UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

UFR d'Economie de Besançon

THÈSE DE DOCTORAT

LA GUERRE D'USURE

Présentée par

TOBOSSI Cossi Gilles Sylvain

Soutenance Publique: 09 Juillet 2009

Dirigée par

M. Pierre-Henri MORAND, Professeur des Universités

Université de Franche-Comté / UFR d'Economie de Besançon (France)

Jury

Président: M. Pierre-Henri MORAND, Professeur des Universités, Université de Besançon

Membres: **M.** AXEL GAUTIER, Rapporteur du Jury, Associate Professor, Université de Liège

M. Grégoire ROTA GRAZIOSI, Rapporteur du Jury, Professeur des Universités, Université d'Auvergne

M. Lionel THOMAS, Membre du Jury, Maître de Conférences HDR, Université de Besançon

RESUME

La synthèse de littérature de cette thèse met en évidence les différents équilibres auxquels conduit une guerre d'usure standard selon que l'environnement informationnel du jeu soit complet ou incomplet, et présente l'analyse économique de diverses compétitions appréhendées comme des guerres d'usure par la littérature économique.

Le premier apport montre que la compétition au départ entre firmes concurrentes dans un monopole naturel lorsqu'il y a asymétrie d'information sur les fonctions de coûts des firmes, peut être analysée comme une guerre d'usure spécifique à l'issue de laquelle, la firme la plus efficace est celle qui gagne la compétition.

Le deuxième apport analyse comme une guerre d'usure, le conflit armé qui s'établit entre une dictature au pouvoir et la population civile lors du partage des richesses nationales issues de l'exploitation des ressources naturelles. Dans une telle compétition, la part minimale de richesse espérée par chaque partie est une information privée.

Le troisième apport propose un jeu de guerre d'usure basé sur un stage d'évaluation pour recruter parmi des demandeurs d'emploi sans expériences professionnelles, le plus compétent à un poste nécessitant des compétences spécifiques avérées lorsqu'il y a asymétrie d'information sur les compétences générales des demandeurs d'emploi et que leurs compétences spécifiques sont inconnues de tous.

ABSTRACT

The literature synthesis of this thesis highlights standard war of attrition different equilibria in complete or incomplete information and presents the economic analysis of various competitions apprehended as a war of the attrition by economic literature.

The first contribution shows that the competition at the start between rival business firms in a natural monopoly when there is asymmetry of information on their costs functions can be analysed as a specific war of attrition in which, the most efficient firm win the competition.

The second contribution analyses as a war of attrition, the armed conflict between a dictatorial power and the civil population during the sharing of national wealth resulting from the exploitation of natural resources. In such competition, the minimal part of wealth expected by every party is private information.

The third contribution proposes a war of attrition game based on a training period of valuation to recruit among job-seekers without work experiences, the most competent in a post requiring specific competences when there is asymmetry of information on the general competences of the job-seekers and their specific competences are unknown of all.

Table des matières

Introduction générale

L'objectif de cette thèse, est d'utiliser la **"guerre d'usure"** comme un instrument d'analyse économique de différentes situations de compétition relevant des jeux de temporalité (jeux qui se déroulent dans le temps) et pouvant être appréhendées comme une guerre d'usure.

La guerre d'usure est un sous ensemble de jeux, dans la catégorie des différents jeux de temporalité (timing games). Dans une guerre d'usure, les joueurs sont en compétition sur un **horizon temporel infini et la variable stratégique de chaque joueur est le temps au bout duquel, il prend la décision de sortir de la compétition. Une fois que la décision de sortir de la compétition est prise, le joueur ne joue plus un rôle stratégique dans le jeu de guerre d'usure.**

Dans la littérature économique, une compétition qui se déroule dans le temps, est alors considérée comme une guerre d'usure si elle respecte la condition suivante: **Les joueurs engagent dans la compétition des coûts non récupérables sachant qu'à l'issue d'une telle compétition, chaque participant attend un gain possible en cas de victoire.**

En partant de cette condition qui caractérise la guerre d'usure, la présence actuelle des Etats-Unis et ses alliés en Irak est une véritable guerre d'usure dans la mesure où cette guerre se déroule dans le temps et occasionne des coûts collatéraux (coûts non récupérables) pour les deux parties. Cette invasion débutée en 2003, était officiellement prévue pour durer quelques mois mais force est de constater que le conflit perdure jusqu'aujourd'hui. L'armée américaine étant toujours une puissance occupante alors que différentes composantes irakiennes semblent s'être engagées dans une guerre civile destructrice. Cette guerre multiforme combine résistance à l'occupant (Etats-Unis et alliés), terrorisme et lutte entre différentes composantes de la population.

Selon le rapport de la commission **"Iraq Study Group"** mise en place par le congrès américain et co-présidé par Hamilton H. et Baker A. (2006), trois mille civils Irakiens meurent chaque mois.

La **Mission d'Assistance des Nations Unies pour l'Irak** (2006), se basant sur les données collectées à partir des informations disponibles au niveau du gouvernement irakien et de l'institut médico-légal de Bagdad, la MANUI (2006) affirme que plus de trente quatre mille civils ont été tués et trente six mille blessés dans les violences en Irak en 2006. **Iraq Body Count Project (2007)**, une ONG britannique, estime qu'entre 58908 et 64729 civils Irakiens étaient morts depuis l'offensive américaine. Plus alarmant encore une étude menée par **Burnham G. et al. (2006)**, évalue à six cent cinquante cinq mille (655000) le nombre de civils Irakiens tués de mars 2003 à juillet 2006.

Selon le site **"icasualties.org"** le bilan des pertes en vies humaines dans le camps de la coalition serait, du 20 mars au 30 juin 2008: De 4427 dont 4113 soldats Américains (3353 au combat), 176 soldats britanniques et 138 soldats d'autres pays alliés. Selon le site **"antiwar.com"**, la coalition a enregistré plus de trente six mille (36000) blessés dont 30333 américains.

Selon **Merchet J. D. (2006)**, en mai 2006, on dénombrait dans les forces armées des Etats-Unis:

- Deux mille quatre cent (2400) morts et 17469 blessés, dont 8137 victimes d'un handicap permanent, soit un total d'environ vingt mille soldats mis hors de combat, environ 12% des effectifs engagés.

- Cent trente mille hélicoptères perdus, dont quatorze CH-47 Chinook et cinquante deux AH-64 Apache (coûtant plus de 56millions de dollars l'unité), et cent dix huit hélicoptères endommagés[1].

[1]Le coût financier de la guerre en Irak peut en partie être calculé à partir des mesures budgétaires votées par le congrès des Etats-Unis en sus des budgets de fonctionnement pour financer la guerre.

Notre thèse est organisée autour de cinq chapitres. Le premier et le deuxième chapitre présentent une synthèse de littérature. Les trois autres chapitres sont le fruit de travaux personnels.

Le **premier chapitre**, présente une synthèse de littérature qui montre que la guerre d'usure possède en information complète, des équilibres multiples en stratégies pures étant donné qu'elle se déroule sur un horizon temporel infini. Hendricks K., Weiss A., et Wilson C. (1988); Hendricks K. et Wilson C. (1989), dans un jeu à deux joueurs ont présenté les équilibres multiples en stratégies pures résultant d'un jeu de guerre d'usure à information complète. Mais ils ont aussi montré que ce jeu possède un équilibre unique en stratégies mixtes. D'autres approches d'analyse de la guerre d'usure qui sont basées sur des hypothèses introduisant dans celle-ci un environnement d'asymétrie d'information, montrent que la guerre d'usure possède un équilibre unique en stratégies pures qui permet de faire une prédiction quant à l'issue d'un jeu de guerre d'usure.

Nous allons présenter notamment d'une part l'approche qui appréhende la guerre d'usure par **les mécanismes d'enchère** et d'autre part celle qui introduit dans la guerre d'usure, **une hypothèse de temps de jeu limite**.

Dans l'approche qui appréhende la guerre d'usure par les mécanismes d'enchère, nous allons exposer les travaux théoriques de Vijay K. et Morgan J. (1997) **dont l'intérêt a été de comparer la performance réalisée (revenu espéré) dans la guerre d'usure à celle réalisée dans différentes enchères traditionnelles (enchère au premier prix, enchère au second prix, enchère all-pay)**.

Après avoir mis en évidence les mécanismes traditionnels d'analyse de la guerre d'usure dont les hypothèses introduisent dans celle-ci un environnement d'asymétrie d'information, nous allons présenter dans le **deuxième chapitre**, une synthèse de littérature sur différentes situations de compétition dans lesquelles, la **guerre d'usure** a été utilisée comme un outil d'analyse économique de telles compétitions.

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre, à des situations de compétition telles que:

- La compétition entre plusieurs firmes sur un marché où chaque firme se bat pour faire partir des quelques firmes qui vont survivre à la compétition et rester sur le marché. Dans ce cadre nous allons présenter les travaux théoriques de Bulow J. et Klemperer P. (1999) qui vont analyser la compétition dans un **oligopole naturel** comme une **guerre d'usure à plusieurs gagnants**.

- Les guerres de sécession ou de colonisation: Nous allons présenter les travaux de McAfee R. (2000) qui appréhendent la bataille territoriale entre deux parties (pays) qui essaient d'étendre leur frontières comme un **jeu à plusieurs guerres d'usure successives** (guerre d'usure continue).

Les chapitres suivants visent à établir des jeux de guerre d'usure basés sur des mécanismes d'enchères spécifiques qui diffèrent de l'approche traditionnellement développée dans la littérature économique. Ceci nous permettra de faire une analyse économique fiable de différentes situations de compétition pouvant être appréhendées comme une guerre d'usure.

Dans le **troisième chapitre**, nous analysons la compétition qui s'installe au départ entre firmes concurrentes dans un monopole naturel où l'existence de rendements d'échelle croissants impose la présence d'une seule firme pour servir efficacement la demande du secteur d'activité concerné.

Pour formaliser une telle compétition nous allons proposer un jeu de guerre d'usure basé sur un mécanisme d'enchères spécifique dans lequel, les joueurs engagent par unité de temps dans la compétition des paiements différents du fait qu'ils n'ont pas les mêmes fonctions de coûts ou simplement deux joueurs qui abandonnent à la même période supportent des coûts de compétition différents. Cette approche diffère de celle d'un jeu de guerre d'usure traditionnellement développée dans la littérature. En effet dans un jeu de guerre d'usure standard, les joueurs engagent dans le jeu les mêmes paiements par unité de temps et ce qui les différencie est la différence entre les seuils de coûts qu'ils sont capables de supporter ou simplement le temps pendant lequel un joueur peut tenir dans la compétition car deux joueurs qui abandonnent à la même période supportent les mêmes coûts de compétition.

Dans le **quatrième chapitre**, nous allons nous intéresser aux conflits armés dans lesquels, la population civile combat la dictature[2] (soutenue par les multinationales) au pouvoir dans le but de contraindre ce dernier à concéder au peuple, une part plus importante des richesses issues de l'exploitation des ressources naturelles du pays.

La part minimale de richesse espérée par chaque protagoniste dans cette compétition étant **une information privée**, on est alors dans un **jeu de partage qui pose le problème suivant: Comment se dénoue le conflit armé dans la mesure où, la dictature au pouvoir ignore la part minimale espérée par la population civile et en deçà de laquelle, elle ne déposera pas les armes**.

Pour résoudre le problème de dénouement d'un tel conflit, nous allons appréhender le **conflit comme un jeu de guerre d'usure basé sur un mécanisme d'enchère spécifique dans lequel:**

- La population civile gagne au moins sa part minimale espérée quelque soit sa période d'abandon.

- La dictature au pouvoir gagne une part de richesse supérieure à la part minimale qu'elle espère confisquer si seulement, son adversaire abandonne en premier la compétition. Tandis qu'elle ne gagne rien, en abandonnant en premier la compétition.

[2] La dictature étant soutenue, par les multinationales, il faut entendre par dictature l'ensemble Pouvoirs publics- multinationales

Un tel type de jeu de guerre d'usure diffère de l'approche traditionnellement développée dans la littérature. En effet dans un jeu de guerre d'usure standard, un joueur qui abandonne en premier la compétition ne gagne rien, alors que dans notre jeu de partage, la population civile gagne sa part minimale du gâteau en abandonnant en premier la compétition.

Dans le **cinquième chapitre**, nous examinons la compétition entre demandeurs d'emploi diplômés, lorsqu'il y'a une asymétrie d'information entre demandeurs d'emplois et recruteurs du fait que le recruteur ignore si le postulant est compétent ou non pour le poste en jeu, alors que le demandeur est conscient de ses capacités réelles.

Dans notre analyse pour résoudre ce problème de choix du demandeur d'emploi le plus compétent lorsqu'il y'a asymétrie d'information entre recruteurs et demandeurs d'emploi, nous allons proposer un mécanisme de recrutement notamment pour les fonctions nécessitant en plus des compétences générales, certaines compétences spécifiques. Ce mécanisme sera basé sur un jeu de guerre d'usure spécifique où la règle de décision est différente de celle d'un jeu de guerre d'usure standard avec enchères où le perdant est celui qui abandonne en premier la compétition. **Ainsi dans le mécanisme d'enchères que nous allons développer, chaque joueur à une chance de gagner la compétition quelque soit la période où ce dernier abandonne la compétition**. Comme Arrow K. (1973) et Spence A.M. (1974), nous partons du fait que le niveau de compétences générales (diplôme) est un signal imparfait. Ainsi dans notre analyse, en plus du niveau de compétences générales, le niveau de compétences spécifiques intervient pour déterminer la victoire d'un joueur.

Chapter 1

La guerre d'usure

1.1 Introduction

Les situations mettant en compétition deux ou plusieurs individus pour un gain possible à l'issue de la compétition impliquent généralement de la part des différents adversaires un investissement en terme de coût et de temps. Un tel investissement constitue pour chaque individu une perte sèche même si à l'issue de la compétition, celui-ci ne gagne pas. De telles compétitions sont qualifiées dans la littérature économique de « Guerre d'usure ».

Dans sa version de départ (version Biologie), la guerre d'usure a été appréhendée pour la première fois par Maynard S J. (1974), comme un modèle de compétition entre deux animaux de même espèce qui disputent une femelle ou un morceau de nourriture. Elle permettra aussi plus tard l'analyse de phénomènes économiques ou politiques tels que :

- La sortie dans un oligopole,
- Les disputes au parlement sur les budgets d'un gouvernement,

- Les guerres de Sécession ou de Colonisation,
- La course à la recherche et au développement.

Maynard S. J. (1974), dans la guerre d'usure entre deux animaux distingue le cas où les animaux s'observent mais ne combattent pas physiquement du cas où ils combattent physiquement. Dans le cas où les deux animaux s'observent seulement, l'attente est coûteuse et l'animal qui renonce en premier perd la prime alors que dans le cas où les deux animaux combattent physiquement, c'est l'animal le plus fort physiquement qui obtient la prime. Maynard S. J. (1974), examine l'équilibre symétrique de ce jeu où chaque joueur sort de la compétition avec un taux de hasard qui est indépendant du temps (constant). Il faut comprendre par taux de hasard, la probabilité qu'un joueur abandonne la compétition à un instant donné sachant qu'il est resté dans la compétition jusqu'à cet instant. Cet équilibre spécifie qu'à un quelconque point particulier du jeu, les deux joueurs sont indifférents entre abandonner ou continuer le combat. Cette caractéristique de l'équilibre implique qu'ex-ante, chaque joueur perçoit une utilité égale à l'utilité qu'il aurait en sortant immédiatement du jeu car en retardant sa sortie dans la perspective de gagner la guerre d'usure, il gagne seulement ce qu'elle aurait donné en quittant immédiatement. Bishop D. et Cannings C. (1978), Riley J. (1979 et 1980), ont aussi mené des analyses similaires sur l'espèce animale.

La modélisation de situations relevant de la guerre d'usure peut se faire dans une logique de temps discret mais il est plus commode de l'appréhender sous un horizon de temps continu. Evidemment le temps est coûteux pour chaque individu engagé dans la compétition qui est un jeu non coopératif dans lequel tous les joueurs jouent simultanément. Il s'agit alors de rechercher des équilibres de Nash qui définissent le profile de stratégies des joueurs.

Hendricks K., Weiss A. et Wilson C. (1988), ont montré que la guerre d'usure possède en information complète, un très grand nombre d'équilibres de Nash en stratégies pures du fait que les joueurs n'ont aucune information sur la date de fin de jeu. Dans la même optique, Ponsati C. et Sàkovics J. (1995) vont mettre en évidence un continuum d'équilibres en stratégies pures dans un jeu de guerre d'usure à deux joueurs mais ils vont aussi montrer que sous certaines hypothèses qui introduisent dans la guerre d'usure un environnement d'asymétrie d'information, celle-ci conduit à un équilibre unique.

Vijay K. et Morgan J. (1997) en supposant que le temps pendant lequel chaque joueur peut rester en compétition dans une guerre d'usure est une information privée, vont analyser la guerre d'usure comme un jeu d'enchère au second prix avec un aspect "all-pay". Ainsi le paiement engagé par chaque joueur dans la compétition est irrécupérable alors que le paiement supporté par un joueur qui gagne la compétition est égal à au deuxième paiement le plus élevé engagé dans la compétition lorsqu'on admet que l'individu qui engage le paiement le plus élevé remporte l'enchère.

Kornhauser L., Rubinstein A. et Wilson C. (1989); Amann E. et Leininger W. (1996); Riley J. (1999); Bilodeau M. et Slivinski A. (1996) en utilisant des mécanismes basés sur des hypothèses qui introduisent dans la guerre d'usure un environnement d'asymétrie d'information, ont montré que la guerre d'usure possède un équilibre unique en stratégies pures. Ainsi:

- Amann E. et Leininger W. (1996); Riley J. (1999), utilisent une **enchère "all-pay" hybride** comme mécanisme d'analyse de la guerre d'usure,

- Bilodeau M. et Slivinski A. (1996) utilisent une approche basée sur **l'hypothèse de temps limite** pour analyser la guerre d'usure.

Nous allons présenter dans la section suivante, le concept d'équilibre multiple en stratégies pures dans la guerre d'usure et l'analyse de la guerre d'usure par des approches basées sur des hypothèses qui introduisent dans celle-ci un environnement d'asymétrie d'information.

1.2 Equilibres multiples en stratégies pures dans la guerre d'usure

La guerre d'usure en information complète, est un jeu qui se déroule sur un horizon temporel infini. Etant donné que les joueurs n'ont aucune information sur la date de fin du jeu, alors le folk theorem (Friedman J. (1971), Fudenberg D. et Maskin E. (1986)) stipule l'existence d'un très grand nombre d'équilibres de Nash en stratégies pures.

Nous allons exposer les résultats théoriques développés par Hendricks K., Weiss A., Wilson C. (1988) et Hendricks K., Wilson C. (1989) dans une guerre d'usure à deux joueurs.

1.2.1 Modalités du jeu

Il s'agit de recherche d'équilibres de Nash symétriques dans un jeu à information complète et à horizon temporel infini dans lequel, deux individus sont en compétition pour une prime dont la valeur courante v (strictement positive) est constante avec le temps. **Un tel environnement est celui d'une guerre d'usure dite stationnaire**.

La compétition coûte c (constant et strictement positif avec $c < v$) par unité de temps pour chaque joueur.

Lorsqu'un joueur abandonne la compétition à un instant t quelconque, son adversaire gagne la prime et aucun coût n'est supporté à cet instant par les deux adversaires.

Lorsque les deux joueurs abandonnent simultanément le combat, aucun d'eux ne gagne la prime.

Etant dans un jeu à information complète symétrique, et en considérant qu'il y'a un facteur d'actualisation du temps μ (strictement positif et inférieur à 1), on peut alors définir les utilités actualisées (à la période 0) du gagnant et du perdant lorsqu'un des deux joueurs abandonne la compétition à un instant t quelconque. Soit:

Utilité du gagnant:

$$\bar{u}(t) = \mu^t v - c(1 + \mu + ...\mu^{t-1}) = \mu^t v - c\frac{1 - \mu^t}{1 - \mu}$$

Utilité du perdant:

$$\underline{u}(t) = -c(1 + \mu + ...\mu^{t-1}) = -c\frac{1 - \mu^t}{1 - \mu}$$

On peut constater que la guerre d'usure possède plusieurs équilibres de Nash en stratégies pures définis par les profiles de stratégies suivants :

- Le joueur 1 joue la stratégie « Ne jamais abandonner » et le joueur 2 joue la stratégie « Abandonner toujours »,

- Le joueur 1 joue la stratégie « Ne jamais abandonner » et le joueur 2 joue la stratégie
« Ne jamais abandonner »,

- Le joueur 1 joue la stratégie « Abandonner toujours » et le joueur 2 joue la stratégie « Abandonner toujours »,

- Le joueur 1 joue la stratégie « Abandonner toujours » et le joueur 2 joue la stratégie
« Ne jamais abandonner ».

Etant dans un jeu à information complète; il s'agira de rechercher un équilibre symétrique stationnaire unique en stratégies mixtes. Nous allons présenter dans les deux sections suivantes,cet équilibre en temps discret comme en temps continu.

1.2.2 Equilibre en temps discret

Chaque joueur joue la stratégie mixte suivante: « Si mon adversaire n'abandonne pas avant t, alors j'abandonne à t avec la probabilité p ». Avec $p \in [0;1]$.

Pour que ce profile de stratégies mixtes soit un équilibre de Nash il doit satisfaire la **condition d'équilibre suivante :** Pour tout t, l'utilité $(\underline{u}(t))$ d'un joueur qui abandonne à t sachant que son adversaire n'a pas abandonné précédemment doit être égale à son utilité (utilité espérée à t) de rester en compétition jusqu'à $t+1$ et d'abandonner.

En effet lorsque le joueur à l'instant t, anticipe rester en compétition jusqu'à $t+1$, alors celui-ci est face aux deux éventualités suivantes:

- Son adversaire abandonne la compétition avant $t+1$ (donc à t): Dans ce cas, il est aussi contraint d'abandonner à t (il gagne la compétition) avec la probabilité p et son utilité est:

$$\bar{u}(t) = \mu^t v - c\frac{1-\mu^t}{1-\mu}$$

- Son adversaire n'abandonne pas avant $t+1$: Dans ce cas, il abandonne la compétition le premier à $t+1$ (il perd la compétition) avec la probabilité $1-p$ et son utilité est:

$$\underline{u}(t+1) = -c\frac{1-\mu^{t+1}}{1-\mu}$$

Ainsi la condition d'équilibre permet d'écrire:

$$\underline{u}(t) = p\bar{u}(t) + (1-p)\underline{u}(t+1)$$

En remplaçant $\underline{u}(t)$, $\bar{u}(t)$ et $\underline{u}(t+1)$ par leur valeurs, il vient:

$-c\frac{1-\mu^{t+1}}{1-\mu} = p(\mu^t v - c\frac{1-\mu^t}{1-\mu}) - (1-p)c\frac{1-\mu^{t+1}}{1-\mu}$. Après simplification il vient:

$c\mu^t = p\mu^t(v+c)$. Ceci implique:

$$p^* = \frac{c}{v+c}$$

On peut remarquer:

- Que la probabilité p^* qu'un joueur abandonne la compétition à une période t quelconque sachant que son adversaire n'a pas abandonné, est indépendante du facteur d'actualisation du temps μ qui permet de définir les utilités actualisées des joueurs lorsqu'un des deux joueurs abandonne la compétition à la période t.

- Que p^* est une fonction décroissante de la prime v pour laquelle les joueurs sont en compétition dans la mesure où: $\frac{\partial P^*}{\partial v} = \frac{-c}{(v+c)^2} < 0$. Plus précisément lorsque $v \to \infty$ à l'équilibre du jeu, la probabilité qu'un joueur abandonne la compétition à une période t quelconque sachant que son adversaire n'a pas abandonner avant est nulle.

- Que p^* est une fonction croissante du coût de compétition c dans la mesure où: $\frac{\partial P^*}{\partial c} = \frac{v}{(v+c)^2} > 0$. Plus précisément lorsque $c \to \infty$ à l'équilibre du jeu, la probabilité qu'un joueur abandonne la compétition à une période t quelconque sachant que son adversaire n'a pas abandonner avant est égale à 1 car $\underset{c\to+\infty}{Lim}\, p^* = \underset{c\to+\infty}{Lim}\left(\frac{c}{c(\frac{v}{c}+1)}\right) = 1$.

On peut alors conclure qu'à **l'équilibre unique stationnaire en stratégies mixtes**, la probabilité d'abandon d'un joueur devient de plus en plus faible lorsque la prime en jeu devient de plus en plus intéressante alors qu'elle devient de plus en plus forte au fur à mesure que le coût de compétition augmente.

Il serait maintenant intéressant d'appréhender la variation de p^* induite par la variation simultanée de c et de v. Lorsque les variables v et c augmentent respectivement des quantités dv et dc, la variation $dp*$ de p^* est telle qu'en appliquant la formule de la différentielle totale, on a:

$dp^* = \frac{\partial p^*}{\partial v} dv + \frac{\partial p^*}{\partial c} dc,$

en remplaçant $\frac{\partial p^*}{\partial v}$ et $\frac{\partial p^*}{\partial c}$ par leurs valeurs, il vient:

$dp^* = \frac{-c}{(v+c)^2} dv + \frac{v}{(v+c)^2} dc,$

$dp^* = \frac{1}{(v+c)^2} [-cdv + vdc].$

Etant donné que la quantité $\frac{1}{(v+c)^2}$ est strictement positive car $c > 0$ et $v > 0$, le signe de dp^* est le signe de la quantité $(-cdv + vdc)$.

Ainsi: Si $-cdv + vdc > 0$, il vient: $\frac{v}{c} > \frac{dv}{dc}$.

On peut alors conclure suite à une augmentation simultanée de v et c que:

- p^* augmente lorsque $\frac{v}{c} > \frac{dv}{dc}$,

- p^* diminue lorsque $\frac{v}{c} < \frac{dv}{dc}$,

- $dp^* = 0$, lorsque $\frac{v}{c} = \frac{dv}{dc}$.

1.2.3 Equilibre en temps continu

Ici on va remplacer le terme d'actualisation μ^t par le terme e^{-rt} (r est le taux d'intérêt) et soit $F(t)$, la probabilité q'un joueur $i(i = 1; 2)$ abandonne la compétition avant ou à t.

Comme dans le jeu à temps discret, il existe aussi un **équilibre symétrique stationnaire** dans le jeu à temps continu qui doit satisfaire la propriété suivante : A l'équilibre chaque joueur est Indifférent entre abandonner la compétition à un instant t quelconque et continuer la compétition pendant une petite fraction de temps ε (c'est-à-dire jouer jusqu'à $t + \varepsilon$), afin de voir si son adversaire abandonnera le premier.

Ainsi lorsque le joueur à t anticipe continuer la compétition jusqu'à $t + \varepsilon$, il fait face à un coût supplémentaire ε (lorsque $c = 1$) avec la probabilité $1 - F(t)$ et espère un gain vdF qui représente son gain espéré lorsque son adversaire abandonne avant $t + \varepsilon$. De telle sorte qu'à l'équilibre, il vient:

$$vdF = 1 - F(t).$$

Ce qui entraîne:

$$\frac{1}{v} = \frac{dF}{1 - F}.$$

Etant donné qu'on est face à un problème de « temps d'attente » et que la fonction de répartition du temps d'attente est une loi exponentielle, alors à l'équilibre, la résolution de l'équation $\frac{1}{v} = \frac{dF}{1-F}$ donne la solution suivante:

$$F^*(t) = 1 - e^{\frac{-t}{v}}$$

La figure suivante décrit le jeu stationnaire en temps continu:

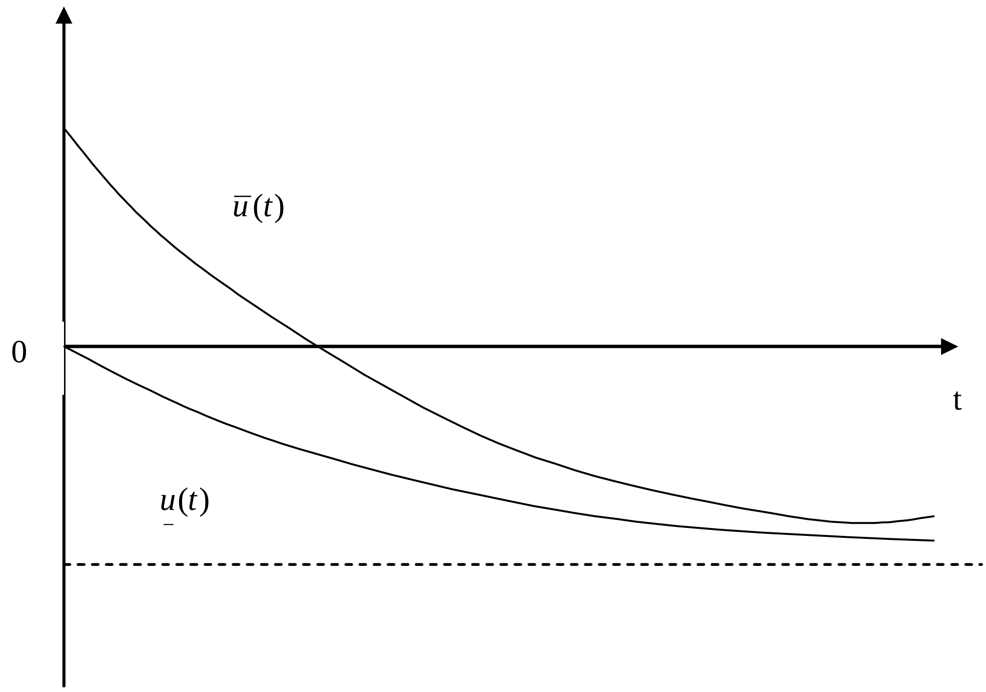


Figure 1-1:

On remarque sur **la figure 1.1** qu'à un instant t quelconque où un des deux joueurs abandonne en premier la compétition que:

- L'utilité d'équilibre $\underline{u}(t)$ d'un joueur lorsqu'il abandonne en premier la compétition est inférieure à l'utilité d'équilibre $\bar{u}(t)$ qu'il aurait si son adversaire est celui qui abandonne en premier la compétition.

- Que l'utilité d'équilibre d'un joueur qu'il gagne ou qu'il perd la compétition est une fonction décroissante de l'instant t où un des deux joueurs abandonne la compétition. Ceci est évident, dans la mesure où la prime en jeu est constante alors que chaque instant passé dans la compétition est coûteux pour les joueurs.

1.3 Le concept d'équilibre unique en stratégies pures dans une guerre d'usure

La guerre d'usure possède en information complète, un continuum d'équilibres en stratégies pures. Mais certains mécanismes d'analyse de la guerre d'usure qui introduisent dans celle-ci, certaines hypothèses modifiant l'environnement notamment informationnel du jeu montrent que la guerre d'usure possède **un équilibre unique en stratégies pures**. Deux approches sont le plus souvent, utilisées dans la littérature économique. Il s'agit de **l'approche par les mécanismes d'enchères et l'approche basée sur l'hypothèse de temps limite**.

1.3.1 Approche de la guerre d'usure par les mécanismes d'enchère

L'approche de la guerre d'usure par un mécanisme d'enchère typique, suppose qu'à l'étape intérim de l'enchère, chaque joueur connaît le temps pendant lequel il peut rester dans la compétition de façon privative mais n'a que des croyances sur le temps de compétition de ses adversaires. Etant donné que le temps est coûteux pour chaque joueur, le paiement engagé par chaque joueur dans la compétition est alors une information privée. L'approche par les mécanismes d'enchère introduit ainsi dans la guerre d'usure un environnement d'asymétrie d'information.

L'introduction dans la guerre d'usure d'un environnement d'asymétrie d'information permet à la théorie économique, d'appréhender la guerre d'usure comme **un mécanisme d'enchère au second prix avec un aspect "all-pay"**. Ainsi les coûts supportés par les joueurs dans la compétition sont irrécupérables alors que le paiement supporté par un joueur qui gagne la compétition est égal au deuxième paiement, le plus élevé engagé dans la compétition lorsqu'on reste dans l'hypothèse où: **L'individu qui engage le paiement le plus élevé remporte l'enchère.**

Nous présentons différents travaux théoriques sur la modélisation de la guerre d'usure comme enchère selon que les signaux perçus par les joueurs soient affiliés ou non.

1.3.1.1 Guerre d'usure et signaux non affiliés

Nous allons partir des travaux théoriques développés par **Maynard S. J. (1974)** dans un jeu de guerre d'usure caractérisé par la compétition entre deux animaux de la même espèce qui disputent une femelle ou un morceau de nourriture dans un combat physique et comme Riley J. (1999) nous utilisons un mécanisme d'enchère au second prix avec un aspect all-pay pour caractériser **l'unique équilibre symétrique** d'un tel jeu.

Au départ, l'analyse de la guerre d'usure s'est inspirée du combat entre deux animaux affamés qui combattent pour un morceau de nourriture jusqu'à ce que l'un d'eux abandonne le combat. Cette situation est souvent qualifiée par la littérature de « version biologique de la guerre d'usure ».

Le combat est coûteux pour les deux animaux parce qu'ils dépensent de l'énergie.

La stratégie de chaque joueur (animal), est le temps pendant lequel il peut combattre avant d'abandonner et ce temps est coûteux pour chaque animal.

Soient m_1 et m_2 les signaux respectifs perçus par le premier animal et le second animal et qui représentent leurs temps de combat éventuels respectifs.

La durée du combat est égal au min(m_1;m_2) qui représente le temps au bout duquel, un des deux animaux abandonne le combat.

Il s'agit alors de rechercher un équilibre de Nash unique, d'un tel jeu au travers d'un mécanisme d'enchère « both-pay ».

Chaque unité de temps coûte une unité (c = 1) pour chaque animal.

les deux animaux supportent ainsi en fin de compétition des paiements identiques égaux à $\min(m_1; m_2)$.

Les deux animaux se différencient dans leurs temps de combat respectifs par leurs niveaux de faim respectifs. Ce qui suppose que plus un animal est affamée, plus son temps de combat est élevé.

Les signaux m_i des offreurs (joueurs) sont indépendamment distribués selon une fonction de répartition F avec une fonction de densité f continue, positive et deux fois différentiable sur $[0; 1]$.

Les deux joueurs sont neutres au risque (fonction d'utilité quasi linéaire).

La stratégie d'équilibre β (offre) de chaque joueur $i(i = 1; 2)$, est une fonction non décroissante du signal m_i perçu par celui-ci.

Le joueur qui reçoit le signal le plus faible espérant toujours perdre, fait à l'équilibre une offre nulle.

$\beta : [0; 1] \to [0; \infty]$

$m_i \to \beta(m_i)$

En focalisant l'analyse sur le premier animal (position symétrique pour les deux animaux), son paiement espéré dans l'enchère « both-pay » lorsqu'il annonce à l'équilibre $m_1 = t$ est :

$$\int_0^t \beta(m_2 = s) f(s) ds + (1 - F(t))\beta(t)$$

Avec:

$\beta(s)$, égal au coût supporté par chacun des deux animaux lorsque le deuxième animal perd le combat (abandonne le combat)

$\beta(t)$, égal au coût supporté par chacun lorsque le premier animal perd le combat,

$\int_0^t \beta(s)f(s)ds$, égal au paiement espéré du premier animal en cas de victoire,

$(1 - F(t))\beta(t)$, son paiement espéré en cas d'échec.

Compte tenu des hypothèses définies ci-dessus et de la non affiliation entre les signaux des deux animaux, le **théorème de l'équivalence du revenu (Myerson R. (1981), Riley J. et Samuelson W. (1981)) suppose que n'importe quelle stratégie d'équilibre pure égale le paiement espéré du premier animal dans l'enchère « both-pay » à son paiement espéré dans l'enchère de Vickrey sans prix de réserve avec deux joueurs.**

En rapportant l'analyse à une enchère de Vickrey, le paiement espéré par le premier animal serait:

$$\int_0^t v(m_2 = s)f(s)ds$$

Avec $v(m_2 = s)$, la valeur du morceau de nourriture perçu par le premier animal.

En appliquant à l'équilibre le **théorème de l'équivalence du revenu**, il vient:

$$\int_0^t \beta(m_2 = s) f(s) ds + (1 - F(t))\beta(t) = \int_0^t v(m_2 = s) f(s) ds$$

En différenciant les deux membres de l'égalité par rapport à t, il vient:

$$\beta'(t) = v(t) \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

La stratégie d'équilibre (paiement d'équilibre engagé) du premier animal est alors:

$$\int_0^t v(t) \frac{f(t)}{1 - F(t)} dt, \qquad \text{car } \beta(0) = 0.$$

On peut constater que la stratégie d'équilibre β est une fonction croissante, quelque soit $t \in [0; 1]$. La stratégie d'équilibre β étant une fonction croissante dans le signal du joueur et sachant qu'il n'y'a pas une meilleure offre autre que $\beta(t)$, alors celui-ci n'a pas intérêt à dévier de sa stratégie d'équilibre pure $\beta(t)$.

Cependant, une corrélation positive entre les signaux des offreurs (joueurs) invalide systématiquement le **théorème de l'équivalence du revenu** du fait de ce que Milgrom P. R. et Weber R. J. (1982) présentent comme le **"linkage principle"** (voir annexe). Selon ce principe un offreur avec un signal élevé, ne peut éviter de supporter dans la guerre d'usure (voire une enchère au second prix) un paiement espéré plus élevé en enchérissant comme si son signal était plus faible parce que **la seconde plus élevée offre est positivement corrélée avec son propre signal**. Le prix espéré payé pour une offre donnée est alors une fonction croissante du signal de l'offreur. Le lien direct du prix espéré au signal de l'offreur augmente ainsi les prix que les offreurs à signaux élevés paient et réduit par conséquent leurs **profits dans la guerre d'usure** (voire dans une enchère au second prix).

1.3.1.2 Guerre d'usure et signaux affiliés

Nous présentons les travaux théoriques développés par Vijay K. et Morgan J. (1997) qui décrivent la guerre d'usure à plusieurs joueurs dans laquelle, les signaux perçus par les joueurs sont affiliés. **L'intérêt de leurs travaux réside dans le fait qu'ils vont non seulement expliciter la modélisation de la guerre d'usure comme une enchère spécifique, mais ils vont ensuite comparer le revenu issu d'une guerre d'usure aux revenus obtenus dans les différentes enchères traditionnelles.**

Les joueurs sont en compétition pour un objet auquel, chaque joueur accorde une certaine valeur.

Les signaux $m_i (i = 1; 2; .....n)$ perçus par les joueurs sont des réels, et ont une fonction de densité jointe $(f(m_1; .....; m_n))$ symétrique dans les signaux des offreurs.

La valeur v_i de l'objet, perçue par chaque offreur i est une fonction non négative, continue et strictement croissante dans ses variables.

f satisfait l'inégalité d'affiliation (Milgrom P. R. et Weber R. J.,1982. (Voir annexe)).

Soit $\alpha = \max \{m_j\}$ avec $j \neq 1$ et $f_\alpha(\alpha = x/m_1 = t)$, sa densité conditionnelle sachant m_1.

La valeur $v_1 = v(m_1 = t, \alpha = x)$ de l'objet, perçue par le joueur1 est une fonction strictement croissante en t et par conséquent en y du fait de l'affiliation entre les deux signaux. Cette affiliation conduit aussi aux propriétés suivantes:

$\frac{F_\alpha(x/t)}{f_\alpha(x/t)}$ est non croissante en t. (Fait 1)

$\frac{f_\alpha(x/t)}{1-F_\alpha(x/t)}$ est non croissante en t. (Fait 2)

$F_\alpha(x/t)$est non croissante en t. (Fait 3)

Avant le démarrage de l'enchère, chaque joueur (offreur) i, reçoit un signal m_i qui l'informe sur la valeur de l'objet. Il souscrit alors une offre scellée b_i et ses utilités (profits) u_i possibles sont:

$u_i = v_i - \max\{b_j\}_{j\neq i}$ si $b_i > \max\{b_j\}_{j\neq i}$,

$u_i = -b_i$ si $b_i < \max\{b_j\}_{j\neq i}$,

$u_i = \frac{1}{k}(v_i - b_i)$ si $b_i = \max\{b_j\}_{j\neq i}$.

Avec k (entier naturel) égal au nombre d'offreurs enchérissant une offre égale à $\max\{b_j\}_{j\neq i}$ Chaque offreur gagnant obtient l'objet avec une probabilité égale à $\frac{1}{k}$.

En supposant que les $offreurs\ j \neq 1$ jouent une stratégie d'équilibre symétrique et croissante β et que l'offreur1 reçoit un signal $m_1 = t$ et fait une offre b, alors son utilité espérée nette vient:

$$\pi(b,t) = \int_{-\infty}^{\beta^{-1}(b)} [v(t,x) - \beta(x)] f_\alpha(x/t)dx - [1 - F_\alpha(\beta^{-1}(b)/t)]b$$

Avec $x, t, \beta^{-1}(b)$ des réels tels que:

$v(t,x) = v(m_1 = t, \alpha = x)$, égale à la valeur de l'objet perçue par l'offreur1,

$\beta(x)$, égale à la stratégie d'équilibre du joueur qui reçoit un signal α,

$F_\alpha[\beta^{-1}(b)/t] = \Pr[\alpha \leq \beta^{-1}(b)/m_1 = t]$ et $\beta^{-1}(b)$ est le signal annoncé par l'offreur1.

La quantité $\int_{-\infty}^{\beta^{-1}(b)} [v(t,x) - \beta(x)] f_\alpha(x/t)dx$, représente l'espérance de gain de l'offreur1, lorsque son signal annoncé $\beta^{-1}(b)$ est supérieur ou égal à α.

La quantité $[1 - F_\alpha(\beta^{-1}(b)/t)]b$, représente la perte espérée de l'offreur1, lorsque $\alpha > \beta^{-1}(b)$.

Equilibre du Jeu

En maximisant $\pi(b,t) = \int_{-\infty}^{\beta^{-1}(b)} [v(t,x) - \beta(x)] f_\alpha(x/t)dx - [1 - F(\beta^{-1}(b)/t)]b$ par rapport à b, la condition de premier ordre donne:

$$v(t, \beta^{-1}(b)) f_\alpha(\beta^{-1}(b)/t)(\frac{1}{\beta^{'}(\beta^{-1}(b))}) - [1 - F_\alpha(\beta^{-1}(b)/t)] = 0.$$

Or à l'équilibre, $b = \beta(t)$ et en remplaçant b par sa valeur d'équilibre on a:

$$v(t,t) f_\alpha(t/t)(\frac{1}{\beta^{'}(t)}) - [1 - F_\alpha(t/t)] = 0.$$

Il vient:

$$\beta^{'}(t) = v(t,t) \frac{f_\alpha(t/t)}{[1 - F_\alpha(t/t)]}.$$

D'où:

$$\beta(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t,t) \frac{f_\alpha(t/t)}{[1 - F_\alpha(t/t)]} dt.$$

$\lambda(t/t) = \frac{f_\alpha(t/t)}{[1 - F_\alpha(t/t)]}$, est le taux de hasard de la distribution conditionnelle $F_\alpha(t/t)$.

Il s'agit maintenant de définir les conditions suffisantes pour que β soit un équilibre symétrique.

Théorème 1.1 (Vijay K. et Morgan J., 1997): Soit la fonction φ définie de $IR^2 \to IR$ par $\varphi(t,x) = v(t,x) \times \lambda(x/t)$. En supposant que pour tout x, $\varphi(.,x)$ est une fonction croissante, **un équilibre symétrique dans la guerre d'usure est donné par:** $\beta(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} v(t,t)\frac{f_\alpha(t/t)}{[1-F_\alpha(t/t)]}dt.$

Proof. Supposons que l'offreur 1 enchérit $\beta(z)$, alors que son signal d'équilibre est $m_1 = t$ et que les offreurs j $(j \neq 1)$ jouent leurs stratégies d'équilibre.

L'utilité espérée de l'offreur 1 (joueur 1) lorsqu'il ment en annonçant z vient:

$\pi(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{z} [v(t,x) - \beta(x)]f_\alpha(x/t)dx - [1 - F_\alpha(z/t)]\beta(z),$

$\pi(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{z} v(t,x)f_\alpha(x/t)dx - \int\limits_{-\infty}^{z} \beta(x)f_\alpha(x/t)dx - \beta(z) + F_\alpha(z/t)\beta(z).$

En intégrant par partie la quantité $\int\limits_{-\infty}^{z} \beta(x)f_\alpha(x/t)dx$, il vient:

$\int\limits_{-\infty}^{z} \beta(x)f_\alpha(x/t)dx = \beta(z)F_\alpha(z/t) - \int\limits_{-\infty}^{z} \beta'(x)F_\alpha(x/t)dx.$

$\pi(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{z} v(t,x)f_\alpha(x/t)dx - \beta(z)F_\alpha(z/t) + \int\limits_{-\infty}^{z} \beta'(x)F_\alpha(x/t)dx - \beta(z) + F_\alpha(z/t)\beta(z),$

$\pi(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{z} v(t,x)f_\alpha(x/t)dx + \int\limits_{-\infty}^{z} \beta'(x)F_\alpha(x/t)dx - \beta(z).$

Or $\beta'(x) = v(x,x)\frac{f_\alpha(x/x)}{[1-F_\alpha(x/x)]}$ et $\beta(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} v(z,z)\frac{f_\alpha(z/z)}{[1-F_\alpha(z/z)]}dz$ avec $\lambda(x/x) = \frac{f_\alpha(x/x)}{[1-F_\alpha(x/x)]}$ et $\lambda(z/z) = \frac{f_\alpha(z/z)}{[1-F_\alpha(z/z)]}$.

En remplaçant $\beta'(x)$ et $\beta(z)$ par leurs valeurs, on a:

$\pi(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{z} v(t,x)f_\alpha(x/t)dx + \int\limits_{-\infty}^{z} v(x,x)\lambda(x/x)F_\alpha(x/t)dx - \int\limits_{-\infty}^{z} v(z,z)\lambda(z/z)dz,$

$\pi(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{z} v(t,x)f_\alpha(x/t)dx - \int\limits_{-\infty}^{z} v(x,x)\lambda(x/x)[1-F_\alpha(x/t)]dx$, or $f_\alpha(x/t) = \lambda(x/t)[1-F_\alpha(x/t)]$,

$\pi(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{z} [v(t,x)\lambda(x/t) - v(x,x)\lambda(x/x)][1-F_\alpha(x/t)]dx$, or $\varphi(t,x) = v(t,x) \times \lambda(x/t)$,

$\pi(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{z} [\varphi(t,x) - \varphi(x,x)][1 - F_\alpha(x/t)]dx.$

Et comme par hypothèse $\varphi(.,x)$ est une fonction croissante en t, alors on a:

Pour tout $t > x$, $[\varphi(t,x) - \varphi(x,x)][1 - F_\alpha(x/t)] > 0$ et pour tout $t < x$, $[\varphi(t,x) - \varphi(x,x)][1 - F_\alpha(x/t)] < 0$.

Ainsi l'utilité espérée de l'offreur1 est maximisée lorsqu'il choisit $z = t$(il annonce la vérité). Il en résulte:

$$\pi(t,t) = \int_{-\infty}^{t} [\varphi(t,x) - \varphi(x,x)][1 - F_{\alpha}(x/t)]dx \geq 0.$$

■

Ce résultat montre que chaque offreur est contraint de participer à l'enchère dans la mesure où, son utilité d'équilibre est supérieure ou égale à zéro[1]. Il faut noter que $\varphi(t,x)$ est croissante si l'affiliation entre les variables aléatoires m_1 et α ne soit aussi fort, au point d'étouffer la croissance en t de la valeur $v(t;x)$ de l'objet résultant d'un signal élevé $m_1 = t$. En effet lorsque l'affiliation est très élevée, de petites variations dans le signal d'un offreur peut avoir un effet marginal relativement large sur l'estimation de la valeur de l'objet. Dans une telle situation, il faut que lorsque $\lambda(x/t)$ décroît rapidement en t, cela entraîne une croissance rapide en t de $v(t;x)$ qui compense la décroissance rapide de $\lambda(x/t)$. Ainsi $\varphi(t,x)$ pourra être une fonction croissante en t même si les signaux des offreurs sont fortement affiliés.

Cependant l'hypothèse selon laquelle $\varphi(.,x)$ est une fonction croissante en t, peut être remplacée par une condition faible telle que, pour tout t et x, on a:

$$(t-x)[\varphi(t,x) - \varphi(x,x)] > 0.$$

Cette condition est alors suffisante pour assurer que $\pi(z,t)$ est maximisée pour $z = t$.

Il s'agit maintenant, de comparer le revenu issu de la guerre d'usure à ceux des enchères traditionnelles

[1]Ceci suppose que l'utilité d'un joueur qui ne participe pas à l'enchère est nulle.

Guerre d'usure versus Enchère au second prix

Théorème 1.2 (Vijay K. et Morgan J.,1997): Sous l'hypothèse que $\varphi(.,x)$ est une fonction croissante en t, le revenu espéré d'une guerre d'usure est plus élevé que celui d'une enchère au second prix.

Proof. Dans une **enchère au second prix avec signaux affiliés**, le paiement espéré d'équilibre d'un offreur qui reçoit un signal $m_1 = t$ est:

$$e^{II}(t) = \int_{-\infty}^{t} v(x,x) f_\alpha(x/t) dx \quad \text{(Milgrom P. R. et Weber R. J., 1982).}$$

Dans une **guerre d'usure avec signaux affiliés**, le paiement espéré d'équilibre d'un offreur qui reçoit un signal $m_1 = t$ est:

$e^w(t) = \int_{-\infty}^{t} \beta(x) f_\alpha(x/t) dx + [1 - F_\alpha(t/t)]\beta(t).$

En intégrant par partie la quantité $\int_{-\infty}^{t} \beta(x) f_\alpha(x/t) dx$, on a:

$e^w(t) = \beta(t) F_\alpha(t/t) - \int_{-\infty}^{t} \beta'(x) F_\alpha(x/t) dx + \beta(t) - F_\alpha(t/t)\beta(t),$

$e^w(t) = \beta(t) - \int_{-\infty}^{t} \beta'(x) F_\alpha(x/t) dx.$

En Remplaçant $\beta(t)$ et $\beta'(x)$ par leurs valeurs d'équilibre, on a:

$$e^w(t) = \int_{-\infty}^{t} v(x,x) f_\alpha(x/t) \frac{\lambda(x/x)}{\lambda(x/t)} dx.$$

Pour tout $x \leq t$, l'hypothèse de la non croissance en t de la fonction $\lambda(x/.)$ implique:$\lambda(x/x) \geq \lambda(x/t)$ et par conséquent $\frac{\lambda(x/x)}{\lambda(x/t)} \geq 1$. D'où:

$$e^w(t) \geq e^{II}(t).$$

■

Le revenu espéré dans une guerre d'usure est alors supérieur ou égal à celui espéré dans une enchère au second prix.

Guerre d'usure versus Enchère au premier prix

Pour comparer le revenu espéré dans une guerre d'usure à celui espéré dans une enchère au premier prix, il suffit de montrer que l'enchère standard au second prix est plus rentable que l'enchère au premier prix (Milgrom P. R. et Weber R. J., 1982). L'enchère au second prix, en établissant un lien entre le prix payé par l'offreur gagnant et le second plus haut signal, induit un **effet feedback** (retour) entre le signal l'offreur et son paiement espéré. Ainsi pour une offre donnée, plus le signal d'un offreur est élevé, plus il estime que le second signal est aussi élevé et par conséquent, plus élevé est le prix qu'il espère payer. Etant donné que le paiement espéré d'un offreur qui reçoit le signal le plus faible possible est nul dans les deux types d'enchère, le paiement espéré dans une enchère au second prix est plus élevé que celui d'une enchère au premier prix: **C'est l'effet "second prix"**.

On peut alors conclure que le paiement espéré dans une guerre d'usure est supérieur à celui d'une enchère au premier prix dans la mesure où la guerre d'usure est plus performante que l'enchère au second prix en terme de revenu espéré.

Guerre d'usure versus Enchère "all-pay"

La différence fondamentale entre guerre d'usure et enchère "all-pay" est que dans une **enchère "all-pay"**, le prix payé par l'offreur est toujours égal à son offre qu'il gagne ou qu'il perde l'enchère alors que la guerre d'usure est modélisée comme une **enchère au second prix avec un aspect "all-pay".** Ceci suppose que les coûts supportés par les joueurs (offreurs) dans la guerre d'usure sont irrécupérables et que le paiement supporté par un offreur qui gagne la compétition est égal au deuxième paiement le plus élevé engagé dans la compétition lorsqu'on reste dans l'hypothèse où: **L'individu qui engage le paiement le plus élevé remporte l'enchère**.

Pour comparer le revenu espéré dans une **guerre d'usure** à celui obtenu dans une **enchère "all-pay"**, nous présentons d'abord l'équilibre dans une enchère "all-pay".

Les utilités d'un offreur qui souscrit une offre b_i sont:

$u_i = v_i - b_i \quad$ si $b_i > \max\{b_j\}_{j \neq i}$,

$u_i = -b_i \quad$ si $b_i < \max\{b_j\}_{j \neq i}$,

$u_i = \frac{1}{k}(v_i - b_i) \quad$ si $b_i = \max\{b_j\}_{j \neq i}$.

Lorsque chaque offreur j($j \neq 1$) joue sa stratégie d'équilibre croissante β, et que l'offreur1 reçoit un signal $m_1 = t$ et fait une offre égale à b, son utilité espérée est:

$$\pi(b,t) = \int_{-\infty}^{\beta^{-1}(b)} v(t,x) f_\alpha(x/t)dx - b.$$

En maximisant $\pi(b,t) = \int_{-\infty}^{\beta^{-1}(b)} v(t,x) f_\alpha(x/t) - b$ par rapport à b, la condition de premier ordre donne:

$$\frac{1}{\beta^{'}(\beta^{-1}(b))} v(t, \beta^{-1}(b)) f_\alpha(\beta^{-1}(b)/t) - 1 = 0.$$

A l'équilibre, $b = \beta(t)$ et la condition de premier ordre devient:

$$\frac{1}{\beta^{'}(t)} v(t,t) f_\alpha(t/t) - 1 = 0,$$

D'où,

$$\beta^{'}(t) = v(t,t) f_\alpha(t/t).$$

On en déduit:

$$\beta(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t,t) f_\alpha(t/t) dt \qquad \text{avec } \beta(0) = 0.$$

Théorème 1.3 (Vijay K. et Morgan J., 1997): Soit la fonction ψ définie de $IR^2 \to IR$ par $\psi(t,x) = v(t,x) f_\alpha(x/t)$. En supposant que pour tout x, $\psi(.,x)$ est une fonction croissante en t, **un équilibre symétrique dans l'enchère "all-pay" est donné par:** $\beta(t) = \int_{-\infty}^{t} v(t,t) f_\alpha(t/t) dt$.

Proof. Supposons que l'offreur1 enchérit $\beta(z)$, alors que son signal d'équilibre est $m_1 = t$ et que les offreurs j$(j \neq 1)$ jouent leurs stratégies d'équilibre.

L'utilité espérée de l'offreur1 (joueur1) lorsqu'il ment en annonçant z vient:

$\pi(z,t) = \int_{-\infty}^{z} v(t,x) f_\alpha(x/t) dx - \beta(z)$.

En remplaçant $\beta(z)$ par sa valeur, on a:

$\pi(z,t) = \int_{-\infty}^{z} v(t,x) f_\alpha(x/t) dx - \int_{-\infty}^{z} v(x,x) f_\alpha(x/x) dx$,

$\pi(z,t) = \int_{-\infty}^{z} [\psi(t,x) - \psi(x,x)] dx$.

Comme par hypothèse, $\psi(.,x)$ est une fonction croissante en t, pour tout $x < t$, $[\psi(t,x) - \psi(x,x)] > 0$ et pour tout $x > t$, $[\psi(t,x) - \psi(x,x)] < 0$.

Ainsi $\pi(z,t) = \int_{-\infty}^{z} [\psi(t,x) - \psi(x,x)] dx$ est maximisée en choisissant $z = t$. Il en résulte:

$$\pi(z,t) = \int_{-\infty}^{t} [\psi(t,x) - \psi(x,x)] dx \geq 0$$

■

Etant donné que l'annonce de la vérité maximise l'utilité espérée de chaque offreur, il est alors contraint de participer à l'enchère.

Nous pouvons maintenant comparer en terme de revenu espéré, la guerre d'usure et l'enchère "all-pay".

Le paiement espéré d'équilibre dans l'enchère "all-pay" est: $e^A(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} v(x,x) f_\alpha(x/x) dx$,

Le paiement espéré d'équilibre dans l'enchère "all-pay" est: $e^w(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} v(x,x) f_\alpha(x/t) \frac{\lambda(x/x)}{\lambda(x/t)} dx$

et en remplaçant $\lambda(x/x)$ et $\lambda(x/t)$ par leurs valeurs on a :

$e^w(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} v(x,x) f_\alpha(x/x) \frac{1-F_\alpha(x/t)}{1-F_\alpha(x/x)} dx$,

et comme il est supposé que pour tout $x < t$, $F_\alpha(x/t) \leq F_\alpha(x/x)$, alors on a:

$$e^w(t) \geq e^A(t).$$

De façon similaire au résultat où les offres d'équilibre dans l'enchère au second prix excèdent celle de l'enchère au premier prix (Milgrom P. R. et Weber R.J., 1982), on retrouve ici le résultat où les offres d'équilibre dans la **guerre d'usure** excèdent celles de **l'enchère "all-pay"**.

L'enchère "all-pay", est parfois utilisée pour modéliser les phénomènes de corruption où, la partie qui offre le pot de vin le plus élevé reçoit un contrat ou une certaine faveur.

Cependant dans la guerre d'usure comme dans l'enchère « all-Pay »**,** les **offreurs perdants sont obligés de payer leurs propres offres**.

La guerre d'usure telle que appréhendée dans l'analyse peut conduire à **une appropriation totale du surplus des offreurs**. Ainsi l'utilité espérée des joueurs (offreurs) dans un équilibre peut être nulle.

Pour montrer que la guerre d'usure peut conduire à l'appropriation totale du surplus des offreurs, Vijay K. et Morgan J. (1997) présentent l'application suivante:

$n = 2$ (le nombre de joueurs),

m_1(variable aléatoire), le signal de l'offreur 1,

m_2(variable aléatoire), le signal de l'offreur 2,

$f(t,x) = \frac{1}{4}(t+x)^{\frac{-1}{2}} \exp\left[-(t+x)^{\frac{1}{2}}\right]$ définie sur $[0;\infty] \times [0;\infty]$,

$v(t,x) = (t+x)^{\frac{1}{2}}$.

Il en résulte:

$f_\alpha(x/t) = \left[\frac{f(t,x)}{f(t)}\right] = \frac{1}{2}(t+x)^{\frac{-1}{2}} \exp\left[-(t+x)^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}}\right]$,

$\lambda(x/t) = \frac{f_\alpha(x/t)}{1-F_\alpha(x/t)} = \frac{1}{2}(t+x)^{\frac{-1}{2}}$, avec $F_\alpha(x/t) = \int\limits_0^t f_\alpha(x/t)dx$.

$\varphi(t,x) = \frac{1}{2}$. Même si $\varphi(.,x)$ est non strictement croissante en t, un équilibre symétrique monotone de la guerre d'usure existe et la stratégie d'équilibre vient:

$$\beta(t) = \int\limits_0^t v(x,x)\lambda(x/x)dx = \int\limits_0^t \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}t.$$

En utilisant la condition $\pi(t,t) = \int\limits_{-\infty}^t [\varphi(t,x) - \varphi(x,x)][1 - F_\alpha(x/t)]dx \geq 0$, établie dans la preuve du **théorème 1.1**, l'utilité d'équilibre vient:

$$\pi(t,t) = \int\limits_0^t [\varphi(t,x) - \varphi(x,x)][1 - F_\alpha(x/t)]dx = 0.$$

Un tel résultat a été mis en évidence par Crémer J. et McLean R. (1988), qui ont montré dans leurs travaux qu'il est possible de s'approprier tout le surplus des offreurs dans les mécanismes d'enchère à valeur commune. Dans le même esprit Bulow J. et Klemperer P. (1994), ont construit un exemple dans lequel, l'enchère all-pay conduit à l'appropriation de tout le surplus des offreurs. Cependant les résultats de Vijay K. et

Morgan J. (1997) montrent que si l'enchère all-pay conduit à l'appropriation de tout le surplus des offreurs, alors il ne peut avoir dans la guerre d'usure un équilibre monotone[2].

[2] Un équilibre monotone signifie que la stratégie d'équilibre de chaque joueur dans la guerre d'usure, est une fonction monotone sur l'ensemble des signaux possibles que ce dernier peut percevoir.

1.3.2 Guerre d'usure et Hypothèse de temps limite

L'hypothèse de temps limite dans la guerre d'usure comme dans l'approche par les mécanismes d'enchère, introduit dans la guerre d'usure un environnement d'asymétrie d'information. **Ici la stratégie d'équilibre d'un joueur va correspondre au temps qu'il pourra tenir dans la compétition avant sa sortie**. Ce qui sous tend que l'asymétrie d'information ne porte pas sur le temps pendant lequel un joueur pourra tenir dans la compétition avant de la quitter mais plutôt sur une autre variable qui peut être le gain perçu (information privée) par chaque joueur.

L'hypothèse de temps limite dans la guerre d'usure, a été utilisé notamment dans les travaux de Haigh J. et Cannings C. (1989); Bulow J. et Klemperer P. (1999) pour décrire des compétitions entre firmes présentes sur un marché donné.

Pour simplifier notre analyse nous allons considérer une jeu de guerre d'usure où deux joueurs sont en compétition pour un gain possible (individuellement perçu par chaque joueur) en cas de victoire. Ceci suppose qu'un seul joueur gagne la compétition à l'ssue du jeu.

Le gain possible $m_i (i = 1; 2)$ perçu par chaque joueur est une information privée et constitue donc son signal reçu.

La stratégie d'équilibre $T(m_i)$ de chaque joueur i est le temps qu'il pourra tenir dans la compétition avant d'abandonner.

Les gains possibles m_i sont indépendamment distribués sur $[0; 1]$ selon une fonction de répartition F avec une fonction de densité f continue, positive, et deux fois différentiable sur $[0; 1]$.

Les deux joueurs sont neutres vis-à-vis du risque.

Pendant la compétition, chaque joueur i supporte un coût c (normalisé à 1) par unité de temps de jeu jusqu'à ce qu'un des deux joueurs, abandonne la compétition.

La stratégie d'équilibre $T(m_i)$ de chaque joueur i est une fonction croissante de son gain possible perçu m_i. Ceci suppose que le joueur qui perçoit le gain possible le plus élevé est prêt à rester plus tard dans la compétition.

Le joueur qui perçoit un gain possible nul, ne participe pas à la compétition et donc, $T(0) = 0$.

La probabilité que le joueur 1 gagne la compétition, est alors équivalente à la probabilité que $m_1 > m_2$.

Le jeu possède un unique équilibre symétrique de Nash car il est stratégiquement équivalent à un jeu statique dans lequel, les deux firmes choisissent simultanément leurs temps de Sortie de la compétition.

Etant en information symétrique on peut focaliser l'analyse sur le joueur 1 dont l'utilité espérée à l'équilibre quand il annonce $m_1 = t$ est:

$$u(t) = \int_0^t [t - T(m_2 = s)]f(s)ds - (1 - F(t))T(t), \qquad \text{avec } c = 1$$

En différentiant $u(t)$ par rapport à t, la condition de premier ordre donne :

$$(t - T(t))f(t) + f(t)T(t) - T^{'}(t)(1 - F(t)) = 0.$$

D'où, la stratégie d'équilibre marginale du joueur1 vient:

$$T^{'}(t) = t\frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

La stratégie d'équilibre du joueur 1 est:

$$T(t) = \int_{0}^{t} t\frac{f(t)}{1 - F(t)}dt, \quad \text{avec } T(0) = 0.$$

La stratégie d'équilibre $T(t)$ est un équilibre de Nash symétrique unique, car chaque joueur est conscient que sa décision d'abandonner la compétition est pertinente si et seulement si son adversaire n'avait précédemment abandonné la compétition.

1.4 Conclusion

Parmi les mécanismes basés sur des hypothèses qui introduisent dans la guerre d'usure un environnement d'asymétrie d'information, les plus utilisés dans la littérature économique sont les **mécanismes d'enchère** et ceux basés sur **l'hypothèse d'un temps de jeu limite**.

Les mécanismes d'enchère considèrent la guerre d'usure comme une enchère **au second prix avec un aspect "all-pay"**, dans laquelle les coûts irrécupérables supportés par les joueurs dans la compétition constituent leurs offres, et le paiement d'équilibre supporté (offre d'équilibre) par un joueur qui gagne la compétition est égal au deuxième paiement le plus élevé engagé dans la compétition lorsqu'on reste dans l'hypothèse où: **L'individu qui engage le paiement le plus élevé remporte l'enchère**. La stratégie d'équilibre d'un joueur est alors représentée par son **offre d'équilibre qui est fonction de son signal reçu**. Vijay K. et Morgan J. (1997) dans leurs travaux ont utilisé les mécanismes d'enchère pour présenter un jeu de guerre d'usure, dans lequel les signaux des joueurs sont affiliés. Ils ont montré qu'un tel jeu possède un équilibre symétrique unique dans lequel, chaque offreur est contraint de participer à l'enchère.

Kornhauser L. et al (1989); Riley J. (1999); Bilodeau M. et Slivinski A. (1996) ont tous utilisé des mécanismes basés sur des hypothèses qui introduisent dans la guerre d'usure un environnement d'asymétrie d'information. Riley J. (1999) utilise une **enchère "all-pay" hybride** comme mécanisme de sélection d'équilibre unique dans une guerre d'usure.

Bilodeau M. et Slivinski A. (1996), en utilisant **l'hypothèse d'un horizon temporel de jeu fini**, ont analysé comme une guerre d'usure, la compétition entre différentes structures privées pour la fourniture d'un bien public. Leurs travaux sont une extension de ceux de Bliss C. et Nalebuff B. (1984). **L'hypothèse de temps limite** fournit les conditions qui conduisent à un équilibre unique dans lequel, le joueur le plus efficient fournit le bien public. De plus ils ont montré que ce joueur fournira instantanément le service aux consommateurs.

Dans les mécanismes basés sur **l'hypothèse d'un temps de jeu limite**, la stratégie d'équilibre d'un joueur correspond au temps qu'il pourra tenir dans la compétition avant sa sortie. Cette stratégie d'équilibre est fonction d'un signal perçu de façon privée par chaque joueur.

Il faut noter que l'approche de la guerre d'usure par les mécanismes d'enchère comme l'approche par l'hypothèse de temps limite, montrent toutes les deux que la guerre d'usure possède un équilibre unique en stratégies pures qui permet de conclure quant à l'issue du jeu.

1.5 Annexe

1.5.1 La relation d'affiliation (Milgrom P. R. et Weber R. J., (1982))

La résolution générale de l'affiliation suppose quelques nouvelles définitions:

Premièrement, un sous ensemble A de IR^k est dit croissant si sa fonction indicatrice l_A est non décroissante.

Deuxièmement, un sous ensemble S de IR^k est un « sous treillis » si sa fonction indicatrice l_s est affiliée, c'est-à-dire, si $z \vee z'$(composant maximum de z et z') et $z \wedge z'$(composant minimum de z et z') appartiennent à S chaque fois que z et z'appartiennent à S.

Soit $Z = (Z_{1,...........,}Z_k)$, un vecteur de k variables aléatoires avec une distribution de probabilité p. Ainsi, $p(A) = \Pr[Z \in A]$. Soit $\bar{A}$ le complémentaire de A.

Définition 1:

$z_1, ..., z_k$ sont associés si pour toute croissance des ensembles A et B, $p(A \cap B) \geq p(A).p(B)$.

Il est équivalent de retenir $p(\bar{A} \cap \bar{B}) \geq p(\bar{A}).p(\bar{B})$ ou même $p(\bar{A} \cap B) \geq p(\bar{A}).p(B)$.

Définition 2:

$Z_1, ...Z_k$ sont affiliés si pour toute croissance des ensembles A et B et pour tout S, $p((A \cap B)/S) \geq p(A/S).p(B/S)$c'est-à-dire, si les variables sont associées conditionnellement à un sous treillis quelconque.

Propriétés importantes des variables associées:

(i) $Z_1, ...Z_k$ sont associés.

(ii) Pour une paire quelconque de fonction non décroissantes, g et h,

$E\left[g(Z)h(Z)\right] \geq E\left[g(Z)\right] \times E\left[h(Z)\right]$.

(iii) Pour une fonction quelconque non décroissant g, et un ensemble croissant A,

$E\left[g(Z)/A\right] \geq E\left[g(Z)\right] \geq E\left[g(Z)/\bar{A}\right]$.

Preuve:

L'inégalité dans (iii) revient à considérer seulement :
$E\left[g(Z)/A\right] \geq E\left[g(Z)\right]$ (iii'),

car :
$E\left[g(Z)\right] = p(A)E\left[g(Z)/A\right] + p(\bar{A})E\left[g(Z)/\bar{A}\right]$.

On peut montrer que (ii) implique (iii') en prenant $h = l_A$.

De façon analogue pour montrer que (iii') implique (i), on prend $g = l_B$.

Pour voir que (i) implique (ii), on suppose initialement que g et h sont non négatives. Alors on peut approximer g à la limite $\frac{1}{n}$ par :

$$g_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} l_{A_{ni}}(x),$$

où $A_{ni} = \left\{x/g(x) > \frac{i}{n}\right\}$, et h peut être approximée de façon analogue en utilisant les fonctions h_n et les ensembles croissants B_{nj}.

Si $Z_1, ...Z_k$ sont associées, alors :

$E\left[g_n(Z)h_n(Z)\right] = n^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p(A_{ni}B_{nj})$,

$E\left[g_n(Z)h_n(Z)\right] = n^{-2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p(A_{ni})p(B_{nj}),$

$E\left[g_n(Z)h_n(Z)\right] = E\left[g_n(Z)\right]E\left[h_n(Z)\right].$

Propriétés importantes des variables affiliées:

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $Z_1, ...Z_k$ sont affiliées.

(ii) Pour une paire quelconque de fonctions non décroissantes g et h et un sous treillis quelconque S,

$$E\left[g(Z)h(Z)/S\right] \geq E\left[g(Z)/S\right]E\left[h(Z)/S\right].$$

(iii) Pour une fonction non décroissante quelconque g, un ensemble croissant A, et un sous treillis S,

$$E\left[g(Z)/AS\right] \geq E\left[g(Z)/S\right] \geq E\left[g(Z)/\bar{A}S\right].$$

Théorème:

Soit $Z = (Z_{1,............,}Z_k)$, avec une fonction de densité jointe f. Alors Z est affilié si et seulement si f satisfait l'inégalité d'affiliation $f(z \vee z^{'})f(z \wedge z^{'})$ pour tout $(z, z^{'}) \in IR^{2k}$, avec $z = (z_1, ..., z_k)$, un vecteur de variables non aléatoires réelles.

Preuve:

Si $k = 1$, alors $f$et Z (une variable aléatoire car $k = 1$) sont trivialement affiliées. On suppose que cette implication tient pour $k = m - 1$, et on définit $Z_{-1} = (Z_2, ..., Z_m)$ et $z_{-1} = (z_2, ..., z_m)$.

Soit $k = m$, et on suppose que f est affilié. On considère deux points quelconques $z_1$et $z_1^{'}$tels que $z_1^{'} > z_1$. Soit f_1 la fonction de densité marginale de la variable aléatoire réelle z_1, et on considère la fonction :

$$\frac{f(z_1^{'},.) + f(z_1,.)}{f_1(z_1) + f_1(z_1^{'})},$$

qui représente la densité de $z_{-1} = (z_2, ..., z_m)$ étant donné que $z_1 \in \left\{z_1, z_1^{'}\right\}$. Il est routinier de vérifier que cette fonction est affiliée. Par conséquent, d'après l'hypothèse d'induction, $z_{-1} = (z_2, ..., z_m)$ est affiliée conditionnellement à $z_1 \in \left\{z_1, z_1^{'}\right\}$.

Notons que, parce que f est affiliée, l'expression $\frac{f(z_1,z_{-1})}{f(z_1,z_{-1})+f(z_1^{'},z_{-1})}$ est décroissante en z_{-1}. Soit g une fonction croissante quelconque définit sur IR^k. Alors:

$$E\left[g(Z)/Z_1 = z_1\right] = \frac{f_1(z_1) + f_1(z_1^{'})}{f_1(z_1)} E\left[g(z)\frac{f(z_1, Z_{-1})}{f(z_1, Z_{-1}) + f(z_1^{'}, Z_{-1})}/Z_1 \in \left\{z_1, z_1^{'}\right\}\right],$$

$$E\left[g(Z)/Z_1 = z_1\right] \leq \frac{f_1(z_1)+f_1(z_1^{'})}{f_1(z_1)} E\left[\frac{f(z_1,Z_{-1})}{f(z_1,Z_{-1})+f(z_1^{'},Z_{-1})}/Z_1 \in \left\{z_1, z_1^{'}\right\}\right] \times E\left[g(Z)/Z_1 \in \left\{z_1, z_1^{'}\right\}\right],$$

$$E\left[g(Z)/Z_1 = z_1\right] = E\left[g(Z)/Z_1 \in \left\{z_1, z_1^{'}\right\}\right],$$

et il vient alors que,

$$E\left[g(Z)/Z_1 = z_1\right] \leq E\left[g(Z)/Z_1 = z_1^{'}\right] \text{avec } z_1^{'} > z_1,$$

c'est-à-dire,

$E\left[g(Z)/Z_1 = x\right]$ est croissante en x.

Soit maintenant h une fonction croissante telle que $h : IR^k \rightarrow IR$. Pour un sous treillis S quelconque non nul, la densité conditionnelle de Z étant donné S est:

$$\frac{f(z).l_S(z)}{p(S)},$$

laquelle est affiliée chaque fois que est f affiliée.

De plus d'après l'hypothèse d'induction, le vecteur Z_{-1}est affilié conditionnellement à Z_1. Par consequent,

$$E\left[g(Z)h(Z)/S\right] = E\left[E\left[g(Z)h(Z)/Z_1, S\right]/S\right],$$

$$E\left[g(Z)h(Z)/S\right] \geq E\left[E\left[g(Z)/Z_1, S\right].E\left[h(Z)/Z_1, S\right]/S\right],$$

$$E\left[g(Z)h(Z)/S\right] \geq E\left[g(Z)/S\right].E\left[h(Z)/S\right].$$

La seconde inégalité découle de la monotonie de $E\left[g(Z)/Z_1 = x, S\right]$ et en $E\left[h(Z)/Z_1 = x, S\right]$ en x. Ainsi il a été prouvé que le vecteur de variables aléatoires Z est affilié si la fonction f est affiliée.

La preuve de la réciproque est de prendre:

$S = \left\{z, z^{'}, z \vee z^{'}, z \wedge z^{'}\right\}$,

$A = \{x/x \geq z\}$, et $B = \left\{x/x \geq z^{'}\right\}$, et appliquer la définition de l'affiliation en utilisant le théorème de Bayes. Cette approche n'est pas rigoureuse parce que S est un évènement nul. On peut approximer S, $AS = (A \cap S)$ et $BS = (B \cap S)$ par de petits évènements non nuls.

Soit une $Q^n(z)$, une partition de IR^k, sous la forme :

$$\left[\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_1+1}{2^n}\right] \times .... \times \left[\frac{i_k}{2^n}, \frac{i_k+1}{2^n}\right].$$

Soit $Q^n(z)$ l'élément unique de cette partition contenant le point z. Comme $Q^0 \times Q^0$ a beaucoup d'éléments dénombrables, il existe une fonction $q : Q^0 \times Q^0 \to IR$ telle que :

(i) Pour tout T appartenant à $Q^0 \times Q^0$, $q(T) > 0$, et

(ii) $\sum_{T \in Q^0 \times Q^0} q(T) = 1$.

On peut définir une mesure de probabilité v sur IR^{2k} par $v(B) = \sum\limits_{T \in Q^0 \times Q^0} q(T)\mu(BT)$ (μ est la mesure de Lebesgue). De façon plus explicite, v est proportionnelle à μ pour tout T appartenant à $Q^n \times Q^n$, pour tout $n \geq 0$.

Soit $E^v[.]$, l'opérateur d'espérance mathématique correspondant à v.

Soient Y et Y', les fonctions définies sur $IR^{2k} \to IR^k$ par $Y(z, z') = z$ et $Y'(z, z') = z'$.

Y et Y' sont des variables aléatoires quand (IR^{2k}, v) est considéré comme un espace probabilisé. On peut approximer le vecteur de densités $(f(z), f(z'), f(z \vee z'), f(z \wedge z'))$ par la fonction $X^n = (X_1^n, X_2^n, X_3^n, X_4^n)$définie sur IR^{2k} par :

$$X^n(z, z') = E^v\left[\left(f(Y), f(Y'), f(Y \vee Y'), f(Y \wedge Y')\right) / (Y, Y') \in Q^n(z) \times Q^n(z')\right].$$

$X^n = (X_1^n, X_2^n, X_3^n, X_4^n)$ est un martingale dans IR^4 et ainsi pour presque tout (z, z'),

$\lim\limits_{n\to\infty} X^n(z,z^{'}) = (f(z), f(z^{'}), f(z\vee z^{'}), f(z\wedge z^{'}))$(en référence à Chung K. , A course in probability theory , second Edition New York :Academic Press, 1974).

Donc pour presque tout couple $(z,z^{'})$, on a $z_1 \neq z_1^{'}, ...; z_k \neq z_k^{'}$.

Pour n'importe couple $(z,z^{'})$, et pour n suffisamment grand,

$$X^n(z,z^{'}) = 2^{nk}\left[p(Q^n(z)), p(Q^n(z^{'}), p(Q^n(z\vee z^{'})), p(Q^n(z\wedge z^{'}))\right].$$

Chaque $Q^n(z)$ a un élément minimal, donc on peut définir,

$A_n = \{x/x \geq \min Q^n(z)\}$, $B_n = \left\{x/x \geq \min Q^n(z^{'})\right\}$,

et $S_n = Q^n(z) \cup Q^n(z^{'}) \cup Q^n(z\vee z^{'}) \cup Q^n(z\wedge z^{'})$.

Les ensembles A_n et B_n sont croissants, S_n est un sous treillis, et pour n suffisamment grand les identités suivantes tiennent :

$$\begin{aligned} p(A_n/S_n) &= c_n^{-1}(X_1^n + X_4^n), \\ p(B_n/S_n) &= c_n^{-1}(X_2^n + X_4^n), \\ p(A_nB_n/S_n) &= c_n^{-1}X_4^n, \\ \text{où } c_n &= X_1^n + X_2^n + X_3^n + X_4^n \text{ et chaque } X_j^n \text{ est évalué à } (z,z^{'}). \end{aligned}$$

D'après la définition de l'affiliation on a :

$$p(A_nB_n/S_n) \geq p(A_n/S_n) \times p(B_n/S_n),$$

ou de façon équivalente,

$$(c_n)^{-1} X_4^n \geq (c_n)^{-2} (X_1^n + X_4^n)(X_2^n + X_4^n).$$

Lorsque $n \to \infty$ pour presque tout $(z, z^{'})$:

$$\begin{array}{rcl} (c_n)^{-1} X_4^n & \geq & (c_n)^{-2} (X_1^n + X_4^n)(X_2^n + X_4^n) \\ & \Longleftrightarrow & \\ c^{-1}, f(z \vee z^{'}) & \geq & c^{-2} \left[f(z) + f(z \vee z^{'}) \right] \times \left[f(z^{'}) + f(z \vee z^{'}) \right], \end{array}$$

où $c = f(z) + f(z^{'}) + f(z \vee z^{'}) + f(z \wedge z^{'})$.

Un réarrangement des termes donne la relation de l'inégalité d'affiliation.

1.5.2 Caractérisation des enchères standards (Enchère au premier prix et Enchère au second prix)

La théorie distingue traditionnellement deux types d'enchères que sont l'enchère au premier prix et celle au second prix. Dans les deux types d'enchères, les offres sont soumises sous pli cacheté et l'objet est alloué à l'enchérisseur le plus offrant. Le prix payé est égal à l'offre la plus élevée dans une enchère au premier prix et égal à celle juste inférieure à l'offre la plus élevée dans une enchère au second prix.

L'enchère hollandaise (enchère descendante), où le teneur de marché commence l'enchère par un prix élevé et le diminue progressivement est stratégiquement équivalente à l'enchère au premier prix, dans la mesure où dans les deux cas, l'enchérisseur joue la même stratégie dominante qui consiste à choisir un prix égal à l'espérance de la deuxième offre la plus élevée, si personne n'a soumis une plus forte offre que lui. Ainsi, dans l'enchère hollandaise, chaque enchérisseur dispose d'une seule information qui est celle de son estimation de la valeur de l'objet et le fait que personne n'a enchéri plus que lui.

Dans l'enchère anglaise, où le teneur de marché commence l'enchère par un prix bas et l'augmente progressivement, il y'a **révélation d'information** au cours de l'enchère du fait de l'abandon de certains joueurs. Ainsi, l'abandon d'un joueur phare (important) lors du déroulement de l'enchère pourra modifier l'évaluation à priori et les comportements des autres enchérisseurs. L'enchère anglaise devient alors plus complexe dans son analyse, dans la mesure où une **stratégie est fonction non seulement de l'information à priori mais aussi de celle acquise au cours du déroulement de l'enchère**. Or dans une enchère au second prix, l'enchérisseur à une stratégie dominante qui consiste à enchérir son évaluation de la valeur.

L'enchère au second prix serait stratégiquement équivalente à l'enchère anglaise sous condition que chaque enchérisseur dans une enchère anglaise n'a intérêt à abandonner l'enchère que lorsque le prix atteint son évaluation, et ce quelque soit la stratégie des autres.

Notion de valeurs privées ou communes dans une enchère

Dans un modèle d'enchère à valeurs privées, l'objet est évalué par chaque enchérisseur en fonction de ses caractéristiques propres (personnelles) autrement dit, chaque enchérisseur connaît sa valeur de réservation propre à lui. Alors que dans un modèle d'enchère à valeurs communes, l'objet à une valeur intrinsèque m_0 qui est identique pour tous les enchérisseurs mais inconnue de tous, et les évaluations des enchérisseurs sont ainsi supposées être tirées indépendamment suivant une même loi de probabilité conditionnelle à m_0.

Le modèle à valeurs privées à n enchérisseurs

Soit m_i, la valeur de l'objet à enchérir pour un offreur quelconque i (information privée) qui ignore les valeurs de réservation propres aux autres offreurs, mais a des croyances sur leurs évaluations. Ces évaluations sont pour lui des variables aléatoires réelles et ses croyances se résument à la connaissance des lois de probabilité (fonction de distribution) f_{m_j} des j autres enchérisseurs ($j \neq i$).

Dans la théorie des enchères, pour simplifier l'analyse, on fait souvent l'hypothèse selon laquelle, les évaluations des n offreurs sont distribuées selon la même loi de probabilité, continue, deux fois différentiables sur un compact $\left[\underline{m}, \bar{m}\right]$ et de fonction de densité f strictement positive.

L'information disponible pour tout offreur i ($i = 1, 2, ..., n$) est alors ($m_i = v_i(m); f$) où $m(m_1, m_2, ..., m_n)$ est le vecteur des évaluations des n offreurs en compétition.

La stratégie $S(m_i)$ d'un offreur i dépend ainsi de son information avant le déroulement de l'enchère (Information ex ante ou à priori), et S est croissante en m_i.

Il s'agit de rechercher dans ce modèle des **équilibres symétriques**, car tous les offreurs disposent de la même nature d'information ex ante et étant supposés être des individus rationnels, joueraient une même stratégie d'équilibre. Nous déterminerons alors l'équilibre $(S_1(m_1), S_2(m_2), ...S_n(m_n))$, où S est une fonction croissante et continue sur $\left[\underline{m}, \bar{m}\right]$: C'est un équilibre symétrique.

La symétrie des stratégies des enchérisseurs (offreurs) permet de centrer l'analyse sur un seul enchérisseur.

Supposons que l'offreur 1 enchérit une offre égale à b dans une enchère au premier prix.

Son utilité est:

$m_1 - b$ si $S(m_i) < b \forall i = 2; 3; ......; n$

0...si $S(m_i) > b \forall i = 2; 3; ......; n$

$\frac{m_1-b}{2}$ si $S(m_i) = b\forall i = 2; 3; ......; n$

L'utilité de l'enchérisseur 1 dépend ainsi de trois états de la nature, mais on négligera dans la suite de l'analyse, l'état de la nature $S(m_i) > b\forall i = 2; 3; ......; n$.

L'utilité de l'offreur 1 est alors une utilité au sens de Von Neumann et Morgenstern (Espérance d'utilité), et sa caractéristique (valeur de réservation) étant m_1, alors son utilité s'écrit:

$$u_1(b, m_1) = E\left[(m_1 - b); m_1\right]$$

Pour que le mécanisme de détermination soit révélateur, il faut que l'annonce de la vérité soit une stratégie optimale. C'est-à-dire, celle qui maximise l'utilité espérée d'un offreur quelconque i. On peut alors établir pour l'offreur 1 la contrainte incitative suivante :

$$u_1(S_1(m_1), m_1) \geq u_1(b, m_1)\forall m_1, b \in \left[\underline{m}, \bar{m}\right]$$

Notons que dans une enchère au second prix, $u_1(b, m_1) = E\left[(m_1 - \sup S(m_i)); m_1; i = 2, 3, ..., n\right]$ où $\sup S(m_i)$ est l'évaluation la plus élevée des $n-1$ concurrents de l'offreur 1.

Le principe de révélation permet de trouver les conditions nécessaires pour une stratégie d'équilibre. Ce sur quoi nous devons focaliser notre attention dans les conditions d'équilibre est que seule la caractéristique la plus élevée $\sup(m_i)$ des $n-1$ concurrents de l'offreur1 est important du fait de l'hypothèse selon laquelle, S est une fonction croissante de $m_i\forall i = 1, 2; 3; ......; n$.

Soit $\sup(m_i) = \alpha(i = 2, 3, ...n)$, dans un modèle à valeurs privées α est indépendante de m_1 car les évaluations m_i des enchérisseurs sont supposées mutuellement indépendantes.

Soit F_α définie de $\left[\underline{m}, \bar{m}\right] \rightarrow [0;1]$, la fonction de répartition de α.

La caractéristique $m_i(i = 2; 3; ......; n)$ de n'importe quel concurrent de l'offreur 1 parmi les $n-1$ a la probabilité $F(t) = \int\limits_{\underline{m}}^{t} f(t)dt$ d'être inférieure ou égale à t, où t est un réel quelconque appartenant à $\left[\underline{m}, \bar{m}\right]$.

$F(t) = \Pr[m_i \leq t]$, étant donné que les $m_i(i = 2; 3; ......; n)$ sont des variables aléatoires réelles pour l'offreur 1.

La fonction de répartition de la variable aléatoire réelle α telle que:

$$F_\alpha(t) = \Pr[\alpha \leq t] = \Pr[(m_2 \leq t) \cap (m_3 \leq t) ...... \cap (m_n \leq t)],$$

les caractéristiques des offreurs étant non corrélées, il vient:

$$\begin{aligned} F_\alpha(t) &= \Pr[(m_2 \leq t)] \times \Pr[(m_3 \leq t)] \times .... \times \Pr[(m_n \leq t)], \\ F_\alpha(t) &= [F(t)]^{n-1}. \end{aligned}$$

La fonction de densité de α est $f_\alpha(t) = (n-1)(F(t))^{n-2} f(t)$.

Dans le modèle à valeurs privées, les enchères au premier prix et au second prix admettent toutes deux, un unique équilibre symétrique.

La stratégie d'équilibre d'une enchère au premier prix est alors:

$$S(m_1) = E[\alpha / \alpha < m_1] = \int\limits_{\underline{m}}^{m_1} t \frac{f_\alpha(t)}{F_\alpha(m_1)} dt,$$

et celle de l'enchère au second prix est:

$$S(m_1) = m_1.$$

L'espérance du prix payé ($\bar{p}$) pour l'objet enchéri est pour les deux types d'enchères égale à l'espérance de la seconde plus forte offre, ainsi $\bar{p} = \int\limits_{\underline{m}}^{\bar{m}} t f_{\alpha}(t) dt.$

La stratégie d'équilibre dans l'enchère au second prix consiste à annoncer sa réelle caractéristique (sa valeur de réservation), alors que dans l'enchère au premier prix, l'enchérisseur offre moins que sa propre évaluation dans le but de ne pas avoir une utilité nulle.

Dans l'enchère au premier prix, on enchérit moins pour abaisser le prix payé, sans perdre l'opportunité d'acquérir l'objet. L'enchère au premier prix dépend alors de la distribution de probabilité de la plus forte offre des concurrents.

Intuitivement, dans une enchère au premier prix, plus le nombre d'enchérisseurs augmente, plus l'enchérisseur se place dans l'hypothèse où il va gagner et enchérit exactement l'espérance de la plus forte valeur de ses concurrents. D'où l'espérance de prix est celle de la deuxième plus forte valeur, comme dans une enchère au second prix.

Le modèle à valeur privées rend alors indifférent le vendeur dans le choix entre une enchère au premier prix et une enchère au second prix.

Le modèle à valeurs communes à n enchérisseurs

Soit m_0 la valeur intrinsèque de l'objet à enchérir et m_i le signal reçu par un offreur i sur la valeur de l'objet sachant que la valeur intrinsèque de l'objet est m_0 et inconnue des enchérisseurs.

Le signal m_i reçu indépendamment par chaque enchérisseur est une variable aléatoire réelle, dans la mesure où celui-ci est conditionné par m_0 qui est une variable aléatoire réelle. Autrement dit m_i/m_0 est une variable aléatoire réelle distribuée selon la loi de probabilité $f(t/t^*)$ qui représente la densité conditionnelle de m_i sachant que $m_0 = t^*$ et si m_0 est distribuée selon la loi de probabilité g alors, la fonction de densité jointe conditionnelle de m_i est:

$$l(m) = g(t) \prod_{i=1}^{n} f(t/t^*).$$

Dans la théorie des enchères, on suppose que m_0 est une fonction croissante de m_i en se basant sur l'hypothèse de monotonie du rapport de vraisemblance (Milgrom P. R. et Weber R. J.(1982)) selon laquelle: $\forall m_0, m_0^{'} \in \left[\underline{m}, \bar{m}\right]$ deux valeurs intrinsèques distinctes et m_i le signal reçu par un offreur i étant donné une valeur intrinsèque d'un objet à enchérir et m_j, le signal reçu par un offreur j étant donné la valeur intrinsèque du même objet. Si $m_0 > m_0^{'}$ et $m_i > m_j$, alors il vient que:

$$\left[\frac{f(t/t^*)}{f(t/t_*)} > \frac{f(t^{'}/t^*)}{f(t^{'}/t_*)}\right].$$

Avec:

$f(t/t^*)$ égale à la densité conditionnelle de m_i sachant $=$, égale à la densité conditionnelle de sachant que $m_0 = t^*$,

$f(t/t_*)$ égale à la densité conditionnelle de m_i sachant que $m_0^{'} = t_*$,

$f(t^{'}/t^*)$ égale à la densité conditionnelle de m_j sachant que $m_0 = t^*$,

$f(t^{'}/t_*)$ égale à la densité conditionnelle de m_j sachant que $m_0^{'} = t_*$.

Ceci implique que, la probabilité que m_0 soit inférieure à une valeur donnée t^* appartenant à $\left[\underline{m}, \bar{m}\right]$, est d'autant plus faible que le signal m_i reçu par un offreur i est élevé.

Il s'agit ici de rechercher un équilibre symétrique par un mécanisme révélateur (la vérité est stratégie optimale). Par conséquent en supposant que l'offreur 1, gagne l'enchère en faisant une offre b, il vient les contraintes incitatives suivantes:

$$u(S(m_1), m_1) \geq u(b, m_1) \forall m_1, b \in \left[\underline{m}, \bar{m}\right].$$

Avec:

$u(S(m_1), m_1)$, l'utilité espérée de l'$offreur$ 1 quand il annonce la vérité et $u(b, m_1) = E\left[(m_1 - b); m_i; i = 2; 3; ...; n\right]$, son utilité espérée lorsqu'il enchérit $b \neq m_1$ pour une enchère au premier prix et $u(b, m_1) = E\left[(m_1 - \sup S(m_i)); m_i; i = 2; 3; ...; n\right]$pour une enchère au second prix.

Le principe de révélation permet ainsi de trouver les conditions nécessaires pour une stratégie d'équilibre.

Dans le modèle à valeur commune, la distribution de α dépendra du signal m_i reçu par l'offreur 1. Il s'en suit que la valeur espérée de l'objet enchéri pour l'offreur 1 est:

$$v(m_1, \alpha) = E\left[m_0/m_1, \alpha \leq m_1\right].$$

La relation entre les signaux des enchérisseurs s'explique par l'hypothèse de la monotonie du rapport de vraisemblance qui se traduit par le fait que la valeur de l'objet à enchérir pour un offreur a plus de chance d'être élevée, d'autant que le signal d'un autre joueur est élevé. Ainsi si le rapport de vraisemblance vérifie l'hypothèse de la monotonie alors v est une fonction non décroissante dans ses arguments m_1 et α.

Chapter 2

Guerre d'usure: Outil d'analyse économique de différentes situations de compétition.

2.1 Introduction

La formalisation de la guerre d'usure comme un **mécanisme d'enchère au second prix avec un aspect "all-pay"** ou sa formalisation sous **l'hypothèse de temps limite** qui spécifie dans celle-ci un équilibre unique, fait de la guerre d'usure un outil privilégié d'analyse économique de diverses situations de compétition relevant d'une guerre d'usure. Plusieurs situations de compétition ont été dans la littérature économique appréhendées comme une guerre d'usure à un ou plusieurs gagnants, ou un jeu de plusieurs guerres d'usure successives (guerre d'usure continue).

Bliss C. et Nalebuff B. (1984) vont modéliser la prestation privée d'un bien public comme une guerre d'usure à plusieurs joueurs dans laquelle l'objectif des pouvoirs publics est de choisir la personne qui a le coût de prestation le plus faible pour fournir le bien public. Le coût de prestation de chaque joueur étant une information privée, il faudra mettre en place un mécanisme de révélation de la vérité. Il s'agit d'un jeu à information incomplète où ils ont mis en évidence un équilibre symétrique dans lequel le temps de sortie dépend du coût de prestation de chaque joueur. Ils ont montré que l'agent le plus efficient est celui qui a le coût actuel le plus bas et il est celui qui va fournir le bien public. Cependant lorsque les joueurs sont asymétriques, il n'est pas intuitif de se concentrer sur un tel équilibre même en cas d'asymétrie faible.

Les travaux de Bilodeau M. et Slivinski A. (1996) qui sont une extension de ceux de Bliss C. et Nalebuff B. (1984), considèrent aussi une guerre d'usure à plusieurs joueurs pour analyser la compétition entre différentes structures privées pour la fourniture d'un bien public. Comme Bliss C.et Nalebuff B. (1984), ils vont spécifier sous **L'hypothèse de temps limite**, un équilibre unique dans lequel le joueur le plus efficient fournit le bien public. Mais leur apport aux travaux de Bliss C. et Nalebuff B. (1984) a été de montrer que le joueur qui gagne la compétition, fournit instantanément le service aux consommateurs.

Kennan J. et Wilson R. (1989), utilisent la guerre d'usure pour expliquer les grèves des travailleurs. Fudenberg D. et Tirole J. (1986), Ghemawat P. et Nalebuff B. (1985 et 1990), utilisent la guerre d'usure pour modéliser la sortie des firmes sur les marchés oligopolistiques.

Alesina A. et Drazen A. (1991), Casella A. et Eichengreen B. (1996), utilisent la guerre d'usure pour expliquer les retards observés dans la stabilisation macroéconomique.

Farrell J. et saloner G. (1988), David P.et Monroe H. (1994), Farrell J. (1996), appréhendent comme une guerre d'usure, l'adoption des standards technologiques.

Hillman A. et Samet D. (1987), Hillman A. et Riley J. (1989) modélisent le lobbying politique comme une guerre d'usure.

Nous allons présenter dans les sections suivantes, des jeux de guerre d'usure (permettant l'analyse économique de diverses situations de compétition) dont les caractéristiques diffèrent de celles d'un jeu de guerre d'usure standard où, **il y'a un seul vainqueur et une seule phase de jeu**. Nous exposerons dans une première section, les travaux de **Bulow J. et Klemperer P. (1999)** qui modélisent la compétition entre firmes concurrentes cherchant à se positionner dans un oligopole naturel, comme une **guerre d'usure à plusieurs gagnants**. Dans une deuxième section, nous exposerons les travaux de **McAfee R. (2000)** qui analysent le conflit armé qui s'installe entre deux pays à l'occasion d'une dispute territoriale, comme un **continuum de guerres d'usure successives**.

2.2 Guerre d'usure à plusieurs gagnants

Nous présentons les travaux de Bulow J. et Klemperer P. (1999) qui décrivent la compétition entre plusieurs firmes présentes sur un même marché comme une guerre d'usure à plusieurs gagnants. Il s'agit d'une compétition entre firmes concurrentes qui veulent se positionner dans un oligopole naturel.

Il y'a $N + K$ firmes neutres vis-à-vis du risque présentes sur le marché qui sont en compétition pour survivre dans l'oligopole naturel.

Aussi longtemps q'une firme continue la compétition, elle supporte un coût normalisé à 1 par unité de temps.

Si une firme sort du marché, elle supporte plus tard un coût $c > 0$ ($c \leq 1$) par unité de temps jusqu'à ce qu'un total de K firmes ait quitté le marché.

Si une firme i est l'une des N firmes qui survivent à la compétition, alors elle a un gain (prime) v^i qui est une information privée de la firme i en début de compétition.

A n'importe quelle étape du jeu, soit $N+q$ le nombre de firmes restantes sur le marché, sachant que plus de q firmes ne devant quitter le marché avant la fin de la compétition.

Le plus faible type possible des $N+q$ firmes restantes est noté $\underline{v}$.

Les stratégies d'équilibre des joueurs s'écrivent $T(v, \underline{v}, q)$ et correspondent à la somme additionnelle de temps q'une firme de type v atteindra avant sa sortie du marché tandis qu'aucune des $N+q$ firmes restantes ne sorte au préalable.

La probabilité que la firme de type v soit parmi les N dernières firmes survivantes est $P(v, \underline{v}, q)$.

Les valeurs v^i sont des variables aléatoires distribuées Indépendamment sur $\left[\underline{v}, \bar{v}\right]$ selon une loi de probabilité F de densité f continue, positive et finie en tout point appartenant à $\left[\underline{v}, \bar{v}\right]$.

Le taux de hasard moral de la distribution est alors $h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$, où x est un réel quelconque appartenant à $\left[\underline{v}, \bar{v}\right]$.

Soit v_j la $\text{j}^{\text{ième}}$ plus haute valeur des valeurs v^i des $N+K$ firmes, et $E[v_j]$ son espérance mathématique.

2.2.1 La solution générale du modèle

Soit le sous jeu défini par q et $\underline{v}$. Il n'existe pas une période de temps limite au cours de laquelle, il y'a une probabilité de sortie nulle. Si c'était le cas, alors un type qui était destiné à la sortie à la fin de cette période ferait mieux de sortir en début de cette période, dans la mesure où il y'a un équilibre après la sortie suivante.

Le rythme de sortie ne peut affecter le développement subséquent du jeu dans un équilibre bayésien parfait[1]. $T(v, \underline{v}, q)$ est alors une fonction continue en v. telle que:

Le temps de sortie du type $\underline{v}$ est $T(\underline{v}, \underline{v}, q) = 0$,

Le surplus espéré du type $\underline{v}$, dans la compétition est:

$$S(\underline{v}, \underline{v}, q) = \underline{v}P(\underline{v}, \underline{v}, q) - C(\underline{v}, \underline{v}, q) = -C(\underline{v}, \underline{v}, q).$$

Avec:

$S(v, \underline{v}, q)$, le surplus espéré d'un quelconque type v, dans la compétition,

$C(v, \underline{v}, q)$, le coût engagé par le type v dans la compétition (coûts supportés avant sortie de compétition plus coûts supportés après sortie de compétition jusqu'à la fin de la compétition).

A l'équilibre, on peut établir la **contrainte incitative suivante:** Une firme de type v^a ne peut gagner la compétition, en suivant la règle de sortie du type v^b.

Soit:

$S(v^a, \underline{v}, q) \geq S(v^b, \underline{v}, q) + P(v^b, \underline{v}, q)(v^a - v^b) \ \ \forall \ v^a, v^b \in \left[\underline{v}, \bar{v}\right]$: **La vérité est stratégie optimale.**

Le surplus espéré d'un type v qui annonce $v^{'}$ est: $S(v^{'}, \underline{v}, q) = vP(v^{'}, \underline{v}, q) - C(v^{'}, \underline{v}, q)$.

En maximisant $S(v^{'}, \underline{v}, q)$ par rapport à v, la condition de premier ordre donne:

[1] Voir en annexe, la définition d'un équilibre bayésien parfait.

$\frac{\partial S(v',\underline{v},q)}{\partial v} = P(v',\underline{v},q),$

et comme à l'équilibre, la vérité est stratégie optimale, $v = v'$. D'où à l'équilibre il vient:

$$\frac{\partial S(v,\underline{v},q)}{\partial v} = P(v,\underline{v},q)$$

On peut alors écrire:

$\int_{\underline{v}}^{v} \frac{\partial S(v,\underline{v},q)}{\partial v} dv = \int_{\underline{v}}^{v} P(v,\underline{v},q)dv,$

ceci implique: $S(v,\underline{v},q) = S(\underline{v},\underline{v},q) + \int_{\underline{v}}^{v} P(v,\underline{v},q)dv.$

En remplaçant $S(\underline{v},\underline{v},q)$ et $S(v,\underline{v},q)$ par leurs valeurs, il vient:

$$C(v,\underline{v},q) = C(\underline{v},\underline{v},q) + vP(v,\underline{v},q) - \int_{\underline{v}}^{v} P(v,\underline{v},q)dv.$$

Il faut remarquer que $C(\underline{v},\underline{v},q)$ est égale à c fois la durée espérée du sous jeu après la sortie de la firme de type $\underline{v}$.

Lemme 2 1 A n'importe quel équilibre symétrique, pour tout $\underline{v}$ et tout q, $T(v,\underline{v},q)$ est strictement croissante en v et $P(v,\underline{v},q)$ est égale à la probabilité que v soit l'une des N plus hautes valeurs sachant que les valeurs des $N+q-1$ (Sauf celle qui est de type $\underline{v}$ parmi les $N+q$ restantes) autres firmes restantes excèdent $\underline{v}$.

Proof. Si un type élevé et un type faible donnent le même surplus espéré résultant de stratégies avec deux différentes probabilités d'être un survivant final, le type élevé préfère strictement la stratégie de probabilité élevée, car le type élevé ne peut sortir à un moment où le type faible reste avec une probabilité strictement positive de survivre. Donc $T(v, \underline{v}, q)$ est une fonction strictement croissante en v pour tout $\underline{v}$ et q.

Une firme survit finalement si et seulement q (ou plus) firmes parmi les $N+q-1$ autres firmes survivantes actuelles ont des valeurs plus faibles qu'elle. D'où:

$$P(v, \underline{v}, q) = \sum_{j=q}^{N+q-1} \frac{(N+q-1)!}{(N+q-1-j)!j!} \left\{ \frac{F(v) - F(\underline{v})}{1 - F(\underline{v})} \right\}^j \left\{ \frac{1 - F(v)}{1 - F(\underline{v})} \right\}^{N+q-1-j}$$

■

Ce résultat découle du fait que les firmes à valeurs élevées quittent plus tard le marché dans un équilibre symétrique.

Lemme 2 2 L'unique équilibre du sous jeu dans lequel, juste une seule firme quitte les N+q firmes restantes (q=1) pour que le jeu soit fini est défini par:

$$T(v, \underline{v}, 1) = \int_{\underline{v}}^{v} [x \ N \ h(x)] dx \ .$$

Proof. En supposant que toutes les autres firmes (sauf le type v) utilisent cette règle de sortie, le surplus espéré de la firme de type v qui se comporte comme un type v^* est:

$$u(v, v^*) = -(1 - P(v^*, \underline{v}, 1))T(v^*, \underline{v}, 1) + \int_{\underline{v}}^{v^*} \frac{\partial P(\widetilde{v}, \underline{v}, 1)}{\partial \widetilde{v}} [v - T(\widetilde{v}, \underline{v}, 1)] d\widetilde{v}.$$

Avec:

$-(1-P(v^*,\underline{v},1))T(v^*,\underline{v},1)$, l'utilité espérée du type v lorsqu'il est celui qui quitte le jeu,

$\int\limits_{\underline{v}}^{v^*} \frac{\partial P(\widetilde{v},\underline{v},1)}{\partial \widetilde{v}}[v-T(\widetilde{v},\underline{v},1)]d\widetilde{v}$, l'utilité espérée du type v lorsqu'il survit telle que:

$P(v^*,\underline{v},1) = 1-\left[\frac{1-F(v^*)}{1-F(\underline{v})}\right]^N$,

$\frac{\partial P(\widetilde{v},\underline{v},1)}{\partial \widetilde{v}} = \frac{Nf(\widetilde{v})}{1-F(\widetilde{v})}\left[\frac{1-F(\bar{v})}{1-F(\underline{v})}\right]^N$, est la densité de probabilité avec laquelle, le type v gagne alors que le faible type des N autres firmes est $\widetilde{v}$.

En dérivant $u(v,v^*)$ par rapport à v^*, la condition de premier donne:

$$\frac{\partial u(v,v^*)}{\partial v^*} = -(1-P(v^*,\underline{v},1))T'(v^*,\underline{v},1) + \frac{\partial P(v^*,\underline{v},1)}{\partial v^*}v = 0,$$

$$\frac{\partial u(v,v^*)}{\partial v^*} = -\left[\frac{1-F(v^*)}{1-F(\underline{v})}\right]^N \left[T'(v^*,\underline{v},1) - \frac{Nvf(v^*)}{1-F(v^*)}\right] = 0,$$

or $-\left[\frac{1-F(v^*)}{1-F(\underline{v})}\right]^N \neq 0$, ce qui implique:

$$T'(v^*,\underline{v},1) = \frac{Nvf(v^*)}{1-F(v^*)},$$

d'où

$$T(v^*,\underline{v},1) = \int\limits_{\underline{v}}^{v^*} \frac{Nvf(v^*)}{1-F(v^*)}dv^* \quad \text{car } T(\underline{v},\underline{v},1)=0$$

A l'équilibre, la condition de premier ordre est satisfaite pour $\overset{*}{v}=v$, et on a:

$$T(v,\underline{v},1) = \int\limits_{\underline{v}}^{v} \frac{Nvf(v)}{1-F(v)}dv.$$

■

Ce résultat montre qu'à chaque moment, la firme marginale de type v fait face à la perspective de supporter un coût supplémentaire $T^{'}(v,\underline{v},1)dv$ pour rester plus longtemps dans la compétition que les firmes dont les types sont compris entre v et $v+dv$. Pour rester plus longtemps dans la compétition, elle égale ces coûts à son gain v en cas de victoire, et choisit ainsi une probabilité égale à la probabilité qu'une des N autres firmes restantes révèle avoir un type en dessous $v+dv$. Soit: $\frac{Nf(v)}{1-F(v)}dv = Nh(v)dv$.

Cependant si le type le plus bas est localement indifférent à quitter le marché à chaque moment, les types élevés préfèrent strictement rester sur le marché. De même quand les types élevés seront localement indifférents à quitter le marché à tous les moments futurs, le type actuellement le plus bas $v=\underline{v}$ sera perdant s'il diffère sa sortie du marché car un joueur de type $v=\underline{v}$ ne gagnera jamais et sort immédiatement du marché. Soit $T(\underline{v},\underline{v},1)=0$.

Proposition 2.1 L'unique équilibre de la guerre d'usure généralisée est défini par:

$$T(v,\underline{v},1) = c^{q-1}\int_{\underline{v}}^{v}[x\ N\ h(x)]dx.$$

Proof. Supposons que la firme de type x reste au delà de son temps de sortie d'équilibre $T(v,\underline{v},1) = c^{q-1}\int_{\underline{v}}^{v}[x\ N\ h(x)]dx$. Ceci n'entraîne aucune différence dans les coûts encourus par la firme dans l'attente que les autres joueurs quittent le marché, parce que la sortie réduirait ses coûts par unité de temps d'une fraction c de son taux de pré sortie mais aussi multiplierait $T^{'}(v,\underline{v},1)$ par $\frac{1}{c}$. Ainsi la densité des types des autres firmes qui sortent serait par unité de temps c fois aussi grand.

Le type x est alors indifférent à l'attente jusqu'à $q=1$, et si le type x quitte avant $q=1$, il n'aura ni gagné ni perdu de sa déviation alors que les autres joueurs jouent la stratégie d'équilibre.

Mais à $q = 1$, il désirera strictement sortir que de rester, parce que x sera maintenant plus bas que le type marginal $\underline{v}$, qui sort immédiatement dans l'équilibre unique du sous jeu restant. En restant au-delà du temps le type perdrait en espérance de l'argent (voir preuve du lemme 2 2).

Si le type x quitte avant le temps spécifié par $T(v, \underline{v}, 1) = c^{q-1} \int_{\underline{v}}^{v} [x \ N \ h(x)]dx$, ceci n'entraînerait aussi aucune différence dans les coûts d'attente encourus, parce que les coûts de cette firme et le taux auquel les autres firmes sont entrain de sortir seraient tous deux multipliés par c.

Si à la fin du jeu (quand $q = 0$) x est plus faible que le type marginal $\underline{v}$, qui était juste sorti en jouant sa stratégie d'équilibre, alors les coûts totaux du type x ne sont pas affectés par sa déviation.

Si $x > \underline{v}$ alors le type x aurait perdu en espérance de l'argent par sa déviation, parce qu'il préférerait maintenant être encore dans le jeu (avec $q = 1$) et rester jusqu'au temps d'équilibre spécifié. Il ne peut gagner en déviant de la stratégie d'équilibre unique $T(v, \underline{v}, 1) = c^{q-1} \int_{\underline{v}}^{v} [x \ N \ h(x)]dx$.

L'intuition est que quand $q > 1$, démissionner au bout d'un temps ε avant ou après, n'affecterait pas à première vue la probabilité de gagner d'un type v (car c'est seulement lorsque q autres firmes sont dans les limites de temps ε de démissionner qu'un type v peut gagner dans la prochaine durée de temps ε). Mais démissionner fait ralentir le taux auquel le type v paie les coûts d'une fraction c par rapport au taux précédent. Ainsi si le type v est indifférent à la démission, il doit aussi ralentir les taux de démission des autres joueurs par la même fraction c (bien sûr, ce argument n'est pas complète car il montre seulement que les autres joueurs ralentissent à la fraction c en moyenne). Cela étant on a:

$$T'(v, \underline{v}, q) = cT'(v, \underline{v}, q-1),$$

par conséquent:

$$T'(v, \underline{v}, q) = c^{q-1}T'(v, \underline{v}, 1).$$

Par exemple, si $N = 1$, $K = 3$, et $c = \frac{1}{2}$, l'équilibre fluctue entre les types quatre fois aussi vite que dans un jeu à deux firmes ($N = K = 1$) jusqu'à ce qu'une firme abandonne, deux fois aussi vite que le jeu à deux firme jusqu'à ce qu'une seconde firme abandonne, et finalement à la vitesse du jeu à deux firmes jusqu'à la sortie de la troisième firme.

Une caractéristique de l'équilibre est que les $K - 1$ firmes ayant les plus bas types sont actuellement indifférentes de rester au-delà de leurs points d'abandon d'équilibre. Chacun aurait espéré retarder son départ jusqu'à ce que les $K - 1$ autres firmes aient quitté (supposons que chaque firme pensait que les autres allaient suivre leurs stratégies d'équilibre).

Bien sûr, si aucune de ces firmes ne retarde son départ jusqu'à ce que les $K-1$ autres firmes aient quitté, cela accélérerait le jeu et cette accélération serait profitable à tout le monde (si $c > 1$ chaque firme qui quitte accélère le jeu, donc quitter plus tard est un comportement qui lèse les autres).

Notons que, par opposition, la firme qui a le type le plus faible (le seul perdant dans le modèle standard à deux firmes) léserait tout le monde en retardant sa sortie, donc la durée d'équilibre du jeu est non monotone dans les évaluations des joueurs. Par exemple, un jeu avec deux joueurs résistants et un joueur faible qui sont en compétition pour une prime, dure plus qu'un jeu avec trois joueurs faibles ou un jeu avec un joueur coriace et deux joueurs faibles.

Le temps espéré entre les départs successifs augmente dans les étapes antérieures pour trois raisons différentes. Premièrement, il y'a moins de joueurs qui pouvaient quitter. Deuxièmement, les joueurs restants sont forts (l'espérance mathématique ($E\left[v_{N+q}\right]$) de la $(N+q)^{ième}$ plus haute valeur des $N + K$ valeurs des firmes croît lorsque q baisse). Et troisièmement, chaque sortie doit ralentir le jeu (c^{q-1} croît quand q diminue) afin de rendre la prochaine firme qui abandonne indifférente entre payer des coûts élevés en restant dans le jeu un peu plus longtemps et supporter des coûts plus faibles en quittant le jeu. ■

Corollaire 2 1 1 Le temps espéré lorsque le nombre de firmes présentes sur le marché passe de $N+q$ à $N+q-1$ est égal à: $Nc^{q-1}\left[\frac{E\left[v_{N+q}\right]}{N+q}\right]$.

Une approche plus économique du corollaire est de considérer un jeu dans lequel, après tout, seulement j joueurs ont été révélés avoir des valeurs au dessus de v_{j+1} ((j+1)$^{\text{ième}}$ plus haute valeur). Dans notre problème, les joueurs j restants combattent à une étape de guerre d'usure standard pour $j-1$ primes.

Comme ce jeu nécessite juste une sortie de plus, le temps d'équilibre qu'il faut pour que la firme qui a la plus faible valeur v_j parmi les j firmes restantes quitte le marché est $\int\limits_{v_{j+1}}^{v_j}[(j-1)xh(x)]dx$ avec bien sûr $v_j > v_{j+1}$. Mais d'après le théorème de l'équivalence du revenu[2] (Myerson R. (1981) ; Riley J. et Samuelson W. (1981)), les coûts espérés par joueur doivent être les mêmes comme dans une enchère anglaise, dans laquelle $j-1$ joueurs gagnent au prix v_j. Soit $E\left[\frac{(j-1)v_j}{j}\right]$.

En fait le théorème de l'équivalence du revenu stipule que si chacun des $N+K$ acheteurs potentiels neutres vis-à-vis du risque à une valeur de réservation qui est une information privée indépendamment distribuée selon la même loi avec N objets identiques à enchérir, alors n'importe quel mécanisme dans lequel les objets iront toujours aux acheteurs possédant les valeurs les plus élevées, et l'offreur avec la valeur de réservation la plus faible possible espère une utilité (surplus) nulle, **offre le même paiement total espéré aux acheteurs**.

Il vient,

$$E\left[\int\limits_{v_{j+1}}^{v_j} xh(x)dx\right] = \frac{E[v_j]}{j}.$$

[2]Le théorème de l'équivalence du revenu, est une conséquence du théorème de l'équivalence de l'utilité des offreurs dans les mécanismes d'enchère. Cependant, il n'est valide dans un mécanisme d'enchère que si certaines conditions sont réunies (Neutralité au risque, signaux non corrélés, etc).

Le théorème de l'équivalence du revenu (Myerson R. (1981)), à l'origine s'applique aux enchères dans lesquelles, il y'a un seul objet.

Williams S. (1999), va présenter une extension des travaux de Myerson R. (1981).

Dans ce modèle le temps espéré entre les sorties de la firme qui a la (j+1)$^{\text{ième}}$ plus haute valeur (v_{j+1}) et celle qui a j$^{\text{ième}}$ plus haute valeur(v_j) est **selon la stratégie d'équilibre spécifiée dans la proposition 2 1**:

$$E\left[c^{(j-N)-1}\int_{v_{j+1}}^{v_j} Nxh(x)dx\right] \text{ avec, } q = j - N.$$

Corollaire 2 1 2 La durée espérée de la guerre d'usure généralisée est:

$$N\sum_{j=N+1}^{N+K} c^{(j-N)-1}\left[\frac{E\left[v_j\right]}{j}\right].$$

Il est facile d'étendre le modèle de telle sorte que les coûts des firmes soient une fonction de q. Par exemple, dans un contexte d'oligopole, les pertes sont probablement croissantes en q.

Si les coûts sont l_q fois aussi élevés que dans le modèle exposé quand q firmes sont supposées sortir du marché, alors l'équilibre suppose que les types quittent le marché l_q fois plus vite à n'importe quel point de temps. Ainsi les **coûts totaux subis par les firmes dans la guerre d'usure sont indépendants de** l_q.

Il est aussi facile de voir qu'une actualisation n'aurait aucun effet sur comment les firmes jouent le jeu à n'importe quel moment de temps, car l'actualisation est juste équivalente à un flux exogène de probabilités. Dans beaucoup de contextes il y'a une limite à laquelle le jeu finit et personne ne gagne une prime.

2.2.2 Le cas spécial où c = 0

A la limite quand c approche 0, les firmes quittent arbitrairement vite le marché jusqu'à ce qu'il reste seulement $n+1$ firmes. Cela est vrai, si la présence de N firmes peut être profitable pour le marché et que les firmes sortantes ne supportent aucun coût après leur sortie. Alors la compétition dans un équilibre symétrique sera immédiatement à juste une firme près profitable.

Par exemple, quand il y'a juste un gagnant, la compétition révèle immédiatement la troisième valeur plus élevée v_3 et conduit à un jeu conventionnel de deux firmes commençant avec $\underline{v} = v_3$.

Une approche alternative pour obtenir ce résultat est d'utiliser la théorie d'enchère, qui est de considérer les coûts totaux espérés payés par chacune des deux firmes restantes après que la firme à la troisième valeur la plus élevée ait quitté le marché. Le Théorème de l'équivalence du revenu nous dit que ces coûts doivent être les mêmes que les coûts espérés dans une enchère au second prix entre ces firmes, c'est-à-dire l'espérance mathématique de la seconde plus élevée valeur v_2. Comparons ceci avec les coûts totaux espérés payés par toutes les firmes dans le jeu initial avec K perdants éventuels. Encore par l'équivalence du revenu avec l'enchère au second prix, les coûts totaux espérés doivent être l'espérance mathématique de v_2 dans le jeu initial. Donc les coûts espérés payés pour quitter le jeu initial au sous jeu avec deux firmes restantes doivent être nuls (la raison pour laquelle cette logique tient seulement

quand $c \to 0$, est que ceci assure que le surplus espéré d'une firme de type $\underline{v}$ est nul, dans la mesure où la firme peut sortir immédiatement à un coût pas loin de zéro).

Pour comprendre le résultat, il est à observer que s'il y'avait un retard positif alors que K $(K > 1)$ sorties étaient encore nécessaires, alors une firme qui quitte ε de temps plus tôt qu'elle avait prévu à l'origine sauverait une proportion ε dans les coûts d'attente mais réduirait sa probabilité de gagner de ε^K. Ainsi toutes les firmes abandonneraient au moins un peu plus tôt que prévu. Les firmes doivent en fait quitter sans retard jusqu'à ce qu'il reste une seule firme en excès qui peut finalement survivre.

Haigh J. et Cannings C. (1989) avaient déjà considéré le cas $c = 0$ dans le cas spécial où les valeurs des firmes sont égales (pour tout i, v_i est une constante). Il n'existe donc pas d'information privée. L'équilibre symétrique (en temps continu) est en stratégies mixtes, et toutes les firmes combinent entre tous les temps de sortie possibles.

Fudenberg D. et Tirole J. (1991), vont monter comment l'équilibre en stratégies mixtes de la guerre d'usure à deux joueurs en information complète correspond aux équilibres des guerres d'usure à information incomplète dans lesquels chaque type joue une stratégie pure différente de celles des autres.

Dans le cas présent, si une firme survit pour être au final le type le plus bas des $N+1$ firmes présentes sur le marché, son utilité espérée est nulle (car elle est alors indifférente quant à quitter immédiatement le marché). Mais elle peut aussi avoir une utilité nulle en quittant le marché dès le commencement du jeu. De plus, les firmes seront seulement contraintes à attendre pour être une des $N+1$ firmes au final si le coût d'attente est nul. Cela étant, le temps que la compétition prend pour réduire le champ à $N+1$ firmes doit être nul.

2.2.3 Le cas spécial où c = 1

Le cas spécial dans lequel toutes les firmes supportent des coûts élevés jusqu'à ce que le jeu soit résolu s'oppose au cas précédent ($c = 0$), et peut être vu comme le cas où les firmes perdent jusqu'à ce qu'un standard soit établi, avec des pertes indépendantes de comment une firme est l'une de celles restantes dans la compétition, jusqu'à l'établissement du standard.

Lorsque $c = 1$, **la proposition 2 1** stipule que les firmes quittent le marché au taux $\frac{1}{T'(v,\underline{v},q)} = \frac{1}{Nvh(v)}$ quand le type marginal parmi les types restants est v.

Il y'a une indépendance stratégique qui se traduit par le fait que chaque firme choisit son temps de sortie, comme si elle était dans un jeu avec juste $N+1$ firmes et N primes, indépendant du nombre actuel de firmes restantes.

Chaque firme qui choisit son temps de sortie au commencement du jeu, respecte ce temps de sortie.

L'intuition est: Parce que le flux de coûts d'une firme n'est pas affecté en sortant avant la fin du jeu, et que sa probabilité de gagner est aussi non affectée (à premier ordre) par de petits changements dans son temps de sortie quand K $(K > 1)$ sorties sont encore requises pour finir le jeu, alors la décision de sortie d'une firme ne peut affecter la durée du jeu. Donc les décisions des autres firmes ne sont pas affectées par les actions d'une firme donnée.

Comme pour le cas où $c = 0$, il peut être utile dans la compréhension du résultat de considérer l'équilibre en stratégie mixte du cas limite du jeu dans lequel les valeurs des firmes sont connues être égales (Haigh J. et Cannings C. (1989)).

Dans ce cas les firmes doivent être indifférentes à quitter le marché à n'importe quel moment précédent la fin du jeu. Ainsi une firme doit être indifférente entre quitter maintenant le jeu quand il reste plus de $N+1$ firmes, attendre jusqu'à ce qu'il reste exactement $N+1$ firmes, et sortir à n'importe quel moment intermédiaire. Car dans n'importe lequel de ces cas, la firme ne gagne et supporte des coûts proportionnels à la durée du jeu.

La durée du jeu doit être indépendante du choix de la firme. Donc les décisions de sortie des $K-1$ firmes à quitter le jeu (le marché) n'affectent pas les décisions des $N+1$ firmes restantes.

La durée du jeu «$c > 1$» est strictement une fonction de la $(N+1)^{ième}$ plus haute valeur, mais K est égal à la durée du jeu en espérance parce que la valeur espérée de la $(N+1)^{ième}$ plus haute valeur augmente comme $N+K$ évolue.

Aussi bien dans le jeu « $c = 0$ » que dans le jeu « $c = 1$ », la durée du jeu pour passer de $N+1$ firmes à N est également longue. La différence est que dans le jeu « $c = 0$ » on atteint immédiatement $N+1$ firmes, et donc ces $N+1$ firmes auront seulement à encourir les coûts résultant de la durée du jeu pour passer de $N+1$ à N. Cependant, avec le jeu « $c = 1$ », tous les types doivent être présents en temps réel, et la somme de temps requise pour le marché de passer de $N+K$ à $N+1$ peut excéder vite le temps nécessaire pour passer de $N+1$ à N.

2.2.4 Conclusion

Bulow J. et Klemperer P. (1999) en analysant par l'hypothèse d'un temps de jeu limite, la compétition entre firmes concurrentes dans un oligopole naturel comme un jeu de guerre d'usure, ont montré que ce jeu possède un équilibre unique qui définit le temps de sortie de compétition de chaque joueur.

Bulow J. et Klemperer P. (1999), rapportent une telle analyse à la bataille du budget américain de 1993. Ils supposent que cinquante un sénateurs américains désirent voir une dépense adoptée par le sénat à la majorité de cinquante voix favorables, mais chaque sénateur préfère ne pas à avoir voter avant que la dépense ne soit adoptée.

Chaque sénateur obtient alors une prime lorsqu'il est la seule personne qui n'est pas nécessaire pour que la dépense soit autorisée sachant que chaque sénateur supporte un coût de compétition tant qu'il n'a pas engagé son vote.

Dans une telle analyse, ils ont montré que la prise de décision politique peu parfois prendre du temps, et quand bien même les accords sont concordants, la chasse aux derniers votes peut nécessiter un temps relativement long.

2.2.5 Annexe

Pour définir l'équilibre bayésien parfait, nous allons d'abord expliciter, ce qu'est un jeu de signal.

Définition d'un jeu de signal

Considérons un jeu à deux joueurs dans lequel:

- le joueur 1 est l'émetteur (informé),

- le joueur 2 est le récepteur,

- T est l'ensemble des types possible t du joueur 1,

- $p \in \Delta(t)$, une distribution de probabilité à priori.

Le joueur 1 observe son type $t \in T$ et choisit une action (message ou signal) $m \in M$.

Le joueur 2 observe ensuite l'action m (mais ne peut observer le type t du joueur 1), et choisit une action (réponse) $r \in R$.

Le jeu se termine avec les utilités:

$u_1(m, r, t)$, utilité du joueur 1,

$u_2(m, r, t)$, utilité du joueur 2.

La stratégie d'équilibre du joueur 1 est $\sigma_1 : T \to \Delta(M)$.

La stratégie d'équilibre du joueur 2 est $\sigma_2 : M \to \Delta(R)$.

L'ensemble des signaux disponibles de l'émetteur (joueur 1) peut dépendre de son type t, soit $M(t)$.

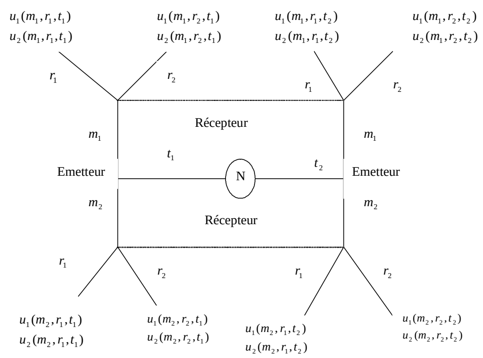
L'ensemble des réponses possibles du récepteur peut dépendre du message m, soit $R(m)$.

Si $u_1(m, r, t)$ et $u_2(m, r, t)$ ne dépendent pas du message m (signal annoncé par le joueur 1), on est dans un jeu de communication gratuite, car dans ce cas, un signal est simplement un message non coûteux.

Si de plus, l'ensemble des messages disponibles M dépend du type t de l'émetteur (joueur 1), on parle de jeu de communication gratuite avec information certifiable, ou de jeu de persuasion. Car dans ce cas, un signal s'interprète comme un certificat gratuit ou un argument. Par Exemple:

Si $M(t_1) = \{m_1, \bar{m}\}$ et $M(t_2) = \{m_2, \bar{m}\}$, alors m_i = certificat ou preuve que le type est t_i.

La figure 2.1 ci-dessous est une illustration d'un jeu de signal



$u_1(m_1, r_1, t_1)$
$u_2(m_1, r_1, t_1)$
$u_1(m_1, r_2, t_1)$
$u_2(m_1, r_2, t_1)$
$u_1(m_1, r_1, t_2)$
$u_2(m_1, r_1, t_2)$
$u_1(m_1, r_2, t_2)$
$u_2(m_1, r_2, t_2)$
r_1
r_2
r_1
r_2
Récepteur
m_1
m_1
t_1
t_2
Emetteur
N
Emetteur
m_2
m_2
Récepteur
r_1
r_2
r_1
r_2
$u_1(m_2, r_1, t_1)$
$u_2(m_2, r_1, t_1)$
$u_1(m_2, r_2, t_1)$
$u_2(m_2, r_2, t_1)$
$u_1(m_2, r_1, t_2)$
$u_2(m_2, r_1, t_2)$
$u_1(m_2, r_2, t_2)$
$u_2(m_2, r_2, t_2)$

Figure 2-1:

Définition d'un équilibre bayésien parfait

Un couple (σ, μ), où σ est un vecteur de stratégies et μ un système de croyances, est un équilibre bayésien parfait si:

-Pour tout joueur i et tout ensemble d'information du joueur i, la stratégie du joueur à cet ensemble d'information est une meilleure réponse locale compte tenu de ses croyances et des stratégies des autres joueurs.

-Dans tous les sous jeux (atteints ou non), les croyances sont obtenues à partir de σ par la règle de Bayes lorsqu'elle s'applique.

Mathématiquement,

(σ, μ), est un équilibre bayésien parfait d'un jeu de signal si:

(1) **Rationalité séquentielle du** joueur 1:

$\forall t \in T$,

$$m^* \in \arg\max_{m \in M} \sum_{r \in R} \sigma_2(r/m) u_1(m, r, t).$$

(2) **Rationalité séquentielle du** joueur 2:

$\forall m \in M$,

$$r^* \in \arg\max_{r \in R} \sum_{t \in T} \mu(t/m) u_2(m, r, t).$$

(3) **Cohérence faible des croyances**: Lorsque c'est possible, μ est obtenu par la règle de Bayes:

$$\forall m, \mu(t/m) = \frac{\sigma_1(m/t)p(t)}{\sum_{s\in T}\sigma_1(m/s)p(s)}.$$

2.3 Guerre d'usure continue

Nous allons présenter, les travaux théoriques de McAfee R. (2000) qui analysent le conflit armé qui s'installe entre deux pays à l'occasion d'une dispute territoriale comme un jeu à plusieurs guerres d'usure successives.

Les deux parties essaient d'étendre leurs frontières, et le niveau d'effort fourni par chaque partie, à chaque période, est une variable endogène.

On considère deux joueurs nommés Gauche et Droite qui jouent sur un ensemble d'états ou de noeuds n $(n = 0; 1; 2; ......; N)$.

Le joueur Gauche combat dans le sens $0 \to N$,

avec:

u_0, son utilité lorsqu'il est à l'état 0 et u_N, son utilité lorsqu'il atteint l'état N.

Le joueur Droit combat dans le sens $N \to 0$,

avec:

v_0, son utilité lorsqu'il atteint l'état 0 et v_N, son utilité lorsqu'il est à l'état N.

L'atteinte du noeud N est un gain pour le joueur Gauche et une perte pour le joueur Droite.

L'atteinte du noeud 0 est un gain pour le joueur Droite et une perte pour le joueur Gauche.

Pour formaliser cette notion de gain, on peut supposer:

$v_0 > 0 > u_0$ et $v_N < 0 < u_N$. **(1)**

Les utilités des deux joueurs seront actualisées aux différents noeuds du jeu.

Il existe une possibilité que le jeu ne finisse jamais: Les deux joueurs ont des utilités nulles.

La condition $v_0 > 0 > u_0$ et $v_N < 0 < u_N$ suppose que le gain est préféré au retard, et que le retard est préféré à la perte.

Lorsque Gauche gagne une bataille, il avance d'un noeud vers la droite et gagne la guerre lorsqu'il gagne toutes les batailles le long du segment $[0; N]$.

Lorsque Droite gagne une bataille, il avance d'un noeud vers la gauche et gagne la guerre lorsqu'il gagne toutes les batailles le long du segment $[N; 0]$.

A chaque nœud du jeu, les joueurs jouent une **guerre d'usure au premier prix**.

Les stratégies des joueurs sont non négatives dans les niveaux d'effort.

Soient x le niveau d'effort de Gauche et y celui de Droite.

L'étape de transition d'un joueur qui se trouve à un nœud quelconque n est donnée par :

n si $x = y$,

$n + 1$ si $x > y$,

$n - 1$ si $x < y$.

2.3.1 Equilibre d'une guerre d'usure continue en temps discret

Lorsque le joueur Gauche exerce plus d'effort, le nœud est avancé, et est diminué lorsque le joueur Droite exerce plus d'effort.

Les coûts de x et de y sont fixés respectivement à x et y.[3] Si le jeu finit au temps T au nœud n, l'utilité du joueur *Gauche* actualisée au point 0 est:

$$\delta^T u_n - \sum_{t=0}^{T} \delta^t x_t.$$

Où,

$\sum\limits_{t=0}^{T} \delta^t x_t$, représente la somme actualisée des coûts supportés par le joueur Gauche et δ le facteur d'actualisation avec une actualisation dans le sens $N \to 0$.

De façon analogue l'utilité du joueur Droite actualisée au point N vient :

$$\delta^T v_n - \sum_{t=0}^{T} \delta^t y_t.$$

Avec une actualisation dans le sens $0 \to N$.

En principe, les utilités espérées des joueurs pourront dépendre de toute l'histoire du jeu, qui peut être arbitrairement longue. Cependant avec un nombre important et limitable de nœuds, il y'aura typiquement un **équilibre stationnaire** où chaque joueur a une valeur espérée qui dépend seulement de l'état actuel.

[3] Si les coûts sont linéaires, fixer les coûts marginaux à l'unité est sans perte de généralité, u_0 et u_N ou v_0 ou v_N peuvent conduire à un problème équivalent d'optimisation avec coût marginal unitaire. L'analyse d'équilibre tient pour les coûts convexes, et entraîne que chaque fonction de coût est un scalaire multiple de l'autre.

De tels équilibres stationnaires semblent naturels dans ce contexte et l'analyse se focalisera sur eux[4].

L'analyse commence dans la phase du jeu. On suppose que Gauche et Droite utilisent respectivement les stratégies distributionnelles F_n et G_n de l'effort au nœud n.

Soient u_n et v_n les deux valeurs (utilités espérées) de continuation des joueurs au nœud n. Alors, ignorant le sens de leurs prochaines positions pour le moment, les utilités espérées des joueurs viennent :

$$\textit{Gauche} : u_n = \delta u_{n+1} G_n(x) + \delta u_{n-1}(1 - G_n(x)) - x, \qquad \textbf{(2)}$$

avec,

$\delta u_{n+1} G_n(x)$, l'utilité du joueur si son prochain déplacement éventuel est dans le sens $0 \rightarrow N$ (de la gauche vers la droite) et $\delta u_{n-1}(1 - G_n(x))$, son utilité si son prochain déplacement éventuel est dans le sens $N \rightarrow 0$ (car les joueurs au nœud n ignorent le sens de leurs positions prochaines),

$G_n(x) = \Pr[y < x]$:Le joueur Gauche est gagnant,

$(1 - G_n(x)) = \Pr[y > x]$: Le joueur Gauche est perdant,

similairement,

$$\textit{Droite} : v_n = \delta v_{n-1} F_n(y) + \delta v_{n+1}(1 - F_n(y)) - y. \quad \textbf{(3)}$$

[4]Il peut y avoir d'autres équilibres. En particulier, il y'a des situations où les deux joueurs préfèrent une partie nulle avec zéro effort à la guerre continue. D'ailleurs, une partie nulle pourra être supportée avec une menace d'un retour des hostilités (effort positif)

Il y'a deux sortes d'équilibres dans la phase du jeu. Premièrement, il y'a un **équilibre régulier**. En plus il peut y avoir un **équilibre dégénéré avec les deux joueurs qui choisissent un niveau d'effort nul**.

Lemme 2 3 Un équilibre au noeud n existe si:

$u_n - \delta u_{n-1} \geq 0$ avec une actualisation du point $n-1$ au point n,

$v_n - \delta v_{n+1} \geq 0$ avec une actualisation du point $n+1$ au point n,

et au moins une des inégalité tient avec une égalité, et $\bar{x} = \delta u_{n+1} - u_n = \delta v_{n-1} - v_n \geq 0$.

Proof. Généralement, on a des équilibres mélangeants. Il y'a un équilibre en stratégies pures significatif, lorsque:

$v_{n-1} = v_n = u_n = u_{n+1} = 0$,

$v_{n+1} \leq 0$ et $u_{n-1} \leq 0$

Ainsi les deux joueurs jouent pour une utilité nulle. **Ceci est la seule stratégie pure possible**.

On peut maintenant raisonner en stratégies mixtes avec des supports de distribution de l'effort identiques pour les deux joueurs.

Si le joueur *Gauche* utilisait à un point donné un effort $x_1 > 0$, il ne serait pas profitable pour le joueur *Droite* de choisir y tel que: $x_1 - \varepsilon < y < x_1$,

car en augmentant y légèrement plus que x_1, **cela entraîne un saut discret (diminution) dans la probabilité (vraisemblance) d'une issue favorable avec une hausse de coût continue**. Mais ceci signifie que Gauche peut réduire x_1 de ε sans aucune réduction dans la probabilité de succès. Cette logique permet d'écrire en utilisant les relations **(2)** et **(3)**:

$$F_n(y) = \frac{v_n - \delta v_{n+1}}{\delta(v_{n-1} - v_{n+1})} + \frac{y}{\delta(v_{n-1} - v_{n+1})},$$

$$G_n(x) = \frac{u_n - \delta u_{n-1}}{\delta(u_{n+1} - u_{n-1})} + \frac{x}{\delta(u_{n+1} - u_{n-1})}.$$

Du fait que tous les deux joueurs ne peuvent accéder à un niveau supérieur pour une utilité plus faible (sinon l'un paie à résoudre le problème de l'ignorance du sens de son prochain déplacement en faveur de l'un d'entre eux par une petite dépense additionnelle), On obtient:

$$u_n - \delta u_{n-1} \geq 0,$$

$$v_n - \delta v_{n+1} \geq 0,$$

avec au moins une des inégalité qui tient avec une égalité.

On peut supposer que pour $u_n = \delta u_{n-1}$, l'effort maximum au nœud $n-1$ satisfait:

$$0 \leq \delta u_n - u_{n-1} = \delta(\delta u_{n-1}) - u_{n-1} = (\delta^2 - 1)u_{n-1}.$$

Finalement:

$u_{n-1} < 0$ implique $u_n \geq \delta u_{n-1} > u_{n-1}$,

$u_{n-1} > 0$ implique $u_{n-1} \leq \delta u_n < u_n$.

Ainsi, u_n est une fonction croissante en n, sauf peut être quand $u_n = 0$ (l'une ou l'autre des relations montre que u_n est faiblement croissante quand $u_n = 0$).

Le lemme 2 3 dégage le calcul de l'équilibre dans la phase du jeu parce que les inégalités:

$u_n - \delta u_{n-1} \geq 0$,

et $v_n - \delta v_{n+1} \geq 0$,

décrivent les utilités nettes d'une phase de jeu pour les deux joueurs sachant qu'au moins un des deux joueurs doit avoir une utilité nette égale à zéro.

Dans une phase de jeu, l'utilité nette d'un joueur est nulle, et l'utilité de l'autre joueur est calculée en utilisant la supposition que le maximum du support de distribution de l'effort est le même pour les deux joueurs.

L'équation:

$\bar{x} = \delta u_{n+1} - u_n = \delta v_{n-1} - v_n \geq 0$,

donne le maximum du support (effort maximum), qui est défini par la supposition qu'une certitude d'un gain ne peut changer l'utilité d'un joueur.

Etant donné que $u_n - \delta u_{n-1} \geq 0$ tient avec une égalité,

l'équation $\bar{x} = \delta u_{n+1} - u_n = \delta v_{n-1} - v_n \geq 0$ donne l'utilité du joueur $Droite$.

Soit L_0 le point d'intersection entre $h(n) = v_n$ (fonction d'utilité du joueur $Droite$) et $h(n) = 0$.

On peut noter que:Pour $n \in [0; L_0[$, $v_n > 0$. Ceci implique que l'inéquation $v_n - \delta v_{n+1} \geq 0$, ne peut tenir avec une égalité, donc seule l'inéquation

$u_n - \delta u_{n-1} \geq 0$ tient avec une égalité.

Ainsi, il vient:

$$u_n = \delta u_{n-1}.$$

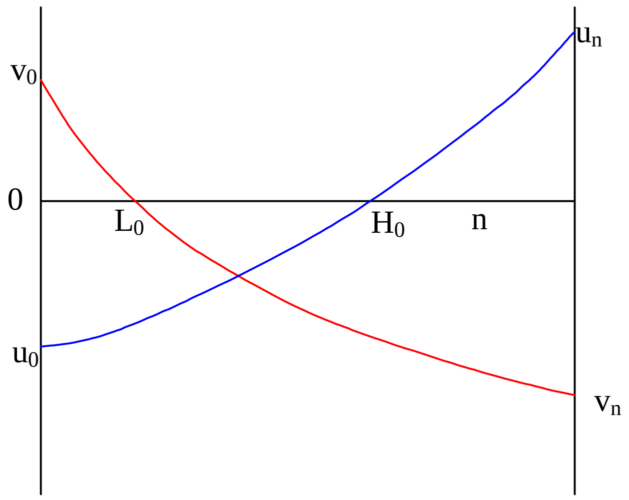
Cette équation peut être facilement résolue par induction, et donne:

$$u_n = \underline{u}_n = \delta^n u_0, \text{ pour } n \leq L_0.$$

En utilisant la relation: $\bar{x} = \delta u_{n+1} - u_n = \delta v_{n-1} - v_n \geq 0$, laquelle est une équation qui suppose que les choix de l'effort maximum possible sont les mêmes (même support de distribution de l'effort pour les deux joueurs), on peut alors calculer v_n telle que:

$$v_n = \bar{v}_n = \delta^n v_0 + n(\delta^n u_0 - \delta^{n+2} u_0) = \delta^n \left[v_0 + n(1-\delta^2)u_0\right] \quad \text{pour } n \leq L_0 - 1.$$

Soit H_0 le point intersection entre $l(n) = u_n$ (fonction d'utilité du joueur Gauche) et $l(n) = 0$, une analyse similaire au précédent donne:



Implications du lemme 1

Figure 2-2:

$$v_n = \underline{v}_n = \delta^{N-n} v_N \qquad \text{pour } n \geq H_0,$$

$$u_n = \bar{u}_n = \delta^{N-n} \left[u_N + (N-n)(1-\delta^2) v_N \right] \qquad \text{pour } n \geq H_0 + 1.$$

Les équations: $u_n = \underline{u}_n = \delta^n u_0$, et $u_n = \bar{u}_n = \delta^{N-n} \left[u_N + (N-n)(1-\delta^2) v_N \right]$, introduisent des fonctions qui sont très importantes pour l'analyse du comportement de l'équilibre.

Les fonctions $\underline{u}_n$ et $\underline{v}_n$, donnent les utilités minimales que les joueurs peuvent obtenir.

L'équation $u_n = \underline{u}_n = \delta^n u_0$ dégage la plus mauvaise situation que peut subir le joueur *Gauche*. Au nœud n, si le joueur *Gauche* n'investit rien dans les n prochaines batailles, il perdra le jeu n périodes de plus, avec une utilité $\underline{u}_n$. Le raisonnement est analogue pour l'équation $v_n = \underline{v}_n = \delta^{N-n} v_N$.

A partir de l'équation:

$u_n = \underline{u}_n = \delta^n u_0$,

il est possible de calculer l'utilité du joueur *Droite*.

On remarque dans l'équation:

$v_n = \bar{v_n} = \delta^n \left[v_0 + n(1-\delta^2)u_0 \right]$,

que l'utilité du joueur *Droite* est composée de deux termes.

Le premier terme est l'utilité de victoire qui est actualisé sur le nombre minimum de périodes nécessaires pour gagner. Ceci ne signifiant pas que le joueur *Droite* obtiendra la prime en n périodes, mais plutôt qu'il peut gagner le jeu, en exerçant un effort suffisant.

Le second terme $(-\ \delta^n n(1-\delta^2)u_0)$ est l'effort total exercé pour gagner à coup sûr, à la position n.

En fait, l'effort maximum à un nœud m quelconque est $-\ \delta^m(1-\delta^2)u_0$.

En actualisant et en sommant ces efforts on obtient la valeur du coût de l'effort qui est $-\delta^n n(1-\delta^2)u_0$.

Le joueur *Gauche* obtiendrait ce résultat s'il exerçait l'effort maximum jusqu'à la victoire. ■

Les équations ci-dessus ne caractérisent pas nécessairement les équilibres de façon complète.

On peut, en principe se demander laquelle des relations: $u_n - \delta u_{n-1} \geq 0$ et $v_n - \delta v_{n+1} \geq 0$, tenant avec une égalité conduit à un changement de position le long du champs de jeu pour n compris entre L_0 et H_0.

Il peut y avoir plus de deux positions avec une série d'utilités nulles entre L_0 et H_0 (possibilité de dégénérescence). Ce qui va donner une caractérisation entière des équilibres possibles. Pour prouver cela, on va établir le lemme suivant:

Lemme 2 4 Si $v_n = \delta v_{n+1}$ et $u_{n+1} = \delta u_n$, alors on: $u_n \leq v_n$ et $u_{n+1} \geq v_{n+1}$.

De plus,

si $v_{n-1} = \delta v_n$, alors on a: $u_n = v_n$,

si $u_{n+2} = \delta u_{n+1}$, alors on a: $u_{n+1} = v_{n+1}$.

Dans un cas ou l'autre, $u_{n+1} = v_{n+1} = 0$.

Proof. D'après la relation $\bar{x} = \delta u_{n+1} - u_n = \delta v_{n-1} - v_n \geq 0$, on peut écrire:
$u_n = v_n + \delta u_{n+1} - \delta v_{n-1} = \delta^2 u_n + v_n - \delta v_{n-1} \leq \delta^2 u_n + v_n - \delta^2 v_n$,
ce qui entraîne:

$$u_n \leq v_n, \text{ avec une égalité quand } v_{n-1} = \delta v_n.$$

Similairement, au noeud $n+1$, la relation $\bar{x} = \delta u_{n+1} - u_n = \delta v_{n-1} - v_n \geq 0$ donne:
$u_{n+1} - v_{n+1} = \delta u_{n+2} - \delta v_n = \delta u_{n+2} - \delta^2 v_{n+1} \geq \delta^2 (u_{n+1} - v_{n+1})$,
avec,
$u_{n+1} - v_{n+1} = \delta^2 (u_{n+1} - v_{n+1})$, si $u_{n+2} = \delta u_{n+1}$.

La figure 2-3 (page 91) illustre la situation où la relation $u_n - \delta u_{n-1} \geq 0$ tient avec une égalité à gauche de n^*, et la relation $v_n - \delta v_{n+1} \geq 0$ tient avec une égalité à droite de n^*.

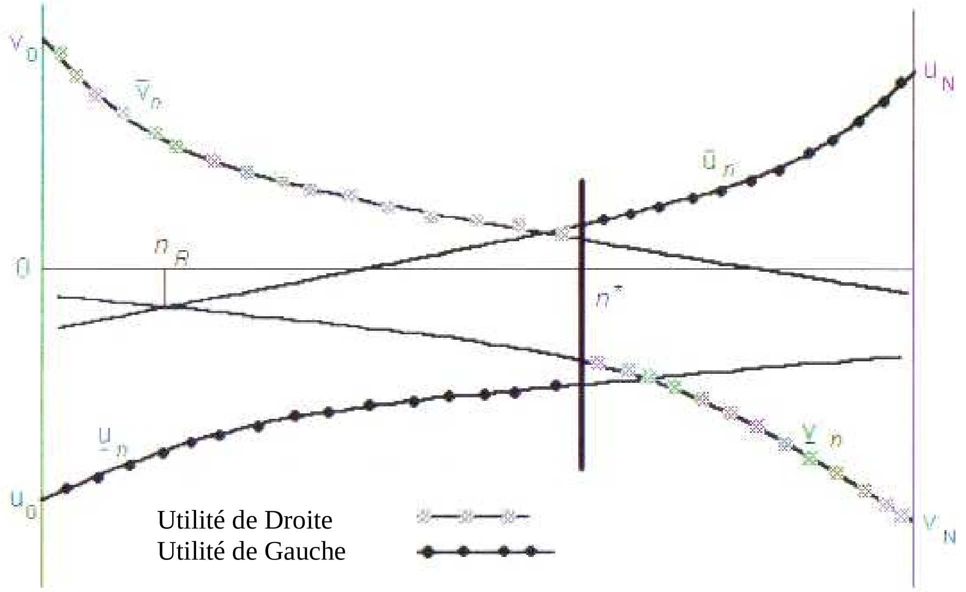
Le lemme 2 4 considère le cas contraire où l'inéquation $v_n - \delta v_{n+1} \geq 0$ tient avec une égalité à gauche, et l'inéquation $u_n - \delta u_{n-1} \geq 0$ tient avec une égalité à droite. Ceci peut seulement arriver une fois, au point où $u_n = v_n$.

De plus, si il y'a une séquence de cas intermédiaires, elle est associée à des utilités nulles pour les deux joueurs. Ce cas, avec des utilités nulles, est illustré dans la **figure 2-4** (page 92). ■

Proof. Il peut sembler singulier que $u_n = v_n$ définit le point de changement de position dans le **lemme 2 4**, car les utilités des deux joueurs sont potentiellement exprimées en différentes unités.

Cependant, comme les coûts marginaux de l'effort des deux joueurs ont été fixés à l'unité (coût de l'effort égal à l'effort fourni), et que l'effort maximum fait gagner, alors il y'a une comparabilité entre les utilités des deux joueurs.

De plus, comme $u_n = v_n$ définit un point de changement, il vient que la somme des utilités est maximisée pour $u_n = v_n$.



Le cas de l'équilibre régulier

Figure 2-3:

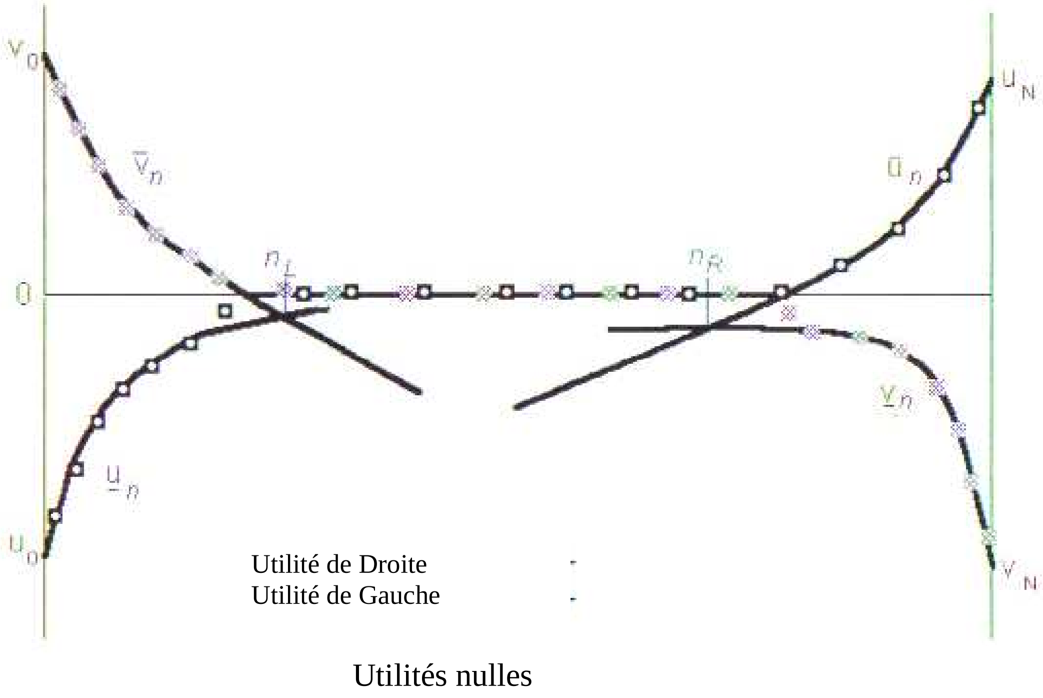

V 0
V̄ n
n L
0
U 0
u̲ n
U N
Ū n
n R
V̲ n
V N
Utilité de Droite
Utilité de Gauche
Utilités nulles

Figure 2-4:

La figure 2-3 montre la forme générale de l' équilibre régulier. Dans ce cas, toutes les valeurs de u_n et v_n sont données par les équations:

$u_n = \underline{u}_n = \delta^n u_0,$

$v_n = \bar{v}_n = \delta^n \left[v_0 + n(1-\delta^2)u_0\right],$

$v_n = \underline{v}_n = \delta^{N-n} v_N \ ,$

$u_n = \bar{u}_n = \delta^{N-n} \left[u_N + (N-n)(1-\delta^2)v_N\right],$

sauf les deux valeurs qui encadrent de part et d'autre le point n^*, qui est le point où les équations $u_n = \underline{u}_n = \delta^n u_0$ et $v_n = \bar{v}_n = \delta^n \left[v_0 + n(1-\delta^2)u_0\right]$ conduisent aux équations $v_n = \underline{v}_n = \delta^{N-n} v_N$ et $u_n = \bar{u}_n = \delta^{N-n} \left[u_N + (N-n)(1-\delta^2)v_N\right]$.

La différence entre le cas régulier et l'autre cas est que les équations $u_n = \underline{u}_n = \delta^n u_0$ et $v_n = \bar{v}_n = \delta^n \left[v_0 + n(1-\delta^2)u_0\right]$ ont leur point d'intersection à gauche du point où les équations $v_n = \underline{v}_n = \delta^{N-n} v_N$ et $u_n = \bar{u}_n = \delta^{N-n} \left[u_N + (N-n)(1-\delta^2)v_N\right]$ ont leur intersection.

Une telle situation implique qu'il y'a une série de n nœuds où aucun joueur n'a une utilité strictement positive (**ceci est illustré dans la figure 2-4**). Dans ce cas, l'équilibre implique une séquence de points où l'utilité des deux joueurs est nulle et cela se produit lorsque le facteur d'actualisation δ est suffisamment bas.

Soient n_L et n_R les points d'intersection des courbes d'utilité définies par:

$\underline{u}_{n_L} = \bar{v}_{n_L}$ et $\underline{v}_{n_R} = \bar{u}_{n_R}$.

Il n'est pas possible de visualiser le point n_L sur **la figure 2-3**, parce qu'il se produit à la droite du point N.

La fonction $\psi_n = \underline{u}_n + \bar{v}_n = \delta^n \left[u_0 + v_0 + n(1-\delta^2)u_0\right]$ donne la somme des utilités des deux joueurs dans le cas où n est suffisamment bas $(n \leq L)$.

La fonction $\phi_n = \underline{v}_n + \bar{u}_n = \delta^{N-n} \left[u_N + v_N + (N-n)(1-\delta^2)v_N\right]$ donne la somme des utilités des deux joueurs dans le cas où n est suffisamment

haut $(n \geq H)$.

La fonction ψ_n décroît en n jusqu'au point n_L où ψ_{n_L} est négative et la fonction ψ_n

croît par la suite[5]. Le raisonnement est analogue pour

la fonction ϕ_n.

On peut définir un nombre réel n^* tel que $\psi_{n^*} = \phi_{n^*}$, avec $n^* = 0$ si $\psi_0 \leq \phi_0$, et $n^* = N$ si $\psi_N \leq \phi_N$.

Si $n_L \leq n_R$ ou n^* n'appartient pas à l'intervalle $[n_L, n_R]$, n^* est dit non existant. ■

Pour caractériser l'équilibre du jeu, nous allons établir les résultats suivants:

Théorème 2 1 (McAfee R., 2000)

(a): Si n^* existe et $\psi_{n^*} \geq 0$, alors il y'a un unique équilibre stationnaire, avec:

$$v_n = \bar{v}_n \text{si } n \leq L - 1,$$

$$v_n = \underline{v}_n \text{si } n \geq L + 1,$$

$$u_n = \underline{u}_n \text{si } n \leq L,$$

$$u_n = \bar{u}_n \text{si } n \geq L + 2,$$

et,

[5]Spécialement, $\psi_n \geq \psi_{n+2}$ si et seulement si $\bar{v}_{n+2} \geq \underline{u}_{n+2}$. Ceci se produit si $n + 2 \leq n_L$. Il y'a des issues entières dans toute l'analyse comme celle-là. Et comme de telles issues disparaissent dans la même limite que le nombre de points qui apparaissent, elles peuvent être ignorées.

$\psi_{L-1} \geq \phi_{L+1}$, $\psi_L \geq \phi_{L+2.}$

(b): Si n^* n'existe pas, il y'a un équilibre unique stationnaire défini par:

$$\psi_{L-1} \geq 0 > \psi_L,$$

$$\phi_H < 0 \leq \phi_{H+1}, \text{ avec } L < H,$$

et,

$v_n = \bar{v}_n$ si $n \leq L - 1$,

$v_n = 0$ si $L + 1 \leq n \leq H - 1$,

$v_n = \underline{v}_n$ si $n \geq H$,

$u_n = \underline{u}_n$ si $n \leq L$,

$u_n = 0$ si $L + 1 \leq n \leq H - 1$,

$u_n = \bar{u}_n$ si $n \geq H + 1$.

(c): si n^* existe et $\psi_{n^*} < 0$, il y'a deux équilibres stationnaires. Un comme défini en (a) et l'autre comme défini en (b).

Proof. Voir annexe ■

Les trois types d'équilibre ne sont pas exhaustifs. Cependant, ils mettent en lumière beaucoup de spécifications de l'équilibre. De plus, le théorème ne fourni pas les calculs exacts où les utilités ne sont pas données par les relations:

$$u_n = \underline{u}_n = \delta^n u_0,$$

$$v_n = \bar{v}_n = \delta^n \left[v_0 + n(1-\delta^2)u_0\right],$$

$$v_n = \underline{v}_n = \delta^{N-n} v_N,$$

$$u_n = \bar{u}_n = \delta^{N-n} \left[u_N + (N-n)(1-\delta^2)v_N\right].$$

Le théorème montre qu'il y'a trois cas importants. Premièrement si les utilités sont telles que les courbes représentatives des fonctions ψ_n et ϕ_n se coupent en une valeur positive, alors **l'équilibre est unique** et ressemble à la description fournie par la **figure 2-3**, avec un joueur qui reçoit une utilité positive jusqu'au point de changement n^*, alors que l'autre joueur reçoit une utilité positive au-delà de n^*. Deuxièmement, **il y'a un type d'équilibre qui implique une série d'utilités nulles**. Ce type d'équilibre est unique, si $\psi_n = \phi_n$ ne se résout pas ou se résout en dehors de la région où ψ_n est décroissante et ϕ_n est croissante. Troisièmement, pour une série de nœuds intermédiaires, les deux types d'équilibres existent.

Soit p_n la probabilité de transition de n à $n-1$, qui est une probabilité de gain pour le joueur Droite. McAfee R. (2000) a établit que:

$$p_n = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{-u_0}{v_0 + (n-1)u_0 - \delta^2(n+1)u_0}\right] \quad \text{si } n < L,$$

$$p_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-v_N}{u_N + (N-n-1)v_N - \delta^2(N-n+1)v_N}\right] \quad \text{si } n > H.$$

2.3.2 Equilibre dans une guerre d'usure continue en temps continu

L'équation $\delta^N = e^{-\beta}$, fixe le niveau d'actualisation requise pour parcourir tout le terrain de jeu. L'ensemble des points est alors affiné dans un effet qui rend la distance totale constante. Il n'est pas nécessaire de réduire les coûts de conflit, dès lors que cela est équivalent à l'échelle des utilités qui est $\lambda = \frac{n}{N}$. Les sommes d'utilités sont analogues au cas précédent. Soient:

$$\psi(\lambda) = e^{-\beta\lambda}(u_0 + v_0 + 2\beta\lambda u_0,$$

$$\phi(\lambda) = e^{-\beta(1-\lambda)}(u_N + v_N + 2\beta(1-\lambda)v_N.$$

Les analogues de n_L et n_R sont les valeurs de λ qui minimisent respectivement ψ et ϕ. L'intersection des courbes représentatives de ces fonctions, au noeud λ^*, se réalise pour une valeur positive ou négative de $\psi(\lambda)$. λ^* est la limite de n^*, L et H lorsque ceux-ci sont rapprochés.

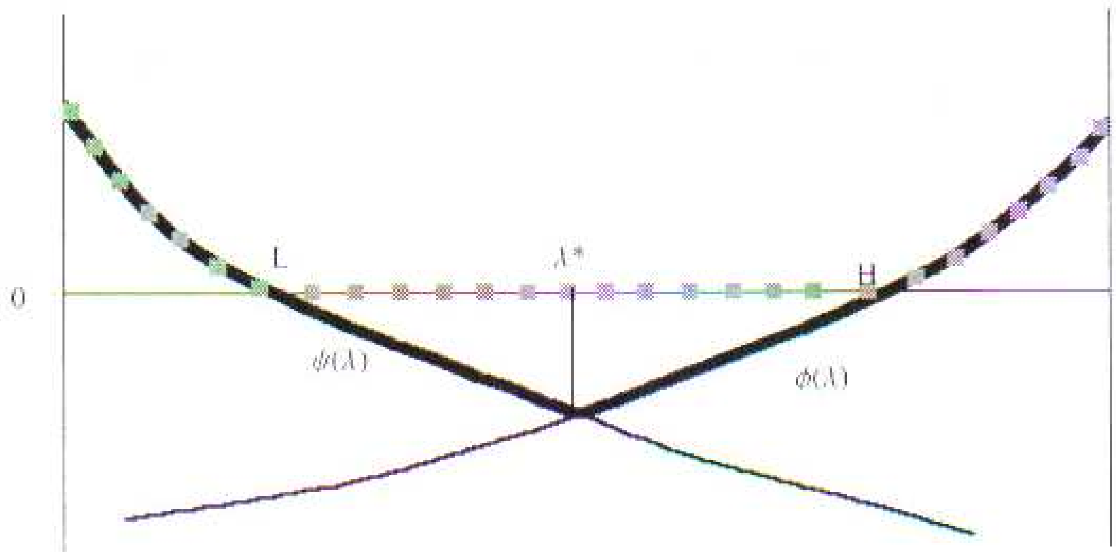
Lorsque $n \to \infty$, il y'a au plus deux limites d'équilibres stationnaires.

Si λ^* existe, il y'a un équilibre qui est égale $\max[\psi(\lambda), \phi(\lambda)]$.

Si $\psi(\lambda^*) < 0$ ou si λ^* n'existe pas, il y'a un équilibre qui est égale $\max[\psi(\lambda), \phi(\lambda), 0]$, cet équilibre est unique lorsque λ^* n'existe pas.

La figure 2-5 ci-dessous illustre la somme des utilités dans le cas où il y'a deux équilibres. Un équilibre implique une somme négative d'utilités dans la portion centrale.

Il n'existe pas de partie nulle dans cet équilibre (absence d'utilités nulles), et le vainqueur est déterminé même si le jeu commence à gauche de λ^* ou non. Dans l'autre



Deux équilibres dans une guerre continue en continu

Figure 2-5:

équilibre, il y a une partie nulle entre L et H. L'effort à n'importe quel nœud donné, converge vers zéro quand le nombre de nœuds diverge. Cependant, le taux de flux de l'effort ne disparaît autrement que dans une partie nulle.

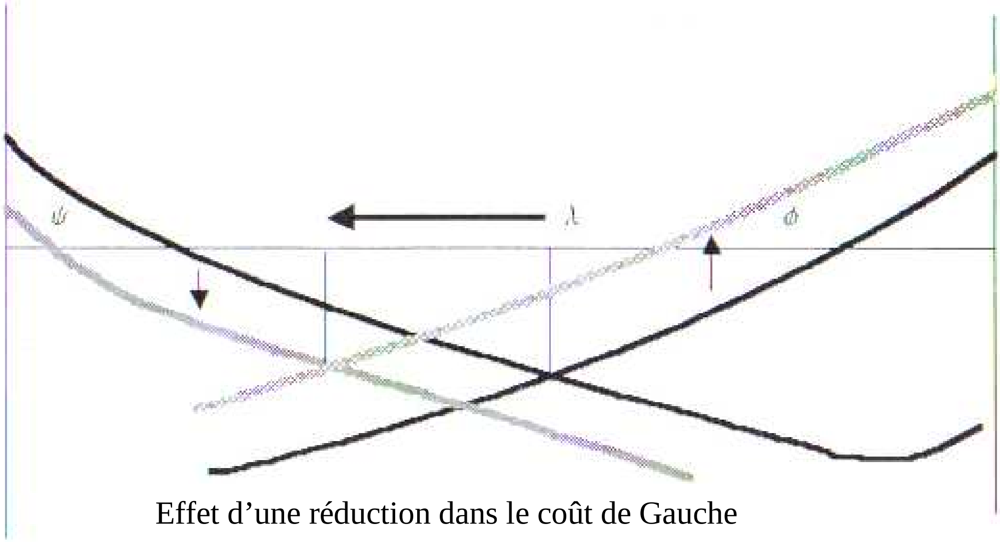
2.3.3 Equilibre du jeu lorsque les joueurs supportent des coûts faibles de l'effort

Un coût plus faible de l'effort est équivalent à **réduire à la fois l'utilité de gain et la perte par un facteur excédant l'unité**. Par exemple, si le coût de l'effort du joueur Gauche est réduit de moitié, l'effet est le même que si l'on double u_0 et u_n. En baissant le coût de l'effort du joueur Gauche, cela entraîne un déplacement de la courbe représentative de ψ vers le bas et celle de ϕ vers le haut. Ce qui entraîne un déplacement non ambiguë de n^* vers la gauche. L'effet de n^* est illustré dans la **figure 2-6 ci-**

dessous pour le cas continu. De plus la probabilité que le joueur Gauche gagne une bataille particulière quelconque croît en fonction de n, comme énuméré dans la relation $p_n = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{-u_0}{v_0+(n-1)u_0-\delta^2(n+1)u_0}\right]$ si $n < L$ et $p_n = \frac{1}{2}\left[\frac{-v_N}{u_N+(N-n-1)v_N-\delta^2(N-n+1)v_N}\right]$ si $n > H$.

A la limite, la durée de la guerre diminue quand le joueur Gauche est le gagnant probable, et augmente quand il est le perdant probable.

Une des caractéristiques principales des modèles standards de la guerre d'usure est la prédiction qu'il est plus probable que le joueur à coût faible soit le perdant. Contrairement, **la guerre d'usure continue donne au joueur à coût bas plus de chance de gagner**. Cette caractéristique est très importante pour une application quelconque.



Effet d'une réduction dans le coût de Gauche

Figure 2-6:

Une réduction dans le coût du joueur Gauche augmente uniformément sa chance de gagner le conflit. S'il y'a une région dans laquelle les deux joueurs ne peuvent combattre à l'équilibre, cette région peut s'élargir ou se rétrécir. La durée espérée de conflit augmente dans la zone où le joueur Droite a plus de chance de gagner (à gauche de λ^*) et diminue dans la zone ou le joueur Gauche a plus de chance de gagner.

2.3.4 Conclusion

Les contextes tels que les états unis au Vietnam ou la France en Algérie peuvent être considérés comme analogues à une guerre coloniale où une partie continue de survivre après une perte dans le conflit, alors que l'autre partie est anéantie. On suppose que la puissance envahissante est le joueur Droite et la partie qui se défend est le joueur Gauche. Une victoire pour le joueur Droite implique que le joueur Gauche est anéanti. Le coût d'une perte pour le joueur Gauche est supposé, très élevé. Cette bonne volonté de subir une conséquence quelconque pour esquiver (éviter) la perte peut être modélisée par u_0 allant jusqu'à $-\infty$. Comme $u_0 \to -\infty$, alors $\psi \to -\infty$ aussi. Ainsi la région où le joueur Droite gagne disparaît. Ici, à moins que le pouvoir colonial obtienne une victoire immédiate, il perd.

Cependant le désir de la partie qui se défend (Algérie, Vietnam) de ne pas perdre n'est pas le seul aspect frappant d'une guerre coloniale. Le pouvoir colonial typiquement a un coût de matériels plus faible. La baisse du coût de combat est identique à une réduction des valeurs de gain et de perte. Ainsi, lorsque le coût de combat tend vers zéro alors v_0 et $-v_N$ tendent vers ∞. **Ceci favorise la puissance coloniale et la prédiction du gagnant probable est renversée si le coût du pouvoir colonial est relativement faible, quand comparé au coût de la partie adverse**.

Lorsque les deux peuvent agir très souvent, le temps entre les batailles est réduit et le facteur d'actualisation converge vers l'unité. Il est facile de voir cela, lorsque $\psi_n \to u_0+v_0$ et $\phi_n \to u_N + v_N$. Dans ce cas il y'a un gagnant global, qui est le joueur dont la victoire donne le plus grand surplus agrégé.

Si dans le jeu ignorant l'effort, on suppose: $u_0 + v_0 = u_N + v_N$ (le surplus agrégé est le même pour les deux joueur), alors le point de changement de position n^* satisfait la condition suivante:

$$\frac{n^*}{N} = \frac{u_N - v_N}{u_N - v_N + v_0 - u_0}.$$

Ainsi les profits relatifs d'une victoire déterminent le point critique.

2.3.5 Annexe

Preuve du théorème 2 1

D'après le **lemme 2 4**, il y'à trois types d'équilibre candidats pour un équilibre stationnaire. Chaque cas sera étudié individuellement pour montrer que le **théorème 2 1** tient.

$Cas1$: $u_n = \delta u_{n-1}$ pour $n \leq L$ et $v_n = \delta v_{n+1}$ pour $n \geq L+1$,

$Cas2$: $u_n = \delta u_{n-1}$ pour $n \leq L$, $\quad v_{L+1} = \delta v_{L+2}$, $\quad u_{L+2} = \delta u_{L+1}$, et $v_n = \delta v_{n+1}$ pour $n \geq L+3$,

$Cas3$: $u_n = \delta u_{n-1}$ pour $n \leq L$, $\quad v_{L+1} = \delta v_{L+2}$, $\quad u_n = 0$ pour $L+1 \leq n < H$, $u_{H+1} = \delta u_H$, et $v_n = \delta v_{n+1}$ pour $n \geq H+2$.

Nous allons exposer seulement le cas1.

Dans le $cas1$, il n'existe pas de contrainte de renversement de tendance comme supposée dans le **lemme 2 4**. Ainsi les relations $u_n = \underline{u_n} = \delta^n u_0$, $v_n = \bar{v_n} = \delta^n \left[v_0 + n(1-\delta^2)u_0\right]$, $v_n = \underline{v_n} = \delta^{N-n} v_N$, $u_n = \bar{u_n} = \delta^{N-n}\left[u_N + (N-n)(1-\delta^2)v_N\right]$ tiennent avec $n_H = n_L + 1$.

Dans le $cas2$, il y'a une contrainte de renversement de tendance comme supposée par le **lemme 2 4**. Cependant le lemme 2 4 démontre qu'une série de renversements de tendance fournit une utilité nulle aux deux joueurs qui est illustré dans le $cas3$.

$Cas1$: Il est utile de définir deux fonctions de n:

$$\psi_n = \delta^n \left[u_0 + v_0 + n(1-\delta^2)u_0\right],$$

$$\phi_n = \delta^{N-n}\left[u_N + v_N + (N-n)(1-\delta^2)v_N\right].$$

Notons que ψ_n donne la somme des utilités pour $n \leq L-1$, alors que ϕ_n donne la somme des utilités pour $n \geq L+1$. Les équations $u_n = \underline{u}_n = \delta^n u_0$, $v_n = \bar{v}_n = \delta^n \left[v_0 + n(1-\delta^2)u_0\right]$, $v_n = \underline{v}_n = \delta^{N-n} v_N$, $u_n = \bar{u}_n = \delta^{N-n} \left[u_N + (N-n)(1-\delta^2)v_N\right]$ donnent les valeurs de u_N et de v_N pour tout n. Mais on considère deux exemples: u_{L+1} et v_L.

L'équation $\bar{x} = \delta u_{n+1} - u_n = \delta v_{n-1} - v_n \geq 0$, pour $n = L$, et $n = L+1$ donne,

$$\begin{bmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_L \\ u_{L+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}_L + \delta \bar{v}_{L-1} \\ \underline{v}_{L+1} + \delta \bar{u}_{L+2} \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} \psi_{L-1} \\ \phi_{L+2} \end{bmatrix},$$

ce qui donne:

$$\begin{bmatrix} v_L \\ u_{L+1} \end{bmatrix} = \frac{\delta}{1-\delta^2} \begin{bmatrix} \psi_{L-1} - \delta\phi_{L+2} \\ \phi_{L+2} - \delta\psi_{L-1} \end{bmatrix}.$$

Il y'a trois types de contraintes, toutes libellées par le **lemme 2 3** qui sont:

1a) $u_n - \delta u_{n-1} \geq 0$ pour $n \geq L+1$,

1b) $v_n - \delta v_{n+1} \geq 0$ pour $n \leq L$,

1c) $\delta u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $1 \leq n \leq N-1$.

Par construction,

la relation: Au moins une des inégalités $u_n - \delta u_{n-1} \geq 0$ et $v_n - \delta v_{n+1} \geq 0$ tient avec une égalité,

et,

l'égalité dans la relation $\bar{x} = \delta u_{n+1} - u_n = \delta v_{n-1} - v_n \geq 0$,

tiennent.

Il y'a six conditions qui sont équivalentes au $cas1$ qui implique un équilibre.

1.1) $(1-\delta^2)\phi_{L+3} + \delta^2\psi_{L-1} - \phi_{L+1} \geq 0$.

1.2) $(1-\delta^2)\psi_{L-2} + \delta^2\phi_{L+2} - \psi_L \geq 0$.

1.3) $\phi_{L+2} \geq \psi_L$.

1.4) $\phi_{L+1} \leq \psi_{L-1}$.

1.5) $\phi_{L+4} \geq \phi_{L+2}$.

1.6) $\psi_{L-1} \leq \psi_{L-3}$.

Les conditions 1.1), 1.2), 1.3), 1.4) et 1.5) sont des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrainte $1a$).

Par exemple:

Pour $n \geq L+3$,

$$u_n - \delta u_{n-1} = \delta^{N-n}\left[u_N + (N-n)(1-\delta^2)v_N\right] - \delta^{N-n+2}\left[u_N + (N-n+1)(1-\delta^2)v_N\right],$$

$$u_n - \delta u_{n-1} = \delta^{N-n}(1-\delta^2)\left[u_N + (N-n)v_N - \delta^2(N-n+1)v_N\right],$$

ce qui implique:

$u_n - \delta u_{n-1} = \frac{1-\delta^2}{\delta}(\bar{u}_{n-1} - \underline{v}_{n-1})$,

soit, $u_n - \delta u_{n-1} = \delta(\phi_{n+1} - \phi_{n-1})$, qui est non négative pour $n \geq L+3$ si $\phi_{L+4} \geq \phi_{L+2}$ (condition 1.5)).

Pour $n = L+2$, $u_{L+2} \geq \delta u_{L+1}$, si:

$$(1-\delta^2)u^-_{L+2} - \delta^2(\phi_{L+2} - \delta\psi_{L-1}) \geq 0,$$

$$(1-\delta^2)u^-_{L+2} - \delta^2(\phi_{L+2} - \delta\phi_{L+1}) - \delta^2(\delta\phi_{L+1} - \delta\psi_{L-1}) \geq 0,$$

$$(1-\delta^2)u^-_{L+2} - (1-\delta^2)\delta u^-_{L+1} - \delta^3(\phi_{L+1} - \psi_{L-1}) \geq 0,$$

$$(1-\delta^2)\left[u^-_{L+2} - \delta u^-_{L+1}\right] - \delta^3(\phi_{L+1} - \psi_{L-1}) \geq 0,$$

$$(1-\delta^2)\phi_{L+3} + \delta^2\psi_{L-1} - \phi_{L+1} \geq 0 \text{ (condition 1.1)).}$$

Finalement, une analyse plus poussée doit être vérifiée pour $L \in \{0; N\}$. Les calculs montrent qu'il y'a un équilibre avec $L = 0$ chaque fois que $\phi_{N-2} - \psi_0 \geq 0$. Similairement $L = N$ se produit quand $\psi_{N-2} - \phi_0 \geq 0$. Ces cas sont naturellement les généralisations des cas intérieurs.

Chapter 3

Guerre d'usure, monopole naturel et Subvention publique

3.1 Introduction

L'existence de rendements d'échelle croissants (monopole naturel) dans certains secteurs de l'activité économique justifie pleinement le choix d'une seule firme pour servir toute la demande du monopole naturel[1]. En effet en présence de rendements d'échelle croissants lorsqu'une entreprise augmente sa production, cela conduit à une baisse substantielle de son coût moyen. Dans un tel type de production, la concurrence entre différentes entreprises diminue progressivement et conduit de fait à la survie d'une seule entreprise qui sert toute la demande du marché avec une compétitivité plus grande que celle d'une concurrence.

Le monopole naturel survient le plus souvent dans les secteurs d'activités tels que:

-Les télécommunications

[1] Voir en annexe, le principe économique du monopole naturel.

-Le secteur énergétique de réseau (gaz naturel, électricité)

-La distribution d'eau.

Ces secteurs exigent en début d'activités d'importants investissements pour fournir le service aux premiers clients. Mais une fois l'investissement réalisé, le coût marginal supporté pour la fourniture du service aux clients est très faible. Cependant, les pouvoirs publics dans la logique d'une politique de régulation efficace qui sauvegarde l'intérêt général, vont chercher à confier le monopole naturel à la firme la plus compétitive c'est-à-dire, celle qui a une meilleure maîtrise de ses coûts de production ou celle qui a le taux d'efficacité économique le plus élevé. Sachant que la marge entre le produit économique réalisé sur une période donnée et les coûts qui ont permis d'atteindre ce produit économique représente le produit économique net de la période, il faut comprendre alors par taux d'efficacité économique, le rapport entre le produit économique net et les coûts investis.

L'économiste néoclassique **Walras L. (1875)** fut un des premiers, à conseiller comme politique de régulation, l'intervention des pouvoirs publics dans la gestion des monopoles naturels. Il affirme que l'inexistence de la concurrence au profit d'une entreprise privée occasionne une perte d'intérêt social, au profit du seul intérêt privé de la firme. Ainsi pour Léon Walras, la façon efficace de réguler un monopole naturel est de confier celui-ci à l'institution représentative de l'intérêt général (l'état), ou de confier un monopole réglementé à une entreprise privée. Ceci permettra de fixer un prix de vente de manière que les recettes égalisent les coûts, et que le monopole naturel ne soit plus une source de profit.

Ramsey F. (1927) et Boiteux M. (1956) proposent aux pouvoirs publics une régulation axée sur la demande et non sur la suppression de la concurrence dans le monopole naturel. Ce faisant, ils proposent aux pouvoirs publics d'imposer au monopole naturel une tarification optimale de second rang qui rétablit l'équilibre budgétaire des firmes qui vont vendre à un prix proportionnel au coût marginal. En effet la présence de plusieurs firmes dans un monopole naturel installe une concurrence qui contraint ces dernières à vendre moins cher que le coût de production. Il n'est pas alors profitable à une firme de proposer un prix de vente égal au coût marginal car l'existence de rendements d'échelle croissants fait que le coût de la dernière unité produite est plus faible que celui de la première unité produite.

Partant du fait que la concurrence entre firmes est contre productive dans un monopole naturel, **Demsetz H. (1968)** va proposer comme **Chadwick E. (1859)**, de créer ex-ante une concurrence pour le marché entre les firmes afin de sélectionner la plus apte à servir la demande du monopole naturel sous contrainte d'objectifs de prestation de service fixés par les pouvoirs publics. Les firmes se font alors une concurrence en prix pour avoir le droit d'accéder au marché pendant une période bien définie par le régulateur (pouvoirs publics). Ainsi la firme la plus efficace, est celle qui annonce le prix le plus faible et remporte de fait le contrat. Cependant selon Demsetz H. (1968), pour que le prix payé par le consommateur soit égal au coût de production moyen de la firme sélectionnée, il faut que le nombre de concurrents à l'accès du marché soit suffisamment grand et que les possibilités de collusion entre les concurrents soient inexistantes. L'outil le plus souvent utilisé pour cette forme de régulation qu'est **la concurrence pour le marché**, est l'enchère. C'est une enchère pour un contrat de franchise (franchise bidding) entre régulateur et la firme qui gagne l'enchère.

Williamson O. (1976) et Goldberg V. (1976), vont remettre en cause l'efficacité du principe de **la concurrence pour le marché** développé par **Demsetz H. (1968)**. Selon ces auteurs compte tenu de la spécificité des investissements et les incertitudes (les évolutions technologiques, l'évolution de la réglementation) qui pèsent sur les services dans un monopole naturel, **la conclusion de contrat de franchise ("Franchise bidding")** non suivi de réglementation est très risquée. Ils préconisent une intervention des pouvoirs publics (garant de l'intérêt général) pour contrôler les actions de la firme privée à qui l'on confie le monopole naturel. Cette façon d'appréhender la régulation des monopoles naturels de williamson O. (1976) et de Goldberg V. (1976), sera reprise par **Armstrong M. et al (1994); Crocker K. et Masten S. (1996 et 2002)**.

Plusieurs auteurs tels que **Naegelen F. (1990), Crocker K. et Masten S. (1996 et 2002)**, estiment que le **principe de la concurrence pour le marché** conduit à la sélection de la firme la plus compétitive que s'il est possible de mettre en place des enchères unidimensionnelles, dans lesquelles le prix est l'unique paramètre sur lequel les firmes se font concurrence. Selon **Naegelen F. (1990)**, lorsque la concurrence entre les firmes est organisée autour de plusieurs critères, les pouvoirs publics ont plus de facilité à manipuler celle-ci que dans le cas d'une concurrence basé seulement sur le critère du plus bas prix. La hiérarchisation des critères dans une enchère multidimensionnelle pouvant conduire à des attributions préférentielles de la part de l'autorité de régulation (pouvoirs publics). Un autre problème fondamental que soulève le **principe de la concurrence pour le marché** selon **Guasch J.L. (2004)**, est que certaines firmes en compétition peuvent consciemment proposer au régulateur des conditions tarifaires intéressantes (proposition de prix inférieure au coût de production) dans le but de renégocier le contrat, une fois l'enchère remportée.

Dans les différentes théories de régulation des monopoles naturels élaborées avant les années 80, les problèmes informationnels entre régulateur (pouvoirs publics) et firmes ont été largement ignorés. C'est pratiquement à partir des années 80 que le principe de la régulation a été défini en termes de relations principal-agent notamment grâce aux travaux de **Loeb M. et Magat W. (1979), Baron D. et Myerson R. (1982), Laffont J.J. et Tirole J. (1986)**. En partant du fait que les firmes ont une connaissance privée de leur technologie de production ou de leurs coûts d'exploitation qui sont inconnus des pouvoirs publics, ils vont élaborer des mécanismes régulateurs optimaux qui définissent les objectifs de l'état et de la firme sous des contraintes informationnelles et économiques. Les contraintes informationnelles représentent un enjeu capital car leur existence empêche les pouvoirs publics (régulateur) d'implémenter une politique réglementaire qui sauvegarde l'intérêt collectif. **Ainsi, avant même de mettre en oeuvre une quelconque politique de réglementation, les pouvoirs publics doivent pouvoir identifier la firme capable (celle qui a la meilleure maîtrise de sa fonction de coûts) de servir la demande du monopole naturel or les firmes ont une connaissance privée de leurs fonctions de coûts. Cette asymétrie d'information entre pouvoirs publics (état) et firmes pose ainsi, le problème de choix de la firme (privée) la plus efficace à qui les pouvoirs publics vont confier un monopole naturel réglementé**.

Pour résoudre ce problème de choix de la firme la plus efficace à servir la demande dans un monopole naturel lorsqu'il y'a asymétrie d'information entre firmes et pouvoirs publics, il serait optimal pour l'état de laisser la compétition se jouer au départ sur le marché. Ainsi il va s'établit au départ entre firmes concurrentes une compétition qui prendra la forme d'une guerre d'usure qui conduira à la survie de la firme la plus compétitive (la plus efficace) sur le marché. **Cette approche s'inspire notamment des travaux de Bulow J. et Klemperer P. (1999) qui modélisent la compétition entre firmes concurrentes cherchant à se positionner dans un oligopole naturel, comme une guerre d'usure à plusieurs gagnants.**

Mais à la différence du modèle de **Bulow J. et Klemperer P. (1999)** qui se base sur **l'hypothèse d'un temps de jeu limite** pour spécifier dans la guerre d'usure un équilibre unique qui définit **le temps de sortie de chaque joueur**, nous proposons un jeu de guerre d'usure basé sur un mécanisme d'enchère spécifique dans lequel, les joueurs engagent par unité de temps dans la compétition des paiements différents du fait qu'ils n'ont pas les mêmes fonctions de coûts ou simplement deux joueurs qui abandonnent à la même période supportent des coûts de compétition différents. Cette approche diffère de celle d'un jeu de guerre d'usure (basé sur un mécanisme d'enchère) traditionnellement développée dans la littérature. En effet dans un jeu de guerre d'usure standard (basé sur un mécanisme d'enchère), les joueurs engagent dans le jeu les mêmes paiements par unité de temps et ce qui les différencie est la différence entre les seuils de coûts qu'ils sont capables de supporter ou simplement le temps pendant lequel un joueur peut tenir dans la compétition car deux joueurs qui abandonnent à la même période supportent les mêmes coûts de compétition. De plus, nous introduisons dans notre analyse, l'état qui intervient pour soutenir financièrement la firme gagnante.**Cet apport très intéressant de notre modèle est de montrer comment l'introduction d'une subvention publique dans une guerre d'usure, modifie la structure des paiements d'équilibre engagés par les joueurs et par conséquent, le bien être collectif**.

Les coûts de compétition peuvent être:

- Des coûts liés à l'innovation pour offrir une gamme de produits de plus en plus attractifs pour de nouveaux clients.

- Des coûts de marketing agressif engagés par chaque firme pour se donner la meilleure image sur le marché et accroître sa part de marché.

- Des coûts liés à la recherche d'informations par une firme sur les tactiques de concurrence de son adversaire. Ceci pour un meilleur recentrage de ses actions afin de garder le dessus dans la bataille

Dans la suite de notre article nous allons présenter dans une première partie, les termes de notre modèle et dans une deuxième partie, nous présenterons les différents résultats induits par une guerre d'usure dans laquelle, deux joueurs qui abandonnent à la même période supportent des coûts de compétition différents. Ensuite nous allons appréhender l'impact de l'intervention de l'état sur l'équilibre d'un tel jeu de guerre d'usure lorsque celui-ci accorde en fin de compétition à la firme gagnante, une subvention publique.

3.2 Le Modèle

Pour mieux appréhender notre analyse nous allons considérer deux firmes présentes sur le marché qui sont en compétition pour le contrôle d'un monopole naturel dans un secteur d'activités donné.

Les deux firmes n'ont pas les mêmes fonctions de coûts et par conséquent possèdent des taux d'efficacité économique différents. Le taux d'efficacité économique traduit la capacité de chaque firme à rentabiliser les coûts investis dans l'atteinte de ses objectifs économiques. Il représente le produit économique net réalisé pour une unité de compte investie.

Dans le cas où les pouvoirs publics peuvent observer sur le marché les fonctions de coûts des firmes en compétition, ils vont confier le monopole naturel à la firme qui à la meilleure maîtrise de ses coûts (la plus compétitive).

Dans le cas d'une asymétrie d'information où les pouvoirs publics ne peuvent observer les fonctions de coûts des firmes, il se pose le problème de choix de la firme la plus compétitive pour servir le monopole naturel. Pour solutionner un tel problème, nous suggérons de laisser jouer la compétition au départ entre les firmes. Cette compétition prendra la forme d'une guerre d'usure dans laquelle les deux firmes supportent des paiements différents à la fin du jeu (lorsqu'un joueur abandonne la compétition). Un tel mécanisme conduira à la survie sur le marché de la firme la plus compétitive c'est-à-dire, celle qui à une meilleure maîtrise de ses coûts.

Nous allons développer un jeu de guerre basé sur un mécanisme d'enchère particulier qui permettra à la firme ayant la plus grande efficacité économique de survivre à la compétition au départ entre firmes concurrentes pour servir la demande dans un secteur d'activité à rendements d'échelle croissants (monopole naturel).

En début de compétition, chaque firme à un taux d'efficacité économique qui est une information privée sur laquelle son concurrent n'a que des croyances. Ceci suppose que lorsque les deux firmes rentrent en compétition, chaque firme ignore le taux d'efficacité économique de l'autre.

En début de compétition, chaque firme à un taux d'efficacité économique positive qui est à sa valeur maximale. En effet les coûts de compétition à chaque période de jeu, se cumulent au fur et à mesure que le jeu perdure et alourdissent ainsi les coûts économiques des firmes. Ceci conduit à une érosion progressive de l'efficacité économique de chaque firme. Ainsi une firme est au seuil d'efficacité économique nul, lorsque les coûts engagés sont égaux au produit économique qu'ils permettent d'atteindre.

Dans un tel environnement de compétition, les firmes vont engager des coûts de compétition de plus en plus importants dans la mesure où à chaque nouvelle période de jeu, chaque firme se repositionne mieux en tenant compte des performances ou des contre performances réalisées par son adversaire au cours de la période précédente.

Intuitivement, la firme qui a un taux d'efficacité économique de début de période plus élevé est celle qui à la meilleure politique de gestion des coûts dans l'atteinte de ses objectifs économiques. Ainsi la firme qui a le taux d'efficacité économique de début de période le plus faible va atteindre la première le seuil d'efficacité économique nul, dans la mesure où elle a une politique de gestion de coûts moins rigoureuse (elle rentabilise moins ses investissements). Ceci suppose que le taux d'efficacité économique de début de période détermine le comportement de chaque firme dans la maîtrise de ses coûts de compétition et ainsi les dépenses de compétition de chaque firme sont fonction de son taux d'efficacité économique de début de période.

Nous supposons qu'une firme ne peut aller sur le marché en deçà du seuil d'efficacité économique nul en continuant à financer indéfiniment des dépenses de compétition, car la toute petite dépense de compétition en deçà du seuil d'efficacité économique nul, entraîne automatiquement la faillite de la firme. Ceci suppose que le marché sanctionne spontanément toute indélicatesse à continuer à financer des dépenses de compétition lorsqu'une firme est au seuil d'efficacité économique nul. Une firme prendra alors la décision de quitter le jeu lorsqu'elle sera au seuil d'efficacité économique nul sachant que la firme qui abandonne en premier le jeu perd la compétition et quitte le marché.

La prime en jeu pour chaque firme est le profit réalisable sur le marché en cas de victoire. Cette prime est fonction du taux d'efficacité économique de début de période de chaque firme. Et comme le taux d'efficacité économique de début de période de chaque firme est une information privée, alors le profit réalisable sur le marché en cas de victoire est individuellement perçu par chaque joueur.

Le paiement engagé (dépenses de compétition) par chaque firme dans la compétition est totalement déterminé par son taux d'efficacité économique de début de période qui informe sur la politique de maîtrise des coûts mise en oeuvre par la firme.

Les deux firmes sont en compétition pour le contrôle d'un monopôle naturel mais elles n'ont pas les mêmes capacités à rentabiliser leurs investissements. En effet ces deux firmes n'ont pas la même politique de maîtrise des coûts et par conséquent, n'ont pas la même efficacité économique dans l'atteinte de leurs objectifs économiques respectifs. Ceci sous tend que la firme qui à le taux d'efficacité économique le plus élevé engagera dans la compétition des paiements mieux rentabilisés que son adversaire dans la réalisation de ses objectifs économiques.

Les deux firmes sont représentées par $i = 1; 2$.

Le taux d'efficacité économique de début de période de chaque firme i est noté θ_i et constitue une information privée (signal reçu) pour chaque firme i.

Les stratégies (paiements engagés) d'équilibre des firmes (joueurs) sont fonction des signaux θ_i reçus et sont notées $\beta(\theta_i)$.

Les taux d'efficacité économique de début de période θ_i sont indépendamment distribués sur le même support $[0;1]$ selon une fonction de répartition F avec une fonction de densité f continue, deux fois différentiable et positive en tout point de $[0;1]$.

Les deux firmes en compétition sont neutres vis à vis du risque.

La stratégie d'équilibre β de chaque firme i est une fonction croissante de son taux d'efficacité économique de début de période θ_i. En effet, plus le taux d'efficacité économique d'un joueur est élevé, plus il engage dans la compétition des dépenses plus importantes du fait de sa propension à mieux rentabiliser ses investissements. Ainsi, le joueur au taux d'efficacité économique de début de période plus élevé, en rentabilisant mieux que son concurrent ses dépenses de compétition subit un rythme plus faible d'usure de son taux d'efficacité économique de début de période. Par conséquent, son concurrent atteindra avant lui, le seuil d'efficacité économique nul.

Soit:

$$\begin{aligned} \beta : [0;1] &\to [0;1] \\ \theta_i &\mapsto \beta(\theta_i) \end{aligned}$$

On suppose que l'essentiel des dépenses de compétition des firmes vont dans l'innovation afin d'offrir une gamme de produits de plus en plus attractifs pour de nouveaux clients.

La firme qui a le taux d'efficacité économique de début de période nul, sachant qu'elle va toujours perdre va engager un paiement d'équilibre nul.

Le profit perçu par chaque firme en compétition est une fonction croissante de son taux d'efficacité économique de début de période et est noté $v(\theta_i)$. En effet la firme qui a le taux d'efficacité économique de début de période le plus élevé, étant plus efficace que son concurrent dans la réalisation de ses objectifs économiques a une évaluation plus importante du gain réalisable sur le marché en cas de victoire. Ceci s'explique par le fait qu'il y'a une relation évidente entre le comportement de gestion d'une firme et le gain qu'elle espère réaliser sur le marché en cas de victoire.

Avec:

$v : [0;1] \rightarrow [0;+\infty]$

$\qquad \theta_i \mapsto v(\theta_i)$

La firme qui a le taux d'efficacité économique de début de période le plus faible, engage dans la compétition des coûts plus faibles que son concurrent mais subit du fait de sa faible capacité à rentabiliser ses investissements, un rythme d'usure plus rapide de son taux d'efficacité économique de début de période. Ceci suppose qu'elle sera la première à atteindre un seuil d'efficacité économique nul et donc la première à abandonner la compétition. Ainsi à son abandon, son adversaire aura engagé dans la compétition des coûts plus importants mais mieux rentabilisés.

Les coûts de compétition alourdissent les charges de l'entreprise et favorisent la détérioration de son efficacité économique.

On suppose qu'à un abandon simultané, le monopole est attribué par tirage au sort à une des deux firmes.

3.2.1 Equilibre du jeu en absence de subvention publique

L'utilité espérée de la firme 1(position symétrique des deux firmes), lorsqu'elle annonce à l'équilibre $\theta_1 = t$ vient:

$-(1 - F(t))\ \beta(t)$, lorsque la firme 1 abandonne le premier,

$F(t) \times (v(t) - \beta(t))$, lorsque la firme 2 abandonne le premier.

Avec:

$\beta(t)$, le paiement d'équilibre supporté par le joueur 1 à l'abandon d'un joueur,

$F(t)$=Pr $[\theta_2 \leq t]$.

L'utilité espérée totale de la firme 1 vient:

$$\pi = F(t) \times v(t) - \beta(t) \tag{3.1}$$

En maximisant l'utilité espérée totale d'équilibre du joueur 1, la condition de premier ordre donne:

$$\beta^{'}(t) = \frac{\partial[F(t) \times v(t)]}{\partial t} \tag{3.2}$$

La stratégie d'équilibre du joueur 1 vient alors:

$$\beta(t) = F(t) \times v(t) \;\; \text{car } \beta(0) = 0 \tag{3.3}$$

3.2.2 Equilibre du jeu lorsque l'état subventionne la firme gagnante

Nous allons maintenant appréhender l'incidence de l'intervention publique sur le paiement d'équilibre engagé dans la compétition par une firme lorsque l'état garantit à la firme gagnante une assistance financière qui rétablit l'égalité des coûts de compétition entre les deux firmes à l'issue du jeu.

Nous allons supposer que l'état accorde à la firme gagnante (celle qui a le taux d'efficacité économique de début de période le plus élevé) une subvention qui prend la forme d'une prime qui récompense l'effort du supplément d'investissement de la firme gagnante sur la firme perdante étant donné que l'essentiel des coûts de compétition vont dans l'innovation qui sert de levier pour la dynamique de tout secteur d'activité. Ainsi, si la firme i est celle qui remporte la compétition lorsque la firme j abandonne la compétition en premier, alors la subvention reçue du gouvernement par la firme i est: $(\beta(\theta_i) - \beta(\theta_j))$.

La subvention est socialement coûteuse et une unité de compte de subvention coûte pour les contribuables $(1+\lambda)$. La subvention $(\beta(\theta_i) - \beta(\theta_j))$ accordée par l'état à la firme i lorsqu'elle remporte la compétition coûte alors aux contribuables $(\beta(\theta_i) - \beta(\theta_j))(1+\lambda)$.

L'utilité espérée de la firme 1(position symétrique des deux firmes), lorsqu'elle annonce à l'équilibre $\theta_1 = t$ vient:

$-(1 - F(t))\ \beta(t)$, lorsque la firme 1 abandonne le premier,

$\int_0^t \{(v(t) - \beta(t)) + (\beta(t) - \beta(\theta_2 = s)\} f(s)ds$, lorsque la firme 2 abandonne le premier.

Avec:

. $\beta(\theta_1)$, le paiement supporté par le joueur 1 à l'abandon

. $\beta(\theta_2)$, le paiement supporté par le joueur 2 à l'abandon

L'utilité espérée totale de la firme 1 vient:

$$\Pi = \int_0^t \{v(t) - \beta(\theta_2 = s)\} f(s)ds - (1 - F(t))\beta(t). \tag{3.4}$$

Stratégies d'équilibres des firmes

En maximisant l'utilité espérée totale d'équilibre du joueur 1, la condition de premier ordre donne:

$$(v(t) - \beta(t))f(t) - \beta'(t)(1 - F(t)) + f(t)\beta(t) = 0,$$

$$v(t)f(t) - \beta'(t)(1 - F(t)) = 0,$$

d'où:

$$\beta^{'}(t) = v(t)\frac{f(t)}{1 - F(t)}. \tag{3.5}$$

La stratégie d'équilibre du joueur 1 vient alors:

$$\beta(t) = \int_0^t v(t)\frac{f(t)}{1 - F(t)}dt \qquad \text{car } \beta(0) = 0 \tag{3.6}$$

Proposition 3.1 Lorsque dans une guerre d'usure, des firmes engagent des coûts de compétition différents par unité de temps avec des paiements d'équilibre qui sont des fonctions croissantes de leurs taux d'efficacité économique alors, elles obtiennent une utilité d'équilibre nulle en absence ou en présence d'une subvention publique accordée à la firme gagnante.

Preuve Voir annexe

Ce résultat montre que chaque joueur engage dans la compétition un paiement marginal d'équilibre égal à son gain marginal d'équilibre perçu en cas de victoire. Le paiement d'équilibre engagé par chaque joueur est alors un équilibre efficace.

Proposition 3.2 Lorsque la subvention publique permet de rétablir l'égalité des coûts de compétition entre les deux firmes à l'issue du jeu alors, elles engagent dans la compétition des coûts plus importants qu'en absence d'un tel soutien financier public.

Proof. Comparons le paiement d'équilibre d'une firme en absence d'une telle subvention publique($\beta(t) = F(t) \times v(t)$) à son paiement d'équilibre en présence d'une subvention publique qui rétablit l'égalité des dépenses à la fin du jeu ($\beta(t) = \int_0^t v(t) \frac{f(t)}{1-F(t)} dt$).

Pour simplifier l'analyse, il suffirait de comparer les paiements d'équilibre marginaux dans les deux cas.

En absence de subvention publique on a: $\beta'(t) = \frac{\partial[F(t) \times v(t)]}{\partial t} = f(t) \times v(t) + \frac{\partial v(t)}{\partial t} F(t)$ (a)

En présence de subvention publique on a:$\beta'(t) = v(t) \frac{f(t)}{1-F(t)}$ (b)

$(b) - (a)$ donne:

$$F(t)[v(t) \frac{f(t)}{1-F(t)} - \frac{\partial v(t)}{\partial t}] \qquad (c)$$

$sgnF(t)[v(t) \frac{f(t)}{1-F(t)} - \frac{\partial v(t)}{\partial t}] = sgn[v(t) \frac{f(t)}{1-F(t)} - \frac{\partial v(t)}{\partial t}]$ car pour tout $t \in [0; 1]$, $F(t) \geq 0$.

Etant donné que pour tout $t \in [0; 1]$, $v(t) \geq \frac{\partial v(t)}{\partial t}$ et $\frac{f(t)}{1-F(t)} \geq 1$, il vient:

$$F(t)[v(t) \frac{f(t)}{1-F(t)} - \frac{\partial v(t)}{\partial t}] \geq 0 \text{ pour tout } t \in [0; 1]$$

Nous pouvons ainsi conclure qu'en présence d'une subvention publique qui permet de ramener les joueurs au même niveau de coûts de compétition à la fin du jeu, les firmes engagent dans la compétition des coûts plus importants qu'en absence d'une telle subvention publique. ■

Ce résultat découle du fait que les deux firmes en compétition étant informées ex ante d'une telle subvention publique rétablissant l'égalité des coûts de compétition en fin de jeu, sont plus incitées à investir dans la compétition. Elles sont alors conscientes qu'en cas de victoire, elles transfèrent une partie du risque d'investissement sur l'état. Et comme nous avons supposé que l'essentiel des coûts de compétition vont dans l'innovation, cela va soutenir la dynamique du secteur d'activité concerné. Ainsi les pouvoirs publics en récompensant de cette façon l'effort de la firme la plus efficace (celle qui engage la part la plus importante des dépenses d'innovation) rend la compétition plus bénéfique pour le secteur d'activité concerné.

A partir de notre résultat, on peut faire le constat suivant: Lorsque deux firmes sont dans une compétition où elles engagent par unité de temps des paiements différents avec un pouvoir public qui subventionne à l'issue du jeu le supplément de dépense du gagnant sur le perdant, notre modèle conduit les firmes à jouer la même stratégie d'équilibre que celle d'un modèle de guerre d'usure basé sur un mécanisme d'enchère all-pay standard dans lequel les joueurs supportent les mêmes coûts par unité de temps. Ce constat rend intéressant et pertinent notre analyse, dans la mesure où: Les pouvoirs publics en jouant leur rôle de régulateur de la concurrence, permettent par le biais d'un tel mécanisme financier à introduire l'équité et la dynamique dans une compétition pour servir la demande dans un monopole naturel.

Proposition 3.3 La subvention publique accordée à une firme en cas de victoire est une fonction décroissante dans son signal d'équilibre.

Preuve Voir annexe.

ce résultat découle du fait que la subvention accordée à la firme 1 en cas de victoire est aussi fonction du paiement d'équilibre de son adversaire (firme 2). Ainsi lorsque la firme 1 annonce à l'équilibre t, étant donné que le paiement d'équilibre de la firme 2 est une fonction croissante dans son signal s alors plus s est proche de t, plus la subvention accordée à la firme 1 en cas de victoire diminue progressivement jusqu'à s'annuler pour $t = s$.

Impact social de l'intervention publique

Il s'agit de mesurer l'efficacité économique de la subvention publique (accordée par l'état à la firme gagnante) telle que spécifiée dans notre analyse.

Nous allons supposer que dans le paiement d'équilibre engagé par une firme dans la compétition, il y'a une proportion α ($\alpha \in]0;1]$) qui constitue un bénéfice net pour le secteur d'activité concerné. Cette proportion va concerner notamment les dépenses d'innovation dans la mesure où l'innovation entretient la dynamique du secteur d'activité. Elle représente le surplus des consommateurs.

Proposition 3.4 Le transfert public tel que spécifié dans notre modèle est socialement efficace dans la mesure où, l'utilité d'équilibre collective marginale espérée par firme en présence de subvention publique dans le secteur d'activité concerné est supérieure ou égale à l'utilité d'équilibre collective marginale espérée par firme en absence de subvention publique.

Proof. Soient:

$\beta_1(t) = F(t) \times v(t)$, le paiement d'équilibre de la firme 1 en absence de subvention publique,

$\beta(t) = \int_0^t v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)}dt$, le paiement d'équilibre de la firme 1 en présence de subvention publique,

$\beta_1(t') = F(t') \times v(t')$, le paiement d'équilibre de la firme 2 en absence de subvention publique,

$\beta(t') = \int_0^{t'} v(t')\frac{f(t')}{1-F(t')}dt'$, le paiement d'équilibre de la firme 2 en présence de subvention publique,

EW_1, l'utilité d'équilibre collective espérée (utilités des firmes + surplus des consommateurs) en absence de subvention publique,

EW, l'utilité d'équilibre collective espérée (utilités des firmes + surplus des consommateurs) en présence de subvention publique,

$(1+\lambda)\int\limits_{0}^{t}(\beta(t)-\beta(s))f(s)ds$, la subvention d'équilibre socialement accordée à la firme1 en cas de victoire,

$(1+\lambda)\int\limits_{0}^{t^{'}}(\beta(t^{'})-\beta(s^{'}))f(s^{'})ds^{'}$, la subvention d'équilibre socialement accordée à la firme2 en cas de victoire.

Etant donné que l'utilité d'équilibre espérée des firmes est nulle en présence ou en absence de subvention publique, il vient:

$$EW_1 = \int\limits_{0}^{1}\left[\alpha\beta_1(t)\right]dt + \int\limits_{0}^{1}\left[\alpha\beta_1(t^{'})\right]dt^{'},$$

$$EW = \int\limits_{0}^{1}\left[\alpha\beta(t) - (1+\lambda)\int\limits_{0}^{t}(\beta(t)-\beta(s))f(s)ds\right]dt + \int\limits_{0}^{1}\left[\alpha\beta(t^{'}) - (1+\lambda)\int\limits_{0}^{t^{'}}(\beta(t^{'})-\beta(s^{'}))f(s^{'})ds\right.$$

Les deux firmes étant dans une position symétrique, en raisonnant à la marge sur la firme1**, il vient:**

$$\frac{\partial EW}{\partial t} = \int\limits_{0}^{1}\alpha\beta^{'}(t)dt + (1+\lambda)f(0)\int\limits_{0}^{1}\beta(t)dt,$$

l'utilité d'équilibre collective marginale espérée

sur la firme1 en présence de subvention publique.

$$\frac{\partial EW_1}{\partial t} = \int\limits_{0}^{1}\alpha\beta_1^{'}(t)dt,$$

l'utilité d'équilibre collective marginale espérée

sur la firme1 en absence de subvention publique.

La subvention publique serait socialement efficace si l'utilité d'équilibre collective marginale espérée sur la firme1 en présence de subvention publique ($\frac{\partial EW}{\partial t}$) est supérieure ou égale à l'utilité d'équilibre collective marginale espérée sur la firme1 en absence de subvention publique ($\frac{\partial EW_1}{\partial t}$). Soit $\frac{\partial EW}{\partial t} - \frac{\partial EW_1}{\partial t} \geq 0$.

On a:

$$\alpha\beta_1^{'}(t) = \alpha(f(t) \times v(t) + \frac{\partial v(t)}{\partial t}F(t)) \qquad (d),$$

la part du paiement d'équilibre marginal de la firme 1 qui constitue

un bénéfice net pour le secteur d'activité en absence de subvention publique.

$$\alpha\beta^{'}(t) = \alpha v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)} \qquad (e),$$

la part du paiement d'équilibre marginal de la firme 1 qui constitue

un bénéfice net pour le secteur en présence de subvention publique.

A partir des relations (d) et (e), on a:

$$\alpha(\beta^{'}(t) - \beta_1^{'}(t)) = \alpha F(t)[v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)} - \frac{\partial v(t)}{\partial t}],$$

$$\frac{\partial EW}{\partial t} - \frac{\partial EW_1}{\partial t} = \int_0^1 \alpha\left(\beta^{'}(t) - \beta_1^{'}(t)\right)dt + \int_0^1 (1+\lambda)f(0)\beta(t)dt,$$

$$\frac{\partial EW}{\partial t} - \frac{\partial EW_1}{\partial t} = \alpha\int_0^1 F(t)[v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)} - \frac{\partial v(t)}{\partial t}]dt + (1+\lambda)f(0)\int_0^1 \beta(t)dt.$$

Or pour tout couple $(\lambda, \alpha) \in]0; 1] \times]0; 1]$, $(1 + \lambda)f(0) \int\limits_0^1 \beta(t)dt > 0$.

Et comme nous l'avons démontrer dans la **preuve de la proposition 3.2**, $F(t)[v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)} - \frac{\partial v(t)}{\partial t}] \geq 0$ pour tout $t \in [0; 1]$. Ainsi nous pouvons écrire:

$$\alpha \int\limits_0^1 F(t)[v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)} - \frac{\partial v(t)}{\partial t}]dt + (1+\lambda)f(0) \int\limits_0^1 \beta(t)dt \geq 0 \text{ pour tout couple } (\lambda, \alpha) \in]0; 1] \times]0; 1]$$

Nous pouvons alors conclure que le transfert public tel que spécifié dans notre analyse est socialement efficace. ■

Ce résultat montre qu'en accordant à une firme en cas de victoire une subvention publique qui décroît dans son signal d'équilibre alors que son paiement d'équilibre et celui de son adversaire sont croissants dans leurs signaux respectifs, cela rend l'intervention publique socialement efficace. Cette efficacité se justifie dans la mesure où, plus une firme va engager un paiement d'équilibre plus élevé, plus la subvention dont elle bénéficiera en cas de victoire sera faible.

Après avoir montrer dans la **proposition 3.4** que le transfert public tel que spécifié dans notre modèle est socialement efficace, nous allons partir de ce résultat pour établir la proposition suivante:

Proposition 3.5 En présence de subvention publique, la part $\alpha\beta(t)$ du paiement d'équilibre de la firme1 qui constitue un bénéfice net pour le secteur d'activité est supérieure ou égale à la subvention d'équilibre socialement accordée $((1 + \lambda) \int\limits_0^t (\beta(t) - \beta(s))f(s)ds)$ à la firme1 en cas de victoire.

Proof. $\beta_1(t) = F(t) \times v(t)$, le paiement d'équilibre de la firme 1 en absence de subvention publique.

$\beta(t) = \int\limits_0^t v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)}dt$, le paiement d'équilibre de la firme 1 en présence de subvention publique.

En absence de subvention publique, la part du paiement d'équilibre de la firme 1 qui constitue un bénéfice net pour le secteur d'activité est:

$$\alpha\beta_1(t) = \alpha F(t) \times v(t) = \alpha \int\limits_0^t \left[f(t) \times v(t) + \frac{\partial v(t)}{\partial t} F(t) \right] dt \qquad (k)$$

En présence de subvention publique, la part du paiement d'équilibre de la firme 1 qui constitue un bénéfice net pour le secteur d'activité est:

$$\alpha\beta(t) = \alpha \int\limits_0^t v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)}dt \qquad (l)$$

A partir des relations (k) et (l), la part de la subvention publique dans le paiement d'équilibre de la firme1 qui constitue un bénéfice net pour le secteur d'activité est:

$$\alpha(\beta(t) - \beta_1(t)) = \alpha \left[\int\limits_0^t v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)}dt - \int\limits_0^t \left[f(t) \times v(t) + \frac{\partial v(t)}{\partial t} F(t) \right] dt \right],$$

$$\alpha \int\limits_0^t \left[v(t) f(t) \frac{F(t)}{1-F(t)} - \frac{\partial v(t)}{\partial t} F(t) \right] dt, \quad \text{soit:}$$

$$R = \alpha \int\limits_0^t F(t) \left[v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)} - \frac{\partial v(t)}{\partial t} \right] dt.$$

La subvention d'équilibre espérée par la firme 1 en cas de victoire est:

$$\int\limits_0^t (\beta(t) - \beta(s)) f(s) ds.$$

Etant donné que le transfert public s'effectue avec distorsion, la subvention d'équilibre socialement accordée vient:

$$S = (1+\lambda)\int\limits_0^t (\beta(t)-\beta(s))f(s)ds$$

Etant donné que dans la preuve de la proposition 3.4, nous avons montrer que la subvention publique est socialement efficace, nous pouvons écrire:

$R - S = \alpha \int\limits_0^t F(s)\left[v(s)\frac{f(s)}{1-F(s)} - \frac{\partial v(s)}{\partial s}\right]ds - (1+\lambda)\int\limits_0^t (\beta(t)-\beta(s))f(s)ds \geq 0,$

$R - S = \int\limits_0^t \left[\alpha F(s)\left[v(s)\frac{f(s)}{1-F(s)} - \frac{\partial v(s)}{\partial s}\right] - (1+\lambda)(\beta(t)-\beta(s))f(s)\right]ds \geq 0$, ceci implique:

$$\frac{\alpha}{1+\lambda}\left[v(s)\frac{f(s)}{1-F(s)} - \frac{\partial v(s)}{\partial s}\right] \geq \frac{f(s)}{F(s)}\left[\beta(t)-\beta(s)\right],$$

or pour tout $s \in [0;1]$, on a :$\frac{f(s)}{1-F(s)} \geq 1$, d'où $v(s)\frac{f(s)}{1-F(s)} \geq \frac{\partial v(s)}{\partial s}$, on peut alors écrire:
$\frac{\alpha}{1+\lambda} \times \frac{f(s)}{1-F(s)}v(s) \geq \frac{f(s)}{F(s)}\left[\beta(t)-\beta(s)\right],$
or $\frac{f(s)}{1-F(s)}v(s) = \beta^{'}(s)$, il vient alors:

$$\alpha\beta^{'}(s)F(s) \geq (1+\lambda)\left[\beta(t)-\beta(s)\right]f(s),$$

Soit:
$\alpha \int\limits_0^t \beta^{'}(s)F(s)ds \geq (1+\lambda)\int\limits_0^t \left[\beta(t)-\beta(s)\right]f(s)ds,$
En intégrant par partie la quantité $\alpha \int\limits_0^t \beta^{'}(s)F(s)ds$, il vient:
$\alpha F(t)\beta(t) - \alpha\int\limits_0^t \beta(s)f(s)ds \geq (1+\lambda)\int\limits_0^t \left[\beta(t)-\beta(s)\right]f(s)ds$, ceci implique:

$$\alpha F(t)\beta(t) \geq (1+\lambda)\int\limits_0^t \left[\beta(t)-\beta(s)\right]f(s)ds.$$

Etant donné que pour tout $t \in [0;1]$, $0 < F(t) \leq 1$, il vient:

$$\alpha\beta(t) \geq (1+\lambda) \int_0^t [\beta(t) - \beta(s)] f(s)ds$$

■

Ce résultat montre qu'en présence de subvention publique, les firmes engagent dans la compétition un paiement d'équilibre dont la part qui crée des bénéfices dans le secteur d'activité est supérieure ou égale à la somme de la subvention reçue (en cas de victoire) et des coûts sociaux liés à celle-ci. Ce résultat corrobore le résultat obtenu à la **proposition 3.4** qui met en évidence l'efficacité du mode de subvention publique spécifié dans notre modèle.

L'intérêt de ce résultat est qu'il nous permet de constater que: Pour une unité de compte investie en coûts de compétition, la part α qui constitue un bénéfice net pour le secteur d'activité concerné est supérieure ou égale à ce que cette unité de compte investie, implique comme subvention socialement coûteuse $\left((1+\lambda)\frac{\int_0^t [\beta(t)-\beta(s)]f(s)ds}{\beta(t)} \right)$ accordée à une firme en cas de victoire. Ceci est mis en évidence mathématiquement par l'équation suivante:

$$\begin{aligned} \alpha &\geq \frac{(1+\lambda)\int_0^t [\beta(t) - \beta(s)] f(s)ds}{\beta(t)}, \\ \text{qui découle de l'inégalité} &: \alpha\beta(t) \geq (1+\lambda) \int_0^t [\beta(t) - \beta(s)] f(s)ds. \end{aligned}$$

La subvention publique, incite alors les firmes en compétition à consacrer une part importante de leurs dépenses de compétition à l'innovation qui renforce la dynamique du secteur d'activité. Ceci permet de générer dans le secteur d'activité, des bénéfices plus importantes que la subvention socialement coûteuse $\left((1+\lambda) \int_0^t [\beta(t) - \beta(s)] f(s) ds \right)$, accordée à une firme en cas de victoire.

3.2.3 Discussion

Le problème de choix de la firme la plus efficace pour servir la demande dans un monopole naturel lorsque les autorités publiques ne peuvent identifier avec certitude la firme qui a le taux d'efficacité économique le plus élevé (la firme la plus compétitive), peut être donc résolu grâce a un jeu de guerre d'usure dans lequel, la firme qui abandonne en premier la compétition signale qu'elle est la moins efficace et donc la moins compétitive. La guerre d'usure permet ainsi d'appréhender la concurrence qui s'installe au départ entre firmes concurrentes dans un monopole naturel, au travers d'un mécanisme d'enchère particulier qui permet de sélectionner la firme, la plus efficace. La stratégie d'équilibre symétrique $\beta(t)$ auquel conduit, le jeu de guerre d'usure spécifié dans notre analyse dépend de l'intervention ou non de l'état dans la compétition. En effet lorsque les pouvoirs publics interviennent dans la compétition pour subventionner la firme gagnante selon un mécanisme de financement particulier qui permet de rembourser à la firme gagnante son supplément de dépense sur la firme perdante, ceci incite les firmes à engager dans la compétition, des paiements plus importants dont une part plus importante est consacrée à l'innovation. Evidemment, la stratégie d'équilibre en présence de subvention publique $\beta(t) = \int\limits_0^t v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)}dt$, est identique à la stratégie d'équilibre qu'on retrouve dans un jeu de guerre d'usure standard spécifié dans la théorie économique qui se base sur **l'hypothèse forte, selon laquelle: Les joueurs en compétition engagent le même paiement par unité de temps**.

Etant donné que notre analyse est basée sur une **hypothèse différente qui stipule que les joueurs (firmes) engagent dans la compétition des paiements différents par unité de temps**, cela implique en absence de subvention publique, une stratégie d'équilibre de la forme $\beta(t) = F(t) \times v(t)$.

En effet on peut remarquer que le paiement marginal engagé par une firme en présence de subvention publique $\left(\beta^{'}(t) = v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)}\right)$, est supérieure au paiement marginal engagé par une firme en absence de subvention publique $\left(\beta^{'}(t) = f(t) \times v(t) + \frac{\partial v(t)}{\partial t}F(t)\right)$.

De plus, le mécanisme de subvention spécifié dans notre analyse est socialement efficace, dans la mesure où il engendre dans le secteur d'activité concerné une recette marginale d'équilibre espérée supérieure à la subvention marginale d'équilibre espérée.

Cependant, il convient de préciser que la stratégie qui consiste à laisser jouer la compétition qui s'installe au départ entre firmes concurrentes dans un monopole naturel peut être inefficace pour le secteur d'activité si les dépenses de compétition sont essentiellement orientées vers des dépenses de coup bas.

Dans ce cas, il serait plus optimal pour l'état d'intervenir directement sur le marché par le biais d'un mécanisme qui lui permet d'organiser une concurrence entre les firmes présentes sur le marché afin de sélectionner, celle qui fait la meilleure offre de prestation de service dans le secteur d'activité concerné.

3.3 Conclusion

Dans une compétition pour un monopole naturel donné où les firmes possèdent comme informations privées leurs niveaux d'efficacité économiques respectifs et engagent dans la compétition des paiements différents par unité de temps, un jeu de guerre d'usure permet de résoudre le problème de choix de la firme la plus efficace. Un tel jeu conduit à la survie de la firme la plus efficace qui va servir toute la demande du monopole naturel. Cependant lorsque les pouvoirs publics interviennent dans la compétition en décidant d'accorder en fin de compétition à la firme gagnante une subvention publique, les firmes engagent dans la compétition des paiements plus importants. Un tel comportement, à l'avantage de soutenir la dynamique du secteur d'activité concerné dans la mesure où, nous avons supposé que l'essentiel des dépenses de compétition va dans l'innovation. Un autre résultat intéressant est que la subvention publique en remboursant en fin de compétition à chaque firme son supplément de dépense sur le joueur qui abandonne en premier la compétition (Celui qui engage le paiement le plus faible) conduit au même paiement d'équilibre qu'un un jeu de guerre d'usure standard dans lequel, les joueurs engagent le même paiement par unité de temps. De plus un tel mécanisme de subvention publique est socialement efficace car la recette marginale qu'elle génère dans l'économie réelle est supérieure à la subvention marginale socialement coûteuse supportée par les contribuables.

3.4 Annexe

3.4.1 Principe économique du monopole naturel

Le monopole naturel est une structure de marché dont l'existence découle d'une production dont les rendements d'échelle sont croissants. Dans un monopole naturel, plus une firme augmente sa production, moins le coût unitaire est élevé. Le coût de production d'une unité supplémentaire (coût marginal) est décroissant.

L'accroissement des ventes permet de répartir les coûts fixes sur des volumes plus importants de telle sorte que: Le coût moyen baisse quand la production augmente. Cette baisse du coût moyen, est si importante, qu'une seule firme peut fournir toute la demande du marché avec une compétitivité très forte.

Dans un monopole naturel, la concurrence entre firmes présentes sur le marché diminue au fur et à mesure qu'une des firmes présentes, se développe et tire profit d'un coût moyen, de plus en plus inférieur à celui de ses concurrents.

Le graphique 3.1 ci-dessous présente l'équilibre d'une firme dans un monopole: On remarque que le coût marginal reste décroissant, au fur et à mesure que le volume de production devient de plus en plus important.

Dans un tel environnement, les grandes firmes ont des coûts de production très inférieurs à ceux des petites firmes. Il est alors bénéfique pour la compétitivité du secteur, qu'une seule firme reste sur le marché.

Le graphique 3.2 ci-dessous, comparé au graphique 3.1, nous permet d'apprécier la différence entre un monopole naturel et une situation favorable à la concurrence.

On peut remarquer sur le graphique 3.2, que dans une situation favorable à la concurrence, le coût marginal d'une firme quelconque croît rapidement avec le volume de sa

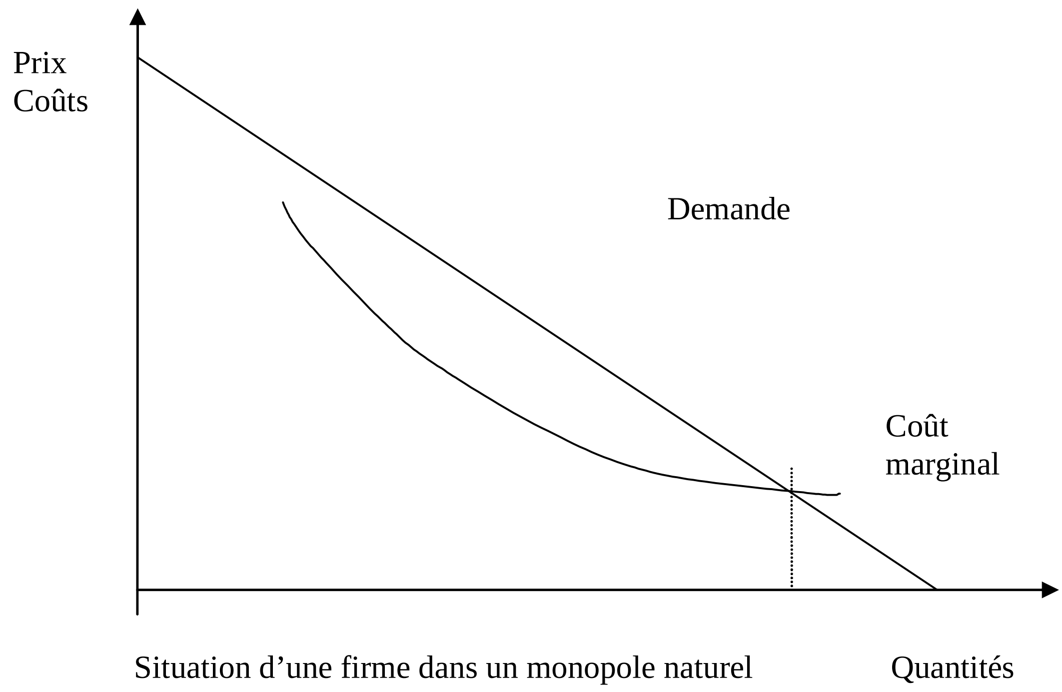


Figure 3-1:

production. Cet accroissement rapide du coût marginal, fait que sur un marché favorable à la concurrence, les firmes perdent en compétitivité, lorsqu'elles grandissent.

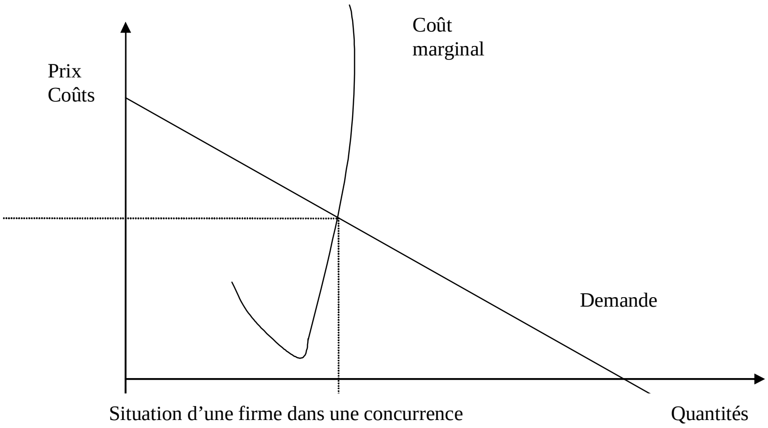


Figure 3-2:

3.4.2 Preuve de la proposition 3.1

L'utilité d'équilibre d'une firme en absence de subvention publique est:

$$\pi = F(t) \times v(t) - \beta(t).$$

En remplaçant $\beta(t)$ par sa valeur il vient:

$$\pi = F(t) \times v(t) - F(t) \times v(t) \ = 0.$$

L'utilité d'équilibre d'une firme en présence de subvention publique est:

$$\pi = \int_0^t \{v(t) - \beta(s)\} f(s)ds - (1 - F(t))\beta(t),$$

$$\pi = \int_0^t v(t)f(s)ds - \int_0^t \beta(s)\} f(s)ds - (1 - F(t))\beta(t),$$

En intégrant par partie la quantité $\int_0^t \beta(s)f(s)ds$, il vient:
$\int_0^t \beta(s)f(s)ds = [\beta(s)F(s)]_0^t - \int_0^t \beta^{'}(s)F(s)ds = \beta(t)F(t) - \int_0^t \beta^{'}(s)F(s)ds.$
En remplaçant $\int_0^t \beta(s)f(s)ds$ par sa valeur dans π, on a:
$\pi = \int_0^t v(t)f(s)ds - (1 - F(t))\beta(t) - \beta(t)F(t) + \int_0^t \beta^{'}(s)F(s)ds,$
$\pi = \int_0^t v(t)f(s)ds + \int_0^t \beta^{'}(s)F(s)ds - \beta(t).$
En remplaçant $\beta(t)$ et $\beta^{'}(s)$ par leurs valeurs respectives, il vient:
$\pi = \int_0^t v(t)f(s)ds + \int_0^t v(s)\frac{f(s)}{1-F(s)}F(s)ds - \int_0^t v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)}dt,$

$\pi = \int_0^t v(t)f(s)ds - \int_0^t v(t)\frac{f(t)}{1-F(t)}\left[1 - F(t)\right]dt,$

$$\pi = \int_0^t v(t)f(t)dt - \int_0^t v(t)f(t)ds = 0$$

3.4.3 Preuve de la proposition 3.3

La subvention d'équilibre espérée par la firme 1 en cas de victoire est: $\int_0^t (\beta(t) - \beta(s))f(s)ds$

En dérivant $\int_0^t (\beta(t) - \beta(s))f(s)ds$ par rapport à t (signal d'équilibre de la firme 1),

La subvention d'équilibre marginale espérée par la firme 1 en cas de victoire vient:

$$-f(o)\beta(t) \qquad \text{avec } \beta(0) = 0$$

Ainsi pour tout $t \in [0;1]$, $-f(o)\beta(t) \leq 0$.

D'où, la subvention d'équilibre espérée par la firme1 est une fonction décroissante de son signal d'équilibre.

Chapter 4

Conflits armés en Afrique et guerre d'usure

4.1 Introduction

On constate généralement en Afrique, que les pays au sous-sol très riche en ressources naturelles précieuses (Pétrole, diamant, or, etc.) sont le plus souvent dirigés par des gouvernements dictatoriaux qui mettent en oeuvre des mécanismes de pillage systématique de la richesse nationale. Ces dictatures signent le plus souvent des contrats d'exploitation des ressources naturelles de leurs pays avec de puissantes multinationales. Ces contrats sont souvent négociés en défaveur de l'intérêt général des peuples dans la mesure où la part des bénéfices qui contribue au développement national reste très faible. De telles pratiques sont le plus souvent, la cause première des conflits armés sur le continent africain. **Le paradoxe que soulèvent de tels conflits se trouve au niveau de leur mode de financement. Ainsi, les propres ressources naturelles de ces pays en proie aux conflits armés, au lieu de contribuer au bien-être quotidien des peuples, sont utilisées à les appauvrir alors qu'elles contribuent dans le même temps à une accumulation intense de richesses chez les dictatures au pouvoir et les**

multinationales. En effet, les multinationales pour protéger leurs intérêts vont soutenir les dictatures au pouvoir notamment en leur fournissant la logistique de guerre et le cash (Espèces) lors des conflits armés qui opposent ces dictatures à la population civile ou aux opposants politiques.

Les multinationales, contribuent non seulement à la complexité des conflits sur le continent africain mais sont parfois l'instigateur et le cerveau principal de ces conflits où la principale victime est la population civile du peuple en guerre. Cette population civile subit toutes les atrocités de la guerre que sont: La famine, les énormes pertes en vies humaines, le viol des femmes, l'exode, etc. En parlant du rôle joué par les multinationales dans les conflits armés, **Châtaigner J.M. (2004)** affirme: **Il apparaît "un nouveau commerce triangulaire", où l'Afrique exporte illégalement vers les pays occidentaux des matières premières non transformées, où les pays d'Europe de l'est exportent vers l'Afrique des armes et des mercenaires et où s'établit entre les pays de l'ouest et de l'est de l'Europe des relations financières plus ou moins occultes. De telles facilités de rentes induites par l'exploitation abusive des ressources naturelles, compliquent le dénouement rapide des conflits armés sur le continent africain**.

Les conflits armés occasionnent d'énormes coûts humains immédiats mais aussi des coûts afférents à: L'effondrement du système éducatif et du service de la santé, l'affaiblissement du dispositif alimentaire et les traumatismes psychologiques qui ont des incidences négatives sur le développement humain. **Collier P. (2007)**, estime que les conflits armés constituent l'un des quatre pièges qui enferment les pays les plus pauvres du monde dans des économies stagnantes ou en régression.

Selon un rapport du **PNUD (2005)**, Au cours du conflit armé en Sierra Léone, plus de la moitié des femmes ont été victimes d'une forme de violence sexuelle.

L'ONG International Rescue Comittee (2001), estime qu'entre 1998 et 2001 le conflit armé en République démocratique du Congo (RDC), a causé la mort de trois millions et demi de personnes.

La Commission Pour l'Afrique (2005), estime dans son rapport qu'entre 1945 et 1995, les conflits armés en Afrique ont fait plus de six millions de morts dans neufs pays totalisant cent soixante millions d'habitants (Soudan, Ethiopie, Mozambique, Angola, Somalie, Burundi, Rwanda, Ouganda, Sierra Léone).

Pidika D. et Tchouassi G. (2005), en parlant du conflit armé de la République Démocratique du Congo (RDC) affirme: La convoitise suscitée par les richesses minières et naturelles de la RDC plonge le pays dans une guerre des ressources où pays agresseurs, réseaux mafieux de grande contrebande impliquant des acteurs locaux, chacun dans la zone qu'il occupe se sert impunément les richesses. En procédant ainsi, ces acteurs pillent systématiquement les richesses du pays pour financer la guerre selon le schéma: **Le pillage finance la guerre et celle-ci permet le pillage**.

Dans la plus part des conflits armés en Afrique, l'abondance des ressources naturelles a été au coeur des conflits dans la mesure où, ces richesses naturelles au lieu de contribuer au développent humain des peuples, ont été utilisées pour financer des guerres civiles. Ainsi le diamant en Angola et en Sierra Léone, l'or et le colbat en République démocratique du Congo ont été au coeur des conflits armés dans ces différents pays. **Bannon I. et Collier P. (2003)**, affirment que les ressources naturelles du sous-sol, notamment les hydrocarbures, sont davantage à l'origine des conflits armés. Quant à **Maillard J. (1998)**, il estime que la plus part des conflits africains sont reliés aux circuits criminels internationaux et que la régulation d'un "monde sans loi" est au coeur de la prévention et de la régulation des conflits.

Collier P. et Hoeffler A. (2000) en se situant dans un cadre utilitariste comme **Grossman H. I. (1991)**, vont appréhender les conflits armés comme une guerre entre un gouvernement légitime et une rébellion qu'ils définissent comme une organisation criminelle caractérisée par l'avidité. Dans ce contexte, les conflits sont d'autant plus probables que le niveau de revenu par habitant est faible et que la part des matières premières est importante dans les exportations.

Dans notre article, nous allons nous intéresser aux conflits armés dans lesquels, la population civile combat la dictature[1] (soutenue par les multinationales) au pouvoir dans le but de contraindre ce dernier à concéder au peuple, une part plus importante des richesses issues de l'exploitation des ressources naturelles du pays. Au cours d'une telle compétition, la population civile ne peut abandonner les armes que si elle bénéficie au moins d'une certaine part minimale dans le partage du gâteau national. Alors que la dictature qui contrôle les richesses réalisées va vouloir en confisquer au moins une certaine part minimale. **Dans ce contexte on se trouve dans le cas d'un jeu de partage des richesses où la dictature au pouvoir perd une partie de sa richesse confisquée, chaque fois qu'elle concède une part supplémentaire des richesses réalisées à la population civile**.

L'issue d'une telle compétition dépendra surtout de la part minimale de richesse dont la population civile désire bénéficier et en deçà de laquelle, elle ne déposera pas les armes.

Ce jeu de partage des richesses dans lequel, la dictature au pouvoir extrait de la richesse nationale des **bénéfices privés** peut être rapproché en finance d'entreprise à l'extraction de bénéfices privés par les cadres dirigeants et quelques actionnaires majoritaires qui exerce l'activité de contrôle au sein de l'entreprise.

Dans notre jeu de partage, la dictature au pouvoir et les multinationales peuvent être assimilées aux cadres dirigeants et actionnaires majoritaires alors que la population civile peut être assimilée aux actionnaires minoritaires. Le concept de bénéfices privés en finance d'entreprise a été approfondi par **La porta R. et al. (2000)** sous le concept de **tunneling** qu'ils définissent comme le transfert d'actifs ou de profits d'une firme vers

[1] La dictature étant soutenue, par les multinationales, il faut entendre par dictature l'ensemble Pouvoirs publics-multinationales

les cadres dirigeants et les actionnaires majoritaires (insiders) qui exerce le contrôle au sein de l'entreprise. Ce transfert se faisant au détriment des actionnaires minoritaires (outsiders) qui ne participent pas au contrôle de l'activité de l'entreprise.

Dans le cas de notre jeu de partage des richesses, la dictature au pouvoir et les multinationales qui contrôlent l'activité d'exploitation des ressources naturelles, sont les "insiders" alors que la population civile représente les "outsiders".

Comme en finance d'entreprise, il se pose dans notre jeu de partage un problème de seuil d'extraction de bénéfices privés tolérable par la population civile.

Etant donné que la part minimale de richesse espérée par chaque protagoniste, est une information privée, on est alors en présence d'un **jeu de partage des richesses dans un environnement d'information asymétrique. Ceci pose le problème suivant: Comment se dénoue le conflit armé dans la mesure où, la dictature au pouvoir ignore la part minimale espérée par la population civile et en deçà de laquelle, elle ne déposera pas les armes**.

Dans notre article, **pour résoudre le problème de dénouement d'un tel conflit, nous allons l'appréhender comme un jeu de guerre d'usure basé sur un mécanisme d'enchère spécifique dans lequel:**

- La population civile gagne au moins sa part minimale espérée quelque soit sa période d'abandon.

- La dictature au pouvoir gagne une part de richesse supérieure à la part minimale qu'elle espère confisquer si seulement, son adversaire abandonne en premier la compétition. Tandis qu'elle ne gagne rien, en abandonnant en premier la compétition.

Un tel type de jeu de guerre d'usure diffère de l'approche traditionnellement développée dans la littérature. **En effet dans un jeu de guerre d'usure standard, un**

joueur qui abandonne en premier la compétition ne gagne rien, alors que dans notre jeu de partage, la population civile gagne sa part minimale du gâteau en abandonnant en premier la compétition.

Dans la suite de notre article, nous allons présenter dans une première partie, les termes de notre modèle et dans une deuxième partie, nous présenterons les différents résultats induits par une guerre d'usure dans laquelle, **la population civile gagne au moins sa part minimale espérée quelque soit sa période d'abandon**.

4.2 Le modèle

Pour appréhender les situations de conflits armés qui s'installent entre une dictature au pouvoir et la population civile lors du partage de la richesse nationale, nous allons supposer que ces conflits impliquent:

- L'ensemble gouvernement dictatorial - Puissances étrangères (la dictature au pouvoir gère les ressources naturelles du pays en conflit).

- La population civile, qui réclame une part plus importante dans le partage de la richesse nationale.

Les puissances étrangères interviennent aux côtés de la dictature au pouvoir, pour protéger les intérêts de leurs multinationales afin de leur garantir l'exploitation des ressources naturelles du pays en conflit.

Nous allons retenir dans notre approche des choses, que les puissances étrangères interviennent dans les conflits armés en Afrique de la façon suivante:Elles prennent position pour soutenir par des moyens financiers et la logistique de guerre, une dictature contre la rébellion armée d'une population civile qui réclame un partage plus équitable du gâteau (les richesses du pays). En agissant de la sorte, ces puissances étrangères protègent leurs intérêts économiques et permettent ainsi à leurs multinationales de continuer à exploiter les ressources naturelles du pays en conflit.

La population civile lésée dans le partage des richesses de la nation entre conflit armé avec la dictature au pouvoir qui est soutenue par les puissances étrangères. La population dans sa lutte va réclamer à la dictature en place une part de plus en plus importante dans le partage des richesses. Dans un tel conflit chaque protagoniste espère bénéficier d'un pourcentage minimum (seuil) de la richesse réalisée par période de temps.

Pour simplifier notre analyse, nous allons distinguer deux grands types d'agents qui poursuivent des intérêts antagonistes. Il s'agit:

- De la population civile que nous allons désigner sous le nom "d'agent opprimé" ou de joueur1.

- De l'ensemble gouvernement dictatorial - Puissances étrangères que nous allons désigner sous le nom "d'agent égoïste" ou de joueur2.

On suppose que la dotation en ressources naturelles (nette de toutes charges d'exploitation) du pays considéré en début de compétition et à chaque période de jeu à une valeur monétaire constante notée ω qui est connaissance commune pour tous les acteurs en jeu. Ainsi ω constitue à chaque période de jeu la richesse réalisée par le pays.

Sur la richesse réalisée (ω) à une période de jeu quelconque j, le joueur2 (agent égoïste) transfert une partie au joueur1 (agent opprimé) à travers des dépenses d'utilité publique dans les domaines tels que: La santé, l'éducation, les infrastructures etc.

L'objectif poursuivi par le joueur1 (l'agent opprimé) est de contraindre par la lutte armée le joueur2 (l'agent égoïste) à lui accordé à chaque nouvelle période de jeu une part plus importante dans le partage de la richesse réalisée ω.

On suppose qu'en début de compétition ($j = 0$), les deux joueurs sont dans les situations suivantes:

- le joueur2 (agent égoïste) bénéficie d'une part λ_2^* (connaissance commune) de la richesse réalisée ω.

- le joueur1 (agent opprimé) bénéficie d'une part λ_1^* (connaissance commune) de la richesse réalisée ω.

- $\lambda_2^* > \lambda_1^* > 0$.

Etant donné qu'on est dans un environnement d'asymétrie d'information où la dictature au pouvoir ne peut observer la part minimale que la population civile réclame dans la richesse nationale réalisée par période de temps, il n'existe plus une possibilité de négociation entre les deux parties. Dans ce cas, pour appréhender l'issue d'un tel conflit armé, nous allons proposer un jeu de guerre d'usure dans laquelle un joueur (population civile) gagne au moins la part minimale qu'il espère bénéficier dans la richesse réalisée par période de temps quelque soit le joueur qui abandonne en premier la compétition. Alors que l'autre joueur (ensemble dictature - puissances étrangères) gagne la part minimale qu'il espère si seulement, il n'abandonne pas en premier la compétition et ne gagne rien s'il abandonne en premier.

4.3 Conflit armé en asymétrie d'information:Un jeu de guerre d'usure

Nous allons considérer que la guerre d'usure entre les deux parties commence dès l'instant $(j = 0)$ où l'agent opprimé entre en conflit armé contre la dictature en place pour contraindre cette dernière à lui transférer une part plus importante de la richesse nationale.

Soit λ_1, la part minimale de la richesse réalisée ω dont le joueur1 (l'agent opprimé) espère bénéficier à chaque période de jeu et à partir de laquelle, il dépose les armes (abandonne la compétition). λ_1 étant pour ce dernier une information privée.

Soit λ_2, la part minimale de la richesse réalisée ω que le joueur2 (l'agent égoïste) espère confisquer et en dessous de laquelle, il dépose les armes (abandonne la compétition) car il n'est plus rentable pour lui de faire la guerre. λ_2 étant pour ce dernier une information privée.

On suppose qu'en début de compétition $(j = 0)$:

- la part λ_2^* dont bénéficie le joueur2 (agent égoïste) est telle: $\lambda_2^* > \lambda_2$(information privée).

- La part λ_1^* dont bénéficie le joueur1 est telle que $\lambda_1^* < \lambda_1$(information privée).

On suppose qu'à chaque période de jeu ($j = 1; 2; ....$), le joueur2 sous la pression du joueur1 augmente dans une proportion α la part dont bénéficie le joueur1. Ainsi, la part confisquée par le joueur2 à chaque nouvelle période de jeu diminue dans la même proportion.

Nous allons supposer qu'au seuil λ_2, le joueur2 bénéficie d'une part de richesse moins importante que le joueur1 et qu'avant d'atteindre ce seuil, il bénéficie d'une part plus importante que le joueur1.

On suppose qu'en dessous d'une accumulation de richesse égale à $\lambda_2\omega$, le joueur2 engagera par période de jeu des coûts de compétition (pour financer le conflit) supérieurs à $\lambda_2\omega$. Ceci le contraint à abandonner la compétition lorsqu'il est au seuil λ_2. Ainsi si le joueur 2 abandonne la compétition en premier, partant de l'hypothèse ci-dessus, on a: $\lambda_2 < \lambda_1$.

Le joueur1, étant conscient qu'avant que le joueur2 n'atteigne son seuil λ_2, qu'il engage dans le conflit des moyens plus importants qui occasionnent d'énormes pertes au sein la population civile, abandonnera la compétition dès qu'il atteint son seuil $\lambda_1$car il est conscient que s'il continue de combattre au delà de ce seuil jusqu'à obtenir le pouvoir, la nouvelle équipe qui dirigera le pays va toujours capter des **bénéfices privés**.

Le joueur1 en n'abandonnant la compétition au seuil λ_1 révèle par là qu'il y'à un seuil d'expropriation tolérable $(1 - \lambda_1)$, et que même une démocratie au pouvoir peut être amené à voler au delà de ce seuil. Ainsi le joueur1 abandonne la compétition en premier lorsqu'il atteint son seuil λ_1 et il vient: $\lambda_2 > \lambda_1$.

On suppose que λ_1 et λ_2 sont des variables aléatoires indépendamment distribuées sur

$[0;1]$ selon une même loi de probabilité F et de fonction de densité f positive, continue et deux fois différentiables sur $[0;1]$.

La stratégie β (paiement engagé) d'équilibre de chaque joueur i $(i = 1;2)$ est une fonction croissante de son signal λ_i. En effet, plus la part de la richesse réalisée (ω) dont un joueur espère bénéficier est élevé, plus il va injecter dans le conflit armé (compétition) des moyens plus importants.

Soit:

$$\beta : [0;1] \to [0;\infty[$$
$$\lambda_i \to \beta(\lambda_i).$$

Lorsque le joueur1atteint son seuil λ_1 et abandonne en premier la compétition $(\lambda_2 > \lambda_1)$, il perçoit par période de temps un gain $\lambda_1\omega$ alors que le joueur2 perçoit un gain $(1-\lambda_1)\omega$ tel que: $(1-\lambda_1) > \lambda_1$ et donc $\lambda_1 < \frac{1}{2}$.

Lorsque le joueur2 atteint son seuil λ_2 et abandonne en premier la compétition ($\lambda_2 < \lambda_1$), il perçoit un gain nul car il n'est plus intéressant pour lui de se maintenir au pouvoir et dans ce cas le joueur1 s'accapare du pouvoir et bénéficie de la totalité de la richesse réalisée par période de temps ω. le joueur1 perçoit alors un gain égal à ω lorsque le joueur2 abandonne en premier la compétition.

Les deux joueurs en compétition sont neutres vis à vis du risque.

On suppose que les deux joueurs supportent par unité de temps, le même coût de compétition qui est égal à l'unité.

On se trouve ici dans un jeu de guerre d'usure où le joueur2 (agent égoïste) étant la force qui contrôle la richesse réalisée ω sera contraint sous la pression du joueur1 (agent opprimé) d'affecter à ce dernier au moins sa part minimale λ_1 dans le partage des richesses.

On suppose qu'au fur et à mesure que la compétition perdure, le conflit devient de plus en plus intensif. Ceci amène "l'agent égoïste" à augmenter progressivement la part de la richesse réalisée ω affectée à "l'agent opprimé".

Le joueur qui reçoit un signal égal à zéro, engage dans la compétition un paiement d'équilibre nul. En effet il s'agit d'un joueur passif qui n'espère rien dans le partage de la richesse réalisée ω et de fait, ne peut participer à un conflit armé.

A un abandon simultané, les deux joueurs partagent à part égale la richesse réalisée ω.

4.3.1 Equilibre du jeu

Etant donné que le joueur1 (la population civile) espère toujours un gain à l'issue de la compétition quelque soit le joueur qui abandonne en premier, alors il joue une stratégie d'équilibre asymétrique à celle du joueur2.

Stratégie d'équilibre de la population civile (joueur1)

L'utilité espérée du joueur1, lorsqu'il annonce à l'équilibre $\lambda_1 = t$ vient:

$\pi_{11} = (1 - F(t))[t\omega - \beta(t)]$, lorsque le joueur1 abandonne en premier la compétition $(\lambda_2 > \lambda_1)$,

$\pi_{12} = \omega F(t) - \int\limits_0^t \beta(\lambda_2 = s) f(s) ds$, lorsque le joueur2 abandonne en premier la compétition ($\lambda_2 < \lambda_1$).

Avec:

$F(t) = \Pr[\lambda_2 \leq \lambda_1]$,

$\beta(t)$, le paiement d'équilibre supporté par le joueur1 lorsqu'il abandonne en premier la compétition,

$\int\limits_0^t \beta(\lambda_2 = s) f(s) ds$, le paiement d'équilibre supporté par le joueur1 lorsque le joueur2 abandonne en premier la compétition.

L'utilité espérée totale du joueur1 vient:

$$\pi = t\omega(1 - F(t)) + \omega F(t) - (1 - F(t))\beta(t) - \int\limits_0^t \beta(s) f(s) ds \tag{4.1}$$

En maximisant l'utilité espérée totale d'équilibre du joueur1 par rapport à t, la condition de premier ordre donne:

$$\beta^{'}(t) = \omega[1 + \frac{f(t)}{1 - F(t)}(1 - t)] \quad \forall t \in [0; 1] \tag{4.2}$$

La stratégie d'équilibre du joueur1 vient alors:

$$\beta(t) = \int\limits_0^t \omega[1 + \frac{f(t)}{1 - F(t)}(1 - t)] dt \quad \text{car } \beta(0) = 0. \tag{4.3}$$

Proposition 4.1 L'utilité d'équilibre espérée par le joueur1 dans le conflit armé est nulle.

Proof. On a: $\pi = t\omega(1-F(t)) + \omega F(t) - (1-F(t))\beta(t) - \int\limits_0^t \beta(s)f(s)ds.$

En intégrant par partie la quantité $\int\limits_0^t \beta(s)f(s)ds$, il vient:

$\int\limits_0^t \beta(s)f(s)ds = [\beta(s)F(t)]_0^t - \int\limits_0^t \beta^{'}(s)F(s)ds = \beta(t)F(t) - \int\limits_0^t \beta^{'}(s)F(s)ds.$

En remplaçant $\int\limits_0^t \beta(s)f(s)ds$ par sa valeur dans π, on a:

$\pi = t\omega(1-F(t)) + \omega F(t) - (1-F(t))\beta(t) - \beta(t)F(t) + \int\limits_0^t \beta^{'}(s)F(s)ds,$

$\pi = t\omega(1-F(t)) + \omega F(t) - \beta(t) + \int\limits_0^t \beta^{'}(s)F(s)ds.$

En utilisant les relations (2) et (3), ona:

$\pi = t\omega(1-F(t)) + \omega F(t) - \int\limits_0^t \omega[1+\frac{f(t)}{1-F(t)}(1-t)]dt + \int\limits_0^t \omega[1+\frac{f(s)}{1-F(s)}(1-s)]F(s)ds$

$\pi = t\omega(1-F(t)) + \omega F(t) - \int\limits_0^t \omega[1+\frac{f(s)}{1-F(s)}(1-s)][1-F(s)]ds$

$\pi = t\omega(1-F(t)) + \omega F(t) - \int\limits_0^t \omega[(1-F(s)) + f(s)(1-s)]ds$

$\pi = \omega[t(1-F(t)) + F(t) - \int\limits_0^t [(1-F(s)) + f(s)(1-s)]ds]$

$\pi = \omega[\int\limits_0^t \{(1-F(s)) + f(s)(1-s)\}dt - \int\limits_0^t [(1-F(s)) + f(s)(1-s)]ds] = 0 \quad \blacksquare$

Ce résultat montre que la stratégie jouée par le joueur1 dans le conflit armé est un équilibre efficace. Ceci suppose que le joueur1 engage comme paiement à l'équilibre dans le conflit armé, tout son gain espéré en cas de victoire.

Proposition 4.2 Lorsque le joueur1 espère s'accaparer par période de temps toute la richesse réalisée ω en annonçant à l'équilibre un signal $t = 1$, il engage dans la compétition un paiement d'équilibre égal à la richesse réalisée ω.

Proof. On a: $\beta(t) = \int\limits_0^t \omega[1 + \frac{f(t)}{1-F(t)}(1-t)]dt$,

Pour $t = 1$,on a: $\beta(t = 1) = \int\limits_0^1 \omega dt = [\omega t]_0^1 = \omega$. ■

Ce résultat montre que lorsque la population civile (joueur1) est gourmande en voulant s'accaparer de la totalité de la richesse réalisée par période de temps, il n'abandonnera jamais en premier la compétition. Ceci est vrai dans la mesure où, il est prêt à investir (par période de temps) dans le conflit armé un paiement d'équilibre égal à la richesse réalisée ω.

Stratégie d'équilibre du joueur 2

L'utilité espérée du joueur2, lorsqu'il annonce à l'équilibre $\lambda_2 = t$ vient:

$\pi_{21} = -(1-F(t))\beta(t)$, lorsque le joueur2 abandonne en premier la compétition ($\lambda_1 > \lambda_2$).

$\pi_{22} = F(t)\omega - \int\limits_0^t s\omega f(s)ds - \int\limits_0^t \beta(\lambda_1 = s)f(s)ds$, lorsque le joueur1 abandonne en premier la compétition ($\lambda_1 < \lambda_2$),

Avec:

$F(t) = \Pr[\lambda_1 \leq \lambda_2]$,

$\beta(t)$, le paiement d'équilibre supporté par le joueur2 lorsqu'il abandonne en premier la compétition,

$\int\limits_0^t \beta(\lambda_1 = s)f(s)ds$, le paiement d'équilibre supporté par le joueur2 lorsque le joueur1 abandonne en premier la compétition.

L'utilité espérée totale du joueur2 vient:

$$\pi = F(t)\omega - \int_0^t s\omega f(s)ds - \int_0^t \beta(\lambda_1 = s)f(s)ds - (1 - F(t))\beta(t) \tag{4.4}$$

En maximisant l'utilité espérée totale d'équilibre du joueur2 par rapport à t, la condition de premier ordre donne:

$$\beta^{'}(t) = (1 - t)\omega\frac{f(t)}{1 - F(t)} \qquad \forall t \in [0; 1] \tag{4.5}$$

La stratégie d'équilibre du joueur2 vient alors:

$$\beta(t) = \int_0^t (1 - t)\omega\frac{f(t)}{1 - F(t)}dt \qquad \text{car } \beta(0) = 0 \tag{4.6}$$

Proposition 4.3 La stratégie d'équilibre du joueur2 est telle qu'il ne peut jamais prétendre s'accaparer à n'importe quelle période de temps, la totalité de la richesse réalisée ω en annonçant à l'équilibre $t = 1$.

Proof. Lorsque le joueur2 décide de s'accaparer de la totalité de richesse réalisée ω, il va engager à l'équilibre un paiement marginal tel que:
$\beta^{'}(t = 1) = (1 - 1)\omega\frac{f(1)}{1-F(1)} = 0.$ ■

Ce résultat suppose que le joueur2 en annonçant $t = 1$ va engager un paiement nul et donc ne va jamais rentrer en conflit armé avec le joueur1 lorsque ce dernier lui déclare la guerre. Etant donné que le joueur2 ne peut garder, la plus petite part de la richesse réalisée ω sans combattre le joueur1, il n'annoncera jamais à l'équilibre $t = 1$.

Proposition 4.4 A un abandon simultané ($\lambda_1 = \lambda_2 = t$) Le joueur1 (population civile) engage dans le conflit armé un paiement d'équilibre marginal supérieur au paiement d'équilibre marginal engagé par le joueur2.

Preuve Voir annexe.

Ce résultat montre la détermination de la population civile à consentir dans une plus grande mesure des sacrifices pour accéder à un meilleur partage de la richesse nationale. En effet dans un tel conflit armé, la population civile enregistre d'énormes pertes en vies humaines qui alourdissent le paiement qu'il engage dans le conflit armé.

4.4 Discussion

Le problème de partage des richesses issues de l'exploitation des ressources naturelles, qui est à l'origine des conflits armés en Afrique, et qui oppose une dictature au pouvoir (soutenue par des multinationales) à la population civile, peut être analysé comme un jeu de guerre d'usure.

Il s'agit d'un jeu de partage en information incomplète, dans la mesure où: La part minimale de richesse espérée par chaque protagoniste dans le partage du gâteau national, est une information privée.

La dictature qui contrôle les richesses réalisées va vouloir en confisquer au moins une certaine part minimale, alors que l'issue d'une telle compétition dépendra surtout de la part minimale de richesse dont la population civile désire bénéficier et en deçà de laquelle, elle ne déposera pas les armes.

Dans ce contexte, on se trouve dans le cas d'un jeu de partage des richesses où la dictature au pouvoir perd une partie de sa richesse confisquée, chaque fois qu'elle concède une part supplémentaire à la population civile.

Pour spécifier l'issue d'un tel jeu de guerre d'usure, nous allons l'appréhender au travers d'un mécanisme d'enchère particulier dans lequel: Un joueur (population civile) gagne au moins la part minimale qu'il espère bénéficier dans la richesse réalisée par période de temps, quelque soit le joueur qui abandonne en premier la compétition. Alors que l'autre joueur (ensemble dictature - puissances étrangères) gagne la part minimale qu'il espère si seulement, il n'abandonne pas en premier la compétition et ne gagne rien s'il abandonne en premier.

Contrairement à l'approche traditionnelle d'une guerre d'usure analysée comme une enchère, qui suppose que le joueur qui abandonne en premier la compétition ne gagne rien, l'approche que développons dans notre analyse suppose que: La population civile gagne sa part minimale de richesse espérée en abandonnant la compétition en premier, et gagne plus si son adversaire abandonne avant elle, la compétition.

La population civile, en abandonnant la compétition en premier, que si elle obtient sa part minimale de richesse espérée, révèle par là: Qu'il n'existe pas de pouvoir public totalement honnête, au point de réaliser des bénéfices privés nuls.

La différence entre la richesse réalisée et la part minimale de richesse espérée par la population civile peut être alors assimilée à la part de bénéfices privés socialement acceptable, que tout pouvoir qu'il soit démocratique ou dictatorial va toujours confisquer à l'occasion du partage du gâteau national.

Ces bénéfices privés constituent pour les gouvernants une prime à la bonne gouvernance dans la mesure où, la part de la richesse nationale réalisée, affectée à l'intérêt général est socialement jugée suffisante.

En effet la population civile supposée rationnelle, ne peut rester dans une logique de jusqu'auboutisme, en voulant s'accaparer la totalité de la richesse réalisée, car elle est consciente que même en installant au pouvoir, un régime démocratique élu au sein d'elle même, ce régime va toujours réaliser des bénéfices privés qui peuvent même dépasser d'une petite valeur ε, les bénéfices privés socialement acceptables.

Un telle appréciation de la situation par la population civile est bien illustrée par sa stratégie d'équilibre$\beta(t) = \int_0^t \omega[1 + \frac{f(t)}{1-F(t)}(1-t)]dt$, dans la mesure où:

Si son signal d'équilibre est $t = 1$ (elle veut toute la richesse réalisée), elle va engager dans la compétition un paiement d'équilibre égal à la richesse réalisée ω, alors même qu'elle est consciente qu'aucun gouvernement au pouvoir ne peut réaliser des bénéfices privés nuls.

Cependant, les conflits armés qui s'installent entre population civile et dictature au pouvoir lors du partage des richesses nationales, ne conduisent pas forcément à un dénouement en faveur de la population civile qui est le plus souvent en position de faiblesse,contrairement à notre analyse dans laquelle, nous supposons que **l'issue de tels conflits dépendra surtout de la part minimale de richesse dont la population civile désire bénéficier et en deçà de laquelle, elle ne déposera pas les armes**.

Une telle approche met la population civile en position de force par rapport à la dictature au pouvoir.

En effet les dictatures au pouvoir, ayant sous leur contrôle les richesses nationales, engagent dans de tels conflits d'importants moyens financiers et matériels. Ces conflits occasionnent d'énormes pertes au sein des populations civiles (pertes en vies humaines, viol des femmes, etc.) qui les obligent à déposer les armes, et continuer à subir les atrocités des dictatures en place, si elles n'ont pas une forte détermination de consentir d'énormes sacrifices pour avoir gain de cause.

4.5 Application numérique

Supposons que λ_1 et λ_2 sont des variables aléatoires indépendamment distribuées sur $[0;1]$ selon une même loi uniforme F et de fonction de densité f positive, continue et deux fois différentiable sur $[0;1]$.

Le paiement d'équilibre marginal de la population civile (joueur1) vient:

$\beta^{'}(t) = \omega[1 + \frac{f(t)}{1-F(t)}(1-t)] = \omega[1 + \frac{1}{1-t}(1-t)] \quad \forall t \in [0;1],$

D'où:

$$\beta^{'}(t) = 2\omega$$

Le paiement d'équilibre marginal de la dictature (joueur2) vient:

$\beta^{'}(t) = (1-t)\omega\frac{f(t)}{1-F(t)} = (1-t)\omega\frac{1}{1-t} \ \forall t \in [0;1],$

D'où:

$$\beta^{'}(t) = \omega$$

On remarque que le paiement d'équilibre marginal engagé par la population civile (joueur1) est le double de celui engagé par la dictature (joueur2). Ainsi la population civile engage dans le conflit armé des moyens plus importants dans la mesure où, elle n'abandonne le conflit que si elle obtient au moins sa part minimale espérée dans le partage des richesses.

4.6 Conclusion

Dans un conflit armé opposant une dictature à la population civile où les deux acteurs ont comme informations privées leurs parts minimales espérées dans le partage de la richesse réalisée, un jeu de guerre d'usure permet de résoudre le problème de partage et donc le dénouement du conflit armé. L'issue d'une telle compétition, conduit à un équilibre dans lequel, la population civile engage dans la compétition un paiement d'équilibre supérieur à celui engagé par son adversaire dans la mesure où à un abandon simultané, la population civile engage un paiement d'équilibre marginal supérieur à celui de son adversaire. Un tel résultat confirme la volonté de la population civile de combattre la dictature au pouvoir au prix d'énormes sacrifices pour bénéficier au moins de la part minimale de richesse qu'elle réclame. En effet de tels conflits armés occasionnent à la population civile d'énormes pertes notamment en vies humaines. Un autre résultat intéressant que révèle la stratégie d'équilibre de la dictature, est que cette dernière ne peut jamais prétendre s'accaparer de la totalité de la richesse réalisée, lorsque la population civile lui déclare une guerre dans laquelle, elle engage des moyens plus importants dans la mesure où, elle n'abandonne que si elle obtient sa part minimale espérée dans le partage des richesses.

4.7 Annexe

4.7.1 Preuve de la proposition 4.4

Le paiement d'équilibre marginal engagé par le joueur1 est:

$\beta_1^{'}(t) = \omega[1 + \frac{f(t)}{1-F(t)}(1-t)]$.

Le paiement d'équilibre marginal engagé par le joueur2 est:

$\beta_2^{'}(t) = (1-t)\omega\frac{f(t)}{1-F(t)}$.

$\beta_1^{'}(t) - \beta_2^{'}(t) = \omega[1 + \frac{f(t)}{1-F(t)}(1-t)] - (1-t)\omega\frac{f(t)}{1-F(t)} = \omega$.

D'où:

$$\beta_1^{'}(t) = \beta_2^{'}(t) + \omega$$

Chapter 5

Marché de l'emploi et guerre d'usure

5.1 Introduction

Des évolutions primordiales de nos jours, ont profondément bouleversé le contexte de la formation et de l'insertion professionnelle de cadres notamment dans les secteurs d'activités nécessitant en plus des compétences générales de véritables compétences spécifiques tels que: L'ingénierie financière, l'aéronautique, le nucléaire, etc. Au nombre de ces évolutions, on peut citer:

- L'intensification de la logique de marché dans le secteur éducatif qui pose **le problème de l'adéquation des formations aux besoins du marché de l'emploi, qu'il s'agisse de compétences générales ou de compétences spécifiques**.

- L'existence sur le marché de jeunes diplômés dans les mêmes spécialités mais venant d'universités ou d'écoles différentes. Ceci conduit à une **compétition renforcée sur le marché de l'emploi** qui incite différentes structures scolaires à développer des stratégies de position dominante sur le marché de la formation et sur le marché des emplois hautement qualifiés.

- L'avènement d'une économie de connaissance qui exige au sein de l'entreprise un modèle productif particulier organisé autour des complémentarités organisationnelles et technologiques entre les technologies de l'information et de la communication (TIC), le capital humain des agents susceptibles d'utiliser ces technologies et une organisation réactive de la firme qui permettrait la pleine utilisation du potentiel de productivité des deux premiers éléments.

Ces évolutions rendent la valorisation des savoirs plus difficile sur le marché de l'emploi dans la mesure où les recruteurs désirent prendre les meilleurs pour leurs entreprises, alors même qu'il n'existe pas de critères de choix standards pour appréhender l'excellence scolaire et professionnelle de potentiels postulants à des postes de haute qualification.

Selon la théorie de la concurrence pour l'emploi (**Thurow L.C. (1975)**), en période de chômage élevé, les diplômés pour éviter le chômage acceptent plus facilement des emplois déclassés (en deçà de la valeur du diplôme). Cette logique sera utilisée par **Forgeot G. et Gautié J. (1997)**, dans leur étude du déclassement en France.

Dans l'hypothèse d'un marché de travail segmenté, **Marsden D. (1986)**, affirme qu'il y'a une compétition pour l'accès à l'emploi. Ainsi le diplôme (niveau de compétences générales) fonctionne comme un **signal d'employabilité**. Dans la même logique, **Möbus M. et Verdier E (2000)**, vont montrer que le diplôme professionnel est un signal qui organise la compétition pour l'accès aux emplois en France.

En effet il y'a une asymétrie d'information entre demandeurs d'emplois (sans expériences professionnelles) et recruteurs du fait que le recruteur ignore si le postulant est compétent ou non pour le poste en jeu alors que le demandeur est conscient de ses capacités réels. **En particulier, pour des fonctions nécessitant en plus des compétences générales, des compétences spécifiques, les recruteurs sont confrontés au problème de choix du postulant le plus compétent**.

La distinction que fait le recruteur entre les compétences générales (Par exemple:

Formation théorique à l'école d'ingénieurs) et les compétences spécifiques, s'explique par le fait que pour les fonctions à haute technicité telles que: l'aéronautique, le nucléaire, le niveau de compétences générales ne détermine pas à lui seul, l'efficacité au travail. **Cette approche sous tend la non transférabilité totale des compétences**.

Etant donné qu'il y' a une asymétrie d'information entre recruteurs et demandeurs d'emploi (sans expériences professionnelles), il se pose un problème de définition d'un mécanisme optimal de recrutement qui garantit au recruteur, le choix du demandeur le plus efficace (notamment en terme de compétences générales et spécifiques) qui permettra à l'entreprise de maximiser son utilité.

Pour **Arrow K. (1973) et Spence A. M. (1974)**, la transparence du marché du travail est imparfaite dans la mesure où les compétences réelles des postulants sont mal connues par les employeurs potentiels. Le diplôme (compétences générales) est alors utilisé comme un signal imparfait pour filtrer les candidats à l'embauche. Dans ce cas, le rôle essentiel du diplôme est d'être simplement un outil de sélection à l'entrée sur le marché du travail. Quant à **Brown P. (2004)**, il va analyser le processus de compétition auquel sont soumis les étudiants très diplômés et leurs stratégies de positionnement sur un marché du travail où non seulement la valeur des titres scolaires est sujette à fluctuations mais où les mécanismes de recrutement obéissent parfois à des logiques paradoxales ou cachées.

Dans notre article pour résoudre ce problème de choix du demandeur d'emploi le plus compétent, lorsqu'il y'a asymétrie d'information entre recruteurs et demandeurs d'emploi, nous allons proposer un mécanisme de recrutement notamment pour les fonctions nécessitant en plus des compétences générales, certaines compétences spécifiques. Ce mécanisme sera défini comme un jeu de guerre d'usure basé sur une procédure d'enchère spécifique où la règle de décision est différente de celle d'un jeu de guerre d'usure standard avec enchères, où le perdant est celui qui abandonne en premier la compétition.

Dans le mécanisme d'enchère que nous allons développer, chaque joueur à une chance de gagner la compétition quelque soit la période où ce dernier abandonne la compétition. Cependant le joueur qui abandonne en premier signale au recruteur, qu'il à le niveau de compétences générales le plus élevé. Mais comme **Arrow K. (1973) et Spence A. M. (1974)**, nous partons du fait que le niveau de compétences générales (diplôme) est un signal imparfait. **Ainsi dans notre analyse, en plus du niveau de compétences générales, le niveau de compétences spécifiques intervient pour déterminer la victoire d'un joueur (le demandeur d'emploi le plus compétent).**

Notre article exposera dans une première partie, les termes de notre modèle et dans une deuxième partie, il présentera les différents résultats induits par une procédure d'embauche basée sur une guerre d'usure dans laquelle le mécanisme d'enchère utilisé donne à chaque joueur, une chance de gagner la compétition quelque soit sa période d'abandon.

5.2 Le modèle

Pour simplifier notre analyse nous allons considérer deux Ingénieurs potentiels (demandeurs d'emploi) d'un même domaine de formation et formés dans des écoles différentes. Etant à la recherche d'un premier emploi, ils postulent pour un poste d'ingénieur dans une entreprise donnée.

On va supposer que chaque demandeur d'emploi possède deux types de compétences:

-Les compétences générales qui définissent la qualité des connaissances théoriques du demandeur d'emploi. Et comme sur le marché de l'emploi, il y'a une compétition de positionnement des écoles de formation, les compétences générales de chaque demandeur d'emploi est une information qu'il possède de façon privative.

-Les compétences spécifiques qui se résument à l'aptitude du demandeur d'emploi à solutionner des problèmes réels dans la vie professionnelle.

L'objectif de l'entreprise (recruteur) est de recruter le demandeur d'emploi le plus efficace au travail qui pourra apporter le plus à la productivité de l'entreprise.

Comme Arrow K. (1973) et Spence A. M. (1974), nous allons supposer que le niveau de compétences générales (diplôme) des postulants est un signal imparfait et que leurs compétences réelles (compétences spécifiques) sont mal connues des employeurs.

Dans le cas où les recruteurs peuvent observer sur le marché de l'emploi, les niveaux de compétences spécifiques des demandeurs d'emploi pour une fonction donnée, alors ils choisiront ceux qui ont les niveaux de compétences spécifiques les plus élevés.

Dans le cas d'une asymétrie d'information sur les niveaux de compétences générales avec des niveaux de compétences spécifiques inconnus des recruteurs et des demandeurs d'emploi, pour résoudre le problème de choix du demandeur d'emploi le plus efficace, nous allons proposer **un jeu de guerre d'usure spécifique, basé sur un mécanisme d'enchère "both-pay" dans lequel chaque joueur à une chance de gagner quelque soit sa période d'abandon. Un tel jeu met en concurrence les demandeurs d'emploi et permet ainsi au recruteur de sélectionner en fin de compétition, le plus efficace**.

Nous allons supposer que les deux ingénieurs potentiels sont simultanément pris dans un stage non rémunéré au sein de l'entreprise par le recruteur et n'ont pas la possibilité de postuler à un autre emploi sur le marché du travail, tant qu'ils restent stagiaires de l'entreprise. Ils renoncent ainsi à d'autres opportunités d'emploi sur le marché, que l'on peut évaluer en termes de coûts:"coût de renonciation".

Au cours du stage, on confie indéfiniment aux deux ingénieurs potentiels des tâches précises identiques de plus en plus complexes à réaliser. Ainsi, plus le stage perdure, plus chaque nouvelle tâche nécessite des compétences techniques plus sophistiquées de la part des demandeurs d'emploi.

On procède ensuite, à une mesure de leurs performances respectives pour des tâches identiques confiées individuellement à chaque concurrent, jusqu'à ce que l'un des deux joueurs abandonne la compétition à l'instant où, celui-ci atteint son seuil de coût de renonciation supportable sur le marché de l'emploi.

Une telle façon de procéder permet au recruteur de mesurer les compétences spécifiques des stagiaires au travers de leurs capacités respectives à solutionner les problèmes techniques qu'on leur soumet. Ceci permet au fur et à mesure que le jeu perdure, une évaluation plus réaliste des niveaux de compétences spécifiques des deux stagiaires.

En procédant de la sorte, le recruteur tient compte d'un fait essentiel: **Plus le jeu perdure, plus les stagiaires vont affiner leurs performances car les facteurs externes (stress, manque d'agilité lié au début d'exercice d'une première activité professionnelle etc.) auront un effet moindre sur leur efficacité au travail**. Ces facteurs externes qualifiés de **"bruit"** par la littérature vont en effet tendre vers une valeur nulle lorsque la compétition entre les deux ingénieurs potentiels va se dérouler sur un temps suffisamment grand.

Chaque période de jeu correspond à une nouvelle tâche confiée, et chaque nouvelle tâche confiée nécessite des compétences techniques plus élaborées que la tâche précédente. Ceci sous tend le fait que, si le postulant réalise mieux une tâche que la précédente, cela suppose qu'il maîtrise la tâche précédente et que c'est l'effet des facteurs externes (bruit) qui a pesé sur son efficacité.

Le seuil de coût de renonciation supportable détermine les compétences générales (qualité de la formation théorique) de chaque stagiaire car le stagiaire révèle par là, la qualité de ses connaissances théoriques.

Les niveaux de performance des stagiaires à chaque période de jeu (à chaque nouvelle tâche confiée) sont observés par tous les acteurs. Ainsi lorsqu'un joueur abandonne le jeu à une période quelconque, les niveaux de performance réalisés par les deux joueurs sont connaissance commune.

Intuitivement le joueur qui est prêt à supporter le seuil de coût de renonciation le plus élevé (qui est prêt à passer plus de temps dans le stage), n'abandonnera pas en premier la compétition car il va espérer un niveau de compétences spécifiques plus élevé, à l'abandon de son adversaire. Chaque stagiaire a ainsi, une incitation à rester dans le stage jusqu'à ce que le premier qui atteint son seuil de coût de renonciation, abandonne la compétition.

Un joueur gagne alors la compétition s'il abandonne le premier avec un niveau de compétences spécifiques supérieur ou égal à celui de son adversaire, ou s'il à un niveau de compétences spécifiques supérieur à celui de son adversaire, lorsque son adversaire abandonne en premier, la compétition.

Le joueur qui a le niveau de coût de renonciation le plus faible (il a plus d'atouts à obtenir un autre emploi sur le marché), à incitation à abandonner le jeu dès l'instant où il atteint son seuil de coût de renonciation.

Dans un tel environnement de jeu, il est profitable pour le joueur marginal (celui qui a le seuil de coût de renonciation le plus élevé) de ne pas abandonner précocement le jeu car l'évènement aléatoire: **« A l'abandon de mon adversaire, je gagne le jeu lorsque j'obtiens un niveau de compétences spécifiques supérieur à celui de mon adversaire»**, lui donne une chance de gagner la compétition.

On se trouve ici, dans un jeu de guerre d'usure qui peut être appréhendé comme une enchère « Both-pay » où, le joueur qui engage le paiement le plus faible gagne l'enchère[1] lorsqu'à l'abandon, il a un niveau de compétences spécifiques supérieur ou égal à celui de son adversaire.

Le joueur qui gagne la compétition obtient alors une prime (satisfaction procurée par l'obtention du poste en jeu). Cette prime est évaluée de façon individuelle en fonction du seuil de coût de renonciation supportable par chaque joueur sur le marché de l'emploi.

Intuitivement, le joueur qui est prêt à supporter un niveau de coût de renonciation plus élevé, à évidemment une plus grande évaluation de la prime en jeu. Ceci s'explique par le fait que, ce dernier ayant moins de potentiel à accéder à un autre emploi sur le marché (car supporté un coût de renonciation plus élevé est un signal qui informe sur la faiblesse de ses compétences générales sur le marché), accorde une utilité psychologique[2] plus forte au poste en jeu.

L'objectif du recruteur peut se résumer alors de la façon suivante: Evaluer au cours d'un temps de stage relativement long qui élimine tout impact de facteurs externes,

[1] Les deux joueurs supportent le paiement du joueur qui a le coût de renonciation le plus faible

[2] Comprendre par utilité psychologique, la satisfaction qui découle du fait d'obtenir le poste en jeu : Intuitivement, plus l'individu a moins d'atouts à obtenir un emploi, plus sa satisfaction sera grande s'il réussit à obtenir le poste en jeu

les niveaux de compétences spécifiques réels des stagiaires. Cependant le recruteur est conscient que les stagiaires supportent des coûts d'opportunité (coûts de renonciation) sur le marché de l'emploi et par conséquent ils abandonnent le stage lorsque leurs seuils de coûts de renonciation supportables sont atteints. **Une telle contrainte met ainsi en concurrence les stagiaires dans un jeu de guerre d'usure**.

Dans cette guerre d'usure à information incomplète, nous allons développer dans la section suivante, un cadre d'analyse économique cohérente permettant de déterminer les stratégies d'équilibre (les paiements d'équilibres engagés) des joueurs.

5.2.1 Stratégies d'équilibre des joueurs et le problème de choix du demandeur d'emploi le plus compétent

On va considérer que les deux ingénieurs potentiels postulent dans un secteur où le taux de chômage est relativement bas: Ceci permet de justifier l'existence de coûts de renonciation lorsqu'au cours du stage, ils ne peuvent postuler dans une autre entreprise.

Les deux ingénieurs potentiels sont représentés par $i = 1; 2$.

Le seuil de coût de renonciation supportable (signal reçu) par chaque joueur i sur le marché de l'emploi lorsqu'il est en compétition, est une information privée notée c_i.

Le niveau de compétences spécifiques de chaque joueur i noté α_i, est une variable aléatoire inconnue du joueur, de son concurrent et du recruteur.

Les facteurs externes (bruit) qui affectent les niveaux de compétences spécifiques α_i à une période quelconque j ($j = 0; 1; ....T$, avec T correspondant à la période où un stagiaire abandonne le jeu) du jeu sont notés ω_i^j, et diminuent progressivement au fur et à mesure que le stage dure dans le temps. En effet ces facteurs externes (stress, manque de confiance en soi, les erreurs liées à l'exercice d'une première activité) détériorent la performance du joueur à l'évaluation au cours du stage mais leur effet est dégressif dans le temps (en début de stage, l'impact est élevé et décroît progressivement pendant le stage jusqu'à s'annuler à un temps suffisamment grand). Le principal avantage pour l'entreprise est d'avoir une qualité d'information moins biaisée sur les compétences réelles de chaque stagiaire afin d'opérer un choix plus proche de la réalité.

Il vient alors: $\omega_i^{j-1} > \omega_i^j$ avec ω_i^T, le bruit affectant la performance d'un joueur i sur la dernière tâche réalisée. Ceci suppose que l'effet du bruit sur l'efficacité de chaque stagiaire au début du stage est à sa valeur maximale et que ce bruit se dissipe progressivement au fur et à mesure que le stage perdure.

Pour simplifier notre analyse, nous allons considérer que le début de stage est la période $j = 0$ qui correspond à l'évaluation du stagiaire pour la première tâche que l'entreprise lui demande de réaliser au cours du stage. Si à $j = 0$, un stagiaire i avec un niveau de compétences spécifiques α_i(inconnu) réalise une performance nulle, alors le bruit (facteurs externes) subit par ce dernier a totalement inhibé la manifestation de ces compétences spécifiques.

Comme, nous avons supposé que chaque nouvelle tâche nécessite des compétences techniques plus élaborées que la précédente, et qu'une performance réalisée sur une nouvelle tâche suppose que, sur la précédente le stagiaire est capable de réaliser une performance au moins égale à celle de la nouvelle tâche, **alors le bruit qui va jouer en dernier ressort sur la performance d'un joueur i ou sur sa chance de gagner est celui qui affecte la dernière tâche réalisée par le joueur et donc ω_i^T.**

On suppose qu'un joueur i, **atteint le niveau de stress nul au plus tard, quand il atteint dans la compétition, son seuil de coût de renonciation supportable sur le marché.** Car un joueur qui abandonne la compétition est conscient qu'à cet instant, il a donné le meilleur de lui même. Dans ce contexte, son niveau de stress à l'abandon peut être raisonnablement supposé nul.

Ainsi à la période d'abandon T, le niveau de performance φ_i^T ($\varphi_i^T = \alpha_i - \omega_i^T$) d'un stagiaire i qui abandonne en premier la compétition, est telle que:

$$\omega_i^T = 0, \text{ ce qui implique: } \varphi_i^T = \alpha_i = \bar{\alpha_i}(\text{variable observée}).$$

Les coûts de renonciation c_i sont des variables aléatoires indépendamment distribuées sur l'intervalle $[0; 1]$ selon une même loi de probabilité F dont la fonction de densité f est positive, continue et deux fois différentiable sur $[0; 1]$.

Les niveaux de compétences spécifiques α_i sont des variables aléatoires indépendamment distribuées sur l'intervalle $[0;1]$ selon une même loi de probabilité G dont la fonction de densité g est positive, continue et deux fois différentiable sur $[0;1]$.

Les bruits ω_i^j sont des variables aléatoires indépendamment distribuées sur l'intervalle $[0;1]$ selon une même loi de probabilité dont la fonction de densité est positive, continue et deux fois différentiable sur $[0;1]$.

Les joueurs sont neutres vis à vis du risque.

La stratégie β de chaque joueur i est une fonction croissante de son coût de renonciation c_i $\forall \bar{\alpha_1}; \bar{\alpha_2}$, telle que:

$\beta : [0;1]^3 \rightarrow [0;\infty($

$(c_i, \bar{\alpha_1}; \bar{\alpha_2}) \mapsto \beta(c_i, \bar{\alpha_1}; \bar{\alpha_2})$.

La prime $v(c_i)$ perçue par chaque joueur i est une fonction croissante de son signal c_i (elle est indépendante de de $\bar{\alpha_1}$,$\bar{\alpha_2}$),

telle que:

$v : [0;1] \rightarrow [0;\infty[$

$c_i \mapsto v(c_i)$,

On suppose que l'individu qui a un niveau de coût de renonciation supportable nul, a une utilité psychologique nulle ($v(c_i) = 0$). Intuitivement, cet individu a à son actif une expérience professionnelle de qualité sur le poste en jeu et il n'a donc aucune incitation à s'engager dans un stage d'évaluation avant embauche.

Le joueur qui reçoit un signal égal à zéro (il a des compétences spécifiques avérées de par ses expériences professionnelles), engage un paiement nul ($\beta(0; \bar{\alpha_1}; \bar{\alpha_2}) = 0$).

Lorsque les deux ingénieurs potentiels abandonnent simultanément la compétition, le poste est attribué à celui qui obtient la performance (niveau de compétences spécifiques), la plus élevée. On suppose que, les deux joueurs perdent le jeu lorsqu'à un abandon simultané, ils obtiennent les mêmes performances (mêmes niveaux de compétences spécifiques), à l'évaluation

Le coût de renonciation supporté sur le marché de l'emploi est égal à 1 par unité de temps. Ceci suppose que lorsque l'un des deux joueurs abandonne à une période T quelconque, alors le coût de renonciation supporté par les deux joueurs est égal à T.

Les signaux c_i reçus par les joueurs sont indépendants (non affiliés).

On suppose que le coût de l'effort intellectuel fourni par un joueur au cours du stage est nul.

L'utilité espérée du joueur1 lorsqu'il annonce à l'équilibre $c_1 = t$ (position symétrique pour les deux joueurs) et abandonne en premier, la compétition ($c_1 = t < c_2 = s$) est:

$$U_{11} = [1 - F(t)] \{G(\bar{\alpha_1}) \left[v(t) - \beta(t; \bar{\alpha_1}; \bar{\alpha_2})\right] - \beta(t; \bar{\alpha_1}; \bar{\alpha_2}) \left[1 - G(\bar{\alpha_1})\right]\},$$

et en simplifiant on a:

$$U_{11} = (1 - F(t)) \left[G(\bar{\alpha_1})v(t) - \beta(t; \bar{\alpha_1}; \bar{\alpha_2})\right].$$

Avec:

$\varphi_1^T = \alpha_1 = \bar{\alpha_1}$(variable réelle observée) car $\omega_1^T = 0$ lorsque le joueur1 abandonne en premier la compétition,

$G(\bar{\alpha_1}) = \Pr\left[\alpha_2 \leq \bar{\alpha_1}\right]$, **la probabilité que le niveau de compétences spécifiques α_2 (variable aléatoire) du joueur2 soit inférieur ou égal au niveau de compétences spécifiques $\bar{\alpha_1}$(variable observée) du joueur1 lorsque le joueur1 abandonne en premier la compétition**,

et $(1 - G(\bar{\alpha_1})) = \Pr\left[\alpha_2 > \bar{\alpha_1}\right]$.

L'utilité espérée U_{12} du joueur1 lorsqu'il annonce à l'équilibre $c_1 = t$ et le joueur2 abandonne en premier la compétition ($c_1 = t > c_2 = s$) est:

$$U_{12} = \left[1 - G(\bar{\alpha_2})\right]\left[v(t) - \int_0^t \beta(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})f(s)ds\right] - G(\bar{\alpha_2})\int_0^t \beta(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})f(s)ds,$$

Avec:

$\varphi_2^T = \alpha_2 = \bar{\alpha_2}$(variable réelle observée) car $\omega_2^T = 0$ lorsque le joueur2 abandonne en premier la compétition,

$G(\bar{\alpha_2}) = \Pr\left[\alpha_1 \leq \bar{\alpha_2}\right]$, **la probabilité que le niveau de compétences spécifiques α_1 (variable aléatoire) du joueur1 soit inférieur ou égal au niveau de compétences spécifiques $\bar{\alpha_2}$(variable observée) du joueur2 lorsque le joueur2 abandonne en premier la compétition**,

et $(1 - G(\bar{\alpha_2})) = \Pr\left[\alpha_1 > \bar{\alpha_2}\right]$.

En simplifiant on a:

$$U_{12} = \left[1 - G(\bar{\alpha_2})\right] v(t) - \int_0^t \beta(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})f(s)ds.$$

L'utilité espérée totale d'équilibre du joueur1 à un abandon non simultané des deux joueurs, vient alors:

$$\pi(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) = \left([1-F(t)]\,G(\bar{\alpha_1})+\left[1-G(\bar{\alpha_2})\right]\right)v(t) - [1-F(t)]\,\beta(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) - \int_0^t \beta(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})f(s)ds. \tag{5.1}$$

Avec:

$\beta(c_1 = t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})$, égal au coût supporté par chacun des deux joueurs lorsque le joueur1 abandonne la compétition,

$\beta(c_2 = s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})$, égal au coût supporté par chacun lorsque le joueur2 abandonne la compétition,

$\int_0^t \beta(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})f(s)ds$, égal au paiement espéré du joueur1 lorsque le joueur2 abandonne la compétition,

$(1-F(t))\beta(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})$, son paiement espéré lorsqu'il abandonne la compétition.

5.2.1.1 Equilibre du jeu

En maximisant l'utilité d'équilibre du joueur1 par rapport à t, la condition de premier ordre donne:

$$-f(t)G(\bar{\alpha_1})v(t)+v^{'}(t)\left[(1-F(t))\,G(\bar{\alpha_1})+1-G(\bar{\alpha_2})\right]-(1-F(t))\,\beta^{'}(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})=0.$$

Il vient alors:

$$\beta^{'}(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) = -\frac{f(t)}{1-F(t)}G(\bar{\alpha_1})v(t) + \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)}\right]v^{'}(t). \qquad (5.2)$$

La stratégie d'équilibre du joueur1 dans la guerre d'usure vient:

$\beta(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) = \int_0^t \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)}\right] v^{'}(t)dt - \int_0^t \frac{f(t)}{1-F(t)}G(\bar{\alpha_1})v(t)dt,$

En intégrant par partie la quantité,

$\int_0^t \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)}\right] v^{'}(t)dt$, il vient:

$\int_0^t \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)}\right] v^{'}(t)dt = v(t)\left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)}\right]$
$-\int\limits_0^t v(t)\frac{f(t)}{(1-F(t))^2}\left(1-G(\bar{\alpha_2})\right)dt,$

avec $v(0) = 0$.

En remplaçant $\int_0^t \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)}\right] v^{'}(t)dt$ par sa valeur,

on a:

$\beta(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) = v(t)\left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)}\right] - \int\limits_0^t v(t)\frac{f(t)}{(1-F(t))^2}\left(1-G(\bar{\alpha_2})\right)dt$
$-\int_0^t \frac{f(t)}{1-F(t)}G(\bar{\alpha_1})v(t)dt,$

D'où:

$$\beta(t;\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_2)=\left[G(\bar{\alpha}_1)+\tfrac{1-G(\bar{\alpha}_2)}{1-F(t)}\right]v(t)-\int\limits_0^t \tfrac{f(t)}{1-F(t)}\left[G(\bar{\alpha}_1)+\tfrac{1-G(\bar{\alpha}_2)}{1-F(t)}\right]v(t)dt,$$

$$\beta(t;\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_2)=\tfrac{1}{1-F(t)}\left[(1-F(t))\,G(\bar{\alpha}_1)+1-G(\bar{\alpha}_2)\right]v(t)$$
$$-\int\limits_0^t \tfrac{f(t)}{(1-F(t))^2}\left[(1-F(t))\,G(\bar{\alpha}_1)+1-G(\bar{\alpha}_2)\right]v(t)dt,$$

Soit $w(t;\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_2)=\left[(1-F(t))\,G(\bar{\alpha}_1)+1-G(\bar{\alpha}_2)\right]v(t)$, la prime espérée par le joueur1 à l'équilibre,

il vient:

$$\beta(t;\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_2)=\frac{1}{1-F(t)}w(t;\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_2)-\int\limits_0^t \frac{f(t)}{(1-F(t))^2}w(t;\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_2)dt, \tag{5.3}$$

Or $\int\limits_0^t \frac{f(t)}{(1-F(t))^2}w(t;\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_2)dt = \frac{1}{1-F(t)}w(t;\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_2)-\int\limits_0^t \frac{1}{1-F(t)}w^{'}(t;\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_2)dt$ (intégration par partie),

D'où:

$$\beta(t;\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_2)=\int\limits_0^t \frac{1}{1-F(t)}w^{'}(t;\bar{\alpha}_1;\bar{\alpha}_2)dt. \tag{5.4}$$

Proposition 5.1 L'utilité d'équilibre espérée par chaque demandeur d'emploi dans le stage est nulle.

Proof. L'utilité espérée du joueur1 lorsqu'il annonce à l'équilibre,

$c_1 = t$ vient:

$\pi(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) = \Big[(1-F(t))\,G(\bar{\alpha_1}) + 1 - G(\bar{\alpha_2})\Big]\,v(t) - [1-F(t)]\,\beta(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) - \int_0^t \beta(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})f(s)ds.$

En intégrant par partie la quantité $\int_0^t \beta(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})f(s)ds$,

il vient:

$\int_0^t \beta(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})f(s)ds = \Big[\beta(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})F(s)\Big]_0^t - \int_0^t \beta^{'}(s,\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})F(s)ds = \beta(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})F(t) -$
$\beta(0;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})F(0) - \int_0^t \beta^{'}(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})F(s)ds.$

Or $F(0) = 0$,

d'où:

$\pi(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) = \Big[(1-F(t))\,G(\bar{\alpha_1}) + 1 - G(\bar{\alpha_2})\Big]\,v(t)$
$-\,[1-F(t)]\,\beta(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) + \int_0^t \beta^{'}(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})F(s)ds - \beta(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})F(t),$

$\pi(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) = \Big[(1-F(t))\,G(\bar{\alpha_1}) + 1 - G(\bar{\alpha_2})\Big]\,v(t) + \int_0^t \beta^{'}(s;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2})F(s)ds - \beta(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}),$

En utilisant les résultats (3) et (4), il vient:

$$\begin{aligned}
\pi(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) \quad = \quad & \Big[(1-F(t))\,G(\bar{\alpha_1}) + 1 - G(\bar{\alpha_2})\Big]\,v(t) \\
& - \int_0^t \frac{f(s)}{1-F(s)} G(\bar{\alpha_1}) v(s) F(s) ds \\
& + \int_0^t \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(s)}\right] v^{'}(s) F(s) ds \\
& - \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)}\right] v(t) \\
& + \int_0^t \frac{f(t)}{1-F(t)} \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)}\right] v(t) dt
\end{aligned}$$

On a:

$\int_0^t \frac{f(t)}{1-F(t)} \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)}\right] v(t)dt - \int_0^t \frac{f(s)}{1-F(s)} G(\bar{\alpha_1}) v(s) F(s) ds,$

qui vaut:

$\int_0^t \frac{f(s)}{1-F(s)} v(s) \left[G(\bar{\alpha_1})(1-F(s)) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(s)} \right] ds.$

$$\begin{aligned} \pi(t;\alpha_1;\alpha_2) &= \int_0^t \frac{f(s)}{1-F(s)} v(s) \left[G(\bar{\alpha_1})(1-F(s)) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(s)} \right] ds \\ &+ \int_0^t \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(s)} \right] v'(s) F(s) ds \\ &- F(t) \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)} \right] v(t). \end{aligned}$$

En intégrant par partie la quantité,

$\int_0^t \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(s)} \right] v'(s) F(s) ds,$

il vient:

$\int_0^t \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(s)} \right] v'(s) F(s) ds = \left[G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(t)} \right] F(t) v(t)$

$- \int_0^t v(s) \frac{f(s)}{1-F(s)} \left[(1-F(s)) G(\bar{\alpha_1}) + \left(1 - G(\bar{\alpha_2})\right) \frac{1}{1-F(s)} \right] ds,$

avec,

$v(0) = 0.$

Ainsi on a:

$\pi(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) = \int_0^t \frac{f(s)}{1-F(s)} v(s) \left[G(\bar{\alpha_1})(1-F(s)) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(s)} \right] ds$

$- \int_0^t v(s) \frac{f(s)}{1-F(s)} \left[(1-F(s)) G(\bar{\alpha_1}) + \frac{1-G(\bar{\alpha_2})}{1-F(s)} \right] ds,$

D'où à l'équilibre

$$\pi(t;\bar{\alpha_1};\bar{\alpha_2}) = 0 \tag{5.5}$$

■

Ce résultat montre que la stratégie jouée par chaque demandeur d'emploi au cours du stage est un équilibre efficace. Ceci suppose que chaque demandeur d'emploi engage à l'équilibre comme paiement espéré dans le stage, tout son gain espéré en cas de victoire.

Soient:$p = G(\bar{\alpha_1})$ et $q = G(\bar{\alpha_2})$, il vient:

$$w(t;p;q) = [(1 - F(t))\,p + 1 - q]\,v(t). \tag{5.6}$$

Proposition 5.2 Le paiement d'équilibre $\beta(t;p;q)$, engagé par le joueur1 décroît à la fois dans la probabilité p et dans la probabilité q.

.

Proof. Voir annexe ■

Ce résultat montre qu'au fur et à mesure que la probabilité que le demandeur d'emploi qui a le niveau de compétences générales le plus élevé (qui abandonne en premier la compétition) soit celui qui a plus de chance d'avoir le niveau de compétences spécifiques le plus élevé, alors le paiement d'équilibre engagé par chaque joueur dans la compétition, diminue au fur et à mesure que cette probabilité augmente. Ainsi la qualité des compétences spécifiques du joueur qui abandonne en premier le stage, détermine l'importance du paiement d'équilibre engagé par chacun des deux demandeurs d'emploi (à la recherche du premier emploi). Car plus le joueur qui abandonne en premier le stage sera le plus apte à avoir un niveau de compétences spécifiques élevé, plus le paiement d'équilibre engagé par chaque joueur est faible. Il serait alors moins coûteux pour des demandeurs d'emploi (à la recherche du premier emploi) de s'engager dans un stage d'évaluation de leurs compétences spécifiques, si sur le marché de l'emploi, il existe une corrélation positive entre le niveau de compétences générales et le niveau de compétences spécifiques de chaque demandeur d'emploi.

Proposition 5.3 La prime d'équilibre $w(t;p;q)$ espérée par le joueur1 dans le stage, est une fonction croissante de p alors qu'elle est une fonction décroissante en q.

Proof. On a: $w(t;p;q) = [(1 - F(t))\,p + 1 - q]\,v(t)$,
il vient:

$$\frac{\partial w(t;p;q)}{\partial p} = (1 - F(t))v(t).$$

Etant donné que: $(1 - F(t)) \geq 0$ et $v(t) \geq 0 \forall t \in [0;1]$, alors:

$$\frac{\partial w(t;p;q)}{\partial p} = (1 - F(t))v(t) \geq 0.$$

$$\frac{\partial w(t;p;q)}{\partial q} = -v(t) \leq 0.$$

■

Ce résultat montre que la prime d'équilibre espérée $w(t;p;q)$ par le joueur1 est d'autant plus grande, si p est élevée alors qu'elle est d'autant plus faible, si q est élevée. Ceci suppose que si le joueur1 abandonne en premier la compétition alors, plus la probabilité que son adversaire ait un niveau de compétences spécifiques inférieur au sien est élevé, plus son gain espéré $w(t;p;q)$ est élevé. Alors que si c'est son adversaire qui abandonne en premier, son gain espéré diminue au fur et à mesure que la probabilité qu'il ait un niveau de compétences spécifiques inférieur à celui de son adversaire, augmente.

5.3 Conclusion

Le problème de choix du demandeur d'emploi le plus efficace peut être résolu par un jeu de guerre d'usure qui garantit au recruteur à la fin du jeu, un choix optimal qui reflète les compétences spécifiques réelles des joueurs.

En effet dans un environnement économique voire un secteur d'activité où le taux de chômage est relativement bas, il serait difficile à un recruteur de maintenir des demandeurs d'emploi dans un stage d'évaluation pendant un temps suffisamment grand lorsqu'au cours du stage, ceux-ci ne peuvent postuler dans une autre entreprise, et supportent de ce fait des coûts d'opportunité sur le marché de l'emploi.

Dans une optique de non existence de coûts d'opportunité (le stagiaire supporte un coût de renonciation nul) sur le marché, il suffirait pour le recruteur de définir un temps de stage assez long et de mesurer les compétences spécifiques des stagiaires dans le temps sur des tâches de plus en plus complexes à réaliser. Ainsi à la fin du stage, le recruteur pourra prendre le meilleur des deux stagiaires. C'est-à-dire, celui qui réalise la meilleure performance sur la dernière tâche confiée. Une telle façon de procéder peut correspondre à une situation économique de taux de chômage très élevé, où avoir un emploi qualifié est difficile quelque soit les compétences générales du demandeur d'emploi. La contrainte de coûts d'opportunité n'est plus alors une règle forcément valable dans un secteur de travail où, l'offre d'emploi est très réduite et où le recruteur est en position d'imposer la règle du jeu.

L'approche développée dans notre modèle, offre ainsi aux entreprises qui veulent recruter pour une fonction dont il est important que les postulants (à la recherche du premier emploi) confirment leurs compétences spécifiques réelles, un mécanisme de mise en concurrence fiable qui leur permet de choisir: Le demandeur d'emploi le plus efficace au travail.

La guerre d'usure exposée dans notre analyse est un mécanisme optimal, dans la mesure où, elle conduit à un équilibre efficace: Les joueurs ont une utilité d'équilibre nulle et donc incités à participer au stage. Il est aussi intéressant de constater que dans le mécanisme de sélection spécifié dans notre analyse, le paiement d'équilibre engagé par chaque demandeur d'emploi (à la recherche du premier emploi) dans le stage baisse lorsque le demandeur d'emploi qui abandonne en premier la compétition (qui a le niveau de compétences générales le plus élevé), a une chance plus grande d'avoir le niveau de compétences spécifiques le plus élevé. Un tel résultat montre que si sur le marché de l'emploi, les demandeurs d'emploi (à la recherche du premier emploi) qui ont les niveaux de compétences générales plus élevés sont ceux, les plus aptes à avoir les niveaux de compétences spécifiques plus élevés, alors le stage d'évaluation (spécifié dans notre modèle) est moins coûteux pour chaque joueur.

5.4 Annexe

5.4.1 Preuve de la proposition 5.2

On a: $w(t;p;q) = [(1-F(t))\,p + 1 - q]\,v(t)$, ceci implique:

$$\begin{aligned} w^{'}(t;p;q) &= \frac{\partial w(t;p;q)}{\partial t} = -pf(t)v(t) \\ &\quad +v^{'}(t)\left[(1-F(t))\,p+1-q\right]. \end{aligned}$$

Or $\beta(t;p;q) = \int\limits_0^t \frac{1}{1-F(t)} w^{'}(t;p;q)dt$, ceci implique:

$$\beta(t;p;q) = \int\limits_0^t v^{'}(t)\left[p + \frac{1}{1-F(t)}(1-q)\right]dt - \int\limits_0^t p\frac{f(t)}{1-F(t)}v(t)dt.$$

Il vient:

$$\frac{\partial\beta(t;p;q)}{\partial p} = \left[v^{'}(t)\left[p+\frac{1}{1-F(t)}(1-q)\right]\right]_0^t - \left[p\frac{f(t)}{1-F(t)}v(t)\right]_0^t,$$

$$\left[v^{'}(t)\left[p+\frac{1}{1-F(t)}(1-q)\right]\right]_0^t = v^{'}(t)\left[t+\frac{1}{1-F(t)}(1-q)\right] - v^{'}(t)\frac{1}{1-F(t)}(1-q),$$

$$\left[v^{'}(t)\left[p+\frac{1}{1-F(t)}(1-q)\right]\right]_0^t = tv^{'}(t),$$

$$\left[p\frac{f(t)}{1-F(t)}v(t)\right]_0^t = t\frac{f(t)}{1-F(t)}v(t),$$

$$\frac{\partial \beta(t;p;q)}{\partial p} = tv^{'}(t) - t\frac{f(t)}{1-F(t)}v(t),$$

$$\frac{\partial \beta(t;p;q)}{\partial p} = v(t)t - \int_0^t v(t)dt - t\frac{f(t)}{1-F(t)}v(t),$$

$$\frac{\partial \beta(t;p;q)}{\partial p} = v(t)t\left[1 - \frac{f(t)}{1-F(t)}\right] - \int_0^t v(t)dt.$$

Or pour tout $t \in [0;1]$, $\frac{f(t)}{1-F(t)} \geq 1$ et donc $v(t)t\left[1 - \frac{f(t)}{1-F(t)}\right] \leq 0$. Il en résulte:

$$\frac{\partial \beta(t;p;q)}{\partial p} = v(t)t\left[1 - \frac{f(t)}{1-F(t)}\right] - \int_0^t v(t)dt \leq 0.$$

le paiement d'équilibre du joueur1 décroît dans la probabilité p.

$$\frac{\partial \beta(t;p;q)}{\partial q} = v^{'}(t)\left[p + \frac{1}{1-F(t)}(1-t)\right] - v^{'}(t)\left[p + \frac{1}{1-F(t)}\right],$$

$$\frac{\partial \beta(t;p;q)}{\partial q} = -tv^{'}(t)\frac{1}{1-F(t)} \leq 0.$$

le paiement d'équilibre du joueur1 décroît dans la probabilité q.

Conclusion générale

L'objectif de cette thèse est de procéder à l'analyse économique, de différentes situations de compétition (où les joueurs engagent des paiements non récupérables) par des jeux de guerre d'usure (basés sur des mécanismes d'enchère spécifiques), qui permettent de faire une prédiction quant à l'issue d'une compétition donnée.

Les deux premiers chapitres présentent le concept de guerre d'usure et son utilisation comme outil d'analyse économique de diverses situations de compétition. Les trois derniers cherchent à prolonger et enrichir les analyses existantes sur la guerre d'usure.

Etant donné que l'analyse de la guerre d'usure sous un horizon temporel infini, conduit à des équilibres multiples en stratégies pures, le premier chapitre présente le concept d'équilibres multiples et les différents mécanismes qui permettent de spécifier dans une guerre d'usure un équilibre unique en stratégies pures notamment lorsque les joueurs possèdent des informations privées. Les mécanismes d'enchère ou l'hypothèse de temps limite sont les outils couramment utilisés pour résoudre dans une guerre d'usure, le problème d'équilibres multiples.

Les mécanismes d'enchère considèrent la guerre d'usure comme une enchère au second prix avec un aspect "all-pay", dans laquelle les coûts irrécupérables supportés par les joueurs dans la compétition constituent leurs offres, et le paiement d'équilibre supporté (offre d'équilibre) par un joueur qui gagne la compétition est égal au deuxième paiement le plus élevé engagé dans la compétition lorsqu'on reste dans l'hypothèse où: L'individu qui engage le paiement le plus élevé remporte l'enchère. La stratégie d'équilibre d'un joueur est alors représentée par son offre d'équilibre qui est fonction de son signal reçu lorsque les joueurs possèdent des informations privées. Il s'agit alors d'un environnement d'asymétrie d'information dans lequel, les signaux des joueurs (offreurs) peuvent être affiliés ou non. Vijay K. et Morgan J. (1997) dans leurs travaux ont présenté un jeu de guerre d'usure, dans lequel les signaux des joueurs sont affiliés. Ils ont spécifié dans un tel jeu, un équilibre symétrique dans lequel chaque offreur est contraint de participer à l'enchère.

Dans l'approche de la guerre d'usure basée sur l'hypothèse de temps limite, les stratégies d'équilibre des joueurs correspondent au temps qu'un joueur pourra tenir dans la compétition avant sa sortie. Ces stratégies d'équilibre sont fonction des signaux respectifs perçus par les joueurs lorsqu'ils sont en compétition dans un environnement où le signal reçu par chaque joueur est une information privée.

Le deuxième chapitre présente des exemples de situations de compétition qui sont appréhendées comme des guerres d'usure dans la littérature économique.

Les travaux de Bulow J. et Klemperer P. (1999), analysent la compétition entre firmes concurrentes dans un oligopole naturel comme une guerre d'usure à plusieurs gagnants.

McAfee R. (2000),analyse le conflit armé qui s'installe entre deux pays à l'occasion d'une dispute territoriale comme un jeu à plusieurs guerres d'usure successives, dans lequel les deux parties essaient d'étendre leurs frontières et le niveau d'effort fourni par chaque partie, à chaque période, est une variable endogène.

Les deux premiers chapitres sont une synthèse qui met en lumière, les différentes façons dont la littérature, caractérise la guerre d'usure par l'utilisation de divers mécanismes (qui introduisent des contraintes), qui permettent de spécifier un équilibre unique dans une guerre d'usure. Par ailleurs les mécanismes utilisés dans la théorie de la guerre d'usure, notamment ceux basés sur les mécanismes d'enchère, supposent toujours que le perdant est celui qui abandonne en premier la compétition. Les chapitres suivants vont présenter différents jeux de guerre d'usure qui se basent sur des mécanismes d'enchères spécifiques dont la règle de sélection du gagnant (des gagnants) ou la caractéristique des paiements d'équilibre engagés par les joueurs diffère de celles traditionnellement spécifiées dans la littérature.

Le premier apport (chapitre 3) met en évidence le problème de choix de la firme la plus efficace, pour servir la demande dans un monopole naturel où les firmes possèdent comme informations privées leurs niveaux d'efficacité économiques respectifs.

Pour résoudre ce problème de choix de la firme la plus efficace lorsqu'il y'a asymétrie d'information entre firmes et pouvoirs publics, il serait optimal pour l'état de laisser la compétition se jouer au départ sur le marché. Ainsi il va s'établir au départ entre firmes concurrentes une compétition qui prendra la forme d'une guerre d'usure qui conduira à la survie de la firme la plus compétitive sur le marché. Pour formaliser une telle compétition nous avons présenté un jeu de guerre d'usure basé sur un mécanisme d'enchère spécifique dans lequel, les joueurs engagent par unité de temps dans la compétition des paiements différents du fait qu'ils n'ont pas les mêmes fonctions de coûts ou simplement deux joueurs qui abandonnent à la même période supportent des coûts de compétition différents. Cette approche diffère de celle d'un jeu de guerre d'usure traditionnellement développée dans la littérature. En effet dans un jeu de guerre d'usure standard, les joueurs engagent dans le jeu les mêmes paiements par unité de temps et ce qui les différencie est la différence entre les seuils de coûts qu'ils sont capables de supporter ou simplement le temps pendant lequel un joueur peut tenir dans la compétition car deux joueurs qui abandonne à la même période supportent les mêmes coûts de compétition.

Cependant lorsque les pouvoirs publics interviennent dans la compétition en décidant d'accorder en fin de compétition à la firme gagnante une subvention publique, les firmes engagent dans la compétition des paiements plus importants. Un tel comportement, à l'avantage de soutenir la dynamique du secteur d'activité concerné dans la mesure où, nous avons supposé que l'essentiel des dépenses de compétition va dans l'innovation. Un autre résultat intéressant est que la subvention publique en remboursant en fin de compétition à chaque firme son supplément de dépense sur le joueur qui abandonne en premier la compétition (Celui qui engage le paiement le plus faible) conduit au même paiement d'équilibre qu'un jeu de guerre d'usure standard dans lequel, les joueurs engagent le même paiement par unité de temps. De plus un tel mécanisme de subvention publique est socialement efficace car la recette marginale qu'elle génère dans l'économie réelle est supérieure à la subvention marginale socialement coûteuse supportée par les contribuables.

La stratégie qui consiste à laisser jouer la compétition qui s'installe au départ entre firmes concurrentes dans un monopole naturel peut être inefficace pour le secteur d'activité si les dépenses de compétition sont essentiellement orientées vers des dépenses de coup bas.

Dans un tel cas de figure, il serait plus réaliste que l'état joue son rôle de régulateur en intervenant directement sur le marché par le biais d'un mécanisme approprié qui lui permet d'organiser une concurrence entre les firmes présentes sur le marché afin de sélectionner, la plus apte à servir la demande du secteur d'activité concerné.

La deuxième contribution (chapitre 4) s'intéresse aux conflits armés dans lesquels, la population civile combat la dictature (soutenue par les multinationales) au pouvoir dans le but de contraindre ce dernier à concéder au peuple, une part plus importante des richesses issues de l'exploitation des ressources naturelles du pays.

Au cours d'une telle compétition, la population civile ne peut abandonner les armes que si elle bénéficie au moins d'une certaine part minimale dans le partage du gâteau national. Alors que la dictature qui contrôle les richesses réalisées va vouloir en confisquer au moins une certaine part minimale.

Il s'agit d'un jeu de partage des richesses où la dictature au pouvoir perd une partie de sa richesse confisquée, chaque fois qu'elle concède une part supplémentaire des richesses réalisées à la population civile.

L'issue d'une telle compétition dépendra surtout de la part minimale de richesse dont la population civile désire bénéficier et en deçà de laquelle, elle ne déposera pas les armes.

Pour résoudre le problème de dénouement d'un tel conflit en asymétrie d'information, nous l'avons appréhendé comme un jeu de guerre d'usure basé sur un mécanisme d'enchère spécifique dans lequel:

-La population civile gagne au moins sa part minimale espérée quelque soit sa période d'abandon.

-La dictature au pouvoir gagne une part de richesse supérieure à la part minimale qu'elle espère confisquer si seulement, son adversaire abandonne en premier la compétition. Tandis qu'elle ne gagne rien, en abandonnant en premier la compétition.

Un tel type de jeu de guerre d'usure diffère de l'approche traditionnellement développée dans la littérature. En effet dans un jeu de guerre d'usure standard, un joueur qui abandonne en premier la compétition ne gagne rien, alors que dans notre jeu de partage, la population civile gagne sa part minimale du gâteau en abandonnant en premier la compétition.

L'issue d'une telle compétition, conduit à un équilibre dans lequel, la population civile engage dans la compétition un paiement d'équilibre supérieur à celui engagé par son adversaire dans la mesure où à un abandon simultané, la population civile engage un paiement d'équilibre marginal supérieur à celui de son adversaire.

Un tel résultat confirme la volonté de la population civile de combattre la dictature au pouvoir au prix d'énormes sacrifices pour bénéficier au moins de la part minimale de richesse qu'elle réclame.

Un autre résultat intéressant que révèle la stratégie d'équilibre de la dictature, est que cette dernière ne peut jamais prétendre s'accaparer de la totalité de la richesse réalisée, lorsque la population civile lui déclare une guerre dans laquelle, elle engage des moyens plus importants dans la mesure où, elle n'abandonne que si elle obtient sa part minimale espérée dans le partage des richesses.

Les conflits armés qui s'installent entre population civile et dictature au pouvoir lors du partage des richesses nationales, ne conduisent pas forcément à un dénouement en faveur de la population civile qui est le plus souvent en position de faiblesse, contrairement à notre analyse dans laquelle, nous supposons que l'issue de tels conflits dépendra surtout de la part minimale de richesse dont la population civile désire bénéficier et en deçà de laquelle, elle ne déposera pas les armes. Cette approche met la population civile en position de force par rapport à la dictature au pouvoir.

Or les dictatures au pouvoir, ayant sous leur contrôle les richesses nationales, engagent dans de tels conflits d'importants moyens financiers et matériels. Ceci contraint les population civiles à déposer les armes, et continuer à subir les atrocités des dictatures en place, si elles n'ont pas une forte détermination de consentir d'énormes sacrifices (pertes en vies humaines, viol des femmes, etc.) pour avoir gain de cause. Ainsi notre analyse est soutenable seulement dans la logique où: La population civile est déterminée à payer le prix fort et c'est ce que nos résultats confirment dans la mesure où le paiement d'équilibre engagé par la population civile est plus élevé.

Le dernier apport (chapitre 5) met en évidence le problème de choix du demandeur d'emploi le plus compétent, lorsque les recruteurs ignorent les capacités réelles des demandeurs d'emploi (à la recherche du premier emploi).

Pour résoudre ce problème, nous avons proposé un mécanisme de recrutement notamment pour les fonctions nécessitant en plus des compétences générales, certaines compétences spécifiques.

Ce mécanisme est basé sur un jeu de guerre d'usure spécifique où la règle de décision est différente de celle d'un jeu de guerre d'usure standard avec enchère, où le perdant est celui qui abandonne en premier la compétition.

Dans le mécanisme d'enchère que avons développé, chaque joueur a une chance de gagner la compétition quelque soit la période où ce dernier abandonne la compétition.

Cependant le joueur qui abandonne en premier signale au recruteur, qu'il a le niveau de compétences générales le plus élevé. Mais comme Arrow K. (1973) et Spence A. M. (1974), nous partons du fait que le niveau de compétences générales (diplôme) est un signal imparfait.

Ainsi dans notre analyse, en plus du niveau de compétences générales, le niveau de compétences spécifiques intervient pour déterminer la victoire d'un joueur.

Les différentes contributions exposées dans cette thèse peuvent être complétées par d'autres pistes de réflexion. Il serait par exemple intéressant et plus objectif de supposer dans le cas du problème de choix du demandeur d'emploi le plus efficace (**chapitre 5**), que le niveau de compétences spécifiques et le niveau de compétences générales sont des variables positivement corrélées.

Bibliographie

Alesina A. et Drazen A. (1991), "Why are stabiliziations delayed?", American Economic Review, n°81(5), pp.1170-1188.

Amann E., et Leininger W. (1996), "Asymmetric all-pay auctions with incomplete information: The two players case", Games and Economic Behavior; n°14, pp.1-18.

Armstrong M., Cowan S. et Vickers J. (1994), "Regulatory Reforms: Economic Analysis and British Experience", MIT Press, London.

Arrow K. (1973), "higher Education as a filter", Journal of Economics, vol.2, n°3, pp.139-216.

Bannon I. et Collier P. (2003), "Natural ressources and violent conflict: Options and Actions", Washington DC, Banque mondiale.

Baron D. et Myerson R. (1982), "Regulating a monopolist with unknown costs", Econometrica, Vol.50, pp.911-930.

Bilodeau M. et Slivinski A. (1996), "Toilet cleaning and department chairing: Volunteering a public service", Journal of Public Economics, n°59, pp.299-308.

Bishop D., Cannings C. (1978), "A generalised war of attrition", journal of Theoretical Biology", n°70, pp.85-124.

Bliss C. et Nalebuff B. (1984), "Dragon Slaying and Ballroom Dancing: The private supply of a public good", Journal of Public Economics, n°25, pp.1-12.

Boiteux M. (1956), "Sur la gestion des monopôles publique astreints à l'équilibre budgétaire", Econométrica, Vol.24, pp.22-40.

Brown P. et Hesketh A. (2004), "The Mismanagement of Talent: Employability and Jobs in the Knowledge Economy", Oxford University Press.

Bulow J. et Klemperer P. (1994), "Auction vs Negociations", Discussion paper 924, Center for Economic Policy Reasearch, London.

Bulow J. et Klemperer P. (1999), "The generalized war of attrition", American Economic Review, n°89, pp.175-189.

Burnham G., Lafta R., Doocy S., Roberts L. (2006), "Mortality after the 2003 invasion of Iraq: A cross-sectional cluster sample survey", The Lancet, octobre 2006.

Casella A. et Eichengreen B. (1996), "Can foreingn aid accelerate stabilisation", Economic Journal, n°106, pp.605-619.

Chadwick E. (1859), "Results of different principles of legislation and administration in Europe: of competition for the field as compared with competition within the field, of service", journal of the Royal Statistical Society, pp 381-420.

Châtaigner J.M. (2004), "Aide publique au développement et réformes des systèmes de sécurité: L'improbable rencontre du Dr Jekyll et de Mr Hyde", Afrique contemporaine, n° 209, p.205-222.

Chung K. (1974), "A course in probability theory", Second Edition, New York, Academic Press.

Collier P. (2007), "The Bottom Billion: Why the poorest countries are failing and what can be done about it", Oxford University Press.

Collier P. et Hoeffler A. (2000), "Greed and Grievance in Civil War", Working Paper.

COMMISSION POUR L'AFRIQUE (2005), Notre intérêt commun, Rapport de la commission pour l'Afrique, Londres.

Crémer J. et McLean R. (1988), "Full extraction of the surplus in Bayesian and dominant strategic autions", Económetrica, vol.56.

Crocker K. et Masten S. (1996), "Regulation and Administered Contracts Revisited: Lessons from transaction costs economics for public utility regulation", Journal of Regulatory Economics, vol 9, pp.5-39.

Crocker K. et Masten S. (2002), "Prospects for private water provision in developing countries: Lessons from 19th - century America, in Mary Shirley: Thirsting for efficiency: the economics and politics of urban water system reforms", World Bank, Pergamon.

David P. et Monroe H. (1994), "Standards development strategies under incomplete information-Isn't the battle of the sexes really a revelation game?", Working paper, All Souls College and International Monetary Fund.

Demsetz H. (1968), "Why Regulate Utlities", Journal of Law and Economics, vol 11, pp.55-66.

Farrell J (1996), "Choosing rules for formal standardization", Mimeo, University of California, Berkley.

Farrell J. et Saloner G. (1988), "Coordination through committees and markets", rand Journal of Economics, n°19, pp.235-252.

Forgeot G. et Gautié J. (1997), "Insertion professionnelle des jeunes et processus de déclassement", Economie et Statistique, n°304-305, pp.53-74

Friedman J. (1971), "A non cooperative Equilibrium for supergames", Review of Economics Studies, n°38.

Fudenberg D. et Maskin E. (1986), "The folk theorem on repeated games with discounting or with incomplete information, Econometrica, n°54, pp533-556.

Fudenberg D. et Tirole J. (1986), "A Theory of Exit in Duopoly", Econometrica, n°54, pp.943-960.

Fudenberg D. et Tirole J. (1991), "Games Theory", M.I.T Press.

Ghemawatt P. et Nalebuff B. (1985), "Exit", Rand Journal of Economics, n°16(2), pp.184-198.

Ghemawatt P. et Nalebuff B. (1990), "The devolution of declining industries", Quarterly Journal of Economics, n°105(1), pp.167-187.

Goldberg V. (1976), "Regulation and Administered Contracts", The Bell Journal of Economics, vol 7, n° 2, pp.426-448.

Grossman H. I. (1991), "A General Equilibrium Model of insurrections", American Economic Review, n° 81, pp.912-921.

Guasch J.L. (2004), "Granting and Renegotiating Infrastructure Concessions: Doing it Rights", World Bank Institute, WBI Development Studies.

Haigh J. et Cannings C. (1989), "The n-person war of attrition", Acta Applicandae Mathematicae, n°14, pp.59-74.

Hendricks K., Weiss A. et Wilson C. (1988), "The war of attrition in continuous time with complete information", International Economic Review, vol 29.

Hendricks K. et Wilson C. (1989), "The war of attrition in discrete time », Technical report, State University of New York, Stony Brook (1989).

Hillman A. et Riley J. (1989), "Politically contestable rents and transfers", Economics Politics, n°1, pp.17-39.

Hillman A. et Samet D. (1987), "Dissipation of contestable rents by small numbers of contenders", Public Choice, n°54 pp.63-82.

International Rescue Committee (Mai 2001), "Mortality in Eastern Democratic Republic of Congo".

Iraq Body Count Project (2007), Rapport disponible sur http://www.iraqbodycount.net/

Kennan J. et Wilson R. (1989), "Strategic bargaining models and interpretation of strike data", Journal of Applied Econometrics n°47.

Kornhauser L., Rubinstein A., et Wilson C. (1989), "Reputation and Patience in the war of attrition", Economica, n°56, pp.15-24.

Laffont J.J. et Tirole J. (1986),"Using cost information to regulate firms", Journal of Political Economy, Vol.64, pp.614-641.

La porta R., Lopez-de-Silanes F., Shleifer A. et Vishny R. (2000a), "Investor protection and corporate governance", Journal of Finance Economics, vol.58, pp.3-27.

La porta R., Lopez-de-Silanes F., Shleifer A. et Vishny R. (2000b), "Agency problem and dividend policies", Journal of Finance, vol. 55, pp.1-33.

Loeb M. et Magat W. (1979), "A decentralized method of utility regulation", Journal of Law and Economics, Vol.22, pp.399-404.

Maillard J. (1998), "Un monde sans loi", Stock, Paris.

Marsden D. (1986), "The end of Economic man? Custom and competition in labour markets", Brighton:Wheatsheaf.

Maynard S. J. (1974), "The theory of games and the evolution of animal conflicts", Journal of Theoretical Biology n°47.

McAfee R. (2000), "Continuing wars of attrition", Working paper, département d'économie, Université de Texas.

Merchet J. D. (2006), "Le matériel américain paie le prix cher en Irak", Libération, 3 mai 2006.

Milgrom P. R. et Weber R. J. (1982), "A Theory of Auctions and Competitive Bidding", Econometrica, vol 50, pp.1089-1122.

Möbus M. et Verdier E. (2000), "Diplômes professionnels et coordination de la formation et de l'emploi: L'élaboration d'un signal en France et d'une règle en Allemagne", Economies publiques, Etudes et Recherches, n°5, pp.271-301.

Myerson R. (1981), "Optimal auction design", Mathematics of Operation Research.

Naegelen F. (1990), "L'arbitrage qualité-prix dans les procédures d'appels d'offres", Economie et Prévision, n° 96, pp.95-105.

Pidika D., Tchouassi G. (2005), "Afrique centrale: Crises économiques et mécanismes de survie", CODESRIA, Dakar.

PNUD (2005), "Human Development Report", p.160.

Ponsati C. et Sàkovics J. (1995), "The war of attrition with incomplete information", Mathematical Social Sciences, n°29, pp.239-254.

Ramsey F. (1927), "A contribution to the theory of taxation", Economic Journal, Vol.37, pp. 47-61.

Rapport co-présidé par Hamilton H. et Baker A. (2006), disponible sur "http://www.usip.org/isg/iraq_study_group_report/report/1206/iraq_study_g

Riley J. (1979), "Evolutionary Equilibrium Strategies", Journal of Theoretical Biology n°76, pp.109-123.

Riley J. (1980), "Strong Evolutionary Equilibrium and the war of attrition", Journal of Theoretical Biology n°82, pp.383-400.

Riley J. (1999), "Asymmetric contests: A resolution to the tullock paradox, in money, markets and methods, Essays in honour of Robert W. Clower, ed. by P. Howitt, E. De Antoni, and A. Leijonhufvud. Edward Elgar, Cheltenham, UK.

Riley J. et Samuelson W. (1981), "Optimal auction", American Economic Review, n° 71.

Spence A. M. (1974), "Market signaling: Informational transfer in hiring and related processes", Cambridge, Harvard University Press.

Thurow L. C. (1975), "Generating Inequality: Mechanics of Distribution in US Economy", Basic Books.

UN Assistance Mission for Iraq (UNAMI), Human Right Report, 1er novembre-31 décembre 2007.

Vijay K. et Morgan J. (1997), "An analysis of the war of attrition and the all-pay auction", Journal of Economic Theory, vol.72.

Walras L. (1875), L'état et les chemins de fer, Des services publics et des monopoles économiques.

Williams S. (1999), "A characterization of efficient, Bayesian incentive compatible mechanism.", Economic Theory, vol 14.

Williamson O. (1976), "Franchise bidding for natural monopolies - In general and with respect to CATV", Bell Journal of Economics, vol 7, n° 1, pp.73-104.