Ministère de l'Enseignement Supérieur

République de Côte d'Ivoire
Union - Discipline - Travail



UNIVERSITE DE COCODY

N° 410/2004

# THESE

Présentée à l'U.F.R de Mathématiques et Informatique
de l'Université de Cocody
pour obtenir le grade de

## Docteur ès-sciences

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**
Option : **Probabilités**
Par
**Auguste AMAN**

# EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES RETROGRADES ET APPLICATIONS

Soutenue publiquement le 06 Novembre 2004

Jury :

| | | |
|---|---|---|
| Mr. Edmond Fedida | : Professeur à l'Université de Cocody | Président |
| Mr. Brahim Boufoussi | : Professeur à l'Université Cadi Ayyad | Rapporteur |
| Mr. Ouagnina Hili | : Maître de Conférences à l'INPHB de Yamoussokro | Rapporteur |
| Mr. Modeste N'Zi | : Professeur à l'Université de Cocody | Directeur |
| Mr. Ibrahim Fofana | : Maître de Conférences à l'Université de Cocody | Examinateur |
| Mr. Jérôme Adou | : Maître de Conférences à l'Université de Cocody | Examinateur |

# Table des matières



1. Ce travail est publié dans Journal of Appl. Math. and Stoch. Anal. 16 (4), 295-309, (2003).
2. Ce travail est soumis pour publication

3. Ce travail est soumis pour publication
4. Ce travail est soumis pour publication

## 0.1 Dédicace

A mes enfants,

Aman Achié Arnold Stephane

et

Aman Apiteh Claudia Grace Jasmine,

dont les naissances m'ont apporté respectivement

un sursaut de confiance

et

une grace infinie.

## 0.2 Résumé

Depuis son introduction par Pardoux et Peng (1990), l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé) s'est développée durant ces dernières années. Nos travaux constituent un ensemble de résultats d'existence et d'unicité des solutions de quelques types d'EDSR. Nous traitons aussi des applications de ces équations aux EDP et à la finance. Notre chapitre 2 concerne les équations différentielles stochastiques rétrogrades multidimensionnelles avec réflexion oblique dans un orthant et drift localement lipschitzien. Ensuite, toujours avec un drift localement lipschitzien, nous montrons dans le chapitre 3 l'existence et l'unicité de la solution des EDSR de type Volterra. Le chapitre 4 concerne une classe d'équations différentielles stochastiques rétrogrades où s'ajoute une intégrale par rapport à un processus positif et croissant. L'existence et l'unicité de la solution dans le cas réfléchi sur une barrière (processus aléatoire donné) sont établies dans $L_2$. En application, ce type d'équations nous permet d'étudier les EDP paraboliques réfléchies avec condition aux limites de type Neumann non linéaire ainsi que leur homogénéisation. D'autre part, nous obtenons des applications à l'option d'achat américaine.

## 0.3 Abstract

In this thesis, we study existence and uniqueness problem for three kinds of backward stochastic differential equation (BSDE in short) and their connections to partial differential equations. Firstly, we deal with multidimensional backward stochastic differential equations with oblique reflection in a orthant and local Lipschitz drift. The second result is devoted to backward stochastic nonlinear Volterra integral equation with local Lipschitz drift. We also establish an existence and uniqueness result in $L_2$ for the so-called reflected generalized backward stochastic differential equation involving an integral with respect to an nonnegative increasing process (RGBSDE in short) . Further, we give the link to an obstacle problem and homogenization of parabolic PDE with nonlinear Neumann boundary condition. We also applied our result to america option pricing.

## 0.4 Remerciement

Cette thèse de Doctorat a été faite au laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'U.F.R de Mathématiques et Informatique de l'université de Cocody avec la bénédiction du seigneur. Je lui rends grâce de m'avoir donné cette source d'inspiration.

Aussi voudrais-je exprimer ma profonde gratitude au professeur Modeste N'zi qui m'a ouvert les portes de la recherche et m'a accordé sa confiance en acceptant de m'encadrer. Ses grandes connaissances, la clarté de ses explications et sa rigueur furent précieuses pour le cheminement rapide et efficace de ce travail.

Je tiens également à remercier avec sincérité les rapporteurs que sont Ouagninan Hili Maître de conférence à l'institut National Polytechnique Houphouet Boigny de Yamoussokro, Ibrahim Boufoussi professeur à l'université Cadi Ayad de Marrakech pour leur examination rigoureuse et l'intérêt qu'ils ont apporté à cette thèse.

Ma reconnaissance va aussi à l'endroit du Jury composé du président Edmond Fédida professeur à l'université de Cocody, Fofana Ibrahim et Jérôme Adou tous deux maîtres de conférence à l'université de Cocody qui ont accordé avec un grand intérêt une partie de leur temps à la lecture de cette thèse. Qu'ils en soient remerciés.

Cette thèse doit beaucoup aux commentaires et aux réponses des uns et des autres. J'exprime ainsi toute ma considération à ceux qui m'ont permis de progresser, notamment Elouaflin Abouo et toute l'équipe des doctorants de l'U.F.R de Mathématiques et Informatique.

Bien entendu, cette thèse est l'aboutissement de longues années d'études; c'est pourquoi je suis redevable à tous mes enseignants. Aussi voudrais je remercier particulièrement le Dr Diallo Boubacar et le Pr Koua Konin directeur de l'U.F.R de mathématiques et informatique et toute son administration; en particulier Messieurs N'cho de la bibliothèque de l'IRMA, Konan le secrétaire principal et Konan Jean Pierre secrétaire du MIAGE.

Je ne saurai terminer sans faire cas du soutien inépuisable de mes parents tout au long de mes études en particulier mes géniteurs Achié Aman et Agnambé Koko, mes frères et soeurs dont Mesdames Gnamien Agathe , Kouassi Elisabeth et leur époux, mes cousins Appia Kouassi, Essoi Martin, Achié François et Bénié Paul sans oublier mon neveu Achié Réné.

A ma fiancée Ano Yah Gisèle et à toute sa famille , j'adresse mes remerciements pour le soutien moral la chaleur humaine dont j'ai bénéficiés depuis notre rencontre.

Enfin toute ma considération va en l'endroit de Monsieur Ano Jean Claude dont la présence à la soutenance m'a rejoui enormement.

Que la main de Dieu nous guide dans tous
nos oeuvres et nous protège tous.
Amen

# Introduction

## 0.5 E D S R

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé) furent introduites pour la première fois (la forme linéaire) en 1973 et en 1978 dans les travaux de *Bismut* [14, 15] lorsqu'il étudiait l'équation adjointe associée au principe de maximum stochastique en contrôle stochastique optimal. Elle est de la forme

$$\begin{cases} -dY_s = [Y_s\beta_s + Z_s\gamma_s]ds - Z_s dW_s,\ 0 \leq s \leq T \\ \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Cependant, il a fallu attendre les années 1990 pour voir une théorie plus générale sur les EDSR. Elle fut initiée par Pardoux et Peng [56]. On obtient alors une nouvelle forme

$$\begin{cases} -dY_s = f(s,Y_s,Z_s)ds - Z_s dW_s,\ 0 \leq s \leq T \\ \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

où $f$ le coefficient de dérive ou drift est une fonction nonlinéaire et globalement lipschitzienne. Sa solution est un couple de processus $(Y,Z)$. En effet comme la condition aux limites est donnée à l'instant terminal $T$, la présence du processus $Z$ grâce au théorème de représentation des martingales assure à $Y$ d'être adapté par rapport à la filtration du mouvement brownien $(W_t)_{t\geq 0}$. Depuis lors les EDSR furent l'objet de plusieurs études; aussi à cause de leur connection à maintes domaines scientifiques. Par exemple en contrôle stochastique optimal et en théorie des jeux (voir Hamadène et Lepeltier [34]); en mathématiques financières où elles formalisent les fluctuations non linéaires des prix de l'option d'achat dans un marché incomplet (voir El Karoui et al. [26]); en mathématique physique où elles donnent une interprètation probabiliste des équations aux dérivées partielles (EDP en abrégé) (voir Peng [63], Pardoux et Peng [57]). Notons que tous ces résultats ont été obténus sous la condition classique de lipschitz global sur le drift. Cependant cette hypothèse n'est toujours pas satisfaite dans de nombreux problèmes en finance. Exemple dans le problème de valorisation de l'option d'achat formalisé par l'EDSR linéaire unidimensionel

$$\begin{cases} -dY_s = [r_t Y_s + Z_s\theta_s]ds - Z_s dW_s,\ 0 \leq s \leq T \\ \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

$r$ le taux d'intérêt du placement et $\theta$ le risque premum sont rarement bornés. Ce qui ne permet pas d'avoir la condition de lipschitz. Pour palier cette insuffisance et coller à la réalité, on suppose des conditions plus faibles. On peut citer les EDSR à coefficients non lipschitziens (voir Pardoux et Peng [58]), les EDSR à drift continu (voir Hamadène [32], Lepeltier et San Martin [43], N'zi et Ouknine [51], etc) et ceux à "drift" localement lipschitzien (voir Balhali [4], [5], Balhali et $al.$[6], Hamadène [33], Aman et N'zi [2], etc). Par la suite, des contraintes rencontrées dans les modèles économiques et physiques ont engendré l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies. Leur particularité est que la solution $Y$ est confinée dans un domaine ou derrière une barrière stochastique. On en distingue trois types. Les EDSR à réflexions normales sur des barrière qu'on trouvent dans les travaux *El Karoui et al.*[25], *Cvitanic et Karatzas* [20], *Matoussi* [48], *Hamadène et al.* [35] et Zheng et Talay [69]; sous les conditions respectives de lipschitz global, de continuité sur le drift et de temps terminal aléatoire. Celles à réflexions normales dans un domaine convexe sont dans les travaux de *Gegout-Petit et Pardoux* [31], *Pardoux et Rascanu* [60], *N'zi et Ouknine* [50] en dimension multiple; *Hamadène et Ouknine* [36], Ouknine [52] , *Essaky et al.* [27], [29] avec un "saut". Enfin on a les EDSR à réflexion oblique dans un domaine convexe de la forme

$$Y_i(t) = \xi_i + \int_t^T b_i(s,Y(s))ds - \sum_{j=1}^{d} \int_t^T Z_{ij}(s)dW_j + K_i(T) - K_i(t) + \sum_{j\neq i} \int_t^T r_{ij}(s,Y(s))dK_j(s). \tag{0.1}$$

motivée par son utilité en théorie des files d'attente et comme prolongement du problème de Skorohod dans un polyhedron convexe avec réflexion oblique (voir *Shashiahvili* [67]). Elle est décrite dans les travaux de *Ramasubramania* [65] sous la condition de lipshitz global et formalise un modèle de vente subventionnée. Parallèlement, d'autres classes d'équations différentielles stochastiques rétrogrades ont fait leur apparution. On retiendra particulièrement deux d'entre elles.
D'abord les EDSR généralisées de la forme

$$\begin{cases} -dY_s &= f(s,Y_s,Z_s)ds + g(s,Y_s)dG_s - Z_s dW_s,\ 0 \leq s \leq T \\ Y_T &= \xi \end{cases}$$

considérées dans les travaux de Pardoux et Zhang [62] comme une extension des EDSR non linéaires classiques à cause de l'ajout d'une intégrale par rapport à un processus positif et croissant. Elles donnent une représentation probabiliste de la solution des EDP paraboliques ou elliptiques avec condition aux limites de type Neumann non linéaire. Ces travaux ont été prolongés par ceux d'Essaky et *al* [28] qui ont étudié le cas réfléchi normalement dans le domaine d'une fonction convexe. Ensuite on a les EDSR de type Volterra de la forme

$$\xi = Y(t) + \int_t^T f(t,s,Y(s),Z(t,s))ds + \int_t^T \left[g(t,s,Y(s)) + Z(t,s)\right] dW(s) \tag{0.2}$$

introduites dans les travaux de Lin J. [44] sous la conditon de lipschitz global. Ce travail est le prolongement de celui de Hu et Peng [37] où l'équation d'évolution stochastique semi linéaire à valeurs dans un espace de Hilbert complet a été étudiée. Tous ces travaux étant motivés par l'étude des EDS de type Volterra (voir Berger et Mizel [11, 12], Kolodh [39], Pardoux et Protter [59], et Protter [64]) et leur application en mathématiques financières ( [24, 18]) et en mathématiques physiques [12].

# 0.6 Homogénéisation des EDP via les EDSR

Le but de la théorie de l'homogénéisation est de remplacer, lorsque cela est possible, un milieu décrit de façon microscopique par une approximation à une échelle macroscopique. Autrement dit, cela revient à étudier le remplacement d'un milieu fortement hétérogène par un milieu homogène, dont les propriétés caractéristiques sont données par une moyennisation des hétérogénéités (voir I. Babuska [3] , A. Lejay [42], etc).

Les enjeux sont bien entendu très importants, car de nombreux milieux sont donnés par leurs propriétés microscopiques (soul-sol, coeur de réacteur nucléaire, matériaux composites, polymères, etc) et les simulations numériques réalisées à ces échelles sont souvent quasi impossibles. Par exemple, pour l'étude de la diffusion du pétrole dans un milieu poreux, l'échelle des pores est de l'ordre du millimètre, alors que les réservoirs ont des tailles de l'ordre du kilomètre. De plus, l'utilisation de maillages adaptifs est souvent nécessaire pour faire face aux brusques variations des hétérogénéités, ce qui augmente d'autant plus la puissance de calcul et la mémoire requise.

Plus concrètement considérons $u^{\varepsilon}$ et $u$ les solutions respectives des systèmes d'EDP linéaires paraboliques suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(t,x) + (\mathcal{L}^{\varepsilon}u)(t,x) + f\left(s,x,u^{\varepsilon}(t,x), (\nabla u^{\varepsilon}(t,x))^{*}\sigma(t,x)\right) = 0, \\ u^{\varepsilon}(T,x) = g(x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (\mathcal{L}u)(t,x) + f(s,x,u(t,x),(\nabla u(t,x))^* \sigma(t,x)) = 0, \\ u(T,x) = g(x), \end{cases}$$

où $(\mathcal{L}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille d'opérateurs différentiels linéaires de second ordre dont les coefficients oscillent rapidement lorsque $\varepsilon$ est petit et $\mathcal{L}$ sa forme homogénisée. On étudie le comportement de la quantité $u^\varepsilon - u$ lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro. La méthode probabiliste basée sur la formule de Feynman-Kac a été introduite par *Bensoussan et al* [9, 10]. A cette époque (1978-1979) le cas non linéaire restait un domaine à explorer. Récemment (1990-1992) grâce aux travaux de *Pardoux et Peng* [56, 57],*Peng* [63] la formule de Feynman-Kac fut généralisée pour prendre en compte les équations aux dérivées partielles semi-linéaires classiques. Cette étude s'appuie sur la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Par conséquent le problème d'homogénéisation de *Bensousan et al* [9, 10] est réduit à une question de stabilité des EDSR. Ainsi de nombreux résultats d'homogénéisation et de moyennisation ont été établis. On peut citer par exemple les travaux de *Pardoux et Veretennikov* [61] dans lesquels le terme non linéaire est seulement fonction de la solution et non de son gradient, les travaux de Kozlov [40] avec des opérateurs à coefficients périodiques oscillant rapidement. Ensuite grâce à la notion de solution de viscosité des EDP semi-linéaires introduite par *Crandall et Lions* [17] et prolongée par *Lions* [46, 47] et son lien aves les EDSR (voir Pardoux [54]) d'autres résultats d'homogénéisation des EDP semi-linéaires furent énoncés. On a les travaux de *Pardoux* [55] où elle sont paraboliques avec des coefficients à oscillations rapides et périodiques, des "drift" singuliers et des coefficients singuliers en leur terme d'ordre zéro, ceux de *Ouknine et Pardoux* [53] avec les EDP semi-linéaires avec condition aux limites de type Neumann non linéaire. Enfin notons que d'autres types d'homogénéisation furent établis respectivement par *Buckdahn et al* [16], *Gaudron et Pardoux* [30], et *Lejay* [42] avec des opérateurs de divergence.

## 0.7 Résultats et plan de la thèse

Tout au long de cette thèse, nous établissons quatre résultats d'existence et d'unicité des EDSR, puis une homogénéisation. Ensuite nous appliquons ces résultats aux EDP semi-linéaires avec condition aux limites de type Neumann non linéaire et au formalisme d'une option d'achat américaine.
Le premier résultat se trouve au Chapitre **2** et concerne l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSR à réflexion oblique (0.1) sous la condition de drift localement Lipschitzien et étend le résultat de S. Ramasubramania [65]. Sa preuve utilise l'approximation du drift par une suite de fonction Lipschitzienne $(b^n)_{n\geq 1}$ vérifiant les hypothèses de S. Ramasubramania [65] et l'étude de la convergence de la suite de solution unique de l'EDSR à réflexion oblique associée à $(\xi,b^n,R)$.

Le résultat suivant est l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSR de type Volterra (0.2) avec condition de Lipschitz local en $y$ sur le drift au Chapitre **3**. IL prolonge le résultat de *Lin J.* [42] et sa preuve utilise la même méthode que le résultat précédent sauf que dans ce cas on impose à la constante de Lipschitz $L_N$ de satisfaire la condition

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty}\frac{1}{(2L_N+2L_N^2)N^{2(1-\alpha)}}\exp[(2L_N+2L_N^2)T]=0,\ \forall\ T>0 \text{ et } \forall\ 0\leq\alpha<1.$$

Ensuite le Chapitre **4** examine le problème d'existence et d'unicité de l'EDSR généralisée à réflexion normale sur une barrière et temps terminal aléatoire associée à $(\tau,\xi,f,g,S)$ suivante

$$Y_{t\wedge\tau}=Y_{T\wedge\tau}+\int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge T}f(s,Y_s,Z_s)ds+\int_t^{\tau\wedge T}g(s,Y_s)dG_s-\int_t^{\tau\wedge T}Z_sdW_s+K_{\tau\wedge T}-K_{t\wedge\tau},$$

sous les conditions standard des travaux de Pardoux et Zhang sur les coefficients $f$ et $g$. Sa résolution utilise l'argument de pénalisation habituelle. En application il étudie le problème d'obstacle des EDP paraboliques avec condition aux limites de type Neumann non linéaire et un type d'option d'achat américaine.
Enfin le quatrième et dernier résultat établit au chapitre **5**, est l'homogénéisation de l'EDSR généralisée réfléchie précédente avec temps terminal constant et l'EDP asociée.
Pour la bonne compréhension de tout ce travail le Chapitre **1** présente sous les hypothèses classiques des résultats d'existence et d'unicité des classes d'EDSR étudiées dans cette thèse, la notion de solution de viscosité d'une EDP et énonce le critère de Meyer Zheng.

étant un processus $\mathcal{F}_t-$progressivement mesurable,
$(ii)$

$$d\left((Y,K),(0,0)\right)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{d}\int_0^T e^{\theta t}a_i\left(|Y_i(t)|+\varphi_t(K_i)\right)dt\right)<+\infty,$$

où $\varphi_t(g)$ est la variation totale de $g$ sur $[0,T]$ et $\theta$ une constante fixée. On montre aisément que $(\widetilde{\mathcal{H}},d)$ est un espace métrique complet.

**Définition 1.1.1.** *Soit $(Y,K)$ élément de l'espace $(\widetilde{\mathcal{H}},d)$ et $Z$ un processus $\mathcal{F}_t-$mesurable, de carré intégrable. Le triplet de processus $(Y,Z,K,)$ est solution de l'EDSR (1.1) associée à $(\xi,b,R)$ si elle satisfait l'équation (1.1).*

**Théorème 1.1.1.** *(voir Ramasubramania [65])*
*Supposons vérifiées les hypothèses $(\boldsymbol{A1})-(\boldsymbol{A3})$; alors il existe un unique $(Y,K)\in\widetilde{\mathcal{H}}$ et $Z$ un processus $\mathcal{F}_t-$mesurable, de carré intégrable tel que $(Y,Z,K)$ solution de l'EDSR (1.1) associée à $(\xi,b,R)$.*

## 1.2 EDSR de type Volterra

Considérons l'espace probabilisé filtré complet précédent,
$\mathcal{D}=\left\{(t,s)\in\mathbb{R}_+^2;\ 0\le t\le s\le T\right\}$ et $\mathcal{P}$ la $\sigma-$algèbre des $\mathcal{F}_{t\vee s}-$progressivement mesurables sous ensembles de $\Omega\times\mathcal{D}$. On désigne par $M^2(t,T;\mathbb{R}^k)$ (resp. $M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$), l'ensemble des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^k$(resp. dans $\mathbb{R}^{k\times d}$) $\mathcal{F}_{t\vee s}-$progressivement mesurables et de carré intégrables par rapport à $\mathbb{P}\otimes\lambda_1\otimes\lambda_2$, $\lambda$ étant la mesure de Lebesgue sur $[0,T]$. $|X|$ représente la norme Eucludienne de $X\in\mathbb{R}^k$ et $|Y|=\sqrt[2]{Tr\left(YY^*\right)}$ celle de $Y\in\mathbb{R}^{k\times d}$ consideré comme une $k\times d$ matrice.
Pour terminer énonçons les hypothèses liées aux données $(\xi,f,g)$ de l'équation

$$\xi=Y(t)+\int_t^T f(t,s,Y(s),Z(t,s))ds+\int_t^T\left[g(t,s,Y(s))+Z(t,s)\right]dW(s).\qquad(1.2)$$

**(B1)** $f:\Omega\times\mathcal{D}\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}\longrightarrow\mathbb{R}^k$ est $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}_k/\mathcal{B}_{k\times d}$ mesurable et satisfait

$$\begin{cases}(i)\ f(.,.,0,0)\in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^k),\\ \\ (ii)\text{ il existe une constante } K \text{ telle que}\\ |f(t,s,y,z)-f(t,s,y',z')|\le K\left(|y-y'|+|z-z'|\right),\ \forall\ y\in\mathbb{R}^k,\ y'\in\mathbb{R}^k,\\ z\in\mathbb{R}^{k\times d},\ z'\in\mathbb{R}^{k\times d}.\end{cases}$$

**(B2)** $g:\Omega\times\mathcal{D}\times\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^{k\times d}$ est $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}_k/\mathcal{B}_{k\times d}$ mesurable et satisfait

$$\begin{cases}(i)\ g(.,.,0)\in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})\\ \\ (ii)\ |g(t,s,y)-g(t,s,y')|\le K|y-y'|,\ \forall\ y,y'\in\mathbb{R}^k,\end{cases}$$

**(B3)** $\xi$ est un vecteur aléatoire $k-$dimensionelle de carrée intégrable $\mathcal{F}_T-$mesurable.

**(A2)** $b : [0;T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction bornée mesurable telle que
$(i)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $b(.,.,y) = (b_1(.,.,y), \ldots, b_d(.,.,y))$ est un processus $\mathcal{F}_t-$prévisible;
$(ii)$ pour tout $1 \leq i \leq d$, $y \mapsto b_i(t,\omega,y)$ est uniformément lipschitzienne en $(t,\omega)$ et il existe une constante $\beta_i$ telle que $|b_i(t,\omega,y)| \leq \beta_i$,

**(A3)** $R : [0;T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ est une fonction bornée mesurable telle que
$(i)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $R(.,.,y) = (r_{ij}(.,.,y))_{1\leq i,j\leq d}$ est un processus $\mathcal{F}_t-$ prévisible avec $r_{ii}(.,.,y) \equiv 1$
$(ii)$ pour tout $1 \leq i,j \leq d$, $y \mapsto r_{ij}(t,\omega,y)$ est uniformément lipschitzienne en $(t,\omega)$ et pour $i \neq j$ $|r_{ij}(t,\omega,y)| \leq \nu_{ij}$, où $V = (\nu_{ij})$ est une matrice telle que $\nu_{ii} = 0$, $\sigma(V) < 1$ et $(I - V)^{-1} = I + V + V^2 + \ldots.. + \ldots.$; $\sigma(V)$ désignant le rayon le rayon spectral de $V$.

**Remarque 1.1.1.** *D'après (**A3**), il existe des constantes $a_j, 1 \leq j \leq d$ et $0 < \alpha < 1$ telles que*

$$\sum_{i\neq j} a_i |r_{ij}(t,\omega,y)| \leq \sum_{i\neq j} a_i v_{ij} \leq \alpha a_j.$$

**Proposition 1.1.1.** *(voir Ramasubramania [65])*
*Les hypothèses (**A1**) − (**A3**) étant satisfaites et $\{Y(t),Z(t),K(t), 0 \leq t \leq T\}$ solution l'EDSR à réflexion oblique associée à $(\xi,b,R)$,*

$$0 \leq dK_i(t) \leq \left((I - V)^{-1}\beta\right)_i dt, \ 1 \leq i \leq d.$$

*En particulier $dK_i(.)$ est absolument continu, et par suite le temps local en $0$ de $Y_i(.)$ est aussi absolument continu pour tout $i = 1,\ldots..,d$.*

**Proposition 1.1.2.** *(voir Ramasubramania [65])*
*Soit $(Y,Z,K)$ et $(Y',Z',K')$ deux solutions de l'EDSR à réflexion oblique associée respectivement aux données $(\xi,f,0)$ et $(\xi',f',0)$ alors, pour tout $\theta \geq 0, 0 \leq s \leq t \leq T$*

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\int_s^t \left(e^{\theta r} - 1\right)|d(K_i - K_i')|(r) \\
\leq\ & \mathbb{E}\left[\left(e^{\theta t} - 1\right)|Y(t) - Y'(t)| - \left(e^{\theta s} - 1\right)|Y(s) - Y'(s)|\right] \\
& -\mathbb{E}\int_s^t e^{\theta r}\theta |Y(r) - Y'(r)|dr \\
& +\mathbb{E}\int_s^t \left(e^{\theta r} - 1\right)|f(r) - f'(r)|dr.
\end{aligned}$$

Soit $\widetilde{\mathcal{H}}$ la collection des couples de processus $(Y,K)$ continus $\mathcal{F}_t-$progressivement mesurables à valeurs dans $\overline{G} \times \mathbb{R}^d$ définis sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ tels que:
$(i)$ pour tout $\leq i \leq d, K_i(0) = 0, K_i(.)$ est non décroissant et croit seulement quand $Y_i(.) = 0$;
$dK_i(t) = D_i(t) \leq \left((I - V)^{-1}\beta\right)_i$, $D(t) = (D_1(t), D_2(t), \ldots.., D_d(t))$

# Chapitre 1

# Préliminaires

Ce chapitre présente essentiellement des résultats antérieurs sur les différentes classes d'EDSR étudiées, la notion de solution de viscosité et le critère de Meyer Zheng. Les preuves ne seront pas données; pour plus d'informations le lecteur se refera à la bibliographie de ce document. La Section 1 est destinée à quelques résultats des travaux de Ramasubramania [65] sur les EDSR à réflexion oblique. La section 2 énumère les résultats des travaux de J. Lin [44] sur les EDSR de type Volterra. Les EDSR généralisées initiées par Pardoux et Zhang [62] seront abordées à la Section 3. La Section 4 concerne la notion de solution de viscosité vue dans Crandal et Lions [17] ou Lions [46, 47] qui lie les EDSR aux EDP. Enfin la Section 5 énonce le critère de tension de Meyer Zheng [49].

## 1.1 EDSR avec réflexion oblique

Soit $W = \{W(t) = (W_1(t),...,W_d(t)) : t \geq 0\}$ le mouvement Brownien standard de dimension $d-$ défini sur l'espace probabilisé filtré complet $(\Omega, \mathcal{F},P,\{\mathcal{F}_t\})$ où $\{\mathcal{F}_t\}$ désigne la filtration naturelle engendrée par $W$, $\mathcal{F}_0$ contenant tous les sous ensembles de mesure $\mathbb{P}-$nulle.

Soit $G = \{x \in \mathbb{R}^d : x_i > 0,1 \leq i \leq d\}$ l'orthant positif de $\mathbb{R}^d$ et l'EDSR

$$Y_i(t) = \xi_i + \int_t^T b_i(s,Y(s))ds - \sum_{j=1}^d \int_t^T Z_{ij}(s)dW_j + K_i(T) - K_i(t)$$
$$+\sum_{j\neq i} \int_t^T r_{ij}(s,Y(s))dK_j(s); \qquad (1.1)$$

avec les hypothèses liées à ses données $(\xi,b,R)$.

**(A1)** La valeur terminale $\xi$ est une variable aléatoire bornée et à valeurs dans $\overline{G}$ $\mathcal{F}_T-$mesurable.

**Remarque 1.2.1.** *Les hypothèses* ($\boldsymbol{B1}$) $-$ ($\boldsymbol{B2}$) *impliquent que si* $Y \in M^2(t,T;\mathbb{R}^k)$ *et* $Z \in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$ *alors* $f(.,.,Y(.),Z(.,.)) \in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^k)$ *et* $g(.,.,Y(.)) \in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$.

**Définition 1.2.1.** *La paire* $\{(Y(s)\,,Z(t,s));\ (t,s)\in\mathcal{D}\}$ *de processus* $\mathcal{F}_{t\vee s}-$*adapté à valeur dans* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ *est solution de l'EDSR* (1.2) *associée à* $(\xi,f,g)$ *s'il existe un vecteur aléatoire* $\xi$ $\mathcal{F}_T-$*mesurable et de carré intégrable tel que* (1.2) *soit satisfait.*

**Lemme 1.2.1.** *(voir J. Lin [44])*
*Les hypothèses* ($\boldsymbol{B1}$) $-$ ($\boldsymbol{B3}$) *étant vérifiées et* $(Y(s),Z(t,s))$ *solution de l'EDSR* (1.2) *associée à* $(\xi,f,g)$ *;*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y(t)|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |Z(t,s)|^2 ds\\
= \;& \mathbb{E}|\xi|^2 - 2\mathbb{E}\int_t^T \langle f(t,s,Y(s),Z(t,s)),Y(s)\rangle ds\\
&-2\mathbb{E}\int_t^T f(t,s,Y(s),Z(t,s))A(t,s)ds\\
&-2\mathbb{E}\int_t^T \langle g(t,s,Y(s),Z(t,s))\rangle ds - \mathbb{E}\int_t^T |g(t,s,Y(s)|^2 ds
\end{aligned}$$

*où*

$$A(t,s) = \int_s^T \left(f(s,u,Y(u),Z(s,u)) - f(t,u,Y(u),Z(t,u))\right) du.$$

**Théorème 1.2.1.** *(voir J. Lin [44])*
*Supposons les hypothèses* ($\boldsymbol{B1}$) $-$ ($\boldsymbol{B3}$) *satisfaites alors il existe une unique paire* $(Y(s),Z(t,s)) \in M^2(t,T;\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$ *solution de l'EDSR* (1.2) *associée à* $(\xi,f,g)$.

## 1.3 EDSR généralisées

### 1.3.1 Existence et unicité de la solution

Soit

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_t^T g(s,Y_s)dG_s - \int_t^T Z_s dW_s,\ 0\le t\le T \qquad (1.3)$$

l'EDSR généralisée associée aux données $(\xi,f,g)$ vérifiant les hypothèses suivantes.

(**H1**) $\xi$ est un élément de $L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{P};\mathbb{R}^k)$ telle que $\mathbb{E}\left(e^{\mu G_T}|\xi|^2\right) < \infty$,

(**H2**) $f : \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ et $g : \Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ sont deux fonctions satisfaisant les conditions

$$\begin{cases} (i) & f(.,y,z) \text{ et } g(.,y) \text{ sont } \mathcal{F}_t - \text{progressivement mesurables} \\ (ii) & |f(t,y,z) - f(t,y,z')| \leq K|z - z'| \\ (iii) & \langle y - y', f(t,y,z) - f(t,y',z)\rangle \leq \alpha|y - y'|^2 \\ (iv) & \langle y - y', g(t,y) - g(t,y')\rangle \leq \beta|y - y'|^2 \\ (v) & |f(t,y,z)| \leq \varphi_t + K(|y| + |z|) \text{ et } |g(t,y)| \leq \psi_t + K|y| \\ (vi) & y \longmapsto (f(t,y,z), g(t,y)) \text{ est continue pour tout } z, (t,\omega) \ p.s. \\ (vii) & \mathbb{E}(\int_0^T e^{\mu G_t}\varphi_t^2 dt + \int_0^T e^{\mu G_t}\psi_t^2 dG_t) < +\infty, \end{cases}$$

où $\alpha,\beta \in \mathbb{R}, K > 0, \mu$ sont des constantes, ($\mu$ choisi arbitrairement) et $\{\varphi_t, \psi_t : 0 \leq t \leq T\}$ des processus adaptés à valeurs dans $[1, +\infty)$.

**Remarque 1.3.1.** *On peut toujours sans perdre en généralité choisir $\beta < 0$.*

**Définition 1.3.1.** *Une solution de (1.3) est une paire $\{(Y_t, Z_t) : 0 \leq t \leq T\}$ de processus progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ satisfaisant (1.3) et* $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_t|^2 dt\right) < +\infty$.

Avant de donner le résultat d'existence et d'unicité, présentons quelques estimations à priori sur la solution et un résultat de comparaison.

**Proposition 1.3.1.** *(Voir pardoux et Zhang [62])*
*L'hypothèse (**H2**) étant satisfaite et $\{(Y_t, Z_t),\ 0 \leq t \leq T\}$ la solution de (1.3), alors il existe une constante $C$, dépendant uniquement de $\alpha, \beta, K$ et $T$, tel que:*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_t|^2 ds + \int_0^T |Y_t|^2 dG_t) \\ \leq\ & C\mathbb{E}\left(|\xi|^2 + \int_0^T |f(t,0,0|^2 dt + \int_0^T |g(t,0)|^2 dG_t\right). \end{aligned}$$

*De plus, si $\left\{\widetilde{G}_t;\ 0 \leq t \leq T\right\}$ est un processus stochastique quelconque continu, croissant et progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ tel que $\widetilde{G}_0 = 0$ et $\mathbb{E}(e^{\mu\widetilde{G}_T}) < +\infty$, alors pour tout $\mu > 0$ il existe une constante $C(\mu,\alpha,\beta,K,T)$ telle que*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\mu\widetilde{G}_t} |Y_t|^2 + \int_0^T e^{\mu\widetilde{G}_t}|Z_t|^2 dt + \int_0^T e^{\mu\widetilde{G}_t} |Y_t|^2 dG_t) \\ \leq\ & C\mathbb{E}\left(e^{\mu\widetilde{G}_T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\mu\widetilde{G}_t}|f(t,0,0|^2 dt + \int_0^T e^{\mu\widetilde{G}_t}|g(t,0)|^2 dG_t\right). \end{aligned}$$

**Proposition 1.3.2.** *(Voir pardoux et Zhang [62])*
*Soit*

$$(\overline{Y},\overline{Z},\overline{\xi},\overline{f},\overline{g},\overline{G}) = (Y - Y',Z - Z',\xi - \xi',f - f',g - g',G - G'),$$

*où* $(Y,Z)$ *et* $(Y',Z')$ *sont les solutions respectives des EDSR associées aux données* $(\xi,f,g,G)$ *et* $(\xi',f',g',G')$. *Alors, pour tout* $\mu > 0$, *il existe une constante* $C$ *telle que*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\mu K_t}\left|\overline{Y}_t\right|^2 + \int_0^T e^{\mu K_t}|\overline{Z}_t|^2 dt + \int_0^T e^{\mu K_t}\left|\overline{Y}_t\right|^2 d\overline{G}_t)\\
\leq\ & C\mathbb{E}\left(e^{\mu K_T}|\overline{\xi}|^2 + \int_0^T e^{\mu K_t}|\overline{f}(t,0,0|^2 dt + \int_0^T e^{\mu K_t}|\overline{g}(t,0)|^2 d\overline{G}_t\right)
\end{aligned}$$

$K_t = ||\overline{G}||_t + G'_t$, $||\overline{G}||_t$ *étant la variation total du processus* $\overline{G}$ *sur l'interval* $[0,t]$.

**Théorème 1.3.1.** *(Voir pardoux et Zhang [62])*
*Supposons* $k = 1$; $(Y_t,Z_t)$ *et* $(Y'_t,Z'_t)$ *les solutions respectives des EDSR généralisés associées au données* $(\xi,f,g,G)$ *et* $(\xi',f',g',G)$ *qui vérifient* $\xi \leq \xi'$, $f(t,y,z) \leq f'(t,y,z)$, $g(t,y) \leq g'(t,y)$, *pour tout* $(y,z)$ $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$,$d\mathbb{P}\times dt$, *p.s. Alors* $Y_t \leq Y'_t$, $0 \leq t \leq T$, *p.s. et si en plus* $Y_0 = Y'_0$, *alors* $Y_t = Y'_t$, $0 \leq t \leq T$.

**Théorème 1.3.2.** *(Voir pardoux et Zhang [62])*
*Sous les hypothèses* (***H1***) $-$ (***H2***), *l'EDSR (1.3) admet une solution unique.*

### 1.3.2 EDSR généralisées dans le cadre markovien

Soient $b : [0,T]\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : [0,T]\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d\times d}$ deux fonctions globalement lipschitziennes et à croissance sous linéaire. On considére $\Theta$ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ défini par $\Theta = \{\psi > 0\}$, $\partial\Theta = \{\psi = 0\}$ où $\psi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ et vérifie $|\nabla\psi(x)| = 1$, $\forall\ x \in \partial\Theta$ où $\nabla\psi(x)$ est normal et dirigé vers l'intérieur de $\partial\Theta$. D'après les travaux de Lions et Szitman [45] (voir aussi Saisho [66]) pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+\times\overline{\Theta}$ l'EDS progessive

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^{t\vee s} b(r,X_r^{t,x})dr + \int_t^{t\vee s}\sigma(r,X_r^{t,x})dW_r + \int_t^{t\vee s}\nabla\psi(X_r^{t,x})dG_r^{t,x}, s\geq 0\\ G_s^{t,x} = \int_t^{t\vee s} 1_{\{X_r^x\in\partial\Theta\}}dG_r^{t,x}\end{cases} \tag{1.4}$$

admet une solution unique $\{(X_s^{t,x},G_s^{t,x}),s \in [0,T]\}$ telle que $X_t^{t,x} = x$.

**Proposition 1.3.3.** *Pour tout* $T \geq 0$,
*(i) Il existe une constante* $C(T)$ *telle que pour tout* $x,x' \in \overline{\Theta}$

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T}|X_s^{x,t} - X_s^{x',t}|^4) \leq C_T|x - x'|^4,$$

*et*

$$\langle q\psi(t,x),q\rangle + g(t,x,u(t,x)) \leq 0, \ si\ x \in \partial\Theta.$$

*(b) u est une sur solution de viscosité de (1.5) si* $u(T,x) \geq l(t,x), x \in \Theta$ *et* $\forall (t,x) \in [0,T] \times \overline{\Theta}$, $\forall (p,q,X) \in \mathcal{P}^{2,-}u(t,x)$

$$-p - \frac{1}{2}Tr\left((\sigma\sigma^*)(t,x)X\right) - \langle b(t,x),q\rangle - f\left(t,x,u(t,x),q\sigma(t,x)\right) \geq 0, \ si\ x \in \Theta$$

*et*

$$\langle q\psi(t,x),q\rangle + g(t,x,u(t,x)) \geq 0, \ si\ x \in \partial\Theta.$$

*(c) u est une solution de viscosité de (1.5) si u est sous et sur solution de viscosité.*

Si on considère

$$u(t,x) = Y_t^{t,x}, \forall (t,x) \in [0,T] \times \overline{\Theta}, \tag{1.6}$$

alors $u(t,x)$ est déterministe car $Y_t^{t,x}$ est mesurable par rapport à la $\sigma-$algèbre $\sigma(W_r - W_t : t \leq r \leq T)$ et on a

**Proposition 1.4.2.** *(Voir Pardoux Zhang [62])*

$$\begin{array}{ll} (a) & \sup\limits_{x\in\overline{\Theta}} |u(t,x)| \leq C(1+|x|) \ \ \forall\ t \in [0,T] \\ (b) & u \in \mathcal{C}\left([0,T] \times \overline{\Theta}\right), \end{array}$$

*où $C > 0$ est une constante indépendante de $t$ et $x$*

**Théorème 1.4.1.** *(Voir Pardoux Zhang [62])*
*La fonction u définie en (1.6), est une solution de viscosité du système d'EDP parabolique (1.5).*

## 1.5 Critère de tension de Meyer et Zheng

Cette section introduit la notion de topologie pseudo-trajectorielle et de quasi-martingale telles qu'elles sont dans les travaux de Meyer et Zheng [49]. Pour cela on définie les ensembles suivants:

•$\mathbb{D}([0,t], \mathbb{R}^k)$ l'espace des fonctions càdlàg sur $[0,t]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$,

•$\mathbb{L}^0([0,t], \mathbb{R}^k)$ l'espace (classes d'équivalence) des fonctions boréliennes mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

•$\mathbb{L}^0_+([0,t], \mathbb{R}^k)$ l'espace (classes d'équivalence) des fonctions boréliennes mesurables et positives à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

on suppose que $f_i$, la *ième* coordonnée de $f$, dépend uniquement de la *ième* colonne de la matrice $z$. Cette restriction est nécessaire pour l'existence d'une solution de l'EDP (1.5). La proposition suivante issue de Pardoux et Peng [56] généralise la formule de Feynman-Kac.

**Proposition 1.4.1.** *(Voir Pardoux Zhang [62])*
*Soit $u \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \overline{\Theta}, I\!R^k)$ une solution classique de (1.5) et $C$ une constante telle que pour tout $(s,x) \in [0,T] \times \overline{\Theta}$,*

$$|u(s,x)| + |\nabla u(s,x)\sigma(s,x)| \leq C\,(1 + |x|)\,;$$

*alors $Y_s^{t,x} = u(s,X_s^{t,x}), Z_s^{t,x} = \nabla u(s,X_s^{t,x})\sigma(s,X_s^{t,x})$, p.s. où $(Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})$ est la solution unique de l'EDSR associée aux données $\left(l\left(X_T^{t,x}\right), f, g\right)$ précédentes.*

**Définition 1.4.1.** *Soient $u \in \mathcal{C}\left([0,T] \times \overline{\Theta}\right)$ et $S\,(d)$ l'espace des matrices non négatives symétriques; on définit par $\mathcal{P}^{2,+}u\,(t,x)$ (the "parabolic superject" de $u$ en $(t,x)$ l'ensemble des triplets $(p,q,X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times S\,(d)$ vérifiant*

$$\begin{aligned} u(t,y) &\leq u\,(t,x) + p\,(s-t) + \langle q, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle \\ &\quad + o(|s-t| + |y-x|^2). \end{aligned}$$

*Similairement, on note par $\mathcal{P}^{2,-}u\,(t,x)$ (the "parabolic subject" de $u$ en $(t,x)$ l'ensemble des triplets $(p,q,X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times S\,(d)$ vérifiant*

$$\begin{aligned} u(t,y) &\geq u\,(t,x) + p\,(s-t) + \langle q, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle \\ &\quad + o(|s-t| + |y-x|^2). \end{aligned}$$

**Exemple 1.4.1.** *Soit $\varphi \in C^{1,2}\left((0,T) \times I\!R^d\right)$. Si $u - \varphi$ admet un maximum local en $(t,x)$, alors*

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x), \nabla_x \varphi\,(t,x), \partial_x^2 \varphi\,(t,x)\right) \in \mathcal{P}^{2,+}u(t,x).$$

*Si $u - \varphi$ admet un minimum local en $(t,x)$, alors*

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x), \nabla_x \varphi\,(t,x), \partial_x^2 \varphi\,(t,x)\right) \in \mathcal{P}^{2,-}u(t,x).$$

Maintenant donnons la définition de la solution de viscosité des EDP semilinéaires avec condition de Neumann non linéaire.

**Définition 1.4.2.** *Soit $u \in \mathcal{C}\left([0,T] \times \overline{\Theta}\right)$*
*(a) $u$ est une sous solution de viscosité de (1.5) si $u(T,x) \leq l(x), x \in \Theta$ et $\forall\,(t,x) \in [0,T] \times \overline{\Theta}, \forall\,(p,q,X) \in \mathcal{P}^{2,+}u\,(t,x)$*

$$-p - \frac{1}{2}Tr\left((\sigma\sigma^*)\,(t,x)X\right) - \langle b(t,x), q\rangle - f\left(t,x,u(t,x), q\sigma(t,x)\right) \leq 0,\ si\ x \in \Theta$$

*(ii) Il existe trois constantes $C(T)$, $C(p)$ et $C(\mu,t)$ telles que pour tout $x,x' \in \overline{\Theta}$, $t \in I\!R_+$*

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |G_s^{x,t} - G_s^{x',t}|^4 \leq C_T|x-x'|^4),$$

$$\mathbb{E}(|G_s^{x,t}|^p) \leq C(p)\,(1+s^p)$$

*et*

$$\mathbb{E}\left(e^{\mu G_t^{x,t}}\right) \leq C(\mu s)$$

*$\mu$ étant une constante positive.*

Pour la suite, on prendra $k=1$ et les données $(\xi,f,g)$ de l'EDSR généralisée (1.3) sous la forme suivante:
$\xi = l(X_T^{t,x})$, $f(s,y,z) = f(s,X_s^{t,x},y,z)$, $g(s,y) = g(s,X_s^{t,x},y)$
où $f \in \mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Theta} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1\times d};\ I\!R)$, $g \in \mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Theta} \times I\!R;\ I\!R)$ vérifiant les hypothèses (**H1**), (**H2**) et $l \in \mathcal{C}(\overline{\Theta},I\!R)$. D'après les résultats de la Section 1.2. pour tout $(t,x)$, il existe un unique couple $\{(Y_s^{t,x},Z_s^{t,x}),\ t\leq s\leq T\}$ de processus $\{\mathcal{F}_s^t\}$ −progressivement mesurables solution de l'EDSR généralisée asociée à $\left(l\left(X_T^{t,x}\right),f,g\right)$.

## 1.4 Solution de viscosité des EDP

On appelle solution de viscosité des EDP non linéaires dégénérées une solution non nécessairement régulière pour satisfaire l'EDP dans le sens classique. Introduite par Crandal et Lion [17] dans le but de résoudre les équations de Hamilton-Jacobi d'ordre un, elle s'est ensuite étendue aux équations de second ordre dans Lions [46, 47] et Crandall et *al* [19]. Plus concrètement considérons le système d'équations aux dérivées partielles paraboliques d'inconnu $u$ suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + (\mathcal{L}u)(t,x) + f(t,x,u(t,x),(\nabla u(t,x))^*\sigma(t,x)) = 0,\ (t,x) \in (0,T)\times\Theta \\ \Gamma u(t,x) + g(t,x,u(t,x)) = 0,\ (t,x) \in (0,T)\times\partial\Theta \\ u(T,x) = h(x),\ x \in \overline{\Theta}, \end{cases} \tag{1.5}$$

où

$$(\mathcal{L}\varphi)(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}(\sigma\sigma^*)_{ij}(t,x)\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x_i\partial x_j)}(t,x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\ \forall x\in\Theta$$

et

$$(\Gamma\varphi)(t,x) = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(t,x)\ \forall x\in\partial\Theta.$$

On note que $\mathbb{D} \subset \mathbb{L}^0$ et pour tout $u \in \mathbb{L}^0$, la pseudo-trajectoire de $u$ est la mesure de probabilité sur $[0,t] \times \overline{\mathbb{R}}$ définie par:

$$P^u(A) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{1}_A(t,u(t))\, dt, \qquad \forall\, A \in \mathcal{B}\left([0,t] \times \overline{\mathbb{R}}\right).$$

Comme l'application $\psi : u \longrightarrow P^u$ est injectif alors on identifie tout $u \in \mathbb{L}^0$ avec sa pseudo-trajectoire et on pose $\mathcal{M}$ l'ensemble de tous les pseudo-trajectoires. En particulier l'espace $\mathbb{D}$ peut être injecté dans l'espace compact $\overline{\mathcal{P}}$ de toutes les lois de probabilité sur l'espace compact $[0,t] \times \overline{\mathbb{R}}$ (avec la métrique de Prohorov). Il est claire que $\mathbb{D} \subset \mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{P}}$ et la topologie intuite sur $\mathcal{M}$ et $\mathbb{D}$ est connue sous le nom de topologie pseudo-trajectorielle ou la topologie de Meyer-Zheng.

**Lemme 1.5.1.** *(voir Meyer et Zheng [49]). La topologie pseudo-trajectorielle sur $\mathcal{M}$ est équivalente à la topologie de la convergence en mesure.*

**Définition 1.5.1.** *Soit $0 = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_n = t$ une partition de $[0,t]$ et*

$$\begin{aligned} V_t(Y) &= \mathbb{E}\left(\sum_i^n |\mathbb{E}\left(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}/\mathcal{F}_{t_i}\right)|\right) \\ CV_t(Y) &= \sup \mathbb{E}\left(\sum_i |\mathbb{E}\left(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}/\mathcal{F}_{t_i}\right)|\right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

*où "sup"signifie que le supremum est pris parmi toutes partitions de l'intervalle $[0,t]$. On appelle quasi-martingale tout processus $Y$ $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$−adapté càdlàg vérifiant $\mathbb{E}|Y_t| < +\infty$ et $CV_t(Y) < +\infty$.*

Le théorème suivant est le résultat de tension de Meyer-Zheng

**Théorème 1.5.1.** *(voir Meyer-Zheng [49] ou Kurtz [41]). La suite de quasi-martingales $\{V_s^n; 0 \leq s \leq t\}$ défini sur l'espace filtré $\{\Omega; \mathcal{F}_s, 0 \leq s \leq t; \mathbb{P}\}$ est tendue sur $\mathbb{D}$ si*

$$\sup_n \left( \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}|V_s^n| + CV_t(V^n) \right) < +\infty.$$

# Chapitre 2

# Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades avec réflexion oblique et coefficient localement Lipschitzien [1]

Dans ce chapitre, la Section 1 énonce les hypothèses de base et le principal résultat et la Section 2 est destinée à sa preuve.

## 2.1 Hypothèses et formulation du problème

On considère l'équation

$$Y_i(t) = \xi_i + \int_t^T b_i(s,Y(s))ds - \sum_{j=1}^{d} \int_t^T Z_{ij}(s)dW_j + K_i(T) - K_i(t) + \sum_{j\neq i} \int_t^T r_{ij}(s,Y(s))dK_j(s) \qquad (2.1)$$

associée aux données $(\xi,b,R)$ sous les hypothèses

**(A1)** La valeur terminale $\xi$ est une variable aléatoire bornée et à valeurs dans $\overline{G}$ $\mathcal{F}_T-$mesurable.

**(A2)**$'$ $b : [0;T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction bornée mesurable telle que
(*i*) pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $b(.,.,y) = (b_1(.,.,y), \ldots ,b_d(.,.,y))$ est un processus $\mathcal{F}_t-$prévisible;
(*ii*) pour tout $1 \leq i \leq d$, $y \mapsto b_i(t,\omega,y)$ est localement Lipschitzienne uniformément en $(t,\omega)$ et il existe une constante $\beta_i$ telle que $|b_i(t,\omega,y)| \leq \beta_i$,.

1. Ce travail est publié dans Journal of Appl. Math. and Stoch. Anal. 16 (4), 295-309, (2003).

**(A3)** $R : [0;T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$ est une fonction bornée mesurable telle que
(*i*) pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $R(.,.,y) = (r_{ij}(.,.,y))_{1\leq i,j\leq d}$ est un processus $\mathcal{F}_t-$ prévisible avec $r_{ii}(.,.,y) \equiv 1$
(*ii*) pour tout $1 \leq i,j \leq d$, $y \mapsto r_{ij}(t,\omega,y)$ est uniformément lipschitzienne en $(t,\omega)$ et pour $i \neq j$ $|r_{ij}(t,\omega,y)| \leq \nu_{ij}$, où $V = (\nu_{ij})$ est une matrice telle que $\nu_{ii} = 0$, $\sigma(V) < 1$ et $(I - V)^{-1} = I + V + V^2 + ..... + ....$; $\sigma(V)$ désignant le rayon le rayon spectral de $V$.

Soient $(Y,K), (\widehat{Y},\widehat{K})$ éléments de $\widetilde{\mathcal{H}}$, alors

$$\varphi_t(K_i - \widehat{K}_i) = \int_t^T |D_i(s) - \widehat{D}_i(s)|ds$$

et une intégration par partie permet d'avoir

$$\begin{aligned} d((Y,K),(\widehat{Y},\widehat{K})) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d \int_0^T e^{\theta t} a_i |Y_i(t) - \widehat{Y}_i|dt\right) \\ &+ \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d \int_0^T \frac{e^{\theta t}-1}{\theta} a_i |D_i(t) - \widehat{D}_i(t)|dt\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t} ||Y(t) - \widehat{Y}(t)||dt\right) \\ &+ \mathbb{E}\left(\int_0^T \frac{e^{\theta t}-1}{\theta} ||D(t) - \widehat{D}(t)||dt\right), \end{aligned}$$

où pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $||y|| = \sum_i^d a_i |y_i|$.
D'autre part pour tout $z \in \mathbb{M}_d(\mathbb{R})$, on pose

$$|||z||| = \left(\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d a_i |z_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

et on considère $\mathbb{H}$ l'espace de tous les processus $Z = (Z_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ $\mathcal{F}_t-$progressivement mesurables tels que

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |||Z(t)|||^2 dt\right) < +\infty,$$

muni de la norme

$$|Z| = \left[\mathbb{E}\left(\int_0^T |||Z(t)|||^2 dt\right)\right]^{1/2}.$$

Il est claire que $\mathbb{H}$ est un espace de Banach.
On a le résultat principal suivant
**Théorème 2.1.1.** *Les hypothèses (**A1**)-(**A3**) étant vérifiées, l'EDSR à réflexion oblique associée à $(\xi,b,R)$ admet une solution unique $((Y,K),Z) \in \widetilde{\mathcal{H}} \times \mathbb{H}$.*

## 2.2 Preuve du résultat principal

Les lemmes suivants sont nécessaires à la preuve du Théorème 2.1.1.

**Lemme 2.2.1.** *$b$ étant un processus vérifiant l'hypothèses $(\boldsymbol{A2})'$, il existe une suite de processus $b^n$ Lipschitziens satisfaisant $|b_i^n(t,\omega,y)| \leq \beta_i, \forall 1 \leq i \leq d$ et $(t,\omega,y) \in [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d$ telle que pour tout $p,\rho_p(b^n - b) \to 0$ p.s lorsque $n \to +\infty$, où*

$$\rho_p(f) = \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta s} \sup_{|x|<p} ||f(s,x)||ds\right).$$

*Démonstration.* Soit $\psi_n$ une suite de fonctions régulières à support dans la boule $B\,(0,n+1)$ telle que $\sup \psi_n = 1$. On montre aisément que la suite $(b^n)_{n\geq 1}$ de fonctions tronquées définies par $b^n = b\psi_n$, vérifie toutes les propriétés citées précédamment. □

D'après le théorème 1.1.1, l'EDSR à réflexion oblique associée à $(\xi,b^n,R)$ admet une solution unique $\{((Y^n(t),K^n(t)),Z^n(t)) : 0 \leq t \leq T\} \in \widetilde{\mathcal{H}} \times \mathbb{H}$.

**Lemme 2.2.2.** *Les hypothèses $(\boldsymbol{A1})$-$(\boldsymbol{A3})$ étant satisfaites, il existe une constante $C$ telle que pour tout $n \geq 1$*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}||Y^n(t)||dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \frac{e^{\theta t}-1}{\theta}||D^n(t)||dt\right) < C. \qquad (2.1)$$

*Démonstration.* Le triplet $(Y^n,K^n,Z^n)$ étant l'unique solution de l'EDSR à réflexion oblique associée à $(\xi,b^n,R)$, il vérifie l'équation

$$\begin{aligned} Y^n(t) &= \xi_i + \int_t^T b_i^n(s,Y^n(s))ds - \int_t^T \sum_{j=1}^d Z_{ij}^n(s)dB_j + K_i^n(T) - K_i^n(t) \\ &\quad + \sum_{j\neq i} \int_t^T r_{ij}(s,Y^n(s))dK_j(s), \ \forall 1 \leq i \leq d \text{ et } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

La proposition 1.1.2 et une intégration par partie, entrainent

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\int_0^T \theta e^{\theta t}|Y_i^n(t)|dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta e^{\theta t}\varphi_t(K_i^n)dt\right) \\ =\ & \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta e^{\theta t}|Y_i^n(t)|dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)|D_i^n(t)|dt\right) \\ \leq\ & \mathbb{E}\left(\left(e^{\theta T}-1\right)|\xi_i|\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)|b_i^n(t,Y^n(t))|dt\right) \\ &+\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\sum_{j\neq i}|r_{ij}(t,Y^n(t))||D_j^n(t)|dt\right). \end{aligned}$$

Or $|r_{ij}(t,\omega,y)| \leq v_{ij}$, $|b_j^n(t,\omega,y)| \leq \beta_j$ et $|D_j^n(t,\omega,y)| \leq ((I-V)^{-1}\beta)_j$; par conséquent

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^T \theta e^{\theta t}\left|Y_i^n(t)\right| dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta e^{\theta t}\varphi_t(K_i^n) dt\right) \\
\leq\ & \mathbb{E}(\left(e^{\theta T}-1\right)|\xi_i|) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\beta_i dt\right) \\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\sum_{j\neq i} v_{ij}((I-V)^{-1}\beta)_j\, dt\right). \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Comme

$$d((Y^n,K^n),(0,0)) = \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left\|Y^n(t)\right\| dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \frac{e^{\theta t}-1}{\theta}\left\|D^n(t)\right\| dt\right),$$

en multipliant les deux membres de (2.2) par $a_i$ et en sommant on a

$$\begin{aligned}
\theta d((Y^n,K^n),(0,0)) \leq\ & \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d \left(e^{\theta T}-1\right) a_i|\xi_i|\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d \int_0^T (e^{\theta t}-1) a_i\beta_i dt\right) \\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\theta t}-1)\sum_{i=1}^d\sum_{j\neq i} a_i v_{ij}((I-V)^{-1}\beta)_j dt\right).
\end{aligned}$$

En vertue de la remarque 1.1.1 on a

$$\begin{aligned}
\theta d((Y^n,K^n),(0,0)) \leq\ & \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d \left(e^{\theta T}-1\right) a_i|\xi_i|\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d \int_0^T (e^{\theta t}-1) a_i\beta_i dt\right) \\
&+\alpha\mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\theta t}-1)\sum_{j=1}^d a_j((I-V)^{-1}\beta)_j dt\right) \\
\leq\ & \left(e^{\theta T}-1\right)\mathbb{E}||\xi|| \\
&+(||\beta|| + \alpha||((I-V)^{-1}\beta)||)\int_0^T (e^{\theta t}-1)dt \\
\leq\ & C.
\end{aligned}$$

□

Le lemme suivant prouve la convergence de la suite $(Y^n,K^n,Z^n)_{n\geq 1}$.

**Lemme 2.2.3.** *Les hypothèses (**A1**)–(**A3**) étant satisfaites, il existe* $((Y,K),Z) \in \widetilde{\mathcal{H}}\times\mathbb{H}$ *tel que*

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{ \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left\|Y^n(t)-Y(t)\right\| dt\right) + \mathbb{E}\int_0^T \frac{e^{\theta t}-1}{\theta}\left\|D^n(t)-D(t)\right\| dt\right\} = 0$$

*et*

$$\lim_{n\to+\infty} I\!E\left(\int_0^T |||Z^n(t) - Z(t)|||^2 dt\right) = 0,$$

*où*

$$K_i(t) = \int_0^t D_i(s)ds, 0 \leq i \leq d.$$

*Démonstration.* La même idée utilisée dans la preuve du Lemme 2.2.2 entraine que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta e^{\theta t}|Y_i^m(t) - Y_i^n(t)|dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\theta t} - 1)|D_i^m(t) - D_i^n(t)|dt\right) \\
\leq\ & \mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\theta t} - 1)|b_i^m(t,Y^m(t)) - b_i^n(t,Y^n(t))|1_{A_{m,n}^N} dt\right) \\
& +\mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\theta t} - 1)|b_i^m(t,Y^m(t)) - b_i^n(t,Y^n(t))|1_{\overline{A}_{m,n}^N} dt\right) \\
& +\mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\theta t} - 1)\sum_{j\neq i}|r_{ij}(t,Y^m(t) - r_{ij}(t,Y^n(t))||D_j^n(t)|dt\right) \\
& +\mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\theta t} - 1)\sum_{j\neq i}|r_{ij}(t,Y^m(t))|\,|D_j^m(t) - D_j^n(t)|dt\right) \\
=\ & I^i + I_2 + I_3 + I_4,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

où

$$A_{m,n}^N = \{\omega \in \Omega, ||Y^m(t,\omega)|| + ||Y^n(t,\omega)|| > N\}, \ \overline{A}_{m,n}^N = \Omega\backslash A_{m,n}^N.$$

On montre aisément que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\theta t} - 1)|b_i^m(t,Y^m(t)) - b_i^n(t,Y^n(t))|1_{\overline{A}_{m,n}^N} dt\right) \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^T (e^{\theta t} - 1)|b_i^m(t,Y^m(t)) - b_i(t,Y^m(t))|1_{\overline{A}_{m,n}^N} dt \\
&\quad +\mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\theta t} - 1)|b_i(t,Y^m(t)) - b_i(t,Y^n(t))|1_{\overline{A}_{m,n}^N} dt\right) \\
&\quad +\mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\theta t} - 1)|b_i(t,Y^n(t)) - b_i^n(t,Y^n(t))|1_{\overline{A}_{m,n}^N} dt\right).
\end{aligned}$$

Comme $b_i$ est $\frac{L_N}{a_i}$–localement Lipschitzien, ($L_N$ étant la constante de Lipschitz de

$b$ dans la boule $B(0,N)$)

$$
\begin{aligned}
I_2 \leq\ & \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\left|b_i^m(t,Y^m(t))-b_i(t,Y^m(t))\right| 1_{\overline{A}_{m,n}^N}\,dt\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\left|b_i(t,Y^n(t))-b_i^n(t,Y^n(t))\right| 1_{\overline{A}_{m,n}^N}\,dt\right)\\
&+\frac{L_N}{a_i}\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\left\|Y^m(t)-Y^n(t)\right\| dt\right). \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

$R$ étant lipschitzien et borné et $D_j^n(t)$ borné,

$$
\begin{aligned}
I_3 &\leq L\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\left\|Y^m(t)-Y^n(t)\right\|\left|D_j^n(t)\right| dt\right)\\
&\leq L\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\left\|Y^m(t)-Y^n(t)\right\|\sum_{j\neq i}((I-V)^{-1}\beta)_j dt\right)\\
&\leq LC_1\mathbb{E}\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\left\|Y^m(t)-Y^n(t)\right\| dt, \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

où $C_1$ est une constante positive et

$$
I_4 \leq \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\sum_{j\neq i} v_{ij}\left|D_j^m(t)-D_j^n(t)\right| dt\right). \qquad (2.6)
$$

L'introduction respective des inégalités (2.4)-(2.6) dans (2.3) donne

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^T \theta e^{\theta t}\left|Y_i^m(t)-Y_i^n(t)\right| dt\right)+\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\left|D_i^m(t)-D_i^n(t)\right| dt\right)\\
\leq\ & \mathbb{E}\left(I^i\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\left|b_i^m(t,Y^m(t))-b_i(t,Y^m(t))\right| 1_{\overline{A}_{m,n}^N}\,dt\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\left|b_i(t,Y^n(t))-b_i^n(t,Y^n(t))\right| 1_{\overline{A}_{m,n}^N}\,dt\right)\\
&+\left(\frac{L_N}{a_i}+LC_1\right)\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\left\|Y^m(t)-Y^n(t)\right\| dt\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right)\sum_{j\neq i} v_{ij}\left|D_j^m(t)-D_j^n(t)\right| dt\right). \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

En multipliant chaque membre de (2.7) par $a_i$, en sommant et d'après la remarque

1.1.1 on obtient

$$\begin{aligned}
&\theta d((Y^m,K^m),(Y^n,K^n)) \\
\leq\ & \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{d} a_i I^i\right) \\
&+\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{d}\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) a_i \left|b_i^m(t,Y^m(t)) - b_i(t,Y^m(t))\right| 1_{\overline{A}_{m,n}^N}\, dt\right) \\
&+\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{d}\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) a_i \left|b_i(t,Y^n(t)) - b_i^n(t,Y^n(t))\right| 1_{\overline{A}_{m,n}^N}\, dt\right) \\
&+\left(dL_N + \left(\sum_{i=1}^{d} a_i\right) LC_1\right)\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) ||Y^m(t) - Y^n(t)|| dt\right) \\
&+\alpha\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) ||D^m(t) - D^n(t)|| dt\right).
\end{aligned}$$

$\theta$ étant choisi assez grand tel que $\frac{1}{\theta}\left(dL_N + \left(\sum_{i=1}^{d} a_i\right) LC_1\right) \leq \alpha$,

$$\begin{aligned}
d((Y^m,K^m),(Y^n,K^n)) \leq\ & \alpha d((Y^m,K^m),(Y^n,K^n)) \\
&+\frac{1}{\theta}\rho_N(b^n - b) + \frac{1}{\theta}\rho_N(b^m - b) \\
&+\frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{d} a_i I^i\right). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

En vertue de l'hypothèse (**A1**), de l'inégalité de Chebychev et de (2.1), il existe $C > 0$ tel que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{d} a_i I^i\right) \leq \frac{C}{N}$$

et l'inégalité (2.8) devient

$$(1-\alpha)\, d((Y^n,K^n),(Y^m,K^m)) \leq \frac{1}{\theta}\left(\frac{C}{N}\right) + \frac{1}{\theta}\rho_N(b^n - b) + \frac{1}{\theta}\rho_N(b^m - b). \qquad (2.9)$$

Le passage à la limite en $n,m$ et $N$ dans (2.9 ) montre que la suite $(Y^n,K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\widetilde{\mathcal{H}}$ un espace métrique complet; alors il existe $(Y,K) \in \widetilde{\mathcal{H}}$ limite de $(Y^n,K^n)$.

D'autre part l'application de la formule d'Itô à $|Y_i^m(t) - Y_i^n(t)|^2$ donne

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}(|Y_i^m(t) - Y_i^n(t)|^2) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \sum_{j=1}^d |Z_{ij}^m(s) - Z_{ij}^n(s)|^2 ds\right) \\
= \;& 2\mathbb{E}\left(\int_0^T |Y_i^m(s) - Y_i^n(s)|\,|b_i^m(s,Y^m(s)) - b_i^n(s,Y^n(s))|\,ds\right) \\
&+2\mathbb{E}\left(\int_0^T |Y_i^m(s) - Y_i^n(s)|\,|D_i^m(s) - D_i^n(s)|\,ds\right) \\
&+2\mathbb{E}\left(\int_0^T |Y_i^m(s) - Y_i^n(s)|\left|\sum_{j\neq i} r_{ij}(s,Y^m(s))D_j^m(s) - r_{ij}(s,Y^n(s))D_j^n(s)\right| ds\right) \\
\leq \;& 4\beta_i\mathbb{E}\left(\int_0^T |Y_i^m(s) - Y_i^n(s)|\,ds\right) + 4\left((I-V)^{-1}\beta\right)_i \mathbb{E}\left(\int_0^T |Y_i^m(s) - Y_i^n(s)|\,ds\right) \\
&+4\sum_{j\neq i} v_{ij}\left((I-V)^{-1}\beta\right)_j \mathbb{E}\left(\int_0^T |Y_i^m(s) - Y_i^n(s)|\,ds\right). \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

En multipliant chaque membre de (2.10) par $a_i$ et en sommant, on trouve

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d a_i |Y_i^m(t) - Y_i^n(t)|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d a_i \left|Z_{ij}^m(s) - Z_{ij}^n(s)\right|^2 ds\right) \\
\leq \;& 4\mathbb{E}\left(\int_0^T \sum_{i=1}^d a_i\beta_i |Y_i^m(s) - Y_i^n(s)|\,ds\right) \\
&+4\mathbb{E}\left(\int_0^T \sum_{i=1}^d \left((I-V)^{-1}\beta\right)_i a_i |Y_i^m(s) - Y_i^n(s)|\,ds\right) \\
&+4\mathbb{E}\left(\int_0^T \sum_{i=1}^d \sum_{j\neq i} a_i v_{ij}((I-V)^{-1}\beta)_j\, |Y_i^m(s) - Y_i^n(s)|\,ds\right) \\
\leq \;& C\mathbb{E}\left(\int_0^T \sum_{i=1}^d a_i |Y_i^m(s) - Y_i^n(s)|\,ds\right), \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

$C$ étant une constante positive. Le passage à la limite en $m,n$, dans (2.11) montre que la suite $(Z^n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathbb{H}$ et admet une limite $Z \in \mathbb{H}$. □

**Lemme 2.2.4.** *Soit $(Y^n,K^n,Z^n)_{n\geq 1}$ la solution unique de l'EDSR à réflexion oblique associée à $(\xi,b^n,R)$, alors*

$$b^n(.,Y^n) \text{ converge vers } b(.,Y) \text{ dans } (L_+^1(\Omega \times [0,T], d\mathbb{P} \times e^{\theta t}dt)).$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left|b_i^n(t,Y^n(t)) - b_i(t,Y(t))\right| dt\right)\\
\leq\ &\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left|b_i^n(t,Y^n(t)) - b_i(t,Y(t))\right| 1_{A_n^N} dt\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left|b_i^n(t,Y^n(t)) - b_i(t,Y^n(t))\right| 1_{\overline{A}_n^N} dt\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left|b_i(t,Y^n(t)) - b_i(t,Y(t))\right| 1_{\overline{A}_n^N} dt\right)\\
\leq\ &\frac{2\beta_i}{N}\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left(\|Y^n(t)\| + \|Y(t)\|\right) dt\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left|b_i^n(t,Y^n(t)) - b_i(t,Y^n(t))\right| 1_{\overline{A}_n^N} dt\right)\\
&+\frac{L_N}{a_i}\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left\|Y^n(t) - Y(t)\right\| dt\right),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

où

$$A_n^N = \{(t,\omega) \in \Omega, \|Y^n(t,\omega)\| + \|Y(t,\omega)\| > N\}, \ \overline{A}_n^N = \Omega \backslash A_n^N.$$

En multipliant chaque membre de (2.12) par $a_i$ et en sommant, on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left\|b^n(t,Y^n(t)) - b(t,Y(t))\right\| dt\right)\\
\leq\ &\rho_N(b^n - b) + \frac{2}{N}\sum_i^d \beta_i a_i \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left(\|Y^n(t)\| + \|Y(t)\|\right) dt\right)\\
&+dL_N\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left\|Y^n(t) - Y(t)\right\| dt\right).
\end{aligned}$$

En vertue de l'inégalité (2.1), il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left\|b^n(t,Y^n(t)) - b(t,Y(t))\right\| dt\right)\\
\leq\ &\rho_N(b^n - b) + \frac{C}{N} + dL_N\mathbb{E}\left(\int_0^T e^{\theta t}\left\|Y^n(t) - Y(t)\right\| dt\right);
\end{aligned}$$

le passage à la limite en $n,N$, complète la preuve. □

**Preuve du Théorème 2.1.1.**

• **Existence**

La combinaison des lemmes (2.2.1)-(2.2.4) et le passage à la limite dans l'EDSR à réflexion oblique associée à $(\xi, b^n, R)$, entrainent que le triplet $\{(Y(t), K(t), Z(t)), 0 \leq t \leq T\}$ est solution de l'EDSR à réflexion oblique asssociée à $(\xi, b, R)$.

• **Unicité**

Soit $\{(Y(t), K(t), Z(t)), 0 \leq t \leq T\}$ et $\{(Y'(t), K'(t), Z'(t)), 0 \leq t \leq T\}$ deux solutions de l'EDSR à réflexion oblique associée à $(\xi, b, R)$ et

$$(\Delta Y(t), \Delta K(t), \Delta Z(t), \Delta D(t)) = (Y(t)-Y'(t), K(t)-K'(t), Z(t)-Z'(t), D(t)-D'(t)).$$

La même démarche que précédament donne

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta e^{\theta t} \left|\Delta Y_i(t)\right| dt + \mathbb{E}\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) \left|\Delta D_i(t)\right| dt\right) \\
\leq \; & \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) \left|b_i(t,Y(t)) - b_i(t,Y'(t))\right| 1_{A^N} dt\right) \\
& + \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) \left|b_i(t,Y(t)) - b_i(t,Y'(t))\right| 1_{\overline{A}^N} dt\right) \\
& + \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) \sum_{j\neq i} \left|r_{ij}(t,Y(t) - r_{ij}(t,Y'(t))\right| \left|D_j(t)\right| dt\right) \\
& + \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) \sum_{j\neq i} \left|r_{ij}(t,Y'(t))\right| \left|\Delta D_j(t)\right| dt\right),
\end{aligned}$$

où

$$A^N = \left\{\omega \in \Omega, \|Y(t,\omega)\| + \|Y'(t,\omega)\| > N\right\}, \; \overline{A}^N = \Omega \backslash A^N.$$

Les hypothèses sur les coefficients $b, R$ et l'inégalité de Chebychev impliquent

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\int_0^T \theta e^{\theta t} \left|\Delta Y_i(t)\right| dt\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) \left|\Delta D_i(t)\right| dt\right) \\
\leq \; & \frac{2\beta_i}{N} \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) \|Y(t)\| + \|Y'(t)\| dt\right) \\
& + \left(LC_1 + \frac{L_N}{a_i}\right) \mathbb{E}\left(\int_0^T (e^{\theta t}-1) \|\Delta Y(t)\| dt\right) \\
& + \mathbb{E}\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) \sum_{j\neq i} v_{ij} \left|\Delta D_j(t)\right| dt. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

En multipliant chaque membre de (2.13) par $a_i$ et en sommant, l'inégalité (2.1) et la remarque 1.1.1 entrainent que

$$\begin{aligned}\theta d((Y,Z),(Y',Z')) &\leq \frac{C}{N} \\ &+\left(dL_N+\left(\sum_{i=1}^{d} a_i\right) LC_1\right) \mathbb{E} \int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) \|\Delta Y(t)\| \, dt \\ &+\alpha \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(e^{\theta t}-1\right) \|\Delta D(t)\| \, dt\right).\end{aligned}$$

$\theta$ étant choisi assez grand tel que $\frac{1}{\theta}\left(dL_N+\left(\sum_{i=1}^{d} a_i\right) LC_1\right) \leq \alpha$, on a

$$(1-\alpha) \, d((Y,K),(Y',K')) \leq \frac{C}{\theta N}.$$

Finalement $N$ tendant vers l'infini

$$Y=Y' \text{ et } K=K'$$

Pareillement à (2.10), il existe $C>0$ tel que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{d} a_i \left|\Delta Y_i(t)\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\int_0^T \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_i \left|\Delta Z_{ij}(s)\right|^2 ds\right) \\ \leq\; & C\mathbb{E}\left(\int_0^T \sum_{i=1}^{d} a_i \left|\Delta Y_i(s)\right| ds\right)\end{aligned}$$

et

$$Z=Z'.$$

□

# Chapitre 3

# Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades de type Volterra avec drift localement lipschitzien [2]

Dans ce chapitre la Section 1 énonce les notations essentielles en rapport avec les EDSR de type Volterra et les hypothèses du problème. La Section 2 donne le résultat principal. Enfin la Section 3 établie une propriété de stabilité.

## 3.1 Formulation du problème et Hypothèses

Considérons l'équation

$$\xi = Y(t) + \int_t^T f(t,s,Y(s),Z(t,s))ds + \int_t^T [g(t,s,Y(s)) + Z(t,s)]\, dW(s). \tag{3.1}$$

assocée aux données $(\xi,f,g)$ sous les hypothèses

**(B1)'** $f : \Omega \times \mathcal{D} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}_k/\mathcal{B}_{k\times d}$ mesurable et satisfait

$$\begin{cases} (i)\ f(.,.,0,0) \in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^k), \\ \\ (ii)\ \text{il existe deux constantes } K > 0(\text{suffisament grand}) \text{ et } 0 \leq \alpha < 1 \text{ telles que} \\ |f(t,s,y,z)| \leq K\,(1 + |y| + |z|)^{\alpha}, \ \mathbb{P}-\text{presque tout } \ (t,s) \in \mathcal{D}, \\ \\ (iii)\ \text{ pour tout } N \in \mathbb{N}, \text{ il existe une constante } L_N > 0 \text{ telle que,} \\ |f(t,s,y,z) - f(t,s,y',z')| \leq L_N|y - y'| + K|z - z'|,\ \forall |y| \leq N,\ |y'| \leq N, \\ z \in \mathbb{R}^{k\times d},\ z' \in \mathbb{R}^{k\times d} \text{ avec } K \text{ la constante du } \ (ii)\,. \end{cases}$$

2. Ce travail est soumis pour publication

**(B2)** $g : \Omega \times \mathcal{D}\times\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times d}$ est $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}_k/\mathcal{B}_{k\times d}$ mesurable et satisfait

$$\begin{cases} (i)\ g(.,.,0) \in M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d}) \\ \\ (ii)\ |g(t,s,y) - g(t,s,y')| \leq K|y-y'|,\ \forall\ y,y' \in \mathbb{R}^k, \end{cases}$$

**(B3)** $\xi$ est un vecteur aléatoire $k-$dimensionelle de carrée intégrable $\mathcal{F}_T-$mesurable.

## 3.2 Existence et unicité de la solution

**Lemme 3.2.1.** *$f$ étant un processus vérifiant $(\boldsymbol{B1})'$, il existe une suite de processus $(f_n)_n$ telle que pour tout $n$, $f_n$ est $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}_k\otimes\mathcal{B}_{k\times d}/\mathcal{B}_k$ mesurable, lipschitzien et satisfait $(\boldsymbol{B1}i)' - (\boldsymbol{B1}ii)'$ et $\rho_N(f_n - f) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ pour tout $N > 1$ fixé, où*

$$\rho_N(f) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathcal{D}} \sup_{|y|\leq N,|z|\leq N} |f(t,s,y,z)|^2 d\lambda\,(t,s)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

*Démonstration.* Considérons $\psi_n$ une suite de fonctions assez régulière à support dans la boule $B(0,n+1)$ telle que $\psi_n = 1$ sur la boule $B(0,n)$ et $\sup\psi_n = 1$. On montre aisément que la suite $(f_n)_{n\geq1}$ de fonctions tronquées définies par $f_n = f\psi_n$, satisfait toutes les propriétés précédentes. □

$(f_n)_{n\geq1}$ étant la suite associée à $f$ par le Lemme 3.2.1, le Théorème 1.2.1 montre que l'EDSR de type Volterra associée à $(\xi,f_n,g)$ admet une solution unique $(Y_n(s)\,,Z_n(t,s) : (t,s) \in \mathcal{D})$ élément de $M^2(t,T;\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$.

**Lemme 3.2.2.** *Supposons les hypothèses $(\boldsymbol{B1})' - (\boldsymbol{B3})$ satisfaites, alors il existe une constante $C > 0$, dépendant de $K,T$ et $\xi$ telle que pour tout $n \geq 1$*

$$\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)|^2 ds + \mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |Z_n(s,u)|^2 du \leq C.\ \forall\ t \in [T-\eta,T] \tag{3.2}$$

*où* $\eta < \dfrac{1}{24K^2}$.

*Démonstration.* Comme $\{(Y_n(s),Z_n(t,s)) : (t,s) \in \mathcal{D}\}$ est solution de l'EDSR de type Volterra associée à $(\xi,f_n,g)$, alors

$$Y_n(t) + \int_t^T f_n(t,s,Y_n(s),Z(t,s))ds + \int_t^T [g(t,s,Y_n(s)) + Z_n(t,s)]\,dW(s) = \xi. \tag{3.3}$$

En vertue du Lemme on a pour tout $(t,s) \in \mathcal{D}_\eta$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}|Y_n(s)|^2 + \mathbb{E}\int_s^T |Z_n(s,u)|^2 du \\
= \; & \mathbb{E}|\xi|^2 - 2\mathbb{E}\int_s^T \langle f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)),Y_n(u)\rangle du \\
& -2\mathbb{E}\int_s^T \langle f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)),A_n(s,u)\rangle du \\
& -2\mathbb{E}\int_s^T \langle g(s,u,Y_n(u)),,Z_n(s,u)\rangle du - \mathbb{E}\int_s^T |g(s,u,Y_n(u))|^2 du \\
\leq \; & \mathbb{E}|\xi|^2 + 2\mathbb{E}\int_s^T |\langle f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)),Y_n(u)\rangle| du \\
& +2\mathbb{E}\int_s^T |\langle f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)),A_n(s,u)\rangle|\, du \\
& +2\mathbb{E}\int_s^T |\langle g(s,u,Y_n(u)),Z_n(s,u)\rangle|\, du, \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

où

$$A_n(s,u) = \int_u^T (f_n(u,v,Y_n(v),Z_n(u,v)) - f_n(s,v,Y_n(v),Z_n(s,v)))\, dv$$

et

$$\mathcal{D}_\eta = \{(t,s) : T-\eta \leq t \leq s \leq T\}.$$

Les hypothèses $(\mathbf{B1})'$, $(\mathbf{B2})$ et l'inégalité de Young ($2ab \leq \beta a^2 + \frac{1}{\beta}b^2$) entrainent respectivement

$$\begin{aligned}
& 2|\langle f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)),Y_n(u)\rangle| \\
\leq \; & 2|f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))||Y_n(u)| \\
\leq \; & \frac{1}{\beta_1}|f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2 + \beta_1|Y_n(u)|^2 \\
\leq \; & \frac{3K^2}{\beta_1}\left(1+|Y_n(u)|^2+|Z_n(s,u)|\right)^2 + \beta_1|Y_n(u)|^2 \\
\leq \; & (\beta_1 + \frac{3K^2}{\beta_1})|Y_n(u)|^2 + \frac{3K^2}{\beta_1}|Z_n(s,u)|^2 + \frac{3K^2}{\beta_1}, \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2|\langle f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)),A_n(s,u)\rangle| \\
\leq \; & \frac{1}{\beta_2}|f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2 + \beta_2|A_n(s,u)|^2 \\
\leq \; & \frac{3K^2}{\beta_2}(1+|Y_n(u)|^2+|Z_n(s,u)|^2) + \beta_2|A_n(s,u)|^2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
2\langle g(s,u,Y_n(u)),Z_n(s,u)\rangle &\leq 2\beta_3 c^2|Y_n(u))|^2+\frac{1}{\beta_3}|Z_n(s,u))|^2 \\
&\quad +2\beta_3|g(s,u,0)|^2. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\beta_2|A_n(s,u)|^2 &\leq 2\beta_2(T-u)\int_u^T|f_n(u,v,Y_n(v),Z_n(u,v))|^2dv \\
&\quad +2\beta_2(T-u)\int_u^T|f_n(s,v,Y_n(v),Z_n(s,v))|^2dv \\
&\leq 6\beta_2(T-u)K^2\int_u^T(1+|Y_n(v)|^2+|Z_n(u,v)|^2)dv \\
&\quad +6\beta_2(T-u)K^2\int_u^T(1+|Y_n(v)|^2+|Z_n(s,v)|^2)dv;
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&2|\langle f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)),A_n(s,u)\rangle| \\
\leq\ &\frac{3K^2}{\beta_2}(1+|Y_n(u)|^2+|Z_n(s,u)|^2) \\
&+12\beta_2(T-u)^2K^2+12\beta_2(T-u)K^2\int_u^T|Y_n(v)|^2dv \\
&+6\beta_2(T-u)K^2\int_u^T(|Z_n(u,v)|^2+|Z_n(s,v)|^2)dv. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

L'introduction des inégalités (3.5)-(3.7) dans (3.4) donne

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y_n(s)|^2 + \mathbb{E}\int_s^T |Z_n(s,u)|^2 du \\
\leq\ & \mathbb{E}|\xi|^2 + (\beta_1 + \frac{3K^2}{\beta_1} + \frac{3K^2}{\beta_2} + 2\beta_3 c^2)\mathbb{E}\int_s^T |Y_n(u)|^2 du \\
&+12\beta_2 K^2 \mathbb{E}\int_s^T (T-u)du \int_u^T |Y_n(v)|^2 dv \\
&+6\beta_2 K^2 \mathbb{E}\int_s^T (T-u)\, du \int_u^T \left(|Z_n(u,v)|^2 + |Z_n(s,v)|^2\right) dv \\
&+(\frac{3K^2}{\beta_1} + \frac{3K^2}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3})\mathbb{E}\int_s^T |Z_n(s,u)|^2 du \\
&+12\beta_2 K^2 \mathbb{E}\int_s^T (T-u)^2 du + \left(\frac{3K^2}{\beta_1} + \frac{3K^2}{\beta_2}\right)(T-s) \\
&+2\beta_3 \mathbb{E}\int_s^T |g(s,u,0)|^2\, du.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Sachant que pour tout processus $\{h(s) : s \in [0,T]\}$,

$$\mathbb{E}\int_s^T (T-u)du \int_u^T |h(v)|^2 dv \leq \frac{1}{2}(T-s)^2\, \mathbb{E}\int_s^T |h(u)|^2 du; \tag{3.9}$$

on a en intégrant chaque membre de (3.8) entre $t$ et $T$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)|^2 ds + \int_t^T ds \mathbb{E}\int_s^T |Z_n(s,u)|^2 du \\
\leq\ & T\mathbb{E}|\xi|^2 + (\beta_1 + \frac{3K^2}{\beta_1} + \frac{3K^2}{\beta_2} + 2\beta_3 c^2 + 6\beta_2 K^2 \eta^2)\int_t^T ds \mathbb{E}\int_s^T |Y_n(u)|^2 du \\
&+(\frac{3K^2}{\beta_1} + \frac{3K^2}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} + 3\beta_2 K^2 \eta^2)\int_t^T ds \mathbb{E}\int_s^T |Z_n(s,u)|^2 du \\
&+6\beta_2 K^2 T \int_t^T ds \int_s^T du \mathbb{E}\int_u^T |Z_n(u,v)|^2 dv \\
&+\beta_2 K^2 T^4 + \left(\frac{3K^2}{\beta_1} + \frac{3K^2}{\beta_2}\right) T^2 \\
&+2\beta_3 \mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |g(s,u,0)|^2\, du.
\end{aligned}$$

Ensuite si on choisit $\beta_1 = \beta_2 = 24K^2$, $\beta_3 = 8$ et on pose

$$U_n(t) = \mathbb{E}\int_t^T \int_s^T |Y_n(u)|^2 duds \text{ et } V_n(t) = \int_t^T \mathbb{E}\int_s^T |Z_n(s,u)|^2 duds,$$

alors il existe deux constantes $K_1$ et $C$ ($C$ varie de ligne en ligne) dépendant uniquement de $\xi,T,K$ telles que

$$-\frac{d}{dt}\left(e^{K_1 t}U_n(t)\right)+\frac{1}{2}e^{K_1 t}V_n(t)\leq C\left(1+\int_t^T e^{K_1 s}V_n(s)ds\right). \tag{3.10}$$

L'intégration de chaque membre de (3.10) de $t$ à $T$ donne

$$U_n(t)e^{K_1 t}+\frac{1}{2}\int_t^T e^{K_1 s}V_n(s)ds\leq C\left(1+\int_t^T ds\int_s^T e^{K_1 r}V_n(r)dr\right);$$

l'inégalité de Gronwall permettant d'avoir

$$\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)|^2 ds\leq C \text{ et } \mathbb{E}\int_t^T ds\int_s^T |Z_n(s,u)|^2 du\leq C$$

qui met fin à la preuve. □

**Théorème 3.2.1.** *Si les hypothèses $(\boldsymbol{B1})'-(\boldsymbol{B3})$ sont vérifiées et*

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty}\frac{1}{(2L_N+2L_N^2)N^{2(1-\alpha)}}\exp[(2L_N+2L_N^2)T]=0, \tag{A}$$

*alors l'EDSR de type Volterra associée à $(\xi,f,g)$ admet une solution unique $\{(Y(s),Z(t,s)) : (t,s)\in\mathcal{D}\}$ élément de $M^2(t,T;\mathbb{R}^k)\times M^2(\mathcal{D};\mathbb{R}^{k\times d})$.*

**Remarque 3.2.1.** *La condition* (**A**) *reste valable s'il existe une constante $L\geq 0$, telle que* $(2L_N+2L_N^2)T\leq L+(1-\alpha)\log N$.

**Preuve du Théorème 3.2.1**

**• Unicité**

Supposons $\{(Y(s),Z(t,s)) : (t,s)\in\mathcal{D}\}$ et $\{(Y'(s),Z'(t,s)) : (t,s)\in\mathcal{D}\}$ deux solutions de l'EDSR de type Volterra associée à $(\xi,f,g)$ et $\Delta Y(s)=Y(s)-Y'(s)$, $\Delta Z(s,u)=Z(s,u)-Z'(s,u)$, $\Delta f(s,u)=f(s,u,Y(u),Z(s,u))-f(s,u,Y'(u),Z'(s,u))$, $\Delta g(s,u)=g(s,u,Y(u))-g(s,u,Y'(u))$. Dans la suite $C$ est une constante positive dépendant uniquement de $K,T$, et $\xi$ qui pourra varier de ligne en ligne. Comme $(\Delta Y(s),\Delta Z(s,u)$ vérifie l'équation

$$\Delta Y(s)+\int_s^T\Delta f(s,u)du+\int_s^T[\Delta g(s,u)+\Delta Z(s,u)]dW_u=0,$$

le Lemme 1.2.1 montre que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}|\Delta Y(s)|^2 + \mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 du \\
= & -2\mathbb{E}\int_s^T \langle \Delta f(s,u), \Delta Y(u)\rangle du - 2\mathbb{E}\int_s^T \langle \Delta f(s,u), A(s,u)\rangle du \\
& -2\mathbb{E}\int_s^T \langle \Delta g(s,u), \Delta Z(s,u)\rangle du - \mathbb{E}\int_s^T |\Delta g(s,u)|^2 du \\
\leq & \ 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)|\,|\Delta Y(u)|\,(\mathbf{1}_{A^N}(s,u) + \mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u))du \\
& +2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)|\,|A(s,u)|\,(\mathbf{1}_{A^N}(s,u) + \mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u))du \\
& +2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta g(s,u)|\,|\Delta Z(s,u)|\, du \\
= & \ J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

où

$$A(s,u) = \int_u^T (\Delta f(u,v) - \Delta f(s,v))dv,$$

$$\begin{aligned}
A^N &= \{(\omega,s,u) \in \Omega \times \mathcal{D}_\eta,\ |Y(s)| + |Z(s,u)| + |Y'(u)| + |Z'(s,u)| \geq N\} \\
\text{et } \overline{A}^N &= \Omega \times \mathcal{D}_\eta \backslash A^N.
\end{aligned}$$

Les hypothèses **(B1)'-(B3)**, l'inégalité de Hölder et celle de Young donnent

$$\begin{aligned}
J_1 &= 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)|\,|\Delta Y(u)|\,\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du \\
&\leq \mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du + \mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)|^2 \mathbf{1}_{A^N}(s,u)du \\
&\leq \mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du \\
&\quad +4K^2\mathbb{E}\int_s^T (1 + |Y(u)| + |Z(s,u)| + |Y'(u)| + |Z'(s,u)|)^{2\alpha}\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)|\,|\Delta Y(u)|\,\mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u)\, du \\
&\leq 2\mathbb{E}\int_s^T (L_N|\Delta Y(u)|^2 + K|\Delta Z(s,u)|)|\Delta Y(u)|\,\mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u)\, du \\
&\leq (2L_N + \beta_1)\int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du + \frac{K^2}{\beta_1}\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 du,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)|\,|A(s,u)|\,\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du \\
&\leq \mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)|^2\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du + \mathbb{E}\int_s^T |A(s,u)|^2du \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4 &= 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta f(s,u)|\,|A(s,u)|\,\mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u)du \\
&\leq 2\mathbb{E}\int_s^T (L_N|\Delta Y(u)| + K|\Delta Z(s,u)|)|A(s,u)|\,\mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u)du \\
&\leq L_N^2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2du + (\beta_2+1)\mathbb{E}\int_s^T |A(s,u)|^2du + \frac{K^2}{\beta_2}\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2du
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
J_5 &= 2\mathbb{E}\int_s^T |\Delta g(s,u)|\,|\Delta Z(s,u)|\,du \\
&\leq \beta_3\mathbb{E}\int_s^T |\Delta g(s,u)|^2du + \frac{1}{\beta_3}\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2du \\
&\leq \beta_3\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2du + \frac{K^2}{\beta_3}\mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2du. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Ensuite l'inégalité de Hölder, celle de Chebychev et le Lemme 3.2.2 entrainent

$$J_1 \leq \mathbb{E}\int_s^T |\Delta Y(u)|^2du + \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}}. \qquad (3.14)$$

D'autre part l'inégalité de Chebychev, les hypothèses $(\mathbf{B1})' - (\mathbf{B3})$ et (3.9) prouvent que

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq 4K^2\mathbb{E}\int_s^T (1+|Y(u)|+|Z(s,u)|+|Y'(u)|+|Z'(s,u)|)^{2\alpha}\mathbf{1}_{A^N}(s,u)du \\
&\leq \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}}.
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
& I_2 \leq \eta^2 \mathbb{E} \int_s^T |\Delta f(s,u)|^2 \left(\mathbf{1}_{A^N}(s,u) + \mathbf{1}_{\overline{A}^N}(s,u)\right) du \\
& +2\mathbb{E} \int_s^T (T-u) du \int_u^T |\Delta f(u,v)|^2 \left(\mathbf{1}_{A^N}(u,v) + \mathbf{1}_{\overline{A}^N}(u,v)\right) dv \\
\leq & \ 4\eta^2 K^2 \mathbb{E} \int_s^T (1+|Y(u)|+|Z(s,u)|+|Y'(u)|+|Z'(s,u)|)^{2\alpha} \mathbf{1}_{A^N}(s,u) du \\
& +4\eta^2 L_N^2 \mathbb{E} \int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du + 4\eta^2 K^2 \mathbb{E} \int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 du \\
& +8K^2 \mathbb{E} \int_s^T (T-u) du \int_u^T (1+|Y(v)|+|Z(u,v)|+|Y'(v)|+|Z'(u,v)|)^{2\alpha} \mathbf{1}_{A^N}(u,v) dv \\
& +4K^2 T \mathbb{E} \int_s^T du \int_u^T |\Delta Z(u,v)|^2 dv;
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
J_3 \leq & \ 4L_N^2 \eta^2 \mathbb{E} \int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du + 2K^2 \eta^2 \mathbb{E} \int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 | du \\
& + \frac{(1+\eta^2)\, C}{N^{2(1-\alpha)}} + 4K^2 T \mathbb{E} \int_s^T du \int_u^T |\Delta Z(u,v)|^2 | dv
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

et

$$
\begin{aligned}
J_4 \leq & \left[4(\beta_2+1)\eta^2 + 1\right] L_N^2 \mathbb{E} \int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du \\
& + \left[4(\beta_2+1)\eta^2 + \frac{1}{\beta_2}\right] K^2 \mathbb{E} \int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 du \\
& +4(\beta_2+1) K^2 T \mathbb{E} \int_s^T \left(\int_u^T |\Delta Z(u,v)|^2 dv\right) du \\
& +(\beta_2+1)\eta^2 \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}}.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Les inégalités (3.12)-(3.16) étant mises dans (3.11), on obtient en intégrant de $t$ à

$T$,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_t^T |\Delta Y(s)|^2 ds + \int_t^T ds \mathbb{E}\int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 du \\
&(1 + 2L_N + \beta_1 + [4(\beta_2+2)\eta^2 + 1]L_N^2 + \beta_3)\mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |\Delta Y(u)|^2 du \\
&+(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} + 4(\beta_2+2)\eta^2)K^2\mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 du \\
&+(1+\eta^2)\frac{C}{N^{2(1-\alpha)}} + (4(\beta_2+2)K^2 T\mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T du \int_u^T |\Delta Z(u,v)|^2)dv.
\end{aligned}
$$

Etant donné $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 8K^2$, il existe $K_1$ et $C$ deux constantes telles que

$$
-\frac{d}{dt}(e^{K_1 t}U(t)) + \frac{1}{2}e^{K_1 t}V(t) \leq K_2 \int_t^T e^{K_1 s}V(s)ds + \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}}e^{K_1 t} \tag{3.17}
$$

où

$$
U(t) = \mathbb{E}\int_t^T \int_s^T |\Delta Y(u)|^2 duds \quad \text{et} \quad V(t) = \mathbb{E}\int_t^T \int_s^T |\Delta Z(s,u)|^2 duds.
$$

L' intégration dans $[t,T]$ de chaque membre de (3.17) et l'inégalité de Gronwall impliquent

$$
\int_t^T e^{K_1 s}V(s)ds \leq \frac{C}{(2L_N + 2L_N^2)N^{2(1-\alpha)}} \exp\left[(2L_N + 2L_N^2)T\right].
$$

Le passage à la limite en $N$ implique que $Y(s) = Y'(s)$ et $Z(t,s) = Z'(t,s)$ pour presque tout $(t,s) \in [T-\eta,T] \times [t,T]$. Lorsque $t \in [T-2\eta, T-\eta]$, on répète la même démarche avec l'équation

$$
\Delta Y(s) + \int_s^{T-\eta} \Delta f(s,u)du + \int_s^{T-\eta} [\Delta g(s,u) + \Delta Z(s,u)]dW_u = 0.
$$

Ainsi de proche en proche on a l'unicité de l'EDSR de type Volterra associée aux données $(\xi,f,g)$.

- **Existence**

Pour tout $n,m \in \mathbb{N}^*$ et $(t,s) \in \mathcal{D}_\eta$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y_n(t) - Y_m(t)|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s) - Z_m(t,s)|^2 ds \\
= \;& 2\mathbb{E}\int_t^T \langle f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s)),Y_n(s) - Y_m(s)\rangle ds \\
& -2\mathbb{E}\int_t^T \langle f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s)),B_{m,n}(t,s)\rangle ds \\
& -2\mathbb{E}\int_t^T \langle g(t,s,Y_n(s)) - g(t,s,Y_m(s)),Z_n(t,s) - Z_m(t,s)\rangle ds \\
& -\mathbb{E}\int_s^T |g(t,s,Y_n(s)) - g(t,s,Y_m(s))|^2 ds \\
\leq \;& 2\mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|\,|Y_n(s) - Y_m(s)| \\
& \times(\mathbf{1}_{A^N_{m,n}}(t,s) + \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s))ds \\
& +2\mathbb{E}\int_s^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|\,|B_{m,n}(t,s)| \\
& \times(\mathbf{1}_{A^N_{m,n}}(t,s) + \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s))ds \\
& +2\mathbb{E}\int_s^T |g(t,s,Y_n(s)) - g(t,s,Y_m(s))|\,|Z_n(t,s) - Z_m(t,s)|\,ds \\
= \;& J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

où

$$\begin{aligned}
B_{m,n}(t,s) \;=\;& \int_s^T (f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)) - f_m(s,v,Y_m(u),Z_m(s,u)))\,du \\
& -\int_s^T (f_n(t,u,Y_n(u),Z_n(t,u)) - f_m(t,u,Y_m(u),Z_m(t,u)))\,du,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^N_{m,n} \;&=\; \{(\omega,t,s) \in \Omega \times \mathcal{D}_\eta,\ |Y_n(s)| + |Z_n(t,s)| + |Y_m(s)| + |Z_m(t,s)| \geq N\} \\
\text{et } \overline{A}^N_{m,n} \;&=\; \Omega \times \mathcal{D}_\eta \backslash A^N_{m,n}.
\end{aligned}$$

De la même manière que dans la preuve de l'unicité on a

$$\begin{aligned}
J_1 \;=\;& 2\mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))| \\
& \times|Y_n(s) - Y_m(s)|\mathbf{1}_{A^N_{m,n}}(t,s)ds \\
\leq\;& \mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s) - Y_m(s)|^2 ds + \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}};
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$
\begin{aligned}
J_2 &= 2\mathbb{E}\int_t^T |f_{n,m}(t,s)||Y_n(s)-Y_m(s)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&\leq 2\mathbb{E}\int_t^T |(f_n-f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))||Y_n(s)-Y_m(s)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&\quad +2\mathbb{E}\int_t^T |f(t,s)||Y_n(s)-Y_m(s)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&\quad +2\mathbb{E}\int_t^T |(f_m-f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))||Y_n(s)-Y_m(s)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&= I_1+I_2+I_3,
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
f_{n,m}(t,s) &= f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s)) \\
f(t,s) &= f(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s));
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_3 &= 2\mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|\,|B_{m,n}(t,s)|\,\mathbf{1}_{A^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&\leq \mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2\mathbf{1}_{A^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&\quad +\mathbb{E}\int_t^T |B_{m,n}(t,s)|^2ds \\
&= I_4+I_5;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_4 &= 2\mathbb{E}\int_t^T |f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_m(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|\,|B_{m,n}(t,s)|\,\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&\leq 2\mathbb{E}\int_t^T |\,(f_n-f)\,(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|\,|B_{m,n}(t,s)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&\quad +2\mathbb{E}\int_t^T |f(t,s,Y_n(s),Z(t,s)) - f(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s)|\,|B_{m,n}(t,s)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&\quad +2\mathbb{E}\int_t^T |(f_m-f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|\,|B_{m,n}(t,s)|\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&\leq \mathbb{E}\int_t^T |\,(f_n-f)\,(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&\quad +\mathbb{E}\int_t^T |\,(f_m-f)\,(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2\mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&\quad +L_N^2\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s)-Y_m(s)|^2ds + (\beta_2+3)\mathbb{E}\int_s^T |B_{m,n}(t,s)|^2ds \\
&\quad +\frac{K^2}{\beta_2}\mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s)-Z_m(t,s)|^2ds
\end{aligned}
$$

et

$$J_5 \leq \beta_3 \mathbb{E} \int_t^T |Y_n(s) - Y_m(s)|^2 ds + \frac{K^2}{\beta_3} \mathbb{E} \int_t^T |Z_n(t,s) - Z_m(t,s)|^2 ds. \tag{3.20}$$

Sachant que

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \mathbb{E} \int_t^T |Y_n(s) - Y_m(s)|^2 ds \\ &+ \mathbb{E} \int_t^T |(f_n - f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s) ds, \end{aligned}$$

$$I_2 \leq (2L_N + \beta_1) \mathbb{E} \int_t^T |Y_n(s) - Y_m(s)|^2 ds + \frac{K^2}{\beta_1} \mathbb{E} \int_t^T |Z_n(t,s) - Z_m(t,s)|^2 ds$$

et

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \mathbb{E} \int_t^T |Y_n(s) - Y_m(s)|^2 ds \\ &+ \mathbb{E} \int_t^T |(f_m - f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s) ds \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} J_2 &\leq (2L_N + \beta_1 + 2) \mathbb{E} \int_t^T |Y_n(s) - Y_m(s)|^2 ds \\ &+ \mathbb{E} \int_t^T |(f_n - f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s) ds \\ &+ \mathbb{E} \int_t^T |(f_m - f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s) ds \\ &+ \frac{K^2}{\beta_1} \mathbb{E} \int_s^T |Z_n(t,s) - Z_m(t,s)|^2 du. \end{aligned} \tag{3.21}$$

D'autre part l'inégalité de Hölder, celle de Chebychev, le Lemme 3.2.2 et (3.9) entrainent

$$I_4 \leq \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}}$$

et

$$
\begin{aligned}
I_5 \;\leq\;& \eta^2 \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}} + 3\eta^2 \mathbb{E} \int_t^T |\left(f_n - f\right)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)du \\
&+3\eta^2 \mathbb{E} \int_t^T |\left(f_m - f\right)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds \\
&+6\mathbb{E} \int_t^T (T-s)ds \int_s^T |\left(f_n - f\right)(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(s,u)du \\
&+6\mathbb{E} \int_t^T (T-s)ds \int_s^T |\left(f_m - f\right)(s,u,Y_m(u),Z_m(s,u))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(s,u)du \\
&+12\eta^2 L_N^2 \mathbb{E} \int_t^T |Y_n(s) - Y_m(s)|^2 ds + 6\eta^2 K^2 \mathbb{E} \int_t^T |Z_n(t,s) - Z_m(t,s)|^2 ds \\
&+12K^2 T\mathbb{E} \int_t^T ds \int_s^T |Z_n(s,u) - Z_m(s,u)|^2 du;
\end{aligned}
$$

ce qui permet d'avoir

$$
\begin{aligned}
J_4 \;\leq\;& \eta^2 \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}} + \left[3(\beta_2+3)\eta^2 + 1\right] \mathbb{E} \int_t^T |\left(f_n - f\right)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds \\
&+ \left[3(\beta_2+3)\eta^2 + 1\right] \mathbb{E} \int_t^T |\left(f_m - f\right)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(t,s)ds \\
&+6(\beta_2+3)\mathbb{E} \int_t^T (T-s)du \int_s^T |\left(f_n - f\right)(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(s,u)du \\
&+6(\beta_2+3)\mathbb{E} \int_t^T (T-s)du \int_s^T |\left(f_m - f\right)(s,u,Y_m(u),Z_m(s,u))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}_{m,n}^N}(s,u)du \\
&+ \left[12(\beta_2+3)\eta^2 + 1\right] L_N^2 \mathbb{E} \int_t^T |Y_n(s) - Y_m(s)|^2 ds \\
&+ \left[6(\beta_2+3)\eta^2 + \frac{1}{\beta_2}\right] K^2 \mathbb{E} \int_t^T |Z_n(t,s) - Z_m(t,s)|^2 ds \\
&+12(\beta_2+3)K^2 T\mathbb{E} \int_t^T ds \int_s^T |Z_n(s,u) - Z_m(s,u)|^2 du. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Les inégalités (3.19)−(3.22) mises dans (3.18) donnent

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Y_n(t) - Y_m(t)|^2 + \mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s) - Z_m(t,s)|^2 ds \\
\leq\ & (3 + \beta_1 + \beta_3 + 2L_N + [1 + 12(\beta_2 + 4)\eta^2])L_N^2)\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s) - Y_m(s)|^2 ds \\
&+(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} + 6(\beta_2 + 4)\eta^2)K^2\mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s) - Z_m(t,s)|^2 ds \\
&+2\mathbb{E}\int_t^T |(f_n - f)(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&+2\mathbb{E}\int_t^T |(f_m - f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&+6(\beta_2 + 4)\mathbb{E}\int_t^T (T - s)du \int_s^T |(f_n - f)(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(s,u)du \\
&+6(\beta_2 + 4)\mathbb{E}\int_t^T (T - s)du \int_s^T |(f_m - f)(s,u,Y_m(u),Z_m(s,u))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(s,u)du \\
&+12(\beta_2 + 4)K^2T\mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |Z_n(s,u) - Z_m(s,u)|^2 du \\
&+\frac{C}{N^{2(1-\alpha)}}(1 + \eta^2).
\end{aligned}
$$

Si on choisit $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 8K^2$ alors il existe deux constantes $K_1$ et $C$ dépendant uniquement de $K$,$T$, et $\xi$ telles que

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dt}(e^{K_1 t}U_{m,n}(t)) + \frac{1}{2}e^{K_1 s}V_{m,n}(s) \\
\leq\ & 2\mathbb{E}\int_t^T e^{K_1 s}|(f_n - f)(t,s,Y_n(s2),Z_n(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&+2\mathbb{E}\int_t^T e^{K_1 s}|(f_m - f)(t,s,Y_m(s),Z_m(t,s))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(t,s)ds \\
&+6(8K^2 + 4)\mathbb{E}\int_t^T (T - s)e^{K_1 s}ds \int_s^T |(f_n - f)(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(s,u)du \\
&+6(8K^2 + 4)\mathbb{E}\int_t^T (T - s)e^{K_1 s}ds \int_s^T |(f_m - f)(s,u,Y_m(u),Z_m(s,u))|^2 \mathbf{1}_{\overline{A}^N_{m,n}}(s,u)du \\
&+12(8K^2 + 4)K^2T\int_t^T e^{K_1 s}V_{m,n}(s)ds + \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}}e^{K_1 t}, \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

où

$$
U_{m,n}(t) = \mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s) - Y_m(s)|^2 ds \quad \text{et} \quad V_{n,m}(t) = \mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s) - Z_m(t,s)|^2 ds.
$$

L'intégration de chaque membre de (3.23) dans $[t,T]$ implique

$$\begin{aligned}
& e^{K_1 t}U_{m,n}(t) + \frac{1}{2}\int_t^T e^{K_1 s}V_{m,n}(s)ds \\
\leq\ & \left(2+3(8K^2+4)\eta^2\right)\left[\rho_N^2(f_n-f)+\rho_N^2(f_m-f)\right]e^{K_1T} \\
& +12(8K^2+4)K^2T\int_t^T ds\int_s^T e^{K_1 s}V_{m,n}(u)du \\
& +\frac{C}{K_1N^{2(1-\alpha)}}e^{K_1T}
\end{aligned}$$

et l'inégalité de Gronwall donne

$$\int_t^T e^{K_1 s}V_{m,n}(s)ds \leq \left(K_2\left[\rho_N^2(f_n-f)+\rho_N^2(f_m-f)\right]e^{K_1T}+\frac{C}{K_1N^{2(1-\alpha)}}e^{K_1T}\right)\exp(K_3T), \tag{3.24}$$

$K_2$ et $K_3$ étant des constantes dépendant uniquement de $K,T,\xi$.
Le passage à la limite sucessivement en $n$, $m$ et $N$ entraine grâce à la condition **(A)**

$$\int_t^T e^{K_1 s}V_{m,n}(s)ds \longrightarrow 0 \text{ et } U_{m,n}(t)\longrightarrow 0. \tag{3.25}$$

Par conséquent la suite $(Y_n,Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $M^2([t,T];\mathbb{R}^k)\times M^2([T-\eta,T]\times[t,T];\mathbb{R}^{k\times d})$ et admet une limite $(Y(s),Z(t,s))\in M^2([t,T];\mathbb{R}^k)\times M^2([T-\eta,T]\times[t,T];\mathbb{R}^{k\times d})$. D'autre part

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\int_t^T ds\int_s^T |f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))-f(s,u,Y(u),Z(s,u))|^2du \\
\leq\ & \mathbb{E}\int_t^T ds\int_s^T |f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))-f(s,u,Y(u),Z(s,u))|^2\mathbf{1}_{A_n^N}du \\
& +2\mathbb{E}\int_t^T ds\int_s^T |\left(f_n-f\right)(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))|^2\mathbf{1}_{\overline{A}_n^N}du \\
& +2\mathbb{E}\int_t^T ds\int_s^T |f(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u))-f(s,u,Y(u),Z(s,u))|^2\mathbf{1}_{\overline{A}_n^N}du \\
\leq\ & \frac{C}{N^{2(1-\alpha)}}+2\rho_N^2\left(f-f_n\right)+4L_N^2\mathbb{E}\int_t^T|Y_n(s)-Y(s)|^2ds \\
& +4K^2\mathbb{E}\int_s^T ds\int_u^T |Z_n(s,u)-Z(s,u)|^2du,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
A_n^N &= \{(\omega,s,u)\in\Omega\times\mathcal{D}_\eta, 1+|Y(u)|+|Z(s,u)|+|Y_n(u)|+|Z_n(s,u)|>N\} \\
\text{et } \overline{A}_n^N &= \Omega\times\mathcal{D}_\eta\backslash A_n^N.
\end{aligned}$$

Les résultats précédents prouvent que

$$\mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)) - f(s,u,Y(u),Z(s,u))|^2 du \quad \underset{n,N \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

et la limite dans (3.3) montre que $(Y,Z)$ est solution de l'EDSR de type Volterra. Ensuite $Y(T-\eta)$ étant une variable aléatoire unique, l'équation

$$Y_n(t)+\int_t^{T-\eta} f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s))ds+\int_t^{T-\eta} [g(t,s,Y_n(s)) + Z_n(t,s)]\, dW(s) = Y(T-\eta) \tag{3.26}$$

admet une solution unique $(Y_n,Z_n) \in M^2([T-2\eta,T-\eta]\,;\mathbb{R}^k)\times M^2([T-2\eta,T-\eta]\times[t,T-\eta]\,;\mathbb{R}^{k\times d})$. On montre avec les arguments précédants que $(Y_n,Z_n)$ est de cauchy et sa limite $(Y,Z)$ est l'unique solution de l'EDSR de type Volterra

$$Y(t) + \int_t^{T-\eta} f(t,s,Y(s),Z(t,s))ds + \int_t^{T-\eta} [g(t,s,Y(s)) + Z(t,s)]\, dW(s) = Y(T-\eta).$$

En continuant cette procédure on prouve l'existence pour tout $(t,s) \in \mathcal{D}$. □

## 3.3 Propriété de Stabilité

Cette section prouve la stabilité des solutions des EDSR de type Volterra sous la condition de drift localement lipschitzien. Pour cela on considère $(\xi_n,f_n,g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de processus respectant les hypothèses précédentes,

$$\textbf{(B4)}\begin{cases} (i) & \rho_N(f_n - f_0) \longrightarrow 0 \\ (ii) & \pi\,(g_n - g_0) \longrightarrow 0 \\ (iii) & \mathbb{E}\,|\xi_n - \xi_0|^2 \longrightarrow 0 \end{cases}$$

où $\pi\,(g_n - g_0) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathcal{D}} \sup_y |g_n(t,s,y) - g_0(t,s,y)|^2\, dsdt\right)^{\frac{1}{2}}$

et $(Y_n(t),Z_n(t,s))$ l'unique solution (Voir théorème 3.2.1) de l'EDSR de type Volterra qui lui est associée.

**Théorème 3.3.1.** *Supposons les hypothèses $(\boldsymbol{B1}) - (\boldsymbol{B4})$ et $(\boldsymbol{A})$ satisfaites; alors*

$$(Y_n(s),Z_n(t,s)) \quad \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \quad (Y_0(s),Z_0(t,s))$$

*dans $M(t,T,\mathbb{R}^k) \times M(\mathcal{D},\mathbb{R}^{k\times d})$.*

*Démonstration.* En vertue du Lemme 1.2.1

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}|Y_n(t) - Y_0(t)|^2 ds + \mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s) - Z_0(t,s)|^2 ds \\
= \ & \mathbb{E}|\xi_n - \xi_0|^2 \\
& +2\mathbb{E}\int_t^T \langle f_n(t,s,Y_n(s),Z_n(t,s)) - f_0(t,s,Y_0(s),Z_0(t,s)), Y_0(s) - Y_0(s)\rangle ds \\
& -2\mathbb{E}\int_t^T \langle f_n(t,s,Y_n(u),Z_n(t,s)) - f_0(t,s,Y_0(s),Z_0(t,s))), I_{n,0}(t,s)\rangle ds \\
& -2\mathbb{E}\int_t^T \langle g_n(t,s,Y_n(s)) - g_0(t,s,Y_0(s)), Z_n(t,s) - Z_0(t,s)\rangle ds \\
& -\mathbb{E}\int_t^T |g_n(t,s,Y_n(s)) - g_0(t,s,Y_0(s))|^2 du
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
I_{n,0}(t,s) \ = \ & \int_s^T \left(f_n(s,u,Y_n(u),Z_n(s,u)) - f_0(s,u,Y_0(u),Z_0(s,u))\right) du \\
& - \int_s^T \left(f_n(t,u,Y_n(u),Z_n(t,u)) - f_0(t,u,Y_0(u),Z_0(t,u))\right) du.
\end{aligned}
$$

Une procédure presqu'identique à la preuve d'existence du Théorème 3.2.1, et le choix de $\beta_1 = \beta_2 = 8K^2$ et $\beta_3 = 8$ entrainent

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}|Y_n(t) - Y_0(t)|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^T |Z_n(t,s) - Z_0(t,s)|^2 ds \\
\leq \ & K_1\mathbb{E}\int_t^T |Y_n(s) - Y_0(s)|^2 ds \\
& +K_2\rho_N^2(f_n - f_0) + 16\pi^2 (g_n - g_0) \\
& +K_3\mathbb{E}\int_t^T ds \int_s^T |Z_n(s,u) - Z_0(s,u)|^2 du \\
& +\frac{C}{N^{2(1-\alpha)}},
\end{aligned}
$$

$K_1,K_2,K_3$ et $C$ étant des constantes dépendant uniquement de $K,T$, et $\xi$. Le reste de la preuve est identique à celle d'existence du Théorème 3.2.1 □

# Chapitre 4

# Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades avec barrière, temps terminal aléatoire et Applications[3]

Dans ce chapitre le problème et les hypothèses sont posés à la Section 1. La Section 2 énonce le résultat principal. En application la Section 3 donne une connection avec le prix des options d'achats américaines et le problème d'obstacle des EDP semi-linéaires paraboliques avec condition aux limites de type Neumann non linéaire.

## 4.1 Formulation du problème

Etant donné un espace probabilisé filtré complet standard et un processus de Wiener de dimension $d$ notée $(W_t)_{t\geq 0}$, on considère l'EDSR à réflexion normale et temps terminal aléatoire suivante

$$\begin{aligned} Y_{t\wedge\tau} &= Y_{T\wedge\tau} + \int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge T} f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_t^{\tau\wedge T} g(s,Y_s)dG_s - \int_t^{\tau\wedge T} Z_s dW_s \\ &\quad + K_{\tau\wedge T} - K_{t\wedge\tau} \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $\tau$ est un $\mathcal{F}_t$-temps arrêt $\mathbb{P}-p.s.$ et $\{G_t\}_{t\geq 0}$ un processus $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable continu et croissant à valeurs réelles satisfaisant $G_0 = 0$. Le problème est de prouver l'existence et l'unicité de la solution de (4.1) sous les hypothèses suivantes.

**(C1)** $f$ et $g$ sont des fonctions définies respectivement sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $\Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant

3. Ce travail est soumis pour publication

$$\begin{cases} (i)\ \forall t,\forall z, y \longmapsto (f(t,y,z),g(t,y)) \text{ est continue} \\ (ii)\ \ (\omega,t) \longmapsto (f(\omega,t,y,z),g(\omega,t,y)) \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{progressivement mesurable} \\ (iii)\ \forall t,\forall y,\forall\,(z,z'),\ \ |f(t,y,z) - f(t,y,z')| \leq K|z-z'| \\ (iv)\ \forall t,\forall z,\forall(y,y'),\ (y-y')\,(f(t,y,z) - f(t,y',z)) \leq \alpha|y-y'|^2 \\ (v)\ \forall t,\forall z,\forall(y,y'),\ (y-y')\,(g(t,y) - g(t,y')) \leq \beta|y-y'|^2 \\ (vi)\ \forall t,\forall y,\forall z,\ |f(t,y,z)| \leq \varphi_t + K(|y|+|z|),\ \ |g(t,y)| \leq \psi_t + K|y| \\ (vii)\ \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[|f(s,0,0)|^2 ds + |g(s,0,0)|^2 dG_s\right]\right) < +\infty \\ (viii)\ \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\varphi^2(s)ds + \psi^2(s)dG_s\right]\right) < +\infty, \end{cases},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}, \beta < 0, K > 0$ sont des constantes telles que $\lambda > 2|\alpha| + K^2, \mu > 2|\beta|$; $\{\varphi_t,\psi_t\}_{t\geq 0}$ étant des processus à valeurs dans $[1,+\infty)$

**(C2)** $\xi$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_\tau$-mesurable tel que

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda\tau+\mu G(\tau)}\,|\xi|^2\right) < +\infty.$$

**(C3)** $(S_t)_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô de la forme: $dS_t = m_t \mathbf{1}_{[0,\tau]}dt + n_t \mathbf{1}_{[0,\tau]}dG_t + v_t \mathbf{1}_{[0,\tau]}dW_t$

tel que
$(i)\ \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left(\left(|m_s|^2 + |v_s|^2\right)ds + |n_s|^2 dG_s\right)\right) < +\infty$

$(ii)\ S_\tau \leq \xi\ \mathbb{P}p.s.$

**Définition 4.1.1.** *La solution de l'EDSR généralisée à réflexion normale associée à $(\tau,\xi,f,g,S)$ est le triplet $(Y_t,Z_t,K_t)_{t\geq 0}$ de processus progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et vérifiant:*

$$\begin{cases} (j)\ Y \textit{ est un processus continu.} \\ (jj) \begin{cases} \textit{Pour tout } 0 \le t \le T, \\ Y_{t\wedge\tau} = Y_{T\wedge\tau} + \int_{t\wedge\tau}^{\tau\wedge T} f(s,Y_s,Z_s)ds + \int_t^{\tau\wedge T} g(s,Y_s)dG_s - \int_t^{\tau\wedge T} Z_s dW_s \\ +K_{\tau\wedge T} - K_{t\wedge\tau}. \end{cases} \\ (3j)\ Y_t \ge S_t, \textit{ sur } \{t \le \tau\}. \\ (4j)\ \mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le\tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}\left|Y_t\right|^2 + \int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\left(\left|Y_s\right|^2 + \left|Z_s\right|^2\right)ds + \left|Y_s\right|^2 dG_s\right]\right) < +\infty. \\ (5j)\ \begin{array}{l} K \textit{ est un processus croissant tel que } K_0 = 0 \textit{ et} \\ \int_0^{\tau\wedge T}(Y_t - S_t)\,dK_t = 0 \textit{ p.s. } \forall\, T \ge 0. \end{array} \\ (6j)\ Y_t = \xi,\ Z_t = 0,\ K_t = K_\tau \textit{ sur } \{t > \tau\}. \end{cases}$$

## 4.2 Résultat d'existence et d'unicité

Les travaux de Pardoux et Zhang dans [62] établissent que l'EDSR généralisée

$$\begin{aligned} Y_{t\wedge\tau}^n &= Y_{T\wedge\tau}^n + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} f(s,Y_s^n,Z_s^n)ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} g(s,Y_s^n)dG_s \\ &\quad + n\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau}(Y_s^n - S_s)^-(ds + dG_s) - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} Z_s^n dW_s, \end{aligned} \tag{4.2}$$

obtenue par la méthode de pénalisation admet une solution unique $(Y_t^n,Z_t^n)_{t\ge 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le\tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}\left|Y_t^n\right|^2 + \int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\left(\left|Y_s^n\right|^2 + \left|Z_s^n\right|^2\right)ds + \left|Y_s^n\right|^2 dG_s\right]\right) < +\infty.$$

**Théorème 4.2.1.** *Les hypothèses* **(C1)** – **(C3)** *étant vérifiées , l'EDSR généralisée à réflexion normale associées aux données* $(\tau,\xi,f,g,S)$ *admet une solution unique* $(Y,Z,K)$.

*Démonstration.* •**Existence**
Dans cette partie subdivisée en plusieurs étapes, $C$ est une constante positive qui peut varier d'une ligne à une autre.
Etape 1: Estimations uniforme en $n$ de $(Y^n,Z^n,K^n)$.

La formule d'Itô appliquée à $|Y^n_{t\wedge\tau^n}|^2$ donne

$$
\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|Y^n_{t\wedge\tau}\right|^2+\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y^n_s\right|^2(\lambda ds+\mu dG_s) \\
& +\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z^n_s\right|^2 ds \\
= \; & e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)}\left|Y^n_{T\wedge\tau}\right|^2+2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s f(s,Y^n_s,Z^n_s)ds \\
& +2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s g(s,Y^n_s)dG_s-2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s Z^n_s dW_s \\
& +2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s dK^n_s,
\end{aligned}
$$

où

$$dK^n_s=(Y^n_s-S_s)^-(ds+dG_s).$$

Les hypothèses $(\mathbf{C2}ii)$–$(\mathbf{C2}v)$ entrainent

$$
\left\{
\begin{array}{l}
2Y^n_s f(s,Y^n_s,Z^n_s)\leq (2\alpha+\frac{1}{\gamma}\nu^2+\rho)\left|Y^n_s\right|^2+\gamma\left|Z^n_s\right|^2+C\left|f(s,0,0)\right|^2 \\
2Y^n_s g(s,Y^n_s)\leq (2\beta+\rho)\left|Y^n_s\right|^2+C\left|g(s,0)\right|^2.
\end{array}
\right.
$$

Choisissant $0<\rho<1/2$ et $\gamma=1-2\rho$ tels que $\overline{\lambda}=\lambda-2\alpha-\frac{1}{\gamma}\nu^2-\rho>0, 1-\gamma>0$, et $\overline{\mu}=\mu-2\beta-\rho>0$, on trouve

$$
\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|Y^n_{t\wedge\tau}\right|^2+\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y^n_{s\wedge\tau}\right|^2(\overline{\lambda}ds+\overline{\mu}dG_s) \\
& +(1-\gamma)\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z^n_s\right|^2 ds \\
\leq \; & e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)}\left|Y^n_{T\wedge\tau}\right|^2+2C\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|f(s,0,0)\right|^2 ds \\
& +2C\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|g(s,0)\right|^2 dG_s-2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s Z^n_s dW_s \\
& +2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y^n_s dK^n_s.
\end{aligned}
$$

Sachant que $(Y^n_s-S_s)=(Y^n_s-S_s)^+-(Y^n_s-S_s)^-$, $\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left(Y^n_s-S_s\right)dK^n_s\leq 0$

et $\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y_s^n dK_s^n \leq \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} S_s dK_s^n$, l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)} \left|Y_{t\wedge\tau}^n\right|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|Y_{s\wedge\tau}^n\right|^2 (\overline{\lambda} ds + \overline{\mu} dG_s) \\
& +(1-\gamma) \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|Z_s^n\right|^2 ds \\
\leq\ & e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)} \left|Y_{T\wedge\tau}^n\right|^2 + 2C \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|f(s,0,0)\right|^2 ds \\
& +2C \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|g(s,0)\right|^2 dG_s - 2 \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} Y_s^n Z_s^n dW_s \\
& +2 \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} S_s dK_s^n.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Ensuite l'inégalité de Young appliquée à $\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} S_s dK_s^n$ donne

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)} \left|Y_{t\wedge\tau}^n\right|^2\right) + \mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|Y_{s\wedge\tau}^n\right|^2 (\overline{\lambda} ds + \overline{\mu} dG_s)\right) \\
& +(1-\gamma)\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|Z_s^n\right|^2 ds\right) \\
\leq\ & \mathbb{E}\left(e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)} \left|Y_{T\wedge\tau}^n\right|^2\right) + 2C\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|f(s,0,0)\right|^2 ds\right) + \\
& 2C\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left|g(s,0)\right|^2 dG_s\right) + \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{2(\lambda t+\mu G(t))} \left|(S_t)^+\right|^2\right) \\
& +\delta\mathbb{E}\left(K_{T\wedge\tau}^n - K_{t\wedge\tau}\right)^2.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& \delta\mathbb{E}\left(K_{T\wedge\tau}^n - K_{t\wedge\tau}\right)^2 \\
\leq\ & C\delta\mathbb{E}\left(e^{(\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau))} \left|Y_{t\wedge\tau}^n\right|^2 + e^{(\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau))} \left|Y_{T\wedge\tau}^n\right|^2\right. \\
& + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left(\varphi^2(s) + \left|Y_s^n\right|^2 + \left|Z_s^n\right|^2\right) ds \\
& \left. + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)} \left(\psi^2(s) + \left|Y_s^n\right|^2\right) dG_s\right);
\end{aligned}$$

alors $\delta$ étant choisi assez petit tel que $1 - C\delta > 0$, $\overline{\overline{\lambda}} = \overline{\lambda} - C\delta > 0$, $1 - \gamma_1 - C\delta > 0$, et $\overline{\overline{\mu}} = \overline{\mu} - C\delta > 0$, on a

$$
\begin{aligned}
&(1-C\delta)\,\mathbb{E}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|Y_{t\wedge\tau}^{n}\right|^{2}\right)+\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y_{s\wedge\tau}^{n}\right|^{2}\left(\overline{\overline{\lambda}}ds+\overline{\overline{\mu}}dG_{s}\right)\right)\\
&+(1-\gamma-C\delta)\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z_{s}^{n}\right|^{2}ds\right)\\
\leq\;&(1+C\delta)\,\mathbb{E}\left(e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)}\left|Y_{T\wedge\tau}^{n}\right|^{2}\right)+2C\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|f(s,0,0)\right|^{2}ds\right)\\
&+C\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|g(s,0)\right|^{2}dG_{s}\right)+\frac{1}{\delta}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{2(\lambda t+\mu G(t))}\left(S_{t}^{+}\right)^{2}\right)\\
&+C\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left(\varphi^{2}(s)ds+\psi^{2}(s)dG_{s}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Lorsque $T$ tend vers l'infini, le lemme de Fatou et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue impliquent

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|Y_{t\wedge\tau}^{n}\right|^{2}\right)+\mathbb{E}\left(\int_{0}^{\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y_{s}^{n}\right|^{2}\left(\overline{\overline{\lambda}}ds+\overline{\overline{\mu}}dG_{s}\right)\right)\\
&+\mathbb{E}\left(\int_{0}^{\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z_{s}^{n}\right|^{2}ds\right)\\
\leq\;&C\mathbb{E}\left(e^{\lambda\tau+\mu G(\tau)}\left|\xi\right|^{2}+\int_{0}^{\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|f(s,0,0)\right|^{2}ds\right)\\
&+C\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{2(\lambda t+\mu G(t))}\left|(S_{t})^{+}\right|^{2}+\int_{0}^{\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|g(s,0)\right|^{2}dG_{s}\right)\\
&+C\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left(\varphi^{2}(s)ds+\psi^{2}(s)dG_{s}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Ensuite l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy appliquée à (4.3) entraine

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}\left|Y_{t}^{n}\right|^{2}+\int_{0}^{\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\left|Y_{s}^{n}\right|^{2}(ds+dG_{s})+\left|Z_{s}^{n}\right|^{2}ds\right]\right)\\
\leq\;&C\mathbb{E}\left(e^{\lambda\tau+\mu G(\tau)}\left|\xi\right|^{2}+\int_{0}^{\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left[\left|f(s,0,0)\right|^{2}ds+\left|g(s,0)\right|^{2}dG_{s}\right]\right.\\
&\left.+\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{2(\lambda t+\mu G(t))}\left|(S_{t})^{+}\right|^{2}+\int_{t\wedge\tau}^{\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left(\varphi^{2}(s)ds+\psi^{2}(s)dG_{s}\right)\right)
\end{aligned}
$$

et

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq\tau}\left|K_{t}^{n}\right|^{2}\right)<+\infty.
$$

D'autre part, le théorème de comparaison prouve que $(Y^n)_{n>0}$ est une suite non décroissante; alors elle admet pour limite $Y$ un processus progressivement mesurable sur $\{t \leq \tau\}$. D'après les estimations qui précédent, le lemme de Fatou et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue assurent

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq \tau} e^{\lambda t+\mu G(t)}\left|Y_t\right|^2\right) < +\infty$$

et

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y_s^n - Y_s\right|^2(ds + dG_s)\right) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

**Etape 2**: *Prouver que* $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{2(\lambda t+\mu G(t))}\left|(Y_t^n - S_t)^-\right|^2) = 0$.
Soit $\left(\widetilde{Y}_t^n,\widetilde{Z}_t^n\right)$ la solution de l'EDSR

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_{t\wedge\tau}^n &= \widetilde{Y}_{T\wedge\tau}^n + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} f(s,\widetilde{Y}_s^n,\widetilde{Z}_s^n)ds + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} g(s,\widetilde{Y}_s^n)dG_s \\
&\quad + n\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau}(S_s - \widetilde{Y}_s^n)(ds + dG_s) - \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau}\widetilde{Z}_s^n dW_s;
\end{aligned}$$

alors le théorème de comparaison donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\widetilde{Y}_t^n \leq Y_t^n,\ \mathbb{P}\ p.s \text{ sur } \{t \leq \tau\}.$$

D'autre part $\nu$ étant un temps d'arrêt tel que $0 \leq \nu \leq \tau$, l'application de la formule d'Itô à $e^{-n(G_{t-\nu}+t-\nu)}\widetilde{Y}_t^n$ et l'espérance conditionnelle montrent que

$$\begin{aligned}
\widetilde{Y}_\nu^n &= \mathbb{E}\Big[e^{-n(G_{\tau-\nu}+\tau-\nu)}\xi + \int_\nu^{\tau} e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))}f(s,Y_s^n,Z_s^n)ds \\
&\quad + \int_\nu^{\tau} e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))}g(s,Y_s^n)dG_s + n\int_\nu^{\tau} e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))}S_s(ds + dG_s) \mid \mathcal{F}_{\nu\wedge\tau}\Big].
\end{aligned}$$

Or $e^{-n(G_{\tau-\nu}+\tau-\nu)}\xi + n\int_\nu^{\tau} e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))}S_s(ds + dG_s)$ (resp. son espérance conditionnelle) converge vers $\xi\mathbf{1}_{\{\nu=\tau\}} + S_\nu\mathbf{1}_{\{\nu<\tau\}}$ *p.s.* (resp. dans $L^2(\Omega,\mathbb{P})$). Ensuite sachant que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\nu^{\tau} e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))}f(s,Y_s^n,Z_s^n)ds\right| &\leq \left|\int_\nu^{\tau} e^{-n(s-\nu)}f(s,Y_s^n,Z_s^n)ds\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\int_\nu^{\tau}\left|f(s,Y_s^n,Z_s^n)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\int_\nu^{\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|f(s,Y_s^n,Z_s^n)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))}g(s,Y_s^n)dG_s\right| &\leq \left|\int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu})}g(s,Y_s^n)dG_s\right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\int_\nu^\tau |g(s,Y_s^n)|^2 dG_s\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\int_\nu^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)} |g(s,Y_s^n)|^2 dG_s\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))}f(s,Y_s^n,Z_s^n)ds+\int_\nu^\tau e^{-n(G_{s-\nu}+(s-\nu))}g(s,Y_s^n)dG_s \to 0 \text{ dans } L^2(\Omega,\mathbb{P}).$$

Finalement

$$\widetilde{Y}_\nu^n \longrightarrow \xi\mathbf{1}_{\{\nu=\tau\}} + S_\nu\mathbf{1}_{\{\nu<\tau\}} \text{ dans } L^2(\Omega,\mathbb{P})$$

et

$$Y_\nu \geq S_\nu \ \ p.s.$$

Le théorème section (voir *Dellacherie et Meyer* (page 220) [23]) implique que

$$Y_t \geq S_t \ p.s \text{ sur l'ensemble } \{t \leq \tau\};$$

ce qui entraine que

$$(Y_t^n - S_t)^- \downarrow 0, \ p.s \text{ sur l'ensemble } \{t \leq \tau\}.$$

En vertue du théorème de Dini cette convergence est uniforme en $t$ et le théorème de la convergence dominée assure que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq\tau} e^{\lambda t+\mu G(t)} \left|(Y_t^n - S_t)^-\right|^2) = 0,$$

car $(Y_t^n - S_t)^- \leq (S_t - Y_t^0)^+ \leq |S_t| + |Y_t^0|$.
**Etape 3**: *Convergence de la suite* $(Y^n,Z^n,K^n)$.

Quelque soit $n \geq p$, la formule d'Itô appliquée à $e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|Y^n_{t\wedge\tau}-Y^p_{t\wedge\tau}\right|^2$ donne

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|Y^n_{t\wedge\tau}-Y^p_{t\wedge\tau}\right|^2+\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y^n_s-Y^p_s\right|^2(\lambda ds+\mu dG_s) \\
& +\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z^n_s-Z^p_s\right|^2 ds \\
= \;& 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}(Y^n_s-Y^p_s)\left(f(s,Y^n_s,Z^n_s)-f(s,Y^p_s,Z^p_s)\right)ds \\
& +2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}(Y^n_s-Y^p_s)\left(g(s,Y^n_s)-g(s,Y^p_s)\right)dG_s \\
& -2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}(Y^n_s-Y^p_s)(Z^n_s-Z^p_s)\,dW_s \\
& +2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}(Y^n_s-Y^p_s)(dK^n_s-dK^p_s).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Prenant l'espérance dans chaque membre de (4.4), les estimations adéquates donnent

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y^n_s-Y^p_s\right|^2(\bar{\lambda}ds+\bar{\mu}dG_s)\right) \\
& +(1-\gamma)\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z^n_s-Z^p_s\right|^2 ds\right) \\
\leq \;& 2\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}(Y^n_s-Y^p_s)(dK^n_s-dK^p_s)\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& 2\mathbb{E}\left(\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}(Y^n_s-Y^p_s)(dK^n_s-dK^p_s)\right) \\
\leq \;& 2\mathbb{E}\left[\sup_{t\wedge\tau\leq s\leq T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}(Y^n_s-S_s)^-\left(K^n_{T\wedge\tau}-K^n_{t\wedge\tau}\right)\right. \\
& \left.+\sup_{t\wedge\tau\leq s\leq T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}(Y^p_s-S_s)^-\left(K^p_{T\wedge\tau}-K^p_{t\wedge\tau}\right)\right]
\end{aligned}$$

et les résultats des étapes 1 et 2, montre que le second membre de l'inégalité précédente tend vers zéro lorsque $n,p\to\infty$. Par conséquent lorsque $T$ tend vers l'infini le lemme de Fatou implique que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Y^n_s-Y^p_s\right|^2(\bar{\lambda}ds+\bar{\mu}dG_s)\right) \\
& +(1-\gamma)\mathbb{E}\left(\int_0^\tau e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|Z^n_s-Z^p_s\right|^2 ds\right) \longrightarrow 0 \\
& \qquad\qquad n,p \longrightarrow +\infty
\end{aligned} \tag{4.5}$$

et en passant à la limite en $n$, on obtient

$$\int_0^{T\wedge\tau} (Y_s - S_s)\, dK_s \leq 0.$$

**•Unicité**

Supposons $\{(Y_t,Z_t,K_t)\,,\, 0 \leq t \leq \tau\}$ et $\{(Y_t',Z_t',K_t'),\, 0 \leq t \leq \tau\}$ deux solutions de l'EDSR à réflexion normale associée à $(\tau,\xi,f,g,S)$ et posons

$$\{(\Delta Y_t,\Delta Z_t,\Delta K_t)\,,\, 0 \leq t \leq \tau\} = \{(Y_t - Y_t',Z_t - Z_t',K_t - K_t'),\, 0 \leq t \leq \tau\}\,.$$

La formule d'Itô appliquée à $e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|\Delta Y_{t\wedge\tau}\right|^2$ montre que pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|\Delta Y_{t\wedge\tau}\right|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|\Delta Y_s\right|^2 (\lambda ds + \mu dG_s) \\
& + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|\Delta Z_s\right|^2 ds \\
= \;& e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)}\left|\Delta Y_{T\wedge\tau}\right|^2 + 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\langle \Delta Y_s, f(s,Y_s,Z_s) - f(s,Y_s',Z_s')\rangle ds \\
& +2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\langle \Delta Y_s, g(s,Y_s) - g(s,Y_s')\rangle\, dG_s - 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\langle \Delta Y_s, \Delta Z_s dW_s\rangle \\
& +2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\langle \Delta Y_s, \Delta dK_s\rangle. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Les hypothèses $(\mathbf{C1}) - (\mathbf{C3})$ et la méthode précédente appliquées à (4.7) impliquent que

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|\Delta Y_{t\wedge\tau}\right|^2 + \int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|\Delta Y_s\right|^2 (\overline{\lambda} ds + \overline{\mu} dG_s) \\
& +(1-\gamma_1)\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|\Delta Z_s\right|^2 ds \\
\leq \;& e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)}\left|\Delta Y_{T\wedge\tau}\right|^2 - 2\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\langle \Delta Y_s, \Delta Z_s dW_s\rangle;
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|\Delta Y_{t\wedge\tau}\right|^2 + (1-\gamma_1)\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|\Delta Z_s\right|^2 ds\right) \leq \mathbb{E}\left(e^{\lambda(T\wedge\tau)+\mu G(T\wedge\tau)}\left|\Delta Y_{T\wedge\tau}\right|^2\right).$$

En vertue du théorème de la convergence dominée lorsque $T$ tend vers l'infini on a

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda(t\wedge\tau)+\mu G(t\wedge\tau)}\left|\Delta Y_{t\wedge\tau}\right|^2 + (1-\gamma_1)\int_{t\wedge\tau}^{T\wedge\tau} e^{\lambda s+\mu G(s)}\left|\Delta Z_s\right|^2 ds\right) = 0$$

et à la suite $\Delta Y_{t\wedge\tau} = 0$, $\Delta Z_{t\wedge\tau} = 0$. Finalement l'égalité

$$\begin{aligned}\Delta K_{t\wedge\tau} &= \Delta Y_0 - \int_0^{t\wedge\tau} (f(s,Y_s,Z_s - f(s,Y'_s,Z'_s))\, ds \\ &- \int_0^{t\wedge\tau} (g(s,Y_s) - g(s,Y'_s))\, dG_s + \int_0^{t\wedge\tau} \Delta Z_s dW_s.\end{aligned}$$

permet d'avoir $\Delta K_{t\wedge\tau} = 0$. □

**Remarque 4.2.1.** *Si $\tau$ est une constante déterministe, on choisirait $\lambda = \mu = 0$ dans toute les preuves précédentes et l'utilisation du lemme de gronwall s'imposerait.*

## 4.3 Applications

Dans cette Section, l'EDSR généralisée à réflexion normale associée à $(\tau,\xi,f,g,S)$ est considérée dans le cadre Markovien c'est à dire que ses données sont de la forme

$$\xi = l(X_T^{t,x}),\ f(s,y,z) = f(s,X_s^{t,x},y,z),\ g(s,y) = g(s,X_s^{t,x},y),\ S_s = h(s,X_s^{t,x})$$

où $\{(X_s^{t,x},G_s^{t,x}),s \geq 0\}$ est la solution unique de EDS (1.4) (voir chapitre 1), les coefficients vérifiant

$$\textbf{(C4)} \begin{cases} (i)\ f \in \mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Theta} \times \mathbb{R}^{1\times d}; \mathbb{R}) \\ (ii)\ g \in \mathcal{C}([0,T] \times \overline{\Theta} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) \\ (iii)\ l \in \mathcal{C}(\overline{\Theta},\mathbb{R}) \text{ et } l(x) \leq K(1 + |x|^p) \\ (iv)\ h \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \overline{\Theta}; \mathbb{R}), h(t,x) \leq K(1 + |x|^p) \text{ et } h(T,x) \leq l(x)\ \forall\, t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

### 4.3.1 Prix de l'option américaine revisité

Contrairement aux travaux de Cvitanic et Ma, [21] le processus de diffusion de l'actif financier noté $X_t^x$ est réfléchi. Par conséquent on impose qu'il influence le procesus richesse de l'investisseur noté $Y_t^x$ sans que l'inverse soit possible. L'objectif de l'investisseur étant de maximiser son gain qui est donné par la quantité

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R(t,\theta)|\,\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}\Big\{\int_t^\theta f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})dr + \int_t^\theta g(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x})dG_r^{t,x} \\ &+h(\theta,X_\theta^{t,x})1_{\{\theta<T\}} + l(X_T^{t,x})1_{\{\theta=T\}}\big|\,\mathcal{F}_t\Big\}\end{aligned}$$

pour tout temps d'arrêt $\theta$ à valeurs dans $[t,T]$.
Le théorème suivant est l'analogue de celui dans Cvitanic et Ma [21].

**Théorème 4.3.1.** *$(Y_{.}^{t,x},Z_{.}^{t,x},K_{.}^{t,x})$ étant la solution de l'EDSR à réflexion normale associée à $\left(l\left(X_T^{x,t}\right),f,g,h\left(.,X_{.}^{x,t}\right)\right)$ alors pour tout $t\in[0,T]$, il existe un temps d'arrêt optimal donné par*

$$\widehat{\theta}_t = \inf\left\{t\leq u\leq T, Y_u^{t,x}=h(u,X_u^{t,x})\right\}\wedge T$$

*tel que*

$$\mathbb{E}(R(t,\widehat{\theta}_t)\mid\mathcal{F}_t) = Y_t^{t,x} = ess\sup_{\theta\in\mathcal{M}(t,T)}\mathbb{E}\left(R(t,\theta)\mid\mathcal{F}_t\right),$$

*où $\mathcal{M}(t,T)$ est l'ensemble de tous les temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$.*

*Démonstration.* $\forall\theta\in\mathcal{M}(t,T)$,

$$\begin{aligned}Y_t^{t,x} &= Y_\theta^{t,x}+\int_t^\theta f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})dr+\int_t^\theta g(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x})dG_r^{t,x}\\ &\quad -\int_t^\theta Z_r^{t,x}dW_r+K_\theta^{t,x}-K_t^{t,x}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Sachant $Y_t^{t,x}$ déterministe, l'espérance prise dans chaque membre de l'équation précédente donne

$$\begin{aligned}Y_t^{t,x} &= \mathbb{E}\left\{Y_\theta^{t,x}+\int_t^\theta f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})dr\right.\\ &\quad\left.+\int_t^\theta g(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x})dG_r^{t,x}+K_\theta^{t,x}-K_t^{t,x}\mid\mathcal{F}_t\right\}.\end{aligned}$$

Or $K_{.}^{t,x}$ est croissant et

$$\begin{aligned}Y_\theta^{t,x} &= Y_\theta^{t,x}1_{\{\theta<T\}}+Y_\theta^{t,x}1_{\{\theta=T\}}\\ &\geq h(\theta,X_\theta^{t,x})1_{\{\theta<T\}}+l(X_T^{t,x})1_{\{\theta=T\}}.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Donc

$$\begin{aligned}Y_t^{t,x} &\geq \mathbb{E}\left\{\int_t^\theta f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})dr+\int_t^\theta g(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x})dG_r^{t,x}\right.\\ &\quad\left.+h(\theta,X_\theta^{t,x})1_{\{\theta<T\}}+l(X_T^{t,x})1_{\{\theta=T\}}\mid\mathcal{F}_t\right\}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}Y_t^{t,x} &= \mathbb{E}\left\{Y_{\widehat{\theta}_t}^{t,x}+\int_t^{\widehat{\theta}_t} f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})dr+\int_t^{\widehat{\theta}_t} g(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x})dG_r^{t,x}\right.\\ &\quad\left.+K_{\widehat{\theta}_t}^{t,x}-K_t^{t,x}\right\}.\end{aligned}$$

Or

$$Y_{\widehat{\theta}_t}^{t,x} = h(\widehat{\theta}_t, X_{\widehat{\theta}_t}^{t,x}) 1_{\{\widehat{\theta}_t < T\}} + l(X_T^{t,x}) 1_{\{\widehat{\theta}_t = T\}}$$

et

$$K_{\widehat{\theta}_t}^{t,x} = K_t^{t,x};$$

donc

$$\begin{aligned} Y_t^{t,x} &= \mathbb{E}\left\{\int_t^{\widehat{\theta}_t} f(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x},Z_r^{t,x})dr + \int_t^{\widehat{\theta}_t} g(r,X_r^{t,x},Y_r^{t,x})dG_r^{t,x} \right. \qquad (4.11) \\ &\left. + h(\widehat{\theta}_t, X_{\widehat{\theta}_t}^{t,x}) 1_{\{\widehat{\theta}_t < T\}} + l(X_T^{t,x}) 1_{\{\widehat{\theta}_t = T\}} \right\}. \end{aligned}$$

Finalement (4.12) et (4.11) impliquent

$$Y_t^{t,x} = ess \sup_{\theta \in \mathcal{M}(t,T)} \mathbb{E}\left(R(t,\theta) \mid \mathcal{F}_t\right).$$

□

**Proposition 4.3.1.** *$(Y^{t,x}, Z^{t,x}, K^{t,x})$ la solution unique de l'EDSR à réflexion normale associée à $\left(l\left(X_T^{x,t}\right), f, g, h\left(., X_.^{x,t}\right)\right)$, le prix maximum de l'option est $Y_0$.*

*Démonstration.* Pour tout $t \in [0,T]$, on a (supprimant l'exposant"$^{0,x}$")

$$\begin{aligned} & Y_t + \int_0^t f(r,X_r,Y_r,Z_r)dr + \int_0^t g(r,X_r,Y_r)dG_r \\ = \ & Y_0 + \int_0^t Z_r dB_r - K_t. \end{aligned}$$

$K_.$ étant croissant et sachant que $\mathbb{E}(1 \mid \mathcal{F}_t) = 1$, on a pour tout temps d'arrêt à valeur dans $\mathcal{M}(t,T)$

$$\begin{aligned} Y_t &\geq \mathbb{E}\left\{Y_\theta + \int_t^\theta f(r,X_r,Y_r,Z_r)dr + \int_t^\theta g(r,X_r,Y_r)dG_r \mid \mathcal{F}_t\right\} \\ &\geq \mathbb{E}\left\{\int_t^\theta f(r,X_r,Y_r,Z_r)dr + \int_t^\theta g(r,X_r,Y_r)dG_r \right. \\ &\quad \left. + h(\theta,X_\theta)1_{\{\theta<T\}} + l(X_T)1_{\{\theta=T\}} \middle| \mathcal{F}_t\right\}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $Y_t \geq V(t)$, $\forall\, t$, en particulier $Y_0 \geq V(0)$
où

$$\begin{aligned} V(t) &= ess \sup_{\theta \in \mathcal{M}(t,T)} \mathbb{E}\left(R(t,\theta) \mid \mathcal{F}_t\right), \\ V(0) &= ess \sup_{\theta \in \mathcal{M}(0,T)} \mathbb{E}\left(R(0,\theta)\right). \end{aligned}$$

Inversement, étant donnés $(\overline{Y},\overline{Z},\overline{K})$ une solution indistingable de notre EDRS et

$$\widehat{\theta_0} = \inf\left\{0 \leq u \leq T, \overline{Y_u} = h(u,X_u)\right\} \wedge T$$

un temps d'arrêt optimal, les propriétés de $\widehat{\theta_0}$, impliquent $\overline{Y}_{\widehat{\theta_0}} \geq \overline{Y}_\theta$ pour tout $\theta \in \mathcal{M}(0,T)$. Enfin en vertue du Théorème 4.3.1 on a

$$Y_0 \geq V(0) \geq \overline{Y}_0.$$

□

### 4.3.2 Problème d'obstacle pour les EDP semi-linéaires paraboliques avec condition aux limites de type Neumann non linéaire

Etant donné le problème d'obstacle des EDP suivant

$$\begin{cases} \min\left\{u(t,x) - h(t,x)\right., \\ \left.-\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - (\mathcal{L}u)(t,x) - f(s,x,u(t,x),(\nabla u(t,x))^* \sigma(t,x))\right\} = 0, \\ (t,x) \in [0,T] \times \Theta \\ \Gamma u(t,x) + g(t,x,u(t,x)) = 0, \ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Theta \\ u(T,x) = l(x), \, x \in \overline{\Theta}, \end{cases} \tag{4.12}$$

où

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\varphi)(t,x) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} (\sigma\sigma^*)_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 \varphi}{(\partial x_i \partial x_j)}(t,x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(t,x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t,x), \ x \in \Theta \\ (\Gamma\varphi)(t,x) &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t,x), \, x \in \partial\Theta \end{aligned}$$

et $(Y^{t,x}_{\cdot},Z^{t,x}_{\cdot},K^{t,x}_{\cdot})$ la solution de l'EDSR généralisée à réflexion normale associée à $\left(l\left(X_T^{x,t}\right), f, g, h(.,X^{x,t}_{\cdot})\right)$, si on pose

$$u(t,x) = Y_t^{t,x}, (t,x) \in [0,T] \times \overline{\Theta}, \tag{4.13}$$

alors on a les résultats suivants

**Proposition 4.3.2.** *La fonction u vérifie:*
(*a*) $u(t,x) \geq h(t,x) \;\forall\; (t,x) \in [0T] \times \overline{\Theta}$
(*b*) $\sup_{x\in\overline{\Theta}} |u(t,x)| \leq C(1+|x|) \;\forall\; t \in [0,T]$
*avec* $C > 0$ *une constante indépendente de* $t$ *et* $x$
(*c*) $u \in \mathcal{C}\left([0,T] \times \overline{\Theta}\right)$.

**Théorème 4.3.2.** *La fonction définie en (4.13) est une solution de viscosité de (4.12).*

*Démonstration.* En vertu des travaux de Pardoux et Zhang [62] l'EDSR

$$\begin{aligned} Y_{n,s}^{t,x} &= l(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r,X_r^{t,x},Y_{n,r}^{t,x},Z_{n,r}^{t,x})dr + \int_s^T g(r,X_r^{t,x},Y_{n,r}^{t,x})dG_r^{t,x} \\ &\quad - \int_s^T Z_r^{t,x}dW_r + K_{n,T}^{t,x} - K_{n,s}^{t,x}, \end{aligned}$$

où

$$K_{n,s}^{t,x} = n\int_0^s (Y_{n,r}^{t,x} - h(r,X_r^{t,x}))^-(dr + dG_r^{t,x})$$

admet une solution $(Y_{n,s}^{t,x},Z_{n,s}^{t,x})$ et $u_n(t,x) = Y_{n,t}^{t,x}$ est une solution de viscosité de l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x) + (\mathcal{L}u_n)(t,x) + f_n(s,x,u_n(t,x),(\nabla u_n(t,x))^* \sigma(t,x)) = 0, \\ (t,x) \in [0,T] \times \Theta \\ \\ \Gamma u_n(t,x) + g_n(t,x,u_n(t,x)) \leq 0,\; (t,x) \in [0,T] \times \partial\Theta, \\ \\ u_n(T,x) = l(x),\; x \in \overline{\Theta}, \end{cases} \tag{4.14}$$

où $f_n(s,x,y,z) = f(s,x,y,z) + n(y-h(t,x))^-$ et $g_n(s,x,y) = g(s,x,y) + n(y-h(t,x))^-$. On montre que

$$|u_n(t,x) - u(t,x)|^2 \leq \mathbb{E}(\sup_{t\leq s\leq T} |Y_{n,s}^{t,x} - Y_s^{t,x}|^2),\; \forall\; (t,x) \in [0,T] \times \overline{\Theta},$$

et

$$u_n(t,x) \uparrow u(t,x).$$

$u_n$ et $u$ étant continus, en vertue du théorème de Dini cette convergence est uniforme sur tout compacte. D'autre part $\forall\,(t,x)$ tel que $u(t,x) \geq h(t,x)$ et $(p,q,X) \in \mathcal{P}^{2,+}u(t,x)$, le Lemme 6.1 de [19] entraine qu'il existe une suite

$$(t_{n_j},x_{n_j},p_{n_j},q_{n_j},X_{n_j}) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathcal{P}^{2,+}u_{n_j}(t_{n_j},x_{n_j})$$

tel que

$$\begin{array}{rcl}(t_{n_j},x_{n_j},u_{n_j}(t_{n_j},x_{n_j}),p_{n_j},q_{n_j},X_{n_j}) & \longrightarrow & (t,x,u(t,x),p,q,X) \\ j & \longrightarrow & \infty.\end{array}$$

et

$$\begin{array}{rl} & -p_{n_j} - \frac{1}{2}Tr\left(\sigma\sigma^*(t_{n_j},x_{n_j})X_{n_j}\right) - (b(t_{n_j},x_{n_j}),q_{n_j}) \\ & -f(t_{n_j},x_{n_j},u_{n_j}(t_{n_j},x_{n_j}),q_{n_j}\sigma(t_{n_j},x_{n_j})) \\ \leq & -n_j(u_{n_j}(t_{n_j},x_{n_j}) - h(t_{n_j},x_{n_j}))^-, \forall x \in \Theta. \end{array} \tag{4.15}$$

Sachant que $u\,(t,x) \geq h\,(t,x)$ et $u_n$ convergent uniformement, il existe $j$ assez grand tel que $u_{n_j}(t_{n_j},x_{n_j}) \geq h(t_{n_j},x_{n_j})$. Ensuite (4.15) implique

$$-p - \frac{1}{2}Tr\,((\sigma\sigma)^*(t,x)X) - \langle b(t,x),q\rangle - f(t,x,u\,(t,x)\,,q\sigma\,(t,x)) \leq 0\ \forall x \in \Theta$$

et

$$\langle q\psi(t,x),q\rangle + g(t,x,u(t,x)) \leq 0,\ \forall\ x \in \partial\Theta.$$

qui prouve $(a)$ de la Définition 1.2.4. Un raisonnement analoque prouve $(b)$ et met fin à la preuve. $\square$

# Chapitre 5

# Homogénéisation des EDP semi-linéaires réfléchies avec condition aux limites de type Neumann non linéaire[4]

Dans ce chapitre les hypothèses et deux résultats utilisés dans la suite seront donnés à la Section 1. La section 2 prouve la convergence faible de l'EDSR généralisée à réflexion normale et temps terminal constant et la section 3 donne en application l'homogénéisation des classes d'EDP à valeurs réelles.

## 5.1 Hypothèses, notations et quelques résultats

Soient $\Theta$ l'ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ défini au chapitre 1 et $b$, $\sigma$ deux fonctions lipschitziennes assez régulières. On considére l'opérateur différentièl parabolique $(L_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)$ et sa forme homogénéisée $(L,\Gamma)$ définis respectivement par

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= \sum_{i,j}^{d} a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\partial_i\partial_j + \frac{1}{\varepsilon}\sum b_i(\frac{x}{\varepsilon})\partial_i \\ \Gamma_\varepsilon &= \sum \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(\frac{x}{\varepsilon})\partial_i, \qquad \forall\varepsilon > 0 \end{aligned}$$

4. Ce travail est soumis pour publication

et

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i,j}^{d} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j + \sum_i b_i(x)\partial_i \\ \Gamma &= \sum \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\partial_i, \end{aligned}$$

où $\partial_i = \partial/\partial x_i$ et la matrice $a(x) = [a_{ij}(x)]$ est pris comme $\sigma(x)\sigma^*(x)/2$.
Si $(X^\varepsilon,G^\varepsilon)$ est la $(L_\varepsilon,\Gamma_\varepsilon)-$diffusion alors elle est la solution de l'EDS progressive réfléchie associée à $(b,\sigma,\psi)$ et vérifie

$$\sup_\varepsilon \mathbb{E}(|X_t^\varepsilon|^{2p} + \int_0^t |X_t^\varepsilon|^{2q}(ds + dG_s^\varepsilon)) < +\infty. \tag{5.1}$$

D'autre part $(X^\varepsilon,G^\varepsilon)$ converge en loi vers $(X,G)$ l'unique $(L,\Gamma)-$processus de diffusion ergodique à valeur dans $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{T}^d$ étant le tore de dimension $d$).
Pour terminer définissons respectivement les espaces
• $\mathbb{C}\left([0,T],\overline{\Theta}\right)$ des fonctions sur $[0,T]$ à valeurs dans $\overline{\Theta}$ muni de la norme de la convergence uniforme,
• $\mathbb{D}\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ des fonctions continues à droite ayant une limite à gauche (c àdlàg) sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de Meyer-Zheng,
• $\mathbb{C}_+\left([0,T],\mathbb{R}_+\right)$ des fonctions croissantes sur $[0,T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ muni de la norme de la convergence uniforme
et les résultats suivants

**Proposition 5.1.1.** *(Billingsley [13], p 25).*
*Soit $(U^\varepsilon)_\varepsilon$ une famille de variables aléatoires définies dans un même espace de probabilité. Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on suppose l'existence d'une famille de variables aléatoires $(U^{\varepsilon,n})_n$, telles que:*
*•$U^{\varepsilon,n} \Longrightarrow U^{0,n}$ quand $\varepsilon$ tend vers zéro*
*•$U^{\varepsilon,n} \Longrightarrow U^\varepsilon$ quand $n \longrightarrow +\infty$, uniformement en $\varepsilon$*
*•$U^{0,n} \Longrightarrow U^0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.*
*Alors, $U^\varepsilon$ converge en loi vers $U^0$.*

**Proposition 5.1.2.** *(Voir Ouknine et Pardoux [53])*
*Soient $g \in C\left(\overline{\Theta} \times \mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ et $(X^\varepsilon,G^\varepsilon,Y^{\varepsilon,n})$ un élément aléatoire de $\mathbb{C}\left([0,T],\overline{\Theta}\right) \times \mathbb{C}_+\left([0,T],\mathbb{R}_+\right)\times\mathbb{D}\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ munie de la topologie précédente. S'il existe $(X^\varepsilon,G^\varepsilon,Y^{\varepsilon,n}) \in \mathbb{C}\left([0,T],\overline{\Theta}\right)\times\mathbb{C}_+\left([0,T],\mathbb{R}_+\right)\times\mathbb{D}\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ tel que $(X^\varepsilon,G^\varepsilon,Y^{\varepsilon,n}) \Longrightarrow (X,G,Y^n)$ quand $\varepsilon \downarrow 0$, alors*

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_t^T g(s,X_s^\varepsilon,Y_s^{\varepsilon,n})dG_s^\varepsilon - \int_t^T g(s,X_s,Y_s^n)dG_s\right| &\to 0 \\ \varepsilon &\to 0. \end{aligned}$$

*en proba.*

## 5.2 EDSR réfléchie et convergence faible

Dans cette section on considère les ESDR généralisées à réflexion normale associées respectivement à $(l(X_T^\varepsilon),f,g,h(.,X^\varepsilon))$ et $(l(X_T),f,g,h(.,X_.))$ dont les données vérifient les hypothèses

**(D1)** $f$ et $g$ sont des fonctions définies respectivement sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et $\Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l} (i)\ \forall t,\forall x,y \longmapsto (f(t,x,y),g(t,x,y)) \text{ est continue} \\ \\ (ii)\ \ (\omega,t) \longmapsto (f(\omega,t,y,z),g(\omega,t,y)) \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{progressivement mesurable} \\ \\ (iii)\ \forall t,\forall x,\forall (y,y'),\ \ (y-y')\,(f(t,x,y) - f(t,x,y')) \leq \alpha|y-y'|^2 \\ \\ (iv)\ \forall t,\forall x,\forall (y,y'),\ \ (y-y')\,(g(t,x,y) - g(t,x,y')) \leq \beta|y-y'|^2 \\ \\ (v)\$\forall t,\forall x,\forall y,\ |f(t,x,y)| \leq \varphi_t + K(|x|^q + |y|^2),\ \ |g(t,x,y)| \leq \psi_t + K|x|^q. \\ \\ (vi)\ \mathbb{E}\left(\int_0^T [|f(s,0,0)|^2 ds + |g(s,0,0)|^2 dG_s]\right) < +\infty \\ \\ (vii)\ \mathbb{E}\left(\int_0^T [\varphi^2(s)ds + \psi^2(s)dG_s]\right) < +\infty, \end{array}\right. ,$$

où $\alpha \in \mathbb{R},\beta \leq 0$ sont des constantes; $\{\varphi_t,\psi_t\}_{t\geq 0}$ étant des processus à valeurs dans $[1,+\infty)$

$$\textbf{(D2)} \left\{\begin{array}{l} (i)\ l \in \mathcal{C}(\overline{\Theta},\mathbb{R}) \text{ et } l(x) \leq K(1+|x|^p) \\ \\ (ii)\ h \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \overline{\Theta};\mathbb{R}),h\,(t,x) \leq K(1+|x|^p) \text{ et } h\,(T,x) \leq l\,(x)\ \ \forall\ t \in [0,T]\,,\,x \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Par conséquent elles admettent (voir chapitre 4 ) respectivement des solutions uniques $\{(Y_t^\varepsilon,Z_t^\varepsilon,K_t^\varepsilon) : 0 \leq t \leq T\}$ et $\{(Y_t,Z_t,K_t) : 0 \leq t \leq T\}$. Si on pose

$$M_t^\varepsilon = -\int_0^t Z_s^\varepsilon dW_s \text{ et } M_t = -\int_0^t Z_s dW_s.$$

alors $(X^\varepsilon,G^\varepsilon,Y^\varepsilon,M^\varepsilon,K^\varepsilon)$ et $(X,G,Y,M,K)$ sont les éléments aléatoires de l'espace $\mathbb{C}\left([0,T],\overline{\Theta}\right) \times \mathbb{C}_+\left([0,T],\mathbb{R}_+\right) \times \mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}) \times \mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}) \times \mathbb{C}\left([0,T],\mathbb{R}\right)$, où les deux premiers et le dernier termes sont équipés de la topologie de la norme sup, le troisième et le quatrième termes de la topologie de type $S$ de *Jakubowski* [38].

**Théorème 5.2.1.** *Sous les hypothèses* $(\boldsymbol{D1})$–$(\boldsymbol{D2})$ *la famille de processus* $(X^\varepsilon,G^\varepsilon,Y^\varepsilon,M^\varepsilon,K^\varepsilon)$ *converge en loi vers* $(X,G,Y,M,K)$ *dans* $\mathbb{C}\left([0,T],\overline{\Theta}\right) \times \mathbb{C}_+\left([0,T],\mathbb{R}_+\right) \times \mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}) \times \mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}) \times \mathbb{C}_+\left([0,T],\mathbb{R}\right)$.

La preuve de ce théorème neccessite des lemmes. Pour les énoncer considérons $((Y_t^{\varepsilon,n},Z_t^{\varepsilon,n})$ l'unique solution de l'EDSR généralisée

$$\begin{aligned} Y_t^{\varepsilon,n} &= l(X_T^\varepsilon) + \int_t^T f(s,X_s^\varepsilon,Y_s^{\varepsilon,n})ds + \int_t^T g(s,X_s^\varepsilon,Y_s^{\varepsilon,n})dG_s^\varepsilon \\ &\quad +n\int_t^T (Y_s^{\varepsilon,n} - h(s,X_s^\varepsilon))^-(ds + dG_s^\varepsilon) + M_T^{\varepsilon,n} - M_t^{\varepsilon,n} \qquad (5.2) \end{aligned}$$

où

$$M^{\varepsilon,n} = -\int_0^t Z_s^{\varepsilon,n}dW_s$$

obtenue par la méthode de pénalisation (voir *Pardoux et Zhang* [62]).

**Lemme 5.2.1.** *Les conditions (**D1**) – (**D2**) étant vérifiées, la famille de processus* $(Y^{\varepsilon,n},M^{\varepsilon,n})$ *converge vers une unique famille de procesus* $(Y^n,M^n)$ *dans* $\mathbb{D}([0,T],\mathbb{R})^2$.

*Démonstration.* **Etape 1.** *Estimation uniforme en* $\varepsilon$

La formule d'Itô appliquée à $|Y_t^{\varepsilon,n}|^2$ donne

$$\begin{aligned} |Y_t^{\varepsilon,n}|^2 + \int_t^T |Z_s^{\varepsilon,n}|^2 ds &= |l(X_T^\varepsilon)|^2 + 2\int_t^T Y_s^{\varepsilon,n} f(s,X^\varepsilon,Y_s^{\varepsilon,n})\, ds \\ &\quad +2\int_t^T Y_s^{\varepsilon,n} g(s,X^\varepsilon,Y_s^{\varepsilon,n})\, dG_s^\varepsilon \\ &\quad -2\int_t^T Y_s^{\varepsilon,n}Z_s^{\varepsilon,n}dW_s + 2\int_t^T Y_s^{\varepsilon,n}dK_s^{\varepsilon,n}. \qquad (5.3) \end{aligned}$$

Etant données les hypothèses (**D1**$iii$), (**D1**$iv$), l'inégalité $\int_t^T Y_s^{\varepsilon,n}dK_s^{\varepsilon,n} \leq \int_t^T h(s,X_s^\varepsilon)\, dK_s^{\varepsilon,n}$ et celle de Young

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|Y_t^{\varepsilon,n}|^2 + \int_t^T |Z_s^{\varepsilon,n}|^2 ds &\leq \mathbb{E}|l(X_T^\varepsilon)|^2 + \mathbb{E}\int_t^T \left\{(2\mu+1)\,|Y_s^{\varepsilon,n}|^2 + \varphi_s^2 + K^2|X_s^\varepsilon|^{2q}\right\} ds \\ &\quad +\mathbb{E}\int_t^T (2\beta+\gamma^2)\,|Y_s^{\varepsilon,n}|^2 + \frac{2}{\gamma^2}(\psi_s^2 + K^2\,|X_s^\varepsilon|^{2q})dG_s^\varepsilon \\ &\quad +\mathbb{E}\int_t^T h(s,X_s^\varepsilon)\, dK_s^{\varepsilon,n}. \end{aligned}$$

Si on choisit $\gamma^2 = |\beta|$ alors l'hypothèse (**D1**$vii$) et l'inégalité de Young entrainent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|Y_t^{\varepsilon,n}|^2 + \int_t^T |Z_s^{\varepsilon,n}|^2\, ds + |\beta|\,\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^{\varepsilon,n}|^2\, dG_s^\varepsilon &\leq \mathbb{E}\,|l(X_T^\varepsilon)|^2 \\ &\quad +C(1+\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^{\varepsilon,n}|^2\, ds) \\ &\quad +\frac{1}{\delta}\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}|h(s,X_s^\varepsilon)|^2 \\ &\quad +\delta\mathbb{E}(K_T^{\varepsilon,n} - K_t^{\varepsilon,n})^2. \qquad (5.4) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(K_T^{\varepsilon,n}-K_t^{\varepsilon,n})^2 &\leq C\left\{\mathbb{E}(|Y_t^{\varepsilon,n}|^2+|l(X_T^{\varepsilon})|^2+\int_t^T(|X_s^{\varepsilon}|^q+|Y_s^{\varepsilon,n}|^2)ds)\right\}\\ &+C\mathbb{E}\int_t^T(|X_s^{\varepsilon}|^q+|Y_s^{\varepsilon,n}|^2)dG_s^{\varepsilon}; \qquad (5.5)\end{aligned}$$

donc si $\delta=\inf\left\{\frac{1}{2C},\frac{|\beta|}{2C}\right\}$, on trouve

$$\mathbb{E}|Y_s^{\varepsilon,n}|^2+\mathbb{E}\int_t^T|Z_s^{\varepsilon,n}|^2ds+\mathbb{E}\int_t^T|Y_s^{\varepsilon,n}|^2dG_s^{\varepsilon}\leq C(1+\mathbb{E}\int_t^T|Y_s^{\varepsilon,n}|^2ds)$$

et lemme de Gronwall conclut

$$\mathbb{E}(\int_t^T|Z_s^{\varepsilon,n}|^2ds+\int_t^T|Y_s^{\varepsilon,n}|^2dG_s^{\varepsilon}+(K_T^{\varepsilon,n})^2)\ \leq C,\ 0\leq t\leq T,\ n\in\mathbb{N}.$$

Finalement l'inégalité de Burkholder-Davy-Gundy appliqué à (5.3) donne

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{\varepsilon,n}|^2+\int_0^T|Z_s^{\varepsilon,n}|^2ds+\int_0^T|Y_s^{\varepsilon,n}|^2dG_s^{\varepsilon}+|K_T^{\varepsilon,n}|^2)\ \leq C.$$

**Etape 2** *Critère de tension.*
En vertue de l'égalité (1.8) et sachant que $Y^{\varepsilon,n}$ vérifie l'EDSR (5.2) on a

$$CV_t(Y_t^{\varepsilon,n})\leq\mathbb{E}(\int_0^T|f(s,X_s^{\varepsilon},Y_s^{\varepsilon,n})|ds+\int_0^T|g(s,X_s^{\varepsilon},Y_s^{\varepsilon,n})|dG_s^{\varepsilon}+|K_T^{\varepsilon,n}|).$$

L'hypothèse (**D1**$v$), l'inégalité (5.1) et l'étape 1 impliquent

$$\sup_{\varepsilon}(CV_t(Y_t^{\varepsilon,n})+\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t^{\varepsilon,n}|^2+\int_0^T|Z_s^{\varepsilon,n}|^2ds+\int_0^T|Y_s^{\varepsilon,n}|^2dG_s^{\varepsilon}))<+\infty.$$

Par conséquent $\{(Y_t^{n,\varepsilon},Z_t^{n,\varepsilon}),\ 0\leq t\leq T\}$ satisfait le critère de tension de *Meyer-Zheng* pour les quasi-martingales sous $\mathbb{P}$.
**Etape 3.** *Convergence en loi.*
L'étape 2 permet de trouver une sous suite de $(Y_t^{\varepsilon,n},M_t^{\varepsilon,n})$ (qu'on peut encore noter $(Y_t^{\varepsilon,n},M_t^{\varepsilon,n})$) telle que $(X^{\varepsilon},G^{\varepsilon},Y^{\varepsilon,n},M^{\varepsilon,n})$ converge vers un processus $(X,G,Y^n,M^n)$ dans $\mathbb{C}\left([0,T],\overline{\Theta}\right)\times\mathbb{C}_+\left([0,T],\mathbb{R}_+\right)\times\mathbb{D}\left([0,T],\mathbb{R}\right)^2$ où les premiers termes son muni de la topologie produit de la convergence uniforme, le troisième de la $S-$topologie et le quatrième de la topologie de la convergence en mesure $ds$.
D'autre part les applications $(x,y)\mapsto\int_t^T f(x\,(s)\,,y\,(s))ds$ et $y\mapsto\int_t^T(y\,(s)-S_s^{\varepsilon})^-ds$

étant continues respectivement dans $\mathbb{C}\left([0,T],\overline{\Theta}\right)\times\mathbb{D}([0,T,],\mathbb{R})$ et $\mathbb{D}([0,T,],\mathbb{R})$ muni des même topologies précédentes et en vertue de la Proposition 5.1.2,

$$\begin{aligned}
\int_t^T f(s,X_s^\varepsilon,Y_s^{\varepsilon,n})ds &\longrightarrow \int_t^T f(s,X_s,Y_s^n)ds\\
\int_t^T (Y_s^{\varepsilon,n}-h\,(s,X_s^\varepsilon))^- ds &\longrightarrow \int_t^T (Y_s^n-h\,(s,X_s^\varepsilon))^- ds\\
\int_t^T g(s,X_s^\varepsilon,Y_s^{\varepsilon,n})dG_s^\varepsilon &\longrightarrow \int_t^T g(s,X_s,Y_s^n)dG_s\\
\int_t^T (Y_s^{\varepsilon,n}-h\,(s,X_s^\varepsilon))^- dG_s^\varepsilon &\longrightarrow \int_t^T (Y_s^n-h\,(s,X_s^\varepsilon))^- dG_s.
\end{aligned}$$

Par conséquent en prenant la limite de chaque membre de l'EDSR (5.2) on a

$$\begin{aligned}
Y_t^n &= l\,(X_T)+\int_t^T f(s,X_s,Y_s^n)ds+\int_t^T g(s,X_s,Y_s^n)dG_s\\
&\quad +n\int_t^T (Y_s^n-h\,(s,X_s^\varepsilon))^-\,(ds+dG_s)+M_T^n-M_t^n.
\end{aligned}$$

Enfin par les même arguments que *Pardoux* [54] ou *Essaky et Ouknine* [27], prouvent que $M^n$ et $M^X$ (la partie martingale de $X$) sont des $\mathcal{F}_t^{X,Y^n}$−martingales.

**Etape 4.** *Identification de la limite.*

Etant donné $\left\{(\overline{Y}_t^n,\overline{U}_t^n),0\le t\le T\right\}$, solution unique de l'EDSR généralisée

$$\begin{aligned}
\overline{Y}_t^n &= l\,(X_T)+\int_t^T f(s,X_s,\overline{Y}^n)ds+\int_t^T g(s,X_s,\overline{Y}_s^n)dG_s\\
&\quad +n\int_t^T (\overline{Y}_s^n-h\,(s,X_s))^-\,(ds+dG_s)+\widetilde{M}_T^n-\widetilde{M}_t^n,
\end{aligned}$$

où

$$\widetilde{M}_t^n=\int_0^t \overline{U}_s^n dM_s^X$$

vérifiant

$$\mathbb{E}\int_t^T \overline{U}_s^n\langle M_s^X\rangle\overline{U}_s^n<+\infty.$$

$\widetilde{M}^n$ est une martingale car $\overline{Y}^n$, $\overline{U}^n$ sont $\mathcal{F}_t^{X,}$−adaptés et $M^X$ une $\mathcal{F}_t^{X,Y^n}$−martingale.

D'autre part la formule d'Itô appliquée à $\left|\overline{Y}_t^n - Y_t^n\right|^2$ donne

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left|\overline{Y}_t^n - Y_t^n\right|^2 + \mathbb{E}[M^n - \widetilde{M}^n]_T - E[M^n - \widetilde{M}^n]_t \\
= \;& 2\mathbb{E}\int_t^T \langle \overline{Y}_s^n - Y_s^n, f(s,X_s,Y_s^n) - f(s,X_s,\overline{Y}^n)\rangle ds \\
& +2\mathbb{E}\int_t^T \langle \overline{Y}_s^n - Y_s^n, g(s,X_s,Y_s^n) - g(s,X_s^\varepsilon,\overline{Y}_s^n)\rangle dG_s \\
& +2\mathbb{E}\int_t^T \langle \overline{Y}_s^n - Y_s^n, d\overline{K}^n - dK_s^n\rangle \\
\leq \;& (2\mu+1)\,\mathbb{E}\int_t^T \left|\overline{Y}_t^n - Y_t^n\right|^2 ds + 2\beta\mathbb{E}\int_t^T \left|\overline{Y}_t^n - Y_t^n\right|^2 dG_s \\
\leq \;& C(1+\mathbb{E}\int_t^T \left|\overline{Y}_t^n - Y_t^n\right|^2 ds).
\end{aligned}$$

On conclut par le lemme de Gronwall que $\overline{Y}_t^n = Y_t^n$ et $M_t^n = \widetilde{M}_t^n$, $0 \leq t \leq T$. □

**Lemme 5.2.2.** *Sous les hypothèses* $(\boldsymbol{D1}) - (\boldsymbol{D2})$, *la familles de processus* $(Y^{\varepsilon,n}, M^{\varepsilon,n}, K^{\varepsilon,n})_n$ *converge uniformement en* $\varepsilon \in (0,1]$ *en probabilité vers la famille des processus* $(Y^\varepsilon, M^\varepsilon, K^\varepsilon)$

*Démonstration.* En vertue de l'étape 1 de la preuve du Lemme 5.2.1

$$\sup_\varepsilon \sup_n \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t^{\varepsilon,n}|^2 + \int_0^T |Z_s^{\varepsilon,n}|^2 ds + \int_0^T |Y_s^{\varepsilon,n}|^2 dG_s^\varepsilon + |K_T^{\varepsilon,n}|^2) < +\infty \tag{5.6}$$

Ensuite

$$\lim_n \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \left|(Y_t^{\varepsilon,n} - h(t,X_t^\varepsilon))^-\right|^2) = 0 p.s.$$

En effet sachant que les fonctions $f_n$ et $g_n$ définies par

$$\begin{aligned}
f_n(t,X^\varepsilon,y,z) &= f(t,X^\varepsilon,y,z) + n(y - h(t,X_t^\varepsilon))^- \\
g_n(t,X^\varepsilon,y) &= g(t,X^\varepsilon,y) + n(y - h(t,X_t^\varepsilon))^-
\end{aligned}$$

sont croissantes, le théorème de comparaison montre que la suite de processus $Y^{\varepsilon,n}$ est croissante où $(Y_t^{\varepsilon,n}, Z_t^{\varepsilon,n})$ est la solution de l'EDSR généralisée associée à $(\xi, f_n, g_n)$. Par conséquent elle converge vers un processus progressivement mesurable $\overline{Y}^\varepsilon$ et le Lemme 5.2.1, celui de Fatou et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue entrainent respectivement que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} \left|\overline{Y}_t^\varepsilon\right|^2) < C,$$

$$\lim_n \mathbb{E} \int_0^T |Y_t^{\varepsilon,n} - \overline{Y}_t^{\varepsilon}|^2 dt = 0.$$

D'autre part $\left\{(\widetilde{Y}_t^{n,\varepsilon} \widetilde{Z}_t^{n,\varepsilon}),\, 0 \leq t \leq T\right\}$ étant l'unique solution de l'EDSR

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_t^{\varepsilon,n} &= l(X_T^{\varepsilon}) + \int_t^T f(s,X_s^{\varepsilon},\widetilde{Y}_s^{\varepsilon,n})ds + \int_t^T g(s,X_s^{\varepsilon},\widetilde{Y}_s^{\varepsilon,n})dG_s^{\varepsilon} \\ &\quad + n\int_t^T \left(h\left(s,X_s^{\varepsilon}\right) - \widetilde{Y}_s^{\varepsilon,n}\right)(ds + dG_s^{\varepsilon}) - \int_t^T \widetilde{Z}_s^{\varepsilon,n} dW_s, \end{aligned}$$

le théorème de comparaison implique

$$\widetilde{Y}_t^{\varepsilon,n} \leq Y_t^{\varepsilon,n},\ p.s$$

Soit $\nu$ un temps d'arrêt vérifiant $0 \leq \nu \leq T$; si on applique la formule d'Itô à $e^{-n(G_{t-\nu}+t-\nu)}\widetilde{Y}_t^n$ on trouve

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_\nu^n &= e^{-n\left(G_{T-\nu}^{\varepsilon}+T-\nu\right)} l(X_T^{\varepsilon}) + \int_\nu^T e^{-n\left(G_{s-\nu}^{\varepsilon}+(s-\nu)\right)} f(s,X_s^{\varepsilon},\widetilde{Y}_s^{\varepsilon,n})ds \\ &\quad + \int_\nu^T e^{-n\left(G_{s-\nu}^{\varepsilon}+(s-\nu)\right)} g(s,X_s^{\varepsilon},\widetilde{Y}_s^{\varepsilon,n})dG_s^{\varepsilon} + n\int_\nu^T e^{-n\left(G_{s-\nu}^{\varepsilon}+(s-\nu)\right)} h\left(s,X_s^{\varepsilon}\right)(ds + dG_s^{\varepsilon}) \\ &\quad - \int_\nu^T e^{-n\left(G_{s-\nu}^{\varepsilon}+(s-\nu)\right)} \widetilde{Z}_s^{\varepsilon,n} dW_s. \end{aligned}$$

L'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_\nu$ dans chaque membre de l'égalité précédente entraine

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_\nu^n &= \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\nu}[e^{-n\left(G_{T-\nu}^{\varepsilon}+T-\nu\right)} l(X_T^{\varepsilon}) + \int_\nu^T e^{-n\left(G_{s-\nu}^{\varepsilon}+(s-\nu)\right)} f(s,X_s^{\varepsilon},\widetilde{Y}_s^{\varepsilon,n})ds \\ &\quad + \int_\nu^T e^{-n\left(G_{s-\nu}^{\varepsilon}+(s-\nu)\right)} g(s,X_s^{\varepsilon},\widetilde{Y}_s^{\varepsilon,n})dG_s^{\varepsilon} \\ &\quad + n\int_\nu^T e^{-n\left(G_{s-\nu}^{\varepsilon}+(s-\nu)\right)} h\left(s,X_s^{\varepsilon}\right)(ds + dG_s^{\varepsilon})]. \end{aligned}$$

Or on montre que

$$e^{-n\left(G_{T-\nu}^{\varepsilon}+T-\nu\right)} l(X_T^{\varepsilon}) + n\int_\nu^T e^{-n\left(G_{s-\nu}^{\varepsilon}+(s-\nu)\right)} h\left(s,X_s^{\varepsilon}\right)(ds + dG_s^{\varepsilon}) \longrightarrow l(X_T^{\varepsilon})\mathbf{1}_{\{\nu=T\}} + h\left(\nu,X_\nu^{\varepsilon}\right)\mathbf{1}_{\{\nu<T\}} p.s.$$

et dans $L^2(\Omega)$ ;

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\nu}\left\{\int_\nu^T e^{-n\left(G_{s-\nu}^{\varepsilon}+(s-\nu)\right)} f(s,X_s^{\varepsilon},\widetilde{Y}_s^{\varepsilon,n})ds \right. \\ &\quad \left. + \int_\nu^T e^{-n\left(G_{s-\nu}^{\varepsilon}+(s-\nu)\right)} g(s,X_s^{\varepsilon},\widetilde{Y}_s^{\varepsilon,n})dG_s^{\varepsilon}\right\} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{Y}_{\nu}^{\varepsilon,n} & \longrightarrow & l(X_T^{\varepsilon})\mathbf{1}_{\{\nu=T\}} + h(\nu,X_{\nu}^{\varepsilon})\,\mathbf{1}_{\{\nu<T\}} \\ n & \longrightarrow & +\infty \end{array}$$

dans $L^2(\Omega)$ et

$$\overline{Y}_{\nu}^{\varepsilon} \geq h(\nu,X_{\nu}^{\varepsilon}) \quad p.s. \tag{5.7}$$

L'application du théorème de section (voir *Dellacherie et Meyer* [23] page 220) à l'inégalité (5.7) donne $\overline{Y}_t^{\varepsilon} \geq h(t,X_t^{\varepsilon})$ $\;0 \leq t \leq T$ $p.s;$ et $(Y_t^{\varepsilon,n} - h(t,X_t^{\varepsilon}))^- \downarrow 0,\;\; 0 \leq t \leq T,\ p.s.$ En vertue du théorème de Dini cette convergence est uniforme en $t$ et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue conclut puisque
$(Y_t^{\varepsilon,n} - h(t,X_t^{\varepsilon}))^- \leq (h(t,X_t^{\varepsilon}) - Y_t^{\varepsilon,0})^+ \leq |h(t,X_t^{\varepsilon})| + |Y_t^{\varepsilon,0}|$.
Enfin il reste à prouver la convergence de la suite $(Y^{\varepsilon,n},Z^{\varepsilon,n})_n$.
Pour cela la formule d'Itô appliquée à $|Y_t^{\varepsilon,n} - Y_t^{\varepsilon,m}|^2$ implique

$$\begin{aligned} & |Y_t^{\varepsilon,n} - Y_t^{\varepsilon,m}|^2 + \int_t^T |Z_s^{\varepsilon,n} - Z_s^{\varepsilon,m}|^2\,ds + 2\,|\beta| \int_t^T |Y_s^{\varepsilon,n} - Y_s^{\varepsilon,m}|^2\,dG_s^{\varepsilon} \\ \leq\;& 2\mu \int_t^T |Y_s^{\varepsilon,n} - Y_s^{\varepsilon,m}|^2\,ds + 2\int_t^T (Y_s^{\varepsilon,n} - h(s,X_s^{\varepsilon}))^- dK_s^{\varepsilon,n} \\ & +2\int_t^T (Y_s^{\varepsilon,m} - h(s,X_s^{\varepsilon}))^- dK_s^{\varepsilon,m} - \int_t^T (Y_s^{\varepsilon,n} - Y_s^{\varepsilon,m})(Z_s^{\varepsilon,n} - Z_s^{\varepsilon,m})dW_s \end{aligned} \tag{5.8}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\int_t^T |Z_s^{\varepsilon,n} - Z_s^{\varepsilon,m}|^2\,ds \;\leq\;& C\mathbb{E}\int_t^T |Y_s^{\varepsilon,n} - Y_s^{\varepsilon,m}|^2\,ds + 2\mathbb{E}\int_t^T (Y_s^{\varepsilon,n} - h(s,X_s^{\varepsilon}))^- dK_s^{\varepsilon,n} \\ & +2\mathbb{E}\int_t^T (Y_s^{\varepsilon,m} - h(s,X_s^{\varepsilon}))^- dK_s^{\varepsilon,m}. \end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{E}\int_t^T (Y_s^{\varepsilon,n} - h(s,X_s^{\varepsilon}))^- dK_s^{\varepsilon,n} + \mathbb{E}\int_t^T (Y_s^{\varepsilon,m} - h(s,X_s^{\varepsilon}))^- dK_s^{\varepsilon,m} \longrightarrow 0,$$

donc

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}\displaystyle\int_0^T |Z_s^{\varepsilon,n} - Z_s^{\varepsilon,m}|^2\,ds & \longrightarrow & 0 \\ n,m & \longrightarrow & +\infty. \end{array}$$

D'autre part l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy appliquée à (5.8) donne

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}|Y_t^{\varepsilon,n}-Y_t^{\varepsilon,m}|^2+2|\beta|\,\mathbb{E}\int_0^T|Y_s^{\varepsilon,n}-Y_s^{\varepsilon,m}|^2\,dG_s^{\varepsilon})\\
\le\;& 2\mu\mathbb{E}\int_0^T|Y_s^{\varepsilon,n}-Y_s^{\varepsilon,m}|^2\,ds+\mathbb{E}\int_0^T(Y_s^{\varepsilon,n}-h(s,X_s^{\varepsilon}))^-dK^{\varepsilon,m}\\
&+\mathbb{E}\int_0^T(Y_s^{\varepsilon,m}-h(s,X_s^{\varepsilon}))^-dK^{\varepsilon,n}+2\int_0^T|Z_s^{\varepsilon,n}-Z_s^{\varepsilon,m}|^2\,ds.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left\{\sup_{0\le t\le T}|Y_t^{\varepsilon,n}-Y_t^{\varepsilon,m}|^2+\mathbb{E}\int_0^T|Z_s^{\varepsilon,n}-Z_s^{\varepsilon,m}|^2\,ds\right.\\
&\left.+\int_0^T|Y_s^{\varepsilon,n}-Y_s^{\varepsilon,m}|^2\,dG_s^{\varepsilon}\right\}\\
\longrightarrow\;& 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(Y^{\varepsilon,n},Z^{\varepsilon,n})$ est de Cauchy dans le Banach $\mathbb{L}$ des processus progressivement mesurables vérifiant

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}|Y_t|^2+\int_0^T|Y_s|^2\,dG_s+\int_0^T|Z_s|^2\,ds)<+\infty$$

et y admet une limite $(\overline{Y}^{\varepsilon},\overline{Z}^{\varepsilon})$. Sachant

$$K_t^{\varepsilon,n}=Y_0^{\varepsilon,n}-Y_t^{\varepsilon,n}-\int_t^T f(s,X_s^{\varepsilon},Y_s^{\varepsilon,n})ds-\int_t^T g(s,X_s^{\varepsilon},Y_s^{\varepsilon,n})dG_s^{\varepsilon}+\int_t^T Z^{\varepsilon,n}dW_s,$$

et

$$\overline{K}_t^{\varepsilon}=\overline{Y}_0^{\varepsilon}-\overline{Y}_t^{\varepsilon}-\int_t^T f(s,X_s^{\varepsilon},\overline{Y}_s^{\varepsilon})ds-\int_t^T g(s,X_s^{\varepsilon},\overline{Y}_s^{\varepsilon})dG_s^{\varepsilon}+\int_t^T \overline{Z}_s^{\varepsilon}dW_s,$$

les l'hypothèses $(\mathbf{D1})-(\mathbf{D2})$, l'inégalité de Burkholder-Gundy-Davis et le théorème de la convergence dominée de Lebesgue,
entrainent

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T}\left|K_t^{\varepsilon,n}-\overline{K}_t^{\varepsilon}\right|^2)\;&\longrightarrow\;0\\
n\;&\longrightarrow\;+\infty
\end{aligned}$$

où $(\overline{K}_t^{\varepsilon})$ est un processus croissant vérifiant $\overline{K}_0^{\varepsilon}=0$. De plus étant donné que $(Y^{\varepsilon,n},Z^{\varepsilon,n},K^{\varepsilon,n})$ converge en probabilité vers $(\overline{Y}^{\varepsilon},\overline{Z}^{\varepsilon},\overline{K}^{\varepsilon})$, la mesure $dK^{\varepsilon,n}$ tend vers $d\overline{K}^{\varepsilon}$ faiblement et

$$\begin{aligned}
\int_0^T(Y_s^{\varepsilon,n}-h(s,X_s^{\varepsilon}))dK_s^{\varepsilon,n}\;&\longrightarrow\;\int_0^T(Y_s^{\varepsilon}-h(s,X_s^{\varepsilon}))d\overline{K}^{\varepsilon}\\
n\;&\longrightarrow\;+\infty.
\end{aligned}$$

Le chapitre 3 montre que$\int_0^T \left(\overline{Y}_s^\varepsilon - h\left(s,X_s^\varepsilon\right)\right) d\overline{K}_s^\varepsilon = 0$ et le passage à la limite en $n$ dans l'équation (5.2) donne

$$\begin{aligned}\overline{Y}_t^\varepsilon &= \xi + \int_t^T f\left(s,X_s^\varepsilon,\overline{Y}_s^\varepsilon\right) ds + \int_t^T g\left(s,X_s^\varepsilon,\overline{Y}_s^\varepsilon\right) dG_s \\ &\quad - \int_t^T \overline{Z}_s^\varepsilon dW_s + \overline{K}_T^\varepsilon - \overline{K}_t^\varepsilon;\end{aligned}$$

d'où $\overline{Y}^\varepsilon = Y^\varepsilon$, $\overline{Z}^\varepsilon = Z^\varepsilon$ et $\overline{K}^\varepsilon = K^\varepsilon$ grâce à l'unicité de la solution. □

**Lemme 5.2.3.** *Les hypothèses* $(\boldsymbol{D1}) - (\boldsymbol{D2})$ *étant satifaites, la famille de processus* $\left(Y^n,M^n,K^n\right)_n$ *converge en probabilité vers* $(Y,M,K)$*.*

*Démonstration.* La preuve est identique à celle du Lemme 5.2.2. il suffit de remplacer $\left(X^\varepsilon,G^\varepsilon,S^\varepsilon\right)$, $\left(Y^{\varepsilon,n},M^{\varepsilon,n},K^{\varepsilon,n}\right)$ et $\left(\overline{Y}^\varepsilon,\overline{M}^\varepsilon,\overline{K}^\varepsilon\right)$ respectivement par $(X,G,S)$, $\left(Y^n,M^n,K^n\right)$ et $\left(\overline{Y},\overline{M},\overline{K}\right)$. □

**Preuve du Théorème 5.2.1**

Les lemmes 5.2.1, 5.2.2 et 5.2.3 et la Proposition 5.1.1 permettent de conclure que $\left(X^\varepsilon,G^\varepsilon,Y^\varepsilon,M^\varepsilon,K^\varepsilon\right)$ converge en loi vers $(X,G,Y,M,K)$ dans le sens défini plus haut.□

**Corollaire 5.2.1.** *En tenant compte des conditions du Théorème* 5.2.1, $\{Y_0^\varepsilon\}$ *converge vers* $Y_0$.

*Démonstration.* $Y_0^\varepsilon$ étant deterministe,

$$Y_0^\varepsilon = \mathbb{E}\left\{l\left(X_T^\varepsilon\right) + \int_0^T f\left(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon\right) ds + \int_0^T g\left(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon\right) dG_s^\varepsilon + K_T^\varepsilon\right\}.$$

Si on pose

$$B_\varepsilon = l\left(X_T^\varepsilon\right) + \int_0^T f\left(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon\right) ds + \int_0^T g\left(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon\right) dG_s^\varepsilon + K_T^\varepsilon,$$

alors

$$\begin{aligned}\sup_\varepsilon \mathbb{E}\left|B_\varepsilon\right|^2 &\leq C\left\{\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^\varepsilon\right|^{2p} + \int_0^T \left|X_t^\varepsilon\right|^{2p}(ds + dG_s)\right)\right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}\left(1 + \int_0^T \left|Y_s^\varepsilon\right|^2 (ds + dG_s) + \left|K_T^\varepsilon\right|^2\right)\right\} \\ &< +\infty\end{aligned}$$

grâce au Lemme 5.2.1 et à l'hypothèse (5.1). D'autre part sachant que $B_\varepsilon$ converge en loi vers

$$l\left(X_T\right) + \int_0^T f\left(s,X_s,Y_s\right) ds + \int_0^T g\left(s,X_s,Y_s\right) dG_s + K_T = B,$$

et à cause de son uniforme intégrabilité

$$\mathbb{E}(B_\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{E}(B).$$

Or $\mathbb{E}(B) = Y_0$; donc

$$Y_0^\varepsilon \longrightarrow Y_0.$$

□

## 5.3 Homogénéisation des classes d'EDP

Cette section applique les résultats précédents aux EDP.

### 5.3.1 Homogénéisation des EDP semi-linéaires avec condition aux limites de type Neumann non linéaire

Soit $u^\varepsilon$ et $u$ les solutions respectives des EDP

$$\begin{cases} \min\left(u^\varepsilon(t,x) - h(t,x),\right. \\ \left.-\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) - (L^\varepsilon u^\varepsilon)(t,x) - f(t,x,u^\varepsilon(t,x))\right) = 0, \\ (t,x) \in [0,T] \times \Theta, \\ \Gamma^\varepsilon u^\varepsilon(t,x) + g(t,x,u^\varepsilon(t,x)) = 0, \ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Theta, \\ u^\varepsilon(0,x) = l(x), \, x \in \overline{\Theta}. \end{cases} \tag{5.9}$$

et

$$\begin{cases} \min\left(u(t,x) - h(t,x),\right. \\ \left.-\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - Lu(t,x) - f(s,x,u(t,x))\right) = 0, \\ (t,x) \in [0,T] \times \Theta, \\ \Gamma u(t,x) + g(t,x,u(t,x)) = 0, \ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Theta, \\ u(0,x) = l(x), \, x \in \overline{\Theta}. \end{cases} \tag{5.10}$$

**Théorème 5.3.1.** *Sous les conditions du Théorème* 5.2.1 $u^\varepsilon(t,x)$ *converge vers* $u(t,x)$ *pour tout* $[0,T] \times \Theta$.

*Démonstration.* Considérons $\{(X_t^{x,\varepsilon},G_t^{x,\varepsilon}) : 0 \leq t \leq T\}$ et $\{(X_t^x,G_t^x) : 0 \leq t \leq T\}$ les processus de diffusion définis à la section 5.1, ayant pour valeur initiale $\in \Theta$ et $\{(Y_t^{x,\varepsilon},Z_t^{x,\varepsilon},K_t^{x,\varepsilon}) : 0 \leq t \leq T\}$ et $\{(Y_t^x,Z_t^x,K_t^x) : 0 \leq t \leq T\}$ les solutions respectives des EDSR généralisées à réflexion normale

$$\begin{aligned} Y_t^{x,\varepsilon} &= l\,(X_T^{x,\varepsilon}) + \int_t^T f(s,X_s^{x,\varepsilon},Y_s^{x,\varepsilon})ds + \int_t^T g(s,X_s^{x,\varepsilon},Y_s^{x,\varepsilon})dG_s^{x,\varepsilon} \\ &\quad - \int_t^T Z_s^{x,\varepsilon}dW_s + K_T^{x,\varepsilon} - K_t^{x,\varepsilon} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y_t^x &= l\,(X_T^x) + \int_t^T f(s,X_s^x,Y_s^x)ds + \int_t^T g(s,X_s^x,Y_s^x)dG_s^x \\ &\quad - \int_t^T Z_s^x dW_s + K_T^x - K_t^x. \end{aligned}$$

Conformément au Chapitre 3, les fonctions $u^\varepsilon$, $u : \mathbb{R}_+ \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ respectivement définies par $u^\varepsilon(t,x) = Y_0^{x,\varepsilon}$ et $u(t,x) = Y_0^x$ sont les solutions de viscosité respectives des EDP (5.9) et (5.10). L'application du corollaire 5.2.1 achève la démonstration. □

### 5.3.2 Application aux solutions des EDP dans les espaces de Sobolev

Cette sous section est destinée au résultat d'homogénéisation des solutions des EDP semi-linéaires avec obstacle $h$ dans un espace de Sobolev (voir [8]). Pour cela considérons $u^\varepsilon$ et $u$ les solutions respectives des EDP réfléchies avec condition aux limites de type Neumann non linéaire suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min\left(u^\varepsilon(t,x) - h(t,x),\right. \\ \left. -\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) - L^\varepsilon u^\varepsilon(t,x) - F(t,x,\alpha^\varepsilon(t,x),u^\varepsilon(t,x))\right) = 0, \\ (t,x) \in [0,T] \times \Theta \\ \Gamma^\varepsilon u^\varepsilon(t,x) + H(t,x,u^\varepsilon(t,x)) = 0, \;\; (t,x) \in [0,T] \times \partial\Theta \\ u^\varepsilon(0,x) = l(x),\; x \in \overline{\Theta}, \end{array} \right. \tag{5.11}$$

et

$$\begin{cases} \min\left(u(t,x) - h(t,x)\,,\right. \\ \left. -\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - (Lu)(t,x) - F(t,x,\alpha(t,x),u(t,x))\right) = 0, \\ (t,x) \in [0,T] \times \Theta \\ \Gamma u(t,x) + H(t,x,u(t,x)) = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Theta \\ u(0,x) = l(x)\,,\ x \in \overline{\Theta}, \end{cases} \tag{5.12}$$

où

$$F(s,x,\alpha,y) = f(s,x,y) + \alpha \mathbf{1}_{\{y=h(s,x)\}} f^-(s,x,y)$$

et

$$H(s,x,\alpha,y) = g(s,x,y) + \alpha \mathbf{1}_{\{y=h(s,x)\}} g^-(s,x,y)\,.$$

Les hypothèses étant identiques, les EDSR généralisées à réflexion normale

$$\begin{aligned} Y_t^\varepsilon &= l(X_T^\varepsilon) + \int_t^T f(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon)\,ds + \int_t^T g(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon)\,dG_s - \int_t^T Z_s^\varepsilon dW_S + K_T^\varepsilon - K_t^\varepsilon, \\ Y^\varepsilon &\geq h(.,X^\varepsilon) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y_t &= l(X_T) + \int_t^T f(s,X_s,Y_s)\,ds + \int_t^T g(s,X_s,Y_s)\,dG_s - \int_t^T Z_s dW_S + K_T - K_t, \\ Y &\geq h(.,X)\,; \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} K_t^\varepsilon &= \int_0^t \alpha^\varepsilon(s,X_s^\varepsilon)\, \mathbf{1}_{\{Y_s^\varepsilon = h(s,X_s^\varepsilon)\}} f^-(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon)\,ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha^\varepsilon(s,X_s^\varepsilon)\, \mathbf{1}_{\{Y_s^\varepsilon = h(s,X_s^\varepsilon)\}} g^-(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon)\,dG_s^\varepsilon \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K_t &= \int_0^t \alpha(s,X_s)\, \mathbf{1}_{\{Y_s = h(s,X_s)\}} f^-(s,X_s,Y_s)\,ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha(s,X_s)\, \mathbf{1}_{\{Y_s = h(s,X_s)\}} g^-(s,X_s,Y_s)\,dG_s \end{aligned}$$

admettent des solutions uniques respectives $(X^\varepsilon,G^\varepsilon,Y^\varepsilon,Z^\varepsilon,\alpha^\varepsilon)$, $(X,G,Y,Z,\alpha)$. Ensuite on a le résultat suivant;

**Théorème 5.3.2.** *Sous les hypothèses précédentes la famille de processus* $(X^\varepsilon,G^\varepsilon,Y^\varepsilon,Z^\varepsilon,\alpha^\varepsilon)$ *converge en loi vers* $(X,G,Y,Z,\alpha)$ *dans*
$\mathbb{C}([0,T],\Theta) \times \mathbb{C}_+([0,T],\mathbb{R}_+) \times \mathbb{D}([0,T],\mathbb{R}^2) \times \mathbb{C}_+([0,T],\mathbb{R})$. *En outre,* $Y_0^\varepsilon \longrightarrow Y_0$ *dans* $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* On approxime le terme de la réflexion par

$$\begin{aligned} K_t^{\varepsilon,n} &= \int_0^t \alpha^{\varepsilon,n}(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon) f^-(s,X_s^\varepsilon,Y_s^{\varepsilon,n})\,ds \\ &\quad + \int_0^t \alpha^{\varepsilon,n}(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon) g^-(s,X_s^\varepsilon,Y_s^{\varepsilon,n})\,dG_s^\varepsilon; \end{aligned}$$

$\alpha_s^{\varepsilon,n}(s,X_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon) = \phi_n(Y_s^{\varepsilon,n})\,\alpha^\varepsilon(s,X_s^\varepsilon)$, où $\phi_n \in C^\infty$ tel que $0 \le \phi_n \le 1$ et

$$\phi_n(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } |y - h(s,X_s^\varepsilon)| \le \frac{1}{2n} \\ 0 \text{ si } |y - h(s,X_s^\varepsilon)| \ge \frac{2}{2n}. \end{cases}$$

Les arguments de la Section 2 donnent le résultat car $f_n(y) = \phi_n(y) f^-(y)$ et $g_n(y) = \phi_n(y) g^-(y)$ sont des fonctions décroisantes. Par suite en vertu du théorème de la convergence dominée on a

$$\lim_n \mathbb{E} \int_0^T |Y_t^n - Y_t|^2\,dt = 0.$$

□

L'application de ce résultat à l'homogénéisation dans le sens de Sobolev (voir Bally et *al*) donne

**Théorème 5.3.3.** *Sous les conditions du Théorème* 5.3.2, $u^\varepsilon(t,x)$ *la solution faible de l'EDP (5.11) converges vers* $u(t,x)$ *la solution faible de l'EDP (5.12)*

*Démonstration.* Suivant la démarche de [7] $u^\varepsilon(t,x) = Y_0^{t,x,\varepsilon}$, alors les arguments de la sous Section et le Théorème 5.3.2, prouvent le résultat. □

# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons établi des résultats d'existence et d'unicité de différentes types d'EDSR avec des applications à l'appui. Ces résultats prolongent d'autres antérieurs. Cependant on pourrait se poser certaines questions. Par exemple au chapitre 3 le drift est localement lipschitzien en $y$ mais globalement en $z$. Il serait intéressant de regarder le cas où il est aussi localement lipschitzien en $z$. D'autre part au chapitre 4 et 5 aussi bien les estimations que les solutions de l'EDSR sont obténues dans l'espace $L^2$. Pourrait-on généraliser ces estimations et résultats à l'espace $L^p$?

# Bibliographie


[1] A. Aman, A. Elouaflin and M. N'zi, Generalized backward stochastic differential equation with barrier and application, *Preprint.*(2003)

[2] Aman A. and N'zi M., Backward stochastic differential equations with oblique reflection and local Lipschitz drift. *Journal of Appl. Math. and Stoch. Anal.* **16:4**,(2003).

[3] I. Babuska, Solution of interface problem by homogenization ,I, II, III, *SIAM J. Math. Anal.* **7**: 603-634, 635-6645 (1976); **8**: 923-937 (1974).

[4] Bahlali, K. Existence and uniqueness of solutions for BSDE's with locally Lipschitz coefficient. *Electronic Comm. Probab.* **7**, 169-179, (2002).

[5] Bahlali, K. Backward stochastic differential equations with locally Lipschitz coefficient. *C.R.A.S. Paris, Série I*, **33**, 481-486, (2001).

[6] Bahlali, K. , Eddahbi, M. and Essaky, E. BSDE associated with Lévy processes and application to PDEIE. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* **16(1)**, 1-17, (2003).

[7] Bally V., Caballero M.E, Fernandez B. El Karoui N., Reflected BSDE's, PDE's and variational inequality. *INRIA, Rapport de recherche* **n°4455**, (2002).

[8] Barles G. Lesigne E., SDE, BSDE and PDE. In "Backward Stochastic Differential Equations", *N.El Karoui and L. Mazlik, editors, Pitman Research Notes in Math. series*, **364**, *Longman*, (1997).

[9] A. Bensoussan, J.L. Lions and G.C. Papanicolaou, Boundary layers and homogenization of transport processses, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **15**: 53-157 (1979).

[10] A. Bensoussan, J.L. Lions and G.C. Papanicolaou, Asymptotic analysis for periodic structures, *North-Holland, Amsterdam*, (1978)

[11] Berger M. and Mizel V, Volterra equations with Itô integrals **I.***J. Integral Eqn. 2*, 187-245, (1980).

[12] Berger M. and Mizel V, Volterra equations with Itô integrals **II.***J. Integral Eqn. 2*, 319-337, (1980).

[13] P. Billinsgsley, convergence of probability measure, Willey, (1968).

[14] Bismut J. M. An introductory approch to duality in stochastic control. *SIAM Rev.*, **20**, 62-78, (1978).

[15] Bismut J. M. Conjugate convex function in optimal stochastic control. *J. Math. Anal. Apl.* **44**, 384-404, (1973).

[16] R. Burkdahn, Y. Hu, S. Peng, Probabilistic approach to homogenization of viscocity solutions of parabolic PDEs, *Nonlinear Differential Equation Appl.* **6**. 395-411, (1999).

[17] Crandall M.G., Lions P.L., Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Sac.*, **277**. 1-42, (1983).

[18] Cox J., Ingersoll J., Ross S., An temporal general equilibrium model of asset prices. Econometrica. **53**, 353-384, (1985).

[19] M. Crandall, H. Ichii, P. L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. soc.*, **27**, 1-67, (1992).

[20] Cvitanic J. and Karatzas I. Backward stochastic differntial equation with refection and Dynkin game. *Annals Probab.* **24:4**, (1996), 2024-2056.

[21] Cvitanic J and Ma J, Hedging option for a large investor and Forward-Backward SDE's. *The Annals of Applied Probability* **6**, 370-398, (1996).

[22] Cvitanic J and Ma J, Reflected Forward-backward stochastic differential equations and obstacle problem with boundary condition, *Journal of Appl. Math. and Stoch. Anal* **14**, 113-138, (2001).

[23] Dellacherie C and Meyer P A, Probabilités et Potentiel. *I-IV. Hermann, Paris.* (1975).

[24] Duffie D., Huang C., Stochastic production-exchange equilibria. *Research. Graduate School of Business, Stanford University*, **974**, (1989)..

[25] El Karoui N., Kapoudjian C., Pardoux E., Peng S. and Quenez M. C. Reflected solutions of backward SDE's, and related obstacle problems for PDE's, *Annals Probab.* **25:2**, 702–737, (1997).

[26] El Karoui N., Peng S. and Quenez M. C. Backward stochastic differential equation in finance. *Mathematical finance.* **7**, 1-71, (1997).

[27] Essaky E. H., Bahlali K. and Ouknine Y. Reflected backward stochastic differential equation with jumps and locally Lipschitz coefficient, *Random Operators and Stochastic Equations*, **10:4**, 335-350, (2002).

[28] Essaky E H, Modeste N'zi and Ouknine Y, Reflected BSDE's and viscosity solution of multivalued PDE's with nonlinear Neumann boundary condition, *submitted.*

[29] Essaky E. H., Bahlali K. and Ouknine Y. Reflected backward stochastic differential equation with jumps and locally monotone coefficient,

[30] G. Gaudron, E. Pardoux, EDSR, convergence en loi et homogéonéisation d'EDP parabolique sémilinéaire,*Ann. Inst. Henry Poincaré, Probabilités-statistiques*, **37**,1-40, (2001).

[31] Gegout-Petit A. and Pardoux E. Equations différentielles stochastiques retrogrades refléchies dans un convexe. *Stochastics Stochastics Rep.* **57**, 111-128, (1996).

[32] Hamadène, S. Multi-dimensional BSDE's with uniformly continuous coefficients. *Bernoulli* **9(3)**, 517-534, (2003).

[33] Hamadène, S. Equations différentielles stochastiques rétrogrades, le cas localement lipschitzien. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **32(5)**, 645-660, (1996).

[34] Hamadène S. and Lepeltier J. P. Zero-sum stochastic differential games and BSDEs. *Systems and Control Letters*, **24**, 259-263, (1995).

[35] Hamadène S., Lepeltier J. P. and Matoussi A. Double barrierr reflected backward sde's with continuous coefficients. In *Backward Stochastic Differential Equations. Pitman Research Notes in Mathematic Series* **364**, (1997).

[36] Hamadène S. and Ouknine Y. Reflected backward stochastic differential equations with jumps and random obstacle. *Electronic Journal of Probab.*, 8:2, 1-20, (2002).

[37] Hu Y.,Peng S., Adapted solution of backward stochastic evolution equation. *Stoch. Anal. Appl.* **9**, 445-459, (1991)

[38] A. Jakubowski, A non-Skorohod topology on the Skorohod space, *Electronic J. of Prob.* **24**, 1-21, (1997).

[39] Kolodh A. M., On the existence of solutions of Stochastic Volterra integral equations. *Theory Random Processes*, **11**, 51-57 (in Russian), (1983).

[40] S. M. Kozlov, Averaging differential operators with almost periodic rappidly oscillating coefficients, *Sov. Math. Dokl.* **18** (5): 1323-1326, (1977).

[41] T. G. Kurtz, Random time changes and convergence in distribution under Meyer-Zheng conditions, *Annals of Prob.* **19**, 1010-1034, (1991).

[42] A. Lejay, Approche probabiliste de l'homogenéisation des operateur sous forme divergence en milieux périodique. *Thèse de doctorat* (Marseille, 2000).

[43] Lepeltier, J.P. ans San Martin, J. Backward stochastic differential equations with continuous coefficients. *Statist. Probab. Lett.* **32 (4)**, 425-430, (1997).

[44] Lin J., Adapted solution of backward stochastic nonlinear Volterra integral equation. *Stoch. Anal. Appl.* **20** (1), 165-183, (2002).

[45] Lions P L and Szinitmann A S, Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. *Comm. Pure and Appl. Math.*, **37**, 511-537, (1984).

[46] Lions P L, Optimal control of diffusion processes of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, part II: Viscosity solutions and uniqueness, *Comm. P.D.E.* **8**, 1229-1276, (1983).

[47] Lions P L, Optimal control of diffusion processes of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, part III,nonlinear PDE and Appl., *Séminaire du Collège de France*,**V**, *Pitman*, (1985).

[48] Matoussi A. Reflected solutions of BSDEs with continuous coefficient. *Statistic and Probability Letters* **34**, 347-354, (1997).

[49] P. A Meyer and W. A. Zheng, Tightness criteria for laws of semimartingales, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **20**, 353-372, (1984).

[50] N'zi M. and Ouknine Y. Backward stochastic differential equations with jumps involving a subdifferential operator. *Random Oper. Stoch. Equations*, **8:4**,(2000), 305-414.

[51] N'zi, M. and Ouknine, Y. Backward stochastic differential equations with continuous coefficients. *Random Operators and Stochastic Equations,* **5(5)**, 59-68, (1997).

[52] Ouknine Y, Reflected BSDE with jumps, *Stochastic and Stochastic reports,* **65**, 111-125, (1999).

[53] Y. Ouknine and E. Pardoux, Generalized BSDEs, weak convergence an homogenization of semilinear PDEs with non linear boundary condition, *Proc. Conf. Ascona 99, Progress in Probability* **52,** 229-242, Birkäuser.

[54] Pardoux E, Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic PDEs of second order. *In L Decreuseufond, J. Gjerde, B. Oksendal and A.S Ustunel, Editors, Stochastic analysis and related topics. The Geilo workshop, Birkhaüsser,* (1996).

[55] Pardoux E, BSDE, weak convergence and homogenization of semilinear PDE's, *in Nonlinear Analys, Differential Equations and control, F. H. Clarke & R. J. Stern* **Eds** ., pp. 503-549, *Kluwer Acad. Pub.* (1999).

[56] Pardoux E. and Peng S, Adapted solution of backward stochastic differential equation. *Syst. cont. Lett.* **4**, 55-61, (1990).

[57] Pardoux E. and Peng S. Backward stochastic differential equation and quasilinear parabolic partial differential equations. In: *B. L.Rozovski, R. B. Sowers (eds). Stochastics partial equations and their applications. Lect. Notes control Inf. Sci.* **176**, 200-217, Springer, Berlin, (1992)

[58] Pardoux E, Peng S, Some backward SDEs with non-Lipschitz coefficients. *Proc. conf. Metz.* To appear.

[59] Pardoux E., Protter P., Stochastic Volterra equations with anticipating coefficients. *Ann. Probab.* **18** (4), 1635-1655, (1990).

[60] Pardoux E. and Rascanu A. Backward SDE's with maximal monotone operator. *Stoch. Proc. Appl.* **76:2**, 191-215(1998)

[61] Pardoux E. and Veretennikov A. Y., averaging of backward SDEs, with application to semi-linear PDEs. *Stochastic and Stochastic report* **60**, 255-270, (1997).

[62] Pardoux E, Zhang S, generalized BSDEs and nonlinear Neumann boundary value problems. *Proba. Theory and Rel. Fields* **110**, 535-558, (1998).

[63] Peng, S. Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations. *Stochastics* **37**, 61-74, (1991).

[64] Protter P., Volterra equations driven by semimartingales. *Ann. Proba.* **13**, (2), 519-530, (1985).

[65] Ramasubramanian S. Reflected backward stochastic differential equations in an orthant. *Proc. Indian. Acada. Sci. (Math. Sci.)* **112:2**, 347-360, (2002).

[66] Saisho Y, Stochastic differential equation for multidimensional domains with reflecting boundary. *Probab. Theory Rel. Fields* **74**, 455-477, (1987).

[67] Shashiahvili M. The Skorohod oblique reflection problem in a convex polyhedron. *Georgian Math. J.* **3**, 153-176, (1996).

[68] Tanaka H., Homogenization of differential processes with boundary conditions, *in stochastic Analys and Applications, Adv. Proba. Related Topics* **7**, 411-437, M Dekker, (1984).

[69] Zheng Z., Talay D.., Reflected BSDEs with random terminal time and applications part I: Existence and uniqueness. *submitted for publication* (2002).