Université d'Abomey-Calavi, Bénin
The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (Italy)
Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques

Ordre n°: 27/2006

Thèse *

Présentée pour l'obtention du grade de
Docteur ès Sciences

Option: Mathématiques

Spécialité: Analyse Non Linéaire

par

Liamidi Arèmou LEADI [1]

Titre:

PROBLEME ASYMETRIQUES ET ELLIPTIQUES RELATIFS AU P-LAPLACIEN

Jury:

Président: Prof. Mary Teuw NIANE (Univ. Gaston Berger, LANI, Sénégal)

Rapporteurs: Prof. Jean-Pierre EZIN (Univ. d'Abomey Calavi, Bénin)
Prof. Jean-Pierre GOSSEZ(ULB, Bruxelles, Belgique)
Prof. François de THELIN(UPS, MIP, Toulouse, France)

Examinateurs: Prof. Jean LUBUMA(Université de Pretoria, South Africa)

Superviseurs:

Prof. Jean-Pierre GOSSEZ (Université Libre de Bruxelles, Belgique)
Prof. Jean-Pierre EZIN (IMSP, Université d'Abomey-Calavi, Bénin)

* *Thèse financée par The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP, Italy) et la Coopération Interuniversitaire Francophone (CUD-CIUF, Belgique)*.

1. E-mails: leadiare@imsp-uac.org, leadiare@yahoo.com

Présentation

Ce travail porte sur l'opérateur p-laplacien à travers quelques problèmes asymétriques et symétriques. Dans une première partie on s'intéresse à un système asymétrique avec poids dans un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ sous des conditions aux limites mêlées (Dirichlet et Neuman) et dans $\mathbb{R}^N$ tout entier. Il s'agit pour nous de prouver l'existence d'une valeur propre positive non principale. Différentes propriétés de cette valeur propre particulière sont établies.

Comme application à cette étude, on s'interesse au spectre de Fučik. Une première courbe de ce spectre est construite. Dans le Chapitre 1, on démontre que le comportement asymptotique de la première courbe du spectre de Fučik depend seulement de l'intersection du support des poids avec le bord Dirichlet du domaine consideré. Par contre dans le Chapitre 2 (cas non borné), ce comportement asymptotique depend du caractère borné ou non du support de ces poids.

La seconde partie est consacrée à l'étude du principe du maximum pour un système elliptic coopératif avec poids. Dans cette partie nous généralisons les résultats de [14] (cas du p-laplacien dans un domaine borné en l'absence de poids) et de [34] (cas du laplacien avec poids dans un domaine non borné).

L'opérateur p-laplacien est un modèle d'opérateurs elliptiques quasi-linéaires qui permet de modéliser des phénomènes physiques tels que les problèmes de: fluides non-Newtoniens, réaction-diffusion, élasticité non-linéaire, glacéologie, extraction de pétrole, astronomie, courant à travers les milieux poreux, etc... (voir par exemple [11], [12], [24]).

Ce travail est organisé en quatre chapitres. Chacun des chapitres est précédé d'une introduction détaillée. Les deux premiers chapitres sont consacrés à la construction d'une première valeur propre positive non principale et plusieurs propriétés de cette première valeur propre sont établies. Nous étudions ensuite le spectre de Fučik dans un domaine borné et dans $\mathbb{R}^N$ tout entier. Une première courbe de ce spectre est construite et son comportement asymptotique étudié. Dans le troisième chapitre, nous démontrons l'existence de deux suites de valeur propre pour le p-laplacien en utilisant des théorèmes de type minimax. Dans le chapitre 4, nous nous sommes interessés à la validité du principe du maximum pour un système non linéaire elliptique coopératif avec poids. Enfin dans un chapitre annexe, nous rappellons certains résultats préliminaires connus dans la littérature.

Remerciements

Au terme de ce travail, il m'est agréable d'exprimer ma profonde reconnaissance à "International Centre for Theorical Physics" (ICTP, Italy), à la Coopération Interuniversitaire Francophone (CIUF-CUD, Belgique), à l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP) et au Laboratoire d'Analyse Non Linéaire de l'Université Libre de Bruxelles, pour les moyens matériels et financiers mis à ma disposition durant mes années de recherche.

Au Professeur Jean-Pierre Ezin, directeur de l'IMSP et co-directeur de ce travail, j'exprime ma profonde gratitude pour l'attention qu'il a toujours manifesté à mon égard et l'aide efficace qu'il m'a apporté tout au cours de mes recherches.

C'est le lieu de remercier vivement le Professeur Jean-Pierre Gossez, de m'avoir accueilli dans le laboratoire d'Analyse Non Linéaire du département de Mathématiques de l'ULB, et pour la suggestion et la conduite des sujets traités dans ce travail. Dans ce même laboratoire, j'ai béneficié de l'attention des professeurs Enrique Lami Dozo et Paul Godin ainsi que des collègues Humberto Ramos Quoirin, Abderrhamane Senoussaoui et Tuhan Turna. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements.

Mes vibrants remerciements au Dr Aboubacar Marcos de l'IMSP pour les suggestions et les remarques pertinentes qu'il n'a cessé de me prodiguer depuis mes travaux de D.E.A. Il a fait preuve d'une grande disponibilité et d'une patience sans limite à mon endroit. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie très sincèrement le Professeur François de Thélin (Université Paul Sabatier, Toulouse) pour les remarques et suggestions enrichissantes apportées à ce travail.

Je tiens également à remercier les Professeurs Jean Lubuma, François de Thélin, Mary Teuw Niane, Jean-Pierre Ezin et Jean-Pierre Gossez d'avoir bien voulu participer au jury et d'examiner le présent travail.

Les Professeurs J. Tossa, J. B. Ourou Chabi, N. M. Hounkonnou ainsi que les docteurs C. S. Ogouyandjou, L. Todjihoundé, J. Hounsou, Y.B. Kouagou, tous membres du corps enseignants de l'IMSP, ont contribué de manière efficiente à ma formation. A tous je dis un grand merci.

Ma profonde gratitude à mes parents pour leur patience, le soutien moral et les efforts consentis.

Mes remerciements vont également à l'endroit de mes collègues étudiants-chercheurs de l'IMSP, pour le lien fraternel et affectif qui a toujours existé entre nous.

Je ne saurai terminé sans avoir une pensée à tout ceux qui dans l'anonymat, m'ont soutenu moralement dans la réalisation de ce travail. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude.

A mes parents

A mon frère Moustapha LEADI et sa femme Zaenab, A mes chers neveux...

Introduction générale

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. On considère le problème aux limites de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) + h(x) \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.1}$$

Dans le cas où $f(u) = \lambda u$ avec $h \in L^2(\Omega)$ on peut étudier le problème (0.1) en utilisant l'alternative de Fredholm. Ce qui conduit à distinguer les cas où λ est ou non une valeur propre du laplacien. Dans le cas général, il est bien connu que le comportement asymptotique des quotients

$$\frac{f(s)}{s} \text{ et } \frac{2F(s)}{s^2} \quad \text{où} \quad F(s) = \int_0^s f(t)dt,$$

quand $s \to \pm\infty$ joue un rôle important pour l'étude de la solvabilité de (0.1). Ainsi en notant par

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq .... \tag{0.2}$$

la suite des valeurs propres du laplacien et en posant

$$a := \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t}, \; b := \lim_{t\to-\infty} \frac{f(t)}{t}, \tag{0.3}$$

A. Ambrosetti et G. Prodi (cf. [6]) ont montré que, pour des non-linéarités f qui ont un comportement asymétrique à l'infini, c'est à dire si $a < b$ et

$$a < \lambda_1 < b < \lambda_2,$$

alors (0.1) admet une, deux ou aucune solution suivant la valeur de $\int_\Omega h\varphi_1 dx$, où $\varphi_1 > 0$ est la fonction propre associée à λ_1.

E. Dancer et S. Fučik observèrent dans les années 70 que la résolution de problèmes de type (0.1) avec des non-linéarités asymétriques, au lieu de dépendre du spectre du laplacien, dépend fortement de la position du couple (a,b) par rapport à l'ensemble Σ des couples de réels (α,β) pour lesquels le problème

$$\begin{cases} -\Delta u &= \alpha u^+ - \beta u^- \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.4}$$

admet au moins une solution non triviale, où $u^\pm := \max\{\pm u,0\}$. L'ensemble Σ est appelé spectre de Fučik et généralise la notion usuelle de spectre.

Plusieurs auteurs s'étaient intéressés à l'étude de ce spectre notamment sa description, ses propriétés topologiques et géométriques et des phénomènes de résonnance et de non-résonnance.

On peut citer quelques résultats:

(i). S. Fučik et E. Dancer montrèrent que dans le cas $N = 1$, Σ est composé de deux droites verticale et horizontale, et d'une suite d'hyperboles passant par les couples (λ_k,λ_k), $k \geq 2$ (où λ_k est définie par (0.2)).

(ii). T. Gallouët et O. Kavian (cf. [45]) ont montré quant à eux que si λ_k, avec $k \geq 2$, est simple alors la restriction du spectre de Fučik au carré $(]\lambda_{k-1},\, \lambda_{k+1}[)^2$ est exactement la réunion de deux courbes (pouvant être confondues) continues, strictement décroissantes et passant par $(\lambda_k,\, \lambda_k)$. Ces deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

(iii). Des résultats similaires ont été établis par B. Ruf ([61]) en utilisant des méthodes différentes.

(iv). C. Magalhães (cf. [58]) a généralisé l'étude faite par T. Gallouët et O. Kavian (dans le cas où λ_k est de multiplicité supérieure ou égale à 1) pour un carré contenant plusieurs valeurs propres et a montré que le spectre de Fučik restreint à ce carré est délimité supérieurement et inférieurement par deux courbes continues strictement décroissantes.

L'approche qui nous interesse le plus, pour l'étude du problème (0.4), est celle qui a été abordée dans [42] où il est montré l'existence d'une première courbe non triviale de Σ, en utilisant une méthode variationnelle. Cette dernière étude peut être étendue à un opérateur différentiel non nécessairement linéaire. Dans [23] on considère l'opérateur p-laplacien défini par $\Delta_p u := div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, avec $1 < p < +\infty$. (Lorsque $p = 2$, le 2-laplacien est le laplacien usuel). Plus précisement on étudie dans [23] le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \alpha(u^+)^{p-1} - \beta(u^-)^{p-1} \ \text{ dans } \ \Omega \\ u &= 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.5}$$

Le spectre de Fučik est, comme précédemment, défini comme l'ensemble Σ_p des $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels (0.5) admet au moins une solution non triviale. En notant $\lambda_1(p)$ la première valeur propre positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda|u|^{p-2}u \ \text{ dans } \ \Omega \\ u &= 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.6}$$

il est clair que les droites $\lambda_1(p) \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \lambda_1(p)$ font partie de Σ_p. L'existence d'une première courbe $\mathcal{C}$ de Σ_p a été prouvée dans [23] et son comportement asymptotique y a été également étudié.

Dans [9], l'étude du problème (0.5) a été généralisée par l'introduction de deux poids. Le spectre de Fučik avec poids noté $\Sigma = \Sigma(m,n)$ y est défini comme l'ensemble des couples $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \alpha m(x)(u^+)^{p-1} - \beta n(x)(u^-)^{p-1} \ \text{ dans } \ \Omega \\ u &= 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{0.7}$$

admet une solution non triviale. D'une manière analogue à l'étude faite dans [23] il a été prouvé l'existence d'une première courbe dans $\Sigma(m,n)$. Il a aussi eté montré dans [9] que le comportement asymptotique de cette courbe dépend de l'intersection des supports des poids m et n avec le bord du domaine. Une étude semblable a été menée récemment dans [10] pour le cas des conditions aux limites de Neumann et contrairement aux résultats obtenus dans [9], le comportement asymptotique de la première courbe ne dépend pas des supports des poids. Dans [9] (et aussi dans [10]) l'étude du problème (0.7) est ramenée à l'étude du problème aux valeurs propres (0.8) suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda[m(x)(u^+)^{p-1} - n(x)(u^-)^{p-1}] \ \text{ dans } \ \Omega \\ u &= 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.8}$$

L'objectif principal de cette thèse est d'étendre l'étude des problèmes (0.8) et (0.7) à d'autres conditions aux limites que celles de Dirichlet ou Neumann et à des domaines non bornés.

Dans un premier temps on suppose que le domaine borné Ω est régulier et admet un bord $\partial\Omega$ qui est partitionné en deux fermés disjoints non vides Γ_1,Γ_2 qui sont des variétés C^1 de dimension $(N-1)$. Sur Γ_1 on considère les conditions aux limites de Dirichlet et sur Γ_2 celles de Neumann, c'est à dire on considère le problème mêlé suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda[m(x)(u^+)^{p-1} - n(x)(u^-)^{p-1}] \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \, \partial u/\partial\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases} \tag{0.9}$$

Le choix de ce cas de conditions aux limites mixtes (mêlées), est motivé par le fait qu'il n'y a aucun résultat de régularité des fonctions propres; lequels résultats sont nécessaires dans l'application du principe de maximum de Vazquez [66]. Aussi ce travail est la continuité de nos travaux de mémoire de DEA dans lequel nous avons considéré les problèmes mêlés en dimension $N = 1$ et le travail de Gossez et Marcos [48] pour le laplacien.

Malgré cette absence de résultats de régularité, nous avons démontré l'existence d'une première valeur propre positive non principale pour le problème (0.9) en utilisant, comme dans [9], une version du théorème du "col de la montagne" sur une variété de classe C^1 (cf. Proposition 4 de [9] et Proposition 2.1 de [21]). Plusieurs propriétés de cette première valeur propre sont aussi établies: continuité, stricte monotonicité, homogénéité, ... Comme application, nous prouvons l'existence d'une première courbe non triviale du spectre de Fučik avec poids pour le problème correspondant. Nous avons aussi montré que le comportement asymptotique de cette première courbe dépend seulement de l'intersection des supports des poids avec la partie Γ_1 du bord $\partial\Omega$.

On s'intèresse ensuite au cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$. On considère à cet effet les problèmes suivants

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda[m(x)(u^+)^{p-1} - n(x)(u^-)^{p-1}] \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{0.10}$$

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \alpha m(x)(u^+)^{p-1} - \beta n(x)(u^-)^{p-1} \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{0.11}$$

Ici, du fait que le domaine d'étude est non borné, certaines difficultés techniques vont apparaître dans la vérification de la condition de Palais-Smale (PS) à cause de la perte de compacité dans certaines injections de Sobolev. Faisons aussi remarquer que la présence de poids indéfinis est nécessaire à cause des résultats de non existence relatifs à la première valeur propre positive principale (voir [3, 16]).

Comme précédemment, il s'agit d'abord de montrer l'existence d'une première valeur propre positive non principale de (0.10). Cela étant fait, on peut en déduire l'existence d'une première courbe du spectre de Fučik pour le problème (0.11). Nous avons aussi montré que le comportement asymptotique de cette première courbe dépend du caractère borné ou non des supports des poids m et n. Diverses difficultés nouvelles apparaissent dans cette étude, difficultés liées principalement au caractère non borné du domaine (perte de compacité dans certaines immersions de Sobolev, etc ...).

Nous abordons ensuite l'étude des propriétés nodales des solutions de (0.11). D'après le théorème de Courant, si u_{λ_k} désigne une fonction propre associée à la valeur propre λ_k définie en (0.2) alors u_{λ_k} possède au plus k domaines nodaux. Comme conséquence u_{λ_2} possède exactement deux domaines nodaux. La démonstration usuelle du théorème de Courant utilise principalement la propriété dite de continuation unique dont jouit le laplacien, propriété qui n'est pas connue à l'heure actuelle pour le p-laplacien lorsque $p \neq 2$. Néanmoins nous avons montré que cette propriété marche partiellement pour la deuxième valeur propre de (0.10) et pour les éléments (α,β) de la première courbe du spectre de Fučik pour le problème (0.11), en utilisant la version du lemme de Hopf utilisée dans [66]. Notons qu'une telle étude avait été faite dans [22] pour le problème (0.5) et dans [60] pour le cas du problème (0.7).

Enfin pour finir avec le cas non borné, on considère le problème (symétrique) aux valeurs propres

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 \ \text{ quand } \ |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{0.12}$$

Pour étudier (0.12), on utilisera une approche variationnelle (comme dans le cas des autres problèmes) en considérant la fonctionnelle $J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx$ restreinte à l'ensemble des fonctions u telles que $\int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx = 1$. Nous avons montré l'existence de deux suites de valeurs propres pour (0.12). La construction de ces suites nécessite la vérification de la condition de Palais-Smale. Une fois cette condition vérifiée, on peut facilement appliquer divers résultats connus de la théorie des points critiques. Ces deux suites sont connues dans le cas d'un domaine borné: la première est dite de type Ljusternik-Schnirelman et la seconde de type Drábek-Robinson. Une première étude avait été faite dans le cas $\mathbb{R}^N$ dans [5, 52] où est démontrée, sous des hypothèses un peu plus forte sur les poids, l'existence d'une suite de valeurs propres de type Ljusternik-Schnirelman. Notre contribution consiste ici en la construction sur $\mathbb{R}^N$ de la suite de type Dràbek-Robinson.

Dans la dernière partie de ce travail, nous avons consideré un système non linéaire elliptique coopératif dans $\mathbb{R}^N$. Des conditions nécessaires et suffisantes seront données pour garantir l'application du principe du maximum. Ces conditions seront ensuite utilisées pour montrer l'existence de solutions positives. Notons que ce type de systèmes a fait l'objet de beaucoup de travaux de recherche auparavant dans le cas d'un domaine borné pour le p-laplacien en l'absence de poids (cf. [13, 14, 32, 33]) et le laplacien avec poids dans $\mathbb{R}^N$ (cf. [34]). Dans ce travail, nous traitons du cas général du p-laplacien avec poids dans $\mathbb{R}^N$.

Table des matières

Chapitre 1

Un problème mêlé asymétrique avec poids

1.1 Introduction

Le présent travail concerne le problème aux valeurs propres suivant, sous les conditions aux limites mêlées :

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = & \lambda[m(x)(u^+)^{p-1} - n(x)(u^-)^{p-1}] \text{ dans } \Omega \\ u & = & 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = & 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné de classe C^1($N \geq 1$) dont le bord $\partial\Omega$ est formé de deux sou-ensembles fermés disjoints non vides Γ_1 et Γ_2, avec Γ_1 et Γ_2 deux variétés de classe C^1 et de dimension $N-1$, $u^{\pm} = \max\{\pm u,0\}$, $\Delta_p := div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, avec $1 < p < \infty$, est l'opérateur p-Laplacien, ν est la normale extérieure au bord $\partial\Omega$, m et n sont les poids indéfinis tels que :

$$m,n \in L^r(\Omega) \text{ avec } r > \frac{N}{p} \text{ si } N \geq p \text{ et } r = 1 \text{ si } N < p.$$

On dira que λ est une valeur propre pour (1.1) si cette dernière admet au moins une solution non triviale, laquelle solution est alors appelée fonction propre.

La raison fondamentale qui nous motive à considérer un problème tel que (1.1) vient de l'étude du spectre de Fučik avec poids qui est défini comme étant l'ensemble Σ des couples de réels (α,β) pour lesquels le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = \alpha m(x)(u^+)^{p-1} - \beta n(x)(u^-)^{p-1} \text{ dans } \Omega \\ u & = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases} \tag{1.2}$$

admet au moins une solution non triviale. Il est évident que la droite de pente s ($s \in \mathbb{R}$) passant par l'origine coupe Σ au point (α, $\beta = s\alpha$) si et seulement si α est une valeur propre pour (1.1) avec les poids m et sn. Lorsque $m(x) \equiv n(x)$, (1.1) devient un problème classique correspondant à un problème symétrique aux valeurs propres avec poids. L'étude de (1.1) avec ses différentes applications, a été faite dans [8] pour le cas des conditions aux limites de Dirichlet c'est à dire pour le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda[m(x)(u^+)^{p-1} - n(x)(u^-)^{p-1}] \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.3}$$

En supposant $m^+ \not\equiv 0, n^+ \not\equiv 0$, on désigne par $\nu_1(m)$ (resp. $\nu_1(n)$) la première valeur propre positive du p-laplacien avec poids m (resp. n) sous les conditions aux limites de Dirichlet. On note ψ_m (resp. ψ_n) la fonction propre normalisée associée à $\nu_1(m)$ (resp. $\nu_1(n)$). Il est évident que $\nu_1(m)$ et $\nu_1(n)$ sont des valeurs propres principales de (1.3) avec fonctions propres associées ψ_m et $-\psi_n$ respectivement. Le problème (1.3) admet de solutions ne changeant pas de signe si et seulement si λ est l'une des valeurs propres principales $\nu_1(m)$, $\nu_1(n)$, $\nu_{-1}(m)$, $\nu_{-1}(n)$ (voir la fin de l'introduction). Il a été prouvé dans [8] que (1.3) admet une valeur propre positive non principale qui est de plus la première valeur propre positive plus grande que $\nu_1(m)$ et $\nu_1(n)$. Cette valeur propre particulière notée $c(m,n)$ a été construite par l'application du théorème du "col de la montagne" appliquée à la fonctionnelle $A(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p dx$ restreinte à la variété de classe C^1

$$\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : B_{m,n} = \int_\Omega [m(u^+)^p + n(u^-)^p]dx = 1\}.$$

Le réel $c(m,n)$ joue le même rôle que la deuxième valeur propre usuelle et plusieurs de ses propriétés ont été établies dans [8] à savoir : continuité, homogénéité, stricte monotonie, etc...

Notre objectif dans le présent travail est d'adapter les méthodes et les approches utilisées dans [8] pour le cas des conditions aux limites mêlées. La suite de ce travail se présente comme suit. L'existence de la première valeur propre positive non principale $c(m,n)$ sera prouvée dans la Section 2 en utilisant la version du théorème du "Col de la montagne" pour une fonctionnelle de classe C^1 restreinte à une variété de classe C^1. Nous indiquerons de façon brève ses différentes propriétés dans la Section 4. Comme application, dans la Section 5 nous étudierons le spectre de Fučik avec poids. Remarquons que dans cette section nous avons obtenu à peu près les mêmes résultats que dans [8] à la seule différence que pour le cas de petites dimensions ($N < p$), le comportement asymptotique de la première courbe du spectre de Fučik dépend de l'intersection du support des poids avec le bord Γ_1 au lieu de $\partial\Omega$ tout entier.

Pour conclure cette introduction, rappelons certaines propriétés du spectre du p-Laplacien avec poids que nous utiliserons dans la suite. Ces différentes propriétés sont bien connues dans la littérature. Pour le cas où le domaine Ω est régulier et le poids m est indéfini voir [7], pour le cas $m \equiv 1$ voir [48, 57] et pour le cas $m \geq 0$ et $m \not\equiv 0$ voir [1, 26] .

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $m \in L^r(\Omega)$ avec $r > \frac{N}{p}$ si $N \geq p$ et $r = 1$ si $N < p$. On suppose $m^+ \not\equiv 0$ et on considère le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda m(x)|u|^{p-2}u \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases} \tag{1.4}$$

La première valeur propre $\mu_1(m)$ de (1.4) est défini par :

$$\mu_1(m) = \mu_1(m,\Omega) = \min\{\int_\Omega |\nabla u|^p dx; u \in E(\Omega) \text{ et } \int_\Omega m|u|^p dx = 1\}$$

où

$$E(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ au sens de la trace}\}.$$

En utilisant la régularité de Ω on peut montrer que $(\int_\Omega |\nabla v|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $E(\Omega)$ équivalente à celle de $W^{1,p}(\Omega)$.

En adaptant les résultats connus dans la littérature pour le cas des conditions aux limites de Dirichlet ou Neumann (Voir par exemple [7, 57] pour le cas d'un poids borné, [1, 20, 65] pour le cas d'un poids non borné), on montre que $\mu_1(m) > 0$ est simple et admet une fonction propre $\phi_m = \phi(m,\Omega) \in E(\Omega) \cap C^\alpha_{loc}(\Omega)$ où $\alpha \in]0,1[$, avec $\phi_m(x) > 0$ dans Ω et $\int_\Omega m(\phi_m)^p dx = 1$. De plus on a :

$$\mu_1(m) \int_\Omega m|u|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p dx \ \ \forall\, u \in E(\Omega)$$

et on a l'égalité si $u \in E(\Omega)$ est un multiple de ϕ_m. Par ailleurs $\mu_1(m)$ est isolé dans le spectre, ce qui nous permet de définir la deuxième valeur propre $\mu_2(m)$ comme étant:

$$\mu_2(m) := \min\{\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \text{ valeur propre de (1.4) avec } \lambda > \mu_1(m)\}.$$

Il est aussi connu dans la littérature que toute fonction propre associée à une valeur propre autre que $\mu_1(m)$ change de signe dans Ω. Dans le cas où $m^- \not\equiv 0$, la première et la seconde valeurs propres négatives sont obtenues en renversant le signe du poids m: $\mu_{-1}(m) = -\mu_1(-m)$ et $\mu_{-2}(m) = -\mu_2(-m)$.

1.2 Construction d'une valeur propre positive non triviale

Nous supposerons dans la suite que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $m,n \in L^r(\Omega)$ avec $r > \dfrac{N}{p}$ si $N \geq p$ et $r = 1$ si $N < p$. On supposera également, sauf mention du contraire, que

$$m^+ \not\equiv 0 \text{ et } n^+ \not\equiv 0 \text{ dans } \Omega. \tag{1.5}$$

Le but de ce paragraphe est de rechercher les valeurs propres positives non principales de (1.1). Il est évident que (1.1) avec $\lambda > 0$ admet de solutions non triviales ne changeant pas de signe si et seulement si $\lambda = \mu_1(m)$ ou $\lambda = \mu_1(n)$. La caractérisation variationnelle de (1.1) donne

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega [m(x)(u^+)^{p-1} - n(x)(u^-)^{p-1}] v dx \quad \forall\, v \in E(\Omega). \tag{1.6}$$

En prenant $v = u^+$ ou $v = u^-$ dans (1.6) on montre que si (1.1) admet de solution faible non triviale et changeant de signe (avec $\lambda > 0$) alors $\lambda > \max\{\mu_1(m), \mu_1(n)\}$.

Pour rechercher de telles valeurs propres positives nous allons utiliser une approche variationnelle en considérant les fonctionnelles

$$A(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p dx \ \text{ et } \ B_{m,n} := \int_\Omega [m(u^+)^p + n(u^-)^p] dx$$

qui sont de classe C^1 sur $E(\Omega)$ et sont différentiables au sens de Fréchet. On cherche les points et les valeurs critiques de la restriction $\tilde{A}$ de la fonctionnelle A à la variété

$$M_{m,n} := \{u \in E(\Omega),\, B_{m,n} = 1\}.$$

Remarquons que 1 est une valeur régulière de $B_{m,n}$ et que les fonctions propres ϕ_m et $-\phi_n$ sont deux éléments de $M_{m,n}$ qui ne changent pas de signe. Par des arguments de régularisation utilisant l'hypothèse (1.5), on peut construire $u \in C_c^\infty(\Omega)$ changeant de signe telle que $\int_\Omega m(u^+)^p > 0$ et $\int_\Omega n(u^-)^p > 0$, et par conséquent $u/(B_{m,n}(u))^{1/p}$ appartient à $M_{m,n}$.

Remarque 1.1. *La condition (1.5) assure l'existence de valeurs propres positives. Par ailleurs si $m^- \not\equiv 0$ et $n^- \not\equiv 0$ alors on montre également l'existence de valeurs propres négatives. D'où si m et n changent de signes alors on aura des valeurs propres des deux signes.*

Par la règle du multiplicateur de Lagrange (voir chapitre Annexe), $u \in M_{m,n}$ est un point critique pour $\tilde{A}$ si et seulement si il existe un réel α pour lequel on a : $\tilde{A}'(u) = \alpha B'_{m,n}(u)$, c'est à dire

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \alpha \int_\Omega [m(u^+)^{p-1} - n(u^-)p - 1] v dx \quad \forall\, v \in E(\Omega). \tag{1.7}$$

Donc u est une solution faible de (1.1). De plus en prenant $v = u$ dans (1.7) on montre que $\alpha = \tilde{A}(u)$ et par conséquent α est la valeur critique associée au point critique u. D'où la résolution du problème (1.1) revient à la recherche des points critiques et des valeurs critiques de la fonctionnelle A restreinte à la variété $M_{m,n}$.

En utilisant une minimisation globale on obtient un premier point critique. En effet pour tout $u \in M_{m,n}$ on a :

$$\begin{aligned} \tilde{A}(u) &= \textstyle\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \int_\Omega |\nabla u^+|^p dx + \int_\Omega |\nabla u^-|^p dx \\ &\geq \mu_1(m) \left[\textstyle\int_\Omega m(u^+)^p dx\right]^+ + \mu_1(n) \left[\textstyle\int_\Omega m(u^-)^p dx\right]^+ \\ &\geq \min\{\mu_1(m),\, \mu_1(n)\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

et $\tilde{A}(u) = \min\{\mu_1(m),\, \mu_1(n)\}$ si $u = \phi_m$ ou $u = -\phi_n$. Ainsi ϕ_m ou $-\phi_n$ est un minimum global pour $\tilde{A}$ et par conséquent un point critique .

Pour trouver un second point critique de $\tilde{A}$ on utilise la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Les fonctions propres ϕ_m et $-\phi_n$ sont des minima locaux stricts pour $\tilde{A}$ avec valeurs critiques respectives $\mu_1(m)$ et $\mu_1(n)$.*

Preuve. La preuve de la Proposition 1.1 est une adaptation de celle faite dans [8]. Montrons par exemple que ϕ_m est un minimum local strict pour $\tilde{A}$. Pour cela supposons par l'absurde l'existence d'une suite (u_k) d'éléments de $M_{m,n}$ telle que: $u_k \neq \phi_m$, $u_k \to \phi_m$ dans $E(\Omega)$ et $\tilde{A}(u_k) \leq \mu_1(m)$. On a, pour k suffisamment grand, u_k change de signe. En effet comme $u_k \to \phi_m$ avec $\phi_m > 0$, alors $u_k > 0$ quelque part dans Ω. Si on suppose que $u_k \geq 0$ dans Ω, alors on aurait:

$$\tilde{A}(u_k) = \int_\Omega |\nabla u_k|^p dx > \mu_1(m) \int_\Omega m|u_k|^p dx = \mu_1(m)$$

puisque $u_k \neq \pm\phi_m$, mais ceci contredit le fait que $\tilde{A}(u_k) \leq \mu_1(m)$. Donc u_k change de signe dans Ω pour k suffisamment grand.

Par ailleurs l'hypothèse $\tilde{A}(u_k) \leq \mu_1(m)$ avec $B_{m,n}(u_k) = 1$ implique que

$$\begin{aligned}
\mu_1(m) = \mu_1(m) \int_\Omega \left[m(u^+)^p + n(u^-)^p dx\right] &\geq \int_\Omega |\nabla u_k|^p dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u_k^+|^p dx + \int_\Omega |\nabla u_k^-|^p dx \\
&\geq \mu_1(m) \int_\Omega m(u^+)^p dx + \int_\Omega |\nabla u_k^-|^p dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\mu_1(m) \int_\Omega n(u_k^-)^p dx \geq \int_\Omega |\nabla u_k^-|^p dx$$

c'est à dire que

$$\frac{1}{\mu_1(m)} \leq \frac{\int_\Omega n(u_k^-)^p dx}{\int_\Omega |\nabla u_k^-|^p dx}. \tag{1.9}$$

Puisque $u_k \to \phi_m$ alors mes$\{x \in \Omega,\, u_k^-(x) > 0\} \to 0$. On aboutit alors à une contradiction puisque le membre de droite dans (1.9) tend vers 0 quand $k \to +\infty$, d'après le lemme ci-dessous . □

Lemme 1.1. *Soit* $v_k \in E(\Omega)$ *avec* $v_k \geq_{\not\equiv} 0$ *et mes*$\{x \in \Omega,\, v_k(x) > 0\} \to 0$. *Soit* $(n_k) \in L^r(\Omega)$ *telle que* $n_k \to n$ *dans* $L^r(\Omega)$ *alors*

$$\frac{\int_\Omega n_k(v_k)^p dx}{\int_\Omega |\nabla v_k|^p dx} \to 0 \;\; \textit{quand} \;\; k \to +\infty.$$

Preuve. Posons $z_k = v_k/(\int_\Omega |\nabla v_k|^p dx)^{\frac{1}{p}}$. Alors $||z_k||_{E(\Omega)} = 1$, donc pour une sous-suite notée également z_k on a : $z_k \rightharpoonup z$ dans $E(\Omega)$ et $z_k \to z$ dans $L^{r'p}(\Omega)$ avec $z \geq 0$. De plus on a mes$\{x \in \Omega,\, v_k(x) > 0\} =$ mes$\{x \in \Omega,\, z_k(x) > 0\}$ et

$$\int_\Omega n_k(v_k)^p dx / \int_\Omega |\nabla v_k|^p dx = \int_\Omega n_k(z_k)^p dx \to \int_\Omega n(z)^p dx.$$

Si $z \equiv 0$, on a le résultat attendu. Si $z \not\equiv 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\eta = |z > \varepsilon| > 0$. On déduit alors que $\eta' = |z_k > \varepsilon/2| > \eta/2$ pour k suffisamment grand, ce qui contredit l'hypothèse $|v_k > 0| \to 0$. □

Pour trouver un troisième point critique de la fonctionnelle $\tilde{A}$, nous allons utiliser une version du théorème du "Col de la montagne" sur une variété de classe $\mathcal{C}^1$ que nous allons rappeler dans un cadre beaucoup plus général.

Soit E un espace de Banach réel et soit

$$M := \{u \in E : g(u) = 1\} \tag{1.10}$$

où $g \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$ et 1 une valeur régulière de g. Soit $f \in \mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$ et $\tilde{f}$ sa restriction à M. La différentielle de $\tilde{f}$ au point $u \in M$ a une norme notée $||\tilde{f}'(u)||_*$ qui n'est rien d'autre que la norme de la restriction de $f'(u)$ à l'espace tangent en u défini par :

$$T_u(M) = \{v \in E :< g'(u),v >= 0\}$$

où $<\ ,\ >$ désigne le crochet de dualité entre E^* et E. Un point critique de $\tilde{f}$ est un point $u \in M$ tel que $||\tilde{f}'(u)||_* = 0$ et alors $\tilde{f}(u)$ est appelé valeur critique de $\tilde{f}$ associé à u. On dit que $\tilde{f}$ satisfait la condition de Palais-Smale (ou simplement $\tilde{f}$ satisfait la condition (PS)) sur M si, pour toute suite u_k d'éléments de M telle que $\tilde{f}(u_k)$ est borné et $||\tilde{f}'(u_k)||_* \to 0$, on a (u_k) admet une sous-suite convergente. La suite (u_k) est appelée suite de (PS). Notons que (voir par exemple [67] pour plus de détails)

$$||\tilde{f}'(u)||_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} ||\tilde{f}'(u) - \lambda g'(u)||.$$

On a la proposition suivante

Proposition 1.2. *Soit u,v deux éléments de M avec $u \neq v$. On suppose que*

$$H := \{h \in \mathcal{C}([-1,1],M); h(-1) = u \text{ et } h(1) = v\}$$

est non vide. On suppose de plus que :

$$c := \inf_{h \in H} \max_{w \in h([-1,1])} f(w) \ > \ \max\{f(u),f(v)\} \tag{1.11}$$

et $\tilde{f}$ satisfait la condition (PS) sur M. Alors c est une valeur critique de $\tilde{f}$.

La Proposition 1.2 vient de l'application du Théorème 3.2 de [46] à une composante de la variété M. Notons que la preuve du Théorème 3.2 de [46] utilise un lemme de déformation sur une variété de Finsler de classe C^1. Classiquement le lemme de déformation est construit à l'aide de lignes intégrales d'un champs de vecteur pseudo-gradient de f sur M. Et comme cette construction requiert du champ de vecteurs d'être locallement continu et lipschitzien, il est nécessaire que la variété M soit au moins de classe $C^{1,1}$. Dans certaines applications la variété peut être de classe C^1 et alors soit on construit le lemme de déformation avec attention ou on utilise une approche différente pour prouver le principe de type minimax. Une démonstration directe de la Proposition 1.2 qui utilise le principe variationnel de Ekeland peut être obtenue dans [21] où on exige cependant à l'espace de Banach E d'être uniformément convexe. Ce qui est le cas de l'espace $E(\Omega)$ (ou de l'espace W du chapitre 2). Notons que dans [21] l'hypothèse géométrique est plus faible que (1.11) . Elle s'exprime par :

$$\max_{w\in h([-1,1])} f(w) > \max\{f(u)\ ;\ f(v)\}\ \ \forall\, h \in H. \tag{1.12}$$

Nous allons appliquer la Proposition (1.2) en prenant $E = E(\Omega)$, $f = A$ et $g = B_{m,n}$. Nous avons besoin, pour cela, de deux resultats préliminaires qui concernent la condition (PS) et la géométrie de $\tilde{A}$ aux voisinages de ϕ_m et $-\phi_n$.

Lemme 1.2. *La fonctionnelle $\tilde{A}$ satisfait la condition (PS) sur $M_{m,n}$.*

Preuve. Soit (u_k) une suite de (PS) d'éléments de $M_{m,n}$, c'est à dire

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_k|^p dx \quad \text{borné} \\ \displaystyle|\int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \nabla v dx| \le \varepsilon_k ||v|| \end{cases} \tag{1.13}$$

pour tout $v \in T_{u_k}(M_{m,n})$ où

$$T_{u_k}(M_{m,n}) = \{v \in E(\Omega) : \int_\Omega [m(u_k^+)^{p-1} - n(u_k^-)^{p-1}]v dx = 0\}$$

et $||,||$ désigne la norme sur $E(\Omega)$. Il est évident que pour une sous-suite, u_k converge faiblement vers un certain u dans $E(\Omega)$ et fortement dans $L^{r'p}(\Omega)$, où r' désigne le conjugué de Hölder de r. Par ailleurs en posant $a_k(w) = \int_\Omega [m(u_k^+)^{p-1} - n(u_k^-)^{p-1}]w dx$ avec $w \in E(\Omega)$, il est aisé de vérifier que $(w - a_k(w)u_k) \in T_{u_k}(M_{m,n})$. On pose alors $v = (u_k - u) - a_k(u_k - u)u_k$ dans (1.13) et en observant que $a_k(u_k - u) \to 0$ on déduit que :

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \nabla(u_k - u) dx \to 0$$

et par conséquent

$$\int_\Omega (|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla(u_k - u) dx \to 0.$$

En utilisant l'inégalité (cf. [57])

$$|\xi - \eta|^p \le c[(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta)(\xi - \eta)]^{\frac{s}{2}}[|\xi|^p + |\eta|^p]^{1-\frac{s}{2}}$$

où $(\xi,\eta) \in (\mathbb{R}^N)^2$, $c = c(p)$ et $s = 2$ si $p \ge 2$, $s = p$ si $1 < p < 2$, et l'inégalité de Hölder on montre aisément que $u_k \to u$ dans $E(\Omega)$. $\square$

Le second lemme est établi dans un cadre abstrait sur la variété $M_{m,n}$. On pourra trouver sa preuve dans [8] (cf. Lemma 6)

Lemme 1.3. *Soit* E,g,M,f *et* $\tilde{f}$ *comme dans le lemme précédent. Soit* u_0 *un minimum local strict de* $\tilde{f}$*, c'est à dire pour un certain* ε_0*, on a*

$$\tilde{f}(u_0) < \tilde{f}(u) \text{ pour tout } u \in M \text{ avec } u \neq u_0 \text{ et } ||u - u_0||_E < \varepsilon_0.$$

On suppose que $\tilde{f}$ *satisfait la condition de (PS) sur* M *. Alors pour tout* ε *tel que* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *on a:*

$$\tilde{f}(u_0) < \inf\{\tilde{f}(u); u \in M \text{ et } ||u - u_0||_E = \varepsilon\}.$$

Pour finir énonçons un autre résultat nous permettant d'utiliser la Proposition 1.2.

Lemme 1.4. *L'ensemble* Γ *défini par*

$$H := \{h \in \mathcal{C}([-1,1],M_{m,n}); h(-1) = \phi_m \text{ et } h(1) = -\phi_n\}$$

est non vide .

Preuve. Soit $u \in E(\Omega)$ tel que $\int_\Omega m(u^+)^p dx > 0$ et $\int_\Omega n(u^-)^p dx > 0$. L'existence d'une telle fonction u est possible d'après (1.5). Soit γ_1 le chemin défini sur $[0,1]$ par

$$\gamma_1(t) = tu + (1-t)u^+.$$

Ce chemin joint u à u^+. On construit un autre chemin γ_2 joignant u^+ à ϕ_m et défini par

$$\gamma_2(t) = [t(u^+)^p + (1-t)(\phi_m)^p]^{\frac{1}{p}} \quad t \in \ [0,1].$$

En utilisant le fait que $\int_\Omega m(\phi_m)^p dx > 0$, on vérifie que le chemin γ ainsi construit qui joint u à ϕ_m satisfait $B_{m,n}[\gamma(t)] > 0$ pour tout t. De la même manière on construit un chemin qui joint u à $-\phi_n$. Ainsi on obtient un chemin liant ϕ_m et $-\phi_n$ et la conclusion s'en suit. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le théorème du "Col de la montagne" énoncer dans la Proposition1.2.

Théorème 1.1. *On considère l'ensemble*

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathcal{C}([-1,1]; M_{m,n}) : \gamma(-1) = \phi_m \text{ et } \gamma(1) = -\phi_n\}.$$

Alors

$$c(m,n) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([-1,1])} \tilde{A}(u) \tag{1.14}$$

est une valeur critique de $\tilde{A}$*, avec* $c(m,n) > \max\{\mu_1(m), \mu_1(n)\}$.

1.3 Une première valeur propre positive non triviale

On a vu dans la section précédente que $\mu_1(m)$ et $\mu_1(m)$ sont les premières valeurs propres positives de (1.1). Dans la présente section nous allons montrer que la valeur propre $c(m,n)$ établie dans (1.14) est la troisième valeur propre positive de (1.1). On a le théorème suivant dont la preuve peut être aisément adaptée de celle faite dans [8] (cf. Théorème 3.1).

Théorème 1.2. *Il n'existe pas de valeurs propres comprises entre* $\max\{\mu_1(m), \mu_1(n)\}$ *et* $c(m,n)$ *pour le problème (1.1).*

En particulier si $m \equiv n$, on obtient la caractérisation variationnelle de la deuxième valeur propre du p-Laplacien avec poids sous les conditions aux limites mêlées.

Corollaire 1.1. *La deuxième valeur propre* $\mu_2(m)$ *du p-laplacien avec poids* m *est caractérisée variationnellement par:*

$$\mu_2(m) \ = \ c(m,m) := \inf_{\gamma\in\Gamma_1} \max_{u\in\gamma([-1,1])} \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

où Γ_1 *est la famille des chemins dans* $M_{m,m} = \{u \in E(\Omega) : \int_\Omega m|u|^p dx = 1\}$ *joignant* ϕ_m *à* $-\phi_m$.

1.4 Quelques propriétés de la première valeur propre positive non principale

Dans cette partie nous allons énumerer de façon brève quelques propriétés de la première valeur propre positive non principale $c(m,n)$ qui sont: la continuité, la monotonie et l'homogénéité... Tous ces résultats sont bien connus dans la littérature (cf. [8] dans le cas Dirichlet) et on peut aisément les adapter au cas présent qui nous concerne. Pour cela, donnons une petite modification de la caractérisation variationnelle de $c(m,n)$ dans (1.14) pour avoir accès à une famille plus grande de chemins dans la variété $M_{m,n}$ qui dependra moins des poids.

La proposition suivante peut être aisément prouvée en utilisant les mêmes arguments que dans [8] (cf. Proposition 21).

Proposition 1.3.

$$c(m,n) = \inf_{\gamma\in\Gamma_0} \max_{u\in\gamma([-1,1])} A(u)$$

où $\Gamma_0 = \{\gamma \in \mathcal{C}([-1,1], M_{m,n}) : \gamma(-1) \geq 0 \ \textit{ et } \ \gamma(1) \leq 0\}$.

La continuité et la monotonie de $c(m,n)$ par rapport aux poids m et n sont une conséquence directe de la Proposition 1.3.

Proposition 1.4. *Si* $(m_k,n_k) \to (m_0,n_0)$ *dans* $L^r(\Omega) \times L^r(\Omega)$ *alors* $c(m_k,n_k) \to c(m_0,n_0)$.

Proposition 1.5. *Si $m \leq \hat{m}$ et $n \leq \hat{n}$ alors $c(m,n) \geq c(\hat{m}, \hat{n})$.*

Remarque 1.2. *La monotonie obtenue dans la Proposition 1.5 n'est pas en général stricte. On a une stricte monotonie moyennant une certaine condition relative aux poids m et n d'après la proposition suivante*

Proposition 1.6. *Si $m \leq \hat{m}$ et $n \leq \hat{n}$ et si de plus on a*

$$\int_{\Omega} (\hat{m} - m)(u^+)^p dx + \int_{\Omega} (\hat{n} - mn)(u^-)^p dx > 0 \tag{1.15}$$

pour au moins une fonction propre associée à la valeur propre $c(m,n)$ alors:

$$c(m,n) \geq c(\hat{m}, \hat{n}).$$

Corollaire 1.2. *On suppose que $m \leq \hat{m}$ et $n \leq \hat{n}$. Si de plus l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i). $m < \hat{m}$ *sur* $\{x \in \Omega : m(x) > 0\}$
(ii). $n < \hat{n}$ *sur* $\{x \in \Omega : n(x) > 0\}$

alors $c(m,n) \geq c(\hat{m}, \hat{n})$.

Pour conclure cette partie remarquons que d'après la définition de $c(m,n)$ dans (1.14) on obtient que $c(m,n)$ est homogène de dégré -1 c'est à dire

$$c(sm,sn) = \frac{1}{s} c(m,n) \ \ \forall\, s > 0. \tag{1.16}$$

On a aussi une sorte de sous-homogenéité separée qui sera utilisée plus tard.

Proposition 1.7. *Si $0 < s < \hat{s}$ alors*

$$c(sm,n) > c(\hat{s}m,n) \quad \textit{et} \quad c(m,sn) > c(m,\hat{s}n). \tag{1.17}$$

1.5 Spectre de Fučik avec poids

Soit $m,n \in L^(\Omega)$ avec $r > \frac{N}{p}$ si $N \geq p$ et $r = 1$ si $N < p$. On suppose que les poids m,n vérifient la condition (1.5). Le spectre de Fučik avec poids sous les conditions aux limites mêlées est l'ensemble $\Sigma = \Sigma(m,n)$ des réels (α,β) pour lesquels le système

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = \alpha m(x)(u^+)^{p-1} - \beta n(x)(u^-)^{p-1} \ \text{ dans } \ \Omega \\ u & = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_2 \end{cases} \tag{1.18}$$

a au moins une solution non triviale, avec Γ_1 et Γ_2 deux fermés disjoints qui sont des variétés régulières de dimension $(N-1)$ partionnant le bord $\partial\Omega$ du domaine Ω.

Il est clair que Σ contient les ensembles $\{\mu_1(m)\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \{\mu_1(n)\}$. De plus si $m^- \not\equiv 0$, $n^- \not\equiv 0$ on a $\{\mu_{-1}(m)\} \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \{\mu_{-1}(n)\}$ qui sont aussi éléments de Σ. Ces droites sont constituées des couples $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels l'équation (1.17) admet de solutions non triviales ne changeant pas de signe. Notons $\Sigma^* = \Sigma^*(m,n)$ l'ensemble Σ privé de ces droites triviales. En utilisant la caractérisation variationnelle de la première propre principale liée au poids m (resp. n), pour tout $(\alpha,\beta) \in \Sigma^*$ on a

(i). Si $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$ alors $\alpha > \mu_1(m)$ et $\beta > \mu_1(n)$
(ii). Si $\alpha \geq 0$ et $\beta \leq 0$ alors $\alpha > \mu_1(m)$ et $\beta < \mu_{-1}(n)$
(iii). Si $\alpha \leq 0$ et $\beta \geq 0$ alors $\alpha < \mu_{-1}(m)$ et $\beta > \mu_1(n)$
(iv). Si $\alpha \leq 0$ et $\beta \leq 0$ alors $\alpha < \mu_{-1}(m)$ et $\beta < \mu_{-1}(n)$.

Le but de cette partie est de trouver les éléments de Σ^* qui sont dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. On a plus précisement le résultat suivant:

Théorème 1.3. *Pour tout réel $s > 0$, la droite d'équation $\beta = s\alpha$ dans le quadrant (α, β) rencontre $\Sigma^* \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. Plus précisement le premier point de cette intersection est donné par: $\alpha(s) = c(m,sn)$ et $\beta(s) = s\alpha(s) = c(m/s,n)$ où c(.,.) est donné dans (1.14).*

Preuve. Des sections 2 et 3, il résulte que si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, alors $(\alpha,\beta) \in \Sigma^*$ et est tel qu'aucun autre élément de Σ^* n'appartient au segement $[(0,0), (\alpha,\beta)[$ si et seulement si $c(\alpha m,\beta n) = 1$. Puisque d'après (1.15) $c(\alpha m,\alpha sn) = c(m,sn)/\alpha$ pour $\alpha > 0$, la conclusion s'en suit. $\square$

En faisant varier s dans $\mathbb{R}^+_*$, on obtient ainsi une première courbe $\mathcal{C} := \{(\alpha(s),\beta(s)) : s > 0\}$ dans $\Sigma^* \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. Une première propriété de cette courbe est donnée dans la proposition suivante:

Proposition 1.8.
(i). Les fonctions $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ du Théorème 1.3 sont continues.
(ii). $\alpha(s)$ est strictement décroissante et $\beta(s)$ est strictement croissante.
(iii). $\lim_{s\to 0} \alpha(s) = +\infty$ et $\lim_{s\to+\infty} \beta(s) = +\infty$.

Preuve. La continuité des fonctions $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ vient de celle de $c(m,n)$ dans (1.4), leur monotonie vient de (1.17). Pour montrer le point (iii) on suppose par l'absurde que $\alpha(s)$ est borné quand s est suffisamment petit, alors $\beta(s) = s\alpha(s) \to 0$ quand $s \to 0$. Mais ceci est absurde puisque $\beta(s) > \mu_1(n)$ pour tout $s > 0$. On utilisera les mêmes arguments pour montrer que $\beta(s) \to +\infty$ quand $s \to +\infty$. $\square$

La courbe $\mathcal{C}$ est alors une courbe de type hyperbolique dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ avec comme asymptotes $\alpha_\infty \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \beta_\infty$ où

$$\alpha_\infty := \lim_{s\to+\infty} \alpha(s) \quad \text{et} \quad \beta_\infty := \lim_{s\to 0} \beta(s).$$

La suite de cette partie sera consacrée à la détermination des valeurs limites α_∞ et β_∞. Nous nous limiterons à celle de α_∞ puisque pour trouver β_∞, il suffit d'interchanger les rôles des poids m et n. Pour cela définissons le réel suivant:

$$\bar{\alpha} := \inf\{\int_\Omega |\nabla u^+|^p dx : u \in E(\Omega), \int_\Omega m(u^+)^p dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_\Omega n(u^-)^p dx > 0\}. \tag{1.19}$$

Il est évident que $\bar{\alpha} \geq \mu_1(m)$. Rappellons aussi que le support d'une fonction mesurable $u(x)$ dans Ω est défini par

$$supp\ u := \bar{\Omega} \backslash \mathcal{O},$$

où $\mathcal{O}$ est la plus grande partie ouverte de Ω sur laquelle u s'annule presque partout.

On a la proposition suivante qui donne la valeur α_∞ et son estimation .

Proposition 1.9. *La valeur α_∞ est égale à $\bar{\alpha}$. De plus si $N \geq p$ alors $\bar{\alpha} = \mu_1(m)$. Par contre si $N < p$, alors on a $\bar{\alpha} = \mu_1(m)$ si $supp\ n^+ \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ et $\bar{\alpha} > \mu_1(m)$ si $supp\ n^+$ est compact dans Ω.*

Ainsi lorsque $N \geq p$ alors la première courbe du spectre de Fučik $\mathcal{C}$ est asymptotique aux droites $\mu_1(m) \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \mu_1(n)$. Par contre si $N < p$ le comportement asymptotique de $\mathcal{C}$ dépend des supports des poids m^+ et n^+. Notons que l'influence du support des poids sur le comportement assymptotique de la première courbe a été observée dans [2] pour le cas des équations différentielles ordinaires (cas où $p = 2$ et $N = 1$). Notons aussi que les différents cas $N \geq p$ et $N < p$ observés dans la Proposition 1.9 sont de même nature que ceux observés dans [9] pour l'étude du principe du maximum et le spectre de Fuçik du p-Laplacien avec poids sous les conditions aux limites de Neumann.

Preuve. Nous allons d'abord montrer que $\alpha_\infty = \bar{\alpha}$. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathcal{C}$ et soit u une solution non triviale de (1.2) associée à α, β, alors

$$0 < \int_\Omega |\nabla u^+|^p dx = \alpha \int_\Omega m(x)(u^+)^p dx \quad \text{et} \quad 0 < \int_\Omega |\nabla u^-|^p dx = \beta \int_\Omega n(x)(u^-)^p dx \ .$$

Ainsi on a $\alpha \geq \bar{\alpha}$, ce qui implique $\alpha_\infty \geq \bar{\alpha}$. Supposons par l'absurde que $\alpha_\infty > \bar{\alpha}$, alors il existe $u \in E(\Omega)$ telle que $\int_\Omega m(u^+)^p dx = 1$, $\int_\Omega n(u^-)^p dx > 0$ et $\bar{\alpha} \leq \int_\Omega |\nabla u^+|^p dx < \alpha_\infty \leq \alpha(s) = c(m,sn)$. Ce qui implique

$$\int_\Omega |\nabla u^+|^p dx < c(m,sn)$$

pour tout $s > 0$. Par ailleurs on a

$$\tilde{A}(\frac{u^+}{B_{m,sn}(u^+)^{\frac{1}{p}}}) = \frac{A(u^+)}{B_{m,n}(u^+)^{\frac{1}{p}}} = \int_\Omega |\nabla u^+|^p dx \ \text{ et}$$

$$\tilde{A}(\frac{-u^-}{B_{m,sn}(-u^-)^{\frac{1}{p}}}) = \frac{A(-u^-)}{B_{m,sn}(-u^-)^{\frac{1}{p}}} = \frac{\int_\Omega |\nabla u^-|^p dx}{\int_\Omega sn(u^-)^p dx}.$$

On choisit s tel que
$$\frac{\int_\Omega |\nabla u^-|^p dx}{\int_\Omega sn(u^-)^p dx} = \int_\Omega |\nabla u^+|^p dx = \mu.$$
Notre but est de construire un chemin γ qui relie ϕ_m à $-\phi_{sn}$ et pour lequel A sera en dessous du niveau μ le long du chemin ainsi construit. Pour cela on relie u à u^+ par le chemin suivant

$$\gamma_1(t) = \frac{tu + (1-t)u^+}{B_{m,sn}(tu + (1-t)u^+)^{1/p}} \quad t \in [0,1].$$

Il est aisé de montrer que le chemin γ_1 est bien défini. De plus on a $\gamma_1(t) \in M_{m,sn}$ et $\tilde{A}(\gamma_1(t)) = \mu$ pour tout $t \in [0,1]$. D'une manière analogue on joint u à $-u^-/B_{m,sn}(-u^-)^{1/p}$ par un chemin dans $M_{m,sn}$ en restant au niveau μ. La prochaine étape est de construire un autre chemin qui va relier u^+ à ϕ_m en restant en dessous du niveau μ. Une construction similaire pourra être utilisée pour joindre $-u^-/B_{m,sn}(-u^-)^{1/p}$ à $-\phi_{sn}$, et en mettant bout à bout les différents chemins construits, on obtiendra le chemin desiré reliant ϕ_m à $-\phi_{sn}$.

On considère la variété $M_m = M_{m,m}$. On a $u^+ \in M_m$. Les points critiques de la restriction de A à M_m sont les fonctions propres normalisées de $-\Delta_p$ avec poids m. Puisque u^+ ne change pas de signe et s'annule sur un ensemble de mesure positive, alors u^+ ne peut pas être un point critique de la restriction de A à M_m. On pourra alors utiliser les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 3.1 dans [8] pour construire un chemin γ_2 dans $M_{m,sn}$ reliant u^+ à ϕ_m, le long duquel A reste en dessous de μ. D'une manière analogue on relie $-u^-/B_{m,sn}(-u^-)^{1/p}$ à $-\phi_{sn}$ tout en restant en dessous du niveau μ. En mettant bout à bout ces différents chemins on obtient un chemin reliant ϕ_m à $-\phi_{sn}$ le long duquel la fonctionnelle A reste en dessous du niveau μ. Par conséquent, en utilisant la définition de $c(m,sn)$ on obtient: $c(m,sn) \leq \mu = \int_\Omega |\nabla u^+|^p dx$. Mais ce qui est absurde puisque $\int_\Omega |\nabla u^+|^p dx < c(m,sn)$. En conclusion on a $\alpha_\infty = \bar{\alpha}$.

Considerons maintenant le cas $N \geq p$ et montrons que $\bar{\alpha} = \lambda_1(m)$. Ceci sera possible si l'on montre l'existence d'une suite de fonctions admissibles dans la définition (1.19) de $\bar{\alpha}$ et qui converge vers ϕ_m. La construction de cette suite est inspirée de [9, 39, 49]. On considère la suite de fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^N$: pour $N > p$

$$a_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \geq 1/k \\ 2k|x| - 1 \text{ si } 1/2k < |x| < 1/k \\ 0 \text{ si } |x| \leq 1/2k \end{cases}$$

et pour $N = p$

$$a_k(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{k} \text{ si } |x| \geq 1/k \\ |x|^{\delta_k} - 1/k \text{ si } (1/k)^{1/\delta_k} < |x| < 1/k \\ 0 \text{ si } |x| \leq (1/k)^{1/\delta_k} \end{cases}$$

où δ_k est choisi dans $]0,1[$ tel que $(1/k)^{\delta_k} = 1 - 1/k$. Un calcul simple montre que $a_k \to 1$ dans $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ quand $k \to +\infty$. Donc pour tout $u \in E(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et pour tout $x_0 \in \Omega$

$$v_k(x) = u(x)a_k(x - x_0) \to u(x) \text{ dans } E(\Omega).$$

De plus $v_k(x) = 0$ pour tout $x \in B(x_0,\varepsilon_k)$ avec $\varepsilon_k = (1/k)^{1/\delta_k}$ si $N = p$ et $\varepsilon_k = 1/2k$ si $N > p$ Prenons $x_0 \in supp\ n^+ \cap \Omega$ et $u(x) = \phi_m(x)$ alors $v_k(x) = \phi_m(x)a_k(x - x_0) \to \varphi_m(x)$ dans $E(\Omega)$; $v_k(x) \geq 0$ et $v_k = 0$ dans $B(x_0,\varepsilon_k)$. En régularisant la fonction caractéristique de $supp(n^+) \cap B(x_0,\varepsilon_k/2)$, on obtient une fonction $w_k \in C_c^\infty(B(x_0,\varepsilon_k))$, $w_k \geq 0$ et $\int_\Omega n(w_k)^p dx > 0$. On pose

$$u_k(x) = v_k(x) - \frac{1}{k}\frac{w_k}{||w_k||_{E(\Omega)}}.$$

Alors $u_k \to \phi_m$ dans $E(\Omega)$ et après normalisation u_k est admissible dans la définition (1.19) de $\bar{\alpha}$. Ce qui implique

$$\bar{\alpha} \leq \int_\Omega |\nabla u^+|^p dx \to \int_\Omega |\nabla \varphi_m|^p dx = \lambda_1(m),$$

c'est à dire $\bar{\alpha} \leq \lambda_1(m)$. On en déduit alors que $\alpha_\infty = \bar{\alpha} = \lambda_1(m)$.

On considère maintenant le cas $N < p$. L'argument utilisé précédemment n'est plus valable dans ce cas puisque $a_k(x)$ ne converge pas uniformément vers 1 (car $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$).

On suppose d'abord que $supp\, n^+ \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$. Nous allons monter que $\bar{\alpha} = \lambda_1(m)$. On procèdera de la même manière que dans la première partie de la demonstration.

Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit on considère la boule ouverte

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_\epsilon \subset \{x \in \Omega\ ;\ dist(x\ ,\Gamma_1) < \epsilon\}$$

telle que

$$\Omega_\epsilon = Int(\Omega \setminus \tilde{\Omega}_\epsilon) = \{x \in \Omega\ ;\ dist(x\ ,\Gamma_1) > \epsilon\}$$

soit un domaine régulier et borné . Sur Ω_ϵ on considère le problème (1.4) avec condition de Neumann sur Γ_2 et celle de Dirichlet sur $\partial\Omega_\epsilon \setminus \Gamma_2$. Notons $\lambda_1(m,\Omega_\epsilon)$ la première valeur propre et par $\phi_m(\Omega_\epsilon)$ la fonction propre normalisée associée. La régularité de Ω_ϵ permet d'avoir une fonction de $E(\Omega)$ en prolongeant $\phi_m(\Omega_\epsilon)$ par 0 en dehors Ω_ϵ. On montre que $\lambda_1(m,\hat{\Omega}_\epsilon) \to \lambda_1(m)$ et $\phi_m(\Omega_\epsilon) \to \phi_m$ quand $\epsilon \to 0$. L'hypothèse $supp\ n^+ \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ permet de déduire que $n^+ \not\equiv 0$ sur $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$. En multipliant $\phi_m(\Omega_\epsilon)$ par la fonction caractéristique régularisée de $\Omega \setminus \bar{\Omega}_\epsilon$ on obtient une fonction $w_\epsilon \in C_c^\infty(\Omega \setminus \bar{\Omega}_\epsilon)$ telle que $w_\epsilon \geq 0$ et $\int_\Omega n(w_\epsilon)^p > 0$. Il s'en suit que la fonction

$$u_\epsilon := \phi_m(\Omega_\epsilon) - \frac{\epsilon w_\epsilon}{||w_\epsilon||_{E(\Omega)}}$$

converge vers $\phi_m(\Omega)$ dans $E(\Omega)$ quand $\epsilon \to 0$. En normalisant u_k on obtient une fonction admissible pour la définition de $\bar{\alpha}$ et alors $\bar{\alpha} \leq \lambda_1(m)$. Par conséquent $\bar{\alpha} = \lambda_1(m)$.

On considère enfin le cas où $supp\, n^+$ est compact, avec $N < p$. Supposons par l'absurde que $\bar{\alpha} = \lambda_1(m)$ et notons par (u_k) une suite minimisante pour $\bar{\alpha}$, c'est à dire:

$$\int_\Omega |\nabla u_k^+|^p dx \to \bar{\alpha} = \lambda_1(m), \quad \int_\Omega m(u_k^+)^p dx = 1 \text{ et } \int_\Omega n(u_k^-)^p dx > 0$$

(u_k^+) est bornée dans $E(\Omega)$. Pour une sous-suite notée encore u_k^+, u_k^+ converge faiblement dans $E(\Omega)$, fortement dans $C(\bar{\Omega})$ et dans $L^{pr'}(\Omega)$, vers un certain $u \in E(\Omega)$ qui est positif ou nul.

De plus on a $\int_\Omega |\nabla u|^p dx \leq \lambda_1(m)$ et $\int_\Omega m v^p dx = 1$. Par conséquent $u = \phi_m$ et $u_k^+ \to \phi_m$ uniformément dans $supp\ n^+$. Comme $\varphi_m \geq \varepsilon > 0$ sur le compact $supp\ n^+$ pour un certain ε, on en déduit que, pour k suffisamment grand, $u_k^+ \geq \varepsilon/2$ sur $supp\ n^+$. Par conséquent, pour k suffisamment grand, $u_k^- = 0$ sur $supp(n^+)$. Ce qui implique

$$\int_\Omega n(u_k^-)^p dx = \int_\Omega n^+(u_k^-)^p dx - \int_\Omega n^-(u_k^-)^p dx = -\int_\Omega n^-(u_k^-)^p dx \leq 0,$$

mais ceci est absurde d'après la définition de la suite (u_k). □

Donnons une autre caractérisation variationnelle de $\bar{\alpha}$ dans le cas $N < p$. On a un résultat similaire pour $\bar{\beta}$.

Proposition 1.10. *On suppose que $N < p$, alors*

$$\bar{\alpha} = \inf\{\int_\Omega |\nabla u|^p dx : u \in E(\Omega), \int_\Omega m|u|^p dx = 1 \text{ u s'annulant sur } supp\ n^+\} \tag{1.20}$$

L'infimum dans (1.20) est atteint. De plus si u est le minimiseur dans (1.20), alors u ne change pas de signe dans Ω et u s'annule au plus une fois dans $supp\ n^+ \cap \Omega$.

Pour conclure cette partie, nous allons considérer l'intersection de Σ^* avec les autres quadrants de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Proposition 1.11. *$\Sigma^* = \Sigma^*(m,n)$ rencontre $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (respectivement $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$) si et seulement si m^+ et $n^+ \not\equiv 0$, (resp. m^- et $n^- \not\equiv 0$, m^+ et $n^- \not\equiv 0$, m^- et $n^+ \not\equiv 0$).*

Preuve. La condition est nécessaire. En effet si $(\alpha, \beta) \in \Sigma^*$, alors, pour une fonction u associée, on a:

$$0 < \int |\nabla u^+|^p dx = \alpha \int m(u^+)^p dx \ \text{ et } \ 0 < \int |\nabla u^-|^p dx = \beta \int n(u^-)^p dx.$$

Pour la condition suffisante, prenons par exemple le cas $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$. On a $(\alpha, \beta) \in \Sigma^*(m,n) \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-)$ si et seulement si $(\alpha, -\beta) \in \Sigma^*(m, -n) \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. Puisque $m^+, n^- \not\equiv 0$ alors $m^+, (-n)^+ \not\equiv 0$. Par conséquent, en utilisant le Théorème 1.3 on a $\Sigma^*(m, -n) \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \not\equiv \emptyset$ et donc $\Sigma^*(m,n) \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-) \not\equiv \emptyset$. □

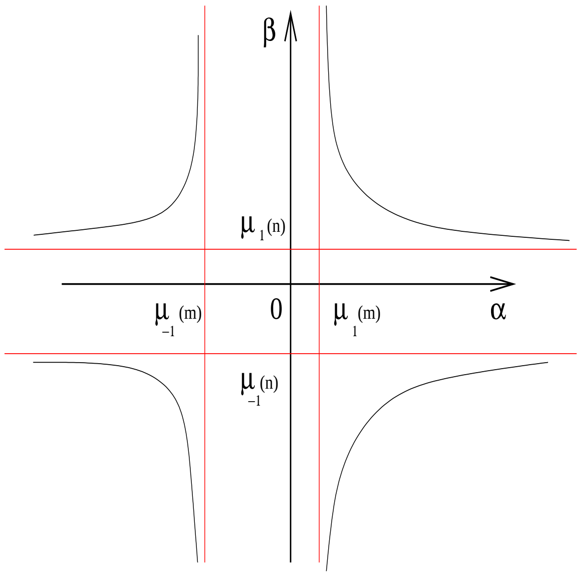
Corollaire 1.3. *Si m et n changent de signe dans Ω, alors chacun des quatre quadrants de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ contient une première courbe de Σ^*.*

Remarque 1.3. *Le résultat de la Proposition 1.9 sur le comportement assymptotique de la première courbe du spectre de Fučik dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ peut être étendue dans les autres quadrants de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si les poids m et n changent de signe.*

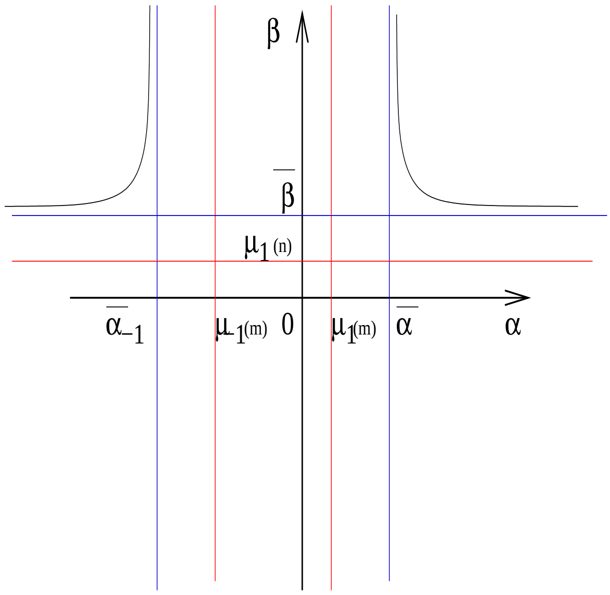
Illustrons ces résultats sur le comportement asymptotique des premières courbes dans chacun des quadrants de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Cas mele dans un borne

- $N \geq P$ ou ($N < P$ avec $\text{supp}\ n^+ \cap \Gamma_1 \neq \phi$ et $\text{supp}\ m^+ \cap \Gamma_1 \neq \phi$)



- $N < P$ et $\text{supp}\ n^+$, $\text{supp}\ m^+$ compacts



Chapitre 2

Un problème asymétrique elliptique dans $\mathbb{R}^N$ avec poids indéfinis

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier le problème asymétrique suivant

$$-\Delta_p u = \lambda[m(x)(u^+)^{p-1} - n(x)(u^-)^{p-1}] \text{ dans } \mathbb{R}^N \tag{2.1}$$

où $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ avec $1 < p < +\infty$, λ est un paramètre réel appelé valeur propre, m et n sont des fonctions poids. L'étude du problème (2.1) est relativement bien connue lorsque $p = 2$, $m \equiv n$ et correspond à la théorie des problèmes linéaires aux valeurs propres avec poids. Des hypothèses seront faites sur les poids m et n pour garantir l'existence d'une valeur propre principale pour le problème symétrique

$$-\Delta_p u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u \text{ dans } \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

Faisons remarquer que la présence de poids indéfini pour le problème symétrique (2.2) est nécessaire pour garantir l'existence de valeur propre positive principale. En effet si $m \equiv 1$ ou si m est de moyenne positive il a été montré qu'il n'existe pas de valeur propre principale positive (voir [16] pour le cas $p = 2$ et [3] pour le cas $p \neq 2$).

Il est clair que (2.1) admet une solution ne changeant pas de signe si et seulement si λ est l'une des valeurs propres principales (lorsqu'elles existent) $\lambda_1(m)$, $\lambda_1(n)$, $\lambda_{-1}(m)$, $\lambda_{-1}(n)$ du problème (2.2). (On entend par valeur propre principale, toute valeur propre associée à une fonction propre ne changeant pas de signe).

Le but de ce chapitre est de prouver l'existence d'une solution de (2.1) qui change de signe dans $\mathbb{R}^N$. Notre construction est essentiellement basée sur le théorème du "col de la montagne" (mountain pass theorem), plus précisement sa version sur une variété de classe C^1. Une telle étude avait dejà été faite dans [8] dans le cas d'un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Dans [8], il a été prouvé l'existence d'une valeur propre non triviale $c(m,n)$ en utilisant la version du théorème du "col de la montagne" sur une variété de classe C^1. Différentes propriétés de $c(m,n)$ ont été prouvées: continuité, stricte monotonie, homogénéité, ... Cette construction a été possible à cause du caractère borné du domaine, la propriété de compacité dont jouit la fonctionnelle $\int |\nabla u|^p dx$ et les injections de Sobolev en petites dimensions.

Dans le cadre de ce travail, en essayant d'adapter les mêmes approches au cas où le domaine est $\mathbb{R}^N$, la fonctionnelle correspondante est maintenant

$$J(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx$$

restreinte à la variété de classe C^1

$$M_{m,n} := \{u \in W : \ B_{m,n}(u) := \int_{\mathbb{R}^N} [m(u^+)^p + n(u^-)^p] dx = 1\},$$

où l'espace W est un espace de Sobolev avec poids sur $\mathbb{R}^N$ qui sera défini plus tard. Des difficultés techniques surviennent, comme on pouvait s'y attendre, à cause du caractère non borné du domaine d'étude, mais ces difficultés vont être progressivement surmontées en utilisant un espace de Sobolev approprié. Une de ces difficultés est la verification de la condition de Palais-Smale. Cette vérification sera faite en utilisant des techniques de [4, 52]. Une autre difficulté concerne la géometrie de la fonctionnelle J et aussi la construction de suite de fonctions poids auxilliaires pour montrer l'existence d'une valeur propre positive non principale. Enfin l'étude des propriétés de cette valeur propre a nécessité une attention particulière à cause du fait que les poids considérés ici ne sont pas en général dans un espace $L^q(\mathbb{R}^N)$. Une fois ces difficultés surmontées, nous avons prouvé l'existence d'une valeur propre positive non principale pour le problème (2.1).

Comme application de cette étude, nous avons étudié le spectre de Fučik avec poids dans $\mathbb{R}^N$. Ce dernier est défini comme étant l'ensemble Σ des couples de réels (α,β) tel que

$$-\Delta_p u = \alpha m(x)(u^+)^{p-1} - \beta n(x)(u^-)^{p-1} \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^N$$

admet au moins une solution non triviale. Nous avons montré l'existence d'une première courbe de ce spectre dans le quadrant $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et l'étude de son comportement asymptotique a été faite. Par exemple nous avons prouvé que cette première courbe est asymptotique à la droite d'équation $\alpha = \lambda_1(m)$ si $N \geq p$ ou si $N < p$ avec la condition que n^+ n'est pas à support compact (non borné). Par contre elle n'est pas asymptotique à cette droite si $N < p$ en^+ est à support compact (borné). On a un résultat similaire pour la droite $\beta = \lambda_1(n)$ par rapport au support de m^+. On généralise ces différents résultats aux autres quadrants de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ainsi si $m,n \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{N}{p}}(\mathbb{R}^N)$ avec $N > p$ et si de plus m et n changent de signe dans $\mathbb{R}^N$, alors on a l'existence d'une première courbe non triviale de Σ dans chacun des quatres quadrants de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ceci n'est pas possible si $N \leq p$ à cause des résultats de non existence de [16] lorsque $p = 2$ et de [52] lorsque $p \neq 2$. Le dernier paragraphe sera consacré à l'étude des propriétés nodales du p-Laplacien dans $\mathbb{R}^N$.

2.2 Résultats préliminaires

Tout au long de ce chapitre les poids m et n seront considérés sous la forme

$$m = m_1 - m_2 \quad n = n_1 - m_2$$

et on supposera que les hypothèses ci-dessous sont satisfaites:

(H_1) $m_1, n_1 \geq 0,\ m_1, n_1 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^s(\mathbb{R}^N)$, avec $s = N/p$ si $N > p$ et $s = N_0/p$ pour un certain entier $N_0 > p$ si $N \leq p$;

(H_2) $m_2, n_2 \geq 0, m_2, n_2 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, avec de plus $m_2(x), n_2(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^N$ si $N \leq p$;

(H_3) $m^+ \not\equiv 0\ ,\ n^+ \not\equiv 0$;

(H_4) il existe des réels $a, b > 0$ tel que : $am_2(x) \leq n_2(x) \leq bm_2(x)$ p.p. dans $\mathbb{R}^N$.

Notons que la décomposition $m = m_1 - m_2$ ne coincide pas nécessairement avec celle qui nous est familière: $m = m^+ - m^-$.

On définit l'espace de Sobolev avec poids W associé à m_2 comme étant la fermeture de $C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ par rapport à la norme

$$||u||_W := \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + m_2|u|^p)dx\right]^{1/p}. \tag{2.3}$$

Faisons remarquer que d'après l'hypothèse (H_4), l'espace de Sobolev correspondant au poids n_2 coincide avec l'espace W (plus précisement les normes sont équivalentes). Les injections suivantes sont satisfaites:

$$W \hookrightarrow D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^N) \ \text{ si } N > p.$$
$$W \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \ \text{ avec } q \in [p, +\infty[\text{ si } N = p \text{ et } q \in [p, +\infty] \text{ si } N < p.$$

Ici $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ désigne, lorsque $N > p$, la fermeture de $C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ par rapport à la norme

$$||u||_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{1/p}$$

et $p^* = Np/(N-p)$ est l'exposant critique de Sobolev. On désignera par A la constante dans l'injection de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{ps'}(\mathbb{R}^N) = L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ si $N > p$ et par B la constante dans l'injection de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{ps'}(\mathbb{R}^N)$ si $N \leq p$, où s est défini dans (H_1) et s' son conjugué de Hölder.

Remarque 2.1. *L'espace W défini ci-dessus ne dépend pas de la décomposition du poids m en $m_1 - m_2$. En effet si $m = m_1' - m_2'$ est une autre décomposition de m et si W' désigne l'espace de Sobolev associé à m_2', on a $m_2' - m_2 = m_1' - m_1 \in L^s(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent en utilisant l'inéqualité de Hölder on a:*

$$||u||^p_{W'} \leq ||u||^p_W + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |m_2' - m_2|^s dx\right)^{1/s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{ps'} dx\right)^{1/s'}.$$

En utilisant les immersions ci-dessus, on déduit aisément que les normes $||||_W$ *et* $||||_{W'}$ *sont équivalentes.*

Les solutions de (2.1) seront considérées au sens faible, c'est à dire si $u \in W$ est solution de (2.1) alors on a l'équation intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} [m(u^+)^{p-1} - n(u^-)^{p-1}]v dx \ \ \forall\, v \in W. \tag{2.4}$$

Notons que, d'après les injections de Sobolev ci-dessus, chacune des intégrales de (2.4) est bien définie. Notons aussi que si $N < p$ ou si $N > p$ avec l'hypothèse (H_4) remplacée par (H_4') (voir Remarque 2.3 plus loin), toute solution faible u de (2.1) tend vers zero quand $|x| \to +\infty$ (cf. [15] si $N < p$ et [27, 36] si $N > p$). Ceci découle des Théorèmes 1.9 et 1.10 de [27], qui utilisent notamment les estimations L^∞ de Serrin (cf. [62]).

Supposons un instant que les hypothèses (H_1), (H_3) sont satisfaites par les poids $m = m_1 - m_2$ et $n = n_1 - n_2$. On suppose de plus que les hypothèses (H_2), (H_4) sont satisfaites à l'infini, c'est à dire on remplace (H_2), (H_4) par

$(H_2)'$ $\quad m_2, n_2 \geq 0, m_2, n_2 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$;

$(H_4)_R$ $\quad$ il existe des réels $a, b, R > 0$ tels que : $am_2(x) \leq n_2(x) \leq bm_2(x)$ et $m_2(x), n_2(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ p.p. pour tout x avec $|x| \geq R$.

Dans ce cas on pose $\tilde{m}_1 = m_1 + 1_{B_R}$, $\tilde{m}_2 = m_2 + 1_{B_R}$, $\tilde{n}_1 = n_1 + 1_{B_R}$, $\tilde{n}_2 = n_2 + 1_{B_R}$. Ici 1_{B_R} désigne la fonction charactéristique de la boule centrée en 0 de rayon R. On a: $m = \tilde{m}_1 - \tilde{m}_2$, $n = \tilde{n}_1 - \tilde{n}_2$ et il est aisé de vérifier que les poids m,n avec cette nouvelle décomposition satisfont les hypothèses (H_1), (H_2),(H_3), (H_4). De plus en notant par $\tilde{W}$ l'espace de Sobolev défini ci-dessus associé au poids $\tilde{m}_2$, on a le résultat suivant

Proposition 2.1. *On a* $W \equiv \tilde{W}$*, dans le sens où les normes qui sont définies sur* W *et sur* $\tilde{W}$ *sont équivalentes.*

La preuve de cette proposition utilise le lemme suivant

Lemme 2.1. *Soit* Ω *un domaine borné régulier de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* E *un sous-ensemble de* Ω *de mesure strictement positive. Alors il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq c(||u||_{L^p(E)} + ||\nabla u||_{L^p(\Omega)})$$

pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. On suppose par l'absurde que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega |u_k|^p dx \geq k(\int_\Omega |\nabla u_k|^p dx + \int_E |u_k|^p dx).$$

On peut supposer que $\int_\Omega |u_k|^p dx = 1$ (sinon on pose $v_k = u_k/(\int_\Omega |u_k|^p dx)^{1/p}$ et on utilisera le même raisonnement). Dans ce cas on $\int_\Omega |\nabla u_k|^p dx \to 0$ et $\int_E |u_k|^p dx \to 0$. Par conséquent u_k converge vers un certain u, faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$ et fortement dans $L^p(\Omega)$. De plus on a

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx \leq \liminf \int_\Omega |\nabla u_k|^p dx = 0 \text{ et } \int_\Omega |u|^p dx = 1.$$

Par conséquent $\int_\Omega |\nabla u|^p dx = 0$ et donc $u \equiv$ constante $\neq 0$. Par ailleurs on a aussi

$$\int_E |u|^p dx \leq \liminf \int_E |u_k|^p dx = 0,$$

donc $\int_E |u|^p dx = 0$. Ceci est impossible puisque E est de mesure strictement positive. $\square$

Preuve de la Proposition 2.1.

Puisque $\tilde{m}_2 \geq m_2$, on a $\tilde{W} \subset W$. Montrons qu'il existe une constante c_1 telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{m}_2 |u|^p dx \leq c_1 ||u||^p_{\tilde{W}}.$$

Une fois ceci démontré, on a le résultat attendu, c'est à dire $W \subset \tilde{W}$.

On a d'une part

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{m}_2 |u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} m_2 |u|^p dx + \int_{B_R} |u|^p dx$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq R} |u|^p dx \leq \int_{|x|\leq 2R} |u|^p dx &\leq (\int_{R\leq |x|\leq 2R} |u|^p dx + \int_{|x|\leq 2R} |\nabla u|^p dx) \\ &\leq c(\int_{R\leq |x|\leq 2R} m_2 |u|^p dx + \int_{|x|\leq 2R} |\nabla u|^p dx), \end{aligned}$$

d'après le Lemme 2.1. (Ici on prend $\Omega = B_{2R}$ et $E = \{x \in \Omega : \quad R \leq |x| \leq 2R\}$). Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq R} |u|^p dx &\leq c(\int_{R\leq |x|\leq 2R} m_2 |u|^p dx + \int_{|x|\leq 2R} |\nabla u|^p dx) \\ &\leq c(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{m_2}{\varepsilon_0} |u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx) \leq \tilde{c} ||u||^p_W. \end{aligned}$$

On déduit alors que $\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{m}_2 |u|^p dx \leq (1+\tilde{c}) ||u||^p_W$ et la conclusion s'en suit. $\square$

Remarque 2.2. *Il suit de la Proposition 2.1 que l'espace W ne dépend pas de la décomposition de $m = m_1 - m_2$ lorsque m_1,m_2 vérifient les hypothèses (H_1), $(H_2)'$, (H_3) et $(H_4)_R$.*

Remarque 2.3. *En grandes dimensions, l'hypothèse* (H_4) *peut être remplacée, tout au long de ce chapitre, par*

$$(H_4)' : \quad N > p \ \textit{ et } m_2{,}n_2 \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N).$$

Dans ce cas le choix de l'espace de Sobolev, dans lequel les solutions faibles seront considérées devient relativement simple puisque $W = D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. *Si les hypothèses* (H_4), $(H_4)_R$ *et* $(H_4)'$ *ne sont pas satisfaites, le choix d'un espace de Sobolev adéquat n'est pas clair, à notre niveau, pour la résolution des problèmes (2.1) et (2.2)*

Donnons à présent quelques résultats préliminaires qui nous seront utiles dans la suite.

2.3 Quelques résultats

On considère les poids m et n dans (2.1) et on suppose que les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4) sont satisfaites.

Proposition 2.2. *On a l'injection compacte* $W \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(m_1, \mathbb{R}^N)$ *où* $L^p(m_1, \mathbb{R}^N)$ *désigne l'espace* L^p *sur* $\mathbb{R}^N$ *avec poids* m_1.

Preuve. La preuve de cette proposition peut être obtenue dans [31]. On a un résultat similaire pour le poids n_1. □

On considère maintenant le cas $N \leq p$. Soit N_0 l'entier naturel défini dans l'hypothèse (H_1); on pose $j = N_0 - N$. Soit a_1 un réel positif fixé, on définit l'ensemble

$$A_j = \{y = (y_1,\ldots,y_j) \in \mathbb{R}^j : \ y_i \in]-a_1,a_1[\ \forall\, i = 1,\ldots,j\}$$

et on considère le problème aux valeurs propres suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u \ \text{ dans } \ A_j \\ u = 0 \ \text{ sur } \ \partial A_j. \end{cases}$$

Désignons par $\lambda(a_1)$ la première valeur propre positive de ce problème avec ψ la fonction propre positive correspondante telle que $\displaystyle\int_{A_j} \psi(x)^p dx = 1$. Alors

Lemme 2.2.

$$\lambda(a_1) \leq \frac{(p+j)(p+j-1)\ldots(p+1)}{a_1^p \ j!}.$$

Preuve. La caractérisation variationnelle de $\lambda(a_1)$ permet d'écrire

$$\lambda(a_1) \int_{A_j} |u(x)|^p dx \leq \int_{A_j} |\nabla u(x)|^p dx \ \ \forall\, u \in W_0^{1,p}(A_j).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^j$ on pose

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 - |x| & \text{si } |x| \le a_1 \\ 0 & \text{si } |x| > a_1. \end{cases}$$

Un simple calcul permet d'écrire, en utilisant les coordonnées sphériques, (cf. [30]):

$$\int_{\mathbb{R}^j} |\nabla\varphi(x)|^p dx = \int_{B_{a_1}(o)} |\nabla\varphi(x)|^p = vol(B_{a_1}(o)) = \frac{a_1^j}{j} \frac{2\pi^{\frac{j}{2}}}{\Gamma(\frac{j}{2})}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^j} |\varphi(x)|^p dx &= \frac{2\pi^{\frac{j}{2}}}{\Gamma(\frac{j}{2})} \int_0^{a_1} r^{j-1}(a_1 - r)^p dr = {a_1}^{j+p} \frac{2\pi^{\frac{j}{2}}}{\Gamma(\frac{j}{2})} \frac{\Gamma(j)\Gamma(p+1)}{\Gamma(j+p+1)} \\ &= {a_1}^{j+p} \frac{2\pi^{\frac{j}{2}}}{\Gamma(\frac{j}{2})} \frac{(j-1)!}{(p+j)(p+j-1)...(p+1)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda(a_1) \le \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^j} |\nabla\varphi(x)|^p dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^j} |\varphi(x)|^p dx} = \frac{(p+j)(p+j-1)...(p+1)}{{a_1}^p \; j!}.$$

□

Lemme 2.3. *Soit $N \le p$. Pour tout $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f|.|\varphi|^p dx \le c_1(2a_1)^{jp/N_0} ||f||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\varphi|^p + \lambda(a_1)|\varphi|^p dx) \tag{2.5}$$

pour tout $a_1 > 0$, où $c_1 = c_1(N_0,p)$.

Preuve (du Lemme 2.3). Soient $x \in \mathbb{R}^N$ et $y \in \mathbb{R}^j$. On pose $h(x,y) = f(x)\chi_{A_j}(y)$ et $\tau(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, où χ_{A_j} représente la fonction caractéristique de A_j. On a, d'une part en utilisant l'inégalité de Hölder et l'injection $D^{1,p}(\mathbb{R}^{N_0}) \hookrightarrow L^{p_0^*}(\mathbb{R}^{N_0})$ avec $p_0^* = N_0 p/(N_0 - p)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N_0}} |h|.|\tau|^p dx &\le \left(\int_{\mathbb{R}^{N_0}} |h|^{N_0/p} dx\right)^{p/N_0} . \left(\int_{\mathbb{R}^{N_0}} |\tau|^{p_0^*} dx\right)^{p/p_0^*} \\ &\le c_0 \left(\int_{\mathbb{R}^{N_0}} |h|^{N_0/p} dx\right)^{p/N_0} . \left(\int_{\mathbb{R}^{N_0}} |\nabla\tau|^p dx\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $c_0 = c_0(N_0,p)$. D'autre part on a:

(i).

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N_0}} |h|.|\tau|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^{N_0}} |f(x)\chi_{A_j}|.|\varphi(x)\psi(y)|^p dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|.|\varphi(x)|^p dx\right) . \int_{A_j} |\psi(y)|^p dx. \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|.|\varphi(x)|^p dx \end{aligned}$$

(ii).
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N_0}} |h|^{N_0/p}dx &= \int_{\mathbb{R}^{N_0}} |f(x)\chi_{A_j}(y)|^{\frac{N_0}{p}}dx \\ &= |A_j| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^{N_0/p}dx \leq (2a_1)^j \int_{\mathbb{R}^N} |f|^{N_0/p}dx\end{aligned}$$

(iii).
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{N_0}} |\nabla\tau|^p dx &\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^{N_0}} (|\psi|^p|\nabla\varphi|^p + |\varphi|^p|\nabla\psi|^p)\, dx \\ &= 2^p \left[\int_{A_j} |\psi|^p dx. \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^p dx + \int_{A_j} |\nabla\psi|^p dx. \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi|^p dx\right] \\ &\leq 2^p \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\varphi|^p + \lambda(a_1)|\varphi|^p)\, dx.\end{aligned}$$

On déduit alors de (2.6) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f|.|\varphi|^p dx \leq 2^p c_0 (2a_1)^{jp/N_0} ||f||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\varphi|^p + \lambda(a_1)|\varphi|^p)\, dx.$$

□

Remarque 2.4. *Puisque W est la fermeture de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ par rapport à la norme définie en (2.3), on peut généraliser le résultat de (2.4) aux éléments φ de W par passage à la limite en utilisant la Proposition 2.2 .*

On est alors en mesure de donner la preuve de la proposition suivante:

Proposition 2.3. *On suppose $N \leq p$. Alors il existe une constante $C = C(m_1,m_2,n_1,n_2,N,p,N_0)$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx$$

pour tout $u \in W$ telle que $B_{m,n}(u) \geq 0$. De plus la constante C peut être choisie telle qu'elle soit bornée si m_1 et n_1 varient dans un sous espace borné de $L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve. D'après le Lemme 2.3 et la Remarque 2.4 on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |m_1|.|u|^p dx \leq c_1(2a_1)^{jp/N_0}||m_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + \lambda(a_1)|u|^p)dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |n_1|.|u|^p dx \leq c_1(2a_1)^{jp/N_0}||n_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + \lambda(a_1)|u|^p)dx$$

pour tout $u \in W$. Si $B_{m,n}(u) \geq 0$ alors on a, d'après (H_4):

$$\min(a, 1) \int_{\mathbb{R}^N} m_2|u|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} [m_2(u^+)^p + n_2(u^-)^p]dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} [m_1(u^+)^p + n_1(u^-)^p]dx.$$

Par conséquent

$$\min(a,1)\int_{\mathbb{R}^N} m_2|u|^p dx$$
$$\leq c_1(2a_1)^{jp/N_0}\left(||m_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)}+||n_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)}\right)\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p+\lambda(a_1)|u|^p)dx.$$

Il résulte de l'hypothèse (H_2) et du Lemme 2.3 que

$$\begin{aligned} 0 &< \min(a,1)\varepsilon_0\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p dx \leq \min(a,1)\int_{\mathbb{R}^N} m_2|u|^p dx \\ &\leq c_1(2a_1)^{jp/N_0}\left(||m_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)}+||n_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla u|^p+\frac{(p+j)....(p+1)}{a_1^p\ j!}|u|^p\right)dx. \end{aligned}$$

On choisit le réel a_1 suffisamment grand tel que:

$$c_1(2a_1)^{jp/N_0}(||m_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)}+||n_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)})(j+p)....(p+1)a_1{}^{-p}\ (j!)^{-1}\leq\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ce qui implique

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p dx\leq c_1(2a_1)^{jp/N_0}(||m_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)}+||n_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)})\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx$$

$$\text{d'où }\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p dx\leq C\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx$$

où $C=\dfrac{2}{\varepsilon_0}c_1(2a_1)^{jp/N_0}[||m_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)}+||n_1||_{L^{N_0/p}(\mathbb{R}^N)}]$. □

Remarque 2.5. *Le résultat de la Proposition 2.3 avait été énoncé dans le Lemme 2.2 de [31] pour le cas $m\equiv n$ en utilisant une conséquence de la démonstration du Théorème 3 de [5].*

Pour terminer ce paragraphe, rappelons quelques propriétés de la première valeur propre positive du p-Laplacien dans $\mathbb{R}^N$. On considère le problème de minimisation suivant:

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx\ :\ u\in W \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx=1\right\}. \tag{2.7}$$

Il est clair que d'après (H_3) l'infimum de (2.7) est fini. Le résultat ci-dessous a été prouvé dans [31].

Proposition 2.4. *L'infimum (2.7) est atteint (et par conséquent est positif). De plus toute suite minimisante u_k admet une sous-suite qui converge faiblement dans l'espace W vers un certain u réalisant cet infimum .*

Remarque 2.6. *La Proposition 2.4 implique (d'après la règle des multiplicateurs de Lagrange) que l'infimum (2.7) est une valeur propre principale du problème*

$$-\Delta_p u = \lambda m|u|^{p-2}u \ \textit{ dans } \mathbb{R}^N. \tag{2.8}$$

En utilisant successivement l'estimation L^∞ de [62] quand $N \geq p$ et les résultats de régularité de[64], on déduit que toute solution de (2.8) (et plus généralement toute solution de (2.1)) est de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$. De plus du principe de maximum de Vazquez sur chaque boule $B_R(o)$, on peut déduire que la solution u qui réalise l'infimum (2.7) est telle que $u > 0$ sur $\mathbb{R}^N$. On peut aussi montrer, en utilisant l'identité de Picone, que cet infimum est l'unique valeur propre principale positive de (2.8) et que cette valeur propre est simple. A partir de maintenant on le note $\lambda_1(m)$

$$\lambda_1(m) = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \ : \ u \in W \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx = 1\right\}. \tag{2.9}$$

On désigne par φ_m la fonction propre positive associée à $\lambda_1(m)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^N} m|\varphi_m|^p dx = 1$. Il est clair que, en utilisant la définition (2.7) de $\lambda_1(m)$, il n'existe pas de valeur propre de (2.8) dans l'intervalle $[0,\lambda_1(m)[$. De plus $\lambda_1(m)$ est isolé à droite comme le montre le résultat suivant:

Proposition 2.5. *Il existe $\epsilon > 0$ tel qu'il n'existe pas de valeur propre de (2.8) dans l'intervalle $]\lambda_1(m),\lambda_1(m) + \epsilon[$.*

La preuve de cette proposition peut être trouvée dans [28] (Lemme 2.3 et Remarque 2.1) (cf. aussi [5, 27, 31, 36]). Notons que le fait que nos poids m et n soient localement bornés n'affectent en rien les arguments utilisés dans [28].

Soit Λ_p^+ le spectre de (2.8) constitué des valeurs propres positives. On a le résultat suivant :

Théorème 2.1. *L'ensemble Λ_p^+ est fermé.*

Preuve. Soit (λ_k) une suite d'éléments de Λ_p^+ telle que $\lambda_k \to \lambda$. On veut montrer que $\lambda \in \Lambda_p^+$. Notons par $u_k \in W$ la suite de fonctions propres associées à λ_k. L'équation variationnelle de (2.8) permet d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \nabla w dx = \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} m|u_k|^{p-2}u_k w dx \ \text{ pour tout } \ w \in W. \tag{2.10}$$

En prenant $w = u_k$ on a: $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^p dx = \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} m|u_k|^p dx$. On pose alors $v_k = u_k/(\int_{\mathbb{R}^N} m|u_k|^p dx)^{1/p}$ et on a $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^p dx = \lambda_k$. Puisque par hypothèse λ_k converge vers λ , $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^p dx$ est borné. De plus $\int_{\mathbb{R}^N} m|v_k|^p dx = 1$, ce qui implique que $\int_{\mathbb{R}^N} m_2|v_k|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} m_1|v_k|^p dx$.

L'inégalité de Hölder permet d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_1|v_k|^p dx \leq ||m_1||_s||v_k||^p_{ps'}.$$

Si $N > p$ alors on a $ps' = p*$ et l'inégalité précédente devient

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_1|v_k|^p dx \leq ||m_1||_s||v_k||_{p^*}^p \leq A||m_1||_s.||v_k||_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p$$

et on déduit que $\int_{\mathbb{R}^N} m_1|v_k|^p dx$ est borné. Par conséquent $\int_{\mathbb{R}^N} m_2|v_k|^p dx$ est borné.

De même si $N \leq p$ on a, en utilisant l'injection $W \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{ps'}(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_1|v_k|^p dx \leq ||m_1||_s||v_k||_{ps'}^p \leq B||m_1||_s||v_k||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p.$$

Puisque $\int_{\mathbb{R}^N} m|v_k|^p dx = 1$, on déduit, en utilisant la Proposition 2.3 (avec $m = n$) et la Remarque 2.5, que:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_k|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^p dx,$$

et donc

$$||v_k||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq (1 + C) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^p dx.$$

D'où $||v_k||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$ est borné. Par conséquent $\int_{\mathbb{R}^N} m_1|v_k|^p dx$ et $\int_{\mathbb{R}^N} m_2|v_k|^p dx$ le sont également. Donc dans tous les cas (v_k) est bornée dans W. Il s'en suit qu'à une sous-suite près v_k converge vers un certain v faiblement dans W et fortement dans $L^p(m_1,\mathbb{R}^N)$. Faisons remarquer que $v \not\equiv 0$. En effet comme $\int_{\mathbb{R}^N} m|v_k|^p dx = 1$, on déduit en utilisant le lemme de Fatou que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} m_2|v|^p dx &\leq \liminf \int_{\mathbb{R}^N} m_2|v_k|^p dx \\ &= \lim(-1 + \int_{\mathbb{R}^N} m_1|v_k|^p dx) = -1 + \int_{\mathbb{R}^N} m_1|v|^p dx.\end{aligned}$$

Par conséquent $\int_{\mathbb{R}^N} m|v|^p dx \geq 1$ et la conclusion s'en suit.

Par ailleurs on déduit de (2.10) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^{p-2}\nabla v_k \nabla w dx = \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} m|v_k|^{p-2}v_k w dx. \tag{2.11}$$

En posant $w = v_k - v_l$ dans l'équation (2.11) on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^{p-2}\nabla v_k \nabla(v_k - v_l)dx = \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} m|v_k|^{p-2}v_k(v_k - v_l)dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_l|^{p-2}\nabla v_l \nabla(v_k - v_l)dx = \lambda_l \int_{\mathbb{R}^N} m|v_l|^{p-2}v_l(v_k - v_l)dx,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_k|^{p-2}\nabla v_k - |\nabla v_l|^{p-2}\nabla v_l\right) \nabla(v_k - v_l)dx \\ = \;& \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} m|v_k|^{p-2}v_k(v_k - v_l)dx - \lambda_l \int_{\mathbb{R}^N} m|v_l|^{p-2}v_(v_k - v_l)dx\end{aligned}$$

et alors en utilisant la monotonie de la fonction $t \mapsto |t|^{p-2}t$, on a:

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_k|^{p-2}\nabla v_k - |\nabla v_l|^{p-2}\nabla v_l\right) \nabla(v_k - v_l)dx \\
& = \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} m \left(|v_k|^{p-2}v_k - |v_l|^{p-2}v_l\right)(v_k - v_l)dx \\
& \quad +(\lambda_k - \lambda_l) \int_{\mathbb{R}^N} m|v_l|^{p-2}v_l(v_k - v_l)dx \\
& \leq \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} m_1 \left(|v_k|^{p-2}v_k - |v_l|^{p-2}v_l\right)(v_k - v_l)dx \\
& \quad +|\lambda_k - \lambda_l| \int_{\mathbb{R}^N} |m||v_l|^{p-1}|v_k - v_l|dx
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

On va montrer que le membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0 quand $k,l \to +\infty$. L'inégalité de Hölder permet d'écrire:

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |m||v_l|^{p-1}|v_k - v_l|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |m||v_l|^p dx\right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |m||v_k - v_l|^p dx\right)^{1/p}.
$$

Comme $\int_{\mathbb{R}^N} m_i|v_l|^p dx$ est borné pour $i = 1,2$, alors il en est de même pour $\int_{\mathbb{R}^N} |m||v_l|^p dx$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |m||v_k - v_l|^p dx$. Donc $|\lambda_k - \lambda_l| \int_{\mathbb{R}^N} |m||v_l|^{p-1}|v_k - v_l|dx \to 0$ quand $k,l \to +\infty$.

Par ailleurs, en utilisant toujours l'inégalité de Hölder on a:

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} m_1 \left(|v_k|^{p-2}v_k - |v_l|^{p-2}v_l\right)(v_k - v_l)dx \\
\leq & \int_{\mathbb{R}^N} m_1|v_k|^{p-1}|v_k - v_l|dx + \int_{\mathbb{R}^N} m_1|v_l|^{p-1}|v_k - v_l|dx \\
\leq & \left[||v_k||^{p-1}_{L^p(m_1,\, \mathbb{R}^N)} + ||v_l||^{p-1}_{L^p(m_1,\, \mathbb{R}^N)}\right] ||v_k - v_l||_{L^p(m_1,\, \mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Puisque v_k converge vers v dans $L^p(m_1, \mathbb{R}^N)$ alors on déduit que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} m_1 \left(|v_k|^{p-2}v_k - |v_l|^{p-2}v_l\right)(v_k - v_l)dx \to 0
$$

et par conséquent

$$
\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_k|^{p-2}\nabla v_k - |\nabla v_l|^{p-2}\nabla v_l\right) \nabla(v_k - v_l)dx \to 0.
$$

En utilisant l'inégalité (cf. [57])

$$
|\zeta - \eta|^p \leq d\left\{(|\zeta|^{p-2}\zeta - |\eta|^{p-2}\eta)(\zeta - \eta)\right\}^{r/2}(|\zeta|^p + |\eta|^p)^{1-r/2} \tag{2.13}
$$

pour tout $\zeta,\eta \in \mathbb{R}^N$; avec $d = d(p)$, $r = p$ si $p \in]1,2[$ et $r = 2$ si $p \geq 2$ et l'inégalité de Hölder on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k - \nabla v_l|^p dx \quad \leq d \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_k|^{p-2}\nabla v_k - |\nabla v_l|^{p-2}\nabla v_l)\nabla(v_k - v_l)dx \right\}^{r/2}$$
$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_k|^p + |\nabla v_l|^p)dx \right\}^{1-r/2}.$$

Il s'en suit que $\nabla v_k \to \nabla v$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs de (2.12) on déduit que

$$0 \leq \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} m_2 \left(|v_k|^{p-2}v_k - |v_l|^{p-2}v_l\right)(v_k - v_l)dx$$

$$\leq \lambda_k \int_{\mathbb{R}^N} m_1 \left(|v_k|^{p-2}v_k - |v_l|^{p-2}v_l\right)(v_k - v_l)dx + (\lambda_k - \lambda_l)\int_{\mathbb{R}^N} m|v_l|^{p-2}v_l(v_k - v_l)dx$$

Par le même calcul que précédemment on montre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_2 \left(|v_k|^{p-2}v_k - |v_l|^{p-2}v_l\right)(v_k - v_l)dx \to 0$$

puis on déduit en utilisant (2.13), que $\int_{\mathbb{R}^N} m_2|v_k - v_l|^p dx \to 0$. D'où $v_k \to v$ dans W. Par passage à la limite dans (2.11) on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2}\nabla v.\nabla w dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} m|v|^{p-2}vw dx \;\; \forall\, w \in W$$

c'est à dire que v est une solution (non triviale) faible de (2.8) associée à la valeur propre λ. D'où $\lambda \in \Lambda_p^+$. $\square$

Remarque 2.7. *On peut montrer, d'une manière analogue que si m satisfait les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et $(H_4)'$ alors le spectre de (2.8) contenant les valeurs propres négatives est fermé. Dans ces conditions on a alors tout le spectre qui est fermé. Par contre si $N \leq p$, en raison de la décomposition $m = m_1 - m_2$, l'hypothèse (H_2) n'est pas vérifiée par le poids $(-m)$ et donc le résultat du théorème précédent ne peut pas être généralisé à tout le spectre. De plus les résultats de non existence de [16] et [52] permettent d'affirmer qu'il n'existe pas de valeur propre principale négative lorsque $N < p$. L'existence d'autres valeurs propres négatives dans ce cas précis n'est pas clair à notre niveau.*

En utilisant la théorie de Ljusternik-Schnirelman, on peut monter l'existence d'une suite de valeurs propres tendant vers $+\infty$ (voir le chapitre 3 pour plus de détails). De tout ce qui précède, on peut alors définir la deuxième valeur propre de (2.8) comme étant

$$\lambda_2(m) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R},\, \lambda \text{ valeur propre de (2.8) et } \lambda > \lambda_1(m)\}.$$

Comme nous le verrons plus loin, cet infimum est atteint.

2.4 Construction d'une valeur propre non triviale

Dans ce paragraphe on considère le problème (2.1) dans $\mathbb{R}^N$ et les poids m et n sont supposés satisfaire les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4). On cherche les solutions non triviales de (2.1) dans un sens faible , c'est à dire les fonctions $u \in W\backslash\{0\}$ telles que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} [m(u^+)^{p-1} - n(u^-)^{p-1}] v dx \ \ \forall\, v \in W. \tag{2.14}$$

Comme rappelé dans le paragraphe précédent pour l'équation (2.8) mais aussi valable pour l'équation (2.1), les solutions de (2.8) sont de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$.

On cherche à présent les $\lambda > 0$ pour lesquels (2.8) admet au moins une solution. Il est clair que l'équation (2.8) avec $\lambda > 0$ admet une solution u ne changeant pas de signe dans $\mathbb{R}^N$ si et seulement si $\lambda = \lambda_1(m)$ ou $\lambda = \lambda_1(n)$. De plus, en prenant $v = u^+$ ou $v = u^-$ dans (2.14) (avec $u^\pm = \max\{\pm u,0\}$), on voit que si (2.1) admet une solution changeant de signe dans $\mathbb{R}^N$ avec $\lambda > 0$, alors $\lambda > \max\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\}$. Le but de ce paragraphe est de prouver l'existence d'une solution de (2.1) qui change de signe dans $\mathbb{R}^N$. Notons que l'hypothèse (H_3) est nécessaire pour que (2.1) avec $\lambda > 0$ admette au moins une solution qui change de signe dans $\mathbb{R}^N$.

Nous allons utiliser une approche variationnelle pour prouver l'existence de telles solutions. Pour cela , définissons les fonctionnelles J et $B_{m,n}$ sur l'espace W par :

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \quad \text{et} \ \ B_{m,n}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} [m(u^+)^p + n(u^-)^p] dx \ .$$

Ces fonctionnelles sont Fréchet-différentiables et on a :

$$< J'(u),v >= p\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx \ \ \text{et}$$

$$< B'_{m,n}(u),v >= p\int_{\mathbb{R}^N} [m(u^+)^{p-1} - n(u^-)^{p-1}] v dx,$$

pour tout $u,v \in W$. Ici $< \, , >$ désigne le crochet de dualité entre W et son dual.

On considère la variété définie par :

$$M_{m,n} = \{u \in W \ ; \ B_{m,n}(u) = 1\}$$

1 est une valeur régulière de $B_{m,n}$. On note $\tilde{J}$ la restriction de J à la variété $M_{m,n}$. Remarquons que φ_m et $(-\varphi_n)$ sont deux éléments de $M_{m,n}$. De plus en utilisant l'hypothèse (H_3) on peut construire une fonction $u \in W$ telle que $\int_{\mathbb{R}^N} m(u^+)^p dx > \ 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} n(u^-)^p dx > 0$, et donc $u/B_{m,n}(u)^{1/p} \in M_{m,n}$.

Par la règle des multiplicateurs de Lagrange, $u \in M_{m,n}$ est un point critique de $\tilde{J}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $J'(u) = \lambda B'_{m,n}(u)$, c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} [m(u^+)^{p-1} - n(u^-)^{p-1}] v dx \tag{2.15}$$

pour tout $v \in W$. Ce qui veut dire que u est solution de (2.1) au sens (2.14). De plus en prenant $u = v$ dans (2.15) et en utilisant le fait que $u \in M_{m,n}$, on voit que le multiplicateur de Lagrange λ est égal à la valeur critique $\tilde{J}(u)$. Donc notre problème aux valeurs propres (2.1) se transforme en un problème de recherche de valeurs et de points critiques de la fonctionnelle $\tilde{J}$.

Un premier point critique de $\tilde{J}$ vient de la minimisation globale suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^+|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^p dx \\ &\geq \lambda_1(m) \left(\int_{\mathbb{R}^N} m(u^+)^p dx \right)^+ + \lambda_1(n) \left(\int_{\mathbb{R}^N} n(u^-)^p dx \right)^+ \\ &\geq \min\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\} \end{aligned}$$

pour tout $u \in M_{m,n}$. De plus on a $\tilde{J}(u) = \min\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\}$ si $u = \varphi_m$ ou $u = -\varphi_n$. Donc φ_m ou $-\varphi_n$ est un minimum global de $\tilde{J}$ avec comme valeur critique $\lambda_1(m)$ ou $\lambda_1(n)$.

Un second point critique de $\tilde{J}$ vient de la proposition suivante :

Proposition 2.6. *Les fonctions propres φ_m et $-\varphi_n$ sont des minima locaux stricts pour $\tilde{J}$, avec valeurs critiques respectives $\lambda_1(m)$ et $\lambda_1(n)$.*

Preuve. On fera la preuve pour φ_m, celle pour $-\varphi_n$ étant analogue.

Supposons par l'absurde que φ_m n'est pas un minimum local strict pour la fonctionnelle $\tilde{J}$, c'est à dire qu'il existe une suite (u_k) d'éléments de la variété $M_{m,n}$ telle que $u_k \not\equiv \varphi_m$, $u_k \to \varphi_m$ dans W et $\tilde{J}(u_k) \leq \lambda_1(m)$. Remarquons d'abord que u_k change de signe dans $\mathbb{R}^N$. En effet comme $u_k \to \varphi_m$ dans W et $\varphi_m(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, alors pour k suffisamment grand $u_k > 0$ quelque part dans $\mathbb{R}^N$. Si on suppose que $u_k(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ on aurait :

$$\tilde{J}(u_k) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^p dx > \lambda_1(m) \int_{\mathbb{R}^N} m|u_k|^p dx = \lambda_1(m),$$

puisque $u_k \in M_{m,n}$ et $u_k \geq 0$ (inégalité stricte car $u_k \neq \pm\varphi_m$). Ce qui contredit l'hypothèse faite sur la suite u_k: $\tilde{J}(u_k) \leq \lambda_1(m)$. Donc u_k change de signe dans $\mathbb{R}^N$ et $u_k^- \not\equiv 0$ pour k suffisamment grand. De plus on a :

$$\tilde{J}(u_k) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k^+|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k^-|^p dx \leq \lambda_1(m) = \lambda_1(m) \int_{\mathbb{R}^N} [m(u_k^+)^p + n(u_k^-)^p] dx.$$

Ce qui implique :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k^-|^p dx \leq \lambda_1(m) \int_{\mathbb{R}^N} n(u_k^-)^p dx, \text{ puisque } \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k^+|^p dx \geq \lambda_1(m) \int_{\mathbb{R}^N} m(u_k^+)^p dx,$$

et donc

$$\frac{1}{\lambda_1(m)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} n(u_k^-)^p dx / \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k^-|^p dx. \tag{2.16}$$

On pose alors $v_k = u_k^-/(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k^-|^p dx)^{1/p}$ et $\Omega_k^- = \{x \in \mathbb{R}^N \; ; \; u(x) < 0\}$. On déduit de (2.16) que :

$$\frac{1}{\lambda_1(m)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} n(v_k)^p dx = \int_{\Omega_k^-} n(v_k)^p dx \leq \int_{\Omega_k^-} n_1(v_k)^p dx.$$

• Si $N > p$, de l'injection de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ on déduit que $||v_k||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq A$ puisque $||v_k||_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = 1$. Ici le réel A désigne la constance dans l'injection de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, définie dans le paragraphe 2. Par ailleurs l'inégalité de Hölder permet d'écrire :

$$\frac{1}{\lambda_1(m)} \leq \int_{\Omega_k^-} n_1(v_k)^p dx \leq ||n_1||_{L^s(\Omega_k^-)} ||v_k||_{L^{p^*}(\Omega_k^-)} \leq A^p ||n_1||_{L^s(\Omega_k^-)}$$

donc

$$||n_1||_{L^s(\Omega_k^-)} \geq \frac{1}{A^p \lambda_1(m)} = \varepsilon. \tag{2.17}$$

On choisit $\alpha_0 > 0$ suffisamment grand tel que $||n_1||^s_{L^s(B^c_{\alpha_0})} \leq \varepsilon^s/2$, avec $B^c_{\alpha_0} = \mathbb{R}^N \backslash B^c_{\alpha_0}(o)$ (l'existence du réel α_0 est justifiée par le fait que $n_1 \in L^s(\mathbb{R}^N)$). L'équation (2.17) entraîne

$$\begin{aligned} \varepsilon^s &\leq ||n_1||^s_{L^s(\Omega_k^-)} = ||n_1||^s_{L^s(\Omega_k^- \cap B_{\alpha_0})} + ||n_1||^s_{L^s(\Omega_k^- \cap B^c_{\alpha_0})} \\ &\leq ||n_1||^s_{L^s(\Omega_k^- \cap B_{\alpha_0})} + ||n_1||^s_{L^s(B^c_{\alpha_0})}, \end{aligned}$$

donc

$$||n_1||^s_{L^s(\Omega_k^- \cap B_{\alpha_0})} \geq \frac{\varepsilon^s}{2}. \tag{2.18}$$

D'autre part , de l'hypothèse (H_1) on a : $n_1 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ donc

$$|n_1(x)| \leq ||n_1||_{L^\infty(\Omega_k^- \cap B_{\alpha_0})} \leq ||n_1||_{L^\infty(B_{\alpha_0})} \;\; \forall \, x \in \Omega_k^- \cap B_{\alpha_0},$$

$$\text{d'où } \; |\Omega_k^- \cap B_{\alpha_0}| \geq \frac{\varepsilon^s}{2||n_1||^s_{L^\infty(B_{\alpha_0})}} = c_2 > 0 \; \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Puisque $u_k \to \varphi_m$ dans $L^p(B_{\alpha_0})$ et $\varphi_m(x) > 0$ pour tout $x \in B_{\alpha_0}$, on déduit que

$$\lim_{k \to +\infty} |\{x \in B_{\alpha_0} \; ; \; u(x) < 0\}| = 0.$$

Mais ceci contredit l'équation (2.19) .

• Si $N \leq p$ on a toujours l'inégalité

$$0 < \frac{1}{\lambda_1(m)} \leq \int_{\Omega_k^-} n(v_k)^p dx \leq \int_{\Omega_k^-} n_1(v_k)^p dx.$$

Puisque $B_{m,n}(v_k) > 0$, on peut utiliser la Proposition2.3 pour déduire que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_k|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_k|^p dx, \text{ où } C = C(m_1,m_2,n_1,n_2,N,p,N_0).$$

Ainsi $||v_k||^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 1 + C$.

Par ailleurs l'inégalité de hölder permet d'écrire :

$$\frac{1}{\lambda_1(m)} \leq \int_{\Omega_k^-} n_1(v_k)^p dx \leq ||n_1||_{L^s(\Omega_k^-)} ||v_k||_{L^{ps'}(\mathbb{R}^N)}$$

et comme $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \geq p$, on en déduit que

$$\frac{1}{\lambda_1(m)} \leq (1 + C)B^p ||n_1||_{L^s(\Omega_k^-)}.$$

$$\text{Donc } ||n_1||_{L^s(\Omega_k^-)} \geq \frac{1}{B^p(1 + C)\lambda_1(m)}.$$

La suite de la démonstration est analogue au cas $N > p$ traité ci-dessus. □

Pour trouver un troisième point critique de la fonctionnelle $\tilde{J}$, nous allons utiliser la version du théorème du col de la montagne sur une variété de classe C^1 rappelée dans la Proposition 1.11 du chapitre1 pour le cas où $E = W$, $f = J$ et $g = B_{m,n}$. Mais tout d'abord nous allons prouver deux résultats préliminaires qui concernent la condition de (PS) et la géométrie de la fonctionnelle $\tilde{J}$ au voisinage des minima stricts locaux φ_m et $-\varphi_n$.

Lemme 2.4. *La fonctionnelle $\tilde{J}$ satisfait la condition de (PS) sur la variété $M_{m,n}$.*

Preuve. Soit (u_k) une suite de (PS) dans $M_{m,n}$, c'est à dire que $\tilde{J}(u_k)$ borné et $||\tilde{J}'(u_k)||_* \to 0$. Ce qui implique

$$(I) \begin{cases} \tilde{J}(u_k) \quad \text{est borné} \\ \left| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^{p-2} \nabla u_k \nabla v dx \right| \leq \varepsilon_k ||v||_W \end{cases}$$

pour tout $v \in T_{u_k}(M_{m,n})$ avec $\lim\limits_{k \to +\infty} \varepsilon_k = 0$. Nous allons montrer dans un premier temps que la suite u_k est bornée dans W. Pour cela distinguons deux cas:

Premier cas: Si $N > p$

$\tilde{J}(u_k)$ étant borné par hypothèse, alors u_k est borné dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ puisque $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. De plus d'après l'inégalité de Hölder, on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_1 |u_k|^p dx \leq ||m_1||_{L^s(\mathbb{R}^N)} ||u_k||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)},$$

donc $\int_{\mathbb{R}^N} m_1 |u_k|^p dx$ est borné. Il en est de même pour $\int_{\mathbb{R}^N} n_1 |u_k|^p dx$. Par ailleurs comme $B_{m,n}(u_k) = 1$, alors on déduit que

$$\begin{aligned} \min(a, 1) \int_{\mathbb{R}^N} m_2 |u_k|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} m_2 (u_k^+)^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} n_2 (u_k^-)^p dx \\ &= -1 + \int_{\mathbb{R}^N} [m_1 (u_k^+)^p + n_1 (u_k^-)^p] dx. \end{aligned}$$

Donc $\int_{\mathbb{R}^N} m_2|u_k|^p dx$ est borné et alors (u_k) est borné dans W .

Deuxième cas: Si $N \leq p$
$B_{m,n}(u_k) = 1$, alors d'après la Proposition 2.3 on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^p dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^p dx.$$

Donc (u_k) est borné dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et aussi dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \geq p$. De plus, d'après l'inégalité de Hölder on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_1|u_k|^p dx \leq ||m_1||_s ||u_k||^p_{ps'}$$

donc $\int_{\mathbb{R}^N} m_1|u_k|^p dx$ est bornée. La suite du raisonnement est analogue au premier cas.

On déduit de ces deux cas que (u_k) est bornée dans W. Par conséquent (u_k) converge vers un certain u (à une sous-suite près) faiblement dans W, fortement dans $L^p(m_1,\mathbb{R}^N)$ et dans $L^p(n_1,\mathbb{R}^N)$.

Dans la suite de la démonstration, on considère le cas $N > p$ (on peut utiliser un argument similaire pour le cas $N \leq p$).

Remarquons que si $w \in W$, alors $(w - a_k(w)u_k) \in T_{u_k}(M_{m,n})$ où

$$a_k(w) := \int_{\mathbb{R}^N} [m(u_k^+)^{p-1} - n(u_k^-)^{p-1}] w dx.$$

En posant $v = (u_k - u_l) - a_k(u_k - u_l)u_k$ dans (I) on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \nabla(u_k - u_l)dx = t_k \int_{\mathbb{R}^N} [m(u_k^+)^{p-1} - n(u_k^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx + 0(\varepsilon_k),$$

où on a posé $t_k := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^p dx$. Ce qui implique

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u_l|^{p-2}\nabla u_l)\nabla(u_k - u_l)dx \\
&= t_k \int_{\mathbb{R}^N} m[(u_k^+)^{p-1} - (u_l^+)^{p-1}](u_k - u_l)dx + t_k \int_{\mathbb{R}^N} n[-(u_k^-)^{p-1} + (u_l^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx \\
&+ (t_k - t_l) \int_{\mathbb{R}^N} [m(u_l^+)^{p-1} - n(u_l^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx + 0(\varepsilon_k) + 0(\varepsilon_l) \\
&\leq t_k(I_1 + I_2) + |t_k - t_l| I_3 + 0(\varepsilon_k) + 0(\varepsilon_l), \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

avec

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^N} m_1[(u_k^+)^{p-1} - (u_l^+)^{p-1}](u_k - u_l)dx$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^N} n_1[-(u_k^-)^{p-1} + (u_l^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^N} [m(u_l^+)^{p-1} - n(u_l^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx$$

Notre objectif est de montrer que le membre de droite dans (2.20) tend vers zéro quand $k,l \to +\infty$.

En utilisant l'inégalité de Hölder on a:

$$I_1 \leq [||u_k||^{p-1}_{L^p(m_1,\,\mathbb{R}^N)} + ||u_l||^{p-1}_{L^p(m_1,\,\mathbb{R}^N)}]||u_k - u_l||_{L^p(m_1,\,\mathbb{R}^N)}$$

et puisque u_k converge vers u dans $L^p(m_1, \mathbb{R}^N)$, on déduit alors que $I_1 \to 0$ quand $k,l \to +\infty$. Par le même argument on montre que $I_2 \to 0$. Un simple calcul, en utilisant l'inégalité de Hölder, permet de montrer que I_3 est borné. Comme $(t_k - t_l) \to 0$, il s'en suit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u_l|^{p-2}\nabla u_l)\nabla(u_k - u_l)dx \to 0.$$

En utilisant l'inégalité (2.13) et l'inégalité de Hölder, on déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k - \nabla u_l|^p dx \leq c\, \left\{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u_l|^{p-2}\nabla u_l)\nabla(u_k - u_l)dx\right\}^{r/2}$$
$$\left\{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_k|^p + |\nabla u_l|^p dx)\right\}^{1-r/2}$$

et alors $\nabla u_k \to \nabla u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. De plus , de (2.20) on a

$$\begin{aligned}
0 \;\; &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u_l|^{p-2}\nabla u_l)\nabla(u_k - u_l)dx \\
&\leq t_k \int_{\mathbb{R}^N} m[(u_k^+)^{p-1} - (u_l^+)^{p-1}](u_k - u_l)dx \\
&+t_k \int_{\mathbb{R}^N} n[-(u_k^-)^{p-1} + (u_l^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx \\
&+(t_k - t_l) \int_{\mathbb{R}^N} [m(u_l^+)^{p-1} - n(u_l^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx + 0(\varepsilon_k) + 0(\varepsilon_l).
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$0 \leq t_k(I_1 + I_2) + (t_k - t_l)I_3 - t_k \int_{\mathbb{R}^N} m_2(|u_k|^{p-2}u_k - |u_l|^{p-2}u_l)(u_k - u_l)dx + 0(\varepsilon_k) + 0(\varepsilon_l)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}
0 \;\; &\leq t_k \int_{\mathbb{R}^N} m_2(|u_k|^{p-2}u_k - |u_l|^{p-2}u_l)(u_k - u_l)dx \\
&\leq t_k(I_1 + I_2) + (t_k - t_l)I_3 + 0(\varepsilon_k) + 0(\varepsilon_l).
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède $t_k(I_1 + I_2) + (t_k - t_l)I_3 \to 0$ quand $k,l \to +\infty$. De plus

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \neq 0$$

puisque W ne contient pas de fonctions constantes non nulles. On déduit alors, par passage à la limite dans l'inégalité précédente, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_2(|u_k|^{p-2}u_k - |u_l|^{p-2}u_l)(u_k - u_l)dx \to 0.$$

Les inégalités de Hölder et (2.13) permettent de conclure que $\int_{\mathbb{R}^N} m_2|u_k - u_l|^p dx \to 0$. Il s'en suit alors que $u_k \to u$ dans W.

Par conséquent la fonctionnelle $\tilde{J}$ est de Palais-Smale sur la variété $M_{m,n}$. □

Le second lemme sera énoncé dans un cadre général sur la variété M de (1.10).

Lemme 2.5. *Soit E,g,M,f et $\tilde{f}$ considérés dans (1.10). Soit u_0 un minimum local strict pour $\tilde{f}$, c'est à dire pour un certain $\epsilon_0 > 0$*

$$\tilde{f}(u_0) < \tilde{f}(u)$$

pour tout $u \in M$ avec $u \neq u_0$ et $||u - u_0||_E < \epsilon_0$. On suppose que $\tilde{f}$ satisfait la condition de (PS) sur M. Alors pour tout $\epsilon \in]0,\epsilon_0[$ on a :

$$\tilde{f}(u_0) < \inf\{\tilde{f}(u) \ : \ u \in M \text{ et } ||u - u_0||_E = \epsilon\}.$$

Preuve. Elle peut être trouvée dans [8] qui est une adaptation partielle d'un résultat similaire de [40] dans lequel on a une situation analogue mais sans contraintes. La preuve utilise principalement le principe variationnel de Ekeland. □

On est alors en mesure d'appliquer le théorème du col de la montagne de la Proposition 1.2 .

Théorème 2.2. *On considère l'ensemble $\Gamma := \{\gamma \in C([-1,1], M_{m,n}) \ : \ \gamma(-1) = \varphi_m$ et $\gamma(1) = -\varphi_n\}$. Alors*

$$c(m,n) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([-1,1])} \tilde{J}(u) \tag{2.21}$$

est une valeur critique de $\tilde{J}$, avec $c(m,n) > \max\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\}$.

Preuve. La condition de (PS) et l'hypothèse géométrique sont satisfaites d'après les lemmes 2.4 et 2.5. Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\Gamma \neq \emptyset$. Pour cela il suffit de construire un chemin γ dans W qui relie φ_m et $-\varphi_n$.

Soit $u \in W$ telle que $\int_{\mathbb{R}^N} m(u^+)^p dx > 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} n(u^-)^p dx > 0$ (l'existence d'une telle fonction est assurée par l'hypothèse (H_3)). On relie u à u^+ par la combinaison convexe : $t \mapsto u^+ - tu^- = tu + (1-t)u^+ \ ; \ t \in [0,1]$, puis de u^+ on va à φ_m par le chemin $t \mapsto [t(u^+)^p + (1-t)\varphi_m^p]^{1/p}$. En utilisant le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} m\varphi_m^p dx > 0$, il est facile de voir que le chemin γ_1 ainsi construit reliant u à φ_m satisfait $B_{m,n}[\gamma_1(t)] > 0$ pour tout $t \in [0,1]$. On pose alors

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(t)/B_{m,n}[\gamma_1(t)]^{1/p} \equiv (\gamma_1(t))_{m,n}$$

pour avoir un chemin dans $M_{m,n}$. De manière analogue on construit un chemin γ_3 qui relie u à $-\varphi_n$. En mettant tout ensemble, on obtient un chemin dans $M_{m,n}$ qui relie φ_m à $-\varphi_n$. □

2.5 Première valeur propre non principale

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que $\min\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\}$ et $\max\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\}$ sont les premières valeurs propres positives de (2.1).

Le but de ce paragraphe est de montrer que la valeur non principale construite en (2.21) est la prochaine valeur propre positive de (2.1). On a le résultat suivant:

Théorème 2.3. *Le problème (2.1) n'admet pas de valeurs propres dans l'intervalle* $]\max\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\}, c(m,n)[$

Pour la preuve nous allons utiliser le lemme ci-dessous (dont la preuve peut être trouvée dans [8]) qui garantit l'existence d'un point critique dans une composante d'un ensemble de sous-niveau .

Lemme 2.6. *Soit E,g,M,f et $\tilde{f}$ définis comme dans (1.10). On suppose que $\tilde{f}$ est bornée inférieurement dans M et qu'elle satisfait la condition de (PS) sur M. Soit $r \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble*

$$\mathcal{O} = \{u \in M, \tilde{f}(u) < r\}$$

Alors toute composante non vide $\mathcal{O}_1$ de $\mathcal{O}$ contient une point critique de $\tilde{f}$.

Donnons à présent la preuve du Théorème 2.3. Notons que la preuve ci-dessous est partiellement différente de celle correspondante dans [9]. La difficulté résulte au niveau de la construction de certains poids auxilliaires.

Preuve. On suppose par l'absurde l'existence d'une valeur propre λ de (2.1) avec $\lambda \in]\max\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\}, c(m,n)[$. Notre but de de construire un chemin dans Γ sur lequel $\tilde{J}$ restera inférieur ou égal à λ, ce qui contredira la définition (2.21) de $c(m,n)$.

Soit $u \in M_{m,n}$ le point critique de $\tilde{J}$ associé à λ. On sait que u change de signe dans $\mathbb{R}^N$. En prenant $v = u^+$ ou $v = u^-$ dans (2.14) on a:

$$0 < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^+|^p dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} m(u^+)^p dx \text{ et } 0 < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^p dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} n(u^-)^p dx. \quad (2.22)$$

On construira ce chemin en plusieurs étapes en prenant pour point de départ u. On pose premièrement $v = u^+/B_{m,n}(u^+)^{1/p} \equiv (u^+)_{m,n}$ et on considère le chemin γ_1 reliant u à v:

$$\gamma_1(t) = [tu + (1-t)u^+]_{m,n} \quad t \in [0,1].$$

En utilisant (2.22), il est facile de montrer que $\gamma_1(t)$ est bien défini et est dans $M_{m,n}$. De plus on a $\tilde{J}(\gamma_1(t)) = \lambda$ pour tout $t \in [0,1]$. De la même manière on construit un chemin joignant u à $(-u^-)_{m,n}$, qui est contenu dans $M_{m,n}$ et tel que $\tilde{J}$ prend la valeur λ sur ce chemin. Nous allons montrer comment on peut construire un autre chemin qui joint v à φ_m qui sera à un niveau inférieur ou égal à λ. Une construction analogue permet de joindre $(-u^-)_{m,n}$ à $-\varphi_n$. En mettant tout ensemble on obtient alors un chemin dans $M_{m,n}$ joingnant φ_m et $-\varphi_n$ et sur lequel $\tilde{J}$ reste à un niveau inférieur ou égal à λ.

Pour construire le chemin reliant v à φ_m, on considère la variété $M_m = M_{m,m}$. Comme $v \geq 0$ et $v \in M_{m,n}$, alors $v \in M_m$. Les points critiques de la restriction de J à M_m sont les solutions normalisées de (2.8). Comme $v \geq 0$ dans $\mathbb{R}^N$ et s'annule sur un ensemble de mesure strictement positive, v ne peut pas être un point critique de la restriction de J à M_m. Il existe donc un chemin $\rho :] - \epsilon,\epsilon[\to M_m$ de classe C^1 tel que $\rho(0) = v$ et $\frac{d}{dt}[J(\rho(t))]|_{t=0} \neq 0$. On peut alors, en choisissant la direction vers laquelle A décroit, se déplacer sur ρ de v à un point w tout en restant dans la variété M_m et à des niveaux inférieurs à λ, excepté le point origine v où $J(v) = \lambda$. Notons ρ_1 cette portion de chemin et posons $\gamma_2(t) = |\rho_1(t)|$. Le chemin γ_2 relie v à $|w|$; comme ρ_1 est dans M_m et $\gamma_2(t) \geq 0$ alors γ_2 est un chemin dans $M_{m,n}$ tel que $J(\gamma_2(0)) = J(v) = \lambda$ et $A(\gamma_2(t)) < \lambda$ pour les autres valeurs de t.

On définit maintenant la suite $m_{(\varepsilon)}$, pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$, par

$$m_{(\varepsilon)} = \begin{cases} m & \text{si } m < 0 \\ \varepsilon m_1 - m_2 & \text{si } m \geq 0. \end{cases}$$

On a $m_{(1)} = m$ et $m^+ \not\equiv 0$, $m_{(0)} \leq 0$ et donc $m^+ \equiv 0$. Par conséquent il existe $\varepsilon_0 \in]0,1[$ tel que

$$m^+_{(\varepsilon)} \begin{cases} \not\equiv 0 & \text{pour } \varepsilon_0 < \varepsilon \\ \varepsilon \equiv 0 & \text{pour } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0. \end{cases}$$

Notons que $m_{(\varepsilon)} \leq m$ pour tout $\varepsilon \in]0,1[$.

En utilisant le Lemme 2.7 ci-dessous, on peut extraire de la suite $(m_{(\varepsilon)})$ une fonction $l = l_1 - l_2$ telle que m,l vérifient les hypothèses (H_1),(H_2), (H_3) et (H_4). De plus on a $\lambda_1(l) > \lambda$ et $l \leq m$ dans $\mathbb{R}^N$. On fixe un ε. Considerons la variété $M_{m,l}$ et le sous-ensemble $\mathcal{O}$ de $M_{m,l}$ définit par:

$$\mathcal{O} = \{u \in M_{m,l} : \ J(u) < \lambda\}.$$

Il est clair que $|w|,\varphi_m \in \mathcal{O}$. On s'intéresse aux points critiques de J dans $\mathcal{O}$. On a $J(\varphi_m) = \lambda_1(m) < \lambda$ et $J(\varphi_l) = \lambda_1(l) > \lambda$. Donc φ_m est le seul point critique de la restriction de J à $M_{m,l}$ dans $\mathcal{O}$. En appliquant le Lemme 2.6 à la composante de $\mathcal{O}$ qui contient $|w|$ et en utilisant le fait que tout ouvert connexe d'une variété est connexe par arcs, on obtient un chemin γ_3 dans $\mathcal{O}$ reliant $|w|$ à φ_m. Par ailleurs, par le choix de la fonction l, on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} m|\gamma_3(t)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} [m(\gamma_3^+(t))^p + m(\gamma_3^-(t))^p] dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} [m(\gamma_3^+(t))^p + l(\gamma_3^-(t))^p] dx = 1.$$

Donc le chemin γ_4 tel que

$$\gamma_4(t) = (|\gamma_3(t)|)_{m,n} = \frac{|\gamma_3(t)|}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|\gamma_3(t)|^p dx\right)^{1/p}}$$

est bien défini et est dans $M_{m,n}$. De plus γ_4 joint $|w|$ à φ_m et on a

$$J(\gamma_4(t)) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\gamma_3(t)|^p dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} m|\gamma_3(t)|^p dx} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\gamma_3(t)|^p dx < \lambda,$$

puisque $\gamma_3(t) \in \mathcal{O}$. On a ainsi construit un chemin qui joint u à φ_m et qui reste à un niveau inférieur à λ. Une démarche analogue permet d'avoir un autre chemin joignant u à $-\varphi_n$ tout en restant à un niveau inférieur à λ. $\square$

Comme conséquence directe du Théorème 2.3 (avec $m \equiv n$), on obtient la caractérisation variationnelle suivante de la deuxième valeur propre du p-Laplacien avec poids dans $\mathbb{R}^N$.

Corollaire 2.1. *On a*

$$\lambda_2(m) = \inf_{\gamma\in\Gamma_0} \max_{u\in\gamma([-1,1])} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx,$$

où $\Gamma_0 = \{\gamma \in C([-1,1], M_m) : \ \gamma(-1) = \varphi_m$ *et* $\gamma(1) = -\varphi_m\}$.

Lemme 2.7. $\lambda_1[m_{(\varepsilon)}] \to +\infty$ *quand* $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$.

Preuve. D'après la définition de la première valeur propre positive on a:

$$\frac{1}{\lambda_1[m_{(\varepsilon)}]} = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} m_{(\varepsilon)}|\varphi_{m_{(\varepsilon)}}|^p dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_{m_{(\varepsilon)}}|^p dx} \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon m_1 - m_2)^+|\varphi_{m_{(\varepsilon)}}|^p dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_{m_{(\varepsilon)}}|^p dx}. \tag{2.23}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\varepsilon m_1 - m_2)^+|\varphi_{m_{(\varepsilon)}}|^p dx \leq ||\varepsilon m_1 - m_2)^+||_{L^s(\mathbb{R}^N)}||\varphi_{m_{(\varepsilon)}}||^p_{L^{ps'}(\mathbb{R}^N)}.$$

On distinguera deux cas:

- Si $N > p$ alors $ps' = p^*$. L'injection $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ permet d'écrire:

$$||\varphi_{m_{(\varepsilon)}}||^p_{p^*} \leq A \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_{m_{(\varepsilon)}}|^p dx$$

Par conséquent (2.23) implique $\dfrac{1}{\lambda_1[m_{(\varepsilon)}]} \leq A||(\varepsilon m_1 - m_2)^+||_{L^s(\mathbb{R}^N)}$. On a alors le résultat attendu puisque $(\varepsilon m_1 - m_2)^+ \in L^s(\mathbb{R}^N)$ et $(\varepsilon m_1 - m_2)^+ \downarrow 0$ quand $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$.

• Si $N \leq p$, comme $\int_{\mathbb{R}^N} m_{(\varepsilon)}|\varphi_{m_{(\varepsilon)}}|^p dx = 1$, alors d'après la Proposition 2.3 et la Remarque 2.5 on a: $\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_{m_{(\varepsilon)}}|^p dx \leq C(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{m_{(\varepsilon)}}|^p dx$. Donc $||\varphi_{m_{(\varepsilon)}}||^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq (1+C(\varepsilon)) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{m_{(\varepsilon)}}|^p dx$ et par conséquent

$$||\varphi_{m_{(\varepsilon)}}||^p_{L^{ps'}(\mathbb{R}^N)} \leq B^p(1 + C(\varepsilon)) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{m_{(\varepsilon)}}|^p dx.$$

On déduit alors que

$$\frac{1}{\lambda_1[m_{(\varepsilon)}]} \leq B^p(1 + C(\varepsilon))||(\varepsilon m_1 - m_2)^+||_{L^s(\mathbb{R}^N)}$$

et la conclusion s'en suit comme dans le premier cas. □

Corollaire 2.2. *Les valeurs propres $\lambda_1(m)$ et $\lambda_1(n)$ sont isolées dans le spectre de (2.1).*

Remarque 2.8. *De la preuve du Théorème2.3, on déduit que si $u \in M_{m,n}$ avec $u \geq 0$ est telle que $J(u) < \mu$ pour un certain réel μ, il est possible de relier u et φ_m par un chemin contenu dans $M_{m,n}$, constitué uniquement de fonctions positives et qui se maintient à des niveaux inférieurs à μ. De même si $v \in M_{m,n}$ avec $v \leq 0$ et $J(v) < \mu$, on peut joindre v à $-\varphi_n$ par un chemin constitué uniquement de fonctions négatives, entièrement contenu dans $M_{m,n}$ tout en restant à des niveaux strictement inférieurs à μ .*

Nous allons conclure ce paragraphe avec certaines propriétés de la valeur propre $c(m,n)$ comme fonction des poids m et n. La caractérisation variationnelle suivante de la valeur propre $c(m,n)$ qui est un peu différente de celle donnée en (2.21) jouera un grand rôle à cet effet.

Proposition 2.7.

$$c(m,n) = \inf_{\gamma \in \Gamma_1} \max_{u \in \gamma([-1,1])} A(u) \tag{2.24}$$

où $\Gamma_1 := \{\gamma \in C([-1,1], M_{m,n}) \ : \ \gamma(-1) \geq 0$ *et* $\gamma(1) \leq 0\}$.

Preuve. Désignons par d le second membre de (2.24). On a $\Gamma \subset \Gamma_1$ et alors $c(m,n) \geq d$.

Supposons par l'absurde que $d < c(m,n)$. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $d < \mu < c(m,n)$ et soit $\gamma \in \Gamma_1$ tel que $J(\gamma(t)) < \mu$ pour tout $t \in [-1,1]$. Nous allons construire un chemin $\gamma_1 \in \Gamma$ tel que $J(\gamma_1(t)) < \mu$ pour tout $t \in [-1,1]$, ce qui va contredire la définition (2.21) de $c(m,n)$.

Comme $\gamma(-1) \geq 0$ et $J(\gamma(-1)) < \mu$, alors d'après la Remarque 2.8 on peut relier φ_m et $\gamma(-1)$. De même, toujours par la Remarque 2.8 on peut relier $-\varphi_n$ et $\gamma(1)$. En conclusion on a relié φ_m et $\gamma(-1)$, $\gamma(-1)$ et $\gamma(1)$, par le chemin γ, puis $\gamma(1)$ et $-\varphi_n$. En mettant tous les chemins bout à bout, on obtient un chemin qui relie φ_m et $-\varphi_n$ et pour lequel J est à un niveau inférieur à $\mu < c(m,n)$. □

Proposition 2.8. *Soit $m = m_1 - m_2$, $n = n_1 - n_2$, $\hat{m} = \hat{m}_1 - \hat{m}_2$ et $\hat{n} = \hat{n}_1 - \hat{n}_2$. On suppose que les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4) sont satisfaites par les paires de poids m, n et $\hat{m}$, $\hat{n}$.*

Si $m_1 \leq \hat{m}_1$, $n_1 \leq \hat{n}_1$, $\hat{m}_2 \leq m_2$, $\hat{n}_2 \leq n_2$ presque partout dans $\mathbb{R}^N$, alors $c(m,n) \geq c(\hat{m},\hat{n})$.

Preuve. On désigne par W (resp. $\hat{W}$) l'espace de Sobolev défini dans le premier paragraphe et associé au poids m_2 (resp. $\hat{m}_2$). Il est clair qu'on a $W \subset \hat{W}$.

Soit $\gamma \in \Gamma$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\hat{m}(\gamma^+(t))^p + \hat{n}(\gamma^-(t))^p]dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} [m(\gamma^+(t))^p + n(\gamma^-(t))^p]dx = 1.$$

Donc le chemin $\hat{\gamma}$ tel que $\hat{\gamma}(t) = (\gamma(t))_{\hat{m},\hat{n}}$ est bien défini dans $\hat{W}$ et on a $\hat{\gamma}(t) \in \hat{\Gamma}_1 \subset \hat{W}$ pour tout $t \in [-1,1]$. De plus on a

$$\hat{J}(\hat{\gamma}(t)) = J(\hat{\gamma}(t)) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\gamma(t)|^p dx}{B_{\hat{m},\hat{n}}(\gamma(t))} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\gamma(t)|^p dx,$$

et la conclusion s'en suit. □

Remarquons que la monotonie donnée dans la Proposition 2.8 n'est pas en général stricte. On a une stricte monotonie moyennant certaine condition sur une fonction propre associée à $c(m,n)$, d'après la proposition suivante :

Proposition 2.9. *Si $m \leq \hat{m}$, $n \leq \hat{n}$ et si de plus*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\hat{m} - m)(u^+)^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\hat{n} - n)(u^+)^p dx > 0 \tag{2.25}$$

pour au moins une fonction propre associée à $c(m,n)$, alors $c(m,n) > c(\hat{m},\hat{n})$.

Preuve. On considère le cas où la première intégrale dans (2.25) est strictement positive (on utilisera un argument analogue si c'est la seconde intégrale de (2.25) qui est > 0). Ainsi on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} m(u^+)^p dx < \int_{\mathbb{R}^N} \hat{m}(u^+)^p dx \ \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} n(u^+)^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \hat{n}(u^+)^p dx. \tag{2.26}$$

On considère le chemin $\gamma \in \Gamma$ construit à partir de la fonction propre u de (2.25) comme dans la preuve du Théorème 2.3. En utilisant les notations de cette preuve, le chemin γ est constitué d'une première partie qui est un chemin reliant u à φ_m constitué par un chemin γ_1, suivi par un autre chemin γ_2 puis par γ_4. De façon similaire on a une deuxième partie qui est un chemin reliant u à $-\varphi_n$. Notons que $\tilde{J}(\gamma_1(t)) = c(m,n)$ alors que $\tilde{J}(\gamma_2(t)) < c(m,n)$ et $\tilde{J}(\gamma_4(t)) = c(m,n) < c(m,n)$ à l'exception du point $v = (u^+)_{m,n}$ de γ_2 où on a $\tilde{J}(v) = c(m,n)$. On normalise alors le chemin γ par rapport aux poids $\hat{m}$ et $\hat{n}$:

$$\hat{\gamma}(t) := \frac{\gamma(t)}{B_{\hat{m},\hat{n}}(\gamma(t))^{1/p}}.$$

Comme $B_{\hat{m},\hat{n}}(\gamma(t)) \geq B_{m,n}(\gamma(t)) = 1$, on en déduit que le chemin $\hat{\gamma}$ est bien défini et on a $\hat{\gamma}(t) \in M_{\hat{m},\hat{n}}$ pour tout t.

Donnons une estimation de $\tilde{J}(\hat{\gamma}(t))$. Pour cela on distinguera deux cas en utilisant la seconde égalité de (2.26). Si $\int_{\mathbb{R}^N} n(u^+)^p dx < \int_{\mathbb{R}^N} \hat{n}(u^+)^p dx$ alors $B_{\hat{m},\hat{n}}(\gamma(t)) > 1$ et on a $J(\hat{\gamma}(t)) < c(m,n)$ pour tout t. Ceci implique que $c(\hat{m},\hat{n}) < c(m,n)$. Si $\int_{\mathbb{R}^N} n(u^+)^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{n}(u^+)^p dx$, les mêmes calculs donnent $J(\hat{\gamma}(t)) < c(m,n)$ pour tout t, à l'exception du point $v = -u^-/B_{\hat{m},\hat{n}}(-u^-)^{1/p}$ où $J(v) = c(m,n)$. Le chemin $\hat{\gamma}$ joint $\varphi_m/B_{\hat{m},\hat{n}}(\varphi_m)^{1/p}$ à $-\varphi_n/B_{\hat{m},\hat{n}}(-\varphi_n)^{1/p}$. La fonctionnelle J en ces deux points prend des valeurs strictement inférieur à $c(m,n)$. En utilisant la Remarque 2.8, on peut construire un chemin $\hat{\hat{\gamma}}$ joignant $\varphi_{\hat{m}}$ à $\varphi_{\hat{n}}$, le long duquel J sera à des niveaux $< c(m,n)$ à l'exceprtion du point v.

Supposons par l'absurde que $c(\hat{m},\hat{n}) = c(m,n)$. Le lemme ci-dessous, appliquée à la restriction $\hat{J}$ de J à la variété $M_{\hat{m},\hat{n}}$, permet de conclure que $\hat{\hat{\gamma}}$ contient un point critique de $\hat{J}$ au niveau $c(\hat{m},\hat{n})$. Par conséquent v ne peut être que ce point critique, mais ceci est absurde puisque v ne change pas de signe dans $\mathbb{R}^N$. □

Lemme 2.8. *Soit $E,g,m,f,\tilde{f}$ comme dans (1.10) et soient $u,v \in M$ avec $u \neq v$. On suppose que l'ensemble H défini dans la Proposition1.2 est non vide et que (1.11) est satisfaite. On suppose de plus que $h \in H$ est tel que*

$$\max_{u \in h([-1,1])} \tilde{f}(u) = c$$

où c est la valeur dans (1.11). Alors il existe un point critique $u \in h([-1,1])$ de $\tilde{f}$ avec $\tilde{f}(u) = c$.

Ainsi dans une situation de "mountain pass", tout chemin minimisant contient un point critique avec valeur critique c.

La preuve de ce lemme peut être trouvée dans [8].

Notons que d'après la définition (2.21), il est clair que $c(m,n)$ est homogène de dégré -1, c'est à dire:

$$c(sm,sn) = \frac{1}{s}\, c(m,n) \ \ \forall s > 0.$$

On a aussi un résultat de sous-homogenéité qui sera utilisé plus tard.

Proposition 2.10. *On suppose que les poids m,n satisfont les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4). Si $0 < s < \hat{s}$, alors*

$$c(sm,n) > c(\hat{s}m,n) \ \text{ et } \ c(m,sn) > c(m,\hat{s}n). \tag{2.27}$$

Preuve. Remarquons dans un premier temps que la paire de poids $\hat{s}m,n$ (aussi bien que les autres paires de poids) satisfait aussi les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4). De plus les "parties m_2" de ces différentes paires de poids sont comparables au sens de l'hypothèses (H_4), ce qui implique qu'un même espace W peur être utilisé pour tous ces poids.

On fera la preuve pour la première inégalité (un argument similaire peut être utilisé pour la seconde inégalité).

Soit $u \in M_{sm,n}$ une fonction propre associée à $c(sm,n)$ et soit γ le chemin dans $M_{sm,n}$ qui relie φ_{sm} et $-\varphi_n$, construit dans la preuve du Théorème 2.3. Le chemin $\hat{\gamma}$ défini par $\hat{\gamma}(t) = (\frac{s}{\hat{s}})^{1/p}\gamma(t)^+ - \gamma(t)^-$ est admissible dans la définition (2.21) de $c(\hat{s}m,n)$. De plus on a

$$J(\hat{\gamma}(t)) = \frac{s}{\hat{s}}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\gamma(t)^+|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\gamma(t)^-|^p dx \leq J(\gamma(t))$$

avec une stricte inégalité si $\gamma(t)^+ \not\equiv 0$. Ainsi le chemin $\hat{\gamma}$ est dans $M_{\hat{s}m,n}$, relie $\varphi_{\hat{s}m}$ et $-\varphi_n$ et se trouve à un niveau $< c(sm,n)$ à l'exception du point $v = -u^-/B_{sm,n}(-u^-)^{1/p}$ où il est au niveau $c(sm,n)$. On déduit alors que $c(\hat{s}m,n) \leq c(sm,n)$. Supposons par l'absurde que $c(\hat{s}m,n) = c(sm,n)$. En appliquant le Lemme 2.8 au chemin $\hat{\gamma}$ sur la variété $M_{\hat{s}m,n}$, on conclut alors que v est un point critique de la restriction de J à $M_{\hat{s}m,n}$ au niveau $c(\hat{s}m,n)$. Mais ceci est absurde puisque v ne change pas de signe dans $\mathbb{R}^N$. □

Enfin, donnons un résultat de dépendance continue de $c(m,n)$ par rapport aux poids m et n. La situation est un peu compliquée dans notre contexte, par rapport à ce qui avait été fait dans [9], à cause des hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4) faites sur ces poids.

Proposition 2.11. *Soit $m = m_1 - m_2$, $n = n_1 - n_2$ satisfaisant les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4). On pose $m_k = m_{1k} - m_{2k}$, $n_k = n_{1k} - n_{2k}$ avec $m_{1k}, m_{2k}, n_{1k}, n_{2k} \geq 0$, $k = 1,2,...$ On suppose que m_{1k}, n_{1k} appartiennent à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^s(\mathbb{R}^N)$ et convergent dans $L^s(\mathbb{R}^N)$ vers m_1, n_1 respectivement. On suppose de plus que m_{2k}, n_{2k} appartiennent à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et convergent vers m_2, n_2 respectivement dans le sens suivant: pour $\varepsilon_k \to 0$,*

$$|m_{2k} - m_2| \leq \varepsilon_k m_2 \text{ et } |n_{2k} - n_2| \leq \varepsilon_k n_2, \text{ pp. dans } \mathbb{R}^N. \quad (2.28)$$

Alors $c(m_k, n_k) \to c(m,n)$.

La convergence (2.28) est inhabituelle mais elle suffira plus tard pour montrer la continuité de la première courbe dans le spectre de Fučik.

Preuve. Faisons d'abord remarquer que, sous les hypothèses de la Proposition 2.11, les "parties m_2" des poids m, n, m_k et n_k sont comparables au sens de l'hypothèse (H_4) (avec des constantes a,b indépendantes de k). Par conséquent on peut utiliser un même espace W.

Nous allons d'abord montrer la semi-continuité supérieure. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $\gamma \in \Gamma$ tel que $\max_t J(\gamma(t)) < c(m, n) + \varepsilon$. On pose $\gamma_k(t) := \gamma(t)/B_{m_k,n_k}(\gamma(t))^{1/p}$. Montrons que γ_k est bien défini et que

$$\max_t J(\gamma_k(t)) < c(m,n) + \varepsilon \quad (2.29)$$

pour k suffisamment grand. Une fois ceci fait, on déduit de la Proposition 2.7 que

$$c(m_k,n_k) < c(m,n) + \varepsilon.$$

Puisque le réel $\varepsilon > 0$ pris au début est arbitraire, on conclut que

$$\limsup c(m_k,n_k) \leq c(m,n).$$

Il est clair que le chemin γ_k sera bien défini si $B_{m_k,n_k}(\gamma(t)) > 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Pour montrer cette dernière condition pour des k assez grands, on suppose par l'absurde que pour une sous-suite, on a $B_{m_k,n_k}(\gamma(t_k)) \leq 0$ avec $t_k \in [0,1]$. Pour une autre sous-suite on aura $t_k \to t_0$ et $\gamma(t_k) \to \gamma(t_0)$ dans W et presque partout dans $\mathbb{R}^N$. On a

$$B_{m_k,n_k}(\gamma(t_k)) \to B_{m,n}(\gamma(t_0)).$$

En effet

$$|B_{m_k,n_k}(\gamma(t_k)) - B_{m,n}(\gamma(t_0))|$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |m_{1k}\gamma^+(t_k)^p - m_1\gamma^+(t_0)^p|dx + \int_{\mathbb{R}^N} |n_{1k}\gamma^-(t_k)^p - n_1\gamma^-(t_0)^p|dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} |m_{2k}\gamma^+(t_k)^p - m_2\gamma^+(t_0)^p|dx + \int_{\mathbb{R}^N} |n_{2k}\gamma^-(t_k)^p - n_2\gamma^-(t_0)^p|dx \end{aligned} \tag{2.30}$$

Montrons d'abord que les deux premières intégrales dans (2.30) tendent vers zéro quand $k \to +\infty$. En utilisant l'inégalité de Hölder on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |m_{1k}\gamma^+(t_k)^p - m_1\gamma^+(t_0)^p|dx \leq ||m_{1k} - m_1||_{L^s(\mathbb{R}^N)}||\gamma^+(t_k)||^p_{L^{ps'}(\mathbb{R}^N)}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} m_1|\gamma^+(t_k)^p - \gamma^+(t_0)^p|dx.$$

La conclusion s'en suit puisque $\gamma \in \Gamma$ et $W \hookrightarrow L^p(m_1, \mathbb{R}^N)$. Un raisonnement analogue est valable pour $\int_{\mathbb{R}^N} |n_{1k}\gamma^-(t_k)^p - n_1\gamma^-(t_0)^p|dx$.

Montrons maintenant que $\int_{\mathbb{R}^N} |m_{2k}\gamma^+(t_k)^p - m_2\gamma^+(t_0)^p|dx \to 0$. En utilisant la décomposition précédente on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |m_{2k}\gamma^+(t_k)^p - m_2\gamma^+(t_0)^p|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |m_{2k} - m_2|\gamma^+(t_k)^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} m_2|\gamma^+(t_k)^p - \gamma^+(t_0)^p|dx.$$

Puisque $\gamma(t_k) \to \gamma(t_0)$ dans W, alors $\gamma(t_k) \to \gamma(t_0)$ dans $L^p(m_2, \mathbb{R}^N)$ et par conséquent $m_2^{1/p}\gamma(t_k) \to m_2^{1/p}\gamma(t_0)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Donc il existe $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et une sous-suite de $\gamma(t_k)$ (que l'on notera toujours $\gamma(t_k)$) telles que $|m_2^{1/p}\gamma(t_k)| \leq v$ p.p dans $\mathbb{R}^N$. Il s'en suit que

$$m_2|\gamma^+(t_k)^p - \gamma^+(t_0)^p| \leq v^p + m_2\gamma(t_0)^p \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ et}$$

$$|m_{2k} - m_2|\gamma^+(t_k)^p \leq v^p + Bm_2\gamma(t_k)^p \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Puisque $m_2|\gamma^+(t_k)^p - \gamma^+(t_0)^p| \to 0$ et $|m_{2k} - m_2|\gamma^+(t_k)^p$ presque partout dans $\mathbb{R}^N$, on conclut en utilisant le théorème de la convergence dominée que $\int_{\mathbb{R}^n} m_2|\gamma^+(t_k)^p - \gamma^+(t_0)^p|dx \to 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} |m_{2k} - m_2|\gamma^+(t_k)^p dx \to 0$. Par conséquent $\int_{\mathbb{R}^N} |m_{2k}\gamma^+(t_k)^p - m_2\gamma^+(t_0)^p|dx \to 0$ et ainsi $B_{m_k,n_k}(\gamma(t_k)) \to B_{m,n}(\gamma(t_0))$. On déduit que $B_{m,n}(\gamma(t_0)) \leq 0$. Mais ceci est absurde puisque $\gamma \in \Gamma$.

Montrons maintenant (2.29). Pour cela on pose $\max_t J(\gamma_k(t)) = J(\gamma_k(\tau_k))$ et on suppose par absurde que pour une sous-suite on a

$$J(\gamma_k(\tau_k)) \geq c(m,n) + \varepsilon. \tag{2.31}$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on montre qu'à une sous-suite près on a: $\tau_k \to \tau_0$ et $B_{m_k,n_k}(\gamma(\tau_k)) \to B_{m,n}(\gamma(\tau_0)) = 1$. Par conséquent, en utilisant (2.31), on a $J(\gamma(\tau_0)) \geq c(m,n) + \varepsilon$, absurde d'après le choix du chemin γ.

Pour montrer la continuité inférieure, on suppose par l'absurde qu'il existe une sous-suite de $c(m_k,n_k)$ notée encore $c(m_k,n_k)$ telle que $c(m_k,n_k) \to c_0$ avec $c_0 < c(m,n)$. On désigne par $u_k \in M_{m_k,n_k}$ la fonction prpore associée à $c(m_k,n_k)$. Nous allons d'abord montrer que u_k est borné dans W. Il est clair, en utilisant l'équation vérifiée par u_k, que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^p dx = c(m_k,n_k)$. Par conséquent $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^p dx$ reste borné et il en est de même pour les intégrales $\int_{\mathbb{R}^N} m_{1k}|u_k|^p dx$ et $\int_{\mathbb{R}^N} n_{1k}|u_k|^p dx$. (Ici on utilise les injections rappelées plus haut et la Proposition 2.3 si $N \leq p$). Il reste à montrer que $\int_{\mathbb{R}^N} m_2|u_k|^p dx$ est aussi borné. Pour cela on part de l'hypothèse $B_{m_k,n_k}(u_k) = 1$, et en utilisant (H_4) et (2.28) on a:

$$\begin{aligned}
(1-\varepsilon_k)\min(a,1)\int_{\mathbb{R}^N} m_2|u_k|^p dx &\leq (1-\varepsilon_k)\left[\int_{\mathbb{R}^N} m_2(u_k^+)^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} n_2(u_k^-)^p dx\right] \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} m_{2k}(u_k^+)^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} n_{2k}(u_k^-)^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} m_{1k}(u_k^+)^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} n_{1k}(u_k^+)^p dx.
\end{aligned}$$

Donc $\int_{\mathbb{R}^N} m_2|u_k|^p dx$ est borné, et par conséquent u_k est borné dans W. Il s'en suit que pour une sous-suite notée encore u_k, $u_k \to u$ faiblement dans W, fortement dans $L^p(m_1, \mathbb{R}^n)$ et dans $L^p(n_1, \mathbb{R}^n)$.

Nous allons prouver qu'on a la convergence forte dans W. On pose $c(m_k,n_k) = c_k$ et on prend $u_k - u_l$ comme fonction test dans les équations satisfaites par u_k et u_l. Ce qui donne:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k \nabla(u_k - u_l)dx = c_k \int_{\mathbb{R}^N} [m_k(u_k^+)^{p-1} - n_k(u_k^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u_l|^{p-2}\nabla u_l)\nabla(u_k - u_l)dx \\
&= c_k \int_{\mathbb{R}^N} m_k[(u_k^+)^{p-1} - (u_l^+)^{p-1}](u_k - u_l)dx + c_k \int_{\mathbb{R}^N} n_k[-(u_k^-)^{p-1} + (u_l^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx \\
&+ (c_k - c_l)\int_{\mathbb{R}^N} [m_k(u_l^+)^{p-1} - n_k(u_l^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx \\
&+ c_l \int_{\mathbb{R}^N} [(m_k - m_l)(u_l^+)^{p-1} - (n_k - n_l)(u_l^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx \\
&\leq c_k(I_1 + I_2) + |c_k - c_l| I_3 + c_l I_4,
\end{aligned}$$

où

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^N} m_{1k}[(u_k^+)^{p-1} - (u_l^+)^{p-1}](u_k - u_l)dx,\ I_2 = \int_{\mathbb{R}^N} n_{1k}[-(u_k^-)^{p-1} + (u_l^-)^{p-1}](u_k - u_l)dx,$$

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}^N} [|m_k|(u_k^+)^{p-1} + |n_k|(u_l^-)^{p-1}]|u_k - u_l|dx \text{ and}$$

$$I_4 = \int_{\mathbb{R}^N} [|m_k - m_l|(u_l^+)^{p-1} + |n_k - n_l|(u_l^-)^{p-1}]|u_k - u_l|dx.$$

En argumentant comme dans la preuve du Lemme 2.4 on montre aisément qu'on a le résultat esperé, c'est à dire que $u_k \to u$ fortement dans W. Remarquons que l'hypothèse (2.28) sera utilisée pour montrer que $I_4 \to 0$.

Il est clair que $u \in M_{m,n}$ et par passage à la limite dans l'équation satisfaite par u_k, on montre que u est solution de (2.1) avec $\lambda = c_0$. Puisque par hypothèse $c_0 < c(m,n)$, on déduit du Théorème 2.3 que $c_0 = \lambda_1(m)$ et $u = \varphi_m$ ou bien $c_0 = \lambda_1(n)$ et $u = -\varphi_n$. Considérons le premier cas (un argument similaire peut être utilisé pour le second cas). On pose $v_k = u_k^- / (\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k^-|^p dx)^{1/p}$ et $\Omega_k^- = \{x \in \mathbb{R}^N :\ u_k(x) < 0\}$. On déduit de l'équation satisfaite par u_k que

$$\frac{1}{c_k} = \int_{\mathbb{R}^N} n_k (v_k)^p dx \leq \int_{\Omega_k^-} n_{1k}(v_k)^p dx.$$

Considérons le cas $N > p$ (un argument similaire peut être utilisé dans le cas $N \leq p$). Nous allons utiliser les mêmes arguments que dans la Proposition 2.6. En utilisant l'inégalité de Hölder on a:

$$\frac{1}{c_k} \leq ||n_{1k}||_{L^s(\Omega_k^-)} ||v_k||^p_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq A^p ||n_{1k}||_{L^s(\Omega_k^-)},$$

ce qui implique que pour un certain $\xi > 0$ on a $||n_{1k}||_{L^s(\Omega_k^-)} \geq \xi$ pour k suffisamment grand. De plus, puisque $n_{1k} \to n_1$ dans $L^s(\mathbb{R}^N)$, on peut choisr $r > 0$ tel que $||n_{1k}||^s_{L^s(B_r^c)} \leq \xi^s/2$ pour k suffisamment grand, et par consequent $||n_{1k}||^s_{L^s(\Omega_{kr}^-)} \geq \xi^s/2$ où $\Omega_{kr}^- := \Omega_k^- \cap B_r$. Comme n_{1k} converge vers n_1 dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, alors on déduit de cette dernière inégalité qu'il existe une certaine constante $\zeta > 0$, indépendante de k, telle que $|\Omega_{kr}^-| > \zeta$ pour k suffisamment grand. Mais ceci est absurde puisque $u_k \to \varphi_m$ dans $L^p(B_r)$ et $\varphi_m(x) > 0$ presque partout dans B_r. $\square$

Remarque 2.9. *Si on remplace l'hypothèse (H_4) dans la Proposition 2.11 par $(H_4)'$, alors l'hypothèse (2.28) serait remplacer de façon naturelle par la convergence de m_{2k},n_{2k} dans $L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ respectivement vers m_2,n_2.*

2.6 Spectre de Fučik dans $\mathbb{R}^N$

Soit m,n les poids définis dans la première partie et vérifiant les conditions (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4). Le spectre de Fučik est défini comme l'ensemble $\Sigma = \Sigma(m,n)$ des couples de réels (α,β) pour lesquels le problème

$$-\Delta_p u = \alpha m(x)(u^+)^{p-1} - \beta n(x)(u^-)^{p-1} \text{ dans } \mathbb{R}^N \tag{2.32}$$

admet une solution non triviale. Il est clair que Σ contient les droites $\lambda_1(m)\times\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\times\lambda_1(n)$. C'est exactement pour les couples (α,β) appartenant à ces droites que (2.32) admet une solution non triviale ayant un signe constant dans $\mathbb{R}^N$. Si $m^- \not\equiv 0$ avec $m \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $N > p$ (resp $n^- \not\equiv 0$ avec $n \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et $N > p$) alors Σ contient également la droite $\lambda_{-1}(m)\times\mathbb{R}$ (resp. la droite $\mathbb{R}\times\lambda_{-1}(n)$). On note $\Sigma^* = \Sigma^*(m,n)$ l'ensemble Σ privé de ces deux, trois ou quatre droites triviales. Σ^* contient les éléments (α,β) de Σ pour lesquels (2.32) admet une solution changeant de signe. Remarquons que si $N \le p$, des résultats de non existence de [16] et de l'hypothèse (H_2) , il n'existe pas de valeur propre principale négative. On déduit également des propriétés de la valeur propre principale positive que si $(\alpha,\beta)\in\Sigma^*$ avec $\alpha \ge 0$ et $\beta \ge 0$, alors $\alpha > \lambda_1(m)$ et $\beta > \lambda_1(n)$.
Le but de cette partie est d'étudier les éléments de Σ^* qui sont dans $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. On a le résultat suivant :

Théorème 2.4. *Pour tout $r > 0$, la droite d'équation $\beta = r\alpha$ intersecte $\Sigma^*\cap(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$. De plus le premier point (a,b) de cette intersection est donnée par :*
$a = \alpha(r) = c(m,rn)$ et $b = \beta(r) = c(m/r,n)$.

Preuve. Si $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ alors $(\alpha,\beta)\in\Sigma^*$ et aucun élément de Σ^* n'est pas dans le segment $[(0,0);(\alpha,\beta)]$ si et seulement si $c(\alpha m,\beta n) = 1$. Et comme $\beta = r\alpha$, alors l'homogénéité de $c(m,n)$ permet de déduire que $\alpha = \alpha(r) = c(m,rn)$ et $\beta = \beta(r) = r\alpha(r) = c(m/r,n)$. □

En faisant varier $r > 0$ dans $\mathbb{R}^*_+$, on obtient une première courbe du spectre de Fučik :

$$\mathcal{C} = \{(\alpha(r),\beta(r)),\, r\in\mathbb{R}^*_+\}\subset\Sigma^*\cap(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$$

Donnons quelques propriétés de la courbe $\mathcal{C}$ ainsi obtenue :

Proposition 2.12. *Les fonctions $r\mapsto\alpha(r)$ et $r\mapsto\beta(r)$ du Théorème2.4 sont continues. De plus α est strictement décroissante; β est strictement croissante et on a :*

$$\lim_{r\to 0}\alpha(r) = +\infty \qquad \lim_{r\to+\infty}\beta(r) = +\infty.$$

Preuve. La continuité des fonctions α et β vient de la Proposition 2.11 et la monotonie vient de la Proposition 2.10. Pour montrer par exemple que $\alpha(r)\to+\infty$ quand $r\to 0$. On suppose par l'absurde que $\alpha(r)$ reste borné au voisinage de 0. Alors $\lim_{r\to 0}\beta(r) = \lim_{r\to 0} r\alpha(r) = 0$, absurde puisque

$$\beta(r) = c(m/r,n) > \max\{\lambda_1(m/r),\lambda_1(n)\}$$

pour tout $r > 0$. On utilise le même argument pour montrer que $\beta(r)\to+\infty$ quand $r\to+\infty$.
□

En notant $\alpha_\infty = \lim_{r\to+\infty} \alpha(r)$ et $\beta_\infty = \lim_{r\to 0} \beta(r)$, on remarque d'après la Proposition 2.12 que la courbe $\mathcal{C}$ est une courbe de type hyperbolique dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dont les asymptotes sont les droites d'équations $\alpha = \alpha_\infty$ et $\beta = \beta_\infty$.

La suite du paragraphe sera consacrée à l'étude du comportement asymptotique de la courbe $\mathcal{C}$, c'est à dire à la détermination des valeurs de α_∞ et β_∞. Pour cela on pose

$$\bar\alpha = \inf\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^+|^p dx \ : \ u \in W, \ \int_{\mathbb{R}^N} m(u^+)^p = 1 \text{ et } \int n(u^-)^p dx > 0\}$$
$$\bar\beta = \inf\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^p dx \ : \ u \in W, \ \int_{\mathbb{R}^N} n(u^-)^p dx = 1 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} m(u^+)^p dx > 0\}.$$

Il est clair que $\bar\alpha \geq \lambda_1(m)$ et $\bar\beta \geq \lambda_1(n)$. Rappelons que le support d'une fonction mesurable u dans $\mathbb{R}^N$ est défini comme: *supp* $u = \overline{\mathbb{R}^N}\backslash\mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^N$ sur lequel u s'annule presque partout.

Avant d'étudier le comportement asymptotique de la courbe $\mathcal{C}$, énonçons le lemme ci-dessous qui nous sera d'une grande utilité par la suite.

On considère le problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = \lambda m|u|^{p-2}u \ \text{ dans } B_R(o) \\ u & = 0 \ \text{ sur } \partial B_R(o) \end{cases}$$

où $B_R(o) \equiv B_R$ désigne la boule centrée à l'origine de rayon $R > 0$. On désigne par $\lambda_R = \lambda_1(m,B_R)$ la première valeur propre principale du p-Laplacien pour ce problème et par φ_R la fonction propre normalisée associée, c'est à dire $\int_{B_R} m|\varphi_R|^p = 1$. ($\lambda_R$ et φ_R existent grâce à l'hypothèse (H_3) pour des valeurs suffisamment grande de R).

Lemme 2.9. *La valeur propre λ_R tend vers $\lambda_1(m)$ et la fonction propre associée φ_R tend vers φ_m dans W, lorsque $R \to +\infty$.*

Preuve. On utilisera les mêmes arguments que dans [39] (Lemme 5.2).
Il est évident que la fonction φ_R (prolongée par 0 en dehors de la boule B_R) appartient à W et satisfait $\int_{\mathbb{R}^N} m(\varphi_R)^p = 1$. Ce qui implique que

$$\lambda_1(m) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx = \lambda_R$$

et donc

$$\liminf \lambda_R \geq \lambda_1(m).$$

Soit $\delta \in]0,1[$, puisque $\varphi_m \in W$, il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_m|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^p dx\right| \leq \frac{\delta}{2}, \quad \left|\int_{\mathbb{R}^N} m_2|\varphi_m|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} m_2|\psi|^p dx\right| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Par conséquent

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} m_1|\varphi_m|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} m_1|\psi|^p dx\right| \leq \frac{\delta}{2}.$$

(Ici on a utilisé l'injection $W \hookrightarrow L^p(m_1,\mathbb{R}^N)$) Ceci implique que $\left|\int_{\mathbb{R}^N} m|\varphi_m|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} m|\psi|^p dx\right| \leq \delta$. Comme $\int_{\mathbb{R}^N} m|\varphi_m|^p dx = 1$, on déduit que $\int_{\mathbb{R}^N} m|\psi|^p dx > 0$. Par conséquent:

$$\lambda_R \leq \frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla\psi|^p dx}{\displaystyle\int_{B_R} m|\psi|^p dx} \leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^p dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} m|\psi|^p dx},$$

donc pour R assez grand on a:

$$\lambda_R \leq \frac{\delta/2 + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_m|^p dx}{-\delta + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} m|\varphi_m|^p dx} = \frac{\delta/2 + \lambda_1(m)}{-\delta+1} \quad \forall\, \delta \in]0,1[.$$

Par conséquent

$$\lim_{R\to+\infty} \sup \lambda_R \leq \frac{\frac{\delta}{2} + \lambda_1(m)}{-\delta+1} \quad \forall\, \delta \in]0,1[.$$

Le réel δ étant arbitrairement, on déduit alors que $\limsup \lambda_R \leq \lambda_1(m)$, d'où $\lambda_R \to \lambda_1(m)$ quand $R \to +\infty$.

Montrons maintenant que $\varphi_R \to \varphi_m$ dans W.

On a :

$$\lambda_R = \int_{B_R} |\nabla\varphi_R|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_R|^p dx \to \lambda_1(m) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_m|^p dx$$

et donc $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_R|^p dx$ est borné. Par ailleurs comme $\int_{\mathbb{R}^N} m|\varphi_R|^p dx = 1$, on déduit en utilisant l'inégalité de Hölder, le différentes injections rappelées dans les deux premiers paragraphes de ce chapitre et la Proposition 2.3 (dans le cas $m = n$), que $\int_{\mathbb{R}^N} m_2|\varphi_R|^p dx$ est borné. Par conséquent φ_R est borné dans W. Il s'en suit que φ_R converge vers une certaine fonction ϕ, faiblement dans W et fortement dans $L^p(m_1,\mathbb{R}^N)$. Donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_1|\varphi_R|^p dx \to \int_{\mathbb{R}^N} m_1|\phi|^p dx$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_R|^p dx = \lambda_1(m),$$

c'est à dire $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx \leq \lambda_1(m)$. On conclut alors que $\int_{\mathbb{R}^N} m|\phi|^p dx \leq 1$ (en utilisant la caractérisation variationnelle de la première valeur propre $\lambda_1(m)$). D'autre part on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_2|\phi|^p dx \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^N} m_2|\varphi_R|^p dx = -1 + \int_{\mathbb{R}^N} m_1|\phi|^p dx$$

puisque

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_2|\varphi_R|^p dx = -1 + \int_{\mathbb{R}^N} m_1|\varphi_R|^p dx$$

et $\varphi_R \to \phi$ dans $L^p(m_1, \mathbb{R}^N)$, donc $\int_{\mathbb{R}^N} m|\phi|^p dx \geq 1$. Par conséquent $\int_{\mathbb{R}^N} m|\phi|^p dx = 1$ et alors $\lambda_1(m) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx$ et $\phi = \varphi_m$. On a donc montré que

$$\lim \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_R|^p dx = \lambda_1(m) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_m|^p dx.$$

Ce qui implique que $\nabla\varphi_R \to \nabla\varphi_m$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. De même on a:

$$\begin{aligned} \lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} m_2|\varphi_R|^p dx &= \lim_{R\to+\infty} [-1 + \int_{\mathbb{R}^N} m_1|\varphi_R|^p dx] \\ &= -1 + \int_{\mathbb{R}^N} m_1|\phi|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} m_2|\phi|^p dx. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Il s'en suit que $\varphi_R \to \phi = \varphi_m$ dans W, ce qui achève la démonstration. $\square$

La proposition suivante décrit le comportement asymptotique de la première courbe du spectre de Fučik.

Proposition 2.13. *Les valeurs asymptotiques α_∞ et β_∞ sont respectivement égales à $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$. De plus , si $N \geq p$, alors $\bar{\alpha} = \lambda_1(m)$ et $\bar{\beta} = \lambda_1(n)$. Si $N < p$ alors*

(i). $\bar{\alpha} = \lambda_1(m)$ si $supp\, n^+$ n'est pas borné et $\bar{\alpha} > \lambda_1(m)$ si $supp\, n^+$ est borné dans $\mathbb{R}^N$.
(ii). $\bar{\beta} = \lambda_1(n)$ si $supp\, m^+$ n'est pas borné et $\bar{\beta} > \lambda_1(n)$ si $supp\, m^+$ est borné dans $\mathbb{R}^N$.

Preuve. On fera la preuve pour $\bar{\alpha}$. Des arguments similaires permettent d'avoir les mêmes résultats pour $\bar{\beta}$ puisqu'il suffit d'interchanger les poids m et n.

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathcal{C}$ et soit u la solution correspondante. On sait que u change de signe dans $\mathbb{R}^N$, donc en prenant $v = u^+$ ou $v = u^-$ comme fonction test dans (2.32) on a:

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^N} m(u^+)^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^+|^p dx > 0 \quad \text{et } \beta \int_{\mathbb{R}^N} n(u^-)^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^p dx > 0$$

et par conséquent $\alpha \geq \bar{\alpha}$, c'est à dire $\alpha(s) \geq \bar{\alpha}$ pour tout $s > 0$. Par passage à la limite on déduit alors que $\alpha_\infty \geq \bar{\alpha}$. Supposons par l'absurde que $\alpha_\infty > \bar{\alpha}$. Alors il existe $v \in W$ avec $\int_{\mathbb{R}^N} m(v^+)^p dx = 1$, $\int_{\mathbb{R}^N} n(v^-)^p dx > 0$ et $\bar{\alpha} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^+|^p dx < \alpha_\infty$. Comme $\alpha_\infty \leq \alpha(s) = c(m,sn) \ \ \forall s > 0$, on déduit alors que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^+|^p dx < c(m,sn) \ \ \forall s > 0$. On choisit $s > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^-|^p dx / \int_{\mathbb{R}^N} sn(v^-)^p dx \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^+|^p dx.$$

Les fonctions v^+ et $v_0 = -v^-/\left(\int sn(v^-)^p dx\right)^{1/p}$ sont deux éléments de la variété $M_{m,sn}$. De plus on a : $v^+ \geq 0$ et $v_0 \leq 0$. On considère le chemin défini par

$$\gamma(t) := \frac{1}{(t^p + (1-t)^p)^{1/p}} [tv^+ + (1-t)v_0] \ , t \in [0,1].$$

On a:

$$B_{m,sn}(\gamma(t)) = \frac{1}{t^p + (1-t)^p}\left\{t^p \int_{\mathbb{R}^N} m(v^+)^p dx + (1-t)^p \int_{\mathbb{R}^N} sn(v_0)^p dx\right\} = 1$$

pour tout $t \in [0,1]$. Par conséquent γ est bien défini dans $M_{m,sn}$. De plus

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\gamma(t)|^p dx = \frac{1}{t^p + (1-t)^p}\left\{t^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^+|^p dx + (1-t)^p \int |\nabla v_0|^p dx\right\}$$

$$= \frac{1}{t^p + (1-t)^p}\left\{t^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^+|^p dx + (1-t)^p \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^N} sn(v^-)^p dx} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^-|^p dx\right\} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^+|^p dx.$$

Ce qui implique que

$$\max_{t\in[0,1]} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\gamma(t)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^+|^p dx \ \text{ et } \gamma \in \Gamma\ ,$$

c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^+|^p dx \geq c(m,sn).$$

Ce qui est absurde puisque par hypothèse

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^+|^p dx < c(m,sn).$$

D'où $\alpha_\infty = \bar{\alpha}$.

On considère maintenant le cas $N \geq p$. On veut montrer que $\bar{\alpha} = \lambda_1(m)$. On utilsera les mêmes arguments que dans [9]. L'idée consiste à approcher une fonction en la multipliant par une autre qui tend vers 1 dans $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, puis d'ajouter une partie négative qui tend vers 0. Rappelons que l'argument utilisé pour cette construction est locale, donc applicable pour notre cas.

On considère la suite de fonctions $(a_k(x))$ définie par, pour $N > p$

$$a_k(x) = \begin{cases} 1 \ \text{ si } |x| \geq 1/k \\ 2k|x| - 1 \ \text{ si } 1/2k < |x| < 1/k \\ 0 \ \text{ si } |x| \leq 1/2k \end{cases}$$

et pour $N = p$,

$$a_k(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{k} \ \text{ si } |x| \geq 1/k \\ |x|^{\delta_k} - 1/k \ \text{ si } (1/k)^{1/\delta_k} < |x| < 1/k \\ 0 \ \text{ si } |x| \leq (1/k)^{1/\delta_k} \end{cases}$$

avec $\delta_k \in]0,1[$ tel que $(1/k)^{\delta_k} = 1 - 1/k$.

Par un simple calcul on peut montrer que $a_k \to 1$ dans $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors $u(x)a_k(x-x_0) = v_k(x) \to u(x)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et v_k s'annule dans un voisinage de x_0. On prend maintenant $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap W$ et on pose

$$X_k(x) = v_k(x) - u(x) = u(x)[a_k(x-x_0) - 1].$$

On a $X_k \to 0$ dans W, puisqu'on a la convergence dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et il est facile de voir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_2|X_k|^p dx \to 0.$$

On pose alors $u = \varphi_m$ et on a $v_k(x) = \varphi_m(x)a_k(x-x_0) \to \varphi_m(x)$ dans W, $v_k(x) = 0$ pour tout $x \in B_{\varepsilon_k}(x_0)$ avec $0 < \varepsilon_k \leq 1/k$. On prend $x_0 \in supp\ n^+$. En régularisant la fonction caractéristique de $supp\, n^+ \cap B_{\frac{1}{2}\varepsilon_k}(x_0)$, on obtient une fonction $w_k \geq 0$ avec $w_k \in C_c^\infty[B_{\varepsilon_k}(x_0)]$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} n(w_k)^p dx > 0.$$

On pose alors

$$u_k(x) = \varphi_m(x)a_k(x-x_0) - \frac{w_k}{k||w_k||_W}$$

$u_k \to \varphi_m$ dans W. En normalisant u_k, on obtient une fonction admissible dans la définition de $\bar{\alpha}$. De plus on a:

$$\bar{\alpha} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k^+|^p dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_m|^p dx = \lambda_1(m)$$

Par conséquent $\bar{\alpha} \leq \lambda_1(m) \leq \bar{\alpha}$, d'où $\bar{\alpha} = \lambda_1(m)$. On a peut utiliser le même argument pour le cas $N = p$.

Notons qu'on ne peut utiliser les mêmes arguments dans le cas $N < p$ à cause de l'immersion de Sobolev dans l'espace des fonctions continues. En effet si $N < p$ on n'a pas $a_k \to 1$ dans $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Nous allons maintenant considérer le cas $N < p$. On suppose, dans un premier temps, que $supp\, n^+$ est borné. Montrons que $\bar{\alpha} > \lambda_1(m)$. Pour cela supposons par l'absurde que $\bar{\alpha} = \lambda_1(m)$. Soit u_k une suite minimisante de $\bar{\alpha}$, c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} m(u_k^+)^p dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^N} n(u_k^-)^p dx > 0 \ \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k^+|^p dx \to \lambda_1(m)$$

On a donc ∇u_k^+ borné dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Comme $\int_{\mathbb{R}^N} m(u_k^+)^p dx = 1$, on déduit (d'après la Proposition2.3) que u_k^+ est borné dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et donc dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ pour tout $q \in [p, +\infty]$. Des arguments similaires à ceux des précédents paragraphes permettent de déduire que (u_k^+) est bornée dans W. Donc u_k^+ tend vers u faiblement dans W, fortement dans $L^p(m_1,\mathbb{R}^N)$ et uniformément sur tout domaine borné de $\mathbb{R}^N$. De plus on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k^+|^p dx = \lambda_1(m) \ \text{ et}$$

.
$$\int_{\mathbb{R}^N} m_2|u|^p \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^N} m_2|u_k^+|^p dx = -1 + \int_{\mathbb{R}^N} m_1|u|^p dx.$$

Ce qui implique que $\int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx = 1$ et par conséquent $u = \varphi_m$ et $u_k^+ \to \varphi_m$ uniformément sur $supp\ n^+$. Comme $\varphi_m \geq$ un certain $\varepsilon > 0$ sur $supp\ n^+$, alors $u_k^+ \geq \varepsilon/2$ et par conséquent $u_k^- \equiv 0$ sur $supp\ n^+$ pour k assez grand. Ceci entraîne

$$\begin{aligned} 0 < \int_{\mathbb{R}^N} n(u_k^-)^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} n^+(u_k^-)^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} n^-(u_k^-)^p dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} n^-(u_k^-)^p dx \leq 0 \end{aligned}$$

pour k assez grand. Ceci est absurde puisque u_k est admissible dans la définition de $\bar{\alpha}$.

Considerons enfin le cas où $supp\ n^+$ n'est pas borné et montrons que $\bar{\alpha} = \lambda_1(m)$. Puisque $supp\ n^+$ est non borné, alors on a pour tout $R > 0$, $n^+ \not\equiv 0$ sur $\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R}$. Ceci, en utilisanten un argument de régularisation comme dans le cas $N \geq p$, nous permet de construire une fonction $w_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \overline{B_R})$ telle que $w_R \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^N} n(w_r)^p dx > 0$.
On pose alors

$$u_R = \varphi_R - \frac{w_R}{R||w_R||_W}.$$

En utilisant le Lemme 2.9 , on montre que $u_R \to \varphi_m$ dans W et u_R est admissible dans la définition de $\bar{\alpha}$. Donc

$$\bar{\alpha} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R^+|^p dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_m|^p dx = \lambda_1(m)$$

et par conséquent $\bar{\alpha} = \lambda_1(m)$.
D'une manière analogue, on peut montrer ces différents résultats pour $\bar{\beta}$. $\square$

Pour conclure cette partie donnons la distribution de Σ^* dans les autres quadrants de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Proposition 2.14. *On suppose $N > p$ et $m,n \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. $\Sigma^*(m,n)$ intersecte $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (resp $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$) si et seulement si m^+ et n^+ sont $\not\equiv 0$ (resp m^- et n^- sont $\not\equiv 0$, m^+ et n^- sont $\not\equiv 0$, m^- et n^+ sont $\not\equiv 0$).*

Preuve. La condition nécessaire vient du fait que si $(\alpha,\beta) \in \Sigma^*$, alors pour une solution u de (2.32) correspondante on a

$$0 < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^+|^p dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^N} m(u^+)^p dx \text{ et } 0 < \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^p dx = \beta \int_{\mathbb{R}^N} n(u^-)^p dx.$$

Pour la condition suffisante, considerons par exemple le cas de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ (on utilsera des arguments similaires pour les autres quadrants). On a $(\alpha,\beta) \in \Sigma^*(m,n) \cap \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ si et seulement si $(\alpha, -\beta) \in \Sigma^*(m, -n) \cap \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Si m^+ et n^- sont $\not\equiv 0$ alors m^+ et $(-n)^+$ sont également $\not\equiv 0$. Par conséquent, en utilisant le Théorème 2.4, on déduit que $\Sigma^*(m, -n) \cap \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ est non vide. Il s'en suit que $\Sigma^*(m,n) \cap \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^- = \emptyset$. $\square$

Corollaire 2.3. *On suppose $N > p$ et $m,n \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Si les poids m et n changent de signe dans $\mathbb{R}^N$, alors tous les quadrants dans le plan (α,β) contiennent une première courbe de Σ^*.*

On peut aussi étendre les résultats de la Propositin 2.13 aux autres quadrants.

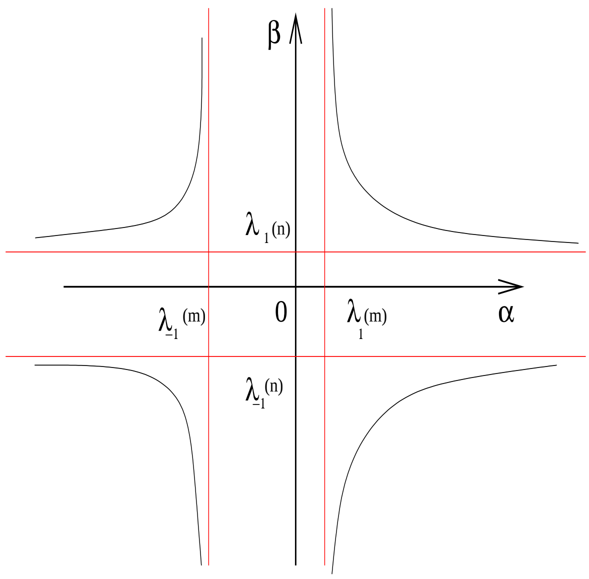
Corollaire 2.4. *On suppose $N > p$ et $m,n \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ sous les hypothèses (H_1),(H_2). On suppose de plus que m^- et n^+ sont $\not\equiv 0$ et on note $\mathcal{C}^{-,+}$ la première courbe de $\Sigma^*(m,n)$ dans $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$. Alors $\mathcal{C}^{-,+}$ admet pour assymptotes les droites $\lambda_{-1}(m) \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \lambda_1(n)$.*

Remarque 2.10. *L'étude du comportenent asymptotique de la première courbe n'est pas claire à notre niveau dans le cas de petites dimensions dans les autres quadrants de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ceci est lié aux résultats de non existence de valeur propre principale négative (voir [16, 3]).*

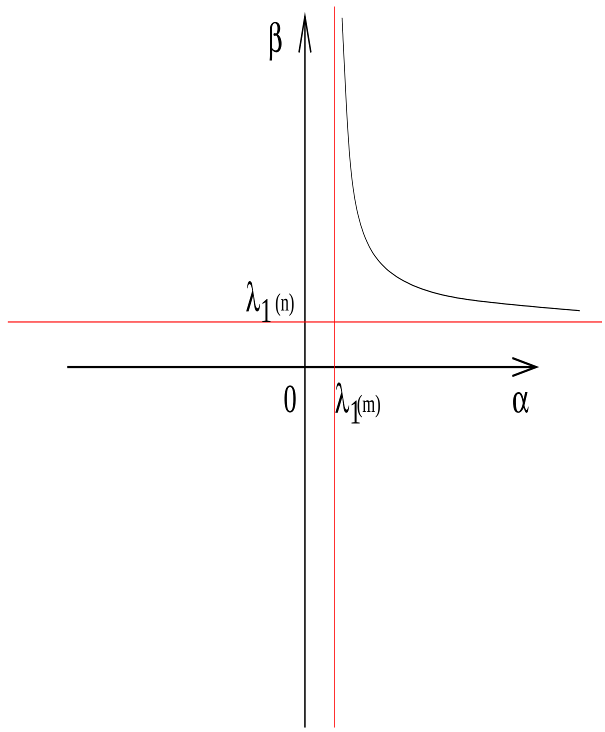
Illustrons ces différents résultats par les figures suivantes

Cas d'un domaine non borne

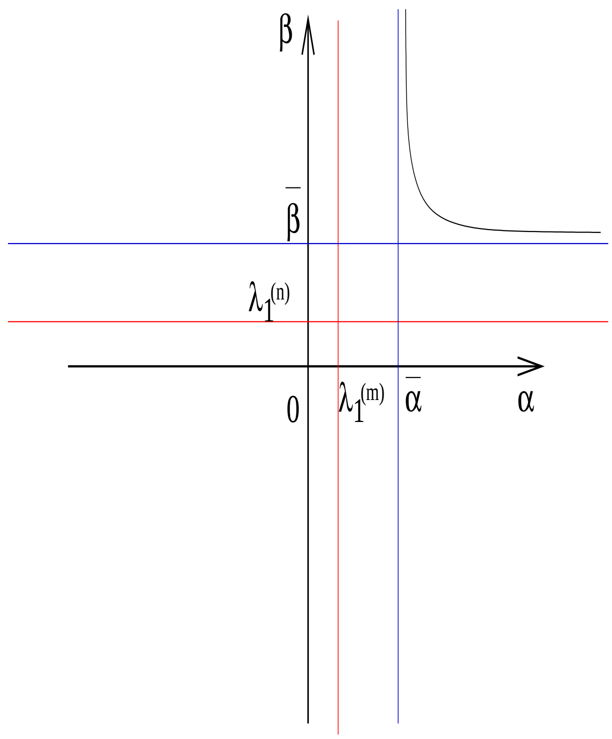
- N $\geq$ P



- $N < P$ avec supp n^+, supp m^+ non bornes



- $N < P$ avec supp n^+, supp m^+ bornes



2.7 Propriété nodale pour le p-Laplacien dans $\mathbb{R}^N$

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié le spectre de Fučik du p-Laplacien dans $\mathbb{R}^N$. Une première courbe de ce spectre a été construite: $\mathcal{C} = \{(\alpha(r),\beta(r)),\ \ r \in \mathbb{R}^*_+\}$. Le comportement asymptotique de la courbe $\mathcal{C}$ a été étudié. Le but de ce paragraphe est d'étudier les propriétés nodales des fonctions propres du problème (2.32). Rappelons qu'un domaine nodal pour une fonction $u \in C(\mathbb{R}^N)$ est un sous-ensemble connexe ouvert maximal de $\{x \in \mathbb{R}^N; u(x) \neq 0\}$. Notons aussi que toute solution de (2.32) est de classe $C^1(\mathbb{R}^N)$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine nodal d'une fonction u. Nous dirons que Ω est un domaine nodal positif (resp. négatif) si $u > 0$ pp dans Ω (resp. $u < 0$ pp dans Ω). Notre objectif est de généraliser dans le contexte des problèmes (2.8) et (2.32), le théorème de Courant pour les régions nodales des solutions du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \ \text{ dans } \Lambda \\ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Lambda, \end{cases} \tag{2.34}$$

où Λ est un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$. On désigne par λ_k la suite des valeurs propres de (2.34), obtenue par la formule de Courant-Fischer (ou par la formule de Ljusternik Schnirelman):

$$\lambda_k = \min_{X \in\ G_k} \max_{u \in X\cap S} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

où

$$G_k = \{X \subset H^1_0(\Omega), X \text{ est un sous-ensemble de dimension } k\}$$

et

$$S = \{u \in H^1_0(\Omega) : \int_\Omega |u|^2 = 1\}.$$

Rappelons donc le théorème de Courant:

Théorème 2.5. ***(Théorème de Courant pour les domaines nodaux)***
On suppose que u_{λ_k} est une fonction propre, pour le problème (2.34), associée à la fonction propre λ_k. Alors u_{λ_k} possède au plus k domaines nodaux.

La preuve du théorème ci-dessus utilise principalement la propriété de continuation unique dont jouit l'opérateur Laplacien:

"Toute solution de (2.34) qui s'annule sur un sous-ensemble ouvert non vide de Λ est nécessairement la solution triviale."

L'occurence d'une telle propriété pour le p-Laplacien avec $p \neq 2$ est à l'heure actuelle un problème ouvert.

Comme conséquence directe du Théorème de Courant, on a le corollaire suivant:

Corollaire 2.5. *Toute solution de (2.34) associée à la deuxième valeur propre possède exactement deux domaines nodaux.*

Nous allons énoncer le résultat principal de ce paragraphe, qui est une adaptation du Corollaire 2.5 malgré la non occurence de la propriété de la continuation unique pour le p-Laplacien si $p \neq 2$.

Théorème 2.6. *Soit u une solution non triviale de (2.32) avec $(\alpha,\beta) \in \mathcal{C}$. Alors u admet exactement deux domaines nodaux .*

Ce résultat avait été démontré auparavant dans le cas d'un problème de Dirichlet pour le p-Laplacien avec ou sans poids (voir [22, 60]). Comme conséquence on a:

Corollaire 2.6. *Toute solution non triviale associée à la deuxième valeur propre $\lambda_2(m)$ du problème (2.8) admet exactement deux domaines nodaux.*

La preuve du Théorème 2.6 utilise le principe du maximum de Vazquez à travers le Lemme suivant:

Lemme 2.10. *Soit u une solution non triviale de (2.32) possédant un domaine nodal positif Ω_1 et deux domaines nodaux négatifs Ω_2 et Ω_3. Alors il existe un ouvert connexe $\tilde{\Omega}_1$ tel que $\tilde{\Omega}_1 \supsetneq \Omega_1$, $\tilde{\Omega}_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ou $\tilde{\Omega}_1 \cap \Omega_3 = \emptyset$.*

Preuve. Puisque les poids sont localement bornés, on peut adapter la preuve de [22].

On a deux possibilités: Soit $\partial\Omega_1 \not\subset \partial\Omega_2$ ou $\partial\Omega_1 \subset \partial\Omega_2$. Si $\partial\Omega_1 \not\subset \partial\Omega_2$, on choisit $x \in \partial\Omega_1 \backslash \partial\Omega_2$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(x,\varepsilon) \cap \Omega_2 = \emptyset$. On pose alors $\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup B(x,\varepsilon)$ et on a le résultat souhaité. Si $\partial\Omega_1 \subset \partial\Omega_2$, soient $z \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la régularité de u on a $u \in C^1[\Omega_1 \cap B(z,\varepsilon)]$, $u > 0$ sur Ω_1 et $-\Delta_p u + \alpha ||m||_{L^\infty[\Omega_1 \cap B(z,\varepsilon)]} \geq 0$ avec $u(z) = 0$. On choisit z tel qu'il vérifie la condition de la sphère intérieure par rapport à $\Omega_1 \cap B(z,\varepsilon)$. Alors d'après le principe de maximum de Vazquez, si ν désigne la normale extérieure à la sphère intérieure en z alors $\frac{\partial u}{\partial \nu}(z) < 0$. Il existe donc $j \in \{1,...,N\}$ tel que $\frac{\partial u}{\partial x_j}(z) \neq 0$.

On considère alors l'application $\phi : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ définie par:

$$\begin{cases} (\phi(x))_i = x_i - z_i \text{ si } i \neq j \\ (\phi(x))_j = u(x) \end{cases}$$

ϕ est de classe $C^1((\mathbb{R}^N)$ et $\phi(z) = 0$. Alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de z difféomorphe à $V = \{y \in \mathbb{R}^N \ ; \ |y| < \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$. Posons $V^0 = \{y \in V \ ; \ y_j = 0\}$ et $V^\pm = \{y \in V \ ; \ y_j >_< 0\}$. Alors $U = \phi^{-1}(V) = \phi^{-1}(V^O) \cup \phi^{-1}(V^+) \cup \phi^{-1}(V^-)$ et d'après la définition de ϕ on a:

$$\begin{cases} u & = 0 \text{ sur } \phi^{-1}(V^0) \\ u & > 0 \text{ sur } \phi^{-1}(V^+) \\ u & < 0 \text{ sur } \phi^{-1}(V^-) \end{cases}$$

Comme $z \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ et Ω_1 est un domaine nodal positif pour u, alors $\phi^{-1}(V^+) \subset \Omega_1$. De même on a $\phi^{-1}(V^-) \subset \Omega_2$ et donc $U \cap \Omega_3 = \emptyset$, ce qui entraîne que $z \notin \partial\Omega_3$. On a alors $z \in \partial\Omega_1 \backslash \partial\Omega_3$. Il ne nous reste qu'à poser comme précédemment $\tilde{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup B(z,\delta)$ avec $\delta > 0$ tel que $B(z,\delta) \cap \Omega_3 = \emptyset$. $\square$

Remarque 2.11. *Le Lemme reste vrai si Ω_1 est un domaine nodal négatif et Ω_2 , Ω_3 des domaines nodaux positifs.*

Preuve du Théorème 2.6 Soit u une solution non triviale de (2.32) associée à $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}$. Alors u est solution de l'équation

$$-\Delta_p u = \alpha(s)m(x)(u^+)^{p-1} - \beta(s)n(x)(u^-)^{p-1}$$

c'est à dire

$$-\Delta_p u = c(m, sn)[m(x)(u^+)^{p-1} - sn(x)(u^-)^{p-1}].$$

On pose $n' = sn$; le poids n' vérifie les mêmes hypothèses que le poids n et on a $\alpha = \beta = c(m, n')$. On peut donc supposer, sans aucune restriction, que $\alpha = \beta = c(m,n)$.

Comme observé au début du paragraphe précédent la solution u change de signe dans $\mathbb{R}^N$ et par conséquent elle admet au moins un domaine nodal positif Ω_1 et un domaine nodal négatif Ω_2.

Supposons par l'absurde l'existence d'un troisième domaine nodal négatif Ω_3 (on peut utiliser un argument similaire si Ω_3 est un domaine nodal positif). Alors d'après le Lemme 2.10 il existe $\tilde{\Omega}_1$ tel que $\tilde{\Omega}_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ou $\tilde{\Omega}_1 \cap \Omega_3 = \emptyset$ avec $\Omega_1 \subsetneq \tilde{\Omega}_1$.

Supposons que $\tilde{\Omega}_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ (un argument analogue pourrait être utilisé si $\tilde{\Omega}_1 \cap \Omega_3 = \emptyset$). La fonction u est solution de (2.8) dans Ω_1 avec condition aux limites de Dirichlet sur le bord $\partial\Omega_1$ et $\lambda = \alpha$. Comme $u > 0$ sur Ω_1 alors $\alpha = \lambda_1(m,\Omega_1)$. De même on a u solution de (2.8) dans Ω_2 et $\beta = \lambda_1(n,\Omega_2)$. Par ailleurs $\Omega_1 \subsetneq \tilde{\Omega}_1$, alors $\alpha = \lambda_1(m,\Omega_1) > \lambda_1(m,\tilde{\Omega}_1)$. Il est possible de choisir $\tilde{\Omega}'_1 \subsetneq \Omega_1$ et $\tilde{\Omega}_2 \supsetneq \Omega_2$, disjoints et tels que $\lambda_1(m,\tilde{\Omega}'_1) < \alpha$; $\lambda_1(n,\tilde{\Omega}_2) < \beta$. On pose

$$v_1 = \begin{cases} \varphi_m(\tilde{\Omega}'_1) & \text{sur } \tilde{\Omega}'_1 \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \backslash \tilde{\Omega}'_1 \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{cases} \varphi_m(\tilde{\Omega}_2) & \text{sur } \tilde{\Omega}_2 \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^N \backslash \tilde{\Omega}_2. \end{cases}$$

Alors pour $v = v_1 - v_2$ on a:

$$\frac{\displaystyle\int |\nabla v^+|^p dx}{\displaystyle\int m(v^+)^p dx} = \lambda_1(m,\tilde{\Omega}'_1) < \alpha = c(m,n) \text{ et}$$

$$\frac{\displaystyle\int |\nabla v^-|^p dx}{\displaystyle\int n(v^-)^p dx} = \lambda_1(n,\tilde{\Omega}_2) < \beta = c(m,n) \tag{2.35}$$

Notre objectif est de construire un chemin γ qui relie φ_m à $-\varphi_n$ et le long duquel la fonctionnelle A atteint un niveau strictement inférieur à $c(m,n)$. Ce qui contredirait la définition de $c(m,n)$. Dans un premier temps on définit le chemin γ_1 suivant:

$$\gamma_1(t) = (tv + (1-t)v^+)/B_{m,n}[tv + (1-t)v^+]^{1/p} \equiv (tv + (1-t)v^+)_{m,n} \;\; t \in [0,1].$$

Ce chemin relie $(v)_{m,n}$ à $(v^+)_{m,n}$. De plus on a d'après (2.35)

$$A[(\gamma_1(t))] < c(m,n) \ \ \forall\, t \in [0,1].$$

Le Lemme 2.7 permet d'extraire de la suite définie par:

$$m_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k}\min(m_1,n_1) - \max(m_2,n_2) & \text{si } m \geq 0 \text{ et } n \geq 0 \\ \min(m,n) & \text{sinon} \end{cases}$$

un poids l de la forme $l = l_1 - l_2$ tel que $l \leq m$, $l \leq n$ et $\lambda_1(l) > c(m,n)$. On considère alors la variété $M_{m,l}$ et on définit le sous-ensemble

$$\mathcal{O} = \{u \in M_{m,l}; A(u) < c(m,n)\}.$$

On a:

$$A(\varphi_m) = \lambda_1(m) < c(m,n) < A(\varphi_l) = \lambda_1(l), \ \ (v^+)_{m,n} \in \mathcal{O}.$$

Dans ces conditions φ_m est le seul point critique de A restreinte à $M_{m,l}$ et φ_m appartient à la composante de $\mathcal{O}$, contenant $(v^+)_{m,n}$, qui est connexe par arcs. Notons γ_2 le chemin contenu dans $\mathcal{O} \subset M_{m,l}$ reliant φ_m à $(v^+)_{m,n}$. Il vient que:

$$B_{m,n}[|\gamma_2(t)|\ ] = \int m|\gamma_2(t)|^p dx = \int [m(\gamma_2^+(t))^p + m(\gamma_2^-(t))^p]dx$$

$$\geq \int [m(\gamma_2^+(t))^p + l(\gamma_2^-(t))^p]dx = 1.$$

Alors le chemin $\gamma_3(t) = (|\gamma_2(t)|)_{m,n}$ est bien défini dans $M_{m,n}$ et relie φ_m à $(v^+)_{m,n}$. De plus on a:

$$A(\gamma_3(t)) = \frac{A(|\gamma_2(t)|)}{B_{m,n}(|\gamma_2(t)|\ )} \leq A(|\gamma_2(t)|) = A(\gamma_2(t)) < c(m,n),$$

car $\gamma_2(t) \in \mathcal{O}$. Donc γ_3 est un chemin dans $M_{m,n}$ qui relie φ_m à $(v^+)_{m,n}$ et sur lequel n'atteint pas le niveau $c(m,n)$. En procédant de la même manière on construit un autre chemin joignant $(v)_{m,n}$ à $-\varphi_n$ et ainsi on obtient le chemin γ desiré, qui relie φ_m à $-\varphi_n$ et pour lequel A ne dépasse pas le niveau $c(m,n)$.

Chapitre 3

Deux suites de valeurs propres

3.1 Introduction

On consacre ce chapitre à la construction de deux suites de valeurs propres du problème

$$-\triangle_p u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u \ \text{ dans } \ \mathbb{R}^N \tag{3.1}$$

avec le poids m vérifiant les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) du chapitre précédent dans lequel nous avons montré que les valeurs propres de (3.1) peuvent être obtenues comme étant les valeurs critiques de la fonctionnelle

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx$$

définie sur l'espace W et restreinte à la variété

$$M_m = \{u \in W, \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx = 1\}.$$

L'idée d'essayer de trouver les valeurs critiques d'une fonctionnelle définie sur une variété C^1 ou sur un espace de Banach, en la minimisant le long d'une famille de sous-ensembles, a été largement exploitée depuis le travail de Ljusternik-Schnirelman. Une approche standard pour prouver ce type de résultat requiert un lemme de déformation sur la variété M_m, ce qui nécessite que M_m soit au moins de classe $C^{1,1}$. Cette condition n'est en général pas réalisée. Dans certaines applications la variété M_m est de classe C^1 et la déformation doit être construite avec beaucoup de précaution (cf. [46]).

L'approche que nous allons utilisé dans ce chapitre est celle de [21] où on exige cependant à l'espace de Banach considéré d'être uniformément convexe. Cette approche utilise principalement le principe variationnel de Ekeland au lieu d'un lemme de déformation. Aussi on a besoin d'un résultat de compacité qui est la condition de Palais-Smale.

3.2 Première suite de valeurs propres

Les solutions de (3.1) seront obtenues au sens faible, c'est à dire on cherche les solutions $u \in W\backslash\{0\}$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^{p-2}uv$$

pour tout $v \in W$. Le réel λ est appelé valeur propre et la fonction u est alors appelée fonction propre associée. Donnons une formulation variationnelle de (3.1). Pour cela on fait appel aux fonctionnelles de classe C^1:

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \text{ et } B_m = \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx$$

définies sur la variété de classe C^1

$$M_m = \{u \in W : \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx = 1\}.$$

Alors $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre pour le problème (3.1) si et seulement si il existe $u \in W\backslash\{0\}$ tel que $\Phi'(u) = \lambda B_m'(u)$. Pour $u \in M_m$ l'espace tangent à M_m en u noté T_uM_m est défini par

$$T_uM_m = \{u \in W :< B_m'(u), v >= 0\}.$$

On note $\tilde{J}$ la restriction de J à la variété M_m. Nous dirons que c est une valeur critique de $\tilde{J}$ si $J'(u)|_{T_uM_m} \equiv 0$ et $\tilde{J}(u) = c$ pour un certain $u \in M_m$ appelé point critique associé à c.

Une première suite de valeurs critiques positives de $\tilde{J}$ vient de la théorie des points critiques de Ljusternik-Schnirelman sur une variété de classe C^1. L'existence d'une telle suite a été prouvé dans [63] en utilisant un principe de type minimax. Donnons un énoncé de cette théorie dans un cadre beaucoup plus général.

Soit X un espace de Banach réel, $g \in C^1(X,\mathbb{R})$ telle que 1 soit une valeur régulière et $M = \{u \in X,\, g(u) = 1\}$. On suppose que $M \neq \emptyset$ et $Kerg'(u) \neq X$ pour tout $u \in X$. On suppose de plus que g est une fonction paire et que $0 \notin M$. Un sous-ensemble A de M est dit symétrique si $A = -A$. On note $\mathcal{F}$ la famille des sous-ensembles fermés et symétriques de M. Pour tout $A \in \mathcal{F}$ on pose $\gamma(A) = 0$ si $A = \emptyset$ et

$$\gamma(A) = \inf\{m \in \mathbb{N}^* : \exists h \in C(A,\mathbb{R}^m\backslash\{0\}) \text{ et } h \text{ impaire }\},$$

$\gamma(A) = +\infty$ s'il n'existe pas de tel $m \in \mathbb{N}^*$. $\gamma(A)$ est appelé le genre de Krasnoselski de l'ensemble A. Le genre de Krasnoselskii satisfait les propriétés suivantes (voir par exemple [20]) .

(P$_1$) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, S^k désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{k+1}$. On pose

$$\mathcal{O}(S^k,M) = \{h \in C(S^k,M),\, h \text{ impaire}\}.$$

Alors pour tout $h \in \mathcal{O}(S^k,M) \quad \gamma[h(S^k)] \geq k+1.$

(P$_2$) *Continuité*: Soit $K \in \mathcal{F}$ tel que K soit compact, alors $\gamma(K) < +\infty$. De plus il existe $\delta > 0$ tel que si $N_\delta(K) = \{u \in X, dist(u,K) \leq \delta\}$ alors $\gamma(K) = \gamma[N_\delta(K)]$.

(P$_3$) *Monotonie*: Soit $A,B \in \mathcal{F}$ et soit $g : A \to B$ une fonction continue. Alors $\gamma(A) \leq \gamma(B)$.

(P$_4$) *Sous-additivité*: Soit $A,B \in \mathcal{F}$. Alors $\gamma(A\cup B) \leq \gamma(A)+\gamma(B)$. Si de plus $\gamma(B) < +\infty$ alors $\overline{A\backslash B} \in \mathcal{F}$ et $\gamma(\overline{A\backslash B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B)$.

(P$_5$) On suppose que $X = E_1 \oplus E_2$ avec $dim\ E_1 < +\infty$. Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $A \cap E_2 = \emptyset$. Alors $\gamma(A) \leq dim\ E_1$. Si de plus $dim\ E_1 < +\infty$ alors pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $\gamma(A) \geq dim\ E_1 + 1$, on a $A \cap E_2 \neq \emptyset$.

(P$_6$) *Borsuk-Ulam*: Soit E un sous espace invariant de dimension finie. On considère l'ensemble $B = \{u \in E :\ ||u|| = 1\}$. Alors $B \in \mathcal{F}$ et $\gamma(B) = dimE$.

Le résultat suivant peut être trouvé dans [20].

Théorème 3.1. *Soit $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$. On suppose que Φ est paire, inférieurement bornée et satisfait la condition de Palais-Smale sur M. On pose*

$$c_k = \inf_{A\in\Gamma_k} \sup_{u\in A} \Phi(u)$$

avec

$$\Gamma_k = \{A \subset M; A \text{ compact, symétrique et } \gamma(A) \geq k\}.$$

Alors c_k est une valeur critique de Φ restreinte à M. De plus

$$\lim_{k\to+\infty} c_k = +\infty.$$

Par ailleurs si $c_k = c_{k+1} = ... = c_{k+l} = c \in \mathbb{R}$ pour tout $k \geq 1$ et pour tout $l > 0$ alors $\gamma(K_c) \geq l + 1$ où

$$K_c(\Phi) = \{u \in M, \Phi(u) = c \text{ et } \Phi'(u) = 0\}.$$

Comme application on prend $X = W$, $J = \Phi$, $g = B_m$ et $M = M_m$. La condition de Palais-Smale est satisfaite par la fonctionnelle J d'après le Chapitre 2 (cf. Lemme 2.4, cas $m \equiv n$). On a alors le résultat suivant

Proposition 3.1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose*

$$\lambda_k = \inf_{A\in\Gamma_k} \sup_{u\in A} J(u) \tag{3.2}$$

où

$$\Gamma_k = \{A \subset M,\ A \text{ compact, symétrique et } \gamma(A) \geq k\}.$$

Alors λ_k est une suite de valeur propre pour le problème (3.1). De plus la suite (λ_k) est croissante et $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$.

Preuve. Le fait que la suite (λ_k) soient une suite de valeurs propres pour le problème (3.1) découle du théorème précédent. Cette suite est par définition croissante. Si (λ_k) est stationnaire on aurait $\gamma(K_{\lambda_k}) = +\infty$ d'après le Theorème3.1. Mais ceci est absurde puisque la condition de Palais-Smale implique que $K_{\lambda_k}(J)$ est compact. Par conséquent en utilisant la propriété **(P$_2$)** du genre de Krasnoselskii on a $\gamma(K_{\lambda_k}) < +\infty$. Par ailleurs si on suppose que (λ_k) est supérieurement bornée, on aurait à l'aide de la définition des λ_k la convergence de λ_k (disons vers λ). On pose alors

$$K_\lambda := \{u \in M_m,\, J(u) = \lambda \text{ et } J'(u) = 0\}$$

et

$$J^\lambda := \{u \in M_m,\, J(u) \leq \lambda\}.$$

Soit $d := \gamma(K_\lambda(J))$. On peut choisir un voisinage symétrique $\mathcal{O}$ de $K_\lambda(J)$ tel que $\gamma(\mathcal{O}) = d$. D'après le Théorème A (voir Chapitre annexe) il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta : M_m \times [0,1] \to M_m$ continue, impaire et telle que $\gamma(J^{\lambda+\varepsilon} \backslash \mathcal{O}, 1) \subset J^{\lambda-\varepsilon}$. Par ailleurs, en utilisant (3.2) il existe $B \in \Gamma_k$ tel que

$$\sup_{u \in B} J(u) \leq \lambda_k + \varepsilon \leq \lambda + \varepsilon.$$

Par conséquent $B \subset J^{\lambda+\varepsilon}$, et on en déduit que $\eta(B \backslash \mathcal{O}, 1) \subset J^{\lambda-\varepsilon}$, c'est à dire

$$\sup_{u \in \eta(B \backslash \mathcal{O},\, 1)} J(u) \leq \lambda - \varepsilon.$$

Par ailleurs on sait que (d'après **(P$_4$)**) $\gamma(B \backslash \mathcal{O}) \geq \gamma(B) - \gamma(\mathcal{O}) \geq k - d > 0$, pour k suffisamment grand. Par conséquent en utilisant la propriété **(P$_3$)**, on a

$$\gamma(\eta(B \backslash \mathcal{O}, 1)) \geq \gamma(B \backslash \mathcal{O}, 1) \geq k - d.$$

On en déduit alors que $\eta(B \backslash \mathcal{O}, 1) \in \Gamma_{k-d}$. D'où

$$\lambda_{k-d} \leq \sup_{u \in \eta(B \backslash \mathcal{O},\, 1)} J(u) \leq \lambda - \varepsilon,$$

mais ceci est impossible si l'on choisit k suffisamment grand. $\square$

Corollaire 3.1. *On suppose $N > p$ et $m \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$, avec $m^\pm \not\equiv 0$. Alors il existe deux suites de valeurs propres pour le problème (3.1) telles que:*

$$-\infty < \ldots < \lambda_k \leq \ldots \leq \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots < +\infty$$

avec $\lambda_k \to \pm\infty$ quand $k \to \pm\infty$.

Remarque 3.1. *Si $N \leq p$, suite au résultat de non existence de [16, 52], nous ne sommes pas en mesure de déduire l'existence d'une suite de valeurs propres négatives pour le p-Laplacien.*

3.3 Une deuxième suite de valeurs propres

Nous allons énoncer un deuxième principe de type minimax qui nous donnera presque toutes les valeurs critiques de la fonctionnelle J restreinte à la variété M_m. Pour cela on pose

$$\mathcal{O}(S^k,M) = \{h \in C(S^k,M) :\ h \text{ impaire}\}.$$

Donnons un énoncé de ce principe dans un cadre abstrait.

Théorème 3.2. *Soit $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$. On suppose que Φ est paire et satisfait la condition de Palais-Smale sur M. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose*

$$d_k := \inf_{k\in\mathcal{O}(S^{k-1},M)} \max_{z\in S^{k-1}} \Phi(h(z))$$

et on suppose de plus que $d_k \in \mathbb{R}$. Alors il existe un point critique $u \in M$ de Φ restreinte à M tel que $\Phi(u) = d_k$.

La preuve du Théorème 3.2 peut être trouvée dans [21]. Elle utilise principalement le principe variationnel de Ekeland.

Comme application on pose $J = \Phi$, $X = W$, $g = B_m$ et $M = M_m$. On a alors le résultat suivant:

Proposition 3.2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose*

$$\mu_k = \inf_{k\in\mathcal{O}(S^{k-1},M_m)} \max_{z\in S^{k-1}} J(h(z)) \tag{3.3}$$

où $\mathcal{O}(S^k,M_m) = \{h \in C(S^k,M_m)\ :\ h$ impaire$\}$. Alors (μ_k) est une suite de valeurs propres pour le problème (3.1). De plus $\mu_k \geq \lambda_k$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu_k = +\infty$.

Preuve. La première partie de la Proposition 3.2 vient du Théorème 3.2. Pour la deuxième partie, en utilisant la propriété $(\mathbf{P}_1)$ du genre de Krasnoselski on a:

$$\forall\ h \in \mathcal{O}(S^{k-1},M_m)\ \ \gamma[h(S^{k-1})] \geq k.$$

Et comme h est paire, on a alors $h(S^{k-1}) \subset \Gamma_k$. D'où $\mu_k \geq \lambda_k$ et alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu_k = +\infty$. □

Remarque 3.2. .

(i). La suite définie en (3.3) est appelée suite de valeurs propres de type Dràbek-Robinson. Elle a été introduite pour la première fois dans [29] pour le cas $m \equiv 1$ et dans un borné Ω de $\mathbb{R}^N$. Dans [29] cette suite a été utilisée pour établir des résultats de résonnance et de non résonnance pour le p-laplacien. De même les μ_k ont été utilisés dans [18] pour l'étude du spectre de Fučik du p-laplacien dans un borné.

(ii). Il est clair que

$$\lambda_1(m) = \lambda_1 = \mu_1 = \inf\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx : u \in W \textit{ et } \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx = 1\}.$$

(iii). Notons u_2 la fonction propre normalisée associée à μ_2, u_2 change de signe dans $\mathbb{R}^N$. Soit

$$A = \{v = su_2^+ + tu_2^- : t,s \in \mathbb{R} \textit{ et } |s|^p||u_2^+||_{L^p} + |t|^p||u_2^-||_{L^p} = 1\},$$

on a $A \subset \mathcal{F}$. De plus pour tout $v \in A$, $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx = \mu_2$. Donc $\lambda_2 \leq \mu_2$ et alors $\mu_2 = \lambda_2$

(iv). En utilisant les résultats du Chapitre2 on a:

$$\mu_2 = \lambda_2 = \lambda_2(m) = \inf_{h\in\Gamma} \max_{u\in h([-1,1])} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx$$

où $\Gamma = \{h \in C([-1,1],M_m) : h(\pm 1) = \pm\varphi_1(m)\}$.

Cette dernière caractérisation de la deuxième valeur propre est meilleure que celle obtenue dans (3.2) et (3.3) car il suffit de minimiser le long d'une petite famille de sous-ensembles de la variété M_m pour avoir la même valeur. L'égalité des λ_k et μ_k pour les autres indices k reste à l'heure actuelle une question ouverte quand $p \neq 2$. Il est aisé de montrer que $\lambda_k = \mu_k$ pour tout $k \geq 1$ pour le cas $p = 2$. Lorsque $N = 1,m \equiv 1$ et $p > 1$, il a été prouvé dans [18] que $\lambda_k = \mu_k$ pour tout $k \geq 1$ dans le cas d'un domaine borné. Mais cette dernière égalité reste une question ouverte quand $N > 1$.

Chapitre 4

Système elliptique coopératif non linéaire dans $\mathbb{R}^N$

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions le principe du maximum et montrons l'existence de solutions pour le système elliptique coopératif non linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = am(x)|u|^{p-2}u + bm_1(x)|v|^{\beta}v + f \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = cn_1(x)|u|^{\alpha}u + dn(x)|v|^{q-2}v + g \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 \text{ , } v(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty \end{cases} \tag{4.1}$$

avec a, b, c, d, α, β des constantes réelles, m, m_1, n et n_1 sont des fonctions poids dont les propriétés seront précisées plus tard, f et g des fonctions données dans des espaces de Lebesgue appropriés, $\Delta_p u := div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ pour $p > 1$ est l'opérateur p-Laplacien. Tout au long de ce chapitre on suppose que $1 < p, q < N$.

Il est bien connu que le principe du maximum joue un rôle important dans la théorie des équations non linéaires (cf [47, 59]). Plusieurs travaux ont été faits en ce qui concerne les systèmes elliptiques linéaires et non linéaires. En particulier dans [32, 33, 37, 38, 39], il a été donné des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir le principe du maximum dans le cas d'un domaine borné sous les conditions aux limites de Dirichlet. Dans [32, 33], ces mêmes conditions, dans le cas d'un système elliptique coopératif, ont permis de prouver l'existence de solutions. De même dans [34] pour le cas semilinéaire dans $\mathbb{R}^N$ tout entier, en présence d'une fonction poids ρ vérifiant une certaine condition, une condition nécessaire et suffisante a été utilisée pour, d'une part avoir le principe du maximum, et d'autre part montrer l'existence de solution.

Le but de ce travail est de généraliser les résultats de [34] (système coopératif linéaire avec poids dans $\mathbb{R}^N$) et de [14] (système coopératif non linéaire dans un borné de $\mathbb{R}^N$). Une condition nécessaire et suffisante sera également donnée pour avoir le principe du maximum pour le système (4.1). De plus, en utilisant la méthode des sous-super solutions de [51], on établit l'existence de solutions positives.

4.2 Principe du maximum

Dans la suite de ce travail, on suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites:

$$
\begin{array}{ll}
(H_1) & m > 0 \text{ et } m \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/p}(\mathbb{R}^N) \\
 & n > 0 \text{ et } n \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/q}(\mathbb{R}^N) \\
(H_2) & f \geq 0\ ;\ f \not\equiv 0 \text{ et } f \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N) \\
(H_3) & g \geq 0\ ;\ g \not\equiv 0 \text{ et } g \in L^{(q^*)'}(\mathbb{R}^N) \\
(H_4) & b, c \geq 0\ ;\ \alpha, \beta \geq 0 \text{ et } \dfrac{\alpha+1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 = \dfrac{\beta+1}{q} + \dfrac{1}{p}
\end{array}
$$

On pose

$$m_1 = m^{\frac{1}{p}} n^{\frac{\beta+1}{q}}\ ;\ n_1 = n^{\frac{1}{q}} m^{\frac{\alpha+1}{p}}$$

Le système (4.1) est dit coopératif si $b,\ c\ \geq\ 0$. On note $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \equiv D^{1,p}$ la fermeture de $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ par rapport à la norme

$$||u||_{D^{1,p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}.$$

On montre que (voir [54], Proposition 2.4)

$$D^{1,p} = \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) :\ \nabla u \in (L^p(\mathbb{R}^N))^N\}.$$

De plus on a : $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ et $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(m, \mathbb{R}^N)$ (cf [31]).

Rappelons quelques résultats qui nous seront utiles dans la suite. On considère le problème de minimisation suivant :

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\ :\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx = 1 \right\} \tag{4.2}$$

Il est clair que d'après les hypothèses faites sur le poids m, l'infimum (4.2) est fini. De plus on a le résultat suivant qui a été prouvé dans [31].

Proposition 4.1. *L'infimum (4.2) est atteint (et par conséquent est positive). Toute suite minimisante u_k de (4.2) admet une sous-suite convergeant faiblement dans $D^{1,p}$ vers une certaine fonction u qui réalise cet infimum .*

Notons que d'après la Proposition 4.1 et la règle des multiplicateurs de Lagrange, l'infimum (4.2) est l'unique valeur propre principale positive du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty \end{cases}. \tag{4.3}$$

En utilisant les estimations L^∞ de J.Serrin, les résultats de régularité de Tolksdorf et le principe de maximum de Vazquez, on montre que la fonction propre associée est dans $C^1(\mathbb{R}^N)$ et est de signe constant dans $\mathbb{R}^N$. On notera cet infimum $\lambda_1(m,p)$.

$$\lambda_1(m,p) := \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \ : \ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ et } \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx = 1\right\}.$$

$\lambda_1(m,p)$ est l'unique valeur propre de (4.3). De plus $\lambda_1(m,p)$ est simple et isolé dans le spectre de (4.3) (cf [5, 28]). Comme conséquence de la caractérisation variationnelle de $\lambda_1(m,p)$ on a :

$$\lambda_1(m,p)\int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx \le \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \ \ \forall\, u \in D^{1,p} \tag{4.4}$$

On denote par ϕ (resp. ψ) la fonction propre associée à $\lambda_1(m,p)$ (resp. $\lambda_1(n,q)$) telle que $\int_{\mathbb{R}^N} m|\phi|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} n|\psi|^q dx = 1$.

Les résultats suivants concernant le problème ci-dessous ont été prouvés dans [31, 35].

$$\begin{cases} -\Delta_p u = am(x)|u|^{p-2}u \ + \ f \ \text{ dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 \ \text{ quand } |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{4.5}$$

Proposition 4.2. *Soit $f \in D^{-1,p'}(\mathbb{R}^N)$. Si m satisfait l'hypothèse (H_1) et si $a < \lambda_1(m,p)$ alors l'équation (4.5) admet au moins une solution dans $D^{1,p}$.*

Preuve. On définit la fonctionnelle J sur $D^{1,p}$ par :

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \frac{a}{p}\int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} fudx.$$

J est une fonctionnelle faiblement semicontinue inférieure. D'après (4.4) on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx \le \frac{1}{\lambda_1(m,p)}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx.$$

Si $a \in]0,\lambda_1(m,p)[$ alors il existe $\delta \in]0,1[$ tel que

$$0 < \frac{a}{\lambda_1(m,p)} \le \delta < 1.$$

Par conséquent

$$-a\int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx \ge (-a/\lambda_1(m,p))\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \ge -\delta\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx,$$

c'est à dire

$$-a\int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx \ge -\delta\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx.$$

Si $a \leq 0$ alors

$$-a \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p dx \geq 0 > -\delta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx.$$

Donc dans tous les cas on a:

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p}(1-\delta) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} f u dx \\ &\geq \frac{1}{p}(1-\delta)||u||^p_{D^{1,p}} - ||f||_{D^{-1,p'}(\mathbb{R}^N)}.||u||_{D^{1,p}}. \end{aligned}$$

Ainsi la fonctionnelle J est coercive dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent l'équation (4.5) admet au moins une solution dans $D^{1,p}$. □

Proposition 4.3. *Soit $f \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f \geq 0$ et $f \not\equiv 0$. Alors toute solution de l'équation (4.5) est positive si et seulement si $a < \lambda_1(m,p)$.*

Preuve. La condition est nécessaire. Supposons que $a < \lambda_1(m,p)$. On prend pour fonction test dans (4.5) u^- et on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^p dx = a \int m|u^-|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} f u^- dx \leq a \int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx$$

Donc en utilisant (4.4) on déduit que:

$$(\lambda_1(m,p) - a) \int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx \leq 0.$$

Par conséquent $u^- \equiv 0$, c'est à dire $u \geq 0$ et en utilisant le principe de maximum de Vazquez on déduit que $u > 0$ sur $\mathbb{R}^N$.

Réciproquement supposons qu'on a le principe du maximum pour (4.5) et supposons par l'absurde que $a \geq \lambda_1(m,p)$. Alors en prenant $f := (a - \lambda_1(m,p))\phi^{p-1}$, la fonction $u = -\phi < 0$ est solution de (4.5), ce qui contredit le principe du maximum. □

Notons que d'après l'estimation L^∞ de Serrin et les résultats de régularité de Tolksdorf, toute solution $u \in D^{1,p}$ de (4.5) avec $f \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ est dans $C^1(\mathbb{R}^N)$.

On a aussi le résultat de non existence suivant dont la preuve peut être trouvée dans ([31]).

Théorème 4.1. *Soit $f \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N)$ telle que $f \geq 0$ et $h \not\equiv 0$. Alors (4.5) n'admet pas de solution si $a = \lambda_1(m,p)$ et n'admet pas de solution positive si $a \geq \lambda_1(m,p)$.*

Par ailleurs en utilisant les résultats de régularité de [64] on a:

Proposition 4.4. *Pour tout $r > 0$, toute solution de (4.1) est de classe $C^{1,\,\alpha}(B_r)$, où $\alpha = \alpha(r) \in]0,1[$ et B_r est la boule de rayon r centrée en O.*

On pose alors

$$a_1(r) = \inf_{B_r} k(x) \quad a_2(r) = \sup_{B_r} k(x) \ \text{ avec } \ k(x) = \left(\frac{m(x)\phi^p(x)}{n(x)\psi^q(x)}\right)^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}}.$$

On note $a_{1\infty} = \lim_{r\to+\infty} a_1(r)$ et $a_{2\infty} = \lim_{r\to+\infty} a_2(r)$. Soit $\Theta = \dfrac{a_{1\infty}}{a_{2\infty}}$. Dès lors on a $\Theta \in [0,1]$ et $\Theta \le \dfrac{a_1(r)}{a_2(r)}$ pour tout $r > 0$.

Nous dirons que (4.1) satisfait le principe du maximum si $f \ge 0$ et $g \ge 0$ implique que tout couple (u,v) de solution de (4.1) est tel que : $u \ge 0\,;\ \ v \ge 0$ presque partout dans $\mathbb{R}^N$. On a le résultat suivant:

Théorème 4.2. *On suppose que les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) et (H_4) sont satisfaites. Alors on a le principe du maximum pour le système (4.1) si*
$(\mathcal{C}_1)$ $\lambda_1(m,p) > a$
$(\mathcal{C}_2)$ $\lambda_1(n,q) > d$ *et*
$(\mathcal{C}_3)$ $(\lambda_1(m,p) - a)^{\frac{\alpha+1}{p}} (\lambda_1(n,q) - d)^{\frac{\beta+1}{q}} > b^{\frac{\alpha+1}{p}} c^{\frac{\beta+1}{q}}$

Réciproquement, si le principe du maximum a lieu, alors les conditions $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_4)$ sont satisfaites, avec

$(\mathcal{C}_4)$ $\quad (\lambda_1(m,p) - a)^{\frac{\alpha+1}{p}} (\lambda_1(n,q) - d)^{\frac{\beta+1}{q}} > \Theta\, b^{\frac{\alpha+1}{p}} c^{\frac{\beta+1}{q}}$.

Preuve. La preuve est une adaptation partielle de [14].

La condition est nécessaire

Si $\lambda_1(m,p) \le a$ alors les fonctions $f := [a - \lambda_1(m,p)]m\phi^{p-1}$ et $g := 0$ sont positives et on a $(-\phi,0)$ qui est solution de (4.1). Ce qui contredit le principe du maximum.
De même si $\lambda_1(n,q) \le d$ on prend $f := 0$ et $g := [d - \lambda_1(n,q)]n\psi^{q-1}$. On a alors $(0,-\psi)$ qui est solution de (4.1). Ce qui contredit également le principe du maximum.

On suppose maintenant que $\lambda_1(m,p) > a$ et $\lambda_1(n,q) > d$. Si l'un des coefficients Θ, b ou c est nul, il n'y a plus rien à démontrer dans $(\mathcal{C}_4)$. On se met alors dans l'hypothèse que $\Theta \ne 0$, $b \ne 0$ et $c \ne 0$. Pour démontrer la condition $(\mathcal{C}_4)$, procédons par l'absurde en supposant que $(\mathcal{C}_4)$ n'est pas satisfaite, c'est à dire qu'on a :

$$(\lambda_1(m,p) - a)^{\frac{\alpha+1}{p}} (\lambda_1(n,q) - d)^{\frac{\beta+1}{q}} \le \Theta\, b^{\frac{\alpha+1}{p}} c^{\frac{\beta+1}{q}}$$

On pose $A = \left(\dfrac{\lambda_1(m,p) - a}{b}\right)^{\frac{\alpha+1}{p}}$ et $B = \left(\dfrac{\lambda_1(n,q) - d}{c}\right)^{\frac{\beta+1}{q}}$.

On a alors $AB \le \Theta$, ce qui implique $\ \ A\, a_{2\infty} \le \dfrac{1}{B}\, a_{1\infty}$. on déduit l'existence d'un réel $\xi \in \mathbb{R}_+^*$

tel que:
$$A\,a_{2\infty} \leq \xi \leq \frac{1}{B}\,a_{1\infty}.$$
Comme les fonctions $a_1(r)$ et $a_2(r)$ sont respectivement décroissante et croissante, il s'en suit que
$$Aa_2(r) \leq Aa_{2\infty} \leq \xi \leq \frac{1}{B}a_{1\infty} \leq \frac{1}{B}a_1(r)$$
pour tout $r > 0$. Donc $A\,k(x) \leq Aa_2(r) \leq \xi \leq \frac{1}{B}a_1(r) \leq \frac{1}{B}\,k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, c'est à dire
$$\begin{cases} A\,k(x) \leq \xi \quad \forall x \in \mathbb{R}^N & \text{(i)} \\ \dfrac{B}{k(x)} \leq \dfrac{1}{\xi} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N & \text{(ii).} \end{cases}$$
On pose $\xi = \left(\dfrac{k_1^q}{k_2^p}\right)^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}}$ avec k_1 , k_2 des constantes positives.
(i) implique
$$[\lambda_1(m,p) - a]^{\frac{\alpha+1}{p}} \left(\frac{m(x)\phi(x)^p}{n(x)\psi(x)^q}\right)^{\frac{(\alpha+1)}{p}\frac{\beta+1}{q}} \leq b^{\frac{\alpha+1}{p}} \left(\frac{k_1^q}{k_2^p}\right)^{\frac{(\beta+1)}{q}\frac{\alpha+1}{p}} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N\ ,$$
c'est à dire
$$[\lambda_1(m,p) - a] \left(\frac{m(x)\phi(x)^p}{n(x)\psi(x)^q}\right)^{\frac{\beta+1}{q}} \leq b \left(\frac{k_1^q}{k_2^p}\right)^{\frac{(\beta+1)}{q}}$$
Ce qui implique $[\lambda_1(m,p) - a]\,[m(x)(k_2\phi(x))^p]^{(\frac{\beta+1}{q})} \leq b\,(n(x)(k_1\psi(x))^q)^{\frac{(\beta+1)}{q}}$.

Puisque $\dfrac{\beta+1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$, on déduit alors que
$$[\lambda_1(m,p) - a]\,[m(x)]^{\frac{\beta+1}{q}}\,[k_2\phi(x)]^{p-1} \leq b\,[n(x)]^{\frac{\beta+1}{q}}\,[k_1\psi(x)]^{(\beta+1)}\ ,$$
ce qui implique que
$$-\,[\lambda_1(m,p) - a]\,m(x)\,[k_2\phi(x)]^{p-1} + bm_1(x)\,[k_1\psi(x)]^{(\beta+1)} \geq 0 \ \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$
D'une manière analogue, on a en utilisant (ii) :
$$-\,[\lambda_1(n,q) - d]\,n(x)\,[k_1\psi(x)]^{q-1} + cn_1(x)\,(k_2\phi(x))^{(\alpha+1)} \geq 0 \ \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N\ .$$
On pose
$$f(x) = -\,[\lambda_1(m,p) - a]\,m(x)\,[k_2\phi(x)]^{p-1} + bm_1(x)\,[k_1\psi(x)]^{(\beta+1)} \geq 0 \ \text{ et}$$
$$g(x) = -\,[\lambda_1(n,q) - d]\,n(x)\,[k_1\psi(x)]^{q-1} + cn_1(x)\,(k_2\phi(x))^{(\alpha+1)} \geq 0.$$

Ainsi $(-k_2\phi\ ,\ -k_1\psi)$ est solution de (4.1), ce qui contredit le principe du maximum.

La condition est suffisante

On suppose que les conditions $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ sont satisfaites. Si (u,v) est solution de (4.1) avec $f \geq 0$ et $g \geq 0$, alors en prenant comme fonction test u^- dans la formulation variationnelle de la première équation dans (4.1) on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^p dx = a \int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx - b\int_{\mathbb{R}^N} m_1 u^-(v^+)^{\beta+1}dx + b\int_{\mathbb{R}^N} m_1 u^-(v^-)^{\beta+1}dx - \int_{\mathbb{R}^N} fu^- dx.$$

$$\text{Donc} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^-|^p dx \leq a \int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx + b\int_{\mathbb{R}^N} m_1 u^-(v^-)^{\beta+1}dx$$

En utilisant la relation (4.4) et l'inégalité de Hölder on a:

$$[\lambda_1(m,p)-a]\int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx \leq b\int_{\mathbb{R}^N} m_1 u^-(v^-)^{\beta+1}dx \leq b\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v^-|^q dx\right)^{\frac{\beta+1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ce qui implique

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left[(\lambda_1(m,p)-a)\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx\right)^{\frac{\beta+1}{q}} - b\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v^-|^q dx\right)^{\frac{\beta+1}{q}}\right] \leq 0.$$

Si $\int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx = 0$ alors $u^- \equiv 0$. Sinon on a:

$$(\lambda_1(m,p)-a)\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx\right)^{\frac{\beta+1}{q}} \leq b\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v^-|^q dx\right)^{\frac{\beta+1}{q}}$$

c'est à dire

$$(\lambda_1(m,p)-a)^{\frac{\alpha+1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}} \leq b^{\frac{\alpha+1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v^-|^q dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}}. \tag{4.6}$$

D'une manière analogue, en prenant v^- comme fonction test dans la formulation variationnelle de la deuxième équation dans (4.1) on a:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v^-|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left[(\lambda_1(n,q)-d)\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v^-|^q dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}} - c\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}}\right] \leq 0.$$

Si $\int_{\mathbb{R}^N} n|v^-|^q dx = 0$ alors $v^- \equiv 0$. Sinon on a:

$$(\lambda_1(n,q)-d)\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v^-|^q dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}} \leq c\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}}$$

c'est à dire

$$(\lambda_1(n,q)-d)^{\frac{\beta+1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v^-|^q dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}} \leq c^{\frac{\beta+1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}}. \tag{4.7}$$

En multipliant (4.6) par 4.7) on a:

$$\left[(\lambda_1(m,p)-a)^{\frac{\alpha+1}{p}}(\lambda_1(n,q)-d)^{\frac{\beta+1}{q}} - b^{\frac{\alpha+1}{q}}c^{\frac{\beta+1}{q}}\right]\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u^-|^p dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v^-|^q dx\right)\right]^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}} \leq 0.$$

Les conditions $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ étant satisfaites, on déduit que $u^- = v^- = 0$. Ce qui implique que $u \geq 0$ et $v \geq 0$ presque partout dans $\mathbb{R}^N$. En utilisant les résultats de régularité de [64] et le principe du maximum de Vazquez [66] dans chaque boule B_r, on conclut que $u > 0$ et $v > 0$ sur $\mathbb{R}^N$. □

Corollaire 4.1. *Si $p = q > 1$ et $m \equiv n$, alors on a le principe du maximum pour le système (4.1) si et seulement si les conditions $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ sont satisfaites.*

Remarque 4.1. *Si $\alpha = \beta = 0$; $p = q = 2$ et $m = n$, on obtient le même résultat que [34]. Dans le cas borné, notre résultat est analogue à celui obtenu dans [14].*

4.3 Existence de solutions

Dans cette partie nous allons montrer l'existence de solution positive pour le système (4.1) sous les conditions $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$, en utilisant la méthode des sous-super solutions et une méthode d'approximation (cf. [13]).

Avant d'énoncer le résultat principal de cette partie, donnons d'abord le lemme suivant:

Lemme 4.1. *Soit (u_k,v_k) convergeant vers (u,v) dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \times L^{q^*}(\mathbb{R}^N)$.*

(i). On pose $X_k = \dfrac{|u_k|^{p-2}u_k}{1+|\varepsilon^{1/p}u_k|^{p-1}} \qquad X = \dfrac{|u|^{p-2}u}{1+|\varepsilon^{1/p}u|^{p-1}}$ *et*

$$Y_k = \frac{|u_k|^{\alpha}u_k}{1+|\varepsilon^{1/p}u_k|^{\alpha+1}} \qquad Y = \frac{|u|^{\alpha}u}{1+|\varepsilon^{1/p}u|^{\alpha+1}}.$$

Alors $X_k \to X$ dans $L^{\frac{p^*}{p-1}}$; $Y_k \to Y$ dans $L^{\frac{p^*}{\alpha+1}}$ et dans $L^{q'}(m,\mathbb{R}^N)$.

(ii). De même si on pose

$$X'_k = \frac{|v_k|^{q-2}v_k}{1+|\varepsilon^{1/q}v_k|^{q-1}} \qquad X' = \frac{|v|^{q-2}v}{1+|\varepsilon^{1/q}v|^{q-1}}.$$

$$Y'_k = \frac{|v_k|^{\beta}v_k}{1+|\varepsilon^{1/q}v_k|^{\beta+1}} \qquad Y' = \frac{|v|^{\beta}v}{1+|\varepsilon^{1/q}v|^{\beta+1}}.$$

Alors $X'_k \to X'$ dans $L^{\frac{q^*}{q-1}}$; $Y'_k \to Y'$ dans $L^{\frac{q^*}{\beta+1}}$ et dans $L^{p'}(n,\mathbb{R}^N)$.

Preuve. On fera la preuve de (i), celle de (ii) étant analogue.
$u_k \to u$ dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ alors on a:

$$\begin{cases} u_k(x) \to u(x) \text{ pp dans } \mathbb{R}^N \\ |u_k(x)| \leq l(x) \text{ avec } l \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} X_k(x) \to X(x) \text{ pp dans } \mathbb{R}^N \\ |X_k(x)| \leq |u_k(x)|^{p-1} \leq |l(x)|^{p-1} \in L^{\frac{p^*}{p-1}}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Alors d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on déduit que $X_k \to X$ dans $L^{\frac{p^*}{p-1}}(\mathbb{R}^N)$.
D'une manière analogue on a $Y_k \to Y$ dans $L^{\frac{p^*}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N)$ puisque

$$\begin{cases} Y_k(x) \to Y(x) \text{ pp dans } \mathbb{R}^N \\ |Y_k(x)| \leq |u_k(x)|^{\alpha+1} \leq |l(x)|^{\alpha+1} \in L^{\frac{p^*}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Hölder on a:

$$||Y_k - Y||^{q'}_{L^{q'}(m,\, \mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} m|Y_k - Y|^{q'} dx \leq ||m||_{L^{N/p}} ||Y_k - Y||^{q'}_{L^{p^*/(\alpha+1)}}$$

On déduit alors que $Y_k \to Y$ dans $L^{q'}(m, \mathbb{R}^N)$. $\square$

On peut maintenant énoncer le théorème suivant qui constitue le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 4.3. *On suppose les hypothèses* (H_1), (H_2), (H_3) *et les conditions* $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_3)$ *satisfaites. On suppose de plus que* $m \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N)$ *et* $n \in L^{(q^*)'}(\mathbb{R}^N)$*. Alors pour* $f \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N)$ *et* $g \in L^{(q^*)'}(\mathbb{R}^N)$*, le système (4.1) admet au moins une solution* $(u,v) \in D^{1,p} \times D^{1,q}$

Preuve. La preuve de ce théorème sera donnée en plusieurs étapes. C'est une adaptation de [14]. Elle utilise certains lemmes techniques que nous allons énoncer.
Soit $r > 0$ tel que $a+r > 0$ et $d+r > 0$. Alors le système (4.1) est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u + rm|u|^{p-2}u = (a+r)m|u|^{p-2}u + bm_1|v|^{\beta}v + f \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v + rn|v|^{q-2}v = cn_1|u|^{\alpha}u + (d+r)n|v|^{q-2}v + g \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 \,,\, v(x) \to 0 \;\text{ quand }\; |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{4.8}$$

En utilisant les mêmes arguments que dans [13, 14], pour $\epsilon \in]0,1[$ on introduit le système (S_ϵ) suivant

$$(S_\epsilon) \begin{cases} -\Delta_p u_\epsilon + rm|u_\epsilon|^{p-2}u_\epsilon = mh(u_\epsilon) + m_1h_1(v_\epsilon) + f \;\text{ dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v_\epsilon + rn|v_\epsilon|^{q-2}v_\epsilon = n_1k_1(u_\epsilon) + nk(v_\epsilon) + g \;\text{ dans } \mathbb{R}^N \\ u_\varepsilon(x) \to 0 \,,\, v_\varepsilon(x) \to 0 \;\text{ quand }\; |x| \to +\infty \end{cases} \tag{4.9}$$

où

$$h(u) = \frac{(a+r)|u|^{p-2}u}{1+|\epsilon^{\frac{1}{p}}u|^{p-1}} \qquad h_1(v) = \frac{b|v|^{\beta}v}{1+|\epsilon^{\frac{1}{q}}v|^{\beta+1}}$$
$$k_1(u) = \frac{c|u|^{\alpha}u}{1+|\epsilon^{\frac{1}{p}}u|^{\alpha+1}} \qquad k(v) = \frac{(d+r)|v|^{q-2}v}{1+|\epsilon^{\frac{1}{q}}v|^{q-1})}$$

On a le lemme suivant :

Lemme 4.2. *On suppose que les hypothèses du Théorème 4.3 sont satisfaites. Alors le système* (S_ε) *admet au moins une solution dans* $L^p(m, \mathbb{R}^N) \times L^q(n\,\mathbb{R}^N)$.

Une fois la preuve du Lemme 4.2 donnée, on déduit alors celle du Théorème 4.3 en prouvant qu'il est possible de passer à la limite dans le système (S_ε) pour retrouver les solutions du système (4.1)

Preuve du Lemme 4.2:

Ici $\varepsilon > 0$ est supposé fixé.

(i). **Construction de sous-super solutions pour le système** (I) **suivant**:

$$(I)\begin{cases} -\Delta_p u + rm|u|^{p-2}u = mh(u) + m_1h_1(v) + f \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v + rn|v|^{q-2}v = n_1k_1(u) + nk(v) + g \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0\ ,\ v_(x) \to 0 \ \text{ quand } |x| \to +\infty. \end{cases} \tag{4.10}$$

Les fonctions h,h_1,k_1 et k sont bornées, c'est à dire il existe $M > 0$ tel que :

$$|h(u)| \leq M,\ |h_1(v)| \leq M,\ |k_1(u)| \leq M \ \text{ et } \ |k(v)| \leq M,$$

pour tout $(u,v) \in D^{1,p} \times D^{1,q}$. On note par $\xi^o \in D^{1,p}$ (respectivement $\eta^o \in D^{1,q}$) solution de l'équation

$-\Delta_p u + rm|u|^{p-2}u = (m+m_1)M + f$ (resp. $-\Delta_q u + rn|u|^{q-2}u = (n+n_1)M + g$) sur $\mathbb{R}^N$

et par $\xi_o \in D^{1,p}$ (respectivement $\eta_o \in D^{1,q}$) solution de l'équation

$-\Delta_p u + rm|u|^{p-2}u = -(m+m_1)M + f$ (resp. $-\Delta_q u + rn|u|^{q-2}u = -(n+n_1)M + g$) sur $\mathbb{R}^N$.

Les couples (ξ_o, ξ^o) (respectivement (η_o, η^o)) sont des couples de sous-super solution du système (I) puisque

$$\begin{aligned} &-\Delta_p \xi_o + rm|\xi_o|^{p-2}\xi_o - mh(\xi_o) - m_1h_1(\eta) - f \\ &\leq -\Delta_p \xi_o + rm|\xi_o|^{p-2}\xi_o + (m+m_1)M - f = 0 \ \ \forall\, \eta \in [\eta_o, \eta^o] \end{aligned}$$

et

$$-\Delta_p \xi^o + rm|\xi^o|^{p-2}\xi^o - mh(\xi^o) - m_1h_1(\eta) - f$$

$$\geq -\Delta_p\xi^o + rm|\xi^o|^{p-2}\xi^o - (m+m_1)M - f = 0 \;\; \forall\, \eta \in [\eta_o, \eta^o]$$

respectivement

$$\begin{aligned} &-\Delta_q\eta_o + rn|\eta_o|^{q-2}\eta_o - n_1k_1(\xi) - nk(\eta_o) - g \\ &\leq -\Delta_q\eta_o + rn|\eta_o|^{q-2}\eta_o + (n+n_1)M - g = 0 \;\; \forall\, \xi \in [\xi_o, \xi^o] \\ &-\Delta_q\eta^o + rn|\eta^o|^{q-2}\eta^o - n_1k_1(\xi) - nk(\eta^o) - g \\ &\geq -\Delta_q\xi^o + rn|\xi^o|^{q-2}\xi^o - (n+n_1)M - g = 0 \;\; \forall\, \xi \in [\xi_o, \xi^o]. \end{aligned}$$

Posons $K = [\xi_o, \xi^o] \times [\eta_o, \eta^o]$.

(ii). **Définition de l'opérateur T**

On définit l'opérateur $T : (u,v) \to (w, z)$ par :

$$(I) \begin{cases} -\Delta_p w + rm|w|^{p-2}w = mh(u) + m_1h_1(v) + f \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q z + rn|z|^{q-2}z = n_1k_1(u) + nk(v) + g \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0 \ , \ v_(x) \to 0 \ \text{ quand } |x| \to +\infty \end{cases} \tag{4.11}$$

(iii). $T(K) \subset K$.

En effet si $(u,v) \in K = [\xi_o, \xi^o] \times [\eta_o, \eta^o]$ alors

$$-(\Delta_p w - \Delta_p\xi^o) + rm(|w|^{p-2}w - |\xi^o|^{p-2}\xi^o) = m[h(u) - M] + m_1[h_1(v) - M]. \tag{4.12}$$

En prenant comme fonction test $(w-\xi^o)^+$ dans la forme variationnelle de (4.12) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w|^{p-2}\nabla w - |\nabla\xi^o|^{p-2}\nabla\xi^o)\nabla(w-\xi^o)^+dx \\ &+r\int_{\mathbb{R}^N} m(|w|^{p-2}w - |\xi^o|^{p-2}\xi^o)(w-\xi^o)^+dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \{m[h(u)-M] + m_1[h_1(v)-M]\}(w-\xi^o)^+dx \leq 0. \end{aligned}$$

De la monotonicité du p-Laplacien, on déduit alors que $(w-\xi^o)^+ = 0$ et donc $w \leq \xi^o$. Par la même méthode on peut montrer que $\xi_o \leq w$ en prenant comme fonction test $(w-\xi^o)^-$ dans (4.12).

D'une manière analogue on montre que $\eta_0 \leq z \leq \eta^0$.

(iv). **L'opérateur T est complètement continu**

$a)$ Montrons que T est continu.

Soit $(u_k,v_k) \to (u,v)$ dans $D^{1,p} \times D^{1,q}$, montrons que $(w_k,z_k) = T(u_k,v_k) \to (w,z) = T(u,v)$. On a:

$$(-\Delta_p w_k + rm|w_k|^{p-2}w_k) - (-\Delta_p w + rm|w|^{p-2}w)$$

$$= m[h(u_k) - h(u)] + m_1[h_1(v_k) - h_1(v)] = (a+r)m(X_k - X) + bm_1(Y_k' - Y')$$

où X_k, X, Y_k' et Y' sont des éléments définis dans le Lemme 4.1.
En prenant dans cette dernière équation $(w_k - w)$ comme fonction test on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_k|^{p-2}\nabla w_k - |\nabla w|^{p-2}\nabla w).\nabla(w_k - w)dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_k|^{p-2}\nabla w_k - |\nabla w|^{p-2}\nabla w).\nabla(w_k - w)dx + r\int_{\mathbb{R}^N} m(|w_k|^{p-2}w_k - |w|^{p-2}w)(w_k - w)dx$$

$$= (a+r)\int_{\mathbb{R}^N} m(X_k - X)(w_k - w)dx + b\int_{\mathbb{R}^N} m_1(Y_k' - Y')(w_k - w)dx$$

L'inégalité de Hölder permet d'écrire :

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_k|^{p-2}\nabla w_k - |\nabla w|^{p-2}\nabla w).\nabla(w_k - w)dx$$

$$\leq (a+r)||m||_{L^{\frac{N}{p}}}||X_k - X||_{L^{\frac{p^*}{p-1}}}||w_k - w||_{L^{p^*}} + b||Y_k' - Y'||_{L^{p'}(n,\, \mathbb{R}^N)}.||w_k - w||_{L^p(m,\, \mathbb{R}^N)}$$

Par conséquent on a $\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_k|^{p-2}\nabla w_k - |\nabla w|^{p-2}\nabla w).\nabla(w_k - w)dx \to 0$. Par ailleurs, observons que pour tout $a,\, b \in \mathbb{R}^N$ on a l'inégalité suivante (cf. [57])

$$|a - b|^p \leq c\{(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b)\}^{r/2}(|a|^p + |b|^p)^{1-r/2}, \qquad (4.13)$$

où $c = c(p)$, $r = p$ si $p \in]1,2[$ et $r = 2$ si $p \geq 2$. En utilisant cette dernière inégalité et à nouveau l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k - \nabla u_q|^p dx \leq c\left\{\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_k|^{p-2}\nabla u_k - |\nabla u_q|^{p-2}\nabla u_q\right)\nabla(u_k - u_q)dx\right\}^{r/2}$$

$$\left\{\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_k|^p + |\nabla u_k|^p\right)dx\right\}^{1-r/2}.$$

On déduit alors que $\nabla w_k \to \nabla w$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, c'est à dire $w_k \to w$ dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.
D'une manière analogue on montre que $z_k \to z$ dans $D^{1,q}$.

$b)$ Montrons que T est compact.
Soit (u_k,v_k) une suite bornée de K. Montrons que $T(u_k,v_k) = (w_k,z_k)$ converge fortement dans $L^p(m,\, \mathbb{R}^N) \times L^q(n,\, \mathbb{R}^N)$. On a:

$$-\Delta_p w_k + rm|w_k|^{p-2}w_k = mh(u_k) + m_1h_1(v_k) + f$$

On prend pour fonction test w_k, ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^p dx + r\int_{\mathbb{R}^N} m|w_k|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} mh(u_k)w_k dx + \int_{\mathbb{R}^N} m_1h_1(v_k)w_k dx + \int_{\mathbb{R}^N} fw_k dx$$

$$\leq (a+r)\int_{\mathbb{R}^N} m|u_k|^{p-1}w_k dx + b\int_{\mathbb{R}^N}[m^{\frac{\beta+1}{q}}|v_k|^{\beta+1}][m^{\frac{1}{p}}w_k]dx + \int_{\mathbb{R}^N} fw_k dx$$

$$\leq \left[(a+r)||u_k||^{p-1}_{L^p(m,\,\mathbb{R}^N)} + b||v_k||^{\beta+1}_{L^q(n,\,\mathbb{R}^N)}\right].||w_k||_{L^p(m,\,\mathbb{R}^N)} + ||f||_{L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N)}.||w_k||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}$$

Ainsi w_k est borné dans $D^{1,p}$. Par conséquent w_k converge vers un certain w faiblement dans $D^{1,p}$ et fortement dans $L^p(m,\mathbb{R}^N)$.
On prend à nouveau $(w_k - w_q)$ comme fonction test. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_k|^{p-2}\nabla w_k.\nabla(w_k-w_q)dx + r\int_{\mathbb{R}^N}|w_k|^{p-2}w_k(w_k-w_q)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}[mh(u_k)+m_1h_1(v_k)+f](w_k-w_q)dx,$$

et par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_k|^{p-2}\nabla w_k - |\nabla w_q|^{p-2}\nabla w_q).\nabla(w_k-w_q)dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} m[h(u_k)-h(u_q)](w_k-w_q)dx + \int_{\mathbb{R}^N} m_1[h_1(v_k)-h_1(v_q)](w_k-w_q)dx + \int_{\mathbb{R}^N} f(w_k-w_q)dx$$

$$\leq [||u_k||^{p-1}_{L^p(m,\,\mathbb{R}^N)} + ||u_q||^{p-1}_{L^p(m,\,\mathbb{R}^N)} + ||v_k||^{\beta+1}_{L^q(n,\,\mathbb{R}^N)} + ||v_q||^{\beta+1}_{L^q(n,\,\mathbb{R}^N)}]||w_k-w_q||_{L^p(m,\,\mathbb{R}^N)}$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^N} f(w_k-w_q)dx.$$

On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla w_k|^{p-2}\nabla w_k - |\nabla w_q|^{p-2}\nabla w_q).\nabla(w_k-w_q)dx \to 0$$

pour $k,q \to +\infty$, et en utilisant l'inégalité (4.13) comme dans **a)** on conclut que w_k converge vers w dans $D^{1,p}$.
D'une manière similaire, on montre que $z_k \to z$ dans $L^q(n,\mathbb{R}^N)$.

K étant un sous-ensemble convexe, fermé et borné de $L^p(m,\mathbb{R}^N)\times L^q(n,\mathbb{R}^N)$, en appliquant le théorème du point fixe de Schauder, on déduit l'exsitence d'un point fixe de l'opérateur T, qui n'est rien d'autre que la solution du système (S_ϵ).

Preuve du Théorème 4.3

(i). Montrons que (u_ϵ,v_ϵ) est borné dans $D^{1,p}\times D^{1,q}$. Pour cela on pose $t_\epsilon = \max(||u_\epsilon||^p_{D^{1,p}},||v_\epsilon||^q_{D^{1,q}})$, $z_\epsilon = t_\epsilon^{\frac{-1}{p}}u_\epsilon$ et $w_\epsilon = t_\epsilon^{\frac{-1}{q}}v_\epsilon$. Comme (u_ϵ,v_ϵ) est solution de (S_ϵ) on déduit que:

$$\begin{cases} -\Delta_p z_\epsilon + rm|z_\epsilon|^{p-2}z_\epsilon = \dfrac{(a+r)m|z_\epsilon|^{p-2}z_\epsilon}{1+t_\epsilon^{\frac{1}{p'}}|\epsilon^{\frac{1}{p}}z_\epsilon|^{p-1}} + \dfrac{bm_1|w_\epsilon|^{\beta}w_\epsilon}{1+t_\epsilon^{\frac{1}{p'}}|\epsilon^{\frac{1}{q}}w_\epsilon|^{\beta+1}} + ft_\epsilon^{\frac{-1}{p'}} \\ -\Delta_q w_\epsilon + rn|w_\epsilon|^{q-2}w_\epsilon = \dfrac{cn_1|z_\epsilon|^{\alpha}z_\epsilon}{1+t_\epsilon^{\frac{1}{q'}}|\epsilon^{\frac{1}{p}}z_\epsilon|^{\alpha+1}} + \dfrac{(d+r)n|w_\epsilon|^{q-2}w_\epsilon}{1+t_\epsilon^{\frac{1}{q'}}|\epsilon^{\frac{1}{q}}w_\epsilon|^{q-1}} + gt_\epsilon^{\frac{-1}{q'}}. \end{cases}$$

En multipliant la première équation du système ci-dessus par z_ϵ on obtient:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_\epsilon|^p dx + r\int_{\mathbb{R}^N} m|z_\epsilon|^p dx \le (a+r)\int_{\mathbb{R}^N} m|z_\epsilon|^p dx + b\int_{\mathbb{R}^N} m_1|w_\epsilon|^{\beta+1} z_\epsilon dx + t_\epsilon^{-1/p}\int_{\mathbb{R}^N} f z_\epsilon dx,$$

c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z_\epsilon|^p dx \le a\int_{\mathbb{R}^N} m|z_\epsilon|^p dx + b\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|z_\epsilon|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|w_\epsilon|^p dx\right)^{(\beta+1)/q}$$
$$+t_\epsilon^{-1/p}||f||_{L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |z_\epsilon|^{p^*} dx\right)^{1/p^*}.$$

Ce qui implique

$$\| z_\varepsilon \|^p_{D^{1,p}} \le \frac{a}{\lambda_1(m,p)} \| z_\varepsilon \|^p_{D^{1,p}} + b\frac{\| z_\varepsilon \|_{D^{1,p}}}{\lambda_1(m,p)^{\frac{1}{p}}}\frac{\| w_\varepsilon \|^{\beta+1}_{D^{1,q}}}{\lambda_1(n,q)^{\frac{\beta+1}{q}}} + c_1/(t_\varepsilon^{-1/p'}) \| z_\varepsilon \|_{D^{1,p}}.$$

Ici $c_1 = c(p)||f||_{L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N)}$, où $c(p)$ désigne la constante qui intervient dans l'injection de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. On déduit alors que

$$(\lambda_1(m,p)-a)\left(\frac{\| z_\varepsilon \|_{D^{1,p}}}{\lambda_1(m,p)^{\frac{1}{p}}}\right)^{p-1} \le b\left(\frac{\| w_\varepsilon \|_{D^{1,q}}}{\lambda_1(n,q)^{\frac{1}{q}}}\right)^{\beta+1} + c_1/(t_\varepsilon^{-1/p'}). \tag{4.14}$$

D'une manière analogue, en multipliant la deuxième équation du système ci-dessus par w_ϵ on obtient

$$(\lambda_1(n,q)-d)\left(\frac{\| w_\varepsilon \|_{D^{1,q}}}{\lambda_1(n,q)^{\frac{1}{q}}}\right)^{q-1} \le c\left(\frac{\| z_\varepsilon \|_{D^{1,p}}}{\lambda_1(m,p)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\alpha+1} + c_2/(t_\varepsilon^{-1/q'}). \tag{4.15}$$

Supposons par l'absurde que u_ϵ ou v_ϵ est non borné dans $D^{1,p}$ ou $D^{1,q}$. On a alors $t_\epsilon \to +\infty$ et on déduit de (4.14) et (4.15) que:

$$(\lambda_1(m,p)-a)^{\frac{\alpha+1}{p}}\left(\frac{\| z_\varepsilon \|_{D^{1,p}}}{\lambda_1(m,p)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{q}} \le b^{\frac{\alpha+1}{p}}\left(\frac{\| w_\varepsilon \|_{D^{1,q}}}{\lambda_1(n,q)^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{p}}$$

et

$$(\lambda_1(n,q)-d)^{\frac{\beta+1}{q}}\left(\frac{\| w_\varepsilon \|_{D^{1,q}}}{\lambda_1(n,q)^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{p}} \le c^{\frac{\beta+1}{q}}\left(\frac{\| z_\varepsilon \|_{D^{1,p}}}{\lambda_1(m,p)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{q}}.$$

En multipliant membre à membre ces deux dernières inégalités on obtient

$$(\lambda_1(m,p)-a)^{\frac{\alpha+1}{p}}(\lambda_1(n,q)-d)^{\frac{\beta+1}{q}}\left(\frac{\| z_\varepsilon \|_{D^{1,p}}}{\lambda_1(m,p)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{q}}\left(\frac{\| w_\varepsilon \|_{D^{1,q}}}{\lambda_1(n,q)^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{p}}$$

$$\leq b^{\frac{\alpha+1}{p}} c^{\frac{\beta+1}{q}} \left(\frac{\| z_\varepsilon \|_{D^{1,p}}}{\lambda_1(p)^{\frac{1}{p}}} \right)^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{q}} \left(\frac{\| w_\varepsilon \|_{D^{1,q}}}{\lambda_1(n,q)^{\frac{1}{q}}} \right)^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{p}}.$$

Ce qui implique

$$\left((\lambda_1(m,p) - a)^{\frac{\alpha+1}{p}} (\lambda_1(n,q) - d)^{\frac{\beta+1}{q}} - b^{\frac{\alpha+1}{p}} c^{\frac{\beta+1}{q}} \right) \left(\frac{\| z_\varepsilon \|_{D^{1,p}}}{\lambda_1(m,p)^{\frac{1}{p}}} \frac{\| w_\varepsilon \|_{D^{1,q}}}{\lambda_1(n,q)^{\frac{1}{q}}} \right)^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{p}} \leq 0.$$

Mais ceci est absurde d'après les conditions $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$.

(ii). Montrons que $(\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon, \epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon) \to (0,0)$ dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.
De (i) on déduit que $\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon$ et $\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon$ sont bornés respectivement dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et dans $D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent $(\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon, \epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon)$ converge vers (u_*, v_*) faiblement dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$ et fortement dans $L^p(m, \mathbb{R}^N) \times L^q(n, \mathbb{R}^N)$. En multipliant la première équation de (S_ϵ) par $\epsilon^{\frac{1}{p'}}$ et la deuxième par $\epsilon^{\frac{1}{q'}}$, on obtient

$$\begin{cases} -\Delta_p(\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon) + rm|\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon|^{p-2}(\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon) = \dfrac{(a+r)m|\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon|^{p-2}(\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon)}{1+|\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon|^{p-1}} + \dfrac{bm_1|\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon|^{\beta}(\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon)}{1+|\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon|^{\beta+1}} + \epsilon^{\frac{1}{p'}} f \\ -\Delta_q(\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon) + rn|\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon|^{q-2}(\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon) = \dfrac{cn_1|\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon|^{\alpha}(\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon)}{1+|\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon|^{\alpha+1}} + \dfrac{(d+r)n|\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon|^{q-2}(\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon)}{1+|\epsilon^{\frac{1}{q}} w_\epsilon|^{q-1}} + \epsilon^{\frac{1}{q'}} g. \end{cases}$$

Puisque $\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon \to u_*$ dans $L^p(m, \mathbb{R}^N)$ alors on a

$$\begin{cases} \epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon(x) \to u_*(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^N \\ |\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon(x)| \leq l(x) \text{ avec } l \in L^p(m, \mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{4.16}$$

Donc d'après le théorème de la convergence dominée on a:

$$\frac{|\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon|^{p-2}(\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon)}{1+|\epsilon^{\frac{1}{p}} u_\epsilon|^{p-1}} \to |u_*|^{p-2} u_* \text{ dans } L^{p'}(m, \mathbb{R}^N)$$

$$\frac{|\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon|^{\beta}(\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon)}{1+|\epsilon^{\frac{1}{q}} v_\epsilon|^{\beta+1}} \to |v_*|^{p-2} v_* \text{ dans } L^{p'}(m, \mathbb{R}^N).$$

En utilisant les résultats classiques de ([56], page 172) et par passage à la limite on a:

$$\begin{cases} -\Delta_p(u_*) + rm|u_*|^{p-2} u_* = \dfrac{(a+r)m|u_*|^{p-2} u_*}{1+|u_*|^{p-1}} + b\dfrac{m_1|v_*|^{\beta} v_*}{1+|v_*|^{\beta+1}} \\ -\Delta_q(v_*) + rn|v_*|^{q-2} v_* = \dfrac{cn_1|u_*|^{\alpha} u_*}{1+|u_*|^{\alpha+1}} + \dfrac{(d+r)n|v_*|^{q-2} v_*}{1+|v_*|^{q-1}} \end{cases} \tag{4.17}$$

On va montrer que $u_* = v_* = 0$. Pour cela on prend pour fonction test u_* dans la première équation de (4.17) et on a:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_*|^p dx \leq a \int_{\mathbb{R}^N} m|u_*|^p dx + b \int m_1 |v_*|^{\beta} u_* v_* dx.$$

Ainsi

$$(\lambda_1(m,p)-a)\int_{\mathbb{R}^N} m|u_*|^p dx \leq b\int_{\mathbb{R}^N} m_1|v_*|^{\beta+1}|u_*|dx \leq b\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|v_*|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|u_*|^q dx\right)^{\frac{\beta+1}{q}},$$

c'est à dire

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u_*|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left[(\lambda_1(m,p)-a)\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u_*|^p dx\right)^{\frac{\beta+1}{q}} - b\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v_*|^q dx\right)^{\frac{\beta+1}{q}}\right] \leq 0.$$

Si $\int_{\mathbb{R}^N} m|u_*|^p dx = 0$ alors on a $u_* \equiv 0$ et on a le résultat attendu. Sinon

$$(\lambda_1(m,p)-a)\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u_*|^p dx\right)^{\frac{\beta+1}{q}} \leq b\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v_*|^q dx\right)^{\frac{\beta+1}{q}}.$$

Par conséquent

$$(\lambda_1(m,p)-a)^{\frac{\alpha+1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u_*|^p dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}} \leq b^{\frac{\alpha+1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v_*|^q dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}}. \quad (4.18)$$

D'une manière analogue, en multipliant la deuxième équation de (4.17) par w on a

$$(\lambda_1(n,q)-d)^{\frac{\beta+1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} n|v_*|^q dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}} \leq c^{\frac{\beta+1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} m|u_*|^p dx\right)^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}}. \quad (4.19)$$

En multipliant (4.18) par (4.19), on obtient:

$$\left((\lambda_1(m,p)-a)^{\frac{\alpha+1}{p}}(\lambda_1(n,q)-d)^{\frac{\beta+1}{q}} - b^{\frac{\alpha+1}{p}}c^{\frac{\beta+1}{q}}\right)\left((\int_{\mathbb{R}^N} m|u_*|^p dx)(\int_{\mathbb{R}^N} n|v_*|^q dx)\right)^{\frac{\alpha+1}{p}\frac{\beta+1}{q}} \leq 0.$$

On déduit alors des conditions $(\mathcal{C}_i)$ $(i=1,2,3)$ que $u_* = v_* = 0$. D'où $(\epsilon^{\frac{1}{p}}u_\epsilon, \epsilon^{\frac{1}{q}}v_\epsilon) \to (0,0)$ dans $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,q}(\mathbb{R}^N)$.

(iii). Montrons enfin que (u_ϵ, v_ϵ) converge fortement dans $D^{1,p} \times D^{1,q}$. On a d'après (i) et (ii), (u_ϵ, v_ϵ) est borné dans $D^{1,p} \times D^{1,q}$ et $\epsilon^{\frac{1}{p}}u_\epsilon(x) \to 0$ pp dans $\mathbb{R}^N$. Donc à une sous-suite près $(u_\epsilon, v_\epsilon) \to (u_0, v_0)$ dans $L^p(m\ ,\mathbb{R}^N) \times L^q(n\ ,\mathbb{R}^N)$. Par conséquent

$$\left|\frac{|u_\epsilon|^{p-2}u_\epsilon}{1+|\epsilon^{\frac{1}{p}}u_\epsilon|^{p-1}}\right| \leq |u_\epsilon|^{p-1} \leq l^{p-1} \in L^{p'}(m,\mathbb{R}^N) \text{ et}$$

$$\frac{|u_\epsilon(x)|^{p-2}u_\epsilon(x)}{1+|\epsilon^{\frac{1}{p}}u_\epsilon(x)|^{p-1}} \to |u_0(x)|^{p-2}u_0(x) \text{ pp dans } \mathbb{R}^N.$$

En utilisant le théorème de la convergence dominée, on a alors $h(u_\epsilon) \to h(u_0)$ dans $L^{p'}(m\,,\mathbb{R}^N)$. Par un raisonnement similaire on montre que $h_1(v_\epsilon) \to h_1(v_0)$ dans $L^{q'}(m_1\,,\mathbb{R}^N)$, $k_1(u_\epsilon) \to k_1(u_0)$ dans $L^{p'}(n_1\,,\mathbb{R}^N)$ et $k(v_\epsilon) \to k(v_0)$ dans $L^{q'}(n\,,\mathbb{R}^N)$. Par conséquent en utilisant (4.13), on a $(u_\epsilon,v_\epsilon) \to (u_0,v_0)$ dans $D^{1,p} \times D^{1,q}$. De plus en passant à la limite dans (S_ϵ) on obtient :

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 = am|u_0|^{p-2}u_0 + bm_1|v_0|^\beta v_0 + f \\ -\Delta_q v_0 = cn_1|u_0|^\alpha u_0 + dn|v_0|^{q-2}v_0 + g. \end{cases} \tag{4.20}$$

Ainsi (u_0,v_0) est solution de (4.1). $\square$

Remarque 4.2. *La même technique peut être utilisée pour l'étude du principe du maximum pour le système coopératif elliptique suivant:*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = am(x)|u|^{p-2}u + bm_1(x)|u|^\alpha|v|^\beta v + f \ \ \textit{dans}\ \mathbb{R}^N \\ -\Delta_q v = cm_1(x)|u|^\alpha u|v|^\beta + dn(x)|v|^{q-2}v + g \ \ \textit{dans}\ \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0\ ,\ v(x) \to 0 \ \ \textit{quand}\ |x| \to +\infty \end{cases} \tag{4.21}$$

où ici on prend $m_1 = m^{\frac{\alpha+1}{p}} n^{\frac{\beta+1}{q}}$. Les résultats des Théorèmes 4.2 et 4.3 restent valables pour le système (4.21). Un tel système avait été considéré auparavant dans [14] dans le cas d'un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $m = n \equiv 1$.

Chapitre 5

Annexe

(i). **Multiplicateurs de Lagrange** (voir [67])

Soient X un espace de Banach et $\psi \in C^2(X,\mathbb{R})$. On note X' l'espace dual de X et on pose

$$V := \{v \in X : \ \psi(v) = 1\}$$

On suppose que pour tout $v \in V$, $\psi'(v) \neq 0$. L'espace tangent de V au point v, noté T_vV, est défini comme étant

$$T_vV := \{y \in X :< \psi'(v),y >= 0\}.$$

Soient $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$ et $v \in V$. On note $\tilde{\varphi}$ la restriction de φ à V. La norme de la dérivée de $\tilde{\varphi}$ est définie par:

$$||\tilde{\varphi}'(v)||_* := \sup_{y \in T_vV, \ ||y||=1} < \tilde{\varphi}'(v),y > .$$

Le point v est un point critique de $\tilde{\varphi}$ si la restriction de $\varphi'(v)$ à l'espace tangent T_vV est identiquement nulle. On a le lemme de dualité suivant

Lemme 5.1. *Si $f,g \in X'$, alors*

$$\sup_{<g,y>=0, \ ||y||=1} < f,y >= \min_{\lambda \in \mathbb{R}} ||f - \lambda g||.$$

Preuve
Il est évident que

$$\sup_{<g,y>=0, \ ||y||=1} < f,y > \leq \sup_{||y||=1} < f - \lambda g,y >= ||f - \lambda g||.$$

En utilisant le théorème de Hahn-Banach, il existe une fonctionnelle linéaire continue $\tilde{f}$ sur X telle que $kerf - \tilde{f} \subset kerg$ et

$$\sup_{<g,y>=0, \ ||y||=1} < f,y >= ||\tilde{f}||.$$

Puisque $(kerf - \tilde{f}) \subset kerg$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f - \tilde{f} = \lambda g$. Par conséquent

$$\sup_{<g,y>=0,\ ||y||=1} < f,y >= ||\tilde{f}|| = ||f - \lambda g||.$$

□

Conséquence: Si $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ et $u \in V$ alors

$$||\tilde{\varphi}'(u)||_* = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} ||\varphi'(u) - \lambda \psi'(u)||$$

où $\tilde{\varphi}$ est la restriction de φ à V.
En particulier, u est un point critique de $\tilde{\varphi}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi'(u) = \lambda \psi'(u).$$

Le réel λ est appelé multiplicateur de Lagrange. D'une manière générale on a le résultat suivant

Théorème 5.1 (Théorème 6.3.2 de [25]). *Soient X un espace de Banach, $f : X \to \mathbb{R}$, $\Phi = (\Phi_1,...,\Phi_N) : X \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet un minimum local (ou un maximum local) sur la variété*

$$\mathcal{M} := \{x \in X :\ \Phi(x) = 0\}$$

en un point $a \in \mathcal{M}$. On suppose de plus qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de a dans X tel que $f,\Phi \in C^1(\mathcal{U})$ et que a est un point régulier de Φ. Alors il existe des nombres réels $\lambda_1,...,\lambda_N$ tels que

$$\left(f - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \Phi_i\right)'(a) = 0.$$

Les nombres réels $\lambda_1,...,\lambda_N$ sont appelés des multiplicateurs de Lagrange.

(ii). Estimation L^∞ de Serrin (voir [62]):

Pour $N \geq p$, on considère l'équation

$$-\Delta_p(u) = f(x,u) \ \text{ sur } \ \Omega \tag{5.1}$$

avec Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$ (éventuellement $\Omega = \mathbb{R}^N$). Soit $r > 0$ tel que $B_{2r} \subset \Omega$, où B_{2r} désigne la boule centrée à l'origine de rayon $2r$. On suppose que

$$|f(x,t)| \leq a(x)|t|^{p-1}$$

pour presque tout $x \in B_{2r}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $a \in L^q(B_{2r})$ pour $q > \frac{N}{p}$.
Le Théorème ci-dessous est une conséquence des Théorèmes 1 et 2 de [62].

Théorème 5.2. *On suppose que* $1 < p < N$*. Soit* u *une solution de (5.1) avec* $u \in L^\infty(\Omega)$*. On suppose de plus que* $f(x,u) \in L^{\gamma_1}(\Omega)$ *avec* $\gamma_1 > \frac{N}{p}$*. Alors pour tout* $x \in \Omega$ *on a:*

$$||u||_{L^\infty(B_1(x))} \leq C \left(||u||_{L^{p^*}(B_2(x))} + ||f(x,u)||_{L^{\gamma_1}(B_2(x))} \right), \tag{5.2}$$

où $C = C(p,N,\gamma_1) > 0$ *et* $B_1(x) \subset B_2(x) \subset \Omega$*.*

Remarque 5.1. *En particulier, si*

$$\lim_{|x| \to +\infty} ||u||_{L^{p^*}(B_2(x))} = 0 \;\; et \;\; \lim_{|x| \to +\infty} ||f(x,u)||_{L^{\gamma_1}(B_2(x))} = 0$$

alors (5.2) implique que

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0.$$

Par ailleurs, du Théorème 8 de [62] on déduit que si u est solution de 5.1, alors u est localement Hölder continue; c'est à dire il existe une constante $\alpha = \alpha(p,N,||u||_{L^q(\Omega)}) \in]0,1[$ telle que pour tout sous-domaine $\Omega' \subset \Omega$, il existe $c = c(p,N,||u||_{L^q(\Omega)},dist(\Omega',\partial\Omega)) > 0$ telle que

$$|u(x) - u(y)| \leq c||||_{L^\infty(\Omega)}.|x-y|^\alpha \;\; \forall\, x,y \in \Omega'.$$

(iii). Inégalité de Harnack (Voir Théorème 5,6 et 9 de [62])

Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ solution de (5.1) avec $u \geq 0$. On suppose que $B(x_0,3r) \subset \Omega$ pour un certain $r > 0$ et $x_0 \in \Omega$. Alors il existe $c = c(p,N,r,||||_{L^q(B(x_0,"r))},\Omega)$ telle que

$$\max_{\bar{B}(x_0,r)} u \leq c \min_{\bar{B}(x_0,r)} u.$$

(iv). Résultat de régularité de Tolksdorf (voir [64]):

On considère l'équation

$$-\Delta_p(u) = f(x) \;\text{ dans } B_{2r} \tag{5.3}$$

Soit $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega) \cap L^\infty(B_{2r})$ solution de (5.3) avec $L^\infty(B_{2r})$. Le Théorème 1 de [64] donne le résultat suivant:

Il existe une constante C et un réel $\alpha \in]0,1[$, dépendant de $p,N,R,||f||_{L^\infty(B_{2R})}$ et $||u||_{L^\infty(B_{2R})}$, tels que

$$\| u \|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{B_R})} \leq C.$$

(v). **Principe du maximum de Vazquez** (voir [66]):

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ et soit $u \in C^1(\Omega)$. On suppose que $u \geq 0$ presque partout dans Ω et $\Delta_p(u) \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. On suppose de plus qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$-\Delta_p u + c|u|^{p-2}u \geq 0 \text{ pp dans } \Omega.$$

Alors on a soit $u \equiv 0$ sur Ω, soit $u > 0$ pp sur Ω. De plus si $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ pour un certain $x_0 \in \partial\Omega$ satisfaisant à la condition de l'intérieur de la sphère avec $u(x_0) = 0$ alors

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

où ν est la normale intérieure en x_0.

(vi). **Identité de Picone pour le p-Laplacien** (voir [4]):

Soit $v > 0$, $u \geq 0$ deux fonctions différentiables. On pose

$$L(u,v) = |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v$$

$$R(u,v) = |\nabla u|^p - \nabla(\frac{u^p}{v^{p-1}})|\nabla v|^{p-1}\nabla v.$$

Alors $L(u,v) = R(u,v)$. De plus $L(u,v) \geq 0$ et $L(u,v) = 0$ presque partout dans Ω si et seulement si $\nabla(u/v) = 0$ pp dans Ω, c'est à dire que $u = kv$ sur chaque composante connexe de Ω, avec k une constante.

(vii). **Un théorème de déformation** (cf. [17, 60] pour plus de détails):

Théorème A. Soient $c \in \mathbb{R}$, ν, $\mu > 0$ et $\mathcal{O}$ un voisinage symétrique de $K_c(J)$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta : M_m \times [0,1] \to M_m$ continue tels que:
- $\eta(-u,t) = -\eta(u,t)$, $\forall t \in [0,1]$;
- $||\eta(u,t), u|| \leq \mu t$, $\forall u \in M_m$ $\forall t \in [0,1]$;
- $J(\eta(u,t)) \leq J(u)$, $\forall t \in [0,1]$;
- $|J(u) - c| \geq \nu \Rightarrow \eta(u,t) = u$, $\forall u \in M_m$, $\forall t \in [0,1]$;
- $\eta(J^{c+\varepsilon} \backslash \mathcal{O}, 1) \subset J^{c-\varepsilon}$.

Corollaire. Soient $\nu > 0$, $U \subset M_m$ fermé et symétrique et c une valeur régulière de J restreinte à U. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta : U \times [0,1] \to U$ continue tels que:
- $\eta(-u,t) = -\eta(u,t)$, $\forall t \in [0,1]$;
- ($t = 0$ ou $|J(u) - c| \geq \nu) \Rightarrow \eta(u,t) = u$, $\forall u \in M_m$, $\forall t \in [0,1]$;
- $\eta(J^{c+\varepsilon}, 1) \subset J^{c-\varepsilon}$.

(viii). Quelques motivations physiques (cf. [24])

On peut citer quelques phénomènes physiques, parmi tant d'autres, pour lesquels l'opérateur p-Laplacien intervient.

(a) **Fluides Non Newtoniens:**
L'équation non linéaire suivante

$$-\Delta_p u + \lambda u = 0 \;\; p > 1, \;\; \lambda > 0, \tag{5.4}$$

apparait dans l'étude des fluides non Newtoniens. En effet, en étudiant les lois du mouvement des milieux fluides, les fluides Newtoniens sont habituellement considérés comme ceux pour qui la relation entre la tention τ et le gradient de la velocité $\dfrac{du}{dx}$, dans le plan, est de la forme

$$\tau = \mu \, \frac{du}{dx}. \tag{5.5}$$

D'après l'état du continum, les milieux dispersifs ne satisfont pas à la relation (5.5). On a plutôt une relation de la forme

$$\tau = \mu \, \left| \frac{du}{dx} \right|^{p-2} \frac{du}{dx}, \;\; p > 1. \tag{5.6}$$

Une telle équation est souvent rencontrée en Rhéologie. Les quantités μ et p sont appelées les caractérisques rhéologiques du milieu. Les milieux pour lesquels $p > 2$ sont appelés **fluides dilatants** et ceux pour lesquels $p < 2$ sont des **fluides pseudoplastiques**. Pour le cas $p = 2$ on parle de **fluides Newtoniens**.
L'étude des propriétés du mouvement d'un fluide non Newtonien ayant une conductivité dans un champs electro-magnétique, conduit par normalisation à des équations de type (5.4), en supposant l'absence de pression, de champs electrique et en supposant de plus que le champs magnétique extérieur de l'induction est perpendiculaire au mur.
L'étude physique de ce problème montre que pour les fluides dilatants ($p > 2$) et pour λ suffisamment large, il apparait des zones de courant dans lesquelles le fluide atteint une velocité qui s'annule sur une coupe transversale du canal.

(b) **Problèmes non linéaires de diffusion:** L'étude des états stables, de plusieurs problèmes gouvernés par une diffusion non linéaire en présence de termes d'absorption, conduit à des équations de la forme

$$-\Delta\varphi(u) + f(u) = g(x) \text{ dans } \Omega \tag{5.7}$$
$$u = h(x) \text{ sur } \partial\Omega \tag{5.8}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, φ et f sont des fonctions continues non décroissantes telles que $\varphi(0) = f(0) = 0$, g et h des fonctions données.

L'équation (5.7) est parfois écrite sous la forme

$$-div(k(u)\nabla u) + f(u) = g(x)$$

où k est une primitive de φ. Dans certaines applications, on procède à un choix typique de la fonction φ.

• (b_1) **Courants à travers les milieux poreux** (Problèmes de diffusion lente)
En utilisant les lois de Darcy, l'équation (5.7) est satisfaite si de plus on a

$$\varphi'(O) = 0 \text{ et } \varphi'(u) > 0 \text{ si } u \neq 0.$$

Exemple : $\varphi(u) = |u|^{m-1}u$, avec $m > 1$.

Ce même type de fonction φ apparait, dans les problèmes de diffusion non linéaire de la chaleur où la conductivité thermique dépend de la température, dans l'étude de l'aspect biologique du déplacement de populations, dans les civilisations galatiques, dans les proéminences solaires, dans la diffusion d'une goutte peu épaisse de fluide visqueux sur un plan horizontal sous l'action de la gravité.

• (b_2) **Physique du plasma** (Problèmes de diffusion rapide)
Certains modèles mathématiques de l'évolution thermique de la température du plasma conduisent à des équations non linéaires identiques à (5.7). Ici les hypothèses sur la fonction φ changent:

$$\varphi'(0) = +\infty \text{ et } \varphi'(u) > 0 \text{ si } u \neq 0.$$

Exemple : $\varphi(u) = |u|^{m-1}u$, avec $0 < m < 1$.

Bibliographie

[1] J. A. Aguilar and I. Peral, *On a elliptic equation with exponential growth*, Ren. Sem. Math. Univ. Padova, 96 (1996), 143-175.

[2] M. Alif, J-P. Gossez, *On the Fuçik spectrum with indefinite weights*, Diff. Int. Equat, to appear.

[3] W. Allegretto, *Principal eigenvalues for indefinite weight elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc., 116 (1992), 701-706.

[4] W. Allegretto and Y. X. Huang, *A Picone's identity for the* p*-Laplacian and applications*, Nonlinear Anal. Theory, Methods and Applications, 32 (1998), 819-830.

[5] W. Allegretto and Y. X. Huang, *Eigenvalues of the indefinites weight* p*-laplacian in weighted spaces*, Funkc. Ekvac, 8(1995), 233-242.

[6] A. Ambrosetti and G. Prodi, *A primer in Nonlinear Analysis*, 34 Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, 1993.

[7] A. Anane , *Etude des valeurs propres et de la résonance pour l'opérateur p-Laplacien*, Thèse, Université Libre de Bruxelles, 1987; Voir aussi C. R. Acad. Sc. Paris, 305 (1987), 725-728.

[8] M. Arias, J. Campos, M. Cuesta and J-P. Gossez, *On the antimaximum principle and the Fuçik spectrum for the Neumann* p*-Laplacian*, Diff. Int. Equat., 13 (2000), 217-226.

[9] M. Arias, J. Campos, M. Cuesta and J-P. Gossez, *Asymmetric elliptic problems with indefinite weights*, Ann. I. H. Poincaré, 19 (2002), 581-616.

[10] M. Arias, J. Campos, M. Cuesta and J-P. Gossez, *An asymmetric Neumann problem with weights*, to appear.

[11] C. Atkinson and K. El-Ali, *Some boundary value problems for the Bingham model*, J. Non-Newt. Fl. Mech., 41 (1992), 339-363.

[12] C. Atkinson and C. R. Champion, *On some boundary value problems for the equation* $\nabla.(F(|\nabla w|)\nabla w)$, Proc. R. Soc. London A, 448 (1995), 269-279.

[13] L. Boccardo, J. Fleckinger and F. de Thélin, *Existence of solutions for some nonlinear cooperative systems*, Diff. Int. Equat, to appear.

[14] M. Bouchekif, H. Serag and F. de Thélin, *On maximum principle and existence of solutions for some nonlinear elliptic systems*, Rev. Mat. Apl. 16 (1995), 1-16 .

[15] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson 1983.

[16] K. J. Brown, C. Cosner and J. Fleckinger, *Principal eigenvalues for problems with indefinite weight function in* $\mathbb{R}^N$, Proc. Math. Soc., 109(1990).

[17] M. Cuesta, *Etude de la résonnance et du spectre de Fučik des opérateurs Laplacien et p-Laplacien*, Thése de doctorat de l'ULB, Bruxelles (1992-1993).

[18] M. Cuesta, *On the Fuçik spectrum of the laplacian and p-laplacian* , Proceedings of 2000 Seminar in Differential Equations, May-June 2000, Kvilda (Czech Republic).

[19] M. Arias, J. Campos, M. Cuesta and J-P. Gossez, *An asymmetric Neumann problem with weights* , to appear.

[20] M. Cuesta, *Eigenvalue problems for the p-laplacian with indefinite weights*, Electr. J. Diff. Equat., 2001 (2001), 1-9.

[21] M. Cuesta, *Minimax theorems on C^1 manifolds via Ekeland variational principle*, preprint 2000, Abstract and Applied Analysis, 13 (2003), 757-768 .

[22] M. Cuesta, D. G. De Figueiredo and J.P. Gossez, *A nodal domain property for the p-Laplacian*, C. R. Acad. Sci. Paris, 330 (2000), série I, 669-673.

[23] M. Cuesta, D. De Figueiredo, J-P. Gossez, *The beginning of the Fučik spectrum of the p-lapalcian*, J. Diff. Equat., 159 (1999), 212-238.

[24] J. I. Diaz, *Nonlinear partial differential equations and free boundarie*, Pitman Publ. Program, 1985.

[25] P. Drábek and J. Milota, *Lectures on Nonlinear Analysis, 2004*

[26] P. Drábek, *The least eigenvalue of nonhomogeneous degenerate quasilinear eigenvalue problems*, Mathematica Bohemia, 120(2) (1995), 169-195.

[27] P. Drábek, A. Kufner and F. Nicolosi, *Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities*, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1997.

[28] P. Drábek and Y. X. Huang, *Bifurcation problems for the p-Laplacian in $\mathbb{R}^N$*, Transactions of the American Mathematical Society, 349 (1997), 171-188.

[29] P. Drábek and S. Robinson, *Resonnance problems for the p-Laplacian*, J. Funct. Anal., 169 (1999), 189-200.

[30] H. B. Dwight, *Tables of integrals and other mathematical data*, Fourth edition, New York, The Macmillan company.

[31] J. Fleckinger, J-P. Gossez and F. de Thélin, *Antimaximum principle in $\mathbb{R}^N$: Local versus global*, J. Diff. Equat. 196 (2004), 119-133.

[32] J. Fleckinger, J. Hernández and F. de Thélin, *Principe du maximum pour un système elliptique non linéaire*, C. Acad. Sc. Paris, 314 (1992), 665-668.

[33] J. Fleckinger, J. Hernández and F. de Thélin, *On maximum principle and existence of positive solutions for some cooperative elliptic systems*, Diff. Int. Equat., 8 (1995), 69-85.

[34] J. Fleckinger and Serag, *Semilinear elliptic systems on $\mathbb{R}^N$*, Rendi. Mat., série VII, 15 (1995), 89-108, Roma.

[35] J. Fleckinger, R. F. Manásevich, N. M. Stavrakakis and F. de Thélin, *Principal eigenvalues for some quasilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$*, Adv. Diff. Equat., 2 (1997), 981-1003.

[36] J. Fleckinger, R. Manàsevich, N. Stavrakakis and F. de Thélin, *Principal eigenvalues for some quasilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$*, Advances Diff. Equat., 2 (1997), 981-1003.

[37] D. G. de Figueiredo and E. Mitidieri, *Maximum Principles for Linear Elliptic Systems, Quaterno Matematico*, 177 (1988), Dip. Sc. Mat, Univ Trieste.

[38] D. G. de Figueiredo and E. Mitidieri , *Maximum Principles for Cooperative Elliptic Systems* , Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 310 (1990), 49-52 .

[39] D. G. de Figueiredo and E. Mitidieri , *A Maximum Princilpe for an Elliptic System and Applications to Semilinear Problems* , S. I. A. M. J. Math. Anal., 17 (1986), 836-849.

[40] D. G. de Figueiredo, *Positive solutions of Semilinear elliptic equations* Lecture note in Mathematics, 957 (1982).

[41] D. G. de Figueiredo and J-P. Gossez, *Strict monotonocity of eigenvalues and unique continuation*, Comm. Part. Diff. Equat. 17(182) (1992), 339-346 .

[42] D. G. de Figueiredo and J-P. Gossez, *On the first curve of the Fuçik spectrum of an elliptic operator*, Diff. Int .Equat, 7 (1994), 1285-1302.

[43] D. De Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, TATA Instiute, Springer-Verlag, 1989.

[44] S. Fučik, *Solvability of nonlinear equations and boundary value problems*, Reidel, Dordrecht, 1980.

[45] T. Gallouët and O. Kavian, *Résultats d'existence et de non existence pour certains problèmes demi-linéaire à l'infini*, Ann. Fac. Sci. de Toulouse, 1981.

[46] N. Ghoussoub, *Duality and pertubation methods in critical point theory*, Cambridge tracts in mathematics, Cambridge Univ. Press, 107 (1993).

[47] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag 1977.

[48] J-P. Gossez and A. Marcos, *On the first curve in the Fuçik spectrum for a mixed problem*, Reaction diffusion systems, ICTP Trieste (1995), 157-162.

[49] T. Godoy, J-P. Gossez and S. Paszka, *Antimaximum principle for elliptic problems with weights*, Elect. J. Diff. Equat., 1999 (1999) 1-15.

[50] Edwim Hewitt and Karl Stromberg, *Real and abstract analysis*.

[51] J. Hernánandez, *Maximum principles and decoupling for positive solutions of reaction diffusion systems*, In K. J. Brown, A. A Lacey, Eds., Reaction Diffusion equations, Oxford Clarendon press, 199-224, 1990.

[52] Y. X. Huang, *Eigenvalues of the p-laplacian in $\mathbb{R}^N$ with indefinite weight*, Comm. Math. Univ. Carolina, 36 (1995), 519-527.

[53] David Kinderlehrer and Guido Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, 1980.

[54] H. Kozono and H. Sohr, *New a priori estimates for the stokes equation in exterior domains*, Indiana Univ. Math. J, 40 (1991), 1-27.

[55] G. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*; Nonl. Anal. TMA, 12(11) (1988), 1203-1219.

[56] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[57] P. Lindqvist, *On the equation* $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$, Proc.Am.Math.Soc., 109 (1990), 157-164, Addendun in Proc. Am. Math. Soc.,116(1992),,583-584.

[58] C. Magalhães, *Semilinear elliptic problem with gossing of multiple eigenvalues*, Comm. Part. Diff. Equat., 15 (1990), 1265-1292.

[59] M. H. Protter and H. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1967.

[60] H. Ramos Quoirin, Mémoire de DEA " *Quelques propriétés nodales du p-Laplacien et un théorème de déformation* ", Université Libre de Bruxelles, Juin 2004.

[61] B. Ruf, *On nonlinear elliptic problems with jumping nonlinearities*, Ann. Math. Pura. Appl., 28 (1981), 133-151.

[62] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasilinear equations*, Acta Math., 111 (1964), 247-302.

[63] A. Szulkin, *Ljusternik-Schnirelman theory on C^1 manifolds*, Ann. Inst. H. Poincaré, Ann. Non Linéaire, 2 (1988), 171-197.

[64] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Diff. Equat., 51 (1984), 126-150.

[65] A. Touzani, *Quelques résultats sur le A_p-Laplacien avec poids indéfini* Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1992.

[66] J. L. Vazquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim., 12 (1984), 191-202.

[67] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.