Université Cheikh Anta Diop de Dakar
Faculté des Sciences et techniques
ECOLE DOCTORALE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

THÈSE DE DOCTORAT UNIQUE EN MATHÉMATIQUES PURES
Pour obtenir le grade de
Docteur de l'université Cheikh Anta Diop de Dakar

Option : Algèbre

Titre

HOPFICITÉ ET CO-HOPFICITÉ DANS LA CATEGORIE COMP DES COMPLEXES

présenté et soutenu le 23/08/2014 par :
El Hadj Ousseynou Diallo
Sous la direction de :
Mohamed BEN MAAOUIA et de Mamadou SANGHARE

Cheikh Thiécoumba Guèye	Professeur Université UCAD	Président
Abdellatif ROCHDI	Professeur Université HASSAN II Mohammedia Casablanca	Rapporteur
AbdelMalek AZIZI	Professeur Université MOHAMMED I Oujda Maroc	Rapporteur
Djiby SOW	Professeur Université UCAD	Rapporteur
Sidi Demba TOURE	Maître de Conférence UCAD	Rapporteur
Mamadou BARRY	Maître de Conférence UCAD	Membre
Mohamed BEN MAAOUIA	Maître de Conférence UGB	Directeur de thèse
Mamadou SANGHARE	Professeur Université UCAD	Co-Directeur de thèse

Année Universitaire : 2013 - 2014

Monsieur El Hadj Ousseynou Diallo a soutenu publiquement ce 23 Aout 2014 une thèse de Doctorat unique mention Mathématique-Modélisation (Spécialité Codage-cryptographie-Algèbre et Applications).
Le sujet de la thèse est: Hopficité et co-Hopficité dans la catégorie COMP des complexes.
Après délibération le jury a décerné à Mr. Diallo le grade de Docteur de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar avec la mention: Très Honorable

La Jury:

Président: Mr. Cheikh. T. Gueye, Professeur UCAD

Membres: MM. Abdel. M. Azizi, Professeur Univ. Mohamed 1. Oujda, Maroc

Mamadou Barry, Maître de Conf, UCAD

Mohamed Ben. Maaouia, Maître de Conf, UGB - St. Louis

Abdellatif Rochdi, Professeur Univ. Hassan II Casablanca. Maroc

Mamadou Sanghare, Professeur UCAD

Djiby Sow, Professeur UCAD

[illegible] Maître de Conf. UCAD

Ecole Doctorale [illegible] et Informatique (UCAD)
le Directeur

Table des matières

Dédicaces

Je rend grâce à Allah Soubkhana Wataallah .

Je dédie humblement ce manuscrit .

- A mes défunts parents à titre posthume pour tous les sacrifices consentis.
- A mon défunt jumean Malick paix à son âme et à tous mes frères et soeurs.
- A mon épouse et à mes enfants pour le soutien et la patience.
- A Moussa Diop Coordinateur du RESAFAD pour le soutien constant et sans réserve.
- A Farba Faye Professeur à l'UCAD pour le soutien et la disponibilité toujours renouvelés.
- A Cheikh Mbacke Diop directeur de L'IREMPT pour l'aide multiforme apportée.
- A Mamour Sankhe Maître de conférences à l'UCAD pour les conseils et le soutien.

Remerciements

- Je voudrais adresser mes sincères remerciements à mon directeur de thèse le Docteur d'état, Maître de Conférences à l'UGB , Mohamed Ben Maouiaa, qui a accepté de me prendre la main, pour faire du questionnement jusqu'à l'aboutissement. Pour sa patience, les nombreux sacrifices consentis, les conseils prodigués, les suggestions et critiques, je lui témoigne ma profonde reconnaissance.
- Je n'aurais jamais pu faire cette thèse, sans la ferme volonté du professeur Sangharé de l'UCAD . Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude. Je le remercie aussi pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être le co-directeur de thèse.
- Je remercie très sincèrement le professeur Cheikh Thiécoumba Guèye de l'UCAD pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.
- Je remercie très sincèrement les professeurs Abdellatif ROCHDI de la Faculté des Sciences Ben M'Sik de Casablanca, AbdelMalek Azizi Professeur Uuiversité Mohammed 1 Oujda Maroc, Djiby Sow et Sidy Demba Touré de L'UCAD d'avoir accepté d'être rapporteurs dans ce jury.
- Mes remerciements vont à l'endroit de Mamadou Barry Maître de Conferences à l'UCAD pour avoir acccepté d'être membre de ce jury.
- Je remercie aussi le professeur Oumar Dianka de l'UCAD et à travers lui tous les membres du lagcaa.

Résumé

Le sujet de cette thése est l'étude des notions de Hopficité et de Co-hopficité dans la catégorie des complexes. Cette thése est composée de quatre chapitres. Dans le chapitre 1 des notions d'algébre homologique sont rappelées notamment les catégories et les foncteurs. Dans le chapitre 2, nous étudions les objets $projectifs$, $injectifs$, $hopfiens$, $cohopfiens$ de la catégorie des complexes de $A-$modules notée $COMP$. Les objets de $COMP$ sont les suites complexes et les morphismes sont les chaines. Le résultat essentiel du deuxiéme chapitre est le théoréme suivant : toute suite complexe de A-modules quasi-projective et fortement $cohopfienne$ ou $quasi-injective$ et fortement $hopfienne$ est une suite complexe de FITTING. Dans le chapitre 3, nous étudions les objets $fortement$ $hopfiens$, $fortement$ $cohopfiens$, $quasi-injectifs$, $quasi-projectifs$, de la catégorie $COMP$. On y étudie aussi les objets de Fitting de la catégorie des complexes. Le résultat le plus remarquable est le théoréme suivant : toute suite complexe de A-modules quasi-projective et fortement $cohopfienne$ ou $quasi-injective$ et fortement $hopfienne$ est une suite complexe de FITTING. Le chapitre 4 est une investigation sur les $CW-$complexes. Il est consacré à l'étude des objets Hopfiens, objets Co-hopfiens dans la catégories des $G-$ $CW-$ complexes. On y étudie également les objets Hopfiens, objets Co-Hopfiens de la catégorie $G\mathcal{H}$ où G est un groupe discret et $G\mathcal{H}$ désignant la catégorie des G homotopie des G-CW complexes avec points base.

Abstract

The subject of this thesis is the study of the notion of Hopfcity and Cohopfcity in this category of chain complexes of A-modules. In the chapter 1 the notions of categories and functors are studied to be surrunded in the following chapters. Some notions of homological algebra are reminded. In the chapter 2 we study projective, injective, hopfian, cohopfian chain complexes. The main result in this chapter is the following theorem : any projective and cohopfian or injective and hopfian chain complex of A-modules is a Fitting chain complex. In the chapter 3 we study quasi-projective, quasi-injective, strongly hopfian, strongly cohopfian chain complexes. The main result in this chapter 3 is the following theorem : any quasi-projective and strongly cohopfian or quasi-injective and strongly hopfian chain complex of A-modules is a Fitting chain complex. The chapter 4 is an investigation on the category of CW-complexes. The chapter 4 is dedicated the study of hopfian, cohopfian in the category on CW-complexes. We also study the category hopfian, cohopfian objects of H, the category of pointed path-connected CW-complexes.

0.1 Introduction

Le sujet de cette thèse est l'étude des notions de Hopficité et de Co-hopficité dans la catégorie des complexes .En général les notions d'hopfcité et de cohopcité sont surtout étudiées dans la catégorie des $A-$ modules. On s'est demandé est-il possible d'étudier ces notions dans la catégorie des suites complexes de $A-$ modules , ainsi que la forte hopfcité et la forte cohopfcité.Dans ce but on a utilisé certains outils de l'algèbre homologique. Cette thèse est ainsi structurée de la façon suivante :

Dans le chapitre 1 les notions de catégories et de foncteurs sont étudiées pour être investies dans les chapitres suivants. Le concept de catégorie est introduit puis accompagné d'exemples. Dans la deuxième section du chapitre 1, on étudie les foncteurs covariants et contravariants. Les transformations naturelles sont abordées, et suivies d'exemples. Le lemme de Yoneda est énoncé et démontré. Les foncteurs adjoints sont etudiés et des exemples sont donnés. On a abordé les foncteurs équivalents. Une caractérisation des foncteurs équivalents est démontrée et celle des foncteurs essentiellement surjectifs.

Dans le chapitre 2, nous étudions les objets $projectifs$,$injectifs$, $hopfiens$, $cohopfiens$ de la catégorie des complexes de $A-$modules notée $COMP$. Les objets de $COMP$ sont les suites complexes et les morphismes sont les chaines. Une suite complexe C est une suite de $A-$modules et d'homomorphismes de $A-$modules $C : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$ vérifiant $d_n \circ d_{n+1} = 0$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$
Une chaine f est définie par :

$$\begin{tikzcd}
C : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
C' : \ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où $d'_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}, \forall n \in \mathbf{Z}$

Dans ce chapitre on a démontré les résultats suivants :

1. Si C est une suite complexe avec E sous complexe non nul de C et C/E $hopfien$ alors C est $hopfien$

2. Si C est une suite complexe dont tout sous complexe propre est $cohopfien$ alors C est $cohopfien$

3. $C = \oplus C^i$ où (C^i) est une famille de de complexes alors les propositions suivantes sont équivalentes
   c_1)C est $hopfien$ (respectivement $cohopfien$)alors C_i est $hopfien$ (respectivement $cohopfien$)
   c_2)Si C^i est complètement invariant alors C est $hopfien$(respectivement $cohopfien$) si et seulement si C^i est $hopfien$ (respectivement $cohopfien$)

4. Si C est un complexe projectif et E un sous complexe complètement invariant et superflu de C alors E est $hopfien$ si et seulement si C/E est $hopfien$

5. Si C est un complexe injectif et E un sous complexe complètement invariant et essentiel
   de C alors E est $cohopfien$ si et seulement si C est $cohopfien$

6. Théorème : Si C est une suite complexe de A-modules alors on a

   - Si C est une suite projective et $cohopfienne$ alors C est $hopfienne$

   - Si C est une suite injective et $hopfienne$ alors C est $cohopfienne$

7. Théorème : Toute suite complexe *projective* et $cohopfienne$ ou *injective* et $hopfienne$ est une suite complexe de *Fitting*
   (Le chapitre 2 a fait l'objet d'un article publiée dans International Mathematical Forum)

Dans le chapitre 3, nous étudions les objets $fortement\ hopfiens$, $fortement\ cohopfiens$, $quasi-injectifs$, $quasi-projectifs$, de la catégorie $COMP$. On y étudie aussi les objets de Fitting de la catégorie des complexes.

On a démontré dans le chapitre 3 les résultats suivants :

1. Si C est une suite complexe fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne) et E une sous suite de C facteur direct de C alors E et C/E sont fortement hopfiennes (respectivement fortement cohopfienne)

2. Si E est une suite complexe complètement invariante avec E et C/E fortement hopfiennes alors (respectivement fortement cohopfiennes) alors C est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne)

3. $C = \oplus C^i$ où C^i est une suite complètement invariante
   Si C^i est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne)

alors C est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne)

4. Soit C est une suite complexe .C est une suite complexe quasi-projective si et seulement si chaque A-module de la chaine est quasi projectif

5. Soit C une suite complexe. C est une suite quasi-injective si et seulement si chaque A-module de la chaine est quasi-injectif

6. Soit C une suite complexe. Si C est une suite complexe quasi-injective fortement hopfienne alors C est une suite fortement cohopfienne

7. Soit C une suite complexe. Si C est une suite complexe quasi-projective fortement cohopfienne alors C est une suite fortement hopfienne

8. Toute suite complexe de A-modules quasi-projective et $cohopfienne$ ou $quasi-injective$ et $hopfienne$ est une suite complexe de FITTING.

(Le troisième chapitre a fait l'objet d'une publication dans Journal of Mathematics Research)

Le chapitre 4 est une investigation sur les $CW-$ complexes. On donne la définition du foncteur homologique H_n de la catégorie $COMP$ dans la catégorie Ab. On a aussi étudié les suites exactes de complexes. On a aussi énoncé et démontré le théorème portant sur l'homomorphisme de liaison permettant de transformer une suite exacte courte en suite exacte longue. Le lemme du serpent dans la catégorie $COMP$ est énoncé et démontré.
Ensuite on applique les notions de la première partie à l'homologie des $CW-$ complexes. Cela commence par des préliminaires sur les limites inductives et la notion d'homotopie.
La dernière partie du chapitre 4 est consacrée à l'étude des objets Hopfiens, objets Co-hopfiens dans la catégories des $G-$ $CW-$ complexes. Ainsi dans les deux sous sections qui vont suivre on étudie les objets Hopfiens, objets Co-Hopfiens de la catégorie $G\mathcal{H}$ où G est un groupe discret et $G\mathcal{H}$ désignant la catégorie des G homotopie des G-CW avec points base.

Chapitre 1

Catégories et Foncteurs

1.1 Introduction

Le chapitre 1 est un chapitre qui rassemble des résultats et rappels préliminaires à l'étude des chapitres 2, 3, et 4.
D'abord on y définit la notion de catégorie et on y donne des exemples de catégories utilisées dans les autres chapitres. Les notions de produit et de coproduit sont définies et aussi sont donnés des exemples de produit et coproduit. On a démontré dans la première section de ce chapitre que le produit de deux objets d'une catégorie est unique à isomorphisme près.
Dans la deuxième section du chapitre 1 on y aborde l'étude des foncteurs. On a défini la notion de foncteur et fourni des exemples de foncteurs covariants ou contravariants. La notion de transformation naturelle est définie et illustrée par plusieurs exemples. Le lemme de Yoneda est énoncé et démontré.Les foncteurs représentables sont définis. La notion de foncteurs adjoints est étudiée et renforcée à l'aide d'exemples traités. Les concepts de foncteurs fidèles,pleins, essentiels, pleinement fidèles sont définis. Cela a permis de caractériser les foncteurs pleinement fidèles. On a aussi abordé les notions de foncteurs d'équivalences de foncteurs,de foncteurs essentiels,essentiellement surjectifs. Ceci a permis la caractérisation des foncteurs équivalents

1.2 Catégories

Définition 1 *Une catégorie C est la donnée :*

1. *d'une classe d'objets notée $Ob(C\ )$*

2. *pour tout couple (X,Y) d'objets de C d'un ensemble noté $Hom_C(X,Y)$ dont les éléments sont appelés morphismes de X dans Y*

3. *pour tout triplet (X,Y,Z) d'objets de C d'une application $(f,g) \longrightarrow g \circ f$ de $Hom_C(X,Y) \times Hom_C(Y,Z)$ dans $Hom_C(X,Z)$,appelée morphisme composée,satisfaisant aux deux conditions suivantes :*
   - *Pour tout quadruplet (X,Y,Z,T) d'objets de C et pour tout triplet $(f,g,h) \in Hom_C(X,Y) \times Hom_C(Y,Z) \times Hom_C(Z,T)$ $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$*
   - *pour tout objet X de C ,il existe un morphisme $1_X \in Hom_C(X,X)$ appelé morphisme identité de X tel que*
     pour tout objet objet Y de C et pour $f \in Hom_C(X,Y)$, $f \circ 1_X = f$
     pour tout objet Y de C pour tout $g \in Hom_C(Y,X)$,$1_X \circ g = g$

Exemple 1

1. *Catégorie Ens des ensembles dont les objets sont les ensembles et les morphismes les applications*
2. *Catégorie Gr des groupes dont les objets sont les groupes et les morphismes sont les homomorphismes de groupes*
3. *Catégorie Ab des groupes abéliens dont les objets sont les groupes abéliens et les flèches sont les homomorphismes de groupes abéliens*
4. *Catégorie associée à un ensemble préordonné Soit $(E, \leq\ )$ un ensemble préordonné. On définit cette catégorie notée $\bar{E}$ comme suit :*
   - *$ob(\bar{E})=E$*
   - *Pour tout couple (X,Y) d'objets de $\bar{E}$ on pose $\bar{E}\ (X,Y)=t_X^Y$ si $X \leq Y$ sinon $\bar{E}\ (X,Y)=\emptyset$*

   - *La transitivité de la relation $\leq$ définit de façon unique la composition des morphismes puis la réflexivité et l'antisymétrie assurent l'existence et l'unicité du morphisme identité t_X^X pour tout objet X de $\bar{E}$*
5. *Catégorie $A-$ mod*
   Les objets de $A-$ Mod sont les $A-$ Mod à gauche et les morphismes sont les homomorphismes de $A-$ Mod

6. *Catégorie de matrices à coefficients dans un anneau A notée matr$A$:*
   - *ob(matr$A$)=N^**

- *Pour tout couple* $(m,n) \in N^* \times N^*$ *un morphisme de* m *dans* n *est une matrice à* m *lignes et* n *colonnes.*
- *Si* $f \in matrA(m,n)$ *et* $g \in matrA(n,p)$ *alors* $g \circ f = f \times g \in matrA(m,p)$.
- *La composition des matrices étant associative alors si* $f \in matrA(m,n)$, $g \in matrA(n,p)$, $h \in mAtrA(p,q)$ *alors* $h\circ(g\circ f)=f\times(g\times h)=(h\circ g)\circ f$.
- *Soit* $n \in ob(matrA)$ *le morphisme identité est la matrice unité d'ordre* n.

Définition 2 *Soient* A *et* B *deux objets d'une catégorie* $\mathcal{C}$. *Un produit de* A *et de* B *est un triplet*(P, p_A, p_B) *tel que :*

1. P *est un objet de* $\mathcal{C}$.
2. $p_A \in Hom_{\mathcal{C}}(P,A)$ *et* $p_B \in Hom_{\mathcal{C}}(P,B)$ *et tel que pour tout triplet* (Q, q_A, q_B) .
   - *a)* Q *est un objet de* $\mathcal{C}$.
   - *b)* $q_A \in Hom_{\mathcal{C}}(Q,A)$ *et* $q_B \in Hom_{\mathcal{C}}(Q,B)$ *il existe un unique morphisme* $r : Q \longrightarrow P$ *rendant le diagramme suivant suivant :*

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[ddl, "q_A"'] \arrow[ddr, "q_B"] \arrow[d, dashed, "r"] & \\
& P \arrow[dl, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Exemple 2 1. *Dans la catégorie Ens le produit de deux objets est leur produit cartésien*

2. *Dans la catégorie des groupes considérons* n *groupes tels que :* $(G_1, \star_1), (G_2, \star_2), \ldots, (G_n, \star_n)$.
   Le produit des n *groupes est défini par :*
   $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \star (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 \star_1 b_1, a_2 \star_2 b_2, \ldots, a_n \star_n b_n)$ *avec* $a_i, b_i \in G_i$.
3. *Soit* $(E, \leq)$ *un ensemble partiellement ordonné.* $\bar{E}$ *est une catégorie dont les objets sont les éléments de* E. *Soit* X, Y *deux objets de* $\bar{E}$ *alors :*
   $\bar{E}$ (X,Y)=t_X^Y *si* $X \leq Y$ *sinon* $\bar{E}$ (X,Y)=$\emptyset$
   Supposons $i = inf(X,Y)$. *Supposons* i' *vérifiant :*

$$\begin{tikzcd}
& i' \arrow[ddl] \arrow[ddr] \arrow[d, dashed] & \\
& i \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

Donc $i' \leq X$ et $i' \leq Y$ donc $i' \leq i$ donc $i' = i$ et la transitivité le diagramme commute ce qui achève la démonstration.

4. *Dans la catégorie $A-Mod$, le produit des $A-$ modules M_i où $i \in I$,est comme ensemble, le produit $\sqcap M_i$. l'application linéaire p_j :* $\begin{array}{rcl} \sqcap M_i & \rightarrow & M_j \\ x = (x_i)_i \in I & \mapsto & x_j \end{array}$

   où x_j est la j ième composante de x.

Proposition 1 *Dans une catégorie si le produit existe, alors il est unique à isomorphisme près*

Preuve *En conservant les notations de la définition précédente considérons deux cas :*

1. *Premier cas : Si $P = Q$ on obtient un unique morphisme $t : P \longrightarrow P$ tel que le diagramme précédent commute. Puisque 1_P fait commuter le diagramme alors il il est le seul.*
2. *Deuxième cas :Soit (P, p_A, p_B) et (Q, q_A, q_B) deux produits de A et de B Comme (Q, q_A, q_B) est un produit de A et B alors il existe un unique morphisme $q : Q \longrightarrow P$ tel que $p_A \circ q = q_A$ et $p_B \circ q = q_B$*
   On obtient en inversant les rôles de P et Q les deux résultats $q_A \circ p = p_A$ et $q_B \circ p = p_B$
   On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[d, bend right, "q"'] \arrow[ddl, "q_A"'] \arrow[ddr, "q_B"] & \\
& P \arrow[u, bend right, "p"'] \arrow[dl, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

Donc $p_A = q_A \circ p = p_A \circ q \circ p$
On a aussi $p_B = q_B \circ p = p_B \circ q \circ p$
On obtient $q \circ p : P \longrightarrow P$ est un morphisme qui fait commuter le diagramme précédent d'où $q \circ p = 1_P$

De même $q_A = p_A \circ q = q_A \circ p \circ q$
On a aussi $q_B = p_B \circ q = q_B \circ p \circ q$
On obtient $p \circ q : Q \longrightarrow Q$ est un morphisme qui fait commuter le diagramme précédent d'où $p \circ q = 1_Q$. Ainsi $P \cong Q$.

Définition 3 *Soient A et B deux objets d'une catégorie C. Un coproduit de A et de B est un triplet(S, S_A, s_B) tel que :*

1. *S est un objet de C.*
2. *$s_A \in Hom_C(A, S)$ et $s_B \in Hom_C(B, S)$ et tel que pour tout triplet (T, t_A, t_B) .*

- *T est un objet de C .*
- *$t_A \in Hom_C(A,T)$ et $t_B \in Hom_C(B,T)$ il existe un unique morphisme $r : S \longrightarrow T$ rendant le diagramme suivant suivant :*

$$\begin{tikzcd}
 & T & \\
 & S \arrow[u, dashed, "r"] & \\
A \arrow[uur, "t_A"] \arrow[ur, "s_A"'] & & B \arrow[uul, "t_B"'] \arrow[ul, "s_B"]
\end{tikzcd}$$

1.3 Foncteurs

Définition 4 *Soient C et $\mathcal{D}$ deux catégories. Alors la relation $F : C \longrightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur de C dans $\mathcal{D}$ si :*

1. *Pour chaque objet A de C il associe un unique objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$.*
2. *Pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ de C il associe un unique morphisme : $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ de $\mathcal{D}$.*
3. *Si on a deux morphismes de C telles que : $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Alors $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*
4. *$F(1_A) = 1_{F(A)}$.*

Définition 5 *Soient C et $\mathcal{D}$ deux catégories.*
Alors on dit que la relation $F : C \longrightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur contravariant de C dans $\mathcal{D}$ si :

1. *Pour chaque objet A de C il associe un unique objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$.*
2. *Pour tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ de C il associe un unique morphisme : $F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)$ de $\mathcal{D}$.*
3. *Si on a deux morphismes de C telles que : $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Alors $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.*
4. *$F(1_A) = 1_{F(A)}$.*

Exemple 3 *Exemples de foncteurs*

1. *Foncteur d'une catégorie C dans Ens noté $Hom(A,-)$ défini par pour tout objet A d'une catégorie C :*
   $Hom(A,)(B) = Hom(A,B)$, pour tout objet B de C
   pour tout morphisme $f \in Hom(B,B')$ de C, $Hom(A,)(f) = Hom(A,f)$ où $Hom(A,)(f)$ est noté f_* avec $f_*(h) = f \circ h$,pour tout $h \in Hom(A,B)$
   Soit $B \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} B''$ où f et g sont deux morphismes de C.

Comparons $(g\circ f)_*$ *et* $g_*\circ f_*$
Soit $\begin{array}{rcl}(g\circ f)_*: \ Hom(A,B) & \rightarrow & Hom(A,B'') \\ h & \mapsto & (g\circ f)_*(h)=(g\circ f)\circ h\end{array}$
D'autre part $(g_*\circ f_*)(h)=g_*(f_*(h))$ *or* $f_*(h)=f\circ h$

donc $(g_*\circ f_*)(h)=g\circ(f\circ h)$ *Avec l'associativité de la composition des applications on obtient :*
$g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ(h)=(g\circ f)_*(h)$ *on obtient* $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$
Posons $f=1_B$ *où* $1_B:B\longrightarrow B$.
Soit $(1_B)_*:h\longrightarrow 1_B\circ h=h$, *ceci pour tout* $h\in Hom(A,B)$
Ainsi $(1_B)_*=1_{Hom(A,B)}$.

2. *Foncteur d'une catégorie C dans Ens noté* $Hom(-,B)$ *défini par pour tout objet B de C*
   $Hom(-,B)(A)=Hom(A,B)$, *pour tout objet A de la catégorie C*
   pour tout morphisme $f\in Hom(C,C')$ *de* C $Hom(-,B)(f)=Hom(f,B)=f_*$ *avec* $f_*(h)=h\circ f$ *où* $h\in Hom(C'C)$
   Soit f,g,h *morphismes de C telles que :* $C\xrightarrow{f}C'\xrightarrow{g}C''\xrightarrow{h}B$
   Comparons $(g\circ f)_*$, $f_*\circ g_*$: $Hom(C'',B)\longrightarrow Hom(C,B)$
   D'abord $(g\circ f)_*(h)=h\circ(g\circ f)$
   D'autre part $(f_*\circ g_*)(h)=f_*(g_*(h))=f_*(h\circ g)=(h\circ g)\circ f$
   Comme $(h\circ g)\circ f=h(\circ g\circ f)$ *donc* $(g\circ f)_*=f_*\circ g_*$
   Posons $f=1_C$ *où* $1_C:C\longrightarrow C$
   $(1_C)_*:h\longrightarrow h\circ 1_C=h$ *ainsi* $(1_C)_*=1_{Hom(C,B)}$
   Ce qui précède prouve que $Hom(-,B)$ *est un foncteur contravariant.*
3. *Etant donné un R module* A_R,*il existe un foncteur* $F_A:R-Mod\longrightarrow Ab$ *noté* $A\otimes_R -$ *et défini par :*
   $F_A(B)=A\otimes_R B$ *et* $F_A(g)=1_A\otimes_R g$ *où* $g:B\longrightarrow B'$ *est un morphisme de R− modules*
   De même etant donné un R− module ${}_RB$,*il existe un foncteur* G_B : $Mod-R\longrightarrow Ab$ *noté* $-\otimes_R B$ *et défini par :*
   $G_B(A)=A\otimes_R B$ *et* $G_B(f)=f\otimes 1_B$ *où* $f:A\longrightarrow A'$ *est un morphisme de R− modules*
   Preuve :
   Démontrons que F_A *préserve le morphisme identité*
   En effet $F_A(1_B)=1_A\otimes 1_B$ *or* $1_A\otimes 1_B$ *transforme* $a\otimes b$ *en* $a\otimes b$ *d'où* $1_A\otimes 1_B=1_{A\otimes B}$.*Ainsi* $F_A(1_B)=1_{F_A(B)}$
   Démontrons que $F_A(g'\circ g)=F_A(g')\circ F_A(g)$
   $F_A(g'\circ g)=A\otimes(g'\circ g)=1_A\otimes(g'\circ g)=(1_A\otimes g')\circ(1_A\otimes g)=F_A(g')\circ F_A(g)$
   .

Définition 6 *Soit C une catégorie,on définit le foncteur identique* $1_C:C\longrightarrow C$ *par :*

$1_{\mathcal{C}}(A) = A$ *pour tout objet* A *de* $\mathcal{C}$*et* $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ *pour tout morphisme* $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ *et* $1_{\mathcal{C}}$ *est covariant*

Définition 7 *Soient* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *et* $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ *deux foncteurs de même variance. Alors la relation notée* $G \circ F$ *de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{E}$ *appelée foncteur composée de* F *suivie de* G *est définie par :*
$G \circ F(A) = G(F(A))$ *et* $G \circ F(f) = G(F(f))$, $G \circ F(1_A) = 1_{G \circ F(A)}$

Définition 8 *:*
Soient $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$ *deux catégories. Un foncteur* F *de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{D}$ *est un isomorphisme s'il existe*
un foncteur $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ *tel que* $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$ *et* $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$. *Les catégories* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$ *sont dites isomorphes.*

Définition 9 *Soient* F, G *deux foncteurs covariants de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{D}$*.Alors on appelle transformation naturelle ou morphisme fonctoriel la relation* $\tau : F \longrightarrow G$ *et la donnée pour tout objet* A *de* $\mathcal{C}$ *d'un objet* τ_A *de* $\mathcal{D}$ *tels que pour tout morphisme* $f : A \longrightarrow A'$ *le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(A') \arrow[r, "\tau_{A'}"] & G(A')
\end{tikzcd}$$

De plus τ *est dit isomorphisme fonctoriel si pour tout objet* A *de* $\mathcal{C}$, τ_A *est un isomorphisme de* $\mathcal{D}$

Définition et proposition 1 *La composition de deux transformations naturelles est une transformation naturelle*

Preuve *Soient deux catégories* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$. *Soient* $F, G, H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *trois foncteurs covariants.*
Soient les transformations naturelles τ, σ *telles que* $F \xrightarrow{\tau} G \xrightarrow{\sigma} H$. *Alors pour tout morphisme* $f : C \longrightarrow C'$ *de* $\mathcal{C}$ *on a les diagrammes suivants :*

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "F(f)"] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"] & G(C')
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
G(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "G(f)"] & H(C) \arrow[d, "H(f)"] \\
G(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"] & H(C')
\end{tikzcd}$$

On obtient :$\tau_{C'} \circ F(f) = G(f) \circ \tau_C$
et $\sigma_{C'} \circ G(f) = H(f) \circ \sigma_C$
En utilisant la dernière relation et en composant à droite τ_C *on a :*
$H(f) \circ \sigma_C \circ \tau_C = \sigma_{C'} \circ G(f) \circ \tau_C$ *or* $G(f) \circ \tau_C = \sigma_{C'} \circ F(f)$
Ainsi $H(f) \circ \sigma_C \circ \tau_C = \sigma_{C'} \circ \tau_{C'} \circ F(f)$.
En posant $\sigma_C \circ \tau_C = (\sigma \circ \tau)_C$ *pour tout* C *objet de* $\mathcal{C}$ *on a démontré que :* $\sigma \circ \tau : F \longrightarrow H$ *est un morphisme fonctoriel*

On note $Nat(F, G)$ la classe des transformations de naturelle de F dans G

Définition 10 *Soient* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$ *deux catégories et un foncteur* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. F *est appelée équivalence de catégories de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{D}$ *s'il existe un foncteur* $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ *et deux isomorphismes fonctoriels de* $G \circ F$ *dans* $1_{\mathcal{C}}$ *et de* $F \circ G$ *dans* $1_{\mathcal{D}}$

Remarque 1 *Dans le cas où les deux foncteurs sont contravariants on définit de la même manière la composée de morphismes fonctoriels.*

Exemple 4 *Exemple de transformation naturelle*
Soit A *un objet de de la catégorie Ens avec* $A = \{a\}$ *et deux foncteurs covariants* $Hom(A, -), 1_{Ens}$ *de Ens dans lui même. Soit* $\tau : Hom(A, -) \longrightarrow 1_{Ens}$ *tel que pour* X *objet de Ens on a* τ_X *est défini par :*

$$\begin{array}{rccc}
\tau_X : & Hom(A, X) & \rightarrow & 1_{Ens}(X) = X \\
& f & \mapsto & \tau_X(f) = f(a)
\end{array}$$

τ_X *est une est une application bijective* _ *Pour tout morphisme* h *de Ens tel que* $h : X \longrightarrow Y$ *considerons le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
Hom(A, X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "h_*"] & 1_{Ens}(X) \arrow[d, "1_{Ens}(h)"] \\
Hom(A, Y) \arrow[r, "\tau_Y"] & 1_{Ens}(Y)
\end{tikzcd}$$

Or $1_{Ens}(X) = X$ *et* $1_{Ens}(h) = h$ *donc le diagramme précédent devient :*

$$\begin{tikzcd}
Hom(A, X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "h_*"] & X \arrow[d, "h"] \\
Hom(A, Y) \arrow[r, "\tau_Y"] & Y
\end{tikzcd}$$

Comparons $h \circ \tau_X$ *et* $\tau_Y \circ h_*$
$(h \circ \tau_X)(f) = h(f(a)) = (h \circ f)(a)$
D'autre part $(\tau_Y \circ h_*)(f) = \tau_Y(h_*(f)) = \tau_Y(h \circ f) = (h \circ f)(a)$
D'où $h \circ \tau_X = \tau_Y \circ h_*$. *Ainsi* τ *est un isomorphisme fonctoriel.*

Lemme 1 *Lemme de Yoneda Soient* C *une catégorie quelconque et la catégorie* Ens .
Soit $G : C \longrightarrow Ens$ *un foncteur covariant.*
Alors pour tout objet A *de* C *il existe une bijection* $y :\ Nat(Hom_C(A,-),G) \ \rightarrow \quad G$
$\tau \ \mapsto \ y(\tau) = \tau_A(1_A)$
Où $Nat(Hom_C(A,-),G)$ *désigne la classe des transformations naturelles de* $Hom_C(A,-)$ *dans* C *et* A *est un objet de* C

Preuve *Soit* $\tau : Hom_C(A,-) \longrightarrow G$
Soit $1_A \in Hom(A,A)$ *on* $\tau_A(1_A) \in G(A)$ *comme* $y(\tau) = \tau_A(1_A)$ *d'où* y *est bien définie.*
Démontrons que y *est injective. Pour tout objet* B *il existe un morphisme* $\varphi \in Hom_C(A,B)$ *rendant commutatif les diagrammes suivants :*

$$\begin{tikzcd}
Hom_C(A,A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\varphi_*"] & G(A) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\
Hom_C(A,B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(A)
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
Hom_C(A,A) \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "\varphi_*"] & G(A) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\
Hom_C(A,B) \arrow[r, "\sigma_B"] & G(A)
\end{tikzcd}$$

On obtient d'après la commutativité du diagramme :
$G(\varphi) \circ \tau_A(1_A) = \tau_B \circ \varphi_*(1_A) = \tau_B(\varphi \circ (1_A)) = \tau_B(\varphi)$

et

$$\begin{tikzcd}
Hom_C(A,A) \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "\varphi_*"] & G(A) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\
Hom_C(A,B) \arrow[r, "\sigma_B"] & G(A)
\end{tikzcd}$$

On obtient d'après la commutativité du diagramme :
$G(\varphi) \circ \tau_A(1_A) = \tau_B \circ \varphi_*(1_A) = \tau_B(\varphi \circ (1_A)) = \tau_B(\varphi)$
Ce qui donne :$G(\varphi) \circ \tau_A(1_A) = \tau_B(\varphi)$
Soit $\sigma : Hom(A,-) \longrightarrow G$ *une autre transformation naturelle on obtient :*
$\sigma_B(\varphi) = G(\varphi) \circ \sigma_A(1_A)$
Supposons que $y(\tau) = y(\sigma)$ *on a* $\sigma_A(1_A) = \tau_A(1_A)$ *d'où* $G(\varphi)(\sigma_A(1_A)) = G(\tau_A(1_A))$

D'où $\sigma_B(\varphi) = \tau_B(\varphi)$ *ainsi* $\sigma_B = \tau_B$ *pour tout objet* B *de* $\mathcal{C}$*,finalement* $\sigma = \tau$ *ce qui établit que* y *est une injection*
Démontrons que y *est une surjection*
Pour $x \in G(A)$ *et* $\psi \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ *posons* $\tau_B(\psi) = G(\psi)(x)$ *donc* $G(\psi) : G(A) \longrightarrow G(B)$
Démontrons que τ *est une transformation naturelle.*
Si $\Theta : B \longrightarrow C$ *un morphisme de* $\mathcal{C}$ *Soit le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \arrow[r, "\tau_B"] \arrow[d, "\theta_*"] & G(B) \arrow[d, "G(\theta)"] \\
Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \arrow[r, "\tau_C"] & G(C)
\end{tikzcd}$$

Dans un sens le diagramme donne $\tau_B(\psi) = G(\psi)(x)$
en appliquant $G(\theta)$ *on obtient* $G(\theta)(\tau_B(\psi)) = G(\theta)(G(\psi)(x))$
Dans l'autre $\tau_C \circ \theta_*(\psi) = \tau_C(\theta \circ \psi) = G(\theta \circ \psi)(x)$
Comme G *est un foncteur* $G(\theta \circ \psi) = G(\theta) \circ G(\psi)$.
Par comparaison on on obtient : $G(\theta) \circ \tau_B = \tau_C \circ \theta_*$ *ainsi* τ *est une transformation naturelle*
On sait que $.\tau_B(\psi) = G(\psi)(x)$ *en posant* $B = A$ *et* $\psi = 1_A$
Donc $y(\tau) = \tau_A(1_A) = G(1_A)(x) = x$

Proposition 2 *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie avec* A *et* B *objets de* $\mathcal{C}$.

1. *Si* $\tau : Hom_{\mathcal{C}}(A, -) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(B, -)$ *est une transformation naturelle alors pour tout objet* C *de* $\mathcal{C}$ *on obtient :*
   $\tau_C = \psi^*$ *où* $\psi = \tau_A(1_A) : B \longrightarrow A$
   et le morphisme induit ψ^* *de :* $\begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{C}}(A, C) & \rightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ \psi \end{array}$
   Si $\tau_C = \theta^*$ *alors* $\theta = \psi$.
2. *Si* τ *et* σ *deux morphismes fonctoriels tels que :*
   $Hom_{\mathcal{C}}(A, -) \xrightarrow{\tau} Hom_{\mathcal{C}}(B, -) \xrightarrow{\sigma} Hom_{\mathcal{C}}(C, -)$. *Si* $\sigma_C = \eta^*$ *et* $\tau_C = \psi^*$ *alors* $(\sigma \circ \tau)_C = (\psi \circ \eta)^*$.
3. *Si* $Hom_{\mathcal{C}}(A, -)$ *et* $Hom_{\mathcal{C}}(B, -)$ *sont isomorphes alors* $A \simeq B$

Preuve 1. *Posons* $\psi = \tau_A(1_A) \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ *d'après le lemme de Yoneda pour tout* C *objet de* $\mathcal{C}$ *et tout* $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ *on a* $\tau_C(\varphi) = \varphi_*(\psi)$ *mais* $\varphi_*(\psi) = \varphi \circ \psi = \psi^*(\varphi)$

2. *D'après i) il existe un unique morphisme* $\psi \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ *et un unique morphisme* $\eta \in\in Hom_{\mathcal{C}}(B', B)$ *tels que* $\tau_C(\varphi) = \psi^*(\varphi)$ *et* $\sigma_C(\varphi') = \eta^*(\varphi')$
   Pour tout $\varphi \in Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ *et tout* $\varphi' \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ *on a :* $(\sigma \circ \tau)_C(\varphi) =$

$$\sigma_C(\psi^*(\varphi)) = \eta^* \circ \psi^*(\varphi) = (\psi \circ \eta)^*(\varphi)$$

3. *Si* $\tau : Hom_C(A,-) \longrightarrow Hom_C(B,-)$ *est un isomorphisme fonctoriel alors il un existe isomorphisme fonctoriel* $\sigma : Hom_C(B,-) \longrightarrow Hom_C(A,-)$ *tels que :* $\sigma \circ \tau = 1_{Hom_C(A,-)}$ *et* $\tau \circ \sigma = 1_{Hom_C(B,-)}$
   D'après i) il existe $\psi : B \longrightarrow A$ *et* $\eta : A \longrightarrow B$ *avec* $\tau_C = \psi^*$ *et* $\sigma_C = \eta^*$
   D'après iii) $\tau \circ \sigma = \psi^* \circ \eta^* = (\eta \circ \psi)^* = 1_B^*$
   Aussi $\sigma \circ \tau = (\psi \circ \eta)^* = 1_A^*$
   D'aprés l'unicité on obtient : $\psi \circ \eta = 1_A$ *et* $\eta \circ \psi = 1_B$ *d'où* $\eta : A \longrightarrow B$ *est un isomorphisme.*

Définition 11 *Foncteur représentable Soit C une catégorie quelconque. Alors le foncteur covariant* $F : C \longrightarrow Ens$ *est dit représentable s'il existe un isomorphisme fonctoriel de F dans* $F \simeq Hom_C(A,-)$ *pour tout objet A de C*

Définition 12 *foncteurs Adjoints Définition :*
Soit C et C′ deux catégories et F (respectivement) un foncteur covariant de C dans C′ (respectivement de C′ dans C). On dit que G est adjoint à droite de F et que F est adjoint à gauche de G, si pour tout couple d'objets (X,Y) *de* $C \times C'$*, il existe une bijection* $\phi_{X,Y}$ *de* $Hom_{C'}(F(X),Y)$ *sur* $Hom_C(X,G(Y))$ *telle que pour tout morphisme* $f : X \longrightarrow X'$ *de C et pour tout morphisme* $g : Y \longrightarrow Y'$ *de C′ les diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
Hom_{C'}(F(X'),Y) \arrow[r, "\phi_{X',Y}"] \arrow[d, "Hom_{C'}(F(f){,}Y)"] & Hom_C(X',G(Y)) \arrow[d, "Hom_C(f{,}G(Y))"] \\
Hom_{C'}(F(X),Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] & Hom_C(X,G(Y))
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
Hom_{C'}(F(X),Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "Hom_{C'}(F(X){,}g)"] & Hom_C(X,G(Y)) \arrow[d, "Hom_C(X{,}G(g))"] \\
Hom_{C'}(F(X),Y') \arrow[r, "\phi_{X,Y'}"] & Hom_C(X,G(Y'))
\end{tikzcd}$$

Exemple 5 *a)Les foncteurs Hom et ⊗ sont adjoints. Pour la preuve voir* [15]
b)Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors les foncteurs $S^{-}1()$*et* $Hom_A(S^{-}1(A),-)$ *sont adjoints. Pour la preuve voir* [5]

Définition 13 *Soient* $\mathcal{E}$ *,* $\mathcal{D}$ *deux catégories. Un foncteur F est dit isomorphisme s'il existe un foncteur* $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ *tels que* $G \circ F = 1_{\mathcal{D}}$*. On dit que* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{D}$ *sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{D}$

Définition 14 *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{D}$. F est appelée équivalence s'il existe un foncteur $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ et deux isomorphismes fonctoriels de $G \circ F$ dans et de $F \circ G$ dans $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$*

Définition 15 *foncteur fidèle, plein,pleinement fidèle*

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories et un foncteur covariant $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. F est dit fidèle (respectivement plein,respectivement pleinement fidèle) si l'application $F_{A,B} : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ est injective(respectivement surjective,respectivement bijective) telle que pour tout morphisme $f : X \longrightarrow X'$ de $\mathcal{C}$ et pour tout morphisme $g : Y \longrightarrow Y'$ de $\mathcal{C}'$

Proposition 3 *Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur pleinement fidèle. Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{C}$.Alors $F(f)$ est un isomorphisme si et seulement si f est un isomorphisme*

Preuve *Soit $f : A \longrightarrow B$ alors $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$*
Supposons $F(f)$ est un isomorphisme alors il existe un isomorphisme $h : F(B) \longrightarrow F(A)$ tel que $F(f) \circ h = 1_{F(B)}$ et $h \circ F(f) = 1_{F(A)}$
F étant pleinement fidèle il existe un unique morphisme $g : B \longrightarrow A$ tel que $F(g) = h$. Ainsi $F(f) \circ F(g) = 1_{F(B)}$ et $F(g) \circ F(f) = 1_{F(A)}$. Comme F est un foncteur covariant on obtient $F(f \circ g) = F(1_B)$ et $F(g \circ f) = F(1_A)$. Or F est fidèle on obtient $f \circ g = 1_B$ et $g \circ f = 1_A$.Par conséquent f est un isomorphisme
Réciproquement Supposons que $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}$ donc il existe un isomorphisme $g : B \longrightarrow A$ tels que $f \circ g = 1_B$ et $g \circ f = 1_A$. Donc $F(g \circ f) = F(1_A) = 1_{F(A)}$ et $F(f \circ g) = F(1_B) = 1_{F(B)}$. Comme F est un foncteur covariant on obtient $F(g) \circ F(f) = 1_{F(A)}$ et $F(f) \circ F(g) = 1_{F(B)}$ d'où $F(f)$ est un isomorphisme.

Définition 16 *foncteur essentiellement surjectif Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. F est essentiellement surjectif si pour tout objet D de $\mathcal{D}$ il existe un objet C de $\mathcal{C}$ tels que $F(C) \simeq D$*

Proposition 4 *Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Alors F est un équivalence si et seulement F pleinement fidèle et essentiellement surjectif.*

Preuve *Supposons que $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est une équivalence donc il existe un foncteur $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ et un isomorphisme fonctoriel $\phi : F \circ G \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$. Ainsi pour tout objet A de $\mathcal{D}$ on a $F \circ G(A) \simeq A$ d'où $F(G(A)) \simeq A$ et en posant $G(A) = A'$ on obtient $F(A') \simeq A$ ce qui établit que F est essentiellement surjective.*
Démontrons que F est fidèle.
Il suffit d'établir l'injectivité de l'application $F_{A,B}$: $\begin{array}{ccc} Hom(A, B) & \to & Hom(F(A), F(B)) \\ f & \mapsto & F(f) \end{array}$

Supposons $F(f) = F(g)$ donc $G \circ F(f) = G \circ F(g)$ or $\phi : F \circ G \longrightarrow 1_C$ est un isomorphisme fonctoriel donc le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
G \circ F(A) \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "G\circ F(f)"] & A) \arrow[d, "f"] \\
G \circ F(B) \arrow[r, "\phi_B"] & B
\end{tikzcd}$$

Ainsi $\phi_B \circ G \circ F(f) = \phi_B \circ G \circ F(g)$ d'après la commutativité du diagramme $f \circ \phi_A = \phi_B \circ G \circ F(f)$ donc $f \circ \phi_A = g \circ \phi_A$ or ϕ_A est un isomorphisme donc $f = g$ ce qui établit que F est fidèle
Démontrons que F est plein.
Soit $g \in Hom(F(A), F(B))$ on a alors $G(g) : G \circ F(A) \longrightarrow G \circ F(B)$. Posons $f = \phi_B \circ G(g) \circ {\phi_A}^{-1}$ ce qui donne $f \circ \phi_A = \phi_B \circ G(g)$ alors $\phi_B \circ G \circ F(f) = \phi_B \circ G(g)$ $G \circ F(f) = G(g)$ comme G est fidèle on obtient $F(f) = g$ d'où F est plein cela entraine que F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.
Supposons que F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif alors considérons le foncteur $G : \mathcal{D} \longrightarrow C$ défini pour tout objet A' de $\mathcal{D}$,il existe A de C tel que $F(A) \simeq A'$ car F est essentiellement surjectif.
Posons $G(A') = A$
Soit $f' : A' \longrightarrow B'$ un morphisme de $\mathcal{D}$ alors il existe deux morphismes : $\phi_{A'} : F(A) \longrightarrow A'$, $\phi_{B'} : F(B) \longrightarrow B'$ et ${\phi_{B'}}^{-1} \circ f' \circ \phi_{A'} \in Hom(F(A), F(B))$.
F étant pleinement fidèle il existe un unique morphisme $f \in Hom(A, B)$ tel que $F(f) = {\phi_{B'}}^{-1} \circ f' \circ \phi_{A'}$. Posons $G(f') = f$
Démontrons qu'il existe deux transformations naturelles $\phi : G \circ F \longrightarrow 1_C$ et $\phi' : F \circ G \longrightarrow 1_{\mathcal{D}}$
Soit A un objet de C on a $G \circ F(A) = G(F(A)) \simeq A$.
Posons $\phi_A : G \circ \phi_A = A \longrightarrow A$, $\phi_A = 1_A$, pour tout objet A de C
Soit $f : A \longrightarrow B$ où $f \circ 1_A = 1_B \circ f$ donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
G \circ F(A) \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "G\circ F(f)"] & A) \arrow[d, "f"] \\
G \circ F(B) \arrow[r, "1_B"] & B
\end{tikzcd}$$

est commutatif par conséquent il existe un isomorphisme fonctoriel
de $G \circ F \longrightarrow 1_C$

Soit A' un objet de $\mathcal{D}$ alors il existe de C tels que $G(A') = A$ $F(A) \simeq A$, $F(G(A')) = F(A) \simeq A'$ donc il existe un isomorphisme $\phi'_{A'} : F \circ G(A') \longrightarrow A'$
Soit $f' : A' \longrightarrow B'$ avec $G(f') = f$ et $F(f) = {\phi'_{B'}}^{-}1 \circ f' \circ \phi'_{A'}$ et le diagramme

suivant

$$\begin{tikzcd}
G \circ F(A') \arrow[r, "\phi'_{A'}"] \arrow[d, "G\circ F(f')"] & A') \arrow[d, "f'"] \\
G \circ F(B') \arrow[r, "\phi'_{B'}"] & B'
\end{tikzcd}$$

et il existe $\phi' : F \circ G \longrightarrow 1_{\mathcal{D}}$ *un isomorphisme fonctoriel.*

Définition 17 *Soit* $F : C \longrightarrow C'$ *un foncteur.* F *est surjective si pour tout* X' *de* C' *il existe un objet* X *de* C *tels que* $F(X) = X'$

Soit $F : C \longrightarrow C'$ *un foncteur.* F *est dit surjectif si pour tout* X' *de* C' *il existe un objet* X *de* C *tel que* $F(X) = X'$

Définition 18 *Soit* $F : C \longrightarrow C'$ *un foncteur.* F *est essentiellement injectif(respectivement injectif) si pour tout objet* X, X' *de* C *si* $F(X) = F(X') \Leftrightarrow X \simeq X'$ *(respectivement* $X = X'$ *)*

Soit $F : C \longrightarrow C'$ *est dit bijective ou bien dense si* F *est surjective et injective.*

Proposition 5 *Soit* $F : C \longrightarrow C'$*. Alors* F *est un isomorphisme si et seulement si* F *est dense et pleinement fidèle.*

Chapitre 2

Objets Hopfiens,Objets cohopfiens dans la catégorie des COMPLEXES

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les objets $projectifs$,$injectifs$, $hopfiens$, $cohopfiens$ de la catégorie des complexes de $A-$modules notée $COMP$. Les objets de $COMP$ sont les suites complexes et les morphismes sont les chaines.

Une suite complexe C est une suite de $A-$modules et d'homomorphismes de $A-$modules $C : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$ vérifiant $d_n \circ d_{n+1} =$ 0,pour tout $n \in \mathbf{Z}$
Une chaine f est définie par :

$$\begin{tikzcd}
C : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
C' : \ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où $d'_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}$
Soit C un objet de COMP et f un morphisme de C dans lui même.C est hopfien(respectivementcohopfien)
si tout épimorphisme(respectivement monomorphisme) est un isomorphisme
Une suite complexe est dite complétement invariante si chaque A-module de la chaine est complétement invariant.
Une suite complexe est dite essentielle(respectivement superflue) si chaque A-module de la chaine est essentielle(respectivement superflu).
Une suite complexe C est dite de $Fitting$ si pour toute chaine f de C dans C ,il existe un entier n tel $C = Imf^n \oplus Kerf^n$

Dans la section 3 on a démontré les résultats suivants :

1. Si C est une suite complexe avec E sous complexe non nul de C et C/E *hopfien* alors C est *hopfien*.
2. Si C est une suite complexe dont tout sous complexe propre est *cohopfien* alors C est *cohopfien*.
3. $C = \oplus C_i$où (C_i) est une famille de de complexes alors les propositions suivantes sont équivalentes.
    - i) C est *hopfien* (respectivement *cohopfien*)alors C_i est *hopfien* (respectivement *cohopfien*).
    - ii) Si C_i est complétement invariant alors C est *hopfien*(respectivement *cohopfien*) si et seulement si C_i est *hopfien* (respectivement *cohopfien*).

Dans la section 4 on a démontré les résultats suivants :

1. Si C est un complexe projectif et E un sous complexe complétement invariant et superflu de C alors E est *hopfien* si et seulement si C/E est *hopfien*.
2. Si C est un complexe injectif et E un sous complexe complètement invariant et essentiel.
   de C alors E est *cohopfien* si et seulement si C est *cohopfien*.
3. Théorème : Si C est une suite complexe de A-modules alors on a
    - c_1) Si C est une suite projective et *cohopfienne* alors C est *hopfienne*.
    - c_2) Si C est une suite injective et *hopfienne* alors C est *cohopfienne*.
4. Théorème : Toute suite complexe *projective* et *cohopfienne* ou *injective* et *hopfienne* est une suite complexe de *Fitting*.

Dans ce chapitre A désigne un anneau associatif unitaire non nécessairement commutatif et M désigne un $A-$ module à gauche unifére.

2.2 Définitions et Résultats Préliminaires sur la catégorie *COMP*

2.2.1 Catégorie *COMP*

Définition et proposition 2 .*La catégorie des complexes de $A-$modules notée $COMP$ est la catégorie dont les objets sont les suites d'homomorphismes (d_n) de A modules à gauche notée*
$(C, d) : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$
vérifiant $d_n \circ d_{n+1} = 0$,pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et les morphismes sont les chaines. Une chaine $f : (C, d) \to (C', d')$ est une suite d'homomorphismes (f_n) de $A-$

modules à gauche :

$$\begin{tikzcd}
(C,d): \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
(C',d'): \ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

vérifiant $d'_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}$, *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

Remarque 2 *On appelle complexe nul le complexe* (C_n, d_n) *où* $C_n = 0$ *et* d_n *est le morphisme nul,* $\forall n \in \mathbb{Z}$

Soit f et g deux chaines du complexe (C,d) vers (C',d')
On appelle somme des morphismes f et g la chaine définie par $f + g = (f_n + g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$
où $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $g = (g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

Preuve *Soit le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n+g_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}+g_{n-1}"] \\
C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

On a :
$d'_n \circ (f_n + g_n) = d'_n \circ f_n + d'_n \circ g_n$
or $d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$ *et* $d'_n \circ g_n = g_{n-1} \circ d_n$
ainsi $d'_n \circ (f_n + g_n) = (f_{n-1} + g_{n-1}) \circ d_n$
ce qui prouve que $f + g$ *est une chaine de* (C,d) *vers* (C',d')

Proposition 6 *Soient* (C,d) *et* (C',d') *deux suites complexes de* $A-$ *modules à gauche*
Alors on construit la suite somme directe des complexes (C,d) *et* (C',d') *notée par*$(C \oplus C', d \oplus d')$ *de la manière suivante :*
$(C \oplus C')_n = C_n \oplus C'_n$ *et* $(d \oplus d')_n = d_n \oplus d'_n$, *où*
$d_n \oplus d'_n : C_n \oplus C'_n \to C_{n-1} \oplus C'_{n-1}$
$(x_n, x'_n) \to (d_n(x_n), d'_n(x'_n))$

Preuve *C'est clair que* $d_n \oplus d'_n$ *est un morphisme.Démontrons que* $(d_n \oplus d'_n) \circ (d_{n+1} \oplus d'_{n+1}) = 0$
On sait que $(d_{n+1} \oplus d'_{n+1})(x_{n+1}, x'_{n+1}) = (d_{n+1}(x_{n+1}), d'_{n+1}(x'_{n+1}))$

D'où $(d_n \oplus d'_n) \circ ((d_{n+1} \oplus d'_{n+1})(x_{n+1}, x'_{n+1})) = (d_n \circ d_{n+1}(x_{n+1}), d'_n \circ d'_{n+1}(x'_{n+1}))$
Or $d_n \circ d_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ *et* $d'_n \circ d'_{n+1}(x'_{n+1}) = 0$
D'où $(d_n \oplus d'_n) \circ (d_{n+1} \oplus d'_{n+1}) = 0$, *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

Proposition 7 *Soient* (C, d) *une suite complexe de* A*-modules et* (E_n) *une famille de* A*-modules telle que pour tout* n, E_n *est un sous module de* C_n*. Alors :*
-Si $d_n(E_n) \subseteq E_{n-1}$ *donc la suite des morphismes induits* $(d_n : E_n \to E_{n-1})$ *est une suite complexe de* $A-$ *modules notée* (E, d) *et appelée sous complexe de* (C, d)
-La suite $(i_n : E_n \to C_n)$ *des monomorphismes canoniques constitue une chaine* $i : (E, d) \to (C, d)$.

Preuve

- Posons $\delta_n : E_n \to E_{n-1}$ *l'induit de* d_n*, démontrons que* δ_n *est bien définie :*
Soit $x \in E_n$*, donc* $d_n(x) \in E_{n-1}$ *d'où* δ_n *est bien définie*
δ_n *est un morphisme car composée de deux morphismes*
Vérifions que $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$
Soit $x \in E_{n+1}$*, alors* $\delta_{n+1}(x) = d_{n+1}(x) \in E_n$ *et* $\delta_n((d_{n+1})(x)) = d_n \circ d_{n+1}(x) = 0$ *donc* $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$*, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$
Ainsi (E, δ) *la suite des morphismes induits* $(d_n : E_n \to E_{n-1})$ *est une suite complexe.*
-Démontrons que $i : (E, \delta) \to (C, d)$ *est une chaine.*

$$\begin{tikzcd}
E : \ldots \arrow[d, "i"'] \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] \arrow[d, "i_{n+1}"'] & E_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "i_n"'] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "i_{n-1}"'] & \ldots \\
C : \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Soit $x \in E_{n+1}$*, alors* $\delta_{n+1}(x) = d_{n+1}(x)$ *donc* $i_n \circ \delta_{n+1}(x) = i_n(d_{n+1}(x)) = d_{n+1}(x)$
D'autre part pour $x \in E_{n+1}$ *on a* $i_{n+1}(x) = x$ *alors* $d_{n+1} \circ i_{n+1}(x) = d_{n+1}(x)$
D'où pour tout $x \in E_{n+1}$ *on a* $i_n \circ \delta_{n+1}(x) = d_{n+1} \circ i_{n+1}(x)$
Ainsi $i : (E, \delta) \to (C, d)$ *est une chaine c'est à dire que* $i : (E, d) \to (C, d)$

Proposition 8 *Soient* $(C, d) : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$ *une suite complexe et*

$$(E, d) : \ldots \to E_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} E_n \overset{d_n}{\to} E_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$$

,

$$(F, d) : \ldots \to F_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} F_n \overset{d_n}{\to} F_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$$

deux sous suites complexes de C
Alors on a la sous suite complexe notée :
$E \sqcap F : \ldots \rightarrow E_{n+1} \sqcap F_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\rightarrow} E_n \sqcap F_n \overset{d_n}{\rightarrow} E_{n-1} \sqcap F_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\rightarrow} \ldots$
Cette suite est appelée l'intersection des deux sous- suites E et F.

Preuve *Nous avons E et F sous- suites de C alors on a : $d_n(E_n) \sqsubseteq E_{n-1}$ et $d_n(F_n) \sqsubseteq F_{n-1}$*
donc $d_n(E_n \sqcap F_n) \sqsubseteq d_n(E_n) \sqsubseteq E_{n-1}$
et $d_n(E_n \sqcap F_n) \sqsubseteq d_n(F_n) \sqsubseteq F_{n-1}$
d'où $d_n(E_n \sqcap F_n) \sqsubseteq E_{n-1} \sqcap F_{n-1}$
Ainsi $E \sqcap F$ est une sous suite complexe appelée l'intersection de E et F.

Proposition 9 *Soit f une chaine de (C, d) vers (C', d'). Posons $kerf = (kerf_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la famille des sous $A-$ modules à gauche*
$kerf : \ldots \rightarrow kerf_{n+1} \overset{\Delta_{n+1}}{\rightarrow} kerf_n \overset{\Delta_n}{\rightarrow} kerf_{n-1} \rightarrow \ldots$
avec $\Delta_n(x) = d_n(x)$,pour $x \in kerf_n$
Alors $(kerf, \Delta)$ est un sous complexe de (C, d).

Preuve *Preuve*

$$\begin{tikzcd}
C : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
C' : \ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

On a : $\Delta_{n+1} : kerf_{n+1} \rightarrow kerf_n$
.vérifions que Δ_{n+1} est bien définie ,soit $x \in kerf_{n+1}$ donc $f_{n+1}(x) = 0$
donc $d'_{n+1} \circ f_{n+1}(x) = 0$
Comme le diagramme est commutatif :
$d'_{n+1} \circ f_{n+1}(x) = f_n \circ d_{n+1}(x) = 0$ d'où $d_{n+1}(x) \in kerf_n$
Or $\Delta_{n+1}(x) = d_{n+1}(x)$ donc $\Delta_{n+1}(x) \in Kerf_n$.
D'autre part si $x = y$ alors $d_{n+1}(x) = d_{n+1}(y)$ alors $\Delta_{n+1}(x) = \Delta_{n+1}(y)$, ainsi Δ_{n+1} est bien définie et c'est clair que c'est un morphisme
Calculons $\Delta_n \circ \Delta_{n+1}$
pour $x \in kerf_{n+1}$ on a $\Delta_n \circ \Delta_{n+1}(x) = \Delta_n(d_{n+1}(x)) = d_n \circ d_{n+1}(x)$ d'où $\Delta_n \circ \Delta_{n+1} = 0$

Proposition 10 *Soient f une chaine de (C, d) vers (C', d').*
Alors on a la suite complexe $(Imf, \alpha) = (Imf_n, \alpha_n)$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\alpha_n : Imf_n \rightarrow Imf_{n-1}$ avec $\alpha_n(y) = d'_n(y)$

$$((Imf,\alpha):\ldots\to Imf_{n+1}\overset{\alpha_{n+1}}{\to} Imf_n \overset{\alpha_n}{\to} Imf_{n-1}\to\ldots)$$

qui est un sous complexe de (C',d')

Preuve

Soit $\alpha_{n+1} : Imf_{n+1} \to Imf_n$

$$\begin{array}{ccc} Imf_{n+1} & \to & Imf_n \\ y & \mapsto & d'_{n+1}(y) \end{array}$$

..Soit $y \in Imf_{n+1}$ *donc il existe* $x \in C_{n+1}$ *tel que* $f_{n+1}(x) = y$ *donc* $d'_{n+1} \circ f_{n+1}(x) = d'_{n+1}(y)$
or $d'_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}$ *d'où* $d'_{n+1}(y) = f_n(d_{n+1}(x))$
D'où $\alpha_{n+1}(y) = d'_{n+1}(y) \in Imf_n$
ainsi α_{n+1} *a bien un sens*
...Si y=y',$d'_{n+1}(y) = d'_{n+1}(y')$ *d'où* $\alpha_{n+1}(y) = \alpha_{n+1}(y')$
....Calculons $\alpha_n \circ \alpha_{n+1}$
Soit $y \in Imf_{n+1}$ *donc* $\alpha_{n+1}(y) = d'_{n+1}(y)$
$\alpha_n \circ \alpha_{n+1}(y) = \alpha_n(d'_{n+1}(y))$ *comme* $\alpha_n(x) = d'_n(x)$ *on obtient* $\alpha_n \circ \alpha_{n+1}(y) = d'_n \circ d'_{n+1}(y)$
Ainsi $\alpha_n \circ \alpha_{n+1} = 0$
ce qui prouve que (Imf,α)*est un sous complexe de* (C',d')

Proposition 11 *Soit* (E,δ) *un sous complexe de* (C,d) *.Posons*$K = (K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *où* $K_n = C_n|E_n$ *.Alors* $(K,\alpha))$ *est une suite complexe appelée complexe quotient de C par E notée* C/E *où* $\alpha = (\alpha_n)$ *avec* $\alpha_n : K_n \to K_{n-1}$

Preuve

Soit $p_n : C_n \to K_n$ *la surjection canonique*
On pose $\alpha_n = p_{n-1} \circ d_n \circ p_n^{-1}$
$K_n \overset{p_n^{-1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{p_{n-1}}{\to} K_{n-1}$
$\bar{y} \to y \to d_n(y) \to p_{n-1}(d_n(y))$
$\alpha_n(\bar{y}) = p_{n-1} \circ d_n \circ p_n^{-1}(\bar{y})$
..Montrons que α_n *a bien un sens*
Soit $\bar{y} \in K_n$ *donc* $p_n^{-1}(\bar{y}) \in C_n$ *alors* $d_n(p_n^{-1}(\bar{y})) \in C_{n-1}$ *et* $p_{n-1}(d_n(p_n^{-1}(\bar{y}))) \in K_{n-1}$
...Démontrons que α_n *est bien définie*
Soit $\bar{y} = \bar{y}'$*donc* $\bar{y} - \bar{y}' = \bar{0}$ *d'où* $\overline{y - y'} = \bar{0}$ *donc* $y - y' \in Kerp_n = E_n$
donc $p_{n-1} \circ d_n(y - y') = 0$
Ce qui donne $p_{n-1} \circ d_n(y) - p_{n-1} \circ d_n(y') = 0$

D'où $p_{n-1}\circ d_n(y)=p_{n-1}\circ d_n(y')$ *d'où* $p_{n-1}\circ d_n\circ p_n^{-1}(\bar{y})=p_{n-1}\circ\alpha_n\circ p_n^{-1}(\bar{y'})$
d'où $\alpha_n(\bar{y})=\alpha_n(\bar{y'})$ *ainsi* α_n *est bien définie*
..Démontrons que $\alpha_n\circ\alpha_{n+1}=0$
$\alpha_n=p_{n-1}\circ d_n\circ p_n^{-1}$ *et* $\alpha_{n+1}=p_n\circ d_{n+1}\circ p_{n+1}^{-1}$
$\alpha_n\circ\alpha_{n+1}=(p_{n-1}\circ d_n\circ p_n^{-1})\circ(p_n\circ d_{n+1}\circ p_{n+1}^{-1})$
$\alpha_n\circ\alpha_{n+1}=p_{n-1}\circ d_n\circ(id_{C_n})\circ d_{n+1}\circ p_{n+1}^{-1}$
D'où $\alpha_n\circ\alpha_{n+1}=p_{n-1}\circ(d_n\circ d_{n+1})\circ p_{n+1}^{-1}=0$ *Enfin* $\alpha_n\circ\alpha_{n+1}=0$
Donc (K,α) *est le complexe quotient de*C *par* E

Corollaire 1 *Soit* $f:(C,d)\to(C',d')$ *une chaine.Alors le complexe quotient* C'/Imf
est appelé le conoyau de f *et noté* $coker f=(coker f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

Preuve Imf *est un sous complexe de* C' *Soit* $\alpha_n: Imf_n\to Imf_{n-1}$
$y\to\alpha_n(y)=d'_n(y)$

Soit $\begin{array}{lll} u'_n: & C_n/Imf_n & \to & C'_{n-1}/Imf_{n-1} \\ & \bar{z} & \to & u'_n(\bar{z}) \end{array}$

En posant $K'_n=C'_n/Imf_n$ *et* $p'_n:C'_n\to K'_n$ *surjection canonique*
on aura $u'_n(\bar{z})=p'_{n-1}\circ d'n\circ {p'_n}^{-1}(\bar{z})$
u'_n *est bien définie d'après la proposition 2.0.6 et* (K',u') *est une suite complexe*

Corollaire 2 *Soit* f *une chaine de* (C,d) *vers* (C',d')*.Le complexe* $C/Kerf$ *est appelé coimage de* f *et noté* $coimf$

Preuve

On pose : $\Delta_n: kerf_n\to kerf_{n-1}$ *avec* $\Delta_n(x)=d_n(x), x\in kerf_n$ *pour tout* $n\in\mathbb{Z}$
On pose $K_n=C_n/kerf_n$ *et* $K_n\overset{p_n^{-1}}{\to}C_n\overset{d_n}{\to}C_{n-1}\overset{p_{n-1}}{\to}K_{n-1}$ *et* $\beta_n=p_{n-1}\circ d_n\circ p_n^{-1}$
$\beta_n:K_n\to K_{n-1}$ *a bien un sens et est bien définie et vérifie* $\beta_n\circ\beta_{n+1}=0$*.Ainsi* (K,β) *est un complexe*

Théorème 1 *Caractérisation d'un monomorphisme de COMP Soit* f *une chaine de* (C,d) *vers* (C',d').
Alors f *est un monomorphisme de COMP si et seulement si* $Kerf=0$

Preuve *Supposons que* f *est un monomorphisme de* (C,d) *vers* (C',d') *donc* $f\circ u=f\circ v$ *entraine* $u=v$ *donc pour tout* $n\in\mathbb{Z}$ $f_n\circ u_n=f_n\circ v_n$ *entraine* $u_n=v_n$ *d'où*f_n *est un monomorphisme* $kerf_n=0$, *pour tout* $n\in\mathbb{Z}$ *d'où* $kerf=0$
Réciproquement supposons $kerf=0$ *donc* $kerf$ *est un complexe nul donc chacune de ses composantes est nulle d'où* f_n *est un monomorphisme de A-modules donc pour tout* $n\in\mathbb{Z}$ *cela donne si* $f_n\circ u_n=f_n\circ v_n$ *alors* $u_n=v_n$ *ainsi* $(f\circ u)_n=(f\circ v)_n$ *entraine* $(u)_n=(v)_n$ *en définitive* f *est un monomorphisme de suites complexes*

Théorème 2 *Soit $f : (C,d) \to (C',d')$ un morphisme de suites complexes.Alors f est un épimorphisme de suites complexes si et seulement si$Imf = C'$*

Preuve *Supposons que f est un épimorphisme de COMP alors $u \circ f = v \circ f$ entraine $u = v$ donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $(u \circ f)_n = (v \circ f)_n$ entraine $u_n = v_n$ donc f_n est un épimorphisme de A-modules donc $Imf_n = C'_n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ d'où $Imf = C'$*

Réciproquement supposons $Imf = C'$ donc,pour tout $n \in \mathbb{Z}$,$Imf_n = C'_n$ d'où f_n est un épimorphisme de A-modules ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$,$u_n \circ f_n = v_n \circ f_n$ alors $(u \circ f)_n = (v \circ f)_n$ entraine $u_n = v_n$ d'où f est un épimorphisme de suites complexes

Corollaire 3 *Soit une chaine $f : (C,d) \to (C',d')$ est une suite d'homomorphismes (f_n) de $A-$ modules à gauche :*

$$\begin{tikzcd}
(C,d) : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
(C',d') : \ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Alors f est un isomorphisme de Comp si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, f_n est un isomorphisme de $A-$ modules

Preuve *Comme f est un monomorphisme (respectivement est un épimorphisme) si et seulement si $Kerf = 0$ (respectivement $Imf = 0$)cela équivaut à f est un isomorphisme donc $Kerf_n = 0$ donc f_n est un monomorphisme et $Imf_n = 0$ donc f_n est un épimorphisme ainsi cela équivaut f_n est un isomorphisme de $A-$ modules.*

Théorème 3 *Théorèmes d'isomorphismes dans la catégorie Comp*
1)1er théorème d'isomorphisme : Soit f une chaine de complexes de (C,d) vers (C',d') telle que :

$$\begin{tikzcd}
(C,d) : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
(C',d') : \ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Alors il existe un isomorphisme θ :$C/Kerf \longrightarrow Imf$ rendant le diagramme *suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & imf \arrow[r, hook, "i"] & C' \\
& C/kerf \arrow[ur, "\theta"'] & &
\end{tikzcd}$$

2)2eme théorème d'isomorphisme : Soient E et F deux sous complexes du complexe (C, d) alors les complexes $E/(E \cap F)$ et $(E+F)/F$ sont isomorphes
3) 3eme théorème d'isomorphisme : Soient trois suites complexes de $A-$ modules E, F, C vérifiant :$E \sqsubseteq F \sqsubseteq C$. Alors $(C/E)/(F/E)$ isomorphe à C/F

Preuve *1) Soit f une chaine de complexes de (C, d) vers (C', d') telle que :*

$$\begin{tikzcd}
(C,d): \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
(C',d'): \ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

D'après le corollaire précédent il suffit de démontrer pour tout $n \in \mathbb{Z}$,qu'il existe un isomorphisme θ_n vérifiant :

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[rr, "f_n"] \arrow[dr, "\pi_n"'] & & imf_n \arrow[r, hook, "i_n"] & C'_n \\
& C_n/kerf_n \arrow[ur, "\theta_n"'] & &
\end{tikzcd}$$

Or ce résultat est vrai dans la catégorie des modules.
2) Soient E et F deux sous complexes du complexe (C, d)
Soit $\pi : C \longrightarrow C/E$ l'épimorphisme canonique et on obtient $Ker\pi = E$ et soit h la restriction de π à F où $h : F \longrightarrow C/E$ avec $kerh = F \cap E$ et $Imh = (E+F)/E$ ainsi d'après le premier théorème d'isomorphisme $E/kerh$ isomorphe à Imh. Or $E/Kerh = E/(E \cap F$ et $Imh = (E+F)/E$
3)Soit la chaine $\pi : C/E \longrightarrow C/F$
on a $Ker\pi = F/E$ et $Im\pi = C/F$
En utilisant le premier théorème d'isomorphisme on a :$(C/E)/(Ker\pi) = Im\pi$.
Ce qui établit le théorème

2.3 objets *hopfiens* objets *cohophiens* objets injectifs-objets projectifs dans la catégorie *COMP*

Définition 19 *Soit C un objet de la catégorie $COMP$.Alors C est dit simple s'il est non nul et son seul sous complexe c'est lui même*

Définition 20 *Soit C un objet de $COMP$ et f une chaine de C dans lui même. Alors C est dit $hopfien$ (respectivement $cohopfien$) si tout épimorphisme f (respectivement tout monomorphisme) est un isomorphisme*

Proposition 12 *Tout complexe simple est $hopfien$ et $cohopfien$*

Preuve *Soit C un objet simple de $COMP$ cela équivaut à $\forall n \in \mathbf{Z}, C_n$ est simple Supposons f_n surjectif On obtient $imf_n = C_n$ et $C_n \neq 0$ supposons $kerf_n \neq 0$ alors $kerf_n$ est un sous module deC_n différent de 0 et de C_n ce qui contredit l'hypothèse C_n est simple d'où C est hopfien*
D'autre part supposons C objet supposons C_n simple avec f_n injectif donc $kerf_n = 0$ supposons $imf_n \neq C_n$ on aurait $imf_n \neq 0$ car $f_n \neq 0$ et $imf_n \neq C_n$ ce qui contredit l'hypothèse C_n simple

Proposition 13 *Soit C un complexe simple et f un morphisme de C dans lui meme.Alors l'ensemble des morphismes de C muni des opérations $+$ et $\circ$ est un corps*

Preuve *Comme C est simple équivaut à $\forall n \in \mathbf{Z}$, C_n est simple Il est connu que $(End(C_n), +, \circ)$ est un anneau associatif unitaire Soit $f_n \in End(C_n)|0$ et $f_n \neq 0$ alors $kerf_n \neq C_n$ et $kerf_n$ sous module du module simple C_n donc $kerf_n = 0$ d'où f_n est injective*
D'autre part $f(C_n) \leq C_n$ et $f_n \neq 0$ donc $f_n(C_n) = C_n$ doù f_n surjective cqfd

Proposition 14 *Soit C Un objet de $COMP$ avec E sous complexe de C non nul avec $C|E$ $hopfien$ alors C est un objet $hopfien$ de $COMP$*

Preuve *Supposons que C soit un complexe non hopfien donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel $f_k : C_k \to C_k$ soit une surjection qui n'est pas un isomorphisme Comme $E_k = kerf_k$ on a $E_k \neq 0$ car f_k est non injective Donc f_k induit un isomorphisme $\bar{f}_k : C_k|E_k \to E_k$ Si $\pi_k : C_k \to C_k|E_k$ désigne la surjection canonique la composée $\pi_k \circ \bar{f}_k : C_k|E_k \to C_k|E_k$ est une surjection qui n'est pas injective le noyau de la composée n'étant pas réduit a 0).Ce qui contredit l'hypothèse $C_k|E_k$ $hopfien$*

Proposition 15 *Soit C un objet de COMP dont tout sous complexe propre E est $cohopfien$ alors C est $cohopfien$*

Preuve *Par un raisonnement par l'absurde supposons que* C *est non* $cohopfien$ *donc il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *et un morphisme injectif* $u_k : C_k \to C_k$ *non surjectif Soit* $E_k = imu_k$ *Comme* $E_k \sqsubseteq C_k$ *alors* u_k *induit un isomorphisme* $\bar{u_k} : C_k \to E_k$ *avec* $\bar{u_k}|E_k : E_k \to E_k$ *est une injection non surjective.Ce qui contredit l'hypothese*E_k $cohopfien$

Définition 21 *Un* A *sous module* N *de* M *est dit complétement invariant si pour tout endomorphisme*f *de* M *on a* $f(N) \sqsubseteq N$

Définition 22 *Soient* E, N, M *des* $A-$ *modules.* E *est dit injectif si pour tout monomorphisme* $\alpha : N \to M$ *et pour tout morphisme* $\phi : N \to E$*, il existe un morphisme* $\psi : M \to E$ *vérifiant* $\phi = \psi \circ \alpha$

Définition 23 *Soient* E, R, S *des suites complexes de* $A-$ *modules.Alors* E *est une suite complexe injective si pour tout monomorphisme de suites* $\alpha : S \to R$ *et pour toute chaine* $\phi ; S \to E$ *alors il existe une chaine* $\psi : R \to E$ *telle que* $\psi \circ \alpha = \phi$ *et vérifiant :*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"'] & R \arrow[dl, "\psi"] \\
E &
\end{tikzcd}$$

Remarque :Si E est une suite complexe injective alors E et un objet injectif de la catégorie des complexes de $A-$ modules

Théorème 4 *Théorème :Soit* $(E, w) : \ldots \to E_{n+1} \xrightarrow{w_{n+1}} E_n \xrightarrow{w_n} E_{n-1} \to \ldots$ *une suite complexe de* $A-$ *modules.Alors* E *est injectif si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*,* E_n *est injectif*

Preuve *Supposons que* E *est injectif et soient* $f : M \to N$ *un monomorphisme de* $A-$ *modules*
et $\phi_n : M \to E_n$ *un morphisme de* $A-$ *modules*
Soient S *et* R *deux suites complexes de* $A-$ *modules et* α *une chaine de* S *dans* R *telles que :*

$$\begin{tikzcd}
S : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "\alpha_{n+1}"'] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "\alpha_n"'] & S_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"'] & \ldots \\
R : \ldots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "v_n"] & R_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$
$S_n = M$ *et* $u_n = Id_M$

avec $R_n = N$ et $v_n = Id_N$
α_n est un monomorphisme de $A-$ modules,pour tout $n \in \mathbb{Z}$
Soit ϕ une chaine de S dans E telle que

$$\begin{tikzcd}
S : \dots \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"'] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "\phi_n"'] & S_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"'] & \dots \\
E : \dots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "w_n"] & E_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

où les $\phi_k : M \to E_k$ sont des morphismes quelconques de $A-$modules
E etant injective donc il existe ψ une chaine telle que :

$$\begin{tikzcd}
R : \dots \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & S_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\psi_{n+1}"'] & S_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\psi_n"'] & S_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{n-1}"'] & \dots \\
E : \dots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "w_n"] & E_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

telle que $\psi o \alpha = \phi$ donc $\psi_n \circ f = \phi_n$.Donc il existe $\psi_n : R_n \to E_n$ tel $\psi_n \circ f = \phi_n$
E_n est injectif
Réciproquement supposons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, E_n est un $A-$ module injectif et démontrons que E est une suite complexe injective
Soit γ un monomorphisme de complexes

$$\begin{tikzcd}
S : \dots \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"'] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "\gamma_n"'] & S_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & \dots \\
E : \dots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "w_n"] & E_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Soit β une chaine de complexes telle que :

$$\begin{tikzcd}
R : \dots \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "\beta_{n+1}"'] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "\beta_n"'] & S_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{n-1}"'] & \dots \\
E : \dots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "w_n"] & E_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Alors comme pour tout $n \in \mathbb{Z}$, E_n est injectif et γ_n est un monomorphisme de $A-$modules donc il existe $\lambda_n : R_n \to E_n$ vérifiant $\beta_n = \lambda_n \circ \gamma_n$ Soit λ telle que :

$$\begin{tikzcd}
R : \dots \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\lambda_{n+1}"'] & R_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\lambda_n"'] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n-1}"'] & \dots \\
E : \dots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "w_n"] & E_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Démontrons que λ *est une chaine*

$$\begin{tikzcd}
S \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dd, bend right, "\beta"'] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & S_{n-1} \arrow[r, "u_{n-1}"] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & \ldots \\
R \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\lambda_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\lambda_n"] & R_{n-1} \arrow[r, "v_{n-1}"] \arrow[d, "\lambda_{n-1}"] & \ldots \\
E \ldots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "w_n"] & E_{n-1} \arrow[r, "w_{n-1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Il suffit que $w_{n+1} \circ \lambda_{n+1} = \lambda_n \circ v_{n+1}$
On a $w_{n+1} \circ \beta_{n+1} = \beta_n u_{n+1}$ *car* β *est une chaine*
Or $\beta_n = \lambda_n \circ \gamma_n$
donc $w_{n+1} \circ (\lambda_{n+1} \circ \gamma_{n+1}) = (\lambda_n \circ \gamma_n) \circ u_{n+1}$
alors $(w_{n+1} \circ \lambda_{n+1}) \circ \gamma_{n+1} = \lambda_n \circ (\gamma_n \circ u_{n+1})$
ainsi $(w_{n+1}) \circ \lambda_{n+1}) \circ \gamma_{n+1} = \lambda_n \circ (v_{n+1} \circ \gamma_{n+1})$
En définitive $(w_{n+1} \circ \lambda_{n+1}) \circ \gamma_{n+1} = (\lambda_n \circ v_{n+1}) \circ \gamma_{n+1}$
Or γ_{n+1} *est un monomorphisme deA− modules d'où* $w_{n+1} \circ \lambda_{n+1} = \lambda_n \circ v_{n+1}$, *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$
d'où λ *est une chaine*
Vérifons que $\lambda \circ \gamma = \beta$
On sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\beta_n = \lambda_n \circ \gamma_n$ *avec* $\beta = (\beta_n), \gamma = (\gamma_n)$ *et* $\lambda = (\lambda_n)$ *d'où* $\lambda \circ \gamma = \beta$.*Ce qui démontre que* E *est une suite complexe injective*

Théorème 5 *Critère de BAER dans la catégorie des complexes de A− modules*
Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une famille d'ideaux de l'anneau A et*
$(E, v) : \ldots \to E_{n+1} \overset{v_{n+1}}{\to} E_n \overset{v_n}{\to} E_{n-1} \to \ldots$ *une suite complexe injective de A−modules.Alors pour toute chaine* α *vérifiant :*

$$\begin{tikzcd}
I : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & I_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "\alpha_{n+1}"'] & I_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "\alpha_n"'] & I_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"'] & \ldots \\
E : \ldots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "v_n"] & E_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

il existe une chaine β *qui prolonge* α *telle :*

$$\begin{tikzcd}
A : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & A_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] \arrow[d, "\beta_{n+1}"'] & A_n \arrow[r, "w_n"] \arrow[d, "\beta_n"'] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{n-1}"'] & \ldots \\
E : \ldots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "v_n"] & E_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où $A_n = A$, *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

Définition 24 *Soit* N *un* $A-$ *sous module d'un module* M *est dit complètement invariant si pour tout endomorphisme* f *de* M *on a* $f(N) \sqsubseteq N$

Définition 25 *Soient* $C : \ldots C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$
une suite complexe de $A-$ *modules et* $E : \ldots E_{n+1} \to E_n \to E_{n-1} \to \ldots$
un sous complexe de C
Alors E *est dit sous complexe complètement invariant de* C *si pour tout* $n \in \mathbb{Z}$,
E_n *est complètement invariant*

Définition 26 *Un* $A-$ *sous module* E *de* M *est essentiel dans* M *si pour tout sous module non nul* K *de* M, *on a* $E \sqcap K \neq 0$; M *est appelée extension essentielle de* E

Définition 27 *Soient* $C : \ldots C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$ *une suite complexe de* $A-$ *modules et* $E : \ldots E_{n+1} \to E_n \to E_{n-1} \to \ldots$ *un sous complexe de* C.
Alors E *est dite suite essentielle de* C *si pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, E_n *est essentiel de* C_n

projectif

Définition 28 *Soit* M *un* $A-$ *module. Un* $A-$ *module* P *est dit projectif si pour tout épimorphisme* $g : M \to N$ *et pour tout morphisme* $f : P \to N$, *il existe un morphisme* $h : P \to M$ *vérifiant* $f = g \circ h$

Définition 29 *Soient* E, S, R *des suites complexes de*$A-$ *modules. Alors* E *est une suite complexe projective si pour tout épimorphisme* $\alpha : R \to S$ *et pour toute chaine* $\phi : E \to S$, *il existe une chaine* $\psi : E \to R$ *telle* $\alpha \circ \psi = \phi$ *,illustré par le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "\phi"] \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \\
R \arrow[r, "\alpha"'] & S
\end{tikzcd}$$

remarque

Si E est une suite projective de $A-$ modules alors E est un objet projectif de la catégorie des complexes de $A-$ modules

Théorème 6 *Soit $E : \ldots \to E_{n+1} \overset{v_{n+1}}{\to} E_n \overset{v_n}{\to} E_{n-1} \to \ldots$ une suite complexe de $A-$ modules.E est une suite projective si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{Z}, E_n$ est un $A-$ module projectif.*

Preuve *Supposons que E est projectif*
Soient $f : N \to M$ un épimorphisme de $A-$ modules et $\phi_n : E_n \to M$ un morphisme de $A-$ modules
Soient S etR deux suites complexes et α une chaine de R vers S telles que :

$$\begin{tikzcd}
R : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\alpha_{n+1}"'] & R_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\alpha_n"'] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"'] & \ldots \\
S : \ldots \arrow[r] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] & S_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où $R_n = M$ et $v_n = Id_M$
$S_n = N$ et $u_n = Id_N$
Soit α_n un épimorphisme de $A-$ modules
Soit ϕ une chaine de E dans S vérifiant :

$$\begin{tikzcd}
E : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"'] & E_n \arrow[r, "w_n"] \arrow[d, "\phi_n"'] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"'] & \ldots \\
S : \ldots \arrow[r] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] & S_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Avec les $\phi_k : E_k \to M$ sont des morphismes quelconques de $A-$ modules.
Comme E est projective alors il existe une chaine ψ telle que :

$$\begin{tikzcd}
E : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] \arrow[d, "\psi_{n+1}"'] & E_n \arrow[r, "w_n"] \arrow[d, "\psi_n"'] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{n-1}"'] & \ldots \\
R : \ldots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "v_n"] & R_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où $\alpha \circ \psi = \phi$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n \circ \psi_n = \phi_n$. Il existe alors $\psi_n : E_n \to R_n$ telle que $f \circ \psi_n = \phi_n$.Ainsi E_n est projectif
Réciproquement supposons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, E_n est un module $A-$ module projectif et démontrons que E est une suite projective
Soit γ un épimorphisme telle que :

$$\begin{tikzcd}
R : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"'] & R_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\gamma_n"'] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & \ldots \\
S : \ldots \arrow[r] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] & S_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Soitβ *une chaine complexe vérifiant :*

$$\begin{tikzcd}
E : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] \arrow[d, "\beta_{n+1}"'] & E_n \arrow[r, "w_n"] \arrow[d, "\beta_n"'] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{n-1}"'] & \ldots \\
S : \ldots \arrow[r] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] & S_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Alors comme pour tout $n \in \mathbb{Z}, E_n$ *est projectif et* γ_n *est un épimorphisme de* $A-$ *modules ainsi il existe* $\lambda_n : E_n \to R_n$ *vérifiant* $\gamma_n \circ \lambda_n$
Soit λ *telle :*

$$\begin{tikzcd}
E : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] \arrow[d, "\lambda_{n+1}"'] & E_n \arrow[r, "w_n"] \arrow[d, "\lambda_n"'] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n-1}"'] & \ldots \\
R : \ldots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] & v_n \arrow[r, "v_n"] & R_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Démontrons que λ *est une chaine*

$$\begin{tikzcd}
R \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dd, bend right=60, "\lambda"'] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & R_{n-1} \arrow[r, "v_{n-1}"] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & \ldots \\
S \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "\beta_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & S_{n-1} \arrow[r, "u_{n-1}"] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & \ldots \\
E \ldots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "w_n"] & E_{n-1} \arrow[r, "w_{n-1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Il suffit que $\lambda_{n+1} \circ w_{n+1} = v_{n+1} \circ \lambda_n$
Or $\beta_{n+1} \circ w_{n+1} = u_{n+1} \circ \beta_n$ *car* β *est une chaine*
Comme $\gamma_n \circ \lambda_n = \beta_n$ *donc :*
$\gamma_{n+1} \circ \lambda_{n+1} \circ w_{n+1} = u_{n+1} \circ (\gamma_n \circ \lambda_n)$
Ainsi $(\gamma_{n+1} \circ \lambda_{n+1}) \circ w_{n+1} = u_{n+1} \circ (\gamma_n \circ \lambda_n)$
Alors $\gamma_{n+1} \circ (\lambda_{n+1} \circ w_{n+1}) = \gamma_{n+1} \circ (v_{n+1} \circ \lambda_n)$
Or γ_{n+1} *et un épimorphisme d'où* $\lambda_{n+1} \circ w_{n+1} = v_{n+1} \circ \lambda_n$ *ce qui justifie que* λ *est une chaine complexe*
Vérifions que $\gamma \circ \lambda = \beta$
On sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\beta_n = \gamma_n \circ \lambda_n$ *d'où* $\beta = \gamma \circ \lambda$. *Ce qui établit que* E *est une suite complexe injective*

Proposition 16 *Soit* (C_i) *une famille de complexes* $\oplus C_i$ *est projective si et seulement si* C_i *est projective :*

Preuve *Dans la démonstration on utilise le Théorème de caractérisation des suites complexes projectives*

Supposons que $\oplus C_i$ *est projective donc quel que soit* $n \in \mathbb{Z}$, $\oplus C_i^n$ *est un* $A-$ *module projectif d'où* C_i^n *est un* $A-$ *module projectif*
Ainsi C_i *est une suite projective pour tout* i
Réciproquement Ssupposons C_i *est une suite projecive donc pour tout* $n \in \mathbb{Z}, C_i^n$ *est un* $A-$ *module projectif donc* $\oplus C_i^n$ *donc* $\oplus C_i$ *est projective*

Définition 30 *Un* $A-$ *sous- module* E *de* M *est dit superflu dans* M *si pour tout sous module* K *de* M *tels que* $K + E = M$ *alors* $K = M$

Définition 31 *Soient*

$$C : \ldots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$$

une suite complexe de $A-$ *modules et*

$$E : \ldots \to E_{n+1} \to E_n \to E_{n-1} \to \ldots$$

un sous complexe de C *tels que :*
E est dite suite superflue de C si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, E_n *est superflu de* C_n

Théorème 7 *Si* C *est un complexe projectif et* E *un sous complexe complétement invariant et superflu dans* C *alors* E *est hopfien si et seulement si* C/E *est hopfien*

Preuve *Supposons* E *est hopfien, comme* C_n *est un* $A-$ *module projectif et* E_n *est complètement invariant et superflu dans* C_n
Donc tout épimorphisme de E *dans lui même est un isomorphisme d'où* E_n *est* $hopfien$
Ainsi C_n/E_n *est* $hopfien$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, *en conclusion* C/E *est hopfien*

Réciproquement supposons que C/E *est* $hopfien$ *donc* C_n/E_n *est* $hopfien$ *avec* C_n *projectif et* E_n *est un* $A-$ *sous- module complètement invariant et superflu dans* C_n *donc pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, E_n *est* $hopfien$ *d'où* E *est* $hopfien$

Théorème 8 *Si* C *est un complexe injectif et* E *un sous complexe complétement invariant et essentiel dans* C *alors* E *est* $cohopfien$ *si et seulement si* C *est* $cohopfien$

Preuve *Supposons que* E *est cohopfien alors* E_n *est* $cohopfien$ *et* E_n *est un sous* $A-$ *module complètement invariant et essentiel dans* C_n *alors* C_n *est* $cohopfien$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, *d'où* C *est* $cohopfien$

Réciproquement supposons C *est* $cohopfien$ *donc* C_n *est* $cohopfien$ *et* E_n *est un* $A-$ *sous module complètement invariant et essentiel dans* C_n
. *Alors* E_n *est* $cohopfien$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *d'où* E *est* $cohopfien$

Théorème 9 *Si C est une suite complexe de A-modules alors :*
- Si C est une suite projective et cohopfienne alors C est hopfienne
- Si C est une suite injective et hopfienne alors C est cohopfienne

Preuve *Supposons que C est une suite complexe projective et cohopfienne donc C_n est un $A-$ module projectif et cohopfien*
d'où C_n est hopfien pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ainsi C est hopfienne
Supposons que C est une suite complexe injective et chopfienne donc C_n est un $A-$ module injectif et hopfien
d'où C_n est cohopfien pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ainsi C est cohopfienne

2.4 Suites complexes noetheriennes et artiniennes

Théorème 10 *Soit M un $A-$ module. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
a)Tout ensemble non vide de sous-modules de M contient au moins un élément maximal
b)Toute suite croissante de sous module de M est stationnaire

Preuve *Supposons la proposition a) est vérifiée et considérons $L_1 \subseteq L_2 \subseteq L_3 \subseteq \ldots$ une suite croissante de sous modules de M.Alors la famille $(L_s)_{s \geq 1}$ contient un élément maximal L_p donc pour tout $s \geq p$ on a $L_s = L_p$ ainsi la suite $(L_s)_{s \geq 1}$ est stationnaire*

Réciproquement supposons la proposition vraie et considérons Λ un ensemble non vide de sous modules de M. Par un raisonnement par l'absurde supposons Λ ne contienne p as un élément maximal donc si $L \in \Lambda$ alors il existe $L' \in \Lambda$ tel que $L \subset L'$.Ainsi on peut construire $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \subset \ldots$ une suite strictement croissante de sous modules Λ non stationnaire de Λ. Donc ceci contredit l'hypothèse b)

Définition 32 *Un $A-$ module M qui vérifie l'une des conditions du théorème précédent est dit noethérien*

Théorème 11 *Soit M un $A-$ module. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
a)Tout ensemble non vide de sous-modules de M contient au moins un élément minimal
b)Toute suite décroissante de sous modules de M est stationnaire

Définition 33 *Un $A-$ module M qui vérifie l'une des conditions du théorème précédent est dit artinien*

Définition 34 *Une suite complexe $C : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$ est dite noetherienne (respectivement artinienne) si pour tout $n \in \mathbb{Z}, C_n$ est noetherien (respectivement artinien)*

Théorème 12 *Une suite complexe $C : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$ est noetherienne si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, tout sous module de C_n est de type fini*

Preuve *Par définition la suite C est noethérienne si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le $A-$ module C_n est noethérien.Or C_n noethérien équivaut à C_n de type fini est vérifie dans la catégorie des modules*

Théorème 13 *Soit $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ une suite exacte de complexes de $A-$ modules.Alors la suite F est noetherienne si et seulement si les suites E et G sont noetheriennes et les sous-suites complexes ou facteurs directs d'une suite complexe sont noetherien*

Preuve *On sait la suite $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ est exacte si et seulement si la suite $0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{f_n} F_n \xrightarrow{g_n} G_n \longrightarrow 0$ de $A-$ modules est exacte pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Comme E et G sont noetheriennes alors E_n et G_n sont notheriennes ce qui entraine F_n est noetherienne pour tout $n \in \mathbb{Z}$ d'où F est une suite noetherienne*

Corollaire 4 *Soit p suites complexes $C_1, C_2, \ldots, C_p$ dont chacune est notherienne alors*
$C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_p$ est notherienne

Preuve *En raisonnant par recurrenee sur p pour $p \geq 2$*
Pour $p = 2$ on a la suite exacte canonique $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C2 \longrightarrow 0$
Comme par hypothèse C_1 et C_2 sont notheriennes et en utilisant la suite exacte canonique $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C2 \longrightarrow 0$ et le théorème précédent on a $C_1 \oplus C_2$ est nothérienne

Soit $k+1$ suites complexes $C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}$ dont chacune est notherienne et supposons $C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k$ notherienne considérons la suite exacte canonique :

$$0 \longrightarrow C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k \longrightarrow (C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k) \oplus C_{k+1} \longrightarrow C_{k+1} \longrightarrow 0$$

Sachant que $(C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k) \oplus C_{k+1} = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k \oplus C_{k+1}$
on obtient la suite exacte canonique $0 \longrightarrow C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k \longrightarrow C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k \oplus C_{k+1} \longrightarrow C_{k+1} \longrightarrow 0$ avec $C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k$ et C_{k+1} sont notheriennes d'où $C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k \oplus C_{k+1}$ est notherienne

Théorème 14 *Soit Soit* $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ *une suite exacte de complexes de* $A-$ *modules.Alors la suite* F *est artinienne si et seulement si les suites* E *et* G *sont artiniennes et les sous suites complexes et les facteurs directs d'une suite complexe artiniennes sont artiniens*

Preuve *On sait la suite* $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ *est exacte si et seulement si la suite* $0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{f_n} F_n \xrightarrow{g_n} G_n \longrightarrow 0$ *de* $A-$ *modules est exacte pour tout* $n \in \mathbb{Z}$. *Comme* E *et* G *sont artiniennes alors* E_n *et* G_n *sont artiniennes ce qui entraine* F_n *est artiniennes pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *d'où* F *est une suite artinienne*

Corollaire 5 *Soit* p *suites complexes* $C_1, C_2, \ldots, C_p$ *dont chacune est artinienne*
alors $C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_p$ *est artinienne*

Preuve *En raisonnant par recurrence sur* p *pour* $p \geq 2$
Pour $p = 2$ *on a la suite exacte canonique* $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C2 \longrightarrow 0$
Comme par hypothèse C_1 *et* C_2 *sont artinienne et en utilisant la suite exacte canonique* $0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_1 \oplus C_2 \longrightarrow C2 \longrightarrow 0$ *et le théorème précédent on a* $C_1 \oplus C_2$ *est artinienne*

Soit $k+1$ *suites complexes* $C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}$ *dont chacune est artinienne et supposons* $C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k$ *artinienne considérons la suite exacte canonique :*
$0 \longrightarrow C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k \longrightarrow (C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k) \oplus C_{k+1} \longrightarrow C_{k+1} \longrightarrow 0$
Sachant que $(C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k) \oplus C_{k+1} = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k \oplus C_{k+1}$
on obtient la suite exacte canonique $0 \longrightarrow C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k \longrightarrow C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k \oplus C_{k+1} \longrightarrow C_{k+1} \longrightarrow 0$ *avec* $C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k$ *et* C_{k+1} *sont artiniennes d'où* $C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k \oplus C_{k+1}$ *est artinienne*

2.5 Suites complexes de FITTING

Définition 35 *Un* $A-$ *module* M *est dit module de* $FITTING$ *si pour tout endomorphisme* f *de* M,*il existe un entier* $n \geq 1$ *tel que* $M = Kerf^n \oplus Imf^n$

Définition 36 *Une suite complexe* C *est dite de* $FITTING$ *si pour toute chaine* f *de* C *dans lui même, il existe un entier* $n \geq 1$ *tel* $C = Kerf^n \oplus Imf^n$

Théorème 15 *Soit* $C : \ldots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$ *une suite complexe de* $A-$ *modules.* C *est dite suite de* $FITTING$ *si et seulement pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, C_n *est un* $A-$ *module de* $FITTING$

Preuve *C etant une suite complexe de Fitting donc il existe un entier naturel n non nul tel que C=$Kerf^n \ominus Imf^n$*
donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a C_k=$Kerf_k^n \oplus Imf_k^n$ donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$,C_k est Fitting
Réciproquement si C_k est de Fitting alors il existe un entier naturel non nul n tel que
C_k=$Kerf_k^n \oplus Imf_k^n$
ainsi pour tout $k \in \mathbb{Z}$,C_k est de Fitting d'où C est une suite complexe de Fitting

Théorème 16 *Toute suite complexe projective et cohopfienne ou injective et hopfienne est une suite complexe de FITTING*

Preuve *Soit une suite complexe $C: \ldots \rightarrow C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\rightarrow} C_n \overset{d_n}{\rightarrow} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\rightarrow} \ldots$*
D'apres le théorème 6 precedent si C est une suite complexe projective et cohopfienne alors C est hopfienne.Donc C est hopfienne et cohopfienne alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, C_n est un $A-$ module hopfien et cohopfien ainsi C_n est de Fitting d'où C est une suite complexe de Fitting
De même d'après le théorème 6 précédent si C est une suite complexe injective et hopfienne alors C est cohopfienne.Donc C est hopfienne et cohopfienne ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$, C_n est un $A-$ module hopfien et cohopfien donc C_n est de Fitting d'où C est une suite complexe de Fitting

Chapitre 3

Objets fortement Hopfiens,Objets fortement cohopfiens dans la catégorie des COMPLEXES

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les objets $quasi - injectifs$, $quasi - projectifs$, $fortement\ hopfiens$, $fortement\ cohopfiens$ de la catégorie des complexes de $A-$modules notée $COMP$.On y étudie aussi les objets de Fitting de la catégorie des complexes de $A-$ modules .Les objets de COMP sont les suites complexes et les morphismes de COMP sont les chaines complexes
Une suite complexe $C : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$ est une suite (d_n) de morphismes de $A-$modules à gauche
vérifiant $d_n \circ d_{n+1} = 0$,pour tout $n \in \mathbb{Z}$
Une chaine f de (C, d) vers (C, d) est définie par :

$$\begin{tikzcd}
C : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
C : \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où $d_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}$
Soit C un objet de COMP et f un morphisme de C dans lui même.C est hopfien(respectivement cohopfien) si tout épimorphisme(respectivement monomorphisme) est un isomorphisme
Une suite complexe est dite complètement invariante si chaque A-module de la chaine est complètement invariant
Une suite complexe est dite essentielle(respectivement superflue) si chaque A-module de la chaine est essentielle(respectivement superflu)
Une suite complexe C est dite de FITTING si pour toute chaine f de C dans

C il existe un entier naturel n tel que :
$C = Imf^n \ominus Kerf^n$ où $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$
Dans ce chapitre les résultats essentiels sont les suivants :

1. Si C est une suite complexe fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne) et E une sous suite de C facteur direct de C alors E et C/E sont fortement hopfiennes (respectivement fortement cohopfienne).
2. Si E est une suite complexe complètement invariante avec E et C/E fortement hopfiennes alors (respectivement fortement cohopfiennes) alors C est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne).
3. $C = \ominus C_i$ où C_i est une suite complètement invariante. Si C_i est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne) alors C est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne).
4. Soit C est une suite complexe.C est une suite complexe quasi- projective si et seulement si chaque A-module de la chaine est quasi projectif.
5. Soit C une suite complexe. C est une suite quasi-injective si et seulement si chaque A-module de la chaine est quasi-injectif.
6. Soit C une suite complexe.Si C est une suite complexe quasi- injective fortement hopfienne alors C est une suite fortement cohopfienne .
7. Soit C une suite complexe.Si C est une suite complexe quasi- projective fortement cohopfienne alors C est une suite fortement hopfienne.
8. Toute suite complexe de A-modules quasi-projective et $cohopfienne$ ou $quasi - injective$ et $hopfienne$ est une suite complexe de FITTING.

Dans ce chapitre A désigne un anneau associatif unitaire non nécessairement commutatif.Les $A-$ modules sont des $A-$ modules é gauche unitaires

3.2 Définitions et Résultats Préliminaires

Définition 37 *Soit (C, d) une suite complexe de A modules à gauche et f la chaine de (C, d) vers (C, d) avec*

$$\begin{tikzcd}
(C,d): \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
(C,d): \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

vérifiant : $d_{n+1} \circ f_{n+1} = f_n \circ d_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

On appelle $f \circ f$ la chaine composée notée f^2 telle que $(f^2)_n = f_n \circ f_n$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
C \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend right=60, "f^2"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \ldots \\
C \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \ldots \\
C \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

De même on définit f^k par $(f^k)_n = f_n \circ f_n \circ \ldots \circ f_n$, avec k facteurs,pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Proposition 17 *Soit (C, d) une suite complexe de $A-$ modules et f une chaine de (C, d) vers (C, d) vérifiant :*

$$\begin{tikzcd}
(C,d): \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
(C,d): \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

$$\text{Soit } \Delta^k_{n+1} : \begin{array}{ccc} Ker f^k_{n+1} & \to & Ker f^k_n \\ x & \mapsto & d_{n+1}(x) \end{array}$$

où $f^k_{n+1} = f_{n+1} \circ f_{n+1} \circ \ldots \circ f_{n+1}$ avec k facteurs

Alors Δ^k_{n+1} est un morphisme

Preuve *Soit* $\Delta^k_{n+1} : \begin{array}{ccc} Ker f^k_{n+1} & \to & Ker f^k_n \\ x & \mapsto & d_{n+1}(x) \end{array}$

et $\Delta^{k+1}_{n+1} : \begin{array}{ccc} Ker f^{k+1}_{n+1} & \to & Ker f^{k+1}_n \\ x & \mapsto & d_{n+1}(x) \end{array}$

On a $Ker f^k_{n+1} \subseteq Ker f^{k+1}_{n+1}$ et $Ker f^k_n \subseteq Ker f^{k+1}_n$ d'où Δ^k_{n+1} est le morphisme induit par Δ^{k+1}_{n+1}

Proposition 18 *Soit (C, d) une suite complexe de $A-$ modules et f une chaine de (C, d) vers (C, d) vérifiant*

$$\begin{tikzcd}
(C,d) : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
(C,d) : \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Soit $\delta_{n+1}^{k+1} : \begin{array}{ccc} Imf_{n+1}^{k+1} & \to & Imf_n^{k+1} \\ y & \mapsto & d_{n+1}(y) \end{array}$

Alors δ_{n+1}^{k+1} est un morphisme

Preuve *Soit* $\delta_{n+1}^{k} : \begin{array}{ccc} Imf_{n+1}^{k} & \to & Imf_n^{k} \\ x & \mapsto & d_{n+1}(x) \end{array}$

et $\delta_{n+1}^{k+1} : \begin{array}{ccc} Imf_{n+1}^{k+1} & \to & Imf_n^{k+1} \\ x & \mapsto & d_{n+1}(x) \end{array}$

On a $Imf_{n+1}^{k+1} \subseteq Imf_{n+1}^{k}$ et $Imf_n^{k+1} \subseteq Imf_n^k$ d'où δ_{n+1}^{k+1} est le morphisme induit par δ_{n+1}^{k}

Définition 38 *Soit C une suite complexe telle que :*
$C : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$
Soit E une sous suite complexe de C telle que :
$E : \ldots \to E_{n+1} \overset{u_{n+1}}{\to} E_n \overset{u_n}{\to} E_{n-1} \overset{u_{n-1}}{\to} \ldots$
Alors E est facteur direct de C si et seulement si E_n est facteur direct de C_n

3.3 objets fortement hopfiens - objets fortement cohopfiens dans la catégorie des complexes de A - modules

3.3.1 objets fortement hopfiens- objets fortement cohopfiens dans la catégorie comp

Définition 39 *Soit f la chaine de (C, d) vers (C, d) vérifiant :*

$$\begin{tikzcd}
(C,d) : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
(C,d) : \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Alors on a la suite :
$(Kerf^k) : \ldots \to Kerf_{n+1}^k \overset{\Delta_{n+1}^k}{\to} Kerf_n^k \overset{\Delta_n^k}{\to} Kerf_{n-1}^k \overset{\Delta_{n-1}^k}{\to} \ldots$
Cette suite est dite stationnaire s'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(Kerf^{k_0}) = (Kerf^{k_0+s})$, quel que soit $s \in \mathbb{N}$

De même on a :

la suite $(Imf^k) : \ldots \to Imf^k_{n+1} \overset{\delta^k_{n+1}}{\to} Imf^k_n \overset{\delta^k_n}{\to} Imf^k_{n-1} \overset{\delta^k_{n-1}}{\to} \ldots$
Cette suite est dite stationnaire s'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $(Imf^{k_0}) = Imf^{k_0+s}$*,quel que soit* $s \in \mathbb{N}$

Proposition 19 *Soit* f *une chaine de* (C,d) *vers* (C,d) *telle que*

$$\begin{tikzcd}
(C,d) : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
(C,d) : \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Alors $(Kerf^k)$ *est stationnaire si et seulement si* $(Kerf^k_n)$ *est stationnaire pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

Preuve *Comme* $(Kerf^k)$ *est stationnaire alors il existe* $k_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $(Kerf^{k_0}) = (Kerf^{k_0+s})$*,quel que soit* $s \in \mathbb{N}$ *d'où* $Kerf^{k_0}_n = Kerf^{k_0+s}_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*. Ce qui équivaut à démontrer que la suite* $(Kerf^k_n)$ *est stationnaire pour tout* $n \in \mathbb{Z}$
Réciproquement supposons que la suite $(Kerf^k_n)$ *est stationnaire pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *alors il existe* $k_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que ainsi quel que soit* $s \in \mathbb{N}$ *d'où* $Kerf^{k_0}_n = Kerf^{k_0+s}_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*. Ce qui établit que* $(Kerf^k)$ *est stationnaire pour tout entier naturel* k

Proposition 20 *Soit* f *une chaine de* (C,d) *vers* (C,d) *telle que*

$$\begin{tikzcd}
(C,d) : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
(C,d) : \ldots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Alors (Imf^k) *est stationnaire si et seulement si* (Imf^k_n) *est stationnaire pour tout* $n \in \mathbb{Z}$

Preuve *Comme* (Imf^k) *est stationnaire alors il existe* $k_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $(Imf^{k_0}) = (Imf^{k_0+s})$*,quel que soit* $s \in \mathbb{N}$ *d'où* $Imf^{k_0}_n = Imf^{k_0+s}_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*. Ce qui équivaut à démontrer que la suite* (Imf^k_n) *est stationnaire pour tout* $n \in \mathbb{Z}$
Réciproquement supposons que la suite (Imf^k_n) *est stationnaire pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *alors il existe* $k_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que ainsi quel que soit* $s \in \mathbb{N}$ *d'où* $Imf^{k_0}_n = Imf^{k_0+s}_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*. Ce qui établit que* (Imf^k) *est stationnaire pour tout entier naturel* k

Définition 40 *Un $A-$ module M est dit fortement hopfien (respectivement fortement cohopfien) si pour tout endomorphisme f de M la suite $(Kerf^n)$ est stationnaire $kerf^2 \sqsubseteq kerf^3 \ldots \sqsubseteq Kerf^n$ (respectivement$Imf \sqsupseteq Imf^2 \ldots \sqsupseteq Imf^n \ldots$)*

Définition 41 *Une suite complexe C est de $A-$ modules est dite fortement hopfienne(respectivement fortement cohopfienne) si pour toute chaine f de (C,d) dans (C,d), $(Kerf^k)$ (respectivement (Imf^k)) est stationnaire*

Proposition 21 *C est une suite complexe fortement hopfienne s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que*
$Kerf_n^k \sqcap Imf_n^k = 0$,pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Preuve *S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que$Kerf_n^k \sqcap Imf_n^k = 0$ alors $(Kerf_n^k)$ est stationnaire pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Cela équivaut à dire que $(Kerf^k)$ est stationnaire ce qui établit que C est une suite complexe fortement hopfienne*

Proposition 22 *C telle que*

$$\begin{tikzcd}
(C,d):\dots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \dots \\
(C,d):\dots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

une suite complexe fortement cohopfienne,

s'il existe un entier naturel k tel que :
$Imf_n^k + Kerf_n^k = C_n$,pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Preuve *s'il existe un entier naturel k tel que :*
$Imf_n^k + Kerf_n^k = C_n$, pour tout pour tout $n \in \mathbb{Z}$ alors (Imf_n^k) est stationnaire pour tout $n \in \mathbb{Z}$ ainsi (Imf^k) est stationnaire d'où C est une suite complexe fortement cohopfienne

Théorème 17 *Soit C une suite complexe et E une sous suite complexe de C Si C est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne) et E est facteur direct de C alors E et C/E sont fortement hopfiens (respectivement fortement cohopfiens)*

Preuve *Démontrons d'abord que E est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne)*
Supposons que $C = E \oplus K$ et soit g une chaine de E dans lui même qui peut être prolongée à C telle que $f = g \oplus 0$, avec 0 le morphisme nul de K
Comme C est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne) donc $(Kerf^k)$ (respectivement (Imf^k) est stationnaire alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$

tel que $(Kerf^{k_0}) = (Kerf^{k_0+s})$ *(respectivement* $(Imf^{k_0}) = (Imf^{k_0+s})$ *) ,quel que soit* $s \in \mathbb{N}$
d'où $Kerf_n^{k_0} = Kerf_n^{k_0+s}$ *(respectivement* $Imf_n^{k_0} = Imf_n^{k_0+s}$ *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*)*
d'où C_n *est fortement hopfien (respectivement fortement cohopfien) et* E_n *facteur direct de* C_n *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *ce qui entraine que* E *et* C/E *fortement hopfiens (respectivement fortement cohpfiens)*

Théorème 18 *Soit* C *une suite complexe et* E *une sous suite complexe de* C *Si* E *est complètement invariante avec* E *et* C/E *sont fortement hopfiennes(respectivement fortement cohopfiennes) alors* C *est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne)*

Preuve *Soit* (C,d) *une suite complexe de* $A-$ *modules et* f *une chaine de* (C,d) *vers* (C,d) *vérifiant :*

$$\begin{tikzcd}
(C,d):\ldots \arrow[d, "f"] \arrow[r] & C_{m+1} \arrow[r, "d_{m+1}"] \arrow[d, "f_{m+1}"] & C_m \arrow[r, "d_m"] \arrow[d, "f_m"] & C_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{m-1}"] & \ldots \\
(C,d):\ldots \arrow[r] & C_{m+1} \arrow[r, "d_{m+1}"] & C_m \arrow[r, "d_m"] & C_{m-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

E étant complètement invariant dans C *alors* f *induit une chaine* h *de* E *dans lui même telle que :*

$$\begin{tikzcd}
(E,d):\ldots \arrow[d, "h"] \arrow[r] & E_{m+1} \arrow[r, "d_{m+1}"] \arrow[d, "h_{m+1}"] & E_m \arrow[r, "d_m"] \arrow[d, "h_m"] & E_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{m-1}"] & \ldots \\
(E,d):\ldots \arrow[r] & E_{m+1} \arrow[r, "d_{m+1}"] & E_m \arrow[r, "d_m"] & E_{m-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

f *induit une chaine* g *de* C/E *dans lui même telle que :*

$$\begin{tikzcd}
(C/E,u):\ldots \arrow[d, "g"] \arrow[r] & C_{m+1}/E_{m+1} \arrow[r, "u_{m+1}"] \arrow[d, "g_{m+1}"] & C_m/E_m \arrow[r, "u_m"] \arrow[d, "g_m"] & C_{m-1}/E_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{m-1}"] & \ldots \\
(C/E,u):\ldots \arrow[r] & C_{m+1}/E_{m+1} \arrow[r, "u_{m+1}"] & C_m/E_m \arrow[r, "u_m"] & C_{m-1}/E_{m-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Comme E *et* C/E *sont fortement cohopfiennes alors* $Imh^n = Imh^{n+k}$ *et* $Img^n = Img^{n+k}$ *donc pour tout* $m \in \mathbb{Z}$ *on obtient* $Imh_m^n = Imh_m^{n+k}$ *et* $Img_m^n = Img_m^{n+k}$
Si $p = 2n$, *pour* $x \in C_m$ *on a* $g_m^n(x + E_m) = g_m^{n+1}(y + E_m)$ *pour un certain* $y \in E_m$*.Ainsi* $t = f_m^n(x) - f_m^n(y) \in E_m$ *d'où* $f_m^n(t) = f_m^{p+1}(z)$ *pour un certain* $z \in E_m$ *par conséquent* $f_m^p(x) = f_m^{p+1}(y+z)$ *donc* C *est fortement cohopfienne*

Supposons que E *et* C/E *sont fortement hopfiennes donc* $Kerh^n = Kerh^{n+k}$ *et* $IKerg^n = Kerg^{n+k}$ *d'où pour tout* $m \in \mathbb{Z}$ *on obtient* $Kerh_m^n = Kerh_m^{n+k}$ *et* $Kerg_m^n = Kerg_m^{n+k}$*.Soit* $x \in Kerf_m^{2n}$ *donc* $g^{2n+1}(x+E_m) = 0$ *donc* $y = f_m^n(x) \in E_m$ *et* $f_m^{n+1}(y) = 0$*.On obtient* $y \in Kerh_m^{n+1} = Kerh_m^n$ *ainsi* $x \in Kerf_m^{2n}$ *d'où* C *est fortement hopfienne*

Corollaire 6 *Soit* $C = \oplus C_i$ *où* $i \in I$ C_i *est une suite complètement invariante. Si* C_i *est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne) alors* C *est fortement hopfienne (respectivement fortement cohopfienne)*

Preuve *Soit* f *une chaine de* C *dans lui même alors il existe une unique famille* (f_i) *où* $i \in I$ *où* $fi = f \mid_{C_i}$ *et* $m = \sum n_i$. *les* C_i *étant fortement hopfiennes alors* $Kerf_i^{n_i} = Kerf_i^{n_i+1}$ *par suite* $\oplus Kerf_i^m = \oplus Kerf_i^{n_i+1}$. *Ainsi* $Ker(\oplus f_i)^m = Ker(\oplus f_i)^{m+1}$. *En définitive* C *est fortement hopfienne*

Soit f *une chaine de* C *dans lui même alors il existe une unique famille* (f_i) *où* $i \in I$ *où* $fi = f \mid_{C_i}$ *et* $m = \sum n_i$. *les* C_i *étant fortement cohopfiennes alors* $Imf_i^{n_i} = Imf_i^{n_i+1}$ *par suite* $\ominus Imf_i^m = \ominus Imf_i^{n_i+1}$. *Ainsi* $Im(\ominus f_i)^m = Im(\ominus f_i)^{m+1}$.*En définitive* C *est fortement cohopfienne*

3.3.2 suite quasi-injective

Définition 42 *Un $A-$ module M est $quasi-injectif$ si pour tout monomorphisme g d'un sous $A-$ module de N dans M et pour tout morphisme f de N dans M,il existe un morphisme h de M dans lui méme vérifiant $f = h \circ g$*

$$\begin{tikzcd}
M & \\
N \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"] & M \arrow[ul, dotted, "h"']
\end{tikzcd}$$

Définition 43 *Soient C et E deux suites complexes de $A-$ modules.On dit C est quasi injectif si pour tout monomorphisme g de E dans C et pour toute chaine de E dans C il existe une chaine h de C dans C vérifiant $f = h \circ g$*

Théorème 19 *Soit $C : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \to \ldots$ une suite complexe de $A-$ modules.C est quasi-injective si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, C_n est un module quasi-injectif*

Preuve *Supposons que R est quasi- injective et soient $f : M \to N$ un monomorphisme de $A-$ modules*
et $\phi_n : M \to R_n$ un morphisme de $A-$ modules
Soient S et R deux suites complexes de $A-$ modules et α une chaine de S dans R telles que :

$$\begin{tikzcd}
S : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "\alpha_{n+1}"'] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "\alpha_n"'] & S_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"'] & \ldots \\
R : \ldots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "v_n"] & R_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$S_n = M$ et $u_n = Id_M$
avec $R_n = N$ et $v_n = Id_N$
α_n est un monomorphisme de $A-$ modules,pour tout $n \in \mathbb{Z}$
Soit ϕ une chaine de S dans R telle que

$$\begin{tikzcd}
S : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & S_{n-1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"'] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "\phi_n"'] & S_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"'] & \ldots \\
R : \ldots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "w_n"] & R_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où les $\phi_k : M \to R_k$ sont des morphismes quelconques de $A-$modules
R étant quasi- injective donc il existe ψ une chaine telle que :

$$\begin{tikzcd}
R : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & S_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\psi_{n+1}"'] & S_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\psi_n"'] & S_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{n-1}"'] & \ldots \\
R : \ldots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "w_n"] & R_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

telle que $\psi \circ \alpha = \phi$ donc $\psi_n \circ f =$

ϕ_n.Donc il existe $\psi_n : R_n \to R_n$ tel $\psi_n \circ f = \phi_n$ d'où R_n est quasi- injectif
Réciproquement supposons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, R_n est un $A-$ module quasi-injectif et démontrons que R est une suite complexe injective
Soit γ un monomorphisme de complexes

$$\begin{tikzcd}
S : \dots \arrow[r] \arrow[d, swap, "\gamma"] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, swap, "\gamma_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, swap, "\gamma_n"] & S_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, swap, "\gamma_{n-1}"] & \dots \\
R : \dots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "w_n"] & R_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Soit β une chaine de complexes telle que :

$$\begin{tikzcd}
R : \dots \arrow[r] \arrow[d, swap, "\beta"] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, swap, "\beta_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, swap, "\beta_n"] & S_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, swap, "\beta_{n-1}"] & \dots \\
R : \dots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "w_n"] & R_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Alors comme pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
R_n est quasi- injectif et γ_n est un monomorphisme de $A-$modules donc il existe $\lambda_n : R_n \to R_n$ vérifiant $\beta_n = \lambda_n \circ \gamma_n$ Soit λ telle que :

$$\begin{tikzcd}
R : \dots \arrow[r] \arrow[d, swap, "\lambda"] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, swap, "\lambda_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, swap, "\lambda_n"] & R_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, swap, "\lambda_{n-1}"] & \dots \\
R : \dots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "w_n"] & R_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Démontrons que λ est une chaine

$$\begin{tikzcd}
S \dots \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dd, bend right=60, swap, "\beta"] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & S_{n-1} \arrow[r, "u_{n-1}"] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & \dots \\
R \dots \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\lambda_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\lambda_n"] & R_{n-1} \arrow[r, "v_{n-1}"] \arrow[d, "\lambda_{n-1}"] & \dots \\
R \dots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "w_n"] & R_{n-1} \arrow[r, "w_{n-1}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Il suffit que $w_{n+1} \circ \lambda_{n+1} = \lambda_n \circ v_{n+1}$
On a $w_{n+1} \circ \beta_{n+1} = \beta_n u_{n+1}$ car β est une chaine
Or $\beta_n = \lambda_n \circ \gamma_n$
donc $w_{n+1} \circ (\lambda_{n+1} \circ \gamma_{n+1}) = (\lambda_n \circ \gamma_n) \circ u_{n+1}$
alors $(w_{n+1} \circ \lambda_{n+1}) \circ \gamma_{n+1} = \lambda_n \circ (\gamma_n \circ u_{n+1})$
ainsi $(w_{n+1}) \circ \lambda_{n+1}) \circ \gamma_{n+1} = \lambda_n \circ (v_{n+1} \circ \gamma_{n+1})$
En définitive $(w_{n-1} \circ \lambda_{n+1}) \circ \gamma_{n-1} = (\lambda_n \circ v_{n+1}) \circ \gamma_{n+1}$
Or γ_{n+1} est un monomorphisme de$A-$ modules d'où $w_{n+1} \circ \lambda_{n+1} = \lambda_n \circ v_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$
d'où λ est une chaine
Vérifons que $\lambda \circ \gamma = \beta$
On sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\beta_n = \lambda_n \circ \gamma_n$ avec $\beta = (\beta_n), \gamma = (\gamma_n)$ et $\lambda = (\lambda_n)$
d'où $\lambda \circ \gamma = \beta$.Ce qui démontre que R est une suite complexe quasi- injective

suite complètement invariante -essentielle

Définition 44 *Soit* N *un* $A-$ *sous module d'un module* M *est dit complètement invariant si pour tout endomorphisme* f *de* M *on a* $f(N) \sqsubseteq N$

Définition 45 *Soient* C *une suite complexe de* $A-$ *modules et* E *un sous complexe de* C *tels que :*
$C : \ldots C_{n+1} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \ldots$
et
$E : \ldots E_{n+1} \rightarrow E_n \rightarrow E_{n-1} \rightarrow \ldots$
E *est un sous complexe complètement invariant dans* C *si pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, E_n *est complètement invariant*

Définition 46 *Un* $A-$ *sous module* E *de* M *est essentiel dans* M *si pour tout sous module non nul* K *de* M, *on a* $E \sqcap K \neq 0$; M *est appelée extension essentielle de* E *te essentielle dans* C *si pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, E_n *est essentiel dans* C_n

3.3.3 suite quasi projective

Définition 47 *Un $A-$ module P est dit quasi- projectif si pour tout $A-$ module N et tout épimorphisme $\pi : P \to N$ et tout homomorphisme $\phi : P \to N$,il existe un endomorphisme $\psi : P \to P$ tel que $\pi \circ \psi = \phi$ illustré par le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "\phi"] & \\
P \arrow[r, "\pi"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Définition 48 *Soient C et E deux suites complexes de $A-$ modules. On dit que C est une suite quasi-projective si pour tout épimorphisme : $C \to E$ et pour tout morphisme $f : C \to E$,il existe une chaine $h : C \to C$ vérifiant : $f = g \circ h$, illustré par le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
C \arrow[r, "g"] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Théorème 20 *Soit $C : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \to \ldots$ une suite complexe de $A-$ modules.C est quasi-projective si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, C_n est un module quasi-projectif*

Preuve *Supposons que E est quasi- projective*
Soient $f : N \to M$ un épimorphisme de $A-$ modules et $\phi_n : E_n \to M$ un morphisme de $A-$ modules
Soient S et$E$ deux suites complexes et α une chaine de E vers S telles que :

$$\begin{tikzcd}
E : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & E_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\alpha_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\alpha_n"] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & \ldots \\
S : \ldots \arrow[r] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] & S_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

où $E_n = M$ et $v_n = Id_M$
$S_n = N$ et $u_n = Id_N$
Soit α_n un épimorphisme de $A-$ modules
Soit ϕ une chaine de E dans S vérifiant :

$$\begin{tikzcd}
E : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "w_n"] \arrow[d, "\phi_n"] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-1}"] & \ldots \\
S : \ldots \arrow[r] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] & S_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Avec les $\phi_k : E_k \to M$ sont des morphismes quelconques de $A-$ modules.

Comme E est quasi- projective alors il existe une chaine ψ telle que :

$$\begin{tikzcd}
E : \dots \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] \arrow[d, "\psi_{n+1}"'] & E_n \arrow[r, "w_n"] \arrow[d, "\psi_n"'] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{n-1}"'] & \dots \\
R : \dots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] & R_n \arrow[r, "v_n"] & R_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

où $\alpha \circ \psi = \phi$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n \circ \psi_n = \phi_n$. Il existe alors $\psi_n : E_n \to R_n$ telle que $f \circ \psi_n = \phi_n$.Ainsi E_n est quasi- projectif

Réciproquement supposons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, E_n est un $A-$ module quasi-projectif et démontrons que E est une suite quasi- projective

Soit γ un épimorphisme telle que :

$$\begin{tikzcd}
E : \dots \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & E_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"'] & E_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\gamma_n"'] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & \dots \\
S : \dots \arrow[r] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] & S_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Soitβ une chaine complexe vérifiant :

$$\begin{tikzcd}
E : \dots \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] \arrow[d, "\beta_{n+1}"'] & E_n \arrow[r, "w_n"] \arrow[d, "\beta_n"'] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{n-1}"'] & \dots \\
S : \dots \arrow[r] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] & S_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Alors comme pour tout $n \in \mathbb{Z}$,E_n est projectif et γ_n est un épimorphisme de $A-$ modules ainsi il existe $\lambda_n : E_n \to R_n$ vérifiant $\gamma_n \circ \lambda_n$

Soit λ telle :

$$\begin{tikzcd}
E : \dots \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] \arrow[d, "\lambda_{n+1}"'] & E_n \arrow[r, "w_n"] \arrow[d, "\lambda_n"'] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{n-1}"'] & \dots \\
R : \dots \arrow[r] & R_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] & v_n \arrow[r, "v_n"] & R_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Démontrons que λ est une chaine

$$\begin{tikzcd}
E \dots \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dd, bend right, "\lambda"'] & E_{n+1} \arrow[r, "v_{n+1}"] \arrow[d, "\gamma_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "v_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & E_{n-1} \arrow[r, "v_{n-1}"] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & \dots \\
S \dots \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & S_{n+1} \arrow[r, "u_{n+1}"] \arrow[d, "\beta_{n+1}"] & S_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & S_{n-1} \arrow[r, "u_{n-1}"] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & \dots \\
E \dots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "w_{n+1}"] & E_n \arrow[r, "w_n"] & E_{n-1} \arrow[r, "w_{n-1}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Il suffit que $\lambda_{n+1} \circ w_{n+1} = v_{n+1} \circ \lambda_n$

Or $\beta_{n+1} \circ w_{n+1} = u_{n+1} \circ \beta_n$ car β est une chaine

Comme $\gamma_n \circ \lambda_n = \beta_n$ donc :

$\gamma_{n+1} \circ \lambda_{n+1} \circ w_{n+1} = u_{n+1} \circ (\gamma_n \circ \lambda_n)$

Ainsi $(\gamma_{n+1} \circ \lambda_{n+1}) \circ w_{n+1} = u_{n+1} \circ (\gamma_n \circ \lambda_n)$

Alors $\gamma_{n+1} \circ (\lambda_{n+1} \circ w_{n+1}) = \gamma_{n+1} \circ (v_{n+1} \circ \lambda_n)$

Or γ_{n+1} et un épimorphisme d'où $\lambda_{n+1} \circ w_{n+1} = v_{n+1} \circ \lambda_n$ ce qui justifie que λ est une chaine complexe

Vérifions que $\gamma \circ \lambda = \beta$
On sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\beta_n = \gamma_n \circ \lambda_n$ *d'où* $\beta = \gamma \circ \lambda$. *Ce qui établit que* E *est une suite complexe quasi- projective*

3.3.4 suites de fitting

Définition 49 *Un $A-$ module M est dit module de $FITTING$ si pour tout endomorphisme f de M,il existe un entier $n \geq 1$ tel que $M = Kerf^n \oplus Imf^n$*

Définition 50 *Une suite complexe C est dite de $FITTING$ si pour toute chaine f de C dans lui méme, il existe un entier $n \geq 1$ tel $C = Kerf^n \oplus Imf^n$*

Théorème 21 *Soit C une suite telle que $C : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$ Soit $C : \ldots \to C_{n+1} \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots$ une suite complexe de $A-$ modules. C est dite suite de $FITTING$ si et seulement pour tout $n \in \mathbb{Z}$, C_n est un $A-$ module de $FITTING$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$*

Preuve *Supposons que C est une suite complexe de $FITTING$ alors il existe un entier naturel non nul k tel que $C = Kerf^k \oplus Imf^k$ donc $Kerf^k \sqcap Imf^k = 0$ et $C = Kerf^k + Imf^k$ d'où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $C_n = Kerf_n^k + Imf_n^k$ d'où C_n est fortement hopfien et fortement cohpfien ainsi C_n est de $FITTING$*
Réciproquement supposons C_n est un $A-$ module de $FITTING$ donc $(Kerf_n^k)$ et (Imf_n^k) sont stationnaires d'où $(Kerf^k)$ et (Imf^k) sont stationnaires. Ce qui démontre que C est une suite complexe de $FITTING$

Théorème 22 *Soit C une suite complexe on a :*
Si C quasi$-$ $projective$ et $fortement$ $cohopfienne$ alors C est $fortement$ $hopfienne$
Si C quasi$-$ $injective$ et $fortement$ $hopfienne$ alors C est $fortement$ $cohopfienne$

Preuve *Supposons que la suite C est quasi-projective et $fortement$ $cohopfienne$ alors C_n est quasi-projectif d'après le théorème 4 et $(kerf_n^k)$ est stationnaire ce qui implique que C_n est quasi-projectif et $(kerf^k)$ est stationnaire ainsi la suite C est fortement hopfienne*
Supposons que la suite C est quasi-injective et $fortement$ $hopfienne$ alors C_n est quasi-injectif d'après le théorème 3 et (Imf_n^k) est stationnaire ce qui implique que C_n est quasi-injectif et (Imf^k) est stationnaire ainsi la suite C est fortement cohopfienne

Théorème 23 *Tout complexe $quasi$ $-$ $projectif$ et $cohopfien$ ou $quasi$ $-$ $injectif$ et $hopfien$ est un complexe de FITTING*

Preuve *Supposons que C est une suite $quasi$ $-$ $projective$ et $cohopfienne$ alors d'après le théorème précédent C est $hopfienne$ ainsi C est $cohopfienne$ $ethopfienne$ donc elle est un complexe de $FITTING$*
Supposons que C est une suite $quasi-injective$ et $hopfienne$ alors d'après le théorème précédent C est $cohopfienne$ ainsi C est $cohopfienne$ $ethopfienne$ donc elle est un complexe de $FITTING$

Chapitre 4

Cw-complexes

4.1 introduction

Le chapitre 4 est une investigation sur les $CW-$ complexes. . On y donne la définition du foncteur homologique H_n de la catégorie $COMP$ dans la catégorie Ab. On a aussi étudié les suites exactes de complexes. On a aussi énoncé et démontré le théorème portant sur l'homomorphisme de liaison permettant de transformer une suite exacte courte en suite exacte longue. Le lemme du serpent dans la catégorie $COMP$ est énoncé et démontré.
Ensuite on applique les notions de la première partie à l'homologie des $CW-$ complexes. Cela commence par des préliminaires sur les limites inductives et la notion d'homotopie.
La dernière partie du chapitre 4 est consacrée à l'étude des objets Hopfiens,objets Co-hopfiens dans la catégories des $G-$ $CW-$ complexes. Ainsi dans les deux sous sections qui vont suivre on étudie les objets Hopfiens, objets Co-Hopfiens de la catégorie $G\mathcal{H}$ où G est un groupe discret et $G\mathcal{H}$ désignant la catégorie des G homotopie des G-CW avec points base.

4.2 Généralités sur les suites complexes

Lemme 2 *Serpent*
Considérons commutatif de $A-$ modules :

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "i"'] & Ker(g) \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "j"'] & Ker(h) \arrow[d, "k"'] \\
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "h"'] \\
M' \arrow[r, "u'"'] \arrow[d, "p"'] & N' \arrow[r, "v'"'] \arrow[d, "q"'] & P' \arrow[d, "r"'] \\
Coker(f) \arrow[r, "u_2"'] & Coker(g) \arrow[r, "v_2"'] & Coker(h)
\end{tikzcd}$$

où les lignes (u, v) et (u', v') sont exactes alors on a :
i) on a $v_1 \circ u_1 = 0$, si u' est injectif, la suite (u_1, v_1) est exacte.
ii) on a $v_2 \circ u_2 = 0$, si v est surjectif , la suite (u_2, v_2) est exacte
iii) Supposons u' injectif et v surjectif alors il existe un homomorphisme et un

seul $d : Ker(h) \longrightarrow Coker(f)$ *tel que*

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "i"'] & Ker(g) \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "j"'] & Ker(h) \arrow[d, "k"'] \arrow[dddll, dashed] \\
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "h"'] \\
M' \arrow[r, "u'"'] \arrow[d, "p"'] & N' \arrow[r, "v'"'] \arrow[d, "q"'] & P' \arrow[d, "r"'] \\
Coker(f) \arrow[r, "u_2"'] & Coker(g) \arrow[r, "v_2"'] & Coker(h)
\end{tikzcd}$$

et ayant la propriété suivante :Si $z \in Ker(h)$, $y \in N$ *et* $x' \in M'$ *vérifiant* $v(y) = k(z)$ *et* $u'(x') = g(y)$, *on a* $d(z) = p(x')$. *De plus on a la suite exacte :*

$$(*) : Ker(f) \xrightarrow{u_1} Ker(g) \xrightarrow{v_1} Ker(h) \xrightarrow{d} Coker(f) \xrightarrow{u_2} Coker(g) \xrightarrow{v_2} Coker(h)$$

Proposition 23 *Soit* $(C, d) : \ldots \to C_{n+1} \overset{d_{n+1}}{\to} C_n \overset{d_n}{\to} C_{n-1} \overset{d_{n-1}}{\to} \ldots$ *une suite complexe de* $A-$ *modules à gauche et* L *un* $A-$ *module à droite.Alors* $(L \otimes C, 1_L \otimes d)$ *est une suite complexe de* $A-$ *modules*
où $1_L \otimes d_n : L \otimes C_n \longrightarrow L \otimes C_{n-1}$

Preuve *Calculons* $(1_L \otimes d_n) \circ (1_L \otimes d_{n+1})$
On obtient $(1_L \otimes d_n) \circ (1_L \otimes d_{n+1}) = (1_L \circ 1_L) \otimes (d_n \circ d_{n+1}) = 1_L \otimes 0 = 0$. *Ce qui prouve que* $(L \otimes C, 1_L \otimes d)$ *est une suite complexe.*

Définition et proposition 3 *On appelle foncteur homologie* H_n *le foncteur défini par*
$H_n : Comp \longrightarrow Ab$ *pour tout objet* C *de* $Comp$ *on a* $H_n(C) = kerd_n/Imd_{n+1}$ *et pour toute chaine* $f : C \longrightarrow C'$ *de* $Comp$ *on a le morphisme de* Ab *défini par*

$$\begin{array}{rccc} H_n(f) : & H_n(C) & \to & \overline{H_n(C')} \\ & \overline{z_n} & \mapsto & \overline{f_n(z_n)} \end{array}$$

Preuve *.Soit* f *la chaine définie par :*

$$\begin{tikzcd}
C : \ldots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \ldots \\
C' : \ldots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Comme $d_n \circ d_{n+1} = 0$ *donc* $Imd_{n+1} \subseteq kerd_n$ *et or* $kerd_n$ *et* Imd_n *sont des sous groupes commutatifs de* C_n *alors* $H_n(C) = kerd_n/Imd_{n+1}$ *est un groupe*

commutatif.
.Démontrons que $H_n(f)$ *est bien définie :*
Soit $z_n \in kerd_n$ *donc* $d_n(z_n) = 0$ *alors* $f_{n-1} \circ d_n(z_n) = 0$ *d'après la commutativité du diagramme* $d'_n \circ f_n(z_n) = 0$ *donc* $f_n(z_n) \in kerd'_n$. *Donc si* $\bar{z_n} \in H_n(C)$ *alors* $H_n(f)(\bar{z_n}) \in H_n(C')$
Soit $z_n \in Imd_{n+1}$ *donc il existe* $z_{n+1} \in C_{n+1}$ *tels que* $d_{n+1}(z_{n+1}) = z_n$
alors $f_n \circ d_{n+1}(z_{n+1}) = f_n(z_n)$ *or* $d'_{n+1} \circ f_{n+1}(z_{n+1}) = f_n(z_n)$ *donc* $f_(z_n) \in Imd'_{n+1}$
ainsi si $z_n \in Imd_{n+1}$ *donc* $H_n(f)(\bar{z_n}) = \bar{0}$
Soit $\bar{z_n} = \bar{z'_n}$ *donc* $\overline{z_n - z'_n} = \bar{0}$ *alors* $z_n - z'_n \in Imd_{n+1}$ *ainsi* $H_n(f)(\overline{z_n - z'_n}) = \overline{f_n(z_n - z'_n)} = \bar{0}$ *d'où* $\overline{f_n(z_n)} = \overline{f_n(z'_n)}$ *alors* $H_n(f)(\bar{z_n}) = H_n(f)(\bar{z'_n})$. *Ainsi* $H_n(f)$ *est bien définie.*
$.H_n(f \circ g)(\bar{z_n}) = \overline{(f \circ g)_n(z_n)} = \overline{f_n \circ g_n(z_n)} = \overline{f_n(g_n(z_n))} = H_n(f)(\overline{g_n(z_n)})$
On obtient $H_n(f)(H_n(g)(\bar{z_n})) = H_n(f) \circ H_n(g)(\bar{z_n})$ *par conséquent* $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$
$.\ H_n(1_C)(\bar{z_n}) = \overline{(1_C)_n(z_n)} = \overline{1_{C_n}(z_n)} = \bar{z_n} = 1_{H_n(C)}(\bar{z_n})$ *ainsi* $H_n(1_C) = 1_{H_n(C)}$
En définitive H_n *est un foncteur covariant de Comp dans Ab.*

Définition 51 *Soit* $f : C \longrightarrow C'$ *une chaine de Comp.* f *est dite nullchomotopie s'il existe pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *un A− morphisme* $S_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1}$ *vérifiant :*

$$f_n = d'_{n+1} \circ S_n + S_{n-1} \circ d_n$$

avec :

$$\begin{tikzcd}
C : \dots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "S_n"'] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "S_{n-1}"'] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \dots \\
C' : \dots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Définition 52 *Soient* $f, g : C \longrightarrow C'$ *deux chaines de Comp.* f *est dite homotope à* g *si* $f - g$ *est dite nullehomotope*

Proposition 24 *Soient* $f, g : C \longrightarrow C'$ *deux chaines de Comp, telles que* f *est homotope à* g. *Alors pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *on a :* $H_n(f) = H_n(g)$

Preuve *Soient* S *et* $f - g$ *vérifiant :*

$$f_n - g_n = d'_{n+1} \circ S_n + S_{n-1} \circ d_n$$

avec

$$\begin{tikzcd}
C : \dots \arrow[r] \arrow[d, "f-g"'] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}-g_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "S_n"'] \arrow[d, "f_n-g_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "S_{n-1}"'] \arrow[d, "f_{n-1}-g_{n-1}"'] & \dots \\
C' : \dots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Supposons que $z_n \in kerd_n$ *donc* $d_n(z_n) = 0$ *d'où* $S_{n-1} \circ d_n(z_n) = 0$
alors $(f_n - g_n)(z_n) = d'_{n+1} \circ S_n(z_n)$ *ainsi* $(f_n - g_n)(z_n) \in Imd'_{n+1}$ *on obtient* $\overline{(f_n - g_n)(z_n)} = \bar{0}$ *ce qui donne* $\overline{f_n(z_n)} = \overline{g_n(z_n)}$ *d'où* $H_n(f) = H_n(g)$

Proposition 25 *La relation de homotopie est une relation d'équivalence*

Preuve *f est homotope à lui même car* $f_n - g_n = d_{n+1} \circ 0 + 0 \circ d_n$ *où 0 désigne le morphisme nul* $0 : C_k \longrightarrow C_{k-1}$, *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$
Si f est homotope à g on obtient $f_n - g_n = d'_{n+1} \circ S_n + S_{n-1} \circ d_n$
ce qui donne $g_n - f_n = d'_{n+1} \circ (-S_n) + (-S_{n-1}) \circ d_n$ *donc il existe un morphisme* $-S_k : C_k \longrightarrow C_{k-1}$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *donc g est homotope à f*
Si f et g homotopes et g et h homotopes avec $f : C \longrightarrow C'$ *et* $g : C' \longrightarrow C''$

Proposition 26 *Soient* C, C', C'' *trois suites complexes de Comp et* $f : C' \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *et* $g : C \longrightarrow C''$ *deux chaines de Comp. Alors* $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de chaines si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $0 \longrightarrow C'_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} C''_n \longrightarrow 0$

Proposition 27 *Soit* $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0$ *est une suite exacte de Comp.Alors pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, *il existe un homomorphisme* δ_n *tel que*

$$\begin{array}{cccc} \delta_n : & H_n(C'') & \rightarrow & H_{n-1}(C') \\ & \tilde{z''} & \mapsto & \overline{i^{-1}_{n-1} \circ d_n \circ p_n(z'' + Imd_n)} \end{array}$$

Preuve *Soit le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
C' \dots \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "i_{n+1}"] & C'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] \arrow[d, "i_n"] & C'_{n-2} \arrow[r, "d'_{n-2}"] \arrow[d, "i_{n-1}"] & \dots \\
C \dots \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "p_{n+1}"] & C_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "p_n"] & C_{n-2} \arrow[r, "d_{n-2}"] \arrow[d, "p_{n-1}"] & \dots \\
C'' \dots C''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"] & C''_n \arrow[r, "d''_n"] & C''_{n-1} \arrow[r, "d''_{n-1}"] & C''_{n-2} \arrow[r, "d''_{n-2}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

On sait que $H_n(C'') = kerd''_n / Imd''_{n+1}$. *Soit* $z'' \in kerd''_n \subseteq C''_n$ *comme* p_n *est un épimorphisme alors il existe* $a \in C_n$ *tel que* $p_n(a) = z''$ *et* $d_n(a) \in C_{n-1}$ *or* $p_{n-1} \circ d_n(a) = d'_n \circ p_n(a) \circ d''_n(z'') = 0$
Donc $d_n(a) \in kerp_{n-1}$ *or* $kerp_{n-1} = Imp_{n-1}$ *alors* $d_n(a) \in Imp_{n-1}$ *comme* i_{n-1} *est un monomorphisme donc il existe un unique* $a' \in C'_{n-1}$ *tel que* $i_{n-1}(a') = d_n(a)$

Démontrons que $a' \in kerd'_{n-1}$. *On a* $i_{n-1}(a') = d_n(a) \in kerd_{n-1}$ *donc* $d_{n-1} \circ i_{n-1}(a') = 0$ *ce qui donne* $i_{n-2} \circ d'_{n-1}(a') = 0$ *or* i_{n-2} *est un monomorphisme alors* $d'_{n-1}(a') = 0$ *d'où* $a' \in kerd'_{n-1}$

Donc $\delta_n(z'' + Imd''_{n+1}) = a' + Imd'_n \in kerd'_{n+1}/Imd'_n = H_{n-1}(C')$

Démontrons l'unicité de l'image de $\bar{z}''$ *par* δ_n
Soit $e \in C_n$ *tel que* $p_n(e) = p_n(a) = z''$ *donc* $p_n(e-a) = 0$ *donc* $e-a \in kerp_n = Imi_n$ *alors* $e - a \in Imdp_n$ *donc il existe* $m \in C'_n$ *tel que* $i_n(m) = e - a$ *alors* $d_n \circ i_m(m) = d_n(e - a)$ *ainsi* $i_{n-1} \circ d'_n(m) = d_n(e) - d_n(a)$ *il existe* e' *tel que* $d_n(e) = i_{n-1}(e')$ *et* $i_{n-1} \circ d'_n(m) = i_{n-1}(e') - i_{n-1}(a') = i_{n-1}(e' - a')$ *et comme* i_{n-1} *est un monomorphisme alors un monomorphisme alors* $d'_n(m) = e' - a'$ *donc* $a' + Imd'n = e' + Imd'_n$ *donc* δ_n *est bien définie*

4.3 Résolutions de complexes et Homotopie

4.3.1 Homologie des CW-complexes

Définition 53 *Une structure de CW complexe sur un espace X est la donnée :*
i)d'une filtration de X :

$$Sk^{-}1X \hookrightarrow Sk^0X \ldots \hookrightarrow Sk^nX \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow X$$

par des sous-espaces Sk^nX *appelés* $n-$*squelettes de X*
ii) pour chaque entier $n \geq 0$ *d'un ensemble d'indices* Σ_n *et d'une famille* $(g_\alpha)_{\alpha \in \Sigma_n}$
d'applications continues $g_\alpha : B_n \longrightarrow Sk^nX$ *telles que* $g_n(S^{n-1}) \subset Sk^{n-1}X$
Ces données vérifient : $B_{n,\alpha} = B_n$ *pour tout* $\alpha \in \Sigma_n$ *et* $S_\alpha^{n-1} = S^{n-1}$ *le bord de* $B_{n,\alpha}$
L'application g_α *induit, d'après ii) une application* $f_\alpha : S_\alpha^{n-1} \longrightarrow Sk^{n-1}X$
Notons g_n*(respectivement* f_{n-1} *) l'unique application*

Définition 54 *On dit qu'un diagramme commutatif de* $A-$ *modules et d'homomorphismes :*

$$\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[drr, "f_0"'] & M_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[dr, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"] & \ldots \arrow[r] & M_n \arrow[r, "u_n"] \arrow[dll, "f_n"] & \ldots \\
 & & M & & &
\end{tikzcd}$$

définit M comme limite inductive des (M_n, u_n) *si quelque soit le module N et les applications linéaires* $g_n : M_n \longrightarrow N$ *telles que que l'on ait* $g_{n+1} \circ u_n = g_n$*, quel que soit n, alors il existe un unique homomorphisme* $g : M \longrightarrow N$ *telle que l'on ait* $g \circ f_n = g_n$*,quel que soit n*
Notation :On écrit alors $M = \varinjlim(M_n, u_n)$

Lemme 3 *Si les* u_n *sont des isomorphismes pour n assez grand il en va de même des* f_n

Preuve *Supposons que les u_n soient des isomorphismes pour $n \geq n_0$ et définissons les applications linéaires $g_n : M_n \longrightarrow M_{n_0}$ en posant*

$$g_n = \begin{cases} u_{n_0} \circ u_{n_0-1} \circ \ldots \circ u_n & si \quad n \prec n_0 \\ idM_{n_0} & si \quad n = n_0 \\ u_{n_0}{}^{-}1 \circ u_{n_0+1}{}^{-}1 \circ \ldots u_n{}^{-}1 & si \quad n \succ n_0 \end{cases}$$

On vérifie que $g_{n+1} \circ u_n = g_n$. Donc il existe un homomorphisme $g : M \longrightarrow M_{n_0}$ tel que l'on ait $g \circ f_n = g_n$ pour tout n. En particulier, on obtient pour $n = n_0$, $g \circ f_{n_0} = idM_{n_0}$. Par ailleurs on a :

$$f_{n_0} \circ g \circ f_n = f_{n_0} \circ g_n = \begin{cases} f_{n_0} \circ u_{n_0} \circ \ldots \circ u_n = f_n & si \quad n \prec n_0 \\ f_{n_0} & si \quad n = n_0 \\ f_{n_0} \circ u_{n_0}{}^{-1} \circ \ldots \circ u_n{}^{-1} & si \quad n \succ n_0 \end{cases} \text{ Dans tous}$$

les cas on a l'égalité $(f_{n_0} \circ g) \circ f_n = f_n$. En utilisant la définition des limites inductives on peut $M = N$ et $g_n = f_n$ on a idM est le seul homomorphisme h pour lequel on a $h \circ f_n$. On a aussi $f_{n_0} \circ g = idM$.Par conséquent f_{n_0} et $f_n = f_{n_0} \circ u_n{}^{-1} \circ \ldots u^{-1}$ pour $n \succ n_{n_0}$ sont des isomorphismes

Théorème 24 *Soit $X_0 \overset{i_0}{\hookrightarrow} X_1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} \ldots \overset{i_{n-1}}{\hookrightarrow} X_n \ldots \hookrightarrow X$ une filtration de X par des espaces X_n séparés. Soit $f_n : X_n \hookrightarrow X$ l'inclusion. Alors le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
H_p(X_0) \arrow[r, "H_p(i_0)"] \arrow[drr, "H_p(f_0)"'] & H_p(X_1) \arrow[r, "H_p(i_1)"] \arrow[dr, "H_p(f_1)"] & \ldots \arrow[r] & H_p(X_n) \arrow[r, "H_p(i_n)"] \arrow[dl, "H_p(f_n)"] & \ldots \\
 & & H_p(X) & &
\end{tikzcd}$$

définit, pour tout p, $H_p(X)$ comme limite inductive $H_p(X) = \varinjlim(H_p(X_n), H_p(i_n))$

Preuve *Soit α un élément de $H_p(X)$ et soit $z \in C_p(X)$ un cycle dans la classe α. Comme z est une $p-$ chaîne, on peut écrire :*
$z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T_j$ où les $T_j : \Delta_p \longrightarrow X$ sont des $p-$ simplexes. Pour tout j, il existe un entier n_j tel que l'on ait $T_j(\Delta_p) \subset X_{n_j}$; Soit $n = sup \quad n_j$ pour $1 \leq j \leq k$. On a alors $T_j(\Delta_p) \subset X_n$ donc $C_p(X_n) \subset C_p(X)$ d'où $C_p(f_n)(z) = z$. Par passage à l'homologie $H_p(f_n)(\alpha_n) = \alpha$. On a donc démontré

i) Quel que soit $\alpha \in H_p(X)$, il existe un entier n et un élément $\alpha_n \in H_p(X_n)$ tels que que l'on ait $H_p(f_n)(\alpha_n) = \alpha$

Soient maintenant $\alpha_n \in H_p(X_n)$ et $\alpha_m \in H_p(X_m)$ deux éléments vérifiant $H_p(f_n)(\alpha_n) = H_p(f_m)(\alpha_m)$
ii) Sous ces hypothèses il existe un entier q assez grand tel que que l'on ait :
$H_p(i_{q-1})) \circ \ldots \circ H_p(i_n)(\alpha_n) = H_p(i_{q-1})) \circ \ldots \circ H_p(i_m)(\alpha_m)$
En effet, soient z_n et z_m des cycles dans les classes α_n et α_m. On a $z_n \in$

$C_p(X_n) \subset C_p(X)$ et $z_m \in C_p(X_m) \subset C_p(X)$. Au niveau des cycles, l'égalité $H_p(f_n)(\alpha_n) = H_p(f_m)(\alpha_m)$. Il existe $(n+1)$ simplexes $\tau_1, \ldots, \tau_l$ de X et des scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_l$ de A tels que que l'on ait :
$z_n - z_m = \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_{p+1}(\tau_j)$. Pour q assez grand on a $\tau_j(\Delta_{p+1}) \subset X_q$ par conséquent $z_n - z_m$ est un bord dans $C_p(X_q)$

Soit M un $A-$ module , et soient $g_n : H_p(X_n) \longrightarrow M$ des applications linéaires vérifiant $g_{n+1} \circ H_p(i_n) = g_n$. On définit $g : H_p(X) \longrightarrow M$ de la façon suivante. D'après i) il existe , étant donné $\alpha \in H_p(X)$, un $\alpha_n \in H_p(X_n)$ tel que l'on ait $H_p(f_n)(\alpha_n) = \alpha$. En posant $g(\alpha) == g_n(\alpha_n)$ et on obtient $g \circ H_p(f_n) = g_n$

Théorème 25 *On a :*

$$\tilde{H}_p(P_n(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & si \quad p \quad pair \quad ou \quad p \succ n \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & si \quad p \quad impair \quad et \quad p \prec n \\ \mathbb{Z} & si \quad p = n \quad impair \end{cases}$$

et

$$\tilde{H}_p(P_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & si \quad p = 0 \quad ou \quad p \succ n \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & sinon \end{cases}$$

Corollaire 7 *On a :*

$$\tilde{H}_p(P_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & si \quad p \quad pair \quad ou \quad p \quad negatif \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & si \quad p \quad impair \end{cases}$$

$$\tilde{H}_p(P_\infty(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & si \quad p \leq 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & si \quad p \succ 0 \end{cases}$$

Preuve *On sait que d'après le théorème précédent , $H_p(i_n) : H_p(P_n(\mathbb{R}) \longrightarrow H_p(P_{n+1}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme pour $n \succ p$. Le lemme et le théorème précédent permettent de conclure.*

Proposition 28 *Les modules $\tilde{H}_q(Sk^n X)$ sont nuls pour $q \succ n$.*
Les homomorphismes $\tilde{H}_q(i_{n-1}) : \tilde{H}_q(Sk^{n-1} X) \longrightarrow \tilde{H}_q(Sk^n X)$ sont des isomorphismes pour $q \prec n-1$, et des surjections pour pour $q = n-1$

Proposition 29 *On a $\tilde{H}_n(Sk^n X) = Ker \tilde{H}_{n-1}(f_{n-1})$ et $H_{n-1}(Sk^n X) = Coker \tilde{H}_{n-1}(f_{n-1})$*

Preuve *SI Σ_n n'a qu'un élément, alors on a $Sk^n X = C(f_{n-1})$. La suite exacte s'écrit :*

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_n(Sk^n X) \xrightarrow{\delta_n} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\tilde{H}_{n-1}(f_{n-1})} \tilde{H}_{n-1}(Sk^{n-1} X) \xrightarrow{\tilde{H}_{n-1}(i_{n-1})} \tilde{H}_{n-1}(Sk^n X) \longrightarrow 0$$

et le résultat s'en déduit
Dans le cas général on construit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_n(Sk^n X) \xrightarrow{\delta_n} \tilde{H}_{n-1}(\coprod_{\alpha\in\Sigma_n} S_\alpha^{n-1}) \xrightarrow{\tilde{H}_{n-1}(f_{n-1})} \tilde{H}_{n-1}(Sk^{n-1}X) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(Sk^n X) \longrightarrow 0$$

Ce qui permet de conclure

En effet on a une application $\varphi : (\coprod_{\alpha\in\Sigma_n} B_{n,\alpha}, \coprod_{\alpha\in\Sigma_n} S_{\alpha^{n-1}}) \longrightarrow (Sk^X, Sk^{n-1}X)$
et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(\coprod B_{n,\alpha}, \coprod S_\alpha^{n-1}) \arrow[r, "H_n(\varphi)"] \arrow[d, "\sigma_n(B)", "\simeq"'] & H_n(Sk^n X, Sk^{n-1}X) \arrow[d, "\sigma_n(X)"] \\
\tilde{H}_{n-1}(\coprod S_\alpha^{n-1}) \arrow[r, "\tilde{H}_{n-1}(f_{n-1})"] & \tilde{H}_{n-1}(Sk^{n-1}X)
\end{tikzcd}$$

Comme $B_{n,\alpha}$ *est contractile, la flèche de gauche est un isomorphime et mais aussi* $H_n(\varphi)$ *est un isomorphisme on a alors*
$Ker\sigma_n(X) \simeq Ker\tilde{H}_{n-1}(f_{n-1})$ *et* $Coker\sigma_n(X) \simeq Coker\tilde{H}_{n-1}(f_{n-1})$

La suite exacte d'homologie de la paire $(Sk^n X, Sk^{n-1}X)$ *est donnée par :*

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_n(Sk^n X) \xrightarrow{\tilde{H}_n(j_n)} \tilde{H}_n(Sk^n X, Sk^{n-1}X) \xrightarrow{\sigma_n(X)} \tilde{H}_{n-1}(Sk^{n-1}X) \xrightarrow{\tilde{H}_{n-1}(i_{n-1})} \tilde{H}_{n-1}(Sk^n X) \longrightarrow 0$$

D'où $\tilde{H}_n(Sk^n X) = Ker\sigma_n X$ *et* $\tilde{H}_{n-1}(Sk^n X) = Coker\sigma_n(X)$

Théorème 26 *Les homomorphismes* $\tilde{H}_q(k_n) : \tilde{H}_q(Sk^n X) \longrightarrow \tilde{H}_q(X)$ *sont des isomorphismes pour* $n \succ q$

Corollaire 8 *Si tous les* Σ_n *sont des ensembles finis et si l'anneau* A *est principal, les modules* $\tilde{H}_q(X)$ *sont des modules de type finis (en particulier si l'anneau des coefficients est un corps,ce sont des espaces vectoriels de dimension finie)*

Preuve *Le module* $\tilde{H}_q(X)$ *est isomorphe à* $\tilde{H}_q(Sk^{q+1}X)$.
Il suffit donc de démontrer que les modules $\tilde{H}_q(Sk^q X)$ *sont de type fini quels que soient* q *et* n. *On va raisonner par récurrence sur* n
Pour $n = 0$, *on a* $Sk^0 X$ *étant un ensemble fini de points, la propriété est vérifiée.*
Le passage de $n - 1$ *à* n *se fait de la façon suivante d'après la proposition précédente et l'hypothèse de récurrence* $\tilde{H}_q(Sk^n X)$ *est un quotient de* $\tilde{H}_q(Sk^{n-1}X)$ *pour* $q \prec n$, *donc de type fini. Comme* Σ_n *est un ensemble fini ,* $\tilde{H}_{n-1}(\cup_{\alpha\in\Sigma_n} S_\alpha^{n-1})$ *est un module libre de type fini et par conséquent* $\tilde{H}_n(Sk^n X)$ *est libre de type fini*

4.3.2 Résolutions de complexes et Homotopies

Définition 55 *On appelle résolution du complexe C_**

la donnée d'une suite exacte de complexes et d'homomorphismes :

$$\ldots \longrightarrow C_{*,p} \xrightarrow{d_{*,p}} C_{*,p-1} \xrightarrow{d_{*,p-1}} \ldots C_{*,0} \xrightarrow{d_{*,0}} C_* \longrightarrow 0$$

Pour tout entier p, on a $C_{*,p}$ est un complexe,sa composante de degré n, $(C_{*,p})_n$ désignée par $C_{n,p}$ De même $d_{*,p} : C_{*,p} \longrightarrow C_{*,p-1}$ est un morphisme de complexes. On note $(d_{*,p})_n = d_{n,p}$ et $d_{n,p} : C_{n,p} \longrightarrow C_{n,p-1}$ est un homomorphisme de $A-$ modules. Enfin $C_{n,p} = 0$ pour $n \prec 0$,quel que soit $p \geq 0$

Proposition 30 *Soit $(C_{*,p}, d_{*,p})$ une résolution du complexe C_*. On a alors $d_{*,p-1} \circ d_{*,p} = 0$ quel que soit $p \succ 0$. Alors $H_0(d_{*,p-1}) \circ H_0(d_{*,p}) = 0$ et la suite de modules et d'homomorphismes :*

$$\longrightarrow H_0(C_{*,p}) \xrightarrow{H_0(d_{*,p})} H_0(C_{*,p-1}) \xrightarrow{H_0(d_{*,p-1})} \ldots \xrightarrow{H_0(d_{*,1})} H_0(C_{*,0}) \xrightarrow{0} 0$$

est un complexe que l'on notera $K_*(C)$

Théorème 27 *Soit $(C_{*,p}, d_{*,p})$ une résolution acyclique du complexe C_*. Alors il existe un isomorphisme $\theta_n : H_n(K_*(C)) \longrightarrow H_n(C_*)$ pour tout entier n*

Preuve *D'après les propriétés des suites exactes, on a une suite exacte courte :*

$$0 \longrightarrow Imd_{*,p+1} \xrightarrow{i_{*,p+1}} C_{*,p} \xrightarrow{j_{*,p}} Imd_{*,p} \longrightarrow 0$$

pour tout $p \geq 0$. La suite exacte d'homologie associée s'écrit :

$$H_n(C_{*,p}) \longrightarrow^{H_n(j_{*,p})} H_n(Imd_{*,p}) \xrightarrow{\sigma_n} H_{n-1}(ImC_{*,p+1}) \xrightarrow{H_n(i_{*,p+1})} H_{n-1}(C_{*,p})$$

Mais si on a $n \succ 1$, les modules $H_(C_{*,p})$ et $H_{n-1}(C_{*,p})$ sont nuls et par conséquent σ_n est un isomorphisme. Comme on a $Imd_{*,0}$ on obtient par récurrence sur p,un isomorphisme $H_n(C_*) \longrightarrow H_1(Imd_{*,n-1})$ Ecrivons maintenant le début de la suite exacte d'homologie associée à la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow Imd_{*,n} \xrightarrow{i_{*,n}} C_{*,n-1} \xrightarrow{j_{*,n-1}} Imd_{*,n-1} \longrightarrow 0$$

On obtient :

$$H_1(C_{*,n-1}) \longrightarrow H_1(Imd_{*,n-1}) \xrightarrow{\sigma_1} H_0(Imd_{*,n}) \xrightarrow{H_0(i_{*,n})} H_0(C_{*,n-1}) \xrightarrow{H_0(j_{*,n-1})} H_0(Imd_{*,n-1}) \longrightarrow 0$$

avec $0 = H_1(C_{*,n-1})$
Le module $H_n(C_*)$ est donc isomorphe au noyau de $H_0(i_{*,n})$ et la suite

$$H_(Imd_0*, n) \xrightarrow{H_0(i_{*,n})} H_0(C_{*,n-1}) \xrightarrow{H_0(j_{*,n-1})} H_0(Imd_{*,n-1}) \longrightarrow 0$$

est exacte. On obtient un diagramme commutatif où toutes les suites formées par au moins deux flèches alignées sont exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & 0 \arrow[d] & \\
& \ker H_0(d_{*,n}) \arrow[rr, dashed, "\rho"] \arrow[dr, hook] & & \ker H_0(i_{*,n}) \arrow[d, hook] & \\
H_0(Im\, d_{*,n+1}) \arrow[uu] \arrow[rr, "H_0(i_{*,n+1})"] & & H_0(C_{*,n}) \arrow[r, "H_0(j_{*,n})"] \arrow[dr, "H_0(d_{*,n})"] & H_0(Im\, d_{*,n}) \arrow[r] \arrow[d, "H_0(i_{*,n})"] & 0 \\
H_0(C_{*,n}) \arrow[u, "H_0(j_{*,n+1})"] \arrow[urr, "H_0(d_{*,n+1})"'] & & & H_0(C_{*,n-1}) &
\end{tikzcd}$$

La restriction de $H_0(j_{*,n})$ à $Ker H_0(d_{*,n}$ applique $Ker H_0(d_{*,n})$ dans $Ker H_0(i_{*,n})$ et définit une application linéaire $\rho : Ker H_0(d_{*,n}) \longrightarrow Ker H_0(i_{*,n})$ qui complète en traits pleins de façon à obtenir un diagramme commutatif. comme $H_0(j_{*,n})$ est surjective (exactitude de la ligne horizontale) alors ρ est surjective. Mais on a $Ker \rho = Ker H_0(j_{*,n})$ et $Ker H_0(j_{*,n}) = Im H_0(d_{*,n+1})$;Soit $x \in Ker H_0(j_{*,n}) = Im H_0(j_{*,n+1})$ donc il existe $y \in Im H_0(i_{*,n+1})$ tel que $x = H_0(i_{*,n+1})(y)$. Comme $H_0(j_{*,n+1})$ est surjective, on peut écrire $y = H_0(j_{*,n+1})(z)$ on obtient alors $x = H_0(i_{*,n+1}) \circ H_0(j_{*,n+1})(z) = H_0(d_{*,n+1})(z)$
Par passage au quotient, ρ induit un isomorphisme
$\bar{\rho} : H_n(K_*(C)) = Ker H_0(d_{*,n})/Im H_0(d_{*,n+1}) \longrightarrow Ker H_o(i_n)$
En posant $\theta_n = \lambda_n \circ \bar{\rho}$ où $\lambda_n : Ker H_0(i_n) \xrightarrow{\simeq} H_n(C_{*,n})$ on obtient que $\theta_n : H_n(K_*(C)) \longrightarrow H_n(C_*)$ est un isomorphisme

Proposition 31 *Soit $f_* : C_* \longrightarrow C'_*$ un morphisme de complexes. On suppose que l'on a $C_n = C'_n$ pour $n \prec 0$, que C'_n est un A module libre quel que soit n, que $H_n(f)$ est un isomorphisme quel que soit n e que C_* et $H_0(C) = H_q(C) = A$, $H_n(C) = 0$ pour $n \neq 0$ et $n \neq q$. Alors ilexiste un morphisme de complexes $G_* : C'_* \longrightarrow C_*$ et une homotopie reliant $f_* \circ g_*$ à $id_{C'_*}$*

4.4 Objets hopfiens,Objets cohopfiens dans la catégorie des G-CW-Complexes

Objets Hopfiens

Définition 56 *Soit G un groupe. On appelle catégorie O_G la catégorie dont les objets sont les groupes quotients G/H où H est un sous groupe normal de G*

dont les morphismes $\hat{g} : G/H \longrightarrow G/K$ *définis par la relation d'équivalence* $g^{-1}Hg \subset K$ *pour tout* $g \in G$ *où* K *est un sous groupe normal de* G.

Définition 57 *Un* O_G *groupe abélien est un foncteur contravariant de* O_G *dans la catégorie Ab.*

Définition et proposition 4 *Soit* G *un groupe. On note par* C_G *groupe la catégorie dont les objets sont les foncteurs* O_G *et les morphismes sont les transformations naturelles.*

L'objet nul de C_G *est noté :* $\underline{O} : \begin{array}{ccc} O_G & \rightarrow & Ab \\ G/H & \mapsto & 0 \end{array}$

où 0 *est le groupe réduit à un élément.*

Proposition 32 C_G *est une catégorie abélienne.*

Définition et proposition 5 *:ième intégrale d'homologie*

Soit X *un objet d'une catégorie* $G\mathcal{H}$, *pour* $i \geq 0$, *on a un* O_G *groupe abélien :*

$\underline{H_i} : O_G \longrightarrow Ab$ *défini par :*

pour tout objet G/H *de* O_G *on a* $\underline{H_i}(G/H) = H_i(X^H)$

où $X^H = \{x, hx = x, \forall h \in H\}$ *et* $H_i(X^H)$ *est le i-ème groupe de homologie de* X^H.

pour tout morphisme $\hat{g} : G/H \longrightarrow G/K$ *de* O_G *on a* $H_iX(\hat{g}) = H_i(g) : H_i(X^K) \longrightarrow H_i(X^H)$ *de* O_G *où* $g : X^K \longrightarrow X^H$ *avec* g *est induit par l'action de* G *sur* X

Soit $f : X \longrightarrow Y$ *un morphisme de* $G\mathcal{H}$ *alors* f *induit une transformation naturelle* $f_* : \underline{H}_nX \longrightarrow \underline{H}_nY$, *avec* $f_*(G/H) = H_n(f^H)$ *où* $H_n(f^H) : H_n(X^H) \longrightarrow H_n(Y^H)$ *pour tout* $n \geq 0$.

Lemme 4 *Un morphisme* $\eta : T \longrightarrow S$ *de* C_G *est un épimorphisme (respectivement un monomorphisme) si et seulement si :*

$\eta(G/H) : T(G/H) \longrightarrow S(G/H$ *est un épimorphisme (respectivement un monomorphisme) dans la catégorie Ab pour tout objet* G/H *de* O_G.

Remarque 3 *Si* C'_G *est la catégorie des* O_G *groupes, alors un morphisme* $\eta : T \longrightarrow S$ *de* C'_G *est un monomorphisme (respectivement épimorphisme) si.et seulement* $\eta(G/H)$ *est un monomorphisme(respectivement épimorphisme).*

Proposition 33 *Si un objet* T *de* C_G *satisfait la condition* $T(G/H)$ *est Hopfien (respectivement Co-hopfien) dans Ab pour tout objet* G/H *de* O_G, *alors* T *est Hopfien (respectivement Co-hopfien) dans* C_G.

Définition 58 *Un morphisme* $f : X \longrightarrow Y$ *de* $G\mathcal{H}$ *est une G-equivalence d'homotopie si* $f_* : \underline{H}_nX \longrightarrow \underline{H}_nY$ *est un isomorphisme pour tout* $n \geq 0$.

Proposition 34 *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *un épimorphisme de* $G\mathcal{H}$. *Alors* $f_* : \underline{H}_k X \longrightarrow \underline{H}_k Y$ *est un épimorphisme de* C_G *pour tout* $k \geq 0$.

Preuve *Soit* f *une inclusion. Soient* $\pi : Y \longrightarrow Y/X$ *et* $c : Y \longrightarrow Y/X$, *où* c *est constant alors* $\pi \circ f = c \circ f$.*Si* f *est un épimorphisme* π *est* G *homotope à* c. *Ainsi pour tout* $H \subset G$, *d'après le lemme précédent on a une suite exacte* $\ldots H_k(X^H) \longrightarrow H_k(Y^H) \longrightarrow H_k((Y/X)^H) = H8k(Y^H/X^H) \longrightarrow \ldots$ que $f_*^H : H_k(X^H) \longrightarrow H_k(Y^H)$ *est un épimorphisme de* Ab *pour tout* $k \geq 1$.

Remarque 4 *Pour tout morphisme* $f : X \longrightarrow Y$ *de* $G\mathcal{H}$, $f_* : \underline{H}_0 X \longrightarrow \underline{H}_0 Y$ *est un isomorphisme.*

Preuve $H_0(X^H)$ *est engendré par la classe de homologie du point base* $x^0 \in X^G \subset H_0(X^H)$ *et* f *est un morphisme de* $G\mathcal{H}$, $(f^h)_*$ *transforme le générateur de* $H_0(X^H)$ *en un générateur de* $H_0(Y^H)$.

Théorème 28 *Soit* $f : X \longrightarrow X$ *un épimorphisme de* $G\mathcal{H}$. *Si pour tout* $n \geq 1$ $H_n X$ *est un objet Hopfien de* C_G, *alors* f *est une* G- *équivalence d'homotopie.*

Preuve *D'après la remarque précédente* $f_* \underline{H}_0 X \longrightarrow \underline{H}_0 Y$.
Si f *est un épimorphisme, d'après la proposition précédente* f_* *est un épimorphisme pour tout* $n \geq 1$. *Ainsi pour tout* $n \geq 1$ *est un objet Hopfien de* C_G.

Définition 59 *Un* $G-$ *espace* X *est dit nilpotent si pour tout* $n \geq 1$ *on a* $\underline{\pi}_n X$ *est nilpotent comme* O_G- *module sur* $\underline{\pi}_1 X$ *tels qu'ils existent des* O_G- *modules :*
$\{\underline{0}\} = \underline{\pi}_{n,0}X \subset \underline{\pi}_{n,1}X \subset \ldots \subset \underline{\pi}_{n,r_n}X = \underline{\pi}_n X$ *tels que chaque* $A_{n,j} = \underline{\pi}_{n,j+1}X/\underline{\pi}_{n,j}X$ *soit abélien avec l'action de* $\underline{\pi}_1 X$.

Corollaire 9 *Soient* X *un objet nilpotent de* $G\mathcal{H}$ *et* $\underline{H}_n X$ *un objet Hopfien de* C_G *pour tout* $n \geq 1$, *alors* X *est Hopfien dans* $G\mathcal{H}$.

Preuve *Soit* $f : X \longrightarrow X$. *D'après le théorème 24* f *est une* G- *équivalence d'homotopie. Mais* X^H *étant nilpotent pour* $H \subset G$, *cela entraine que* $f^H : X^H \longrightarrow X^H$ *est une équivalence d'homotopie et alors* $f : X \longrightarrow X$ *est une équivalence d'homotopie.*

Proposition 35 *Pour tout objet* X *de* $G\mathcal{H}$ *and pour tout* O_G *groupe* $\lambda : O_G \longrightarrow \mathcal{G}$ *il existe un bimorphisme adjoint* :$[X, K(\lambda, 1)]_G \longleftrightarrow Hom(\underline{\pi}_1 X, \lambda)$.

Preuve *Si* $f : X \longrightarrow K(\lambda, 1)$ *est un élément de* $[X, K(\lambda, 1)]_G$, *alors la transformation naturelle correspondante dans* $Hom(\underline{\pi}_1 X, \lambda)$ *est donnée par* $f_* : \underline{\pi}_1 X \longrightarrow \lambda$. *On pose* $\underline{\pi}_1 K(\lambda, 1) = \lambda$.
Réciproquement une transformation naturelle $T : \underline{\pi}_1 X \longrightarrow \lambda$ *induit une* $G-$ *transformation naturelle* $T_* : K(\underline{\pi}_1 X, 1) \longrightarrow K(\lambda, 1)$. *Etant donné* X *peut être considéré un* $G-$ *sous complexe de* $K(\underline{\pi}_1 X, 1)$.

Proposition 36 *Si $f : X \longrightarrow Y$ est un épimorphisme de $G\mathcal{H}$, alors $f_* : \underline{\pi}_1 X \longrightarrow \underline{\pi}_1 Y$ est un épimorphisme de C'_G.*

Corollaire 10 *Si $\lambda : O_G \longrightarrow \mathcal{G}$ est Hopfien dans C'_G, alors $K(\lambda, 1)$ est hopfien dans $G\mathcal{H}$.*

Corollaire 11 *Si X est $G-(n-1)-$ connexe, pour tout $n \geq 1$ (X^H est $(n-1)-$ connexe) et $f : X \longrightarrow X$ est un épimorphisme de $G\mathcal{H}$ alors $f_* : \underline{\pi}_n X \longrightarrow \underline{\pi}_n X$ est un épimorphisme.*

Preuve *Si X est $G-(n-1)-$ connexe, la transformation naturelle $\underline{\pi}_n X \longrightarrow \underline{\pi}_n X$ de Hurewicz est un isomorphisme. Ceci résulte de la proposition* 30.

Proposition 37 *Si X est $G-(n-1)-$ connexe, pour tout $n \geq 1$,alors il existe un bimorphisme adjoint $[X, K(\lambda, n)]_G \longleftrightarrow Hom(\underline{\pi}_n X, \lambda)$, pour tout $\lambda : O_G \longrightarrow Ab$.*

Corollaire 12 *Si $\lambda : O_G \longrightarrow Ab$ est Hopfien dans C_G alors $K(\lambda, n)$ est Hopfien dans $G\mathcal{H}$.*

Objets Co-Hopfiens

Dans cette partie on étudie les conditions dans lesquelles un objet X de de $G\mathcal{H}$ peut être Co-hopfien.

Proposition 38 *$f : S \longrightarrow S$ est un monomorphisme de C'_G si et seulement il induit $f_* : K(S,1) \longrightarrow K(T,1)$ est un monomorphisme de $G\mathcal{H}$.*

Corollaire 13 *Pour tout objet $\lambda : O_G \longrightarrow G\mathcal{H}$ dans C'_G, $K(\lambda, 1)$ est Co-hopfien si et seulement λ est Co-hopfien.*

Corollaire 14 *Si $\lambda : O_G \longrightarrow Ab$ dans C_G et $n \geq 1$, $K(\lambda, 1)$ est Co-hopfien dans $G\mathcal{H}$ si et seulement si λ est Co-hopfien dans C_G.*

Définition 60 *Pour tout objet X de $G\mathcal{H}$, $\underline{\pi}_i X$ est dit de type fini si $\underline{\pi}_i X(G/H) = \pi_i(X^H)$ est de type fini pour tout $H \subset G$. X est appelée $G-$ homotopie de type fini si $\underline{\pi}_i X$ est de type fini pour tout $i \geq 2$.*

Théorème 29 *Soient X un objet $G-$ homotope de type fini de $G\mathcal{H}$ tel que $\underline{\pi}_1(X^H)$ est un groupe cohopfien et le monomorphisme $X^H \hookrightarrow X$ de $\mathcal{H}$ pour tout $H \subset G$ alors X est un objet Co-hopfien dans $G\mathcal{H}$.*

Preuve *Soit* $f : X \longrightarrow X$ *un monomorphisme de* $G\mathcal{H}$. *Par hypothèse* $f^H : X^H \longrightarrow X^H$ *est un monomorphisme de* $\mathcal{H}$ *pour tout* $H \subset G$. *Si* $\pi_i(X^H)$ *est de type fini, pour tout* $i \geq 2$ *et* $\pi_1(X^H)$ *est Co-hopfien , cela entraine* $f^H : X^H \longrightarrow X^H$ *est une équivalence d'homotopie. Alors* f *est une* $G-$ *équivalence d'homotopie.*

Démontrons d'abord que $f = f^{\{e\}} : X = X^{\{e\}} \longrightarrow X^{\{e\}} = X$ *est un monomorphisme de* $\mathcal{H}$. *Supposons le point base* $x^0 \in X^G$ *est* $G-$ *fixe* $0-$ *cellule dans* X. *Soient* $\alpha, \beta : Y \longrightarrow X$ *morphismes de* $\mathcal{H}$ *tels que* $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$.*Soit* $F : Y \times I \longrightarrow X$ *lune homotopie telle que*$f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$. *Considèrons* $Y \times G$ *un* $G-$ *espace, où l'action de* G *est définie par* $g(y, h) = (y, gh)$,*pour tous* $g \in G$, $h \in G$, $y \in Y$. *Définissons* $\bar{\alpha} : Y \times G \longrightarrow X$ *par* $\bar{\alpha}(y.e) = \alpha(y)$ *et* $\bar{\alpha}(y, g) = g\alpha(y)$. *Alors* $\bar{\alpha}$ *est une* $G-$ *transformation. On note* $\bar{\alpha}(y^0, g) = x^0$ *pour tout* $g \in G$. *Alors* Y_G *est un* G *complexe avec point base qui est un* $G-$ *fini* $0-$ *cellule et est un objet de* $G\mathcal{H}$. *La transformation* $\bar{\alpha}$ *induit une* $G-$ *transformation* $\tilde{\alpha} : Y_G \longrightarrow X$ *qui conserve les points base. De façon analogue* $\tilde{\beta} : Y_G \longrightarrow X$. *La homotopie* $F : Y \times I \longrightarrow X$ *donne une* $G-$ *homotopie* $\bar{F} : Y \times G \times I \longrightarrow X$ *entre* $f \circ \bar{\alpha} = f \circ \bar{\beta}$ *telle que* $\bar{F}(y, e, t) = F(y, t)$ *et* $\bar{F}(y, g, t) = gF(y, t)$ *pour tout* $g \in G$, $t \in I$. *Si* F *est une homotopie conservant les points base ,* $\bar{F}$ *induit une* $G-$ *homotopie* $\tilde{F} : Y_G \times I \longrightarrow X$, *entre* $f \circ \tilde{\alpha}$ *et* $f \circ \tilde{\beta}$. *Comme* f *est un monomorphisme de* $G\mathcal{H}$, α *est* $G-$ *homotope à* β. *Soit* $\tilde{F}_1 : Y_G \times I \longrightarrow X$ *une* $G-$ *homotopie entre* $\tilde{\alpha}$ *et* $\tilde{\beta}$. *Soit une enveloppe*

$$\begin{array}{llll} i: & Y & \rightarrow & Y_G \\ & y & \mapsto & [y, e] \end{array}$$

Soit $F_1 : Y \times I \longrightarrow X$ *une composée de* $i \times id : Y \times I \longrightarrow Y_G \times I$ *et* $\tilde{F}_1$. *Alors* $F_1 : \alpha \simeq \beta$.*Alors* $f^{\{e\}} : X^{\{e\}} \longrightarrow X^{\{e\}}$ *est un monomorphisme dans* $\mathcal{H}$.
Soit $H \subset G$.*Soit* $\alpha, \beta \in: Y \longrightarrow X^H$ *deux morphismes de* $\bar{H}$ *telles que* $f^H \circ \alpha \simeq f^H \circ \beta$. *Soit* $i : X^H \hookrightarrow X$ *Alors* $i \circ f^H \circ \alpha \simeq i \circ f^H \circ \beta$ *cela implique* $i \circ f \circ \alpha \simeq i \circ f \circ \beta$. *Comme* f *est une* $G-$ *transformation* $i \circ f^H = f \circ i$. *Si* $f^{\{e\}}$ *est un monomorphisme de* $\mathcal{H}$ *on en déduit que* $i \circ \alpha \simeq= i \circ \beta$. *Comme* $i : X^H \hookrightarrow X$ *est un monomorphisme alors* $\alpha \simeq \beta$. *Alors* f^H *est un monomorphisme de* $\mathcal{H}$.

Corollaire 15 *Soit* X *un objet de* $G\mathcal{H}$ *telle que l'action de* G *est semi-libre et* $X^G = \{x^0\}$, x^0 *est un* $G-$ *fixé* 0 *cellule. Soit* $\pi_i(X)$ *est de type fini pour* $i\pi \geq 2$ *et* $\pi_1(X)$ *est un groupe Co-hopfien. Alors* X *est un objet Co-hopfien de* $G\mathcal{H}$.

Remarque 5 *Soient* G *un groupe discret et* X *un* $G-$ *CW-complexe.Alors* X *peut être Hopfien (respectivement Co-hopfien) dans* $G\mathcal{H}$ *sans être Hopfien (respectivement Co-hopfien) dans* $\mathcal{H}$ *et vice -versa.*

Exemple 6 *Supposons que* $G = \mathbb{Z}_2$. *Définissons un* O_G- *groupe* $\lambda : O_G \longrightarrow Ab$ *tel que* $\lambda(G/G) = \mathbb{Z}$, $\lambda(G/\{e\}) = \{0\}$, *le groupe trivial et* $\lambda(G/\{e\} \longrightarrow$

$G/G) : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}$ l'homomorphisme naturel. Soit $X = K(\lambda, 1)$.Alors X est Co-Hopfien dans $\mathcal{H}$ mais non Co-Hopfien dans $G\mathbb{H}$.

Pour la preuve posons $X = X^{\{e\}} = K(\lambda(G/\{e\}, 1)$. Alors X est contractile. Par conséquent X est non Co-Hopfien in $\mathbb{H}$. Remarquons que λ est non Co-Hopfien dans C_G. Pour $\eta : \lambda \longrightarrow \lambda$ défini par $\eta(G/G) : x \longrightarrow 2x$, $\eta(G/\{e\}) = id_{\{0\}}$ est un monomorphisme mais n'est pas un isomorphisme dans C_G d'après le lemme 2. Il resulte du corollaire 8 que X est non CO-Hopfien dans $G\mathcal{H}$.

Si $G = \mathbb{Z}$, et H_n désigne le sous groupe $2^n\mathbb{Z}$, avec $n \geq 0$.Si H est un sous groupe de G, $H \neq H_n$ pour tout n , alors $H = k\mathbb{Z}$, où $k = 2^{n_i}$, l impair, $l \neq -1$ et $l \neq 1$ avec $n_i \geq 0$.Il est clair que $k\mathbb{Z} \subset H_n$ et il n'existe pas de H_m tel que $H_m \subset k\mathbb{Z}$. Or $H_{n+1} \subset H_n$ pour tout n. On définit un O_G groupe $\lambda : O_G \longrightarrow Ab$ ainsi :
Soit $\mathbb{Q}^\infty$ la somme directe $\oplus_i \mathbb{Q}e_i$ des copies dénombrables de $\mathbb{Q}$ de base
$\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$. $\mathbb{Q}^\infty$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. C'est clair que $\mathbb{Q}^\infty$ n'est ni Hopfien ni Co-Hopfien dans Ab. Soit $\mathbb{Q}^n = \oplus_{i=1}^n Qe_i$ En remarquant que tout homomorphisme de groupes $\mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^n$ est un $\mathbb{Q}$ homomorphisme $\mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^n$ linéaire. Alors $\mathbb{Q}^n$ est Hopfien et Co-Hopfien dans Ab.On obtient $\lambda(G/\{e\}) = \mathbb{Q}^\infty$ et $\lambda(G/H_n) = \mathbb{Q}^n$ pour tout $n \geq 0$. Si $k \in \mathbb{Z}$, avec $k = 2^{n_i}l$ tel que l impair différent de 1 et -1 et $n_i \geq 0$ on obtient $\lambda(G/k\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}^{n_i}$ où , $\mathbb{Q}^0 = \{0\}$ désigne le groupe trivial. Pour $H_{n+1} \subset H_n$, soit l'inclusion $\lambda(G/H_{n+1} \longrightarrow G/H_n) : \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^{n+1}$. Pour $k \in \mathbb{Z} \subset H_{n_i}$, avec $k = 2^{n_i}l$, où l impair,différent de -1 et de 1 et $n \geq 0$, soit l'identité $\lambda(G/k\mathbb{Z} \longrightarrow G/H_{n_i})$: $\mathbb{Q}^{n_i} \longrightarrow \mathbb{Q}^{n_i}$. Si $\{e\} \subset H_n$ et $\{e\} \subset k\mathbb{Z}$,$k = 2^{n_i}l$,soient $\lambda(G/\{e\} \longrightarrow G/H_n)$: $\mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}^\infty$ et $\lambda((G/\{e\} \longrightarrow G/k\mathbb{Z}) : \mathbb{Q}^{n_i} \longrightarrow \mathbb{Q}^\infty$ inclusions naturelles d'où λ est un foncteur contravariant de 0_G dans Ab.

4.5 Conclusion

Les perspectives de recherches se déclinent ainsi : On étudie dejà les suites complexes semi-hopfiennes et des complexes semi -cohopfiennes.Des articles sont à soumettre à publication.
Cette étude concerne aussi des objets fortement Hopfiens, fortement Co-Hopfiens dans la catégorie des $G-$ CW complexes ....
La recherche porte également sur les suites complexes faiblement Co-Hopfiennes et de la classe des complexes de Dedekind finis.
Les catégories abéliennes sont à l'étude : localisation dans les catégories abéliennes, catégories localement noetheriennes, application à l'étude des faisceaux cohérents.

Bibliographie

[1] Anderson, f. W. And fuller, K. R., Rings and categories of modules, New York, Springer - Verlag (1973)

[2] Baumslag. G, Hopfcity and Abelian groups, Topics in Abelian groups, Proc. Symp. on Abelian groups, New Mexico State Univ., 1962, 331-335. MR 30 :139

[3] Ben Maaouia Mohamed Ben Fraj, Dea - Faculté des Sciences et Technique(juillet 1998)

[4] Ben Maaouia Mohamed Ben Fraj, Doctorat de 3ème cycle - Faculté des Sciences et Technique UCAD - Dakar (Juillet 2003)

[5] Ben Maaouia Mohamed Ben Fraj, Doctororat D'état Faculté des Sciences et Technique(06 Avril 2011)

[6] Bredon G. E., Equivariant Cohomology Theories, Lec. Notes in Math., Springer-Verlag, 1967. MR 35 :4914

[7] Dieck T. tom, Transformation groups, Walter de Gruyter, 1987. MR 89c :57048

[8] El Hadj ousseynou diallo and Ben Maaouia Mohamed Ben Fraj and Sanghare Mamadou Hopfian objects, Cohopfian objects in the category of Complexes of left $A-$ modules International Mathematical Forum

[9] El Hadj ousseynou diallo and Ben Maaouia Mohamed Ben Fraj and Sanghare Mamadou Strongly Hopfian objects, Strongly Cohopfian objects in the category of Complexes of left $A-$ modules Journal of Mathematics Research, Canadian Center of Sciencee and Education .

[10] GOUTAM MUKHERJEE, HOPFIAN AND CO-HOPFIAN G-CW-COMPLEXES ,PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 125, Number 4, April 1997, Pages 12291236 S 0002-9939(97)03778-7

[11] A.Haghany Journal of Algebra 243,765-779(2001) Modules whose Injective Endomorphismes are Essential

[12] A.Hmaimou et al/Journal of algebra Generalized Fitting modules and rings 308(2007)199- 214

[13] Hiremath, Hopfian rings and co-Hopfian modules, Indian J. Pure and Appl. Math., 17, 1986, 895-900. MR 87i :163

[14] L.Faouzi,Hopficité et Co-hopficité des Anneaux et Modules Faculté des Sciences TETOUAN 21 Février 2003

[15] Rotman Joseph J., Notes on homological algebra, University of Illinois, Urbana (1968)

[16] Rotman Joseph J., An Introduction to Algebraic Topology (Graduate Texts in Mathematics) by Joseph J. Rotman (Aug 17, 1988)

[17] Rotman Joseph J., An introduction to homological Algebra Academic Press, New York

[18] Sanghare Mamadou,Thèse d'état,Faculté des Sciences et Techniques, UCAD, Dakar, (17 décembre 1993)

[19] A. D. Elmendorf, System of fixed point sets, Trans. Amer. Math. Soc., 227,1983, 275-284. MR 84f :57029

[20] Hilton P. and J. Roitberg, Note on epimorphisms and mononorphisms in homotopy theory, Proc. Amer. Math. Soc., 90, 1984, 316-320. MR 85j :55014

[21] Roitberg J., Monomorphisms and epimorphisms in homotopy theory, Israel J. Math., 46, 1983, 205-211. MR 85i :55010

[22] K. Varadarajan, Hopfian and co-Hopfian objects, Publicacions Matematiques, 36, 1992, 293- 317. MR 93i :16002

[23] Zisman M., Topologie Algebrique elementaire, Paris 1972