un emploi rémunérateur) ; la sécurité alimentaire (l’alimentation de base, l’accès à l’eau potable) ; la sécurité sanitaire (l’accès aux soins médicaux préventifs ou curatifs) ; la sécurité environnementale (la préservation d’un environnement sain pour un cadre de vie meilleure) et la sécurité individuelle et politique pour tous les Burkinabé. La politique de développement durable du pays, inscrite dans le CSLP, consiste à définir les priorités de l’État relativement aux besoins de la population ; les principes, les axes stratégiques de développement durable et les objectifs attendus ; la promotion de l’équité par une croissance fondée sur l’équité ; la promotion de la bonne gouvernance ; l’amélioration de la qualité de vie et du bien-être ; une gestion rationnelle des ressources naturelles ; la prise en compte de la dimension sous-régionale ; la dimension genre ; le recentrage du rôle de l’Etat ; la suppression des disparités régionales ; etc. Elle consiste également à , accroître le produit intérieur brut par habitant d’au moins 4% par an ; ramener l’incidence actuelle de la pauvreté à moins de 35% et à accroître l’espérance de vie à au moins 60 ans, à l’horizon 2015.

D’une façon générale, les principes du développement durable aussi bien sur le plan international que national, intègrent les dimensions économique (croissance économique), sociale (bien-être social et équité), culturelle et environnementale (protection de l’environnement).

Dans le rapport “ *Notre avenir à tous* ” on peut identifier de façon globale les différentes stratégies de développement durable à l’échelle mondiale surtout par les moyens de mise en œuvre préconisés dans l’ “ *Agenda 21* ”. On peut y trouver : les ressources et mécanismes financiers ; le transfert de techniques écologiquement rationnelles et coopération internationale ; la science au service d’un développement durable ; la promotion de l’éducation, de la sensibilisation du public et de la formation ; les instruments institutionnels et juridiques adaptés, et l’information.

Au niveau national, le contexte et les différents axes stratégiques de développement sont

inscrits dans le document CSLP et dont la stratégie globale consiste à relever le déficit de la pauvreté par sa réduction sans condition, puisque le pays connaît un énorme retard sur le développement humain avec un indicateur de développement humain durable (IDH) de 0.317 en 2003 ⁸. Ces différents axes stratégiques sont [1], **(1)**, *accélérer la croissance et la fonder sur l'équité* ; **(2)**, *garantir l'accès des pauvres aux services sociaux de base et de la protection* ; **(3)**, *élargir les opportunités en matière d'emploi et d'activités génératrices de revenus pour les pauvres dans l'équité* et **(4)**, *promouvoir la bonne gouvernance* .

Dans le PAP, on peut retenir quelques programmes prioritaires comme ceux pour, *la consolidation de la stabilité macro-économique* ; *l'amélioration de la compétitivité de l'économie et la réduction des coûts des facteurs* ; *le soutien aux secteurs productifs* ; *l'accès des pauvres aux services d'éducation* ; *l'accès des pauvres aux services de santé et de nutrition – lutte contre le VIH/Sida* ; *l'accès des pauvres à l'eau potable et à l'assainissement – lutte contre la pollution* et pour *la gouvernance économique* .

Nous avons souligné ces programmes et sous-programmes de développement parce que de part leurs objectifs globaux bien formulés, on peut les appliquer en utilisant les modèles multicritères. L'une des stratégies de développement est le processus de décentralisation et la gestion des terroirs par les programmes de développement rural décentralisé. Cet axe stratégique de développement constitue pour certains spécialistes ⁹ un moyen incontournable de développement durable pour le Burkina Faso. Pour d'autres, le développement du Burkina Faso passe nécessairement par le développement agricole, comme le coton, le soja, etc. pour lutter contre la pauvreté. Pour promouvoir une agriculture durable et intensive, une conférence ministérielle s'est tenue sur l'utilisation et l'introduction de la biotechnologie pour l'intensification de l'agriculture au Burkina Faso ¹⁰. Il faut ajouter aux différentes stratégies la nécessité d'avoir des méthodes efficaces d'analyse, de suivi et d'évaluation des politiques de développement durable notamment l'évaluation des performances et/ou d'efficacité des programmes nationaux ou sectoriels de

⁸Source PNUD : Rapport mondial sur le développement humain 2005

⁹Jean Sibiri ZOUNDI : Décentralisation au Burkina Faso, (17 juillet 2002)

¹⁰Cette conférence s'est tenue du 21 au 23 juin 2004 sous le thème "*l'exploitation de la science et de la technologie pour accroître la productivité agricole en Afrique : perspectives en Afrique de l'Ouest*"

développement durable. C'est à ce titre, que nous voyons l'importance incontestée de l'application de la R.O. comme outil efficace :

- grâce aux méthodes de mesure des performances des systèmes de production (production des services ou biens sociaux, économiques, environnementaux, etc.) que constitue l'approche “*Data Envelopment Analysis*” (DEA).
- grâce aussi à d'autres types de méthodes, par exemple d'aide à la décision multicritère, pouvant rendre flexibles, formelles et mesurables les décisions ou stratégies de développement.

1.3 Objectifs et motivations

Notre objectif dans ce travail de recherche n'est pas de faire une étude sur la théorie de la décision ni de faire une hypothèse sur le type idéal de décision pour le développement durable. Nous pouvons avancer l'hypothèse qu'un développement durable doit pouvoir “*accroître la cohérence entre l'évolution du processus et les objectifs*”, de plus, “*l'évaluation, mode d'appropriation du développement durable, doit faire l'objet d'une démarche coopérative*”, (A. Boutaud). Trouver une “*démarche coopérative*” pour le processus de décision constituerait une aide précieuse pour les décideurs politiques ou autres et donc l'approche DEA, ainsi que les méthodes multicritères peuvent servir d'outils efficaces d'aide à la décision des politiques de développement durable qui exigent la prise en compte simultanée à tous les niveaux, des dimensions économiques (croissance économique), sociale (bien être humain) et environnementale (impact environnemental et écologique), et tous “*sur un même plan d'égalité*” (A. Boutaud). La problématique de décision politique de développement durable est un problème d'optimisation (M. Lehtonen) des objectifs conflictuels – le besoin de profit pour les acteurs industriels ou économiques, la protection environnementale pour les écologistes (ce qui réduit l'activité économique) et finalement, le besoin de sauvegarde de l'intérêt général ou l'équité sociale et économique.

L'objectif général de ce travail de recherche est de proposer une méthodologie d'aide à la décision dans le “*Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté*” au Burkina Faso,

en utilisant des approches de recherche opérationnelle. Nous proposons donc une méthodologie pouvant fournir un système interactif d'aide à la décision aux programmes de développement et de réduction de la pauvreté, notamment les programmes de développement des secteurs sociaux et prioritaires que sont l'éducation et la santé. Rendre flexibles la gestion, le suivi et la planification des programmes, des projets ou des activités de développement, en permettant des analyses multicritères de performances, est un de nos objectifs spécifiques prioritaires, recherchés dans ce travail de recherche. Nos objectifs spécifiques entrent tous dans le cadre d'éclairer les décideurs, en intégrant plusieurs facteurs de production et plusieurs facteurs résultants pour répondre aux exigences du développement durable. La définition même du développement durable, nous conforte sur les objectifs recherchés, puisque les performances d'une activité de production doit tenir compte du cadre social, du cadre environnemental, du cadre économique. C'est ainsi que notre travail, intègre dans les mesures de performances de multiples facteurs indicateurs moyens et de multiples facteurs indicateurs rendements, des facteurs aussi bien sociaux, économiques, qu'environnementaux.

Les objectifs que nous nous sommes fixés pour commencer ce travail de recherche, sont motivés par le besoin d'étudier la problématique du développement durable au Burkina Faso, caractérisée par le CSLP, en y apportant des méthodologies d'aide à la décision.

Pour le cas particulier de la lutte contre la pauvreté au Burkina Faso, ces méthodes de R.O. peuvent être utilisées et appliquées notamment pour :

- **le développement du système national de l'éducation** : avec l'objectif d' "*accroissement du taux de scolarisation primaire et d'alphabétisation*" par l' "*expansion de l'offre éducative*". La R.O. peut permettre d'optimiser les opérations de construction et d'équipement de nouvelles classes, de bureaux d'inspection, des centres d'alphabétisation, des forages, des latrines scolaires, des logements de maîtres, etc. Les ressources de l'Etat étant limitées, le suivi et l'évaluation des activités de développement de ce secteur peuvent constituer un outil efficace pour améliorer les efficacités de production scolaire des différentes directions de l'enseignement à travers tout le pays.
- **le développement du système national de santé** : pour un développement accéléré du

système de santé au Burkina Faso, le gouvernement a mis en place le programme “ *Accès des pauvres aux services de santé et de nutrition- Lutte contre le VIH/Sida*”. “ *Dans la perspective de l’amélioration des indicateurs de santé des pauvres et de réduction des coûts des services de santé,*” des stratégies sont adoptées comme l’ “*accroissement de la couverture sanitaire(...), l’opérationnalisation des districts sanitaires, le développement des services à base communautaire* ”. Les performances de ces activités et programmes de développement caractérisent la santé du système, ce qui montre l’importance des analyses de ces performances par des outils mathématiques.

• **la compétitivité de l’économie** : améliorer la qualité, le rendement et la productivité des entreprises avec une gestion efficace des facteurs de production, en éliminant le gaspillage, en réduisant les coûts de production.

Un processus de décision, intégrant les besoins des différents acteurs dans la formulation d’un modèle d’aide à la décision, accroît l’équité et la neutralité des compromis représentés par les solutions proposées.

1.4 Méthodologies

Motivés par cette problématique de lutte contre la pauvreté au Burkina Faso, nous nous sommes posés la question : “quelles aides les méthodologies de R.O. peuvent apporter ? ”

Les deux méthodologies que nous avons retenues sont celle du “*Data Envelopment Analysis*” (DEA) et l’optimisation multicritère qui ont par ailleurs des liens étroits entre elles.

La première, DEA, consiste à utiliser des méthodes mathématiques de mesure et d’analyse des performances des unités de production. Les modèles DEA que nous utilisons pour les mesures de performances ont des avantages certains, ils permettent :

– de savoir ce qui est efficace ou ne l’est pas pour des unités sous contrôle c-à-d. ils permettent de savoir ce qui marche ou ne marche pas, et les raisons ou sources pour

lesquelles il en est ainsi ;

- d’évaluer des programmes de développement sans des *a priori* sur les jugements de valeurs des indicateurs de suivi et d’évaluation ;
- d’étudier les performances sans la connaissance *a priori* des relations entre les facteurs de production et les produits résultants ;
- d’analyser les performances en intégrant de multiples facteurs de productions et de multiples facteurs produits. Par exemple, les performances de l’éducation intègrent de multiples facteurs de production comme la disponibilité de classes, des manuels scolaires et des enseignants (leur compétence et leur motivation), la qualité de gestion des écoles, l’efficacité des financements publics.

Ces modèles donnent une autre vision du “*suivi et de l’évaluation*” des activités, des projets et des programmes de développement, et permettent aux pouvoirs publics, aux gestionnaires ou à la société civile, de meilleurs outils pour améliorer les productions de services ou biens, de planifier ou d’affecter efficacement les ressources et surtout de fournir un indicateur global d’efficacité de production aux partenaires financiers et techniques, et les différentes parties prenantes.

La seconde, l’optimisation multicritère, permet notamment d’affecter au mieux des ressources en tenant compte de différents critères. Ces critères peuvent représenter les points de vue de différents acteurs ou, comme dans les problèmes traités dans notre travail, différents indicateurs de performance des différentes unités de production. Cette méthodologie multicritère est logiquement liée à la méthodologie DEA et permet d’intégrer les préférences du (des) décideur(s) dans des approches interactives. En particulier elle peut servir à fournir un outil interactif de simulation de l’affectation des ressources aux activités des unités, en tenant compte des efficacités des différentes unités de production.

L’axe privilégié de notre travail de recherche est donc l’analyse des performances et de leurs variations dans le temps, des unités de production de biens ou services. Ces outils méthodologiques que nous décrirons (Partie I), développerons (Partie II) et appliquerons (Partie III) dans ce travail, peuvent constituer des atouts pour les décideurs, puisque permettant à ces derniers d’avoir des informations capitales, sur l’aptitude d’une unité

(direction, activité, projet, programme, etc.) à obtenir des rendements optimaux à partir d'un ensemble de facteurs de production ou ressources ; ou encore sur l'aptitude d'une unité à utiliser le moins possible de facteurs de production pour un ensemble de productions donné. Les approches proposées dans ce travail, peuvent aider à suivre la gestion et le contrôle de l'exécution des programmes sectoriels ou nationaux de lutte contre la pauvreté.

1.5 Organisation de la thèse

La thèse est organisée en trois parties : la première consiste en le cadre de notre travail par une revue détaillée de la littérature ; la seconde présente des développements théoriques et la troisième des applications.

- **Partie I** : dans cette partie nous décrivons les fondamentaux de la méthodologie et théorie de l'approche DEA et nous rappelons quelques concepts de base de la programmation mathématique multicritère. Cette partie contient 4 chapitres :

- *Chapitre 2* : nous décrivons les principes fondamentaux et les différents modèles de base, leurs extensions et des variantes de la méthode DEA. Nous illustrons les différents modèles de base par quelques exemples numériques.

- *Chapitre 3* : dans ce chapitre les notions fondamentales, souvent économiques, pour les interprétations des résultats donnés par les modèles du chapitre 2, sont présentées et illustrés avec des exemples.

- *Chapitre 4* : quelques concepts, théorèmes de base et méthodes illustratives sont présentés pour la programmation multicritère.

- *Chapitre 5* : une brève revue de littérature sur les travaux décrivant les relations entre la méthode DEA et l'approche multicritère est présentée.

- **Partie II** : cette partie contenant trois chapitres décrit des propriétés nouvelles liant l'approche DEA et la programmation mathématique multicritère en variables entières (MOILP) et des nouvelles voies exploratoires sont proposées pour la résolution de problèmes MOILP.

- *Chapitre 6* : des propriétés nouvelles sur les relations entre l'approche DEA et les pro-

blèmes MOILP, sont présentées. Nous décrivons des propriétés et les illustrons par des exemples. Ces travaux (de ce chapitre) ont fait l'objet d'une publication dans *EJOR* (*European Journal of Operational Research*).

– *Chapitre 7* : une méthode basée sur DEA et l'approche de *Goal Programming* est décrite pour une résolution interactive de problèmes MOILP.

– *Chapitre 8* : nous décrivons un modèle basé sur DEA pour un problème d'affectation multicritère de ressources additionnelles.

• **Partie III** : nous présentons dans une perspective de développement durable des applications faites utilisant l'approche DEA aux secteurs de l'enseignement de base, de la santé et de quelques entreprises.

– *Chapitre 9* : trois études de cas sur l'enseignement de base au Burkina Faso pour 4 années (2002 à 2005) sont présentées. Nous décrivons les variables et les données utilisées, les résultats et des analyses et commentaires des résultats sont fournis. Une de ces études de cas fait l'objet d'un article soumis pour publication.

– *Chapitre 10* : une étude de cas sur les performances du système national de santé est présentée, nous décrivons les variables, les données et quelques analyses et commentaires des résultats.

– *Chapitre 11* : des études de cas – préliminaires – de quelques entreprises par secteur d'activité, au Burkina Faso sont présentées.

En conclusion, notre travail de recherche, nous a fourni trois types de résultats :

- premièrement, nous avons approfondi et fourni des résultats théoriques permettant de conforter certaines théories et de corriger des erreurs existantes ;
- des voies et perspectives de recherche en proposant des nouvelles méthodologies ;
- des études de cas qui sont des applications utilisant les approches décrites. Pour ce faire, nous avons utilisé des données disponibles dans des ministères différents du Burkina Faso pour présenter en situation réelle les efficacités de performance des différentes directions décentralisées (secteurs de l'éducation et de la santé) ou des sociétés par type d'activité.

Partie I

***“Data Envelopment Analysis” :* méthodologie, théorie, interprétation et relations avec l’optimisation multicritère**

La méthode “*Data Envelopment Analysis (DEA)*” proposée par Charnes, Cooper et Rhodes (CCR) en 1978, permet de mesurer l’efficacité de production des unités d’un système de production, et offre un cadre de diagnostic des opérations de production de ces unités. Elle permet d’estimer la technologie de meilleure productivité, sur la base des observations des productions des différentes unités. L’avantage d’appliquer DEA dans des organisations de production est qu’elle permet de tenir compte, dans les analyses des performances, de multiples facteurs de production et de multiples facteurs produits résultants, sans connaissance préalable des relations qui lient ces facteurs. Adaptée pour s’appliquer à n’importe quel système de production, l’approche DEA donne des interprétations et des moyens d’évaluation des efficacités de production.

Un panorama des modèles DEA, leurs extensions et/ou variantes, est décrit dans le chapitre 2. Au chapitre 3, nous illustrons les interprétations qu’offre l’analyse avec DEA, du point de vue micro-économique.

L’approche multicritère – analyse ou programmation mathématique – est l’une des approches ayant connu un intérêt croissant depuis ces 30 dernières années. Nous rappelons au chapitre 4, quelques généralités sur la méthodologie multicritère, les concepts de base ainsi que quelques exemples de méthodes de résolution pour la problématique de “*Programmation Mathématique Multicritère*”.

Pour faire valoir l’intérêt que nous portons à ces deux types d’approche, “*Data Envelopment Analysis*” et méthodologie multicritère, nous rappelons au chapitre 5, les relations, déjà établies dans la littérature, entre leurs concepts respectifs.

Chapitre 2

Panorama de l'approche "*Data Envelopment Analysis*"

Tout d'abord la méthode "*Data Envelopment Analysis*" (DEA) proposée par Charnes, Cooper et Rhodes en 1978, est un outil de diagnostic des opérations de production d'unités d'un système de production donné. C'est une méthode efficace *a posteriori* des opérations de production de ces unités. La méthode DEA permet d'estimer la technologie de production d'un système de production par une fonction de production, sur la base des observations des productions des différentes unités qui le composent. L'efficacité de l'utilisation de l'approche réside dans la considération des facteurs importants de production d'un système donné. Ainsi, avant toute application de DEA, il est important que les facteurs de production soient bien définis et justifiables (acceptables par le décideur ou gestionnaire). L'approche DEA peut aussi être utilisée comme un outil d'allocation des ressources. Cependant, des critiques importantes sont émises à propos de certains modèles classiques DEA ; elles concernent la non prise en compte de la sensibilité des données ou leur imprécision. En effet, les modèles classiques DEA ne prennent pas en compte les erreurs d'information ou encore la sensibilité d'un facteur sur l'efficacité globale de productivité. Dès lors, certains travaux préconisent la prise en compte de la sensibilité des données (section 2.3.2), de la présence de données imprécises (section 2.3.6), etc. Pour le monde des organisations de production et des secteurs économiques ayant appliqué DEA, sa puissance et son efficience sont liées à sa capacité de tenir compte d'inputs et d'outputs "multiples sans pour autant avoir besoin de recourir à une forme fonctionnelle spécifique pour les relations entre" inputs et outputs ¹.

¹Revue Canadienne d'Investissement (été 2003) : à la recherche de l'alpha. L'investissement dans les fonds de couverture

2.1 Historique et concepts

Pour mieux comprendre les concepts et les modèles de l’approche “*Data Envelopment Analysis*” , il est important de revenir sur son historique et les motivations qui ont amené des chercheurs à développer cette approche. Dans cette section, nous ferons un bref historique dans la sous-section 2.1.1 et quelques définitions seront rappelées dans la sous-section 2.1.2 pour mieux comprendre le concept de l’approche DEA.

2.1.1 Historique

En 1957, Farrell publie l’article “*The measurement of productive efficiency*” dans “*Journal of the Royal Statistical Society*” [44]. Il fait remarquer que beaucoup de tentatives ont été faites pour résoudre le problème de mesure de l’efficacité productive d’une industrie, mais ces tentatives, bien que proposant des mesures exactes de tous les inputs ou outputs (ou de quelques inputs ou outputs), n’arrivent pas à combiner ces mesures en une mesure globale satisfaisante d’efficacité. Il fait ensuite remarquer que cet échec est dû au fait qu’on simplifie généralement la notion d’efficacité en la mesurant à partir tout simplement de la moyenne de productivité du travail. Pour résoudre ce problème de mesure d’efficacité, l’auteur propose la mesure d’efficacité technique (cf. chapitre 3). Il développe une méthode pour mesurer l’efficacité technique d’une firme d’une industrie dans le cadre de la production agricole des USA pour 48 Etats. Pour Farrell, cette mesure d’efficacité technique est susceptible de s’appliquer à n’importe quelle organisation productive, d’un atelier à une économie entière ². La méthode développée par Farrell propose de déterminer les firmes présentant une productivité efficace.

Avec la même préoccupation que Farrell, à savoir la mesure de l’efficacité technique, en 1978, Charnes, Cooper et Rhodes développent la méthode DEA et étendent le travail de Farrell, avec l’article “*Measuring the efficiency of decision making units*” [27]. Cette méthode permet de donner des interprétations simples des mesures d’efficacité tech-

²The measures developed are intended to be quite general, applicable to any productive organization from a workshop to a whole economy [44]

nique. Les auteurs développent une approche non paramétrique utilisant la programmation mathématique pour mesurer l'efficacité technique relative des unités de prise de décision ou "*Decision-Making Units (DMU)*" d'un système de production donné (firmes, agences, industries, etc.). C'est cet article qui a ouvert la voie à tout le courant de recherche DEA, particulièrement étendu aujourd'hui. Banker, Charnes et Cooper (1984) dans [13] proposent ensuite une extension du modèle de Charnes, Cooper et Rhodes en le généralisant de sorte à permettre de déterminer les efficacités d'échelle (cf. chapitre 3) en tenant compte des rendements d'échelle variables (décroissant, croissant ou constant). Ces notions de rendements d'échelle variables et leur détermination par l'approche DEA sont développées dans le chapitre 3.

Charnes, Cooper et Rhodes ont approfondi l'idée de Farrell "*motivé par le besoin de développer de meilleures méthodes et modèles pour l'évaluation de la productivité*" [35]. Farrell, dont le travail est la source d'inspiration de l'approche DEA, tente de proposer une méthode capable de s'appliquer à tout système de production pour l'analyse des activités en déterminant des mesures techniques de l'efficacité, étendant ainsi la notion de productivité à celle d'efficacité (de productivité). Les auteurs de DEA, (Charnes, Cooper et Rhodes) ont permis de mesurer ces efficacités techniques en passant d'un processus à input et output uniques à un processus à inputs et outputs multiples. Le principe étant que, pour le cas par exemple d'une firme utilisant un unique facteur input pour produire un unique facteur output, son efficacité technique est mesurée par le ratio input/output. Cette idée a donc été généralisée pour le cas d'une firme utilisant plusieurs facteurs inputs pour produire plusieurs facteurs outputs. Ce cas est bien entendu courant quand interviennent plusieurs facteurs inputs comme les ressources humaines, les ressources financières, les ressources physiques, etc. avec des résultats multiples. Par exemple, l'efficacité de production agricole doit tenir compte de la terre, de la main-d'œuvre, des ressources matérielles, etc., et aussi des résultats de production (récolte des produits agricoles : coton, mil, riz, commercialisable ou non commercialisable, etc.).

DEA détermine la technologie efficace de production par une fonction efficace de

production (cf. chapitre 3) à partir des données observées des inputs et des outputs en utilisant la programmation linéaire. Elle calcule ensuite les scores d'efficacité des différentes unités du système étudié. Cette fonction efficace de production déterminée par DEA est caractérisée par la frontière efficace de production dont l'approximation était la première préoccupation de Farrell. L'idée principale des auteurs Charnes, Cooper et Rhodes consiste à proposer une méthode permettant de rechercher un ensemble de poids qui conduit à l'efficacité maximale que peut atteindre une unité de production donnée. La mesure de l'efficacité calcule un indice d'efficacité à partir du rapport "outputs pondérés/inputs pondérés". Ce rapport est normalisé pour obtenir un indice compris entre 0 et 1. Une unité est d'autant plus efficace que son indice d'efficacité à une valeur proche de 1.

Les concepts d'efficacité technique permettent non seulement de caractériser les solutions efficaces— au moyen de la notion d'optimalité au sens de Pareto-Koopmans – mais aussi de mesurer l'intensité d'efficacité d'une solution non efficace par l'indice ou score d'efficacité de cette solution. L'approche DEA permet donc de mesurer les performances d'un ensemble d'unités (DMU) qui transforment de multiples facteurs inputs en multiples facteurs outputs. La méthode DEA n'exige pas la connaissance *a priori* ou la formulation explicite de relations fondamentales reliant les inputs des outputs. Charnes, Cooper et Thrall (1986) dans [28] caractérisent l'approche DEA comme une méthode qui *"essaye d'identifier les sources et les quantités d'inefficacité contenues dans les outputs et inputs générés par les entités contrôlées appelées DMU"*. Ce modèle peut être un outil efficace pour l'aide à la décision en tenant compte de plusieurs variables ou facteurs inputs et outputs et en mesurant les efficacités relatives des unités de prises de décision par les scores d'efficacité. En plus, l'approche DEA permet de trouver des unités efficaces de référence ou benchmarks ce qui permet dès lors d'ajuster au mieux le fonctionnement et le contrôle des différentes unités du système de production.

L'approche DEA a été appliquée à une multitude de contextes de recherche tant publics que privés. En 2002, G. Tavares dans [95] montrait que depuis la première publication de Charnes, Cooper et Rhodes en 1978 jusqu'en 2001, il y a eu plus de 3203

publications avec plus de 18000 pages, dans plus de 1259 journaux différents, avec plus de 2152 auteurs différents de plus de 49 pays avec environ 305 institutions différentes ! L'utilisation de DEA dans des applications ne cesse de prendre de l'importance dans tous les domaines où la notion d'efficacité ou de productivité est de rigueur. Ces récentes années ont connu une grande variété d'applications de DEA pour l'évaluation des performances de plusieurs types d'entités dans diverses activités, dans beaucoup de contextes et dans beaucoup de pays. Les statistiques montrent que la majorité des publications (plus des 3/4) viennent des pays anglo-saxons (USA avec plus de la moitié, la Grande Bretagne avec plus du quart, le Canada). Les principaux champs d'application qui ont constitué les activités de recherche pour les chercheurs appliquant la méthode DEA sont :

- les services financiers : les secteurs bancaires et assurances pour les mesures des performances des filiales, des agences, des succursales, des caisses populaires, etc. Ce type d'applications permet de déterminer les unités efficaces pouvant servir de références ou benchmarks.
- les services de soins de santé, cliniques et hôpitaux : pour l'évaluation des performances et la détermination des unités efficaces de référence (ou benchmarks) dans le domaine de la santé.
- l'éducation : pour les mesures de performance des unités du système éducatif (universités, départements, districts, directions décentralisées, etc.)
- les services publics : pour mesurer les performances des directions décentralisées ou déconcentrées des services publics, ou encore l'évaluation des politiques publiques.
- le service des transports
- le secteur agricole
- le secteur industriel
- etc.

L'approche classique DEA a connu des développements théoriques très approfondis pour affiner l'approximation de la frontière efficace de production. Les deux modèles

de base restent celui de Charnes, Cooper et Rhodes (section 2.2.1) et celui de Banker, Charnes et Cooper (section 2.2.2). Cependant, plusieurs modèles avec des formulations variées et diverses ont été proposés pour des cas particuliers de fonctions de production à estimer ou encore pour palier à certaines faiblesses de l'approche DEA. L'utilisation d'un modèle DEA dépend d'une part de la nature de la technologie de production qui est caractérisée par une fonction de production, d'autre part, de la préférence globale du décideur. Le décideur peut avoir une préférence à orientation-input ou à orientation-output. Une orientation-input consiste à accorder une attention sur le contrôle des inputs –utilisation des ressources– tandis que l'orientation-output porte l'attention sur le contrôle des outputs –efficacité de production ou encore les objectifs de rendements. En général, les modèles DEA diffèrent par les orientations (input ou output), le type de mesure (radiale, non-radiale, hyperbolique, etc.), la prise en compte ou non des rendements d'échelle (constants, variables).

Dans ce chapitre, nous décrirons d'abord ces deux modèles de base (section 2.2) et ensuite, les extensions les plus importantes de ces modèles (section 2.3). Trois variantes de ces modèles classiques seront enfin décrits (section 2.4).

2.1.2 Concepts de base de l'approche DEA

Pour mieux comprendre les concepts de base de l'approche DEA nous nous appuyons sur les quelques définitions suivantes.

2.1.2.1 Définitions

Définition . Inputs et Outputs

Un système d'organisation produit des biens et services appelés “outputs”. Ce sont des facteurs que les gestionnaires cherchent à améliorer. Cette amélioration passe par la définition des moyens et techniques capables de produire un effet positif. Ces moyens et techniques sont appelés “inputs”. En général, l'utilisation de l'approche DEA considère les outputs ou inputs mesurables par le décideur. Les inputs sont les facteurs intrants et les outputs sont les produits résultants, de production.

La notion d'efficacité au sens DEA, est basée sur l'une ou l'autre des définitions suivantes :

Définition . Extension de l'efficacité au sens Pareto-Koopmans (cf. [35, chapitre 1])

Une DMU est entièrement (100%) efficace si et seulement si aucun de ses facteurs “inputs” ou “outputs” ne peut être amélioré sans détériorer un autre facteur input ou output.

Définition . Efficacité relative(cf. [35, chapitre 1])

Une DMU est évaluée comme entièrement (100%) efficace sur la base de l'information disponible si et seulement si les performances des autres DMU ne prouvent pas que ses facteurs inputs ou outputs peuvent être améliorés sans détériorer un autre facteur input ou output.

Remarque . *La deuxième définition diffère de la première, dans la mesure où l'efficacité relative ne prend pas en compte toutes les possibilités mais uniquement les DMU existantes. Cette efficacité relative ne tient compte que de ce qui est observé et non de ce qui pourrait être observé théoriquement. Dans la plupart des applications de gestion ou de science sociale, les niveaux d'efficacité théoriquement possibles ne sont pas souvent connus. La deuxième définition permet de mesurer l'efficacité relative en tenant compte seulement de l'information “empiriquement disponible” (cf. [35, chapitre 1]).*

Définition . Ensemble de production

L'ensemble $\mathcal{P}$ des productions possibles est caractérisé par

$$\mathcal{P} = \{p = (x, y) : \text{avec les inputs } x \text{ qui peuvent produire les outputs } y\}$$

en utilisant la technologie de production du système étudié, noté $\mathcal{S}$.

L'utilisation de l'approche DEA dans un système de gestion peut être représentée par le schéma de la figure 2.1.

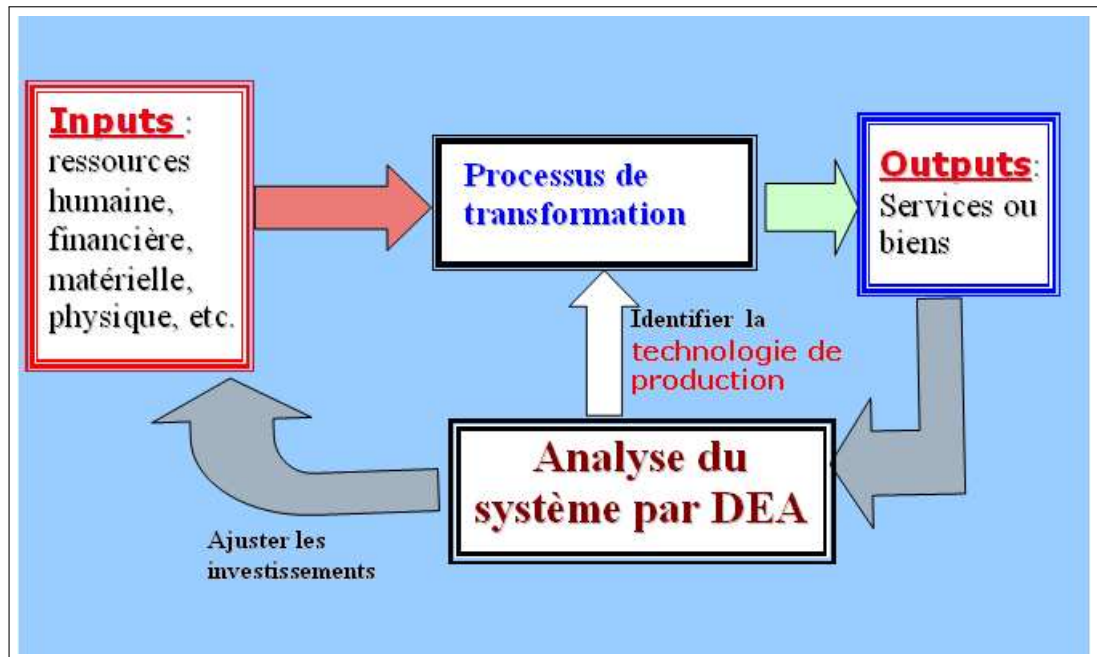


Figure 2.1 – Schéma d'un système de gestion intégrant DEA

Exemple . *Considérons l'exemple suivant (tableau 2.1) à input unique et output unique pour illustrer les notions de fonction de production ou technologie de production (ces notions seront détaillées au chapitre 3). Il s'agit d'un système à 9 DMU, chaque DMU utilise le même type d'input unique pour produire un même type d'output. Les données sont les suivantes.*

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Input x	1	2	3	4	4.8	5	6	6.6	7
Output y	10	25	36	44	40	50	54	52	55

Tableau 2.1 – Exemple de DMU

Ces DMU sont représentées sur la figure 2.2 avec la variable input en abscisse et la variable output en ordonnée.

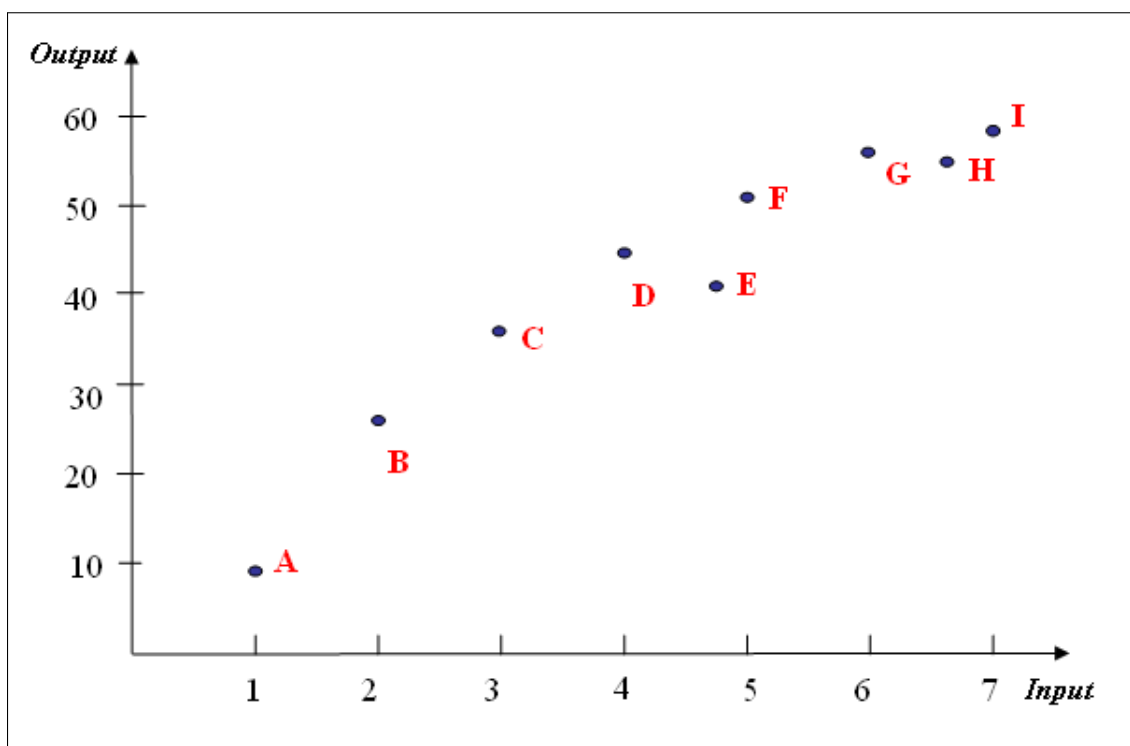


Figure 2.2 – Représentation des DMU dans l'espace input-output

Considérons que la technologie optimale de production suit la fonction de production dont la courbe est représentée sur la figure 2.3.

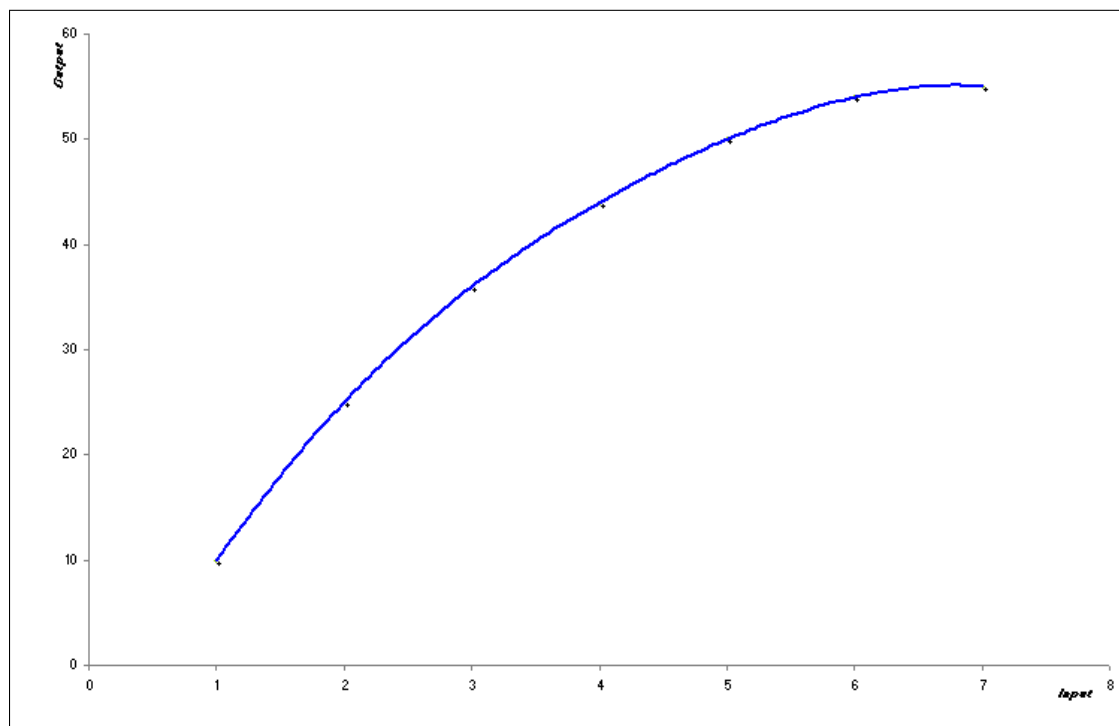


Figure 2.3 – Représentation de la fonction de production

La figure 2.4 ci-dessous illustre la répartition des DMU dans l'espace input-output. Cette figure présente la droite de régression linéaire obtenue à partir des différentes DMU présentées. Ainsi, si l'on utilise la régression linéaire pour estimer les efficacités des différentes DMU, on obtiendrait 5 DMU (B,C,D,F,G) "surefficaces", c-à-d. au dessus de la moyenne de l'ensemble et 4 DMU (A,E,H,I) non efficaces, c-à-d. en dessous de la moyenne. La droite de régression linéaire (ligne en trait plein, cf. figure 2.4) a pour équation

$$y = 6.9157113x + 10.391219, \quad R^2 = 0.8974955$$

avec R le coefficient de corrélation (régression faite en utilisant le logiciel Microsoft Office Excel 2003).

La courbe de régression logarithmique qui constitue une meilleure approximation de la frontière de production, donne elle 3 DMU (A,B,I) efficaces, c-à-d. sur la courbe, 4 DMU (C,D,F,G) "surefficaces", c-à-d. au dessus de la courbe, et 2 DMU (E,H) non efficaces. La courbe de régression logarithmique (ligne en pointillé, cf. figure 2.4) a pour équation

$$y = 9.8088507 \ln(x) + 23.18036, \quad R^2 = 0.9662154$$

avec R le rapport de corrélation (régression faite en utilisant le logiciel Microsoft Office Excel 2003).

Le concept de l'approche DEA est de déterminer les DMU efficaces et celles non efficaces en leur affectant des scores d'efficacité qui représentent des intensités d'efficacité. De plus, l'approche DEA détermine les sources et les écarts observés d'inefficacité.

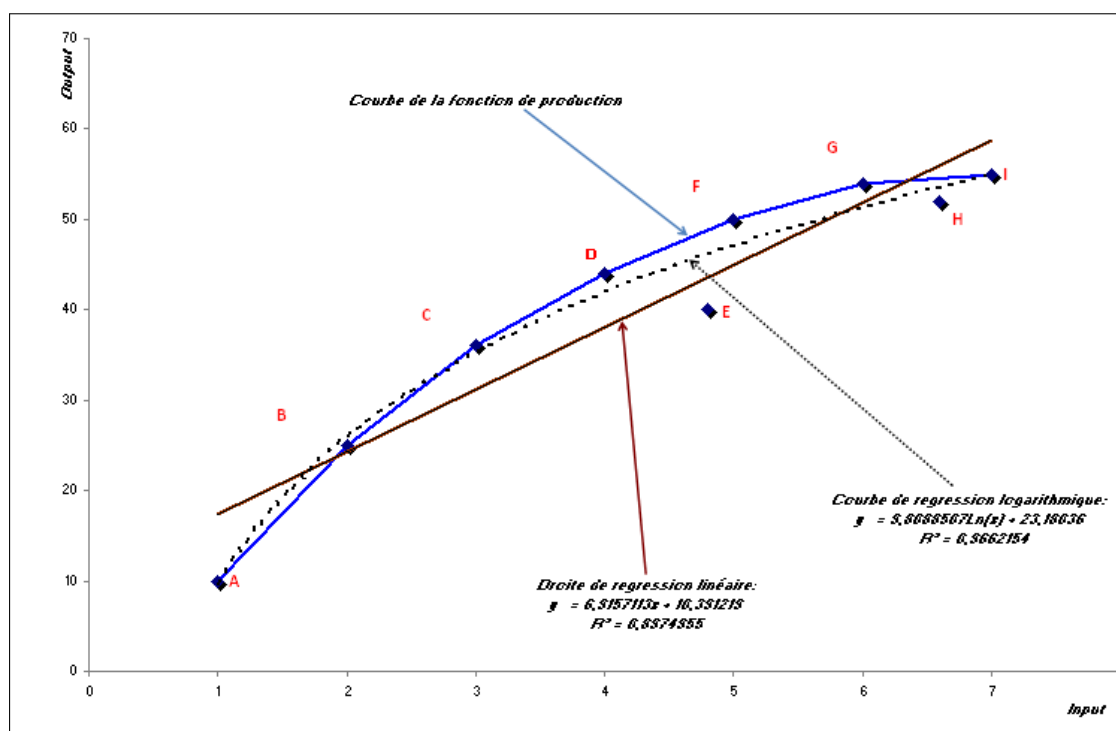


Figure 2.4 – Représentation des courbes de tendance (linéaire et logarithmique)

2.2 Modèles de base et interprétations

L'approche "Data Envelopment Analysis" est diversifiée par les différentes formulations mathématiques proposées pour approcher la frontière efficace de production (approximation de la fonction de production des unités du système). Néanmoins, on peut voir l'essentiel de l'approche DEA, sa philosophie, son concept et ses principes à travers les modèles fondamentaux que sont le modèle proposé par Charnes, Cooper et Rhodes en 1978, le premier modèle DEA que nous appellerons modèle CCR (section 2.2.1) et le modèle proposé par Banker, Charnes et Cooper en 1984, appelé modèle BCC (section 2.2.2). A partir de ces deux modèles de base, diverses extensions ont été introduites donnant lieu à d'autres formulations comme : l'analyse DEA multi-période ("Window analysis") (section 2.3.1), les modèles avec incorporation *a priori* de valeur de jugement (section 2.3.2), les modèles avec des facteurs non discrétionnaires (section 2.3.3), les modèles avec la présence de facteurs indésirables (section 2.3.4), les modèles avec des données catégorielles (section 2.3.5), les modèles avec des données imprécises (sec-

tion 2.3.6) ; ou encore d'autres variantes comme les modèles additif (section 2.4.1), multiplicatif (section 2.4.2), le modèle couramment appelé ("*Free Disposal Hull (FDH)*") (section 2.4.3).

Dans ce chapitre consacré aux modèles DEA, nous considérons un système de production $\mathcal{S}$ à n unités de prise de décision ou "*Decision Making Units (DMU)*". Les évaluations porteront sur ces DMU afin de mesurer leurs performances et celle du système $\mathcal{S}$. Chaque DMU du système utilise m différents facteurs "inputs" pour produire s différents facteurs "outputs". Les DMU seront indexés par $j, j = 1, \dots, n$. Les données observées x_{ij}, y_{rj} représentent les quantités respectives du facteur "input" $i (i = 1, \dots, m)$ utilisé et du facteur "output" $r (r = 1, \dots, s)$ produit par la DMU $j (j = 1, \dots, n)$. Les vecteurs des inputs et des outputs de la DMU $j (j = 1, \dots, n)$ seront notés respectivement par X_j et Y_j . La DMU sous évaluation sera notée d ; les données et les variables relatives à l'évaluation de la DMU d seront en plus indexées par d .

2.2.1 Modèles de Charnes, Cooper et Rhodes

Les modèles proposés par Charnes, Cooper et Rhodes en 1978 (cf. [27]) mesurent l'efficacité technique radiale à partir des informations et données précises sur les inputs et outputs.

2.2.1.1 Formes fractionnelles CCR

Le premier modèle DEA proposé par Charnes, Cooper et Rhodes (CCR) mesure l'efficacité d'une DMU d donnée comme le ratio maximum des "outputs" pondérés aux "inputs" pondérés avec la condition de normalisation qu'aucun ratio similaire n'excède l'unité. Les auteurs ajoutent comme condition supplémentaire sur les données observées, que les vecteurs des inputs et des outputs sont non nuls pour toute DMU et à composantes non négatives c-à-d.

$$X_j \neq 0, x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

$$Y_j \neq 0, y_{rj} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, n$$

La formulation suivante est donc proposée (cf. [27, 28]) :

$$\begin{aligned} \Theta^d = \max \quad & \frac{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \frac{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{ij}} \leq 1, & j = 1, \dots, n; \\ \frac{v_r^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \geq \varepsilon, & v_r^d \geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \\ \frac{\vartheta_i^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \geq \varepsilon, & \vartheta_i^d \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Cette forme est appelée forme fractionnelle ou ratio CCR à orientation input. Dans cette formulation les solutions à déterminer sont formées des variables v_r^d, ϑ_i^d qui sont associées respectivement au facteur “output” r et au facteur “input” i dans l’évaluation des performances de la DMU d . La formulation de Charnes, Cooper et Rhodes permet de mesurer l’efficacité de la DMU d en la comparant aux autres unités et à elle-même en recherchant le maximum de production possible avec le minimum de facteurs “input”. Les contraintes

$$\frac{v_r^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s \quad \text{et} \quad \frac{\vartheta_i^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m$$

permettent de déterminer des solutions strictement positives. En théorie, $\varepsilon > 0$ est un nombre infinitésimal non archimédien (cf. [14, 27, 28, 78]) c-à-d. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon \leq 1$. Lorsqu’il s’agit d’une implémentation numérique, on choisit arbitrairement ε un nombre suffisamment petit.

Remarque . Le problème (2.1) a une infinité de solutions optimales puisque si (v^d, ϑ^d) est solution optimale, alors $(\alpha v^d, \alpha \vartheta^d)$ l’est aussi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$.

Remarque . Dans la formulation de CCR (2.1), on peut remarquer que la condition d’efficacité au sens de Pareto-Koopmans est satisfaite si et seulement si $\Theta^d = 1$. En effet, à cause des contraintes dans la formulation à satisfaire, on a $\Theta^d \leq 1$; si $\Theta^d < 1$, alors il serait possible soit d’augmenter certains facteurs “outputs” soit de diminuer certains facteurs “inputs” ou les deux.

La formulation de CCR ci-dessus est connue sous le nom de la forme ratio ou fractionnelle CCR à orientation input. Dans cette formulation on maximise le rapport des outputs pondérés sur les inputs pondérés. La formulation inverse consiste à minimiser le rapport des inputs pondérés sur les outputs pondérés avec les mêmes contraintes.

$$\Phi^d = \min \frac{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}} \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{ij}}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rj}} \geq 1, & j = 1, \dots, n; \\ \frac{v_r^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}} \geq \varepsilon, & v_r^d \geq 0, \quad r = 1, \dots, s; \\ \frac{\vartheta_i^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}} \geq \varepsilon, & \vartheta_i^d \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \end{cases} \quad (2.2)$$

Cette forme est appelée forme fractionnelle ou ratio CCR à orientation output.

2.2.1.2 Modèles linéaires CCR à orientation input

Dans la formulation CCR, on considère l'ensemble des productions possibles du système par

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, \quad y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \right\}$$

Le modèle CCR à orientation input consiste à calculer l'intensité d'efficacité d'une DMU d par un scalaire Θ^d :

$$\Theta^d = \min_{\theta \geq 0} \{ \theta : (\theta X_d, Y_d) \in \mathcal{P} \} \quad (2.3)$$

La formulation (2.1) est équivalente au programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, & i = 1, \dots, m, \quad v_i^d \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Cette forme est connue sous le nom de forme multiplicative du modèle CCR à orientation input. Le passage de la forme fractionnelle non convexe (2.1) à la formulation (2.4)

est obtenu par un changement de variables dans la forme (2.1), en posant $t = \sum_{i=1}^m \vartheta_i x_{id}$ ($t > 0$), $t\mu_r^d = v_r^d$, $t v_i^d = \vartheta_i^d$ ³.

Le dual du problème (2.4), appelé forme d'enveloppement du modèle CCR à orientation input, s'écrit :

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta^d - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - \theta^d x_{id} + s_i^{d-} = 0, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - y_{rd} - s_r^{d+} = 0, & r = 1, \dots, s; \\ s_i^{d-} \geq 0, & i = 1, \dots, m; \quad s_r^{d+} \geq 0, & r = 1, \dots, s; \quad \lambda_j^d \geq 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $(\lambda_j^d, j = 1, \dots, n \text{ et } \theta^d)$ sont les variables duales associées respectivement aux contraintes du problème (2.4) et s_i^{d-} et s_r^{d+} sont les variables d'écart.

Définition . CCR DEA efficacité (cf. [35, chapitre 1])

La performance de la DMU d est entièrement (100%) efficace si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\tilde{\theta}^d = 1$;
- (ii) $\tilde{s}_i^{d-} = 0, \forall i$ et $\tilde{s}_r^{d+} = 0, \forall r$.

où le symbole “ $\sim$ ” indique l'optimalité de la solution.

Etant donné les propriétés de la dualité unissant les problèmes (2.4) et (2.5), de manière équivalente, la DMU d est efficace si et seulement si $\sum_{r=1}^s \tilde{\mu}_r^d y_{rd} = 1$.

Définition . CCR faiblement DEA efficacité(cf. [35, chapitre 1])

La performance de la DMU d est faiblement efficace si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\tilde{\theta}^d = 1$;
- (ii) $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\tilde{s}_i^{d-} \neq 0$ et/ou $\exists r \in \{1, \dots, s\}$ tel que $\tilde{s}_r^{d+} \neq 0$.

Remarque . Si d est DMU inefficace, elle peut être projetée sur la frontière efficace de

³Transformation de Charnes-Cooper (1962)[27]

la façon suivante :

$$\widehat{X}_d = \tilde{\theta}^d X_d - \tilde{s}^{d-} = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^d X_j$$

$$\widehat{Y}_d = Y_d + \tilde{s}^{d+} = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^d Y_j$$

avec $\tilde{s}^{d-}$ et $\tilde{s}^{d+}$ les vecteurs des valeurs optimales $\tilde{s}_i^{d-}, i = 1, \dots, m$ et $\tilde{s}_r^{d+}, r = 1, \dots, s$ respectivement. La DMU fictive $(\widehat{X}_d, \widehat{Y}_d)$ se trouve sur la frontière efficace de production.

2.2.1.3 Modèles linéaires CCR à orientation output

L'objectif dans le modèle à orientation output est de minimiser le ratio de la valeur pondérée des inputs et de la valeur pondérée des outputs. Ce qui revient à chercher pour des valeurs données des facteurs inputs quelles sont les valeurs maximum de production des facteurs outputs possibles. L'orientation output consiste à déterminer l'intensité d'efficacité pour une DMU d par un scalaire Φ^d :

$$\Phi^d = \max_{\varphi \geq 0} \{ \varphi : (X_d, \varphi Y_d) \in \mathcal{P} \} \quad (2.6)$$

Par le même procédé qu'à la section précédente, on passe de la forme fractionnelle à orientation output (2.2) à la paire de formes linéaires primale et duale à orientation output suivantes :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, & r = 1, \dots, s; \quad v_i^d \geq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Cette forme est connue sous le nom de forme multiplicative du modèle de CCR à orien-

tation output et son dual, le problème (2.8), sous le nom de forme d'enveloppement.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \varphi^d + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right) \\
 \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - x_{id} + s_i^{d-} = 0, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - \varphi^d y_{rd} - s_r^{d+} = 0, & r = 1, \dots, s; \\ s_i^{d-} \geq 0, & i = 1, \dots, m; \quad s_r^{d+} \geq 0, & r = 1, \dots, s; \quad \lambda_j^d \geq 0, & j = 1, \dots, n. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Remarque . Si d est DMU inefficace, elle peut être projetée sur la frontière efficace de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \widehat{X}_d &= X_d - \widehat{s}^{d-} = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^d X_j; \\
 \widehat{Y}_d &= \tilde{\varphi}^d Y_d + \widehat{s}^{d+} = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^d Y_j
 \end{aligned}$$

La DMU fictive $(\widehat{X}_d, \widehat{Y}_d)$ se trouve sur la frontière efficace de production.

Définition . CCR DEA efficacité(cf. [35, chapitre 1])

La performance de la DMU d est entièrement (100%) efficace si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\tilde{\varphi}^d = 1$;
- (ii) $\tilde{s}_i^{d-} = 0, \forall i$ et $\tilde{s}_r^{d+} = 0, \forall r$.

ou de manière équivalente la DMU d est efficace si et seulement si $\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^d x_{id} = 1$.

Définition . CCR faiblement DEA efficacité(cf. [35, chapitre 1])

La performance de la DMU d est faiblement efficace si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\tilde{\varphi}^d = 1$;
- (ii) $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\tilde{s}_i^{d-} \neq 0$ et/ou $\exists r \in \{1, \dots, s\}$ tel que $\tilde{s}_r^{d+} \neq 0$.

Théorème 2.1. [35] Soit $(\tilde{\theta}, \tilde{\lambda})$ une solution optimale du modèle à orientation input (2.4). Alors $(1/\tilde{\theta}, \tilde{\lambda}/\tilde{\theta})$ est une solution optimale correspondant du modèle à orientation output (2.7).

De même, si $(\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda})$ est une solution optimale du modèle à orientation output (2.7). Alors $(1/\tilde{\varphi}, \tilde{\lambda}/\tilde{\varphi})$ est une solution optimale correspondant du modèle à orientation input (2.4).

Ce théorème montre qu'une DMU est efficace en utilisant le modèle à orientation input si et seulement si elle l'est pour le modèle à orientation output. De plus, il montre que le score d'efficacité obtenu par le modèle à orientation input est l'inverse de celui obtenu par le modèle à orientation output et inversement.

Propriété 2.1. Si d est CCR efficace alors

$$\begin{aligned} \exists \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda_j \geq 0, \forall j\} \text{ tel que } \sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix} \\ \text{et } \sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Démonstration. En effet, prenant en compte

– qu'il existe une solution admissible triviale du problème (2.5) (respectivement du problème (2.8)) à savoir

$$\theta^d = 1; \quad \lambda_d^d = 1, \quad \lambda_j^d = 0, \quad j \neq d; \quad s_i^{d-} = 0, \quad \forall i; \quad s_r^{d-} = 0, \quad \forall r;$$

$$(\text{ resp. } \varphi^d = 1; \quad \lambda_d^d = 1, \quad \lambda_j^d = 0, \quad j \neq d; \quad s_i^{d-} = 0, \quad \forall i; \quad s_r^{d-} = 0, \quad \forall r;)$$

– et que ε dans le problème (2.5) (respectivement (2.8)) est arbitrairement petit.

La caractérisation de la DEA CCR efficacité, à savoir la solution optimale du problème (2.5) (respectivement (2.8)) vérifie

$$\tilde{\theta}^d = 1; \quad \tilde{s}_i^{d-} = 0, \quad \forall i; \quad \tilde{s}_r^{d-} = 0, \quad \forall r;$$

$$(\text{ resp. } \tilde{\varphi}^d = 1; \quad \tilde{s}_i^{d-} = 0, \quad \forall i; \quad \tilde{s}_r^{d-} = 0, \quad \forall r),$$

et les contraintes du problème (2.5) (respectivement (2.8)) impliquent bien la relation (2.9). □

Cette propriété caractérise les DMU CCR efficaces. La propriété suivante caractérise

les DMU CCR faiblement efficaces.

Propriété 2.2. Soit d une DMU évaluée par le modèle CCR et les relations

- (i) La performance de d est faiblement efficace avec le modèle à orientation input ;
- (ii) La performance de d est faiblement efficace avec le modèle à orientation output ;
- (iii) $\nexists \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda_j \geq 0, \forall j\}$ tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix}$;

On a les implications suivantes :

- a. (i) $\Rightarrow$ (iii) ;
- b. (ii) $\Rightarrow$ (iii) ;
- c. (iii) $\Rightarrow$ (i) ou (ii).

Démonstration.

- a. (i) $\Rightarrow$ (iii)

(i) $\Rightarrow \tilde{\theta}^d = 1$ étant donné la définition de la faible efficacité. Supposons que (iii) ne soit pas vrai et soit

$$\bar{\lambda}^d \in \Lambda \text{ tel que } \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix}$$

On aurait ainsi $\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d x_{ij} < x_{id}, \forall i$ et $\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d y_{rj} > y_{rd}, \forall r$.

Considérons un indice quelconque $i_d \in \{1, \dots, m\}$ avec $x_{i_d d} \neq 0$, et posons

$$\bar{\theta}^d = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d \frac{x_{i_d j}}{x_{i_d d}} < 1,$$

$(\bar{\theta}^d, \bar{\lambda}^d, \bar{s}^{d-}, \bar{s}^{d+})$ est une solution admissible du problème (2.5) avec

$$\bar{s}_i^{d-} = x_{id} - \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d x_{ij} \quad \text{et} \quad \bar{s}_r^{d+} = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d y_{rj} - y_{rd}.$$

Comme $\bar{\theta}^d < 1$, ceci est en contradiction avec $\tilde{\theta}^d = 1$;

b. (ii) $\Rightarrow$ (iii)

De la même façon que le point (a.), en considérant un indice quelconque $r_d \in \{1, \dots, s\}$ avec $y_{r_d d} \neq 0$, on pose ici $\bar{\varphi}^d = \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d \frac{y_{r_d j}}{y_{r_d d}} > 1$.

Il y a contradiction avec $\tilde{\varphi}^d = 1$.

c. Par l'absurde, c-à-d. considérons que (iii) soit vraie et ni (i) ni (ii) ne soient vraies.

(i) n'est pas vraie signifie qu'il existe une solution $(\bar{\theta}^d, \bar{\lambda}^d, \bar{s}^{d-}, \bar{s}^{d+})$ du problème (2.5) telle que $\bar{\theta}^d < 1$. Les contraintes du problème (2.5) donnent

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d X_j \leq \bar{\theta}^d X_d \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d Y_j \leq Y_d$$

d'où

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d X_j < X_d \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d Y_j \leq Y_d \quad (\alpha)$$

(ii) n'est pas vraie signifie qu'il existe une solution $(\bar{\varphi}^d, \bar{\lambda}^d, \bar{s}^{d-}, \bar{s}^{d+})$ du problème (2.8) telle que $\bar{\varphi}^d > 1$. Les contraintes du problème (2.8) donnent

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d X_j \leq X_d \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d Y_j \leq \bar{\varphi}^d Y_d$$

d'où

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d X_j \leq X_d \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^d Y_j < Y_d \quad (\beta)$$

Posons $\lambda_j^{d*} = \bar{\lambda}_j^d + \bar{\lambda}_j^d$, d'après (α) et (β) , on obtient

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{d*} X_j < X_d \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^{d*} Y_j < Y_d \quad \text{avec} \quad \lambda_j^{d*} \geq 0$$

ce qui est en contradiction avec (iii). □

2.2.1.4 Illustrations et interprétations graphiques

En appliquant un modèle DEA à orientation input à l'exemple (tableau 2.1), avec cet échantillon de 9 DMU, on obtient les problèmes linéaires suivants à résoudre pour

chacune des DMU d .

Cas du modèle CCR à orientation input forme d'enveloppement :

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta^d - \varepsilon(s^{d-} + s^{d+}) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \lambda_A^d + 2\lambda_B^d + 3\lambda_C^d + 4\lambda_D^d + 4.8\lambda_E^d + 5\lambda_F^d + 6\lambda_G^d + 6.6\lambda_H^d + 7\lambda_I^d - \theta^d x_d + s^{d-} = 0; \\ 10\lambda_A^d + 25\lambda_B^d + 36\lambda_C^d + 44\lambda_D^d + 40\lambda_E^d + 50\lambda_F^d + 54\lambda_G^d + 52\lambda_H^d + 55\lambda_I^d - y_d - s^{d+} = 0; \\ s^{d-} \geq 0, s^{d+} \geq 0, \lambda_j^d \geq 0, j = A, \dots, I \end{cases} \end{aligned}$$

Cas du modèle CCR à orientation input forme multiplicative :

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu^d y_d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} 10\mu^d - v^d \leq 0; & 25\mu^d - 2v^d \leq 0; \\ 36\mu^d - 3v^d \leq 0; & 44\mu^d - 4v^d \leq 0 \\ 40\mu^d - 4.8v^d \leq 0; & 50\mu^d - 5v^d \leq 0 \\ 54\mu^d - 6v^d \leq 0; & 52\mu^d - 6.6v^d \leq 0 \\ 55\mu^d - 7v^d \leq 0; & v^d x_d = 1; \\ \mu^d \geq \varepsilon, v^d \geq \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

En résolvant ces deux problèmes pour chacune des DMU, on obtient les résultats du tableau 2.2 :

DMU	CCR Primal				CCR Dual		DMU	CCR Primal				CCR Dual	
	$\tilde{\theta}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	s^{d-}	s^{d+}	$\tilde{v}^d$	$\tilde{\mu}^d$		$\tilde{\theta}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	s^{d-}	s^{d+}	$\tilde{v}^d$	$\tilde{\mu}^d$
A	$\frac{4}{5}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{2}{5}$	0	0	1	$\frac{2}{25}$	B	1	$\tilde{\lambda}_B = 1$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{25}$
C	$\frac{24}{25}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{36}{25}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{75}$	D	$\frac{22}{25}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{44}{25}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{50}$
E	$\frac{2}{3}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{8}{5}$	0	0	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{60}$	F	$\frac{4}{5}$	$\tilde{\lambda}_B = 2$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{125}$
G	$\frac{18}{25}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{54}{25}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{75}$	H	$\frac{104}{165}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{52}{25}$	0	0	$\frac{5}{33}$	$\frac{2}{165}$
I	$\frac{22}{35}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{11}{5}$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{175}$							

* valeurs non nulles

Tableau 2.2 – Solutions avec modèle CCR à orientation input

Sur la figure 2.5, les flèches indiquent le sens de la projection sur la frontière efficace de production. Seule la DMU B est techniquement efficace. Les projections des DMU inefficaces A, C, D, E, F, G, H et I sont obtenues de la façon suivante :

- $\hat{x}_A = \frac{4}{5}x_A - 0 = \frac{2}{5}x_B$ et $\hat{y}_A = y_A + 0 = \frac{2}{5}y_B$
- $\hat{x}_C = \frac{24}{25}x_C - 0 = \frac{36}{25}x_B$ et $\hat{y}_C = y_C + 0 = \frac{36}{25}y_B$
- $\hat{x}_D = \frac{22}{25}x_D - 0 = \frac{44}{25}x_B$ et $\hat{y}_D = y_D + 0 = \frac{44}{25}y_B$

- $\hat{x}_E = \frac{2}{3}x_E - 0 = \frac{8}{5}x_B$ et $\hat{y}_E = y_E + 0 = \frac{8}{5}y_B$
- $\hat{x}_F = \frac{4}{5}x_F - 0 = 2x_B$ et $\hat{y}_F = y_F + 0 = 2y_B$
- $\hat{x}_G = \frac{18}{25}x_G - 0 = \frac{54}{25}x_B$ et $\hat{y}_G = y_G + 0 = \frac{54}{25}y_B$
- $\hat{x}_H = \frac{104}{165}x_H - 0 = \frac{52}{25}x_B$ et $\hat{y}_H = y_H + 0 = \frac{52}{25}y_B$
- $\hat{x}_I = \frac{22}{35}x_I - 0 = \frac{11}{5}x_B$ et $\hat{y}_I = y_I + 0 = \frac{11}{5}y_B$

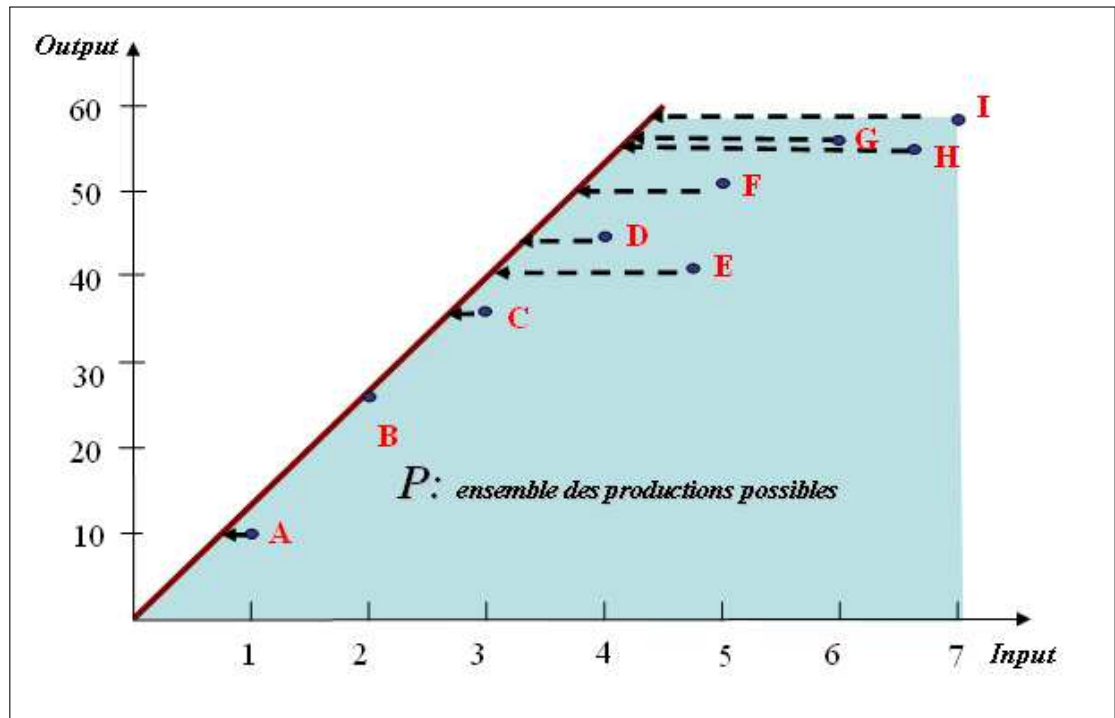


Figure 2.5 – Représentation de la frontière efficace en utilisant CCR à orientation input

En appliquant cette fois-ci un modèle à orientation output au même exemple, on obtient les problèmes linéaires suivants à résoudre pour chacune des DMU.

Cas du modèle CCR à orientation output (forme d'enveloppement) :

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi^d + \varepsilon(s^{d-} + s^{d+}) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \lambda_A^d + 2\lambda_B^d + 3\lambda_C^d + 4\lambda_D^d + 4.8\lambda_E^d + 5\lambda_F^d + 6\lambda_G^d + 6.6\lambda_H^d + 7\lambda_I^d - x_d + s^{d-} = 0; \\ 10\lambda_A^d + 25\lambda_B^d + 36\lambda_C^d + 44\lambda_D^d + 40\lambda_E^d + 50\lambda_F^d + 54\lambda_G^d + 52\lambda_H^d + 55\lambda_I^d - \varphi^d y_d - s^{d+} = 0; \\ s^{d-} \geq 0, s^{d+} \geq 0, \lambda_j^d \geq 0, j = A, \dots, I \end{cases} \end{aligned}$$

Cas du modèle CCR à orientation output (forme multiplicative) :

$$\begin{aligned} \min \quad & v^d x_d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} 10\mu^d - v^d \leq 0; & 25\mu^d - 2v^d \leq 0; \\ 36\mu^d - 3v^d \leq 0; & 44\mu^d - 4v^d \leq 0 \\ 40\mu^d - 4.8v^d \leq 0; & 50\mu^d - 5v^d \leq 0 \\ 54\mu^d - 6v^d \leq 0; & 52\mu^d - 6.6v^d \leq 0 \\ 55\mu^d - 7v^d \leq 0; & \mu^d y_d = 1; \\ \mu^d \geq \varepsilon, v^d \geq \varepsilon \end{cases} \end{aligned}$$

Les résultats sont fournis au tableau 2.3 :

DMU	CCR Primal				CCR Dual		DMU	CCR Primal				CCR Dual	
	$\tilde{\varphi}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	$\tilde{s}^{d-}$	$\tilde{s}^{d+}$	$\tilde{v}^d$	$\tilde{\mu}^d$		$\tilde{\varphi}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	$\tilde{s}^{d-}$	$\tilde{s}^{d+}$	$\tilde{v}^d$	$\tilde{\mu}^d$
A	$\frac{5}{4}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{10}$	B	1	$\tilde{\lambda}_B = 1$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{25}$
C	$\frac{25}{24}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{3}{2}$	0	0	$\frac{25}{72}$	$\frac{1}{36}$	D	$\frac{25}{22}$	$\tilde{\lambda}_B = 2$	0	0	$\frac{25}{88}$	$\frac{1}{44}$
E	$\frac{3}{2}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{12}{5}$	0	0	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{40}$	F	$\frac{5}{4}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{5}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{50}$
G	$\frac{25}{18}$	$\tilde{\lambda}_B = 3$	0	0	$\frac{25}{108}$	$\frac{1}{54}$	H	$\frac{165}{104}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{13}{4}$	0	0	$\frac{25}{104}$	$\frac{1}{52}$
I	$\frac{35}{22}$	$\tilde{\lambda}_B = \frac{7}{2}$	0	0	$\frac{5}{22}$	$\frac{1}{55}$							

* valeurs non nulles

Tableau 2.3 – Solutions avec modèle CCR à orientation output

Sur la figure 2.6, les flèches indiquent le sens de la projection en utilisant CCR à orientation output sur la frontière efficace de production. De même que le modèle à orientation input, seule la DMU B est techniquement efficace et les projections des DMU inefficaces A,C,D,E,F,G,H et I sont obtenues de la façon suivante :

- $\hat{x}_A = x_A - 0 = \frac{1}{2}x_B$ et $\hat{y}_A = \frac{5}{4}y_A + 0 = \frac{1}{2}y_B$

- $\hat{x}_C = x_C - 0 = \frac{3}{2}x_B$ et $\hat{y}_C = \frac{25}{24}y_C + 0 = \frac{3}{2}y_B$
- $\hat{x}_D = x_D - 0 = 2x_B$ et $\hat{y}_D = \frac{25}{22}y_D + 0 = 2y_B$
- $\hat{x}_E = x_E - 0 = \frac{12}{5}x_B$ et $\hat{y}_E = \frac{3}{2}y_E + 0 = \frac{12}{5}y_B$
- $\hat{x}_F = x_F - 0 = \frac{5}{2}x_B$ et $\hat{y}_F = \frac{5}{4}y_F + 0 = \frac{5}{2}y_B$
- $\hat{x}_G = x_G - 0 = 3x_B$ et $\hat{y}_G = \frac{25}{18}y_G + 0 = 3y_B$
- $\hat{x}_H = x_H - 0 = \frac{13}{4}x_B$ et $\hat{y}_H = \frac{165}{104}y_H + 0 = \frac{13}{4}y_B$
- $\hat{x}_I = x_I - 0 = \frac{7}{2}x_B$ et $\hat{y}_I = \frac{35}{22}y_I + 0 = \frac{7}{2}y_B$

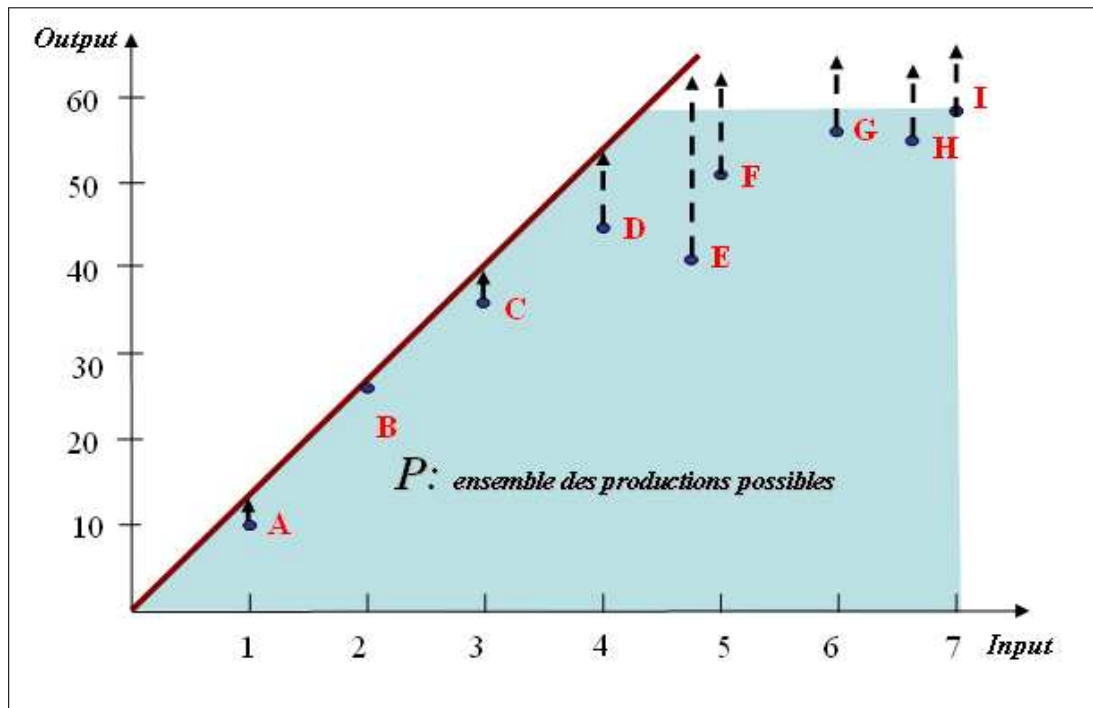


Figure 2.6 – Représentation de la frontière efficace en utilisant CCR à orientation output

2.2.1.5 Analyse de sensibilité et robustesse des efficacités

Zhu en 1996 dans [130] propose une étude de robustesse d'efficacité sur les DMU efficaces en utilisant le modèle CCR à orientation input. Il considère des variations proportionnelles des inputs et outputs avec des augmentations des quantités inputs et des diminutions des quantités outputs. Ces variations sont caractérisées de la façon suivante pour une DMU d donnée :

$$\hat{x}_{id} = \beta_i x_{id} \quad \text{avec} \quad \beta_i \geq 1, \quad i = 1, \dots, m; \quad (2.10)$$

$$\hat{y}_{rd} = \alpha_r y_{rd} \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha_r \leq 1, \quad r = 1, \dots, s. \quad (2.11)$$

Il montre les théorèmes suivants pour une DMU d efficace :

Théorème 2.2. (cf. [91, 130])

Soit $\tilde{\rho}^d$ le vecteur optimal du problème (2.12) suivant,

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \rho_i^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1, j \neq d}^m \lambda_j x_{ij} \leq \rho_i x_{id}, \quad i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1, j \neq d}^m \lambda_j y_{rj} \geq y_{rd}, \quad r = 1, \dots, s; \\ \rho_i^d \geq 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \forall i, j; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.12)$$

et posons $\Psi^d = \{(\beta_1, \dots, \beta_m) : 1 \leq \beta_i \leq \tilde{\rho}_i^d\}$. Si on considère que la DMU d subit une augmentation des inputs de la forme (2.10), avec des coefficients de variation $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \Psi^d$, alors la DMU d préserve son efficacité.

Théorème 2.3. (cf. [91, 130])

Soit $\tilde{\varphi}^d$ le vecteur optimal du problème (2.13) suivant,

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^s \varphi_r^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1, j \neq d}^m \lambda_j x_{ij} \leq x_{id}, \quad i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1, j \neq d}^m \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_r y_{rd}, \quad r = 1, \dots, s; \\ \varphi_i^d \leq 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \forall i, j; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

et posons $\Phi^d = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_s) : \tilde{\varphi}_r^d \leq \alpha_r \leq 1\}$. Si on considère que la DMU d subit une diminution des outputs de la forme (2.11), avec des coefficients de variation $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \Phi^d$, alors la DMU d préserve son efficacité.

Ces deux théorèmes permettent d'étudier la robustesse des efficacités des unités du système étudié. En effet ils fournissent un cadre de variation des différents facteurs et permettent donc de simuler les différentes situations de façon à orienter les investissements et éclairer le gestionnaire sur la stratégie à adopter, tout en gardant son efficacité de production relativement aux autres unités.

2.2.2 Modèles de Banker, Charnes et Cooper

Le modèle BCC permet de restreindre les conditions sur les facteurs inputs et outputs. Le modèle considère que les valeurs des facteurs inputs et outputs sont positives ou nulles c-à-d. $x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m, y_{rj} \geq 0, r = 1, \dots, s, j = 1, \dots, n$ (cf. [13]).

Banker, Charnes et Cooper considèrent un ensemble de productions possibles $\mathcal{P}$ vérifiant les postulats suivants :

Postulat 1 (Convexité) : Si $(X, Y) \in \mathcal{P}$ et $(X', Y') \in \mathcal{P}$ alors $(\lambda X + (1 - \lambda)X', \lambda Y + (1 - \lambda)Y') \in \mathcal{P}$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

Postulat 2 (Monotonicité) : Si $(X, Y) \in \mathcal{P}$ et $X' \geq X, Y' \leq Y$ alors $(X', Y') \in \mathcal{P}$.

Postulat 3 (Inclusion des observations) : Les données observées $(X_j, Y_j) \in \mathcal{P}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.

Postulat 4 (Extrapolation minimum) : Si $\mathcal{P}'$ est un ensemble de productions possibles vérifiant les postulats 1, 2, 3 alors $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$.

L'unique ensemble de productions possibles vérifiant les 4 postulats est :

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y) : x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, \quad y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j, \quad \sum_j \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \right\}$$

Les modèles de Banker, Charnes et Cooper sont dès lors obtenus en ajoutant une variable $u^d \in \mathbb{R}$ (sans restriction de signe) à la forme primale CCR (2.4) ; ceci conduit alors à l'ajout de la contrainte de convexité $\sum_j \lambda_j = 1$ dans le problème dual (CCR) (2.5).

2.2.2.1 Modèles linéaires BCC à orientation input

Le modèle BCC à orientation input calcule l'intensité d'efficacité d'une DMU d par un scalaire Δ^d de la façon suivante :

$$\Delta^d = \min_{\delta \geq 0} \{ \delta : (\delta X_d, Y_d) \in \mathcal{P} \} \quad (2.14)$$

La forme d'enveloppement du modèle BCC à orientation input s'écrit :

$$\begin{aligned} \min \quad & \delta^d - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - \delta^d x_{id} + s_i^{d-} = 0, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - y_{rd} - s_r^{d+} = 0, & r = 1, \dots, s; \\ \sum_j \lambda_j^d = 1; \\ s_i^{d-} \geq 0, \quad s_r^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, \quad \forall i, r, j. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

La forme duale de ce modèle est la suivante connue sous le nom de forme multiplicative du modèle BCC à orientation input :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd} + u^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} + u^d \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, \quad v_i^d \geq \varepsilon, \quad \forall i, r; \quad u^d \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

La variable u^d est sans restriction de signe.

Remarque . Si d est une DMU inefficace, elle est projetée sur la frontière efficace de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{X}_d &= \tilde{\delta}^d X_d - \tilde{s}^{d-} = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^d X_j \\ \widehat{Y}_d &= Y_d + \tilde{s}^{d+} = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^d Y_j \end{aligned}$$

La DMU fictive $(\widehat{X}_d, \widehat{Y}_d)$ se trouve sur la frontière efficace de production.

Définition . BCC DEA efficacité(cf. [13])

La performance de la DMU d est entièrement (100%) efficace si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\tilde{\delta}^d = 1$;
- (ii) $\tilde{s}_i^{d-} = 0, \forall i$ et $\tilde{s}_r^{d+} = 0, \forall r$.

Etant donné les propriétés de la dualité unissant les problème (2.15) et (2.16), de manière équivalente, la DMU d est efficace si et seulement si $\sum_{r=1}^s \tilde{\mu}_r^d y_{rd} + \tilde{u}^d = 1$.

Définition . BCC faiblement DEA efficacité [13]

La performance de la DMU d est faiblement efficace si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\tilde{\delta}^d = 1$;
- (ii) $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\tilde{s}_i^{d-} \neq 0$ et/ou, $\exists r \in \{1, \dots, s\}$ tel que $\tilde{s}_r^{d+} \neq 0$.

2.2.2.2 Modèles linéaires BCC à orientation output

Le modèle BCC à orientation output consiste à calculer l'intensité d'efficacité d'une DMU d par un scalaire Ψ^d :

$$\Psi^d = \max_{\omega \geq 0} \{ \omega : (X_d, \omega Y_d) \in \mathcal{P} \} \quad (2.17)$$

En ajoutant de même la contrainte de convexité à la forme duale CCR à orientation output on obtient la paire de formes linéaires primale-duale (BCC) suivante.

La forme d'enveloppement s'écrit :

$$\begin{aligned} \max \quad & \omega^d + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - x_{id} + s_i^{d-} = 0, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - \omega^d y_{rd} - s_r^{d+} = 0, & r = 1, \dots, s; \\ \sum_j \lambda_j^d = 1; \\ s_i^{d-} \geq 0, \quad s_r^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, \quad \forall i, r, j \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le dual de ce problème (forme multiplicative) s'écrit :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} + u^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} - u^d \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, \quad v_i^d \geq \varepsilon, \quad \forall i, r; \quad u^d \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Définition . BCC DEA efficacité(cf. [13])

La performance de la DMU d est entièrement (100%) efficace si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\tilde{\omega}^d = 1$;
- (ii) $\tilde{s}_i^{d-} = 0, \forall i$ et $\tilde{s}_r^{d+} = 0, \forall r$.

De manière équivalente, grâce aux propriétés de la dualité, la DMU d est efficace si et seulement si, $\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^d x_{id} + \tilde{u}^d = 1$.

Définition . BCC faiblement DEA efficacité(cf. [13])

La performance de la DMU d est faiblement efficace si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\tilde{\omega}^d = 1$;
- (ii) $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\tilde{s}_i^{d-} \neq 0$ et/ou $\exists r \in \{1, \dots, s\}$ tel que $\tilde{s}_r^{d+} \neq 0$.

Propriété 2.3. *Si d est BCC efficace alors*

$$\begin{aligned} \nexists \lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j \right\} \text{ tel que} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix} \text{ et } \sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Démonstration. Idem que la démonstration de la propriété 2.1 pour le cas de l'efficacité avec les modèles CCR. □

Propriété 2.4. *Soit d une DMU évaluée par le modèle BCC et les relations*

- (i) *La performance de d est faiblement efficace avec le modèle à orientation input ;*

(ii) La performance de d est faiblement efficace avec le modèle à orientation output ;

$$(iii) \nexists \lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j \right\} \text{ tel que } \sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix}.$$

On a les implications suivantes :

- a. (i) $\Rightarrow$ (iii).
- b. (ii) $\Rightarrow$ (iii).
- c. (iii) $\Rightarrow [(i) \text{ ou } (ii)]$

Démonstration.

- a. Idem que la démonstration de la propriété 2.2 pour le cas de l'efficacité faible avec les modèles CCR.
- b. Idem que la démonstration de la propriété 2.2.
- c. Idem que la démonstration de la propriété 2.2. Par l'absurde considérons que (iii) soit vraie et que ni (i) ni (ii) ne soient vraies. Posons ici $\lambda_j^{d*} = \frac{1}{2}\bar{\lambda}_j^d + \frac{1}{2}\bar{\bar{\lambda}}_j^d$, de sorte que $\lambda_j^{d*} \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{d*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. On obtient de même

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{d*} X_j < X_d \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j^{d*} Y_j < Y_d \quad (\beta)$$

ce qui est en contradiction avec (iii). □

2.2.2.3 Formes fractionnelles BCC

A partir des modèles à orientations input et output respectivement, on a les formes ratio correspondantes. La forme fractionnelle correspondant au modèle BCC à orientation input s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Delta^d = \max \quad & \frac{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd} + u^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} \frac{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rj} + u^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{ij}} \leq 1; \quad \forall j; \\ \frac{v_r^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \geq \varepsilon, \quad v_r^d \geq 0, \quad \forall r; \\ \frac{\vartheta_i^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}} \geq \varepsilon, \quad \vartheta_i^d \geq 0, \quad \forall i; \\ u^d \in \mathbb{R}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

La forme fractionnelle correspondant au modèle BCC à orientation output s'écrit :

$$\begin{aligned}
\Psi^d = \min \quad & \frac{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id} + u^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}} \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{ij} + u^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rj}} \geq 1, \quad j = 1, \dots, n; \\ \frac{v_r^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \geq \varepsilon, \quad v_r^d \geq 0, \quad \forall r; \\ \frac{\vartheta_i^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}} \geq \varepsilon, \quad \vartheta_i^d \geq 0, \quad \forall i; \\ u^d \in \mathbb{R}. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

2.2.2.4 Illustrations et interprétations graphiques

En appliquant le modèle BCC à orientation input à l'exemple précédent (cf. tableau 2.1) avec l'échantillon de 9 DMU, on obtient les problèmes linéaires suivants à résoudre pour chacune des DMU.

Cas de la forme d'enveloppement :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \delta^d - \varepsilon(s^{d-} + s^{d+}) \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} \lambda_A^d + 2\lambda_B^d + 3\lambda_C^d + 4\lambda_D^d + 4.8\lambda_E^d + 5\lambda_F^d + 6\lambda_G^d + 6.6\lambda_H^d + 7\lambda_I^d - \tau^d x_d + s^{d-} = 0; \\ 10\lambda_A^d + 25\lambda_B^d + 36\lambda_C^d + 44\lambda_D^d + 40\lambda_E^d + 50\lambda_F^d + 54\lambda_G^d + 52\lambda_H^d + 55\lambda_I^d - y_d - s^{d+} = 0; \\ \lambda_A^d + \lambda_B^d + \lambda_C^d + \lambda_D^d + \lambda_E^d + \lambda_F^d + \lambda_G^d + \lambda_H^d + \lambda_I^d = 1; \\ s^{d-} \geq 0, s^{d+} \geq 0, \lambda_j^d \geq 0, j = A, \dots, I \end{cases}
\end{aligned}$$

Cas de la forme multiplicative :

$$\begin{aligned} \max \quad & \mu^d y_d + u^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} 10\mu^d - v^d + u^d \leq 0; & 25\mu^d - 2v^d + u^d \leq 0; \\ 36\mu^d - 3v^d + u^d \leq 0; & 44\mu^d - 4v^d + u^d \leq 0 \\ 40\mu^d - 4.8v^d + u^d \leq 0; & 50\mu^d - 5v^d + u^d \leq 0 \\ 54\mu^d - 6v^d + u^d \leq 0; & 52\mu^d - 6.6v^d + u^d \leq 0 \\ 55\mu^d - 7v^d + u^d \leq 0; & v^d x_d = 1; \\ \mu^d \geq \varepsilon, v^d \geq \varepsilon & u^d \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Les résultats sont fournis au tableau 2.4.

DMU	BCC	Primal			BCC Dual			DMU	BCC	Primal			BCC Dual		
	$\tilde{\delta}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	s^{d-}	s^{d+}	$\tilde{v}^d$	$\tilde{\mu}^d$	$\tilde{u}^d$		$\tilde{\delta}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	s^{d-}	s^{d+}	$\tilde{v}^d$	$\tilde{\mu}^d$	$\tilde{u}^d$
A	1	$\tilde{\lambda}_A = 1$	0	0	1	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	B	1	$\tilde{\lambda}_B = 1$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$
C	1	$\tilde{\lambda}_C = 1$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{33}$	$-\frac{10}{11}$	D	1	$\tilde{\lambda}_D = 1$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$-\frac{3}{8}$
E	$\frac{35}{48}$	$\tilde{\lambda}_C = \tilde{\lambda}_D = \frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{192}$	$-\frac{5}{16}$	F	1	$\tilde{\lambda}_F = 1$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	$-\frac{2}{3}$
G	1	$\tilde{\lambda}_G = 1$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$-\frac{5}{4}$	H	$\frac{5}{6}$	$\tilde{\lambda}_F = \tilde{\lambda}_G = \frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{33}$	$\frac{5}{132}$	$-\frac{25}{22}$
I	1	$\tilde{\lambda}_I = 1$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{48}{7}$								

* valeurs non nulles

Tableau 2.4 – Solutions avec modèle BCC à orientation input

Sur la figure 2.7, on a l'enveloppe représentant la frontière efficace en utilisant le modèle BCC. Les DMU A, B, C, D, F, G et I apparaissent donc comme efficaces. Sur cette figure en considérant l'orientation input, la projection de la DMU E est E' et celle de H est H' et ces projections sont obtenues de la façon suivante :

- $\hat{x}_E = x_{E'} = \frac{35}{48}x_E - 0 = \frac{1}{2}x_C + \frac{1}{2}x_D$ et $\hat{y}_E = y_{E'} = y_E - 0 = \frac{1}{2}y_C + \frac{1}{2}y_D$
- $\hat{x}_H = x_{H'} = \frac{5}{6}x_H - 0 = \frac{1}{2}x_F + \frac{1}{2}x_G$ et $\hat{y}_H = y_{H'} = y_H - 0 = \frac{1}{2}y_F + \frac{1}{2}y_G$

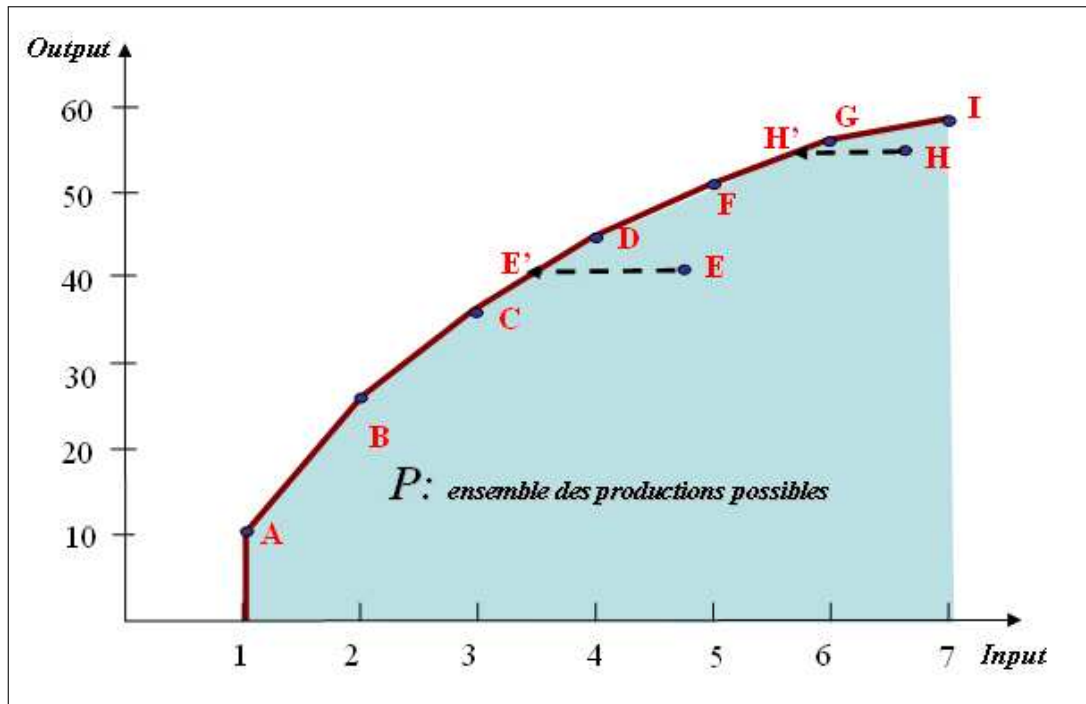


Figure 2.7 – Représentation de la frontière efficace en utilisant BCC à orientation input

En appliquant le modèle BCC à orientation output à l'exemple avec le même échantillon de 9 DMU, on obtient les problèmes linéaires suivants à résoudre pour chacune des DMU.

Cas de la forme d'enveloppement :

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \omega^d + \varepsilon(s^{d-} + s^{d+}) \\
 \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \lambda_A^d + 2\lambda_B^d + 3\lambda_C^d + 4\lambda_D^d + 4.8\lambda_E^d + 5\lambda_F^d + 6\lambda_G^d + 6.6\lambda_H^d + 7\lambda_I^d - x_d + s^{d-} = 0; \\ 10\lambda_A^d + 25\lambda_B^d + 36\lambda_C^d + 44\lambda_D^d + 40\lambda_E^d + 50\lambda_F^d + 54\lambda_G^d + 52\lambda_H^d + 55\lambda_I^d - \varphi^d y_d - s^{d+} = 0; \\ \lambda_A^d + \lambda_B^d + \lambda_C^d + \lambda_D^d + \lambda_E^d + \lambda_F^d + \lambda_G^d + \lambda_H^d + \lambda_I^d = 1; \\ s^{d-} \geq 0, \quad s^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, \quad j = A, \dots, I \end{cases}
 \end{aligned}$$

Cas de la forme multiplicative :

$$\begin{aligned}
\min \quad & v^d x_d + u^d \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} 10\mu^d - v^d - u^d \leq 0; & 25\mu^d - 2v^d - u^d \leq 0; \\ 36\mu^d - 3v^d - u^d \leq 0; & 44\mu^d - 4v^d - u^d \leq 0 \\ 40\mu^d - 4.8v^d - u^d \leq 0; & 50\mu^d - 5v^d - u^d \leq 0 \\ 54\mu^d - 6v^d - u^d \leq 0; & 52\mu^d - 6.6v^d - u^d \leq 0 \\ 55\mu^d - 7v^d - u^d \leq 0; & \mu^d y_d = 1; \\ \mu^d \geq \varepsilon, \quad v^d \geq \varepsilon; & u^d \in \mathbb{R}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Les résultats sont fournis au tableau 2.5.

DMU	BCC	Primal		BCC Dual		DMU	BCC	Primal		BCC Dual	
	$\tilde{\omega}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	$\tilde{s}^{d-}$	$\tilde{s}^{d+}$	$\tilde{v}^d$		$\tilde{\omega}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	$\tilde{s}^{d-}$	$\tilde{s}^{d+}$	$\tilde{v}^d$
A	1	$\tilde{\lambda}_A = 1$	0	0	$\frac{3}{2}$	B	1	$\tilde{\lambda}_B = 1$	0	0	$\frac{11}{25}$
C	1	$\tilde{\lambda}_C = 1$	0	0	$\frac{2}{90}$	D	1	$\tilde{\lambda}_D = 1$	0	0	$\frac{3}{22}$
E	$\frac{61}{50}$	$\tilde{\lambda}_D = \frac{1}{5}, \tilde{\lambda}_F = \frac{4}{5}$	0	0	$\frac{3}{20}$	F	1	$\tilde{\lambda}_F = 1$	0	0	$\frac{3}{25}$
G	1	$\tilde{\lambda}_G = 1$	0	0	$\frac{2}{27}$	H	$\frac{21}{20}$	$\tilde{\lambda}_G = \frac{2}{5}, \tilde{\lambda}_I = \frac{3}{5}$	0	0	$\frac{1}{52}$
I	1	$\tilde{\lambda}_I = 1$	0	0	ε						$\frac{1}{52}$

* valeurs non nulles

Tableau 2.5 – Solutions avec modèle BCC à orientation output

Sur la figure 2.8, on a l'enveloppe représentant la frontière efficace en utilisant le modèle BCC à orientation output. Les projections de E est E' et celle de H est H'. De même que le modèle à orientation input, on obtient E' et H' de la façon suivante :

- $\hat{x}_E = x_{E'} = x_E - 0 = \frac{1}{5}x_D + \frac{4}{5}x_F$ et $\hat{y}_E = y_{E'} = \frac{61}{50}y_E - 0 = \frac{1}{5}y_D + \frac{4}{5}y_F$
- $\hat{x}_H = x_{H'} = x_H - 0 = \frac{2}{5}x_G + \frac{3}{5}x_I$ et $\hat{y}_H = y_{H'} = \frac{21}{20}y_H - 0 = \frac{2}{5}y_G + \frac{3}{5}y_I$

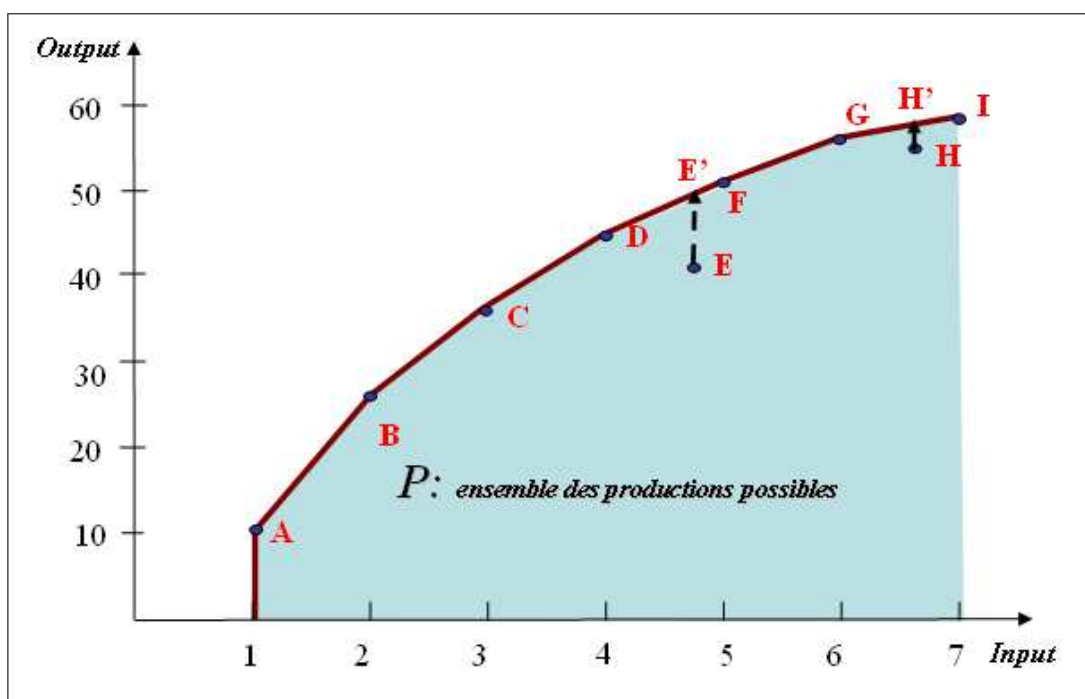


Figure 2.8 – Représentation de la frontière efficace en utilisant BCC à orientation output

2.3 Extensions des modèles de base

A partir des modèles de base de Charnes, Cooper et Rhodes, ou de Banker, Charnes et Cooper, il est possible de réaliser des extensions pour pouvoir répondre à des cas spécifiques de problème. Ces cas spécifiques diffèrent généralement par la nature des facteurs de décisions. Les facteurs inputs ou outputs peuvent être contrôlables au niveau du décideur ou non. De même, certains facteurs peuvent être non désirables. Par exemple la pollution environnementale qui peut être liée à la production de biens ou à des services, la mortalité maternelle ou infantile, etc. Ces extensions permettent de raffiner l'approximation de la frontière efficace de production ou d'incorporer des jugements de valeurs à partir de techniques paramétriques d'analyse.

2.3.1 Analyse multi-périodes ou “Window analysis”

Le “Window analysis” est une application de l'approche DEA multi-période. L'application concerne les situations où les données des différentes DMU sont observées

en plusieurs sous-périodes c-à-d. des données chronologiques. C'est le cas par exemple d'un système dont les données sont observées par trimestre, semestre, etc. Cette technique a été appliquée par Charnes et al. en 1985 (cf. [26, page 57],[35, chapitre 1]) pour les opérations de maintenance des avions de l'armée de l'air aux USA. Les données sont fournies pour 14 DMU (avions de combat) sur une période de 7 mois. Si l'on utilise une fenêtre (window) de 3 mois, chaque DMU est représentée comme une différente DMU pendant chacun de ces trois mois successifs. Ainsi, on obtient à chaque analyse $14 * 3 = 42$ DMU. Ensuite, à la seconde analyse, le premier mois est abandonné et le mois 4 est ajouté à l'analyse et ainsi de suite.

"Window analysis" mesure la performance d'une DMU en tenant compte du temps c-à-d. en la traitant comme une DMU différente à chaque fois qu'une nouvelle période est considérée. Par exemple, s'il y a n DMU, avec les mesures des données inputs et outputs, sur k périodes, alors $n * k$ DMU sont évaluées simultanément afin de suivre les variations des efficacités durant cet horizon fini. Après chaque étape, une nouvelle période est considérée et la première période de l'étape n'est plus considérée. Cette technique peut être utilisée pour mesurer les performances de données chronologiques d'un système. Supposons un système dont les données sont recueillies par mois et les opérations de contrôle sont planifiées par trimestre. Pour optimiser ces planifications trimestrielles par des mesures de performance, on divise l'année en 12 périodes (mois) et en fenêtre de 3 périodes (trimestre). En considérant les trois premières périodes par exemple, chaque unité du système est considérée trois fois c-à-d. une fois par période. Cette considération permet de mesurer les performances avec la technologie de production du système durant ces trois mois. Cette façon est différente de celle consistant à comparer les unités du système en tenant compte des différentes technologies du système pour chaque période (cf. chapitre 3). Par exemple, lorsqu'on compare les performances des unités du système d'une période t_0 à une autre période t_1 , on considère (implicitement) pour chaque période la technologie du système de cette période. Par contre, en considérant un système composé des unités du même système pendant les deux périodes, les mesures de performance permettent de déterminer une autre technologie.

2.3.2 Modèle DEA avec incorporation *a priori* de jugement et DEA/AR

Les modèles DEA de base considèrent de façon implicite que les variables multiplicateurs des facteurs inputs et outputs sont positives avec l'introduction de $\varepsilon > 0$. Pour généraliser la prise en compte de l'information *a priori* connue sur les multiplicateurs, l'extension des modèles DEA s'applique en ajoutant des contraintes sur les variables multiplicateurs. Ces informations peuvent être liées à la nature et à la connaissance du problème en faisant des restrictions de poids. C'est le cas de la prise en compte de l'importance relative des différents facteurs inputs et outputs. On peut avoir des contraintes du type : $\alpha^k v + \beta^k \mu \geq 0$, $k = 1, \dots, K$ où K représente le nombre de contraintes explicites sur les variables multiplicateurs des facteurs inputs et outputs, $\alpha^k \in \mathbb{R}^m$ et $\beta^k \in \mathbb{R}^s$ les vecteurs des coefficients des contraintes (cf. [26, chapitre 1]). Pour appliquer DEA, on ajoute ces contraintes nouvelles à la forme multiplicative du modèle DEA choisi. L'un des inconvénients soulignés par certains auteurs ayant utilisé DEA sans restriction de poids (modèles classiques CCR ou BCC) est que cette façon de traiter le problème peut créer des situations irréalistes. Par exemple, le modèle peut mesurer les performances d'une DMU pleinement efficace en attribuant des valeurs excessives à certaines variables multiplicatives d'une part et en attribuant à d'autres des valeurs de l'ordre de ε d'autre part. C'est pour remédier à ces problèmes que dans certaines situations (cf. [35, chapitre 1]), on permet au décideur d'exprimer *a priori* les importances relatives des différents facteurs ou les facteurs qui ont un impact significatif sur les meilleures pratiques. L'incorporation des jugements de valeurs, ou encore restriction des multiplicateurs ou encore DEA avec la région d'assurance (DEA/AR) "DEA/ Assurance Region", introduit dans les modèles des contraintes additionnelles de la forme

$$\alpha_i \leq \frac{v_i}{v_{i_d}} \leq \beta_i, \quad \forall i; \quad \delta_r \leq \frac{\mu_r}{\mu_{r_d}} \leq \gamma_r, \quad \forall r$$

(cf. aussi [35, chapitre 1])

Plusieurs applications ont été réalisées en utilisant cette technique de DEA/AR comme Thompson et al. en 1996 dans [104] pour mesurer les efficacités et les rentabilités des compagnies de pétrole aux USA ; Thompson et al. en 1997 dans [105] pour mesurer les

profits, et leurs sensibilités, des banques aux USA ; Taylor et al. en 1997 dans [96] pour mesurer les efficacités et les rentabilités des banques au Mexique. Le lecteur intéressé peut trouver des applications utilisant cette forme dans les références suivantes : [57, 60, 62, 128].

2.3.3 Modèle DEA avec des facteurs non discrétionnaires

Les modèles de base ci-dessus sont supposés être appliqués à des situations avec des facteurs discrétionnaires. En effet, il est implicitement supposé que le décideur est habilité à augmenter ou diminuer des facteurs pour améliorer les performances des DMU. Lorsque les facteurs d'appréciation (inputs ou outputs) pour la mesure de performance d'un système de production ne dépendent pas du décideur, on parle de facteurs non discrétionnaires. Il s'agit donc de facteurs non contrôlables par le décideur. Par exemple, le taux d'inflation, le taux de chômage, le taux d'analphabétisme, la moyenne d'âge, le nombre de naissance, la température, les caractéristiques d'un sol, l'immigration, la composition des ménages, etc. sont des facteurs pouvant être considérés dans certaines mesures de performance des entreprises. Pourtant ce sont des facteurs qui sont indépendants des firmes ou entreprises ou encore du gestionnaire. Dans des situations mixtes avec présence de facteurs (inputs et/ou outputs) discrétionnaires et non discrétionnaires, les différents modèles CCR ou BCC à orientation input ou output peuvent être utilisés avec quelques variantes intervenant au niveau des contraintes et de l'objectif.

Si l'on considère (cf. [26, 35])

- $I_D = \{i : i \in \{1, \dots, m\}, \text{ le facteur input } i \text{ est discrétionnaire}\}$
- $I_N = \{i : i \in \{1, \dots, m\}, \text{ le facteur input } i \text{ est non discrétionnaire}\}$
- $O_D = \{r : r \in \{1, \dots, s\}, \text{ le facteur output } r \text{ est discrétionnaire}\}$
- $O_N = \{r : r \in \{1, \dots, s\}, \text{ le facteur output } r \text{ est non discrétionnaire}\}$

on a

- $I_D \cup I_N = \{1, \dots, m\}, \quad I_D \cap I_N = \emptyset, \quad O_D \cup O_N = \{1, \dots, s\} \quad \text{et} \quad O_D \cap O_N = \emptyset.$

L'extension du modèle CCR à orientation input en présence mixte de facteurs discrétionnaires et non discrétionnaires est le suivant :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \theta^d - \varepsilon \left(\sum_{i \in I_D} s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right) \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - \theta^d x_{id} + s_i^{d-} = 0, & i \in I_D; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - x_{id} + s_i^{d-} = 0, & i \in I_N; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - y_{rd} - s_r^{d+} = 0, & r = 1, \dots, s; \\ s_i^{d-} \geq 0, \quad s_r^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, & \forall i, r, j \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

L'interprétation de la formulation (2.23) est que θ^d apparaît uniquement sur les facteurs inputs (il s'agit d'une orientation input) que le décideur peut contrôler c-à-d. les inputs discrétionnaires. De même, les variables d'écart des inputs non discrétionnaires ne doivent pas influencer le score d'efficacité de la DMU. On peut utiliser de même le modèle BCC en y ajoutant la contrainte de convexité.

La transformation du modèle CCR à orientation output adaptée pour tenir compte des facteurs non discrétionnaires est :

$$\begin{aligned}
\max \quad & \varphi^d + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r \in O_D} s_r^{d+} \right) \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - x_{id} + s_i^{d-} = 0, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - \varphi^d y_{rd} - s_r^{d+} = 0, & r \in O_D; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - y_{rd} - s_r^{d+} = 0, & r \in O_N; \\ s_i^{d-} \geq 0, \quad s_r^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, & \forall i, r, j \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

2.3.4 Modèle DEA avec des facteurs indésirables

Les modèles de base DEA peuvent s'appliquer à des problèmes de mesure de performance des DMU avec des facteurs inputs ou outputs indésirables. Nous considérons ici la situation mixte avec la présence de facteurs inputs indésirables et facteurs outputs indésirables. Le cas le plus fréquent est la présence des outputs indésirables comme c'est le cas de la pollution de l'environnement liée à certains types d'activité.

Pour appliquer DEA avec des données indésirables, Seiford et Zhu dans [92] distinguent les facteurs inputs désirables (indice D) et indésirables (indice I) et les facteurs outputs

bons (indice B) et mauvais (indice M). Soit X_j, Y_j les vecteurs des facteurs inputs et outputs respectifs de la DMU j . On note

$$X_j = \begin{pmatrix} X_j^D \\ X_j^I \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y_j = \begin{pmatrix} Y_j^B \\ Y_j^M \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, pour appliquer le modèle DEA (BCC par exemple) à orientation input (2.16), on transforme les données des facteurs inputs. On détermine un vecteur q (de dimension égale au nombre de facteurs inputs indésirable) tel que

$$\hat{X}_j^I = -X_j^I + q > 0, \quad \forall j$$

Cette translation permet d'appliquer le modèle (2.16) pour déterminer les scores d'efficacité des DMU en utilisant les nouvelles données des DMU .

Pour appliquer le modèle (2.19) BCC à orientation output, on fait la translation suivante :

$$\hat{Y}_j^M = -Y_j^M + p > 0, \quad \forall j$$

Après cette transformation, on peut déterminer les efficacités des DMU en utilisant les nouvelles données obtenues (cf. aussi [92, 114]). Une autre transformation possible consiste à appliquer DEA avec les valeurs inverses correspondants aux facteurs indésirables. On trouve dans la littérature plusieurs applications considérant les facteurs indésirables comme dans les références suivantes [30, 46, 63, 70, 90, 123, 129, 134].

2.3.5 Modèle DEA avec des données catégorielles

Pour traiter des problèmes avec des données catégorielles, les modèles DEA de base peuvent être adaptés. Pour ce faire on considère qu'un des facteurs input prend ses valeurs parmi les niveaux $k = 1, \dots, K$ et K étant le nombre de niveaux.

Soit $C^k = \{ \text{DMU } j \text{ ayant la valeur de l'input égale à } k \}$

On suppose de plus que :

$$C^k \cap C^{k'} = \emptyset, \forall k \neq k' \text{ et } \{1, \dots, n\} = C^1 \cup C^2 \cup \dots \cup C^K$$

Pour appliquer les modèles DEA, on compare les performances d'une DMU avec toutes les autres DMU de niveaux inférieurs ou égal au sien. Par exemple, si

$$d \in C^l, l \in \{1, \dots, K\}$$

pour mesurer ses performances on utilise le modèle suivant (orientation input) :

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta^d - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j \in \bigcup_{k=1}^l C^k} \lambda_j^d x_{ij} - \theta^d x_{id} + s_i^{d-} = 0, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j \in \bigcup_{k=1}^l C^k} \lambda_j^d y_{rj} - y_{rd} - s_r^{d+} = 0, & r = 1, \dots, s; \\ s_i^{d-} \geq 0, \quad s_r^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, & \forall i, r, j \in \bigcup_{k=1}^l C^k; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Les applications utilisant ces formes peuvent être trouvées dans les références suivantes [92, 114].

2.3.6 Modèle DEA avec des données imprécises : IDEA

Il peut exister des difficultés d'évaluation des performances quand les données inputs et outputs ne sont pas explicitement fournies ou sont fournies avec des imprécisions. Les données imprécises considérées dans cette sous-section concernent des données fournies de façon implicite par des intervalles. Dans ce cas les valeurs des inputs et des outputs sont fournies à partir des valeurs bornes supérieure et inférieure.

Nous considérons que la DMU j utilise la valeur $x_{ij} \in [x_{ij}^I, x_{ij}^S]$ du facteur input i pour produire $y_{rj} \in [y_{rj}^I, y_{rj}^S]$ du facteur output r . x_{ij}^I et x_{ij}^S représentent respectivement les bornes inférieure et supérieure du facteur input i pour la DMU j . y_{rj}^I et y_{rj}^S représentent respectivement les bornes inférieure et supérieure du facteur output r pour la DMU j . Les bornes supérieures et inférieures des facteurs inputs et outputs sont considérées po-

sitives (cf. [39]).

Les données n'étant pas explicitement déterminées, les modèle de CCR (2.4) à orientation input ou output (2.7) ne sont pas des programmes linéaires.

2.3.6.1 Formulation du modèle : changements de variables

Pour appliquer le modèle de CCR (2.4), l'on procède à des changements de variables de la façon suivante :

$$x_{ij} = x_{ij}^S + s_{ij}(x_{ij}^S - x_{ij}^I), \quad \forall i, j; \quad \text{on a} \quad 0 \leq s_{ij} \leq 1, \quad \forall i, j;$$

$$y_{rj} = y_{rj}^S + t_{rj}(y_{rj}^S - y_{rj}^I), \quad \forall r, j; \quad \text{on a} \quad 0 \leq t_{rj} \leq 1, \quad \forall r, j;$$

Avec ces changements on obtient le modèle suivant que l'on notera Modèle 1 IDEA :

$$\begin{aligned} \max \quad & z_d = \sum_{i=1}^m \mu_r^d [y_{rd}^S + t_{rd}(y_{rd}^S - y_{rd}^I)] \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d [y_{rj}^S + t_{rj}(y_{rj}^S - y_{rj}^I)] - \sum_{i=1}^m v_i^d [x_{ij}^S + s_{ij}(x_{ij}^S - x_{ij}^I)] \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m v_i^d [x_{id}^S + s_{id}(x_{id}^S - x_{id}^I)] = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, \quad v_i^d \geq \varepsilon, & \forall i, r; \\ 0 \leq s_{ij} \leq 1, \quad 0 \leq t_{rj} \leq 1, & \forall i, r, j; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ce modèle (2.26) n'est pas un programme linéaire à cause de la présence des termes quadratiques $v_i^d s_{ij}$ et $\mu_r^d t_{rj}$. Aussi, on refait des changements de variables de la façon suivante :

$$q_{ij} = v_i^d s_{ij}, \quad \forall i, j; \quad \text{comme} \quad 0 \leq s_{ij} \leq 1 \quad \text{on a} \quad 0 \leq q_{ij} \leq v_i^d, \quad \forall i, j;$$

$$p_{rj} = \mu_r^d t_{rj}, \quad \forall r, j; \quad \text{comme} \quad 0 \leq t_{rj} \leq 1 \quad \text{on a} \quad 0 \leq p_{rj} \leq \mu_r^d, \quad \forall r, j.$$

Avec ces changements de variables dans le modèle 1 IDEA (2.26) on obtient le modèle 2 IDEA – linéaire cette fois – suivant :

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z_d = \sum_{i=1}^m [\mu_r^d y_{rd}^S + p_{rd}(y_{rd}^S - y_{rd}^I)] \\
 \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s [\mu_r^d y_{rj}^S + q_{rj}(y_{rj}^S - y_{rj}^I)] - \sum_{i=1}^m [v_i^d x_{ij}^S + q_{ij}(x_{ij}^S - x_{ij}^I)] \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m [v_i^d x_{id}^S + q_{id}(x_{id}^S - x_{id}^I)] = 1; \\ 0 \leq q_{ij} \leq v_i^d, & \forall i, j; \\ 0 \leq p_{rj} \leq \mu_r^d, & \forall r, j; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, & v_i^d \geq \varepsilon, & \forall i, r; \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

2.3.6.2 Classification des DMU

Les modèles suivants(cf. [39]) sont utilisés pour déterminer les limites inférieure et supérieure des scores d'efficacité des DMU. Nous noterons ces modèles respectivement modèle 3 IDEA et modèle 4 IDEA.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z_d^S = \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd}^S \\
 \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj}^S - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij}^I \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj}^I - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij}^S \leq 0, & j = 1, \dots, n, \quad j \neq d; \\ \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id}^I = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, & v_i^d \geq \varepsilon, & \forall i, r. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z_d^I = \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd}^I \\
 \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj}^S - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij}^I \leq 0, & j = 1, \dots, n, \quad j \neq d; \\ \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj}^I - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij}^S \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id}^I = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, & v_i^d \geq \varepsilon, & \forall i, r; \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Le premier modèle (2.28) fournit la limite supérieure possible du score d'efficacité de la DMU d et le second (2.29) fournit la limite inférieure possible du score d'efficacité de la DMU d . A partir de ces modèles on classe les DMU en trois catégories (cf. [39, 55]) :
– les DMU qui restent efficaces quelque soit le plan de production respectant les contraintes

de bornes supérieure et inférieure. Si l'on note E^{++} le sous-ensemble contenant ces DMU, on a :

$$E^{++} = \{j \in \{1, \dots, n\} : \tilde{z}_d^l = 1\}.$$

– les DMU qui peuvent être efficaces pour certains plans de production (le meilleur des cas) et non efficaces pour d'autres plans de production (le pire des cas). Si l'on note ce sous-ensemble E^+ , on a :

$$E^+ = \{j \in \{1, \dots, n\} : \tilde{z}_d^l < 1 \quad \& \quad \tilde{z}_d = 1\}.$$

– les DMU qui restent inefficaces quelque soit la combinaison du plan de production input-output adopté. Si E^- désigne ce sous-ensemble, on a :

$$E^- = \{j \in \{1, \dots, n\} : \tilde{z}_d < 1\}.$$

Plusieurs applications ont utilisé cette approche pour mesurer les performances en présence de données (inputs et outputs) de nature ordinale (relations faible ou forte) (cf. [6, 34, 58, 67, 71, 114, 131, 132]).

2.4 Autres variantes des modèles CCR et BCC

2.4.1 Modèle additif

Les modèles additifs sont des variantes des modèles de CCR et BCC (cf. [14]) qui donnent des mesures non radiales des efficacités de performance des unités. Des poids sont attribués aux différents facteurs inputs et outputs. Considérant les poids respectifs g_i^- et g_r^+ associés respectivement au facteur input i et au facteur output r , on obtient les formulations suivantes :

$$\begin{aligned}
\max \quad & f_d = \sum_{i=1}^m g_i^- s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s g_r^+ s_r^{d+} \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - s_r^{d+} = y_{rd}, & r = 1, \dots, s; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} + s_i^- = x_{id}, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d = 1; \\ s_i^{d-} \geq 0, \quad s_r^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, \quad \forall i, r, j; \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

La forme duale de ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \omega_d = \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} - \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd} + u^d \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} - \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} + u^d \geq 0, & j = 1, \dots, n; \\ v_i^d \geq g_i^-, \quad \mu_r^d \geq g_r^+, & \forall i, r; \\ u^d \in \mathbb{R}; \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Lorsque les poids des objectifs sont supposés égaux, on obtient les formulations suivantes (cf. [26]) :

$$\begin{aligned}
\max \quad & f_d = \sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^d - s_r^{d+} = y_{rd}, & r = 1, \dots, s; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} + s_i^- = x_{id}, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d = 1; \\ s_i^{d-} \geq 0, \quad s_r^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, & \forall i, r, j; \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Le problème dual s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \omega_d = \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} - \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd} + u^d \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} - \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} + u^d \geq 0, & j = 1, \dots, n; \\ v_i^d \geq 1, \quad \mu_r^d \geq 1, & \forall i, r; \\ u^d \in \mathbb{R}; \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Définition . Une DMU d est efficace si et seulement si, $\tilde{f}_d = \tilde{\omega}_d = 0$.

Dans la littérature, on rencontre des applications utilisant les modèles additifs. Le

lecteur intéressé peut se référer aux travaux dans [14, 71].

La frontière efficace obtenue en utilisant le modèle additif (2.32) est la même que le modèle BCC à orientation output (2.18). Il y a équivalence entre BCC efficacité et efficacité avec le modèle additif. Mais les deux modèles ne donnent pas forcément les mêmes scores d'efficacité dans le cas des DMU non efficaces.

En reprenant l'exemple 2.1 et en utilisant le modèle additif avec des poids égaux associés aux différents facteurs, on obtient les problèmes linéaires suivants à résoudre.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_d = s^{d-} + s^{d+} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \lambda_A^d + 2\lambda_B^d + 3\lambda_C^d + 4\lambda_D^d + 4.8\lambda_E^d + 5\lambda_F^d + 6\lambda_G^d + 6.6\lambda_H^d + 7\lambda_I^d - x_d + s^{d-} = 0; \\ 10\lambda_A^d + 25\lambda_B^d + 36\lambda_C^d + 44\lambda_D^d + 40\lambda_E^d + 50\lambda_F^d + 54\lambda_G^d + 52\lambda_H^d + 55\lambda_I^d - y_d - s^{d+} = 0; \\ \lambda_A^d + \lambda_B^d + \lambda_C^d + \lambda_D^d + \lambda_E^d + \lambda_F^d + \lambda_G^d + \lambda_H^d + \lambda_I^d = 1; \\ s^{d-} \geq 0, \quad s^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, \quad j = A, \dots, I; \end{cases} \end{aligned}$$

Le problème dual sera donc :

$$\begin{aligned} \max \quad & \omega_d = v^d x_d - \mu^d y_d + u^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} v^d - 10\mu^d + u^d \geq 0; & 2v^d - 25\mu^d + u^d \geq 0; \\ 3v^d - 36\mu^d + u^d \geq 0; & 4v^d - 44\mu^d + u^d \geq 0 \\ 4.8v^d - 40\mu^d + u^d \geq 0; & 5v^d - 50\mu^d + u^d \geq 0 \\ 6v^d - 54\mu^d + u^d \geq 0; & 6.6v^d - 52\mu^d + u^d \geq 0 \\ 7v^d - 55\mu^d + u^d \geq 0; & \\ \mu^d \geq 1, \quad v^d \geq 1; & u^d \in \mathbb{R}; \end{cases} \end{aligned}$$

Les résultats sont fournis au tableau 2.6.

DMU	Primal				Dual			DMU	Primal				Dual		
	$\tilde{\omega}_d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	$\tilde{s}^{d-}$	$\tilde{s}^{d+}$	$\tilde{v}^d$	$\tilde{\mu}^d$	$\tilde{u}^d$		$\tilde{\omega}_d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	$\tilde{s}^{d-}$	$\tilde{s}^{d+}$	$\tilde{v}^d$	$\tilde{\mu}^d$	$\tilde{u}^d$
A	0	$\tilde{\lambda}_A = 1$	0	0	15	1	-5	B	0	$\tilde{\lambda}_B = 1$	0	0	15	1	-5
C	0	$\tilde{\lambda}_C = 1$	0	0	11	1	3	D	0	$\tilde{\lambda}_D = 1$	0	0	8	1	12
E	$\frac{44}{5}$	$\tilde{\lambda}_D = \frac{1}{5}, \tilde{\lambda}_F = \frac{4}{5}$	0	$\frac{44}{5}$	6	1	20	F	0	$\tilde{\lambda}_F = 1$	0	0	6	1	20
G	0	$\tilde{\lambda}_G = 1$	0	0	4	1	30	H	$\frac{13}{5}$	$\tilde{\lambda}_G = \frac{2}{5}, \tilde{\lambda}_I = \frac{3}{5}$	0	$\frac{13}{5}$	1	1	48
I	0	$\tilde{\lambda}_I = 1$	0	0	1	1	48								

* valeurs non nulles

Tableau 2.6 – Solutions avec modèle additif à orientation output

Sur la figure 2.9, on a l'enveloppe représentant la frontière efficace en utilisant le modèle additif. Sur cette figure, en considérant l'orientation input, la projection de la DMU E est E' et celle de H est H'.

- $x_{E'} = \hat{x}_E = \frac{1}{5}x_D + \frac{4}{5}x_F = x_E - 0$ et $y_{E'} = \hat{y}_E = \frac{1}{5}y_D + \frac{4}{5}y_F = y_E + \frac{44}{5}$
- $x_{H'} = \hat{x}_H = \frac{2}{5}x_G + \frac{3}{5}x_I = x_H - 0$ et $y_{H'} = \hat{y}_H = \frac{2}{5}y_G + \frac{3}{5}y_I = y_H + \frac{13}{5}$

On constate bien que la frontière efficace obtenue en utilisant le modèle additif (2.32) (figure 2.9) est la même que le modèle BCC à orientation output (2.18) (figure 2.7). Mais les deux modèles ne donnent pas forcément les mêmes scores d'efficacité dans le cas des DMU non efficaces. Rappelons qu'avec le modèle BCC à orientation output (Tableau 2.5), les scores d'efficacité de E, H étaient respectivement $\frac{61}{50}, \frac{21}{20}$ contre $\frac{44}{5}, \frac{13}{5}$ pour le modèle additif à orientation output (Tableau 2.6).

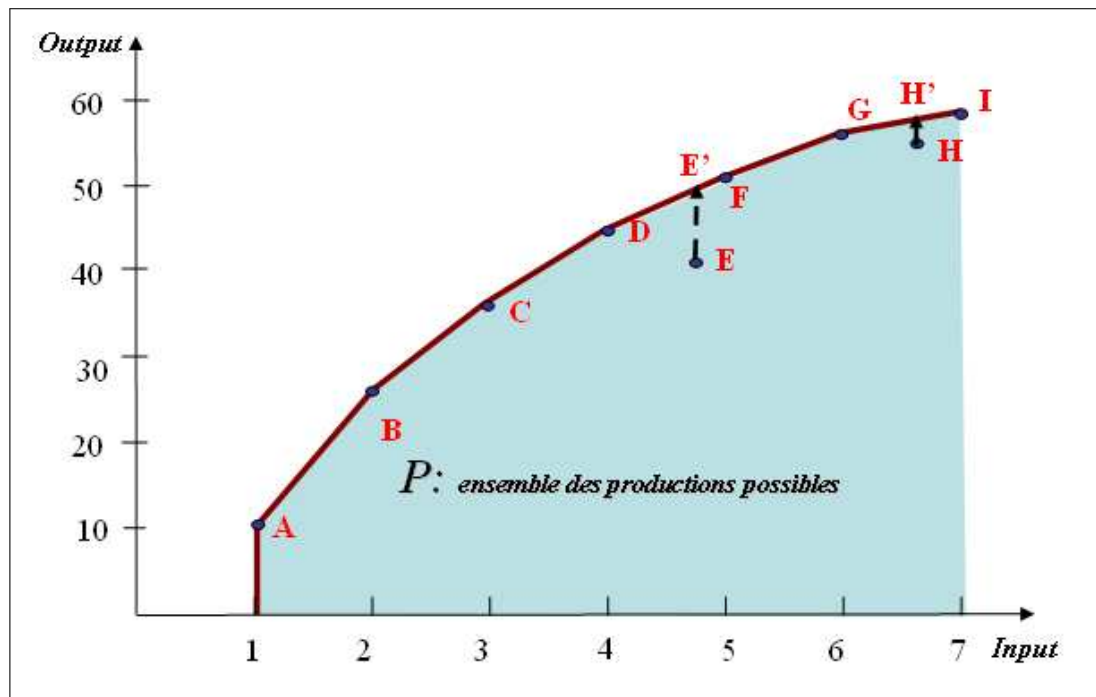


Figure 2.9 – Représentation de la frontière efficace en utilisant le modèle additif à orientation output

2.4.2 Modèle multiplicatif

Le modèle multiplicatif est formulé comme suit (cf. [14]) :

$$\begin{aligned} \max \quad & \gamma^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\lambda_j^d} \leq x_{id}, & i = 1, \dots, m; \\ \prod_{j=1}^n y_{rj}^{\lambda_j^d} \geq \gamma y_{rd}, & r = 1, \dots, s; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d = 1; \\ \gamma^d \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, & j = 1, \dots, n; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

La formulation ci-dessus est équivalente à la forme log-linéaire suivante (cf. [26]) :

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d \log(x_{ij}) \leq \log(x_{id}), & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d \log(y_{rj}) \geq \delta^d \log(y_{rd}), & r = 1, \dots, s; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d = 1; \\ \lambda_j^d \geq 0, & j = 1, \dots, n; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Définition . La DMU est efficace si et seulement si , $\tilde{\delta}^d = 1$.

En reprenant l'exemple 2.1 et en utilisant la forme log-linéaire, on obtient le problème suivant à résoudre pour chacune des DMU :

$$\begin{aligned} \max \quad & \delta^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \log(2)\lambda_B^d + \log(3)\lambda_C^d + \log(4)\lambda_D^d + \log(4.8)\lambda_E^d + \\ \log(5)\lambda_F^d + \log(6)\lambda_G^d + \log(6.6)\lambda_H^d + \log(7)\lambda_I^d - \log(x_d) \leq 0; \\ \log(10)\lambda_A^d + \log(25)\lambda_B^d + \log(36)\lambda_C^d + \log(44)\lambda_D^d + \log(40)\lambda_E^d + \\ \log(50)\lambda_F^d + \log(54)\lambda_G^d + \log(52)\lambda_H^d + \log(55)\lambda_I^d - \delta^d \log(y_d) \geq 0; \\ \lambda_A^d + \lambda_B^d + \lambda_C^d + \lambda_D^d + \lambda_E^d + \lambda_F^d + \lambda_G^d + \lambda_H^d + \lambda_I^d = 1; \\ \lambda_j^d \geq 0, & j = A, \dots, J \end{cases} \end{aligned}$$

Les résultats sont fournis au tableau 2.7.

DMU	$\tilde{\delta}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	DMU	$\tilde{\delta}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$
A	1	$\tilde{\lambda}_A = 1$	B	1	$\tilde{\lambda}_B = 1$
C	1	$\tilde{\lambda}_C = 1$	D	1	$\tilde{\lambda}_D = 1$
E	1.0542	$\tilde{\lambda}_D = 0.1829, \tilde{\lambda}_F = 0.8171$	F	1	$\tilde{\lambda}_F = 1$
G	1	$\tilde{\lambda}_G = 1$	H	1.0124	$\tilde{\lambda}_G = 0.3817, \tilde{\lambda}_I = 0.6183$
I	1	$\tilde{\lambda}_I = 1$			

* valeurs non nulles

Tableau 2.7 – Solutions avec le modèle multiplicatif

Sur la figure 2.10, on a l'enveloppe représentant la frontière efficace en utilisant le modèle multiplicatif. La projection de E est E' et celle de H est H'. La frontière efficace dans ce cas est composée de morceaux de courbes de la fonction exponentielle.

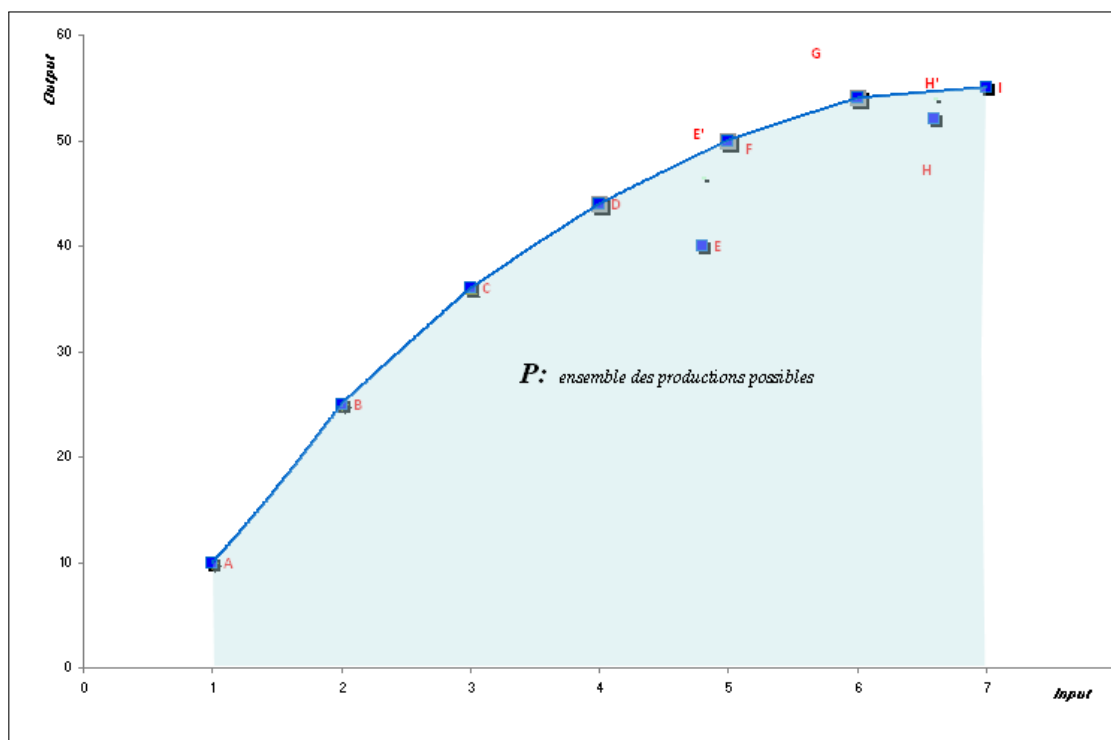


Figure 2.10 – Représentation de la frontière efficace en utilisant le modèle multiplicatif

2.4.3 Modèle “free disposal hull (FDH)”

Le modèle FDH introduit par Tulkens dans [108] est une variante des modèles DEA. Tulkens propose un modèle de mesure de performance basé sur les technologies de référence. La plupart des modèles DEA comparent l'efficacité des DEA à partir de la frontière efficace. Le modèle FDH mesure l'efficacité seulement à partir de l'ensemble des productions de référence $\mathcal{P}_R$ qui contient au moins tous les plans de productions observés et tout plan de production (DMU) non observé est dominé par au moins un autre (DMU). $\mathcal{P}_R \subset \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des productions possibles avec le modèle BCC. Il est donc clair que BCC efficace implique FDH efficace mais pas l'inverse. Les DMU sont caractérisées par leur plan de production X (inputs) et Y outputs. On peut trouver les commentaires et des applications sur le modèle FDH dans les références suivantes [31, 68, 72, 83, 122, 124–126].

Le modèle FDH consiste à résoudre le problème (2.36).

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta^d - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} - \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} + \theta^d x_{id} - s_i^{d-} = 0, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - y_{rd} - s_r^{d+} = 0, & r = 1, \dots, s; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d = 1; \\ \lambda_j^d \in \{0, 1\}, & j = 1, \dots, n; \\ s_i^{d-} \geq 0, \quad s_r^{d+} \geq 0, & \forall i, r; \quad \theta^d \in \mathbb{R}; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Définition . FDH DEA efficacité (cf. [108])

La performance de la DMU d est entièrement (100%) efficace si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\tilde{\theta}^d = 1$;
- (ii) $\tilde{s}_i^{d-} = 0, \quad \forall i \quad \text{et} \quad \tilde{s}_r^{d+} = 0, \quad \forall r.$

Le problème FDH ci-dessus (2.36) est un problème linéaire en variables mixtes où les variables λ_j^d sont cette fois-ci binaires. θ optimal peut être calculé de la façon suivante (cf. [108, 125]) :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^d = \min_{j \in D_d^{\geq}} \quad & \max_{i=1, \dots, m} \left\{ \frac{x_{ij}}{x_{id}} \right\} \\ \text{avec} \quad & D_d^{\geq} = \{j \in \{1, \dots, n\} : (X_j \leq X_d, X_j \neq X_d) \quad \& \quad Y_j \geq Y_d\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Le modèle FDH ne mesure pas l'efficacité à partir d'une frontière de production mais à partir des plans de production (DMU) de référence qui ne sont pas dominés au sens multicritère (inputs-outputs). Thrall dans [106] attire l'attention sur certains points dans l'utilisation des modèles FDH. Il démontre que l'efficacité au sens FDH ne garantit pas l'efficacité des prix et s'interroge donc sur la signification économique de l'efficacité au sens FDH, surtout lorsque la DMU est FDH efficace mais non BCC efficace. En effet, les formes multiplicatives des modèles DEA font un lien entre l'efficacité globale au sens DEA et les efficacités relatives aux coûts et prix d'un point de vue économique. Les variables multiplicatives, associées aux facteurs outputs, donnent l'interprétation du revenu global ou bénéfice tandis que celles associées aux facteurs inputs, donnent l'interprétation sur les coûts. Thrall justifie ses inquiétudes dans l'article [106] intitulé "*What the economic meaning of FDH ?*" publié dans *Journal of Productivity Analysis*". En appliquant le modèle FDH au même exemple que précédemment, on obtient les problèmes linéaires suivants à résoudre pour chacune des DMU :

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta^d - \varepsilon(s^{d-} + s^{d+}) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \lambda_A^d + 2\lambda_B^d + 3\lambda_C^d + 4\lambda_D^d + 4.8\lambda_E^d + 5\lambda_F^d + 6\lambda_G^d + 6.6\lambda_H^d + 7\lambda_I^d - \theta^d x_d + s^{d-} = 0; \\ 10\lambda_A^d + 25\lambda_B^d + 36\lambda_C^d + 44\lambda_D^d + 40\lambda_E^d + 50\lambda_F^d + 54\lambda_G^d + 52\lambda_H^d + 55\lambda_I^d - y_d - s^{d+} = 0; \\ \lambda_A^d + \lambda_B^d + \lambda_C^d + \lambda_D^d + \lambda_E^d + \lambda_F^d + \lambda_G^d + \lambda_H^d + \lambda_I^d = 1; \\ s^{d-} \geq 0, \quad s^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \in \{0, 1\} \quad j = A, \dots, I; \end{cases} \end{aligned}$$

Les résultats sont fournis au tableau 2.8.

Seules les DMU E et H ne sont pas efficaces. Sur la figure 2.11, on a l'enveloppe repré-

DMU	$\tilde{\theta}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	$\tilde{s}^{d-}$	$\tilde{s}^{d+}$	DMU	$\tilde{\theta}^d$	$\tilde{\lambda}^{d*}$	$\tilde{s}^{d-}$	$\tilde{s}^{d+}$
A	1	$\tilde{\lambda}_A = 1$	0	0	B	1	$\tilde{\lambda}_B = 1$	0	0
C	1	$\tilde{\lambda}_C = 1$	0	0	D	1	$\tilde{\lambda}_D = 1$	0	0
E	$\frac{5}{6}$	$\tilde{\lambda}_D = 1$	0	4	F	1	$\tilde{\lambda}_F = 1$	0	0
G	1	$\tilde{\lambda}_G = 1$	0	0	H	$\frac{10}{11}$	$\tilde{\lambda}_G = 1$	0	2
I	1	$\tilde{\lambda}_I = 1$	0	0					

* valeurs non nulles

Tableau 2.8 – Solutions avec le modèle FDH

sentant la frontière efficace en utilisant le modèle FDH. Sur cette figure, la projection de la DMU E est E' et celle de H est H'. Ces projections sont obtenues de la façon suivante :

- $x_{E'} = \hat{x}_E = \frac{5}{6}x_E - 0 = x_D$ et $y_{E'} = \hat{y}_E = y_E + 4 = y_D$
- $x_{H'} = \hat{x}_H = \frac{10}{11}x_H - 0 = x_G$ et $y_{H'} = \hat{y}_H = y_H + 2 = y_G$

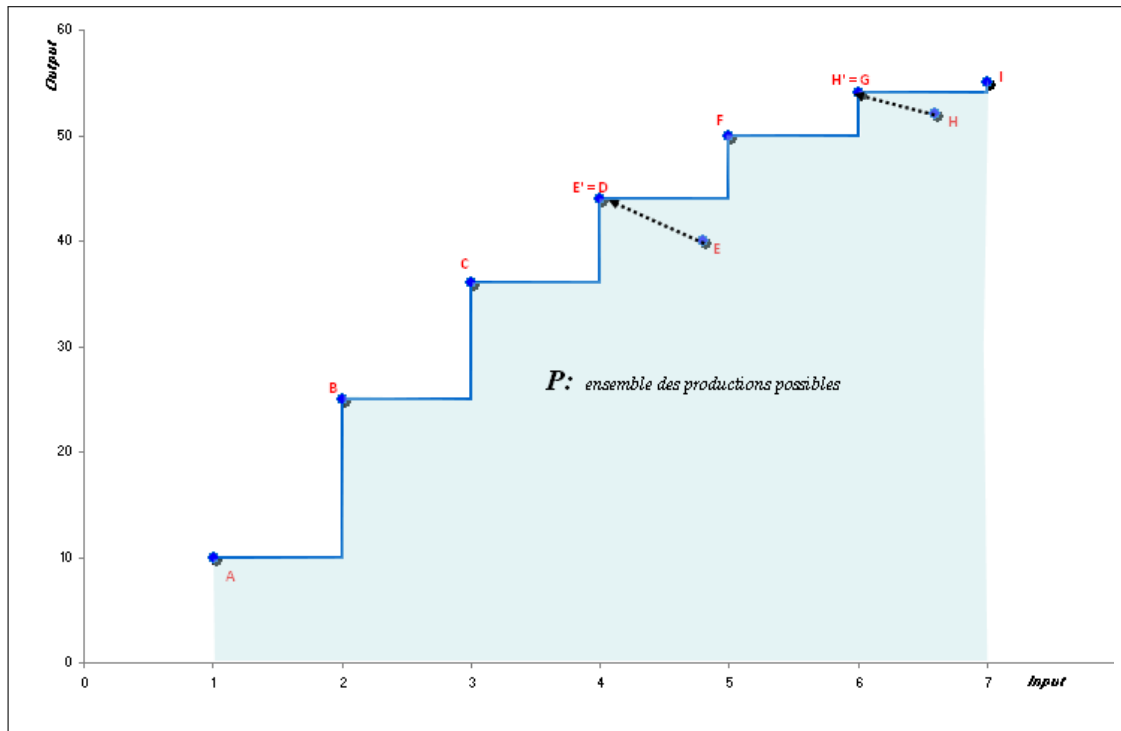


Figure 2.11 – Représentation de la frontière efficace en utilisant le modèle FDH

2.4.4 Quelques autres variantes des modèles DEA

2.4.4.1 DEA généralisé

Nakayama et al. [42, chapitre 7, pp 333-368], Yun et al. [125, 126], introduisent un modèle qu'ils appellent "*Generalized Data Envelopment Analysis (GDEA)*" qui couvre, sous certaines conditions, les deux modèles de base CCR et BCC, et celui FDH. Le

modèle GDEA est défini par le problème (2.38) :

$$\begin{aligned} \max \quad & \Delta^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \Delta^d \leq \tilde{\Delta}_j^d + \alpha \left(\sum_{r=1}^s \mu_r^d (y_{rd} - y_{rj}) + \sum_{i=1}^m v_i^d (x_{ij} - x_{id}) \right), & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{r=1}^s \mu_r^d + \sum_{i=1}^m v_i^d = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, \quad v_i^d \geq \varepsilon, \quad \forall i, r; \quad \Delta^d \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.38)$$

où $\tilde{\Delta}_j^d$ – qui dépend des variables du problème – est défini par

$$\tilde{\Delta}_j^d = \max_{r=1, \dots, s; i=1, \dots, m} \left\{ \mu_r^d (y_{rd} - y_{rj}), \quad v_i^d (x_{ij} - x_{id}) \right\}$$

et α est un nombre réel positif.

A partir de ce modèle, les auteurs définissent la notion de “ α -efficacité” de la DMU d :

Définition . d est “ α -efficace” si et seulement si la valeur optimale $\tilde{\Delta}^d$ (qui est toujours ≥ 0) est égale à zéro.

L’équivalence avec les trois modèles DEA (CCR, BCC et FDH) est fournie par la propriété suivante (cf. [124–126]).

Propriété 2.5. (Propriété d’équivalence)

- a) La DMU d est FDH efficace (cf. section 2.4.3) si et seulement si elle est “ α -efficace” pour un nombre α suffisamment petit.
- b) La DMU d est BCC efficace (cf. section 2.2.2) si et seulement si elle est “ α -efficace” pour un nombre α suffisamment grand.
- c) La DMU d est CCR efficace (cf. section 2.2.1) si et seulement si elle est “ α -efficace” pour un nombre α suffisamment grand, mais cette fois relativement à un modèle (GDEA’) qui consiste à ajouter dans le problème (2.38) la contrainte additionnelle

$$\sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 0.$$

2.4.4.2 Amélioration d'une DMU inefficace

Thanassoulis et Dyson dans [103], proposent une approche basée sur les modèles DEA qui permet de déterminer les objectifs d'amélioration d'une DMU inefficace en tenant compte des préférences. Dans les modèles classiques DEA, les différents facteurs inputs et outputs sont supposés tous flexibles et contrôlables. Thanassoulis et Dyson développent un modèle qui permet de mesurer les performances DEA, d'une part, et de déterminer les objectifs spécifiques mesurés pour les DMU inefficaces, d'autre part. Ces objectifs spécifiques consistent par exemple à incorporer dans les modèles les facteurs individuels ou collectifs à améliorer. Il s'agit en fait des facteurs que le décideur peut trouver facilement contrôlables. Si l'on considère un exemple de mesure de performance de l'enseignement de base où parmi les facteurs figurent le personnel, le budget, les infrastructures, etc., pour une unité inefficace, il peut être plus facile d'incorporer le fait que le responsable a (peut avoir) plus de facilités à gérer les infrastructures, le personnel que le budget. Dans ce cas, les modèles de Thanassoulis et Dyson permettent d'incorporer cette information dans la flexibilité ou la préférence sur les facteurs à améliorer pour une unité inefficace. Lorsqu'un facteur input i_d est considéré seul facteur prioritaire à améliorer pour une DMU d , le modèle suivant est considéré pour mesurer son efficacité et estimer les quantités optimales :

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta^d - \varepsilon \left(\sum_{i \neq i_d}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{idj} - \theta^d x_{id} = 0; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} + s_i^{d-} - x_{id} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq i_d; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - y_{rd} - s_r^{d+} = 0, \quad r = 1, \dots, s; \\ s_i^{d-} \geq 0, \quad s_r^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, \quad \forall i, r, j; \quad \theta^d \in \mathbb{R}; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ce modèle est une modification du modèle CCR (2.5). Dans ce modèle, θ^d , le score d'efficacité est proportionnelle au facteur input prioritaire à minimiser.

Définition . DEA efficacité [103]

La DMU d est efficace si et seulement si, $\tilde{\theta}^d = 1$ et $\tilde{s}_i^{d-} = 0$, $\tilde{s}_r^{d+} = 0$, $\forall i, r$.

Lorsque la DMU d est inefficace, les objectifs optimaux recherchés sont

$$\hat{x}_{id}, \quad i = 1, \dots, m; \quad \hat{y}_{rd}, \quad r = 1, \dots, s;$$

définis de la façon suivante :

- $\hat{x}_{i_d d} = \tilde{\theta}^d x_{i_d d}$ et $\hat{x}_{i d} = x_{i d} - \tilde{s}^{d-}$, $i \neq i_d$, $i = 1, \dots, m$;
- $\hat{y}_{r d} = y_{r d} + \tilde{s}^{d+}$, $r = 1, \dots, s$.

De façon identique, lorsqu'il s'agit d'un facteur output r_d seul facteur prioritaire à améliorer pour une DMU d , le modèle suivant est considéré pour mesurer son efficacité et estimer les quantités optimales :

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi^d + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r \neq r_d}^s s_r^{d+} \right) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{r_d j} - \varphi^d y_{r_d d} = 0; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{i j} + s_i^{d-} - x_{i d} = 0, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{r j} - y_{r d} - s_r^{d+} = 0, & r = 1, \dots, s, \quad r \neq r_d; \\ s_i^{d-} \geq 0, \quad s_r^{d+} \geq 0, \quad \lambda_j^d \geq 0, \quad \forall i, r, j; \quad \varphi^d \in \mathbb{R}; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ce modèle est une modification du modèle CCR (2.8) et de même que le modèle précédent, φ^d , le score d'efficacité est proportionnelle au facteur output prioritaire à maximiser.

Définition . DEA efficacité (cf. [103])

La DMU d est efficace si et seulement si, $\tilde{\varphi}^d = 1$ et $\tilde{s}_i^{d-} = 0$, $\tilde{s}_r^{d+} = 0$, $\forall i, r$.

De la même façon que pour les inputs, lorsque la DMU d est inefficace, les objectifs optimaux recherchés sont

- $\hat{x}_{i d}$, $i = 1, \dots, m$; $\hat{y}_{r d}$, $r = 1, \dots, s$
- $\hat{x}_{i d} = x_{i d} - \tilde{s}^{d-}$, $i = 1, \dots, m$;
- $\hat{y}_{r_d d} = \tilde{\varphi}^d y_{r_d d}$ et $\hat{y}_{r d} = y_{r d} + \tilde{s}^{d+}$, $r = 1, \dots, s$, $r \neq r_d$.

Ces deux modèles sont généralisés lorsqu'il existe un sous-ensemble de facteurs inputs et outputs prioritaires à améliorer, avec des valeurs de jugements représentant des préférences associées à chaque facteur à améliorer. Pour ce faire, on considère, I_d et O_d les sous-ensembles respectifs des facteurs inputs et outputs à améliorer.

$$I_d \subset \{1, \dots, m\} \quad \text{et} \quad O_d \subset \{1, \dots, s\}.$$

Le modèle suivant est considéré pour mesurer les efficacités et déterminer les mesures des objectifs optimaux en tenant compte des priorités du décideur pour l'amélioration des performances de la DMU d .

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{r \in O_d} \omega_r^+ \varphi_r^d - \sum_{i \in I_d} \omega_i^- \theta_i^d + \varepsilon \left(\sum_{i \notin I_d} s_i^{d-} + \sum_{r \notin O_d} s_r^{d+} \right) \\
 \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - \varphi_r^d y_{rd} = 0, & r \in O_d; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - \theta_i^d x_{id} = 0, & i \in I_d; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} + s_i^{d-} - x_{id} = 0, & i \notin I_d; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - y_{rd} - s_r^{d+} = 0, & r \notin O_d; \\ \varphi_r^d \geq 1, r \in O_d, \theta_i^d \leq 1, & i \in I_d; \\ s_i^{d-} \geq 0, s_r^{d+} \geq 0, \lambda_j^d \geq 0, & \forall i, r, j; \\ \varphi_r^d \in \mathbb{R}, r \notin O_d, \theta_i^d \in \mathbb{R}, & i \notin I_d; \end{cases} \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

ω_r^+, ω_i^- sont les poids associés au facteur output r et au facteur input i , respectivement. Ces poids représentent l'importance qu'associe le décideur à l'amélioration de chaque facteur considéré.

Définition . DEA efficacité (cf. [103])

La DMU d est efficace si et seulement si

$$\tilde{\varphi}_r^d = \tilde{\theta}_i^d = 1, \quad \forall r \in O_d, \quad \forall i \in I_d \quad \text{et} \quad \tilde{s}_i^{d-} = 0, \quad \tilde{s}_r^{d+} = 0, \quad \forall i \notin I_d, \quad \forall r \notin O_d.$$

Pour une DMU d inefficace, les objectifs optimaux recherchés

$$\hat{x}_{id}, \quad i = 1, \dots, m; \quad \hat{y}_{rd}, \quad r = 1, \dots, s$$

sont obtenus de la façon suivante :

- $\hat{x}_{id} = \tilde{\theta}_i^d x_{id}, \quad \forall i \in I_d, \quad \hat{x}_{id} = x_{id} - \tilde{s}_i^{d-}, \quad \forall i \notin I_d;$
- $\hat{y}_{rd} = \tilde{\varphi}_r^d y_{rd}, \quad \forall r \in O_d, \quad \hat{y}_{rd} = y_{rd} + \tilde{s}_r^{d+}, \quad \forall r \notin O_d.$

2.5 Conclusion et commentaires

De façon générale, les unités d'un système d'organisation utilisent des facteurs de production quantitatifs ou qualitatifs et mesurables par le décideur pour produire des biens et services. Les inputs sont ce que les unités utilisent pour fonctionner et les outputs sont les résultats du fonctionnement. Considérons par exemple, un programme de développement de la production agricole. Les décideurs et les partenaires (financiers et techniques) fixent avant tout l'objectif global. A titre d'exemple, dans le Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté au Burkina, cet objectif global consiste à *“élargir les opportunités d'emploi et d'activités génératrices de revenus pour les pauvres”*⁴. L'amélioration de cet objectif passe par des objectifs intermédiaires qui sont : *“réduire la vulnérabilité de l'activité agricole”* (fertilité des terres, eau), *“intensifier et moderniser l'activité agricole”* (équipements et intrants agricoles), *“accroître et diversifier les revenus des ruraux ”* (crédits et financements). Dans une telle situation, on peut distinguer facilement les outputs qui sont les produits agricoles et les inputs qui représenteront le capital (terre, eau, humain, matériel, financement, etc.). L'utilisation de DEA permet de mesurer les efficacités des différentes unités contrôlées (producteurs), de déterminer celles qui sont efficaces et enfin d'orienter les autres, non efficaces, afin qu'elles améliorent leur productivité.

Les différentes variantes de l'approche DEA permettent de proposer un modèle adapté à des situations particulières en tenant compte de la connaissance implicite ou non de la nature de la technologie utilisée afin de mieux l'approcher. Nous utiliserons dans la partie III, certains modèles pour des applications concrètes, pour analyser les performances des directions décentralisées de l'enseignement de base du Burkina de 2001 à 2005 (cf. chapitre 9) ; pour analyser les districts sanitaires du Burkina pour deux années (2003 et 2004) (cf. chapitre 10) ; pour analyser les performances de quelques entreprises du Burkina par domaine d'activité et en tenant compte du chiffre d'affaires de l'année 2004 (cf. chapitre 11). Il est aussi nécessaire de souligner l'aspect multicritère de l'approche

⁴Axe 3 : Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté (CSLP), Burkina Faso, 2002

DEA, aspect que nous analyserons au chapitre 5.

Nous verrons dans le prochain chapitre, quelques notions utilisées en micro-économie pour faire des analyses de performance et les interprétations simples qu'apportent l'utilisation de l'approche DEA.

Les deux tableaux suivants 2.9 et 2.10 résument les deux modèles DEA les plus couramment utilisés.

Formulation	Modèle	Type
$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \frac{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{ij}} \leq 1, \forall j; & \frac{v_r^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \geq \varepsilon, \quad v_r^d \geq 0, \forall r; \quad \frac{\vartheta_i^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \geq \varepsilon, \quad \vartheta_i^d \geq 0, \forall i; \end{cases} \end{aligned}$	CCR	Fractionnel
$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd} + u^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \frac{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rj} + u^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{ij}} \leq 1, \forall j; \\ \frac{v_r^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \geq \varepsilon, \quad v_r^d \geq 0, \forall r; \quad \frac{\vartheta_i^d}{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}} \geq \varepsilon, \quad \vartheta_i^d \geq 0, \forall i; \quad u^d \in \mathbb{R}; \end{cases} \end{aligned}$	BCC	Fractionnel
$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} \leq 0, \forall j; & \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 1; \quad \mu_r^d \geq \varepsilon, \quad v_i^d \geq \varepsilon, \forall i, r; \end{cases} \end{aligned}$	CCR	Multiplicatif
$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd} + u^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} + u^d \leq 0, \forall j; & \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, \quad v_i^d \geq \varepsilon, \forall i, r; & u^d \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$	BCC	Multiplicatif
$\begin{aligned} \min \quad & \theta^d - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - \theta^d x_{id} + s_i^{d-} = 0, \forall i; & \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - y_{rd} - s_r^{d+} = 0, \forall r; \\ s_i^{d-} \geq 0, \forall i; & s_r^{d+} \geq 0, \forall r; \quad \lambda_j^d \geq 0, \forall j; \end{cases} \end{aligned}$	CCR	Enveloppement
$\begin{aligned} \min \quad & \theta^d - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - \theta^d x_{id} + s_i^{d-} = 0, \forall i; & \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - y_{rd} - s_r^{d+} = 0, \forall r; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d = 1; & s_i^{d-} \geq 0, \forall i; \quad s_r^{d+} \geq 0, \forall r; \quad \lambda_j^d \geq 0, \forall j; \end{cases} \end{aligned}$	BCC	Enveloppement

Tableau 2.9 – Modèles DEA : CCR et BCC à orientation input

Formulation	Modèle	Type
$\min \frac{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id}}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}}$ $\text{s.c.} \quad \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{ij}}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rj}} \geq 1, \forall j; & \frac{v_r^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}} \geq \varepsilon, \quad v_r^d \geq 0, \forall r; \frac{\vartheta_i^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}} \geq \varepsilon, \quad \vartheta_i^d \geq 0, \forall i; \end{cases}$	CCR	Fractionnel
$\min \frac{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{id} + u^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}}$ $\text{s.c.} \quad \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^m \vartheta_i^d x_{ij} + u^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rj}} \geq 1, \forall j; \\ \frac{v_r^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}} \geq \varepsilon, \quad v_r^d \geq 0, \forall r; \frac{\vartheta_i^d}{\sum_{r=1}^s v_r^d y_{rd}} \geq \varepsilon, \quad \vartheta_i^d \geq 0, \forall i; \quad u^d \in \mathbb{R}; \end{cases}$	BCC	Fractionnel
$\min \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id}$ $\text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} \leq 0, \forall j; & \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, \forall r; & v_i^d \geq \varepsilon, \forall i; \end{cases}$	CCR	Multiplicatif
$\min \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} + u^d$ $\text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} - u^d \leq 0, \forall j; & \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, \forall r; & v_i^d \geq \varepsilon, \forall i; \quad u^d \in \mathbb{R}; \end{cases}$	BCC	Multiplicatif
$\max \quad \varphi^d + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right)$ $\text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - x_{id} + s_i^{d-} = 0, \forall i; & \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - \varphi^d y_{rd} - s_r^{d+} = 0, \forall r; \\ s_i^{d-} \geq 0, \forall i; & s_r^{d+} \geq 0, \forall r; \quad \lambda_j^d \geq 0, \forall j; \end{cases}$	CCR	Enveloppement
$\max \quad \varphi^d + \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^{d-} + \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \right)$ $\text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d x_{ij} - x_{id} + s_i^{d-} = 0, \forall i; & \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - \varphi^d y_{rd} - s_r^{d+} = 0, \forall r; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d = 1; & s_i^{d-} \geq 0, \forall i; \quad s_r^{d+} \geq 0, \forall r; \quad \lambda_j^d \geq 0, \forall j; \end{cases}$	BCC	Enveloppement

Tableau 2.10 – Modèles DEA : CCR et BCC à orientation output

Chapitre 3

Mesures des performances par DEA

La méthode DEA est un outil efficient pour l'analyse *ex-post* et pour le management a posteriori des opérations des unités de production (firmes, agences, directions, etc.). Adaptée pour s'appliquer à n'importe quelle organisation productive (cf. [44]), l'approche DEA donne des interprétations et des moyens d'évaluation des efficacités de production et est aussi un moyen de contrôle managerial (cf. dans [27]). Utilisant la programmation mathématique, les modèles DEA permettent de comparer une entreprise ou une unité, à ses pairs, dans un environnement concurrentiel ou contrôlable du point de vue de son organisation et de sa gestion ; DEA permet en effet de mesurer les performances des unités, les inefficacités et les sources d'inefficacité. Elle permet de plus de faire du “benchmarking” en déterminant les meilleures unités efficaces de références ou benchmarks et de déterminer les rendements d'échelle.

Dans ce chapitre, nous faisons des rappels sur quelques notions utilisées en micro-économie pour faire des analyses de performance et les interprétations simples qu'apportent l'utilisation de l'approche DEA. Dans la section 3.1, quelques définitions (efficacité, productivité, performance) seront données ; les notions de fonction de production, de rendements d'échelle et leur détermination par l'approche DEA seront exposées dans la section 3.2 ; les mesures par l'approche DEA des indices de productivité de Malmquist seront traitées dans la section 3.3 ; la section 3.4 sera consacrée à une brève revue de littérature des applications utilisant DEA et enfin en section 3.5 quelques domaines d'applications utilisant DEA, pour le cas particulier du Burkina Faso seront présentés.

3.1 Définitions et interprétations économiques en utilisant DEA

3.1.1 Efficacité et productivité

L'efficacité "caractérise ce qui est efficace". Cette définition montre le caractère relatif et complexe de ce qui est efficace, puisque lié au domaine dans lequel on le caractérise. Ainsi, dans le domaine du développement (économique, social, environnemental, etc.) ou de la croissance d'un secteur de production, l'efficacité représente l'aptitude d'une unité de production, à réaliser des objectifs fixés par le décideur et ses partenaires, en qualité, en quantité et dans le temps.

L'efficience dans sa définition étymologique, caractérise la capacité d'une unité de production (une firme par exemple) à "produire un effet positif." Il faut voir dans "effet positif", l'effet économique recherché par le gestionnaire, du point de vue minimisation des ressources à utiliser pour la production des résultats recherchés. Les résultats sont vus dans un sens positif relativement à la préférence (minimisation ou maximisation) du décideur.

Dans notre travail, nous utiliserons indistinctement les termes efficacité et efficience, dans l'utilisation DEA. La méthode DEA permet de mesurer la capacité à réaliser des objectifs relativement aux moyens alloués à partir du ratio optimal des outputs pondérés par rapport aux inputs pondérés. L'efficacité et l'efficience sont donc indistinctement mesurées par DEA, car l'amélioration de la productivité passe par l'augmentation de la production – efficacité – sans accroissement des consommations de ressources ou en réduisant les dotations des facteurs inputs – efficience. Ainsi, l'efficacité est vue dans ce contexte comme la "capacité de produire le maximum de résultats avec le minimum d'effort, de dépense"¹ et l'efficience comme la productivité et la rentabilité des ressources c-à-d. la "capacité de rendement" ou de "productivité." ¹

Dans le cas des entreprises, on peut prendre comme exemple de mesure d'efficacité

¹ "Le petit Robert" Edition 1996

de production le ratio chiffre d'affaires par rapport à l'effectif des employés considérés dans la vente ou dans la commercialisation ou dans la production. L'efficacité dans cet exemple est relative à la force de vente ou de production qui est mesurable par le chiffre d'affaire de l'entreprise. L'approche DEA permet de déterminer à défaut d'efficacité de production – faible accroissement du chiffre d'affaires– des voies d'amélioration de l'efficacité productive par une réduction de l'effectif, commercial ou de celui de production. L'utilisation de DEA distingue les efficacités techniques et les efficacités d'échelle (section 3.2.2). Les efficacités techniques mettent en évidence que pour un niveau donné de quantités d'inputs et de quantités d'outputs, il est impossible pour une unité d'améliorer un autre facteur input ou output. Les efficacités d'échelle sont définies pour mettre en évidence les situations à rendements d'échelle variables (constant, croissant ou décroissant).

Dans le cas de l'utilisation de DEA, la notion de productivité est remplacée par celle de l'efficacité de production, mesurée en tenant compte de la capacité à réaliser des objectifs. De façon générale, l'efficacité n'est pas atteinte soit parce qu'il serait possible de produire plus avec les mêmes moyens (inputs) soit parce qu'il serait possible de produire autant en réduisant les moyens utilisés. L'efficacité est donc mesurée à partir de la productivité globale des facteurs (inputs-outputs) et permet de savoir si les performances de production d'une unité sont optimales ou non. Relativement aux modèles à orientation input ou output respectivement, cette intensité ou score d'efficacité, montre que l'unité peut fournir les mêmes quantités outputs (produits) avec moins de 100% de ses quantités inputs (moyens) observées ou que l'unité peut produire davantage d'outputs avec les mêmes quantités d'inputs observées. Ainsi, avec un modèle DEA, à orientation input, si α représente cette intensité, on a $0 \leq \alpha \leq 1$. Ceci signifie que l'unité de production étudiée peut produire les mêmes quantités outputs avec seulement α fois ($\alpha \leq 1$) les inputs observés. Dans le cas d'un modèle à orientation output, l'intensité α sera par contre $\alpha \geq 1$. Ceci signifie que l'unité étudiée peut produire α fois ($\alpha \geq 1$) les quantités outputs observées avec les mêmes quantités inputs observées. Les unités efficaces sont les unités avec une intensité égale à l'unité, ce qui signifie que l'unité a utilisé pleinement ses moyens (inputs) et a produit le maximum possible de résultats outputs.

3.1.2 Comparaison des performances et benchmarking par DEA

La mesure de performances dans cette section est relative aux opérations d'un système de production donné, dans lequel les gestionnaires cherchent à mesurer leurs actions. La performance est caractérisée par les résultats (mesurables) observés d'un système de management en relation avec sa politique d'allocation des moyens de fonctionnement. La comparaison des performances entre deux unités d'un système est relative :

- aux résultats observés lors d'une opération (excellents ou mauvais résultats) couramment appelé outputs,
- aux indicateurs de l'analyse technique qui peuvent être les facteurs techniques de production ou inputs.

L'évaluation des performances est faite par rapport à des objectifs que s'est fixée une firme ou une unité de production en tenant compte de son environnement concurrentiel. Puisque les objectifs diffèrent d'une entreprise à l'autre, il va de soi que la performance sera propre à la perception de l'environnement concurrentiel d'une entreprise donnée. Le caractère commun des diverses perceptions de performance est la volonté de compétitivité ou l'ambition d'amélioration des services et produits (recherche d'excellents résultats). La notion de performance est aussi multi-dimensionnelle où peuvent se croiser l'économique, le social, la culture, l'écologie, etc. Ce caractère multi-dimensionnel fait que l'évaluation de la performance est complexe et sensible pouvant aller de l'objectivité à la subjectivité, tout dépendant, des préoccupations ou stratégies du gestionnaire et de la méthodologie de l'analyste. La part de responsabilité du décideur dans l'objectivité de l'évaluation de la performance d'un système consiste à bien définir les paramètres de production à prendre en compte et les types de produits résultants, sans oublier de fournir des informations aussi précises que possibles. Il s'agit pour un décideur de savoir préciser de façon logique et objective :

- l'objectif global de l'analyse ;
- l'échantillon d'unités dont les performances doivent être comparées ;
- les facteurs outputs qui sont les objectifs intermédiaires observables et aisément mesurables ;

- les facteurs inputs à consacrer aux efforts d’amélioration des objectifs intermédiaires ;
- les informations relatives aux différents facteurs (inputs-outputs) de mesure de performance.

La définition des critères de performance étant liée au processus de transformation ou de production du système, il est donc important de donner une part importante à la détermination des paramètres entrant dans le processus et surtout les produits offerts par les unités. Les indicateurs de performance doivent permettre d’aider à prendre une décision ultérieure en tenant compte du benchmarking des unités efficaces.

L’approche DEA permet non seulement, la mesure ou l’évaluation des performances des unités d’un système de production mais peut aussi aider le décideur (gestionnaire, responsable d’unité, etc.) à faire des améliorations certaines, d’une part, par des techniques de benchmarking, et d’autre part, en visualisant l’état des différents indicateurs chiffrés (positifs, négatifs) et de connaître les éléments à améliorer. Ainsi pour faire du benchmarking, les étapes simples suivantes peuvent être suivies :

- Etape 1 : déterminer les unités efficaces en utilisant DEA ;
- Etape 2 : déterminer les unités de référence (ou benchmarks) pour l’unité inefficace à améliorer ;
- Etape 3 : déterminer les sources d’inefficacité de l’unité inefficace à améliorer.

3.2 Analyse micro-économique par DEA

L’approche DEA permet de faire des analyses micro-économiques dans les secteurs à caractère lucratif ou non lucratif, en estimant la technologie de meilleure productivité d’un système de production et en déterminant les rendements d’échelle.

3.2.1 Approximation de la technologie de production par DEA

Pour produire, une entreprise utilise les facteurs de production (inputs) comme la main-d’œuvre (facteur travail), les équipements, les machines, etc. (facteur capital). La relation existant entre la production et les quantités de facteurs de production utilisées

peut être exprimée sous la forme d’une fonction mathématique appelée fonction de production caractérisant la technologie de production. Celle-ci permet d’étudier, pour un niveau de production donné, les différentes combinaisons possibles de facteurs de production. L’utilisation de DEA permet d’estimer la technologie de production par sa fonction de production sur la base des observations des différents facteurs des diverses unités du système. C’est à partir de ces unités de production à évaluer qu’une frontière efficace de production est estimée par l’approche DEA. Cette frontière efficace de production représente la fonction de production de la technologie de production. Une “interprétation intuitive” économique de l’efficacité est donnée, en interprétant la fonction de production non pas seulement comme la relation qui existe entre les inputs et les outputs mais aussi comme la frontière de l’ensemble de production techniquement possibles. Tout point de la frontière efficace représente la quantité maximum d’output réalisable pour tout niveau donné d’input ou la quantité minimum d’input nécessaire pour atteindre un niveau donné d’output. Dans cette approche, ni les prix ni les coûts ne sont considérés, seules les quantités physiques d’inputs et d’outputs sont considérées. La distinction entre les activités productives qui se trouvent ou non sur la frontière permet de distinguer les points efficaces et inefficaces.

Un agriculteur utilise des ressources (terre, travail, capital, eau, etc.) pour produire des biens et produits (de consommation ou commercialisables). A partir d’un échantillon de productions agricoles (agriculteurs), avec des données observées sur les facteurs inputs et outputs, l’approche DEA permet d’estimer la fonction de production qui traduit les relations entre les ressources employées et les productions (quantités). Cette approche peut constituer un outil efficient pour la planification et l’accompagnement des agriculteurs en orientant les aides à partir de cette fonction ou en ciblant les besoins en formation de spécialisation.

Comme au chapitre 2, nous noterons $X \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des variables inputs avec m le nombre de facteurs inputs. $Y \in \mathbb{R}^s$ représente le vecteur des variables outputs avec s le nombre de facteurs outputs. Soit T la technologie de production caractérisée par une fonction de production f_T , T est donc une fonction de X, Y et les théories économiques permettent d’écrire $T(X, Y) = 0$ ou $Y = f_T(X)$. A partir des formes multiplicatives –

avec les variables multiplicatives ou poids – on peut tirer une relation technique entre les facteurs inputs et les facteurs outputs pour une productivité optimale de l'ensemble. Les modèles DEA permettent de déterminer ces fonctions T et f_T .

Exemple . En utilisant l'exemple du chapitre 2 précédent, on tire les relations techniques suivantes en utilisant le modèle CCR (orientation input ou orientation output). La section 2.2.1 a permis de mettre en évidence la seule DMU $B(X = x = 2, Y = y = 25)$ comme étant efficace. Pour ce modèle CCR, on obtient donc $T(x, y) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{25}y = 0$ et $y = \frac{25}{2}x$ l'équation de la fonction efficace de production (voir figure 3.1).

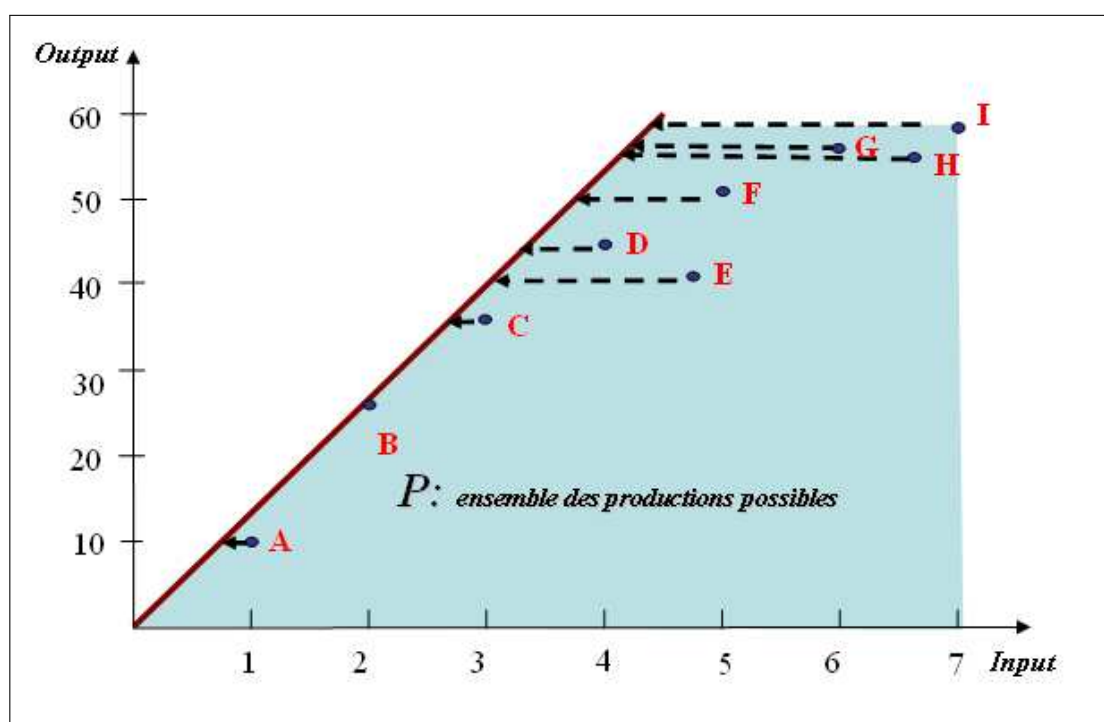


Figure 3.1 – Représentation de la frontière efficace en utilisant CCR à orientation input

3.2.2 Les rendements d'échelle par DEA

A partir de la technologie de production caractérisée par une fonction de production, on peut déterminer la nature des rendements d'échelle dans certaines situations. Ces situations sont celles où tous les facteurs de production sont susceptibles d'être ajustés ensemble et dans la même proportion. Autrement dit, c'est lorsque l'accroissement de

la production (quantités outputs) est lié à l'augmentation des facteurs de production (inputs) de façon proportionnelle. Les rendements d'échelle constituent donc un indicateur qui mesure la variation de la production d'une entreprise par rapport à la variation de ses facteurs de production. La nature des rendements d'échelle se détermine en comparant la variation de la production à la variation des facteurs de production utilisés. Les rendements d'échelle, qui peuvent être croissants, constants ou décroissants, sont définis dans la section 3.2.2.1 ; leur détermination par l'approche DEA et la méthodologie sont présentées dans la section 3.2.2.2.

3.2.2.1 Définitions des rendements d'échelle

Définition . Rendements d'échelle constants

On parle de rendements d'échelle constants lorsqu'une augmentation donnée des quantités de facteurs de production utilisés entraîne une même variation de la production. En utilisant la technologie T , il y a présence de rendements d'échelle constants si

$$f_T(\alpha X) = \alpha Y, \quad \forall \alpha > 1.$$

Définition . Rendements d'échelle croissants

On parle de rendements d'échelle croissants lorsqu'une augmentation donnée des quantités de facteurs de production entraîne une variation supérieure de la production. En utilisant la technologie T , il y a présence de rendements d'échelle croissants si

$$f_T(\alpha X) > \alpha Y, \quad \forall \alpha > 1.$$

On parle de rendements d'échelle croissants lorsque, pour une augmentation de $\alpha - 1$ de chacun de ses facteurs de production (inputs), l'entreprise parvient à augmenter son volume de production (outputs) de plus de $\alpha - 1$.

Définition . Rendements d'échelle décroissants

On parle de rendements d'échelle décroissants lorsqu'une augmentation donnée des quantités de facteurs de production entraîne une variation moindre de la production.

En utilisant la technologie T , il y a présence de rendements d'échelle décroissants si

$$f_T(\alpha X) < \alpha Y, \forall \alpha > 1.$$

On parle de rendements d'échelle décroissants lorsque, pour une augmentation de $\alpha - 1$ de chacun de ses facteurs de production (inputs), l'entreprise produit une augmentation de son volume de production (outputs) de moins de $\alpha - 1$.

Exemple . *Considérons l'exemple du chapitre 2 (figure 2.3) représentant la courbe décrite par la fonction de production. Sur la figure suivante 3.2, en considérant que le système suit toujours la même technologie de production et en apportant une variation proportionnelle sur les inputs de chacune des DMU sur la frontière, on remarque que l'augmentation proportionnelle en quantité output de A est plus grande et celle de B est égale à l'augmentation apportée en input ; tandis que les autres ont des augmentations en outputs bien inférieures à celle de A et de B (voir tableau 3.1).*

Sur la figure 3.2 , $A(dt), B(dt), C(dt), D(dt), F(dt) \& G(dt)$ représentent respectivement les positions des points $A, B, C, D, F \& G$ après variation des données. Dans l'exemple, la variation en input correspond à une augmentation de 25% de même que l'augmentation output de B. Les variations des quantités outputs – calculées graphiquement – des DMU sont résumées par dans le tableau 3.1 :

DMU	A	B	C	D	F	G	I
y^{t+dt}	$y_A + 5$	$y_B + 6.25$	$y_C + 6$	$y_D + 5$	$y_F + 4.5$	$y_G + 1$	$y_I + 0$
Variation en %	50%	25%	16.67%	13.64%	9%	1.85%	0

Tableau 3.1 – Variations des outputs

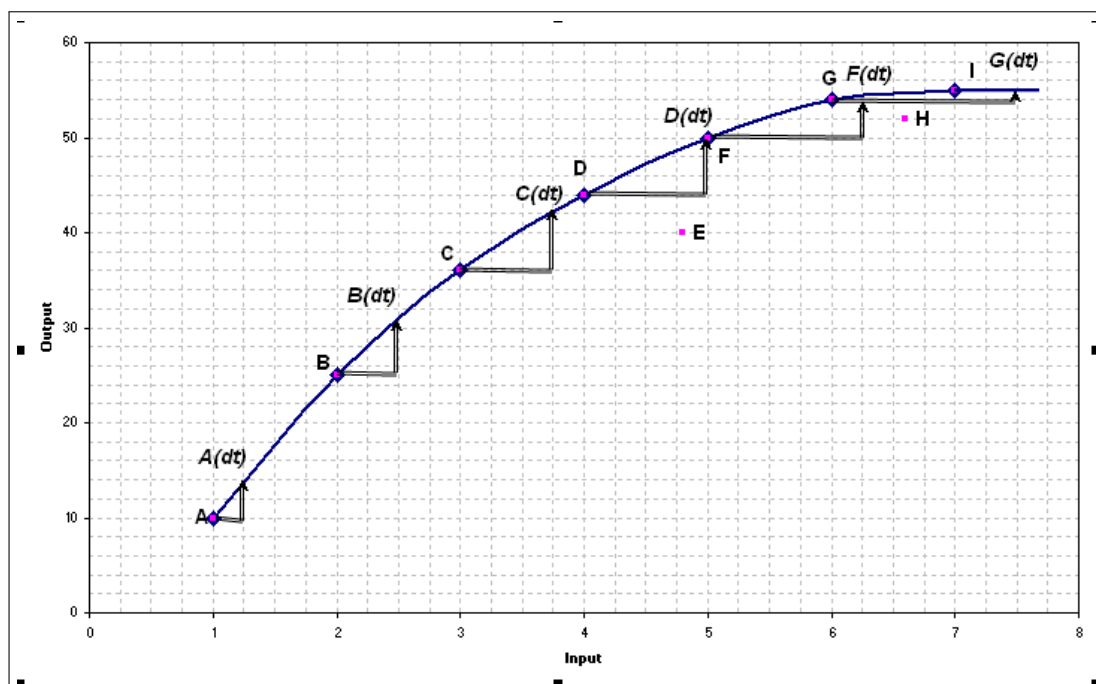


Figure 3.2 – Variations sur la frontière efficace de production

L'analyse et la détermination des rendements d'échelle peuvent permettre d'aider ou d'orienter les producteurs de façon générale à prioriser les activités en apportant plus d'effort là où il est le plus rentable, et n'exploiter le reste que si cela se révèle vraiment nécessaire ou si les ressources le permettent. Pour l'exemple des productions agricoles, les rendements d'échelle indiquent ce qu'on produirait (en quantité ou qualité) si l'on augmentait proportionnellement la surface cultivée, le travail, le fumier ou engrais, l'eau, etc. La connaissance des rendements d'échelle suggère pour une entreprise qui est caractérisée par des rendements d'échelle croissants d'augmenter la taille de ses inputs ou ressources. Tandis que l'entreprise qui est caractérisée par des rendements d'échelle décroissants doit chercher à diminuer ses inputs. La présence des rendements d'échelle constants montre que ces entreprises, quelque soit leur taille, restent compétitives. Ce sont des entreprises techniquement efficaces.

3.2.2.2 Détermination des rendements d'échelle par DEA

L'utilisation de DEA permet non seulement de déterminer les rendements d'échelle des unités efficaces (sur la frontière efficace) mais aussi des unités qui ne sont pas sur la frontière efficace. Pour les unités non efficaces, les rendements d'échelle sont estimés autour des unités fictives représentant les projections de ces unités inefficaces sur la frontière efficace. C'est le modèle BCC (2.2.2), qui permet de prendre en compte les efficacités d'échelle. Banker et al.(1984) (cf. dans [13]) caractérisent les rendements d'échelle en utilisant l'orientation input d'une DMU d efficace lorsqu'un unique hyperplan (frontière efficace) passe par le point (X_d, Y_d) .

Théorème 3.1. *Conformément au problème (2.16) de BCC à orientation input, il y a présence de rendements d'échelle, croissants, constants ou décroissants, pour l'unité (X_d, Y_d) si et seulement si $\tilde{u}^d > 0$, $\tilde{u}^d = 0$ ou $\tilde{u}^d < 0$ respectivement.*

Démonstration. En effet, le modèle BCC (2.16) permet de caractériser l'hyperplan $\mathcal{H}^d$ passant par le point (X_d, Y_d) par l'équation suivante :

$$\mathcal{H}^d = \left\{ (x, y) \in \mathcal{P} : \tilde{\mu}^d y = \tilde{v}^d x + \tilde{u}^d \right\}$$

où $(\sim)$ indique l'optimalité de la solution. Pour une variation de $(1 + \alpha)$ donné $\alpha > 0$ sur les facteurs de production inputs x , on aura :

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}^d (1 + \alpha) y &= \tilde{v}^d (\alpha + 1) x + (\alpha + 1) \tilde{u}^d \\ \Rightarrow \tilde{\mu}^d y + \tilde{\mu}^d \alpha y &= \tilde{v}^d x + \tilde{v}^d \alpha x + \tilde{u}^d + \alpha \tilde{u}^d \\ \Rightarrow \tilde{\mu}^d \alpha y &= \tilde{v}^d \alpha x + \alpha \tilde{u}^d \end{aligned}$$

Dès lors,

- si $\tilde{u}^d = 0$, alors $\tilde{\mu}^d(\alpha y) = \tilde{v}^d(\alpha x)$ il y a donc présence de rendements d'échelle constants puisque la variation des facteurs outputs est la même que celle des inputs.
- si $\tilde{u}^d > 0$, alors $\tilde{\mu}^d(\alpha y) > \tilde{v}^d(\alpha x)$ il y a donc présence de rendements d'échelle croissants puisque la variation des facteurs outputs est plus grande que celle des inputs.

- si $\tilde{u}^d < 0$, alors $\tilde{\mu}^d(\alpha y) < \tilde{v}^d(\alpha x)$ il y a donc présence de rendements d'échelle décroissants puisque la variation des facteurs outputs est moindre que celle des inputs.

□

Ces conclusions sont possibles dans la mesure où l'on a considéré qu'il y a unicité de solution. Le précédent théorème est généralisé (cf. dans [11, 12, 16]), pour caractériser les rendements d'échelle quand le problème (modèle DEA) présente plusieurs solutions optimales.

Théorème 3.2. *Conformément au problème (2.16) de BCC à orientation input, il y a présence de rendements d'échelle, croissants, constants ou décroissants, au point (X_d, Y_d) , si et seulement si, $\tilde{u}^d > 0$ pour toutes les solutions optimales, $\tilde{u}^d = 0$ pour une des solutions optimales, $\tilde{u}^d < 0$ pour toutes les solutions optimales respectivement.*

Plusieurs méthodes ont été proposées pour déterminer les rendements d'échelle en partant de ces propriétés. Nous ne citerons que les plus couramment utilisées.

Méthode 1 : (cf. dans [16])

Les auteurs (cf. aussi [12]) proposent de résoudre les problèmes suivants une fois que les modèles DEA (BCC, cf. (2.16)) sont résolus :

$$u_d^{\max} = \max u \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rd} + u = 1; \\ \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rd} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u \leq 0, \quad j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{id} = 1; \\ \mu_r \geq \varepsilon, \quad v_i \geq \varepsilon, \quad \forall i, r; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$u_d^{\min} = \min u \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rd} + u = 1; \\ \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rd} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + u \leq 0, \quad j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m v_i x_{id} = 1; \\ \mu_r \geq \varepsilon, \quad v_i \geq \varepsilon, \quad \forall i, r; \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec ses formulations on a les propriétés suivantes :

Théorème 3.3. Rendements d'échelle avec modèle BCC (cf. [12, 16, 59])

Conformément au problème (2.16) de BCC à orientation input, il y a présence de rendements d'échelle, croissants, constants ou décroissants, au point (X_d, Y_d) si et seulement si, $u_d^{\max} \geq u_d^{\min} > 0$, $u_d^{\max} \geq 0 \geq u_d^{\min}$ ou $0 > u_d^{\max} \geq u_d^{\min}$ respectivement.

Exemple . En reprenant l'exemple du chapitre 2 avec les 9 DMU et les modèles BCC, on a les résultats suivants :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$u_d^{\min}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{22}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{3}{2}$	-8	$-\frac{25}{22}$	$-\infty$
$\tilde{u}^{d*}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{10}{11}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{25}{22}$	$-\frac{48}{7}$
$u_d^{\max}$	$1-10\epsilon > 0$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{25}{22}$	$-\frac{48}{7}$

* solution optimale obtenue dans le tableau 2.4

Tableau 3.2 – Intervalles des solutions alternatives de u^d

Ces résultats montrent que :

- la DMU B présente des rendements d'échelle constants, on a, $u_d^{\max} \geq 0 \geq u_d^{\min}$
Remarquons que $(v^d, \mu^d, u^d) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{25}, 0)$ est solution optimale du problème (2.16) (BCC à orientation input appliqué à l'exemple).
- la DMU A présente des rendements d'échelle croissants car on a, $u_d^{\max} \geq u_d^{\min} > 0$.
- les DMU C, D, E, F, G, H et I présentent des rendements d'échelle décroissants car la relation suivante est vérifiée pour chacune d'elles $0 > u_d^{\max} \geq u_d^{\min}$.

Méthode 2 Cette méthode est une alternative de la méthode 1 proposée par Banker et al. en 1996 (cf. [11, 12, 14]). Elle est décrite par les modèles suivants :

$$ccr^d = \min \quad \xi$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \xi x_{id}, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rd}, & r = 1, \dots, s; \\ \lambda_j \geq 0, & j = 1, \dots, n; \end{cases} \quad (3.3)$$

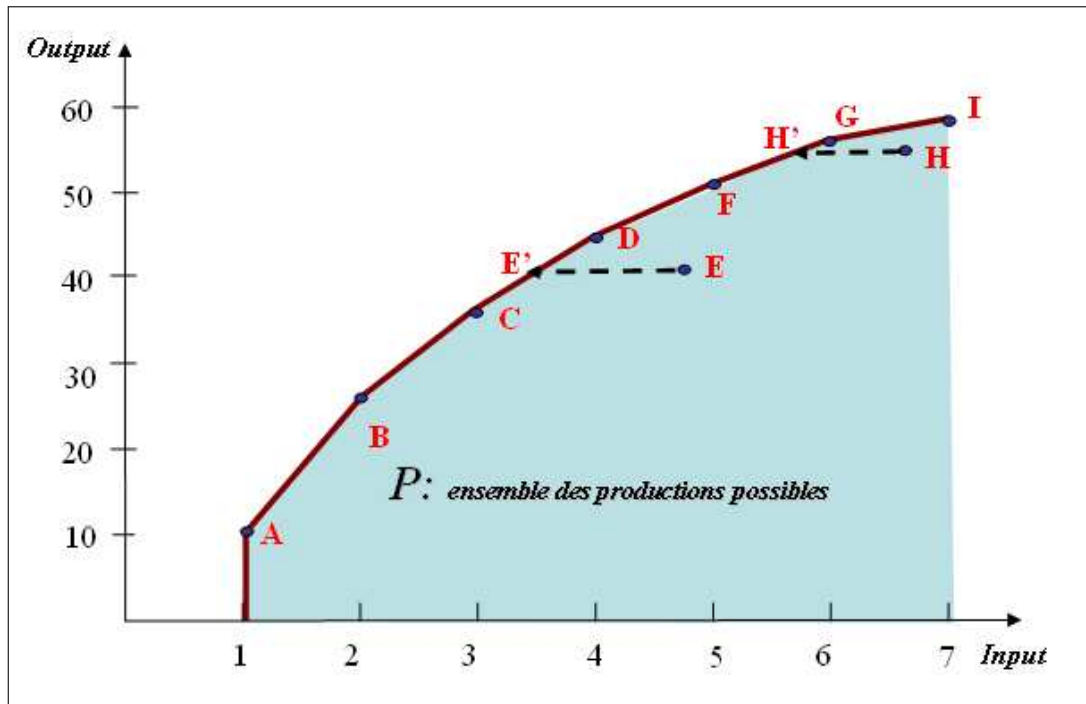


Figure 3.3 – Représentation de la frontière efficace en utilisant BCC à orientation input

$$bcc^d = \min \beta$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \beta x_{id}, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rd}, & r = 1, \dots, s; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1; \\ \lambda_j \geq 0, & j = 1, \dots, n; \end{cases} \quad (3.4)$$

Ces deux modèles permettent de déterminer les scores d'efficacité DEA CCR et BCC respectivement.

Par ailleurs considérons le problème (3.5).

$$f^d = \min \gamma$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \gamma x_{id}, & i = 1, \dots, m; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rd}, & r = 1, \dots, s; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \leq 1; \\ \lambda_j \geq 0, & j = 1, \dots, n; \end{cases} \quad (3.5)$$

Avec cette dernière formulation en plus, on obtient le théorème suivant pour une DMU d sur la frontière efficace (cf. [10–12, 14, 61, 133]) :

Théorème 3.4. *Conformément au problème (2.16) de BCC à orientation input, il y a présence de rendements d'échelle, croissants, constants ou décroissants, au point (X_d, Y_d) , si et seulement si, on a, respectivement,*

$$(ccr^d < bcc^d \quad \text{et} \quad f^d = ccr^d), \quad (ccr^d = bcc^d), \quad (ccr^d < bcc^d \quad \text{et} \quad f^d = bcc^d).$$

De ces propriétés, on en déduit le résultat suivant (cf. [21, 91]) :

Propriété 3.1. *Les DMU sur la frontière efficace de production obtenue par le modèle CCR présentent des rendements d'échelle constants.*

Exemple . *En reprenant l'exemple 2.1 du chapitre 2, on a les résultats suivants :*

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
ccr^d	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{24}{25}$	$\frac{22}{25}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{104}{165}$	$\frac{22}{35}$
bcc^d	1	1	1	1	$\frac{35}{48}$	1	1	$\frac{5}{6}$	1
f^d	$\frac{4}{5}$	1	1	1	$\frac{35}{48}$	1	1	$\frac{5}{6}$	1
Rendements d'échelle	$E^\uparrow$	$E^=$	$E^\downarrow$	$E^\downarrow$	$E^\downarrow$	$E^\downarrow$	$E^\downarrow$	$E^\downarrow$	$E^\downarrow$

$E^\uparrow$, $E^=$ et $E^\downarrow$ signifient respectivement croissant, constant et décroissant

Tableau 3.3 – Rendements d'échelle avec le modèle 2

3.2.2.3 Bornes des valeurs des rendements d'échelle par DEA

Banker et Thrall en 1992 dans [16] utilisent l'approche BCC pour déterminer les bornes inférieure et supérieures des valeurs des rendements d'échelle. Leur approche

consiste à résoudre les problèmes suivants pour chacune des unités efficaces d'échelle :

$$u^{\max,d} = \max u^d \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} + u^d \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd} + u^d = 1 \\ \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 1; \\ \mu_r^d \geq 0, \quad v_i^d \geq 0, \quad \forall i, r; \quad u^d \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad (3.6)$$

$$u^{\min,d} = \min u^d \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} + u^d \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd} + u^d = 1 \\ \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 1; \\ \mu_r^d \geq 0, \quad v_i^d \geq 0, \quad \forall i, r; \quad u^d \in \mathbb{R}; \end{cases} \quad (3.7)$$

Avec ces formulations, on obtient les relations suivantes :

$$u^{\min,d} \leq \tilde{u}^d \leq u^{\max,d}. \quad (3.8)$$

Avec ces valeurs, Banker et Thrall, caractérisent les bornes des valeurs possibles des rendements d'échelle, définies de la façon suivante (cf. [12, 16, 26]) :

$$\rho^{\min,d} = \frac{1}{1 - u^{\min,d}} \leq \tilde{\rho}^d = \frac{1}{1 - \tilde{u}^d} \leq \rho^{\max,d} = \frac{1}{1 - u^{\max,d}}. \quad (3.9)$$

En utilisant les résultats du tableau 3.2, on obtient les bornes inférieure et supérieure des valeurs des rendements d'échelle, présentées dans le tableau 3.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$u_d^{\min}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{22}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{3}{2}$	-8	$-\frac{25}{22}$	$-\infty$
$u_d^{\max}$	$1 - 10\epsilon > 0$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{25}{22}$	$-\frac{48}{7}$
$\rho^{\min,d}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{22}{25}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{22}{47}$	0
$\rho^{\max,d}$	$\frac{1}{10\epsilon} \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$	$\frac{6}{5}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{22}{47}$	$\frac{7}{55}$

Tableau 3.4 – Bornes inférieure et supérieure des rendements d'échelle

Remarque . On peut avoir $u^{\min,d} = -\infty$ (cf. tableau 3.4) ou $u^{\max,d} = 1$ ce qui donne

respectivement $\rho^{\min,d} = 0$ ou $\rho^{\max,d} = +\infty$.

Lorsque $\rho^{\min,d} = \tilde{\rho}^d = \rho^{\max,d}$ alors la valeur des rendements d'échelle est exactement égale à $\tilde{\rho}^d$. Dans cet exemple, on retrouve les valeurs exactes des rendements d'échelle des DMU E et H, dont les bornes inférieure et supérieure coïncident.

3.3 Mesure de changement de productivité dans le temps : indice de Malmquist

Outre l'analyse des performances des unités via la technologie, les efficacités, les rendements d'échelle, l'approche DEA permet d'examiner également l'évolution des performances des unités et de déterminer les sources de sa variation entre deux périodes différentes, successives ou non successives.

3.3.1 Indices de mesure inputs

En 1982, D. W. Caves, L. R. Christensen et W. E. Diewert dans [22] proposent une méthode, basée sur une idée de Malmquist (1953), pour la mesure de productivité par des indices qui caractérisent la consommation des ressources, pour deux firmes quelconques, ne prenant en compte que les données observées (inputs, outputs). Nous considérons les notations suivantes pour illustrer leurs approches :

- a, b représentent deux firmes quelconques ;
- (x^a, y^a) et (x^b, y^b) les vecteurs des inputs et des outputs, respectivement de ces deux firmes.
- les technologies T_a et T_b des firmes a, b sont définies par les fonctions de production f_a et f_b

Pour comparer les inputs des firmes a et b on définit l'indice de mesure des inputs relativement à la firme a . Pour calculer cet indice, on résout le problème suivant :

$$\Delta^a(a, b) = \min_{\delta} \{ \delta : f_a(y^a, \delta x^b) \geq f_a(y^a, x^a) \} \quad (3.10)$$

$\Delta^a(a, b)$ représente la proportion minimum des facteurs inputs de la firme b requise pour être sur la même frontière ou courbe d'indifférence que la firme a (pour les quan-

tités outputs données de la firme a suivant T_a). Ainsi, $\Delta^a(a, b) > 1$ implique qu'avec la technologie de a , pour une même quantité d'outputs y^a , on utilise plus d'inputs que b .

Définition . Isoquant

Un isoquant est une courbe de niveau de la fonction de production. Il représente les différentes combinaisons des variables inputs donnant les mêmes niveaux de quantités d'outputs (rendements). On appelle aussi courbe d'isoquant ou courbe d'indifférence de production. Pour une fonction de production caractérisée par deux facteurs inputs $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (travail et capital par exemple), et une variable output y , un isoquant est une courbe de $\mathbb{R}^2$ qui représente graphiquement l'ensemble des combinaisons de facteurs (x_1, x_2) qui permettent de produire un même niveau y_0 de production.

3.3.2 Détermination de l'indice de Malmquist par DEA

Les travaux de Caves et al., sont exploités puis étendus par Färe et al. (1992) (cf. [47, 48]) pour déterminer ces indices à partir de l'approche DEA. La frontière efficace de production représente une courbe d'isoquant de productivité optimale. Les formulations précédentes peuvent être étendues aux isoquants de façon générale (cf. aussi [51]). Färe et al. (1994) dans [47], proposent d'utiliser ces indices pour mesurer les changements de performances dans le temps d'une firme donnée. Ainsi, une firme à la période t_0 est considérée avec la technologie de cette période, et elle est ensuite considérée et traitée comme une autre firme à la période t_1 avec la technologie de la période t_1 . Ces indices sont appelés indices de Malmquist. Pour définir l'indice de Malmquist, il convient de considérer la technologie du système de production pour au moins deux périodes différentes. Pour deux périodes t_0 et t_1 données, l'indice de Malmquist, tel que proposé par Färe et al., mesure le changement de performances basé sur les changements inputs et outputs observés (voir [47, 48, 51, 76]). Färe et al. toujours dans [47] (cf. aussi [29, 48]) proposent de décomposer ces indices de mesure de performances en deux composantes, l'une mesurant le changement d'efficacité technique et l'autre mesurant le changement de technologie de production. Ainsi, la variation de la productivité totale est expliquée, à la fois par un changement de production dû au progrès technologique

et qui se traduit par un déplacement de la frontière de production, et par une variation de l'efficacité technique, caractérisée par le déplacement de la frontière efficace de production. Les efficacités techniques et les frontières efficaces de production pour chacune des périodes peuvent être déterminée par la méthode DEA (cf. [29, 48]). L'utilisation de DEA facilitent les calculs des indices de Malmquist (cf. [29]). Ces indices de mesure de productivité de Malmquist permettent de déterminer la performance moyenne d'un système de production. L'indice indicateur de changement d'efficacité est calculé avec l'hypothèse de rendements d'échelle constants. On suppose qu'à la période t l'unité j produit la quantité y_{rj}^t du facteur output $r, r = 1, \dots, s$ et utilise la quantité x_{ij}^t du facteur input $i, i = 1, \dots, m$. On notera par x_j^t, y_j^t respectivement les vecteurs de composantes $x_{ij}^t, i = 1, \dots, m$ et $y_{rj}^t, r = 1, \dots, s$. L'ensemble des productions possibles à la période t est $\mathcal{P}^t$ défini par :

$$\mathcal{P}^t = \{w^t = (x^t, y^t) : \text{avec } x^t \text{ on peut produire } y^t\}.$$

Pour mesurer les indices de Malmquist, on utilise DEA pour déterminer les efficacités techniques et comparer ces efficacités techniques entre deux périodes.

Pour mesurer l'efficacité technique de l'unité de production d à une période $t = t_0$ ou t_1 donnée, on résout le problème suivant :

$$\begin{aligned} \Delta^t(w_d^t) = \min \quad & \delta \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^t \leq \delta x_{id}^t, & \forall i; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^t \geq y_{rd}^t, & \forall r; \\ \lambda_j \geq 0, & \forall j, \quad \delta \in \mathbb{R}; \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec $w_d^t = (x_d^t, y_d^t)$. Pour comparer les performances d'une unité d de la période t_1 à la période t_0 on résout le problème suivant :

$$\begin{aligned} \Delta^{t_0}(w_d^{t_1}) = \min \quad & \delta \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^{t_0} \leq \delta x_{id}^{t_1}, & \forall i; \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^{t_0} \geq y_{rd}^{t_1}, & \forall r; \\ \lambda_j \geq 0, & \forall j, \quad \delta \in \mathbb{R}; \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Définition . Indice de productivité de Malmquist (cf. [47, 48])

L'indice de productivité de Malmquist qui mesure le changement de productivité d'une unité d ($d \in \{1, \dots, n\}$) entre la période t_0 et t_1 est donné par :

$$M_d = \left[\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_1})}{\Delta^{t_0}(w_d^{t_0})} \cdot \frac{\Delta^{t_1}(w_d^{t_1})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_0})} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Cet indice fournit des explications sur le changement de performance des unités efficaces. Cet indice se décompose de la façon suivante (voir [29, 48])

$$M_d = E_d \cdot T_d \quad \text{avec :}$$

$$E_d = \frac{\Delta^{t_1}(w_d^{t_1})}{\Delta^{t_0}(w_d^{t_0})};$$

$$T_d = \left[\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_1})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_1})} \cdot \frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_0})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_0})} \right]^{\frac{1}{2}};$$

E_d et T_d mesurent respectivement, le changement d'efficacité technique et le changement de technologie de production de la période t_0 par rapport à la période t_1 , pour l'unité d .

Avec cette décomposition, on a les résultats suivants pour toutes les DMU efficaces ou inefficaces :

Variation d'efficacité technique E_d :

$E_d > 1$, $E_d < 1$, $E_d = 1$, indiquent respectivement un changement positif (gain), négatif (perte), ou nul en efficacité technique de la période t_1 par rapport à la période t_0 . La variation en efficacité technique d'une unité dépend de son score d'efficacité technique de la période t_0 et de celui de la période t_1 . Ainsi plus cet indice E_d est supérieur (inférieur) à l'unité 1, plus le score d'efficacité technique de la période t_1 est plus (moins) important que celui de la période t_0 . Lorsque l'indice $E_d = 1$, alors il n'y a pas eu de changement d'efficacité technique de la période t_1 par rapport à la période t_0 .

Variation de technologie de production T_d :

$T_d > 1$, $T_d < 1$, $T_d = 1$, indiquent respectivement un changement moyen positif,

négatif, ou nul de technologie de production de la DMU d de la période t_0 par rapport à la période t_1 . Ce changement de technologie T_d est caractérisé par le déplacement ou mouvement vers la frontière efficace de production. Ce déplacement de t_0 à t_1 , peut se traduire pour la frontière t_1 par une modification positive ou négative de certaines de ses parties, selon que celles-ci se retrouvent “en dessous” ou “au-dessus”, de la frontière efficace des productions observées. T_d mesure la modification moyenne .

La valeur de T_d dépend de celles des deux rapports $\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_1})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_1})}$ et $\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_0})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_0})}$ qu’il convient d’analyser séparément.

- $\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_1})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_1})} \geq 1$ indique que les données de l’unité d à la période t_1 la rendent plus performante en utilisant la technologie de la période t_0 comparée à la technologie de la période t_1 .

- $\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_0})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_0})} \geq 1$ indique que les données de l’unité d à la période t_0 la rendent plus performante en utilisant la technologie de la période t_0 comparée à la technologie de la période t_1 .

Il y a 4 cas de figures possibles en fonction des valeurs de ces rapports :

Cas a : $\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_1})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_1})} > 1$ et $\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_0})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_0})} > 1$.

Dans ce cas (le meilleur des cas), nécessairement $T_d > 1$, ce qui signifie que l’unité d aux périodes t_0 et t_1 est projetée sur une partie de la frontière qui a connu un déplacement positif.

Cas b : $\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_1})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_1})} < 1$ et $\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_0})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_0})} < 1$.

Dans ce cas (le pire des cas), nécessairement $T_d < 1$, ce qui signifie que l’unité d aux périodes t_0 et t_1 est projetée sur une partie de la frontière qui a connu un déplacement négatif.

Cas c : $\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_1})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_1})} \geq 1$ et $\frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_0})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_0})} \leq 1$.

Dans ce cas, on peut aussi bien avoir $T_d \geq 1$ (meilleur des cas) que $T_d < 1$ (pire des cas) ; l’unité d à la période t_1 est projetée sur une partie de la frontière qui connaît un déplacement positif tandis qu’à la période t_0 elle est projetée sur une partie de la frontière qui connaît un déplacement négatif. C’est donc la moyenne des déplacements négatifs et positifs subis par la frontière efficace de production, qui déterminera le changement

(gain ou perte) de technologie.

$$\textbf{Cas d : } \frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_1})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_1})} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta^{t_0}(w_d^{t_0})}{\Delta^{t_1}(w_d^{t_0})} \geq 1.$$

Dans ce cas, on peut aussi bien avoir $T_d \geq 1$ (meilleur des cas) que $T_d < 1$ (pire des cas); l'unité d à la période t_1 est projetée sur une partie de la frontière qui connaît un déplacement négatif tandis qu'à la période t_0 elle est projetée sur une partie de la frontière qui connaît un déplacement positif. De même que le **cas c**, c'est la moyenne des déplacements subis qui déterminera le changement de technologie.

Dans les cas **c**) et **d**), l'on peut conclure que l'unité d a subi un changement de stratégie, même si le cas **c**) est plus favorable du point de vue de la productivité.

Variations de productivité ou de performance M_d :

$M_d > 1$, $M_d < 1$, $M_d = 1$, indiquent respectivement un changement positif, négatif, ou nul de productivité (ou de performance) de la DMU d de la période t_0 par rapport à la période t_1 . Cet indice étant le produit des indices de mesure de variation de technologie et d'efficacité technique, son interprétation est caractérisée par les 4 cas de figures :

$$\textbf{Cas I : } E_d \geq 1 \quad \text{et} \quad T_d \geq 1.$$

Dans ce cas, le plus souhaitable des cas, $M_d \geq 1$; ce cas indique que l'unité d a connu un gain de performance lié à la fois par un gain d'efficacité technique et un gain de technologie de production (de la période t_1 comparée à la période t_0).

$$\textbf{Cas II : } E_d \leq 1 \quad \text{et} \quad T_d \leq 1.$$

Dans ce cas, le moins souhaitable des, $M_d \leq 1$; ce cas indique que l'unité d a connu une perte de performance liée à la fois par une perte d'efficacité technique et une perte de technologie de production (de la période t_1 comparée à la période t_0).

$$\textbf{Cas III : } E_d \geq 1 \quad \text{et} \quad T_d \leq 1.$$

Dans ce cas, on peut aussi bien avoir $M_d \geq 1$ (meilleur des cas) que $M_d \leq 1$ (pire des cas), ce qui signifie respectivement que la variation de performance est liée au changement négatif de technologie de production, et à celui positif en efficacité technique.

$$\textbf{Cas IV : } E_d \leq 1 \quad \text{et} \quad T_d \geq 1.$$

Dans ce cas, on peut aussi bien avoir aussi bien $M_d \geq 1$ (meilleur des cas) que $M_d \leq 1$

(pire des cas), ce qui signifie respectivement que la variation de performance est liée à la perte d'efficacité technique et au changement positif de technologie de production.

Exemple . Considérons l'exemple proposé par Chen et Ali dans [29] avec 3 DMU A_t^1, A_t^2, A_t^3 à la période $t_0 = t$ et $A_{t+1}^1, A_{t+1}^2, A_{t+1}^3$ les différentes possibilités (de production) à la période $t_1 = t + 1$ pour chacune des 3 DMU de la période t (voir figure 3.4); ce qui donne 9 possibilités différentes pour passer de t à $t + 1$. Le tableau 3.5 résume ces 9 différentes possibilités de changement de technologie correspondant aux différents cas de figure ¹. La figure 3.4 présente aussi, dans l'espaces des inputs, les frontières efficaces de production relatives à ces deux périodes.

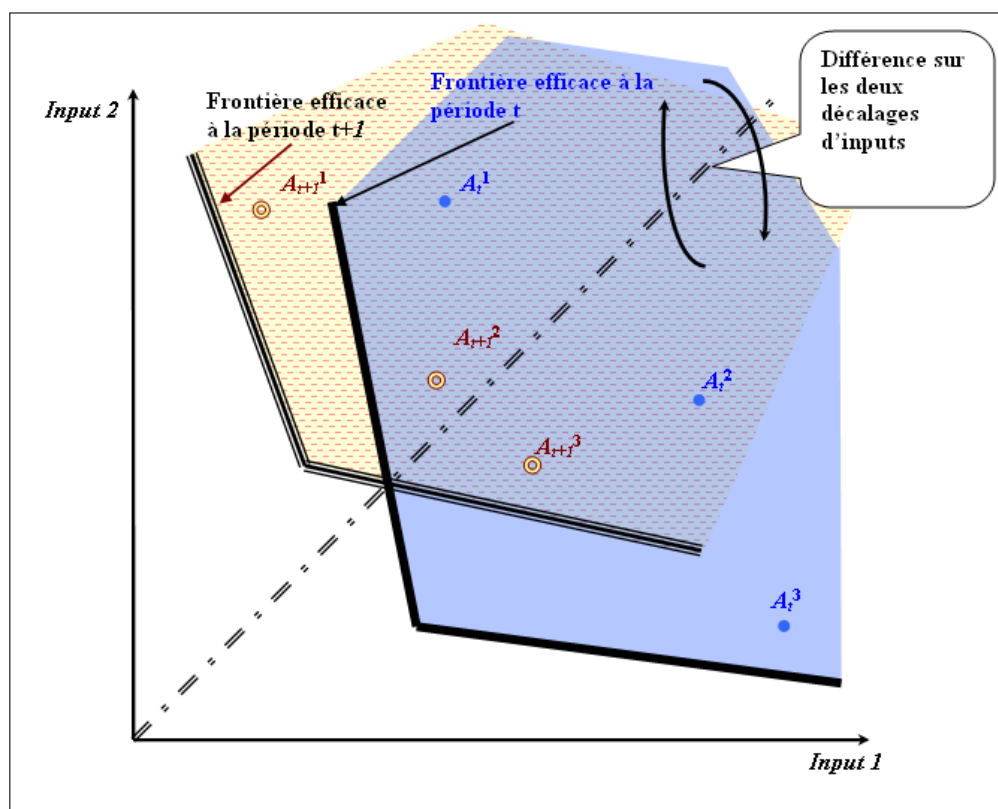


Figure 3.4 – Changement de frontière

Pour distinguer, les modifications positives et négatives de la frontière efficace de

¹Ces exemples, figures et tableaux sont tirés de [29]

$t + 1$, on trace sur la figure 3.4, la droite passant par le point d'intersection des 2 frontières et l'origine : ainsi la modification positive est à gauche de cette droite et la négative à droite de cette droite.

Le tableau 3.5 montre les différents cas de figure pour cet exemple, expliquant le changement (positif ou négatif) de technologie de production.

Si l'on considère, par exemple, les possibilités 1 ou 2 présentées dans le tableau 3.5,

Possibilité	Mouvement $t \rightarrow t + 1$	$\frac{\Delta^t(w_d^{t+1})}{\Delta^{t+1}(w_d^{t+1})}$	$\frac{\Delta^t(w_d^t)}{\Delta^{t+1}(w_d^t)}$	T_d	
1	$A_t^1 \rightarrow A_{t+1}^1$	>1	>1	>1	Cas a
2	$A_t^1 \rightarrow A_{t+1}^2$	>1	>1	>1	Cas a
3	$A_t^1 \rightarrow A_{t+1}^3$	<1	>1	$?$	Cas d
4	$A_t^2 \rightarrow A_{t+1}^1$	>1	<1	$?$	Cas c
5	$A_t^2 \rightarrow A_{t+1}^2$	>1	<1	$?$	Cas c
6	$A_t^2 \rightarrow A_{t+1}^3$	<1	<1	<1	Cas b
7	$A_t^3 \rightarrow A_{t+1}^1$	>1	<1	$?$	Cas c
8	$A_t^3 \rightarrow A_{t+1}^2$	>1	<1	$?$	Cas c
9	$A_t^3 \rightarrow A_{t+1}^3$	<1	<1	<1	Cas b

La possibilité 1 signifie que A_t^1 est passé à A_{t+1}^1 à la période $t + 1$.

Tableau 3.5 – Changement de technologie

nous avons le cas de figure a, expliquant le changement de technologie. Par exemple, si l'on a le mouvement $A_t^1 \rightarrow A_{t+1}^1$, on remarque que A_t^1 et A_{t+1}^1 sont plus performantes en utilisant la technologie de t qu'en utilisant celle de $t + 1$ (technologie plus positive). Ceci signifie que la DMU a connu un changement positif de technologie ; de même pour le mouvement $A_t^1 \rightarrow A_{t+1}^2$. Par contre, lorsqu'on considère la possibilité 6, le mouvement $A_t^2 \rightarrow A_{t+1}^3$ (cf. tableau 3.5), A_{t+1}^3 et A_t^2 sont moins performantes en utilisant la technologie de la période t que celle de la période $t + 1$ (technologie moins positive). Il y a perte de technologie. Il en est de même pour la possibilité 9.

En ce qui concerne les autres possibilités, c'est le produit de ces variations qui détermine s'il y a eu changement positif ou non de technologie. Le mouvement, $A_t^2 \rightarrow A_{t+1}^1$ (possibilité 4 du tableau 3.5), montre que $\frac{\Delta^t(A_{t+1}^1)}{\Delta^{t+1}(A_{t+1}^1)} > 1$ et $\frac{\Delta^t(A_t^2)}{\Delta^{t+1}(A_t^2)} < 1$; sur la figure 3.4, ceci se traduit par le fait que A_{t+1}^1 est plus performant en utilisant la technologie de t

(elle serait efficace) que celle de $t + 1$ (elle n'est pas efficace); par contre A_t^2 est moins efficace en utilisant la technologie de t que celle de $t + 1$ (plus proche de la frontière de $t + 1$ que celle de t).

Pour illustrer les variations (changements de productivité) de la période $t + 1$ par rapport à la période t , nous considérons toujours l'exemple ci-dessus de Chen et Ali (cf. figure 3.4), et le tableau 3.6 décrit les différentes possibilités mesurant ces variations en fonction des valeurs des indices composants (E_d, T_d). Il y a 8 possibilités pouvant se présenter, liées essentiellement aux deux cas de figure $E_d \leq 1, E_d \geq 1$ et aux quatre cas de figure de variation de technologie.

Possibilité	$\frac{\Delta^t(w_d^{t+1})}{\Delta^{t+1}(w_d^{t+1})}$	$\frac{\Delta^t(w_d^t)}{\Delta^{t+1}(w_d^t)}$	T_d	cas	E_d	M_d
1	>1	>1	>1	cas a	≥ 1	>1
2	<1	<1	<1	cas b	≤ 1	<1
3	>1	>1	>1	cas a	≤ 1	?
4	<1	<1	<1	cas b	≥ 1	?
5	>1	<1	?	cas c	≥ 1	?
6	>1	<1	?	cas c	≤ 1	?
7	<1	>1	?	cas d	≥ 1	?
8	<1	>1	?	cas d	≤ 1	?

Tableau 3.6 – Les composantes de l'indice de Malmquist

Dans l'exemple (cf. tableau 3.6) la situation la plus souhaitable (cas le plus souhaitable) correspond évidemment au cas 1.

3.4 Revue de la littérature de quelques applications avec DEA

Depuis le début de développement DEA à nos jours, plusieurs applications aussi diverses que variées touchant tous les secteurs ont montré l'importance de cette approche comme outil d'aide à la décision et de mesure de performances. Dans cette section, nous présentons une brève revue de la littérature de quelques applications utilisant DEA dans certains secteurs comme l'éducation, la santé, les banques, l'environnement et autres domaines de l'économie.

3.4.1 Applications DEA aux systèmes d'enseignement

Les applications concernant les mesures de performances des systèmes d'enseignement peuvent être regroupées en plusieurs catégories. Il y a les mesures des performances concernant l'éducation (premier et second cycles), et les performances concernant les instituts supérieurs et universitaires. Pour le premier niveau, ces mesures concernent généralement les performances globales sur l'exécution des activités durant une période, ou les performances sur les rendements en biens et services éducatifs ou encore les performances sur les activités de scolarisation (accès et participation). Les facteurs déterminants sont mesurés à partir, d'une part, des ressources relatives aux élèves, parents d'élèves et des écoles, et d'autre part, des facteurs socio-économiques des élèves, du niveau d'instruction des parents d'élèves, du niveau de formation, de l'expérience, et de la motivation des enseignants. Les facteurs produits pour les mesures de performances à ce niveau d'enseignement, sont généralement les facteurs relatifs à l'inscription scolaire, à l'accès, au succès en fin de cycle et aux performances en science et langue des élèves.

Quant au niveau supérieur, la prise en compte de la formation, des équipements, les publications des résultats de recherche sont des indicateurs généralement considérés pour mesurer les performances des centres ou unités de recherche. Beaucoup de travaux se sont intéressés à la mesure de performance du secteur de l'enseignement.

C'est d'ailleurs pour une préoccupation relative à la mesure de la performance éducative que Charnes, Cooper et Rhodes en 1978 ont proposé le modèle DEA pour y répondre. Ray en 1991 dans [85] utilise DEA pour estimer les efficacités des écoles publiques dans les districts du Connecticut (USA). Johnes et Johnes (1995) dans [65] utilisent DEA pour étudier les performances des départements en économie des universités en Grande Bretagne sur les travaux de recherche. Avkiran (2001) dans [8] propose une étude utilisant DEA pour déterminer les efficacités technique et d'échelle des universités australiennes. Grosskopf et Moutray (2001) dans [53] proposent DEA pour déterminer les efficacités des grandes écoles de Chicago (USA) et évaluer l'impact de la décentralisation du système de l'enseignement. Bradley et al. (2001) dans [20] utilisent DEA pour déterminer les efficacités et les effets de la concurrence, des établissements d'enseignement

secondaires en Angleterre. Banker et al.(2004) dans [15] utilisent DEA pour mesurer et analyser les tendances des efficacités techniques et d'allocation des écoles publiques par district au Texas (USA). Johnes (2006) [64], utilise DEA pour déterminer les efficacités d'enseignement des universités en Grande Bretagne. Fandel (2007) dans [43] utilise DEA pour étudier les performances des universités au Rhine-Westphalia Nord (Allemagne) afin de proposer une méthodologie pour la redistribution des fonds. Plusieurs autres applications concernant le secteur de l'enseignement utilisent DEA pour mesurer les efficacités des performances des unités. On peut citer aussi les travaux de Kirjavainen et Loikkanen dans [69] pour l'enseignement secondaire en Finlande ; Gstach et al.(2003) dans [54] ; Ruggiero (1996, 1999) dans [87, 88] ; Ruggiero et al. (2002) dans [89] ; Conceição et al. (2001) dans [32] ; Abbott et Doucouliagosa (2003) dans [3] ; Thursby et Kemp (2002) dans [107] ; le lecteur intéressé peut aussi trouver certaines applications dans le livre édité par Charnes et al. (1994) (cf. [26, partie II]), ou celui de Cooper et al. (2004) (cf. [35, chapitre 12]).

3.4.2 Applications DEA aux systèmes de santé

Le domaine de la santé comme les autres domaines prioritaires sociaux ont connu un regard particulier quant à la notion d'efficacité de performances des unités de contrôle. La méthode DEA apparaît pour beaucoup de spécialistes comme un moyen adéquat pour mesurer la performance des unités d'un système de santé dans la mesure où la connaissance *a priori* des valeurs de jugements n'est pas nécessaire pour appliquer les modèles DEA. Thanassoulis et al. (1995) dans [102] utilisent DEA pour explorer les objectifs de la qualité des soins périnatals en Angleterre. Chang (1998) dans [24] combine DEA et l'analyse de régression pour évaluer les efficacités des hôpitaux à Taiwan. Athanassopoulos et Gounaris (2001) dans [7] utilisent DEA pour analyser les efficacités technique et d'allocation des hôpitaux en Grèce ; Giokas (2001) dans [49] combine lui DEA et d'autres méthodes d'estimation pour analyser l'efficacité de l'utilisation des ressources des hôpitaux en Grèce. Birman et al. (2003) dans [18] utilisent DEA pour mesurer les efficacités des cliniques médicales civiles et militaires aux USA, en considérant les facteurs inputs incluant les salles de traitement, les coûts des techniciens,

infirmiers, médicaments ; et comme facteurs outputs ils considèrent les patients traités et les employés formés. Chang et al. (2004) dans [25] proposent une étude sur l'analyse des performances des hôpitaux à Taiwan ; plusieurs autres applications sur les secteurs de la santé utilisent DEA, c'est le cas de : Färe et Grosskopf (2000) dans [45], Ozcan (1995) dans [80], Ballesterio et al. (2004) dans [9], Puig-Junoy (2000) [84], Dervaux et al. (2003) [36], Wagner et al. (2003) [117], Shroff et al. (1998) [93], Grosskopf et al. (2004) dans [52], Linna et al. (2003) dans [73], Ouellette et Vierstraete (2004) dans [79], Watcharasriroj et Tang (2004) dans [118].

3.4.3 Applications DEA aux systèmes bancaires

Dans le cas des systèmes bancaires, les décideurs cherchent à contrôler au mieux, les intérêts, les frais de commission, les provisions pour compenser les pertes liées aux prêts, le capital employé, les fonds empruntés et les capitaux propres, les agents, etc. La méthode DEA peut être et a déjà été utilisée pour la mesure des activités réalisées et des moyens employés par les agences bancaires. Les mesures de performance par la méthode DEA fournit un indicateur (score) d'efficacité de performance qui reflète la capacité des agences bancaires à fournir des services (clientèle, information, chiffre d'affaire, etc.) en tenant compte du capital. Thompson et al. (1997) [105], proposent une étude utilisant DEA pour mesurer les performances de 100 grandes banques aux USA. Leur étude a consisté à déterminer la rentabilité et les efficacités productives de ces banques. Taylor et al. (1997) [96] proposent une autre étude utilisant DEA pour évaluer des banques mexicaines. Ils considèrent un modèle avec un unique output, le revenu total, et comme facteurs inputs les dépôts et les dépenses des commissions. Cook et Hababou (2001) [33] étudient les performances de ventes des banques en utilisant DEA.

3.4.4 Applications DEA aux mesures des performances environnementales

Les applications utilisant DEA pour analyser les performances environnementales des entreprises sont des travaux intégrant les facteurs indésirables liés aux activités des entreprises. Parmi les travaux utilisant DEA pour mesurer les performances environne-

mentales on peut citer : le travail de Agrell et Bogetoft (2005) dans [4], pour l'analyse des efficacités économique et environnementale des usines de chauffage ; Zhou et al. (2007) dans [129] utilisent DEA pour mesurer les performances environnementales de 26 États de l'OCDE, en prenant en compte des facteurs indésirables comme les productions du dioxyde de carbone (CO_2), de l'oxyde de soufre (SO_x), de l'oxyde d'azote (NO_x) et du monoxyde de carbone (CO) ; Zofio et Prieto (2001) dans [134] utilisent DEA pour analyser les performances environnementales des industries dans la zone de l'OCDE, en tenant compte des émissions du CO_2 ; Korhonen et Luptacik (2004) dans [70] utilisent DEA pour analyser les performances environnementales des centrales électriques ; Tyteca (1996) dans [110] ; Yu (2004) dans [123], Färe et al. (2004) dans [46], Cook et Zhu (2006) dans [34], entre autres traitent des cas utilisant DEA pour mesurer les performances environnementales des entreprises.

3.4.5 Applications DEA aux autres domaines de l'économie

Parmi les systèmes de production, l'agriculture est l'un des domaines où l'on porte beaucoup d'attention sur les performances de production. C'est cette importance que Farrell dans [44] a voulu souligner en proposant la mesure d'efficacité technique, source de l'idée DEA. Piot-Leptit et Rainelli (1996) dans [81], utilisent DEA pour déterminer les inefficacités des productions d'élevage. Cette étude s'est appliquée à trois types d'élevages qui sont les éleveurs de porcins, les éleveurs de porcins et bovins et les éleveurs de porcins, bovins et volailles. Pour étudier les performances des éleveurs, ils considèrent comme facteurs outputs, les produits animal et végétal, l'azote organique et comme facteurs inputs, ils distinguent les facteurs fixes (terre, travail, matériel, bâtiments) et les facteurs variables les coûts des charges d'élevages, de l'azote minéral et d'autres charges.

Un autre secteur qui a connu un intérêt quant à la mesure des performances utilisant DEA est le domaine des industries. En ce qui concerne les applications touchant ce domaine des industries on peut citer entre autres les travaux de Al-Shammari (1999) dans [75] pour évaluer l'efficacité opérationnelle de 55 compagnies industrielles en Jordanie, Thompson et al. (1996) dans [104] pour mesurer les performances des mines de

charbons de l'Etat d'Illinois (USA) ; Ali et Nakosteen (2005) dans [5] pour des industries aux USA. On peut noter aussi les travaux :

- de Golany et Thore (1997) dans [50], qui utilisent DEA pour mesurer les performances sociale et économique de 72 pays développés et en voie de développement ;
- de Yunos et Hawdon (1997) dans [127], qui utilisent DEA pour comparer les performances des offices nationaux d'électricité (de plusieurs pays) ;
- de Despotis en 2004 dans [37] et en 2005 dans [38], qui utilise DEA pour calculer et mesurer les indices de développement humain des pays ;
- de Vennesland (2005) dans [115], qui utilise DEA pour mesurer le développement de l'économie rural en Norvège ;
- de Ali et Nakosteen (2005) dans [5], pour le cas des industries aux USA ;
- de Zanakis et al. (2005) dans [128], utilisant DEA pour déterminer les efficacités des pays en tenant des facteurs socio-économiques déterminant de la pandémie du VIH/SIDA.

3.5 Domaines d'application de DEA pour le cas du CSLP au Burkina Faso

Dans le “*Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté (CSLP)*”, programme de développement et de réduction de la pauvreté, mis en place par le Gouvernement Burkinabé, des domaines cibles et prioritaires sont définis et des moyens de développement de ces domaines sont proposés. Nous montrerons, dans la partie III, pour certains programmes et leurs stratégies, comment l'approche DEA peut être un outil efficace pour augmenter le contrôle, le suivi et l'évaluation des performances de ces programmes. Les grandes orientations pour un développement durable du Burkina Faso fixées par le CSLP, peuvent servir de guide en combinant les différentes expertises (savoir-faire) des divers domaines d'activités pour un développement durable du pays. Les mesures de performances doivent constituer des cadres privilégiés, où les décideurs et partenaires, utilisent comme baromètre de développement des différentes unités de contrôle. De plus, chaque secteur a besoin de référence comparable pour affiner sa stratégie de développement et être plus compétitif. Nous citerons quelques secteurs au Burkina Faso, où ce souci de compétitivité peut aider à lutter contre la pauvreté.

3.5.1 La production agricole

Le secteur agricole est le secteur au Burkina employant plus de 80% des personnes actives. Les projets de développement de ce secteur intègrent la formation des agriculteurs pour des productions particulières (coton, riz, sésame, etc.). L'utilisation de l'approche DEA dans ce secteur particulier peut aider les formateurs, les partenaires financiers et techniques à mesurer les efficacités des différentes productions suivies et déterminer les unités de références pour chaque type d'exploitation. Ceci indéniablement peut réduire les coûts de formation et les investissements dans la mesure où les formations et les investissements vont cibler les productivités optimales de l'ensemble des productions c-à-d. que les investissements seront guidés par les plans de production optimales ou efficaces. Utiliser DEA dans l'analyse des activités de production (agriculture, élevage, mais aussi mines, industries, etc.) peut orienter les acteurs ou décideurs sur les conditions de production optimale. Ceci peut aider énormément l'économie Burkinabé qui se repose en grande partie sur l'agriculture.

3.5.2 Le système de l'éducation

Le processus de décentralisation mis en place par le gouvernement Burkinabé, permet aux directions décentralisées de gérer partiellement les problèmes d'enseignement et d'alphabetisation. Le souci restant pour ce processus est l'harmonisation des stratégies de développement en tenant compte des ressources limitées de l'Etat. Pour ce faire, le suivi et l'évaluation continus des indicateurs de performances de l'éducation sont envisagés pour permettre un développement harmonieux du système. Les techniques de suivi et d'évaluation ne permettent malheureusement pas d'identifier une fonction optimale de productivité scolaire. En effet, les indicateurs ressources et les indicateurs produits ne sont pas traités ensembles. Pour affecter par exemple, une ressource à une direction, le seul élément de référence demeure la moyenne nationale du facteur. Et pour juger de l'efficacité de résultat d'une direction, c'est seulement à partir des valeurs faibles, moyennes et grandes du facteur, que cela se fait. A titre d'illustration, reprenons cette citation d'un quotidien, lors de la journée de l'excellence que célèbre chaque année la

direction provinciale de l'enseignement de base (DPEBA) de la province de Kourittenga, région du centre-est. “ *Des deux, qui est le meilleur enseignant de l'année 2005 ? (...)* Avec l'appui du “Plan-Koupéla”, la DPEBA du Kourittenga a célébré pour la seconde fois consécutive, la Journée de l'excellence le lundi 11 juillet 2005 à Koupéla. La cérémonie a vu la consécration de dix (10) enseignants comme meilleurs enseignants de l'année 2005 qui ont, du reste, reçu divers prix et récompenses. Avec un taux de succès de 100% pour 55 élèves présentés à l'examen, Mme R. de l'école Koupéla "A" a été sacrée meilleure enseignante de l'année 2005 au Kourittenga. Cependant, de l'avis de bon nombre d'enseignants, la palme aurait pu revenir à M. S. de l'école secteur n.4 de Pouytenga (classé 3ème) sans que personne ne crie au scandale. En effet, des élèves de M. S. un seul a échoué à l'examen pour 93 candidats présentés, soit un taux de succès de 98.92%. En tout cas, des dix lauréats, c'est lui qui a fait le plein des félicitations, ovations, acclamations et autres youyous...”². Ce fait divers illustre le schéma réducteur préconisé pour identifier les meilleures unités. Ceci devrait amener les responsables de l'éducation à associer à la fois les moyens et les résultats pour évaluer les performances. L'introduction de l'approche DEA, pour accompagner le cadre stratégique de lutte contre la pauvreté, volet éducation, ne peut qu'être bénéfique dans la mesure où d'une part, l'on ne demande pas la connaissance *a priori* des valeurs de jugements des différents indicateurs (ressources ou produits) pour les mesures d'efficacité de performances et surtout d'autre part, que l'on inclut tous les facteurs dans le modèle d'analyse. Ce processus peut donner beaucoup d'information sur les bonnes pratiques en matière d'enseignement. De plus, l'utilisation de DEA peut permettre d'évaluer les changements de productivité d'une année à l'autre à partir des indices de productivité de Malmquist.

3.5.3 Le système national de la santé

De même que le système de l'enseignement, le système national de la santé au Burkina est en voie de décentralisation. Ce processus de décentralisation a pour but principal d'accélérer le développement du système de santé et l'accès de la santé aux plus pauvres. Pour mieux suivre ce processus, l'utilisation de l'approche DEA peut éclairer les acteurs

²Sidwaya Quotidien N°344 du 13/07/05 : Dans la rubrique On murmure de Kantigui

de la santé en déterminant toujours les meilleures pratiques et aussi en orientant les responsables de districts à surveiller les points de défaillance tout en ayant des unités de référence comparables. Par exemple, un district inefficace dont le taux de couverture en accouchements assistés est trop faible peut se référer à un autre district efficace de référence et améliorer cet indicateur. Tout ceci peut orienter les besoins de formations des agents d'une unité de soins inefficace dans l'objectif d'améliorer les indicateurs.

3.5.4 Autres secteurs

Les autres secteurs, davantage privés que publics, et qui pourraient retirer avantage de l'utilisation de la méthode DEA sont :

- les industries : pour la recherche de compétitivité par benchmarking ;
- les banques : pour évaluer et améliorer les performances des agences (centrales ou déconcentrées) ;
- les services postaux : pour comparer les performances des unités ;
- les compagnies de transport : pour la recherche de compétitivité par benchmarking ;
- les caisses d'épargne : pour comparer les performances des unités et suivre dans le temps les changements de productivité (indices de Malmquist) ;
- les associations qui accompagnent l'Etat dans l'accomplissement des objectifs du cadre stratégique de lutte contre la pauvreté : pour la comparaison des performances et la recherche de meilleurs éléments ;
- les établissements d'enseignements professionnels, techniques, supérieurs : pour la recherche de compétitivité par benchmarking.

3.6 Conclusion et commentaires

Les notions fondamentales exposées dans ce chapitre et la revue de littérature des applications utilisant DEA, nous ont permis de cibler les secteurs susceptibles d'applications pour le cas particulier du Burkina Faso. Nous utiliserons dans la partie application de cette thèse (partie III), les notions de rendements d'échelle pour mesurer les efficacités de performances des directions régionales et provinciales de l'enseignement de base du

Burkina (chapitre 9) et les directions régionales et districts sanitaires (chapitre 10) ; nous utiliserons également les notions d'indices de Malmquist pour déterminer les variations de productivité (efficacité et technologie) de ces directions pour des années successives.

Chapitre 4

La programmation mathématique multicritère

Dans ce chapitre, nous présentons quelques généralités sur la méthodologie multicritère. Quelques concepts de base seront présentés avec quelques exemples de méthodes de résolution. Nous distinguons les deux types de problèmes multicritères, d'une part les problèmes où l'ensemble des solutions admissibles est implicite et formulé par des équations et d'autre part les problèmes où les solutions admissibles sont énumérées. Le second type de problème, dont la méthodologie de résolution est couramment appelée "analyse multicritère (AMC)", concerne des problèmes multicritères dont l'ensemble des solutions possibles est fini et les solutions énumérées et évaluées sur tous les critères. En "analyse multicritère" ou en anglais "*Multi Criteria Decision Analysis (MCDA)*" ou encore "*Multi Criteria Decision Making (MCDM)*", quatre problématiques différentes sont traitées (voir dans [86]) :

- problématique de choix d'une ou de plusieurs solutions ou actions appelée encore problématique P_α ;
- problématique de tri qui consiste à classifier les actions dans des classes prédéfinies appelée encore problématique P_β ;
- problématique de rangement des actions dans un ordre (partiel) de préférence appelée encore problématique P_γ ;
- problématique de description des actions qui consiste à analyser les informations des actions appelée encore problématique P_δ .

Plusieurs méthodes existent pour la résolution de chaque type de problématique de l'AMC comme les méthodes ELECTRE I, II, III, IS, Tri, PROMETHE, etc. Nous renvoyons le lecteur intéressé par ce type de méthode aux références [86, 116]. Même si

nous évoquerons ces problèmes au chapitre 5, nous ne développerons pas ce type problématique (AMC) dans ce travail. Nous nous intéressons uniquement au premier type de problématique appelée “Programmation Mathématique Multicritère” (voir le livre de Teghem [97, chapitre 11]).

Ce chapitre est structuré comme suit : en section 4.1, nous exposons les concepts de base (problème, définitions et théorèmes) ; ensuite en section 4.2, quelques approches générales de résolution seront présentées ; enfin en section 4.3, nous décrirons les particularités des problèmes avec des variables entières ou binaires, ainsi que quelques méthodes illustratives de résolution.

4.1 Les concepts de base de la programmation mathématique multicritère

4.1.1 Le problème

Un problème de programmation mathématique multicritère ou multi-objectif (PMMO), est un problème d’optimisation simultanée de K fonctions objectifs avec $K \geq 2$. Un problème PMMO se formule de la façon suivante :

$$(PMMO) \quad \begin{array}{ll} \text{“optimiser”} & z_k(W), \quad k = 1, \dots, K \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} W \in \Omega \end{array} \right. \end{array} \quad (4.1)$$

où

- $W \in \mathbb{R}^Q$ représente le vecteur des variables, non négatives, sur lesquelles porte la décision, et Q le nombre de ces variables. Le cas échéant, $W \in \mathbb{Z}^Q$ ou $W \in \{0, 1\}^Q$ selon que les variables sont entières ou binaires (cf. section 4.3).
- $z_k(W)$ représente la $k^{\text{ième}}$ fonction objectif ou critère du problème de décision ;
- “optimiser” $z_k(W)$ représente la préférence portée sur le critère k qui peut être soit *maximiser* ou *minimiser*. Par la suite nous considérons que toutes les fonctions objectifs sont à maximiser.
- Ω représente l’ensemble des solutions admissibles. Cet ensemble est défini à partir des contraintes (implicites ou explicites) du problème.

Définition . Espace de décision

L'espace des variables de décision $\mathbb{R}^Q$ est appelé espace de décision.

Définition . Espace des critères

L'espace $\mathbb{R}^K = Z(\mathbb{R}^Q)$, est appelé espace des critères, avec $Z(W) = (z_1(W), \dots, z_K(W))$.

Par la suite, nous noterons $Z_\Omega = Z(\Omega)$ pour représenter l'ensemble image par les fonctions objectifs. Le problème (PMMO) peut se formuler de façon équivalente dans l'espace des critères par le problème suivant :

$$(PMMO) \quad \begin{array}{ll} \text{“max”} & z_k, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{s.c.} & \left\{ z = (z_1, \dots, z_K) \in Z_\Omega \right. \end{array} \quad (4.2)$$

Le cas particulier et fréquemment utilisé de problème PMMO est le problème de programmation mathématique linéaire multi-objectif en anglais “*Multiple Objective Linear Programming (MOLP)*”. Le problème MOLP est donc un cas particulier où les K fonctions objectif sont linéaires et l'ensemble Ω est défini par des contraintes formulées par des équations ou inéquations linéaires. Le problème s'écrit de façon générale :

$$(MOLP) \quad \begin{array}{ll} \text{“optimiser”} & z_k(W) = C_k W, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{s.c.} & \left\{ W \in \Omega = \{W \in \mathbb{R}^Q \mid T_i W \quad \Re_i \quad b_i, \quad i = 1, \dots, m; \} \right. \end{array} \quad (4.3)$$

avec m le nombre de contraintes, $\Re_i \in \{=, \leq, \geq\}$ ($i = 1, \dots, m$). Par la suite nous noterons respectivement

$C(K \times Q)$, $T(m \times Q)$ et $b(m \times 1)$ les matrices des valeurs c_{kq} , a_{iq} et b_i .

Pour simplifier – sans perte de généralités – nous considérons que les K objectifs sont à maximiser que les contraintes sont du type $\leq$ et que les variables sont non négatives. On peut donc formuler le problème MOLP correspondant de façon équivalente au problème suivant :

$$(MOLP) \quad \begin{array}{ll} \text{“max”} & z_k(W) = C_k W, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{s.c.} & \left\{ W \in \Omega = \{W \in \mathbb{R}^Q \mid TW \leq b, \quad w_q \geq 0, q = 1, \dots, Q; \} \right. \end{array} \quad (4.4)$$

Lorsque toutes les variables sont entières le problème MOLP est connu sous le nom de problème de Programmation Linéaire Multicritère en variables entières ou en anglais

“*Multiple Linear Integer Programming problem (MOILP)*”, et l’ensemble de solutions admissibles est défini par

$$\Omega = \left\{ W \in \mathbb{Z}^Q \mid TW \leq b, \quad w_q \geq 0, q = 1, \dots, Q; \right\}$$

Et lorsque toutes les variables sont binaires le problème MOLP est connu sous le nom de problème de Programmation Linéaire Multicritère en variables binaires ou en anglais “*Multiple Linear Binary Programming problem (MOBLP)*”¹, et l’ensemble de solutions admissibles est défini par

$$\Omega = \left\{ W \in \{0, 1\}^Q \mid TW \leq b \right\}$$

4.1.2 Définitions

Pour le problème PMMO, ou en particulier les problèmes MOLP ou MOILP ou MOBLP, une ou plusieurs solutions peuvent satisfaire la préférence globale du décideur, ceci étant lié aux préférences partielles que le décideur peut avoir relativement aux différents critères. Les définitions suivantes permettent de distinguer les solutions qui peuvent être potentiellement “meilleures” pour l’objectif global du décideur (cf. [97]) :

Relation de dominance : (cf. [97])

Un point z dans Z_Ω , est dit dominé dans l’espace des critères par un autre z' dans Z_Ω , conformément au problème *PMMO* (4.1) avec des maximisations, si et seulement si,

$$z_k \leq z'_k, \quad k = 1, \dots, K \text{ et } z \neq z'.$$

Un point est dit non dominé dans le cas contraire.

Solution efficace : (cf. [97])

Une solution W dans Ω , est dite solution efficace ou Pareto optimale, conformément au problème *PMMO* (4.1), si et seulement si, son image $Z(W)$ n’est pas dominée dans

¹Le problème général PMMO en variables binaires est aussi connu sous le nom de problème d’“Optimisation Combinatoire Multicritère” ou en anglais “*Multiple Objective Combinatorial Optimization problem (MOCO)*” (voir dans [100])”

l'espace des critères Z_Ω .

Remarque . *La résolution d'un problème PMMO consiste*

– soit à trouver dans l'espace de décision une solution efficace ou Pareto optimale ;

– soit à trouver dans l'espace des critères un point non dominé,

maximisant (ou satisfaisant) la préférence globale du décideur.

Dans le cas particulier, MOLP, les ensembles Ω et Z_Ω sont des polyèdres respectivement dans $\mathbb{R}^Q$, $\mathbb{R}^K$.

Solution faiblement non dominée : (cf. [97])

Un point z dans Z_Ω , est dit faiblement non dominé dans l'espace des critères, s'il n'existe pas un point z' dans Z_Ω , telle que $z_k < z'_k$, pour tout $k = 1, \dots, K$.

De façon similaire une solution W dans Ω , est dite solution faiblement efficace, si, le point image $Z(W)$ est faiblement non dominé dans l'espace des critères Z_Ω .

Nous noterons

$$\tilde{W}^k \in \arg \max_{W \in \Omega} \{z_k(W)\}, \quad k = 1, \dots, K$$

$$\underline{W}^k \in \arg \min_{W \in \Omega} \{z_k(W)\}, \quad k = 1, \dots, K$$

(en supposant que ces solutions sont uniques).

Points idéal et anti-idéal : (cf. [97])

On appelle point idéal du problème (4.1), le point M de $\mathbb{R}^K$, de coordonnées

$$M_k = z(\tilde{W}^k), \quad k = 1, \dots, K$$

On appelle point anti-idéal du problème (4.1), le point $\underline{M}$ de $\mathbb{R}^K$, de coordonnées

$$\underline{M}_k = z(\underline{W}^k), \quad k = 1, \dots, K$$

Matrice des gains : (cf. [97])

On appelle matrice des gains du problème (4.1), la matrice $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{R}^{K \times K}$ de coefficients

$$\mathcal{M}_{kl} = z_k(\tilde{W}^l), \quad k, l = 1, \dots, K.$$

$\mathcal{M}$ est encore appelée matrice des performances ou en anglais “*payoff matrix*”.

On appelle point nadir du point idéal M , le point Nd de $\mathbb{R}^K$ de coordonnées

$$Nd_k = \min_{l=1,\dots,K} \mathcal{M}_{kl}; \quad k = 1, \dots, K.$$

Remarque . La diagonale de la matrice des gains définit le point idéal c-à-d.

$M_k = \mathcal{M}_{kk}$, $k = 1, \dots, K$. La matrice des gains $\mathcal{M}$, et donc aussi le point nadir Nd , dépendent des choix des solutions $\tilde{W}^k$, $k = 1, \dots, K$, en cas de non unicité.

Fonctions scalarisantes :

Les fonctions scalarisantes sont des fonctions d’agrégation des critères qui permettent de ramener un problème PMMO en un problème d’optimisation unicritère pour générer une solution admissible. Ces fonctions doivent permettre de déterminer une solution efficace et aussi toute solution efficace doit pouvoir être générée pour certaines valeurs des paramètres de la fonction.

Les trois fonctions scalarisantes les plus courantes sont les suivantes (cf. [97]) :

- la somme pondérée que nous noterons s_1 dépendant d’un paramètre poids (généralement normalisé) $\lambda \in \Lambda^+$ dont les coordonnées λ_k reflètent l’importance relative aux différents critères

$$s_1(z, \lambda) = \sum_{k=1}^K \lambda_k z_k, \quad \text{avec} \quad \Lambda^+ = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^K : \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1; \lambda_k > 0 \right\}$$

- la distance pondérée de Tchebychev, notée s_2 , dépendant d’un paramètre poids $\lambda \in \Lambda^+$ et d’un paramètre point de référence ou point d’aspiration $g \in \mathbb{R}^K$, dont les coordonnées représentent des valeurs souhaitables des différents critères, à s’approcher au mieux ;

$$s_2(z, \lambda, g) = \max_{k=1,\dots,K} (\lambda_k |z_k - g_k|);$$

- la distance pondérée augmentée de Tchebychev, notée s_3 , dépendant d’un paramètre poids $\lambda \in \Lambda^+$, d’un paramètre point de référence $g \in \mathbb{R}^K$ et d’un coefficient $\rho > 0$, un

nombre suffisamment petit ;

$$s_3(z, \lambda, g) = \max_{k=1, \dots, K} (\lambda_k |z_k - g_k|) + \rho \left(\sum_{k=1}^K |z_k - g_k| \right) \quad \rho > 0.$$

Les valeurs g_k , encore appelées aspirations ou “goals”, les valeurs cibles à se rapprocher simultanément autant que possible, sont généralement définies par

$g_k = M_k + \varepsilon_k, k = 1, \dots, K$, où les $\varepsilon_k > 0$ sont des valeurs positives suffisamment petites.

4.1.3 Théorèmes de base de caractérisation des solutions efficaces

Avec ces fonctions scalarisantes, on obtient les théorèmes suivants qui caractérisent les solutions efficaces.

Théorème 4.1. Théorème de Geoffrion : (cf. [97])

Soit W^ solution optimale du problème suivant :*

$$\max_{W \in \Omega} s_1(z(W), \lambda) \quad (4.5)$$

avec $\lambda \in \Lambda^+$.

- i. Si W^* est solution optimale de (4.5), alors W^* est une solution efficace.*
- ii. Si Z_Ω est convexe et si W^* est solution efficace du problème PMMO (4.1), alors il existe $\lambda \in \Lambda^+$ tel que W^* est solution optimale de (4.5).*

Remarque . Dans le cas où Z_Ω n'est pas convexe, comme c'est le cas par exemple des problèmes MOILP ou MOBLP, le point (ii) du théorème de Geoffrion ci-dessus n'est plus vérifié.

Théorème 4.2. Théorème 1 de Bowman : (cf. [97])

Soit W^ solution optimale du problème suivant :*

$$\min_{W \in \Omega} s_2(z(W), \lambda, g) \quad (4.6)$$

avec $\lambda \in \Lambda^+$.

W^* est une solution efficace du problème PMMO (4.1), si et seulement si, W^* est solution optimale unique de (4.6).

Théorème 4.3. Théorème 2 de Bowman : (cf. [97])

Soit W^* solution optimale du problème suivant :

$$\min_{W \in \Omega} s_3(z(W), \lambda, g) \quad (4.7)$$

avec $\lambda \in \Lambda^+$.

- i. si W^* est solution optimale de (4.7), alors W^* est une solution efficace ;
- ii. si W^* est solution efficace du problème PMMO (4.1), alors il existe $\lambda \in \Lambda^+$ et $\rho > 0$ tels que W^* est solution optimale de (4.7).

Remarque . La considération de la distance pondérée augmentée de Tchebychev permet d'éliminer le caractère d'unicité de la solution optimale considérée dans le théorème 1 de Bowman.

Théorème 4.4. Théorème de Soland : (cf. [97])

Soit W^* solution optimale du problème suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & z_l(W) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} z_k(W) \geq \alpha_k, & k \neq l; \\ W \in \Omega; \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

avec $\alpha_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k$.

- i. si W^* est solution optimale de (4.8), alors W^* est une solution efficace ;
- ii. si W^* est solution efficace du problème PMMO (4.1), alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^K$ tels que W^* est solution optimale de (4.8).

4.2 Quelques approches de résolution

Dans cette section, nous exposons quelques principes des méthodes utilisées pour déterminer une solution efficace qui satisfait au mieux le décideur dans des problèmes MOLP.

4.2.1 Théorie de l'utilité multi-attribut

C'est une approche couramment utilisée par les anglo-saxons, appelée en anglais "*Multiple Attribute Utility Theory (MAUT)*", et basée sur la notion de fonction d'utilité.

Fonction d'utilité (cf. [97])

Une fonction d'utilité est une fonction définie dans l'espace des critères, qui caractérise la préférence (ou objectif) global du décideur. Soit $\mathcal{U}$ une fonction d'utilité d'un décideur DM , définie par :

$$\mathcal{U} : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$$

Soient $W^0 \in \Omega$ et $W^1 \in \Omega$ deux solutions dans l'espace de décision. On a les propriétés suivantes :

- (i) DM préfère la solution W^0 à la solution W^1 si et seulement si, $\mathcal{U}(Z(W^0)) > \mathcal{U}(Z(W^1))$;
- (ii) DM est indifférent aux solutions W^0 et W^1 si et seulement si, $\mathcal{U}(Z(W^0)) = \mathcal{U}(Z(W^1))$.

L'approche "*Multiple Attribute Utility Theory (MAUT)*" consiste à approcher, pour un problème de décision, la fonction d'utilité $\mathcal{U}$ du preneur de décision, et de résoudre ensuite le problème à un seul objectif suivant :

$$\max_{W \in \Omega} \mathcal{U}(Z(W)) \quad (4.9)$$

Les modèles les plus couramment utilisés sont les modèles :

– additif : $\mathcal{U}$ est de la forme $\mathcal{U}(z) = \sum_{k=1}^n U_k(z_k)$;

– multiplicatif : $\mathcal{U}$ est de la forme $\mathcal{U}(z) = \prod_{k=1}^n U_k(z_k)$;

avec U_k , $k = 1, \dots, K$ des fonctions supposées strictement décroissantes et concaves

(ou pseudo-concaves) qui permettent d'évaluer les solutions relativement au critère k pour exprimer les préférences du décideur.

Le modèle additif peut s'écrire sous une forme multiplicative en introduisant exp et réciproquement le modèle multiplicatif peut se mettre sous la forme additive en introduisant log puisque les fonctions U_k sont positives.

Les inconvénients relevés à ce type d'approche sont le fait qu'il n'y a pas de prise en compte d'incomparabilité des solutions de la part du décideur. De plus, cette approche se base fortement sur l'hypothèse d'*indépendance préférentielle* des critères c-à-d. que la préférence que le décideur porte sur un critère est indépendante de la valeur prise par chacun des autres critères. D'autre part, construire la fonction d'utilité est souvent une tâche difficile et délicate.

4.2.2 Méthodes interactives

Le principe des méthodes interactives consiste de la part de l'analyste, à utiliser l'information que le preneur de décision fournit quand une solution lui est présentée. Ces informations sont ensuite utilisées pour formaliser techniquement et faire ressortir la préférence globale. Contrairement donc à l'approche MAUT, l'analyste se laisse guider par les différentes réactions du décideur pour orienter le choix d'une solution satisfaisante. Les approches interactives contiennent deux phases importantes dont une d'information et une de calcul :

- **Phase d'information** : c'est une phase d'interaction entre l'analyste et le preneur de décision, qui permet au second de réagir à la solution qui lui est présentée et d'orienter, le processus s'il n'est pas satisfait ; l'analyste pose des questions au décideur sur ce qu'il attend de plus sur les nouvelles solutions à lui présenter ;

- **Phase de calcul** : c'est une phase où l'analyste intègre les nouvelles informations recueillies pour déterminer une nouvelle solution efficace.

La figure 4.1 suivante (reprise de [97]) présente la structure générale d'une méthode interactive.

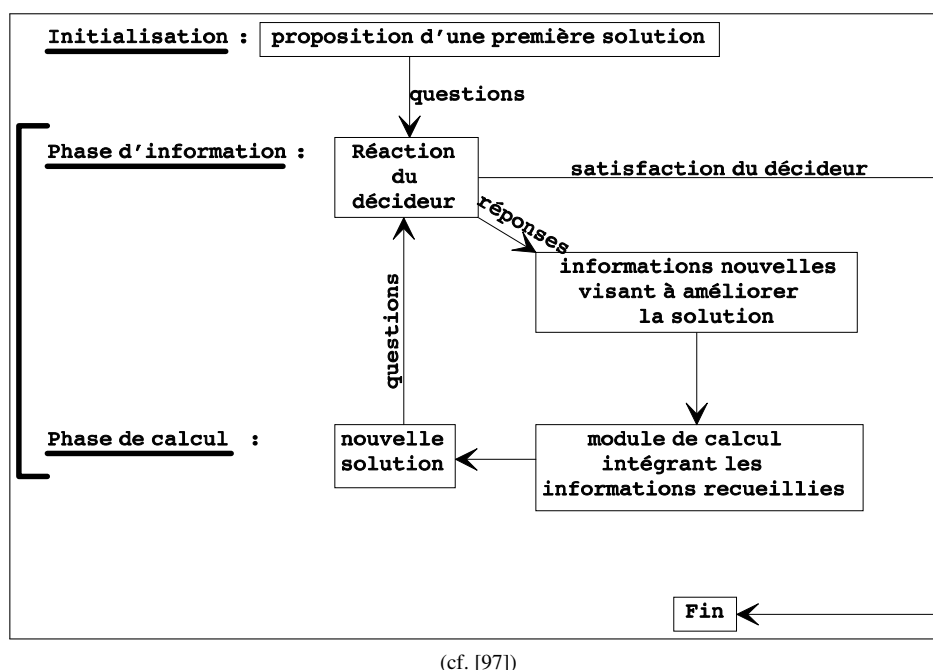


Figure 4.1 – Schéma général d'une méthode interactive

Parmi les méthodes interactives nous décrivons la méthode de base (méthode STEM), illustrant parfaitement ces différentes phases pour la résolution des problèmes MOLP .

4.2.2.1 Méthode STEM

Nous présentons la méthode STEM dans ses deux versions proposées par Teghem dans [97].

a) Initialisation ($l = 0$)

Les K fonctions objectifs sont optimisées (“*maximisées*”) individuellement de façon à déterminer :

- le point idéal $M = (M_1, \dots, M_K)$;
- la matrice (ou table) des gains $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, K)$;
- le point nadir $Nd = (Nd_1, \dots, Nd_K)$;
- l'estimation $[Nd_k, M_k]$ de l'intervalle de variation de z_k sur l'ensemble des solutions efficaces.

Des coefficients ou poids techniques associés aux différents critères sont définis de la

manière suivante :

$$\alpha_k = \frac{M_k - Nd_k}{Nd_k} \cdot \frac{1}{\|C_k\|}, \quad k = 1, \dots, K,$$

qui sont ensuite normalisés calculés

$$\pi_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{k=1}^K \alpha_k}$$

Remarque . Les coefficients π_k permettent de tenir compte de la plage de variation des critères. Le premier rapport $\frac{M_k - Nd_k}{Nd_k}$ permet d'associer un poids technique grand au critère k quand $M_k - Nd_k$ est grand ; et le second permet de normaliser les vecteurs des critères ($\|C_k\|$ est la norme euclidienne du vecteur C_k). π_k ne représente pas le poids caractérisant l'importance relative au critère k mais joue uniquement un rôle technique. Il y a plusieurs autres façons de définir ces poids techniques (le lecteur peut se référer à [97]).

Nous utiliserons les notations l pour indiquer le numéro de l'itération, Ω^l le sous-ensemble des solutions admissibles considéré à cette itération et $\mathcal{K}^l \subset \{1, \dots, K\}$ l'ensemble des critères considérés à cette itération. Initialement, $l = 1$, $\Omega^1 \equiv \Omega$ et $\mathcal{K}^1 = \{1, \dots, K\}$

Un premier compromis $\tilde{W}^1$ est obtenu en résolvant le problème de minimisation de la distance pondérée augmentée de Tchebychev s_3 de façon à assurer le caractère efficace de $\tilde{W}^1$ (d'après le théorème 2 de Bowman), avec les valeurs d'aspiration définies par $g_k = M_k + \varepsilon_k$, $k = 1, \dots, K$.

$$\begin{aligned} \min \quad & s_3(z, \lambda, g) = \max_{k=1, \dots, K} (\lambda_k |z_k - g_k|) + \rho(\sum_{k=1}^K |z_k - g_k|) \\ \text{s.c.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} W \in \Omega \end{array} \right. \end{aligned}$$

On utilise la méthode dite de “Big M” (cf. [97]) pour transformer ce problème en un problème linéaire. Pour éviter la confusion avec les notations M , employées déjà, on

considère le problème linéaire équivalent suivant à résoudre.

$$(P^1) \quad \begin{array}{ll} \min & \theta - \varepsilon \sum_{k \in \mathcal{K}^1} \xi_k \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} \pi_k(M_k - C_k W) \leq \theta - \xi_k, \quad \forall k \in \mathcal{K}^1; \\ W \in \Omega^1 \\ \theta \geq 0; \quad \xi_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}^1; \end{array} \right. \end{array}$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre suffisamment petit.

b) Itération générale $l \geq 2$

Soit $\tilde{w}^l$ la *la solution de compromis* obtenue à l'étape $l - 1$.

Phase d'information

C'est une étape d'interaction, où $\tilde{w}^l$ est fournie au décideur avec les informations

$\tilde{z}_k^l = C_k \cdot \tilde{w}^l$ et les intervalles de variation $[Nd_k; M_k]$. La réaction du décideur donne lieu à deux cas :

- (i) il est satisfait de la solution ; dans ce cas la procédure s'arrête et $\tilde{w}^l$ est la solution de *meilleur compromis* ;
- (ii) il n'est pas satisfait de la solution ; dans ce cas, deux questions sont posées au décideur pour permettre à l'analyste de recueillir de nouvelles informations. On demande au décideur de déterminer le critère $k^{l+1} \in \mathcal{K}^l$ à relaxer et la quantité maximale acceptée de relaxation $\Delta_{k^{l+1}}$. Cette quantité représente le seuil maximum que le décideur accepterait de perdre sur le critère à relaxer par rapport aux valeurs des critères, $\tilde{z}_k^l$, $k = 1, \dots, K$ correspondant de la solution $\tilde{w}^l$.

Phase de calcul

Nous décrivons ici deux possibilités de la phase de calcul proposées dans [97], qui diffèrent des contraintes à imposer pour la génération d'une nouvelle *solution de compromis*.

1. Avec contraintes restrictives

On définit $\mathcal{K}^{l+1} = \mathcal{K}^l \setminus \{k^{l+1}\}$ et

$$\Omega^{l+1} = \left\{ W \in \Omega^l : C_k W \geq \tilde{z}_k^l, \quad \forall k \in \mathcal{K}^{l+1} \right\}.$$

Cette procédure a au maximum K itérations, ce qui est un avantage mais elle a aussi un inconvénient de ne pas permettre au décideur de revoir les seuils de relaxation Δ_k puisque chaque critère ne peut être relaxé qu'une et une seule fois.

2. Sans contraintes restrictives

On définit

$$\mathcal{K}^{l+1} = \mathcal{K} \setminus \{k^{l+1}\} \quad \text{et} \quad \Omega^{l+1} = \Omega$$

Cette version ne limite pas le nombre d'itérations mais elle permet au décideur une grande flexibilité d'appréciation des seuils de relaxation.

En utilisant, l'une ou l'autre des versions ci-dessus, on détermine alors une nouvelle *solution de compromis* $\tilde{W}^{l+1}$ solution optimale du problème linéaire suivant :

$$(P^{l+1}) \quad \begin{array}{ll} \min & \theta - \varepsilon \sum_{k \in \mathcal{K}^{l+1}} \xi_k \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} \pi_k(M_k - C_k W) \leq \theta - \xi_k, \quad \forall k \in \mathcal{K}^{l+1}; \\ C_{k^{l+1}} W \geq \tilde{z}_{k^{l+1}}^l - \Delta_{k^{l+1}} \\ W \in \Omega^{l+1} \\ \theta \geq 0; \quad \xi_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{K}^{l+1}; \end{array} \right. \end{array}$$

$\tilde{W}^{l+1}$ est une solution efficace d'après le théorème 2 de Bowman.

On reprend la phase de calcul pour $l + 1$.

Remarque . De très nombreuses méthodes interactives ont été proposées. Parmi celles les plus couramment utilisées (ou leurs variantes), citons les méthodes interactives de Zionts-Wallenius, de Geoffrion-Dyer-Feinberg, de Korhonen-Laakso, de Steuer-Choo. Le lecteur intéressé peut se référer au livre de Teghem [97].

4.2.3 Goal programming

L'approche de programmation par objectif appelé “*Goal programming*”(cf. [97, 111]) permet de déterminer une solution efficace de “*meilleur compromis*” d'un problème MOLP en associant au problème, des niveaux d'aspiration et des poids pour chaque objectif. L'utilisation de “*Goal programming*” nécessite la connaissance de certains paramètres définis par le décideur :

- un niveau d'aspiration g_k est défini pour chacun des critères $k = 1, \dots, K$. Ce sont des valeurs de référence ou “*goal*” que le décideur cible c-à-d. cherche à atteindre ou à s'approcher au plus près.
- des poids ω_k , représentant l'importance ou la priorité relative du critère $k = 1, \dots, K$.

Le lecteur intéressé par les différentes formulations du “*Goal programming*”, peut se référer au livre de Teghem [97].

Avec les deux types de paramètres définis, le problème MOLP se résume à résoudre le problème unicritère suivant :

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{k=1}^K \omega_k (d_k^+ + d_k^-) \\ \text{s.c.} & \begin{cases} C_k W - d_k^+ + d_k^- = g_k, & k = 1, \dots, K; \\ W \in \Omega \\ d_k^+ \geq 0, \quad d_k^- \geq 0, & k = 1, \dots, K; \end{cases} \end{array}$$

La solution optimale de ce problème (4.2.3) est présentée au décideur comme la solution efficace la plus satisfaisant ou de “*meilleur compromis*.”

Remarque . *Il peut être possible de développer un “Goal Programming” interactif en donnant l'opportunité au décideur de modifier à chaque itération les “goals” g_k et/ou les poids ω_k .*

4.3 Cas particuliers des variables entières ou binaires

4.3.1 Définitions

Le cas particulier des problèmes MOILP, s'écrit de façon générale :

$$(MOILP) \quad \begin{array}{ll} \text{"max"} & z_k(W) = C_k W, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} W \in \Omega = \{W \in \mathbb{R}^Q \mid Tw \leq b; \quad w_q \geq 0, \quad w_q \text{ entier}, q = 1, \dots, Q; \} \end{array} \right. \end{array} \quad (4.10)$$

En MOILP ou en variables binaires, on distingue deux types de solutions efficaces :

Solutions efficaces supportées

Une solution $\bar{W} \in \Omega$ est dite solution efficace supportée si $Z(\bar{W})$ est non dominé dans Z_Ω et il existe $\lambda \in \Lambda^+$ tel que $\bar{W}$ est solution optimale de :

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{k=1}^K \lambda_k C_k W \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} W \in \Omega \end{array} \right. \end{array} \quad (4.11)$$

Tous les théorèmes énoncés pour le cas MOLP permettent de caractériser les solutions efficaces supportées.

Solutions efficaces non supportées

Une solution $\check{W} \in \Omega$ est dite solution efficace non supportée si $z(\check{W})$ est non dominée dans Z_Ω et il n'existe pas $\lambda \in \Lambda^+$ tel que $\check{W}$ est solution optimale de :

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{k=1}^K \lambda_k C_k W \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} W \in \Omega \end{array} \right. \end{array} \quad (4.12)$$

Le théorème de Geoffrion ne permet pas de caractériser les solutions efficaces non supportées puisque dans ce cas Z_Ω n'est pas convexe ; par contre les théorèmes de Bowman et celui de Soland eux le permettent. La figure 4.2 permet de distinguer les solutions efficaces supportées et non supportées dans un espace de deux critères.

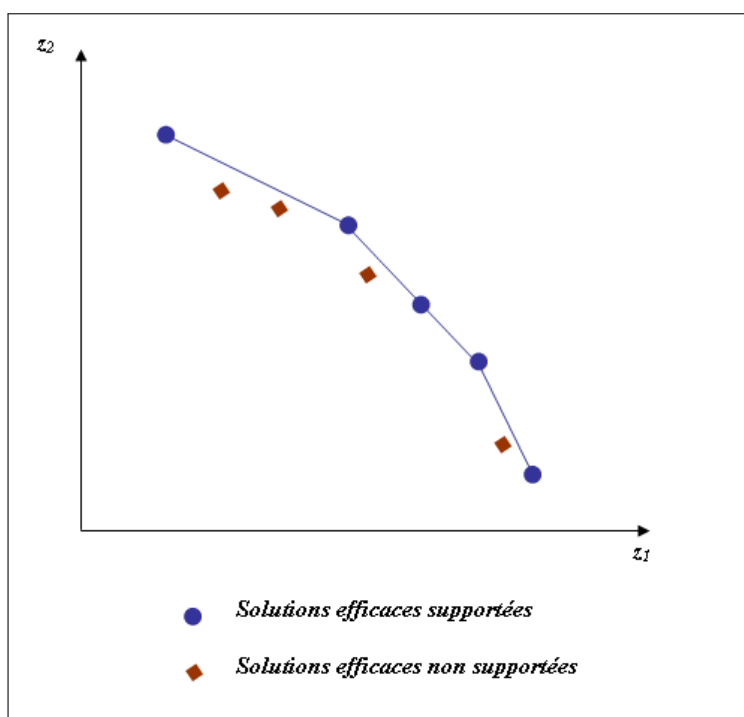


Figure 4.2 – Solutions efficaces supportées et non supportées

4.3.2 Quelques approches de résolution

Dans le cas des problèmes MOILP, la résolution peut consister soit à déterminer un sous-ensemble ou tout l'ensemble des solutions efficaces (puisque cet ensemble est fini) soit encore à déterminer, comme pour le cas MOLP, une solution efficace qui satisfait au mieux le preneur de décision. Pour ce dernier, l'approche interactive est souvent utilisée ; par contre pour la détermination des solutions efficaces d'autres approches particulières sont proposées. On peut y distinguer deux classes de méthodes :

- les méthodes exactes qui garantissent l'obtention de solutions efficaces ;
- les méthodes d'approximation couramment appelées les “*heuristiques*” ou encore “*métaheuristiques*”. Ce deuxième type d'approche est nécessaire lorsque le nombre de variables ou de solutions à explorer est trop élevé et que l'on doit dès lors se contenter d'une approximation de l'ensemble des solutions efficaces. Pour un panorama général des méthodes traitant des problèmes MOILP, nous renvoyons le lecteur aux références Teghem-Kunsch [98, 99], Ulungu [111], Ulungu-Teghem [112], et plus récem-

ment Gandibleux-Ehrgott [41] et Chaabane [23]. Nous nous contenterons ici de décrire une méthode de base de chacun des deux groupes.

4.3.2.1 Un exemple de méthode exacte : l'approche interactive de Gonzalez-Reeves-Franz

Nous présentons un exemple de méthode faisant ressortir la particularité des problèmes MOILP c-à-d. la prise en compte des solutions supportées et celles non supportées dans la recherche de solution satisfaisante (cf. [111, 119]). La méthode de Gonzalez-Reeves-Franz, est décomposée en deux phases interactives, la première pour la recherche de meilleures solutions efficaces supportées et la seconde pour la recherche de meilleures solutions efficaces non supportées.

Phase 1 :

– Etape 1.0 : Initialisation

Les K critères sont maximisés individuellement c-à-d. les problèmes linéaires (P^k) suivants sont résolus :

$$(P^k) \begin{array}{ll} \max & C_k W \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} W \in \Omega \end{array} \right. \end{array} \quad (4.13)$$

et pour chaque critère $k, k = 1, \dots, K$ une solution optimale du problème (P^k) et efficace est déterminée, que nous notons $\tilde{W}^k$. Posons

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \tilde{W}^k, \quad k = 1, \dots, K \right\}.$$

– Etape 1.1 : Recherche d'une nouvelle solution efficace supportée

Posons

$$\tilde{Z}_{\Omega} = \left\{ \tilde{Z}^k = C\tilde{W}^k, \quad k = 1, \dots, K \right\}.$$

On définit dans $\mathbb{R}^Q$ une fonction linéaire G , image réciproque de l'hyperplan dans $\mathbb{R}^K$ contenant tous les points de $\tilde{Z}_{\Omega}$; G définit une direction de recherche. On résout le problème linéaire suivant :

$$(P^g) \begin{array}{ll} \max & G(W) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} W \in \Omega \end{array} \right. \end{array} \quad (4.14)$$

Notons $\tilde{W}^g$ la solution optimale de (P^g) (solution efficace d'après le théorème de Geoffrion), $\tilde{z}^g = C\tilde{W}^g$.

– **Etape 1.2 : Interaction avec le décideur**

$\tilde{z}^g$ est présenté au décideur, et on considère trois cas de figure :

✓ $\tilde{z}^g \notin \tilde{Z}_\Omega$ et le décideur préfère $\tilde{z}^g$ à au moins un des points de $\tilde{Z}_\Omega$; on substitue dans $\tilde{\Omega}$ la nouvelle solution à la moins préférée et on reprend **Etape 1.1** :

✓ $\tilde{z}^g \notin \tilde{Z}_\Omega$ et le décideur ne préfère $\tilde{z}^g$ à aucune des solutions déjà sélectionnées. On pose $\tilde{G} = G(\tilde{W}^g)$ et on continue avec la **Phase 2, Etape 2.2** :

✓ $\tilde{z}^g \in \tilde{Z}_\Omega$, on pose $\tilde{G} = G(\tilde{W}^g)$ et on continue avec la **Phase 2, Etape 2.1** :

Phase 2 :

– **Etape 2.1 : Recherche d'une nouvelle solution efficace non supportée**

On pose

$$\tilde{Z}_\Omega = \left\{ \tilde{Z}^k = C \cdot \tilde{W}^k, \quad k = 1, \dots, K \right\}.$$

On définit G , et on résout le problème linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & G(W) \\ (P'^g) \quad \text{s.c.} & \begin{cases} W \in \Omega; \\ G(W) \leq \tilde{G} - \varepsilon; \end{cases} \end{array} \quad (4.15)$$

avec $\varepsilon > 0$ une valeur suffisamment petite ; notons toujours $\tilde{W}^g$ la solution optimale de (P'^g) , $\tilde{z}^g = C\tilde{W}^g$.

– **Etape 2.2 : Interaction avec le décideur**

$\tilde{z}^g$ est présenté au décideur, et on considère deux cas de figure :

✓ le décideur préfère $\tilde{z}^g$ à au moins un des points de $\tilde{Z}_\Omega$; on substitue dans $\tilde{\Omega}$ la nouvelle solution à la moins préférée et on reprend **Etape 2.1** :

✓ le décideur ne préfère $\tilde{z}^g$ à aucune des solutions déjà sélectionnées. On arrête l'algorithme et le décideur choisit celle qu'il préfère parmi les solutions retenues.

4.3.2.2 Un exemple d'approche heuristique : la méthode de Ulungu-Teghem

Vu la difficulté des problèmes MOILP ou en variables binaires, la taille de l'ensemble de solutions efficaces peut nécessiter l'utilisation des heuristiques ou des métaheuris-

tiques.

Pour adapter le recuit simulé (cf. le livre de Teghem et Pirlot [100]) au contexte multicritère, Ulungu et al. dans [113](cf. aussi [82, 101, 109]), ont mis au point la méthode MOSA (pour “*MultiObjective Simulated Annealing*”).

Ils considèrent les paramètres suivants pour le recuit simulé (cf. [100])

$$T_0, \quad \alpha < 1, \quad N_{step}, \quad N_{stop}, \quad T_{stop}$$

Avec ces paramètres définis, un algorithme de type recuit simulé, adapté au cas multicritère, est exécuté pour chaque vecteur poids $\lambda^l \in \mathbb{R}^K$ tel que

$$\lambda_k^l \in \left\{ 0, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \dots, \frac{r-1}{r}, 1 \right\} : \sum_{k=1}^K \lambda_k^l = 1$$

avec r un nombre choisi par le décideur et dépendant de la taille du problème. L’algorithme suivant est utilisé (tous les critères étant à maximiser) pour chaque λ^l :

Initialisation :

- Déterminer une solution initiale W^0 ;
- $PE(\lambda^l) = \{W^0\}$; $N_{count} = n = 0$.

Itération n :

- choisir aléatoirement une solution $V \in \mathcal{V}(W^n)$, voisinage de W^n ;
- $\Delta s = \sum_{k=1}^K \lambda_k^l (z_k(W^n) - z_k(V))$;
- ✓ si $\Delta s \leq 0$, v est acceptée et $W^{n+1} \leftarrow V$; $N_{count} = 0$;
- ✓ sinon v est accepté avec une probabilité $p = \exp(-\frac{\Delta s}{T_n})$ et

$$W^{n+1} \begin{cases} \leftarrow V, \text{ avec } p; & N_{count} = 0; \\ \leftarrow V, \text{ avec } 1 - p; & N_{count} = N_{count} + 1; \end{cases}$$

- Mettre à jour $PE(\lambda^l)$ l’ensemble des solutions potentiellement efficaces c-à-d. des solutions qui n’ont été dominées par aucune autre générée durant la procédure ;
- $n + 1 \leftarrow n$;

✓ si $n(\text{mod } N_{\text{step}}) = 0$ poser $T_n = \alpha T_{n-1}$ sinon poser $T_n = T_{n-1}$;

✓ si $N_{\text{count}} = N_{\text{stop}}$ ou $T_n < T_{\text{stop}}$ alors arrêt sinon continuer avec une nouvelle itération.

A la fin, $PE(\lambda^l)$ contient un sous ensemble de solutions potentiellement efficaces.

En conclusion, les différents ensembles $PE(\lambda^l)$ obtenus sont comparés pour ne retenir que les solutions non dominées qui forment alors l'ensemble final approxinant l'ensemble des solutions efficaces.

Signalons que la méthode de Ulungu-Teghem a ouvert la voie à tout un courant de recherches consacrées à l'adaptation des métaheuristiques dans un contexte multicritère (voir par exemple dans Gandibleux-Ehrgott [41]).

4.3.2.3 Quelques problèmes MOILP et MOCO classiques

<u>Problème</u>	<u>Modèle</u>
Problème de transport ou "Transportation Problem"	"min" CW s.c. $\begin{cases} \sum_{j=1}^n w_{ij} = a_i, & i = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n w_{ij} = b_j, & j = 1, \dots, n; \\ w_{ij} \geq 0, & \text{entier}, \quad \forall i, j; \end{cases}$
Problème d'affectation des tâches ou "Assignment Problem"	"min" CW s.c. $\begin{cases} \sum_{j=1}^n w_{ij} = 1, & i = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^n w_{ij} = 1, & j = 1, \dots, n; \\ w_{ij} \in \{0, 1\}, & \forall i, j; \end{cases}$
Problème de sac à dos ou "Knapsack Problem"	"max" CW s.c. $\begin{cases} \sum_{q=1}^Q a_q w_q \leq b; \\ w_q \in \{0, 1\}; \end{cases}$
Problème de couverture d'ensemble ou "Set Covering Problem"	"min" CW s.c. $\begin{cases} \sum_{q=1}^Q a_q w_q \geq 1; \\ w_q \in \{0, 1\}; \end{cases}$

4.4 Conclusion et commentaires

Les différentes notions de la méthodologie multicritère nous permettront dans les chapitres 5 et 6, d'établir des relations entre ces concepts et ceux de l'approche "*Data Envelopment Analysis*". Les deux grandes classes des problèmes multicritères (programmation mathématique et analyse multicritère) seront considérées pour établir des relations avec le concept DEA. L'approche particulière de "*Goal programming*" sera utilisée au chapitre 7, pour proposer une méthode interactive pour un problème MOILP, en utilisant les évaluations DEA.

Chapitre 5

Relations entre DEA et les méthodes multicritères

Les relations entre les concepts de l'approche DEA et les méthodes multicritères sont traitées de diverses manières dans la littérature. Ces travaux généralement décrivent la relation DEA et les problèmes MCDA ou MOLP. Il s'agit, d'une part, de faire le lien entre les notions d'efficacité de performance au sens DEA et les efficacités au sens de Pareto ; d'autre part, de faire le lien entre les formulations mathématiques des problèmes multicritères et les formulations des modèles DEA. Dans ce chapitre, nous ferons une revue de littérature de quelques travaux sur la relation entre l'approche DEA et les approches multicritères. Nous exposerons en section 5.1 une brève revue de littérature sur les relations entre DEA et MCDA ; en section 5.2, les relations entre DEA et MOLP ; et enfin en section 5.3, nous décrirons un exemple de méthode MOBLP basée sur DEA.

5.1 Relations DEA et MCDA

Dans la littérature plusieurs travaux proposent des méthodologies basées sur les modèles DEA comme outils d'aide à la décision multicritère.

5.1.1 Un classement des alternatives basé sur DEA

Dans [40], Doyle et Green, utilisent le modèle CCR pour proposer des solutions “fortement” rentables dans un problème de localisation de centrales électriques dans 6 pays d'Europe. Le problème considéré consiste à classer des sites potentiels j en fonction du degré de rentabilité. Pour appliquer DEA au problème, Doyle et Green considèrent les critères à minimiser comme des facteurs inputs et les critères à maximiser comme des facteurs outputs dans l'évaluation des performances avec DEA. Les différents critères

sont $z_1, \dots, z_6$:

- $x_{1j} = z_1(W^j)$ avec z_1 la main d'œuvre requise si le site j est sélectionné. C'est un critère à minimiser.
- $y_{1j} = z_2(W^j)$ avec z_2 la puissance générée en Mega Watts (MW) si la centrale dans le site j est ouverte. C'est un critère à maximiser.
- $x_{2j} = z_3(W^j)$ avec z_3 le coût en million de dollars US des opérations de construction de la centrale dans le site j . C'est un critère à minimiser.
- $x_{3j} = z_4(W^j)$ avec z_4 le coût en million de dollars US de la maintenance annuelle de la centrale dans le site j . C'est un critère à minimiser.
- $x_{4j} = z_5(W^j)$ avec z_5 le nombre de villages à évacuer si le site j est sélectionné pour l'ouverture d'une centrale. C'est un critère à minimiser.
- $y_{2j} = z_6(W^j)$ avec z_6 le niveau de satisfaction à une échelle nominale. C'est un critère à maximiser et donc considéré comme un facteur output.

Les évaluations des 6 sites sur ces 6 critères sont données dans le tableau suivant 5.1 :

Sites j	Italie	Belgique	Allemagne	U.K	Portugal	France
Critères de décision						
Main d'œuvre	80	65	83	40	52	94
Puissance générée (MWatt)	90	58	60	80	72	96
Coût des opérations (million de US)	600	200	400	1000	600	700
Coût de la maintenance annuelle (million de US)	54	97	72	75	20	36
Nombre de villages à déménager	8	1	4	7	3	5
Niveau de satisfaction	5	1	7	10	8	6

source : (Doyle et Green) [40]

Tableau 5.1 – Synthèse des données

De façon générale, les auteurs utilisent les formulations CCR suivantes pour calculer des indices de mesures de rentabilité globale (efficacité de performance) d'une unité d comparée aux autres :

$$D_{dd} = \max \sum_{r=1}^2 \mu_r^d y_{rd} \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \sum_{r=1}^2 \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^4 v_i^d x_{ij} \leq 0; & j = 1, \dots, 6; \\ \sum_{i=1}^4 v_i^d x_{id} = 1; \\ \mu_r^d \geq 0, \forall r; \\ v_i^d \geq 0, \forall i; \end{cases} \quad (5.1)$$

Les indices $\bar{D}_{dj} = \frac{\sum_{r=1}^2 \bar{\mu}_r^d y_{rj}}{\sum_{i=1}^4 \bar{v}_i^d x_{ij}}$ sont calculés pour comparer la DMU j à d lorsque cette dernière est évaluée.

Dans les modèles précédents, les mesures $\bar{D}_{dj}$ vérifient $\bar{D}_{dj} \leq 1$.

En utilisant cette approche pour leur application Doyle et Green obtiennent les résultats suivants (tableau 5.2), avec $\bar{D}_d$ pour mesurer la rentabilité de la DMU d , défini par $\bar{D}_d = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \bar{D}_{dj}$:

Sites d	Italie	Belgique	Allemagne	U.K	Portugal	France
Sites j						
Italie	1.000	0.884	0.759	0.649	1.000	1.000
Belgique	0.194	1.000	0.259	0.197	0.414	0.331
Allemagne	0.476	0.286	1.000	0.571	0.762	0.490
U.K	0.250	0.062	0.337	1.000	0.615	0.255
Portugal	0.231	0.026	0.243	0.333	1.000	0.417
France	0.864	0.529	0.579	0.502	1.000	1.000
$\bar{D}_d$	0.503	0.465	0.530	0.542	0.799	0.582

source : (Doyle et Green) [40]

Tableau 5.2 – Matrice de performances

Avec cet exemple, on obtient le classement suivant par efficacité de performance dans le tableau 5.3.

Sites d	Italie	Belgique	Allemagne	U.K	Portugal	France
Rang	5	6	4	3	1	2

Tableau 5.3 – Classement des sites par rentabilité

Il est important de souligner que dans cette situation d'évaluation de performances, aucun jugement de valeur n'est incorporé.

Dans le problème précédent (5.1), les solutions des variables multiplicatives v^d, μ^d ne sont pas forcément uniques, ce qui fait qu'il n'y a pas de garantie que les valeurs $\bar{D}_{dj}$ soient uniques. Pour répondre à cette préoccupation, Doyle et Green proposent de minimiser $\frac{1}{n-1} \sum_{j \neq d}^n D_{dj}$ (cf. [40]).

5.1.2 Une approche interactive basée sur DEA

Dans [17], Belton et Vickers, proposent une approche interactive basée sur DEA pour l'analyse multicritère des DMU. Les auteurs soulignent la proximité entre les approches DEA et MCDA, et mettent en évidence la difficulté de l'interprétation des poids optimaux $\tilde{\lambda}^d$ obtenus pour les différentes DMU d lors de la résolution de la forme d'enveloppement du modèle BCC à orientation input (2.15). Vis à vis du décideur, le modèle DEA apparaît dès lors comme une boîte noire, d'autant que plusieurs solutions optimales peuvent exister pour le problème (2.15). Aussi, Belton et Vickers proposent d'intégrer les deux approches dans un modèle, d'après eux plus transparent. L'idée première des auteurs est de construire une fonction d'utilité somme pondérée des outputs agrégés (considérés comme critères à maximiser) et des inputs agrégés (considérés comme critères à minimiser), modélisée pour la DMU j par :

$$\begin{aligned}
 U_j &= (1 - \beta)O_j - \beta I_j \\
 \text{où} \\
 O_j &= \sum_{r=1}^s \omega_r y_{rj}, \quad \sum_{r=1}^s \omega_r = 1 \quad \text{agrégation des outputs} \\
 I_j &= \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}, \quad \sum_{i=1}^m v_i = 1 \quad \text{agrégation des inputs} \\
 \text{et} \\
 \beta &\text{ vérifiant } \varepsilon \leq \beta \leq 1 - \varepsilon;
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Comme en MCDA, la DMU d sera efficace si et seulement si, il existe β^d tel que $U_d \geq U_j, \quad \forall j$. Ceci peut se traduire par le problème non linéaire

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n \sigma_j^{d-} \\ \text{s.c.} \quad & U_d - U_j + \sigma_j^{d-} - \sigma_j^{d+} = 0, j = 1, \dots, n, \quad j \neq d; \end{aligned} \quad (5.3)$$

dont les variables sont

$$\omega_r, \quad v_i, \quad \beta^d, \quad \sigma_j^{d-}, \quad \sigma_j^{d+}.$$

Il peut être linéarisé en posant

$$v_i^d = \beta^d v_i \quad \text{et} \quad \mu_r^d = (1 - \beta^d) \omega_r$$

ce qui conduit finalement au problème linéaire

$$\begin{aligned} \sigma_\Sigma^{d-} = \min \quad & \sum_{j=1}^n \sigma_j^{d-} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d (y_{rd} - y_{rj}) - \sum_{i=1}^m v_i^d (x_{id} - x_{ij}) + \sigma_j^{d-} - \sigma_j^{d+} = 0, j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m v_i^d = \beta^d; \\ \sum_{r=1}^s \mu_r^d = 1 - \beta^d; \\ \mu_r^d \geq 0, \quad v_i^d \geq 0, \quad \sigma_j^{d-} \geq 0, \quad \sigma_j^{d+} \geq 0, \quad \forall i, r, j; \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Selon les auteurs, l'avantage de cette formulation est la meilleure interprétation des poids grâce au découplage des poids des inputs et des outputs respectivement, dont la somme totale vaut 1. Une DMU d est efficace (au sens DEA) si et seulement si, $\sigma_\Sigma^{d-} = 0$. A partir de ces formulations, de façon interactive on peut visualiser les points dans un espace à deux dimensions : en abscisse on a les valeurs des inputs pondérés avec les variables multiplicatives $\tilde{v}^d$ (poids) optimaux et en ordonnées les valeurs pondérées des outputs par les $\tilde{\mu}^d$. De façon donc visuelle et interactive et suivant les valeurs du paramètre β^d on peut identifier les “meilleures” solutions (DEA efficaces).

Dans [94], Stewart, pour étudier la relation entre DEA et MCDA, reprend la formulation de Belton et Vickers [17] en omettant le paramètre β . Il propose la formulation suivante :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Sigma}^d = \min \quad & \sum_{j=1}^n \sigma_j^d \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d (y_{rd} - y_{rj}) - \sum_{i=1}^m v_i^d (x_{id} - x_{ij}) + \sigma_j^d \geq 0; & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{r=1}^s \mu_r^d + \sum_{i=1}^m v_i^d = 1; \\ \mu_r^d \geq 0, \quad v_i^d \geq 0, \quad \sigma_j^d \geq 0; & \forall i, r, j; \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Avec cette formulation, une DMU d est efficace si et seulement si $\sigma_{\Sigma}^d = 0$.

Stewart (1996) (cf. aussi [17]) propose une autre alternative pour résoudre le problème de la présence possible des poids optimaux alternatifs avec une formulation (min max σ_j^d) dont la forme linéaire équivalente est la suivante :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \Delta^d \\
\text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d (y_{rd} - y_{rj}) - \sum_{i=1}^m v_i^d (x_{id} - x_{ij}) + \sigma_j^d \geq 0; & j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^m v_i^d x_{id} = 1; \\ \Delta^d - \sigma_j^d \geq 0, & \forall j; \\ \mu_r^d \geq 0, v_i^d \geq 0, \quad \sigma_j^d \geq 0; & \forall i, r, j; \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Pour cette formulation, une DMU d est efficace si et seulement si $\tilde{\Delta}^d = 0$.

Cette forme permet, selon les auteurs, de déterminer l'hyperplan de référence de la DMU d qui est défini par :

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{m+s} : y = y_d, \quad \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^d x_i = \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^d x_{id} - \tilde{\Delta}^d \right\}$$

Cet hyperplan correspond à la courbe d'indifférence des quantités outputs observées de la DMU d . En fait, le score d'efficacité $\tilde{\theta}^d$ d'une DMU d est défini par (cf. [94]) :

$$\tilde{\theta}^d = \frac{\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^d x_{id} - \tilde{\Delta}^d}{\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^d x_i}.$$

Ces formulations proposées par Belton et Vicker (1993) et Stewart (1996) ont pour ob-

jectif global de fournir un outil de visualisation des solutions efficaces dans le cas d'un problème multicritère mixte c-à-d. avec des critères à maximiser et des critères à minimiser. Dans ce type de problèmes, les solutions sont connues et les différents critères sont évalués pour chaque solution. Ces différents critères sont respectivement considérés comme facteur input lorsqu'il s'agit de minimiser et facteur output lorsqu'il s'agit d'un critère à maximiser. Les objectifs de ces approches consistent à jouer sur les différentes variables multiplicatives (poids) pour simuler graphiquement les différentes DMU (solutions) et permettre au décideur de choisir un "*meilleur compromis*" en jouant sur ses préférences partielles relatives aux différents critères.

5.1.3 Equivalence entre DEA et MCDA

Dans les formulations ci-dessus des problèmes d'analyse multicritères (MCDA), en utilisant l'approche DEA, il est clair que les solutions (DMU) DEA efficaces sont optimales au sens de Pareto (efficaces supportées). A partir de leurs formulations, dérivées des modèles DEA, Belton et Vickers dans [17] et Stewart dans [94] montrent qu'il y a une équivalence entre solutions Pareto optimales supportées (cf. chapitre 4), et DMU DEA efficaces.

En 1999, Bouyssou dans [19] propose d'utiliser l'approche DEA pour analyser les problèmes d'analyse multicritère. Le problème considéré consiste à déterminer les solutions Pareto optimales supportées dans un ensemble fini de n alternatives $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Il considère un problème d'analyse multicritère dont les critères sont tous à maximiser et les valeurs des r critères toutes positives. Pour évaluer une alternative a_d donnée, la formulation dérivée des modèles DEA suivante est considérée :

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d (y_{rd} - y_{rj}) + \theta^d \geq 0; & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rd} = 1; \\ \mu_r^d \geq \varepsilon, & r = 1, \dots, s; \end{cases} \end{aligned} \quad (5.7)$$

La quantité y_{rj} représente la valuation de l'alternative j pour le critère r .

Avec cette formulation, Bouyssou (1999) montre que l'alternative a_d est Pareto opti-

male supportée si et seulement si, la valeur optimale $\tilde{\theta}^d = 0$, c-à-d. si la DMU est DEA efficace.

5.2 Relations DEA et MOLP

Joro, Korhonen et Wallenius (1998) dans [66], font remarquer la similarité au niveau de la formulation entre les modèles DEA et les problèmes MOLP ; en particulier ils illustrent les formes de CCR à orientation output et les formulations MOLP avec un point de référence, c-à-d. utilisant la fonction d'agrégation s_3 (cf. chapitre 4, section 4.1). Ils considèrent le problème MOLP suivant :

$$\begin{aligned} & \text{“max” } CW \\ & \text{s.c. } W \in \Omega = \{W | TW \leq b, \quad W \geq 0\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

avec $W \in \mathbb{R}^Q$, $b \in \mathbb{R}^m$ respectivement le vecteur des variables de décision et le second membre ; $T \in \mathbb{R}^{m \times Q}$ la matrice des contraintes ; $C \in \mathbb{R}^{K \times Q}$ la matrice des coûts
La formulation suivante est considérée avec la fonction scalarisante s_3 :

$$\begin{aligned} \max \quad & s_3(g, y, \pi, \rho) = \min \left\{ \max_{k=1, \dots, j} [(g_j - y_j) / \pi_j] + \rho \sum_{k=1}^j (g_j - y_j) \right\} \\ \text{s.c.} \quad & y = CW; \\ & W \in \Omega; \end{aligned} \quad (5.9)$$

où g est un point de référence de coordonnées g_j dans l'espace des critères.

En posant, $Y = CW, X = TW$, les auteurs montrent que la formulation (5.9) équivalente à la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sigma + \delta \mathbf{1}'_K s^+ \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} Y\lambda - \delta\pi - s^+ = g; \\ X\lambda + s^- = b; \\ \lambda \geq 0, \quad s^- \geq 0, \quad s^+ \geq 0; \\ \delta > 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (5.10)$$

avec $\mathbf{1}_K$ le vecteur de $\mathbb{R}^K$ dont toutes les coordonnées toutes égales à 1 et $\mathbf{1}'_K$ sa transposée.

Les auteurs font remarquer que cette formulation est similaire à la forme du modèle CCR à orientation output :

$$\begin{aligned} \max \quad & \theta + \varepsilon(\mathbf{1}'_K s^+ + \mathbf{1}'_m s^-) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} Y\lambda - \theta y_d - s^+ = 0; \\ X\lambda + s^- = x_d; \\ \lambda, s^-, s^+ \geq 0; \\ \varepsilon > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pour mettre en évidence cette ressemblance des formes ils proposent de voir le modèle CCR comme si $g = 0$ et $b = x_d$.

Dans le modèle CCR précédent,

$$Y = (y_j), \quad j = 1, \dots, n; \quad X = (x_j), j = 1, \dots, n$$

où y_j , x_j représentent respectivement les vecteurs des outputs et des inputs de la DMU j , n est le nombre de DMU, et d la DMU sous évaluation.

N.B. Jahanshahloo et al. en 2004 dans [56] proposent une méthode basée sur un problème MOBLP pour générer les DMU FDH efficaces.

5.3 Tentative de méthode de génération des solutions efficaces dans un problème MOBLP à l'aide de DEA : l'article de Liu et al.

Certains auteurs se sont intéressés aux méthodes de résolution des problèmes MOILP, basées sur les modèles DEA. Dans cette section, nous nous intéressons aux travaux de Liu et al. en 2000 dans [74] où les auteurs proposent une méthode d'analyse d'un problème MOBLP basée sur DEA. L'objectif principal de cette approche de Liu et al. consiste à utiliser les informations fournies par les solutions admissibles dans un problème MOBLP pour d'une part définir des DMU et d'autre part les évaluer avec les modèles DEA. Les informations concernent les valeurs des fonctions objectifs sur chaque solution générée, considérées comme valeurs outputs, et les valeurs des premiers membres des contraintes, considérées comme valeurs inputs. Le but annoncé de leur méthode, basée sur DEA, est de générer les solutions efficaces d'un problème MOBLP ou

multi-objectif en variables 0-1. Le problème MOBLP considéré est le suivant :

$$\begin{aligned} & \text{“max” } CW \\ & \text{s.c. } W \in \Omega = \{W | TW \leq b, \quad w_q \in \{0,1\}, q = 1, \dots, Q\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Pour définir une DMU avec un plan de production possible, à partir d’une solution admissible W donnée, les auteurs définissent les vecteurs des outputs et des inputs $Y = CW$, $X = TW$ respectivement. Ils considèrent de plus que, $X \geq 0$ et $Y \geq 0$. Les DMU construites à partir des solutions admissibles du problème MOBLP sont ensuite évaluées avec le modèle BCC (cf. chapitre 2) pour déterminer leur score d’efficacité.

Nous avons constaté que la méthode de Liu et al. [74] s’avère fausse. Comme ce fut le point de départ de notre thèse (ainsi que souligné dans l’introduction), nous décrivons néanmoins le principe de cette méthode afin d’en souligner les erreurs, au sein des remarques ci-dessous.

5.3.1 Propriété de base

La propriété de base de leur article est la suivante.

Propriété 5.1. (cf. Liu et al. dans [74])

Soit (X_d, Y_d) un vecteur représentant une DMU d résultant d’une solution W^d . Si la DMU d est DEA-efficace, alors la solution W^d est une solution efficace de (5.12).

Remarque . Mais nous montrerons dans le chapitre 6 (cf. aussi dans [120]), que cette propriété est fausse.

Malgré ce constat, nous décrivons ici, le principe de la méthode que Liu et al. ont proposé.

5.3.2 Principe de la méthode

Les notations adoptées : l indique le numéro de l’itération ; G_l, G'_l les ensembles des DMU et des DMU efficaces obtenues jusqu’à l’itération l ; $H(G'_l)$ l’enveloppe convexe

formée par les éléments de G'_l ; $G_l^E = \underline{G} \setminus H(G'_l)$ avec $\underline{G}$ l'ensemble (inconnu) des DMU formées par toutes les solutions admissibles. G_l^E contient toutes les solutions de $\underline{G}$ extérieures à $H(G'_l)$. A l'initialisation, $l = 0$.

Les auteurs décrivent leur méthode en deux phases, après une étape d'initialisation de l'algorithme :

Initialisation :

- Génération de solutions admissibles de façon arbitraire ;
- Soit G_0 l'ensemble des DMU correspondantes (avec les vecteurs X et Y pour chaque solution générée) ;
- Calcul des scores d'efficacité des DMU de G_0 en utilisant le modèle BCC (problème (2.16)) appliqué à toutes les DMU de G_0 ; (et obtention des valeurs $\tilde{\mu}^j, \tilde{v}^j$ et $\tilde{u}^j$).
- Soit $G'_0 \subset G_0$ le sous-ensemble des DMU efficaces ;
- Construction de l'enveloppe convexe $H(G'_0)$ formée par les éléments de G'_0 .

Remarque . Sur base de la propriété fausse ci-dessus 5.1, les auteurs estiment erroneusement que les DMU efficaces de G'_0 correspondent à des solutions efficaces du problème (5.12).

Phase I de l'itération : génération d'une nouvelle solution

Détermination d'une nouvelle solution admissible W^d par résolution du problème linéaire suivant ([74, problème (P_4), page 59]) :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{q=1}^Q w_q \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{q=1}^Q \left[\sum_{r=1}^s \tilde{\mu}_r^j c_{rq} w_q - \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^j t_{iq} w_q \right] > \tilde{u}^j, & \forall j \in G'_l; \\ 0 \leq \sum_{q=1}^Q c_{rq} w_q \leq g_r, & r = 1, \dots, s; \\ 0 \leq \sum_{q=1}^Q t_{iq} w_q \leq b_i, & i = 1, \dots, m; \\ w_q \in \{0, 1\}, & q = 1, \dots, Q; \end{cases} \end{aligned} \quad (5.13)$$

où $\tilde{\mu}^j, \tilde{v}^j, \tilde{u}^j$ représentent les solutions optimales dans le problème du modèle multiplicatif BCC (cf. chapitre 2, section 2.2), et les g_r sont définis tels que pour toute solution admissible W , $C_r W \leq g_r$.

Soit D^d la DMU correspondant à la solution admissible W^d obtenue.

Remarque . *Le premier ensemble de contraintes impose en fait que la nouvelle DMU D^d ($D^d \in G_l^E$) soit extérieure à $H(G_l')$. Ceci laisse à penser que les auteurs ignorent les solutions efficaces non supportées, qui peuvent être intérieures à $H(G_l')$. Cette impression semble confirmée par leurs résultats (qui seront analysés au chapitre 6). Par ailleurs – mais ils le soulignent eux-mêmes – l’objectif choisi pour ce problème paraît arbitraire.*

Ils déterminent ensuite,

- à l’intérieur de $H(G_l')$, la DMU D^* qui est la plus proche de la DMU D^d .
- puis une éventuelle DMU D , la plus distante possible de $H(G_l')$ dans la direction linéaire déterminée par les deux DMU D^d et D^* , c-à-d. $D = D^d + pD^*$ (pour ce faire une optimisation par sous gradient est effectuée). Si $D \equiv D^d$, D^d est ajoutée à G_l' pour former le nouvel ensemble G_{l+1} avant la phase II suivante. Dans le cas contraire, ce processus est réitéré.

Remarque . *Comme indiqué ci-dessus déjà, la procédure proposée ne recherche de nouvelle solution qu’à l’extérieur de $H(G_l')$, ce qui semble indiquer qu’elle ignore l’existence de solution efficace non supportée.*

Phase II : évaluation

Les auteurs de [74], proposent d’évaluer les DMU de G_{l+1} en utilisant le modèle BCC à orientation input (cf. problème (2.16)) pour déterminer G_{l+1}' l’ensemble des DMU efficaces.

Il convient enfin de construire $H(G_{l+1}')$ l’enveloppe convexe de G_{l+1}' ,

$$H(G_{l+1}') = \left\{ (X_d, Y_d) \in G_{l+1}' : \sum_{r=1}^s \tilde{\mu}_r^d c_{rq} w_q - \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^d t_{iq} w_q \leq \tilde{u}^d \right\}$$

où $\tilde{\mu}^j, \tilde{v}^j, \tilde{u}^j$ représentent les solutions optimales dans le problème du modèle multiplicatif BCC.

Remarque . *Il n'est pas clairement indiqué dans [74] quand l'algorithme s'arrête. Il semble d'après l'organigramme, que l'algorithme s'arrête si plus aucune solution admissible n'est trouvée à l'extérieur de $H(G'_1)$, ce qui ignore donc non seulement les solutions efficaces non supportées mais aussi les solutions efficaces supportées non extrêmes (cf. chapitre 6). Il est d'ailleurs frappant de constater que, l'algorithme proposé par les auteurs ne détermine pas toutes les solutions efficaces de l'exemple illustratif qu'ils ont proposé et de plus, de leur aveu, les auteurs n'obtiennent pas même toutes les solutions efficaces qu'ils indiquent. En effet, ils indiquent 3 solutions efficaces mais leur méthode ne permet d'en déterminer que 2. Ce travail de Liu et al. nous a inspiré, et nous développerons nos idées dans le chapitre 6 : nous y montrerons les différentes erreurs commises par les auteurs, nous établirons les liens précis entre Pareto efficacité d'un problème MOILP et DEA efficacité et nous analyserons le même exemple que dans [74], pour mettre en évidence les 5 solutions efficaces dont 2 que les auteurs n'avaient pas remarqué !*

Afin d'être complet, signalons également les travaux de Yun et al. en 2001 et 2004 ([126] et [125]) utilisant leur modèle GDEA (cf. section 2.4.4, chapitre 2) pour approximer l'ensemble des solutions Pareto-optimales d'un problème multicritère de forme générale MOP (cf. problème (4.1)). Il s'agit en fait d'un algorithme génétique appliqué à un problème multicritère sans contraintes, obtenu par une relaxation lagrangienne introduisant les contraintes du problème dans les différentes fonctions objectives et en pénalisant la non satisfaction de ces contraintes à l'aide de multiplicateurs de Lagrange (pénalités). Le modèle GDEA est utilisé à chaque itération de l'algorithme génétique pour définir le rang des différentes solutions de la population courante.

Rappelons en effet, qu'une alternative à la fonction "fitness" servant à classer les solutions avant leur sélection éventuelle dans la nouvelle solution, est de leur attribuer un rang exprimant leur proximité avec la frontière efficace. Dans la méthode de Yun et al., chaque solution de la population est considérée comme une DMU (les critères à maximiser étant des outputs, ceux à minimiser étant les inputs). La " α -efficacité" de ces

différentes DMU d est calculée (cf. problème (2.38)) : la valeur optimale $\tilde{\Delta}^d$ – agrégation des différents critères – est utilisée pour définir le rang de cette DMU. Ensuite, classiquement, le principe de sélection d’une solution dans la nouvelle population prend en considération ce rang.

5.4 Conclusion et commentaires

Dans cette partie, nous avons décrit les travaux traitant des relations entre l’approche DEA et les méthodes multicritères existant dans la littérature. Le travail de Liu et al. dans [74], bien que comportant des erreurs, nous a inspiré pour le chapitre 6 et nous ouvre des voies d’exploration des méthodes basées sur DEA pour la résolution des problèmes MOILP. Nous développerons des propriétés plus générales, nous décrirons aussi les erreurs commises par les auteurs de [74] et nous apporterons les corrections à ces erreurs dans le chapitre 6.

Partie II

Contributions théoriques

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous décrivons quelques développements théoriques, relatifs à la fois à l'analyse DEA et à l'optimisation multicritère.

Dans le chapitre 6, nous étudions de manière précise les liens existant entre DEA efficacité et Pareto-optimalité pour un problème de programmation linéaire en variables entières (MOILP). Ce qui nous a conduit à cette étude est la constatation d'erreurs manifestes dans l'article publié de Liu et al. [74]. Nous avons rectifié ces erreurs en établissant les relations précises entre ces deux types d'efficacité (ce chapitre a fait l'objet d'un article accepté pour publication dans "*European Journal of Operational Research (EJOR)*" [120]. Sur cette base, nous avons analysé la possibilité d'étudier la DEA efficacité pour résoudre un problème MOILP. Le chapitre 7 présente une méthode interactive pour dégager un "meilleur compromis" d'un problème MOILP. L'analyse DEA est utilisée pour dégager des cibles pour les valeurs des critères qui sont ensuite intégrées dans une approche de "*Goal Programming*". A cet égard, notons ici que nous avons également réfléchi à comment utiliser une analyse DEA pour pouvoir développer une méthode d'approximation de l'ensemble des solutions Pareto optimales d'un problème MOILP. L'idée est d'utiliser le niveau de DEA efficacité au sein d'une métaheuristique multicritère (dans l'esprit des études de Yun et al. [125, 126]). Une première tentative réalisée avec le recuit simulé – la DEA efficacité de la solution courante est utilisée pour définir la probabilité d'acceptation de celle-ci – ne s'est pas révélée performante. Aussi, nous ne la présentons pas dans cette thèse. Mais d'autres idées – notamment à intégrer dans un recuit simulé ou une recherche Tabou – mériteraient d'être mises en œuvre et fait partie de nos perspectives de recherche.

Le chapitre 8 est d'une nature différente. Sur base de ressources additionnelles à attribuer aux différentes DMU et aux demandes de celles-ci d'attribution d'une partie de ces ressources, nous proposons un modèle multicritère visant à attribuer au mieux ces ressources additionnelles pour augmenter les performances globales des outputs. L'information fournie par l'analyse DEA est utilisée pour définir les coefficients des fonctions objectives.

Chapitre 6

Relations entre la Pareto optimalité en MOILP et la DEA efficacité

Dans ce chapitre, inspiré par le travail de Liu et al. dans [74], nous développerons des propriétés générales pour expliquer les relations entre DEA et MOILP. Nous décrirons les erreurs commises par les auteurs de [74] et nous y apporterons des corrections. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'une publication dans “*European Journal of Operational Research*”¹ [120]. Nous le présenterons suivant le plan suivant : en section 6.1, nous décrirons les considérations générales (postulat et définitions) sur la Pareto optimalité ; en section 6.2, nous exposerons les propriétés nécessaires pour comparer la BCC efficacité et la Pareto optimalité ; en section 6.3, nous illustrerons, avec l'exemple tiré de [74], ces différentes propriétés ; et enfin en section 6.4, nous présenterons ces propriétés pour le cas particulier des problèmes MOILP avec des contraintes d'égalité.

6.1 La Pareto optimalité en MOILP

Nous considérons le problème MOILP suivant en variables 0-1 :

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{“max”} & \sum_{q=1}^Q c_{rq} w_q, \quad r = 1, \dots, s \\ \text{s.à.} & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \sum_{q=1}^Q t_{iq} w_q \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m; \\ w_q \in \{0, 1\}, \quad q = 1, \dots, Q; \end{array} \right. \end{array} \quad (6.1)$$

avec Q , le nombre de variables ($w_q, q = 1, \dots, Q$), m le nombre de contraintes ($i = 1, \dots, m$) et s le nombre d'objectifs ($r = 1, \dots, s$) (cf. le problème (P_0) dans [74]). Nous notons $C(s \times Q)$, $T(m \times Q)$ et $b(m \times 1)$ les matrices des quantités c_{rq} , t_{iq} et b_i

¹article sous presse, accepté en octobre 2006

respectivement.

Nous supposons que le problème (6.1) a un nombre fini n de solutions admissibles indicées par j ($j = 1, \dots, n$). Nous noterons

- les différentes solutions par $W^j = (w_q^j, \quad q = 1, \dots, Q)$;
- $X_j = TW^j = (x_{ij} = \sum_{q=1}^Q t_{iq} w_q^j, \quad i = 1, \dots, m)$ désigne le vecteur des quantités prises par le membre de gauche des contraintes lorsque la solution W^j est considérée ;
- $Y_j = CW^j = (y_{rj} = \sum_{q=1}^Q c_{rq} w_q^j, \quad r = 1, \dots, s)$ désigne le vecteur des valeurs des objectifs correspondant à la solution W^j .

Ces considérations nous permettent de définir pour chaque solution admissible W , une DMU correspondant, de vecteurs des inputs et des outputs respectivement $X = TW, Y = CW$.

Nous utiliserons le postulat suivant qui sera analysé ultérieurement.

Postulat . Nous supposons qu'il n'existe pas deux solutions différentes ayant les mêmes valeurs des objectifs c-à-d. $Y_j \neq Y_{j'}, \quad \forall j, j' \in \{1, \dots, n\} (j \neq j')$.

Nous rappelons les définitions suivantes pour les solutions admissibles :

Définition . $W^d, (d \in \{1, \dots, n\})$ est Pareto optimale du problème (6.1), encore appelée solution efficace ou Pareto efficace s'il n'existe pas une autre solution admissible W^j telle que

$$Y_j \geq Y_d \text{ et } Y_j \neq Y_d \quad (6.2)$$

Nous distinguons les deux types de solutions Pareto optimales du problème (6.1) (cf. chapitre 4), les solutions Pareto optimales supportées et les solutions Pareto optimales non supportées.

Définition . Une solution W^d est Pareto optimale supportée si :

$$\exists \lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda_j \geq 0, \quad \forall j; \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\} \quad \text{tel que } \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y_d \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \neq Y_d. \quad (6.3)$$

Parmi les solutions Pareto optimales supportées, nous distinguons celles qui sont extrêmes c-à-d. qui correspondent aux sommets de l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{Y_j, j = 1, \dots, n\}$.

Définition . Une solution W^d est une solution Pareto optimale extrême si :

$$\nexists \lambda \in \Lambda^d = \Lambda - \left\{ \lambda^d = (\lambda_j^d = 0, \quad j \neq d; \quad \lambda_d^d = 1) \right\} \quad \text{tel que } \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y_d \quad (6.4)$$

Cette définition prend en compte le **postulat** formulé ci-dessus de sorte qu'il n'existe aucune solution $j \neq d$, telle que $Y_j = Y_d$. Une solution W^d est supportée non-extrême si la condition (6.3) est satisfaite mais il existe $\lambda \in \Lambda^d$ tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j = Y_d$.

Définition . Une solution Pareto optimale non supportée vérifie la condition (6.2) mais pas la condition (6.3).

Nous illustrons ces définitions par l'exemple didactique suivant.

Soit $Q = 6; s = 2; m = 2;$

$$C = \begin{pmatrix} 80 & 20 & 50 & 65 & 30 & 40 \\ 10 & 90 & 50 & 30 & 60 & 40 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 40 & 55 & 35 & 25 \\ 20 & 70 & 40 & 35 & 55 & 20 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Il y a seulement 7 solutions admissibles ($j = 0, \dots, 6$) pour ce problème :

$$\begin{aligned} W^0 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0), & W^1 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0), & W^2 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0), & W^3 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ W^4 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0), & W^5 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & W^6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

qui sont représentées dans l'espace des objectifs par les points :

$$\begin{aligned} Y_0 &= (0, 0), & Y_1 &= (80, 10), & Y_2 &= (20, 90), & Y_3 &= (50, 50), & Y_4 &= (65, 30), & Y_5 &= (30, 60) \\ Y_6 &= (40, 40); \end{aligned}$$

sur la figure 6.1 suivante :

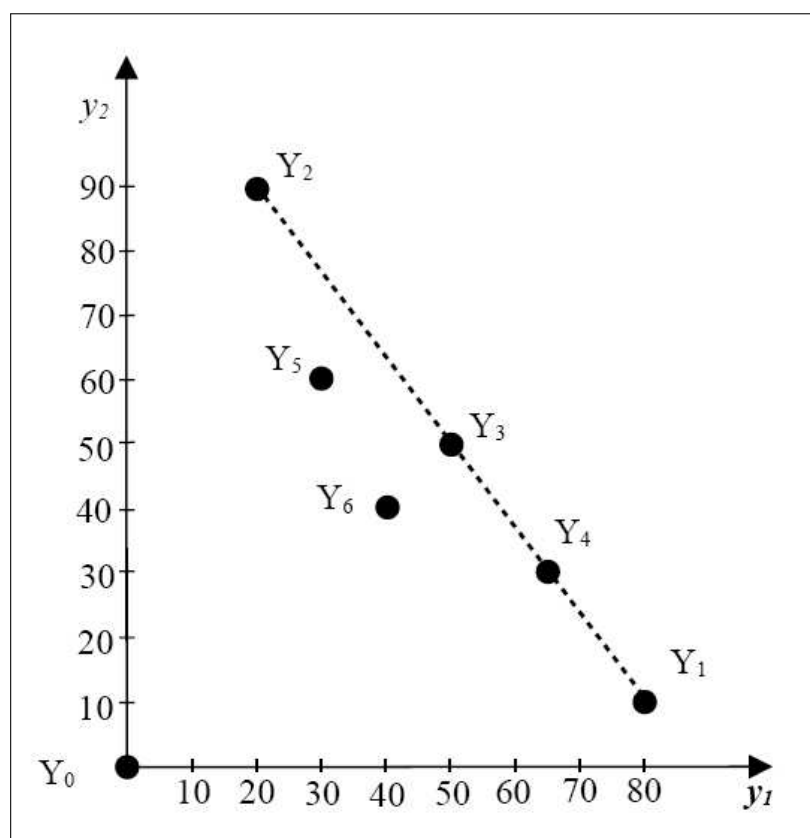


Figure 6.1 – Représentation des solutions dans l'espace des objectifs

La figure 6.1 montre clairement que :

- W^1 et W^2 sont des solutions Pareto optimales supportées extrêmes ;
- W^3 et W^4 sont des solutions Pareto optimales supportées non extrêmes ; En effet, on a $Y_3 = \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2$ et $Y_4 = \frac{3}{4}Y_1 + \frac{1}{4}Y_2$;
- W^5 est une solution Pareto optimale non supportée ;
- W^0 et W^6 ne sont pas des solutions Pareto optimales.

6.2 Comparaison entre BCC efficacité et Pareto optimalité

Pour évaluer les solutions admissibles du problème (6.1) en utilisant le modèle BCC (cf. chapitre 2), les notions de solutions seront remplacées par DMU ;

la DMU $j \in \{1, \dots, n\}$ notée W^j est caractérisée par les vecteurs $X_j = (x_{ij}, i = 1, \dots, m)$ et $Y_j = (y_{rj}, r = 1, \dots, s)$, considérés respectivement comme les inputs et outputs de la

DMU correspondant. La DMU sous évaluation par BCC est notée par W^d , ($d \in \{1, \dots, n\}$). En utilisant le modèle BCC (cf. problème (2.16) du chapitre 2), on a les propriétés suivantes (cf. chapitre 2) :

Propriété 6.1. (cf. propriété 2.3)

Si W^d est BCC efficace alors

$$\nexists \lambda \in \Lambda \text{ tel que } \sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix} \text{ et } \sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Propriété 6.2. (cf. propriété 2.4)

Si W^d est BCC faiblement efficace alors

$$\nexists \lambda \in \Lambda \text{ tel que } \sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

La première propriété caractérise les DMU BCC efficaces et la seconde les DMU BCC faiblement efficaces.

Soit Y_d l'image de la solution W^d dans l'espace des objectifs et (X_d, Y_d) considéré comme le plan de production d'une DMU d , les propriétés précédentes peuvent être résumées comme suit :

- i. une solution Pareto optimale supportée W^d est caractérisée par la propriété (6.3) ;
- ii. une solution Pareto optimale supportée extrême W^d est caractérisée par la propriété (6.4) ;
- iii. une DMU (X_d, Y_d) BCC efficace est caractérisée par la propriété (6.5) ;
- iv. une DMU (X_d, Y_d) BCC faiblement efficace est caractérisée par la propriété (6.6) ;

A partir de ces caractérisations, nous avons établi les théorèmes suivants (cf. dans [120]) :

Théorème 6.1. *Si W^d est une solution Pareto optimale supportée extrême , alors la DMU (X_d, Y_d) est BCC efficace.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. En considérant que (X_d, Y_d) n'est pas BCC

efficace, cela signifierait d'après la propriété (6.5) :

$$\exists \lambda \in \Lambda \text{ tel que } \sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix} \text{ et } \sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix}$$

Comme ce λ est nécessairement différent de $\lambda^d = (\lambda_j^d = 0, j \neq d, \lambda_d^d = 1)$, un tel λ ne peut exister puisque, par l'hypothèse que W^d est une solution Pareto optimale supportée extrême, il ne peut déjà exister (cf. (6.4)) de $\lambda \in \Lambda^d$ tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y_d$. $\square$

Théorème 6.2. *Si W^d est une solution Pareto optimale supportée, alors (X_d, Y_d) est une DMU BCC faiblement efficace.*

Démonstration. Pour ne pas être une DMU BCC faiblement efficace, il faudrait trouver

$$\lambda \in \Lambda \quad \text{tel que} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j \begin{pmatrix} Y_j \\ -X_j \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} Y_d \\ -X_d \end{pmatrix}$$

A l'évidence, ceci est impossible puisque l'hypothèse implique

$$\nexists \lambda \in \Lambda \quad \text{tel que} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y_d \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \neq Y_d$$

$\square$

Théorème 6.3. *Si W^d est une solution Pareto optimale supportée, alors, dans le modèle BCC à orientation output (2.18), $\tilde{\omega}^d = 1$ et $\tilde{s}_r^{+d} = 0, \forall r \text{ c-à-d. elle est faiblement efficace pour le modèle BCC à orientation output (2.18).}$*

Démonstration. Par hypothèse W^d est caractérisée par la relation (6.3). La solution suivante est une solution admissible triviale du problème de BCC à orientation output (modèle (2.18))

$$\omega^d = 1, \quad \lambda_d^d = 1, \quad \lambda_j^d = 0, \quad j \neq d, \quad s_i^{d-} = 0, \quad \forall i \quad s_r^{d+} = 0, \quad \forall r$$

de sorte que $\tilde{\omega}^d \geq 1$. Comme les contraintes sur les quantités outputs du modèle d'enve-

loppement BCC à orientation output (cf. modèle (2.18)) peuvent être écrites

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^d Y_j \geq \omega^d Y_d,$$

si $\tilde{\omega}^d > 1$, alors on aurait $\sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^d Y_j > Y_d$ ce qui est en contradiction avec la relation (6.3).

Dès lors, $\tilde{\omega}^d = 1$. Enfin, si il existait au moins une variable output r telle que $\tilde{s}_r^{d+} > 0$, alors on aurait

$$\sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^d Y_j \geq Y_d \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_j^d Y_j \neq Y_d$$

ce qui est aussi en contradiction avec la relation (6.3). $\square$

Le théorème 6.1, montre que dans le cas d'une solution Pareto optimale extrême, on a en plus, $\tilde{s}_i^{(d)} = 0 \quad \forall i$, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour les solutions non extrêmes.

L'exemple didactique ci-dessus a été construit pour illustrer ces différentes propriétés et les faits suivants :

a) Si W^d est une solution Pareto optimale supportée non extrême, alors la DMU (X_d, Y_d) n'est pas nécessairement BCC efficace. C'est le cas de W^4 qui est une solution Pareto optimale supportée ($Y_4 = \frac{3}{4}Y_1 + \frac{1}{4}Y_2$), mais (X_4, Y_4) n'est pas BCC efficace puisque

$$\frac{3}{4}(-X_1) + \frac{1}{4}(-X_2) = \begin{pmatrix} -52.5 \\ -32.5 \end{pmatrix} \geq -X_4 = \begin{pmatrix} -55 \\ -35 \end{pmatrix}$$

Par contre W^3 , une autre solution Pareto optimale supportée non extrême ($Y_3 = \frac{1}{2}Y_1 + \frac{1}{2}Y_2$), donne lieu à une DMU BCC efficace (X_3, Y_3) .

b) Si W^d est une solution Pareto optimale non supportée, alors (X_d, Y_d) n'est pas nécessairement BCC efficace. C'est le cas de W^5 qui est une solution Pareto optimale non

supportée alors que (X_5, Y_5) n'est pas BCC efficace :

$$\frac{1}{2}Y_2 + \frac{1}{2}Y_3 = \begin{pmatrix} 35 \\ 70 \end{pmatrix} > Y_5 = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{1}{2}(-X_2) + \frac{1}{2}(-X_3) = \begin{pmatrix} -35 \\ -55 \end{pmatrix} \geq -X_5 = \begin{pmatrix} -35 \\ -55 \end{pmatrix}.$$

c) Si (X_d, Y_d) est une DMU BCC efficace, alors W^d n'est pas nécessairement une solution Pareto optimale. C'est le cas de (X_6, Y_6) qui est une DMU BCC efficace alors que W^6 n'est pas une solution Pareto optimale puisque $Y_3 > Y_6$; Y_6 est dominée seulement par Y_3 mais étant donné $X_3 > X_6$, (X_6, Y_6) est une DMU BCC efficace.

Remarque . La propriété 1 de l'article de Liu et al. (cf. [74, Page 56]), énonce :

“si (X_d, Y_d) est une DMU BCC efficace, alors W^d est une solution Pareto optimale”.

Il est évident avec les caractérisations que nous avons faites que cette propriété est fausse, puisque la condition (6.5) peut être satisfaite sans que la condition (6.2) ne soit vérifiée, comme le montre le contre exemple précédent et l'illustration suivante.

Dans leur démonstration, les auteurs de [74] ont, d'une part, oublié de considérer les inputs de W^d et d'autre part, ont fait une confusion entre deux problèmes du modèle (2.15) relativement aux deux différentes DMU W^d et W^β .

Nous utilisons à présent, le modèle de BCC à orientation input (problème (2.15)) pour mesurer les efficacités de chaque DMU de l'ensemble $\{W^j = 1, \dots, 6\}$. La solution W^0 n'est pas considérée pour être analysée par le modèle BCC puisqu'elle correspond à une DMU qui n'utilise pas d'inputs ($X_0 = (0,0)$) et ne produit pas d'outputs ($Y_0 = (0,0)$). Pour résoudre le problème (2.15), nous utilisons $\varepsilon = 10^{-4}$ avec le solver ILOG version 3.7 et nous obtenons les résultats donnés par le tableau 6.1.

d	X_d	Y_d	Pareto Optimalité	BCC Efficace	$\tilde{\delta}^d$	$\tilde{\lambda}^{(d)}(*)$	$\tilde{s}^{d-}(*)$	$\tilde{s}^{d+}(*)$
1	(60,20)	(80,10)	E.S.P.O.	OUI	1	$\tilde{\lambda}_1^1 = 1$	-	-
2	(30,70)	(20,90)	E.S.P.O.	OUI	1	$\tilde{\lambda}_2^2 = 1$	-	-
3	(40,40)	(50,50)	S.P.O.	OUI	1	$\tilde{\lambda}_3^3 = 1$	-	-
4	(55,35)	(65,30)	S.P.O.	NON	0.9091	$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1^4 = 0.5 \\ \tilde{\lambda}_3^4 = 0.5 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} - \\ 1.8182 \end{pmatrix}$	-
5	(35,55)	(30,60)	N.S.P.O.	NON	0.7714	$\begin{cases} \tilde{\lambda}_2^4 = 0.4 \\ \tilde{\lambda}_6^5 = 0.6 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} - \\ 2.4286 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ - \end{pmatrix}$
6	(25,20)	(40,40)	Non P.O	OUI	1	$\tilde{\lambda}_6^6 = 1$	-	-

“(*)” seulement les valeurs non nulles sont données ; “P.O” indique les solutions Pareto optimales ; “S.P.O” est P.O supportée,

“E.S.P.O” est “S.P.O” extrême ; “N.S.P.O” est non “S.P.O”

Tableau 6.1 – Solutions optimales avec le modèle BCC à orientation input

Pour illustrer le théorème 6.3, nous résolvons le problème (2.18) (modèle de BCC à orientation output) pour la DMU correspondant à la solution W^4 et nous obtenons la solution optimale suivante :

$$\tilde{\omega}^4 = 1; \quad \tilde{\lambda}_1^4 = \tilde{\lambda}_3^4 = 0.5; \quad \tilde{s}_1^{(+4)} = \tilde{s}_2^{(+4)} = 0; \text{ et } \tilde{s}_1^{(-4)} = \tilde{s}_2^{(-4)} = 5.$$

Remarque . Si l'on change la propriété 6.1 relative à la BCC efficacité en remplaçant dans la condition (6.5) Λ par $\bar{\Lambda}$ défini par $\bar{\Lambda} = \left\{ \lambda \in \{0,1\}^n \text{ et } \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \right\}$, nous obtenons une propriété qui caractérise l'efficacité DEA en utilisant le modèle “free disposal hull (FDH)” (cf. chapitre 2).

Il est facile de voir que si W^d est une solution Pareto optimale (supportée ou non supportée), la DMU correspondant à W^d est aussi FDH efficace (mais le postulat est toujours requis ici).

Le rôle du postulat

Le postulat que nous avons énoncé évite les cas où deux solutions différentes W^j et $W^{j'}$, ont les mêmes images par les fonctions objectifs, c-à-d. $Y_j = Y_{j'}$, mais avec $X_j \neq X_{j'}$. Dans un tel cas particulier, les modifications suivantes doivent être introduites :

(i) Dans la définition d'une solution Pareto optimale extrême, au lieu de Λ^d , nous devons considérer $\Lambda \setminus \bar{\Lambda}$ pour éviter les cas $Y_j = Y_d$ avec $j \neq d$.

(ii) Le théorème 6.1 devient :

Si W^d est une solution Pareto optimale supportée extrême et s'il n'existe pas une autre solution W^j telle que $Y_j = Y_d$ et $-X_j \geq -X_d$, $-X_j \neq -X_d$, alors (X_d, Y_d) est une DMU BCC efficace.

Dans l'exemple ci-dessus, introduisons une variable additionnelle w_7 avec $c_{17} = 80, c_{27} = 10$, c-à-d. $Y_7 = Y_1$, et $a_{17} = 60, a_{27} = 19$, c-à-d. $-X_7 \geq -X_1$, $-X_7 \neq -X_1$. Les solutions admissibles $W^j, (j = 0, \dots, 6)$ prolongée avec la variable $w_7 = 0$ restent toujours des solutions admissibles et $W^7 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ est une solution admissible additionnelle.

Clairement, puisque $Y_7 = Y_1$, W^7 est comme W^1 , une solution Pareto optimale supportée extrême ; cependant (X_1, Y_1) – contrairement à (X_7, Y_7) – ne sera plus une DMU BCC efficace à cause de la définition de Pareto optimalité qui n'est plus satisfaite. Dans ce cas, (X_1, Y_1) sera seulement une DMU BCC faiblement efficace.

6.3 Illustration

Nous considérons à présent l'exemple illustratif de [74]. Les données de ce problème MOBLP sont les suivantes :

$$s = 3; \quad m = 3; \quad Q = 5;$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 3 & -8 \\ 5 & -3 & 8 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Ce problème a 14 solutions admissibles non triviales que nous avons énumérées dans l'ensemble $\{0, 1\}^5$ de $2^5 = 32$ possibilités. (Rappelons que comme supposé dans [74], le membre de gauche des contraintes doit être non négatif.) Cet exemple va nous permettre d'illustrer les notions de Pareto optimalité et de BCC efficacité.

Il y a 5 solutions Pareto optimales. Les solutions 7, 13, 14 et 6 (cf. tableau 6.2) sont supportées : les trois premières sont des solutions optimales uniques respectivement pour les trois fonctions objectifs ; clairement, la solution 6 ne peut pas être générée par une

combinaison linéaire des trois premières. La solution 9 est non supportée (par exemple $0.5Y_6 + 0.5Y_7 > Y_9$). Les autres solutions sont dominées.

Nous avons résolu le problème (2.15) (modèle BCC à orientation input) en utilisant le solveur ILOG version 3.7 avec $\varepsilon = 10^{-4}$, prenant successivement ces 14 solutions admissibles comme une DMU W^d .

d	W^d	X_d	Y_d	δ_d^+	$\tilde{\lambda}^{(d)}_{(*)}$	$\tilde{s}^{(d)}_{(*)}$	$\tilde{s}^{d+}_{(*)}$
1	(0,0,1,0,0)	(8,4,6)	(5,4,8)	1.0000	$\tilde{\lambda}_1^{(1)} = 1.0000$	-	-
2	(0,0,1,1,0)	(7,8,4)	(3,7,4)	0.7124	$\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1^{(2)} = 0.0209 \\ \tilde{\lambda}_3^{(2)} = 0.0244 \\ \tilde{\lambda}_{10}^{(2)} = 0.2342 \\ \tilde{\lambda}_{11}^{(2)} = 0.7202 \end{bmatrix}$	-	$\begin{bmatrix} 8.1259 \\ - \\ 0.3601 \end{bmatrix}$
3	(0,1,1,0,0)	(11,6,4)	(11,11,5)	1.0000	$\tilde{\lambda}_3^{(3)} = 1.0000$	-	-
4	(0,1,1,1,0)	(10,10,2)	(9,14,1)	1.0000	$\tilde{\lambda}_4^{(4)} = 1.0000$	-	-
5	(1,0,0,1,1)	(2,7,3)	(4,1,4)	1.0000	$\tilde{\lambda}_5^{(5)} = 1.0000$	-	-
6	(1,0,1,0,0) ^e	(6,10,10)	(8,10,13)	1.0000	$\tilde{\lambda}_6^{(6)} = 1.0000$	-	-
7	(1,0,1,0,1) ^e	(11,7,11)	(11,2,16)	1.0000	$\tilde{\lambda}_7^{(7)} = 1.0000$	-	-
8	(1,0,1,1,0)	(5,14,8)	(6,13,9)	1.0000	$\tilde{\lambda}_8^{(8)} = 1.0000$	-	-
9	(1,0,1,1,1) ^e	(10,11,9)	(9,5,12)	0.9209	$\begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_9^{(9)} = 0.5804 \\ \tilde{\lambda}_{10}^{(9)} = 0.0175 \\ \tilde{\lambda}_{11}^{(9)} = 0.2685 \\ \tilde{\lambda}_{13}^{(9)} = 0.1334 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} - \\ 2.9890 \\ - \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.6338 \\ - \\ - \end{bmatrix}$
10	(1,1,0,0,0)	(1,8,2)	(9,13,2)	1.0000	$\tilde{\lambda}_{10}^{(10)} = 1.0000$	-	-
11	(1,1,0,0,1)	(6,5,3)	(12,5,5)	1.0000	$\tilde{\lambda}_{11}^{(11)} = 1.0000$	-	-
12	(1,1,0,1,1)	(5,9,1)	(10,8,1)	1.0000	$\tilde{\lambda}_{12}^{(12)} = 1.0000$	-	-
13	(1,1,1,0,0) ^e	(9,12,8)	(14,17,10)	1.0000	$\tilde{\lambda}_{13}^{(13)} = 1.0000$	-	-
14	(1,1,1,1,1) ^e	(13,13,7)	(15,12,9)	1.0000	$\tilde{\lambda}_{14}^{(14)} = 1.0000$	-	-

“(*)” seules les variables non nulles sont données ; “e” indique les solutions Pareto optimales.

⁺ représente la valeur de la fonction objectif

Tableau 6.2 – Solutions optimales avec le modèle BCC à orientation input

Le tableau 6.2 résume les résultats obtenus avec le problème (2.15) pour les 14 solutions admissibles.

De l’analyse de ces résultats, il apparaît que seulement les solutions 2 et 9 ne sont pas BCC efficaces.

Clairement, beaucoup de solutions BCC efficaces ne sont pas Pareto optimales, en contra-

diction avec la **Propriété 1** de [74].

La solution 9 prouve qu'une solution Pareto optimale non supportée n'est pas nécessairement BCC efficace.

Remarque . *L'algorithme de Liu et al. [74] est déficient : d'une part, seules les solutions Pareto optimales 7 et 13 sont générées, et les auteurs reconnaissent que la solution 14 n'est pas obtenue par leur procédure ; d'autre part, ils semblent ignorer que les solutions 6 et 9 sont également des solutions Pareto optimales.*

6.4 Cas particulier de MOILP avec des contraintes d'égalité

Supposons à présent que le problème (P) (6.1) est défini avec des contraintes d'égalité c-à-d.

$$\sum_{q=1}^Q t_{iq} w_q = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

Ce cas est fréquent en optimisation combinatoire, et donc ici $X_j = b, j = 1, \dots, n$, correspondant à des inputs identiques pour toutes les DMU en utilisant les modèles DEA.

Dans ce cas, le premier ensemble de contraintes du problème (2.15) se réduit à

$$b_i \sum_{j=1}^n \lambda_j^d + s_i^{(d)} = \omega^d b_i, i = 1, \dots, m$$

et donc $(\omega^d - 1)b_i = s_i^{(d)}, i = 1, \dots, m$. Dès lors, la solution optimale du problème (2.15), ω^d prendra sa plus petite valeur, c-à-d. $\tilde{\omega}^d = 1$, et nous obtenons $\tilde{s}_i^{(d)} = 0, \forall i$.

Le problème (2.15) est maintenant équivalent à :

$$\begin{aligned} \min \quad & - \sum_{r=1}^s s_r^{d+} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^d y_{rj} - s_r^{d+} = y_{rd}; & r = 1, \dots, s, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^d = 1, \\ s_r^{(d)}, \lambda_j^d \geq 0, & \forall r, j. \end{cases} \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier :

- W^d est BCC efficace si la solution optimale est telle que $\tilde{s}_r^{d+} = 0, \forall r$;

– W^d est alors BCC efficace s’il n’existe pas $\lambda \in \Lambda$ tel que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y_d \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \neq Y_d$$

C’est exactement la condition (6.3) caractérisant les solutions Pareto optimales supportées.

Donc dans le cas de contraintes d’égalité dans le problème (P) (6.1), nous obtenons les propriétés suivantes :

Théorème 6.4.

- i) *Les notions de DMU BCC efficace et de solution Pareto optimale supportée (même non extrême) sont équivalentes.*
- ii) *Les notions de DMU FDH efficace et de solution Pareto optimale (supportée ou non) sont équivalentes.*

Ce fait – qui peut être établi en utilisant le modèle de BCC à orientation output (2.18) – a été déjà souligné dans [19].

6.5 Conclusion et commentaires

Dans ce chapitre, nous avons apporté des corrections aux erreurs que présentait le travail de Liu et al. dans [74]. et développé des propriétés détaillant les relations entre DEA et MOILP, en distinguant les solutions Pareto optimales supportées et celles non supportées. Ce travail, qui a fait l’objet de publication, nous ouvre des perspectives intéressantes quant à développer une méthode exacte ou heuristique, interactive pour la résolution des problèmes MOILP ou pour l’approximation de l’ensemble des solutions Pareto optimales (cf. chapitre 12). Dans les chapitres suivants 7 et 8, nous exposerons deux de ces approches, basées sur l’approche DEA. D’une part au chapitre 7, nous proposons d’utiliser le “*Goal programming*” pour la recherche d’une meilleure solution de compromis en utilisant les informations fournies par l’analyse DEA ; d’autre part au chapitre 8, nous décrivons un modèle MOILP d’affectation des ressources additionnelles en

tenant compte, des efficacités de performance et des rendements d'échelle variables, des différentes unités sous contrôle.

Chapitre 7

Méthode de résolution MOILP : méthode interactive DEA-GP

Dans ce chapitre, nous exposerons des idées basées à la fois sur l'approche de “*Goal Programming (GP)*” et sur l'approche DEA, pour proposer une méthode interactive de résolution des problèmes MOILP dont le but est la recherche d'une solution de meilleur compromis. Nous organiserons ce chapitre comme suit : en section 7.1, nous décrirons le principe général de la méthode ; en section 7.2, nous ferons une présentation de la structure générale de la méthode et de ses différentes étapes ; en section 7.3, deux exemples illustratifs seront traités avec la méthode ; enfin en section 7.4 , nous donnerons quelques commentaires sur la méthode ainsi que quelques perspectives d'approfondissement.

7.1 Principe général de la méthode

Le problème MOILP que nous considérons pour décrire la méthode interactive DEA-GP est un problème de formulation générale suivante :

$$\begin{aligned} \text{“max”} \quad & z_k(W) = C_k W, \quad k = 1, \dots, K \\ \text{s.c.} \quad & \left\{ W \in \Omega = \{W \in \mathbb{R}^Q \mid TW \leq b; \quad w_q \geq 0, \quad w_q \text{ entier}, q = 1, \dots, Q; \} \right. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Cette méthode suit le processus général des méthodes interactives (cf. chapitre 4, section 4.2), avec une phase d'initialisation, une phase d'information, et une phase de calcul. Comme indiqué au chapitre 6, nous pouvons, à partir des solutions admissibles du problème MOILP, construire une cible correspondant à une DMU à améliorer, tenant compte de l'information fournie par le décideur. Enfin, cette cible sera intégrée à une méthode “*Goal Programming (GP)*”, pour identifier une nouvelle solution admissible la plus proche possible de la cible.

Initialisation :

A l'initialisation, nous construisons un ensemble de solutions efficaces de référence. Ces solutions de référence sont obtenues en optimisant chacune des fonctions objectifs du problème MOILP. Ces solutions efficaces, supportées extrêmes, nous permettent ensuite de considérer les points correspondant dans l'espace des critères, aussi que les points idéal et nadir. Ces deux derniers points, serviront à guider le décideur dans la phase d'information sur les variations possibles d'un critère donné (voir méthode STEM, chapitre 4). Une nouvelle solution admissible est générée aléatoirement comme solution courante – et donc la DMU correspondante – et présentée au décideur (des variantes sont possibles : voir ci-dessous).

Phase d'information :

Sur base des valeurs prises par les critères pour la solution courante et en fonction des intervalles de variation des critères, le décideur désigne un ou plusieurs critères à améliorer.

Phase de calcul :

Cette phase est composée de deux phases intermédiaires :

- Lorsque, le décideur a choisi le ou les critères à améliorer, un modèle DEA est utilisé pour déterminer les valeurs cibles associées à chaque critère et relativement à la DMU correspondant à la solution courante. Ces cibles permettent alors de définir une DMU fictive de meilleur plan de production dans le sens indiqué par le décideur.
- Cette DMU fictive est ensuite utilisée grâce à la méthodologie du “*Goal Programming (GP)*”, pour déterminer une solution admissible dont la DMU correspondante est caractérisée par un plan de production le plus proche possible de celui de la DMU fictive.

Trois situations sont possibles :

- si la solution obtenue est potentiellement efficace et satisfait le décideur, on arrête le processus ;
- si cette solution est potentiellement efficace et ne satisfait pas le décideur, on l'ajoute comme nouvelle solution de référence et on continue le processus à partir d'une nouvelle

solution générée aléatoirement ;

– si la solution est dominée, on continue le processus à partir de cette solution pour avoir de nouvelles informations du décideur.

7.2 Le processus de la méthode

Nous présentons plus en détail les étapes de cette méthode interactive :

Initialisation

Les K fonctions objectifs sont maximisées individuellement pour obtenir des solutions optimales et efficaces $\tilde{W}^k, k = 1, \dots, K$, nous définissons $\tilde{Y}_k = C\tilde{W}^k, k = 1, \dots, K$; et $\mathcal{E} = \{\tilde{W}^k, k = 1, \dots, K\}$ l'ensemble des solutions efficaces générées. On génère aléatoirement une solution admissible, notée W^d , comme solution courante et on calcule $Y_d = CW^d$. Notons $J = |\mathcal{E}|$, $Y_j \in \{CW^j : W^j \in \mathcal{E}\}$ et $y_{J+1} = Y_d$.

Itération générale

- 1.** Faire désigner par le décideur, le ou les critères à améliorer, et notons $\mathcal{K}^d \subset \{1, \dots, K\}$ l'ensemble de ces critères.
- 2.** Déterminer un point cible dans l'espace des critères en résolvant le problème suivant(cf. chapitre 2, section 2.4 ou dans [103]) :

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \sum_{r_d \in \mathcal{K}^d} \gamma_{r_d} + \varepsilon \sum_{r \notin \mathcal{K}^d} t_r \\
 & \text{s.c.} \quad \begin{cases} \gamma_{r_d} y_{r_d}^d - \sum_{j=1}^{J+1} \lambda_j y_{r_d j} = 0, & \forall r_d \in \mathcal{K}^d; \\ \sum_{j=1}^{J+1} \lambda_j y_{r j} - t_r = y_r^d, & \forall r \notin \mathcal{K}^d; \\ \sum_{j=1}^{J+1} \lambda_j = 1; \\ \gamma_{r_d} \geq 1, & \forall r_d \in \mathcal{K}^d; \\ t_r \geq 0, \quad \lambda_j \geq 0, & \forall r \notin \mathcal{K}^d, \quad j = 1, \dots, J+1; \end{cases}
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

avec $\varepsilon > 0$, un nombre positif suffisamment petit.

Le point cible $\hat{g}$ est déterminé (cf. chapitre 2, section 2.4) par les valeurs cibles suivantes

pour les différents critères.

$$\begin{aligned}\widehat{g}_{r_d} &= \gamma_{r_d} y_{r_d}^d, & \forall r_d \in \mathcal{K}^d; \\ \widehat{g}_r &= y_r^d + \tilde{t}_r, & \forall r \notin \mathcal{K}^d.\end{aligned}$$

3. Déterminer la solution admissible du problème MOILP dont le point correspondant dans l'espace des critères est le plus proche possible du point cible $\widehat{g}$, en résolvant le problème suivant (GP) :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^K (\xi_k^+ + \xi_k^-) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} C_k W - \xi_k^+ + \xi_k^- = \widehat{g}_k; & k = 1, \dots, K, \\ TW \leq b; \\ w_q \geq 0, & w_q \text{ entier}, q = 1, \dots, Q; \\ \xi_k^+ \geq 0, & \xi_k^- \geq 0, & k = 1, \dots, K; \end{cases} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Nous notons $\tilde{W}$ la solution optimale de ce problème et $\tilde{Y} = C\tilde{W}$.

4. Tester la (potentielle) Pareto optimalité de la solution $\tilde{W}$ dans $\mathcal{E}$.

- si $\tilde{Y}$ est non dominé ajouter $\tilde{W}$ dans $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \{\tilde{W}\}$. Continuer le processus avec un nouveau W^d si le décideur n'est pas satisfait par $\tilde{W}$.
- si $\tilde{Y}$ est dominé, recommencer l'itération avec $W^d = \tilde{W}$.

Remarque . Ce processus peut admettre diverses variantes. En particulier :

- le décideur peut aussi déterminer un ou plusieurs critères qu'il ne veut pas voir se détériorer relativement au point cible $\widehat{g}$; dans ce cas pour déterminer la solution admissible dont le point dans l'espace des critères est le plus proche possible de $\widehat{g}$ (cf. étape 3 ci-dessus), on résout le problème suivant (pour le cas d'un critère r_d que le décideur ne veut pas voir se détériorer) :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k \neq r_d}^K (\xi_k^+ + \xi_k^-) + \xi_{r_d}^+ + M \xi_{r_d}^- \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} C_k W - \xi_k^+ + \xi_k^- = \widehat{g}_k; & k = 1, \dots, K, \\ TW \leq b; \\ w_q \geq 0, & w_q \text{ entier}, q = 1, \dots, Q; \\ \xi_k^+ \geq 0, & \xi_k^- \geq 0, & k = 1, \dots, K; \end{cases} \end{aligned} \quad (7.4)$$

où M est ici un nombre suffisamment grand (cf. la technique du “Big M” de program-

mation linéaire [97]).

– on peut déterminer W^d aléatoirement mais dans un voisinage de la solution la plus préférée dans $\mathcal{E}$.

– on pourrait songer, – à l’instar de ce qui est fait dans la méthode MOSA (cf. [113]) – à utiliser un ensemble diversifié de solutions W^d et effectuer une itération pour chacune d’elles afin de générer un ensemble de meilleures solutions.

– on peut associer des poids techniques aux critères à améliorer comme dans le cas de la technique STEM (cf. chapitre 4, section 4.2).

Le schéma général du processus est présenté dans la figure 7.1.

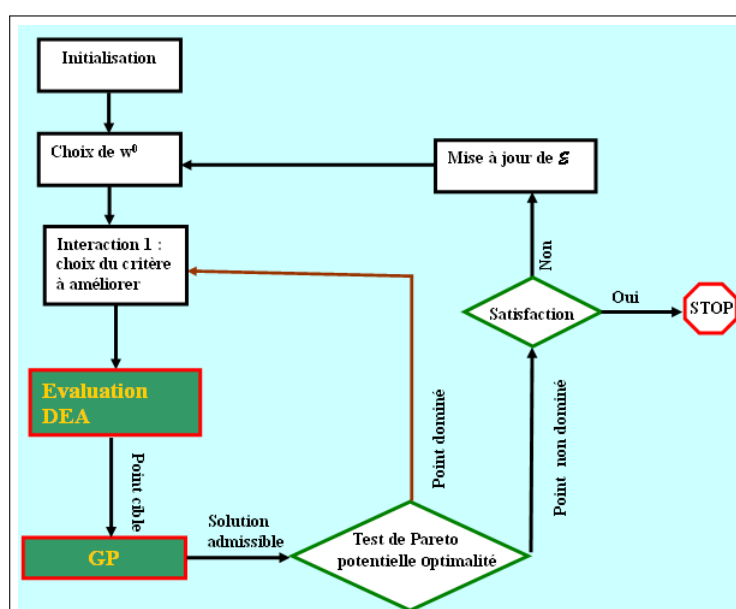


Figure 7.1 – Schéma simplifié de la méthode interactive DEA-GP

7.3 Illustration de la méthode

Nous considérons 2 exemples illustratifs pour décrire cette méthode interactive DEA-GP. Le premier exemple est celui que nous avons considéré dans [120] (cf. chapitre 6) et le second est un problème de sac à dos (Knapsack problem) traité par Gandibleux ¹.

¹Gandibleux X. MCDM numerical instances library. Available online at www.terry.uga.edu/mcdm; 1998- 2005.

Exemple . 1

Le premier exemple est celui proposé dans [120] et étudié au chapitre 6.

$$Q = 6; \quad K = 2; \quad m = 2; \quad w_q \in \{0, 1\}$$

$$C = \begin{pmatrix} 80 & 20 & 50 & 65 & 30 & 40 \\ 10 & 90 & 50 & 30 & 60 & 40 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 40 & 55 & 35 & 25 \\ 20 & 70 & 40 & 35 & 55 & 20 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Initialisation

En maximisant les $K = 2$ fonctions objectifs individuellement, nous obtenons les solutions optimales correspondants :

k	1	2
$\tilde{W}^k$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)$
$\tilde{Y}^k$	$\begin{pmatrix} 80 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 90 \end{pmatrix}$

les points idéal M et nadir Nd ,

$$M = \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \end{pmatrix}, \quad Nd = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E} = \{\tilde{W}^k, k = 1, 2\}$ ensemble des solutions efficaces.

Nous considérons ici $W^d = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$, et $Y_d = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$ comme solution générée aléatoirement.

Itération 1.

1. On présente au décideur Y_d et les intervalles de variation $\begin{pmatrix} [20; 80] \\ [10; 90] \end{pmatrix}$. Nous supposons que le décideur a désigné le critère $r_d = 2$ à améliorer.

2. Nous résolvons le problème (7.2), et nous obtenons les résultats suivants :

- $\gamma_d = 1, \quad t_1 = 0;$
- et donc le point cible est $\hat{g} = Y_d$.

3. Nous résolvons le problème (7.2) et nous obtenons la solution $\tilde{W} = W^d$. Comme $\tilde{Y}$ est non dominé, nous mettons à jour $\mathcal{E} = \mathcal{E} \cup \{\tilde{W}\}$.

4. Supposons que le décideur n'est pas satisfait de cette solution.

Itération 2.

Nous reprenons le processus avec une nouvelle solution générée aléatoirement, soit

$$W^d = (0, 0, 0, 0, 0, 1), Y_d = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

1. On présente au décideur Y_d et les intervalles de variations $\begin{pmatrix} [20; 80] \\ [10; 90] \end{pmatrix}$. Nous supposons que le décideur a désigné le critère $r_d = 2$ à améliorer.

2. Nous résolvons le problème (7.2), et nous obtenons les résultats suivants :

- $\gamma_{r_d} = 1.5833, \quad t_1 = 0;$

- et donc le point cible est $\hat{g} = \begin{pmatrix} 40 \\ 63.333 \end{pmatrix}$.

3. Nous résolvons le problème (7.2) et nous obtenons la solution $\tilde{W} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ et $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \end{pmatrix}$ qui est non dominé.

4. Supposons que le décideur est satisfait, on arrête le processus.

Remarque . La solution $\tilde{W} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ est efficace non supportée.

Exemple . 2

Le dernier exemple que nous considérons est un problème de sac à dos (Knapsack problem) avec

$$Q = 50, \quad s = 2, \quad m = 1, \quad b = 187$$

Nous notons

$$\mathcal{B} = \{1, \dots, 50\}, \quad \forall W \quad \mathcal{B}^1(W) = \{q \in \mathcal{B} : w_q = 1\}.$$

q	C_{1q}	C_{2q}	T_{1q}	q	C_{1q}	C_{2q}	T_{1q}	q	C_{1q}	C_{2q}	T_{1q}	q	C_{1q}	C_{2q}	T_{1q}
1	80	62	25	2	59	80	26	3	52	67	28	4	38	92	25
5	86	35	20	6	58	41	38	7	94	95	38	8	44	89	49
9	66	53	28	10	40	52	22	11	81	63	34	12	72	54	39
13	40	89	26	14	37	42	21	15	72	31	36	16	98	54	47
17	34	31	38	18	34	31	50	19	32	82	39	20	100	87	50
21	83	67	45	22	40	58	27	23	43	51	49	24	38	65	24
25	56	80	48	26	88	36	32	27	93	67	47	28	92	47	24
29	100	58	43	30	98	49	27	31	79	53	32	32	96	57	48
33	93	94	35	34	62	51	22	35	90	48	34	36	76	90	31
37	94	35	31	38	53	43	36	39	50	61	50	40	49	57	23
41	57	57	33	42	56	76	24	43	66	92	28	44	91	45	35
45	93	39	22	46	78	33	26	47	76	50	32	48	31	56	21
49	36	68	20	50	82	47	29								

Tableau 7.1 – Matrices des coûts et des contraintes

$\mathcal{K}^d \in \{1, 2\}$ représente les critères à améliorer.

A l'initialisation nous obtenons $\tilde{W}^1$, $\tilde{W}^2$ avec

$$\mathcal{B}^1(\tilde{W}^1) = \{1, 5, 7, 28, 30, 37, 45\}, \quad \tilde{Y}^1 = \begin{pmatrix} 637 \\ 362 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}^1(\tilde{W}^2) = \{2, 4, 7, 13, 42, 43, 49\}, \quad \tilde{Y}^2 = \begin{pmatrix} 389 \\ 592 \end{pmatrix}$$

et donc les points idéal et nadir sont respectivement

$$M = \begin{pmatrix} 637 \\ 592 \end{pmatrix}, \quad Nd = \begin{pmatrix} 389 \\ 362 \end{pmatrix}$$

Les différentes itérations sont résumées par le tableau 7.2 suivant :

Itération	$\tilde{W}^d$ $\mathcal{B}^1(\tilde{W}^d)$	Y^d	$\mathcal{K}^d$	$\hat{g}$	$\tilde{W}$ $\mathcal{B}^1(\tilde{W})$	$\tilde{Y}$	Test*	décision
1	$\{1, \dots, 6\}$	$\begin{pmatrix} 373 \\ 377 \end{pmatrix}$	$\{1, 2\}$	$\begin{pmatrix} 620.8261 \\ 377 \end{pmatrix}$	$\{1, 5, 28, 30, 31, 33, 45\}$	$\begin{pmatrix} 621 \\ 379 \end{pmatrix}$	ND	NON
2	$\{1, 5, 30, 36, 37, 42, 43\}$	$\begin{pmatrix} 476 \\ 377 \end{pmatrix}$	$\{1, 2\}$	$\begin{pmatrix} 476 \\ 512.1250 \end{pmatrix}$	$\{1, 4, 30, 34, 36, 42, 43\}$	$\begin{pmatrix} 476 \\ 512 \end{pmatrix}$	ND	NON
3	$\{1, 30, 34, 36, 42, 43\}$	$\begin{pmatrix} 438 \\ 420 \end{pmatrix}$	$\{1, 2\}$	$\begin{pmatrix} 576.3427 \\ 420 \end{pmatrix}$	$\{2, 5, 28, 30, 33, 42, 45\}$	$\begin{pmatrix} 577 \\ 420 \end{pmatrix}$	ND	NON
5	$\{5, 28, 30, 33, 42, 45\}$	$\begin{pmatrix} 518 \\ 340 \end{pmatrix}$	$\{1, 2\}$	$\begin{pmatrix} 518 \\ 473.9787 \end{pmatrix}$	$\{2, 28, 36, 42, 43, 45, 47\}$	$\begin{pmatrix} 518 \\ 474 \end{pmatrix}$	ND	NON
6	$\{28, 36, 42, 43, 45, 47\}$	$\begin{pmatrix} 459 \\ 394 \end{pmatrix}$	$\{1, 2\}$	$\begin{pmatrix} 459 \\ 527.9690 \end{pmatrix}$	$\{5, 10, 13, 33, 36, 42, 43\}$	$\begin{pmatrix} 457 \\ 528 \end{pmatrix}$	ND	NON
7	$\{10, 13, 33, 36, 42, 43\}$	$\begin{pmatrix} 371 \\ 493 \end{pmatrix}$	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} 584.5122 \\ 493 \end{pmatrix}$	$\{1, 2, 5, 28, 34, 43, 45, 49\}$	$\begin{pmatrix} 574 \\ 474 \end{pmatrix}$	ND	<u>OUI.</u>

* il s'agit ici de test de Pareto potentiellement efficace

ND signifie non dominé ; NON signifie que le décideur n'est pas satisfait

Tableau 7.2 – Itérations

7.4 Commentaires et perspectives

L'objectif global de la méthode que nous avons décrite dans ce chapitre est de permettre d'une part, d'associer les principes fondamentaux de l'approche DEA dans la recherche de cible sur la frontière efficace, d'autre part d'utiliser cette cible comme référence dans le "*Goal programming*". De façon interactive, et en évitant d'influencer les préférences du décideur en ne partant pas forcément avec des solutions efficaces mais seulement une solution admissible qu'on présente au décideur. Nous comptons dans le futur examiner en profondeur les choix des solutions admissibles de sorte à éviter des boucles (non convergence) quand les choix du décideur ne sont pas logiquement uniformes. En effet, nous comptons cibler des domaines de recherche de ces solutions admissibles une fois que le décideur a exprimé ses choix. Nous comptons surtout tester cette approche pour des cas réels déjà testés ou non afin de cibler les directions d'approfondissement théorique ou méthodologique.

Chapitre 8

Modèle d'affectation multicritère de ressources additionnelles basé sur DEA

L'utilisation de l'approche DEA fournit des informations utiles pour le suivi, le contrôle et la gestion dans une organisation de production. Les éléments essentiels sont la connaissance des unités de référence, des sources d'inefficacité des unités inefficaces, les variations de productivité d'une période à l'autre, les rendements d'échelle variables, etc. Nous proposons un modèle mathématique d'optimisation multi-objectif basé sur DEA (MOILP-DEA) pouvant aider les gestionnaires ou décideurs à ajuster les investissements dans les différentes unités du système de contrôle par des affectations additionnelles à apporter. Nous décrirons l'objectif global recherché de la méthodologie proposée dans la section 8.1 ; dans la section 8.2, nous présenterons le processus de modélisation mathématique du modèle d'affectation multicritère des ressources additionnelles ; dans la section 8.3 nous décrirons le modèle mathématique MOILP-DEA ; en section 8.4 nous illustrons le modèle par un exemple ; enfin nous donnerons une conclusion relative au modèle et les perspectives de recherches futures, dans la section 8.5

8.1 Objectifs

L'objectif général de la formulation mathématique de ce modèle d'affectation multicritère basé sur DEA (MOILP-DEA) est de permettre aux décideurs de tenir compte des efficacités de performance des unités sous contrôle pour affecter des ressources additionnelles pour une nouvelle période de fonctionnement. Il convient tout d'abord de déterminer des informations intermédiaires :

- les informations sur les efficacités de production ou de performance ;
- les informations sur les rendements d'échelle que présente chaque unité ;

– les cibles optimales de chaque unité de production.

Le modèle mathématique que nous proposons prend en compte toutes ces informations intermédiaires. Son objectif est, sur base de quantité additionnelle de ressources et de demandes exprimées par les différentes DMU, d'affecter de façon optimale et efficace ces ressources disponibles pour maximiser les estimations des rendements de production sur base des informations recueillies avec les mesures de performance et les rendements d'échelle.

8.2 Modélisation du problème MOILP-DEA

La modélisation du problème MOILP-DEA nécessite des étapes intermédiaires permettant de calculer, d'une part, des coefficients d'amélioration des rendements, en fonction de l'accroissement des inputs, d'autre part, des valeurs minimales des rendements d'échelle variables des différentes unités.

8.2.1 Détermination des unités de référence et estimation de la fonction “technique” d'amélioration des rendements

L'une des informations majeures dans le processus de modélisation du problème MOILP-DEA, est la connaissance des unités de référence qui sont des unités techniquement efficaces du système. Ces unités sont déterminées en utilisant le modèle CCR (cf. chapitre 2, section 2.2). Nous noterons

$$\mathcal{E} = \{j \in \{1, \dots, N_E\} \mid \text{tel que la DMU } j \text{ est DEA techniquement efficace}\}.$$

Une fois l'ensemble $\mathcal{E}$ déterminé, nous utilisons le modèle BCC à orientation input (cf. chapitre 2, section 2.2) pour analyser les unités techniquement efficaces en considérant tour à tour, individuellement chaque facteur output associé à tous les facteurs inputs. Cette étape consiste à mesurer les performances des unités techniquement efficaces relativement à chaque facteur output obtenu avec les facteurs inputs. Il s'agit de mesurer les performances des unités dans $\mathcal{E}$ avec un unique output k et les m facteurs inputs. Ainsi, nous estimons les rendements maximaux possibles pour chaque facteur output relative-

ment aux données observées. Ceci se traduit mathématiquement par la résolution pour chaque unité $d \in \mathcal{E}$ et pour chaque facteur output $k \in \{1, \dots, s\}$ le problème suivant.

$$\begin{aligned} \max \quad & ft(k, d) = \mu_k^d y_{kd} + u^{k,d} \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \mu_k^d y_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i^{k,d} x_{ij} + u^{k,d} \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m v_i^{k,d} x_{id} = 1; \\ \mu_k^d \geq \varepsilon, \quad v_i^{k,d} \geq \varepsilon, \quad \forall i; \quad u^{k,d} \in \mathbb{R}; \end{cases} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Remarque . Bien que les unités sous évaluation sont toutes techniquement efficaces donc efficaces en utilisant le modèle BCC complet, elles ne sont pas forcément efficaces ici puisqu'un seul facteur output est considéré et l'unité peut être moins performante pour ce seul facteur. Autrement dit, la valeur optimale vérifie simplement $\tilde{ft}(k, d) \leq 1$.

Pour éviter les problèmes liés aux situations de solutions optimales multiples, nous utilisons le modèle min max suivant (8.2).

$$\begin{aligned} \min \quad & \Delta_k^d \\ \text{s.à.} \quad & \begin{cases} \mu_k^d (y_{kj} - y_{kd}) - \sum_{i=1}^m v_i^{k,d} (x_{ij} - x_{id}) - \delta_j^{k,d} \leq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \sum_{i=1}^m v_i^{k,d} x_{id} = 1; \\ \Delta_k^d - \delta_j^{k,d} \geq 0, & j = 1, \dots, n; \\ \mu_k^d \geq \varepsilon, \quad v_i^{k,d} \geq \varepsilon, & i = 1, \dots, m. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.2)$$

La formulation ci-dessus indique que pour un facteur output donné k , l'hyperplan représentant le rendement maximum de ce facteur avec pour référence l'unité d est défini par

$$\tilde{\mu}_k^d (y_k - y_{kd}) - \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^{k,d} (x_i - x_{id}) = \tilde{\Delta}_k^d.$$

On constate donc que, pour le facteur output k et pour la DMU d , l'accroissement maximal de rendement $\tilde{\mu}_k^d (y_k - y_{kd})$ est fourni par

$$\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^{k,d} (x_i - x_{id}) + \tilde{\Delta}_k^d.$$

La contribution des différents facteurs inputs à cet accroissement peut donc être mesurée

par l'expression $\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i^{k,d} x_i$ où x_i représente l'accroissement en facteur input i .

Afin de tenir compte de l'ensemble des unités $d \in \mathcal{E}$ de référence, nous considérons la moyenne de ces valeurs en introduisant la quantité

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i^k x_i \quad \text{avec} \quad \alpha_i^k = \frac{1}{N_E} \sum_{d=1}^{N_E} \tilde{v}_i^{k,d}. \quad (8.3)$$

Les coefficients $\alpha_i^k \geq 0$ traduisent la relation entre l'accroissement du facteur input i et le rendement maximal moyen auquel il contribue pour l'amélioration de la production de l'output k .

8.2.2 Détermination des valeurs de rendement d'échelle

Toutefois, il convient aussi de prendre en compte l'information sur les rendements d'échelle variables des différentes unités pour répartir de manière optimale la quantité additionnelle d'input i disponible. Pour ce faire, nous déterminons les valeurs minimales des rendements d'échelle que peut présenter chaque unité. Ces valeurs sont calculées pour les projections obtenues sur la frontière efficace d'échelle c-à-d. que si l'unité n'est pas efficace, nous la projetons sur la frontière efficace d'échelle avant de calculer la valeur minimale de rendements d'échelle qu'elle peut présenter. Nous utilisons le modèle BCC à orientation input (cf. chapitre 2, section 2.2) pour déterminer les valeurs des projections et les valeurs minimales des rendements d'échelle (cf. chapitre 3, section 3.3). Nous noterons $\hat{X}_j, \hat{Y}_j$ les vecteurs des valeurs inputs et outputs respectivement correspondants à la projection de l'unité j sur la frontière efficace d'échelle. Pour chaque unité d , $d = 1, \dots, n$, nous calculons la valeur minimale $\rho^{\min,d}$ des rendements d'échelle présents en résolvant le problème suivant :

$$\begin{aligned} u^{\min,d} = \min \quad & u^d \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{r=1}^s \mu_r^d y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^d x_{ij} + u^d \leq 0, & j = 1, \dots, n, \quad j \neq d; \\ \sum_{r=1}^s \mu_r^d \hat{y}_{rd} - \sum_{i=1}^m v_i^d \hat{x}_{id} + u^d = 1; \\ \mu_r^d \geq 0, \quad v_i^d \geq 0, \quad \forall r, i; \quad u^d \in \mathbb{R}; \end{cases} \end{aligned} \quad (8.4)$$

D'après Banker et Thrall (cf. [16]),

$$\rho^{\min,d} = \frac{1}{1 - u^{\min,d}} \geq 0.$$

Notons $\gamma_j = \rho^{\min,j}$, $j = 1, \dots, n$.

8.3 Modèle mathématique : MOILP-DEA

Nous décrivons maintenant la formulation du modèle MOILP-DEA, en commençant par les contraintes et ensuite les fonctions objectifs.

8.3.1 Contraintes de disponibilité des ressources

Nous considérons :

- que pour chaque facteur input i , une quantité b_i est disponible pour être répartie entre les différentes unités j .
- que chaque DMU j exprime une demande de a_{ij} unités d'input i (nous supposons $a_{ij} \leq b_i$, $\forall j$). En introduisant des variables binaires $t_{ij} = 1$, si la demande en input i de la DMU j est retenue ;
 $t_{ij} = 0$, sinon.

les contraintes du modèle MOILP-DEA s'écrivent alors

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} t_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (8.5)$$

8.3.2 Les fonctions objectifs

Dans le modèle multicritère, nous introduisons s fonctions objectifs z_k correspondant aux s facteurs outputs k . Ces fonctions vont traduire l'impact sur le facteur k de l'accroissement des inputs i accordés aux différentes DMU j . Pour calculer cet impact, il faut tenir compte à la fois des coefficients α_i^k déterminés en 8.2.1 et des coefficients γ_j déterminés en 8.2.2.

Aussi la fonction z_k s'écrit

$$z_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^k t_{ij} \quad (8.6)$$

avec $c_{ij}^k = \alpha_i^k \gamma_j a_{ij}$

8.3.3 MOILP-DEA

Le problème multicritère – en variables binaires – que nous proposons pour allouer des ressources additionnelles aux DMU se formule donc finalement :

$$\begin{aligned} \text{“max”} \quad & z_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^k t_{ij}, \quad k = 1, \dots, s \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} t_{ij} \leq b_i, & i = 1, \dots, m; \\ t_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, \forall j. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Notons que, étant donné qu’aucune interaction n’intervient dans les contraintes entre les variables relatives à deux inputs différents, le problème peut se décomposer en m problèmes séparés, en considérant chaque input séparément.

Pour un input i fixé, le problème peut s’écrire

$$\begin{aligned} \text{“max”} \quad & z_{k,i} = \sum_{j=1}^n c_{ij}^k t_{ij}, \quad k = 1, \dots, s \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} t_{ij} \leq b_i; \\ t_{ij} \in \{0, 1\} & \forall j. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Ces m problèmes se présentent chacun comme un problème multicritère de type “sac à dos” (“*Knapsack problem*”) pour lequel de nombreuses méthodes de résolution ont été proposées.

On a bien sûr

$$z_k = \sum_{i=1}^m z_{k,i}.$$

8.4 Illustration

Nous considérons l’exemple illustratif avec 3 facteurs inputs et 3 facteurs outputs, dont les données sont présentées par le tableau 8.1.

En utilisant le modèle CCR (cf. chapitre 2, section 2.2), nous obtenons l’ensemble des DMU techniquement efficaces

$$\mathcal{E} = \{1, \dots, 14\} \setminus \{2, 8, 9, 14\}.$$

DMU	Input 1	Input 2	Input 3	Output 1	Output 2	Output 3	score CCR	$\rho^{\min,d}$
1	8	4	6	5	4	8	1.0000	0.6748
2	7	8	4	3	7	4	0.6772	0.9960
3	11	6	4	11	11	5	1.0000	0.3423
4	10	10	2	9	14	1	1.0000	0.0732
5	2	7	3	4	1	4	1.0000	0.9582
6	6	10	10	8	10	13	1.0000	0.0000
7	11	7	11	11	2	16	1.0000	0.0000
8	5	14	8	6	13	9	0.8885	0.2899
9	10	11	9	9	5	12	0.9101	0.8969
10	1	8	2	9	13	2	1.0000	0.0388
11	6	5	3	12	5	5	1.0000	0.1574
12	5	9	1	10	8	1	1.0000	0.0845
13	9	12	8	14	17	10	1.0000	0.0000
14	13	13	7	15	12	9	0.8099	0.0000

Tableau 8.1 – Données et résultats de l'exemple

En utilisant l'approche proposé par Banker et Thrall dans [16] (cf. problème 8.4 ci-dessus), nous obtenons les valeurs minimales des rendements d'échelle variables $\rho^{\min,d}$ des 14 DMUS considérées (cf. dernière colonne du tableau 8.1).

Pour analyser chaque $d \in \mathcal{E}$ et chaque facteur output k , nous utilisons le problème 8.2 et nous obtenons les résultats suivants (cf. tableau 8.2).

Les résultats du tableau 8.2 permettent de calculer les coefficients α_i^k :

DMU d	$\tilde{\Delta}_1^d$	$\tilde{\Delta}_2^d$	$\tilde{\Delta}_3^d$	$\tilde{\mu}_1^d$	$\tilde{\mu}_2^d$	$\tilde{\mu}_3^d$	$\tilde{v}_1^{1,d}$	$\tilde{v}_1^{2,d}$	$\tilde{v}_1^{3,d}$	$\tilde{v}_2^{1,d}$	$\tilde{v}_2^{2,d}$	$\tilde{v}_2^{3,d}$	$\tilde{v}_3^{1,d}$	$\tilde{v}_3^{2,d}$	$\tilde{v}_3^{3,d}$
1	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.060	0.061	0.062	0.129	0.126	0.124	0.001	0.001	0.001
3	0.185	0.000	0.185	0.001	0.030	0.001	0.001	0.001	0.001	0.137	0.141	0.135	0.043	0.036	0.045
4	0.218	0.000	0.218	0.001	0.182	0.001	0.001	0.001	0.001	0.071	0.087	0.071	0.142	0.062	0.142
5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.056	0.056	0.053	0.107	0.109	0.105	0.047	0.042	0.054
6	0.385	0.345	0.000	0.005	0.031	0.050	0.046	0.012	0.065	0.072	0.092	0.060	0.001	0.001	0.001
7	0.312	0.365	0.000	0.019	0.001	0.148	0.001	0.038	0.089	0.140	0.081	0.001	0.001	0.001	0.001
10	0.000	0.000	0.000	0.001	0.090	0.001	0.019	0.010	0.112	0.083	0.001	0.111	0.158	0.491	0.001
11	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.090	0.091	0.090	0.181	0.180	0.181
12	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.017	0.001	0.001	0.084	0.001	0.986	0.158	0.986
13	0.000	0.000	0.157	0.238	0.220	0.082	0.048	0.109	0.021	0.047	0.001	0.001	0.001	0.001	0.100

Tableau 8.2 – Résultats

k	$10 * \alpha_1^k$	$10 * \alpha_2^k$	$10 * \alpha_3^k$
1	0.233	0.876	1.560
2	0.306	0.812	0.973
3	0.406	0.698	1.513

Considérons que les demandes exprimées a_{ij} en unités i pour les différentes DMU j sont celles représentées dans le tableau 8.3.

DMU	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	b_i
Inputs i															
1	1	2	0	3	0	1	1	0	2	1	1	0	2	0	10
2	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	2	0	1	5
3	2	0	0	1	2	1	1	1	0	0	2	1	1	2	8

Tableau 8.3 – Les quantités demandées a_{ij}

Avec cet exemple, le modèle MOILP-DEA revient à résoudre les 3 problèmes multicritères “*Knapsack*” suivants :

$$\begin{aligned}
 \text{“max”} \quad & \begin{cases} \mathbf{z}_{1,1} = 0.0233 * 0.6748 * 1 * t_{1,1} + 0.0233 * 0.9960 * 2 * t_{1,2} + 0.0233 * 0.0732 * 3 * t_{1,4} + \\ \quad 0.0233 * 0.8969 * 2 * t_{1,9} + 0.0233 * 0.0388 * 1 * t_{1,10} + 0.0233 * 0.1574 * 1 * t_{1,11} \\ \mathbf{z}_{2,1} = 0.0306 * 0.6748 * 1 * t_{1,1} + 0.0306 * 0.9960 * 2 * t_{1,2} + 0.0306 * 0.0732 * 3 * t_{1,4} + \\ \quad 0.0306 * 0.8969 * 2 * t_{1,9} + 0.0306 * 0.0388 * 1 * t_{1,10} + 0.0306 * 0.1574 * 1 * t_{1,11} \\ \mathbf{z}_{3,1} = 0.0406 * 0.6748 * 1 * t_{1,1} + 0.0406 * 0.9960 * 2 * t_{1,2} + 0.0406 * 0.0732 * 3 * t_{1,4} + \\ \quad + 0.0406 * 0.8969 * 2 * t_{1,9} + 0.0406 * 0.0388 * 1 * t_{1,10} + 0.0406 * 0.1574 * 1 * t_{1,11} \end{cases} \\
 \text{s.c.} \quad & \begin{cases} 1 * t_{1,1} + 2 * t_{1,2} + 3 * t_{1,4} + 1 * t_{1,6} + 1 * t_{1,7} + 2 * t_{1,9} + 1 * t_{1,10} + 1 * t_{1,11} + 2 * t_{1,13} \leq 10; \\ t_{1j} \in \{0, 1\} \quad \forall i, \quad j = 1, \dots, 14. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{“max”} \quad & \begin{cases} \mathbf{z}_{1,2} = 0.6748 * 1 * 0.0876 * t_{2,1} + 0.9960 * 1 * 0.0876 * t_{2,2} + 0.3423 * 1 * 0.0876 * t_{2,3} + \\ \quad 0.9582 * 1 * 0.0876 * t_{2,5} + 0.2899 * 1 * 0.0876 * t_{2,8} + 0.8969 * 1 * 0.0876 * t_{2,9} + \\ \quad 0.0388 * 1 * 0.0876 * t_{2,10} + 0.1574 * 0 * 0.0876 * t_{2,11} + 0.0845 * 2 * 0.0876 * t_{2,12} \\ \mathbf{z}_{2,2} = 0.6748 * 1 * 0.0812 * t_{2,1} + 0.9960 * 1 * 0.0812 * t_{2,2} + 0.3423 * 1 * 0.0812 * t_{2,3} + \\ \quad 0.9582 * 1 * 0.0812 * t_{2,5} + 0.2899 * 1 * 0.0812 * t_{2,8} + 0.8969 * 1 * 0.0812 * t_{2,9} + \\ \quad 0.0388 * 1 * 0.0812 * t_{2,10} + 0.1574 * 0 * 0.0812 * t_{2,11} + 0.0845 * 2 * 0.0812 * t_{2,12} \\ \mathbf{z}_{3,2} = 0.6748 * 1 * 0.0698 * t_{2,1} + 0.9960 * 1 * 0.0698 * t_{2,2} + 0.3423 * 1 * 0.0698 * t_{2,3} + \\ \quad 0.9582 * 1 * 0.0698 * t_{2,5} + 0.2899 * 1 * 0.0698 * t_{2,8} + 0.8969 * 1 * 0.0698 * t_{2,9} + \\ \quad 0.0388 * 1 * 0.0698 * t_{2,10} + 0.1574 * 0 * 0.0698 * t_{2,11} + 0.0845 * 2 * 0.0698 * t_{2,12} \end{cases} \\
 \text{s.c.} \quad & \begin{cases} 1 * t_{2,1} + 1 * t_{2,2} + 1 * t_{2,3} + 1 * t_{2,5} + 1 * t_{2,6} + 1 * t_{2,8} + 1 * t_{2,9} + 1 * t_{2,10} + 2 * t_{2,12} + 1 * t_{2,14} \leq 5; \\ t_{1j} \in \{0, 1\} \quad \forall i, \quad j = 1, \dots, 14. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{“max”} \quad & \begin{cases} \mathbf{z}_{1,3} = 0.6748 * 2 * 0.1560 * t_{3,1} + 0.0732 * 1 * 0.1560 * t_{3,4} + 0.9582 * 2 * 0.1560 * t_{3,5} + \\ \quad 0.2899 * 1 * 0.1560 * t_{3,8} + 0.1574 * 2 * 0.1560 * t_{3,11} + 0.0845 * 1 * 0.1560 * t_{3,12} \\ \mathbf{z}_{2,3} = 0.6748 * 2 * 0.0973 * t_{3,1} + 0.0732 * 1 * 0.0973 * t_{3,4} + 0.9582 * 2 * 0.0973 * t_{3,5} + \\ \quad 0.2899 * 1 * 0.0973 * t_{3,8} + 0.1574 * 2 * 0.0973 * t_{3,11} + 0.0845 * 1 * 0.0973 * t_{3,12} \\ \mathbf{z}_{3,3} = 0.6748 * 2 * 0.1513 * t_{3,1} + 0.0732 * 1 * 0.1513 * t_{3,4} + 0.9582 * 2 * 0.1513 * t_{3,5} + \\ \quad 0.2899 * 1 * 0.1513 * t_{3,8} + 0.1574 * 2 * 0.1513 * t_{3,11} + 0.0845 * 1 * 0.1513 * t_{3,12} \end{cases} \\
 \text{s.c.} \quad & \begin{cases} 2 * t_{3,1} + 1 * t_{3,4} + 2 * t_{3,5} + 1 * t_{3,6} + 1 * t_{3,7} + 1 * t_{3,8} + 2 * t_{3,11} + 1 * t_{3,12} + 1 * t_{3,13} + 2 * t_{3,14} \leq 8; \\ t_{1j} \in \{0, 1\} \quad \forall i, \quad j = 1, \dots, 14. \end{cases}
 \end{aligned}$$

8.5 Conclusion et perspectives

La formulation que nous avons décrite dans ce chapitre peut constituer un cadre initial efficace pour optimiser les investissements en tenant compte des analyses des efficacités de performances d'un système de production. D'une part, la détermination des unités de référence peut faciliter la planification des programmes de développement d'une unité donnée (efficace ou non efficace) ; d'autre part, les valeurs minimales des rendements d'échelle variables permettent d'analyser le besoin minimal des facteurs inputs en valeur additionnelle pour améliorer les rendements. Ces différentes informations fournies par l'utilisation de DEA permettent d'affecter efficacement des ressources additionnelles de sorte, à rechercher et l'efficacité de performance, et la stabilité d'efficacité des unités du système. Il s'agit toutefois d'une première préparation qui mérite certainement d'être approfondie et testée. Nous espérons ensuite à des fins de validations, appliquer ces modèles à des cas particuliers relatifs aux secteurs publics tels que l'éducation, la santé et à un secteur privé comme l'agriculture pour le cas des projets d'aide et de financement des agriculteurs. Ceci permettrait alors de valider cette première proposition de modèle et peut être remanier si le besoin s'en faisait sentir.

Partie III

Applications DEA aux systèmes de l'enseignement de base, de la santé et à quelques entreprises au Burkina Faso

Dans cette troisième partie, nous présentons des études de cas appliquant DEA pour analyser les performances et mesurer le changement de performances de trois secteurs du Burkina Faso, respectivement l'enseignement de base, la santé et l'économie avec quelques entreprises.

Au chapitre 9, DEA est utilisée pour mesurer les performances des directions régionales et/ou provinciales de l'enseignement de base au Burkina Faso de 2002 à 2005. Trois études de cas sont réalisées. L'objectif commun de ces études de cas, est de fournir des analyses par année sur les efficacités des directions et les sources d'inefficacité, de mesurer les changements de productivité d'années successives.

Dans le chapitre 10, DEA est encore utilisée, pour mesurer les efficacités de performance des régions et districts sanitaires au Burkina Faso pour 2003 et 2004, ainsi que les indices de mesure de changement de performances, les indices de productivité de Malmquist durant cette période .

Enfin, le chapitre 11, constitue une étude préliminaire, pour déterminer les efficacités de quelques entreprises burkinabé – de 5 secteurs économiques différents – à produire un chiffre d'affaires à partir de leur capital financier (la productivité du capital).

Chapitre 9

Analyse des performances du système de l'enseignement de base du Burkina Faso

Dans ce chapitre, nous utilisons l'approche DEA (cf. chapitres 2 et 3) pour mesurer les performances des directions régionales et/ou provinciales de l'enseignement de base au Burkina Faso pour 4 années (de 2002 à 2005). Ces applications nous permettent, d'une part, de donner des analyses par année sur les efficacités des directions et les sources d'inefficacité de certaines directions ; d'autre part, elles nous permettent de mesurer les changements de productivité (efficacité et technologie) par paires d'années successives. Ce chapitre est structuré comme suit : en section 9.1, nous expliquons les objectifs de cette application et nos motivations basées sur la politique éducative du Burkina Faso ; nous exposons respectivement les différentes méthodologies (modèles et variables) utilisées , les résultats et quelques analyses pour trois études de cas en appliquant DEA au système de l'enseignement de base au Burkina Faso à travers : les régions et provinces en 2002 et 2003, dans la section 9.2 ; les provinces en 2003 et 2004, dans la section 9.3 ; et les provinces de 2002 à 2005 dans la section 9.4 ; et enfin, en section 9.5, nous donnerons conclusions et perspectives relatives à nos résultats et analyses.

9.1 Objectifs , motivations et politique éducative au Burkina Faso

Le “*Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté (CSLP)* ¹”, document de base pour les orientations et politiques de développement durable du Burkina Faso, est la principale source qui nous a motivé à choisir ce secteur de l’enseignement de base pour appliquer la méthode DEA. Dans le CSLP, l’éducation et la santé demeurent les secteurs que le Gouvernement Burkinabé considère prioritaires à développer pour réduire la pauvreté. Pour le secteur de l’enseignement de base, il a été mis en place le “*Plan Décennal de Développement de l’Enseignement de Base (PDDEB)*”, pour accélérer le développement de ce secteur. Des indicateurs de performances sont définis pour permettre d’évaluer et de suivre les actions de développement ; ce développement étant lié aux facteurs d’organisation et de production (ressources humaine, physique, financière, etc.), les programmes mis en place doivent permettre de faire des affectations rationnelles des ressources pour augmenter les produits éducatifs (scolarisation, admission, succès en fin de cycle, etc.). Vu l’importance qu’accordent le gouvernement et les partenaires financiers et techniques, au suivi et à l’évaluation de ces programmes de développement, l’utilisation de l’approche DEA nous semble bénéfique et susceptible de contribuer à cette évaluation et de l’améliorer. Cette approche, qui a le mérite de mesurer les performances en tenant compte de multiples facteurs indicateurs et cela sans incorporation de valeurs de jugement ou de poids, semble en effet, incontournable pour le secteur de l’enseignement. D’une part, le caractère social de l’enseignement rend difficile aux décideurs d’affecter des poids pour caractériser l’importance d’un facteur par rapport à un autre. D’autre part, les partenaires nationaux et internationaux ne peuvent pas se contenter de la satisfaction d’un seul facteur pour apprécier les performances des actions de développement. En utilisant DEA, nous espérons permettre aux décideurs d’intégrer cette approche comme outil d’aide à la décision axé sur les analyses de performances relativement aux indicateurs qu’ils fixent.

¹Le Burkina Faso, a adopté un plan décennal appelé “Plan Décennal de Développement de l’Enseignement de Base (PDDEB)” pour la période 2001-2010. Ce programme vise à améliorer les performances du système de l’éducation de base à partir des indicateurs définis dans le document contenant les grandes orientations de la politique nationale pour la même période appelé “Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté (CSLP)”.

L'objectif principal de nos applications est donc de répondre, à une des préoccupations du Gouvernement Burkinabé, en utilisant la méthode DEA comme un outil complémentaire de suivi et d'évaluation des programmes de développement de l'enseignement et en particulier l'enseignement de base.

Les objectifs intermédiaires consistent :

- à mesurer les efficacités de performance des différentes directions déconcentrées ou décentralisées du système de l'enseignement de base ;
- à déterminer pour chaque année les directions efficaces de référence pour l'amélioration des performances des autres non efficaces ;
- à déterminer les différents indicateurs et sources d'inefficacité afin de pouvoir y remédier ;
- à mesurer les changements de performances d'une année à l'autre ;
- à déterminer les rendements d'échelle variables des différentes directions.

L'importance et l'intérêt des mesures et analyses des efficacités de performance des secteurs de l'éducation et institutions d'enseignement sont grandissants comme le montrent les nombreuses applications (cf. chapitre 3). Ceci conduit à rechercher les critères (quantifiables ou qualifiables) à prendre en compte pour expliquer la performance ou la productivité d'un système éducatif, à rechercher les ressources nécessaires pour l'amélioration de ces critères. Cette importance accordée au domaine social en général et à l'éducation en particulier est aussi perceptible à travers les études psychologique, sociologique, philosophique, économique, etc. qui tentent d'expliquer la notion et les besoins d'une bonne éducation. De plus, les partenaires financiers et techniques des programmes pour le développement de l'éducation cherchent à évaluer d'une façon ou d'une autre les rendements de leurs investissements dans ce secteur.

On rencontre dans la littérature de nombreux travaux et publications sur les systèmes éducatifs et les institutions d'enseignement, touchant tous les domaines de l'éducation (la psychologie de l'éducation, la philosophie de l'éducation, la sociologie de l'éduca-

tion, l'économie de l'éducation, etc.). Dans la plupart de ces travaux sur l'éducation, les auteurs cherchent à comprendre, expliquer ou justifier la technologie de l'éducation, la transformation des ressources en biens socio-économique, politique, culturel, financier, etc. Cette façon de voir l'éducation comme un processus dans lequel des ressources sont transformées en produits éducatifs amène certains chercheurs à justifier le choix des paramètres comme biens éducatifs ou besoins pour une bonne éducation. Parmi ces applications touchant à l'éducation, plusieurs travaux utilisant l'approche DEA ont déjà été réalisés. Pour mesurer l'efficacité d'un programme éducatif donné, les auteurs considèrent généralement qu'une politique de gestion et de planification des programmes scolaires doit tenir compte des ressources relatives :

- aux élèves : leurs situations socio-économique, financière, etc.
- aux parents d'élèves : leur niveau d'instruction, leurs situations financière, sociale, etc.
- aux enseignants : leur niveau de formation, leur expérience, leur motivation, etc.
- aux établissements d'enseignement : les ressources matérielle, physique, le personnel, etc.

D'autres facteurs (socio-économique, financier, géographique, culturel, etc.) souvent plus complexes à quantifier ou à qualifier, mais contribuant à justifier une meilleure éducation, sont parfois considérés. La considération des résultats (outputs) sont encore plus complexes et souvent non quantifiables ni qualifiables. De manière générale, on prend en compte les critères indicateurs de performance relatifs à l'accès à l'éducation, la prise en compte du genre (parité fille-garçon), la réussite en fin de cycle, etc.

Les efficacités de performance des directions de l'enseignement de base que nous étudions dans ce chapitre dépendront bien sûr des facteurs considérés dans les modèles. Pour définir ces facteurs, nous sommes partis du principe que ces directions ont besoin de ressources (humaine, financière, physique, matérielle, socio-économique, etc.) pour générer des produits éducatifs (scolarisation, succès à l'examen en fin de cycle primaire); puis prenant en compte que les objectifs des décideurs politiques et autres partenaires financiers et techniques de l'éducation sont mesurés par ces indicateurs d'accès et d'admission à l'école, de succès aux examens de fin de cycle et de la prise en

compte de la parité des sexes. Pour le cas particulier du système d'éducation de base du Burkina Faso, la politique éducative et ses orientations sont définies dans le CSLP pour répondre aux exigences du développement durable. Les stratégies de développement des secteurs sociaux tels que la santé et l'éducation, en particulier l'éducation de base, sont définies par *“l'axe 2 : garantir l'accès des pauvres aux services sociaux de base”*². *“Le Plan Décennal de Développement de l'Enseignement de Base (PDDEB)”* permet d'améliorer les performances du système éducatif, en suivant les directives définies dans le CSLP. Le suivi et l'évaluation de ces performances sont mesurés par des indicateurs définis en concertation avec les partenaires financiers (nationaux et internationaux) et tous les acteurs intervenant dans ce domaine de l'éducation. Ainsi l'objectif premier pour l'éducation consiste à *“faire sortir le système éducatif de sa léthargie et passer d'un taux de scolarisation primaire de 40.3% en 1999 à 70% en 2010, un accent particulier étant mis sur l'accroissement de celui des filles qui devrait passer de 36% à 65% pendant cette même période”* (CSLP). Dans le rapport *“Etat de mise en œuvre du cadre stratégique de Lutte contre la pauvreté- volet Education de base”*³, on fait clairement ressortir les principaux indicateurs de suivi pour le développement du secteur de l'éducation de base, qui sont le taux de scolarisation, le taux d'admission et les nouveaux inscrits au primaire. Des objectifs spécifiques pour le développement du système éducatif de base, il ressort l'importance que l'Etat accorde à la scolarisation (sa croissance), la prise en compte de celle des filles et aussi l'amélioration de la *“qualité, la pertinence et l'efficacité de l'éducation de base par la formation des personnels d'enseignement(instituteurs) et d'encadrement (inspecteurs et conseillers pédagogiques) ”*. Ainsi comme moyens et ressources, l'Etat compte mobiliser pour la croissance des rendements scolaires : les ressources humaines par la formation des maîtres ou instituteurs de classe, des conseillers pédagogiques et des inspecteurs ; les ressources physiques par la construction et/ou la réhabilitation des salles de classe et des écoles ; les ressources matérielles ; l'augmentation des manuels scolaires pour élèves et pour enseignants, etc.

²Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté (version Janvier 2004) Ministère de l'Economie et du Développement, Burkina Faso

³Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté- Volet Education de base (version Mars 2003) Ministère de l'Education de Base et de l'Alphabétisation, Burkina Faso

De ces indicateurs, des provinces ont été définies prioritaires – au nombre de 20 sur les 45 – par le Gouvernement qui a prévu de mener une politique éducative de motivation et de sensibilisation à la scolarisation et celle des filles en particulier par l'amélioration des infrastructures scolaires :

- construction des écoles et des cantines,
- exemption du paiement des manuels en particulier pour les filles,
- motivation des instituteurs par des allocations favorables à celles des zones urbaines ou semi-urbaines, etc.

En définissant ces provinces prioritaires, le Gouvernement espère permettre une affectation efficace des ressources et une amélioration accélérée des rendements scolaires ; ces provinces ont de faibles rendements scolaires (faible scolarisation et celle des filles en particulier, faible taux d'admission) c-à-d. en dessous de la moyenne nationale, et bénéficient d'un traitement particulier de la part du Gouvernement qui consiste à augmenter les ressources pour améliorer les rendements.

Pour ces applications avec des modèles DEA, nous considérons comme DMU les directions régionales et/ou les directions provinciales de l'enseignement de base. Nous sommes partis de la structure du secteur de l'enseignement de base dirigé par le ministère de l'enseignement de base et de l'alphabétisation (MEBA), qui est organisé comme suit : les directions centrales rattachées au secrétariat général ; les directions régionales ; les directions provinciales ; et enfin les circonscriptions de l'Education de base.

Les indicateurs de performance de rendements (que nous choisirons comme outputs) les plus importants que nous prendrons en compte dans les différents modèles, sont :

TBS : le taux brut de scolarisation considéré dans tous les modèles. C'est le ratio (*“effectif total des élèves au primaire”/“nombre total de la population en âge de 7 à 12”*)*100. Cette variable est un indicateur qui mesure l'accès à l'école et la participation de la population en âge d'être au primaire. Cet indicateur donne des informations sur la capacité globale d'une direction à fournir une éducation primaire.

TBA : le taux brut d'admission au primaire considéré dans tous les modèles. C'est le ratio (*“Effectif total des élèves en première année du primaire”/“nombre total de la population en âge de 7”*)*100. Cette variable mesure l'accès et la participation de la

population en âge de commencer l'école primaire et donne l'information sur la capacité à fournir une éducation en première année du primaire.

CEP : Certificat d'Etudes Primaires, examen de fin de cycle primaire considéré dans tous les modèles avec pour DMU les provinces. Nous considérons la variable représentant le taux de succès au CEP, qui mesure la qualité de l'enseignement primaire dans une direction donnée.

9.2 Etude de cas 1 : mesures des efficacités de performance et de changements de performance des directions régionales et provinciales en 2002 et 2003

9.2.1 Modèles, variables et données

Dans cette étude de cas, nous utilisons la méthode DEA à travers le modèle BCC de Banker, Charnes et Cooper (cf. chapitre 2), pour calculer les efficacités technique et d'échelle du système d'éducation de base au Burkina Faso pour les deux années 2002 et 2003. Nous analysons l'efficacité du système éducatif de deux manières : premièrement au niveau des régions et en second lieu des provinces. Nous considérons de multiples facteurs éducatifs résultants comme la scolarisation, l'admission, le succès en fin de cycle et la prise en compte de la parité de sexe. Pour produire ces résultats, les directions utilisent de multiples facteurs ressources. Ces facteurs ressources (inputs) sont les enseignants, les manuels scolaires, les salles de classe. L'approche DEA a été également utilisée pour calculer les indices de productivité de Malmquist (cf. chapitre 3) des régions et des provinces pour faire ressortir les changements de performance (gain ou perte) survenus durant cette période, pour chacune des régions et provinces.

Pour le premier modèle qui concerne les 13 régions, nous considérons 5 facteurs descriptifs, deux facteurs inputs et trois facteurs outputs :

► X_1 est une variable input qui représente le ratio enseignants pour 1000 élèves. Cette variable est un indicateur qui mesure la capacité d'encadrement des élèves au primaire. Ce facteur est considéré pour justifier le contrôle fait au niveau régional sur l'affectation des enseignants. Cette variable permet de mesurer l'efficacité des affectations des ensei-

gnants au niveau régional.

► X_2 est une variable input qui représente le ratio salles de classe pour 1000 élèves. Cette variable est un indicateur qui mesure la capacité à répondre à la demande de scolarisation au primaire dans une région donnée. Elle permet de mesurer la capacité au niveau régional à tenir compte de la demande de scolarisation par l'offre de salles de classe.

► Y_1 représente l'indicateur **TBS** de la région et mesure la moyenne des capacités d'accueil au primaire des différentes localités de la région.

► Y_2 représente l'indicateur **TBS** des filles de la région et mesure la moyenne des capacités de scolarisation des filles au primaire des différentes localités de la région.

► Y_3 représente l'indicateur **TBA** de la région et mesure la moyenne des capacités d'accueil en première année du primaire des différentes localités de la région.

Cette étude de cas permet, à partir de l'approche DEA, de mesurer d'une part, les performances d'accueil des élèves au primaire et celui des filles en particulier, les performances d'accueil en première année du primaire, des directions régionales, à partir des ratios enseignants-élèves et classes-élèves. La variable Y_2 est considérée à la place de l'indice de parité fille qui est généralement calculé par le rapport TBS filles/TBS garçon. Cette variable ne mesure donc que la performance de scolarisation des filles au primaire sans comparaison de celle des garçons. La considération des facteurs inputs nous permet d'analyser les inefficacités de performance si les ratios enseignants-élèves et salles de classe-élèves sont contrôlés au niveau régional. Autrement dit, ces considérations nous permettent d'analyser les performances des régions si elles ont le contrôle sur l'affectation et/ou le recrutement des enseignants et la construction de nouvelles salles de classe pour répondre efficacement à la demande de sorte à augmenter les rendements outputs (TBS, TBS filles, TBA). Nous n'avons pas considérés ici le facteur CEP parce que les données que nous avons utilisées ne permettent pas d'avoir un taux de succès au CEP par région⁴.

⁴Nous n'avons pas voulu utiliser les moyennes des taux de succès au CEP des provinces de la région pour travailler parce qu'il fallait prendre en compte les tailles des provinces

Pour le second modèle qui concerne les 45 provinces, nous considérons 7 facteurs descriptifs ; 3 facteurs inputs et 4 facteurs outputs :

► X_1 représente le ratio enseignants de classe pour 1000 élèves. C'est une variable input considérée pour justifier le contrôle fait au niveau provincial sur l'affectation des enseignants. Cette variable mesure l'efficacité de la direction à contrôler les besoins d'enseignants en tenant compte de la demande de scolarisation dans la province.

► X_2 est une variable input qui représente le ratio livres de calcul pour 100 élèves. Cette variable mesure la disponibilité des manuels scolaires (livres de calcul au primaire). Bien que la gestion des livres à la base ne soit pas directement contrôlée par les directions provinciales, nous prenons néanmoins en compte cette variable pour comprendre le fonctionnement du système éducatif à partir de la disponibilité des manuels scolaires en moyenne dans une province. En effet, pour inclure cette variable dans notre modèle nous estimons que les dons des manuels scolaires peuvent passer d'abord par les directions provinciales avant la répartition aux différentes écoles demandeuses. Michaelowa (2001) dans [77]⁵ fait ressortir dans son étude sur les déterminants pour le succès de l'apprentissage dans la zone sub-saharienne de l'Afrique que la disponibilité des manuels scolaires (pour élèves comme pour enseignants) est un facteur très important à l'école.

► X_3 est une variable input qui représente le ratio livres de lecture pour 100 élèves. Idem que pour la justification du choix de la variable X_2 .

► Y_1 représente l'indicateur **TBS** de la province.

► Y_2 représente l'indicateur **TBS** des filles de la province.

► Y_3 représente l'indicateur **TBA** de la province.

► Y_4 représente l'indicateur **CEP** de la province et mesure la qualité de l'enseignement donnée au primaire dans la province.

Cette étude de cas permet à partir de l'approche DEA de mesurer :

⁵OECD, Primary Education Quality in Francophone Sub-Saharan Africa : Determinants of Learning Achievement and Efficiency Consideration

- les performances d'accueil des élèves au primaire et celui des filles en particulier ;
- les performances d'accueil en première année du primaire ;
- les performances de succès au CEP,

des directions provinciales, à partir des ratios classes-élèves, manuels de calcul-élèves et manuels de lecture-élèves. Ici nous n'avons pas pris en compte les ratios salles de classe-élèves pour mesurer les efficacités de performance. Nous avons omis ce facteur pour réaliser l'analyse uniquement à partir des enseignants et des manuels pour élèves.

Dans ces deux études de cas, pour la prise en compte du genre généralement mesuré par l'indice de parité sexe – calculé par le rapport des TBS filles/ TBS garçons –, nous avons considéré le facteur TBS filles pour mesurer les capacités d'accueil au primaire des filles. Nous n'avons pas considéré le TBA filles parce que ce facteur est généralement moins conseillé pour mesurer la parité de sexe au primaire, puisque ce facteur ne mesure que l'accueil pour la première année du primaire.

Les tableaux 9.1 et 9.2 représentent respectivement la synthèse des données (minimum, maximum, moyenne, écart-type) pour les régions et provinces pour les deux années (2002 et 2003) ⁶. Les données scolaires par région et par province sont représentées dans l'annexe A (cf. tableaux A.1 et A.2).

Variables	Minimum		Maximum		Moyenne		Ecart-Type	
	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003
Inputs								
X ₁	18.76	19.37	27.15	24.63	22.57	22.55	2.29	1.53
X ₂	16.52	16.56	25.17	25.33	21.43	21.26	2.72	2.72
Outputs								
Y ₁	21.50	18.41	94.10	74.59	42.84	36.65	17.87	13.33
Y ₂	17.90	15.47	91.80	72.86	36.57	31.36	18.50	13.97
Y ₃	53.76	62.05	71.56	77.02	61.50	68.67	5.68	4.78

Tableau 9.1 – Synthèse des données pour les 13 régions en 2002 et en 2003

⁶Ces données nous ont été fournies par la Direction des Etudes et Planification du Ministère de l'Enseignement de Base et de l'Alphabétisation du Burkina Faso (DEP/MEBA) et du Secrétariat Permanent du Plan Décennal de Développement de l'Enseignement de Base (SP-PDDEB/ MEBA)

Cette synthèse (cf. tableau 9.1) des données observées au niveau des régions, montre que les moyennes des facteurs inputs et outputs ont baissé en 2003 comparé à 2002, excepté la variable Y_3 représentant le TBA. Il est à noter que cette moyenne n'est pas la moyenne nationale ; elle représente la moyenne des moyennes des différentes régions sans tenir compte de la taille de chaque région.

Variables	Minimum		Maximum		Moyenne		Ecart-Type	
	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003
Inputs								
X_1	17.46	11.88	43.76	42.43	23.39	23.34	4.05	4.19
X_2	8.85	9.67	75.08	41.81	27.35	24.90	9.78	6.66
X_3	30.99	26.06	102.07	85.34	56.72	51.44	12.01	12.94
Outputs								
Y_1	16.9	20.30	94.1	97.10	38.05	42.02	13.12	12.88
Y_2	14.7	17.80	91.8	94.80	31.57	35.15	12.91	12.67
Y_3	9.6	26.70	81.3	93.10	37.83	49.47	12.21	11.54
Y_4	37.12	47.77	94.28	85.39	56.99	66.62	11.66	8.65

Tableau 9.2 – Synthèse des données pour les 45 provinces en 2002 et en 2003

Le constat fait à partir de la synthèse des données scolaires par province (cf. tableau 9.2) montre que les moyennes des facteurs inputs ont diminuées tandis que celles des facteurs outputs ont augmentées de 2002 à 2003. Ces moyennes ne représentent pas non plus les moyennes nationales, elles représentent les moyennes des moyennes des différentes provinces.

9.2.2 Résultats, analyses des efficacités de performance et de changements de performance des directions régionales et des provinciales en 2002 et 2003

Nous analysons les résultats de l'étude de cas 1, d'abord pour le modèle étudiant les performances des directions régionales ensuite pour le modèle relatif aux directions provinciales.

9.2.2.1 Résultats et analyses des efficacités des directions régionales en 2002 et en 2003

Le tableau 9.3, résume les différents scores d'efficacité d'échelle et les rendements d'échelle présents pour les 13 régions ainsi que les scores moyens pour les deux années.

Régions	Score d'efficacité 2002 2003	rendements d'échelle 2002 2003	Régions	Score d'efficacité 2002 2003	rendements d'échelle 2002 2003
Boucle du Mouhoun	0.8597 0.8529	Croissant Croissant	Est	0.7226 0.8686	Croissant Décroissant
Cascades	0.8397 0.8651	Croissant Croissant	Haut-Bassin	1.0000 1.0000	Constant Constant
Centre	1.0000 1.0000	Constant Constant	Nord	0.7701 0.7974	Croissant Décroissant
Centre-Est	0.9319 0.9565	Décroissant Croissant	Plateau-Central	0.6909 0.8163	Croissant Décroissant
Centre-Ouest	0.9122 0.9350	Croissant Décroissant	Sahel	0.7945 0.8975	Croissant Croissant
Centre-Nord	0.8412 0.8473	Croissant Décroissant	Sud-Ouest	0.8916 0.7864	Croissant Croissant
Centre-Sud	0.8356 0.8338	Croissant Décroissant			
Moyenne	0.8531 0.8813				
Ecart-Type	0.0952 0.0718				

Tableau 9.3 – Efficacités d'échelle (modèle BCC) des régions en 2002 et en 2003

Pour une région efficace relativement aux données observées il n'est pas possible de réduire les facteurs inputs et/ou d'augmenter les facteurs outputs sans modifier un ou plusieurs autres facteurs inputs ou outputs dans cette région. Le tableau 9.3 montre que seulement les régions du Centre et des Hauts-Bassins sont efficaces et présentent des rendements d'échelle constants ce qui signifie que ces régions restent techniquement efficaces pour 2002 et 2003. Ces deux régions contiennent respectivement les deux plus grandes villes du pays, la capitale politique (Ouagadougou) et la capitale économique (Bobo-Dioulasso). En ce qui concerne les autres régions, inefficaces, pour améliorer les performances scolaires il faut tenir compte des sources d'inefficacité et des rendements d'échelle présents. Les résultats montrent que :

- pour 2002, 10 régions (tableau 9.3) inefficaces présentent des rendements d'échelle croissants. Ces régions devraient donc augmenter les facteurs inputs (X_1, X_2). Etant donné la définition de ces inputs dans le modèle, cette situation signifierait une augmentation des ratios enseignants-élèves et salles de classe-élèves c-à-d. respectivement moins d'élèves par enseignant et moins d'élèves par salle de classe. Une seule région inefficace présente des rendements d'échelle décroissants (Centre-Est) ; cette région se

trouve dans une situation où, pour gagner en efficacité, il conviendrait de diminuer les facteurs inputs (X_1, X_2) ; cette diminution correspond essentiellement à une augmentation du nombre d'élèves au primaire. Autrement dit, il faut augmenter la demande scolaire pour améliorer les rendements scolaires. Il faut voir dans ce résultat une inefficacité liée à la faible demande scolaire par rapport à l'offre relativement à l'ensemble des régions. Pour ce cas en présence de rendements d'échelle décroissants, l'interprétation donnée par les résultats signifie que la région utilise plus d'inputs que nécessaire relativement aux autres régions. La diminution des facteurs inputs peut signifier aussi une réaffectation de ces facteurs à d'autres régions plus nécessiteuses.

- pour 2003, 5 régions inefficaces (tableau 9.3) présentent des rendements d'échelle croissants et 6 présentent des rendements d'échelle décroissants. Pour cette année 2003, l'on constate qu'il y a plus de régions présentant de rendements d'échelle décroissants qu'en 2002. Cette situation peut signifier qu'il y a eu de nouvelles affectations relativement importantes à des régions moins demandeuses. Autrement dit, la gestion relative aux affectations pourrait être davantage rentable si elle avait pris en compte les rendements d'échelle variables des différentes régions.
- les sources d'inefficacité pour 2002 et pour 2003, des différentes régions et les écarts sont résumés dans le tableau 9.4. On y remarque que les inefficacités sont essentiellement liées au manque de rendements scolaires (quantités faibles de Y_1, Y_2 et Y_3). L'analyse des résultats montre que le facteur input 1 correspondant au ratio enseignants-élèves ne contribue pour aucune année à la baisse d'efficacité de performance d'aucune région. Cette situation peut signifier que la politique de répartition des enseignants dans les différentes régions en fonction de la demande est "quasi uniforme" en fonction de la demande c-à-d. que les écarts entre les répartitions optimales de ce facteur et les répartitions observées sont nuls.

Les scores moyens d'efficacité sont respectivement de 0.8531 et 0.8813 pour 2002 et 2003. Ces résultats montrent que le système à travers le fonctionnement des régions devrait en moyenne réduire les facteurs inputs de 14.69% et 11.87% pour améliorer les performances globales du système. Ceci signifie que le système en moyenne, relative-

Régions	X_1^*		X_2^*		Y_1^*		Y_2^*		Y_3^*	
	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003
Boucle du Mouhoun	-	-	1.29	1.26	16.60	12.00	15.40	10.90	12.50	10.23
Cascades	-	-	0.34	0.40	9.10	7.30	10.00	8.10	10.62	8.75
Centre	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Centre Est	-	-	0.96	0.88	17.50	10.10	15.90	9.30	2.04	7.30
Centre Nord	-	-	2.45	2.52	53.14	30.37	57.65	33.59	-	-
Centre Ouest	-	-	1.61	1.49	13.30	8.70	12.40	8.50	8.43	3.70
Centre Sud	-	-	1.45	1.43	15.20	10.20	13.30	8.70	8.20	9.74
Est	-	-	1.67	4.38	31.90	22.30	29.50	20.90	3.97	3.11
Hauts Bassins	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nord	-	-	1.64	1.81	10.90	8.20	16.90	12.80	11.31	4.64
Plateau Central	-	-	0.63	2.77	18.80	14.70	18.50	15.97	1.85	-
Sahel	-	-	3.03	6.18	34.50	27.30	31.20	24.60	4.74	6.32
Sud Ouest	-	-	3.08	1.91	17.30	14.00	17.40	13.70	7.50	0.89
Maximum	-	-	3.08	6.18	53.14	30.37	57.65	33.59	12.50	10.23
Moyenne	-	-	1.40	1.93	18.33	12.71	18.32	12.85	5.47	4.21
Ecart-Type	-	-	1.02	1.75	14.46	9.24	14.88	9.35	4.54	3.93

* Valeurs non nulles

Tableau 9.4 – Variables d'écart (modèle BCC) des régions en 2002 et en 2003

ment à la frontière efficace de production, devrait réduire les facteurs inputs ou produire davantage par une forte augmentation du nombre d'élèves c-à-d. que les régions inefficaces doivent revoir leur politique d'incitation à la demande de scolarisation pour augmenter leur performance.

Le tableau 9.5 présente les indices de productivité de Malmquist pour les différentes régions de 2003 comparée à 2002. Ces résultats montrent qu'une seule région des 13, la région du Centre, a connu une régression (perte de performance) durant cette période. L'indice de mesure de variation de technologie de production T de cette région est 0.8928. Bien que cette région soit techniquement efficace durant ces deux années (changement nul d'efficacité technique $E = 1$), elle a connu une faible productivité en 2003 comparée à celle de 2002. En moyenne, l'ensemble des régions a connu un changement positif de la technologie de production durant cette période avec un indice moyen de mesure $T = 1.0342$ et un gain en efficacité technique avec un indice de mesure $E = 1.0650$. Trois régions (Centre Est, Centre Sud et Sud Ouest) ont connu une baisse d'efficacité technique (indices de mesure $E < 1$) (cf. tableau 9.5), mais ces régions, grâce à des

gains de performance avec des indices $T > 1$, ont néanmoins enregistré des gains en productivité, avec des indices de Malmquist $M > 1$, liés aux changements positifs de technologie.

Région d	$\Delta^1(w_d^1)$	$\Delta^2(w_d^2)$	$\Delta^1(w_d^2)$	$\Delta^2(w_d^1)$	E_d	T_d	M_d
Boucle du Mouhoun	0.6976	0.7322	0.7736	0.6803	1.0497	1.0409	1.0925
Cascades	0.7052	0.7604	0.8067	0.7098	1.0783	1.0266	1.1071
Centre	1.0000	1.0000	1.0862	1.3627	1.0000	0.8928	0.8928
Centre Est	0.9032	0.8599	0.9085	0.8549	0.9520	1.0565	1.0058
Centre Nord	0.8858	0.8916	0.9419	0.8384	1.0065	1.0565	1.0634
Centre Ouest	0.7342	0.8040	0.8494	0.7172	1.0950	1.0400	1.1388
Centre Sud	0.7322	0.7215	0.7622	0.7078	0.9853	1.0455	1.0301
Est	0.6794	0.8312	0.8782	0.6430	1.2236	1.0565	1.2927
Hauts-Bassins	1.0000	1.0000	1.0806	1.0072	1.0000	1.0358	1.0358
Nord	0.6387	0.7463	0.7884	0.6388	1.1685	1.0277	1.2009
Plateau Central	0.6717	0.8015	0.8468	0.6358	1.1933	1.0565	1.2608
Sahel	0.7377	0.8191	0.8654	0.6983	1.1103	1.0565	1.1730
Sud-Ouest	0.7907	0.7768	0.8206	0.7544	0.9824	1.0523	1.0338
Minimum	0.6387	0.7215	0.7622	0.6358	0.9520	0.8928	0.8928
Moyenne	0.7828	0.8265	0.8776	0.7883	1.0650	1.0342	1.1021
Ecart-Type	0.1237	0.0913	0.1049	0.2021	0.0883	0.0439	0.1105

1 et 2 indiquent respectivement 2002 et 2003

$\Delta^1(w_d^1)$ et $\Delta^2(w_d^2)$ représentent les scores d'efficacité technique de l'unité d en 2002 et 2003 respectivement (cf. chapitre 3)

Tableau 9.5 – Indices de productivité de Malmquist des regions en 2002 et en 2003

9.2.2.2 Résultats et analyses des efficacités de performance des directions provinciales en 2002 et en 2003

La tableau 9.6 représente les résultats des efficacités des provinces en utilisant la méthode BCC pour 2002 et 2003.

L'analyse des résultats montre que pour la première année 2002, 5 provinces efficaces présentent des rendements d'échelle constants (Kadiogo, Kompienga, Houet, Yagha et Bougouriba) et 4 autres provinces efficaces présentent des rendements d'échelle croissants (Boulgou, Sanmatenga, Nahouri et Nounbiel). L'ensemble du système à travers le fonctionnement des provinces dégage un score moyen d'efficacité d'échelle de 0.8357 pour 2002. L'analyse montre également que 40 provinces (efficaces ou non efficaces) soit 88.89% des provinces, présentent des rendements d'échelle croissants. Il convien-

Provinces	score 2002	BCC 2003	Rendements 2002	d'échelle 2003	Provinces	score 2002	BCC 2003	Rendements 2002	d'échelle 2003
Banwa ^P	0.8812	0.8466	Croissant	Décroissant	Gourma ^P	0.8039	0.6197	Croissant	Décroissant
Kossi ^P	0.8769	0.7502	Croissant	Croissant	Komandjari ^P	0.5127	0.8128	Croissant	Croissant
Les Bale	0.8037	0.8099	Croissant	Croissant	Kompienga ^P	1.0000	0.8326	Constant	Décroissant
Mouhoun	0.7738	0.6838	Croissant	Décroissant	Tapoa ^P	0.7573	0.8673	Croissant	Décroissant
Nayala	0.7888	0.8239	Croissant	Croissant	Houet	1.0000	1.0000	Constant	Constant
Sourou	0.8114	0.7745	Croissant	Croissant	Kéné Dougou	0.8492	0.7559	Croissant	Croissant
Comoe	0.8284	0.9076	Croissant	Croissant	Tuy ^P	0.8533	0.7228	Croissant	Croissant
Leraba ^P	0.7423	0.8277	Croissant	Croissant	Loroum	0.7323	0.7780	Croissant	Croissant
Kadiogo	1.0000	1.0000	Constant	Constant	Passore	0.9051	1.0000	Croissant	Décroissant
Boulgou	1.0000	0.9900	Croissant	Croissant	Yatenga	0.6937	0.7293	Croissant	Croissant
Koulpelogo ^P	0.7412	0.7266	Croissant	Croissant	Zondoma	0.7954	0.7566	Croissant	Croissant
Kourittenga	0.8248	0.7371	Croissant	Décroissant	Ganzourgou ^P	0.7013	0.8148	Croissant	Décroissant
Bam	0.8752	1.0000	Croissant	Décroissant	Kourweogo	0.7190	0.9425	Croissant	Croissant
Namentenga ^P	0.7225	0.7463	Croissant	Décroissant	Ouhitenga	0.8133	0.6997	Croissant	Croissant
Sanmatenga ^P	1.0000	0.7507	Croissant	Croissant	Oudalan ^P	0.8194	1.0000	Croissant	Constant
Boulkiemde	0.8197	0.7922	Croissant	Croissant	Seno ^P	0.9431	0.8550	Croissant	Croissant
Sanguie	0.7938	0.6821	Croissant	Croissant	Soum ^P	0.8792	0.8273	Croissant	Décroissant
Sissili	0.7337	0.6363	Croissant	Croissant	Yagha ^P	1.0000	1.0000	Constant	Constant
Ziro ^P	0.7294	0.6605	Croissant	Croissant	Bougouriba	1.0000	0.9385	Constant	Décroissant
Bazega	0.7189	0.6808	Croissant	Croissant	Ioba	0.9379	0.6697	Croissant	Croissant
Nahouri	1.0000	0.9318	Croissant	Croissant	Noumbiel ^P	1.0000	0.5804	Croissant	Croissant
Zoundweogo	0.7764	0.6339	Croissant	Croissant	Poni ^P	0.8815	0.7802	Croissant	Décroissant
Gnagna ^P	0.7681	1.0000	Croissant	Constant					
Moyenne	0.8357	0.8083							
Ecart-Type	0.1108	0.1217							

Tableau 9.6 – Efficacités d'échelle (modèle BCC) des provinces en 2002 et en 2003

draient pour ces provinces d'augmenter les quantités des inputs X_1 , X_2 et X_3 . Etant donné la définition de ces inputs, ceci signifie qu'il faudrait augmenter les ratios enseignants-élèves, manuels de calcul-élèves et manuels lecture-élèves (c-à-d. augmenter le nombre d'enseignants et de manuels scolaires) pendant la même période dans ces provinces.

Pour la seconde année (2003), on trouve, 5 provinces efficaces qui présentent des rendements d'échelle constants (Kadiogo, Gnagna, Houet, Oudalan et Yagha) et 2 autres provinces efficaces présentant des rendements d'échelle décroissants (Bam et Passoré). Le score moyen de l'ensemble des provinces est de 0.8083. Pour cette deuxième année, on remarque que le nombre de provinces qui présentent des rendements d'échelle croissants a baissé : elles ne sont que 27 soit 60%. Ce constat peut se comprendre par le fait que l'Etat, depuis l'adoption du PDDEB, a mis l'accent sur le recrutement d'enseignants (augmentations et/ ou contrôles des quantités des inputs X_1 , X_2 , X_3). Ces résultats

montrent que pour suivre le programme de meilleurs rendements scolaires, l'ensemble des provinces pour les deux années devrait réduire respectivement de 16.43% et 19.17% les facteurs inputs X_1, X_2, X_3 . Cette situation signifie que les directions inefficaces ont des facteurs inputs suffisants pour produire davantage et donc que relativement à la frontière efficace de production, le système devrait faire des augmentations importantes du nombre d'élèves au primaire. Autrement dit, il faut inciter les pouvoirs publics à augmenter la demande scolaire. En effet, partant du fait que la scolarisation est sous contrôle au niveau de la province, les différentes provinces inefficaces devraient mettre en place une politique éducative qui en plus de permettre l'amélioration de la qualité de l'enseignement, doit aussi permettre d'augmenter la quantité ou la demande de scolarisation. Les politiques à court terme particulières souhaitables pour les provinces à rendements d'échelle croissants (pour 2002 par exemple) devraient augmenter les facteurs inputs X_1, X_2, X_3 respectivement ratios enseignants-élèves et manuels-élèves, ce qui correspond à des augmentations du nombre d'enseignants et de manuels. Pour les provinces qui présentent des rendements d'échelle décroissants (par exemple 2003), il faut diminuer ces facteurs ce qui signifie, soit diminuer les enseignants et/ou manuels et les réaffecter à d'autres (ce qui est sans doute difficilement concevable), soit augmenter la demande scolaire, par exemple en tenant compte de la difficulté d'accessibilité aux écoles, de la résistance à la scolarisation et celle des filles en particulier, etc.

Les variables d'écart optimales (cf. tableau 9.7) montrent que les facteurs inputs 1, 2 ou 3 ne contribuent pas significativement à l'inefficacité de performance des provinces, en particulier le facteur X_1 , correspondant au ratio enseignants-élèves qui a un écart moyen nul en 2002. En effet, l'on remarque que les moyennes respectives de ces facteurs sont $X_1 = 0(0.39)$; $X_2 = 2.48(1.32)$; $X_3 = 2.78(2.86)$ pour 2002 (respectivement 2003). Le fait que la variable d'écart correspondant à 2002 soit nulle pour le facteur input 1, montre que ce facteur n'influence pas les performances des provinces. Autrement dit, la repartition de ce facteur dans l'ensemble est optimale pour cette année relativement aux facteurs considérés. Pour ce qui concerne les facteurs outputs, les résultats des variables d'écart montrent que les provinces inefficaces pourraient produire davantage.

En effet, l'on remarque en moyenne pour ces facteurs outputs respectivement $Y_1 = 11.46(17.38)$; $Y_2 = 12.63(19.51)$; $Y_3 = 7.50(12.53)$; $Y_4 = 4.18(5.03)$ pour 2002 (respectivement 2003). Ces résultats montrent par exemple qu'il était nécessaire que le système produise de 14.32% de plus en TBS en 2002 pour être totalement efficace si les facteurs outputs considérés sont expliqués à partir des facteurs inputs du modèle.

Provinces	X_1^*		X_2^*		X_3^*		Y_1^*		Y_2^*		Y_3^*		Y_4^*	
	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003
Banwa ^P	-	-	0.45	-	8.77	3.40	7.36	18.27	9.64	19.32	7.13	6.60	-	-
Kossi ^P	-	-	-	-	4.08	-	17.53	8.26	16.65	9.40	-	5.62	-	7.11
Les Bale	-	-	5.75	2.99	-	-	16.83	33.66	16.93	34.47	10.19	30.02	10.59	18.73
Mouhoun	-	-	0.52	-	-	0.24	12.38	12.76	10.58	12.32	10.57	14.47	1.83	-
Nayala	-	-	3.90	2.50	-	-	6.31	12.31	5.71	11.61	4.31	3.68	4.91	28.00
Sourou	-	-	4.19	2.14	-	-	22.80	27.39	23.60	28.10	16.38	15.21	9.50	13.52
Comoe	-	-	3.70	8.22	-	-	13.04	25.04	14.84	28.46	8.18	22.20	4.52	9.87
Leraba ^P	-	-	-	-	-	-	15.57	40.73	19.97	45.78	8.59	29.97	22.35	20.84
Kadiogo	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Boulgou	-	-	-	-	-	-	-	19.52	-	21.08	-	17.89	-	2.50
Koulpelogo ^P	-	-	-	-	-	-	11.61	19.68	12.12	22.80	6.29	17.41	0.09	5.86
Kourittenga	-	-	4.99	1.25	6.75	-	16.36	4.41	17.06	5.65	8.84	7.41	-	11.39
Bam	-	-	2.30	-	8.06	-	5.44	-	8.25	-	-	-	-	-
Namentenga ^P	-	-	-	0.94	14.77	23.84	13.43	35.64	13.87	37.02	4.98	19.81	-	-
Sanmatenga ^P	-	-	-	11.55	-	-	-	14.55	-	19.14	-	8.51	-	3.74
Boulkiemde	-	-	7.60	9.10	0.46	0.70	11.62	3.50	14.10	9.25	10.40	-	-	0.79
Sanguie	-	-	5.51	1.59	-	-	11.19	6.36	9.67	5.25	7.73	4.28	-	2.80
Sissili	-	-	2.18	-	-	-	21.88	17.44	20.58	16.95	16.01	15.40	12.95	10.71
Ziro ^P	-	-	3.62	-	-	-	19.74	25.13	18.94	27.33	17.31	5.27	0.84	0.18
Bazega	-	-	5.61	2.57	6.89	-	18.43	15.38	18.32	14.90	15.54	8.73	-	13.11
Nahouri	-	-	-	-	-	-	-	6.75	-	8.77	-	14.16	-	-
Zoundweogo	-	-	0.54	-	8.97	0.38	9.63	0.55	8.18	1.53	-	-	-	3.89
Gnagna ^P	-	-	-	-	-	-	13.56	-	13.77	-	13.30	-	13.04	-
Gourma ^P	-	-	6.14	-	15.88	-	9.73	13.93	8.28	13.74	9.51	11.99	-	-
Komandjari ^P	-	15.76	-	-	-	1.81	8.41	5.60	7.05	4.20	17.31	11.10	28.45	0.06
Kompienga ^P	-	-	-	-	-	11.92	-	42.06	-	48.99	-	20.01	-	-
Tapoa ^P	-	0.08	-	-	5.89	12.73	13.64	56.74	14.70	60.61	10.36	47.47	-	-
Houet	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Kenedougou	-	-	-	-	-	-	0.06	12.40	5.57	19.32	-	12.23	4.53	11.52
Tuy ^P	-	-	14.30	5.48	-	-	17.76	19.41	20.71	23.03	13.67	10.17	-	5.63
Loroum	-	-	34.03	0.15	-	-	7.65	35.52	15.39	45.51	-	20.57	-	16.61
Passore	-	-	-	-	-	-	15.08	-	21.92	-	10.34	-	6.81	-
Yatenga	-	-	0.75	0.06	-	-	10.10	15.46	18.53	25.01	6.82	5.49	11.15	14.07
Zondoma	-	-	-	-	-	-	28.17	30.10	37.97	40.65	27.27	18.64	3.85	3.68
Ganzourgou ^P	-	-	-	-	-	4.81	5.98	14.44	7.40	11.19	10.54	-	4.16	-
Kourweogo	-	-	-	7.12	2.28	14.33	0.77	14.21	4.98	22.27	-	-	-	0.01
Oubritenga	-	-	3.27	1.24	-	-	27.11	20.74	27.82	21.34	19.57	14.03	-	6.30
Oudalan ^P	-	-	-	-	-	-	8.16	-	7.59	-	5.45	-	25.13	-
Seno ^P	-	-	-	-	-	-	42.83	31.00	42.63	30.68	29.55	32.84	23.45	-
Soum ^P	-	-	-	-	11.37	10.68	17.18	41.43	14.64	39.24	11.53	33.25	-	-
Yagha ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Bougouriba	-	1.55	-	-	-	8.11	-	23.95	-	30.61	-	25.79	-	-
Ioba	-	-	2.05	-	6.25	-	9.86	32.18	11.70	36.85	-	34.32	-	1.66
Noumbiel ^P	-	-	-	-	-	1.49	-	0.27	-	0.49	-	-	-	13.58
Poni ^P	-	-	-	2.48	24.48	34.27	28.37	25.48	28.78	25.14	-	19.42	-	-
Maximum	-	15.76	34.03	11.55	24.48	34.27	42.83	56.74	42.63	60.61	29.55	47.47	28.45	28.00
Moyenne	-	0.39	2.48	1.32	2.78	2.86	11.46	17.38	12.63	19.51	7.50	12.53	4.18	5.03
Ecart-Type	-	2.36	5.62	2.72	5.36	6.92	9.46	14.11	9.96	15.59	7.62	11.71	7.56	6.97

* valeurs non nulles

Tableau 9.7 – Variables d'écart optimales (modèle BCC) des provinces en 2002 et en 2003

En déterminant les indices de productivité de Malmquist des différentes provinces par rapport aux productions scolaires de 2002 et de 2003 (cf. tableau 9.8), on obtient, un indice moyen de mesure de changement d'efficacité technique $E = 1.0912$, un indice moyen de mesure de changement de technologie de production $T = 1.1847$, et un indice moyen de productivité de Malmquist $M = 1.2691$. Ces résultats montrent qu'en moyenne l'ensemble des provinces a obtenu un gain de productivité lié à la fois par un gain en efficacité technique et par un changement positif de technologie de production. Les résultats (cf. tableau 9.8) montrent que :

- 18 provinces ont obtenu des pertes en efficacité technique ($E < 1$) mais avec des changements positifs de technologie ($T > 1$) dont 9 provinces prioritaires ; 5 de ces provinces ont connu une perte de productivité c-à-d. avec des indices de productivité de Malmquist $M < 1$.
- 3 provinces, toutes prioritaires ont connu un changement négatif (perte) de technologie de production c-à-d. avec des indices de mesure de changement de technologie $T < 1$.
- 6 provinces ont connu une perte de productivité dont 5 liées essentiellement aux pertes en efficacité technique et en régression de technologie. L'une des 6 (la dernière, province Yagha), bien qu'elle ait été techniquement efficace pendant ces deux années a connu un changement négatif de productivité en 2003 comparée à celle de 2002.

Provinces	$\Delta^1(w_d^1)$	$\Delta^2(w_d^2)$	$\Delta^1(w_d^2)$	$\Delta^2(w_d^1)$	E_d	T_d	M_d
	2002	2003					
Banwa ^P	0.8054	0.8248	0.9723	0.6747	1.0241	1.1862	1.2149
Kossi ^P	0.7886	0.6660	0.8240	0.6454	0.8446	1.2295	1.0384
Les Bale	0.5907	0.6108	0.8073	0.4863	1.0339	1.2671	1.3101
Mouhoun	0.6244	0.6833	0.8085	0.5006	1.0943	1.2149	1.3294
Nayala	0.6667	0.6837	0.7549	0.5684	1.0254	1.1381	1.1670
Sourou	0.6278	0.6365	0.8197	0.4967	1.0140	1.2758	1.2936
Comoe	0.7453	0.7903	1.0652	0.6189	1.0604	1.2741	1.3510
Leraba ^P	0.4611	0.5931	0.7590	0.3713	1.2863	1.2606	1.6215
Kadiogo	1.0000	1.0000	1.5358	1.0469	1.0000	1.2112	1.2112
Boulgou	0.9274	0.9560	1.1050	0.7507	1.0308	1.1950	1.2318
Koulpelogo ^P	0.6093	0.6527	0.7132	0.5368	1.0712	1.1137	1.1930
Kourittenga	0.7672	0.6372	0.8254	0.5903	0.8306	1.2975	1.0777
Bam	0.8369	0.7698	0.9862	0.6739	0.9199	1.2613	1.1603
Namentenga ^P	0.6426	0.6808	0.8560	0.5670	1.0595	1.1938	1.2648
Sanmatenga ^P	0.9697	0.7118	0.9111	0.9363	0.7340	1.1514	0.8451
Boulkiemde	0.7607	0.7891	0.9843	0.6111	1.0373	1.2461	1.2926
Sanguie	0.7064	0.6557	0.8536	0.5570	0.9282	1.2850	1.1927
Sissili	0.4983	0.5422	0.6762	0.3981	1.0881	1.2495	1.3596
Ziro ^P	0.5371	0.6589	0.8111	0.4167	1.2267	1.2597	1.5453
Bazega	0.6478	0.5681	0.7340	0.5067	0.8770	1.2853	1.1272
Nahouri	0.8163	0.9193	1.0096	0.6663	1.1262	1.1600	1.3063
Zoundweogo	0.7568	0.6019	0.7691	0.5881	0.7953	1.2823	1.0199
Gnagna ^P	0.5564	1.0000	1.4745	0.5900	1.7974	1.1792	2.1194
Gourma ^P	0.7324	0.6196	0.7654	0.5620	0.8459	1.2689	1.0733
Komandjari ^P	0.2949	0.8123	0.6985	0.3679	2.7546	0.8302	2.2869
Kompienga ^P	1.0000	0.8241	0.9908	0.9732	0.8241	1.1115	0.9160
Tapoa ^P	0.6278	0.8563	0.8434	0.6184	1.3640	0.9999	1.3639
Houet	1.0000	1.0000	1.2790	0.8913	1.0000	1.1979	1.1979
Kenedougou	0.6999	0.6232	0.7400	0.6017	0.8904	1.1752	1.0464
Tuy ^P	0.7125	0.6677	0.8422	0.5410	0.9371	1.2889	1.2078
Loroum	0.6858	0.6086	0.8273	0.5651	0.8874	1.2844	1.1398
Passore	0.7340	0.9757	1.0644	0.6045	1.3294	1.1508	1.5299
Yatenga	0.5608	0.6382	0.7748	0.4808	1.1380	1.1900	1.3542
Zondoma	0.6827	0.7194	0.9100	0.5527	1.0538	1.2500	1.3172
Ganzourgou ^P	0.5676	0.7581	0.8504	0.5447	1.3357	1.0812	1.4441
Kourweogo	0.6744	0.9425	1.1673	0.5808	1.3975	1.1993	1.6759
Oubritenga	0.8090	0.6417	0.8290	0.6283	0.7932	1.2897	1.0231
Oudalan ^P	0.4856	1.0000	1.0455	0.4905	2.0592	1.0174	2.0950
Seno ^P	0.5406	0.8439	0.8538	0.4786	1.5609	1.0690	1.6687
Soum ^P	0.8227	0.8102	0.8164	0.7594	0.9848	1.0448	1.0290
Yagha ^P	1.0000	1.0000	1.1056	1.5453	1.0000	0.8459	0.8459
Bougouriba	1.0000	0.9179	0.9430	0.8829	0.9179	1.0787	0.9902
Ioba	0.9171	0.6544	0.7606	0.7444	0.7136	1.1966	0.8539
Noumbiel ^P	0.8710	0.5087	0.6401	0.6785	0.5841	1.2709	0.7423
Poni ^P	0.8351	0.6902	0.9134	0.7060	0.8264	1.2513	1.0340
Minimum	0.2949	0.5087	0.6401	0.3679	0.5841	0.8302	0.7423
Moyenne	0.7244	0.7499	0.9048	0.6355	1.0912	1.1847	1.2691
Ecart-Type	0.1650	0.1442	0.1897	0.2047	0.3725	0.1090	0.3240

1 et 2 indiquent respectivement 2002 et 2003

 $\Delta^1(w_d^1)$ et $\Delta^2(w_d^2)$ représentent les scores d'efficacité technique de l'unité d en 2002 et 2003 respectivement (cf. chapitre 3)

Tableau 9.8 – Indices de productivité de Malmquist des provinces en 2002 et en 2003

L'analyse des inefficacités et sources d'inefficacités (cf. tableau 9.7) des provinces nous permet de déterminer 4 groupes de provinces pour 2002 et 2003 :

► **Groupe 1 : (3 provinces)** ce sont les provinces efficaces d'échelle pour les deux années (cf. tableau 9.6). Ces provinces présentent toutes des rendements d'échelle constants, ce qui caractérise la stabilité de fonctionnement. Parmi ces trois provinces, on retrouve, Kadiogo et Houet les provinces contenant respectivement les deux plus importantes villes du pays. La stabilité de fonctionnement de ces deux provinces peut s'expliquer par le fait qu'elles produisent beaucoup plus que la moyenne de l'ensemble en facteurs outputs en utilisant des facteurs inputs moindres que la moyenne de l'ensemble (cf. tableau A.2, dans l'annexe A). Cette situation est compréhensible puisque dans ces provinces la majorité des écoles est située en zone urbaine et que de plus, on y rencontre une forte présence d'écoles privées qui n'attendent pas l'intervention de l'Etat pour le contrôle des facteurs ressources. La province Yagha, par contre, prioritaire, avec des écoles en majorité rurales, a essentiellement été très compétente pour le rendement de résultats concernant le facteur output 4 (au taux de succès au CEP). Elle a utilisé dans le même temps plus de ressources que la moyenne – ceci est lié à son caractère de province prioritaire. Elle a néanmoins connu une régression de technologie avec $T = 0.8459$. Les provinces du Kadiogo et de Houet ont connu un gain de technologie avec des indices T respectifs de 1.2112 et 1.1979. Les trois provinces de ce groupe n'ont pas connu de changement d'efficacité technique ($E = 1$).

► **Groupe 2 : (6 provinces)** ce sont les provinces efficaces d'échelle pour 2002 mais non efficaces pour 2003 (cf. tableau 9.6). Dans ce groupe on trouve 2 provinces techniquement efficaces (provinces Kompienga et Bougouriba) et 4 provinces efficaces à rendement d'échelle croissant (provinces Boulgou, Sanmatenga, Nahouri et Nounbiel). Cette deuxième situation implique que ces provinces devraient augmenter leur facteurs inputs pour améliorer leurs rendements scolaires. La situation scolaire de l'ensemble de ces 4 provinces montre qu'en dehors de la province de Sanmatenga, leurs facteurs inputs ont diminué (cf. tableau A.2, dans l'annexe A). Ceci peut expliquer leur comportement

inefficace par rapport à la technologie efficace de l'ensemble. On remarque que les problèmes d'inefficacité sont liés au manque de rendements scolaires (taux de scolarisation en général et celui des filles en particulier, taux d'admission, taux de succès au CEP). Dans ce groupe toutes les provinces ont connu une progression de technologie de production (cf. tableau 9.8) c-à-d. avec des indices $T > 1$. Seules les provinces de Boulgou et du Nahouri n'ont pas connu de perte en efficacité technique ($E > 1$) et en productivité avec des indices de Malmquist $M > 1$. Les autres ont des indices $E < 1$ et ont connu une baisse de productivité avec des indices de Malmquist $M < 1$ liée essentiellement aux pertes d'efficacité technique. La synthèse des variables d'écart pour 2003 des provinces de ce groupe 2 est présentée dans le tableau 9.9.

Groupe 2 : Provinces Boulgou ; Sanmatenga ; Nahouri ; Kompienga ; Bougouriba ; Nounbiel

	Inputs			Outputs			
	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Moyenne* 2003	0.26	1.93	3.59	17.85	21.51	14.39	3.30

* moyenne des variables d'écart du groupe

Tableau 9.9 – Moyennes des variables d'écart du Groupe 2 pour 2003

► **Groupe 3 : (4 provinces)** ce sont les provinces efficaces d'échelle pour 2003 mais inefficaces pour 2002. Dans ce groupe on retrouve 2 techniquement efficaces (provinces Gnagna et Oudalan) et deux efficaces à rendement d'échelle décroissant (provinces Bam et Passore). Pour ces deux dernières provinces, il apparaît nécessaire de garder les facteurs inputs moyens (relativement), ce qui signifie soit augmenter la participation à la scolarisation (le nombre d'élèves) soit diminuer le nombre de salles de classe ou manuels et réaffecter dans d'autres provinces (ce qui est difficilement concevable en pratique). On remarque que les inefficacités sont fortement liées à l'inefficacité de production (faibles outputs) (cf. tableau 9.7). En effet, l'ensemble des provinces de ce groupe pourraient augmenter, en moyenne, leurs productions scolaires (facteurs outputs) de 10.56% le taux de scolarisation total et de 12.88% celui des filles, de 7.27% le taux d'admission et de 11.25% le taux de succès au CEP. Dans ce groupe, toutes les provinces (Bam, Gnagna, Passore et Oudalan) ont connu un changement positif de technologie de production avec des indices $T > 1$ et de gain de productivité avec des indices de Malmquist $M > 1$. Seule

la province Bam a connu une baisse en efficacité technique ($E < 1$) (cf. tableau 9.8) bien qu'elle soit efficace d'échelle pour la deuxième année (cf. tableau 9.6). On peut interpréter ces résultats relatifs à la province de Bam par le fait que comparer aux ressources de 2002, celles de 2003 devraient permettre de produire davantage. Ceci peut être expliqué par une hausse des facteurs inputs de cette province relativement à l'ensemble des provinces. La synthèse des variables d'écart de 2002 des provinces du groupe 3 est présentée dans le tableau 9.10.

Groupe 3 : Provinces Bam ; Gnagna ; Passore ; Oudalan

	Inputs			Outputs			
	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Moyenne* 2002	0	1.25	1.69	10.56	12.88	7.27	11.25

* moyenne des variables d'écart du groupe

Tableau 9.10 – Moyennes des variables d'écart du Groupe 3 pour 2002

► **Groupe 4 :(32 provinces)** les autres provinces qui ne sont efficaces pour aucune des deux années. Pour améliorer la productivité de ces provinces il faut tenir compte des sources d'inefficacité (cf. tableau 9.7) et la frontière efficace de production.

Les variables d'écart des différents facteurs par province et par année sont résumées dans le tableau 9.7 pour 2002 et 2003.

9.2.3 Conclusion et commentaires

Cette application fait ressortir les facteurs qui causent l'inefficacité du système de l'enseignement de base. D'une part, les efficacités de performance au niveau régional semblent être liées aux facteurs tels que la situation socio-économique, politique, administrative de la région. Pour les deux années considérées seules les deux régions contenant les deux plus grandes villes sont techniquement efficaces. D'autre part, au niveau provincial, la situation de ces deux années est telle que les inefficacités semblent être liées à certains facteurs socio-économiques, socio-culturels, financiers. On remarque que l'inefficacité est fortement représentée par la faible demande scolaire, la faible admission

au primaire et le faible taux de succès au CEP. Par contre, il n'y a pas d'écart significatif entre la répartition optimale des facteurs inputs et les quantités observées au niveau des provinces inefficaces. Le système, vu tout à travers les directions régionales que celles provinciales, a connu en moyenne un gain de productivité en 2003 comparée à 2002.

9.3 Etude de cas 2 : mesures des efficacités de performance et de changements de performance des directions provinciales en 2004 et 2005

9.3.1 Modèles, variables et données

Dans cette étude de cas ⁷, nous avons utilisé deux modèles DEA (cf. chapitre 2), le modèle CCR pour mesurer les efficacités techniques et les indices de Malmquist (cf. chapitre 3) et le modèle BCC pour mesurer les efficacités d'échelle et les rendements d'échelle variables (cf. chapitre 3). Ces mesures de performances sont appliquées aux 45 Directions Provinciales de l'Enseignement de Base (DPEBA) du Burkina Faso pour deux années (2004 et 2005). Les données ⁸ relatives aux élèves, enseignants, écoles concernant les directions provinciales utilisées dans cette étude nous ont été fournies par le Ministère de l'Education de Base et de l'Alphabétisation (MEBA) du Burkina Faso à travers la Direction des Etudes et de Planification (DEP/MEBA). Les informations relatives au succès à l'examen de fin du cycle primaire, le Certificat d'Etudes primaires (CEP), proviennent de la Direction des Examens et Concours du même ministère (DEC/MEBA).

Pour mesurer les performances scolaires, 4 types de facteurs inputs relatifs aux ressources utilisées pour l'enseignement primaire sont considérés :

► les ressources humaines représentées par les enseignants en tenant compte de leur expérience. Pour tenir compte de cette expérience, les différentes classes d'instituteurs ⁹

⁷Les résultats de cette étude est soumise pour publication [121]

⁸Les données proviennent des annuaires statistiques du ministère de l'enseignement de base et de l'alphabétisation (MEBA).

⁹Le corps des enseignants du primaire est constitué des classes suivantes : les Instituteurs Adjoints (IA), les Instituteurs Adjoints Certifiés (IAC), Instituteurs Certifiés (IC) et les Instituteurs Principaux (IP) et les autres volontaires et/ou sans formation pédagogique spécifique avant l'engagement. Les considérés certifiés sont : IAC, IC et IP

sont prises en compte. L'évolution d'une classe à une classe supérieure tient compte de l'ancienneté et/ou du niveau de formation.

- les ressources physiques des écoles représentées par les salles de classe ;
- les ressources relatives à la gestion et à la direction des écoles représentées par les inspecteurs et directeurs d'école. En effet, dans nos modèles nous considérons les Instituteurs Certifiés (IC) et les Instituteurs Principaux (IP) pour représenter les directeurs. De façon hiérarchique (MEBA) la direction des écoles est confiée à un IP et par défaut à un IC. Cette situation n'exclut pas la direction d'une école par un instituteur de rang inférieur. Les inspecteurs sont représentés par les inspections. Chaque inspection a au maximum 2 représentants inspecteur et/ou conseiller pédagogique. Ce nombre est quasi constant dans toutes les inspections. L'inspection est généralement composée d'un inspecteur qui est chef de la circonscription et d'un conseiller pédagogique itinérant. Le premier a un rôle de superviseur des activités de la Circonscription de l'Education de Base (CEB). Le second, le conseiller pédagogique, a un rôle très actif de contrôle, de suivi et de coordination des activités pédagogiques dans la CEB (enseignements, enseignants, écoles).

Ainsi, nous définissons les variables inputs :

- X_1 le ratio classes-élèves, c'est le rapport (nombre de classes/nombre des élèves)*1000. Cette variable est un indicateur qui mesure la capacité d'accueil au primaire.
- X_2 le ratio instituteurs certifiés-classes, c'est le rapport (nombre d'instituteurs certifiés /nombre de classes)*10. Cette variable mesure la capacité d'encadrement des classes (élèves d'une classe) par des enseignants certifiés ce qui suppose une qualité d'encadrement. En effet, les enseignants certifiés ont une formation donnée par des Ecoles Nationales d'Enseignants du Primaire (ENEP). C'est donc un indicateur de qualité de l'enseignement primaire.
- X_3 le ratio instituteurs IC ou IP - écoles, c'est le rapport (nombre d'instituteurs IC ou IP /nombre d'écoles)*10. Cette variable permet de mesurer la qualité de la gestion des écoles. Puisque la direction des écoles est confiée à un instituteur de classe IP qui est formé à cet effet et à défaut, à un instituteur de classe IC, cette variable permet de mesu-

rer la performance du point de vue gestion des écoles dans les directions provinciales.

► X_4 le ratio inspections-écoles, c'est le rapport (nombre d'inspections / nombre d'écoles) * 1000. Cette variable mesure la capacité de contrôle de la gestion et de l'enseignement dans les écoles. En effet, pour le cas du MEBA, les Circonscriptions de l'Education de Base (CEB), sont chargées de superviser, de contrôler et de coordonner les enseignements et les enseignants dans les écoles de leur circonscription et de la gestion de ces écoles.

En ce qui concerne les objectifs ou rendements scolaires à maximiser, 4 facteurs outputs sont considérés :

- les taux de scolarisation au primaire : nous définissons la variable output Y_1 , l'indicateur de performance **TBS** de la province.
- les taux d'admission au primaire : nous définissons la variable output Y_2 , l'indicateur de performance **TBA** de la province.
- l'indice de parité du sexe : nous définissons la variable output Y_3 , l'indice de parité des sexes. C'est le rapport (**TBS** des filles/**TBS** des garçons)*100. Cette variable mesure l'égalité des sexes à la scolarisation. C'est donc un indicateur d'équité des sexes à la scolarisation dans une province donnée, c'est l'indice de parité sexe ¹⁰.
- les taux de succès au CEP : nous définissons la variable output Y_4 , l'indicateur de performance **CEP** de la province.

Dans ce modèle nous cherchons à mesurer les efficacités de production (performances) toujours en tenant compte du facteur ressource (enseignants), et aussi des facteurs qui peuvent caractériser la qualité de l'enseignement comme les niveaux de formation et l'expérience des enseignants, le critère de contrôle des enseignements et la direction des écoles. Tous ces facteurs mettent l'accent sur la qualité de l'enseignement. Dans l'étude de cas 1, l'analyse a montré que les ratios enseignants-élèves étaient "efficacement" répartis aussi bien au niveau régional que provincial. Nous départageons ici

¹⁰L'indice de parité sexe est généralement défini – définition adoptée par les gouvernements, l'UNESCO – par le rapport TBS filles/TBS garçons

ce critère en deux critères de qualités, respectivement pour les instituteurs certifiés et les instituteurs IC ou IP, afin d'analyser les efficacités de performance, les changements de ces performances, des différentes provinces. Nous avons considéré ici le ratio salles de classe-élèves à la place du ratio enseignants-élèves du premier modèle. Ce choix est justifié par le fait que nous ne considérons pas tous les enseignants mais seulement ceux certifiés. Nous avons considéré aussi le ratio enseignants certifiés-salles de classe, ce qui nous permet de prendre en compte dans l'analyse des performances les affectations des enseignants certifiés pour occuper les classes. Nous avons choisi de mesurer ici l'indice de parité sexe par TBS fille/TBS garçon et non TBS filles simplement et d'analyser les performances des directions, à accueillir globalement au primaire et spécifiquement en première année du primaire, la prise en compte du genre et le succès au CEP, à partir des ressources salles de classe, enseignants formés ou certifiés disponibles relativement aux effectifs élèves, en y ajoutant le critère de gestion des écoles et celui du contrôle des enseignements par les inspections. Nous n'avons pas pris en compte ici le facteur relatif aux manuels des élèves parce que nous supposons qu'avec le PDDEB et le suivi du respect du cahier des charges des établissements, le nombre de manuels scolaires ne devraient pas être un handicap pour les enseignements. En effet, en respectant le cahier des charges, les établissements doivent avoir un minimum de manuels disponibles en fonction des effectifs des élèves. Pour l'étude de cas 1, nous avons considéré ce facteur avec l'hypothèse que le ministère pouvait accorder un délai pour que les établissements remplissent les conditions de disponibilité des manuels ¹¹. Pour l'étude de cas 1, nous avons analysé les efficacités de performance à partir des ressources brutes : les enseignants sans tenir compte du niveau ni de l'expérience, les manuels sans tenir compte du statut de la province (rurale, semi-urbaine ou urbaine). Cette deuxième étude de cas, nous permet d'ajouter le critère qualité de l'enseignement au niveau de la sélection des facteurs inputs.

La synthèse des valeurs minimales, maximales, moyennes, écart type, des différents

¹¹Nous soulignons que ces considérations sont personnelles et ne peuvent donc pas traduire les avis d'expert dans ce domaine

facteurs (inputs-outputs) de mesure de performance considérés est donnée dans le tableau 9.11. Les moyennes des facteurs inputs ont augmenté en 2005 par rapport à 2004 excepté le facteur input 1, correspondant au ratio salles de classe-élèves. Ceci peut s'expliquer par le fait que :

- la demande de scolarisation a relativement augmenté plus que l'offre traduite par les salles de classe ;
- la politique menée par le gouvernement a pris en compte le recrutement et la formation d'instituteurs certifiés relativement aux salles de classes disponibles ;
- la promotion des instituteurs certifiés en IC ou IP a été importante relativement à la disponibilité des écoles ;
- la politique de décentralisation mise en place par le Gouvernement Burkinabé a permis une augmentation importante du nombre d'inspections relativement aux écoles disponibles . Pendant la même période, on est passé de 211 circonscriptions de d'éducation de base à 265 soit une augmentation du nombre de 25.56%.

Pour ce qui concerne les facteurs outputs on remarque que les moyennes ont augmenté excepté celles relatives aux examens CEP.

Les détails concernant les données scolaires par province sont donnés dans l'annexe B (cf. tableau B.1).

	X_1	X_2	X_3	X_4	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Maximum								
2004	46.04	13.28	37.36	55.56	92.55	98.99	96.25	88.74
2005	44.11	11.76	36.00	58.14	94.23	118.17	96.47	82.91
Minimum								
2004	15.09	3.54	0.47	21.05	21.55	27.82	54.38	44.85
2005	14.75	5.74	0.48	19.05	26.13	39.32	60.62	47.23
Moyenne								
2004	21.38	8.90	11.48	34.45	47.28	63.25	77.53	72.04
2005	20.85	9.62	13.13	39.61	52.98	67.90	80.50	67.43
Ecart-Type								
2004	4.52	1.80	7.79	8.64	12.71	13.61	9.34	7.48
2005	4.39	1.36	8.18	9.86	12.90	16.80	8.58	7.61

Tableau 9.11 – Synthèse des données scolaires des provinces en 2004 et en 2005

9.3.2 Résultats et analyses des efficacités de performance des provinces en 2004 et 2005

Pour cette étude de cas, nous analyserons les efficacités de performance en distinguant les efficacités techniques et les efficacités d'échelle. Nous donnerons les résultats et analyses relatifs aux efficacités de performance, aux changements d'efficacité technique, de technologie et de productivité.

9.3.2.1 Résultats et analyses des efficacités techniques des provinces en 2004 et en 2005

Le modèle de Charnes, Cooper et Rhodes (CCR) à orientation input est utilisé pour la mesure des efficacités techniques des 45 provinces. La synthèse des résultats est fournie dans le tableau 9.12.

- le score moyen des efficacités techniques a été respectivement de 0.9406 et 0.9242 en 2004 et 2005 pour l'ensemble des provinces.
- le nombre de provinces techniquement efficaces a été de 20 (44.44%) et de 16 (35.56%) respectivement en 2004 et 2005.

Ces résultats montrent qu'il serait nécessaire pour améliorer la performance de l'ensemble de diminuer les facteurs inputs de 5.94% et 7.58% respectivement pour les deux années. Dans les modèles de cette étude, cette diminution des facteurs inputs est caractérisée par des diminutions des ratios classes-élèves, enseignants certifiés-classes, enseignants de classe IC ou IP-élèves, inspections-écoles.

Les détails des scores d'efficacité par province et par année sont présentés dans le tableau 9.13.

Score d'efficacité	2004	2005
Minimum	0.7788	0.7642
Moyenne	0.9406	0.9242
Ecart-Type	0.0712	0.0796
Score d'efficacité	nombre	d'unités
	2004 (%)	2005 (%)
$score = 100\%$	20 (44.44%)	16 (35.56%)
$95\% \leq score < 100\%$	5 (11.11%)	5 (11.11%)
$85\% \leq score < 95\%$	14 (31.11%)	15 (33.33%)
$score < 85\%$	6 (13.33%)	9 (20%)
Total	45 (100%)	45 (100%)

Tableau 9.12 – Synthèse des scores d'efficacité technique (modèle CCR) des provinces en 2004 et en 2005

Les variables d'écart sont résumées dans le tableau 9.14. L'analyse des moyennes des écarts entre les quantités observées et les valeurs optimales (sur la frontière efficace), des facteurs inputs, montre qu'en moyenne, il n'y a pas un écart significatif entre les ressources (les quantités inputs observées) des provinces inefficaces et les valeurs optimales sur la frontière efficace de production. On retrouve en 2004 par exemple, seulement un écart en moyenne de 0.03 pour le facteur input 1, ce qui signifie un écart en moyenne de 0.03 salles de classe pour 1000 élèves ; il y a un écart moyen de 0.11 du facteur input 2, ce qui correspond à un écart de 0.11 enseignants certifiés pour 10 salles de classe. L'écart moyen du facteur input 3 vaut 0.04 pour la même année, ce qui signifie un écart de 0.04 enseignant de classe IC ou IP pour 10 écoles et l'écart moyen de l'input 4 montre un surplus de 1.80 inspection pour 1000 écoles. En ce qui concerne, les facteurs outputs le modèle montre que les inefficacités des provinces sont fortement liées aux inefficacités de rendement (de production scolaire). Les résultats montrent que les provinces techniquement inefficaces en 2004 par exemple devraient améliorer leurs rendements éducatifs en augmentant en moyenne de 2.61% Y_1 (taux de scolarisation), de 1.98% Y_2 (taux d'admission), de 1.58 Y_3 (indice de parité du sexe) et de 0.14% Y_4 (taux de succès au CEP) pour adopter la meilleure technologie de production.

Province	Score 2004	CCR 2005	Score 2004	BCC 2005	rend. 2004	d'échelle 2005
Banwa ^P	0.9396	0.9189	0.9921	0.9666	croissants	croissants
Kossi ^P	1.0000	0.9639	1.0000	0.9638	constants	croissants
Les Bale	0.8878	0.8307	0.9127	0.8761	croissants	croissants
Mouhoun	1.0000	0.9636	1.0000	1.0000	constants	décroissants
Nayala	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Sourou	0.9265	0.8962	0.9882	0.9400	croissants	croissants
Comoe	0.9767	0.8721	0.9805	0.9366	croissants	croissants
Leraba ^P	0.7894	0.7711	0.8753	0.8572	croissants	croissants
Kadiogo	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Boulgou	1.0000	0.9879	1.0000	1.0000	constants	croissants
Koulpelogo ^P	0.8800	0.8041	0.9368	0.8536	croissants	croissants
Kourittenga	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Bam	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Namentenga ^P	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Sanmatenga ^P	0.9200	0.8794	1.0000	1.0000	croissants	croissants
Boulkiemde	0.9412	0.8685	0.9476	0.9380	croissants	croissants
Sanguie	0.9203	0.9165	0.9204	0.9166	croissants	décroissants
Sissili	0.8359	0.8189	0.8361	0.8199	croissants	décroissants
Ziro ^P	0.7788	0.7782	0.8022	0.8406	croissants	croissants
Bazega	0.8637	0.8850	0.8972	0.9385	croissants	croissants
Nahouri	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Zoundweogo	0.8780	0.9392	0.8820	0.9481	décroissants	décroissants
Gnagna ^P	1.0000	0.9238	1.0000	0.9871	constants	croissants
Gourma ^P	1.0000	0.9413	1.0000	0.9440	constants	décroissants
Komandjari ^P	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Kompienga ^P	1.0000	0.8717	1.0000	0.8724	constants	croissants
Tapoa ^P	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Houet	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Kenedougou	0.7835	0.8133	0.8704	0.8967	croissants	croissants
Tuy ^P	0.8667	0.7738	0.9455	0.8954	croissants	croissants
Loroum	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Passore	0.9393	0.9743	0.9535	1.0000	croissants	croissants
Yatenga	0.9009	0.9048	0.9093	0.9384	croissants	croissants
Zondoma	0.8647	0.9114	0.8683	0.9947	croissants	croissants
Ganzourgou ^P	0.9918	0.9486	1.0000	1.0000	décroissants	décroissants
Kourweogo	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Oubritenga	0.8577	0.7642	0.8648	0.8215	croissants	croissants
Oudalan ^P	0.9652	1.0000	1.0000	1.0000	décroissants	constants
Seno ^P	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Soum ^P	0.9839	1.0000	0.9945	1.0000	croissants	constants
Yagha ^P	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Bougouriba	0.8246	0.8129	0.8534	0.8483	croissants	croissants
Ioba	0.8400	0.8529	0.8401	0.8618	croissants	croissants
Noumbiel ^P	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	constants	constants
Poni ^P	0.9689	0.9999	1.0000	1.0000	décroissants	décroissants
Minimum	0.7788	0.7642	0.8022	0.8199		
Moyenne	0.9406	0.9242	0.9571	0.9524		
Ecart-Type	0.0712	0.0796	0.0598	0.0601		

Tableau 9.13 – Les scores des efficacités technique (modèle CCR) et d'échelle (modèle BCC) des provinces en 2004 et en 2005

Les détails des résultats des variables d'écart sont présentés dans le tableau 9.15. L'analyse de ces résultats montrent que la plupart des provinces inefficaces ne présentent pas des écarts moyens significatifs des facteurs inputs avec la frontière efficace de production. L'analyse montre que beaucoup de provinces ne présentent aucun écart entre les quantités optimales des variables input 1 et 3. Seulement 2 et 1 provinces présentent un écart respectivement en 2004 et en 2005 pour le facteur input 1, et une province présente un écart pour le facteur input 3 en 2004, même résultat pour ce facteur en 2005.

Variable	Maximum		Moyenne		Ecart-Type	
	2004	2005	2004	2005	2004	2005
Inputs						
X ₁	0.60	0.93	0.03	0.02	0.12	0.14
X ₂	1.96	1.95	0.11	0.25	0.40	0.50
X ₃	1.84	3.38	0.04	0.08	0.27	0.50
X ₄	22.59	16.80	1.80	2.97	4.24	5.08
Outputs						
Y ₁	11.07	17.60	2.61	1.57	3.67	3.51
Y ₂	27.53	28.03	1.98	4.58	5.23	6.37
Y ₃	13.96	8.89	1.58	0.28	3.75	1.37
Y ₄	4.47	9.02	0.14	1.45	0.69	2.59

Tableau 9.14 – Synthèse des variables d'écart (modèle CCR) des provinces en 2004 et en 2005

9.3.2.2 Résultats et analyses des efficacités d'échelle des provinces en 2004 et en 2005

Le modèle de Banker, Charnes et Cooper (BCC) a été utilisé pour mesurer les efficacités d'échelle des provinces. La synthèse des résultats (cf. tableau 9.16) indique respectivement pour 2004 et 2005 :

- un score moyen des efficacités d'échelle de 0.9571 et 0.9524. Ce qui signifie qu'il serait nécessaire de faire des réductions des facteurs inputs de 4.29% et 4.76% pour améliorer les performances observées, en tenant compte des rendements d'échelle variables .
- 24 et 22 provinces efficaces en tenant compte des rendements d'échelle variables soit 53.33% et 48.89% de l'ensemble (cf. tableau 9.13).
- 4 et 7 provinces présentent des rendements d'échelle décroissants (cf. tableau 9.13)).
- 21 et 22 provinces présentent des rendements d'échelle croissants (cf. tableau 9.13).

Pour les provinces à rendements d'échelle décroissants, une politique à court terme doit chercher à réduire les facteurs inputs pour améliorer le rendement scolaire c-à-d. réduire les ratios classes-élèves, enseignants certifiés-classes, enseignants de classe IC ou IP-école, inspection-écoles dans ces provinces. Pour les provinces à rendement d'échelle croissant, une politique à court terme pour l'amélioration des performances scolaires doit chercher à augmenter les facteurs inputs c-à-d. augmenter les ratios classes-élèves, enseignants certifiés-classes, enseignants de classe IC ou IP-écoles, inspections-écoles. La diminution d'un ratio peut se faire de deux manières soit diminuer le numérateur

Provinces	X_1^*		X_2^*		X_3^*		X_4^*		Y_1^*		Y_2^*		Y_3^*		Y_4^*	
	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005
Banwa ^P	-	-	-	0.25	-	-	-	-	2.55	-	-	4.50	13.96	-	-	-
Kossi ^P	-	-	-	1.46	-	-	-	2.18	-	-	-	10.75	-	-	-	5.04
Les Bale	-	-	-	-	-	-	6.43	6.03	4.34	17.60	-	28.03	-	-	-	3.76
Mouhoun	-	-	-	0.96	-	-	-	-	-	-	-	4.64	-	-	-	-
Nayala	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Sourou	-	-	-	1.44	-	-	-	-	7.78	-	-	9.61	-	-	-	-
Comoe	-	-	-	-	-	-	12.32	5.67	-	2.67	5.23	1.61	12.52	-	-	-
Leraba ^P	-	-	-	-	-	-	8.38	0.08	8.49	-	2.51	14.52	-	-	-	6.54
Kadiogo	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Boulgou	-	-	-	-	-	-	-	1.34	-	6.14	-	15.61	-	-	-	3.25
Koulpelogo ^P	-	-	-	-	-	-	-	13.61	0.07	-	-	5.61	-	-	-	0.96
Kourittenga	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Bam	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Namentenga ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Sanmatenga ^P	-	-	0.02	0.34	-	-	2.17	-	-	0.26	2.87	-	2.90	-	-	-
Boulkiemde	-	-	-	-	-	-	8.39	16.80	1.51	-	14.43	-	-	1.06	-	-
Sanguie	-	-	-	-	1.84	-	5.69	14.21	-	3.36	-	-	2.60	-	4.47	6.80
Sissili	-	-	-	-	-	-	-	8.17	7.92	6.13	-	7.21	-	-	-	4.15
Ziro ^P	-	-	-	0.83	-	-	-	-	8.16	8.61	-	8.32	-	-	-	-
Bazega	-	-	-	1.95	-	-	-	-	10.13	10.32	-	9.09	2.10	-	-	7.00
Nahouri	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Zoundweogo	-	-	-	-	-	-	-	5.29	6.84	5.19	-	6.83	11.38	-	1.31	9.02
Gnagna ^P	-	-	-	0.29	-	-	-	0.37	-	2.01	-	0.63	-	-	-	2.13
Gourma ^P	-	-	-	1.38	-	-	-	5.89	-	-	-	6.56	-	-	-	4.27
Komandjari ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Kompienga ^P	-	-	-	-	-	-	-	16.36	-	-	-	19.07	-	-	-	-
Tapoa ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Houet	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Kenedougou	-	-	1.96	-	-	-	-	5.79	4.18	0.31	-	-	-	-	-	-
Tuy ^P	-	-	1.82	-	-	-	5.44	13.16	7.94	5.57	2.33	7.39	0.48	-	-	-
Loroum	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Passore	-	-	0.40	1.29	-	-	-	-	-	-	8.83	2.96	5.50	-	-	-
Yatenga	0.56	0.93	-	0.14	-	-	-	-	-	-	15.45	15.67	-	0.44	-	-
Zondoma	-	-	-	-	-	-	-	11.41	5.45	-	27.53	1.30	-	2.42	-	0.66
Ganzourgou ^P	0.60	-	-	0.37	-	3.38	1.49	-	9.28	-	0.56	0.78	-	8.89	-	-
Kourweogo	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Oubritenga	-	-	-	-	-	-	2.13	0.10	2.70	2.70	-	-	-	-	-	-
Oudalan ^P	-	-	0.53	-	-	-	22.59	-	9.14	-	-	-	11.71	-	0.48	-
Seno ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Soum ^P	-	-	-	-	-	-	1.97	-	6.04	-	-	-	-	-	-	-
Yagha ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Bougouriba	-	-	-	0.19	-	-	4.02	-	-	-	-	10.52	7.87	-	-	-
Ioba	-	-	-	0.56	-	-	-	-	11.07	-	6.18	10.15	-	-	-	8.15
Noumbiel ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Poni ^P	-	-	-	-	-	-	-	7.29	3.64	-	3.32	4.70	-	-	-	3.47
Maximum	0.60	0.93	1.96	1.95	1.84	3.38	22.59	16.80	11.07	17.60	27.53	28.03	13.96	8.89	4.47	9.02
Moyenne	0.03	0.02	0.11	0.25	0.04	0.08	1.80	2.97	2.61	1.57	1.98	4.58	1.58	0.28	0.14	1.45
Ecart-Type	0.12	0.14	0.40	0.50	0.27	0.50	4.24	5.08	3.67	3.51	5.23	6.37	3.75	1.37	0.69	2.59

* Valeurs non nulles

Tableau 9.15 – Variables d'écart des facteurs inputs et outputs (modèle CCR) des provinces en 2004 et en 2005

soit augmenter le dénominateur. Par exemple pour le cas d'une province à rendements d'échelle décroissants où il est souhaitable de réduire les facteurs inputs, réduire X_1 peut se faire en redistribuant les enseignants certifiés supplémentaires aux provinces en manque, comme celles à rendements d'échelle croissants.

Les différents résultats des scores d'efficacité d'échelle sont présentés dans le tableau 9.13.

La synthèse des variables d'écart par le modèle de BCC est présentée dans le tableau 9.17.

Score d'efficacité	2004	2005
Minimum	0.8022	0.8199
Moyenne	0.9571	0.9524
Ecart-Type	0.0598	0.0601
score d'efficacité	nombre	
	2004 (%)	2005 (%)
$score = 100\%$	24 (53.33%)	22 (48.89%)
$95\% \leq score < 100\%$	5 (11.11%)	4 (8.89%)
$85\% \leq score < 95\%$	13 (28.89%)	15 (33.33%)
$score < 85\%$	3 (6.67%)	4 (8.89%)
Total	45 (100%)	45 (100%)

Tableau 9.16 – Synthèse des inefficacités d'échelle (modèle BCC) des provinces en 2004 et en 2005

Variable	Maximum		Moyenne		Ecart-Type	
	2004	2005	2004	2005	2004	2005
Inputs						
X_1	-	-	-	-	-	-
X_2	1.55	1.93	0.10	0.18	0.33	0.45
X_3	5.32	5.75	0.22	0.13	0.90	0.86
X_4	10.00	19.03	0.60	3.01	1.96	5.37
Outputs						
Y_1	20.47	13.56	3.24	1.66	5.23	3.42
Y_2	31.56	19.05	3.53	4.02	6.71	6.06
Y_3	17.16	14.91	2.09	2.03	4.36	3.57
Y_4	13.77	24.94	0.84	3.62	2.42	5.42

Tableau 9.17 – Synthèse des variables d'écart (modèle BCC) des provinces en 2004 et en 2005

Au regard des résultats (cf. tableau 9.17), la variable X_1 ne se présente comme une source d'inefficacité d'échelle pour aucune des provinces. Ce qui signifie que la politique de répartition de ce facteur input (rapport salles de classe-élèves) est efficace. De même qu'avec le premier modèle (CCR), on constate qu'il n'y a pas un écart significatif entre les quantités inputs observées des unités inefficaces et les quantités optimales sur la frontière efficace de production. On retrouve par exemple en 2004 seulement un surplus en moyenne de 0.10 enseignants certifiés pour 10 salles de classe, de 0.22 enseignants pour 10 salles de classe et de 0.60 inspection pour 1000 écoles.

Tout comme le modèle CCR, le modèle BCC montre que les inefficacités des provinces sont fortement liées aux inefficacités de rendement scolaire. Les provinces inefficaces en 2004 par exemple peuvent améliorer leur rendement éducatif en augmentant en moyenne de 3.24% Y_1 (taux de scolarisation), de 3.53% Y_2 (taux d'admission), de 2.09 Y_3 (indice de parité du sexe) et de 0.84% Y_4 (taux de succès au CEP) pour être sur la frontière effi-

cace de production.

Les détails des résultats des variables d'écart des différents facteurs inputs et outputs pour les deux années, sont présentés dans le tableau 9.18. Aucune province ne présente un écart entre les valeurs optimales sur la frontière efficace de production et les valeurs observées de la variable X_1 , aussi bien en 2004 qu'en 2005. Ceci signifie que les inefficacités ne sont pas liées à ce facteur. Autrement dit, pour améliorer les efficacités des provinces inefficaces, il est nécessaire de garder stable ce facteur et de contrôler les autres facteurs soit en diminuant pour le cas des provinces à rendements d'échelle décroissants soit en les augmentant pour le cas des provinces à rendements d'échelle croissants.

Provinces	X_1^*		X_2^*		X_3^*		X_4^*		Y_1^*		Y_2^*		Y_3^*		Y_4^*	
	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005
Banwa ^P	-	-	0.06	0.17	-	-	-	-	8.05	3.97	-	12.29	17.16	4.06	-	-
Kossi ^P	-	-	-	0.98	-	-	-	0.72	-	-	-	6.61	-	-	-	9.79
Les Bale	-	-	-	-	0.77	-	-	7.05	9.70	11.72	6.06	16.43	10.02	2.52	-	6.00
Mouhoun	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Nayala	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Sourou	-	-	-	1.28	-	-	-	-	15.77	2.39	8.06	13.77	5.92	-	0.96	2.15
Comoe	-	-	-	-	-	-	10.00	5.83	-	3.75	7.38	-	13.81	5.43	-	3.49
Leraba ^P	-	-	-	-	0.59	-	3.46	1.16	-	-	5.54	10.69	2.54	8.74	13.77	24.94
Kadiogo	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Boulgou	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Koulpelogo ^P	-	-	0.89	-	-	-	-	14.49	6.09	2.43	3.62	8.83	-	4.88	0.85	5.27
Kourittenga	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Bam	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Namentenga ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Sanmatenga ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Boulkiemde	-	-	-	-	0.22	-	6.72	19.03	1.20	-	16.90	-	-	7.27	-	6.00
Sanguie	-	-	-	-	2.93	-	5.14	14.20	-	3.46	-	0.22	2.59	-	3.63	6.58
Sissili	-	-	-	-	-	-	-	7.92	8.08	7.56	-	10.15	-	-	-	1.27
Ziro ^P	-	-	-	1.21	-	5.75	-	-	12.82	-	0.36	-	2.26	4.54	4.47	10.32
Bazega	-	-	-	1.93	-	-	-	-	20.47	11.43	3.67	10.48	10.75	4.74	-	12.00
Nahouri	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Zoundweogo	-	-	-	-	-	-	-	0.54	7.25	7.43	-	12.39	11.85	-	0.40	1.33
Gnagna ^P	-	-	-	0.52	-	-	-	11.35	-	3.33	-	-	-	0.99	-	10.40
Gourma ^P	-	-	-	1.35	-	-	-	3.55	-	0.55	-	8.21	-	-	-	1.61
Komandjari ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Kompienga ^P	-	-	-	-	-	-	-	16.41	-	-	-	19.05	-	-	-	0.34
Tapoa ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Houet	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Kenedougou	-	-	1.55	-	-	-	-	8.68	7.81	-	11.51	-	-	4.65	6.00	13.46
Tuy ^P	-	-	1.21	-	-	-	-	10.33	11.92	13.56	15.31	14.76	6.43	14.91	3.97	5.32
Loroum	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Passore	-	-	0.02	-	-	-	-	-	-	-	15.06	-	0.78	-	-	-
Yatenga	-	-	-	0.02	-	-	-	-	0.99	-	18.02	12.77	-	10.44	3.54	1.82
Zondoma	-	-	0.06	-	-	-	-	12.66	9.10	-	31.56	-	-	10.84	-	7.58
Ganzourgou ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Kourweogo	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Oubritenga	-	-	-	-	5.32	-	0.45	1.58	2.70	3.22	-	-	-	4.12	-	11.00
Oudalan ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Seno ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Soum ^P	-	-	0.82	-	-	-	1.13	-	10.15	-	-	-	-	-	-	-
Yagha ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Bougouriba	-	-	-	-	-	-	-	-	2.60	-	9.48	8.69	9.79	3.13	-	10.52
Ioba	-	-	-	0.55	-	-	-	-	11.14	-	6.25	15.63	-	-	-	11.67
Noumbiel ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Poni ^P	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Maximum	-	-	1.55	1.93	5.32	5.75	10.00	19.03	20.47	13.56	31.56	19.05	17.16	14.91	13.77	24.94
Moyenne	-	-	0.10	0.18	0.22	0.13	0.60	3.01	3.24	1.66	3.53	4.02	2.09	2.03	0.84	3.62
Ecart-Type	-	-	0.33	0.45	0.90	0.86	1.96	5.37	5.23	3.42	6.71	6.06	4.36	3.57	2.42	5.42

* Valeurs non nulles

Tableau 9.18 – Variables d'écart des facteurs inputs et outputs (modèle BCC) des provinces en 2004 et en 2005

9.3.2.3 Indices de productivité de Malmquist des provinces en 2004 et en 2005

Comparés aux productions (rendements scolaires) et aux moyens utilisés en 2004 et en 2005, les résultats (tableau 9.19) montrent que :

- l'indice moyen de mesure de changement d'efficacité technique $E = 0.9828$; ce qui signifie qu'en moyenne l'ensemble des provinces a connu une perte d'efficacité technique en 2005 comparée à 2004 ;
- l'indice moyen de mesure de changement de technologie de production est $T = 0.9853$; ce qui signifie qu'en moyenne l'ensemble des provinces a connu une perte de technologie de production en 2005 comparée à 2004 ;
- la moyenne de l'indice de productivité de Malmquist est $M = 0.9710$ ce qui signifie également que le système a connu un changement négatif de productivité en 2005 comparée à 2004.

Comparée à la productivité de 2004, le système dans son ensemble a connu beaucoup de changements négatifs :

- 29 provinces ont connu une perte en efficacité technique soit 64.44% de l'ensemble ;
- 21 provinces ont connu une perte de technologie de production soit 46.67% de l'ensemble ;
- et 29 provinces soit 64.44% ont connu une perte de productivité.

Ces analyses montrent qu'en mesurant les efficacités de production des provinces avec pour facteurs de production les facteurs inputs considérés et les objectifs résultant des facteurs outputs considérés dans ce modèle, le système dans son ensemble, a perdu en productivité environ 3%. Cette situation de régression en productivité signifie que le système devrait produire plus en 2005, si les performances de productivité de 2004 étaient maintenues.

Provinces	$\Delta^1(w^1)$ 2004	$\Delta^2(w^2)$ 2005	$\Delta^1(w^2)$	$\Delta^2(w^1)$	E	T	M
Banwa ^P	0.9392	0.9189	0.9154	0.9530	0.9784	0.9694	0.9485
Kossi ^P	1.0000	0.9638	0.9482	1.0195	0.9638	0.9468	0.9125
Les Bale	0.8878	0.8307	0.7700	0.9072	0.9357	0.8911	0.8338
Mouhoun	1.0000	0.9636	0.9469	1.0717	0.9636	0.9227	0.8892
Nayala	1.0000	1.0000	0.9824	1.1424	1.0000	0.9273	0.9273
Sourou	0.9265	0.8962	0.8865	0.9339	0.9673	0.9582	0.9269
Comoe	0.9767	0.8721	0.8474	0.9854	0.8929	0.8763	0.7824
Leraba ^P	0.7894	0.7711	0.7447	0.8091	0.9769	0.9483	0.9264
Kadiogo	1.0000	1.0000	1.0708	1.2069	1.0000	0.9419	0.9419
Boulgou	1.0000	0.9879	0.9452	1.0263	0.9879	0.9538	0.9423
Koulpelogo ^P	0.8800	0.8041	0.7975	0.9041	0.9138	0.8978	0.8205
Kourittenga	1.0000	1.0000	1.0024	1.0895	1.0000	0.9592	0.9592
Bam	1.0000	1.0000	1.0403	1.1156	1.0000	0.9657	0.9657
Namentenga ^P	1.0000	1.0000	1.0186	1.3740	1.0000	0.8610	0.8610
Sanmatenga ^P	0.9200	0.8794	0.8832	0.9388	0.9559	0.9483	0.9065
Boulkiemde	0.9412	0.8685	0.8725	0.9484	0.9227	0.9213	0.8501
Sanguie	0.9203	0.9165	0.8845	0.9391	0.9959	0.9685	0.9645
Sissili	0.8359	0.8189	0.7805	0.8526	0.9797	0.9469	0.9277
Ziro ^P	0.7788	0.7782	0.7738	0.7541	0.9991	1.0126	1.0117
Bazega	0.8637	0.8850	0.8629	0.8604	1.0246	1.0137	1.0387
Nahouri	1.0000	1.0000	1.0824	1.1541	1.0000	0.9684	0.9684
Zoundweogo	0.8780	0.9392	0.8872	0.9257	1.0697	1.0125	1.0831
Gnagna ^P	1.0000	0.9238	0.9975	0.9830	0.9238	0.9682	0.8944
Gourma ^P	1.0000	0.9413	0.9296	1.0073	0.9413	0.9321	0.8774
Komandjari ^P	1.0000	1.0000	1.1560	1.5373	1.0000	0.8672	0.8672
Kompienga ^P	1.0000	0.8717	0.8230	0.9397	0.8717	0.8738	0.7616
Tapoa ^P	1.0000	1.0000	0.9707	1.1465	1.0000	0.9202	0.9202
Houet	1.0000	1.0000	1.0173	1.1095	1.0000	0.9575	0.9575
Kenedougou	0.7835	0.8133	0.8043	0.8032	1.0381	1.0196	1.0585
Tuy ^P	0.8667	0.7738	0.7629	0.8804	0.8927	0.8796	0.7852
Loroum	1.0000	1.0000	1.8299	1.1038	1.0000	1.2876	1.2876
Passore	0.9393	0.9743	1.0872	0.9308	1.0372	1.1007	1.1417
Yatenga	0.9009	0.9048	1.0412	0.8725	1.0043	1.0948	1.0995
Zondoma	0.8647	0.9114	1.2126	0.7988	1.0540	1.2650	1.3333
Ganzourgou ^P	0.9918	0.9486	0.8786	1.0369	0.9565	0.9002	0.8610
Kourweogo	1.0000	1.0000	0.9748	0.9351	1.0000	1.0210	1.0210
Oubritenga	0.8577	0.7642	0.7522	0.8978	0.8910	0.8640	0.7698
Oudalan ^P	0.9652	1.0000	1.1087	0.9008	1.0361	1.1292	1.1699
Seno ^P	1.0000	1.0000	1.3343	1.0433	1.0000	1.1309	1.1309
Soum ^P	0.9839	1.0000	1.0941	0.9714	1.0164	1.0700	1.0875
Yagha ^P	1.0000	1.0000	1.3404	1.0803	1.0000	1.1139	1.1139
Bougouriba	0.8246	0.8129	0.7941	0.8311	0.9858	0.9705	0.9567
Ioba	0.8400	0.8529	0.8725	0.7865	1.0154	1.0613	1.0777
Noumbiel ^P	1.0000	1.0000	1.1262	1.0672	1.0000	1.0273	1.0273
Poni ^P	0.9689	0.9999	1.0677	0.9594	1.0320	1.0717	1.1060
Maximum	1.0000	1.0000	1.8299	1.5373	1.0697	1.2876	1.3333
Minimum	0.7788	0.7642	0.7447	0.7541	0.8717	0.8610	0.7616
Moyenne	0.9406	0.9242	0.9760	0.9896	0.9828	0.9853	0.9710
Ecart-Type	0.0712	0.0796	0.1952	0.1504	0.0448	0.0971	0.1284

1 pour année 2004 et 2 pour 2005

Tableau 9.19 – Indices de productivité de Malmquist des provinces de 2004 à 2005

9.3.3 Conclusion et commentaires

Les deux modèles utilisés permettent de voir le comportement des inefficacités techniques et d'échelle des différentes provinces. Cette étude a montré que plus de la moitié des provinces durant cette période a connu une régression de performances ou baisse de productivité avec des indices de Malmquist faibles, bien que les résultats observés montrent une croissance d'environ 4% des facteurs outputs (excepté les taux de succès au CEP qui ont connu une baisse d'environ 6%). Cette étude de cas en intégrant, le critère qualité de l'enseignement avec les indicateurs de niveau des enseignants et de leurs expériences, les qualités de la gestion des écoles, les indicateurs de contrôle des enseignements par les inspections, nous semble intéressante comparée à l'étude de cas 1, où nous avons intégré des données brutes en quantité sans tenir compte de l'expérience des enseignants et de la couverture des contrôles des enseignements par les inspections. Nous présentons dans la section suivante, une étude de cas, intégrant uniquement les facteurs ratios enseignants-élèves et classes-élèves, données brutes, dans le but de comparaison avec ces deux modèles déjà présentés. L'objectif recherché est de suivre les changements de performances de 2002 à 2005, à partir des facteurs ressources enseignants et salles de classe.

9.4 Etude de cas 3 : mesures des efficacités de performance et de changements de performance des provinces de 2002 à 2005

9.4.1 Modèles, variables et données

Cette étude est motivée par les choix diversifiés des facteurs inputs. Dans les modèles précédents (études de cas 1 et 2), nous avons diversifié les choix des facteurs inputs pour expliquer les contrôles supposés possibles au niveau de chaque province. Nous nous intéressons ici aux 45 directions provinciales de l'enseignement de base, en ne tenant en compte que des facteurs fortement contrôlables par affectation (les salles de classe et les enseignants), de façon à pouvoir comparer avec les modèles précédents (études de cas 1 et 2). Dans cette étude de cas, nous cherchons à suivre les changements

de performances des directions provinciales à partir uniquement des facteurs ressources enseignants et salles de classe. Nous utilisons le modèle CCR pour mesurer les performances techniques et calculer les indices de Malmquist pour déterminer les variations de performances par paire d'années successives. Les variables utilisées sont les suivantes :

- X_1 (input) le ratio normalisé enseignants-élèves. Le facteur ratio enseignants-élèves est commun à ce modèle et à celui de l'étude de cas 1 concernant les provinces. Il n'est pas considéré dans l'étude de cas 2.
- X_2 (input) le ratio normalisé classes-élèves. Ce facteur est considéré dans l'étude de cas 2 mais pas dans l'étude de cas 1.
- Y_1 (output) l'indicateur de performance **TBS** de la province, considéré dans les modèles précédents.
- Y_2 (output) l'indicateur de performance **TBA** de la province, considéré dans les modèles précédents.
- Y_3 (output) représente l'indicateur de performance **CEP** de la province, considéré dans les modèles précédents .

Nous avons omis le facteur mesurant les performances d'accueil des filles (TBS filles, étude de cas 1) ou celui mesurant la parité fille-garçon (étude de cas 2), ceci pour nous permettre de ne prendre en compte que les facteurs bruts mesurant les objectifs globaux (scolarisation, admission, succès au CEP). La synthèse des données ¹² des différentes variables est présentée au tableau 9.20. Les détails des données par provinces pour cette application, sont fournis dans les annexes C et D.

La synthèse des résultats montrent que les facteurs inputs ont connu une baisse à chaque fois, alors que dans le même temps les facteurs outputs ont augmenté excepté en 2005 pour le facteur output 3. L'analyse de ces résultats ne donne qu'une idée partielle du comportement du système dans son ensemble puisqu'elle ne permet pas d'identifier les productions efficaces et aussi ne permet pas de mesurer les changements de productivité d'une année à l'autre, d'où l'intérêt d'utiliser l'approche DEA pour permettre une analyse globale du comportement du système et individuelle au niveau de chaque province.

¹²Toutes les données sont issues des annuaires statistiques scolaires publiés la DEP/MEBA

Variable	Année	Moyenne	Ecart-Type	Maximum	Minimum
Input					
X_1	2002	50.76	8.78	95.07	37.92
	2003	50.71	9.10	92.18	25.82
	2004	45.71	9.48	91.69	29.36
	2005	47.62	9.35	100.00	33.68
X_2	2002	49.20	8.91	91.19	32.79
	2003	48.90	8.94	93.29	32.93
	2004	46.44	9.82	100.00	32.77
	2005	45.28	9.54	95.81	32.03
Output					
Y_1	2002	38.05	13.12	94.10	16.90
	2003	42.02	12.88	97.10	20.30
	2004	47.28	12.71	92.55	21.55
	2005	52.98	12.90	94.23	26.13
Y_2	2002	37.83	12.21	81.30	9.60
	2003	49.47	11.54	93.10	26.70
	2004	63.25	13.61	98.99	27.82
	2005	67.90	16.80	118.17	39.32
Y_3	2002	56.99	11.66	94.28	37.12
	2003	66.62	8.65	85.39	47.77
	2004	72.04	7.48	88.74	44.85
	2005	67.43	7.61	82.91	47.23

Tableau 9.20 – Synthèse des données des provinces de 2002 à 2005

9.4.2 Résultats et analyses des changements de performance des provinces de 2002 à 2005

Cette étude de cas nous permet d'obtenir les efficacités techniques par année et les variations d'efficacité technique (E), de technologie de production (T) et de productivité (M) d'une année à la suivante. Les résultats sont présentés dans le tableau 9.21. Ces résultats montrent que :

– 3 provinces seulement sont techniquement efficaces en 2002 et en 2003 , et 6 en 2004 et en 2005. Les scores moyens d'efficacité technique ont été 0.7112, 0.6903, 0.8138 et 0.7938 pour ces années, respectivement.

• Changements d'efficacité technique : (E)

– **de 2002 à 2003** : 24 provinces ont connu un gain d'efficacité technique, et le score moyen d'indice de mesure de changement d'efficacité technique est $E = 1.0448$, ce qui signifie que le système a connu en moyenne un gain en efficacité technique. Avec l'étude de cas 1, cet indice était $E = 1.0912$, pour la même période.

– **de 2003 à 2004** : 5 provinces ont connu un gain d'efficacité technique et le score moyen d'indice de mesure de changement d'efficacité technique est $E = 0.8610$, ce qui

signifie que pendant cette période le système en moyenne a connu une perte en efficacité technique (2004 comparé à 2003).

– **de 2004 à 2005** : 27 provinces ont connu un gain d'efficacité technique et le score moyen d'indice de mesure de changement d'efficacité technique est $E = 1.0304$, ce qui signifie que pendant cette période le système en moyenne a connu un gain en efficacité technique. Avec l'étude de cas 2, cet indice était $E = 0.9828$, ce qui signifie une régression en efficacité technique en utilisant les facteurs de ce modèle.

• **Changements de technologie de production : (T)**

– **de 2002 à 2003** : toutes les provinces ont connu un changement positif de technologie de production, et le score moyen d'indice de mesure de ce changement est $T = 1.2166$, ce qui signifie que le système a connu globalement aussi un gain en technologie de production. Avec l'étude de cas 1, cet indice était $T = 1.1847$, pour la même période.

– **de 2003 à 2004** : 24 provinces ont connu un changement positif de technologie de production et le score moyen d'indice de mesure de ce changement est $T = 1.0393$, ce qui signifie que pendant cette période le système en moyenne a connu un changement positif de technologie de production.

– **de 2004 à 2005** : une seule province a connu un changement positif de technologie de production et le score moyen d'indice de mesure de ce changement est $T = 0.9662$, ce qui signifie que pendant cette période le système en moyenne a connu un changement négatif de technologie de production. Avec le modèle de l'étude de cas 2, cet indice était $T = 0.9853$, ce qui signifie aussi un changement négatif de technologie de production.

• **Changements de productivité : indice de Malmquist (M)**

– **de 2002 à 2003** : 26 provinces ont connu un gain de performance, et le score moyen d'indice de mesure de ce changement, l'indice de productivité de Malmquist est $M = 1.2709$, ce qui signifie que le système a connu un gain de productivité. Avec l'étude de cas 1, cet indice était $M = 1.2691$, pour la même période.

– **de 2003 à 2004** : 8 provinces ont connu un gain de productivité et le score moyen d'indice de productivité de Malmquist est $M = 0.8967$, ce qui signifie que pendant cette période le système en moyenne a connu une régression de performance.

– **de 2004 à 2005** : 14 provinces ont connu un gain de performance et le score moyen

d'indice de productivité de Malmquist est $M = 0.9948$, ce qui signifie que pendant cette période le système en moyenne a connu une régression de performance. Avec le modèle de l'étude de cas 2, cet indice était $M = 0.9710$, ce qui signifie aussi une régression de performance.

L'analyse de ces résultats montre que le système non seulement a enregistré un gain important de performance en 2003 comparé à 2002, mais il a enregistré aussi un changement positif de technologie pendant la même période. Autrement dit, le système gagnerait plus en productivité si la technologie de 2003 était utilisée durant toutes ces années. Ces performances peuvent aussi être justifiées par le fait que c'est durant cette période que le PDDEB enregistrerait ses premiers rendements considérables liés aux efforts qu'il a déployés – les activités de PDDEB ont débuté sur le terrain à partir de la période 2001-2002.

Provinces	Scores CCR				indice E			indice T			indice M		
	2002	2003	2004	2005	P1	P2	P3	P1	P2	P3	P1	P2	P3
Banwa ^P	0.8343	0.7982	0.9124	0.8858	1.0452	0.8749	1.0299	1.1986	0.9911	0.9626	1.2527	0.8671	0.9914
Kossi ^P	0.7803	0.6417	0.7894	0.6978	1.2161	0.8129	1.1312	1.2378	1.0501	0.9434	1.5053	0.8536	1.0672
Les Bale	0.5908	0.5693	0.8727	0.7166	1.0378	0.6523	1.2178	1.2292	0.9912	0.9802	1.2756	0.6466	1.1936
Mouhoun	0.6221	0.6720	0.9468	0.8268	0.9257	0.7097	1.1452	1.2326	1.0391	0.9524	1.1411	0.7375	1.0907
Nayala	0.6668	0.6834	1.0000	0.7722	0.9757	0.6834	1.2950	1.1381	1.1370	0.9498	1.1105	0.7770	1.2300
Sourou	0.6278	0.6188	0.8610	0.7857	1.0146	0.7187	1.0958	1.2651	1.0894	0.9506	1.2836	0.7830	1.0416
Comoe	0.7452	0.7189	0.9582	0.8398	1.0367	0.7502	1.1410	1.2436	0.9844	0.9696	1.2892	0.7385	1.1063
Leraba ^P	0.4560	0.5390	0.6756	0.5678	0.8461	0.7977	1.1900	1.2247	1.1407	0.9525	1.0362	0.9099	1.1335
Kadiogo	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0896	0.9984	0.9996	1.0896	0.9984	0.9996
Boulgou	0.9242	0.8969	0.9722	0.9368	1.0304	0.9226	1.0378	1.2099	0.9529	0.9850	1.2467	0.8791	1.0222
Koulpelogo ^P	0.6080	0.5593	0.7174	0.7035	1.0870	0.7797	1.0196	1.2199	0.9878	0.9673	1.3261	0.7702	0.9863
Koulikenga	0.7673	0.6643	1.0000	1.0000	1.1551	0.6643	1.0000	1.2315	0.9483	0.9848	1.4225	0.6300	0.9848
Bam	0.8369	0.8471	0.9763	0.9947	0.9880	0.8676	0.9815	1.1720	0.9863	0.9697	1.1579	0.8557	0.9518
Namentenga ^P	0.6437	0.7231	1.0000	0.9038	0.8902	0.7231	1.1064	1.1599	1.1078	0.8700	1.0326	0.8010	0.9626
Sanmatenga ^P	0.9388	0.7484	0.8890	0.8315	1.2543	0.8419	1.0691	1.1775	0.9702	0.9747	1.4770	0.8168	1.0420
Boulkiemde	0.7607	0.7952	0.9344	0.8912	0.9566	0.8511	1.0484	1.2377	1.0674	0.9742	1.1839	0.9084	1.0214
Sanguie	0.7065	0.6840	0.8081	0.8063	1.0329	0.8463	1.0023	1.2582	1.0475	0.9492	1.2996	0.8865	0.9513
Sissili	0.4984	0.5486	0.7566	0.6953	0.9084	0.7251	1.0881	1.2423	1.0056	0.9700	1.1285	0.7292	1.0554
Ziro ^P	0.5371	0.6302	0.6196	0.5948	0.8522	1.0171	1.0417	1.2490	1.0199	0.9555	1.0644	1.0373	0.9953
Bazega	0.6473	0.5729	0.7889	0.7235	1.1298	0.7262	1.0904	1.2319	1.0450	0.9670	1.3918	0.7589	1.0543
Nahouri	0.7999	0.7828	1.0000	1.0000	1.0218	0.7828	1.0000	1.2078	1.1585	0.9894	1.2342	0.9068	0.9894
Zoundweogo	0.8002	0.6080	0.7584	0.7774	1.3161	0.8017	0.9756	1.2454	1.0217	0.9601	1.6391	0.8191	0.9367
Gnagna ^P	0.5024	1.0000	0.6730	0.6764	0.5024	1.4859	0.9950	1.2983	1.0883	0.9541	0.6523	1.6172	0.9493
Gourma ^P	0.7444	0.6842	0.8937	0.7415	1.0880	0.7656	1.2053	1.2119	0.9682	0.9803	1.3185	0.7412	1.1815
Komandjari ^P	0.2380	0.2688	0.2286	0.3842	0.8854	1.1760	0.5950	1.1580	1.0228	0.9623	1.0253	1.2028	0.5726
Kompienga ^P	1.0000	0.7064	0.7498	0.6928	1.4156	0.9422	1.0822	1.1776	1.0682	0.9621	1.6669	1.0064	1.0412
Tapoa ^P	0.6092	0.6653	0.7454	0.8107	0.9157	0.8925	0.9194	1.1487	1.0070	0.9637	1.0519	0.9888	0.8860
Houet	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.2024	0.9789	0.9847	1.2024	0.9789	0.9847
Kenedougou	0.6789	0.5817	0.7032	0.7362	1.1670	0.8273	0.9551	1.2479	0.9971	0.9726	1.4564	0.8249	0.9290
Tuy ^P	0.7125	0.7251	0.8440	0.7454	0.9827	0.8590	1.1323	1.2470	0.9516	0.9889	1.2254	0.8174	1.1197
Loroum	0.6836	0.5811	0.6918	1.0000	1.1764	0.8399	0.6918	1.2187	1.0782	1.0593	1.4338	0.9055	0.7329
Passore	0.7280	0.8332	0.9088	0.9471	0.8737	0.9169	0.9595	1.2415	0.9941	0.9555	1.0847	0.9115	0.9168
Yatenga	0.5606	0.6390	0.6967	0.8328	0.8773	0.9171	0.8366	1.1821	1.0987	0.9661	1.0370	1.0077	0.8083
Zondoma	0.6323	0.6425	0.7135	0.9024	0.9842	0.9004	0.7907	1.2308	1.0727	0.9985	1.2114	0.9659	0.7895
Ganzourgou ^P	0.5537	0.6855	0.8068	0.7646	0.8078	0.8496	1.0552	1.1928	1.0356	0.9543	0.9636	0.8798	1.0069
Kourweogo	0.7247	0.9434	0.8093	0.9426	0.7682	1.1657	0.8586	1.2408	1.2391	0.9557	0.9531	1.4444	0.8205
Oubritenga	0.7668	0.6196	0.7599	0.6601	1.2376	0.8154	1.1511	1.2441	1.0342	0.9519	1.5397	0.8433	1.0957
Oudalan ^P	0.4088	0.6827	0.6471	0.7744	0.5987	1.0551	0.8356	1.2857	1.0810	0.9462	0.7698	1.1405	0.7907
Seno ^P	0.4993	0.6981	0.8180	0.6831	0.7153	0.8534	1.1974	1.2201	1.0634	0.9656	0.8728	0.9075	1.1562
Soum ^P	0.8226	0.6853	0.8018	1.0000	1.2003	0.8548	0.8018	1.1539	1.0208	0.9431	1.3849	0.8725	0.7562
Yagha ^P	0.7864	0.5826	0.6292	0.6378	1.3498	0.9258	0.9865	1.2415	1.1122	0.9468	1.6758	1.0297	0.9340
Bougouriba	0.9413	0.6774	0.7693	0.7015	1.3897	0.8806	1.0966	1.2190	0.9727	0.9560	1.6940	0.8565	1.0483
Ioba	0.9174	0.5811	0.6781	0.5915	1.5786	0.8570	1.1466	1.2020	1.0675	0.9741	1.8975	0.9149	1.1169
Noumbiel ^P	0.8709	0.5127	0.9269	0.7109	1.6988	0.5531	1.3040	1.2963	1.0240	0.9920	2.2022	0.5664	1.2935
Poni ^P	0.8309	0.7668	0.8884	0.8346	1.0837	0.8631	1.0644	1.1839	1.0523	0.9663	1.2830	0.9083	1.0285
Moyenne	0.7112	0.6903	0.8138	0.7938	1.0448	0.8610	1.0304	1.2166	1.0393	0.9662	1.2709	0.8967	0.9948
Ecart-Type	0.1668	0.1397	0.1469	0.1393	0.2298	0.1554	0.1447	0.0421	0.0610	0.0250	0.2881	0.1851	0.1382
Maximum	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.6988	1.4859	1.3040	1.2983	1.2391	1.0593	2.2022	1.6172	1.2935
Minimum	0.2380	0.2688	0.2286	0.3842	0.5024	0.5531	0.5950	1.0896	0.9483	0.8700	0.6523	0.5664	0.5726

P1, P2 et P3 représentent respectivement périodes 2002 et 2003, 2003 et 2004, 2004 et 2005

Tableau 9.21 – Scores d'efficacité technique et indices de productivité de Malmquist par province (2002 à 2005)

Les figures 9.1, 9.2 et 9.3, suivantes présentent graphiquement les différentes variations (efficacité technique, technologie de production, productivité) durant ces 4 années.

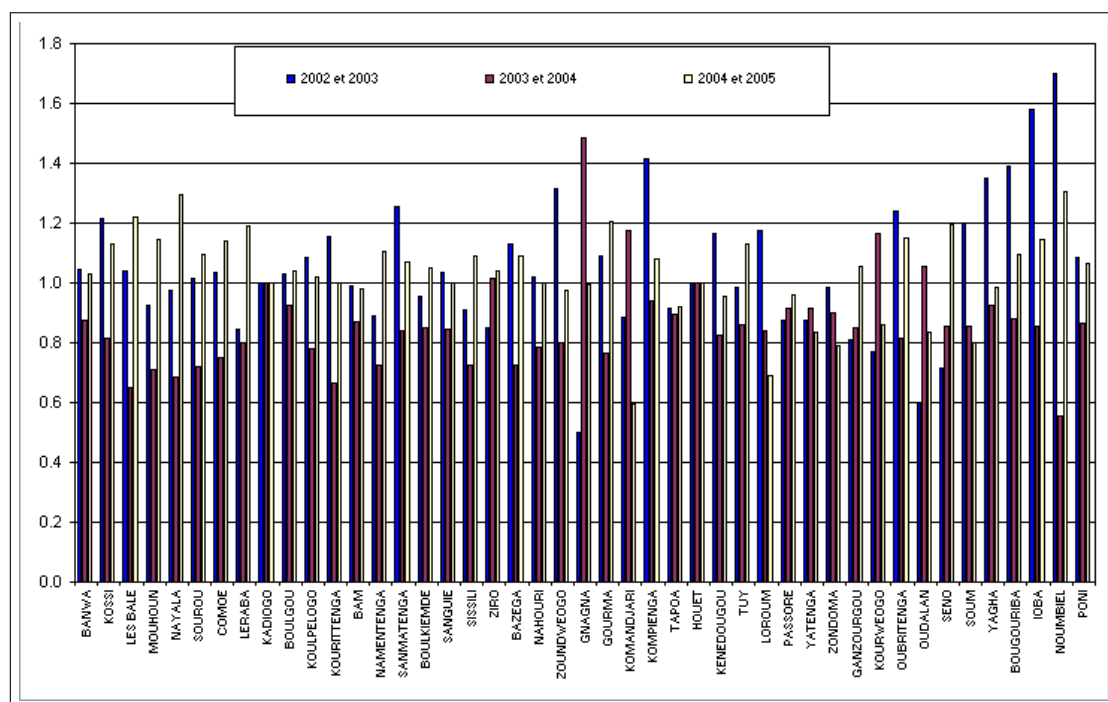


Figure 9.1 – Variations en efficacité technique des provinces

La figure 9.1 montre que beaucoup de provinces ont connu un changement plus grand en efficacité technique entre les périodes 2005 comparée à 2004 que les autres périodes, et plus entre les périodes 2002 à 2003 qu'entre les périodes 2003 à 2004. Un changement plus grand en efficacité technique montre que la province s'est plus rapprochée de la frontière efficace que lors de la période précédente. Autrement dit, en 2005 il y a eu plus de provinces qui se sont rapprochées de la frontière efficace comparées à 2004.

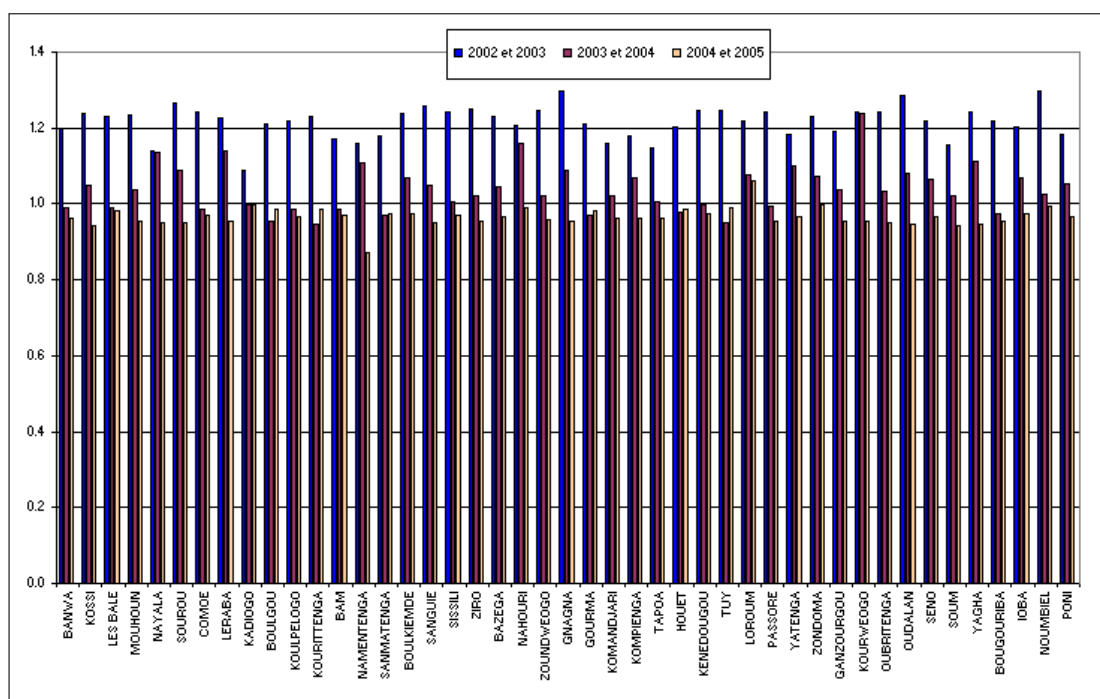


Figure 9.2 – Variations en technologie de production des provinces

La figure 9.2 montre que beaucoup de provinces ont connu un changement plus grand en technologie de production entre la période 2003 comparée à 2002 qu'entre les autres périodes, et plus entre 2004 comparée à 2003 qu'entre 2005 comparée à 2004.

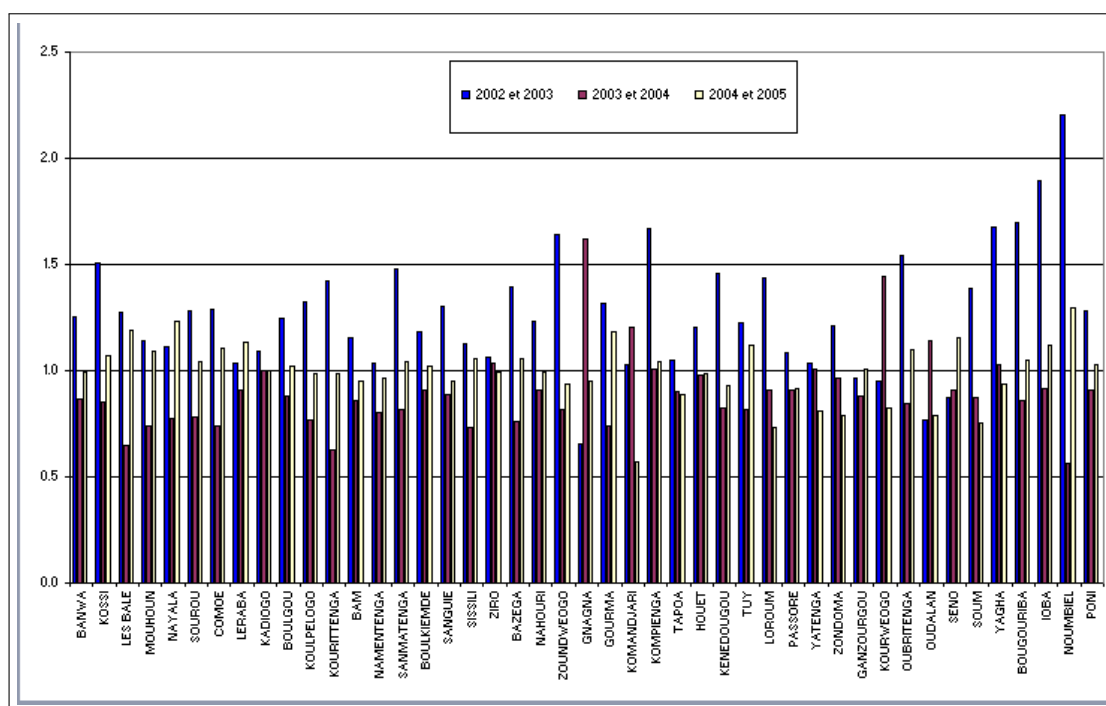


Figure 9.3 – Variations de productivité des provinces

La figure 9.3 montre qu'il y a eu plus de provinces ont connu un changement plus grand en productivité entre la période 2003 comparée à 2002 qu'entre les autres périodes, et plus entre 2004 comparée à 2003 qu'entre 2005 comparée à 2004.

9.5 Conclusion et perspectives

Nous avons utilisé différemment les facteurs inputs dans les trois études de cas, et nous avons constaté que le comportement des différentes provinces dépendaient énormément de ces facteurs. Les figures suivantes donnent le comportement des efficacités techniques en fonction du modèle. Dans les figures 9.4 et 9.5 le modèle 1 (ou M1), donne respectivement pour 2002 et 2003, le score d'efficacité en fonction des facteurs utilisés dans l'étude de cas 1 ; dans les figures 9.6 et 9.7, ce modèle, donne respectivement pour 2004 et 2005, le score d'efficacité calculé avec les facteurs de l'étude de cas 2. Dans toutes ces figures, le modèle 2 (ou M2) donne les résultats avec les facteurs de l'étude de cas 3.

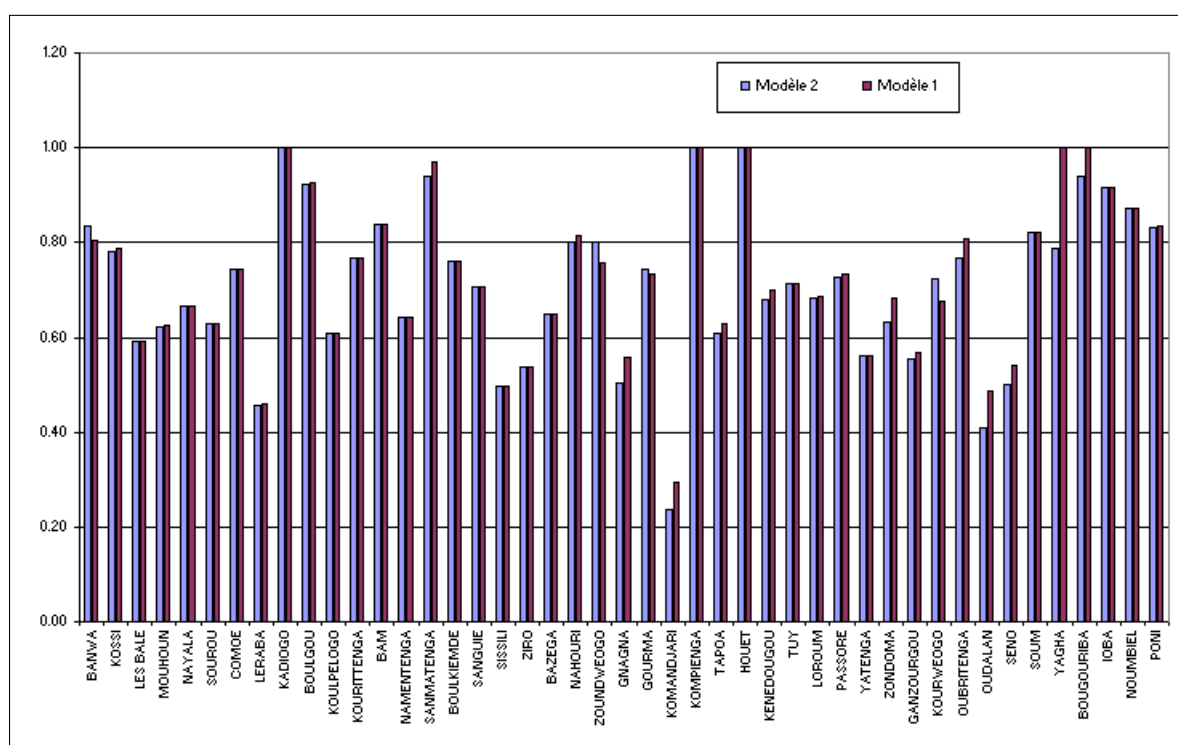


Figure 9.4 – Comparaison des scores d'efficacité technique (étude de cas 1 et étude de cas 3) pour 2002

La figure 9.4 présente graphiquement la comparaison des scores d'efficacité technique en 2002, en utilisant les facteurs de l'étude de cas 1 et ceux de l'étude de cas 3.

Sur cette figure, l'on remarque que beaucoup de provinces conservent leur efficacité de performance ou l'écart est moins significatif. Il y a deux provinces qui sont mesurées efficaces (Yagha, Bougouriba) pour le modèle 1 et non efficaces pour le modèle 2.

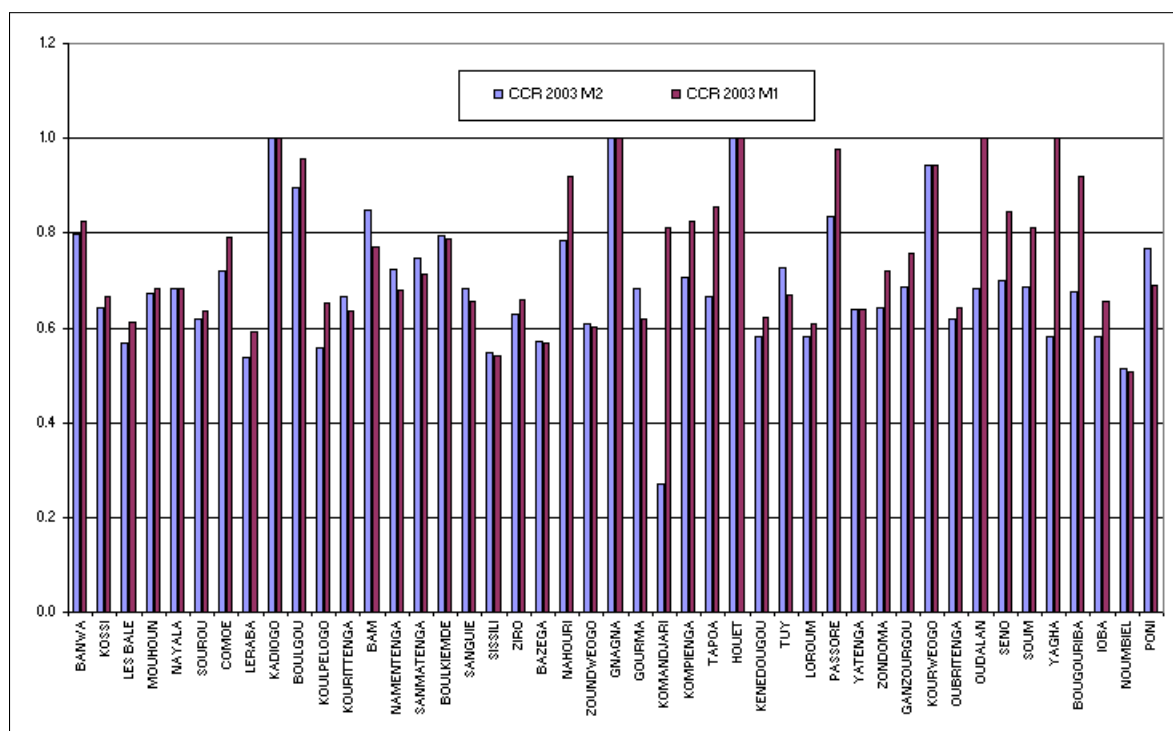


Figure 9.5 – Comparaison des scores d'efficacité technique (étude de cas 1 et étude de cas 3) pour 2003

La figure 9.5 présente graphiquement la comparaison des scores d'efficacité technique en 2003, en utilisant les facteurs de l'étude de cas 1 et ceux de l'étude de cas 3. Les résultats présentés graphiquement montrent qu'il n'y a pas uniformité entre les mesures d'efficacité de performance d'un modèle à l'autre pour cette année 2003.

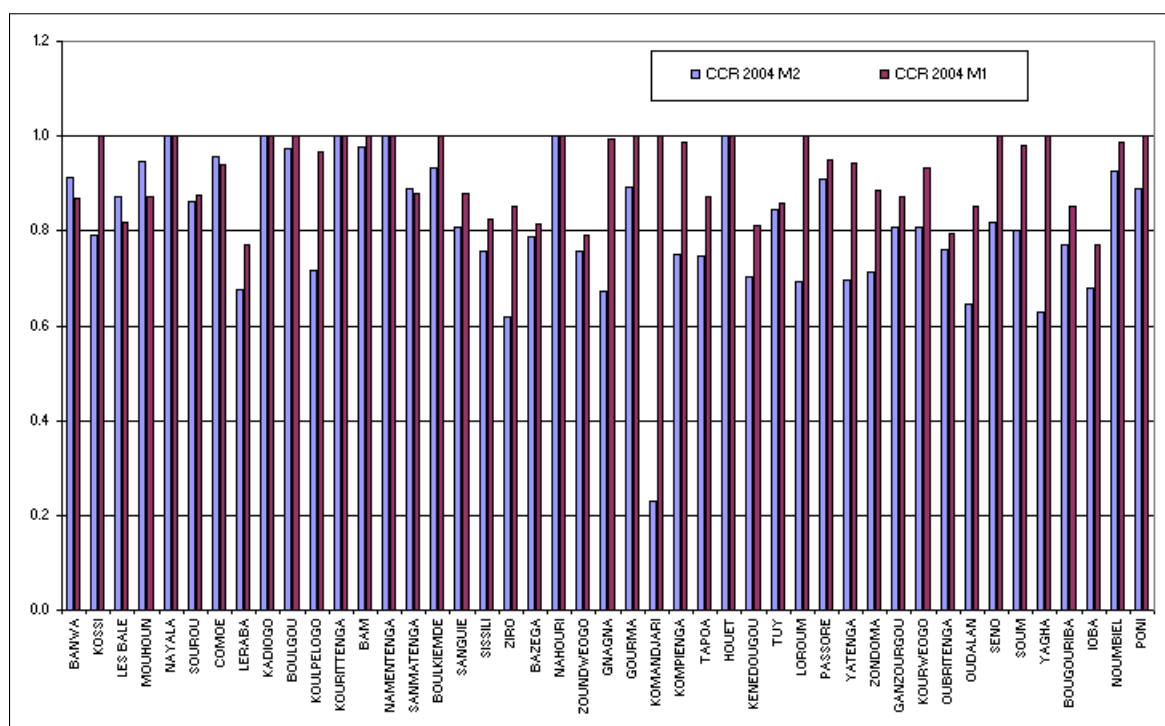


Figure 9.6 – Comparaison des scores d'efficacité technique (étude de cas 2 et étude de cas 3) pour 2004

La figure 9.6 présente graphiquement la comparaison des scores d'efficacité technique en 2004, en utilisant les facteurs de l'étude de cas 2 et ceux de l'étude de cas 3. Les résultats présentés graphiquement montrent également qu'il n'y a pas uniformité entre les mesures d'efficacité de performance d'un modèle à l'autre pour cette année 2003.

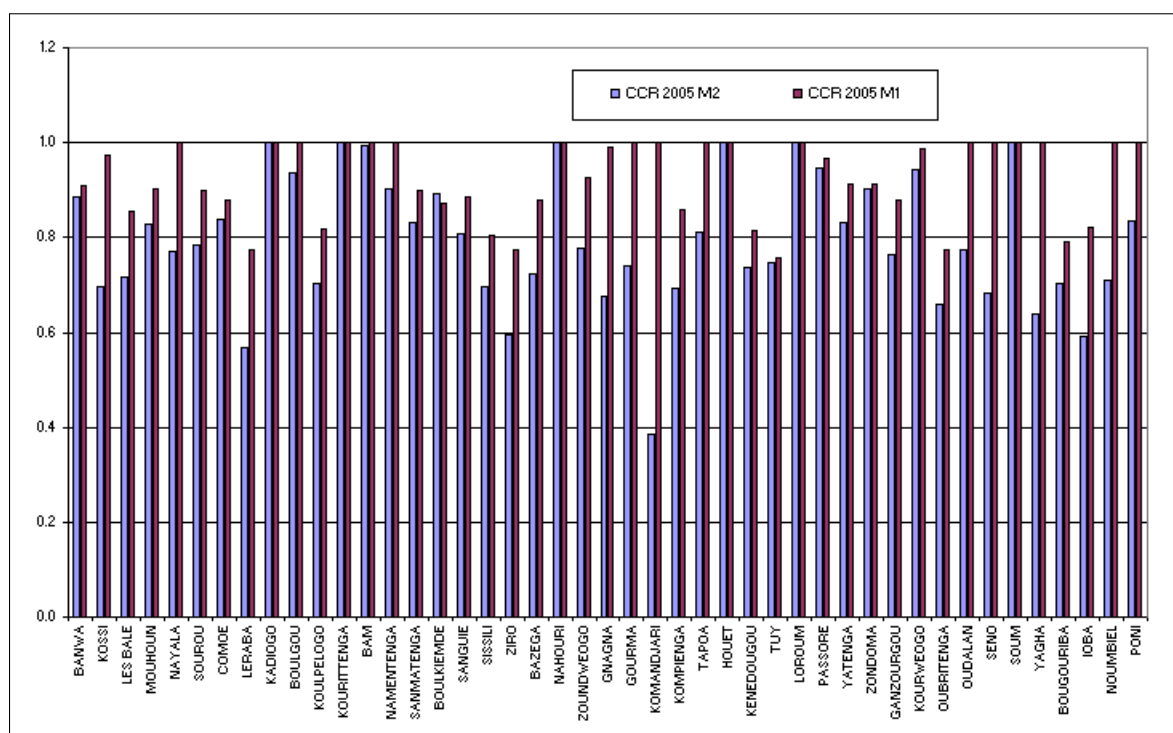


Figure 9.7 – Comparaison des scores d'efficacité technique (étude de cas 2 et étude de cas 3) pour 2004

La figure 9.7 présente graphiquement la comparaison des scores d'efficacité technique en 2005, en utilisant les facteurs de l'étude de cas 2 et ceux de l'étude de cas 3.

Les conclusions des différentes études de cas semblent évidentes quand les analyses montrent qu'il faut augmenter certaines ressources pour améliorer les rendements. Il nous semble important néanmoins de souligner que ces analyses permettent d'aller plus loin que le simple fait d'affirmer qu'il faut des ressources pour accroître les performances :

- en proposant des orientations (les écarts optimaux) ;
- en déterminant les provinces efficaces comparées aux autres non seulement en production outputs mais aussi en utilisation inputs ;
- en déterminant aussi les rendements d'échelle variables présents dans une province donnée.

Ces études de cas sont basées sur des indicateurs de suivi et d'évaluation du développe-

ment du système de l'éducation de base définis dans le CSLP, les données accessibles et disponibles au ministère en charge de l'enseignement de base ont permis de définir les différents facteurs inputs et outputs. Ces différentes applications, avec différents facteurs considérés, donnent quasiment les mêmes interprétations et conclusions relatives au système de l'enseignement de base. Nous pouvons les résumer ainsi :

- les inefficacités de performance sont fortement liées aux faibles rendements scolaires (accès, admission, succès au CEP) ;
- il n'y a pas un écart très significatif entre les valeurs optimales et celles observées des facteurs de productions ;
- il y a peu de directions qui sont stables relativement à leur production d'une année à l'autre. Ceci est caractérisé par les variations de productivité.
- beaucoup de directions présentent des rendements d'échelle croissants, ce qui signifierait que les investissements pourraient être encore plus rentables ;
- les premières années ont connu un grand changement positif de technologie de production. Si l'on considère par exemple, l'étude de cas 3, les résultats donnent 45, 24 et 1 provinces, respectivement pour les périodes 2002 à 2003, 2003 à 2004 et 2004 à 2005, ayant connu un changement positif de technologie de production. Ces changements des premières années peuvent être liés au fait que ces années correspondent à celles de début des activités du PDDEB, ce qui peut expliquer ces variations positives.

D'un point de vue pratique, ces résultats montrent que la plupart des provinces restent instables dans leur fonctionnement ; ceci est aussi visible à travers les variations énormes au niveau des taux de succès au CEP des provinces d'une année à l'autre. Pour améliorer les rendements scolaires dans l'ensemble, il nous semble important de souligner que les efficacités de performance sont aussi liées aux facteurs considérés dans les modèles. Ceci signifie que les interprétations restent limitées à notre sens dans la mesure où les vrais décideurs (le ministère et tous acteurs ou les responsables des activités de développement de l'éducation de base) n'ont pas explicitement définis les facteurs nécessaires à prendre en compte, d'une part pour améliorer les rendements et d'autre part pour contrôler et planifier efficacement les investissements. Les dernières figures, nous montrent clairement que l'ajout ou l'omission d'un facteur peut influencer énormément

les efficacités de performance et donc les analyses. Il semble important dans l'avenir d'appliquer ces modèles pour un problème réel de décision où le décideur peut contrôler ou fixer les facteurs inputs et outputs. En général, pour un décideur, ces facteurs correspondent d'une part aux facteurs résultats ou produits comme outputs, d'autre part, aux facteurs de production ou ressources nécessaires comme facteurs inputs. Il serait important aussi d'associer certains facteurs indépendants comme la difficulté d'accessibilité des écoles dans la localité, la résistance à la scolarisation et celle des filles en particulier, la situation socio-économique de la population pour ce cas particulier des enseignements de base. De plus, il serait intéressant de voir comment certaines provinces efficaces de référence peuvent servir de benchmarks pour les autres inefficaces. Il conviendrait aussi de déterminer, d'une part comment programmer l'allocation des ressources et d'autre part, comment prévoir les rendements scolaires.

Chapitre 10

Analyse des performances du système sanitaire du Burkina Faso

Depuis les années 90, on retrouve de plus en plus d'applications utilisant l'approche DEA pour mesurer les efficacités de performance des activités d'unités de systèmes de santé. Ces différentes applications se sont intéressées aux systèmes hospitaliers, aux cliniques privées ou publiques, aux districts et régions sanitaires.

Dans ce chapitre, nous utiliserons les modèles DEA, d'une part, pour mesurer les efficacités de performance des régions et districts sanitaires au Burkina Faso pour deux années 2003 et 2004 ; d'autre part, nous calculerons les indices de mesure de variations de performances (efficacités techniques, technologie de production, productivité) de ces deux années. La structure de ce chapitre est la suivante : la section 10.1 présente les objectifs et motivations de cette application ; la section 10.2 présente les indicateurs de performance (prioritaires) du système national de la santé ; la section 10.3 présente une étude de cas de mesure des efficacités de performance et de changements de performance des régions sanitaires en 2003 et en 2004 ; la section 10.4 présente une étude de cas de mesure de des efficacités de performance et de changements de performance des districts sanitaires en 2003 et en 2004 ; enfin en section 10.5 nous donnerons les conclusions relatives aux analyses et les perspectives d'applications au secteur de la santé.

10.1 Objectifs et motivations

Comme le secteur de l'éducation, en particulier l'enseignement de base, le système de santé est jugé prioritaire dans le "*Cadre Stratégique de Lutte contre la Pauvreté (CSLP)* " au Burkina Faso. Pour accélérer le développement de ce secteur, plusieurs programmes sont mis en place par le Gouvernement, afin de faciliter l'accès des plus dému-

nis aux soins de base (curatifs ou préventifs). C'est ainsi que le "*Plan National de Développement Sanitaire (PNDS)* " est mis en place. Notre souci principal en proposant cette application est de fournir un outil contribuant au suivi et à l'évaluation des programmes, projets ou activités de développement du système national de santé. La motivation est née de cet objectif principal. Les efficacités de performance des régions et districts sanitaires sont encouragées par le Gouvernement, en déterminant par exemple chaque année les meilleures directions (régions ou districts). Cette reconnaissance montre la volonté de recherche de productivité optimale pour le système national de santé. Nous n'irons pas jusqu'à dire que la méthode DEA peut remplacer la méthodologie de mesure de performances des directions ou la sélection des meilleures directions, actuellement adoptée, mais nous espérons que l'utilisation de DEA peut être complémentaire aux méthodes existantes (modèles statistiques classiques) ; surtout l'approche DEA dans le cas du système de la santé, peut faciliter les décideurs en intégrant de multiples facteurs inputs et de multiples facteurs outputs sans pour autant incorporer des valeurs de jugement (poids ou importance). Les objectifs spécifiques des applications que nous avons faites sont :

- ▶ de permettre les mesures et les analyses des efficacités de production (soins en santé) ;
- ▶ de permettre la détermination des directions efficaces pouvant servir de référence ;
- ▶ de permettre de déterminer les sources d'inefficacité de production ;
- ▶ de permettre le suivi et la mesure des variations d'efficacité et de productivité des années successives ;
- ▶ de permettre aux décideurs et partenaires nationaux et internationaux d'orienter les investissements en tenant compte des directions de référence et des sources d'inefficacité.

10.2 Indicateurs de performance du système national de la santé

Pour définir les facteurs de production et les produits résultants à prendre en compte, il nous semble important de suivre les indicateurs de performance sanitaire et l'organisation administrative et fonctionnelle du système national de santé.

L'organisation administrative¹ du système de santé comprend 3 niveaux :

- le premier niveau qui est le niveau central (directions centrales) organisé autour du ministre de la santé et du secrétaire général du ministère de la santé ;
- le niveau intermédiaire qui comprend les directions régionales de la santé ;
- le niveau périphérique représenté par les districts qui sont les entités opérationnelles les plus décentralisées du système national de santé.

L'organisation et le fonctionnement des structures de soins (publics) comprennent trois niveaux qui assurent les soins primaires, secondaires et tertiaires.

Le premier niveau est constitué par le district sanitaire qui comprend deux échelons de soins :

- le Centre de Soins et de Promotion Sociale (CSPS) structure de base du système sanitaire ;
- le Centre Médical avec Antenne chirurgicale (CMA), qui sert de référence pour les formations sanitaires du district².

Le deuxième niveau est représenté par le Centre Hospitalier Régional (CHR), qui sert de référence et de secours aux CMA.

Le troisième niveau est constitué par le Centre Hospitalier National (CHN), qui est le niveau de référence le plus élevé pour les soins spécialisés ; il sert également de cadre de formation aux différentes catégories de personnel et de recherche.

Le Gouvernement Burkinabé, à travers, le *Plan National de Développement Sanitaire (PNDS)*, définit, pour la période 2001-2010, les grandes orientations pour le développement de la santé, et son objectif global est de réduire la morbidité et la mortalité au sein des populations. Pour atteindre cet objectif global, huit objectifs intermédiaires sont définis :

- accroître la couverture sanitaire nationale ;
- améliorer la qualité et l'utilisation des services de santé ;
- renforcer la lutte contre les maladies transmissibles et les maladies non transmissibles ;
- réduire la transmission du VIH/SIDA ;

¹ *Plan National de Développement Sanitaire 2001-2010, Juillet 2001, Burkina Faso*

² Certains districts sanitaires sont centrés sur des Centres Hospitaliers Régionaux (CHR)

- développer les ressources humaines en santé ;
- accroître les financements du secteur de la santé ;
- renforcer les capacités institutionnelles du ministère de la santé.

L'analyse des ressources en santé montre que :

- la couverture en infrastructures sanitaires se caractérise par une insuffisance et une inégalité dans la répartition des formations sanitaires selon les régions et par rapport aux normes définies ;
- les effectifs disponibles en personnel du secteur sanitaire public ne couvrent pas les besoins du pays. En plus, il y a une disparité notoire dans la répartition du personnel entre d'une part, les grandes villes (Ouagadougou et Bobo-Dioulasso) et d'autre part, le reste du pays ;
- la mortalité générale est élevée et est essentiellement due aux taux élevés de mortalité infantile, infanto-juvénile et maternelle.

Dans ces études de cas, nous définissons les variables inputs et les variables outputs à partir de ces indicateurs de suivi et d'évaluation des performances du système sanitaire, définis dans le PNDS, de sorte à tenir compte des objectifs intermédiaires pour le développement de ce secteur.

Les variables définies permettent de prendre en compte :

- les renforcements de la lutte contre les maladies transmissibles et les maladies non transmissibles particulièrement la réduction de la mortalité globale, et la mortalité maternelle en particulier, ainsi que les taux de couverture en accouchements assistés par du personnel qualifié de santé ;
- le programme élargi de vaccination (PEV) notamment :
 - contre la tuberculose avec le “*Bacille de Calmette et Guérin (BCG)*” ;
 - contre le tétanos avec le “*Diphtérie-Tétanos-Coqueluche-Poliomyélite (DTCP3)*” ;
 - contre la rougeole avec le “*Vaccin Anti-Rougeoleux (VAR)*” ;
 - contre la fièvre jaune avec le “*Vaccin Anti-Amaril (VAA)*” ;
- l'amélioration de la qualité et l'utilisation des services de santé, notamment les CSPS

respectant les normes minimales en personnel.

10.3 Etude de cas 1 : mesure des efficacités de performance et de changements de performance des régions sanitaires en 2003 et en 2004

10.3.1 Modèle, variables et données

Nous avons utilisé le modèle CCR à orientation output (cf. chapitre 2, section 2.2) et pour tenir compte des spécificités de certaines variables, en particulier les variables outputs indésirables (cf. chapitre 2, section 2.3), nous avons fait les transformations nécessaires pour pouvoir appliquer DEA. Les données que nous utilisons dans cette étude de cas sont celles publiées par le ministère de santé dans les annuaires statistiques de la santé en 2003 et en 2004.

Pour mesurer les performances au niveau régional , 5 variables ont été définies en tenant compte des indicateurs de performance du système national de la santé. Il s'agit de :

- X_1 variable input : cette variable est calculée à partir du ratio le nombre de CMA/le nombre d'habitants de la région. Les données ont ensuite été normalisées en divisant par la valeur la plus grande des deux années puis multiplier par 100.
- X_2 variable input : c'est le pourcentage des CSPS respectant les normes minimales en personnel. Cette variable mesure l'efficacité des affectations du personnel de santé dans un CSPS en fonction de la demande c-à-d. que l'affectation du personnel de santé dans un CSPS doit traduire les besoins réels de celui-ci.
- Y_1 variable output désirable : elle correspond au taux de couverture en accouchements assistés par du personnel qualifié de la santé. C'est un produit du système de la santé supposé désirable dans la mesure où l'objectif est d'avoir une couverture totale en accouchements assistés par du personnel qualifié de la santé.
- Y_2 variable output indésirable : c'est le taux de mortalité maternelle pour 10.000. Les valeurs ont été transformées par translation (cf. remarque ci-dessous pour les transformations utilisées) puis normalisées. Cette variable est indésirable dans la mesure où

l'objectif du système de santé est de ne pas avoir de mortalité maternelle.

► Y_3 variable output indésirable : c'est le nombre de décès pour 1000 en hospitalisation. Les valeurs ont été transformées par translation (cf. remarque ci-dessous pour les transformations utilisées) puis normalisées. Cette variable est indésirable dans la mesure où l'objectif du système de santé est de ne pas avoir de décès en hospitalisation.

Nous n'avons pas considéré ici les facteurs relatifs aux vaccinations de la population parce que les données ne sont pas disponibles par région et ce sont les districts qui contrôlent les opérations de vaccination.

Remarque . *Nous avons considéré l'approche de transformation des variables outputs indésirables proposée par Seiford et Zhu en 2002 (cf. chapitre 2, section 2.3) ou (cf. [92]) pour pouvoir appliquer les modèles DEA. Soit Y , une variable output indésirable ; pour appliquer le modèle DEA, nous déterminons un vecteur $Z > 0$, tel que $\bar{Y} = Z - Y > 0$. Pour appliquer DEA, ce sont les valeurs du vecteur $\bar{Y}$ qui sont considérées à la place de celles de Y . En effet, puisque $\bar{Y} = Z - Y$, en maximisant les valeurs de $\bar{Y}$, nous minimisons les valeurs de Y qui sont indésirables. Nous appliquons donc ces transformations par translation pour les facteurs outputs indésirables. Nous avons considéré Z tel que*

$$z_r = 1 + \max_j \{y_{rj}\}$$

avec j représentant les régions pour les deux années ; pour la normalisation, nous avons divisé par la plus grande valeur des deux années pour chaque facteur à normaliser.

Les données sanitaires par région pour les deux années 2003 et 2004 sont présentées en annexe E (cf. tableau E.1). En moyenne, on remarque que les valeurs des outputs ont augmenté, ce qui implique une amélioration en rendements des services de soins. Le facteur input 1 a augmenté en moyenne pendant la même période tandis que le facteur input 2 a diminué. Il y a de grands écarts de valeurs entre les différentes régions. La synthèse des données des régions sanitaires est présentée au tableau 10.1 ; on remarque par exemple que :

- 9 régions en 2003 et en 2004, soit 69.23% de l'ensemble, ont des valeurs du fac-

teur input 1 en dessous de la moyenne de l'ensemble. Ce facteur, le ratio nombre de CMA/nombre d'habitants, indique que plus la valeur est petite plus il y a un nombre important d'habitants par CMA dans la région.

- 7 régions en 2003 et en 2004, soit 53.85% de l'ensemble, ont produit le facteur output 3 en dessous de la moyenne de l'ensemble. Ce facteur output mesure le nombre de décès en hospitalisation dans une région donnée. Avec la translation effectuée, les valeurs impliquent que plus la valeur de ce facteur est grande moins il y a de décès en hospitalisation pour 1000.

	X_1		X_2		Y_1		Y_2		Y_3	
	2003	2004	2003	2004	2003	2004	2003	2004	2003	2004
Maximum	59.48	100	89.29	88.14	62.54	57.50	100	99.26	100	92.58
Minimum	22.00	26.85	43.48	27.06	20.76	34.79	0.06	60.46	1.44	35.39
Moyenne	32.50	44.59	70.97	64.42	43.22	47.39	82.14	86.68	52.39	62.00
Ecart-type	9.59	21.93	11.72	16.41	11.31	6.73	25.56	12.01	25.18	17.74

Tableau 10.1 – Synthèse des données sanitaires des régions en 2003 et en 2004

10.3.2 Résultats et analyses des efficacités de performance des régions sanitaires en 2003 et en 2004

Pour mesurer les efficacités techniques des différentes unités (régions ou districts), le modèle CCR à orientation output est utilisé en tenant compte de la présence de facteurs indésirables et non contrôlables. Le tableau 10.2 présente les scores d'efficacités des 13 directions régionales, les différents indices de mesure de changements et l'indice de productivité de Malmquist (cf. chapitre 3, section 3.3). Comme précédemment (cf. chapitre 9), E représente l'indice de mesure de changement d'efficacité technique, T l'indice de mesure de changement de technologie de production, et M l'indice de productivité de Malmquist de l'année 2003 par rapport à 2004.

Remarque . Pour calculer ces différents indices nous avons utilisé le théorème 2.1 (cf. chapitre 2, section 2.2) qui donne la relation entre les valeurs des scores d'efficacités techniques en utilisant le modèle CCR à orientation input et celles en utilisant le modèle

CCR à orientation output. Ainsi, pour calculer les indices il suffit de considérer les valeurs inverses des scores d'efficacité technique et procéder comme dans la section 3.3 du chapitre 3.

Efficacités techniques en 2003 : (1^{ère} colonne du tableau 10.2) les résultats donnent, 3 régions (Hauts-Bassins, Nord et Plateau- Central) qui sont techniquement efficaces. En moyenne, l'ensemble des régions devrait produire 34.09% de plus (score moyen = 1.3409) des facteurs outputs pour être efficace. Les régions les plus éloignées de leurs performances optimales ont été le Sahel avec un score de 1.9332, le Sud-Ouest avec un score de 1.7457 et l'Est avec un score de 1.6039. Ceci signifie respectivement que ces régions devraient produire 193.32%, 174.57% et 160.39% respectivement de leurs outputs actuels pour devenir efficaces. La région du centre devrait produire 14.30% de plus des facteurs outputs pour être techniquement efficace.

Efficacités techniques en 2004 : (2^{ième} colonne du tableau 10.2) 2 régions seulement sont techniquement efficaces, ce sont les régions de l'Est et du Plateau Central. La moyenne du score d'efficacité technique est de 1.4096, ce qui signifie que l'ensemble des régions devrait produire 40.96% de plus pour avoir toutes les régions sur la frontière efficace de production. Les régions qui ont connu de grandes différences par rapport à leurs performances optimales potentielles sont les régions de Sud-Ouest avec un score de 2.2790, du Centre avec un score de 2.0681, du Centre-Est avec un score de 2.0150, de la Boucle du Mouhoun avec un score de 1.6314. Ces régions devraient produire 127.90%, 106.81%, 101.50% et 63.14% respectivement de leurs outputs actuels pour être sur la frontière efficace. La région des Hauts-Bassins a un score de 1.0334, ce qui signifie que cette région devrait produire de 3.34% de plus pour être efficace.

Variations en efficacité technique (E) de 2003 à 2004 : les résultats sur les changements en efficacité technique E montrent que :

- le Plateau Central n'a pas connu de changement en efficacité technique ;
- 5 régions seulement ont connu un gain positif en efficacité technique. Ce sont les régions des Cascades avec un indice $E = 1.2470$, le Centre-Ouest avec un indice $E =$

1.3377, le Centre-Sud avec un indice $E = 1.1260$, l'Est avec un indice $E = 1.6039$, le Sahel avec un indice $E = 1.3191$. En moyenne, l'ensemble des régions a obtenu un indice de mesure de changement en efficacité technique $E = 1.0131$.

– Parmi les 7 régions qui ont connu une perte en efficacité technique, les régions du Centre et des Hauts-Bassins ont obtenus des indices E respectivement de 0.5527 et 0.9677 (pertes).

Variations de technologie de production (T) de 2003 à 2004 : les résultats sur les changements de technologie de production (T) montrent que :

– en moyenne l'ensemble des régions a obtenu un indice de changement de technologie $T = 1.0060$;

– 6 régions ont obtenu un gain de technologie de production. Ce sont les régions, Boucle du Mouhoun avec un indice $T = 1.0760$, Centre avec un indice $T = 1.2736$, Centre-Est avec un indice $T = 1.2057$, Centre-Nord avec un indice $T = 1.0653$, Plateau Central avec un indice $T = 1.2729$, Sud-Ouest avec un indice $T = 1.3636$.

– Parmi les 7 autres régions, la région des Hauts-Bassins a connu une perte avec un indice $T = 0.7533$.

Variations de productivité (M) de 2003 à 2004 : les résultats sur les changements de productivité (M) montrent que :

– en moyenne, l'ensemble des régions a connu une perte de productivité avec un indice moyen de Malmquist $M = 0.9746$.

– 8 régions ont connu un gain de productivité avec des indices de Malmquist $M > 1$.

– Parmi les 5 autres régions, les régions du Centre et des Hauts Bassins ont connu une perte en productivité avec des indices de Malmquist de 0.7038 et 0.7290 respectivement. Ces différents résultats montrent que sur le plan régional, et avec les facteurs inputs et outputs considérés, il reste beaucoup d'effort à faire, et qu'il existe des écarts énormes d'inefficacités de performance d'une région à l'autre (région à grands centres urbains ou région en grande partie rurale).

Régions sanitaires	$\Delta^1(w^1)$ 2003	$\Delta^2(w^2)$ 2004	$\Delta^1(w^2)$	$\Delta^2(w^1)$	E	T	M
Boucle du Mouhoun	1.3215	1.6314	1.3579	1.2733	0.8100	1.0760	0.8715
Cascades	1.3124	1.0525	1.1682	1.0037	1.2470	0.8301	1.0351
Centre	1.1430	2.0681	1.2168	1.0907	0.5527	1.2736	0.7038
Centre-Est	1.2786	2.0150	1.0765	0.9931	0.6345	1.2057	0.7651
Centre-Nord	1.1126	1.1670	1.2911	1.3968	0.9533	1.0653	1.0156
Centre-Ouest	1.4845	1.1097	1.3663	1.0583	1.3377	0.7610	1.0179
Centre-Sud	1.4967	1.3293	1.0440	1.0800	1.1260	0.9585	1.0793
Est	1.6039	1.0000	1.0618	1.1533	1.6039	0.8229	1.3198
Hauts Bassins	1.0000	1.0334	1.3341	0.7326	0.9677	0.7533	0.7290
Nord	1.0000	1.1734	0.9961	0.6895	0.8522	0.9013	0.7681
Plateau Central	1.0000	1.0000	0.5343	0.8656	1.0000	1.2729	1.2729
Sahel	1.9332	1.4655	1.6031	1.3330	1.3191	0.7939	1.0473
Sud Ouest	1.7457	2.2790	1.5815	2.2526	0.7660	1.3636	1.0445
Maximum	1.9332	2.2790	1.6031	2.2526	1.6039	1.3636	1.3198
Minimum	1.0000	1.0000	0.5343	0.6895	0.5527	0.7533	0.7038
Moyenne	1.3409	1.4096	1.2024	1.1479	1.0131	1.0060	0.9746
Ecart-Type	0.2991	0.4494	0.2786	0.3932	0.3034	0.2171	0.1973

1 pour 2003 et 2 pour 2004

$\Delta^1(w^1)$ et $\Delta^2(w^2)$ représentent les scores d'efficacité technique pour 2003 et pour 2004 respectivement.

Tableau 10.2 – Indices de Malmquist des régions sanitaires

10.4 Etude de cas 2 : mesure des efficacités de performance et de changements de performance des districts sanitaires en 2003 et en 2004

10.4.1 Modèle, variables et données

Pour mesurer les performances au niveau district sanitaire, 6 variables ont été définies pour appliquer DEA. Il s'agit de :

- X_1 variable input : cette variable est calculée à partir du ratio le nombre de CSPS/le nombre d'habitants du district. Les valeurs ont ensuite été normalisées en divisant par la plus grande valeur des deux années.
- X_2 variable input : c'est le pourcentage de CSPS respectant les normes minimales en personnel.
- Y_1 variable output désirable : elle correspond au taux de couverture en accouchements assistés par du personnel qualifié.
- Y_2 variable output indésirable : c'est le taux de mortalité maternelle pour 10.000. Les valeurs ont été transformées par translation puis normalisées (cf. remarque ci-dessus

dans l'étude de cas 1 pour les transformations par translation).

► Y_3 variable output indésirable : c'est le nombre de décès en hospitalisation pour 1000. Les valeurs ont été transformées par translation puis normalisées (cf. remarque ci-dessus dans l'étude de cas 1 pour les transformations par translation).

► Y_4 variable output désirable : c'est la moyenne arithmétique des taux de couvertures vaccinales en BCG, DCTP3, VAA et VAR. Ce facteur output est désirable dans la mesure où il faut le maximiser pour répondre aux objectifs des programmes élargis de vaccination (PEV).

Les données sanitaires par district pour 2003 et 2004 sont présentées en annexe E (cf. tableau E.2). De même que pour les régions sanitaires, en moyenne, les outputs ont augmenté en 2004 comparés à 2003. Ce qui implique également une amélioration des rendements des services de soins. En ce qui concerne les facteurs inputs, on constate que l'input 1 a augmenté (faiblement) en moyenne pendant la même période et le facteur input 2 a diminué. La synthèse des données des districts sanitaires est présentée au tableau 10.3, de même que le constat au niveau régional, il y a de grands écarts de valeurs entre les différents districts :

- pour la variable input X_1 , le nombre de districts présentant des quantités en dessous de la moyenne de l'ensemble est de 27 sur 52 (51.92%) en 2003 et de 27 sur 55 (49.09%) en 2004. Ce facteur, ratio nombre de CSPS/nombre d'habitant, indique que plus la valeur est petite plus il y a un nombre important d'habitants par CSPS dans le district.
- pour la variable input X_2 , le nombre de districts présentant des quantités en dessous de la moyenne de l'ensemble est de 23 sur 52 (44.23%) en 2003 et de 27 sur 55 (49.09%) en 2004. Ce facteur représente le pourcentage de CSPS respectant les normes minimales en personnel.
- pour la variable output Y_1 , le nombre de districts présentant des quantités en dessous de la moyenne de l'ensemble est de 30 sur 52 (57.69%) en 2003 et de 35 sur 55 (63.64%) en 2004. Ce facteur représente le taux de couverture en accouchements assistés par du personnel qualifié de la santé.
- pour la variable output Y_2 , le nombre de districts présentant des quantités en dessous de

la moyenne de l'ensemble est de 12 sur 52 (23.08%) en 2003 et de 19 sur 55 (34.55%) en 2004. Ce facteur mesure la mortalité maternelle dans le district. Avec les transformations apportées, plus la valeur de cette variable est grande moins il y a de mortalité maternelle pour 10.000 dans le district.

- pour la variable output Y_3 , le nombre de districts présentant des quantités en dessous de la moyenne de l'ensemble est de 26 sur 52 (50%) en 2003 et de 35 sur 55 (54.55%) en 2004. Ce facteur mesure les décès en hospitalisation. La translation effectuée fait que plus la valeur de cette variable est grande moins il y a de décès en hospitalisation pour 1000 dans le district.

- pour la variable output Y_4 , le nombre de districts présentant des quantités en dessous de la moyenne de l'ensemble est 26 sur 52 (50%) en 2003 et de 35 sur 55 (54.55%) en 2004. Ce facteur représente la moyenne arithmétique des taux de couverture en BCG, DCTP3, VAA et VAR.

	X_1		X_2		Y_1		Y_2		Y_3		Y_4	
	2003	2004	2003	2004	2003	2004	2003	2004	2003	2004	2003	2004
Maximum	87.56	100	100	100	106.97	100.76	100	100	100	91.44	107.35	114.46
Minimum	21.12	10.18	30.77	9.68	4.19	10.07	0.03	57.19	0.70	27.28	52.11	62.32
Moyenne	45.27	45.55	71.14	69.72	31.62	33.65	89.69	93.19	56.61	62.27	77.73	88.95
Ecart-type	13.50	15.13	17.22	22.49	19.27	17.24	18.27	8.89	17.48	14.71	12.36	11.12

Tableau 10.3 – Synthèse des données sanitaires des districts en 2003 et en 2004

10.4.2 Résultats et analyses des efficacités de performance des districts sanitaires en 2003 et en 2004

Le tableau 10.4 présente les scores d'efficacité technique des différents districts et les différents indices composants de l'indice de Malmquist. De même que les résultats au niveau régional, E représente l'indice de mesure de changement en efficacité technique, T l'indice de changement de technologie de production et M l'indice de productivité de Malmquist, de l'année 2003 par rapport à 2004. On constate les résultats suivants :

Efficacités techniques en 2003 : (1^{ère} colonne du tableau 10.4) 7 districts apparaissent techniquement efficaces sur les 52 districts que compte le système de la santé soit seule-

ment 13.46% de l'ensemble des districts en 2003. Ce sont les districts (Kossodo, Paul VI, Secteur 30) de la province du Kadiogo, le district de Zabre de la province du Boulgou, le district de Kongoussi de la province de Bam, le district du secteur 22 (Bobo) de la province du Houet et le district de Yako de la province du Passore. Le score moyen d'efficacité technique est de 1.3948, ce qui signifie qu'en moyenne, l'ensemble des districts devrait produire 39.48% de plus des facteurs outputs pour que tous les districts soient techniquement efficaces. 17 districts (32.69% des districts) devraient produire au moins plus de 50% pour être efficaces et parmi ces districts, 5 devraient produire au moins plus de 75% dont 3 au moins plus de 100%. Ces trois derniers sont Po de la province du Nahouri avec un score de 2.0312, Gorom-Gorom de la province de Oudalan avec un score de 2.2587 et le district de Batie de la province du Nounbiel avec un score de 2.0107.

Efficacités techniques en 2004 : (2^{ième} colonne du tableau 10.4) 8 districts sont techniquement efficaces sur les 55 districts en 2004 soit environ 14.55% seulement de l'ensemble des districts sanitaires. Ce sont les districts (Kossodo, Pissy, Secteur 30) de la province du Kadiogo, le district de Tenkodogo de la province du Boulgou, le district de Kongoussi de la province de Bam, le district de Sapone de la province de Bazega, le district de Zorgho de la province du Ganzourgou et le district de Djibo de la province de Soum. Le score moyen d'efficacité technique est de 1.3406, ce qui signifie qu'en moyenne, l'ensemble des districts en 2004 devrait produire 34.06% de plus des outputs. 11 districts (20% des districts) devraient produire au moins plus de 50% pour être efficaces et parmi ces districts, 3 devraient produire au moins plus de 75%. Ces trois derniers sont le district de Sindou – qui est un nouveau district en 2004 – avec un score de 2.0157, le district de Gorom-Gorom de la province de Oudalan avec un score de 1.8732, et le district de Batie de la province du Nounbiel avec un score de 1.7798.

Variations en efficacité technique (E) de 2003 à 2004 : les résultats sur les changements en efficacité technique (E) montrent que :

– 21 districts sur 52 ont connu une perte en efficacité technique soit environ 40.39% ; 3 districts n'ont par connu de changement en efficacité technique ; 28 ont connu un gain

en efficacité technique.

- en moyenne l'ensemble des districts a connu un gain en efficacité technique avec un indice moyen $E = 1.0512$.

Variations de technologie de production (T) de 2003 à 2004 : les résultats sur les changements de technologie de production (T) montrent que :

- 11 districts ont connu une perte en technologie de production et 41 districts ont connu un gain en technologie de production.
- en moyenne l'ensemble des districts a connu un gain de technologie de production avec un indice moyen $T = 1.1097$.

Variations de productivité (M) de 2003 à 2004 : les résultats sur les changements moyens de productivité (M) montrent que :

- 13 districts ont connu une perte de productivité en 2004 comparée à 2003 ;
- 39 districts ont connu un gain de productivité en 2004 comparée à 2003 ;
- l'ensemble du système à travers les districts sanitaires a connu un gain de productivité avec un indice moyen de productivité de Malmquist de 1.1683.

Ces résultats montrent qu'à travers les districts, et relativement aux facteurs inputs et outputs que nous avons considéré dans ces modèles, le système a connu un gain (faible) en productivité. En moyenne, nous retrouvons aussi des différences énormes sur les variations des efficacités techniques et de technologie de production. On remarque par exemple, que seulement 3 districts sont techniquement efficaces pour les deux années. Les districts de Kossodo et du secteur 30 de Ouagadougou, de la province du Kadiogo et le district de Kongounssi de la province de Bam. 3 sur les 52 qui ont fonctionné durant ces deux années, soit 5.77%, ce qui montre une certaine fragilité pour la croissance des performances du système national de santé.

Districts sanitaires	$\Delta^1(w^1)$ 2003	$\Delta^2(w^2)$ 2004	$\Delta^1(w^2)$	$\Delta^2(w^1)$	E	T	M
Solenzo	1.1650	1.2453	1.2148	1.2253	0.9355	1.0384	0.9714
Nouna	1.1232	1.3958	1.2124	1.0081	0.8047	1.0165	0.8180
Boromo	1.7271	1.7179	1.3997	1.9397	1.0053	1.1740	1.1803
Dedougou	1.4444	1.3513	1.2693	1.5192	1.0689	1.0582	1.1311
Toma	1.5217	1.7085	1.6797	1.5073	0.8907	1.0037	0.8940
Tougan	1.7033	1.5676	1.5589	1.6472	1.0866	0.9861	1.0715
Banfara	1.9504	1.5620	1.4742	1.9401	1.2487	1.0266	1.2819
Sindou	1.7687	2.0157	1.4024	2.1015	0.8775	1.3068	1.1467
Ouaga :Kossodo	1.0000	1.0000	0.4127	0.7679	1.0000	1.3640	1.3640
Ouaga :Paul VI	1.0000	1.2584	1.1265	0.9024	0.7947	1.0040	0.7978
Ouaga :Pissy	1.1568	1.0000	0.8643	1.0263	1.1568	1.0132	1.1720
Ouaga :Secteur 30	1.0000	1.0000	0.7890	0.9930	1.0000	1.1218	1.1218
Koupela	1.2943	1.3158	1.1665	1.1812	0.9837	1.0146	0.9980
Ouargaye	1.4260	1.3325	1.3442	1.3138	1.0702	0.9557	1.0227
Tenkodogo	1.2530	1.0000	1.0327	1.2164	1.2530	0.9695	1.2148
Zabre	1.0000	1.2253	1.2927	1.0919	0.8161	1.0173	0.8303
Kongoussi	1.0000	1.0000	0.9454	0.9604	1.0000	1.0079	1.0079
Boulssa	1.2033	1.2309	1.0237	1.3029	0.9776	1.1410	1.1154
Barsalogho	1.4040	1.5204	1.2411	1.6157	0.9234	1.1874	1.0964
Kaya	1.2813	1.2668	1.1773	1.1791	1.0115	0.9950	1.0065
Koudougou	1.5255	1.0150	1.0488	1.6871	1.5030	1.0346	1.5549
Nanoro	1.4604	1.3811	1.3102	1.5171	1.0574	1.0465	1.1065
Reo	1.4546	1.3684	1.2803	1.3838	1.0630	1.0084	1.0719
Leo	1.7114	1.4646	1.4649	1.6847	1.1686	0.9920	1.1593
Kombissiri	1.4706	1.1752	1.2135	1.4914	1.2513	0.9911	1.2401
Sapone	1.0072	1.0000	0.6912	0.9909	1.0072	1.1930	1.2016
Po	2.0312	1.4078	0.7412	1.8131	1.4429	1.3020	1.8787
Manga	1.6522	1.0994	0.6889	1.6346	1.5028	1.2566	1.8884
Fada	1.2874	1.1103	1.1495	1.1259	1.1595	0.9191	1.0657
Bogande	1.2349	1.4237	1.2264	1.3440	0.8674	1.1240	0.9750
Pama	1.3009	1.5702	1.4439	1.3689	0.8285	1.0697	0.8863
Diapaga	1.0750	1.1589	0.8840	1.2493	0.9276	1.2343	1.1450
Dande	1.7189	1.3873	1.4242	1.6757	1.2390	0.9745	1.2074
Bobo :Secteur 15	1.7179	1.4966	1.4260	1.5677	1.1478	0.9787	1.1233
Bobo :Secteur 22	1.0000	1.2966	0.9726	1.2216	0.7712	1.2762	0.9842
Orodara	1.4389	1.3942	0.9311	1.6197	1.0320	1.2983	1.3398
Hounde	1.3061	1.3875	1.2139	1.4932	0.9413	1.1432	1.0761
Titao	1.3891	1.5833	1.5906	1.5031	0.8773	1.0378	0.9105
Yako	1.0000	1.3465	0.8029	0.7892	0.7426	1.1505	0.8544
Ouahigouha	1.2786	1.0703	0.9829	1.3856	1.1947	1.0863	1.2978
Seguenega	1.6081	1.3160	1.4152	1.6316	1.2220	0.9713	1.1869
Zorgho	1.5473	1.0000	0.2718	1.5300	1.5473	1.9073	2.9511
Bousse	1.5326	1.3453	1.3970	1.5006	1.1393	0.9710	1.1062
Ziniare	1.1254	1.4516	0.8948	1.4874	0.7753	1.4642	1.1352
Gorom	2.2587	1.8732	1.7837	2.2287	1.2058	1.0180	1.2274
Dori	1.0599	1.3729	0.9126	1.4425	0.7720	1.4309	1.1047
Djibo	1.3558	1.0000	0.8048	1.3116	1.3558	1.0964	1.4865
Sebba	1.3015	1.4530	1.0056	1.1681	0.8957	1.1387	1.0200
Dieboucou	1.6238	1.7411	1.7507	1.6440	0.9326	1.0035	0.9358
Dano	1.4355	1.2920	1.1371	1.4674	1.1111	1.0777	1.1974
Batie	2.0107	1.7798	1.6672	2.0991	1.1297	1.0557	1.1926
Gaoua	1.1853	1.2526	1.2789	1.3400	0.9463	1.0523	0.9957
Sapouy*	-	1.2445	-	-	-	-	-
Gayeri*	-	1.3893	-	-	-	-	-
Gourcy*	-	1.3712	-	-	-	-	-
Maximum	2.2587	2.0157	1.7837	2.2287	1.5473	1.9073	2.9511
Minimum	1.0000	1.0000	0.2718	0.7679	0.7426	0.9191	0.7978
Moyenne	1.3948	1.3406	1.1622	1.4199	1.0512	1.1097	1.1683
Ecart-type	0.3025	0.2379	0.3219	0.3258	0.1982	0.1701	0.3326

* Nouveau district en 2004 ; 1 pour 2003 et 2 pour 2004

 $\Delta^1(w^1)$ et $\Delta^2(w^2)$ représentent les scores d'efficacité technique pour 2003 et pour 2004 respectivement.

Tableau 10.4 – Indices de Malmquist des districts sanitaires en 2003 et en 2004

10.5 Conclusion et perspectives

Cette étude utilisant l'approche DEA, appliquée au système national de santé du Burkina Faso, fait ressortir de grands écarts au niveau de l'utilisation des facteurs inputs. Ces facteurs inputs dans nos modèles concernent les CMA, les CSPS, le personnel des CSPS. Les résultats montrent qu'en moyenne le système national de la santé doit et peut produire plus. Tant au niveau régional qu'au niveau périphérique des districts, le système national de la santé devait produire les facteurs outputs pendant ces deux années de plus de 34%. Ces facteurs outputs concernent la mortalité maternelle, la couverture en accouchements assistés par du personnel qualifié de la santé, les décès en hospitalisation, la couverture en vaccination contre la tuberculose, contre le tétanos, contre la fièvre jaune et contre la rougeole (respectivement BCG, DCTP3, VAA et VAR). Ces résultats peuvent permettre de situer les responsabilités sur les faibles résultats pour une direction régionale ou pour un district par rapport aux objectifs préalablement établis par les directions centrales. Il nous semble important de souligner après cette application, le nombre faible de directions stables dans leur fonctionnement ; aussi bien au niveau régional qu'au niveau des districts, l'on remarque que, bien qu'il y ait quelques variations positives de performances, davantage de résultats devraient être atteints, certaines directions devant même augmenter leurs performances de plus de 100%.

En perspective, il serait intéressant d'inclure des données sur les difficultés d'accès aux centres de soins, les services offerts, les motivations (sociale, financière, religieuse, etc.) des femmes sur les types d'accouchements adoptés. Il serait aussi intéressant, nous le pensons, d'associer les mesures de performances pour sélectionner les meilleurs centres ou directions, ou encore, pour redistribuer des fonds ou ressources additionnelles. Par exemple, garder stables les facteurs de production des meilleurs unités, prendre en compte les unités de référence pour ajuster les facteurs de production des moins efficaces. Les informations fournies par les efficacités techniques et les indices de productivité peuvent être utilisées pour éclairer les responsables d'unité ou gestionnaires sur les meilleures pratiques et les sources d'inefficacité des unités inefficaces.

Chapitre 11

Analyse des performances de quelques entreprises au Burkina Faso

Dans ce chapitre, nous utilisons le modèle CCR à orientation output pour déterminer les efficacités de quelques entreprises burkinabé à produire un chiffre d'affaires à partir de leur capital financier. Nous utilisons les résultats obtenus pour établir une relation avec le ratio chiffre d'affaire/capital. Malgré que l'approche DEA est surtout intéressante pour s'appliquer à des mesures des efficacités de performance de sociétés lorsqu'il y a présence de multiples facteurs inputs et de multiples facteurs outputs, nous utilisons ici un unique facteur input et un unique facteur output, et cela par manque de données disponibles pour d'autres facteurs. Nous avons néanmoins ajouté un facteur catégoriel pour voir si les inefficacités de performance des sociétés dépendent de leur taille et/ou de leur zone d'implantation. Cette étude nous permet surtout de comparer la productivité du capital financier avec l'efficacité technique. C'est donc bien une étude de cas préliminaire que nous proposons ici en appliquant une approche DEA à quelques entreprises en fonction de leur type d'activité. Une perspective intéressante serait donc d'étendre ensuite cette analyse DEA en prenant en compte plusieurs facteurs inputs (tels capital, travail, main-d'oeuvre) et plusieurs outputs (tels biens et services). En section 11.1, nous présentons les différents groupes de sociétés que nous étudions et leurs catégories ; en section 11.2, nous présentons les relations entre la productivité (définition classique) et le score d'efficacité technique ; enfin, en section 11.3, nous donnons quelques commentaires relatifs aux résultats obtenus, ainsi qu'une conclusion.

11.1 Mesure des performances des entreprises

Pour mesurer les performances des entreprises que nous étudions, nous les distinguons par secteur d'activité, que nous classons en 5 groupes :

Groupe 1 : Commerces et assimilés

Dans ce groupe, 114 sociétés sont considérées ; ces sociétés sont enregistrées au niveau de la Chambre de Commerce, d'Industrie et d'Artisanat du Burkina Faso (CCIA-BF) pour l'une des activités présentes dans le tableau 11.1.

La synthèse des données relatives au capital et au chiffre d'affaires des sociétés de ce

Type d'activité	nombre de sociétés considérées
Commerce de gros	24
Commerce de demi gros	27
Commerce de détail	10
Petit commerce	3
Informatique et télécommunications	10
Transports, entrepôts et communications	23
Hôtels et restaurants	5
Autres services marchands	11
Total	113

Tableau 11.1 – Activités du groupe 1

groupe est présentée au tableau 11.2.

	Capital en FCFA	Capital normalisé	Chiffre d'affaire en FCFA	Chiffre d'affaire normalisé
Maximum	1 000 000 000	100	66 985 080 827	100
Minimum	1 000 000	0.100	2 355 925	0.004
Moyenne	77 175 525.35	7.718	1 725 433 957.66	2.576
Ecart-Type	185 350 671.16	18.535	6 725 824 661.51	10.041
Quartile 1 (25%)	2 000 000	0.20	80 198 620	0.12
Quartile 2 (50%)	7 000 000	0.70	259 761 695	0.39
Quartile 3 (75%)	39 120 000	3.91	912 000 000	1.36

Tableau 11.2 – Synthèse des données du groupe 1

Pour ces différentes sociétés, nous avons fixé différentes catégories 1, 2, 3, 4, 5 comme indiquées au tableau 11.3.

Société	localisée en zone semi-urbaine	localisée en zone urbaine
taille petite ($CN \leq Q1$)	1	2
taille moyenne ($Q1 < CN \leq Q2$)	*	3
taille grande ($Q2 < CN \leq Q3$)	*	4
taille très grande ($CN > Q3$)	*	5

* aucune société ne correspond

(CN : Capital normalisé ; Q1, Q2, Q3 quartiles)

Tableau 11.3 – Catégories du groupe 1

Groupe 2 : Banques, Assurances et Etablissements financiers

12 sociétés sont enregistrées comme telles et considérées dans notre application. La synthèse des données relatives au capital et chiffre d'affaires est présentée au tableau 11.4.

	Capital en FCFA	Capital normalisé	Chiffre d'affaire en FCFA	Chiffre d'affaire normalisé
Maximum	2 000 000 000	100	9 654 261 000	100
Minimum	10 000 000	0.50	300 000 000	3.11
Moyenne	707 532 500	35.38	3 330 537 341.83	34.50
Ecart-Type	674 476 719.01	33.72	2 951 721 752.06	30.57
Quartile 1 (25%)	237 500 000	11.88	1 347 078 705.50	13.95
Quartile 2 (50%)	500 000 000	25.00	2 157 757 241	22.35
Quartile 3 (75%)	1 125 000 000	56.25	5 341 213 425.50	55.32

Tableau 11.4 – Synthèse des données du groupe 2

Quatre catégories (1, ..., 4) de ces différentes sociétés sont définies en fonction des quartiles par :

- catégorie 1 pour le capital normalisé ≤ 11.88 ;
- catégorie 2 pour le capital normalisé ≤ 25 ;
- catégorie 3 pour le capital normalisé ≤ 56.25
- catégorie 4 pour le capital normalisé > 56.25 .

Groupe 3 : Bâtiments, TP et assimilés

26 sociétés de bâtiments et travaux publics, ou considérées comme telles, forment ce groupe. La synthèse des données est présentée au tableau 11.5.

	Capital en FCFA	Capital normalisé	Chiffre d'affaire en FCFA	Chiffre d'affaire normalisé
Maximum	200 000 000	100	1 365 757 791	100
Minimum	1 000 000	0.50	20 000 000	1.46
Moyenne	17 157 692.31	8.58	315 856 703.77	23.13
Ecart-Type	42 217 135.60	21.11	342 482 776.03	25.08
Quartile 1 (25%)	2 000 000.00	1.00	63 098 457.75	4.62
Quartile 2 (50%)	2 500 000.00	1.25	209 336 412.00	15.33
Quartile 3 (75%)	10 000 000.00	5.00	447 500 000.00	32.77

Tableau 11.5 – Synthèse des données du groupe 3

Pour ces différentes sociétés, nous avons fixé différentes catégories 1,2,3,4 comme indiquées au tableau 11.6.

Société	localisée en zone semi-urbaine	localisée en zone urbaine
taille petite ($CN \leq Q1$)	1	2
taille moyenne ($Q1 < CN \leq Q2$)	*	*
taille grande ($Q2 < CN \leq Q3$)	*	3
taille très grande ($CN > Q3$)	*	4

* aucune société ne correspond

(CN : Capital normalisé ; Q1, Q2, Q3 quartiles)

Tableau 11.6 – Catégories du groupe 3

Groupe 4 : Industries et assimilées

44 sociétés sont considérées dans ce groupe ; il s'agit de sociétés enregistrées pour l'une des activités présentes dans le tableau 11.7.

Type d'activité	nombre de sociétés considérées
Industrie agro-alimentaire	10
Industrie chimique	12
Industrie des produits minéraux et industries métallurgiques de base	4
Industrie du textile et du papier	11
Industrie du bois, des métaux et industries diverses	6
Métiers de la forge, métaux et assimilés	1
Total	44

Tableau 11.7 – Activités du groupe 4

La synthèse des données est présentée au tableau 11.8.

Pour ces différentes sociétés, nous avons fixé différentes catégories 1,2,3,4 comme indiquées au tableau 11.9.

	Capital en FCFA	Capital normalisé	Chiffre d'affaire en FCFA	Chiffre d'affaire normalisé
Maximum	6 031 050 000	100	205 000 000 000	100
Minimum	1 000 000	0.02	30 000 000	0.01
Moyenne	690 474 200	11.45	7 746 953 179.77	3.78
Ecart-Type	1 305 934 042.74	21.65	31 168 508 670.83	15.20
Quartile 1 (25%)	5 000 000	0.08	137 281 452.50	0.07
Quartile 2 (50%)	50 375 000	0.84	514 382 147	0.25
Quartile 3 (75%)	805 619 700	13.36	3 423 728 867	1.67

Tableau 11.8 – Synthèse des données groupe 4

Taille de la société	petite ($CN \leq Q1$)	moyenne ($Q1 < CN \leq Q2$)	grande ($Q2 < CN \leq Q3$)	très grande ($CN > Q3$)
Catégorie	1	2	3	4

(CN : Capital normalisé ; Q1, Q2, Q3 quartiles)

Tableau 11.9 – Catégories du groupe 4

Groupe 5 : Sociétés de services d'études

Dans ce groupe, les données de 26 sociétés sont considérées. Il s'agit de sociétés de services d'études. Dans ce groupe, la synthèse des données relatives au chiffre d'affaire et au capital, et les données normalisées, sont présentées au tableau 11.10.

	Capital en FCFA	Capital normalisé	Chiffre d'affaire en FCFA	Chiffre d'affaire normalisé
Maximum	100 000 000	100	907 000 000	100
Minimum	1 000 000	1.00	9 800 000	1.08
Moyenne	10 434 615.38	10.43	171 156 313.46	18.87
Ecart-Type	19 740 049.49	19.74	226 497 090.07	24.97
Quartile 1 (25%)	2 000 000	2.00	33 883 192.25	3.74
Quartile 2 (50%)	2 650 000	2.65	89 427 459	9.86
Quartile 3 (75%)	10 000 000	10.00	178 503 271.75	19.68

Tableau 11.10 – Synthèse des données du groupe 5

Pour ces différentes sociétés, nous avons fixé différentes catégories 1,2,3,4 comme indiquées au tableau 11.11.

Les différentes données des facteurs considérés ici sont données dans l'annexe F.

Taille de la société	petite ($CN \leq Q1$)	moyenne ($Q1 < CN \leq Q2$)	grande ($Q2 < CN \leq Q3$)	très grande ($CN > Q3$)
Catégorie	1	2	3	4

CN : Capital normalisé

Tableau 11.11 – Catégories du groupe 5

11.2 Estimation de la relation entre productivité et efficacité technique

De façon classique, la productivité d'une entreprise est calculée à partir du rapport de sa production (produits) par un facteur de production. Les facteurs de production les plus couramment utilisés sont le capital, le travail, la main-d'oeuvre. La productivité du capital est le rapport entre sa production et le capital. Ici nous avons considéré comme production le chiffre d'affaires de la société et comme capital, le capital financier (actions) de cette société, ce qui donne la productivité du capital calculé comme étant le ratio chiffre d'affaires/capital. Plus ce ratio est élevé plus l'entreprise a une productivité élevée. Ce cas s'applique uniquement lorsqu'il s'agit d'une mesure avec un seul facteur de production (le capital) et un seul facteur output (le chiffre d'affaires). De façon générale, on peut inclure de multiples facteurs de production comme le capital humain, le capital naturel, le capital physique, le travail matériel ou immatériel (savoir-faire), etc. et de multiples facteurs outputs les biens et services (matériels ou immatériels) comme la satisfaction des clients, les nouveaux clients, le temps d'attente des clients, etc. Dans ces situations complexes, mais plus réalistes, l'approche DEA permet de mesurer les efficacités de production en y incluant tous ces facteurs. Ces mesures permettent de donner des interprétations de la productivité à partir de la frontière de production. Dans cette application, nous utilisons, la méthode DEA pour calculer les efficacités techniques des différentes entreprises, en utilisant deux facteurs principaux l'un de type input, le capital financier, l'autre de type output, le chiffre d'affaires, et additionnellement un facteur catégoriel (de l'entreprise) qui permet de comparer une entreprise uniquement avec celles qui sont de catégories inférieures ou égales à la sienne. La prise en compte de ce facteur, évite de comparer les entreprises avec d'énormes capitaux à celles avec de petits capitaux ou encore des sociétés en zones semi-urbaine à celles en zones urbaines où l'activité est plus intense. L'hypothèse que nous avons émise est que les entreprises (au

moins pour certains types d'activité) en zones urbaines ont plus d'avantages que celles de zones semi-urbaines ; les entreprises de grande taille ont plus d'avantages que celles de taille moyenne, ou petite taille.

Remarque . *Nous verrons cependant, par les différents résultats obtenus que ce facteur ne joue quasiment pas sur les efficacités de performance de certains types d'activité. Mais néanmoins nous avons gardé ce facteur catégoriel, d'une part pour mettre en évidence ce manque d'impact et d'autre part, dans la mesure où nous n'avons pas davantage de facteurs à inclure, faute de données disponibles.*

Groupe 1 : Commerces

En utilisant le modèle CCR à orientation output (cf. chapitre 2, section 2.2), nous obtenons les scores d'efficacité technique présentés dans le tableau 11.12.

Sté	Score	Ratio CA/C	Sté	Score	Ratio CA/C	Sté	Score	Ratio CA/C	Sté	Score	Ratio CA/C
1	86.8667	0.4479	2	6.1608	6.3447	3	89.5191	0.4356	4	37.2286	1.0450
5	5071.1353	0.0077	6	1798.1400	0.0220	7	87.2545	0.4479	8	1954.5000	0.0176
9	4.3241	9.0436	10	100.2693	0.3898	11	434.3333	0.0901	12	24.6469	1.5860
13	177.6818	0.2185	14	31.3724	1.2451	15	17.4509	2.2393	16	260.9558	0.1498
17	39.2207	0.9969	18	22.6215	1.7277	19	35.1083	1.1134	20	21.5967	1.8064
21	244.9467	0.1596	22	476.7073	0.0812	23	52.3995	0.7464	24	123.0200	0.3177
25	58.3433	0.6718	26	11.0320	3.5431	27	446.1056	0.0876	28	41.3214	0.9460
29	985.3456	0.0397	30	71.8038	0.5446	31	52.1200	0.7517	32	447.2540	0.0874
33	1163.9702	0.0336	34	243.2988	0.1607	35	781.8000	0.0538	36	130.7358	0.2986
37	40.2990	0.9704	38	22.9401	1.7041	39	150.5841	0.2596	40	100.3337	0.3896
41	37.2286	1.0450	42	325.7500	0.1193	43	279.2143	0.1378	44	47.6707	0.8219
45	10.0747	3.8779	46	21.1297	1.8505	47	128.8681	0.3032	48	79.7755	0.4911
49	64.0820	0.6061	50	168.4914	0.2303	51	9.8962	3.9500	52	32.5750	1.1973
53	82.2947	0.4767	54	26.1472	1.4929	55	708.1708	0.0552	56	68.5188	0.5707
57	23.5199	1.6621	58	106.2228	0.3680	59	10.0903	3.8749	60	977.2500	0.0399
61	2395.2207	0.0163	62	2018.9221	0.0194	63	22.4655	1.7440	64	56.8169	0.6878
65	22.4011	1.7436	66	43.6760	0.8957	67	67.9826	0.5748	68	34.9018	1.1197
69	1.7870	21.8769	70	97.7250	0.3951	71	126.0968	0.3123	72	117.9541	0.3314
73	6701.1431	0.0062	74	283.2609	0.1388	75	30.1040	1.2987	76	100.2308	0.3917
77	10.5649	3.6977	78	463.7011	0.0843	79	53.7135	0.7278	80	42.6281	0.9172
81	134.7931	0.2911	82	3.1545	12.3919	83	20.5115	1.9059	84	177.6818	0.2187
85	977.2500	0.0403	86	109.1899	0.3583	87	2133.1514	0.0183	88	75.5362	0.5181
89	31.9953	1.2218	90	549.8259	0.0711	91	269.4655	0.1451	92	4248.9131	0.0092
93	20.4660	1.9109	94	1.0000	39.0903	95	67.2677	0.5812	96	6.5477	5.9715
97	15.4751	2.5270	98	308.6053	0.1268	99	212.4456	0.1838	100	390.6996	0.1001
101	8143.7500	0.0048	102	6.5466	5.9715	103	58.0832	0.6733	104	11.4835	3.4041
105	156.3600	0.2510	106	19.4963	2.0067	107	29.9246	1.3070	108	23.6495	1.6529
109	4084.6394	0.0096	110	524.6980	0.0746	111	2521.9355	0.0154	112	140.4095	0.2784
113	339.9131	0.1157									
Maximum	8143.7500	39.0903									
Minimum	1.0000	0.0048									
Moyenne	510.2467	1.6356									
Ecart-Type	1261.9306	4.4443									

“Sté.” : société ; “C.” : Capital ; “CA.” : Chiffre d'affaires

Tableau 11.12 – Scores d'efficacité technique des sociétés de commerce et assimilés

Ces résultats montrent d'énormes disparités aussi bien au niveau des scores d'efficacité qu'au niveau du ratio CA/C . L'on remarque, aussi que plus le ratio est faible plus le score d'efficacité est élevé, ce qui signifie que plus le ratio est faible plus la société devrait produire davantage pour être efficace. Une seule société est techniquement efficace, correspondant naturellement à celle ayant le plus grand ratio CA/C . Soulignons également, que pour ce groupe, les scores d'efficacité technique en tenant compte des catégories des entreprises sont les mêmes qu'en ne considérant pas ces catégories. Nous avons effectué une régression des valeurs représentant les scores d'efficacité d'une part et celles représentant les ratios CA/C d'autre part, et nous obtenons une relation de la forme

$$\varphi = \beta * \chi^{-\alpha}$$

où φ représente le score d'efficacité technique et $\chi = CA/C$, et les coefficients valent $\beta = 39.081$, $\alpha = 1.0002$. Il s'agit quasi d'une branche d'hyperbole et le carré du rapport de corrélation R^2 vaut 0.9999. La figure 11.1 présente le nuage de points représentant les sociétés avec leur ratio CA/C en abscisse et leur score d'efficacité en ordonnée .

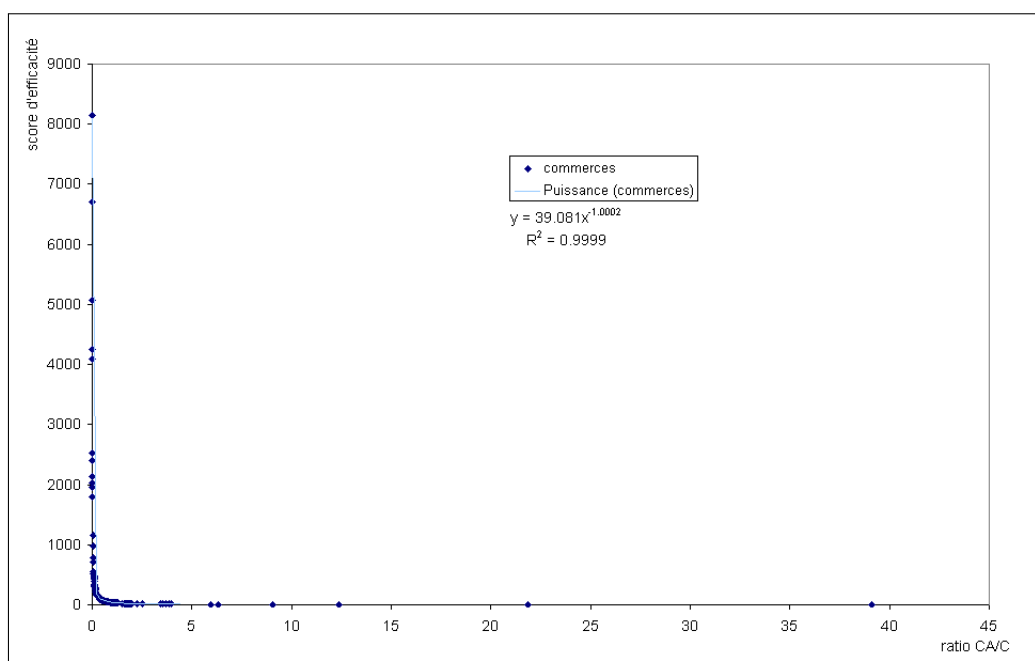


Figure 11.1 – Sociétés de commerce et assimilés

Groupe 2 : Banques, Assurances et Etablissements financiers

Les résultats des scores d'efficacité technique des sociétés du groupe 2 sont présentés dans le tableau 11.13.

Sté	Score	Ratio CA/C	Sté	Score	Ratio CA/C	Sté	Score	Ratio CA/C	Sté	Score	Ratio CA/C
1	9.1535	0.7468	2	14.9853	0.4562	3	5.1270	1.3333	4	1.0000	6.8364
5	1.1001	6.2149	6	3.6463	1.8748	7	5.3444	1.2791	8	9.2304	0.7406
9	4.5559	1.5005	10	1.2059	5.6688	11	7.8065	0.8757	12	12.8525	0.5319
Maximum	14.9853	6.8364									
Minimum	1.0000	0.4562									
Moyenne	6.3340	2.3382									
Ecart-Type	4.5807	2.4013									

“Sté :” société ; “C.” Capital ; “CA :” Chiffre d'affaires

Tableau 11.13 – Scores d'efficacité technique des Banques, Assurances, et Etablissements financiers

De même que dans le cas des sociétés de commerce, il y a une seule société qui est techniquement efficace correspondant au ratio le plus élevé. On obtient de même une relation entre les scores d'efficacité technique et les ratios des 12 sociétés considérées en

faisant une régression entre ces deux variables, on obtient avec les mêmes notations,

$$\varphi = \beta * \chi^{-\alpha}$$

$$\beta = 6.8361, \quad \alpha = 1, \quad \text{et} \quad R^2 = 1.$$

Il s'agit d'une branche d'hyperbole et la corrélation est totale. La figure 11.2 présente le nuage de points représentant les sociétés avec leur ratio CA/C en abscisse et leur score d'efficacité en ordonnée.

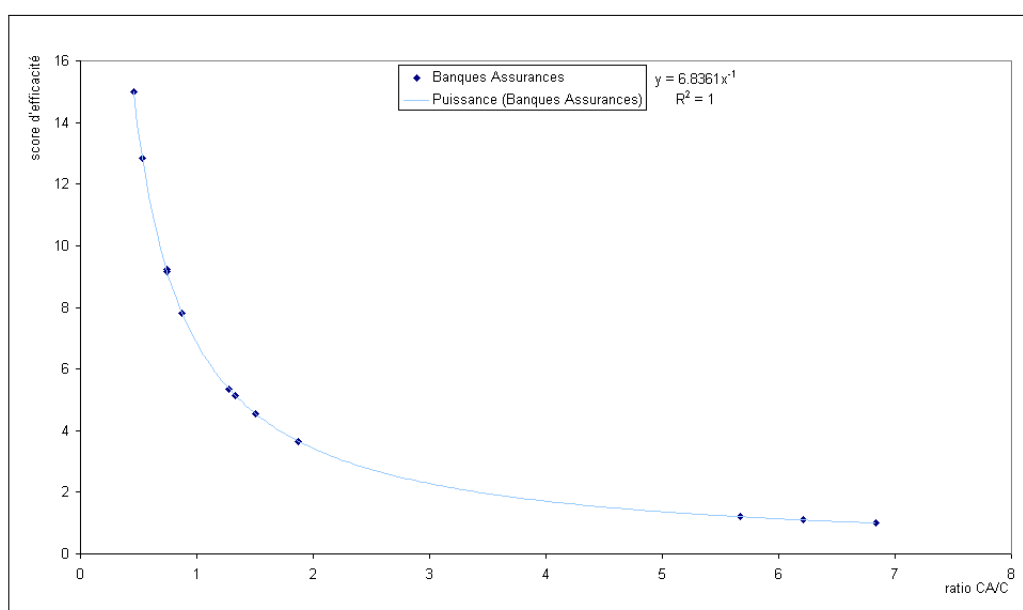


Figure 11.2 – Banques, Assurances et Etablissements financiers

Groupe 3 : Bâtiments et Travaux Publics

Les résultats des scores d'efficacité technique des sociétés du groupe 3 sont présentés dans le tableau 11.14.

Nous distinguons ici deux types de scores d'efficacité technique dépendant ou non du facteur catégoriel ; le premier score représente l'efficacité technique en tenant compte des catégories des sociétés et le second sans tenir compte des catégories. Pour le pre-

Sté	Score 1	Score 2	CA/C	Sté	Score 1	Score 2	CA/C	Sté	Score 1	Score 2	CA/C	Sté	Score 1	Score 2	CA/C
1	1.0000	1.0000	70.1354	2	8.6984	8.6984	8.0625	3	2.6857	2.6857	26.1149	4	80.6591	80.6591	0.8695
5	2.7368	2.7368	25.6268	6	419.9952	419.9952	0.1670	7	21.1760	21.1760	3.3119	8	4.7894	4.7894	14.6439
9	1.5835	1.5835	44.2916	10	10.8000	10.8000	6.4941	11	8.7669	8.7669	8.0000	12	2.7417	2.7417	25.5813
13	15.9652	15.9652	4.3932	14	19.4140	19.4140	3.6126	15	4.7996	23.9450	2.9288	16	24.3187	24.3187	2.8840
17	43.4004	43.4004	1.6160	18	4.9607	4.9607	14.1383	19	239.5321	239.5321	0.2929	20	14.6573	14.6573	4.7850
21	19.3316	19.3316	3.6275	22	30.9316	30.9316	2.2674	23	79.1056	79.1056	0.8866	24	7.9826	7.9826	8.7863
25	3.5822	3.5822	19.5789	26	1.0000	4.9890	14.0581								
Max	419.9952	419.9952	70.1354												
Min	1.0000	1.0000	0.1670												
Moy	41.3313	42.2211	12.1983												
E-T	91.1402	90.8416	15.9430												

“Sté :” société ; “C.” Capital ; “CA :” Chiffre d'affaires

Tableau 11.14 – Scores d'efficacité technique des sociétés de bâtiments et travaux publics

mier, 2 sociétés sont techniquement efficaces et pour le second une seule est efficace correspondant toujours au plus grand ratio CA/C. Toujours avec les mêmes notations, les régressions donnent pour les deux scores :

$$\varphi = \beta_i * \chi^{-\alpha_i}, \quad i = 1, 2; \quad \beta_1 = 63.043, \quad \alpha_1 = 1.0101, \quad \text{avec} \quad R^2 = 0.9207$$

$$\beta_2 = 70.137, \quad \alpha_2 = 1, \quad \text{avec} \quad R^2 = 1.$$

On constate ici qu'en tenant compte du facteur catégorie, la société 26, qui n'a pas une grande valeur du ratio chiffre d'affaires/capital est cependant considérée efficace. La figure 11.3 présente le nuage de points représentant les sociétés avec leur ratio CA/C en abscisse et leur score d'efficacité en ordonnée.

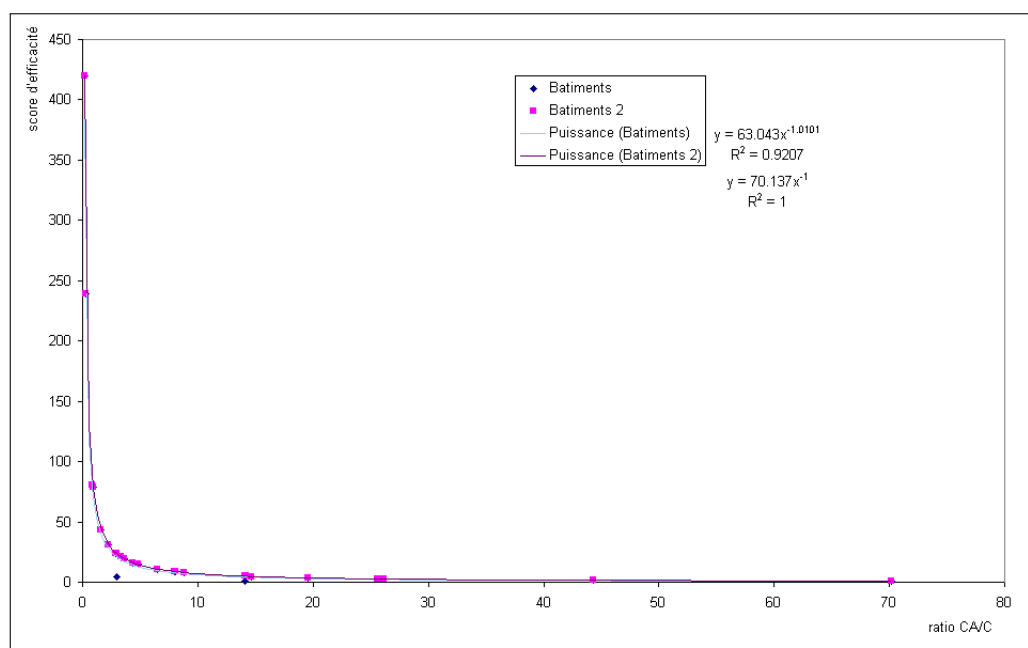


Figure 11.3 – Bâtiments et Travaux Publics

Groupe 4 : Industries

Les résultats des scores d'efficacité technique des sociétés du groupe 4 sont présentés dans le tableau 11.15.

Une seule société est techniquement efficace, celle avec le plus grand ratio CA/C ; la régression donne, toujours avec les mêmes notations,

$$\varphi = \beta * \chi^{-\alpha} \quad \beta = 15.959, \quad \alpha = 0.9995, \quad \text{avec} \quad R^2 = 1.$$

La figure 11.4 présente le nuage de points représentant les sociétés avec leur ratio CA/C en abscisse et leur score d'efficacité en ordonnée.

Sté	Score	CA/C	Sté	Score	CA/C	Sté	Score	CA/C	Sté	Score	CA/C
1	7091.4907	0.0023	2	3.2674	4.8485	3	1738.9517	0.0092	4	76.8075	0.2050
5	33.4967	0.4791	6	79.2154	0.2013	7	25.7116	0.6301	8	30.9446	0.5122
9	19.1756	0.8380	10	73.5065	0.2187	11	378.5173	0.0421	12	4.6146	3.4289
13	1.0000	16.3355	14	268.1306	0.0599	15	12.6716	1.2581	16	112.1286	0.1434
17	3.2879	4.8389	18	26.4624	0.6029	19	26.3029	0.5884	20	15.0515	1.0586
21	157.9537	0.1009	22	43.6810	0.3650	23	11.6300	1.3707	24	38.7997	0.4110
25	2.3861	6.6899	26	1101.2697	0.0145	27	1439.9203	0.0111	28	73.9644	0.2155
29	5.8913	2.7780	30	4.1512	3.8402	31	43.8118	0.3638	32	30.0005	0.5313
33	74.2705	0.2146	34	26.1486	0.6096	35	9.8740	1.6174	36	216.6432	0.0735
37	169.6936	0.0939	38	258.3240	0.0617	39	30.7702	0.5237	40	194.4249	0.0820
41	5.5964	2.8368	42	79.6419	0.2004	43	35.0706	0.4413	44	303.4680	0.0525
Maximum	7091.4907	16.3355									
Minimum	1.0000	0.0023									
Moyenne	326.7755	1.3591									
Ecart-Type	1104.6966	2.7741									

“Sté :” société ; “C.” Capital ; “CA :” Chiffre d’affaires

Tableau 11.15 – Scores d’efficacité technique des industries

Groupe 5 : Sociétés de services et d’études

Les résultats des scores d’efficacité technique des sociétés du groupe 5 sont présentés dans le tableau 11.16.

Sté	Score	CA/C	Sté	Score	CA/C	Sté	Score	CA/C	Sté	Score	CA/C
1	3.2893	15.2010	2	1.0000	50.0000	3	8.2981	6.0255	4	9.0695	5.5127
5	141.7234	0.3528	6	22.9410	2.1793	7	127.5901	0.3919	8	8.1280	6.1517
9	45.3474	1.1025	10	21.2784	2.3498	11	18.1389	2.7563	12	5.0847	9.8333
13	64.2673	0.7781	14	8.6745	5.7640	15	69.8558	0.7158	16	10.0776	4.9614
17	92.5926	0.5402	18	10.1206	4.9404	19	15.7394	3.1768	20	44.9398	1.1126
21	47.8377	1.0452	22	533.6179	0.0937	23	28.5421	1.7518	24	37.7929	1.3230
25	179.0831	0.2793	26	79.3651	0.6300						
Maximum	533.6179	50.0000									
Minimum	1.0000	0.0937									
Moyenne	62.8614	4.9604									
Ecart-Type	106.7751	9.8251									

“Sté :” société ; “C.” Capital ; “CA :” Chiffre d’affaires

Tableau 11.16 – Scores d’efficacité technique des sociétés de services et d’études

Une seule société est techniquement efficace, celle de plus grand ratio chiffre d’affaires/capital ; la régression donne, en gardant les mêmes notations,

$$\varphi = \beta * \chi^{-\alpha}, \quad \beta = 50.003, \quad \alpha = 1, \quad \text{avec} \quad R^2 = 1.$$

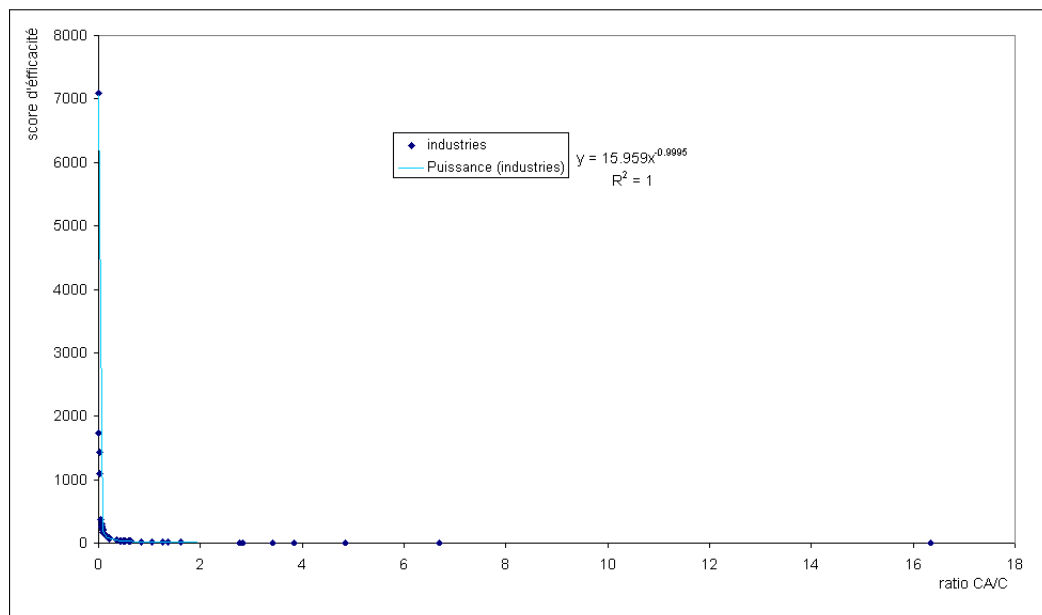


Figure 11.4 – Industries

La figure 11.5 présente le nuage de points représentant les sociétés avec leur ratio CA/C en abscisse et leur score d'efficacité en ordonnée.

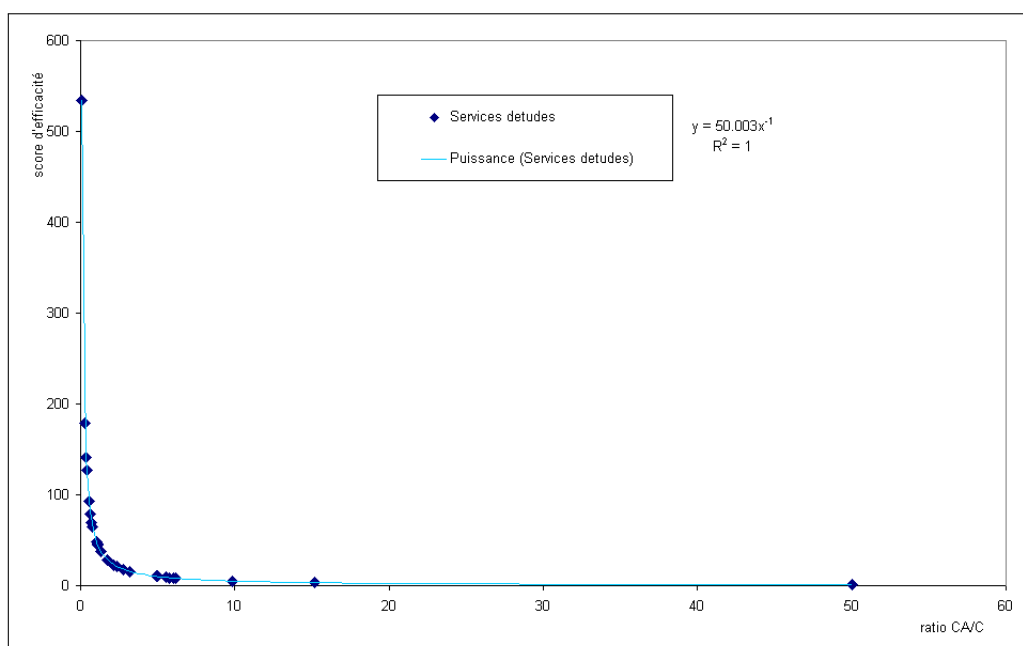


Figure 11.5 – Sociétés de services et d'études

11.3 Conclusion et commentaires

Cette application limitée à un unique facteur input et un unique facteur output, mais tenant compte de la catégorie des sociétés, donne une interprétation simple mais néanmoins intéressante pour des recherches futures en ce qui concerne la relation entre la productivité d'un point de vue classique et le score d'efficacité technique. Bien qu'il n'existe pas de différence entre les scores d'efficacité technique en tenant compte ou non du facteur catégoriel, dans 4 des 5 groupes, les résultats du groupe 3, montrent cependant que ce facteur peut influencer les analyses des efficacités de performance. Nous espérons trouver cette différence dans les autres groupes mais ce ne fut pas le cas. Pour ce qui concerne les scores d'efficacité technique et les ratios chiffre d'affaires/Capital, une relation semble décrire le lien entre ces valeurs. On obtient, une ligne de régression

$$\varphi = \beta * \chi^{-\alpha}, \alpha > 0$$

avec le plus souvent $\alpha \simeq 1$ et $R^2 \simeq 1$ ce qui donne $\varphi * \chi = \beta$ ou $\varphi * CA = \beta * C$. Pour une société non efficace, la valeur $\delta = \varphi - 1 > 0$ représente la proportion d'augmentation du chiffre d'affaires pour qu'elle soit efficace. Ainsi, pour une société ayant un score d'efficacité technique $\varphi = 3$, pour qu'elle soit efficace il faut que $\delta = 2$, ce qui signifie avoir un chiffre d'affaires de 200% par rapport à ce qui est observé pour un capital constant. Une telle information est utile pour une entreprise afin d'ajuster ses plans d'affaire de sorte à avoir φ proche de 1. Ces résultats peuvent aider les nouvelles sociétés à planifier dans le court-terme des objectifs de rendements caractérisés par le chiffre d'affaires. Ces différents résultats montrent aussi que les entreprises de taille petite ou moyenne ont souvent des performances plus efficaces que les autres : dans tous les groupes c'est une société de catégorie 1 qui est techniquement efficace excepté le groupe 3 où il y a une société de catégorie 1 et une de catégorie 2 qui sont efficaces.

Bien évidemment, ces résultats restent néanmoins loin de la réalité puisque beaucoup de facteurs de production importants ne sont pas considérés comme le capital physique, le capital naturel, le capital intellectuel, le travail, la main-d'oeuvre ou le capital humain, etc. Il apparaît donc intéressant d'étendre une analyse DEA prenant en compte ces facteurs, c-à-d. basée sur plusieurs facteurs inputs (capital, travail, main-d'oeuvre) et outputs (biens et services). Nous espérons, dans l'avenir pouvoir prendre en compte ces facteurs dont les données n'étaient malheureusement pas disponibles pour cette application.

Chapitre 12

Conclusion générale et perspectives

12.1 Synthèse

Dans sa partie I, ce travail a décrit les concepts fondamentaux de l'approche "*Data Envelopment Analysis*". Nous avons présenté les modèles les plus couramment utilisés, leurs extensions et des variantes. Ces modèles ont été illustrés et les concepts interprétés de façon simple et précise. Nous y avons présenté également les principes de base de l'optimisation multicritère et quelques modèles de résolution. Ceci nous a permis de faire l'état de l'art des liens entre ces deux approches, DEA et optimisation multicritère. Nous avons approfondi ces liens en partie II, en apportant des résultats nouveaux sur la relation entre DEA et MOILP. Sur cette base, nous avons ouvert des voies de recherche futures en proposant d'une part une approche interactive de résolution d'un problème MOILP et d'autre part un modèle multicritère d'affectation de ressources nouvelles, à chaque fois basé sur DEA. Les applications présentées dans la partie III, ont mis en évidence les avantages incontournables de l'approche DEA que nous avons appliqué au suivi et à l'évaluation des performances de développement de secteurs prioritaires dans le cadre stratégique de lutte contre la pauvreté du Burkina Faso.

12.2 Contribution à la recherche et commentaires

Outre l'état de l'art de la partie I, nos contributions principales sont constituées des parties II et III. Nous avons tout d'abord corrigé des erreurs qui étaient contenues dans le travail de Liu et al. et détaillé les relations entre DEA et les MOILP. Ce travail, qui a fait l'objet d'une publication dans une revue internationale, nous a fourni des perspectives intéressantes quant à développer une méthode interactive pour la résolution de problèmes MOILP ou voire pour l'approximation heuristique de l'ensemble des solutions

Pareto optimales d'un tel problème. C'est ainsi que nous avons proposé une approche interactive basée sur le "*Goal programming*" et DEA, pour la recherche d'une meilleure solution de compromis d'un problème MOILP. D'autre part, en utilisant les résultats d'une méthode DEA, nous avons proposé un modèle multicritère pour pouvoir affecter des ressources additionnelles aux unités de production. Les études de cas que nous avons traitées ont enfin montré en détail les possibilités de l'utilisation de DEA en fournissant des interprétations précises pour les analyses de performance de deux secteurs prioritaires – l'enseignement et la santé – ainsi qu'une étude préliminaire de la productivité d'entreprises et cela dans la perspective du développement durable au Burkina Faso.

12.3 Perspectives et recommandations

12.3.1 Perspectives

Ayant constaté et décrit dans ce travail, le caractère multicritère important de l'approche DEA, nous comptons davantage exploiter les relations fondamentales entre les notions de DEA efficacité et celle d'efficacité au sens de Pareto. Comme perspective et dans un souci d'exploiter nos résultats théoriques et ceux existants, nous allons d'abord orienter nos recherches futures vers les méthodes de résolution des problèmes MOILP, en intégrant d'une part les approches DEA et d'autre part les métaheuristiques.

Notre intention est de développer des métaheuristiques – notamment le recuit simulé, la recherche Tabou et les algorithmes génétiques – d'approximation de l'ensemble des solutions efficaces en tenant compte de l'analyse DEA des solutions déjà générées ; l'idée est de tenir compte du niveau de DEA efficacité d'une solution courante soit pour déterminer l'acceptation de celle-ci dans un recuit simulé, soit pour sélectionner la meilleure solution d'un voisinage dans une recherche Tabou, soit encore pour définir sa fonction fitness ou son "ranking" dans un algorithme génétique.

Par ailleurs, dans l'esprit du chapitre 7 de cette thèse, nous pourrions améliorer l'approche interactive décrite ou en développer de nouvelles, pour déterminer une solution de "*meilleur compromis*".

12.3.2 Recommandations

Les applications de la partie III, nous ont permis de comprendre que les analyses des résultats d'études de cas, ne seront profitables que si un décideur existe et peut réagir afin de rendre l'étude plus réaliste. Il nous semble très recommandable à l'avenir, d'intégrer des modèles DEA dans les processus de suivi et d'évaluation des programmes d'activités publics : ce sera bénéfique pour les responsables de projets et chefs des directions décentralisées, qui pourront ainsi s'appuyer sur des résultats d'analyse pour améliorer leur performance. Les domaines particuliers que nous recommandons en priorité, pour appliquer DEA et contribuer à la lutte contre la pauvreté au Burkina Faso sont les secteurs prioritaires que sont l'éducation, la santé, les productions agricoles ou encore le tissu économique des petites et moyennes entreprises.

a.) En ce qui concerne l'éducation, l'intégration des méthodes décrites dans ce travail permettront de mieux suivre et évaluer les actions de développement :

- au niveau des directions décentralisées comme les régions, les provinces ou les circonscriptions pour l'enseignement de base ;
- au niveau des établissements d'enseignement général, technique ou professionnel pour le secondaire et le supérieur.

b.) Quant au secteur de la santé, nous recommandons l'utilisation de DEA :

- pour le suivi et l'évaluation des activités de la promotion de la santé des plus démunis, les programmes sectoriels ou de lutte contre les maladies par la prévention. En effet, l'amélioration du suivi de ces programmes peut permettre de déterminer les inefficacités par localité ou site d'intervention, ce qui peut donc permettre aux responsables d'intensifier ou de varier les interventions ou les activités de sensibilisation.
- pour le suivi et l'évaluation des unités ou associations de lutte contre les maladies sexuellement transmissibles ou VIH/SIDA. Ceci est aussi important dans la mesure où les aides à ces unités peuvent varier en fonction de leur efficacité de performance ce qui va inéluctablement permettre d'améliorer les rendements mesurables par les indicateurs

de suivi.

– pour les régions ou districts sanitaires, ce qui peut aussi permettre aux responsables de ces différentes unités d’orienter leur politique locale d’amélioration des rendements sanitaires (soins curatifs ou de prévention) en se basant sur les unités de référence et aussi en intensifiant leurs activités là où l’unité a été moins performante et pourrait donc mieux faire relativement aux autres.

c.) Nous proposons également d’appliquer DEA au monde agricole, qui est essentiellement rural, en analysant leurs performances de production en tenant compte des facteurs de production, fixes (terre, main-d’œuvre), naturels non contrôlables (climat, températures saisonnières, sol, pluies) ou contrôlables (engrais, fumier, l’équipement, intrants agricoles). Ce type d’application pourra s’appuyer sur les programmes sectoriels et aider les producteurs ou les formateurs en fonction de leurs performances et en ciblant les secteurs qui leurs sont rentables (commercialisables ou de rente).

Dans ce cadre, les analyses DEA permettront nous semble-t-il, d’augmenter les motivations du personnel des unités de référence, et de planifier la redistribution des ressources (aides ou budget) en fonction des efficacités de performance de chaque unité.

d.) Enfin, pour les petites et moyennes entreprises au Burkina Faso, leur suivi et évaluation peuvent leur permettre d’améliorer leur performance. Nous recommandons dans l’avenir d’associer plusieurs indicateurs de performance des entreprises comme le capital financier, le capital physique, le travail, le capital humain et les biens et services produits pour analyser les efficacités de production de ces entreprises. Ces informations peuvent permettre aux entreprises d’améliorer considérablement leur rendement en tenant compte des benchmarks dans leur domaine respectif d’activité, ce qui peut les rendre plus compétitives.

Annexe A

Données scolaires des régions et provinces : 2002 et 2003

Régions	X_1		X_2		Y_1		Y_2		Y_2	
	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003
Boucle du Mouhoun	21.82	22.71	20.72	20.89	39.40	33.73	33.70	29.20	53.76	62.05
Cascades	22.34	22.39	20.08	19.61	46.90	38.35	39.10	32.04	55.64	63.53
Centre	21.04	22.73	17.63	17.47	94.10	74.59	91.80	72.86	71.56	77.02
Centre -Est	20.13	20.25	18.76	18.23	38.50	35.62	33.20	30.77	64.22	64.98
Centre-Nord	22.47	22.39	21.71	20.86	31.90	28.79	24.00	21.82	70.30	74.49
Centre-Ouest	22.30	22.86	21.55	21.30	42.70	37.02	36.70	31.56	57.83	68.58
Centre-Sud	22.45	23.23	21.51	21.58	40.80	35.48	35.80	31.36	58.06	62.54
Est	25.96	22.30	25.17	24.11	24.10	23.43	19.60	19.15	62.29	69.17
Hauts-Bassins	18.76	19.37	16.52	16.56	56.00	45.73	49.10	40.06	66.26	72.28
Nord	24.36	24.29	23.58	23.04	45.10	37.54	32.20	27.26	54.95	67.64
Plateau-Central	27.15	24.44	24.82	23.87	37.20	36.05	30.60	29.79	64.41	73.10
Sahel	23.61	21.58	24.60	25.33	21.50	18.41	17.90	15.47	61.52	65.96
Sud-Ouest	21.04	24.63	21.98	23.49	38.70	31.67	31.70	26.35	58.76	71.39
Maximum	27.15	24.63	25.17	25.33	94.10	36.65	91.80	31.36	71.56	68.67
Minimum	18.76	19.37	16.52	16.56	21.50	13.33	17.90	13.97	53.76	4.78
Moyenne	22.57	22.55	21.43	21.26	42.84	74.59	36.57	72.86	61.50	77.02
Ecart-Type	2.29	1.53	2.72	2.72	17.87	18.41	18.50	15.47	5.68	62.05

Tableau A.1 – Données scolaires des régions : 2002 et 2003

Provinces	X ₁		X ₂		X ₃		Y ₁		Y ₂		Y ₃		Y ₄	
	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003	2002	2003
Banwa ^P	21.51	21.89	25.67	23.41	55.54	47.59	33.80	38.30	26.20	29.80	29.70	50.90	65.41	75.52
Kossi ^P	20.52	21.67	21.61	22.57	59.14	54.33	35.80	40.20	30.70	35.30	51.00	50.00	51.60	59.82
Les Balé	21.93	23.56	32.54	28.15	55.78	37.17	39.80	41.10	34.00	35.40	40.70	41.70	42.07	57.40
Mouhoun	22.71	24.13	25.62	26.16	61.67	55.75	40.50	41.40	36.60	38.00	38.50	45.50	48.38	69.84
Nayala	22.36	21.57	31.12	28.06	55.98	38.35	51.20	54.40	46.10	49.30	47.00	60.40	48.32	47.77
Sourou	21.82	23.36	32.36	29.17	49.78	40.30	39.60	41.30	33.10	35.00	37.30	50.70	46.93	62.37
Comoé	21.41	21.83	31.90	30.37	46.67	32.28	51.60	54.20	44.10	46.40	46.60	53.80	53.38	66.44
Leraba ^P	25.79	24.35	27.54	21.17	51.48	37.63	35.10	38.40	26.70	30.50	36.10	49.30	38.61	52.85
Kadiogo	21.04	22.73	21.52	17.49	30.99	26.06	94.10	97.10	91.80	94.80	81.30	93.10	59.92	77.01
Boulgou	17.86	18.16	21.85	18.58	38.01	34.33	40.90	46.30	36.20	40.90	35.80	49.90	59.76	69.99
Koulpelogo ^P	24.46	24.78	25.30	21.73	62.24	56.01	29.30	34.80	23.80	28.20	32.50	42.80	54.22	60.25
Kouritenga	21.55	21.14	33.34	28.41	54.65	50.11	41.30	46.50	35.20	39.90	40.30	46.60	58.58	60.16
Bam	22.82	23.24	28.41	30.98	57.46	62.69	38.10	40.70	29.30	32.30	39.50	45.70	70.57	85.39
Namentenga ^P	25.98	24.20	28.91	29.58	75.19	76.20	24.90	30.00	18.80	22.70	28.90	43.50	64.00	76.28
Sanmatenga ^P	20.82	21.19	19.45	41.81	42.26	48.15	32.90	38.70	24.30	28.70	29.50	47.00	75.05	68.43
Boulkiemde	21.60	21.27	36.66	34.00	53.46	47.38	47.90	54.10	39.90	44.80	41.90	62.70	57.38	69.39
Sanguie	22.22	23.28	33.19	31.38	57.23	53.08	45.10	46.70	41.00	42.40	43.00	51.10	53.67	69.32
Sissili	24.03	25.85	30.95	30.74	60.63	55.72	35.20	39.20	30.80	34.60	35.10	43.20	40.00	61.70
Ziro ^P	24.01	26.12	29.67	27.74	70.12	53.68	28.70	35.70	23.80	29.60	29.60	58.90	46.45	71.28
Bazega	24.74	23.82	38.99	33.11	62.84	51.98	37.10	40.10	31.90	35.10	31.90	48.20	58.73	59.66
Nahouri	17.46	19.45	16.87	16.60	54.19	46.58	44.50	46.10	38.80	40.60	45.00	44.90	44.71	65.74
Zoundweogo	24.69	24.89	29.93	27.48	64.24	64.10	42.80	47.20	38.30	42.40	46.00	55.10	66.02	63.73
Gnagna ^P	27.43	11.88	19.23	18.13	61.30	45.95	18.60	24.20	14.70	19.60	17.90	37.00	52.92	64.41
Gourma ^P	23.42	25.20	35.17	30.07	69.41	61.83	31.40	35.80	27.60	31.50	27.20	43.20	64.76	69.91
Komandjari ^P	43.76	42.43	21.88	11.89	102.07	73.28	16.90	20.30	14.90	17.80	9.60	26.80	40.00	50.25
Kompienga ^P	24.55	26.94	23.86	20.97	51.18	46.70	42.50	52.70	34.00	43.40	42.10	71.30	94.28	76.57
Tapoa ^P	25.56	25.40	22.71	18.90	68.70	56.06	22.60	27.10	17.10	20.70	24.20	35.70	59.78	73.87
Houet	17.74	17.80	22.80	20.64	38.46	31.54	64.90	66.90	59.20	61.10	54.90	64.20	58.07	75.82
Kenedougou	22.46	24.05	20.98	21.87	53.89	50.40	43.90	47.40	33.90	37.10	41.40	52.10	52.30	56.86
Tuy ^P	20.63	23.11	40.44	35.49	56.83	47.31	34.90	39.60	26.40	30.40	35.30	49.00	52.30	68.08
Loroum	26.44	25.57	75.08	25.01	53.17	37.55	38.30	44.20	24.50	29.90	40.20	55.90	65.62	59.71
Passore	21.30	21.60	23.28	18.92	40.18	43.32	43.80	48.30	33.20	37.30	41.10	52.00	53.58	78.10
Yatenga	25.61	25.27	33.64	27.83	55.29	42.28	49.30	55.30	35.40	40.40	43.70	62.40	47.31	61.90
Zondoma	24.65	25.44	26.86	24.79	43.84	41.12	39.20	44.70	26.00	30.20	31.30	55.20	56.27	70.98
Ganzourgou ^P	27.69	26.49	25.61	25.43	62.25	60.44	29.70	36.30	24.00	29.70	22.60	53.80	57.94	78.92
Kourweogo	26.56	18.37	29.66	26.45	58.86	53.38	40.40	46.50	30.00	35.00	36.30	65.10	66.03	70.71
Oubritenga	27.01	26.03	30.94	30.89	46.62	44.41	45.20	48.70	39.70	42.60	44.50	52.60	71.20	69.62
Oudalan ^P	25.78	18.63	15.54	11.69	64.37	78.06	22.20	27.00	18.80	23.50	26.20	40.60	37.12	60.41
Seno ^P	22.26	20.75	19.45	18.69	41.03	47.72	21.10	22.60	18.30	19.40	27.30	26.70	39.31	66.30
Soum ^P	23.52	25.23	24.57	22.03	61.88	56.99	21.50	24.20	17.00	19.80	23.90	34.00	74.31	75.96
Yagha ^P	23.56	18.73	8.85	9.67	55.15	57.76	21.40	25.90	18.40	22.00	24.40	37.90	71.15	50.31
Bougouriba	20.77	24.30	16.18	16.41	50.44	56.37	48.10	47.90	38.40	38.50	60.20	48.40	64.12	71.03
Ioba	21.99	28.04	26.65	26.44	53.19	49.78	38.20	38.30	29.80	30.50	43.60	38.30	73.74	70.73
Noumbiel ^P	17.53	24.27	20.57	29.95	69.79	77.95	30.50	35.40	26.00	31.00	38.30	45.80	53.66	51.72
Poni ^P	21.13	22.40	23.23	29.46	74.98	85.34	37.40	39.10	32.00	33.70	59.00	43.30	54.89	75.20
Maximum	43.76	42.43	75.08	41.81	102.07	85.34	94.10	97.10	91.80	94.80	81.30	93.10	94.28	85.39
Minimum	17.46	11.88	8.85	9.67	30.99	26.06	16.90	20.30	14.70	17.80	9.60	26.70	37.12	47.77
Moyenne	23.39	23.34	27.35	24.90	56.72	51.44	38.05	42.02	31.57	35.15	37.83	49.47	56.99	66.62
Ecart-Type	4.05	4.19	9.78	6.66	12.01	12.94	13.12	12.88	12.91	12.67	12.21	11.54	11.66	8.65

Tableau A.2 – Données scolaires des provinces : 2002 et 2003

Annexe B

Données scolaires des régions et provinces : 2004 et 2005

Provinces	X ₁		X ₂		X ₃		X ₄		Y ₁		Y ₂		Y ₃		Y ₄	
	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005	2004	2005
Banwa ^P	19.18	19.35	8.96	9.04	9.27	8.97	32.26	31.75	40.68	44.40	46.51	53.47	71.48	74.38	76.35	72.03
Kossi ^P	20.53	20.48	7.73	9.40	4.64	6.56	26.49	33.11	45.68	44.67	55.04	52.98	83.36	84.43	65.00	60.48
Les Balé	19.16	18.63	9.82	11.60	16.96	21.57	43.48	56.18	47.00	45.44	65.76	47.55	79.30	83.87	73.11	61.50
Mouhoun	20.71	20.91	7.15	10.06	12.24	14.20	37.31	34.09	46.09	58.71	62.90	70.77	88.87	90.93	78.75	75.63
Nayala	19.51	19.34	7.30	10.38	6.46	9.59	31.25	41.24	61.41	63.76	68.65	76.66	85.12	85.54	65.20	60.70
Sourou	19.73	19.00	7.67	11.19	9.19	11.19	30.30	39.60	46.78	50.68	64.09	58.93	77.65	78.87	65.83	67.64
Comoe	17.61	17.25	9.26	11.03	13.58	20.64	54.05	52.02	58.01	55.99	65.99	68.77	78.57	81.53	71.45	64.65
Leraba ^P	21.66	21.31	8.57	10.19	9.84	11.86	47.62	42.86	46.25	49.96	63.33	55.12	73.69	76.13	59.77	47.23
Kadiogo	17.79	17.90	9.90	9.41	33.89	36.00	25.13	30.16	92.55	94.23	98.99	99.50	96.25	96.47	76.79	74.51
Boulgou	16.26	15.57	11.18	10.94	19.49	16.97	35.53	50.46	51.59	57.87	63.57	63.49	84.88	87.26	72.50	63.22
Koulpelogo	22.30	21.90	8.91	9.71	7.79	9.60	26.55	56.00	41.36	42.05	57.76	50.20	75.56	79.94	70.67	67.64
Kourittenga	18.06	17.58	10.16	10.99	15.77	19.52	29.20	34.48	51.65	56.20	64.23	61.20	80.01	82.83	82.30	81.14
Bam	20.48	18.72	9.23	10.09	8.03	9.79	28.17	34.25	46.01	52.06	65.85	65.71	69.36	73.27	88.74	82.91
Namentenga ^P	22.76	21.21	5.55	8.98	2.52	3.73	21.58	33.33	32.74	36.73	44.84	44.72	65.43	66.88	84.22	81.89
Sanmatenga ^P	18.14	17.30	9.09	9.62	10.46	12.40	33.20	34.88	43.26	48.51	57.05	62.27	63.42	67.70	73.06	63.76
Boulkiemde	17.87	18.21	10.06	10.47	21.41	25.14	48.15	57.82	65.75	71.10	84.31	87.61	73.09	76.24	72.46	66.09
Sanguie	20.96	20.35	8.55	9.34	18.70	20.37	47.95	49.38	54.21	59.99	68.79	74.50	90.03	89.36	71.12	66.68
Sissili	22.55	22.60	10.44	10.62	15.00	14.70	45.45	52.17	44.49	45.99	71.23	58.62	86.75	87.05	76.44	69.06
Ziro	25.50	24.79	9.26	10.06	11.83	16.80	32.26	30.00	40.61	46.00	60.35	61.92	80.72	81.39	67.82	60.90
Bazega	21.17	19.76	9.23	11.12	16.69	23.28	32.26	30.53	47.63	53.70	65.07	63.56	83.54	84.51	70.63	62.61
Nahouri	15.09	14.75	9.48	11.76	13.70	19.19	55.56	54.05	58.50	70.30	86.76	86.03	92.59	89.67	63.54	65.98
Zoundweogo	21.07	20.26	9.08	10.04	12.27	17.16	45.45	45.16	50.47	56.02	61.89	67.81	88.66	92.62	67.31	67.29
Gnagna ^P	24.05	22.35	6.77	7.58	1.97	2.82	34.01	35.29	26.47	31.37	38.70	50.88	79.46	81.43	67.96	62.96
Gourma ^P	20.30	20.47	8.61	10.33	6.72	8.33	32.00	41.67	39.84	44.45	53.15	52.77	85.70	86.53	80.34	70.47
Komandjari ^P	46.04	44.11	3.54	5.74	0.47	0.83	23.26	41.67	21.55	26.13	27.82	39.94	83.67	92.41	44.85	73.68
Kompienga	21.71	23.31	8.16	9.15	6.97	9.21	30.30	52.63	54.04	57.62	75.71	68.79	74.98	78.84	70.50	68.06
Tapoa ^P	24.29	23.38	6.75	7.88	1.68	3.04	32.00	36.23	27.22	29.90	31.00	39.32	67.71	72.84	78.37	81.62
Houet	15.15	15.17	13.09	10.74	37.36	34.75	30.67	35.19	70.09	72.34	76.85	76.57	86.49	86.98	76.34	71.58
Kenedougou	20.33	20.02	13.14	10.11	20.14	16.67	35.97	47.62	51.27	57.68	69.52	76.54	73.42	76.75	68.56	59.04
Tuy ^P	17.23	18.06	13.28	11.45	22.89	22.91	36.14	58.14	42.31	45.23	59.10	50.49	69.29	71.58	70.11	62.45
Loroum	22.71	19.84	9.89	8.66	6.00	4.84	21.05	32.26	49.01	67.53	75.83	118.17	56.54	61.61	69.87	73.15
Passore	19.09	17.79	9.85	9.56	13.62	11.99	33.90	30.61	54.15	59.86	66.59	82.79	66.55	70.51	76.57	67.11
Yatenga	22.58	21.03	9.02	9.11	12.58	12.79	30.14	31.78	59.83	67.34	74.88	86.71	60.63	65.19	67.92	67.50
Zondoma	21.40	18.74	9.36	9.15	11.03	10.29	41.24	47.62	52.48	64.13	74.41	99.50	54.38	60.62	66.38	64.72
Ganzourgou ^P	23.76	23.86	7.29	8.64	7.20	13.12	31.75	27.52	42.24	47.69	66.14	62.03	77.69	81.10	79.46	77.99
Kourweogo	20.26	19.11	7.51	9.50	12.69	17.90	32.26	30.00	53.28	58.98	75.51	79.53	66.43	69.73	64.41	77.49
Oubritenga	23.25	22.94	8.25	10.12	15.90	22.01	34.72	36.59	51.80	57.50	65.00	73.36	80.60	82.05	72.58	63.61
Oudalan ^P	24.70	24.31	9.24	7.74	3.00	2.50	50.00	41.67	31.97	38.72	48.07	62.14	87.30	94.33	69.05	70.11
Seno ^P	22.23	22.79	6.70	6.63	3.54	2.94	24.39	23.81	26.77	45.40	42.43	72.61	81.88	87.94	76.92	57.70
Soum ^P	22.31	20.30	7.68	6.88	3.53	3.58	25.86	25.00	29.09	33.96	53.76	48.15	75.84	82.77	76.16	75.69
Yagha ^P	24.63	27.14	8.09	7.17	0.54	0.48	21.51	19.05	30.74	36.54	57.70	58.32	80.85	81.37	65.98	66.67
Bougouriba	21.79	22.24	9.89	10.10	13.92	14.15	39.22	37.74	54.32	58.74	60.25	72.06	73.95	77.17	72.83	62.53
Ioba	24.24	23.27	9.16	10.37	9.20	8.47	35.71	36.50	47.07	58.14	70.93	74.62	74.30	77.63	69.52	53.42
Noumbiel ^P	21.64	21.21	9.38	10.66	6.39	8.00	27.78	44.44	46.22	56.83	65.64	89.27	82.85	88.37	86.30	58.94
Poni ^P	20.42	19.61	9.18	9.41	9.40	10.20	37.31	45.75	53.12	63.56	74.24	89.42	79.88	83.76	77.61	64.15
Maximum	46.04	44.11	13.28	11.76	37.36	36.00	55.56	58.14	92.55	94.23	98.99	118.17	96.25	96.47	88.74	82.91
Minimum	15.09	14.75	3.54	5.74	0.47	0.48	21.05	19.05	21.55	26.13	27.82	39.32	54.38	60.62	44.85	47.23
Moyenne	21.38	20.85	8.90	9.62	11.48	13.13	34.45	39.61	47.28	52.98	63.25	67.90	77.53	80.50	72.04	67.43
Ecart-Type	4.52	4.39	1.80	1.36	7.79	8.18	8.64	9.86	12.71	12.90	13.61	16.80	9.34	8.58	7.48	7.61

Tableau B.1 – Données scolaires des provinces : 2004 et 2005

Annexe C

Données élèves, enseignants, salles de classe par province de 2002 à 2006

Provinces	2002	2003	2004	2005	2006	Provinces	2002	2003	2004	2005	2006
Banwa ^P	15293	17221	19079	21444	23 304	Gourma ^P	14647	16150	18374	20 959	24 116
Kossi ^P	17109	19335	21626	24459	26 005	Komandjari ^P	1691	1909	2085	2 607	3 725
Les Balé	14456	14986	17221	19162	21 574	Kompienga ^P	3462	4268	5252	6 092	7 174
Mouhoun	20039	20595	23517	25060	26 842	Tapoa ^P	11465	13349	14819	17 322	19 381
Nayala	15030	16317	17480	19134	20 091	Houet	88106	91341	99821	105 358	109 878
Sourou	15814	16611	18698	20267	22 063	Kenedougou	18474	20044	22870	26 567	28 511
Comoe	26762	28351	31292	34 367	37 391	Tuy ^P	11586	13155	15552	16 779	18 941
Leraba ^P	7252	8050	9374	10 138	11 025	Loroum	9001	10089	11626	14 616	17 368
Kadiogo	166276	172583	182644	193 471	202 761	Passore	26578	28801	31789	37 334	41 202
Boulgou	36392	39750	45196	50 686	56 135	Yatenga	47356	51611	56344	65 297	71 914
Koulpelogo ^P	11612	13562	16456	18 948	21 188	Zondoma	11520	12699	15325	18 944	21 254
Kourittenga	22743	24696	27906	31 005	35 047	Ganzourgou ^P	16758	19594	24075	27 112	30 444
Bam	16957	17942	21042	24 732	27 996	Kourweogo	10579	11867	13675	15 646	17 013
Namentenga ^P	13165	15207	17094	19 335	23 767	Oubritenga	19029	20019	22624	25 546	26 980
Sanmatenga ^P	31653	35447	41348	46 578	52 623	Oudalan ^P	5237	6440	7491	9 092	10 787
Boulkiemde	45316	50297	57920	63 584	68 954	Seno ^P	7501	8097	9806	11 715	14 112
Sanguie	24574	25388	27963	30 474	31 950	Soum ^P	10627	11734	14699	18 771	21 825
Sissili	11862	12998	15210	16 325	17 734	Yagha ^P	5008	5980	7877	8 842	9 617
Ziro ^P	7621	9225	11098	12 708	14 109	Bougouriba	7944	7983	8580	9 126	10 343
Bazega	17746	18725	21447	23 427	24 910	Ioba	12599	12659	14728	16 118	18 002
Nahouri	11458	11723	14052	16 136	17 550	Noumbiel ^P	3194	3709	4483	5 706	6 847
Zoundweogo	18457	20005	22736	26 311	28 536	Poni ^P	16804	17586	20375	23 355	24 077
Gnagna ^P	11485	14052	16843	20 182	25 505						
National	938238	1012150	1139512	1270837	1390571						

Tableau C.1 – Effectif des élèves par province de 2002 à 2006

Provinces	2002	2003	2004	2005	2006	Provinces	2002	2003	2004	2005	2006
Banwa ^P	329	377	357	409	499	Gourma ^P	343	407	378	516	615
Kossi ^P	351	419	370	518	573	Komandjari ^P	74	81	88	120	134
Les Balé	317	353	333	420	452	Kompienga ^P	85	115	116	151	174
Mouhoun	455	497	391	578	599	Tapoa ^P	293	339	344	415	442
Nayala	336	352	261	407	441	Houet	1563	1626	2385	2094	2 239
Sourou	345	388	294	445	491	Kenedougou	415	482	639	550	648
Comoe	573	619	540	696	763	Tuy ^P	239	304	363	363	378
Leraba ^P	187	196	181	227	236	Loroum	238	258	292	260	351
Kadiogo	3498	3922	4 142	4426	4 790	Passore	566	622	631	661	748
Boulgou	650	722	846	893	1 012	Yatenga	1213	1304	1342	1368	1 628
Koulpelogo ^P	284	336	374	442	499	Zondoma	284	323	339	349	412
Kourittenga	490	522	548	635	720	Ganzourgou ^P	464	519	501	663	706
Bam	387	417	439	510	564	Kourweogo	281	218	242	323	324
Namentenga ^P	342	368	231	414	498	Oubritenga	514	521	466	632	671
Sanmatenga ^P	659	751	805	914	1 048	Oudalan ^P	135	120	176	177	252
Boulkiemde	979	1070	1121	1296	1 482	Seno ^P	167	168	196	230	340
Sanguie	546	591	555	637	689	Soum ^P	250	296	300	291	430
Sissili	285	336	370	401	442	Yagha ^P	118	112	183	205	253
Ziro ^P	183	241	273	317	356	Bougouriba	165	194	190	207	263
Bazega	439	446	425	523	560	Ioba	277	355	340	399	456
Nahouri	200	228	212	297	329	Noumbiel ^P	56	90	92	129	158
Zoundweogo	431	498	455	576	613	Poni ^P	355	394	403	464	535
Gnagna ^P	315	167	357	442	528						
National	20676	22664	23886	26990	30341						

Tableau C.2 – Nombre des enseignants par province de 2002 à 2006

Provinces	2002	2003	2004	2005	2006	Provinces	2002	2003	2004	2005	2006
Banwa ^P	299	347	366	415	460	Gourma ^P	317	330	373	429	491
Kossi ^P	340	397	444	501	554	Komandjari ^P	71	82	96	115	128
Les Balé	310	309	330	357	406	Kompienga ^P	81	100	114	142	157
Mouhoun	415	449	487	524	564	Tapoa ^P	293	331	360	405	413
Nayala	321	339	341	370	389	Houet	1330	1385	1512	1 598	1 715
Sourou	338	354	369	385	416	Kenedougou	396	430	465	532	603
Comoe	509	524	551	593	642	Tuy ^P	226	247	268	303	330
Leraba ^P	174	190	203	216	230	Loroum	241	250	264	290	336
Kadiogo	2932	3015	3250	3 463	3 653	Passore	559	585	607	664	704
Boulgou	600	644	735	789	867	Yatenga	1161	1238	1272	1 373	1 468
Koulpelogo ^P	283	319	367	415	441	Zondoma	266	305	328	355	383
Kourittenga	444	459	504	545	592	Ganzourgou ^P	463	492	572	647	678
Bam	372	391	431	463	511	Kourweogo	242	260	277	299	322
Namentenga ^P	325	354	389	410	487	Oubritenga	446	477	526	586	605
Sanmatenga ^P	644	686	750	806	898	Oudalan ^P	131	167	185	221	253
Boulkiemde	902	976	1035	1 158	1 262	Seno ^P	171	202	218	267	311
Sanguie	543	565	586	620	648	Soum ^P	270	296	328	381	427
Sissili	296	320	343	369	394	Yagha ^P	126	152	194	240	270
Ziro ^P	185	224	283	315	335	Bougouriba	159	177	187	203	215
Bazega	415	435	454	463	491	Ioba	317	334	357	375	411
Nahouri	193	209	212	238	271	Noumbiel ^P	77	87	97	121	134
Zoundweogo	417	445	479	533	563	Poni ^P	338	387	416	458	485
Gnagna ^P	314	356	405	451	531						
National	19252	20621	22330	24403	26444						

Tableau C.3 – Nombre de salles de classe par province de 2002 à 2006

Annexe D

Données scolaires : taux de scolarisation, taux d'admission, taux de succès au CEP par province de 2002 à 2006

Provinces	2002	2003	2004	2005	2006	Provinces	2002	2003	2004	2005	2006
Banwa ^P	33.80	38.30	40.68	44.40	47	Gourma ^P	31.40	35.80	39.84	44.45	50.1
Kossi ^P	35.80	40.20	45.68	44.67	52.6	Komandjari ^P	16.90	20.30	21.55	26.13	37
Les Balé	39.80	41.10	47.00	45.44	56.1	Kompienga ^P	42.50	52.70	54.04	57.62	66.9
Mouhoun	40.50	41.40	46.09	58.71	49.9	Tapoa ^P	22.60	27.10	27.22	29.90	33.2
Nayala	51.20	54.40	61.41	63.76	68.6	Houet	64.90	66.90	70.09	72.34	72.9
Sourou	39.60	41.30	46.78	50.68	53	Kenedougou	43.90	47.40	51.27	57.68	60.1
Comoe	51.60	54.20	58.01	55.99	65.6	Tuy ^P	34.90	39.60	42.31	45.23	48
Leraba ^P	35.10	38.40	46.25	49.96	52.3	Loroum	38.30	44.20	49.01	67.53	69.4
Kadiogo	94.10	97.10	92.55	94.23	95.8	Passore	43.80	48.30	54.15	59.86	67.7
Boulgou	40.90	46.30	51.59	57.87	61.5	Yatenga	49.30	55.30	59.83	67.34	73.3
Koulpelogo ^P	29.30	34.80	41.36	42.05	50.8	Zondoma	39.20	44.70	52.48	64.13	69.6
Kourittenga	41.30	46.50	51.65	56.20	62.2	Ganzourgou ^P	29.70	36.30	42.24	47.69	50.8
Bam	38.10	40.70	46.01	52.06	58.4	Kourweogo	40.40	46.50	53.28	58.98	63.8
Namentenga ^P	24.90	30.00	32.74	36.73	43.6	Oubritenga	45.20	48.70	51.80	57.50	58.6
Sanmatenga ^P	32.90	38.70	43.26	48.51	52.8	Oudalan ^P	22.20	27.00	31.97	38.72	43.9
Boulkiemde	47.90	54.10	65.75	71.10	76.3	Seno ^P	21.10	22.60	26.77	45.40	36.5
Sanguie	45.10	46.70	54.21	59.99	60.4	Soum ^P	21.50	24.20	29.09	33.96	40.9
Sissili	35.20	39.20	44.49	45.99	49.3	Yagha ^P	21.40	25.90	30.74	36.54	34.9
Ziro ^P	28.70	35.70	40.61	46.00	48.9	Bougouriba	48.10	47.90	54.32	58.74	63.6
Bazega	37.10	40.10	47.63	53.70	53.8	Ioba	38.20	38.30	47.07	58.14	56.1
Nahouri	44.50	46.10	58.50	70.30	71.4	Noumbiel ^P	30.50	35.40	46.22	56.83	68.7
Zoundweogo	42.80	47.20	50.47	56.02	59.8	Poni ^P	37.40	39.10	53.12	63.56	62.5
Gnagna ^P	18.60	24.20	26.47	31.37	38						
National	45.1	47.5	52.2	56.8	60.7						
Moyenne	38.05	42.02	47.28	52.98	56.81	Ecart-Type	13.12	12.88	12.71	12.90	12.69
Maximum	94.10	97.10	92.55	94.23	95.80	Minimum	16.90	20.30	21.55	26.13	33.20

Tableau D.1 – Taux bruts de scolarisation par province de 2002 à 2006

Provinces	2002	2003	2004	2005	2006	Provinces	2002	2003	2004	2005	2006
Banwa ^P	29.70	50.90	46.51	53.47	51.6	Gourma ^P	27.20	43.20	53.15	52.77	53.8
Kossi ^P	51.00	50.00	55.04	52.98	62.3	Komandjari ^P	9.60	26.80	27.82	39.94	72.2
Les Balé	40.70	41.70	65.76	47.55	74	Kompienga ^P	42.10	71.30	75.71	68.79	81.5
Mouhoun	38.50	45.50	62.90	70.77	56.7	Tapoa ^P	24.20	35.70	31.00	39.32	37.4
Nayala	47.00	60.40	68.65	76.66	70.6	Houet	54.90	64.20	76.85	76.57	79.9
Sourou	37.30	50.70	64.09	58.93	60.7	Kenedougou	41.40	52.10	69.52	76.54	65.8
Comoe	46.60	53.80	65.99	68.77	72.9	Tuy ^P	35.30	49.00	59.10	50.49	58.4
Leraba ^P	36.10	49.30	63.33	55.12	56.7	Loroum	40.20	55.90	75.83	118.17	94.5
Kadiogo	81.30	93.10	98.99	99.50	102.2	Passore	41.10	52.00	66.59	82.79	76.5
Boulgou	35.80	49.90	63.57	63.49	63.7	Yatenga	43.70	62.40	74.88	86.71	90.1
Koulpelogo ^P	32.50	42.80	57.76	50.20	59	Zondoma	31.30	55.20	74.41	99.50	86.9
Kourittenga	40.30	46.60	64.23	61.20	73.3	Ganzourgou ^P	22.60	53.80	66.14	62.03	61.4
Bam	39.50	45.70	65.85	65.71	70.1	Kourweogo	36.30	65.10	75.51	79.53	72.1
Namentenga ^P	28.90	43.50	44.84	44.72	64	Oubritenga	44.50	52.60	65.00	73.36	64.2
Sanmatenga ^P	29.50	47.00	57.05	62.27	65.4	Oudalan ^P	26.20	40.60	48.07	62.14	75.3
Boulkiemde	41.90	62.70	84.31	87.61	84.2	Seno ^P	27.30	26.70	42.43	72.61	61.5
Sanguie	43.00	51.10	68.79	74.50	66.5	Soum ^P	23.90	34.00	53.76	48.15	61.2
Sissili	35.10	43.20	71.23	58.62	62.8	Yagha ^P	24.40	37.90	57.70	58.32	57.8
Ziro ^P	29.60	58.90	60.35	61.92	61.5	Bougouriba	60.20	48.40	60.25	72.06	84.6
Bazega	31.90	48.20	65.07	63.56	58.9	Ioba	43.60	38.30	70.93	74.62	73.5
Nahouri	45.00	44.90	86.76	86.03	78.7	Noumbiel ^P	38.30	45.80	65.64	89.27	96.3
Zoundweogo	46.00	55.10	61.89	67.81	65.8	Poni ^P	59.00	43.30	74.24	89.42	69.6
Gnagna ^P	17.90	37.00	38.70	50.88	55.5						
National	46.9	52.9	66.2	70	70.7						
Moyenne	37.83	49.47	63.25	67.90	69.15	Ecart-Type	12.21	11.54	13.61	16.80	12.85
Maximum	81.30	93.10	98.99	118.17	102.20	Minimum	9.60	26.70	27.82	39.32	37.40

Tableau D.2 – Taux bruts d'admission par province de 2002 à 2006

Provinces	2002	2003	2004	2005	Provinces	2002	2003	2004	2005
Banwa ^P	65.41	75.52	76.35	72.03	Gourma ^P	64.76	69.91	80.34	70.47
Kossi ^P	51.60	59.82	65.00	60.48	Komandjari ^P	40.00	50.25	44.85	73.68
Les Balé	42.07	57.40	73.11	61.50	Kompienga ^P	94.28	76.57	70.50	68.06
Mouhoun	48.38	69.84	78.75	75.63	Tapoa ^P	59.78	73.87	78.37	81.62
Nayala	48.32	47.77	65.20	60.70	Houet	58.07	75.82	76.34	71.58
Sourou	46.93	62.37	65.83	67.64	Kenedougou	52.30	56.86	68.56	59.04
Comoe	53.38	66.44	71.45	64.65	Tuy ^P	52.30	68.08	70.11	62.45
Leraba ^P	38.61	52.85	59.77	47.23	Loroum	65.62	59.71	69.87	73.15
Kadiogo	59.92	77.01	76.79	74.51	Passore	53.58	78.10	76.57	67.11
Boulgou	59.76	69.99	72.50	63.22	Yatenga	47.31	61.90	67.92	67.50
Koulpelogo ^P	54.22	60.25	70.67	67.64	Zondoma	56.27	70.98	66.38	64.72
Kourittenga	58.58	60.16	82.30	81.14	Ganzourgou ^P	57.94	78.92	79.46	77.99
Bam	70.57	85.39	88.74	82.91	Kourweogo	66.03	70.71	64.41	77.49
Namentenga ^P	64.00	76.28	84.22	81.89	Oubritenga	71.20	69.62	72.58	63.61
Sanmatenga ^P	75.05	68.43	73.06	63.76	Oudalan ^P	37.12	60.41	69.05	70.11
Boulkiemde	57.38	69.39	72.46	66.09	Seno ^P	39.31	66.30	76.92	57.70
Sanguie	53.67	69.32	71.12	66.68	Soum ^P	74.31	75.96	76.16	75.69
Sissili	40.00	61.70	76.44	69.06	Yagha ^P	71.15	50.31	65.98	66.67
Ziro ^P	46.45	71.28	67.82	60.90	Bougouriba	64.12	71.03	72.83	62.53
Bazega	58.73	59.66	70.63	62.61	Ioba	73.74	70.73	69.52	53.42
Nahouri	44.71	65.74	63.54	65.98	Noumbiel ^P	53.66	51.72	86.30	58.94
Zoundweogo	66.02	63.73	67.31	67.29	Poni ^P	54.89	75.20	77.61	64.15
Gnagna ^P	52.92	64.41	67.96	62.96					
Moyenne	56.99	66.62	72.04	67.43	Ecart-Type	11.66	8.65	7.48	7.61
Maximum	94.28	85.39	88.74	82.91	Minimum	37.12	47.77	44.85	47.23

Tableau D.3 – Taux de succès au CEP par province de 2002 à 2005

Annexe E

Données des variables sanitaires 2003 et 2004

Régions sanitaires	X ₁		X ₂		Y ₁		Y ₂		Y ₃	
	2003	2004	2003	2004	2003	2004	2003	2004	2003	2004
Boucle du Mouhoun	35.28	47.39	68.18	74.82	46.85	50.03	85.50	88.57	34.18	38.94
Cascades	30.93	30.19	89.29	64.41	50.03	49.50	95.10	87.05	44.40	56.12
Centre	38.43	68.79	79.22	77.05	62.54	57.50	100	99.26	60.30	38.61
Centre Est	30.15	100	72.29	68.09	45.71	57.43	93.70	94.54	87.52	80.10
Centre Nord	39.55	33.16	60	68.54	48.97	47.88	85.47	87.68	27.68	35.39
Centre Ouest	28.40	33.52	69.49	62.26	31.60	41.38	82.82	93.22	44.16	73.70
Centre Sud	29.33	36.09	82.35	40	39.15	34.79	83.81	83.78	60.39	62.90
Est	29.14	28.31	72	76.54	35.21	55.29	77.97	60.46	50.30	60.52
Hauts Bassins	22.89	31.10	77.17	69.84	51.49	44.97	96.42	92.88	53.83	66.51
Nord	22.00	37.70	43.48	51.26	39.48	46.73	95.22	99.15	100	92.58
Plateau Central	27.47	26.85	63.38	27.06	56.29	45.99	90.25	82.87	1.44	84.17
Sahel	29.41	35.74	80.70	88.14	20.76	44.62	0.06	63.99	69.16	55.79
Sud Ouest	59.48	70.78	65	69.49	33.81	39.90	81.49	93.38	47.68	60.71
Maximum	59.48	100	89.29	88.14	62.54	57.50	100	99.26	100	92.58
Minimum	22.00	26.85	43.48	27.06	20.76	34.79	0.06	60.46	1.44	35.39
Moyenne	32.50	44.59	70.97	64.42	43.22	47.39	82.14	86.68	52.39	62.00
Ecart-type	9.59	21.93	11.72	16.41	11.31	6.73	25.56	12.01	25.18	17.74

Tableau E.1 – Données sanitaires des régions

Districts	X ₁		X ₂		Y ₁		Y ₂		Y ₃		Y ₄	
sanitaires	2003	2004	2003	2004	2003	2004	2003	2004	2003	2004	2003	2004
Solenzo	38.92	39.81	66.67	63.64	41.78	31.31	98.01	98.17	45.04	45.04	92.14	94.33
Nouna	36.20	35.32	45.46	77.27	20.51	21.72	86.50	89.07	70.67	56.17	70.26	88.49
Boromo	68.27	71.71	78.57	63.33	48.98	50.56	94.41	93.01	44.17	50.08	76.73	89.71
Dedougou	37.98	35.24	69.57	77.27	4.19	25.19	82.33	95.30	52.24	55.64	77.11	83.28
Toma	50.17	52.56	75	94.12	41.56	39.12	97.46	98.33	59.93	59.61	87.50	87.03
Tougan	47.91	46.95	72.73	81.82	35.79	37.03	91.13	95.74	32.22	53.52	72.13	83.67
Banfora	61.85	57.88	83.78	59.46	35.01	37.01	97.94	95.09	46.20	59.65	70.85	87.40
Sindou	87.56	100	100	72.73	65.34	58.99	96.84	92.76	61.82	62.36	87.91	94.72
Ouaga : Kossodo	21.12	10.18	50	100	35.83	42.65	99.17	100	77.08	88.08	57.41	62.32
Ouaga : Paul VI	52.51	50.62	75	66.67	106.97	69.77	99.08	97.45	25.29	58.00	79.10	81.30
Ouaga : Pissy	28.91	20.03	56.25	65.22	37.03	30.70	99.45	98.80	57.65	28.89	60.45	68.63
Ouaga : Secteur 30	38.55	32.71	80	90.91	94.20	100.76	99.63	99.53	71.24	59.14	74.80	82.30
Koupela	40.71	38.27	72	83.33	44.61	47.15	97.13	96.43	81.27	68.59	80.08	91.80
Ouargaye	44.96	48.11	61.91	65.22	15.64	28.96	84.64	91.60	70.78	72.16	75.60	96.19
Tenkodogo	36.31	42.38	80	61.11	33.75	47.58	99.20	99.74	80.13	90.85	83.46	99.54
Zabre	28.77	43.97	71.43	63.64	29.60	37.63	100	97.76	66.94	73.22	89.28	92.09
Konkoussi	37.72	38.67	35	42.86	30.35	32.05	93.73	93.93	47.88	51.32	104.04	114.46
Boulsa	35.21	34.45	68.18	77.27	25.65	32.60	90.90	92.39	45.24	54.07	87.26	102.63
Barsalogho	42.18	41.29	100	100	32.29	32.77	94.67	91.53	50.19	45.73	91.50	102.80
Kaya	36.36	38.94	56.25	68.57	18.60	21.35	95.89	98.90	62.25	62.25	78.24	96.95
Koudougou	60.72	46.91	63.04	50	39.33	41.28	98.87	98.67	46.96	83.99	67.15	84.36
Nanoro	43.00	46.31	81.82	75	12.28	26.26	0.03	90.68	69.90	73.41	84.26	99.86
Reo	46.71	44.42	62.96	76.92	22.48	23.43	100	96.15	66.63	74.05	63.72	99.06
Leo	49.14	56.51	79.41	54.55	8.59	28.01	94.34	98.06	36.86	46.18	80.70	96.39
Kombissiri	33.93	33.45	88.24	64.71	13	23.43	93.11	97.63	52.98	63.81	68.03	79.01
Sapone	25.63	25.26	76.92	69.23	14.21	11.06	93.77	95.47	86.77	76.26	70.96	113.43
Po	47.24	64.66	84.62	22.22	25.09	27.43	88.63	83.39	52.45	54.67	53.88	63.73
Manga	51.51	54.46	80	22.22	40.48	16.69	94.29	84.68	57.47	61.29	82.64	88.24
Fada	34.24	37.27	73.91	76.19	20.85	26.46	91.19	92.20	82.10	87.32	73.95	91.94
Bogande	31.82	32.22	68	61.54	22.03	24.31	84.45	58.53	48.49	46.72	77.82	78.18
Pama	49.50	55.03	66.67	85.71	45.64	47.95	95.94	98.20	21.46	27.28	100.15	102.41
Diapaga	32.45	31.32	76.19	90.48	27.18	33.57	94.90	95.31	51.47	67.25	92.78	109.95
Dande	43.48	46.48	95	68.18	35.55	38.87	96.57	97.70	52.60	62.11	71.25	88.08
Bobo :Secteur 15	48.66	35.81	75.76	100	29.40	27.63	97.75	97.81	64.50	74.29	72.01	73.31
Bobo :Secteur 22	22.87	23.52	100	100	48.69	22.11	100	100	52.10	50.21	70.17	74.43
Orodara	65.28	67.05	64.71	41.67	45.65	47.69	97.64	97.94	67.50	66.02	81.14	88.61
Hounde	53.38	56.11	65.22	60	53.25	51.65	96.58	90.82	58.14	66.90	77.92	89.60
Titao	51.25	56.32	46.67	64.71	14.64	25.30	89.53	100	53.89	37.07	68.60	87.28
Yako	58.53	60.45	30.77	26.83	24.05	24.09	100	100	100	52.35	65.64	83.91
Ouahigouya	65.26	41.55	41.43	36.36	25.56	28.08	97.96	100	67.97	61.26	63.13	80.45
Seguenega	42.84	41.96	85.71	92.86	22.05	24.81	95.33	98.72	22.54	87.20	76.79	84.17
Zorgho	46.30	46.68	83.33	9.68	52.01	33.41	97.00	96.19	43.93	50.04	56.61	75.30
Bousse	44.30	58.26	75	62.50	35.91	22.26	94.23	86.17	52.05	78.96	79.68	90.93
Ziniare	58.26	74.47	37.93	26.32	30.17	12.30	93.28	86.53	0.70	61.50	80.45	76.01
Gorom	53.46	48.75	100	92.86	17.71	13.41	59.37	80.58	58.91	63.11	66.73	78.68
Dori	29.20	28.44	86.67	100	19.51	10.07	80.97	70.26	61.29	59.09	85.51	96.72
Djibo	24.55	29.85	62.50	70	6.07	79.40	43.29	96.37	56.17	71.81	52.11	85.74
Sebba	34.59	30.32	72.73	100	14.35	19.77	28.72	57.19	78.67	68.52	74.15	93.57
Diebougou	66.77	60.30	66.67	81.82	27.45	36.38	93.18	96.82	61.01	53.01	107.35	94.86
Dano	46.12	45.64	70.59	76.47	25.63	59.25	94.06	97.13	62.32	38.39	90.78	102.79
Batie	66.14	65.17	100	100	16	50.40	94.20	96.58	56.08	67.63	94.67	103.55
Gaoua	54.63	54.53	39.13	47.83	11.96	19.42	86.64	96.13	51.67	71.97	95.23	85.67
Sapouy*	-	31.22	-	70	-	16.68	-	92.09	-	53.41	-	84.95
Gayeri*	-	49.10	-	83.33	-	18.40	-	95.49	-	82.17	-	81.41
Gourcy*	-	46.60	-	100	-	14.61	-	90.37	-	91.44	-	85.81
Maximum	87.56	100	100	100	106.97	100.76	100	100	100	91.44	107.35	114.46
Minimum	21.12	10.18	30.77	9.68	4.19	10.07	0.03	57.19	0.70	27.28	52.11	62.32
Moyenne	45.27	45.55	71.14	69.72	31.62	33.65	89.69	93.19	56.61	62.27	77.73	88.95
Ecart-type	13.50	15.13	17.22	22.49	19.27	17.24	18.27	8.89	17.48	14.71	12.36	11.12

* Nouveau district en 2004

Tableau E.2 – Données sanitaires des districts

Annexe F

Données des entreprises en 2004

Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C
1	2	0.20	0.09	0.4479	2	2	0.20	1.27	6.3447	3	3	0.30	0.13	0.4356	4	2	0.10	0.10	1.0450
5	5	24.00	0.19	0.0077	6	3	0.23	0.01	0.0220	7	3	0.50	0.22	0.4479	8	2	0.20	0.00	0.0176
9	2	0.10	0.90	9.0436	10	5	20.00	7.80	0.3898	11	5	4.00	0.36	0.0901	12	3	0.50	0.79	1.5860
13	2	0.20	0.04	0.2185	14	3	0.50	0.62	1.2451	15	2	0.20	0.45	2.2393	16	5	3.91	0.59	0.1498
17	4	1.20	1.20	0.9969	18	4	1.00	1.73	1.7277	19	5	4.25	4.73	1.1134	20	2	0.10	0.18	1.8064
21	5	70.00	11.17	0.1596	22	3	0.50	0.04	0.0812	23	4	1.00	0.75	0.7464	24	5	46.98	14.93	0.3177
25	2	0.20	0.13	0.6718	26	3	0.30	1.06	3.5431	27	5	8.00	0.70	0.0876	28	4	1.00	0.95	0.9460
29	5	21.30	0.85	0.0397	30	4	2.50	1.36	0.5446	31	2	0.10	0.08	0.7517	32	5	20.00	1.75	0.0874
33	5	12.00	0.40	0.0336	34	4	3.00	0.48	0.1607	35	2	0.10	0.01	0.0538	36	4	1.00	0.30	0.2986
37	2	0.20	0.19	0.9704	38	4	1.00	1.70	1.7041	39	5	99.02	25.70	0.2596	40	5	10.00	3.90	0.3896
41	2	0.10	0.10	1.0450	42	2	0.20	0.02	0.1193	43	2	0.20	0.03	0.1378	44	2	0.20	0.16	0.8219
45	2	0.10	0.39	3.8779	46	2	0.20	0.37	1.8505	47	3	0.30	0.09	0.3032	48	3	0.30	0.15	0.4911
49	2	0.10	0.06	0.6061	50	3	0.25	0.06	0.2303	51	4	1.00	3.95	3.9500	52	2	0.10	0.12	1.1973
53	2	0.20	0.10	0.4767	54	2	0.20	0.30	1.4929	55	5	6.07	0.33	0.0552	56	4	2.00	1.14	0.5707
57	4	1.00	1.66	1.6621	58	4	2.00	0.74	0.3680	59	3	0.50	1.94	3.8749	60	3	0.70	0.03	0.0399
61	5	25.00	0.41	0.0163	62	5	18.49	0.36	0.0194	63	2	0.10	0.17	1.7440	64	3	0.50	0.34	0.6878
65	1	0.20	0.35	1.7436	66	2	0.20	0.18	0.8957	67	2	0.20	0.11	0.5748	68	2	0.20	0.22	1.1197
69	2	0.20	4.38	21.8769	70	2	0.10	0.04	0.3951	71	2	0.10	0.03	0.3123	72	5	15.00	4.97	0.3314
73	4	1.20	0.01	0.0062	74	3	0.50	0.07	0.1388	75	4	2.00	2.60	1.2987	76	2	0.20	0.08	0.3917
77	2	0.10	0.37	3.6977	78	5	10.00	0.84	0.0843	79	5	8.00	5.82	0.7278	80	4	1.00	0.92	0.9172
81	2	0.10	0.03	0.2911	82	3	0.50	6.20	12.3919	83	4	1.48	2.81	1.9059	84	2	0.10	0.02	0.2187
85	4	1.00	0.04	0.0403	86	4	1.00	0.36	0.3583	87	5	80.00	1.47	0.0183	88	4	0.80	0.41	0.5181
89	5	20.65	25.23	1.2218	90	5	42.00	2.99	0.0711	91	5	7.70	1.12	0.1451	92	5	20.00	0.18	0.0092
93	2	0.20	0.38	1.9109	94	1	0.10	3.91	39.0903	95	4	0.90	0.52	0.5812	96	2	0.10	0.60	5.9715
97	3	0.50	1.26	2.5270	98	4	2.40	0.30	0.1268	99	4	1.00	0.18	0.1838	100	5	39.00	3.90	0.1001
101	4	2.50	0.01	0.0048	102	4	1.00	5.97	5.9715	103	4	1.00	0.67	0.6733	104	3	0.50	1.70	3.4041
105	3	0.50	0.13	0.2510	106	2	0.20	0.40	2.0067	107	4	1.26	1.64	1.3070	108	5	60.50	100.00	1.6529
109	5	100.00	0.96	0.0096	110	4	2.00	0.15	0.0746	111	5	4.00	0.06	0.0154	112	5	20.00	5.57	0.2784
113	1	0.20	0.02	0.1157															
Maximum	5	100.00	100.00	39.09															
Minimum	1	0.10	0.00	0.00															
Moyenne	-	7.72	2.58	1.64															
Ecart-Type	-	18.54	10.04	4.44															

“Sté :” société ; “Cat. :” Catégorie ; “Cap :” Capital ; “CA :” Chiffre d’affaires

Tableau F.1 – Données des sociétés de commerces et assimilés

Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C
1	4	100	74.68	0.7468	2	3	50	22.81	0.4562	3	4	75	100.00	1.3333	4	1	0.5	3.42	6.8364
5	1	0.5	3.11	6.2149	6	2	15	28.12	1.8748	7	2	15.0195	19.21	1.2791	8	4	80	59.25	0.7406
9	3	36	54.02	1.5005	10	1	2.5	14.17	5.6688	11	2	25	21.89	0.8757	12	2	25	13.30	0.5319
Maximum	4	100.00	100.00	6.84															
Minimum	1	0.50	3.11	0.46															
Moyenne	-	35.38	34.50	2.34															
Ecart-Type	-	33.72	30.57	2.40															

“Sté :” société ; “Cat. :” Catégorie ; “Cap :” Capital ; “CA :” Chiffre d’affaires

Tableau F.2 – Données des banques, assurances et établissements financiers

Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C
1	2	1.00	70.14	70.1354	2	2	1.00	8.06	8.0625	3	3	1.50	39.17	26.1149	4	4	5.25	4.57	0.8695
5	2	1.00	25.63	25.6268	6	4	100.00	16.70	0.1670	7	3	2.50	8.28	3.3119	8	3	5.00	73.22	14.6439
9	2	0.50	22.15	44.2916	10	3	2.50	16.24	6.4941	11	4	12.50	100.00	8.0000	12	2	1.00	25.58	25.5813
13	2	1.00	4.39	4.3932	14	3	5.00	18.06	3.6126	15	1	1.00	2.93	2.9288	16	3	5.00	14.42	2.8840
17	2	1.00	1.62	1.6160	18	2	1.00	14.14	14.1383	19	3	5.00	1.46	0.2929	20	2	1.00	4.79	4.7850
21	2	1.00	3.63	3.6275	22	4	15.50	35.15	2.2674	23	4	50.00	44.33	0.8866	24	2	0.50	4.39	8.7863
25	3	1.80	35.24	19.5789	26	1	0.50	7.03	14.0581										
Max	4	100.00	100.00	70.14															
Min	1	0.50	1.46	0.17															
Moy	-	8.58	23.13	12.20															
Ecart-T	-	21.11	25.08	15.94															

“Sté :” société ; “Cat. :” Catégorie ; “Cap :” Capital ; “CA :” Chiffre d’affaires

Tableau F.3 – Données des sociétés de bâtiments, TP et assimilés

Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C
1	4	54.72	0.12	0.0023	2	1	0.03	0.16	4.8485	3	4	33.16	0.30	0.0092	4	2	0.21	0.04	0.2050
5	2	0.17	0.08	0.4791	6	4	24.87	5.01	0.2013	7	1	0.05	0.03	0.6301	8	1	0.03	0.02	0.5122
9	1	0.08	0.07	0.8380	10	2	0.25	0.05	0.2187	11	3	9.95	0.42	0.0421	12	1	0.03	0.11	3.4289
13	1	0.02	0.27	16.3355	14	3	0.84	0.05	0.0599	15	4	15.51	19.51	1.2581	16	2	0.41	0.06	0.1434
17	1	0.03	0.16	4.8389	18	2	0.33	0.20	0.6029	19	1	0.03	0.02	0.5884	20	2	0.83	0.88	1.0586
21	4	16.25	1.64	0.1009	22	3	13.26	4.84	0.3650	23	4	72.96	100.00	1.3707	24	3	1.49	0.61	0.4110
25	2	0.17	1.11	6.6899	26	3	2.49	0.04	0.0145	27	3	9.67	0.11	0.0111	28	3	11.30	2.44	0.2155
29	1	0.02	0.05	2.7780	30	3	1.66	6.37	3.8402	31	2	0.41	0.15	0.3638	32	3	3.32	1.76	0.5313
33	4	13.64	2.93	0.2146	34	2	0.41	0.25	0.6096	35	2	0.25	0.40	1.6174	36	3	6.63	0.49	0.0735
37	4	57.12	5.37	0.0939	38	4	100.00	6.17	0.0617	39	1	0.08	0.04	0.5237	40	4	33.16	2.72	0.0820
41	1	0.03	0.09	2.8368	42	3	1.24	0.25	0.2004	43	1	0.03	0.01	0.4413	44	4	16.58	0.87	0.0525
Max	4	100.00	100.00	16.3355															
Min	1	0.02	0.01	0.0023															
Moy	-	11.45	3.78	1.3591															
Ecart-T	-	21.65	15.20	2.7741															

“Sté :” société ; “Cat. :” Catégorie ; “Cap :” Capital ; “CA :” Chiffre d'affaires

Tableau F.4 – Données des industries et assimilées

Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C	Sté	Cat.	Cap.	CA	CA/C
1	1	2.00	30.40	15.2010	2	1	2.00	100.00	50.0000	3	1	2.00	12.05	6.0255	4	1	1.00	5.51	5.5127
5	3	10.00	3.53	0.3528	6	1	2.00	4.36	2.1793	7	4	25.00	9.80	0.3919	8	3	3.20	19.69	6.1517
9	3	5.00	5.51	1.1025	10	4	25.00	58.74	2.3498	11	1	2.00	5.51	2.7563	12	1	2.00	19.67	9.8333
13	1	2.00	1.56	0.7781	14	1	1.00	5.76	5.7640	15	4	100.00	71.58	0.7158	16	1	2.00	9.92	4.9614
17	1	2.00	1.08	0.5402	18	3	10.00	49.40	4.9404	19	3	4.00	12.71	3.1768	20	3	10.00	11.13	1.1126
21	3	10.00	10.45	1.0452	22	4	20.00	1.87	0.0937	23	4	20.00	35.04	1.7518	24	1	2.00	2.65	1.3230
25	3	5.00	1.40	0.2793	26	2	2.10	1.32	0.6300										
Max	4	100.00	100.00	50.0000															
Min	1	1.00	1.08	0.0937															
Moy	-	10.43	18.87	4.9604															
Ecart-T	-	19.74	24.97	9.8251															

“Sté :” société ; “Cat. :” Catégorie ; “Cap :” Capital ; “CA :” Chiffre d'affaires

Tableau F.5 – Données des sociétés de services d'études

Bibliographie

- [1] *Cadre stratégique de lutte contre la pauvreté (CSLP)*, Ministère de l'économie et des finances, Burkina Faso, 2002.
- [2] *Programme d'actions prioritaires de mise en œuvre du CSLP 2004-2006*, Ministère de l'économie et du développement, Burkina Faso, Janvier 2004.
- [3] Abbott M. & Doucouliagosa C., *The efficiency of australian universities : a data envelopment analysis*, Economics of Education Review **22** (2003), 89–97.
- [4] Agrell P. J. & Bogetoft P., *Economic and environmental efficiency of district heating plants*, Energy Policy **33** (2005), 1351–1362.
- [5] Ali A. I. & Nakosteen R., *Ranking industry performance in the US*, Socio-Economic Planning Sciences **39** (2005), 11–24.
- [6] Amirteimoori A. & Kordrostami S., *Multi-component efficiency measurement with imprecise data*, Applied Mathematics and Computation **162** (2005), 1265–1277.
- [7] Athanassopoulos A. & Gounaris C., *Assessing the technical and allocative efficiency of hospital operations in Greece and its resource allocation implications*, European Journal of Operational Research **133** (2001), 416–431.
- [8] Avkiran N. K., *Investigating technical and scale efficiencies of australian universities through data envelopment analysis*, Socio-Economic Planning Sciences **35** (2001), 57–80.
- [9] Ballesterio E. & Maldonado J. A., *Objective measurement of efficiency : applying single price model to rank hospital activities*, Computers and Operations Research **31** (2004), 515–532.
- [10] Banker R. D., *Estimating most productive scale size using data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research **17** (1984), 35–44.

- [11] Banker R. D., Bardhan I., & Cooper W. W., *A note on returns to scale in DEA*, European Journal of Operational Research **88** (1996), 583–585.
- [12] Banker R. D., Chang H., & Cooper W. W., *Equivalence and implementation of alternative methods for determining returns to scale in data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research **86** (1996), 473–481.
- [13] Banker R. D., Charnes A., & Cooper W. W., *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis*, Management Science **30** (1984), no. 9, 1078–1092.
- [14] Banker R. D., Cooper W. W., Seiford L. M., Thrall R. M., & Zhu J., *Returns to scale in different DEA models*, European Journal of Operational Research **154** (2004), 345–362.
- [15] Banker R. D., Janakiraman S., & Natarajan R., *Analysis of trends in technical and allocative efficiency : An application to Texas public schools districts*, European Journal of Operational Research **154** (2004), 477–491.
- [16] Banker R. D. & Thrall R. M., *Estimation of returns to scale using data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research **62** (1992), 74–84.
- [17] Belton V. & Vickers S., *Demystifying DEA- a visual interactive approach based on multiple criteria analysis*, Journal of the Operational Research Society **44** (1993), 883–896.
- [18] Birman S. V., Pirondi P. E., & Rodin E. Y., *Application of DEA to medical clinics*, Mathematical and Computer Modelling **37** (2003), 923–936.
- [19] Bouyssou D., *Using DEA as a tool for MCDM : some remarks*, Journal of the Operational Research Society **50** (1999), 974–978.
- [20] Bradley S., Johnes G., & Millington J., *The effect of competition on the efficiency of secondary schools in England*, European Journal of Operational Research **135** (2001), 545–568.

- [21] Byrnes P., Färe R., & Grosskopf S., *Measuring productivity efficiency : an application to Illinois strip mines*, Management Science **30** (1984), no. 6, 671–681.
- [22] Caves D. W., Christensen L. R., & Diewert W. E., *The economic theory of index numbers and the measurement of input, output, and productivity*, Econometrica **50** (1982), no. 6, 1393–1414.
- [23] Chaabane D., *Contribution à l'optimisation multicritère en variables discrètes*, Thèse de doctorat, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique, Février 2007.
- [24] Chang H., *Determinants of hospital efficiency : the case of central government-owned hospitals in Taiwan*, Omega : International Journal of Management Science **26** (1998), no. 2, 307–317.
- [25] Chang H., Cheng M. A., & Das S., *Hospital ownership and operating efficiency : Evidence from Taiwan*, European Journal of Operational Research **159** (2004), 513–527.
- [26] Charnes A., Cooper W. W., Lewin A. Y., & Seiford L. M., *Data envelopment analysis : Theory, methodology and applications*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [27] Charnes A., Cooper W. W., & Rhodes E., *Measuring the efficiency of decision making units*, European Journal of Operational Research **2** (1978), 429–444.
- [28] Charnes A., Cooper W. W., & Thrall R. M., *Classifying and characterizing efficiencies and inefficiencies in data envelopment analysis*, Operations Research Letters **5** (1986), no. 3, 105–110.
- [29] Chen Y. & Ali A. I., *DEA Malmquist productivity measure : New insights with an application to computer industry*, European Journal of Operational Research **159** (2004), 239–249.

- [30] Chen Y., Morita H., & Zhu J., *Multiplier bounds in DEA via strong complementary slackness condition solution*, International Journal of Production Economics **86** (2003), 11–19.
- [31] Cherchye L., T. Kuosmanen T., & Post T., *What Is the Economic Meaning of FDH ? A Reply to Thrall* , Journal of Productivity Analysis **13** (2000), 263–267.
- [32] Conceição M., Portela S. A., & Thanassoulis E., *Decomposing school and school-type efficiency*, European Journal of Operational Research **132** (2001), 357–373.
- [33] Cook W. D. & Hababou M., *Sales performance measurement in bank branches*, Omega : International Journal of Management Science **29** (2001), 299–207.
- [34] Cook W. D. & Zhu J., *Rank order data in DEA : A general framework*, European Journal of Operational Research **174** (2006), 1021–1038.
- [35] Cooper W. W., Seiford L. M., & Zhu J., *Handbook on data envelopment analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [36] Dervaux B., Leleu H., Minvielle E., Aegerter P., & Guidet B., *Mesure de la performance économique en réanimation / measurement of economic performance in intensive care units*, Réanimation **12** (2003), 42–46.
- [37] Despotis D. K., *A reassessment of the human development index via data envelopment analysis*, Journal of the Operational Research Society (2004).
- [38] Despotis D. K., *Measuring human development via data envelopment analysis : the case of Asia and the Pacific*, Omega : International Journal of Management Science **33** (2005), 385–390.
- [39] Despotis D. K. & Smirlis Y. G., *Data envelopment analysis with imprecise data*, European Journal of Operational Research **140** (2002), 24–36.
- [40] Doyle J. & Green R., *Data envelopment and multiple criteria decision making*, Omega : International Journal of Management Science **21** (1993), no. 6, 713–715.

- [41] Ehrgott M. & Gandibleux X., *Multiobjective combinatorial optimization – theory, methodology and applications*, in : Ehrgott M. and gandibleux X. (eds.), *multiple criteria optimization : State of the art annotated bibliographic surveys*, International Series in Operations Research and Management Science, vol. 52, Springer, 2002.
- [42] Ehrgott M. & Gandibleux X., *Multiple criteria optimization : State of the art annotated bibliographic surveys*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [43] Fandel G., *On the performance of universities in North Rhine-Westphalia, Germany : Government's redistribution of funds judged using DEA efficiency measures*, European Journal of Operational Research **176** (2007), 521–533.
- [44] Farrell M. J., *The measurement of productive efficiency*, Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General) **120** (1957), no. 3, 253–290.
- [45] Färe R. & Grosskopf S., *Network DEA*, Socio-Economic Planning Sciences **34** (2000), 35–49.
- [46] Färe R., Grosskopf S., & Hernandez-Sancho F., *Environmental performance : an index number approach*, Resource and Energy Economics **26** (2004), 343–352.
- [47] Färe R., Grosskopf S., Lindgren B., & Ross P., *Productivity developments in Swedish hospitals : A Malmquist output index approach*. In : Charnes, A., Cooper, W.W., Lewin, A.Y., Seiford, L.M. (Eds.), *Data Envelopment Analysis : Theory, Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston (1994).
- [48] Färe R., Grosskopf S., & Roos P., *On two definitions of productivity*, Economics Letters **53** (1996), 269–274.
- [49] Giokas D. I., *Greek hospitals : how well their resources are used*, Omega : the International Journal of Management Science **29** (2001), 73–83.

- [50] Golany B. & Thore S., *The economic and social performance of nations : Efficiency ant returns to scale*, Socio-Economic Planning Science **31** (1997), no. 3, 191–204.
- [51] Griefell-Tatjé E. & Lovell C. A. K., *A note on the Malmquist productivity index*, Economics Letters **47** (1995), 169–175.
- [52] Grosskopf S., Margaritis D., & Valdmanis V., *Competitive effects on teaching hospitals*, European Journal of Operational Research **154** (2004), 515–525.
- [53] Grosskopf S. & Moutray C., *Evaluating performance in Chicago public high schools in the wake of decentralization*, Economics of Education Review **20** (2001), 1–14.
- [54] Gstach D., Somers A., & Warning S., *Output specific efficiencies :The case of UK private secondary schools* 84, Vienna University of Economics and B.A., Department of Economics Working Paper Series, February 2003.
- [55] Haghighat M. S. & Khorram E., *The maximum and minimum number of efficient units in DEA with interval data*, Applied Mathematics and Computation **163** (2005), 919–930.
- [56] Jahanshahloo G. R., Lotfi F. H., Shoja N., & Tohidi G., *A method for finding efficient dmus in DEA using 0-1 linear programming*, Applied Mathematics and Computation **159** (2004), 37–45.
- [57] Jahanshahloo G. R., Martin R. K., & Vencheh A. H., *On return to scale of fully efficient DMUs in data envelopment analysis under interval data*, Applied Mathematics and Computation **154** (2004), 31–40.
- [58] Jahanshahloo G. R., Matin R. K., & Vencheh A. H., *On FDH efficiency analysis with interval data*, Applied Mathematics and Computation **159** (2004), 47–55.

- [59] Jahanshahloo G. R., Matin R. K., & Vencheh A. H., *On return to scale of fully efficient DMUs in data envelopment analysis under interval data*, Applied Mathematics and Computation **154** (2004), 31–40.
- [60] Jahanshahloo G. R., Memariani A., Hosseinzadeh F., & Shoja N., *A feasible interval for weights in data envelopment analysis*, Applied Mathematics and Computation **160** (2005), 155–168.
- [61] Jahanshahloo G. R. & Soleimani-Damaneh M., *Estimating returns to scale in data envelopment analysis : A new procedure*, Applied Mathematics and Computation **150** (2004), 89–98.
- [62] Jahanshahloo G. R. & Soleimani-Damaneh M., *A note on simulating weights restrictions in DEA : an improvement of Thanassoulis and Allen's method*, Computers and Operations Research **32** (2005), 1037–1044.
- [63] Jahanshahloo G. R., Vencheh A. H., Foroughi A. A., & Matin R. K., *Inputs/outputs estimation in dea when some factors are undesirable*, Applied Mathematics and Computation **156** (2004), 19–32.
- [64] Johnes J., *Measuring teaching efficiency in higher education : An application of data envelopment analysis to economics graduates from UK Universities 1993*, European Journal of Operational Research **174** (2006), 443–456.
- [65] Johnes J. & Johnes G., *Research funding and performance in U.K. university departments of economics : A frontier analysis*, Economics of Education Review **14** (1995), no. 3, 301–314.
- [66] Joro T., Korhonen P., & Wallenius J., *Structural comparison of data envelopment analysis and multiple objective linear programming*, Management Science **44** (1998), no. 7, 962–970.
- [67] Kao C., *Interval efficiency measures in data envelopment analysis with imprecise data*, European Journal of Operational Research **174** (2006), 1087–1099.

- [68] Kerstens K. & Vanden Eeckaut P., *Estimating returns to scale using non-parametric deterministic technologies : A new method based on goodness -of-fit*, European Journal of Operational Research **113** (1999), 206–214.
- [69] Kirjavainen T. & Loikkanen H. A., *Efficiency differences of Finnish senior secondary schools : An application of DEA and tobit analysis*, Economics of Education Review **17** (1998), no. 4, 377–394.
- [70] Korhonen P. J. & Luptacik M., *Eco-efficiency analysis of power plants : An extension of data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research **154** (2004), 437–446.
- [71] Lee Y. K., Park K. S., & Kim S. H., *Identification of inefficiencies in an additive model based IDEA(imprecise data envelopment analysis)*, Computers and Operations Research **29** (2002), 1661–1676.
- [72] Leleu H., *A linear programming framework for free disposal hull technologies and cost functions : Primal and dual models*, European Journal of Operational Research **168** (2006), 340–344.
- [73] Linna M., Nordblad A., & Koivu M., *Technical and cost efficiency of oral health care provision in Finnish health centres*, Social Science and Medicine **56** (2003), 343–353.
- [74] Liu F- H. F., Huang C- C., & Yen Y- L., *Using DEA to obtain efficient solutions for multi-objective 0-1 linear programs*, European Journal of Operational Research **126** (2000), 51–68.
- [75] Al-Shammari M., *A multi-criteria data envelopment analysis model for measuring the productive efficiency of hospitals*, International Journal of operations and production management **19** (1999), no. 9, 879–890.
- [76] Maniadakis N. & Thanassoulis E., *A cost Malmquist productivity index*, European Journal of Operational Research **154** (2004), 396–409.

- [77] Michaelowa K., *OECD, primary education quality in francophone Sub-saharan Africa : Determinants of learning achievement and efficiency consideration*, World Development **29** (2001), no. 10, 1699–1716.
- [78] Mir-Hassani S. A. & Alirezaee M. R., *An efficient approach for computing non-archimedean ε in DEA based on integrated models*, Applied Mathematics and Computation (2004).
- [79] Ouellette P. & Vierstraete V., *Technological change and efficiency in the presence of quasi-fixed inputs : A DEA application to the hospital sector*, European Journal of Operational Research **154** (2004), 755–763.
- [80] Ozcan Y. A., *Efficiency of Hospital Service Production in Local Markets : The Balance Sheet of U.S. Medical Armament*, Socio-Economic Planning Sciences **29** (1995), no. 2.
- [81] Piot-Lepetit I. & Rainelli P., *Détermination des marges de manœuvre des élevages à partir de la mesure des inefficacités*, INRA Production Animale **9** (1996), no. 5.
- [82] Pirlot M. & Teghem J., *Résolution de problèmes de recherche opérationnelle par les métaheuristiques.*, Traité IC2, Editions Hermès, 2003.
- [83] Podinovski V. V., *On the linearisation of reference technologies for testing returns to scale in FDH models*, European Journal of Operational Research **152** (2004), 800–802.
- [84] Puig-Junio J., *Partitioning input cost efficiency into its allocative and technical components : an empirical DEA application to hospitals*, Socio-Economic Planning Sciences **34** (2000), 199–218.
- [85] Ray S., *Resource-use efficiency in public schools : A study of Connecticut data*, Management Science **37** (1991), no. 12, 1620–1628.
- [86] Roy B., *Méthodologie multicritère d'aide à la décision.*, Economica, 1985.

- [87] Ruggiero J., *On the measurement of technical efficiency in the public sector*, European Journal of Operational Research **90** (1996), 553–565.
- [88] Ruggiero J., *Nonparametric analysis of educational costs*, European Journal of Operational Research **119** (1999), 605–612.
- [89] Ruggiero J., Miner J., & Blanchard L., *Measuring equity of educational outcomes in the presence of inefficiency*, European Journal of Operational Research **142** (2002), 642–652.
- [90] Scheel H., *Undesirable outputs in efficiency valuations*, European Journal of Operational Research **132** (2001), 400–410.
- [91] Seiford L. M. & Zhu J., *An investigation of returns to scale in data envelopment analysis*, Omega : International Journal of Management Science **27** (1999), 1–11.
- [92] Seiford L. M. & Zhu J., *Modeling undesirable factors in efficiency evaluation*, European Journal of Operational Research **142** (2002), 16–20.
- [93] Shroff H. F. E., Gullledge T. R., Haynes K. E., & O'Neill M. K., *Siting efficiency of long-term health care facilities*, Socio-Economic Planning Science **32** (1998), no. 1, 25–43.
- [94] Stewart T. J., *Relationships between data envelopment analysis and multiple criteria analysis*, Journal of Operational Research Society **47** (1996), no. 5, 654–665.
- [95] Tavares G., *A bibliography of data envelopment analysis (1978-2001)*, Rutcor Research, 2002.
- [96] Taylor W. M., Thompson R. G., Thrall R. M., & Dharmapala P. S., *DEA/AR efficiency and profitability of mexican banks a total income model*, European Journal of Operational Research **98** (1997), 346–363.
- [97] Teghem J., *Programmation linéaire*, 2ème édition ed., Editions de l'Université de Bruxelles et Ellipses, 2003.

- [98] Teghem J. & Kunsch P. L., *Interactive method for multi-objective integer linear programming*, in : Eds. Fandel, Grauer, Kurshanski, Wierzbicki. “*Large Scale Modelling and Interactive Decision Analysis*”, Springer Verlag (1986), 75–87.
- [99] Teghem J. & Kunsch P. L., *A survey of techniques for finding efficient solutions to multi-objective integer linear programming*, Asia-Pacific Journal of Operational Research **3** (1986), 95–108.
- [100] Teghem J. & Pirlot M., *Optimisation approchée en recherche opérationnelle*, Traité IC2, Editions Hermès, 2002.
- [101] Teghem J., Tuytens D., & Ulungu E.L., *An interactive heuristic method for multi-objective combinatorial optimization*, Computers and Operations Research **27** (2000).
- [102] Thanassoulis E., Boussofiane A., & Dyson R. G., *Exploring output quality targets in the provision of perinatal care in England using data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research **80** (1995), 588–607.
- [103] Thanassoulis E. & Dyson R. G., *Estimating preferred target input-output levels using data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research **56** (1992), 80–97.
- [104] Thompson R. G., Dharmapala P. S. and Rothenberg L. J., & Thrall R. M., *DEA/AR efficiency and profitability of 14 major oil companies in U.S. exploration and production*, Computers and Operations Research **23** (1996), no. 4.
- [105] Thompson R. G., Brinkmann E. J., Dharmapala P. S., M.D. Gonzalez-Lima, & Robert M. Thrall, *DEA/AR profit ratios and sensitivity of 100 large U.S. banks*, European Journal of Operational Research **98** (1997), 213–229.
- [106] Thrall R. M., *What Is the Economic Meaning of FDH ?* , Journal of Productivity Analysis **11** (1999), 243–250.

- [107] Thursby J. G. & Kemp S., *Growth and productive efficiency of university intellectual property licensing*, Research Policy **31** (2002), 109–124.
- [108] Tulkens H., *On FDH efficiency : Some methodological issues and applications to retail banking, courts, and urban transit*, Journal of Productivity Analysis **4** (1993), 183–210.
- [109] Tuyttens D., Teghem J., Fortemps Ph., & Van Nieuwenhuysse K., *Performance of the MOSA method for bicriteria assignment problem*, Journal of Heuristics **6** (2000).
- [110] Tyteca D., *On the measurement of the environmental performance of firms – a literature review and a productive efficiency perspective*, Journal of Environmental Management **46** (1996), 281–308.
- [111] Ulungu E. L., *Optimisation combinatoire multicritère : détermination de l'ensemble des solutions efficaces et méthodes interactives*, Thèse de doctorat, Université de Mons-Hainaut, Belgique, 1993.
- [112] Ulungu E.L. & Teghem J., *Multi-objective combinatorial optimization problems : A survey*, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis **3** (1994).
- [113] Ulungu E.L., Teghem J., Fortemps Ph., & Tuyttens D., *MOSA method : a tool for solving MOCO problem.*, Journal of Multi-Criteria Decision Analysis **36** (1999).
- [114] Vencheh A. H., Matin R. K., & Kajani M. T., *Undesirable factors in efficiency measurement*, Applied Mathematics and Computation **163** (2005), 547–552.
- [115] Vennesland B., *Measuring rural economic development in Norway using data envelopment analysis*, Forest Policy and Economics **7** (2005), 109–119.
- [116] Vincke P., *L'aide multicritère à la décision.*, Ellipses - Editions de l'Université de Bruxelles, 1989.
- [117] Wagner J. M., Shimshak D. G., & Novak M. A., *Advances in physician profiling : the use of DEA*, Socio-Economic Planning Sciences **37** (2003), 141–163.

- [118] Watcharasriroj B. & Tang J. C. S., *The effects of size and information technology on hospital efficiency*, Journal of High Technology Management Research **15** (2004), 1–16.
- [119] Yougbaré J. W., *Programmation linéaire multicritère en variables discrètes*, Mémoire de DEA, UFR-SEA : Université de Ouagadougou, Burkina Faso, Janvier 2003.
- [120] Yougbaré J. W. & Teghem J., *Relationships between Pareto optimality in multi-objective 0-1 linear programming and DEA efficiency*, European Journal of Operational Research (En presse : doi :10-1016/j.ejor.2006.10.026) (2006).
- [121] Yougbaré J. W. & Teghem J., *Measuring school performances of the Provincial Directions of Basic Education (PDBE) in Burkina Faso*, Soumis pour publication (2007).
- [122] Yu G., Wei Q., Brockett P., & Zhou L., *Construction of all DEA efficient surfaces of the production possibility set under the generalized data envelopment analysis model*, European Journal of Operational Research **95** (1996), 491–510.
- [123] Yu M. M., *Measuring physical efficiency of domestic airports in Taiwan with undesirable outputs and environmental factors*, Journal of Air Transport Management **10** (2004), 295–303.
- [124] Yun Y. B., Nakayama H., & Arakawa M., *Multiple criteria decision making with generalized DEA and an aspiration level method*, European Journal of Operational Research **158** (2004), 697–706.
- [125] Yun Y. B., Nakayama H., & Tanino T., *A generalized model for data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research **157** (2004), 87–105.
- [126] Yun Y. B., Nakayama H., Tanino T., & Arakawa M., *Generation of efficient frontiers in multi-objective optimization problems by generalized data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research **129** (2001), 586–595.

- [127] Yunos J. M. & Hawdon D., *The efficiency of the national electricity board in Malaysia : An intercountry comparison using DEA*, Energy Economics **19** (1997), 255–269.
- [128] Zanakis S. H., Alvares C., & Li V., *Socio-economic determinants of HIV/AIDS pandemic and nations efficiencies*, European Journal of Operational Research **176** (2005), 1811–1838.
- [129] Zhou P., Poh K. L., & Ang B. W., *A non-radial dea approach to measuring environmental performance*, European Journal of Operational Research **178** (2007), 1–9.
- [130] Zhu J., *Robustness of the efficient DMUs in data envelopment analysis*, European Journal of Operational Research **90** (1996), 451–460.
- [131] Zhu J., *Efficiency evaluation with strong ordinal input and output measures*, European Journal of Operational Research **146** (2003), 477–485.
- [132] Zhu J., *Imprecise data envelopment analysis (IDEA) : A review and improvement with an application*, European Journal of Operational Research **144** (2003), 513–529.
- [133] Zhu J. & Shen Z. H., *A discussion of testing DMUs' returns to scale*, European Journal of Operational Research **81** (1995), 590–596.
- [134] Zofío J. L. & Prieto A. M., *Environmental efficiency and regulatory standards : the case of CO2 emissions from OECD industries*, Resource and Energy Economics **23** (2001), 63–83.