

N° d'ordre : 295-97

année : 1997

THÈSE

Spécialité

MATHÉMATIQUES

présentée à

L' UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON I

Pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT

par

Etienne Tena SORO

Structures de familles d'isomorphismes locaux
et restructurabilité

Rapporteurs :

M. Robert BONNET, Professeur, Université de Savoie
M. Pierre ILLE, Chargé de recherche, CNRS Marseille

Soutenue le 23 octobre 1997 devant le jury composé de :

M. Robert BONNET, Professeur, Université de Savoie
M. Roland FRAÏSSÉ, Professeur émérite
M. Pierre ILLE, Chargé de recherche, CNRS Marseille
M. Gérard LOPEZ, Professeur, Université Aix Marseille III (Directeur de Thèse)
M. Norbert POLAT, Professeur, Université Lyon III
M. Maurice POUZET, Professeur, Université Lyon I

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1

Président de l'Université
Vice-Président Fédération Santé
Vice-Président Fédération Sciences
Vice-Président du Conseil Scientifique
Vice-Présidents des Centres d'Evaluation et de
Coordination Thématiques :
- Sciences de la Matière et Technologies
- Sciences de la Vie et de la Santé
Vice-Président du Conseil des Etudes et de la
Vie Universitaire
Secrétaire Général

M. le Professeur M. DECHAVANNE
M. le Professeur J. DOURY
M. le Professeur Y. LEMOIGNE
M. le Professeur J. REMILLIEUX

M. J.F. JAL, Chercheur CNRS
M. le Professeur L. COLLET
M. le Professeur J.C. DUPLAN

M. J. FLACHER

FEDERATION SANTE

Composantes :

UFR de Médecine Lyon R.T.H. Laënnec
UFR de Médecine Lyon Grange-Blanche
UFR de Médecine Lyon Nord
UFR de Médecine Lyon Sud
UFR d'Odontologie
Institut des Sciences Pharmaceutiques et
Biologiques
Institut Techniques de Réadaptation
Département de Formation et Centre de
Recherche en Biologie Humaine
Département de Formation à la Recherche
et à l'Evaluation Pédagogiques

Directeur : M. le Professeur P. PERRIN
Directeur : Mme le Professeur H. PELLET
Directeur : M. le Professeur L.M. PATRICOT
Directeur : M. le Professeur J.P. GERARD
Directeur : M. le Professeur J. DOURY

Directeur : M. le Professeur C. COLLOMBEL
Directeur : M. le Professeur M. EYSSETTE
Directeur : M. le Professeur P.A. BRYON

Directeur : M. le Professeur M. LAVILLE

FEDERATION SCIENCES

Composantes :

UFR de Mathématiques Appliquées, Gestion
et Economie
UFR de Physique
UFR de Biologie
UFR de Mécanique
UFR de Génie Electrique et des Procédés
UFR Sciences de la Terre
UFR de Mathématiques
UFR d'Informatique
UFR de Chimie-Biochimie
UFR STAPS
Observatoire de Lyon
Institut des Sciences et des Techniques de
l'Ingénieur de Lyon
Département de 1er cycle Sciences
IUT A
IUT B

Directeur : M. le Professeur J.C. AUGROS

Directeur : M. le Professeur J.L. VIALLE
Directeur : M. le Professeur D. DEBOUZIE
Directeur : M. le Professeur J.N. GENCE
Directeur : M. le Professeur G. GILLES
Directeur : M. le Professeur S. ELMI
Directeur : M. le Professeur J.M. MORVAN
Directeur : M. le Professeur D. VANDORPE
Directeur : M. le Professeur J.P. SCHARFF
Directeur : M. le Professeur P. THIRIET
Directeur : M. le Professeur R. BACON
Directeur : M. le Professeur P. TROMPETTE

Directeur : M. le Professeur P. PONCET
Directeur : M. le Professeur J. GIELLY
Directeur : M. le Professeur J. PIVOT

A mon père et à ma mère.

REMERCIEMENTS.

Mes remerciements vont d'abord à Gérard LOPEZ pour avoir dirigé cette thèse. Par ses grandes qualités humaines et son enthousiasme, il a su me soutenir et m'encourager dans la réalisation de ce travail.

C'est un grand honneur pour moi d'avoir Roland FRAÏSSÉ dans le jury de ma thèse. Je l'en remercie.

Je remercie Maurice POUZET pour sa sollicitude et l'accueil qu'il m'a fait dans son laboratoire. Ces travaux sur la théorie de la reconstruction ont largement inspiré cette thèse.

Je remercie Robert BONNET de s'être intéressé à mon travail et d'avoir accepté de le juger.

Je remercie Pierre HLE d'avoir bien voulu rapporter sur ma thèse. Il m'a permis, par ses remarques et suggestions de l'améliorer.

Je remercie Norbert POLAT d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie les membres du laboratoire de mathématiques discrètes et du groupe de travail de théorie des relations.

Enfin je remercie mes parents, toute ma famille, ma fiancée Jeanne et mes compatriotes du R.I.E.L. pour leur soutien constant.

Table des matières

INTRODUCTION	4
1 DÉFINITIONS PRÉALABLES.	6
1.1 RELATION m -AIRE ET RESTRICTION D'UNE RELATION.	6
1.1.1 DÉFINITIONS.	6
1.1.2 TOURNOIS ET CHÂINETTES DE POUZET.	6
1.1.3 ISOMORPHISME, ISOMORPHISME LOCAL, INTERVALLE et RECONSTRUCTIBILITÉ.	7
1.2 MULTIRELATION BINAIRE.	8
1.3 GRAPHE.	9
2 h -DÉCOMPOSITION.	11
2.1 POSITION DU PROBLÈME.	12
2.2 (-1)-COHÉRENCE D'UNE FAMILLE DE BIJECTIONS.	13
2.2.1 DÉFINITION.	13
2.2.2 h -DÉCOMPOSITION.	14
2.2.3 APPLICATION: DÉTERMINATION DE $C(F)$.	16
2.3 h -DÉCOMPOSITION ET (-1)-RECONSTRUCTION.	17
2.3.1 h -DÉCOMPOSITION DE RELATIONS BINAIRES.	17
2.3.2 RECONSTRUCTIBILITÉS.	19
2.3.3 EXEMPLE: CONSÉCUTIVITÉ ASSOCIÉE À UNE CHÂÎNE.	20
2.4 h -DÉCOMPOSITION DE DEUX CHÂÎNES.	22
2.4.1 DÉCOMPOSITION RENFORCÉE D'UNE PERMUTATION.	22

2.4.2	RELATIONS D'ÉQUIVALENCE.	24
2.4.3	ÉTUDE DE P/Δ	26
2.5	CONCLUSIONS.	38
3	FAMILLE DES HYPOMORPHISMES ENTRE DEUX TOUR- NOIS T_n	39
3.1	INTRODUCTION.	40
3.2	UNE NOUVELLE ÉCRITURE DES PERMUTATIONS.	41
3.2.1	DÉFINITIONS ET EXEMPLES.	41
3.2.2	QUELQUES PROPRIÉTÉS.	42
3.3	LES (-1) -HYPOMORPHISMES.	43
3.4	RELATIONS D'ÉQUIVALENCE.	45
3.5	ÉTUDE DE P/Δ	46
3.6	RECONSTRUCTIBILITÉ.	50
3.7	LES Δ_n -ÉQUIVALENCES.	51
3.7.1	DÉFINITIONS.	51
3.7.2	QUELQUES PROPRIÉTÉS.	54
4	PARTIES CONSÉCUTIVES ET FORCAGE D'ISOMOR- PHISMES LOCAUX.	62
4.1	INTRODUCTION.	63
4.2	GRAPHE DE PARTIES CONSÉCUTIVES.	63
4.3	GRAPHE DE FORCAGE D'ISOMORPHISMES LOCAUX.	65
4.4	EMBOÎTEMENT ENTRE DEUX RESTRICTIONS.	68
4.5	QUELQUES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES.	69
4.6	POINTS CRITIQUES.	71
5	UNE CLASSE DE RELATIONS DÉFINIE À PARTIR DES CHAÎNETTES DE POUZET.	76
5.1	POSITION DU PROBLÈME.	77
5.1.1	RECAPITULATIF DES PROPRIÉTÉS DES CHAÎNETTES DE POUZET.	77
5.1.2	PROBLÉMATIQUE.	78
5.2	LES 1-EXTENSIONS.	79
5.2.1	DÉFINITIONS.	79
5.2.2	CLASSIFICATION DES 1-EXTENSIONS.	80

5.2.3	RELATIONS ENGENDRÉES PAR DES TRANSPONITIONS.	84
5.2.4	RELATIONS ENGENDRÉES PAR DES PERMUTATIONS CIRCULAIRES.	94
5.2.5	CONCLUSION.	97
5.3	QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LES k -EXTENSIONS (AVEC $k \geq 2$).	97

BIBLIOGRAPHIE	102
---------------	-----



INTRODUCTION

Ce travail consiste en deux parties qui se rapportent toutes les deux au problème de reconstruction (voir [Ula60]): " Soient deux relations R et S de même base E et vérifiant la condition: Pour tout x de E les restrictions $R/E - \{x\}$ et $S/E - \{x\}$ sont isomorphes. La question est de savoir si R et S sont isomorphes."

La première partie est consacrée à la reconstruction des multirelations. Si une composante d'une multirelation M n'est pas (-1) -reconstructible alors elle ne l'est pas également. Donc par contraposé, une condition nécessaire pour que M soit (-1) -reconstructible est que toutes ses composantes le soient. REVERDY-VILOTITCH [RV91] et P. ILLE [Ill92] montrent qu'il suffit qu'une composante soit une chaîne (ordre total) pour qu'elle soit (-1) -reconstructible. Noter que le fait qu'une composante soit une chaîne rend la multirelation rigide. Ainsi l'isomorphisme est en fait l'isomorphisme d'ordre. En lieu et place des chaînes on considère les tournois T_k . A la différence des chaînes ces tournois possèdent plusieurs automorphismes.

Le premier chapitre est consacré aux définitions de base.

Dans le chapitre 2, on introduit la notion de h -décomposition de deux relations binaires (ou multirelations binaires) (-1) -hypomorphes qui est définie par deux relations d'équivalence. Elle peut être vue comme la partition de la famille des (-1) -hypomorphismes restreints aux paires d'éléments de la base. On y donne la h -décomposition de deux chaînes (ordres totaux).

Dans le chapitre 3, après la définition d'une nouvelle écriture des permutations et de la famille de (-1) -hypomorphismes, on étudie la h -décomposition

entre certains tournois T_h . On montre que les multirelations binaires dont une composante est un tournoi T_h (avec $h \geq 2$) sont (-1) -reconstructibles.

L'une des approches du problème de reconstruction est de considérer des structures d'isomorphismes ou d'automorphismes des relations ou graphes que l'on veut reconstruire ou prouver la non reconstructibilité (voir FRASNAY [Fras65], KOCAY [Ko84] et [Ko88], ... etc). Cette deuxième partie qui comprend les chapitres 4 et 5, s'inscrit dans cette approche. On s'intéresse à des structures cycliques d'isomorphismes locaux.

Dans le chapitre 4, on rappelle les notions de consécutivité entre parties et de forçage entre isomorphismes locaux qui sont dues à G. LOPEZ [Lo]. On établit quelques propriétés. On introduit la notion d'emboîtement qui est similaire d'un certain point de vue à la notion de cocycle en théorie des graphes et celle de point critique. Les relations ternaires non-reconstructibles obtenues par M. Pouzet [Po79b] sont telles que tous les points sont critiques. On montre que cette propriété ne caractérise pas la non-reconstructibilité. Cette notion sera affinée dans le chapitre suivant.

Dans le chapitre 5, on donne les propriétés des chaînettes de Pouzet en terme de consécutivité entre parties et de forçage entre isomorphismes locaux. Ensuite on définit une classe de relations ternaires qu'on appelle les k -extensions avec $k \geq 1$. On montre que les 1-extensions des chaînettes de Pouzet sont reconstructibles. Enfin, on formule quelques questions concernant les k -extensions avec $k \geq 2$.

Chapitre 1

DÉFINITIONS PRÉALABLES.

1.1 RELATION m -AIRE ET RESTRICTION D'UNE RELATION.

1.1.1 DÉFINITIONS.

- Une relation m -aire de base E est une application R de l'ensemble des m -uples de E vers l'ensemble $\{+, -\}$. L'entier m est appelé *arité* de R . On dit que la relation R est *unaire*, *binaire* ou *ternaire* si son arité est égale à 1, 2 ou 3.

- De façon équivalente on peut définir une relation m -aire de base E , comme une partie de l'ensemble E^m .

- Soient R une relation de base E et X une partie de E . On appelle *restriction* de R à la partie X , la relation de base X notée R/X et définie par $R/X(x, y) = R(x, y)$ pour tous x et y dans X .

1.1.2 TOURNOIS ET CHÂINETTES DE POUZET.

- Un tournoi de base E est une relation binaire irréflexive T définie sur E telle que: $T(x, y) \neq T(y, x)$ pour tous x et y de E . Tout couple (x, y)

d'éléments de E tel que $T(x, y) = +$ est appelé un arc.

Les tournois font l'objet de nombreuses études (voir par ex. [Mob8]). Deux tournois vont nous intéresser particulièrement: Chaines et Tournois T_h .

- Une chaîne est un tournoi irréflexif et transitif (ou réflexif et transitif).
- On note T_h le tournoi de base $\{0, 1, \dots, 2h\}$ défini par: $T_h(i, i+k) = +$ pour $k = 0, 1, \dots, h$. (l'entier $i+k$ est considéré modulo $2h+1$). Toute relation isomorphe à T_h est appelée tournoi T_h .

- On appelle chainettes de Pouzet les deux relations ternaires R et S de base commune $E = \{a_0, b_0, \dots, a_n, b_n\}$ définies par:
 $\mapsto R$ et S prennent la valeur $+$ sur les triplets suivants:
 $(a_0, b_0, b_1), (a_1, b_1, b_2), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1}, b_n)$
 $(b_0, a_0, a_1), (b_1, a_1, a_2), \dots, (b_{n-1}, a_{n-1}, a_n)$
 $\mapsto R(a_n, b_n, b_0) = R(b_n, a_n, a_0) = +$ et $S(a_n, b_n, a_0) = S(b_n, a_n, b_0) = +$.

1.1.3 ISOMORPHISME, ISOMORPHISME LOCAL, INTERVALLE et RECONSTRUCTIBILITÉ.

Soient R et R' deux relations m -aires de base respectives E et E' .

- On appelle isomorphisme de R sur R' toute bijection f de E sur E' telle que: $R(x_1, \dots, x_m) = R'(f(x_1), \dots, f(x_m))$ pour tous $x_1, \dots, x_m$ dans E . Lorsqu'une telle bijection existe, on dit que les relations R et R' sont isomorphes.
 Lorsque $R' = R$, on parle alors d'automorphisme.

- On appelle isomorphisme local de R vers R' tout isomorphisme d'une restriction de R sur une restriction de R' .
 Lorsque $R = R'$ on parle alors d'automorphisme local de R .

- Soit I une partie de E . La partie I est un intervalle de R , lorsque tout automorphisme local de la restriction R/I étendu par l'identité sur $E - I$ est

un automorphisme local de R . Par exemple l'ensemble vide, tout singleton $\{x\}$ avec x dans E et l'ensemble E sont les intervalles triviaux de R . Si R a des intervalles non triviaux alors on dit que R est décomposable. Pour éviter toute confusion on dira que R admet une *décomposition intervallaire*.

- L'ensemble des automorphismes de R est un groupe qu'on appelle *groupe des automorphismes* de R . Lorsque ce groupe est réduit à l'identité on dit que R est *rigide*.

- On suppose que $E = E'$.

On dit que R et R' sont (-1) -hypomorphes si pour tout x de E les restrictions $R/E - \{x\}$ et $R'/E - \{x\}$ sont isomorphes. Un tel isomorphisme local est appelé un (-1) -hypomorphisme et souvent noté f_x .

- On dit que R est (-1) -reconstructible lorsque pour toute relation R' on a: Si R et R' sont (-1) -hypomorphes alors elles sont isomorphes.

- **LEMME DE KELLY:** [PJK57] Soient R et R' deux relations m -aires de même base E . Si R et R' sont (-1) -hypomorphes alors le nombre de restrictions d'un type donné est le même pour les deux relations.

1.2 MULTIRELATION BINAIRE.

- Une *multirelation binaire* M de base E est une suite finie $R_1, \dots, R_m$ de relations binaires de base commune E et on note $M = (R_1, \dots, R_m)$. Les relations R_i sont appelées les *composantes* de M .

- Les notions de restriction d'une relation, d'isomorphisme, d'isomorphisme local, d'intervalle, de reconstructibilité...etc se généralisent naturellement au multirelation.

Soient $M = (R_1, \dots, R_m)$ et $M' = (R'_1, \dots, R'_m)$ deux multirelations binaires de base respective E et E' .

- Tout isomorphisme (resp. local) de M sur M' est un isomorphisme (resp. local) de R_i sur R'_i et cela pour tout i dans $\{1, \dots, m\}$.

- Etant donné i dans $\{1, \dots, m\}$, un isomorphisme de R_i sur R'_i n'est pas nécessairement un isomorphisme de M sur M' . Cependant s'il existe une bijection f de E sur E' tel que pour tout i de $\{1, \dots, m\}$ f est un isomorphisme de R_i sur R'_i alors f est un isomorphisme de M sur M' .

- On suppose que $E = E'$ et que M et M' sont (-1) -hypomorphes. Si pour tout x de E , la restriction $R_i/E - \{x\}$ est rigide alors les (-1) -hypomorphismes entre R_i et R'_i sont les (-1) -hypomorphismes entre M et M' .

1.3 GRAPHE.

- Un *graphe* G est défini par la donnée d'un ensemble X dont les éléments sont appelés sommets et d'un ensemble U de lignes orientées qu'on appelle arcs reliant deux sommets. On note $G = (X, U)$.

Soient $G = (X, U)$ un graphe, Y une partie X et V une partie de U .

- On appelle *sous-graphe induit* par Y , le graphe noté $G[Y]$ tel que l'ensemble des sommets de $G[Y]$ est Y et celui des arcs est l'ensemble des arcs de G dont les deux extrémités sont dans Y .

- On appelle *sous-graphe engendré* par V le graphe noté $G[V]$ tel que l'ensemble des sommets de $G[V]$ est l'ensemble des sommets qui sont incidents à un élément de V et celui des arcs est V .

- Une relation binaire R de base E peut être vue comme un graphe qu'on note $R = (E, U)$ où U est l'ensemble des arcs défini par: Si $R(x, y) = +$ alors $(x, y) \in U$.

Dans les deux derniers chapitres on ne considérera que des graphes non-orientés. On donne ici trois définitions qui seront utiles.

- Une chaîne (finie) est un graphe tel que l'ensemble des sommets est $\{x_0, \dots, x_n\}$ avec $n \geq 0$ et l'ensemble des arcs est $\{(x_i, x_j) / |j - i| = 1\}$.

Pour éviter toutes confusions avec le tournoi appelé chaîne; on précisera toute les fois qu'on l'utilisera qu'il s'agit de la terminologie de la théorie des graphes.

- Un cycle est un graphe tel que l'ensemble des sommets est $\{x_0, \dots, x_n\}$ avec $n \geq 0$ et l'ensemble des arcs est $\{(x_i, x_j) / |j-i| = 1\} \cup \{(x_0, x_n), (x_n, x_0)\}$. Pour éviter les confusions on parlera de cycle non-orienté.

- Soit $G = (X, U)$ un graphe non-orienté. On définit sur X une relation d'équivalence r par: deux sommets x et y sont r -équivalents si et seulement s'il existe une chaîne reliant x et y .

Tout sous-graphe induit par une classe de r est appelé *composante connexe* de G .

the first of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The second of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The third of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The fourth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The fifth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The sixth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The seventh of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The eighth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The ninth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The tenth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The eleventh of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The twelfth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The thirteenth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The fourteenth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The fifteenth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The sixteenth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The seventeenth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

The eighteenth of these is the fact that the system is not a closed system, but is open to the environment.

Chapitre 2

h -DÉCOMPOSITION.

On introduit dans ce chapitre, la notion de h -décomposition qui est liée à celle de h -composition¹.

Soient $R = (E, U)$ et $R' = (E, U')$ deux relations binaires (-1) -hypomorphes de base commune E . R et R' sont h -décomposables s'il existe une partition $U_1, U_2 \dots U_m$ de U et $U'_1, U'_2 \dots U'_m$ de U' telles que pour tout i de $\{1, \dots, m\}$, toute modification (inversion, suppression, substitution) d'un arc de U_i entraîne forcément la même modification des autres arcs de U_i et de ceux de U'_i ; si l'on veut préserver la (-1) -hypomorphie. Et les U_j ($j \neq i$) restent invariants.

On détermine notamment la h -décomposition de deux chaînes.

1. Similaire à la F -composition de P. ILLE [Ill92] mais ici on considère les (-1) -hypomorphismes.

2.1 POSITION DU PROBLÈME.

M. Pouzet [Po79a] fait remarquer que le problème de la (-1) -reconstructibilité d'une multirelation binaire peut être formulé en terme de permutation. En effet si $M = (R_1, \dots, R_m)$ et $M' = (R'_1, \dots, R'_m)$ sont deux multirelations binaires de base commune E et (-1) -hypomorphes et s'il existe une permutation f de E telle que:

Pour tous a et b de E il existe une suite $x_1, x_2, \dots, x_k$ d'éléments de E de sorte que

$$f_{x_k} \circ f_{x_{k-1}}^{-1} \circ \dots \circ f_{x_2}^{-1} \circ f_{x_1} / \{a, b\} = f / \{a, b\}$$

où les f_{x_i} sont des (-1) -hypomorphismes, alors f est un isomorphisme de M sur M' .

On dira que la permutation f est déterminée par la famille des (-1) -hypomorphismes de M sur M' .

Depuis les contre-exemples de STOCKMEYER [Sto77], M. POUZET [Po79b], KOCAY et LUI [KL88],... l'un des problèmes de reconstruction consiste à chercher des classes de structures (relations, multirelations, graphes, hypergraphes,...etc) qui soient (-1) -reconstructibles.

M. Pouzet a posé le problème des multirelations dont une composante est une chaîne. F. REVERDY [RV91] répond affirmativement pour les multirelations binaires (ayant au moins 7 éléments). Ce résultat a été généralisé par P. ILLE [Ill92] aux multirelations d'arité quelconque.

On peut étendre la question en supposant que la composante est une relation (-1) -reconstructible.

Soit maintenant $M = (R_1, \dots, R_m)$ une multirelation binaire de base E de cardinal n telle que R_1 est (-1) -reconstructible et toutes ses restrictions à $(n-1)$ éléments sont rigides. C'est par exemple le cas des multirelations dont une composante est un tournoi critique au sens de SCHMERL et TROTTER [ST93]. Pour montrer la (-1) -reconstructibilité de M il suffit (pour toute multirelation $M' = (R'_1, \dots, R'_m)$ qui lui est (-1) -hypomorphe) de montrer l'existence d'une permutation de E qui soit déterminée par la famille des (-1) -hypomorphismes entre R_1 et R'_1 (voir 1.2).

Ainsi dans ce cas le problème de la (-1) -reconstructibilité des multirela-

tions se ramène-t-il à celui des relations binaires. On introduit alors la notion de h -décomposition de deux relations (-1) -hypomorphes qui intervient dans la recherche d'une permutation de la base déterminée par la famille des (-1) -hypomorphes entre ces relations. Ce chapitre est consacré à cette notion. On détermine précisément la h -décomposition de deux chaînes.

2.2 (-1)-COHÉRENCE D'UNE FAMILLE DE BIJECTIONS .

2.2.1 DÉFINITION.

Soient $E = \{1, \dots, n\}$ et F une famille de bijections définies sur des paires d'éléments de E . Soit $f : \{a, b\} \rightarrow \{c, d\}$ un élément de F , $\{a, b\}$ son domaine et $\{c, d\}$ son co-domaine. Dans cette écriture, on ne sait pas si $f(a) = c$ ou si $f(a) = d$. Pour lever toute ambiguïté et pour simplifier on écrira: $\{a, b\} \rightarrow (c, d)$ si $f(a) = c$ et $f(b) = d$. S'il y a plusieurs éléments de F de même domaine $\{a, b\}$ et de co-domaines différents alors on écrira: $\{a, b\} \rightarrow \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ où les (x_i, y_i) sont les co-domaines. On dira que $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ est l'ensemble des co-domaines associés à $\{a, b\}$ ou que $\{a, b\}$ est le domaine associé à $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$. On appelle *support* de F l'ensemble E .

Etant donnée une famille F de bijections de support E ; On dira que F est (-1) -cohérente s'il existe deux relations binaires R et R' de base commune E et (-1) -hypomorphes telles que:

Pour tout élément $\{a, b\} \rightarrow (c, d)$ de F il existe un (-1) -hypomorphisme f_i avec $i \in E - \{a, b\}$ tel que $f_i(a) = c$ et $f_i(b) = d$.

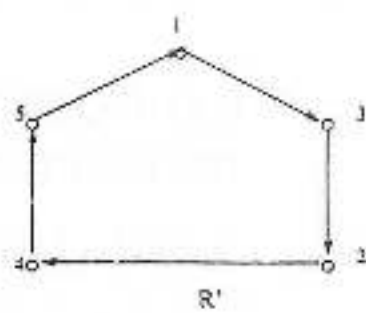
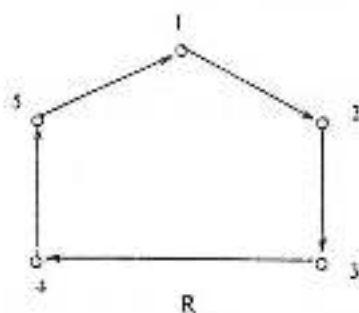
Si F est (-1) -cohérente alors F est une famille d'isomorphismes locaux de R vers R' .

EXEMPLE: $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\begin{aligned} F: \quad (1, 2) &\rightarrow \{(1, 3), (5, 1)\} \\ (2, 3) &\rightarrow \{(3, 2)\} \\ (3, 4) &\rightarrow \{(2, 4), (4, 5)\} \\ (4, 5) &\rightarrow \{(4, 5), (5, 1), (2, 4)\} \\ (5, 1) &\rightarrow \{(5, 1), (1, 3), (4, 5)\}. \end{aligned}$$

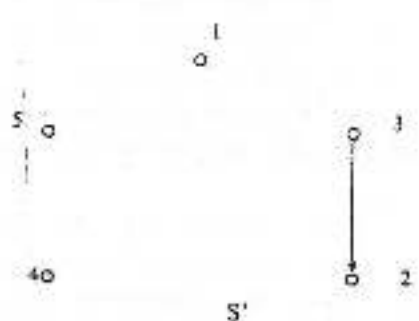
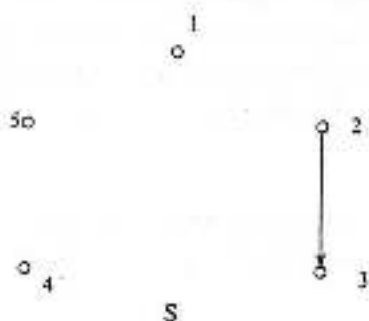
F est (-1) -cohérente, en effet il suffit de prendre les relations de la figure ci-dessous.

Cependant R et R' ne sont pas les seules qui rendent F (-1) -cohérente.



On a par exemple les deux relations de la figure ci-dessous.

Si on note $C(F)$ l'ensemble des paires de relations binaires qui rendent F



(-1) -cohérente alors $\{R, R'\} \in C(F)$.

2.2.2 h -DÉCOMPOSITION.

DÉFINITION: [III92] Soit F une famille de bijections (-1) -cohérente, de support E et $e(1), e(2), \dots, e(p)$ une suite alternée dans $\{-1, 1\}$.

On appelle h -composition de type $(e(1), e(p))$ une application:

$$\varphi = f^{e(1)} \circ g^{e(p-1)} \circ \dots \circ k^{e(1)}$$

où $f, g, \dots, k \in F$.

Notons D (resp. D') l'ensemble des domaines (resp. co-domaines) des éléments de F .

Soient $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ deux éléments de D . On dit que $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ sont équivalents dans D s'il existe une h -composition de type $(1, -1)$ qui envoie $\{a, b\}$ sur $\{c, d\}$.

De même deux co-domaines $\{x, y\}$ et $\{z, t\}$ sont équivalents dans D' s'il existe une h -composition de type $(-1, 1)$ qui envoie $\{x, y\}$ sur $\{z, t\}$.

Il est facile de voir que les relations ainsi définies sont bien des relations d'équivalence et donc D et D' peuvent être partitionner en classes $X_1, X_2, \dots, X_m$ et $X'_1, X'_2, \dots, X'_m$.

LEMME 1 (Po79a) si X est une classe dans D alors l'ensemble X' des co-domaines associés aux éléments de X est une classe dans D' .

De même si X' est une classe dans D' alors l'ensemble X des domaines associés aux éléments de X' est une classe dans D .

PREUVE: Soient $\{x, y\}$ et $\{z, t\}$ deux éléments de X' . Par définition de X' , il existe $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ tels que: $f : \{a, b\} \rightarrow \{x, y\}$ et $g : \{c, d\} \rightarrow \{z, t\}$. comme X est une classe dans D , il existe une h -composition φ de type $(1, -1)$ qui envoie $\{a, b\}$ sur $\{c, d\}$. Posons: $\psi = g \circ \varphi \circ f^{-1}$. ψ est une h -composition de type $(-1, 1)$ qui envoie $\{x, y\}$ sur $\{z, t\}$. Donc $\{x, y\}$ et $\{z, t\}$ sont équivalents dans D' .

Pour achever de montrer que X' est une classe dans D' , on procède par l'absurde. Supposons donc qu'il existe $\{r, s\}$ qui soit équivalent à un élément de X' mais qui ne soit pas un co-domaine associé à un élément de X .

Soit k une bijection de co-domaine $\{r, s\}$ et de domaine $\{p, q\}$ (qui n'est pas dans X). Soit $\{x, y\}$ de X' tel que $\{x, y\}$ et $\{r, s\}$ soient équivalents et g une bijection de co-domaine $\{x, y\}$ telle que son domaine $\{a, b\}$ soit dans X .

Il existe une h -composition ψ de $(-1, 1)$ qui envoie $\{x, y\}$ sur $\{r, s\}$. Posons $\varphi = k^{-1} \circ \psi \circ g$, φ est une h -composition de type $(1, -1)$ qui envoie $\{a, b\}$ sur $\{p, q\}$ ce qui contredit le fait que $\{p, q\}$ n'appartient pas à X .

Donc X' est une classe dans D' .

On fait une preuve similaire pour la deuxième partie du lemme. $\diamond$

SOUS-FAMILLES PROPRES.

Si X et X' sont deux classes d'équivalence respectivement dans D et D' qui se correspondent au sens du lemme 1 alors l'ensemble des bijections qui sont éléments de F à domaine dans X et à co-domaine dans X' est une sous-famille (-1) -cohérente de F qu'on note $X \rightarrow X'$.

Si $X \neq D$ alors $X \rightarrow X'$ est une sous-famille propre.

Exemple: On reprend l'exemple précédent (page 14).

- La famille de bijections:

$$\begin{aligned} (1, 2) &\rightarrow \{(1, 3), (3, 1)\} \\ (3, 4) &\rightarrow \{(2, 4), (4, 5)\} \\ (4, 5) &\rightarrow \{(4, 5), (5, 1), (2, 4)\} \\ (5, 1) &\rightarrow \{(5, 1), (1, 3), (4, 5)\}. \end{aligned}$$

est une sous famille (-1) -cohérente propre de F qu'on note $X_1 \rightarrow X'_1$ où $X_1 = \{(1, 2), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$ et $X'_1 = \{(1, 3), (2, 4), (4, 5), (5, 1)\}$.

- De même $(2, 3) \rightarrow \{(3, 2)\}$ est une sous famille (-1) -cohérente propre de F réduite à une bijection qu'on note $X_2 \rightarrow X'_2$ où $X_2 = \{(2, 3)\}$ et $X'_2 = \{(3, 4)\}$.

DÉFINITION: Soit F une famille (-1) -cohérente. -

Si F n'admet pas de sous-famille (-1) -cohérente propre alors F est h -indécomposable; dans le cas contraire on dit que F est h -décomposable et on note: $\{X_i \rightarrow X'_i\}$, l'ensemble des sous-familles (-1) -cohérentes de F .

2.2.3 APPLICATION: DÉTERMINATION DE $C(F)$.

Si la famille de bijections F est (-1) -cohérente alors considérant une sous-famille $X_i \rightarrow X'_i$ (qui peut-être F si elle n'est pas h -décomposable) on a que toutes les arêtes associées aux paires éléments de $X_i \cup X'_i$ sont toutes de

même nature (pleines, vides ou orientés).

Ainsi on peut parfaitement déterminer $C(F)$. Par exemple on a:

Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et

$$\begin{aligned} F: (1, 2) &\longrightarrow (2, 1) \\ (2, 3) &\longrightarrow (2, 3) \\ (3, 1) &\longrightarrow (1, 3) \end{aligned}$$

alors $C(F)$ contient toutes les relations binaires irreflexives de cardinal 3 qui ne sont pas (-1) -reconstructibles.

2.3 h -DÉCOMPOSITION ET (-1) -RECONSTRUCTION.

2.3.1 h -DÉCOMPOSITION DE RELATIONS BINAIRES.

DÉFINITION: Etant données $R = (E, U)$ et $R' = (E, U')$ deux relations binaires de base commune E et (-1) -hypomorphes, on note:

$F = \{f_i : \{a, b\} \longrightarrow \{f_i(a), f_i(b)\} / (a, b) \in U \text{ ou } (b, a) \in U \text{ et } f_i \text{ est un } (-1)\text{-hypomorphisme avec } i \neq a, b\}$

Bien évidemment F est (-1) -cohérente.

On dit que R et R' sont h -décomposables si F l'est.

PROPOSITION 1 Soit $R = (E, U)$ et $R' = (E, U')$ deux relations binaires de base commune E et (-1) -hypomorphes.

R et R' sont h -décomposables ssi il existe une partition $U_1, \dots, U_m$ de U et $U'_1, \dots, U'_m$ de U' telles que:

$$\begin{aligned} R &= R[U_1] \cup \dots \cup R[U_m] \\ R' &= R'[U'_1] \cup \dots \cup R'[U'_m] \end{aligned}$$

où pour tout i de $\{1, \dots, m\}$, toute modification (inversion, suppression, substitution) d'un arc de U_i entraîne forcément la même modification des autres arcs de U_i et de celles de U'_i si l'on veut préserver la (-1) -hypomorphie.

Les $R[U_i]$ (resp. $R'[U'_i]$) sont appelées h -composantes de R (resp. R').

PREUVE: si R et R' sont h -décomposables alors notons $\{X_i \rightarrow X'_i\}_i$ la h -décomposition de F et U_i (resp. U'_i) l'ensemble des arcs de R (resp. R') dont les deux extrémités forment une paire élément de X_i (resp. X'_i).

S'il existe i et j différents tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ (resp. $U'_i \cap U'_j \neq \emptyset$) alors $X_i \cap X_j \neq \emptyset$ (resp. $X'_i \cap X'_j \neq \emptyset$).

Ce qui contredit le fait que $\{X_i \rightarrow X'_i\}_i$ soit la h -décomposition de F . Ainsi les U_i (resp. U'_i) sont deux à deux disjoints et forment une partition de U (resp. U') et on peut écrire:

$$\begin{aligned} R &= R[U_1] \cup \dots \cup R[U_m] \\ R' &= R'[U'_1] \cup \dots \cup R'[U'_m] \end{aligned}$$

Pour tous arcs (a, b) et (c, d) d'un U_i , il existe une h -composition de type $(-1, 1)$ qui envoie (a, b) sur (c, d) car sinon $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ ne serait pas tous deux dans X_i .

De même pour tout arc (a, b) de U_i et pour tout arc (x, y) de U'_i il existe une h -composition de type $(1, 1)$ qui envoie (a, b) sur (x, y) .

Ainsi toute modification d'un arc de U_i entraîne la même modification des autres arcs de U_i et de celles de U'_i .

Réciproquement s'il existe i dans $\{1, \dots, m\}$ et s'il existe (a, b) et (c, d) dans U_i tels qu'aucune h -composition de type $(1, -1)$ n'envoie pas (a, b) sur (c, d) alors toute modification de (a, b) n'entraîne pas la même modification sur (c, d) . Ce qui contredit l'hypothèse.

Donc pour tout i de $\{1, \dots, m\}$ et pour tous arcs (a, b) et (c, d) de U_i ; il existe une h -composition de type $(1, -1)$ qui envoie (a, b) sur (c, d) .

De même on a pour tout i de $\{1, \dots, m\}$, pour tout (a, b) de U_i et pour tout (x, y) de U'_i , qu'il existe une h -composition de type $(1, 1)$ qui envoie (a, b) sur (x, y) . Posant:

$$\begin{aligned} X_i &= \{(a, b) / (a, b) \in U_i \text{ ou } (b, a) \in U_i\} \\ X'_i &= \{(a, b) / (a, b) \in U'_i \text{ ou } (b, a) \in U'_i\} \end{aligned}$$

on a que $\{X_i \rightarrow X'_i\}_{1 \leq i \leq m}$ est dans la h -décomposition de F .

Donc R et R' sont h -décomposables. $\diamond$

REMARQUE: On peut considérer l'ensemble des arêtes en lieu et place de celui des arcs dans la proposition ci-dessus. Dans ce cas il peut arriver que certaines h -composantes soient des graphes vides. Et dans la preuve de la réciproque on aurait que $\{X_i \rightarrow X'_i\}_{1 \leq i \leq m}$ est exactement la h -décomposition de F .

2.3.2 RECONSTRUCTIBILITÉ.

Soient $R = (E, U)$ et $R' = (E, U')$ deux relations binaires de base commune E et (-1) -hypomorphes.

On suppose qu'elles sont h -décomposables et on note:

$$\begin{aligned} R &= R[U_1] \cup \dots \cup R[U_m] \\ R' &= R'[U'_1] \cup \dots \cup R'[U'_m] \end{aligned}$$

avec $m > 1$.

Si φ est un isomorphisme de R sur R' et si on note E_i (resp. E'_i) la base de $R[U_i]$ (resp. $R'[U'_i]$) alors on dit que φ est compatible avec la h -décomposition de R et R' lorsque $\varphi|_{E_i}$ est un isomorphisme de $R[U_i]$ sur $R'[U'_i]$ et cela pour tout i .

Une relation binaire R de base E est dite h -reconstructible si pour tout R' qui lui est (-1) -hypomorphe il existe un isomorphisme de R sur R' qui est compatible avec leur h -décomposition.

REMARQUES:

1. Toute relation binaire h -reconstructible est (-1) -reconstructible.
2. Soit R une relation binaire de base E . Si pour tout R' (-1) -hypomorphe à R la famille F associée n'est pas h -décomposable alors h -reconstructibilité et (-1) -reconstructibilité coïncident.

PROPOSITION 2 Dire qu'une relation binaire est h -reconstructible équivaut à dire que la famille des (-1) -hypomorphismes suffit à déterminer une permutation de la base.

PREUVE: Un isomorphisme ϕ qui est compatible avec la h -décomposition de deux relations est une h -composition de type $(1, 1)$. $\diamond$

QUELQUES PROBLÈMES DE RECONSTRUCTION.

- Est-ce-que toute relation (-1) -reconstructible est h -reconstructible?
- Soit $M = (R_1, \dots, R_m)$ une multirelation binaire de base E et de cardinal n .

1. Si R_1 est (-1) -reconstructible et si toutes ses restrictions à $n - 1$ éléments sont rigides, on ignore si M est (-1) -reconstructible. Cependant : si R_1 est h -reconstructible alors M l'est également.
2. Si R_1 est (-1) -reconstructible et si pour tout x de E il existe R_i telle que $R_i/E - \{x\}$ soit rigide est-ce-qu'alors M est (-1) -reconstructible?

2.3.3 EXEMPLE: CONSÉCUTIVITÉ ASSOCIÉE À UNE CHAÎNE.

Définition: On appelle consécutivité associée à la chaîne $1 < 2 < \dots < n$, la relation binaire R de base $\{1, 2, \dots, n\}$ définie par: $R(i, j) = +$ ssi $j - i = +1$.

Soit R la consécutivité associée à la chaîne $1 < 2 < \dots < n$. On note R' toute relation (-1) -hypomorphe à R .

• Si $R' = R$ alors chacune de ses arêtes est une h -composante. La modification d'une arête de R entraîne la même modification sur la même arête dans R' si l'on veut préserver la (-1) -hypomorphie.

• Cas où $R' \neq R$: On prend (par ex.) R' égale à la relations qui échange 1 et n et qui fixe tous les autres éléments. On détermine précisément les h -composantes de R et de R' pour $n = 7$.

On notera² (x, y) l'arête d'extrémités x et y . Lorsqu'elle est orientée (i.e. arc) x est l'extrémité initiale et y la finale.

A tout (x, y) on associe $D(x, y) = \{(f_i(x), f_i(y))' / i \neq x, y\}$; on a:
 $D(1, 2) = \{(7, 2)', (2, 3)'\}$

2. sans préjuger en rien de sa nature: orienté, pleine et vide.

$$D(2,3) = \{(7,2)', (2,3)', (3,4)'\}$$

$$D(3,4) = \{(2,3)', (3,4)', (4,5)'\}$$

$$D(4,5) = \{(3,4)', (4,5)', (5,6)'\}$$

$$D(5,6) = \{(4,5)', (5,6)', (6,1)'\}$$

$$D(6,7) = \{(5,6)', (6,1)'\}$$

$$D(1,3) = \{(7,3)', (2,4)'\}$$

$$D(2,4) = \{(7,3)', (2,4)', (3,5)'\}$$

$$D(3,5) = \{(2,4)', (3,5)', (4,6)'\}$$

$$D(4,6) = \{(3,5)', (4,6)', (5,1)'\}$$

$$D(5,7) = \{(4,6)', (5,1)'\}$$

$$D(1,4) = \{(2,5)', (7,4)'\}$$

$$D(2,5) = \{(2,5)', (7,4)', (3,6)'\}$$

$$D(3,6) = \{(2,5)', (3,6)', (4,1)'\}$$

$$D(4,7) = \{(3,6)', (4,1)'\}$$

$$D(1,5) = \{(7,5)', (2,6)'\}$$

$$D(2,6) = \{(7,5)', (2,6)', (3,1)'\}$$

$$D(3,7) = \{(2,6)', (3,1)'\}$$

$$D(1,6) = \{(7,6)', (2,1)'\}$$

$$D(2,7) = \{(7,6)', (2,1)'\}$$

$$D(1,7) = \{(7,1)'\}$$

Posons:

$$U_1 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7)\}$$

$$U_2 = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (5,7)\}$$

$$U_3 = \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,7)\}$$

$$U_4 = \{(1,5), (2,6), (3,7)\}$$

$$U_5 = \{(1,6), (2,7)\}$$

$$U_6 = \{(1,7)\}$$

$$U'_1 = \{(7,2)', (2,3)', (3,4)', (4,5)', (5,6)', (6,1)'\}$$

$$U'_2 = \{(7,3)', (2,4)', (3,5)', (4,6)', (5,1)'\}$$

$$U'_3 = \{(7,4)', (2,5)', (3,6)', (4,1)'\}$$

$$U'_4 = \{(7,5)', (2,6)', (3,1)'\}$$

$$U'_5 = \{(7,6)', (2,1)'\}$$

$$U'_6 = \{(7,1)'\}$$

On vérifie facilement que $U_1, \dots, U_6$ et $U'_1, \dots, U'_6$ sont des partitions respectives de U et de U' et que l'on a:

$$\begin{aligned} R &= R[U_1] \cup R[U_2] \cup \dots \cup R[U_6] \\ R' &= R'[U'_1] \cup R'[U'_2] \cup \dots \cup R'[U'_6] \end{aligned}$$

• Soient $M = (R_1, \dots, R_m)$ et $M' = (R'_1, \dots, R'_m)$ deux multirelations binaires (-1) -hypomorphes telles que $R_1 = R$.

- Si $R'_1 = R$ alors pour tout k de $\{2, \dots, m\}$ on a $R_k = R'_k$
- Lorsque R' est obtenue à partir de R en échangeant 1 et 7 alors pour tout $k = 2, \dots, m$ on a :

$$\begin{aligned} R_k &= Mod_1(R[U_1]) \cup \dots \cup Mod_6(R[U_6]) \\ R'_k &= Mod_1(R'[U'_1]) \cup \dots \cup Mod_6(R'[U'_6]) \end{aligned}$$

où les Mod_i désignent des modifications.

$R_k[U_i]$ est égal à $R[U_i]$ modulo une modification Mod_i . Il en est de même pour $R'_k[U'_i]$ avec la même modification Mod_i .

2.4 h -DÉCOMPOSITION DE DEUX CHÂÎNES.

2.4.1 DÉCOMPOSITION RENFORCÉE D'UNE PERMUTATION.

Notons S_n le groupe des permutations de $E = \{1, \dots, n\}$. Toute permutation f de S_n se décompose en produit de cycle de support disjoints; cette décomposition est unique à l'ordre près et on l'appellera Cycle-décomposition de f . On pose $f = C_1 \circ C_2 \circ \dots \circ C_m$ et on note $E_1, \dots, E_m$ les supports des cycles $C_1, \dots, C_m$.

Une permutation f peut être vue comme un isomorphisme d'une chaîne $C(n)$ sur une autre $C'(n)$ où $C(n)$ est la chaîne $1 < 2 < \dots < n$. On dira que f est fortement décomposable s'il existe une décomposition intervalle de $C(n)$ telle que f soit globalement fixe sur chacun de ses intervalles. Cette forte décomposition peut être obtenue à partir de sa cycle-décomposition de la façon suivante:
Posons $f = C_1 \circ C_2 \circ \dots \circ C_m$.

Les supports $E_1, \dots, E_m$ de $C_1, \dots, C_m$ ne sont pas nécessairement des intervalles de $C(n)$.

1. Supposons que le $\text{Min}(E)$ est dans E_1 .

- Si E_1 est un intervalle alors on pose $B_1 = E_1$.
- Sinon B_1 sera le plus petit intervalle contenant E_1 et tel que B_1 soit exactement la réunion de certains E_i .

2. On considère ensuite la partie E_j qui contient $\text{Min}(E - B_1)$.

- Si E_j est un intervalle alors on pose $B_2 = E_j$.
- Sinon B_2 sera le plus petit intervalle contenant E_j et tel que B_1 et B_2 soient disjoints et tel que B_2 soit exactement la réunion de certains E_i .

3. On procède ainsi de suite jusqu'à épuisement des E_i .

On obtient donc une suite $B_1, \dots, B_l$ d'intervalles de $C(n)$ que nous appellerons la f -partition de E . On note par abus d'écriture $C_1, \dots, C_l$ les permutations qui opèrent respectivement sur $B_1, \dots, B_l$ et elles forment la forte décomposition de f .

DÉFINITION: Une permutation f est dite fortement décomposable si f est cycle-décomposable et si E admet une f -partition distincte du singleton $\{E\}$. Dans le cas contraire on dit que f est fortement indécomposable.

EXEMPLES:

1.

$$\text{Soit } f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

f est cycle-décomposable et on peut écrire $f = (1, 3)(2, 6, 5)$. cependant elle est fortement indécomposable.

2.

$$\text{Soit } g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

g est cycle décomposable et fortement décomposable. Les deux décompositions coïncident: $g = (1, 2, 3)(4)(5, 6)$.

2.4.2 RELATIONS D'ÉQUIVALENCE.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

Soient x, y, z et t des éléments de E . On note:

- f_x l'unique isomorphisme de $C(n)/E - \{x\}$ sur $C'(n)/E - \{x\}$.
- U (resp. U') l'ensemble des arcs de $C(n)$ (resp. $C'(n)$).
- (x, y) (resp. $(x, y)'$) un arc de U (resp. U') d'origine x et d'extrémité y .

Deux arcs (x, y) et (z, t) (resp. $(x, y)'$ et $(z, t)'$) de U sont $\sim$ -équivalents s'il existe une h -composition de type $(1, -1)$ (resp. $(-1, 1)$) qui envoie (x, y) sur (z, t) (resp. $(x, y)'$ sur $(z, t)'$) et on note $U/\sim$ (resp. $U'/\sim$) l'ensemble quotient.

A tout élément (x, y) de U on associe:

$$D(x, y) = \{(f_z(x), f_z(y))' \mid z \neq x, y\}$$

On note $P = \{D(x, y) \mid (x, y) \in U\}$.

Deux éléments $D(x, y)$ et $D(z, t)$ de P sont $\wedge$ -équivalents s'il existe une suite:

$$D(u_0, v_0) = D(u, v), D(u_1, v_1), \dots, D(u_n, v_n) = D(z, t)$$

telle que pour tout $a = 0, 1, \dots, n-1$ $D(u_a, v_a)$ et $D(u_{a+1}, v_{a+1})$ ont une intersection non vide. Une telle suite est appelée un chemin d'intersections non vides. On note $P/\wedge$ l'ensemble quotient.

LIENS ENTRE LES ÉQUIVALENCES $\sim$ ET $\wedge$.

PROPOSITION 3 Soit X un élément de $P/\wedge$ alors

1. Si A est la réunion des $D(u, v)$ qui sont dans X alors A est une $\sim$ -classe de U' .
2. Si B est l'ensemble des arcs (u, v) tels que $D(u, v)$ est dans X alors B est une $\sim$ -classe de U .

PREUVE:

1. Soient $(a, b)'$ et $(c, d)'$ deux éléments de A . Il existe $D(u, v)$ et $D(w, t)$ de X tels que $(c, b)'$ soit dans $D(u, v)$ et $(c, d)'$ soit dans $D(w, t)$.

On veut montrer que $(a, b)' \sim (c, d)'$. Pour cela il suffit de faire la preuve pour le cas où $D(u, v)$ et $D(w, t)$ ont une intersection non vide. Soit donc $(r, s)'$ dans $D(u, v) \cap D(w, t)$; On a:

Il existe $i \neq u, v$ tel que $f_i(u) = r$ et $f_i(v) = s$

Il existe $k \neq u, v$ tel que $f_k(u) = a$ et $f_k(v) = b$

Il existe $j \neq w, t$ tel que $f_j(w) = r$ et $f_j(t) = s$

Il existe $l \neq w, t$ tel que $f_l(w) = c$ et $f_l(t) = d$

Ainsi on a que l'isomorphisme $\varphi = f_l \circ f_j^{-1} \circ f_i \circ f_k^{-1}$ envoie $(a, b)'$ sur $(c, d)'$. Donc $(a, b)' \sim (c, d)'$.

Soit Y une $\sim$ -classe de U' tel que $A \subset Y$. Supposons qu'il existe un élément $(x, y)'$ dans $Y - A$ et soit $(a, b)'$ un de A . Pour tout $D(u, v)$ contenant $(x, y)'$ et pour tout $D(w, t)$ contenant $(a, b)'$ on a que $D(u, v)$ et $D(w, t)$ ne sont pas $\wedge$ -équivalents. Donc $(x, y)'$ et $(a, b)'$ ne sont pas $\sim$ -équivalents ce qui est absurde. Donc A est une $\sim$ -classe.

2. Soient (x, y) et (z, t) deux éléments de B . $D(x, y)$ et $D(z, t)$ sont $\wedge$ -équivalents. Il suffira de faire la preuve pour $D(x, y) \cap D(z, t) \neq \emptyset$.

Soit donc $(a, b)'$ dans $D(x, y) \cap D(z, t)$ alors on a:

Il existe $i \neq x, y$ tel que $f_i(x) = a$ et $f_i(y) = b$

Il existe $j \neq z, t$ tel que $f_j(z) = a$ et $f_j(t) = b$.

Finalement (x, y) et (z, t) sont isomorphes par $f_j^{-1} \circ f_i$, c'est-à-dire que $(x, y) \sim (z, t)$.

Comme U est exactement égal à la réunion des B , il suffira de remarquer que les B sont deux à deux disjoints, ce qui achève la preuve. $\diamond$

COROLLAIRE 1 $-(x, y) \sim (z, t) \iff D(x, y) \wedge D(z, t).$

$-(x, y)' \sim (z, t)' \iff$ Pour tout $D(a, b)$ contenant $(x, y)'$,
et pour tout $D(c, d)$ contenant $(z, t)'$ on a $D(a, b) \wedge D(c, d).$

Déterminer la h -décomposition de $C(n)$ et $C'(n)$ revient à déterminer $U/\sim$ et $U'/\sim$ or d'après ce qui précède cela revient à étudier $P/\wedge$.

2.4.3 ÉTUDE DE P/Λ .

Lorsque f sera fortement décomposable on supposera que $f = C_1 \circ \dots \circ C_m$ et $B_1, \dots, B_m$ la f -partition de E . On distinguera la permutation qui échange 1 et n et qui fixe tous les autres éléments de E . On la notera τ . Si on pose $B_i = \{x_1, \dots, x_p\}$ avec $x_i < x_j$ lorsque $i < j$ alors on notera τ_{B_i} la permutation sur B_i qui échange x_1 et x_p et qui fixe tous les autres éléments de B_i . On notera également:

$$P = \{D(u, v) / (u, v) \in U\}$$

$$P_i = \{D(u, v) / u, v \in B_i \text{ et } C_i \neq \tau_{B_i}\}$$

$$P_{ik} = \{D(u, v) / i \neq k, u \in B_i \text{ et } v \in B_k\}$$

$$X_i^F = \{D(1, i+1), \dots, D(n-i, n)\} \text{ avec } i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$X_i^{B_i} = \{D(x_1, x_{i+1}), \dots, D(x_{p-i}, x_p)\} \text{ avec } i = 1, 2, \dots, p-1$$

Avec ces hypothèses et notations on obtient le résultat suivant:

1. Si $f = Id$ alors chaque $\{D(u, v)\}$ est une Λ -classe.
2. Si $f = \tau$ alors chaque X_i^F est une Λ -classe.
3. Si f est fortement indécomposable et si $f \neq \tau$ alors:
 - (a) Lorsque $f(1) \neq n$ ou $f(n) \neq 1$, P est l'unique Λ -classe.
 - (b) Lorsque $f(1) = n$ et $f(n) = 1$, $P - \{D(1, n)\}$ et $\{D(1, n)\}$ sont les seules Λ -classes.
4. Si f est fortement décomposable et si $f \neq Id$ alors pour chaque B_i ayant au moins deux éléments on a:
 - Lorsque $C_i \neq \tau_{B_i}$ on a: soit P_i est une Λ -classe soit $P_i - \{D(x_1, x_p)\}$ et $\{D(x_1, x_p)\}$ sont des Λ -classes.
 - Lorsque $C_i = \tau_{B_i}$ on a que les $X_i^{B_i}$ sont des Λ -classes.
 et les P_{ik} sont des Λ -classes. Et il n'y en a pas d'autre.

Ce résultat achève de déterminer la h -décomposition de deux chaînes. Toute la suite du chapitre est consacrée à sa démonstration.

Le cas où $f = Id$ est immédiat.

CAS OÙ $f = \tau$.

PROPOSITION 4 Si $f = \tau$ alors chaque X_i^E est une Λ -classe.

PREUVE:

Comme $n \geq 7$, $D(u, v)$ contient $(f(u), f(v))'$ pour tous u et v de E .
 Pour tout $i \neq n, n-1$ on a que $D(1, i+1)$ contient $(f(2), f(i+2))'$. Pour le voir il suffit de Considérer l'isomorphisme f_n de $C(n)/E - \{n\}$ sur $C'(n)/E - \{n\}$.
 Donc $D(1, i+1) \cap D(2, i+2) \neq \emptyset$.

De même on a:

$D(2, i+2) \cap D(3, i+3) \neq \emptyset$, pour $i = 1, \dots, n-3$.

.....
 $D(n-1-i, n-1) \cap D(n-i, n) \neq \emptyset$, pour $i = 1, \dots, n-2$

Donc pour tout i on a que X_i^E est dans une Λ -classe.

Soit $D(u, v)$ de X_i^E et quelque soit $j \neq i$ et quelque soit $D(w, t)$ de X_j^E , montrons que $D(u, v)$ et $D(w, t)$ ont une intersection vide.

Tout élément de $D(u, v)$ (resp. $D(w, t)$) est de la forme suivante:

$(f(u + \epsilon), f(v + \epsilon))'$ avec $\epsilon = -1, 0, 1$ (resp. $(f(w + \gamma), f(t + \gamma))'$ avec $\gamma = -1, 0, 1$). Supposons que $D(u, v)$ et $D(w, t)$ aient une intersection non vide alors il existerait γ et ϵ tels que $u = w + (\gamma - \epsilon)$ et $v = t + (\gamma - \epsilon)$ ce qui impliquerait que $v - u = t - w$ ce qui contredit le fait que $i \neq j$.

Donc $D(u, v)$ et $D(w, t)$ ont une intersection vide.

Donc si $i \neq j$ alors X_i^E et X_j^E sont contenues dans des classes différentes. Et comme P est égal à la réunion des X_i^E , chaque X_i^E est une classe. $\diamond$

CAS OÙ f EST FORTEMENT INDÉCOMPOSABLE ET $f \neq \tau$.

Dans ce paragraphe on établit que:

PROPOSITION 5 Si f est fortement indécomposable et si $f \neq \tau$ alors:

1. Lorsque $f(1) \neq n$ ou $f(n) \neq 1$ on a: P est l'unique Λ -classe.
2. Lorsque $f(1) = n$ et $f(n) = 1$ on a: $P - \{D(1, n)\}$ et $\{D(1, n)\}$ sont les seules Λ -classes.

Pour ce faire on a besoin des deux résultats suivants:

1. Il existe un entier $j \geq 3$ tel que tous les $D(u, v)$ dont u et v sont dans $\{1, \dots, j\}$ appartiennent à une même classe que nous noterons X .
2. • Si $j < n - 1$ alors X contient tous les $D(j - k, j + 1)$ avec $k = 0, 1, \dots, j - 1$.
• Si $j = n - 1$ alors X contient tous les $D(j - k, j + 1)$ avec $k = 0, 1, \dots, j - 2$.

PREUVE DE LA PROPOSITION: Supposons que 1. et 2. soient établis. D'après 1. il existe un entier $j \geq 3$ tel que tous les $D(u, v)$ avec u et v dans $\{1, \dots, j\}$ sont dans une même classe X . On distingue alors les trois cas suivants:

Cas où $j = n$: Il n'y a rien à montrer. P est l'unique $\wedge$ -classe.

Cas où $j = n - 1$: D'après 2. on a: $D(n - 1, n), D(n - 2, n), \dots, D(2, n)$ sont dans X ; c'est-à-dire que $P - \{D(1, n)\}$ est inclus dans X .

• Si $f(1) = n$ et $f(n) = 1$ alors $D(1, n) = \{(n, 1)'\}$ et donc $\{D(1, n)\}$ et $P - \{D(1, n)\}$ sont les $\wedge$ -classes.

• Sinon on a: $\text{Card}(D(1, n)) \geq 2$. Noter que $f(1) \neq 1$ car f est fortement indecomposable.

→ Si $1 \neq f(n)$ alors considérant f_1 on a que $D(2, n)$ contient $(f(1), f(n))'$ et comme $(f(1), f(n))'$ est dans $D(1, n)$ on obtient: $D(1, n) \cap D(2, n) \neq \emptyset$. Donc P est l'unique $\wedge$ -classe.

→ Si par contre $1 = f(n)$ alors $n \neq f(1)$. En reprennant le même raisonnement et en considérant cette fois-ci f_n on obtient: $D(1, n - 1) \cap D(1, n) \neq \emptyset$. Donc P est l'unique $\wedge$ -classe.

Cas où $j < n - 1$: On applique 2. au tant de fois que possible. On a:
 $D(j, j + 1), \dots, D(1, j + 1)$ sont dans X
 $D(j + 1, j + 2), \dots, D(1, j + 2)$ sont dans X

.....
 $D(n - 1, n), \dots, D(2, n)$ sont dans X .

On achève la preuve de ce cas comme dans le cas précédent. $\diamond$

Il reste à montrer 1. et 2., mais avant établissons le lemme suivant:

LEMME 2 *On suppose que f est fortement indécomposable alors pour tout $u \leq n-2$ on a $\{1, \dots, u\} \cap \{f(u+2), \dots, f(n)\} \neq \emptyset$ ou $\{u+2, \dots, n\} \cap \{f(1), \dots, f(u)\} \neq \emptyset$.*

PREUVE: Etant donné $u \leq n-2$,

Si $\{1, \dots, u\} \cap \{f(u+2), \dots, f(n)\} \neq \emptyset$ alors le lemme est établi.

Sinon on a que $\{1, \dots, u\} \subset \{f(1), \dots, f(u+1)\}$ et

$\{f(u+2), \dots, f(n)\} \subset \{u+1, \dots, n\}$. Il est clair qu'au moins un élément de $\{u+1, \dots, n\}$ appartient à $\{f(1), \dots, f(u+1)\}$.

Considérons l'élément $u+1$ alors trois possibilités se présentent, soit $u+1$ est dans $\{f(u+2), \dots, f(n)\}$ Soit $u+1$ est dans $\{f(1), \dots, f(u)\}$

Soit $u+1 = f(u+1)$.

Si $u+1 \in \{f(1), \dots, f(u)\}$ alors $f(u+1)$ n'est pas dans $\{1, \dots, u\}$ car sinon f serait fortement décomposable. Donc $f(u+1)$ appartient à $\{u+2, \dots, n\}$ mais alors il existerait un élément de $\{1, \dots, u\}$ appartenant à $\{f(u+2), \dots, f(n)\}$ ce qui est absurde. D'où $u+1$ n'est pas dans $\{f(1), \dots, f(u)\}$ et on a également que $u+1 \neq f(u+1)$ pour les mêmes raisons. Donc $u+1 \in \{f(u+2), \dots, f(n)\}$ et alors $f(u+1) \in \{1, \dots, u\}$ car sinon f serait fortement décomposable. Et alors il existe un élément de $\{f(1), \dots, f(u)\}$ qui appartient à $\{u+2, \dots, n\}$.

◇

COROLLAIRE 2 *Sous les mêmes hypothèses on a :*

Soit $(f(u), f(u+1))' \in D(u+1, u+2)$

Soit $(f(u+1), f(u+2))' \in D(u, u+1)$.

PREUVE: Immédiate. ◇

PROPOSITION 6 *Si f est fortement indécomposable et si $f \neq \tau$ alors il existe un entier j ($3 \leq j \leq n$) tel que tous les $D(u, v)$ (avec u et v dans $\{1, \dots, j\}$) sont dans une même classe X .*

PREUVE: On distinguera deux cas:

1. *Cas où f n'est pas cycle-décomposable.*

On va montrer que si $n = 2p+1$ (resp. $n = 2p$) alors pour tous u et v dans $\{1, \dots, p\}$ (resp. $\{1, \dots, p-1\}$) on a que les $D(u, v)$ appartiennent à

une même classe X et donc $j = p$ (resp. $j = p - 1$).

Remarquons que pour tous u et v de $\{1, \dots, p\}$ (resp. $\{1, \dots, p - 1\}$) $(f(u), f(v))' \in D(u, v)$. En effet il existe au moins un élément x de $\{p + 1, \dots, 2p + 1\}$ (resp. $\{p, \dots, 2p\}$) tel que $f(x) > p$ (resp. $f(x) > p - 1$).

Il suffira de montrer d'une part (a) $D(u, u + 1)$ $D(u + 1, u + 2)$ et $D(u, u + 2)$ appartiennent à X et d'autre part (b) $D(u, v)$ et $D(u, v + 1)$ appartiennent à X .

- (a) D'après le corollaire 2, $(f(u), f(u + 1))'$ est dans $D(u + 1, u + 2)$ ou bien $(f(u + 1), f(u + 2))'$ est dans $D(u, u + 1)$.
Donc $D(u, u + 1) \cap D(u + 1, u + 2) \neq \emptyset$.

Si $u + 1$ est dans $\{f(1), \dots, f(u)\}$ alors $(f(u + 1), f(u + 2))'$ est dans $D(u, u + 2)$ et $D(u, u + 2) \cap D(u + 1, u + 2) \neq \emptyset$.

Sinon $(f(u), f(u + 1))'$ est dans $D(u, u + 2)$ et $D(u, u + 2) \cap D(u, u + 1) \neq \emptyset$.

Au total pour tous $u, u + 1$ et $u + 2$ dans $\{1, \dots, p\}$ (resp. $\{1, \dots, p - 1\}$) on a que $D(u, v)$, $D(u + 1, u + 2)$ et $D(u, u + 2)$ sont dans une même classe X .

- (b) Si $\{u + 1, \dots, v\}$ et $\{f(v + 1), \dots, f(n)\}$ ont une intersection non vide alors $(f(u), f(v))'$ est dans $D(u, v + 1)$ et $D(u, v) \cap D(u, v + 1) \neq \emptyset$.

Si $\{f(u + 1), \dots, f(v)\}$ et $\{v + 1, \dots, n\}$ ont une intersection non vide alors $(f(u), f(v + 1))'$ est dans $D(u, v)$ et $D(u, v) \cap D(u, v + 1) \neq \emptyset$.

Si les deux conditions ci-dessus citées ne sont pas vérifiées c'est-à-dire si $\{u + 1, \dots, v\} \cap \{f(v + 1), \dots, f(n)\} = \emptyset$ et

$\{f(u + 1), \dots, f(v)\} \cap \{v + 1, \dots, n\} = \emptyset$ alors

$\{u + 1, \dots, v\} \cap \{f(1), \dots, f(u), \dots, f(v)\} = \{u + 1, \dots, v\}$ et

$\{f(u + 1), \dots, f(v)\} \cap \{1, \dots, u, \dots, v\} = \{f(u + 1), \dots, f(v)\}$ or

$\{u + 1, \dots, v\} \neq \{f(u + 1), \dots, f(v)\}$ car sinon f serait cycle-décomposable.

Donc $\{f(1), \dots, f(u)\} \cap \{u + 1, \dots, v\} \neq \emptyset$ et

comme $\{v + 1, \dots, n\} \neq \{f(v + 1), \dots, f(n)\}$ on a de même que

$\{f(1), \dots, f(u)\} \cap \{v + 1, \dots, n\} \neq \emptyset$.

Finalement on a la condition suivante:

$$\{f(1), \dots, f(u)\} \cap \{v+1, \dots, n\} \neq \emptyset \text{ et}$$

$$\{f(1), \dots, f(u)\} \cap \{u+1, \dots, v\} \neq \emptyset \text{ ce qui implique que}$$

$$(f(u+1), f(v+1))' \in D(u, v) \text{ et}$$

$$(f(u+1), f(v+1))' \in D(u, v+1). \text{ Et donc } D(u, v+1) \cap D(u, v) \neq \emptyset.$$

2. Cas où f est cycle décomposable.

Dans ce cas E n'admet pas de f -partition.

On exclut d'emblée le cas où $f(1) = 1$ à cause de la forte décomposabilité de f . On distingue trois sous-cas: $f(2) = 1$, $f(2) > 2$ et $f(2) = 2$.

(a) $f(2) = 1$.

Alors $(f(1), f(3))' \in D(2, 3)$; ce qui implique que

$$D(1, 3) \cap D(2, 3) \neq \emptyset.$$

$f(1) \neq 2$ car sinon E admettrait une f -partition donc

$$f(1) \in \{3, \dots, n\}.$$

Ainsi $(f(2), f(3))' \in D(1, 2)$ et $D(1, 2) \cap D(2, 3) \neq \emptyset$

Donc $D(1, 2)$, $D(2, 3)$ et $D(1, 3)$ appartiennent à la même classe X et $j = 3$.

(b) $f(2) > 2$.

Alors $(f(1), f(3))' \in D(1, 2)$ ce qui implique $D(1, 2) \cap D(1, 3) \neq \emptyset$.

Comme $f(2)$ appartient à $\{3, \dots, n\}$ on a:

Soit $f(1) = 2$ ce qui implique que $(f(2), f(3))'$ est dans $D(1, 3)$ d'où $D(1, 3)$ et $D(2, 3)$ ont une intersection non vide.

Soit $f(1) \in \{3, \dots, n\}$ ce qui implique que $(f(2), f(3))'$ appartient à $D(1, 2)$ d'où $D(1, 2)$ et $D(2, 3)$ ont une intersection non vide.

Donc $D(1, 2)$, $D(2, 3)$ et $D(1, 3)$ appartiennent à la même classe X et $j = 3$.

(c) $f(2) = 2$.

Notons k le plus grand entier tel que $2 \leq k \leq n-2$ et tel que $f(i) = i$ pour tout i de $\{2, \dots, k\}$.

$\mapsto$ Si $f(1) = k+1$ alors 1 est dans $\{f(k+2), \dots, f(n)\}$ ($1 \neq f(k+1)$ car sinon f serait fortement décomposable) et on montre comme dans la proposition 4 que

$D(1, 2), D(2, 3), \dots, D(k+1, k+2)$ appartiennent à une même classe.
 $D(1, 3), D(2, 4), \dots, D(k, k+2)$ appartiennent à une même classe.

.....
 $D(1, k+1)$ et $D(2, k+2)$ appartiennent à une même classe.
 $D(1, k+2), D(2, k+2), \dots, D(k+1, k+2)$ appartiennent à une même classe. Donc $j = k+2$.

$\Rightarrow$ Sinon $f(1) \in \{k+2, \dots, n\}$ et donc
 soit $f(k+1) = 1$ et on montre par un raisonnement similaire au précédent que $j = k+2$.
 Soit $f(k+1)$ appartient à $\{k+2, \dots, n\}$ et donc 1 appartient à $\{f(k+2), \dots, f(n)\}$ et on a également $j = k+2$. $\diamond$

PROPOSITION 7 *Sous les mêmes hypothèses et avec j et X définis comme ci-dessus on a :*

- Si $j < n-1$ alors X contient tous les $D(j-k, j+1)$ avec $k = 0, 1, \dots, j-1$.
- Si $j = n-1$ alors X contient tous les $D(j-k, j+1)$ avec $k = 0, 1, \dots, j-2$.

PREUVE: La preuve se fait de la même façon dans les deux cas ($j < n-1$ et $j = n-1$). Nous allons la faire dans le cas où $j < n-1$. On fait une preuve par récurrence sur k .

- Pour $k = 0$:

On va montrer que $D(j, j+1) \in X$.

1. $\{1, \dots, j-1\}$ et $\{f(j+1), \dots, f(n)\}$ ont une intersection non vide.
 Alors $(f(j-1), f(j))'$ appartient à $D(j, j+1)$ et deux possibilités se présentent:

$\Rightarrow$ Soit $\{f(1), \dots, f(j-2)\}$ et $\{j, \dots, n\}$ ont une intersection non vide (car sinon f serait fortement décomposable) et alors $(f(j-1), f(j))'$ est dans $D(j-2, j-1)$. Donc $D(j-1, j) \cap D(j, j+1) \neq \emptyset$. D'où $D(j, j+1) \in X$.

$\mapsto$ Soit $\{f(1), \dots, f(j-2)\}$ est inclus dans $\{1, \dots, j-1\}$ et $f(j-1)$ appartient à $\{j, \dots, n\}$ et alors $(f(j-1), f(j))'$ appartient à $D(j-1, j)$.
Donc $D(j-2, j-1) \cap D(j, j+1) \neq \emptyset$ et $D(j, j+1) \in X$.

2. $\{1, \dots, j-1\}$ est inclus dans $\{f(1), \dots, f(j)\}$.
Alors j appartient à $\{f(j+1), \dots, f(n)\}$ ($j \notin \{f(1), \dots, f(j)\}$ pour éviter la forte décomposition de f). Comme $\{f(j+1), \dots, f(n)\}$ est inclus dans $\{j, \dots, n\}$ et comme $f(j)$ n'appartient pas à $\{j, \dots, n\}$ on a $f(j)$ appartient à $\{1, \dots, j-1\}$.
Or $j \geq 3$, donc $(f(j), f(j+1))'$ appartient à $D(j, j+1)$.
D'autre part $\{f(1), \dots, f(j-1)\}$ et $\{j+1, \dots, n\}$ ont une intersection non vide d'où $(f(j), f(j+1))'$ appartient à $D(j-1, j)$.
Donc $D(j-1, j) \cap D(j, j+1) \neq \emptyset$ et $D(j, j+1) \in X$.

• Pour $k = 1$:

On va montrer que $D(j-1, j+1) \in X$. Pour cela on va discuter suivant la position de j dans l'ordre induit par f sur E .

1. Cas où $j \in \{f(j+1), \dots, f(n)\}$:
Alors $(f(j-1), f(j))' \in D(j-1, j+1)$.

 $\mapsto$ Si $\{f(1), \dots, f(j-2)\}$ et $\{j+1, \dots, n\}$ ont une intersection non vide alors $(f(j-1), f(j))' \in D(j-2, j-1)$.
Donc $D(j-2, j-1) \cap D(j-1, j+1) \neq \emptyset$

 $\mapsto$ Sinon $\{f(1), \dots, f(j-2)\}$ est inclus dans $\{1, \dots, j-1\}$ alors $f(j-1)$ appartient à $\{j+1, \dots, n\}$ car sinon f serait fortement décomposable.
Si $j = 3$ alors il existe un entier $k \geq j+1$ tel que $f_k(j-1) = f(j-1)$ et $f_k(j) = f(j)$; car $n \geq 7$.
Si $j > 3$ alors il existe $k \leq j-2$ tel que $f_k(j-1) = f(j-1)$ et $f_k(j) = f(j)$.
Dans tous les cas $(f(j-1), f(j))' \in D(j-1, j)$ et
 $D(j-1, j) \cap D(j-1, j+1) \neq \emptyset$.
2. Cas où $j \in \{f(1), \dots, f(j-1)\}$:
Alors $(f(j), f(j+1))' \in D(j-1, j+1)$.
 $\mapsto$ Si $\{f(1), \dots, f(j-1)\}$ et $\{j+1, \dots, n\}$ ont une intersection non vide

alors $(f(j), f(j+1))'$ appartient à $D(j-1, j)$.

Donc $D(j-1, j) \cap D(j-1, j+1) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Sinon $\{f(1), \dots, f(j-1)\}$ est inclus dans $\{1, \dots, j\}$ et $f(j)$ appartient à $\{j+1, \dots, n\}$ alors comme précédemment il existe k tel que $f_k(j) = f(j)$ et $f_k(j+1) = f(j+1)$ car $j > 2$. D'où $(f(j), f(j+1))'$ est dans $D(j, j+1)$.

Donc $D(j, j+1) \cap D(j-1, j+1) \neq \emptyset$.

3. Cas où $j = f(j)$:

(Cette situation peut se présenter si f est cyclo-décomposable et si E n'admet pas de f -partition.) On distingue deux sous-cas:

(a) $\{1, \dots, j-2\}$ et $\{f(j+1), \dots, f(n)\}$ ont une intersection non vide
Alors $(f(j-2), f(j))'$ appartient à $D(j-1, j+1)$.

$\Rightarrow$ Si $f(j-1)$ est dans $\{j+1, \dots, n\}$ alors $(f(j-2), f(j))'$ appartient à $D(j-2, j-1)$ or $(f(j-2), f(j))'$ est dans $D(j-1, j+1)$ donc $D(j-2, j-1) \cap D(j-1, j+1) \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$ Sinon on distingue deux situations possibles:

Soit $f(j-1)$ est dans $\{1, \dots, j-2\}$ alors $(f(j-2), f(j))'$ appartient à $D(j-1, j)$. Donc $D(j-1, j) \cap D(j-1, j+1) \neq \emptyset$.

Soit $f(j-1) = j-1$ alors $\{f(1), \dots, f(j-2)\}$ et $\{j+1, \dots, n\}$ ont une intersection non vide d'où $(f(j-1), f(j+1))'$ appartient à $D(j-2, j)$. Donc $D(j-2, j) \cap D(j-1, j+1) \neq \emptyset$.

(b) $\{1, \dots, j-2\}$ et $\{f(j+1), \dots, f(n)\}$ ont une intersection vide.

Alors $\{1, \dots, j-2\}$ est inclus dans $\{f(1), \dots, f(j-1)\}$, $j-1$ est dans $\{f(j+1), \dots, f(n)\}$ et $f(j-1)$ est dans $\{1, \dots, j-2\}$. Ce qui implique que $\{f(1), \dots, f(j-2)\}$ et $\{j+1, \dots, n\}$ ont une intersection non vide d'où $(f(j-1), f(j+1))'$ appartient à $D(j-2, j)$. Or comme $(f(j-1), f(j+1))'$ est dans $D(j-1, j+1)$ on a donc $D(j-1, j+1) \cap D(j-2, j) \neq \emptyset$.

Hypothèse de récurrence: On suppose que pour tous entiers k et i tel que $0 \leq k \leq i-1$ et tel que $i < j$ on a que $D(j-k, j+1)$ appartient à X . On va donc montrer que: $D(j-i, j+1)$ est dans X . Distinguons trois cas:

1. $\{j-i+1, \dots, j\} \cap \{f(j+1), \dots, f(n)\} \neq \emptyset$.

Alors $(f(j-i), f(j))'$ appartient à $D(j-i, j+1)$.

$\mapsto$ Si $\{f(j-i+1), \dots, f(j-1)\}$ et $\{j, \dots, n\}$ ont une intersection non vide alors $(f(j-i), f(j))'$ est dans $D(j-i, j-1)$. Donc $D(j-i, j-1)$ et $D(j-i, j+1)$ ont une intersection non vide.

$\mapsto$ Si $\{f(j-i+1), \dots, f(j-1)\}$ et $\{1, \dots, j-i\}$ ont une intersection non vide alors $(f(j-i), f(j))'$ est dans $D(j-i+1, j)$.
Donc $D(j-i+1, j) \cap D(j-i, j+1) \neq \emptyset$.

$\mapsto$ Si $\{f(j-i+1), \dots, f(j-1)\} = \{j-i+1, \dots, j-1\}$ alors j appartient à $\{f(j+1), \dots, f(n)\}$. On a $(f(j-i), f(j))'$ dans $D(j-i, j)$. Donc $D(j-i, j)$ et $D(j-i, j+1)$ ont une intersection non vide.

2. $\{j-i+1, \dots, j\}$ et $\{f(1), \dots, f(j-i)\}$ ont une intersection non vide.
Alors $(f(j-i+1), f(j+1))'$ est dans $D(j-i, j+1)$.

$\mapsto$ Si $\{f(j-i+2), \dots, f(j)\}$ et $\{j+1, \dots, n\}$ ont une intersection non vide alors $(f(j-i+1), f(j+1))'$ appartient à $D(j-i+1, j)$. Donc $D(j-i+1, j)$ et $D(j-i, j+1)$ ont une intersection non vide.

$\mapsto$ Si $\{f(j-i+2), \dots, f(j)\}$ et $\{1, \dots, j-i+1\}$ ont une intersection non vide alors $(f(j-i+1), f(j+1))'$ appartient à $D(j-i+2, j+1)$. Donc $D(j-i+2, j+1)$ et $D(j-i, j+1)$ ont une intersection non vide.

$\mapsto$ Si $\{f(j-i+2), \dots, f(j)\} = \{j-i+2, \dots, j\}$ alors $(f(j-i+1), f(j+1))'$ est dans $D(j-i+1, j+1)$. Donc $D(j-i+1, j+1)$ et $D(j-i, j+1)$ ont une intersection non vide.

3. $\{j-i+1, \dots, j\} = \{f(j-i+1), \dots, f(j)\}$.
On distingue deux sous-cas:

- (a) $\{1, \dots, j-i-1\}$ et $\{f(j+1), \dots, f(n)\}$ ont une intersection non vide. Alors $(f(j-i-1), f(j))'$ est dans $D(j-i, j+1)$.

$\mapsto$ Si $\{f(j-i), \dots, f(j-1)\}$ et $\{j+1, \dots, n\}$ ont une intersection non vide (i.e. $f(j-i) \in \{j+1, \dots, n\}$) alors $(f(j-i-1), f(j))'$ appartient à $D(j-i-1, j-1)$. Donc $D(j-i-1, j-1)$ et $D(j-i, j+1)$ ont une intersection non vide.

$\mapsto$ Si $\{f(j-i), \dots, f(j-1)\}$ est inclus dans $\{1, \dots, j\}$ alors $f(j-i)$ appartient à $\{1, \dots, j-i\}$ car $\{f(j-i+1), \dots, f(j-1)\}$ est égal à $\{j-i+1, \dots, j\}$.

Si donc $f(j-i) = j-i$ alors $(f(j-i-1), f(j))'$ est dans $D(j-i-1, j)$. Donc $D(j-i-1, j)$ et $D(j-i, j+1)$ ont une intersection non vide.

Sinon i.e. si $f(j-i)$ appartient à $\{1, \dots, j-i-1\}$ alors $(f(j-i-1), f(j))'$ appartient à $D(j-i, j)$. Donc $D(j-i, j)$ et $D(j-i, j+1)$ ont une intersection non vide.

- (b) $\{1, \dots, j-i-1\}$ est inclus dans $\{f(1), \dots, f(j-i-1), f(j-i)\}$. Alors $j-i$ est dans $\{f(j+1), \dots, f(n)\}$ et $f(j-i)$ est dans $\{1, \dots, j-i-1\}$, $(f(j-i), f(j+1))'$ appartient à $D(j-i, j+1)$. Or comme $\{f(1), \dots, f(j-i-1)\}$ et $\{j+1, \dots, n\}$ ont une intersection non vide, on a que $(f(j-i), f(j+1))'$ appartient à $D(j-i-1, j)$. Donc $D(j-i-1, j)$ et $D(j-i, j+1)$ ont une intersection non vide. $\diamond$

CAS OÙ f EST FORTEMENT DÉCOMPOSABLE ET $f \neq Id$.

On montre dans ce paragraphe le résultat suivant:

PROPOSITION 8 Si f est fortement décomposable et si $f \neq Id$ alors pour chaque $B_i = \{x_1, \dots, x_p\}$ ayant au moins deux éléments on a:

- Si $C_i \neq \tau_{B_i}$ alors soit P_i est une $\wedge$ -classe soit $P_i = \{D(x_1, x_p)\}$ et $\{D(x_1, x_p)\}$ sont des $\wedge$ -classes.
- Si $C_i = \tau_{B_i}$ alors les $X_i^{B_i}$ sont des $\wedge$ -classes.

et les P_{ik} sont des $\wedge$ -classes. Et il n'y en a pas d'autre.

Pour cela on établit les lemmes suivants:

LEMME 3 Si $C_i \neq \tau_{B_i}$ alors

- Soit P_i est une $\wedge$ -classe.
- Soit $P_i = \{D(x_1, x_p)\}$ et $\{D(x_1, x_p)\}$ sont des $\wedge$ -classes.

PREUVE: Soit i de $\{1, \dots, m\}$. Pour tous u et v de B_i $D(u, v)$ contient $(f(u), f(v))'$ car pour tout i n'appartenant pas à B_i on a: $f_i/B_i = f/B_i = C_i$.

Si $\text{Card}(B_l) = 2$, il n'y a rien à montrer, supposons donc que $\text{Card}(B_l) \geq 3$.
 Si $3 \leq \text{Card}(B_l) \leq 7$ alors il suffit de remarquer que la cardinalité de E ($\text{Card}(E) \geq 7$) n'intervient dans la preuve de la proposition 5 que pour établir qu'étant donné u et v on a que $D(u, v)$ contient $(f(u), f(v))'$ or cela est assuré ici par l'existence de plusieurs f -parties. Pour le reste c'est-à-dire au cas où $\text{Card}(B_l) \geq 7$ la preuve suit exactement celle de la proposition 5.
 $\diamond$

LEMME 4 Les P_{lk} sont des $\wedge$ -classes.

PREUVE: Pour fixer les idées posons:

$B_l = \{x_1, \dots, x_r\}$, $B_k = \{y_1, \dots, y_s\}$ et p et q les parties entières respectives de $r/2$ et $s/2$.

Soit u un élément de B_l alors $(f(u), f(y_\alpha))' \in D(u, y_{\alpha+1})$ pour $\alpha = 2, \dots, s$

En effet il existe $i > 1$ tel que $y_i = f(y_1)$ d'où

$(f(u), f(y_1))' \in D(u, y_2)$

.....
 $(f(u), f(y_{i-1}))' \in D(u, y_i)$

Il existe j et k tels que $k > i \geq j > 1$ et $f(y_k) = y_j$ d'où

$(f(u), f(y_i))' \in D(u, y_{i+1})$

.....
 $(f(u), f(y_{k-1}))' \in D(u, y_k)$

Ainsi de suite on a le résultat.

De même on montre que $(f(u), f(y_l))' \in D(u, y_{l-1})$ pour $l = 2, \dots, s$.

Si $u \neq x_{p+1}$ alors il existe x dans B_l tel que $f_x(u) = C_l(u)$. D'où chaque $D(u, y_l)$ contient $(f(u), f(y_l))'$ et donc $D(u, y_1) \dots D(u, y_{s-1})$ et $D(u, y_s)$ sont dans une même classe X .

De même si $v \neq y_{q+1}$ est dans B_k alors $D(x_1, v) \dots D(x_{r-1}, v)$ et $D(x_r, v)$ sont dans une même classe qui est X .

Il est ensuite facile de voir que tous les autres éléments de P_{lk} sont dans X . Et comme pour tout $D(w, t)$ (avec w n'appartenant pas à B_l ou t n'appartenant pas à B_k) et pour tout $D(u, v)$ (avec u dans B_l et v dans B_k) on a que $D(w, t)$ et $D(u, v)$ ont une intersection non vide, on en conclut que $P_{lk} = X$ est une classe. $\diamond$

LEMME 5 lorsque $C_l = \tau_{B_l}$ alors chaque $X_i^{B_l}$ est une $\wedge$ -classe.

PREUVE: Identique à celle de la proposition 4. $\diamond$

PREUVE DE LA PROPOSITION: Il suffit de remarquer que P est exactement égal à la réunion des P_i et des P_{ik} . $\diamond$

2.5 CONCLUSIONS.

Étant données deux relations binaires R et R' (-1) -hypomorphes, la h -décomposition permet d'apprécier l'influence structurelle induite par l'hypomorphie entre R et R' . Et le problème de la suffisance de la famille des (-1) -hypomorphismes à déterminer une permutation f de la base revient à un problème de recollement des isomorphismes définis entre h -composantes de R et R' qui se correspondent.

Chapitre 3

FAMILLE DES HYPOMORPHISMES ENTRE DEUX TOURNOIS T_h .

On montre que les multirelations binaires dont une composante est un tournoi T_h avec $h > 2$ sont (-1) -reconstructibles.

On définit une nouvelle écriture des permutations qui permettra de décrire à l'aide d'un tableau les isomorphismes et les (-1) -hypomorphismes entre deux tournois T_h .

3.1 INTRODUCTION.

Dans ce chapitre on considère les multirelations binaires $M = (R, R_2, \dots, R_m)$ où R est un tournoi T_h . On montre que M est (-1) -reconstructible si le cardinal de la base est ≥ 7 .

Soit $M' = (R', R'_2, \dots, R'_m)$ une multirelation (-1) -hypomorphe à M . La preuve consiste à calculer un isomorphisme de R sur R' en fonction des (-1) -hypomorphismes entre M et M' qui sont en fait ceux entre R et R' . De ce fait M et M' seront isomorphes.

Notons qu'un isomorphisme entre deux tournois T_h n'est pas forcément déterminé par les (-1) -hypomorphismes. Par exemple si on prend $R' = R = T_h$ alors toute translation différente de l'identité n'est pas déterminée par la famille des (-1) -hypomorphismes entre R et R' . En effet tous ces (-1) -hypomorphismes sont tous égaux à l'identité définie sur des parties de E à $2h$ éléments et l'isomorphisme qui en résulte ne peut être alors que l'identité sur E .

La relation R étant un T_h , R admet la permutation circulaire comme automorphisme. Il s'ensuit que la donnée d'une permutation θ de E détermine par renumérotation des sommets de T_h une relation R' qui est (-1) -hypomorphe à R . la permutation θ n'est pas la seule qui détermine R' .

Si donc on note S_{2h}^0 l'ensemble des permutations de E et $\mathcal{R}'$ celui des relations R' qui sont (-1) -hypomorphes à R alors l'application surjective:

$$\begin{aligned} \phi: S_{2h}^0 &\longrightarrow \mathcal{R}' \\ \theta &\longmapsto R' \end{aligned}$$

induit une relation d'équivalence sur S_{2h}^0 .

On notera $\hat{\theta}$ la classe de θ qui est définie par

$$\hat{\theta} = \{\theta \circ t_u / u = 0, 1, \dots, 2h\}$$

où $t_u(i) = u + i$ (modulo $2h + 1$).

Remarque: $\hat{\theta}$ est l'ensemble des isomorphismes de R sur R' qu'on notera aussi $G(R, R')$.

• S'il existe une permutation f élément de $\hat{\theta}$ qui est déterminée par la famille des (-1) -hypomorphismes de R sur R' alors f est un isomorphisme

de M sur M' .

• Si pour tout θ il existe une permutation f élément de θ qui est déterminée par la famille des (-1) -hypomorphismes alors M est (-1) -reconstructible. En effet l'application ϕ étant surjective, pour toute multirelation $M' = (R', R'_2, \dots, R'_m)$ (-1) -hypomorphe à M il existe θ tel que R' soit l'image de θ par ϕ .

On introduit une nouvelle écriture des permutations qui permet une "représentation" de la famille des (-1) -hypomorphismes entre deux tournois T_A . On étudie ensuite la h -décomposition de deux tournois T_A . Cette étude permet de conclure à la (-1) -reconstructibilité des multirelations dont une composante est un tournoi T_A dès que $h > 2$.

3.2 UNE NOUVELLE ÉCRITURE DES PERMUTATIONS.

3.2.1 DÉFINITIONS ET EXEMPLES.

Soit σ un élément de l'ensemble S_n des permutations sur $\{1, \dots, n\}$. Il existe plusieurs manières de représenter (ou écrire) σ . Les plus usités sont:

1. Écriture matricielle.

On définit la permutation σ par une matrice $2.n$. Par exemple on a:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Écriture cycle-décomposée.

On écrit la permutation comme une composition de cycle de supports deux à deux disjoints. On peut améliorer cette représentation par la transformation de Foata. On a: $\sigma = (3, 1)(4)(6, 5, 2)$

On peut ainsi se débarrasser des parenthèses: $\sigma = 314652$.

Une nouvelle écriture.

A toute permutation σ de S_n on peut associer l'application C_σ définie par: $C_\sigma(i) = \sigma^{-1}(i) - i$ pour tout i de E .

C_σ est appelée *fonction position relative* (fpr).

Le n -uplet $C(\sigma) = \{C(1), \dots, C(n)\}$ est appelé le *n -uplet position* de σ . On a pour l'exemple précédent $C(\sigma) = (2, 3, -2, 0, 1, -4)$.

La donnée d'un n -uplet de position détermine parfaitement une et une seule permutation de S_n .

3.2.2 QUELQUES PROPRIÉTÉS.

COMPOSITION DE PERMUTATIONS.

Soient σ et τ deux permutations de S_n . On note C_σ et C_τ les fpr de σ et de τ . Pour tout i de E on a:

$$\begin{aligned} C_{\tau\sigma}(i) &= (\tau\sigma)^{-1}(i) - i \\ &= (\sigma^{-1}(\tau^{-1}(i)) - \tau^{-1}(i)) + (\tau^{-1}(i) - i) \\ &= C_\sigma(\tau^{-1}(i)) + C_\tau(i) \end{aligned}$$

Donc pour tout i de E , $C_{\tau\sigma}(i) = C_\sigma(\tau^{-1}(i)) + C_\tau(i)$.

PROPOSITION 9 Soit σ une permutation de S_n . Pour tout cycle $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ avec $p \geq 1$ de σ on a

$$\sum_{i=1}^p C(x_i) = 0.$$

PREUVE: Il suffit de remarquer que pour $i = 2, \dots, p$
 $C(x_i) = x_{i-1} - x_i$ et $C(x_1) = x_p - x_1$. $\diamond$

Soit k un élément de $\{1, \dots, n\}$ et soit t_k la permutation de S_n définie par:
 $t_k(u) = u + k$ pour tout u de $\{1, \dots, n\}$ (la somme étant prise modulo n).
 Une telle permutation est appelée une translation.

Soit σ une permutation de S_n . Alors la permutation $\sigma t_{C_\sigma(k)}$ fixe k et on pose $\sigma_k = \sigma t_{C_\sigma(k)}$ et C_k la fpr associée à σ_k .

PROPOSITION 10 Pour toute permutation σ de S_n et pour tous i, j et m on a:

$$C_\sigma(j) - C_\sigma(i) = C_m(j) - C_m(i) \pmod{n}.$$

PREUVE: Soit σ une permutation de S_n et soient i, j et m trois éléments de $\{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned} C_m(j) - C_m(i) &= ((\sigma \circ t_{\sigma(m)})^{-1}(j) - j) - ((\sigma \circ t_{\sigma(m)})^{-1}(i) - i) \\ &= (\sigma^{-1}(j) - C_\sigma(m) - j) - (\sigma^{-1}(i) - C_\sigma(m) - i) \\ &= (\sigma^{-1}(j) - j) - (\sigma^{-1}(i) - i). \end{aligned}$$

Donc

$$C_\sigma(j) - C_\sigma(i) = C_m(j) - C_m(i) \pmod{n}. \diamond$$

3.3 LES (-1) -HYPOMORPHISMES.

Soient R et R' deux tournois T_h de base commune $E = \{0, 1, \dots, 2h\}$. Les relations R et R' sont (-1) -hypomorphes (voir 3.1). Pour chaque x de E , f_x sera l'unique isomorphisme de $R/E - \{x\}$ sur $R'/E - \{x\}$.

On note:

- $G(R, R')$ l'ensemble des isomorphismes de R sur R' .
- $H(R, R')$ l'ensemble des permutations éléments de $G(R, R')$ qui fixe au moins un élément de E .

Si θ est un élément donné de $G(R, R')$ alors:

$$G(R, R') = \{\theta \circ t_k \mid k = 0, 1, \dots, 2h\} = \hat{\theta}.$$

Nous allons dans cet paragraphe exprimer les (-1) -hypomorphismes en fonction des éléments de $G(R, R')$ et de leur fpr.

Dans toute la suite on pose $\theta_i = \theta \circ t_{C_\theta(i)}$ et on note C_i la fpr de θ_i .

PROPOSITION 11 *Étant donnés deux éléments i et j de E on a :*

1. $f_j(u) = \theta_i(u + C_i(j))$ pour tout $u \neq j$.
2. $f_j(u) = \theta_j(u)$ pour tout $u \neq j$.

PREUVE:

1. Il existe k dans $\{0, 1, \dots, 2h\}$ tel que $j = \theta_i(k)$.

Remarquant que $f_j(j + n) = \theta_i(k + 1)$ on a: $f_j(j + n) = \theta_i(k + n)$

avec $n > 0$ et $j + n \neq j \pmod{2h+1}$.

On pose $u = j + n$ et on a: $f_j(u) = \theta_j(u + C_j(j))$ avec $C_j(j) = \theta_j^{-1}(j) - j$ et $u \neq j$.

2. D'après ce qui précède on a:

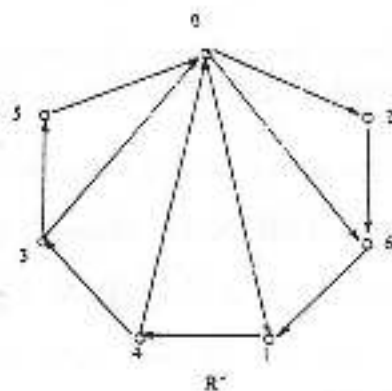
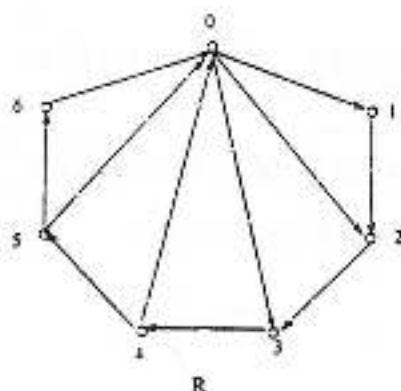
$$\begin{aligned} f_j(u) &= \theta_j(u + C_j(j)) \\ &= \theta_j(u + \theta_j^{-1}(j) - j) \\ &= \theta_j(u). \quad \diamond \end{aligned}$$

COROLLAIRE 3 La famille des (-1) -hypomorphismes s'identifie à $H(R, R') = \{\theta_j / j = 0, 1, \dots, 2h\}$.

REMARQUES:

- En raison de son unicité f_j est indépendant de θ .
- Si on dispose les éléments de $H(R, R')$ qui sont cycle-décomposés dans un tableau, un (-1) -hypomorphisme f_x se lit sur la ligne où x est entre parenthèse (c'est-à-dire x est un élément fixé par la permutation décrite par cette ligne).

Par exemple considérons les deux tournois T_h de la figure ci-dessous (où les arcs qui ne sont pas dessinés sont déterminés par rotation).



Disposons les éléments de $H(R, R')$ en tableau en utilisant l'écriture de Foata avec parenthèses:

$$\begin{array}{l} (0)(4)(6, 5, 3, 1, 2) \\ (2)(5, 4, 1, 0)(6, 3) \\ (1)(3)(6, 2, 4, 5, 0) \\ (4, 3)(5)(6, 0, 2, 1) \\ (4, 0, 1)(5, 2, 3)(6). \end{array}$$

Pour déterminer $f_2(1)$ on cherche dans le tableau la permutation qui fixe 2. c'est la deuxième ligne et on y lit l'image de 1 qui est ici 0. Donc $f_2(1) = 0$. La première ligne nous permet de lire deux $\{-1\}$ -hypomorphismes qui sont f_0 et f_4 .

3.4 RELATIONS D'ÉQUIVALENCE.

On note:

- U (resp. U') l'ensemble des arcs de R (resp. R').
- Pour tout (u, v) de U on pose: $D(u, v) = \{(f_j(u), f_j(v))' / j \neq u, v\}$.
- $P = \{D(u, v) / (u, v) \in U\}$.
- $P_l = \{D(u, v) \in P / |v - u| \equiv l \pmod{2h + 1}\}$. Les P_l forment une partition de P .

On définit de la même façon qu'au chapitre précédent, les $\sim$ équivalences sur U et U' et la Λ -équivalence sur P . Mais revenons sur la définition de la Λ -équivalence pour la préciser dans le cadre de notre étude présente.

Soient $D(u, v)$ et $D(w, t)$ deux éléments de P .

$D(u, v)$ et $D(w, t)$ sont Λ -équivalents si et seulement s'il existe un chemin d'intersection non vide liant $D(u, v)$ et $D(w, t)$ c'est-à-dire une suite:

$$D(u_0, v_0) = D(u, v), D(u_1, v_1), \dots, D(u_n, v_n) = D(w, t)$$

telle que $D(u_a, v_a)$ et $D(u_{a+1}, v_{a+1})$ ont une intersection non vide avec $a = 0, 1, \dots, n-1$.

Supposons que $D(u_a, v_a) \neq D(u_{a+1}, v_{a+1})$ alors dire que $D(u_a, v_a)$ et $D(u_{a+1}, v_{a+1})$

ont une intersection non vide revient à dire qu'il existe

$j_2 \neq u_2, v_2$ et $j_{2+1} \neq u_{2+1}, v_{2+1}$ tels que

$f_{j_2}(u_2) = f_{j_{2+1}}(u_{2+1})$ et $f_{j_2}(v_2) = f_{j_{2+1}}(v_{2+1})$.

D'après la proposition 11, on obtient:

$$u_2 - u_{2+1} = v_2 - v_{2+1} = C(j_{2+1}) - C(j_2)$$

où C est à priori la fpr de n'importe quel élément de $G(R, R')$ (voir la proposition 10).

Dans toute la suite, on prend $C = C_0$ et donc $\theta = \theta_0$.

Remarque: Si X est une $\wedge$ -classe alors il existe l dans $\{1, \dots, h\}$ tel que $X \subset P_l$.

Comme tout élément de P_l et tout élément de P_k ont une intersection vide si $l \neq k \pmod{2h+1}$, l'étude de $P/\wedge$ se ramène à celle des $P_l/\wedge$.

3.5 ÉTUDE DE $P_l/\wedge$.

Rappelons que pour étudier l'équivalence $\wedge$ on peut se limiter aux permutations de $E = \{0, 1, \dots, 2h\}$ qui fixe 0 (voir la proposition 10 et le paragraphe précédent).

on pose $\tau^- = (0)(2h, 2h-1, \dots, 2, 1)$ et $\tau^+ = (0)(1, 2, \dots, 2h)$.

PROPOSITION 12 Si pour tout élément $D(u, v)$ de P_l on a:

$\text{Card}(D(u, v)) \geq h+1$ alors $P_l/\wedge = \{P_l\}$.

En particulier si $H(R, R') = G(R, R')$ alors $P_l/\wedge = \{P_l\}$.

PREUVE: On a $\text{Card}(\bigcup D(u, v)) = 2h+1$.

Si tout élément $D(u, v)$ de P_l est tel que $\text{Card}(D(u, v)) \geq h+1$ alors tous éléments $D(u, v)$ et $D(w, t)$ de P_l ont une intersection non vide.

Si $H(R, R') = G(R, R')$ alors tout élément $D(u, v)$ de P_l a exactement $2h-1$ éléments. $\diamond$

On montre dans la suite de cet paragraphe que si toute permutation élément de θ fixe au plus deux éléments de E alors P_1 est une Λ -classe.

PROPOSITION 13 Soit $D(x, y)$ un élément de P_1 .

$\text{Card}(D(x, y)) = 1$ si et seulement si θ est l'une des permutations suivantes:

- La transposition qui échange x et y (avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$)
- τ^- avec ($x = 2h$ et $y = 0$) ou bien ($x = 0$ et $y = 2h$)
- τ^+ avec ($x = 1$ et $y = 0$) ou bien ($x = 0$ et $y = 1$)
- Id (l'identité).

PREUVE: Si θ est l'une des permutations ci-dessus citées alors on vérifie facilement que soit $D(x, y) = \{(y, x)\}$ soit $D(x, y) = \{(x, y)\}$.

Réciproquement supposons que $\text{Card}(D(x, y)) = 1$.

Pour tout $i \neq x, y$ et pour tout $j \neq x, y$ on a alors que:

$$f_i(x) = f_j(x) \quad \text{et} \quad f_i(y) = f_j(y)$$

$$\text{Ce qui donne } C(i) = C(j).$$

Donc il existe un entier relatif k tel que pour tout $j \neq x, y$ on a $C(j) = k$.
On distingue les deux cas suivants:

- Cas où $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

Comme $C(0) = 0$, on a que $k = 0$.

D'où θ fixe tous les éléments de E sauf peut-être x et y . Donc θ est soit la transposition qui échange x et y soit l'identité.

- Cas où $x = 0$ ou bien $y = 0$.

D'après la proposition 9 On a:

$$(2h - 1)k = -C(x) \quad \text{ou bien} \quad (2h - 1)k = -C(y).$$

Ce qui donne $k = -1$ ou bien $k = 1$;

Car l'image par la fpr C de tout élément de E est au plus égale à $2h - 1$ en valeur absolue.

Si $k = 1$ alors $C(x) = 1 - 2h$ ou bien $C(y) = 1 - 2h$.

D'où $(x = 2h \text{ et } y = 0)$ ou bien $(x = 0 \text{ et } y = 2h)$.

Donc $\theta = (0)(2h, 2h - 1, \dots, 2, 1)$.

Si $k = -1$ alors $C(x) = 2h - 1$ ou bien $C(y) = 2h - 1$ et on obtient

$\theta = (0)(1, 2, \dots, 2h)$ avec $(x = 1 \text{ et } y = 0)$ ou bien $(x = 0 \text{ et } y = 1)$. $\diamond$

LEMME 6 Si $D(x, y)$ est un élément de P_i tel que $\text{Card}(D(x, y)) > 1$ alors il existe $D(z, t) \neq D(x, y)$ tel que : $D(x, y) \cap D(z, t) \neq \emptyset$.

PREUVE: Soit $D(x, y)$ un élément de P_i et supposons que tout

$D(z, t) \neq D(x, y)$ est tel que $D(x, y) \cap D(z, t) = \emptyset$

Soit (u, v) un élément de $D(x, y)$ alors pour tout $i \neq x, y$ et $i \neq u, v$

on a $f_i^{-1}(u) = x$ et $f_i^{-1}(v) = y$ d'où $f_i(x) = u$ et $f_i(y) = v$

Soit (a, b) un autre élément de $D(x, y)$ alors pour tout $j \neq x, y, a$ et b on a $f_j(x) = a$ et $f_j(y) = b$.

Comme $\text{Card}(E) \geq 7$, il existe $k \neq x, y, u, v, a, b$ tel que $f_k(x) = f_i(x) = f_j(x)$ et $f_k(y) = f_i(y) = f_j(y)$, donc $u = a$ et $v = b$, contradiction. $\diamond$

LEMME 7 Si $(x, y) \neq (w, t)$ alors $D(x, y) \neq D(w, t)$.

PREUVE:

$\rightarrow$ Si $x \neq w, t$ alors $(f_x(w), f_x(t))' \notin D(x, y)$. Or $(f_x(w), f_x(t))' \in D(w, t)$ donc $D(x, y) \neq D(w, t)$.

$\rightarrow$ Si $x = t$ (resp. $x = w$) alors $y \neq w$ (resp. $y \neq t$).

On a $(f_y(w), f_y(t))' \notin D(x, y)$ et $(f_y(w), f_y(t))' \in D(w, t)$ donc $D(x, y) \neq D(w, t)$. $\diamond$

REPRESENTATION DE $H(R, R')$ PAR UN TABLEAU.

Soit θ tel que toute permutation élément de θ fixe au plus deux éléments de E . $H(R, R')$ est le sous ensemble de θ des permutations qui fixent au moins un élément de E . Représentons $H(R, R')$ par un tableau dont les lignes représentent les permutations éléments de $H(R, R')$ (voir l'exemple de 3.3). Sur chaque ligne apparaît un ou deux cycles de longueur 1, ce sont les éléments fixés par la permutation. Pour parler des (-1) -hypomorphismes, il sera plus commode de dire "ligne" pour "permutation" car si la ligne possède deux éléments fixés elle décrit deux (-1) -hypomorphismes.

LEMME 8 Deux éléments k et k' sont sur une même ligne si et seulement si $C(k) = C(k')$.

PREUVE: Soit λ une ligne qui fixe k et k' . Alors $\lambda = \theta_k = \theta_{k'}$.

Ce qui équivaut à $\theta_{C(k)} = \theta_{C(k')}$

Ce qui équivaut à $C(k) = C(k')$. $\diamond$

LEMME 9 Étant donné u un élément de E , les images de u par deux lignes différentes sont différentes.

PREUVE: Supposons qu'il existe deux lignes λ_1 et λ_2 telles que $\lambda_1(u) = \lambda_2(u)$. Il existe k_1 et k_2 deux éléments de E qui sont fixés par λ_1 et λ_2 , c'est-à-dire que $\lambda_1(k_1) = k_1$ et $\lambda_1(k_2) = k_2$.

Ce qui donne $\lambda_1 = \theta_{k_1}$ et $\lambda_2 = \theta_{k_2}$.

Par hypothèse $\theta_{k_1}(u) = \theta_{k_2}(u)$; d'où $C(k_1) = C(k_2)$.

Donc k_1 et k_2 sont sur la même ligne d'après le lemme 8; ce qui est absurde.

$\diamond$

LEMME 10 Si toute permutation g de θ fixe au plus deux éléments de E alors $\text{Card}(D(u, v)) \geq h$ pour tous u et v .

PREUVE: Soit θ tel que toute permutation de θ fixe au plus deux éléments de E . Reprenons la représentation précédente de l'ensemble $H(R, R')$.

Toute ligne du tableau détermine un élément de $D(u, v)$ à la condition qu'on y trouve au moins un élément fixé par une permutation de θ . Donc le nombre d'élément de $H(R, R')$ est égal au moins à $h + 1$.

On va distinguer les deux cas suivants:

1. u et v apparaissent fixés sur une même ligne.

Il reste alors au moins h lignes (car $\text{Card}(H(R, R')) \geq h + 1$). Et le lemme 9 permet de conclure.

2. u et v apparaissent fixés sur deux lignes différentes.

$\Rightarrow$ Si $\text{Card}(H(R, R')) \geq h + 2$ alors il reste au moins h lignes et lemme 9 permet de conclure.

$\Rightarrow$ Si $\text{Card}(H(R, R')) = h + 1$ alors il existe un élément de E qui n'est fixé par aucune ligne de θ , ce qui est absurde. $\diamond$

PROPOSITION 14 *Si toute permutation élément de $\hat{\theta}$ fixe au plus deux éléments de E alors P_l est une Λ -classe.*

PREUVE: S'il existe dans le tableau de $H(R, R')$ deux lignes λ_1 et λ_2 qui fixent chacune deux éléments de E et si on prend x (resp. y) un élément de E fixé par λ_1 (resp. λ_2) alors $\text{Card}(D(x, y)) \geq h + 1$.

Sinon c'est-à-dire qu'au plus une ligne du tableau fixe deux éléments de E alors $\text{Card}(H(R, R')) \geq 2h - 1$ et $\text{Card}(D(x, y)) \geq h + 1$ pour tous x et y dans E (voir le lemme 9). Il existe donc $D(x, y)$ dans P_l tel que $\text{Card}(D(x, y)) \geq h + 1$.

→ Si pour tout $D(u, v) \neq D(x, y)$ on a: $D(x, y) \cap D(u, v) \neq \emptyset$ alors P_l est une Λ -classe.

→ Sinon on suppose qu'il existe $D(w, t)$ dans P_l tel que

$D(x, y) \cap D(w, t) = \emptyset$. Alors $\text{Card}(D(w, t)) = h$ et pour tout

$D(u, v) \neq D(w, t)$ on a: $D(x, y) \cap D(u, v) \neq \emptyset$ car $\text{Card}(D(u, v)) \geq h$.

Ainsi $P_l - \{D(w, t)\}$ est inclus dans une Λ -classe. Comme $h \geq 2$, P_l contient au moins trois $D(u, v)$ autre que $D(w, t)$ et $D(x, y)$. Il existe donc $D(u, v)$ dans P_l tel que $D(w, t) \cap D(u, v) \neq \emptyset$. Donc P_l est une Λ -classe. $\diamond$

3.6 RECONSTRUCTIBILITÉ.

Soit $M = (R_1, \dots, R_m)$ une multirelation binaire de base $E = \{0, 1, \dots, 2h\}$ tel que $R_l = T_h$. La multirelation M est (-1) -reconstructible si pour tout θ il existe une permutation f élément de $\hat{\theta}$ qui est déterminée par la famille des (-1) -hypomorphismes entre R_i et R'_i (où $R'_i = \phi(\theta)$).

→ S'il existe une permutation g élément de $\hat{\theta}$ qui fixe au moins trois éléments de E alors g est déterminée par la famille des (-1) -hypomorphismes entre R_i et R'_i . En effet pour tous a et b de E il existe $j \neq a, b$ dans E tel que $g/\{a, b\} = f_j/\{a, b\}$.

→ Si toute permutation élément de $\hat{\theta}$ fixe au plus deux éléments de E alors d'après la proposition 14 P_l est une Λ -classe, et cela pour tout l . Soit l un élément de $\{1, \dots, h\}$. On pose X_l l'ensemble des arcs (u, v) tels que $D(u, v)$ est dans P_l . On pose X'_l égal à la réunion des $D(u, v)$ qui sont dans P_l .

D'après le lemme 1 X_i (resp. X'_i) est une $\sim$ -classe de type $(1, -1)$ (resp. $(-1, 1)$) dans U (resp. U').

On a également $X'_i = \{ (f(u), f(v))' / |v - u| = l \pmod{2h+1} \text{ et } f \in \theta \}$. Car pour tous u et v éléments de E tels que $|v - u| = l \pmod{2h+1}$ et pour toute permutation f de θ il existe deux éléments i et w de E tels que $f(u, v) = f_i(w, w + v - u)$. En effet si on pose $f = \theta \circ t_k$ il suffit alors de prendre i et w tels que:

$\theta^{-1}(i) = k + u$, $k + v \pmod{2h+1}$ et $w = k + u - \theta^{-1}(i) + i \pmod{2h+1}$.

Soient a, b et j trois éléments de E tels que $j \neq a, b$. Soit g une permutation élément de θ . Les arcs $(f_j(a), f_j(b))'$ et $(g(a), g(b))'$ sont $\sim$ -équivalents dans X'_i . Il existe donc une h -composition ψ de type $(-1, 1)$ qui envoie $(f_j(a), f_j(b))'$ sur $(g(a), g(b))'$. Donc $g/\{a, b\} = \psi \circ f_j/\{a, b\}$. Donc toute permutation g élément de θ est déterminé par la famille des (-1) -hypomorphismes.

Ainsi on obtient:

THEOREME 1 *Toute mutirelation binaire dont une composante est un tournoi T_h est (-1) -reconstructible dès que son cardinal ≥ 7 .*

3.7 LES $\wedge_{ji}$ -ÉQUIVALENCES.

Soit θ une permutation sur $E = \{0, 1, \dots, 2h\}$ telle que θ contient une permutation qui fixe au moins trois éléments de E . On pose $R = T_h$ et on note R' l'image de θ par ϕ . On décrit une technique de détermination de la h -décomposition de R et R' qui consiste à calculer le $\text{Sup}(\{\wedge_{ji} / j, i \in E\})$. On établit quelques propriétés.

3.7.1 DÉFINITIONS.

Soient i et j deux éléments de E tels que $C(j) - C(i) = \delta$ soit non nul. On dira que deux éléments $D(u, v)$ et $D(w, t)$ sont $\wedge_{ji}$ -équivalents s'il existe une suite dans P_i :

$$D(u_0, v_0) = D(u, v), D(u_1, v_1), \dots, D(u_n, v_n) = D(w, t)$$

telle que

$$\begin{cases} u_{a+1} - u_a = v_{a+1} - v_a = C(j) - C(i) & \text{pour } a = 0, 1, \dots, n-1 \\ u_a \neq i, j & v_a \neq i, j & \text{pour } a = 1, \dots, n-1 \\ u_0, v_0 \neq j & \text{et } u_n, v_n \neq i \end{cases}$$

Soient Λ_{ji} et Λ_{km} deux relations d'équivalence définies comme ci-dessus. On note $\sup(\Lambda_{ji}, \Lambda_{km})$ la relation d'équivalence définie sur P_i par: $D(u, v)$ et $D(w, t)$ sont $\sup(\Lambda_{ji}, \Lambda_{km})$ -équivalents s'il existe une suite: $D(u_0, v_0) = D(u, v), D(u_1, v_1), \dots, D(u_n, v_n) = D(w, t)$ telle que pour tout $a = 0, 1, \dots, n-1$ on a que $D(u_a, v_a)$ et $D(u_{a+1}, v_{a+1})$ sont soit Λ_{ji} -équivalents soit Λ_{km} -équivalents. Les équivalences $\sup(\{\Lambda_{ji} / j, i \in E\})$ et Λ définissent les mêmes classes.

EXEMPLES:

Soit $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Alors le tableau des éléments de $H(R, R')$ est:

$$\begin{aligned} &(0)(2)(6, 3, 1, 4, 5)(7)(8) \\ &(5)(6)(3, 7, 3, 2, 4, 1, 0) \\ &(3)(7, 4)(8, 2, 6, 0, 1, 5) \\ &(1)(7, 0, 2, 5)(8, 4, 3, 6) \end{aligned}$$

On a:

$$P_1 = \{D(0, 1), D(1, 2), D(2, 3), D(3, 4), D(4, 5), D(5, 6), D(6, 7), D(7, 8), D(8, 0)\}$$

• Exemple 1: $j = 1$ et $i = 0$.

On range les éléments de P_1 en fonction de $\delta = 2$ et on a:

$$D(0, 1), D(2, 3), D(4, 5), D(6, 7), D(8, 0), D(1, 2), D(3, 4), D(5, 6), D(7, 8).$$

On peut disposer les éléments de P_1 sur un disque comme dans la figure qui suit.

$D(8, 0)$ et $D(1, 2)$ sont dans la même Λ_{10} -classe. Car

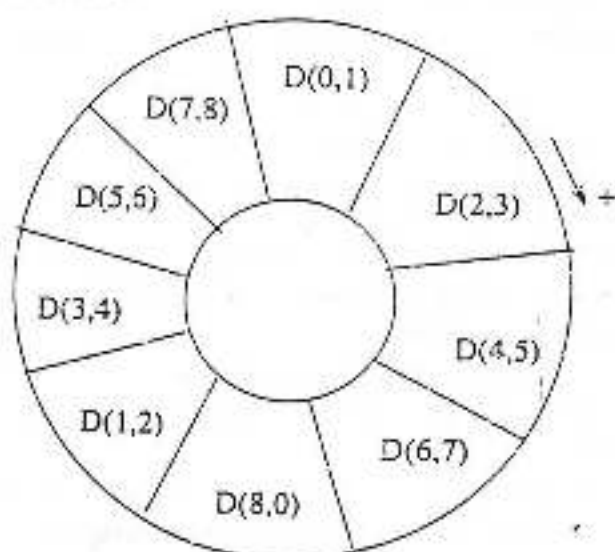
$$(4, 2)' = (f_1(8), f_1(0))' = (f_0(1), f_0(2))'.$$

Par contre $D(6, 7)$ et $D(8, 0)$ ne sont pas dans la même Λ_{10} -classe car $f_0(0)$

n'est pas définie.

On constate en fait que deux éléments $D(u_2, v_2)$ et $D(u_{2+i}, v_{2+i})$ qui se suivent dans le disque (quand on le parcourt dans le sens +), seront dans la même Λ_{ji} -classe, si et seulement si $j \neq u_2, v_2$ et $i \neq u_{2+i}, v_{2+i}$. Donc les Λ_{ji} -classes sont:

- $\{D(0,1)\}$
- $\{D(2,3), D(4,5), D(6,7)\}$
- $\{D(8,0), D(1,2)\}$
- $\{D(3,4), D(5,6), D(7,8)\}$



• Exemple 2: $j = 3$ et $i = 7$.

On a $\delta = C(3) - C(7) = 3$.

Ici δ divise $2h + 1$ et on peut partitionner P_1 en trois ensembles D_0 , D_1 et D_2 . On range les éléments de D_0 , D_1 et D_2 en fonction de δ :

D_0 : $D(0,1), D(3,4), D(6,7), D(0,1)$

D_1 : $D(1,2), D(4,5), D(7,8), D(1,2)$

D_2 : $D(2,3), D(5,6), D(8,0), D(2,3)$.

D_0, D_1 et D_2 sont les Λ_{37} -classes en effet on a:
 $D(0,1) \cap D(3,4) \neq \emptyset$ considérer f_3 et f_7 .
 $D(0,1) \cap D(6,7) \neq \emptyset$ considérer f_7 et f_3 .
 $D(1,2) \cap D(4,5) \neq \emptyset$ considérer f_3 et f_7 .
 $D(1,2) \cap D(7,8) \neq \emptyset$ considérer f_7 et f_3 .
 $D(2,3) \cap D(8,0) \neq \emptyset$ considérer f_7 et f_3 .
 $D(5,6) \cap D(8,0) \neq \emptyset$ considérer f_3 et f_7 .

3.7.2 QUELQUES PROPRIÉTÉS.

Pour déterminer les Λ_{ji} -classes on peut distinguer deux cas:

1. $|\delta| \leq 2$ ou $|\text{pgcd}(\delta, 2h+1)| = 1$.

On considère les deux suites d'éléments de P_1 définies de la façon suivantes:

$$- D(u_0, v_0), D(u_1, v_1), \dots, D(u_n, v_n), \dots$$

telle que: $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \delta \\ v_{n+1} = v_n + \delta \end{cases}$ avec $u_0 = j + \delta$ et $v_0 = l + j + \delta$.

Soit $k \geq 0$ le plus petit entier tel que pour tout $a < k$, u_a et v_a sont tous deux différents à la fois de i et de j et tel que $\{u_k, v_k\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$.

Si $u_k = i$ ou $v_k = i$ alors les éléments

$D(u_0, v_0), D(u_1, v_1), \dots, D(u_{k-1}, v_{k-1})$ appartiennent à la même Λ_{ji} -classe.

Si $(v_k = j \text{ et } u_k \neq i)$ ou $(u_k = j \text{ et } v_k \neq i)$ alors les éléments $D(u_0, v_0), D(u_1, v_1), \dots, D(u_k, v_k)$ appartiennent à la même Λ_{ji} -classe.

$$- D(w_0, t_0), D(w_1, t_1), \dots, D(w_n, t_n), \dots$$

telle que: $\begin{cases} w_{n+1} = w_n - \delta \\ t_{n+1} = t_n - \delta \end{cases}$ avec $w_0 = j$ et $t_0 = j + l$.

Si $t_0 = i$ (c'est-à-dire $i - j = l$) alors $\{D(w_0, t_0)\}$ est une Λ_{ji} -classe.

Sinon (c'est-à-dire $t_0 \neq i$) on note k le plus petit entier tel que pour $a < k$, w_a et t_a sont différents à la fois de i et j et tel que $\{w_k, t_k\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$; donc:

- Soit $(w_k = i \text{ et } t_k \neq j)$ ou $(w_k \neq j \text{ et } t_k = i)$ et alors les éléments $D(w_0, t_0), D(w_1, t_1), \dots, D(w_k, t_k)$ appartiennent à la même

Λ_{ji} -classe.

- Soit $t_k = j$ et alors les éléments

$D(w_0, t_0), D(w_1, t_1), \dots, D(w_{k-1}, t_{k-1})$ appartiennent à la même Λ_{ji} -classe.

2. $|\delta| \geq 3$ et $|\text{pgcd}(\delta, 2h+1)| \geq 3$.

Posons $d = |\text{pgcd}(\delta, 2h+1)|$. On partitionne P_i en d parties à p éléments (où $p \cdot d = 2h+1$). On a:

$$D_0 = \{D(0, 1), D(\delta, 1+\delta), \dots, D((p-1)\delta, 1+(p-1)\delta)\}$$

$$D_1 = \{D(1, 1+\delta), \dots, D((p-1)\delta+1, 1+(p-1)\delta+1)\}$$

$$\dots$$

$$D_{d-1} = \{D(d-1, 1+d-1), \dots, D((p-1)\delta+d-1, 1+(p-1)\delta+d-1)\}$$

Toutes les fois que cela est possible on définit les mêmes suites qu'en 1. sur chaque D_j .

Si on considère que les éléments de P_i sont rangés sur un (ou plusieurs) disque(s) alors les deux suites ci-dessus définies le (ou les) parcours en sens inverse l'une de l'autre.

PROPOSITION 15 Si $|\delta| \leq 2$ ou si $|\text{pgcd}(\delta, 2h+1)| = 1$ alors $2 \leq \text{Card}(P_i / \Lambda_{ji}) \leq 4$.

PREUVE: (par construction)

On considère les deux suites $(D(u_n, v_n))_{n \geq 0}$ et $(D(w_n, t_n))_{n \geq 0}$ et les entiers k comme définis ci-dessus. On va distinguer les situations suivantes:

1. Supposons que $t_0 = i$.

On pose $A_1 = \{D(j, i)\}$. On vérifie facilement que A_1 est une Λ_{ji} -classe. $v_k \neq i$ car on a déjà $t_0 = i$. Pour construire les autres Λ_{ji} -classes de P_i qu'on notera A_2, A_3 et A_4 on distingue les sous-cas suivants:

- $v_k = i$.

Alors $v_k \neq j$ en effet $D(j, i)$ et $D(i, j)$ ne peuvent pas appartenir à la fois à P_i . On a:

$$A_2 = \{D(j + \delta, j + l + \delta), \dots, D(i - \delta, i + l - \delta)\}$$

$$A_3 = \{D(i, i + l), \dots, D(j - l, j)\}$$

$$A_4 = \{D(j - l + \delta, j + \delta), \dots, D(j - \delta, i - \delta)\}$$

On vérifie aisément que A_2 , A_3 et A_4 sont bien des $\Lambda_{j,l}$ -classes de P_i .

- $v_k = j$.

Alors $u_k \neq i, j$ pour les mêmes raisons que plus haut. On a:

$$A_2 = \{D(j + \delta, j + l + \delta), \dots, D(j - l, j)\}$$

$$A_3 = \{D(j - l + \delta, j + \delta), \dots, D(i - \delta, i + l - \delta)\}$$

$$A_4 = \{D(i, i + l), \dots, D(j - \delta, i - \delta)\}$$

Considérons le cas particulier où $\{u_0, v_0\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$. Remarquons de prime abord que $u_0 \neq j$ et $v_0 \neq i$ car $w_0 = j$ et $t_0 = i$.

- Si $u_0 = i$ (c'est-à-dire $i - j = l = \delta$) alors $A_1 = \{D(j, i)\}$ et $A_2 = P_i - A_1$.

- Si $v_0 = j$ alors $A_1 = \{D(j, i)\}$

$$A_2 = \{D(j - l, j)\}$$

$$A_3 = \{D(j - l + \delta, j + \delta), \dots, D(i - \delta, i + l - \delta)\}$$

$$A_4 = \{D(i, i + l), \dots, D(j - \delta, i - \delta)\}.$$

2. $w_k = i$ et $t_k \neq j$.

On pose $A_1 = \{D(i, i + l), D(i + \delta, i + l + \delta), \dots, D(j, j + l)\}$

- Si $v_k = j$ alors on a:

$$A_2 = \{D(j + \delta, j + l + \delta), \dots, D(j - l, j)\}$$

$$A_3 = \{D(j - l + \delta, j + \delta), \dots, D(i - l - \delta, i - \delta)\}$$

$$A_4 = \{D(i - l, i), \dots, D(i - \delta, i + l - \delta)\}.$$

- Si $v_0 = j$ alors on a:

$$A_2 = \{D(j - l, j)\}$$

$$A_3 = \{D(j - l + \delta, j + \delta), \dots, D(i - l - \delta, i - \delta)\}$$

$$A_4 = \{D(i - l, i), \dots, D(i - \delta, i + l - \delta)\}.$$

- Si $v_k = i$ alors on a:

$$A_2 = \{D(j + \delta, j + l + \delta), \dots, D(i - l - \delta, i - \delta)\}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \{D(i-l, i), \dots, D(j-l, j)\} \\
A_4 &= \{D(j-l+\delta, j+\delta), \dots, D(i-\delta, i+l-\delta)\}. \\
- \text{ Si } u_0 = i \text{ alors on a:} \\
A_2 &= \{D(j+\delta, j+l+\delta), \dots, D(j-l, j)\} \\
A_3 &= \{D(j-l+\delta, j+\delta), \dots, D(i-l-\delta, i-\delta)\} \\
A_4 &= \emptyset.
\end{aligned}$$

3. $t_k = i$.

Bien évidemment $w_k \neq j$ car on a déjà $w_0 = j$.

On pose: $A_1 = \{D(i-l, i), D(i+\delta-l, i+\delta), \dots, D(j, j+l)\}$

- Si $v_k = j$ (remarquer que $v_k \neq i$) on pose:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \{D(j+\delta, j+l+\delta), \dots, D(j-l, j)\} \\
A_3 &= \{D(j-l+\delta, j+\delta), \dots, D(i-\delta, i+l-\delta)\} \\
A_4 &= \{D(i, i+l), \dots, D(i-l-\delta, i-\delta)\}
\end{aligned}$$
- Si $v_0 = j$ ($\delta = -l$) alors

$$\begin{aligned}
A_2 &= \{D(j-l, j)\} \\
A_3 &= \{D(j-l+\delta, j+\delta), \dots, D(i-\delta, i+l-\delta)\} \\
A_4 &= \{D(i, i+l), \dots, D(i-l-\delta, i-\delta)\}.
\end{aligned}$$
- Si $u_k = i$ ($u_k \neq j$ car on a déjà $w_0 = j$) on a:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \{D(j+\delta, j+l+\delta), \dots, D(i-\delta, i+l-\delta)\} \\
A_3 &= \{D(i, i+l), \dots, D(j-l, j)\} \\
A_4 &= \{D(j-l+\delta, j+\delta), \dots, D(i-l-\delta, i-\delta)\}.
\end{aligned}$$
- Si $u_0 = i$ alors

$$\begin{aligned}
A_2 &= \{D(i, i+l), \dots, D(j-l, j)\} \\
A_3 &= \{D(j-l+\delta, j+\delta), \dots, D(i-l-\delta, i-\delta)\} \\
A_4 &= \emptyset
\end{aligned}$$

4. $t_k = j$ et $w_k \neq i$.

On a soit $A_1 = \{D(j-l+\delta, j+\delta), \dots, D(j, j+l)\}$

$A_2 = \{D(j+\delta, j+l+\delta), \dots, D(i-l-\delta, i-\delta)\}$

$A_3 = \{D(i-l, i), \dots, D(i-\delta, i+l-\delta)\}$

$A_4 = \{D(i, i+l), \dots, D(j-l, j)\}.$

Soit $A_1 = \{D(j-l+\delta, j+\delta), \dots, D(j, j+l)\}$

$A_2 = \{D(j+\delta, j+l+\delta), \dots, D(i-\delta, i+l-\delta)\}$

$$A_3 = \{D(i, i+l), \dots, D(i-l-\delta, i-\delta)\}$$

$$A_4 = \{D(i-l, i), \dots, D(j-l, j)\}.$$

5. $w_k = i$ et $t_k = j$.

$$\text{On a } A_1 = \{D(i+\delta, j+\delta), \dots, D(j, j+l)\}$$

$$A_2 = \{D(j+\delta, j+l+\delta), \dots, D(i-l-\delta, i-\delta)\}$$

$$A_3 = \{D(i-l, i), \dots, D(i-\delta, j-\delta)\}$$

$$A_4 = \{D(i, j)\}. \diamond$$

PROPOSITION 16 Si $|\delta| \geq 3$ et $d = |\text{pgcd}(\delta, 2h+1)| \geq 3$ alors
 $d \leq \text{Card}(P_l / \wedge_{ji}) \leq d+3$.

PREUVE: Posons $\Delta = \{D(i, i+l), D(j, j+l), D(i-l, i), D(j-l, j)\}$.
 $D_0, D_1, \dots, D_{d-1}$ définis comme plus haut.

- S'il existe a dans $\{0, 1, \dots, d-1\}$ tel que Δ est inclus dans D_a alors pour tout $b \neq a$ on a que D_b est une $\wedge_{ji}$ -classe et D_a en contient au plus 4 (voir la proposition 15).
- S'il existe a dans $\{0, 1, \dots, d-1\}$ tel que trois éléments de Δ soient dans D_a alors pour $b \neq a$ on a que D_b est une $\wedge_{ji}$ -classe et D_a en contient au plus 3.
- S'il existe deux éléments a et b dans $\{0, 1, \dots, d-1\}$ tel que D_a et D_b contiennent chacun deux éléments de Δ alors pour tout $c \neq a, b$ on a que D_c est une $\wedge_{ji}$ -classe et D_a et D_b contiennent chacun au plus deux classes.
- S'il existe un unique a dans $\{0, 1, \dots, d-1\}$ tel que deux éléments de Δ soient dans D_a alors pour tout $b \neq a$ on a que D_b est une classe et D_a contient au plus deux classes.
- Si pour tout a de $\{0, 1, \dots, d-1\}$ D_a contient au plus un élément de Δ alors chaque D_a est une classe.

Au total $d \leq \text{Card}(P_l / \wedge_{ji}) \leq d+3$. $\diamond$

PROPOSITION 17 Soient u et v de E tels que $v-u=l$.

Pour que $\{D(u, v)\}$ soit une $\wedge_{ji}$ -classe il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée:

1. $u-\delta=j$ et ($v=j$ ou $u+\delta=i$ ou $v+\delta=i$)

$$2. v - \delta = j \text{ et } (u = j \text{ ou } u + \delta = i \text{ ou } v + \delta = i)$$

$$3. u = i \text{ et } (v = j \text{ ou } v + \delta = i)$$

$$4. v = i \text{ et } (u = j \text{ ou } u + \delta = i)$$

PREUVE: Il est facile de voir que si l'une des conditions est vérifiée alors $\{D(u, v)\}$ est une Λ_{ji} -classe.

Réciproquement si $D(u, v)$ est une classe alors $D(u, v)$ n'est pas Λ_{ji} -équivalent à $D(u - \delta, v - \delta)$ et à $D(u + \delta, v + \delta)$. Donc on a $(v - \delta = j \text{ ou } u - \delta = j \text{ ou } u = i \text{ ou } v = i)$ et $(u = j \text{ ou } v = j \text{ ou } u + \delta = i \text{ ou } v + \delta = i)$. $\diamond$

PROPOSITION 18 Soient u, v, w et t de E tels que $v - u = t - w = l$. Pour que $\{D(u, v)\}$ et $\{D(w, t)\}$ soient des Λ_{ji} -classes il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée:

$$1. u - \delta = j \text{ et } v = j \text{ et } w = i \text{ et } t + \delta = i$$

$$2. v - \delta = j \text{ et } v + \delta = i \text{ et } w + \delta = i \text{ et } w - \delta = j$$

$$3. u = i \text{ et } v + \delta = i \text{ et } w - \delta = j \text{ et } t = j$$

$$4. u + \delta = i \text{ et } v = i \text{ et } w = j \text{ et } t - \delta = j$$

$$5. u - \delta = j \text{ et } u + \delta = i \text{ et } t - \delta = j \text{ et } t + \delta = i$$

$$6. v - \delta = j \text{ et } v + \delta = i \text{ et } w + \delta = i \text{ et } w - \delta = j.$$

PREUVE: Il est facile de voir que si l'une des conditions est vérifiée alors $\{D(u, v)\}$ et $\{D(w, t)\}$ sont des Λ_{ji} -classes.

Réciproquement Supposons que $D(u, v)$ soit déjà une classe, d'où u et v vérifient l'une des conditions de la proposition précédente. On se place donc dans chacun de ces cas et on cherche les conditions pour que $\{D(w, t)\}$ soit une deuxième classe.

- Cas où $u - \delta = j$ et $v = j$.

Si $\{D(w, t)\}$ est une autre classe alors

Soit $w + \delta = i$ et $t = i$ ce qui entraîne que $v - u = -\delta$ et $t - w = \delta$ ce qui est absurde.

Soit $w = i$ et $t + \delta = i$ et alors $t = -\delta$. Ainsi on a la condition 1.

- Cas où $u - \delta = j$ et $u + \delta = i$.
Si $\{D(w, t)\}$ est une autre classe alors $t - \delta = j$ et $t + \delta = i$ et $t = u$ ce qui donne la condition 5.
- Cas où $u - \delta = j$ et $v + \delta = i$.
Si $\{D(w, t)\}$ est une autre classe alors
soit $w = i$ et $t = j$ ce qui entraîne que $i - j = w - u + \delta = v + \delta - t$,
d'où $w - u = v - t$ or par hypothèse $w - u = t - v$ donc $t = v$ et $w = u$.
Soit $w + \delta = i$ et $t - \delta = j$ alors ou bien ($w = u$ et $t = v$) ou bien
($w = v$ et $t = u$).
Donc si $u - \delta = j$ et $v + \delta = i$ alors $\{D(u, v)\}$ est la seule classe à un élément.
- Cas où $v - \delta = j$ et $u = j$.
Si $\{D(w, t)\}$ est une autre classe alors
Soit $w = i$ et $t + \delta = i$ ce qui entraîne que $i - j = w - u = t + \delta - v + \delta$
or on sait que $w - u = t - v$ donc $2\delta = 0 \pmod{2h+1}$. Ce qui est absurde.
Soit $w + \delta = i$ et $t = i$ et $t = \delta$. Ce qui donne $v - u = w - t$ donc $2t = 0$
ce qui est absurde.
- Cas où $v - \delta = j$ et $u + \delta = i$.
Si $\{D(w, t)\}$ est une autre classe alors
Soit $w - \delta = j$ et $t + \delta = i$ ce qui donne $w - \delta - u - \delta = v - \delta - t - \delta$
d'où $w - u = v - t = t - v$ donc $t = v$ et $w = u$.
Soit $w = j$ et $t = i$ ce qui donne $w - u - \delta = v - \delta - t$
d'où $w - u = v - t = t - v$ donc $t = v$ et $w = u$.
Si donc $v - \delta = j$ et $u + \delta = i$ alors $\{D(u, v)\}$ est la seule classe à un élément.
- $v - \delta = j$ et $v + \delta = i$.
Si $\{D(w, t)\}$ est une autre classe alors $w + \delta = i$ et $w - \delta = j$ avec
 $w = v$. Ce qui donne la condition 6.
- $u = i$ et $v = j$.
Si $\{D(w, t)\}$ est une autre classe alors
Soit $w = j$ et $t = i$ ce qui est impossible car P_i ne peut pas contenir à la fois $D(i, j)$ et $D(j, i)$.

Soit $w - \delta = j$ et $t + \delta = i$ ce qui donne $u - w + \delta = t + \delta - v$ d'où $u - w = t - v$ or $u - w = v - t$ donc $t = v$ et $w = u$.

Au total si $u = i$ et $v = j$ alors $\{D(u, v)\}$ est l'unique classe à un élément.

- Cas où $v = i$ et $v + \delta = i$.

Si $\{D(w, t)\}$ est une autre classe alors

Soit $w = j$ et $t - \delta = j$ ce qui donne $u - w = v - t + 2\delta$ or $u - w = v - t$ donc $\delta = 0 \pmod{2h+1}$ ce qui est absurde.

Soit $w - \delta = j$ et $t = j$ et alors $l = -\delta$. Et on a la condition 3.

- Cas où $u = j$ et $v = i$.

Si $\{D(w, t)\}$ est une autre classe alors

Soit $w = i$ et $t = j$ et donc $w - u = v - t$.

Soit $w + \delta = i$ et $t - \delta = j$ et alors $w - u = v - t$.

Au total si $u = j$ et $v = i$ alors $\{D(u, v)\}$ est l'unique classe à un élément.

- Cas où $v = i$ et $u + \delta = i$.

Si $\{D(w, t)\}$ est une autre classe alors

Soit $w - \delta = j$ et $t = j$ ce qui donne $v - u = \delta$ et $t - w = -\delta$ ce qui est absurde.

Soit $w = j$ et $t - \delta = j$ et alors $l = \delta$.

Et ainsi on a la condition 4. $\diamond$

REMARQUE: Si on suppose que $\{D(u, v)\}$ et $\{D(w, t)\}$ sont déjà deux classes de P_1 c'est-à-dire que u, v, w et t vérifient l'une au moins des conditions de la proposition précédente alors en se plaçant dans chacun de ces cas, on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait une troisième classe $\{D(x, y)\}$.



Chapitre 4

PARTIES CONSÉCUTIVES ET FORCAGE D'ISOMORPHISMES LOCAUX.

On étudie ici la propriété de non-reconstructibilité des relations. On rappelle les notions de parties R -consécutives et de forçage d'isomorphismes locaux dus à G. Lopez [Lo]. On établit quelques propriétés liées aux notions ci-dessus mentionnées. On introduit celles d'emboîtement et de point critique. Les relations ternaires non-reconstructibles obtenues par M. Pouzet [79b] sont telles que tous les points sont critiques. On montre que cette propriété ne suffit pas pour obtenir des relations ternaires non-reconstructibles.

4.1 INTRODUCTION.

La motivation de ce chapitre trouve son origine dans l'analyse de l'une des argumentations utilisées pour montrer que deux relations ne sont pas isomorphes. Plus précisément soient R et S deux relations de base E et F qui ne sont pas isomorphes. Pour l'établir on se donne une partie A particulière stricte de E , il s'agit alors pour tout isomorphisme local f de domaine A de R vers S de montrer que f ne peut pas être étendu en un isomorphisme de R sur S . Grâce à la structure des relations, on construit successivement une suite d'isomorphismes locaux qui se forcent l'un l'autre. Et on aboutit à une contradiction.

L'efficacité de cette démarche repose essentiellement sur le choix de A . Il doit pouvoir limiter le nombre d'isomorphismes locaux f à considérer. Ainsi on choisira de préférence une partie A telle que la restriction R/A soit unique de son type dans R ou bien telle que le lien entre les restrictions R/A et $R/E - A$ soit particulier. Ce qui conduit à introduire les notions d'emboîtement (qui est liée à celle de parties consécutives) et de point critique.

Ce chapitre est consacré au développement de ces notions. On établit également des propriétés élémentaires. Les notions de parties R -consécutives et de forçage d'isomorphismes locaux sont dues à G. LOPEZ [Lo].

4.2 GRAPHE DE PARTIES CONSÉCUTIVES.

On considère une relation m -aire R de base E .

• PARTIES R -CONSÉCUTIVES.

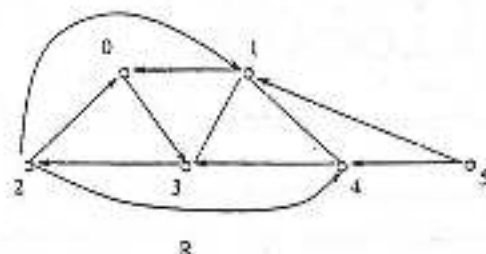
Soient A et B deux parties distinctes de E .

B est R -consécutif à A si pour tout automorphisme local f de R de domaine $A \cup B$ tel que $f/A = Id$ on a $f(B) = B$. Et on note $A \rightarrow B$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on dira simplement que B est consécutif à A .

Cette notion est suggérée par la consécutive binaire usuelle.

EXEMPLES:

1. Considérons la relation R suivante on a:
 $\{0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 3, 4\}$



$$\{2, 3, 4\} \rightarrow \{3, 4, 5\} \text{ et } \{2, 3, 4\} \rightarrow \{2, 4, 5\}.$$

2. Soient $A = \{2, 3, 7\}$ et $B = \{5, 6, 21\}$ deux parties de $\mathbb{Z}$.
 Dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$, B n'est pas consécutive à A . Par contre dans l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ B est consécutive à A .

• GRAPHE DE PARTIES R -CONSÉCUTIVES.

Soient X un ensemble de parties strictes non vides de E et

$$U = \{(A, B) / A, B \in X \text{ et } A \rightarrow B\}.$$

Le graphe (X, U) d'ensemble de sommets X et d'ensemble d'arêtes U est appelé graphe de parties R -consécutives.

Un chemin de parties R -consécutives est une suite $A_1, \dots, A_n$ de parties telle que: $\forall i < n$ on a $A_i \rightarrow A_{i+1}$.

On dira qu'un tel chemin est complet si $\bigcup A_i = E$.

EXEMPLES:

1. Dans l'exemple 1. précédent on a le chemin de forçage complet suivant:
 $\{1, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1, 3\} \rightarrow \{0, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 4\} \rightarrow \{3, 4, 5\}$
2. Soit R une chaînette de Pouzet. Si on pose pour tout i $A_i = \{a_i, b_i\}$

alors: $A_0 \longleftrightarrow A_1 \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow A_n \longleftrightarrow A_0$.

3. Pour le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ on a:

$$\{1, 3, 4\} \rightarrow \{2, 6, 8\} \rightarrow \{4, 12, 16\} \rightarrow \{8, 24, 32\} \rightarrow \dots$$

4.3 GRAPHE DE FORCAGE D'ISOMORPHISMES LOCAUX.

On considère deux relations m-aires R et S de base respective E et F .

• FORCAGE D'ISOMORPHISMES LOCAUX.

Soient A et B deux parties distinctes de E . On dira qu'un isomorphisme local f de domaine A force un isomorphisme local g de domaine B lorsque pour tout isomorphisme local h de domaine $A \cup B$ on a:

1. Si $h/A = f$ alors $h/B = g$.
2. $f \cup g$ est un isomorphisme local de domaine $A \cup B$.

Et on note $(A, f) \rightarrow (B, g)$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on écrit simplement $f \rightarrow g$. Si $(A, f) \rightarrow (B, g)$ alors $g(B)$ est S -consécutive à $f(A)$.

Plus généralement, on a, en transitivant que f force g s'il existe une suite $f_1, \dots, f_n$ d'isomorphismes locaux de domaine $A_1, \dots, A_n$ telle que:

- $f_1 = f$ et $f_n = g$
- $\forall i < n \quad (A_i, f_i) \rightarrow (A_{i+1}, f_{i+1})$.

On appellera une telle suite, un *chemin de forçage* d'isomorphismes locaux. Lorsque $\bigcup A_i = E$ on dit que le chemin de forçage est complet.

• GRAPHE DE FORCAGE D'ISOMORPHISMES LOCAUX.

Soient $\mathcal{F}$ une famille de parties de E ,

$$X = \{(A, f) / f \text{ isomorphisme local de } R \text{ vers } S \text{ de domaine } A, A \in \mathcal{F}\}$$

1. La double flèche indique que la consécutivité se fait dans les deux sens.

et

$$U = \{((A, f), (B, g)) / (A, f), (B, g) \in X \text{ et } f \text{ force } g\}.$$

Le graphe noté $G = (X, U)$ est appelé graphe de forçage d'isomorphismes locaux de R vers S .

Si $R = S$, on parlera de graphe de forçage d'automorphismes locaux.

EXEMPLES:

1. Soient R et S les deux chaînettes de Pouzet. Notons G le graphe de forçage des isomorphismes locaux de R vers S induit par $A_0, A_1, \dots, A_n$: G admet comme composante connexe:²

$$(A_0, Id) \longleftrightarrow (A_1, Id) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, Id) \longleftrightarrow (A_0, p)$$

$$(A_0, p) \longleftrightarrow (A_1, p) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, p) \longleftrightarrow (A_0, Id)$$

Où (A_i, p) désigne l'isomorphisme local p de domaine A_i qui échange a_i et b_i et cela pour tout i .

Cette composante connexe fait apparaître une incompatibilité des isomorphismes locaux par exemple (A_0, Id) force (A_0, p) .

Etant donnés i et j deux entiers positifs, on note (A_j, t_i) l'isomorphisme local t_i de domaine A_j et de co-domaine A_{i+j} défini par: $t_i(a_j) = a_{i+j}$ et $t_i(b_j) = b_{i+j}$. On pose également: $p_i = pot_i$

(Les sommes en indice sont considérées modulo $n+1$.)

Le cycle suivant est une autre composante connexe de G :

$$(A_0, t_1) \longleftrightarrow (A_1, t_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_{n-1}, t_1) \longleftrightarrow (A_n, p_1) \longleftrightarrow (A_0, p_1)$$

$$(A_0, p_1) \longleftrightarrow (A_1, p_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_{n-1}, p_1) \longleftrightarrow (A_n, t_1) \longleftrightarrow (A_0, t_1)$$

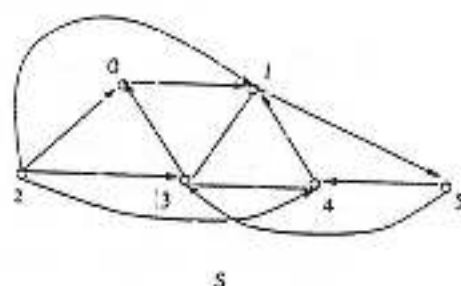
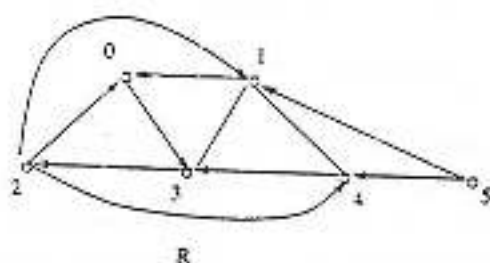
En fait toutes les composantes connexes de G sont de ce type-là.

2. On considère les relations R et S définies par les figures qui suivent:

2. La double flèche indique que le forçage se fait dans les deux sens.

$$\begin{array}{l}
 R: \begin{pmatrix} A_1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_3 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_5 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_6 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \quad \downarrow f_1 \quad \downarrow f_2 \quad \downarrow f_3 \quad \downarrow f_4 \quad \downarrow f_5 \\
 S: \begin{pmatrix} B_1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B_2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B_3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B_4 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} B_5 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow
 \end{array}$$

A_{i+1} est consécutive à A_i et B_{i+1} est consécutive à B_i , pour tout i .



On a le chemin de forçage suivant:

$$f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3 \rightarrow f_4 \rightarrow f_5$$

La restriction R/A_1 est seule de son type dans R , f_5 est forcé par f_1 , A_6 est consécutive à A_5 mais f_5 ne peut pas se prolonger à A_6 en un isomorphisme local de domaine $A_5 \cup A_6$. Donc R et S ne sont pas isomorphes.

Le chemin de forçage ci-dessus est complet mais $\cup f_i$ n'est pas un isomorphe de R sur S , en effet l'arête vide $(3, 5)$ se transforme en l'arête orientée $(1, 5)$.

4.4 EMBOÎTEMENT ENTRE DEUX RESTRICTIONS.

• DÉFINITIONS.

Soit R une relation m -aire de base E . Soient A et B deux parties distinctes de E . Un m -uplet liant A et B est un m -uplet de $R/A \cup B$ qui n'est ni dans R/A ni dans R/B .

On appellera *emboîtement* entre les restrictions R/A et R/B l'ensemble des m -uplets liant A et B dans R . On le notera $(A, B)_R$ et simplement (A, B) s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Soient A, B et C trois parties distinctes de E .

On dira que R/B et R/C s'emboîtent à R/A de la même façon s'il existe un isomorphisme f de R/B sur R/C pouvant s'étendre par l'identité sur A en un isomorphisme de $R/A \cup B$ sur $R/A \cup C$ et on notera:

$$(A, B)_R = (A, f(B) = C)_R.$$

On dira que l'emboîtement de R/B à R/A est *unique* si aucune autre restriction de R ne s'emboîte à R/A de la même façon que R/B à R/A .

EXEMPLE:

Dans l'exemple 2. de 4.3 l'emboîtement (A_1, A_2) est vide et l'emboîtement (A_3, A_6) est l'ensemble $\{(1, 0), (3, 1), (1, 3), (2, 4), (2, 1), (4, 3)\}$.

Remarque:

Dire que B est R -consécutif à A revient à dire que R/B s'emboîte de manière unique à R/A .

• ISOMORPHISME ENTRE EMBOÎTEMENTS.

Soit R une relation de base E et soient A, B, C et D quatre parties de E .

On dit que les emboîtements $(A, B)_R$ et $(C, D)_R$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de $R/A \cup B$ sur $R/C \cup D$ qui envoie A sur C ou bien A sur D .

4.5 QUELQUES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES.

PROPOSITION 19 Soit f un isomorphisme de R sur S .
Si B est R -consécutif à A alors $f(B)$ est S -consécutif à $f(A)$.

PREUVE: Supposons que $f(B)$ ne soit pas S -consécutif à $f(A)$. Il existerait un automorphisme local h de domaine $f(A) \cup f(B)$ tel que $h/f(A) = Id/f(A)$ et $h(f(B)) \neq f(B)$.
Ce qui donnerait : $f^{-1} \circ h \circ f(B) \neq B$ et $f^{-1} \circ h \circ f/A = Id/A$ et on aurait que B n'est pas R -consécutif à A . $\diamond$

PROPOSITION 20 Si B_1 est R -consécutif à A et B_2 est R -consécutif à A alors $B_1 \cup B_2$ est R -consécutif à A .

PREUVE: Si on suppose que $B_1 \cup B_2$ n'est pas R -consécutif à A alors il existe un automorphisme f de domaine $A \cup B_1 \cup B_2$ tel que

$$f/A = Id \text{ et } f(B_1 \cup B_2) \neq B_1 \cup B_2.$$

Ce qui donne $f(B_1) \neq B_1$ ou bien $f(B_2) \neq B_2$.

D'où $f/A = Id$ et $f(B_1) \neq B_1$ ou bien $f/A = Id$ et $f(B_2) \neq B_2$.

Donc B_1 n'est pas R -consécutif à A ou bien B_2 n'est pas R -consécutif à A . Ce qui est absurde. $\diamond$

PROPOSITION 21 1. Si B est R -consécutif à A tel que $A \cap B \neq \emptyset$ alors $B - A$ est R -consécutif à A .

2. Si B est R -consécutif à A alors pour toute partie stricte A' de A on a que $B \cup A'$ est R -consécutif à A .

PREUVE:

1. Supposons que $B - A$ n'est pas R -consécutif à A . Il existe alors un automorphisme local f de domaine $A \cup B$ tel que

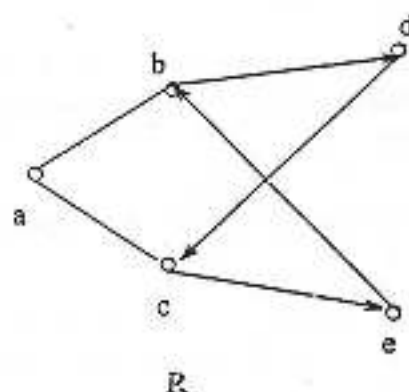
$$f/A = Id \text{ et } f(B - A) \neq B - A.$$

Ainsi f est un automorphisme local de domaine $A \cup B$ tel que $f/A = Id$ et $f(B) \neq B$. Donc B n'est pas R -consécutif à A .

2. Soit A' une partie propre de A et supposons que $A' \cup B$ n'est pas R -consécutive à A . Il existe alors un automorphisme local g de domaine $A \cup B$ tel que $g/A = Id$ et $g(A' \cup B) \neq A' \cup B$. Ainsi g est un automorphisme local de domaine $A \cup B$ tel que $g/A = Id$ et $g(B) \neq B$. Donc B n'est pas R -consécutive à A . $\diamond$

REMARQUES:

1. Grâce à la proposition précédente, on peut considérer lorsque cela se justifie, des parties consécutives disjointes.
2. Soient R une relation m -aire de base E et A, B, C trois parties non vides de E .
 - (a) Si B est R -consécutive à A on n'a pas forcément que B est R -consécutive à $A - B$. En effet il suffit de considérer la relation binaire ci-dessous et de prendre $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{b, c, d\}$.
 - (b) Si C est R -consécutive à B et si B est R -consécutive à A on n'a pas forcément que $B \cup C$ est R -consécutive à A . Pour le voir, il suffit de considérer la relation binaire ci-dessous et de prendre $A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$ et $C = \{d\}$.



4.6 POINTS CRITIQUES.

Cette étude est motivée par le fait que les chainettes de Pouzet sont telles que lorsqu'on enlève un élément de la base on détruit tout un emboîtement entre deux parties consécutives.

Soient R une relation m -aire de base E et $H = (X, U)$ un graphe de parties R -consécutives avec $\bigcup X = E$.

Pour tout a de E , on note: $X_a = \{A - \{a\} / A \in X\}$.

On dit qu'un élément a de E est critique si l'application qui à tout sommet A de H associe le sommet $A - \{a\}$ de $H[X_a]$ n'est pas un isomorphisme de H sur $H[X_a]$. H sera dit R -critique si tout élément de E est critique.

On montre que la condition qui consiste à supposer que H soit R -critique n'est pas suffisante pour établir la non-reconstructibilité de R .

DÉFINITIONS:

(A.) Soient R une relation ternaire de base E et $X = \{a, b, c, d\}$ une partie de E .

- On dit que X a la propriété $\pi(2)$ s'il existe deux parties X_1 et X_2 de X à 3 éléments telles que R/X soit exactement égale à l'ensemble des triplets dont le support est X_1 ou X_2 .

- On dit que X a la propriété $\pi(4)$ si R/X est exactement égale à l'ensemble de tous les triplets dont les composantes qui sont éléments de X , sont deux à deux distinctes.

(B.) On considère la classe C des relations ternaires R de base E vérifiant:

1. Il existe une suite $A_0, A_1, \dots, A_{2+3n}$ de parties à 4 éléments deux à deux disjointes qui recouvrent E . Pour tout i on pose $A_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$.
2. Les parties A_{2+3j} (avec $j = 0, 1, \dots, n$) ont la propriété $\pi(2)$ et toutes les autres ont la propriété $\pi(4)$.

3. Les emboîtements $(A_0, A_1)_R$, $(A_1, A_2)_R$ et $(A_2, A_3)_R$ sont définis comme suit:

- Ils sont formés chacun d'exactly 4 triplets.
- Il existe x et y dans A_1 tels que:

$$(A_0, A_1)_R = \{(x, y, a_0), (x, y, b_0), (x, y, c_0), (x, y, d_0)\}$$

$$(A_1, A_2)_R = \{(x, y, a_2), (x, y, b_2), (x, y, c_2), (x, y, d_2)\}$$

La position de x (resp. y) dans ces triplets importe peu; il suffit de prendre le même rang pour les 8 triplets.

- Soient X_1 et X_2 les deux parties qui font que A_2 a la propriété $\pi(2)$. Si on pose $\{u, v\} = X_1 \cap X_2$ alors

$$(A_2, A_3)_R = \{(u, v, a_3), (u, v, b_3), (u, v, c_3), (u, v, d_3)\}$$

La position de u (resp. v) dans ces triplets importe peu; il suffit de prendre le même rang pour les 4 triplets.

4. Les emboîtements $(A_i, A_{i+1})_R$, $(A_{i+1}, A_{i+2})_R$ et $(A_{i+2}, A_{i+3})_R$ sont définis de la même manière comme plus haut avec $i = 0, 3, 6, \dots$ (les indices étant pris modulo $3n + 3$).
5. Si $|k - j| \neq 1$ alors l'emboîtement $(A_j, A_k)_R$ est vide.

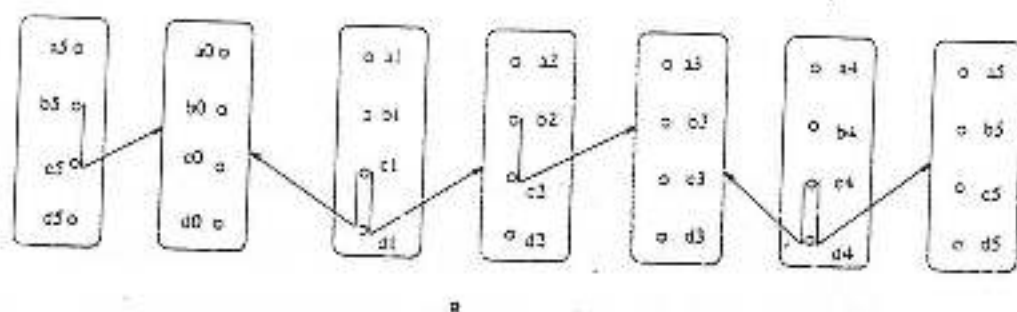
Exemple:

On prend $A_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ avec $i = 0, 1, \dots, 5$.

A_2 (resp. A_5) a la propriété $\pi(2)$ avec $\{a_2, b_2, c_2\}$ et $\{b_2, c_2, d_2\}$ (resp. $\{a_5, b_5, c_5\}$ et $\{b_5, c_5, d_5\}$).

$$\begin{aligned} (A_0, A_1)_R &= \{(c_1, d_1, a_0), (c_1, d_1, b_0), (c_1, d_1, c_0), (c_1, d_1, d_0)\} \\ (A_1, A_2)_R &= \{(c_1, d_1, a_2), (c_1, d_1, b_2), (c_1, d_1, c_2), (c_1, d_1, d_2)\} \\ (A_2, A_3)_R &= \{(b_2, c_2, a_3), (b_2, c_2, b_3), (b_2, c_2, c_3), (b_2, c_2, d_3)\} \\ (A_3, A_4)_R &= \{(c_4, d_4, a_3), (c_4, d_4, b_3), (c_4, d_4, c_3), (c_4, d_4, d_3)\} \\ (A_4, A_5)_R &= \{(c_4, d_4, a_5), (c_4, d_4, b_5), (c_4, d_4, c_5), (c_4, d_4, d_5)\} \\ (A_5, A_0)_R &= \{(b_5, c_5, a_0), (b_5, c_5, b_0), (b_5, c_5, c_0), (b_5, c_5, d_0)\}. \end{aligned}$$

Voir la figure suivante:



LEMME 11 Les seules parties de E à 4 éléments vérifiant soit $\pi(2)$ soit $\pi(4)$ sont les A_i .

PREUVE: Soit Y une partie de E à trois éléments. Si tous les triplets de base Y sont dans R alors Y est inclus dans l'un des A_i . $\diamond$

PROPOSITION 22 Soit R une relation de la classe C , alors le graphe H de parties R -consécutives induit par $A_0, A_1, \dots, A_{2+3n}$ est un cycle non orienté.

PREUVE: Grâce à la structure de R , il suffira de montrer que $A_0 \longleftrightarrow A_1 \longleftrightarrow A_2 \longleftrightarrow A_3$.

- $A_0 \rightarrow A_1$ car A_1 a la propriété $\pi(4)$ tandis que A_{3n+2} a la propriété $\pi(2)$.
- $A_1 \rightarrow A_0$ et $A_1 \rightarrow A_2$ car A_2 a la propriété $\pi(2)$ et A_0 a la propriété $\pi(4)$.
- $A_2 \rightarrow A_1$ et $A_2 \rightarrow A_3$ car tout triplet élément de $(A_2, A_3)_R$ a deux composantes qui sont dans A_2 ce qui n'est pas le cas des triplets éléments de $(A_1, A_2)_R$.
- $A_3 \rightarrow A_2$ car A_2 a la propriété $\pi(2)$ tandis que A_4 a la propriété $\pi(4)$. $\diamond$

PROPOSITION 23 Le graphe H est R -critique.

PREUVE: Grâce à la structure de R , il suffira de montrer que tout élément x de $A_0 \cup A_1 \cup A_2$ est critique.

1. *Cas où $x \in A_0$.*

Soit f un isomorphisme local de $R/A_0 - \{x\}$ sur R/X où X est l'une des deux parties à trois éléments qui font que A_2 a la propriété $\pi(2)$.

On a alors que la bijection ϕ de domaine $(A_0 - \{x\}) \cup A_1$ qui fixe chaque élément de A_1 et qui est telle que $\phi/A_0 - \{x\} = f$ est un isomorphisme local. Donc x est critique.

2. *Cas où $x \in A_1$.*

• Si x est composante de tout triplet liant A_0 et A_1 (ou bien A_1 et A_2) alors x est critique.

• Si x n'est composante ni d'un triplet liant A_0 et A_1 ni d'un triplet liant A_1 et A_2 alors x est critique. Pour le voir, il suffit de considérer un isomorphisme local ϕ de domaine $A_0 \cup (A_1 - \{x\})$ qui fixe chaque élément de A_0 et qui envoie $A_1 - \{x\}$ sur l'une des deux parties qui font que A_{3n+2} a la propriété $\pi(2)$.

3. *Cas où $x \in A_2$.*

• Si x est composante de tout triplet liant A_2 et A_3 alors x est critique.
• Sinon x est encore critique. Pour le voir on montre comme précédemment que $A_2 - \{x\}$ n'est pas consécutive à A_3 . $\diamond$

LEMME 12 (GI92) Soient R et R' deux relations ternaires de même base E , D et D' des intervalles non triviaux de R et R' tels qu'il existe un isomorphisme f_1 de R/D sur R'/D' et pour un x de $D \cap D'$, un isomorphisme f_x de $R/E - \{x\}$ sur $R'/E - \{x\}$ tel que $f_x(D - \{x\}) = D' - \{x\}$ alors R et R' sont isomorphes.

PROPOSITION 24 Toute relation de la classe C est $\{-1\}$ -reconstructible.

PREUVE: Soient R une relation de C de base E et R' une relation qui est $\{-1\}$ -hypomorphe à R . La restriction R/A_0 est l'unique restriction contenant a_0 et qui a la propriété $\pi(4)$. D'après le lemme de KELLY, il existe une unique partie A'_0 de E contenant a_0 telle que la restriction R'/A'_0 ait la propriété $\pi(4)$. Le lemme de KELLY montre également qu'il existe une partie unique Y' (resp. Z') contenant a_0 telle que: R'/Y' (resp. R'/Z') est de même

type que $R/A_{3n+2} \cup A_0 \cup A_1$ (resp. $R/A_{3n+2} \cup A_0$).

Remarque (1): Dans R , deux parties ayant chacune l'une des deux propriétés $\pi(2)$ ou $\pi(4)$ sont disjointes ou confondues. Il en est de même pour R' par (-1) -hypomorphisme.

$\mapsto$ Posons $Y' = B_{3n+2} \cup B_0 \cup B_1$ avec R'/B_1 et R/A_1 isomorphes et montrons que $a_0 \in B_0$ et que $B_0 = A'_0$.

On a $a_0 \in Y'$. Si $a_0 \notin B_0$ alors on a deux cas:

• $a_0 \in B_{3n+2}$ qui a la propriété $\pi(2)$ or $a_0 \in A'_0$ qui a la propriété $\pi(4)$. Ainsi la remarque (1) est contredite.

• $a_0 \in B_1$ alors dans R' , l'élément a_0 n'appartient à aucune partie isomorphe à $R/A_{3n+2} \cup A_0$; ce qui contredit le lemme de KELLY. Donc $a_0 \in B_0$.

On a $a_0 \in B_0 \cap A'_0$. Les parties B_0 et A'_0 ayant la propriété $\pi(4)$, on a: $A'_0 = B_0$ d'après la remarque (1).

$\mapsto$ Montrons maintenant que A'_0 est un intervalle dans R .

Remarque (2): Soit X une partie qui a la propriété $\pi(4)$ dans R alors le support Y de l'ensemble des triplets dont une composante au moins appartient à X est de cardinal au plus égal à 12. Les relations R et R' étant (-1) -hypomorphes, ceci reste vrai dans R' .

Il s'ensuit que: Si X est un intervalle dans R/Y (resp. R'/Y') alors X est un intervalle dans R (resp. R').

La partie A_0 (resp. A'_0) a la propriété $\pi(4)$. Donc A_0 (resp. A'_0) est un intervalle dans R (resp. R').

$\mapsto$ Posons $A = A_{3n+2} \cup A_0 \cup A_1$ et $B = B_{3n+2} \cup A'_0 \cup B_1$ et montrons que l' (-1) -hypomorphisme f_{a_0} envoie $A_0 - \{a_0\}$ sur $A'_0 - \{a_0\}$.

On dira que la partie X a la propriété *Max* si aucune extension de R/X dans $R/E - \{a_0\}$, n'est isomorphe à R/A . Dans $R/E - \{a_0\}$, la restriction $R/A - \{a_0\}$ est la seule de son type à posséder la propriété *Max*. De même pour $R'/B - \{a_0\}$ dans $R'/E - \{a_0\}$.

Donc f_{a_0} envoie $A - \{a_0\}$ sur $B - \{a_0\}$ et $A_0 - \{a_0\}$ sur $A'_0 - \{a_0\}$.

Par suite, d'après le lemme précédent on a: R et R' sont isomorphes. $\diamond$

Chapitre 5

UNE CLASSE DE RELATIONS DÉFINIE À PARTIR DES CHAÎNETTES DE POUZET.

L'analyse des chaînettes de Pouzet permet de dégager deux groupes de propriétés: l'un lié aux emboîlements et l'autre aux forçages entre isomorphismes locaux. À partir des chaînettes, on définit une classe de relations ternaires en ajoutant à chaque partie consécutive un élément. Elle est telle que chaque relation vérifie les deux groupes de propriétés.

On montre que cette classe est (-1) -reconstructible.

5.1 POSITION DU PROBLÈME.

5.1.1 RECAPITULATIF DES PROPRIÉTÉS DES CHAÎNETTES DE POUZET.

PROPRIÉTÉS:

Si f et g sont deux permutations de support respectif A et B telles que: $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$ et si x, y et z sont trois éléments de $A \cup B$ alors la réunion $f \cup g$ est une permutation de support $A \cup B$ et l'orbite du triplet (x, y, z) suivant $f \cup g$ est bien définie.

Soient R et S les deux chaînettes de Pouzet de base E .
Si on pose pour tout $i \leq n$ $A_i = \{a_i, b_i\}$ et p_i la permutation de A_i qui échange a_i et b_i alors l'emboîtement (A_i, A_{i+1}) est l'orbite d'un de ses éléments suivant $p_i \cup p_{i+1}$ (les indices étant pris modulo $n + 1$).

Les chaînettes R et S vérifient les propriétés suivantes:

1. Il existe une suite $A_0, A_1, \dots, A_n$ de paires deux à deux disjointes qui recouvrent E telle que le graphe de parties consécutives induit par $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ est le cycle non orienté $(A_0, A_1, \dots, A_n)$.
2. Si $R(x, y, z) = +$ alors $x \neq y \neq z \neq x$ et le triplet (x, y, z) appartient à un emboîtement entre deux parties consécutives.
3. Étant donnés deux éléments i et j de $\{0, 1, \dots, n\}$, il existe un isomorphisme de l'emboîtement (A_i, A_{i+1}) sur l'emboîtement (A_j, A_{j+1}) qui envoie A_i sur A_j . Et chaque emboîtement est formé d'une seule orbite.
4. Le graphe de forçage d'isomorphismes locaux G_D (dont les sommets sont les isomorphismes locaux (A_i, f_i) tels que $A_i = f_i(A_i)$) est un cycle ayant $2n + 2$ sommets.

Le graphe G_D de forçage d'isomorphismes locaux de R vers S est du type suivant:

$$\begin{aligned} (A_0, f_0) &\longleftrightarrow (A_1, f_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, f_n) \longleftrightarrow (A_0, g_0) \\ (A_0, g_0) &\longleftrightarrow (A_1, g_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, g_n) \longleftrightarrow (A_0, f_0) \end{aligned}$$

VARIANTES:

Si on prend G_0 tel que $\{f_i, g_i\} = \{Id_i, p_i\}$ pour tout $i \leq n$ alors tout choix de G_0 fournit une variante qui est un contre-exemple à la reconstruction.

Exemple:

Soit R une des chaînettes de Pouzet définie par:

$$\begin{aligned} (a_0, b_0, b_1) (a_1, b_1, b_2) (a_2, b_2, b_3) (a_3, b_3, b_0) \\ (b_0, a_0, a_1) (b_1, a_1, a_2) (b_2, a_2, a_3) (b_3, a_3, a_0). \end{aligned}$$

Si on se donne G_0 :

$$\begin{aligned} (A_0, Id_0) &\longleftrightarrow (A_1, p_1) \longleftrightarrow (A_2, p_2) \longleftrightarrow (A_3, Id_3) \longleftrightarrow (A_0, p_0) \\ (A_0, p_0) &\longleftrightarrow (A_1, Id_1) \longleftrightarrow (A_2, Id_2) \longleftrightarrow (A_3, p_3) \longleftrightarrow (A_0, Id_0) \end{aligned}$$

alors on a R' définie par:

$$\begin{aligned} (a_0, b_0, a_1) (a_1, b_1, b_2) (b_2, a_2, b_3) (a_3, b_3, a_0) \\ (b_0, a_0, b_1) (b_1, a_1, a_2) (a_2, b_2, a_3) (b_3, a_3, b_0). \end{aligned}$$

On vérifie que R et R' sont (-1) -hypomorphes mais ne sont pas isomorphes.

5.1.2 PROBLÉMATIQUE.

Les chaînettes de Pouzet résultent de l'idée de traduire par des relations la forme du cylindre et de la bande de Moebius. Or comme tout changement des dimensions du cylindre et de la bande ne modifie pas le lien géométrique qui existe entre eux, on peut se demander si l'on a la même chose pour les relations qui en résultent. Plus précisément est-ce que l'augmentation du nombre d'élément des parties consécutives donne des relations non-reconstructibles. Une réponse affirmative fournirait vraiment de nouveaux contre-exemples. Car jusqu'ici les seuls connus sont obtenus en ajoutant un certain nombre de

triplets aux chaînettes de Pouzet.

On étudie donc les relations ternaires obtenues à partir des chaînettes de Pouzet en ajoutant un élément à chaque partie consécutive. On suppose de plus qu'elles vérifient des propriétés du même "type" que les propriétés 1., 2., 3. et 4. des chaînettes de Pouzet. Ces relations sont appelées 1-extensions. On montre que les 1-extensions sont (-1) -reconstructibles.

On termine le chapitre par des questions concernant les k -extensions avec $k \geq 2$. Les k -extensions étant obtenues à partir des chaînettes de Pouzet en ajoutant k éléments à chaque partie consécutive. On étudie notamment les notions de e -critique¹ et de f -critique² qui sont un raffinement de la notion de point critique du chapitre précédent et qui trouvent leurs motivations dans les chaînettes de Pouzet. En effet il y a un lien entre (-1) -hypomorphie et graphes de consécuité.

Dans toute la suite on note G_0 (resp. G_0^{Aut}) le graphe de forçage d'isomorphismes locaux (resp. d'automorphismes locaux) de domaine et co-domaine A_i pour tout $i \leq n$.

5.2 LES 1-EXTENSIONS.

5.2.1 DÉFINITIONS.

Deux relations ternaires R et R' de même base E sont des 1-extensions (des chaînettes de Pouzet) si elles vérifient les propriétés 2, 3 et les deux énoncés suivants:

1'. Il existe une suite $A_0, A_1, \dots, A_n$ de parties à 3 éléments, deux à deux disjointes qui recouvrent E telle que le graphe de parties consécutives induit par elle est le cycle non orienté $(A_0, A_1, \dots, A_n)$.

4'. Le graphe de forçage G_0 contient un cycle ayant $2n + 2$ sommets.

1. Le préfixe e est mis pour emboîtement.

2. Le préfixe f est mis pour forçage.

Soient R et R' deux 1-extensions de base commune E .
On pose:

$$\begin{aligned}(A_0, f_0) &\longleftrightarrow (A_1, f_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, f_n) \longleftrightarrow (A_0, g_0) \\ (A_0, g_0) &\longleftrightarrow (A_1, g_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, g_n) \longleftrightarrow (A_0, f_0).\end{aligned}$$

un cycle ayant $2n + 2$ sommets contenu dans G_0 . Dans toute la suite on le notera C_0 .

5.2.2 CLASSIFICATION DES 1-EXTENSIONS.

Soient R et R' deux 1-extensions de même base E .

LEMME 13 *Pour tout $i < n$ les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. $(A_i, f_i) \longleftrightarrow (A_{i+1}, f_{i+1})$ et $(A_i, g_i) \longleftrightarrow (A_{i+1}, g_{i+1})$.
2. $(A_i, f_i^{-1}og_i) \longleftrightarrow (A_{i+1}, f_{i+1}^{-1}og_{i+1})$ et $(A_i, g_i^{-1}of_i) \longleftrightarrow (A_{i+1}, g_{i+1}^{-1}of_{i+1})$.

PREUVE: Supposons que $(A_i, f_i) \longleftrightarrow (A_{i+1}, f_{i+1})$ et $(A_i, g_i) \longleftrightarrow (A_{i+1}, g_{i+1})$.
Soit h un automorphisme local de domaine $A_i \cup A_{i+1}$ tel que $h/A_i = g_i^{-1}of_i$.
Si $h/A_{i+1} \neq g_{i+1}^{-1}of_{i+1}$ alors on aurait: $g_i oh/A_i = f_i$ et $g_{i+1} oh/A_{i+1} \neq f_{i+1}$.
Comme $(g_i \cup g_{i+1})oh$ est un isomorphisme local de domaine $A_i \cup A_{i+1}$, on aurait que (A_i, f_i) ne force pas (A_{i+1}, f_{i+1}) . Ce qui contre l'hypothèse. D'où $(A_i, g_i^{-1}of_i) \longleftrightarrow (A_{i+1}, g_{i+1}^{-1}of_{i+1})$. De même on a: $(A_{i+1}, g_{i+1}^{-1}of_{i+1}) \longleftrightarrow (A_i, g_i^{-1}of_i)$.
On montre de la même façon que $(A_i, f_i^{-1}og_i) \longleftrightarrow (A_{i+1}, f_{i+1}^{-1}og_{i+1})$.
La réciproque se montre également de la même façon. $\diamond$

LEMME 14 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $(A_0, f_0) \longleftrightarrow (A_n, g_n)$ et $(A_0, g_0) \longleftrightarrow (A_n, f_n)$.
2. $(A_0, f_0^{-1}og_0) \longleftrightarrow (A_n, g_n^{-1}of_n)$ et $(A_0, g_0^{-1}of_0) \longleftrightarrow (A_n, f_n^{-1}og_n)$.

PREUVE: Similaire à celle du lemme précédent. $\diamond$

COROLLAIRE 4 *Les graphes de forçage suivants sont équivalents au sens des deux lemmes précédents.*

1.
$$\begin{aligned}(A_0, f_0) &\longleftrightarrow (A_1, f_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, f_n) \longleftrightarrow (A_0, g_0) \\ (A_0, g_0) &\longleftrightarrow (A_1, g_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, g_n) \longleftrightarrow (A_0, f_0).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (A_0, f_0^{-1}og_0) &\longleftrightarrow (A_1, f_1^{-1}og_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, f_n^{-1}og_n) \longleftrightarrow (A_0, g_0^{-1}of_0) \\ (A_0, g_0^{-1}of_0) &\longleftrightarrow (A_1, g_1^{-1}of_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, g_n^{-1}of_n) \longleftrightarrow (A_0, f_0^{-1}og_0). \end{aligned}$$

Les lemmes 13 et 14 et le corollaire 4 permettent la définition suivante:
Une relation ternaire R de base E est une 1-extension si elle vérifie les propriétés 1', 2, 3, et

4". le graphe G_0^{Aut} contient un cycle qu'on note C_0^{Aut} du type suivant:

$$\begin{aligned} (A_0, h_0) &\longleftrightarrow (A_1, h_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, h_n) \longleftrightarrow (A_0, h_0^{-1}) \\ (A_0, h_0^{-1}) &\longleftrightarrow (A_1, h_1^{-1}) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, h_n^{-1}) \longleftrightarrow (A_0, h_0) \end{aligned}$$

Il peut arriver que l'on ait $h_i^{-1} = h_i$ et cela pour tout $i \leq n$.

Dans toute la suite de ce paragraphe 5.2, on pose $A_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ pour tout $i \leq n$ et on note:

- p (resp. q) la permutation $\{x_i, y_i, z_i\}$ (resp. $\{x_i, z_i, y_i\}$) définie sur A_i .
- t_{x_i} (resp. t_{y_i}, t_{z_i}) la transposition définie sur A_i qui fixe x_i (resp. y_i, z_i).

L'orbite du triplet (x_0, y_0, z_1) .

On détermine l'orbite de (x_0, y_0, z_1) suivant $f_0^{-1}og_0 \cup f_1^{-1}og_1$.

Noter qu'on a $f_0^{-1}og_0 \neq Id$ et $f_1^{-1}og_1 \neq Id$ car sinon C_0 ne serait pas un cycle.

u et v désignerons respectivement un élément de $\{x_0, y_0, z_0\}$ et $\{x_1, y_1, z_1\}$.

On distingue les cas suivants:

1. Cas où $f_0^{-1}og_0 = t_u$ et $f_1^{-1}og_1 = t_v$
 - Si $u = z_0$ et $v = z_1$ alors l'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (y_0, x_0, z_1)\}$.
 - Si $u = x_0$ et $v = z_1$ alors l'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (x_0, z_0, z_1)\}$.
 - Si $u = y_0$ et $v = z_1$ alors l'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (z_0, y_0, z_1)\}$.
 - Si $u = z_0$ et $v = x_1$ alors l'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (y_0, x_0, y_1)\}$.
 - Si $u = z_0$ et $v = y_1$ alors l'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (y_0, x_0, x_1)\}$.

- Si $u = x_0$ et $v = x_1$ alors l'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (x_0, z_0, y_1)\}$.
 - Si $u = y_0$ et $v = x_1$ alors l'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (z_0, y_0, y_1)\}$.
 - Si $u = x_0$ et $v = y_1$ alors l'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (x_0, z_0, x_1)\}$.
 - Si $u = y_0$ et $v = y_1$ alors l'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (z_0, y_0, x_1)\}$.
2. Cas où $f_0^{-1}og_0 = t_u$ et $f_1^{-1}og_1 = p$
- Si $u = z_0$ alors l'orbite est:
 $\{(x_0, y_0, z_1), (y_0, x_0, x_1), (x_0, y_0, y_1), (y_0, x_0, z_1), (x_0, y_0, x_1), (y_0, x_0, y_1)\}$.
 - Si $u = x_0$ alors l'orbite est:
 $\{(x_0, y_0, z_1), (x_0, z_0, x_1), (x_0, y_0, y_1), (x_0, z_0, z_1), (x_0, y_0, x_1), (x_0, z_0, y_1)\}$.
 - Si $u = y_0$ alors l'orbite est:
 $\{(x_0, y_0, z_1), (z_0, y_0, x_1), (x_0, y_0, y_1), (z_0, y_0, z_1), (x_0, y_0, x_1), (z_0, y_0, y_1)\}$.
3. Cas où $f_0^{-1}og_0 = t_u$ et $f_1^{-1}og_1 = q$
- Si $u = z_0$ alors l'orbite est:
 $\{(x_0, y_0, z_1), (y_0, x_0, y_1), (x_0, y_0, x_1), (y_0, x_0, z_1), (x_0, y_0, y_1), (y_0, x_0, x_1)\}$.
 - Si $u = x_0$ alors l'orbite est:
 $\{(x_0, y_0, z_1), (x_0, z_0, y_1), (x_0, y_0, x_1), (x_0, z_0, z_1), (x_0, y_0, y_1), (x_0, z_0, x_1)\}$.
 - Si $u = y_0$ alors l'orbite est:
 $\{(x_0, y_0, z_1), (z_0, y_0, y_1), (x_0, y_0, x_1), (z_0, y_0, z_1), (x_0, y_0, y_1), (z_0, y_0, x_1)\}$.
4. Cas où $f_0^{-1}og_0 = p$ et $f_1^{-1}og_1 = t_v$
- Si $v = z_1$ alors l'orbite est:
 $\{(x_0, y_0, z_1), (y_0, z_0, z_1), (z_0, x_0, z_1)\}$.
 - Si $v = x_1$ alors l'orbite est:
 $\{(x_0, y_0, z_1), (y_0, z_0, y_1), (z_0, x_0, z_1), (x_0, y_0, y_1), (y_0, z_0, z_1), (z_0, x_0, y_1)\}$.
 - Si $v = y_1$ alors l'orbite est:
 $\{(x_0, y_0, z_1), (y_0, z_0, x_1), (z_0, x_0, z_1), (x_0, y_0, x_1), (y_0, z_0, z_1), (z_0, x_0, x_1)\}$.
5. Cas où $f_0^{-1}og_0 = p$ et $f_1^{-1}og_1 = p$
 L'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (y_0, z_0, x_1), (z_0, x_0, y_1)\}$.
6. Cas où $f_0^{-1}og_0 = p$ et $f_1^{-1}og_1 = q$
 L'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (y_0, z_0, y_1), (z_0, x_0, x_1)\}$.
7. Cas où $f_0^{-1}og_0 = q$ et $f_1^{-1}og_1 = t_v$
- Si $v = z_1$ alors l'orbite est:
 $\{(x_0, y_0, z_1), (z_0, x_0, z_1), (y_0, z_0, z_1)\}$.
 - Si $v = x_1$ alors l'orbite est:

$\{(x_0, y_0, z_1), (x_0, x_0, y_1), (y_0, z_0, z_1), (x_0, y_0, y_1), (z_0, x_0, z_1), (y_0, z_0, y_1)\}$.

• Si $v = y_1$ alors l'orbite est:

$\{(x_0, y_0, z_1), (x_0, x_0, z_1), (y_0, z_0, z_1), (x_0, y_0, x_1), (z_0, x_0, z_1), (y_0, z_0, x_1)\}$.

8. Cas où $f_0^{-1}og_0 = q$ et $f_1^{-1}og_1 = p$

L'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (x_0, x_0, x_1), (y_0, z_0, y_1)\}$.

9. Cas où $f_0^{-1}og_0 = q$ et $f_1^{-1}og_1 = q$

L'orbite est: $\{(x_0, y_0, z_1), (x_0, x_0, y_1), (y_0, z_0, x_1)\}$.

Remarque: Étant donné un emboîtement (A_i, A_{i+1}) , on supposera dans toute la suite que tout triplet de (A_i, A_{i+1}) a ses deux premières composantes dans A_i . Les autres situations se traitent de la même façon.

PROPOSITION 25 Avec les hypothèses ci-dessus, G_0 est tel que

• Soit pour tout i de $\{0, 1, \dots, n\}$: $f_i^{-1}og_i$ est une transposition.

• Soit pour tout i de $\{0, 1, \dots, n\}$: $f_i^{-1}og_i$ est égale à p ou à q .

PREUVE: On montre que si $f_0^{-1}og_0$ est une transposition (Posons $f_0^{-1}og_0 = t_u$) alors pour tout i on a que $f_i^{-1}og_i$ est une transposition. Supposons que $f_1^{-1}og_1$ ne soit pas une transposition. On distingue alors les deux cas suivant:

• Cas où $f_1^{-1}og_1 = p$.

L'emboîtement (A_0, A_1) a exactement six triplets, donc $\text{Card}(A_1, A_2) = 6$. On aboutit à une contradiction car toute bijection de $A_0 \cup A_1$ sur $A_1 \cup A_2$ qui envoie A_0 sur A_1 n'est pas un automorphisme local de R . En effet si on suppose que l'emboîtement (A_0, A_1) est l'orbite d'un triplet du type $(x_0, y_0, \dots)$ alors il existe un élément v de A_0 qui n'apparaît pas en première composante. Or tous ceux de A_1 apparaissent en première composante des triplets éléments de (A_1, A_2) .

• Cas où $f_1^{-1}og_1 = q$.

On fait un raisonnement similaire au précédent.

Si $f_0^{-1}og_0$ est une transposition alors $f_1^{-1}og_1$ l'est également et de proche en proche on a que les $f_i^{-1}og_i$ sont tous des transpositions.

On montre ensuite que si $f_0^{-1}og_0 = p$ ou q alors il en est de même pour tous les $f_i^{-1}og_i$. Supposons que $f_1^{-1}og_1 = t_v$, deux cas se présentent alors:

• Cas où $v = z_1$.

On a $\text{Card}(A_0, A_1) = 3$, mais quelque soit $f_2^{-1}og_2$ on a:
 $\text{Card}(A_0, A_1) \neq \text{Card}(A_1, A_2)$. Ce qui est absurde.

• Cas où $v = x_1$ ou y_1 .

Ici $\text{Card}(A_0, A_1) = 6$ et donc $f_2^{-1}og_2 = p$ ou q mais alors on montre comme précédemment que les emboitements (A_0, A_1) et (A_1, A_2) ne sont pas isomorphes. Ce qui est absurde.

De proche en proche on obtient le résultat. $\diamond$

Définitions:

- Deux 1-extensions R et R' de même base sont dites engendrées par des transpositions (resp. permutations circulaires) si le graphe C_0 est tel que pour tout $i \leq n$ $f_i^{-1}og_i$ est une transposition (resp. permutation circulaire)
- Lorsqu'une 1-extension R est telle que tout sommet de C_0^{Aut} est une transposition (resp. permutation circulaire), on dira qu'elle est engendrée par des transpositions (resp. permutations circulaires).

5.2.3 RELATIONS ENGENDRÉES PAR DES TRANSPOSITIONS.

Ici le cycle C_0^{Aut} a $n+1$ sommets car chaque sommet est son propre inverse.

EXEMPLE:

Pour tout i de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ on prend $f_i^{-1}og_i = t_{x_i}$ et $A_i = \{a_i, b_i, c_i\}$.

Les x_i, y_i et z_i sont considérés comme des variables prenant leur valeur dans A_i .

$$R: \begin{matrix} (x_0, y_0, z_1) & (x_1, y_1, z_2) & (x_2, y_2, z_3) & (x_3, y_3, z_4) & (x_4, y_4, z_5) & (x_5, y_5, z_0) \\ (x_0, z_0, y_1) & (x_1, z_1, y_2) & (x_2, z_2, y_3) & (x_3, z_3, y_4) & (x_4, z_4, y_5) & (x_5, z_5, y_0) \end{matrix}$$

$$R': \begin{matrix} (z_0, y_0, x_1) & (y_1, x_1, x_2) & (y_2, x_2, z_3) & (x_3, y_3, x_4) & (z_4, y_4, x_5) & (z_5, y_5, x_0) \\ (z_0, x_0, x_1) & (y_1, z_1, z_2) & (y_2, z_2, y_3) & (x_3, z_3, y_4) & (z_4, x_4, y_5) & (z_5, x_5, y_0) \end{matrix}$$

On vérifie facilement qu'on a:

$$\begin{aligned} (A_0, q) &\longleftrightarrow (A_1, p) \longleftrightarrow (A_2, t_{x_2}) \longleftrightarrow (A_3, Id) \longleftrightarrow (A_4, t_{y_4}) \\ (A_4, t_{y_4}) &\longleftrightarrow (A_5, t_{y_5}) \longleftrightarrow (A_0, t_{y_0}) \longleftrightarrow (A_1, t_{x_1}) \longleftrightarrow (A_2, p) \\ (A_2, p) &\longleftrightarrow (A_3, t_{x_3}) \longleftrightarrow (A_4, q) \longleftrightarrow (A_5, q) \longleftrightarrow (A_0, q). \end{aligned}$$

Notons τ_i la translation définie par $\tau_i(x_j) = x_{i+j}$, $\tau_i(y_j) = y_{i+j}$ et $\tau_i(z_j) = z_{i+j}$. Les indices sont considérées modulo $n+1$. Les autres composantes connexes C_i de G_0 sont obtenues par composition avec τ_i .

(1) R et R' ne sont pas isomorphes.

Preuve: Par l'absurde.

Supposons que R et R' soient isomorphes, alors l'image d'un emboîtement par tout isomorphisme est un emboîtement.

Soit donc ϕ un isomorphisme de R sur R' tel que $\phi((A_0, A_1)_R) = (A_0, A_1)_{R'}$.

Ainsi soit $\phi/A_0 = q$ soit $\phi/A_0 = t_m$.

Si $\phi/A_0 = q$ alors le graphe de forçage G_0 donne que $\phi/A_0 = q$ force $\phi/A_0 = t_m$ ce qui est absurde.

De même si $\phi/A_0 = t_m$ on a $\phi/A_0 = t_m$ force $\phi/A_0 = q$ ce qui est absurde.

Pour achever la preuve, il suffit de remarquer que si R et R' sont isomorphes alors pour tout isomorphisme ψ de R sur R' , il existe i dans $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tel que $\psi = \phi \circ \tau_i$. $\diamond$

Type d'élément:

Dans cette classe de relations engendrées par des transpositions, Chaque élément de la base est composante de deux triplets et de deux seulement de R (resp. R').

Lorsqu'un élément apparaît en 1^{ère} composante de deux triplets on dit qu'il est de type (1, 1); lorsqu'il apparaît en 2^{ème} et 3^{ème} composante on dira qu'il est de type (2, 3). Plus généralement on dira qu'un élément est de type (ϵ, δ) avec $\epsilon, \delta = 1, 2, 3$ s'il apparaît en $\epsilon^{\text{ème}}$ et $\delta^{\text{ème}}$ composante.

Le groupe $\text{Aut}(R)$ des automorphismes de R :

- Id

- $(x_0) \dots (x_5)(y_0, z_0) \dots (y_5, z_5)$

cet automorphisme et l'identité Id sont ceux qui fixent chaque élément de type (1, 1)

- pour tout i

$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \circ \tau_i$

- pour tout i

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)(y_0, z_1, y_2, z_3, y_4, z_5)(z_0, y_1, z_2, y_3, z_4, y_5) \sigma \tau_i$$

Image d'un automorphisme de R par le graphe de forçage.

On détermine les automorphismes de R' qui sont obtenus comme images des automorphismes de R par un chemin de forçage de C_0 .

• Considérons l'automorphisme de R suivant:

$$(x_0)(x_1)(x_2)(x_3)(x_4)(x_5)(y_0, z_0)(y_1, z_1)(y_2, z_2)(y_3, z_3)(y_4, z_4)(y_5, z_5)$$

Son image par tout chemin de forçage de C_0 allant d'un isomorphisme local de domaine A_0 à un de domaine A_5 donne:

$$(z_0)(y_1)(y_2)(x_3)(z_4)(z_5)(y_0, x_0)(z_1, x_1)(x_2, z_2)(z_3, y_3)(x_4, y_4)(x_5, y_5)$$

qui est un automorphisme de R' .

• Considérons l'automorphisme de R suivant:

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)(y_0, z_1, y_2, z_3, y_4, z_5)(z_0, y_1, z_2, y_3, z_4, y_5).$$

L'image du cycle $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ donne un cycle de même longueur car $q(x_0) = t_{z_0}(x_0)$. Son image par le chemin de forçage:

$$(A_0, q) \longleftrightarrow (A_1, p) \longleftrightarrow (A_2, t_{z_1}) \longleftrightarrow (A_3, Id)$$

$$(A_3, Id) \longleftrightarrow (A_4, t_{y_4}) \longleftrightarrow (A_5, t_{z_5}) \longleftrightarrow (A_0, t_{z_0})$$

donne $(q(x_0), p(x_1), t_{z_2}(x_2), Id(x_3), t_{y_4}(x_4), t_{z_5}(x_5))$

d'où $(z_0, y_1, y_2, x_3, z_4, z_5)$.

Comme $q(y_0) = x_0$ et $t_{y_0}(y_0) = y_0$, le cycle $(y_0, z_1, y_2, z_3, y_4, z_5)$ ne donne pas un cycle de même longueur. On procède comme précédemment en prenant l'image de $(y_0, z_1, y_2, z_3, y_4, z_5)$ par le même chemin. Ensuite on prend l'image réciproque $q^{-1}(t_{z_0}(y_0)) = z_0$ et on continue en prenant l'image du cycle contenant z_0 c'est-à-dire $(z_0, y_1, z_2, y_3, z_4, y_5)$ par le même chemin de forçage. On boucle le cycle car $t_{z_0}(z_0) = x_0$.

Au total on a: $(x_0, x_1, x_2, z_3, y_4, x_5, y_0, z_1, z_2, y_3, x_4, y_5)$

L'image de l'automorphisme de R ci-dessus par le chemin de forçage ci-dessus est donc:

$$(z_0, y_1, y_2, x_3, z_4, z_5)(x_0, x_1, x_2, z_3, y_4, x_5, y_0, z_1, z_2, y_3, x_4, y_5)$$

et on vérifie facilement que c'est un automorphisme de R' .

Si maintenant on considère le chemin de forçage suivant:

$$(A_0, t_{z_0}) \longleftrightarrow (A_1, t_{z_1}) \longleftrightarrow (A_2, p) \longleftrightarrow (A_3, t_{z_2}) \\ (A_3, t_{z_2}) \longleftrightarrow (A_4, q) \longleftrightarrow (A_5, q) \longleftrightarrow (A_0, q)$$

l'image de $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ est toujours $(z_0, y_1, y_2, z_3, z_4, z_5)$.

L'image de $(y_0, z_1, y_2, z_3, y_4, z_5)$ n'est pas un cycle de même longueur car $q(y_0) \neq t_{z_0}(y_0)$.

Comme $t_{z_0}(q(y_0)) = z_0$, on considère ensuite le cycle $(z_0, y_1, z_2, y_3, z_4, y_5)$ et on obtient $(y_0, z_1, z_2, y_3, z_4, y_5, x_0, x_1, x_2, z_3, y_4, x_5)$

On vérifie que

$$(z_0, y_1, y_2, z_3, z_4, z_5)(y_0, z_1, z_2, y_3, z_4, y_5, x_0, x_1, x_2, z_3, y_4, x_5)$$

est un automorphisme de R' .

• Considérant l'automorphisme de R suivant:

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$$

on obtient:

$$(z_0, y_1, y_2, x_3, z_4, z_5)(x_0, z_1, x_2, y_3, y_4, y_5, y_0, x_1, z_2, z_3, x_4, x_5)$$

qui est bien un automorphisme de R' .

Problèmes: (1.) Soient R et R' deux 1-extensions de même base. Est-ce que $\text{Aut}(R') - \{Id\}$ est parfaitement déterminé par $\text{Aut}(R) - \{Id\}$ et C_0 ? (2.) Étant données deux relations m -aires, (-1) -hypomorphes R et R' ; quel lien existe-t-il entre le graphe de forçage C_0 et les groupes d'automorphismes de R et R' ?

(2) Si les éléments u et v de E sont de type $(1, 1)$ dans R et R' alors les restrictions $R/E - \{u\}$ et $R'/E - \{v\}$ sont isomorphes. Dans le cas contraire elles ne sont pas isomorphes.

Preuve: On distingue les cas suivants:

• Cas où u et v sont de type $(1, 1)$.

x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 sont de type $(1, 1)$ dans R .

z_0, y_1, y_2, x_3, z_4 et z_5 sont de type $(1, 1)$ dans R' .

Considérons les restrictions $R/E - \{x_0\}$ et $R'/E - \{z_0\}$. Il est facile de vérifier grâce au graphe de forçage que

$$(A_1, p) \cup (A_2, t_{z_2}) \cup (A_3, Id) \cup (A_4, t_{y_4}) \cup (A_5, t_{y_5}) \cup (A_0 - \{x_0\}, t_{z_0})$$

et

$$(A_1, t_{z_1}) \cup (A_2, p) \cup (A_3, t_{z_3}) \cup (A_4, q) \cup (A_5, q) \cup (A_0 - \{x_0\}, q)$$

sont les deux isomorphismes de $R/E - \{x_0\}$ sur $R'/E - \{z_0\}$.

Pour achever la preuve noter que pour tout v de $\{z_0, y_1, y_2, x_3, z_4, z_5\}$ il existe un automorphisme ψ de R' tel que $\psi(z_0) = v$.

De même pour tout u de $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ il existe un automorphisme ϕ de R tel que $\phi(x_0) = u$.

Ainsi on a que les restrictions $R/E - \{x_0\}$ et $R/E - \{u = \phi(x_0)\}$ sont isomorphes et que $R'/E - \{z_0\}$ et $R'/E - \{v = \psi(z_0)\}$ sont isomorphes.

Donc pour tous u et v de type $(1, 1)$, les restrictions $R/E - \{u\}$ et $R'/E - \{v\}$ sont isomorphes.

• *Cas où u et v sont de type différent.*

Supposons que u soit de type $(1, 1)$ et v de type $(2, 3)$. Par une démarche similaire à celle qui précède, il suffira de faire la preuve avec $u = x_0$ et $v = x_0$. Si les restrictions $R/E - \{x_0\}$ et $R'/E - \{x_0\}$ sont isomorphes alors l'image d'un emboîtement par un isomorphisme est un emboîtement.

Or comme $R'/E - \{x_0\}$ a des emboîtements à un triplet contrairement à $R/E - \{x_0\}$, on en déduit que $R/E - \{x_0\}$ et $R'/E - \{x_0\}$ ne sont pas isomorphes.

• *Cas où u et v sont de type $(2, 3)$.*

Considérons les restrictions $R/E - \{y_0\}$ et $R'/E - \{y_0\}$.

Dans $R/E - \{y_0\}$ il y a un unique triplet ayant z_1 en 2^{ème} composante qui est (x_1, z_1, y_2) . Il y a également un unique triplet ayant z_5 en 3^{ème} composante qui est (x_4, y_4, z_5) .

De même dans $R'/E - \{y_0\}$ il y a un unique triplet ayant z_1 en 2^{ème} composante qui est (y_1, z_1, z_2) , et il y a également un unique triplet ayant z_5 en 3^{ème} composante qui est (z_4, y_4, z_5) .

S'il existe un isomorphisme ϕ de $R/E - \{y_0\}$ sur $R'/E - \{y_0\}$ alors ϕ envoie (x_1, z_1, y_2) sur (y_1, z_1, z_2) et (x_4, y_4, z_5) sur (z_4, y_4, z_5) .

Donc $\phi/A_1 = t_{z_1}$ et on vérifie que:

$$(A_1, t_{z_1}) \longleftrightarrow (A_0 - \{y_0\}, t_{y_0}) \longleftrightarrow (A_5, t_{y_5})$$

Le graphe de forçage C_0 donne alors $\phi/A_1 = p$ ce qui est absurde.

Donc $R/E - \{y_0\}$ et $R'/E - \{y_0\}$ ne sont pas isomorphes.

Étant donné u (resp. v) dans E de type $(2, 3)$ dans R (resp. R') alors il existe un automorphisme ϕ (resp. ψ) tel que $\phi(y_0) = u$ (resp. $\psi(y_0) = v$). Donc les restrictions $R/E - \{u\}$ et $R'/E - \{v\}$ ne sont pas isomorphes. $\diamond$

Après l'exposé de cet exemple, revenons à l'étude générale des 1-extensions qui sont engendrées par des transpositions.

LEMME 15 *Si R et R' sont deux 1-extensions de base commune E qui sont engendrées par des transpositions alors chaque élément de E apparaît deux fois dans R (resp. R').*

PREUVE: Soit i de $\{0, 1, \dots, n\}$.

Supposons que $f_i^{-1}og_i = t_x$, et Considérons les emboîtements $(A_{i-1}, A_i)_R$ et $(A_i, A_{i+1})_R$. On a les situations suivantes:

1. Chaque élément de A_i apparaît 2 fois.

$$\begin{array}{ll} (\dots, x_i) & (y_i, z_i, \dots) \\ (\dots, z_i) & (z_i, y_i, \dots) \\ \\ (\dots, y_i) & (x_i, y_i, \dots) \\ (\dots, z_i) & (x_i, z_i, \dots) \\ \\ (\dots, y_i) & (y_i, x_i, \dots) \\ (\dots, z_i) & (z_i, x_i, \dots) \end{array}$$

2. Deux éléments de A_i apparaissent 3 fois.

$$\begin{array}{ll} (\dots, y_i) & (y_i, z_i, \dots) \\ (\dots, z_i) & (z_i, y_i, \dots) \end{array}$$

Ce cas est à exclure car sinon on aurait que A_i n'est pas consécutive à A_{i-1} . Il suffit en effet de prendre l'identité sur A_{i-1} et l'isomorphisme local ϕ de domaine A_i qui fixe globalement $\{y_i, z_i\}$ et qui envoie x_i sur (par ex.) z_{i+2} .

3. Un élément de A_i apparaît 4 fois.

$$\begin{array}{cc} \{\dots, x_i\} & (x_i, y_i, \dots) \\ \{\dots, x_i\} & (x_i, z_i, \dots) \\ \\ \{\dots, x_i\} & (y_i, x_i, \dots) \\ \{\dots, x_i\} & (z_i, x_i, \dots) \end{array}$$

Ce cas est à exclure car sinon on aurait que (A_{i-1}, f_{i-1}) ne force aucun isomorphisme local de domaine A_i . En effet supposons que (A_{i-1}, f_{i-1}) force un isomorphisme local ψ sur A_i .

- Si $\psi(x_i) = x_i$ alors y_i et z_i apparaissent chacune une fois dans R' . Et on peut avoir que $\psi(y_i) = y_i$ ou $\psi(y_i) = z_i$. Donc $\psi = Id$ ou $\psi = t_{x_i}$. Ainsi (A_{i-1}, f_{i-1}) force à la fois (A_i, Id) et (A_i, t_{x_i}) . Ce qui est absurde à cause de la structure de C_0 .
- Si $\psi(x_i) = y_i$ alors $\psi(y_i) = z_i$ ou $\psi(y_i) = x_i$.
Donc $\psi = p$ ou $\psi = t_{x_i}$ ce qui est absurde.
- Si $\psi(x_i) = z_i$ alors $\psi(y_i) = x_i$ ou $\psi(y_i) = y_i$.
Donc $\psi = q$ ou $\psi = t_{y_i}$ ce qui est absurde. $\diamond$

Remarque: Lorsqu'on considérera deux 1-extensions R et R' , on supposera que l'emboîtement (A_0, A_1) est l'orbite de (x_0, y_0, z_1) et que $f_0^{-1}og_0 = t_{x_0}$. Tous les autres cas se traiteront de la même façon.

LEMME 16 *Si R et R' sont deux 1-extensions de base commune E qui sont engendrées par des transpositions alors on peut écrire R de la façon suivante:*

$$\begin{array}{cccc} (x_0, y_0, z_1) & (x_1, y_1, z_2) & \dots & (x_n, y_n, z_0) \\ (x_0, z_0, y_1) & (x_1, z_1, y_2) & \dots & (x_n, z_n, y_0) \end{array}$$

et R' est donnée par:

$$\begin{array}{cccc} (f_0(x_0), f_0(y_0), f_1(z_1)) & (f_1(x_1), f_1(y_1), f_2(z_2)) & \dots & (f_n(x_n), f_n(y_n), g_0(z_0)) \\ (f_0(x_0), f_0(z_0), f_1(y_1)) & (f_1(x_1), f_1(z_1), f_2(y_2)) & \dots & (f_n(x_n), f_n(z_n), g_0(y_0)) \end{array}$$

PREUVE: On a: $(A_0, A_1)_R = \{(x_0, y_0, z_1), (x_0, z_0, f_1^{-1}og_1(z_1))\}$.

Soit ϕ un isomorphisme de $(A_0, A_1)_R$ sur $(A_1, A_2)_R$ au sens défini en 4.4 et du 3. de la définition des 1-extensions.

D'après le lemme 15 chaque élément de la base apparaît 2 fois seulement dans R . Donc $\phi(x_0) \neq z_1$. En effet si $\phi(x_0) = z_1$ alors on aurait $f_1^{-1}og_1 = t_{z_1}$.

et z_1 apparaîtrait 4 fois; ce qui est absurde.

• Si $\phi(x_0) = x_1$ alors $f_1^{-1}og_1 = t_{x_1}$ et on a

$$\begin{array}{cc} (x_0, y_0, z_1) & (x_1, y_1, \dots) \\ (x_0, z_0, y_1) & (x_1, z_1, \dots) \end{array}$$

• Si $\phi(x_0) = y_1$ alors $f_1^{-1}og_1 = t_{y_1}$ et on remplace y_1 par x_1 et inversement, on a donc $f_1^{-1}og_1 = t_{x_1}$ et

$$\begin{array}{cc} (x_0, y_0, z_1) & (x_1, y_1, \dots) \\ (x_0, z_0, y_1) & (x_1, z_1, \dots) \end{array}$$

Ensuite on considère les emboîtements $(A_1, A_2)_R$ et $(A_2, A_3)_R$ et soit ψ un isomorphisme de $(A_1, A_2)_R$ sur $(A_2, A_3)_R$.

Comme précédemment on montre qu'on peut prendre $f_2^{-1}og_2 = t_{x_2}$ et

$$\begin{array}{ccc} (x_0, y_0, z_1) & (x_1, y_1, \dots) & (x_2, y_2, \dots) \\ (x_0, z_0, y_1) & (x_1, z_1, \dots) & (x_2, z_2, \dots) \end{array}$$

Si on a :

$$\begin{array}{cc} (x_1, y_1, y_2) & (x_2, y_2, \dots) \\ (x_1, z_1, z_2) & (x_2, z_2, \dots) \end{array}$$

alors on remplace y_2 par z_2 et inversement, ce qui donne

$$\begin{array}{ccc} (x_0, y_0, z_1) & (x_1, y_1, z_2) & (x_2, y_2, \dots) \\ (x_0, z_0, y_1) & (x_1, z_1, y_2) & (x_2, z_2, \dots) \end{array}$$

Ainsi de proche en proche on a le résultat. $\diamond$

PROPOSITION 26 Toutes relations R et R' 1-extensions de base commune E et qui sont engendrées par des transpositions sont telles que:

1. Pour tout u de E de type (ϵ, ϵ) (avec $\epsilon = 1, 2, 3$) et pour tout v de E de type (δ, δ) (avec $\delta = 1, 2, 3$) on a que les restrictions $R/E - \{u\}$ et $R'/E - \{v\}$ sont isomorphes.
2. Pour tous u et v de E tels que l'un au moins est de type (ϵ, δ) avec $\epsilon \neq \delta$ on a que les restrictions $R/E - \{u\}$ et $R'/E - \{v\}$ ne sont pas isomorphes.

PREUVE: D'après le lemme 16 on peut prendre R comme suit:

$$\begin{array}{ccccccc} (x_0, y_0, z_1) & (x_1, y_1, z_2) & \dots & (x_n, y_n, z_0) \\ (x_0, z_0, y_1) & (x_1, z_1, y_2) & \dots & (x_n, z_n, y_0) \end{array}$$

Ainsi les éléments $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont de type (1,1) et tous les autres sont de type (2,3) dans R . $f_0(x_0), f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$ sont de type (1,1) et tous les autres sont de type (2,3) dans R' . Noter que pour tout i on a que $f_i(x_i) = g_i(x_i)$ et donc $f_i(y_i) = g_i(z_i)$ et $f_i(z_i) = g_i(y_i)$.

• Soit i dans $\{0, 1, \dots, n\}$ et on considère les restrictions $R/E - \{x_i\}$ et $R/E - \{f_i(x_i)\}$. y_i et z_i apparaissent chacune 1 fois dans $R/E - \{x_i\}$ et en 3^{ème} composante.

$f_i(y_i)$ et $f_i(z_i)$ apparaissent chacune 1 fois dans $R/E - \{f_i(x_i)\}$ et en 3^{ème} composante.

Le graphe C_0 donne

$$(A_i - \{x_i\}, \phi_i) \longrightarrow (A_{i-1}, \phi_{i-1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow (A_{i+1}, \phi_{i+1})$$

où $\phi_i = f_i$ ou bien g_i pour tout i ;

et $\cup \phi_i$ est un isomorphisme de $R/E - \{x_i\}$ sur $R/E - \{f_i(x_i)\}$.

Soit maintenant u (resp. v) un élément de E de type (1,1) dans R (resp. R'). Il existe i tel que $f_i(x_i) = v$. D'après ce qui précède les restrictions $R/E - \{x_i\}$ et $R'/E - \{v\}$ sont isomorphes. Comme $R/E - \{x_i\}$ et $R/E - \{u\}$ sont isomorphes on a que $R/E - \{u\}$ et $R'/E - \{v\}$ sont isomorphes.

• Si u est un élément de E de type (1,1) (resp. (2,3)) dans R et si v est un autre élément de E de type (2,3) (resp. (1,1)) dans R' alors $R/E - \{u\}$ et $R'/E - \{v\}$ ne sont pas isomorphes car tout un emboîtement est supprimé dans $R/E - \{u\}$ (resp. $R'/E - \{v\}$) et pas dans $R'/E - \{v\}$ (resp. $R/E - \{u\}$).

• Étant donné i , on montre par une démarche similaire à celle de l'exemple que les restrictions $R/E - \{y_i\}$ et $R'/E - \{f_i(y_i)\}$ ne sont pas isomorphes et que $R/E - \{y_i\}$ et $R'/E - \{f_i(z_i)\}$ ne le sont pas non plus.

Si maintenant u (resp. v) est un élément de E de type (2,3) dans R (resp. R') alors il existe i tel que $f_i(y_i) = v$ ou bien $f_i(z_i) = v$. Donc les restrictions $R/E - \{y_i\}$ (ou $R/E - \{z_i\}$) et $R'/E - \{v\}$ ne sont pas isomorphes. Comme

$R/E - \{u\}$ et $R/E - \{y_i\}$ (ou $R/E - \{z_i\}$) sont isomorphes on en déduit que $R/E - \{u\}$ et $R'/E - \{v\}$ ne sont pas isomorphes. $\diamond$

PROPOSITION 27 Si R' est (-1) -hypomorphe à R alors R et R' sont deux 1-extensions engendrées par des transpositions.

PREUVE: Soit R une 1-extension engendrée par des transpositions. D'après le lemme 16, on prend R comme suit:

$$\begin{array}{cccc} (x_0, y_0, z_1) & (x_1, y_1, z_2) & \dots & (x_n, y_n, z_0) \\ (x_0, z_0, y_1) & (x_1, z_1, y_2) & \dots & (x_n, z_n, y_0). \end{array}$$

Soit R' une relation ternaire (-1) -hypomorphe à R .

On appelle restriction de type 1, une restriction du type de $R/A_0 \cup A_1$. On note n_1 (resp. n'_1) le nombre de restrictions de type 1 dans R (resp. R').

On appelle restriction de type 2, une restriction du type de $R/A_0 \cup A_1 \cup A_2$. On note n_2 (resp. n'_2) le nombre de restrictions de type 2 dans R (resp. R').

Comme R et R' sont hypomorphes on a que

$$n_1 = n'_1 \quad \text{et} \quad n_2 = n'_2$$

On a également (dans R et R') que le nombre de restriction de type 2 contenant une restriction de type 1 donnée est 2.

On se donne une restriction de type 2:

$$\begin{array}{cc} (\alpha_0, \beta_0, \gamma_1) & (\alpha_1, \beta_1, \gamma_2) \\ (\alpha_0, \gamma_0, \beta_1) & (\alpha_1, \gamma_1, \beta_2) \end{array}$$

et on pose $B_0 = \{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$ et $B_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$.

Il existe un unique B_n disjoint de $\{\beta_2, \gamma_2\}$ tel que la restriction $R'/B_n \cup B_0 \cup B_1$ soit de type 2.

Il existe un unique B_{n-1} disjoint de B_n tel que la restriction $R'/B_{n-1} \cup B_n \cup B_0$ soit de type 2.

De proche en proche on construit $B_1, B_0, B_n, \dots, B_3$ des parties à 3 éléments deux à deux disjointes. Et il existe deux triplets qui forment une restriction de type 1 et un élément de la base qu'on note α_2 . Si on pose $B_2 = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ alors cette restriction est $R'/B_2 \cup B_3$ où tous les éléments de B_2 apparaissent. Donc on a construit une suite $B_0, B_1, \dots, B_n$ de parties deux à deux disjointes

qui recouvrent la base.

Les restrictions $R'/B_i \cup B_{i+1}$ (les indices étant pris modulo $n+1$) sont de type 1 et on a que si i et j sont tels que $|i-j| \neq 1$ alors la restriction $R'/B_i \cup B_j$ est vide.

On obtient alors que la relation R' vérifie les propriétés 1', 2, 3, et 4". $\diamond$

COROLLAIRE 5 Les 1-extensions engendrées par des transpositions sont (-1) -reconstructibles.

PREUVE: Soit R une 1-extension engendrée par des transpositions. Soit R' une relation qui est (-1) -hypomorphes à R . D'après la proposition 27 R' est une 1-extension engendrée par des transpositions. Et d'après la proposition 26 on a que $R' = R$. $\diamond$

5.2.4 RELATIONS ENGENDRÉES PAR DES PERMUTATIONS CIRCULAIRES.

EXEMPLE:

$$\begin{aligned}
 R: & \quad (x_0, y_0, z_1) \quad (x_1, y_1, z_2) \quad (x_2, y_2, z_3) \quad (x_3, y_3, z_4) \quad (x_4, y_4, z_5) \quad (x_5, y_5, z_0) \\
 & \quad (y_0, z_0, y_1) \quad (z_1, x_1, x_2) \quad (y_2, z_2, y_3) \quad (z_3, x_3, y_4) \quad (z_4, x_4, x_5) \quad (y_5, z_5, y_0) \\
 & \quad (z_0, x_0, x_1) \quad (y_1, z_1, y_2) \quad (z_2, x_2, z_3) \quad (y_3, z_3, x_4) \quad (y_4, z_4, y_5) \quad (z_5, x_5, x_0). \\
 R': & \quad (x_0, z_0, z_1) \quad (x_1, y_1, x_2) \quad (y_2, z_2, z_3) \quad (y_3, x_3, x_4) \quad (z_4, y_4, x_5) \quad (y_5, z_5, x_0) \\
 & \quad (z_0, y_0, y_1) \quad (z_1, x_1, y_2) \quad (z_2, x_2, x_3) \quad (z_3, y_3, y_4) \quad (x_4, z_4, y_5) \quad (z_5, x_5, y_0) \\
 & \quad (y_0, x_0, x_1) \quad (y_1, z_1, z_2) \quad (x_2, y_2, y_3) \quad (x_3, z_3, z_4) \quad (y_4, x_4, z_5) \quad (x_5, y_5, z_0).
 \end{aligned}$$

On vérifie facilement qu'on a:

$$\begin{aligned}
 (A_0, t_{x_0}) & \longleftrightarrow (A_1, Id) \longleftrightarrow (A_2, p) \longleftrightarrow (A_5, t_{x_5}) \longleftrightarrow (A_4, t_{y_4}) \\
 (A_4, t_{y_4}) & \longleftrightarrow (A_5, p) \longleftrightarrow (A_0, t_{y_0}) \longleftrightarrow (A_1, q) \longleftrightarrow (A_2, q) \\
 (A_2, q) & \longleftrightarrow (A_3, t_{y_3}) \longleftrightarrow (A_4, t_{x_4}) \longleftrightarrow (A_5, q) \longleftrightarrow (A_0, t_{x_0}).
 \end{aligned}$$

Mais le graphe contient un autre cycle:

$$\begin{aligned}
 (A_0, t_{x_0}) & \longleftrightarrow (A_1, p) \longleftrightarrow (A_2, Id) \longleftrightarrow (A_3, t_{x_3}) \\
 (A_3, t_{x_3}) & \longleftrightarrow (A_4, t_{x_4}) \longleftrightarrow (A_5, Id) \longleftrightarrow (A_0, t_{x_0})
 \end{aligned}$$

(1) R et R' sont isomorphes.

Preuve: Il suffit de prendre:

$$(A_0, t_{x_0}) \cup (A_1, p) \cup (A_2, Id) \cup (A_3, t_{x_3}) \cup (A_4, t_{x_4}) \cup (A_5, Id). \diamond$$

(2) R et R' ne sont pas (-1) -hypomorphes; mais elles le sont en $x_0, x_2, y_2, z_2, x_3, z_4, x_5, y_5$ et z_5 .

Preuve: Considérons les restrictions $R/E - \{y_0\}$ et $R'/E - \{y_0\}$. Les éléments suivants n'apparaissent plus que deux fois dans $R/E - \{y_0\}$: $x_0, z_0, y_1, z_1, y_5, z_5$.

- x_0 et y_5 sont de type $(2, 3)$ dans $R/E - \{y_0\}$.
- y_1 et z_1 sont de type $(1, 2)$ dans $R/E - \{y_0\}$.
- z_5 et x_5 sont de type $(1, 3)$ dans $R/E - \{y_0\}$.

De même dans $R'/E - \{y_0\}$ les éléments suivants n'apparaissent plus que deux fois: $x_0, z_0, x_1, y_1, x_5, z_5$.

- x_0 et y_5 sont de type $(2, 3)$ dans $R'/E - \{y_0\}$.
- y_1 et z_1 sont de type $(1, 2)$ dans $R'/E - \{y_0\}$.
- x_0 et x_5 sont de type $(1, 3)$ dans $R'/E - \{y_0\}$.

Supposons que $R/E - \{y_0\}$ et $R'/E - \{y_0\}$ soient isomorphes et soit ϕ un tel isomorphisme. ϕ envoie $\{x_0, y_5\}$ sur $\{z_0, y_5\}$.

Si $\phi(x_0) = y_5$ alors ϕ envoie (z_0, x_0, x_1) sur (x_5, y_5, z_0) , (z_5, x_5, x_0) sur (x_4, z_4, y_5) et (x_5, y_5, z_5) sur (z_4, y_4, x_5) .

Ainsi l'image réciproque par ϕ de (y_4, x_4, z_5) est $(y_5, z_5, \phi^{-1}(z_5))$ or un tel élément n'existe pas dans $R/E - \{y_0\}$.

Donc s'il existe un isomorphisme ϕ de $R/E - \{y_0\}$ sur $R'/E - \{y_0\}$, il envoie l'emboîtement $(A_0 - \{y_0\}, A_1)_R$ sur $(A_0 - \{y_0\}, A_1)_{R'}$ et donc $\phi(x_0) = z_0$.

Ainsi $\phi/A_0 - \{y_0\} = t_{y_0}$ et on vérifie facilement que:

$$(A_5, p) \longleftrightarrow (A_0 - \{y_0\}, t_{y_0}) \longleftrightarrow (A_1, q).$$

Donc $\phi/A_1 = q$ et le graphe de forçage C_0 donne également $\phi/A_1 = Id$ ce qui est absurde. Donc R et R' ne sont pas hypomorphes.

Pour la deuxième partie, il suffit de remarquer que l'isomorphisme de R sur R' qui fixe globalement chaque partie A_i , fixe aussi chacun des éléments considérés. D'autre part tout automorphisme de R' qui fixe l'un d'eux est l'identité. $\diamond$

Revenons à l'étude générale des 1-extensions engendrées par des permutations circulaires.

PROPOSITION 28 *Toutes relations R et R' , 1-extensions de base commune E et qui sont engendrées par des permutations circulaires sont telles que: Le graphe G_0 contient deux cycles ayant $2n + 2$ et $n + 1$ sommets.*

PREUVE: Noter que toute composante connexe de G_0 est soit un cycle soit une chaîne (au sens de la théorie des graphes).
Par hypothèse G_0 contient un cycle ayant $2n + 2$ sommets qu'on note C_0 :

$$(A_0, f_0) \longleftrightarrow (A_1, f_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, f_n) \longleftrightarrow (A_0, g_0)$$

$$(A_0, g_0) \longleftrightarrow (A_1, g_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, g_n) \longleftrightarrow (A_0, f_0)$$

Comme les emboitements sont formés chacun de trois triplets, on va montrer qu'il existe une composante connexe de G_0 qui est différente de C_0 .

Pour tout i dans $\{0, 1, \dots, n\}$.

Si $f_i^{-1}og_i = p$ alors $g_i = f_iop$ et $f_i = g_iog$ et on pose $h_i = f_iog = g_iop$.

Si $f_i^{-1}og_i = q$ alors $g_i = f_iog$ et $f_i = g_iop$ et on pose $h_i = f_iop = g_iog$.

• Considérons que $h_i = f_iog$ et $h_{i+1} = f_{i+1}og$ et supposons qu'il existe un isomorphisme local ϕ de domaine $A_i \cup A_{i+1}$ tel que

$$\phi/A_i = f_iog \text{ et } \phi/A_{i+1} \neq f_{i+1}og$$

$$\text{d'où } \phi op/A_i = f_i \text{ et } \phi op/A_{i+1} \neq f_{i+1}$$

Ainsi on aurait que f_i ne force pas f_{i+1} ce qui est absurde. Donc (A_i, h_i) force (A_{i+1}, h_{i+1}) . De même on montre que (A_{i+1}, h_{i+1}) force (A_i, h_i) .
Donc $(A_i, h_i) \longleftrightarrow (A_{i+1}, h_{i+1})$.

• Considérons maintenant que $h_i = f_iog$ et $h_{i+1} = f_{i+1}op$ et supposons qu'il existe un isomorphisme local ψ de domaine $A_i \cup A_{i+1}$ tel que

$$\psi/A_i = f_iog \text{ et } \psi/A_{i+1} \neq f_{i+1}op$$

$$\text{d'où } \psi op/A_i = f_i \text{ et } \psi oq/A_{i+1} \neq f_{i+1}$$

$$\text{On pose } \phi = \chi_{A_{i+1}}(\psi oq) + (1 - \chi_{A_{i+1}})(\psi op)$$

On a que ϕ est un isomorphisme local de domaine $A_i \cup A_{i+1}$ tel que $\phi/A_i = f_i$ et $\phi/A_{i+1} \neq f_{i+1}$. Et alors f_i ne force pas f_{i+1} , ce qui est absurde. Donc (A_i, h_i) force (A_{i+1}, h_{i+1}) . De même on montre que (A_{i+1}, h_{i+1}) force (A_i, h_i) .
Donc $(A_i, h_i) \longleftrightarrow (A_{i+1}, h_{i+1})$.

On obtient finalement le cycle suivant:

$$(A_0, h_0) \longleftrightarrow (A_1, h_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, h_n) \longleftrightarrow (A_0, h_0)$$

qui a $n + 1$ sommets. $\diamond$

COROLLAIRE 6 Avec les hypothèses et notations de la proposition précédente on a que R et R' sont isomorphes.

PREUVE: Considérer le cycle:

$$(A_0, h_0) \longleftrightarrow (A_1, h_1) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, h_n) \longleftrightarrow (A_0, h_0). \diamond$$

PROPOSITION 29 Si R' est une relation (-1) -hypomorphe à R alors R et R' sont deux 1-extensions engendrées par des permutations circulaires.

PREUVE: Similaire à celle de la proposition 27. $\diamond$

COROLLAIRE 7 Les 1-extensions engendrées par des permutations circulaires sont (-1) -reconstructibles.

5.2.5 CONCLUSION.

On obtient le résultat suivant:

THEOREME 2 Les 1-extensions sont (-1) -reconstructibles.

PREUVE: Le corolaire 5 et le corolaire 7. $\diamond$

5.3 QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LES k -EXTENSIONS (AVEC $k \geq 2$).

Contrairement à ce que l'on espérait (des contre-exemples), on obtient que les 1-extensions sont (-1) -reconstructibles.

La question qui vient naturellement est de savoir s'il en est de même pour des parties consécutives plus "grosses". D'où la définition et l'étude des k -extensions (pour $k \geq 2$).

Définition:

Les k -extensions sont définies de la même manière que les 1-extensions, seulement qu'ici les parties consécutives ont chacune $k + 2$ éléments.

• **EXEMPLE:**

On considère les permutations suivantes:

$$\begin{aligned} p &= (x, y, z, t) & q &= (x, t, z, y) & r &= (x, z, y, t) \\ s &= (x, t, y, z) & w &= (x, z, t, y) \end{aligned}$$

on prend R :

$$\begin{array}{ccccc} (x_0, y_0, t_1) & (z_1, y_1, z_2) & (t_2, x_2, y_3) & (z_3, t_3, t_4) & (y_4, z_4, t_0) \\ (y_0, z_0, z_1) & (y_1, x_1, y_2) & (x_2, z_2, z_3) & (x_3, y_3, y_4) & (x_4, t_4, z_0) \\ (z_0, t_0, y_1) & (x_1, t_1, t_2) & (z_2, y_2, x_3) & (t_3, z_3, x_4) & (z_4, y_4, y_0) \\ (t_0, x_0, x_1) & (t_1, z_1, x_2) & (y_2, t_2, t_3) & (y_3, x_3, z_4) & (t_4, x_4, x_0) \end{array}$$

On vérifie que G_0^{Aut} contient le cycle suivant:

$$(A_0, p) \longleftrightarrow (A_1, q) \longleftrightarrow (A_2, r) \longleftrightarrow (A_3, s) \longleftrightarrow (A_4, w) \longleftrightarrow (A_0, q)$$

$$(A_0, q) \longleftrightarrow (A_1, p) \longleftrightarrow (A_2, s) \longleftrightarrow (A_3, r) \longleftrightarrow (A_4, w^{-1}) \longleftrightarrow (A_0, p)$$

qu'on note C_0^{Aut} .

Si on prend $f_0 = (x_0)(y_0, z_0, t_0)$, $f_1 = (x_1, y_1)(z_1, t_1)$, $f_2 = (x_2)(t_2)(y_2, z_2)$, $f_3 = (y_3)(x_3, t_3, z_3)$, $f_4 = (x_4, z_4, t_4, y_4)$ et $g_0 = (x_0, z_0, y_0, t_0)$ alors on obtient R' :

$$\begin{array}{ccccc} (x_0, z_0, z_1) & (t_1, x_1, y_2) & (t_2, x_2, y_3) & (x_3, z_3, y_4) & (x_4, t_4, x_0) \\ (z_0, t_0, t_1) & (x_1, y_1, z_2) & (x_2, y_2, z_3) & (t_3, y_3, x_4) & (z_4, y_4, y_0) \\ (t_0, y_0, x_1) & (y_1, z_1, t_2) & (y_2, z_2, t_3) & (z_3, x_3, z_4) & (t_4, x_4, t_0) \\ (y_0, x_0, y_1) & (z_1, t_1, x_2) & (z_2, t_2, z_3) & (y_3, t_3, t_4) & (y_4, z_4, z_0) \end{array}$$

On vérifie qu'on a bien C_0 :

$$(A_0, f_0) \longleftrightarrow (A_1, f_1) \longleftrightarrow (A_2, f_2) \longleftrightarrow (A_3, f_3) \longleftrightarrow (A_4, f_4) \longleftrightarrow (A_0, g_0)$$

$$(A_0, g_0) \longleftrightarrow (A_1, g_1) \longleftrightarrow (A_2, g_2) \longleftrightarrow (A_3, g_3) \longleftrightarrow (A_4, g_4) \longleftrightarrow (A_0, f_0)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } g_1 &= (y_1)(t_1)(x_1, z_1) & g_2 &= (x_2, y_2, t_2)(z_2) \\ g_3 &= (x_3, z_3, t_3, y_3) & g_4 &= (x_4, t_4)(y_4, z_4) \end{aligned}$$

C_0 n'est pas la seule composante connexe non réduite à un sommet de G_0 .

• CLASSIFICATION DES k -EXTENSIONS.

Soit $k \geq 2$ un entier. Soient R et R' deux k -extensions de même base E . Le graphe G_0 contient le cycle C_0 :

$$\begin{aligned} (A_0, f_0) &\longleftrightarrow (A_1, f_1) \longleftrightarrow (A_2, f_2) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, f_n) \longleftrightarrow (A_0, g_0) \\ (A_0, g_0) &\longleftrightarrow (A_1, g_1) \longleftrightarrow (A_2, g_2) \longleftrightarrow \dots \longleftrightarrow (A_n, g_n) \longleftrightarrow (A_0, f_0) \end{aligned}$$

LEMME 17 *Pour tout i de $\{0, 1, \dots, n\}$ $f_i^{-1}og_i$ est une permutation dont la cycle-décomposition est formée au plus de 2 cycles.*

PREUVE: Soit i de $\{0, 1, \dots, n\}$ et supposons que $f_i^{-1}og_i$ soit une permutation dont la cycle-décomposition a au moins 3 cycles.

On va montrer qu'alors A_i n'est pas consécutive à A_{i+1} . En effet considérons l'emboîtement $(A_i, A_{i+1})_R$ et supposons sans perte de généralité qu'il est exactement l'orbite d'un triplet dont les deux premières composantes sont éléments de A_i . Comme la permutation $f_i^{-1}og_i$ admet au moins 3 cycles, il existe des éléments de A_i qui n'apparaissent pas dans $(A_i, A_{i+1})_R$. Il existe un isomorphisme local ϕ de domaine $A_i \cup A_{i+1}$ tel que $\phi|_{A_{i+1}} = Id$ et qui envoie les éléments de A_i qui n'apparaissent pas dans $(A_i, A_{i+1})_R$ sur des éléments qui ne sont pas dans $A_i \cup A_{i+1}$. On peut par exemple prendre celui qui fixe chaque élément de A_i qui apparaît dans $(A_i, A_{i+1})_R$. Donc A_i n'est pas consécutive à A_{i+1} . Ce qui est absurde. D'où le lemme. $\diamond$

Remarque: Si la permutation $f_i^{-1}og_i$ est telle que sa cycle-décomposition a 2 cycles et si l'emboîtement $(A_i, A_{i+1})_R$ est l'orbite d'un triplet dont les deux premières composantes sont éléments de A_i alors ces deux éléments ne sont pas dans le même cycle. Car sinon A_i ne serait pas consécutive à A_{i+1} .

PROPOSITION 30 G_0 est tel que:

Soit pour tout i on a que la permutation $f_i^{-1}og_i$ admet 2 cycles

Soit pour tout i on a que la permutation $f_i^{-1}og_i$ admet un seul cycle.

PREUVE: supposons que tout emboîtement (A_i, A_{i+1}) est orbite d'un triplet dont les deux premières composantes sont éléments de A_i .

Étant donné i , supposons que la permutation $f_i^{-1}og_i$ admette un seul cycle et que $f_{i+1}^{-1}og_{i+1}$ en ait deux. Alors tous les éléments de A_i apparaissent en première position de tout triplet de (A_i, A_{i+1}) ce qui n'est pas le cas lorsqu'on

considère les éléments de A_{i+1} et l'emboîtement (A_{i+1}, A_{i+2}) . D'où pour tout i si $f_i^{-1}og_i$ a un unique cycle alors il en est de même pour $f_{i+1}^{-1}og_{i+1}$. Le lemme précédent permet de conclure. $\diamond$

Remarque: Toute composante connexe non réduite à un sommet a au moins $n + 1$ sommets.

Il devient compliqué de procéder comme en 5.2 pour:

- Soit montrer que les k -extensions sont (-1) -reconstructibles
- Soit montrer qu'il existe une k -extension non-reconstructible.

Ce qui conduit à la recherche de conditions suffisantes de non-reconstructibilité. On affine la notion de point critique.

Pour les k -extensions on renforce la notion de point critique pour se rapprocher le plus possible de ce qui se produit pour les chaînettes de Pouzet.

Soit i de $\{0, 1, \dots, n\}$ et x de A_i . On dira que x est e -critique si lorsqu'on l'enlève on détruit l'emboîtement $(A_{i-1}, A_i)_R$ ou $(A_i, A_{i+1})_R$.

Si c'est l'emboîtement $(A_{i-1}, A_i)_R$ qui est détruit on dit que x est critique par rapport à A_{i-1} et l'ensemble de ces éléments est noté A_i^- .

Si c'est plutôt $(A_i, A_{i+1})_R$ alors on dit que x est critique par rapport à A_{i+1} et l'ensemble de tels éléments est noté A_i^+ .

LEMME 18 *Si tout élément de E est e -critique alors pour tout i on a $\text{Card}(A_i) < 4$.*

PREUVE: Étant donnée A_i on pose $A_i = A_i^- \cup A_i^+$.

Tous les éléments de A_i^- (resp. A_i^+) sont composantes de tout triplet liant A_{i-1} et A_i (resp. A_i et A_{i+1}) car sinon au moins un élément de A_i^- (resp. A_i^+) ne serait pas e -critique par rapport à A_{i-1} (resp. A_{i+1}).

D'où $\text{Card}(A_i^-) \leq 2$ et $\text{Card}(A_i^+) \leq 2$ et donc $\text{Card}(A_i) \leq 4$.

Supposons maintenant que chaque partie A_i ait quatre éléments et considérons l'emboîtement $(A_i, A_{i+1})_R$.

Tout triplet liant A_i et A_{i+1} est tel que deux composantes sont dans A_i^+ et une dans A_{i+1}^- ou bien deux sont dans A_{i+1}^- et une dans A_i^+ . On aurait alors que soit un élément de A_i^+ n'est pas e -critique par rapport à A_{i+1} soit un élément de A_{i+1}^- n'est pas e -critique par rapport à A_i . Ce qui est absurde, d'où le résultat. $\diamond$

• PROBLÈME:

J'ignore ce qu'il en est de la restructurabilité d'une relation ternaire dont le graphe de forçage G_0 est un cycle non orienté dont chaque partie a 3 éléments et dont tout élément de la base est α -critique.

• NOTION DE f -CRITIQUE.

Définition: Soient i de $\{0, 1, \dots, n\}$ et x de A_i .

On dira que x est f -critique si lorsqu'on l'enlève on détruit tout forçage entre tous les isomorphismes locaux de G_0 de domaine A_{i-1} et A_i ou bien entre ceux de domaine A_i et A_{i+1} .

PROPOSITION 31 Soient R et R' deux k -extensions.

Si les assertions suivantes sont vérifiées:

1. Toute composante connexe de G_0 (non réduite à un sommet) a au moins $n+2$ sommets.
2. Pour tout i et tout x de A_i on a que x est f -critique et qu'il existe un isomorphisme local $(A_i - \{x\}, \phi)$ tel que:
 - $(A_i - \{x\}, \phi) \rightarrow (A_{i+1}, \psi_{i+1})$
 - où (A_{i+1}, ψ_{i+1}) est dans une composante connexe (non réduite à un sommet) de G_0 et
 - G_0 contient un chemin de forçage:

$$(A_{i+1}, \psi_{i+1}) \rightarrow (A_{i+2}, \psi_{i+2}) \rightarrow \dots \rightarrow (A_n, \psi_n) \rightarrow (A_0, \psi_0) \rightarrow \dots \rightarrow (A_{i-1}, \psi_{i-1})$$

Alors R et R' sont non-reconstructibles.

PREUVE: La première condition assure la non isomorphie tandis que la seconde donne la (-1) -hypomorphie entre R et R' . $\diamond$

• PROBLÈMES:

1. Existe-t-il des k -extensions vérifiant les assertions 1. et 2.?
2. On peut considérer de nouvelles classes de relations ternaires en imposant des contraintes sur le graphe de forçage G_0 . Par exemple on peut imposer que G_0 soit connexe.

BIBLIOGRAPHIE

- [BH77] J.A. BONDY, R.L. HEMMINGER, Graph reconstruction, a survey, *Journal of graph theory*, 1, (1977), 227-268.
- [Co96] S. CONILH, *Etude de structures ternaires non restructuribles*, Thèse Université de Savoie, Chambéry, (1996).
- [Fra86] R. FRAÏSSÉ, *Theory of relation*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, (1986).
- [Fras65] C. FRASNAY, Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 15, Fasc.2 (1965), 415-524.
- [FL90] R. FRAÏSSÉ ET G. LOPEZ, *La reconstruction d'une relation dans l'hypothèse forte: isomorphie des restrictions à chaque partie stricte*, Les Presse de l'Université de Montréal, N° 109, (1990).
- [Gal67] T. GALLAI, Transitiv orientierbar Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 18, (1967), 25-66.
- [Gna91] C. GNANVO, Les tournois (-1) -chaînes, *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 37, n° 1, (1991), 27-37.
- [GI92] C. GNANVO, P. ILLE, La reconstruction des tournois sans diamant, *Zeitschr. f. math. logik und grundlagen d. math.*, Bd 38, (1992), 283-291.
- [GM71] M. GOLBERG, J.W. MOON, Arc mappings and tournaments isomorphisms, *J. London Math. Soc.*, (2), 3, (1971), 378-384.

- [Ill92] P. ILLE, The reconstruction of multirelations, at least one component of which is a chain. *Journal of combinatorial theory, series A*, 61, (1992), 279-291.
- [Kel85] D. KELLY, Comparability graphs, in *Graphs and orders*, Rival ed., D. Reidel Publishing Company, (1985), 3-40.
- [PJK57] P.J. KELLY, A congruence theorem for trees, *Pacific J. Math.*, 7, (1957), 961-968.
- [Ko84a] W.L. KOCAY, Constructing a family of non-reconstructible digraphs, *Journal of Combinatorics, Information and system sciences*, N° 1, Vol. 9, (1984), 25-33.
- [Ko84b] W.L. KOCAY, Partial Automorphisms and the reconstruction conjecture, *J. Austral. Math. Soc. (series A)*, 37, (1984), 317-336.
- [Ko85] W.L. KOCAY, On Stockmeyer's non-reconstructible tournaments, *Journal of graph theory*, Vol.9, (1985), 473-476.
- [Ko88] W.L. KOCAY, Hypomorphisms, orbits and reconstruction, *Journal of Combinatorial theory, series B*, N° 2, Vol. 44, (1988), 187-200.
- [KL88] W.L. KOCAY AND Z.M. LUI, More non-reconstructible hypergraphs, *Discrete Mathematics*, 72, (1988), 213-224.
- [Lo78] G. LOPEZ, Indéformabilité des relations et multirelations binaires, *Z. Math. Logik*, 24, (1978), 303-317.
- [Lo] G. LOPEZ, Communication personnelle.
- [Mj91] N. MAJID, Tournois libres de certains sous-tournois, *C.R. Acad. Sci. Paris, serie I t.312*, (1991), 363-366.
- [Mo68] J.W. MOON, *Topics on tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New York, (1968).
- [Po79a] M. POUZET, Note sur le problème de Ulam, *Journal of combinatorial theory, series B*, 27, (1979), 231-236.

- [Po79b] M. POUZET, Relations non-reconstructibles par leurs restrictions, *journal of combinatorial theory, series B*, N° 1, Vol. 26, (1979), 22-34.
- [RV91] F. REVERDY-VILOTICH, La reconstruction au sens de Ulam de certaines multirelations binaires, *Discrete Mathematics*, 93, (1991), 89-95.
- [ST93] J.H. SCHMERL, W.T. TROTTER, Critically indecomposable partially ordered sets, graph, tournaments and other binary relational structures, *Discrete Mathematics*, 113, (1993), 191-205.
- [Sto77] P.K. STOCKMEYER, The falsity of the reconstruction conjecture for tournaments, *Journal of Graph theory*, 1, (1977), 19-25.
- [Ula60] S.M. ULAM, *A collection of mathematical problems*, Intersciences Publishers, New York, (1960).

NOM : <i>SOLA</i> (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)		DATE de SOUTENANCE	
Prénoms : <i>Étienne</i>		<i>23/10/1997</i>	
TITRE : <i>Structures de familles d'isomorphismes locaux et restructibilité</i>			
NATURE :		Numéro d'ordre :	
NOUVEAU ☒ DOCT	LABEL EUROPEEN ☐ OUI ☐ NON	Spécialité :	
Cote B.I.U. - Lyon : <i>T 50/210/19 /</i> et <i>bis</i>		CLASSE :	
RESUME :			
Mon travail se situe en theorie des relations et porte sur le thème de la restructibilité des multirelations binaires et des relations ternaires. La problématique de la reconstruction remonte à S. Ulam (1954) : " Soient deux relations R et S de même base E et vérifiant la condition: pour tout x de E les restrictions R et S à $E - \{x\}$ sont isomorphes. La question est: R et S sont-elles alors isomorphes." Une reponse affirmative a été obtenue pour de nombreuses classes de graphes et de relations. Mais la reponse est négative dans le cas général avec notamment des contre-exemples de cardinalité arbitrairement grande dus à P. K. Stockmeyer pour les relations binaires et à M. Pouzet pour les relations d'arité plus grande que 2. Une première partie de la thèse porte sur les multirelations (suite de relations) dont une composante appartient à une classe de tournois rotatifs (T_k). Je montre que ces multirelations sont restructibles dès que le nombre d'élément de leur base est plus grand que 7. Ceci prolonge les travaux de P. Illé, F. Reverdy-Vilotitch et M. Pouzet. L'isomorphisme obtenu entre les multirelations R et S est défini à l'aide des isomorphismes locaux entre T_k et son homologue. J'affine également le résultat de F. Reverdy-Vilotitch, en déterminant la nature des paires de E dans chaque composante de R et S. Dans la deuxième partie de la thèse j'étudie la propriété de non restructibilité et la notion de forçage d'isomorphismes locaux due à G. Lopez. A partir de l'analyse des contre-exemples de M. Pouzet, je défini les notions "d'emboîtement" et de "point critique". Je construis plusieurs classes de relations ternaires restructibles. Je parviens notamment à exhiber une classe de relations ternaires restructibles dont tous les sommets sont critiques.			
MOTS-CLES : relation multirelation hypomorphisme décomposition emboîtement reconstruction forçage d'isomorphismes locaux parties consécutives point critique			
Laboratoire(s) de recherches : <i>Mathématiques discrètes</i>			
Directeur de recherches : <i>Gérard LOPEZ</i>			
Président de jury : <i>André Fraïssé</i>			
Composition du jury : <i>R. BONNET, P. ILLÉ, N. POLAT, M. POUZET</i>			

