

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE DE COCODY



République de Côte d'Ivoire
Union-Discipline-Travail



338/ 2001

THESE

*Présentée à l'UFR de Mathématiques et Informatique
de l'Université de Cocody
pour obtenir le grade de*

DOCTEUR DE TROISIEME CYCLE

Spécialité : Mathématiques pures

Option : **GEOMETRIE DIFFERENTIELLE**

Par :

BOSSOTO Basile Guy Richard

SUR LES DRAPEAUX DE FEUILLETAGES RIEMANNIENS

Soutenu le 29 Mars 2001 devant la commission d'examen composée de :

Président : Saliou **TOURE**,
Examineurs : **KOUA** Konin Emile,
Assohoun **ADJE**,
Etienne **DESQUITH**,
Edmond **FEDIDA**,

Professeur à l'Université de Cocody
Maître de Conférences, Directeur de l'UFRMI
Maître de Conférences à l'Université de Cocody
Maître de Recherches, Directeur de l'IRMA
Professeur à l'Université de Cocody

A mes Parents

A tous les Amis, d'hier, d'aujourd'hui et de demain.

A la mémoire de:

Celine NDOMBO (Maman)

Daniël BOSSOTO

Claude BISSE

Remerciements.

Je suis très heureux d'exprimer ma gratitude au Professeur Edmond FEDIDA de m'avoir accueilli au sein de son équipe, et proposé l'idée originale de ce travail. Il a encadré et dirigé mes recherches avec une grande patience, un intérêt soutenu et une totale disponibilité. Ses encouragements me furent d'un constant appui sans lequel la persévérance m'aurait manqué.

Je suis très vivement reconnaissant au Professeur Aziz El KACIMI de l'Université de Valenciennes qui lors de ses différents séjours à l'Université de Cocody, a contribué largement par ses remarques et ses conseils, à la réalisation de ce travail.

Je suis très reconnaissant au Professeur Saliou TOURE d'avoir bien voulu accepter de présider le jury de cette thèse.

J'exprime également mes remerciements aux Professeurs:

- KOUA Konin Emile, Directeur de l'UFR de Mathématiques et Informatique.
 - Assouhoun ADJE, Directeur Adjoint de l'UFR de Mathématiques et Informatique,
 - Etienne DESQUITH, Directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques
- d'avoir bien voulu accepter de participer au jury de cette thèse.

Une partie de cette thèse a été réalisée en collaboration avec Hassimiou DIALLO. Qu'il trouve ici mes remerciements les plus sincères.

Je suis enfin reconnaissant de l'intérêt amical et fraternel que m'ont témoigné: CODJIA Adolphe; Michel BOSSOTO; Sydney et Freddy BISSE; Prince Boungou POATY; Emilie EBALE; Mathurin ONDON; Leticia LEZOU; Roch NGOUBOU; Nassa DEGNI; Landry GOMAT; KONE; Ida; Joachim; Bamba et Coulibaly ; Mawa; Pola, Frédéric Kouamé; Adou N'cho, ainsi que toute la communauté congolaise d'Abidjan.

Table des matières

	Pages
Introduction	1
Chapitre 1: Feuilletages et Structures transverses	3
1.1- Préliminaires.....	3
1.2- Structures transverses.....	7
1.3- Feuilletages admettant un (G, T) -structure transverse.....	9
1.4- Feuilletages de Lie.....	12
1.5- Flots de Lie.....	16
1.6- Feuilletages transversalement homogènes.....	19
1.7- Feuilletages riemanniens.....	21
Chapitre 2 : Drapeaux de feuilletages riemanniens	26
2.1- Définitions et remarques.....	26
2.2- Théorème	28
2.3- Exemples.....	30
Chapitre 3: Drapeaux de feuilletages de Lie	32
3.1- Construction de drapeaux de Lie.....	32
3.2- Théorème.....	33
3.3- Drapeaux de feuilletages de Lie sur les variétés connexes, compactes et orientables de dimension 3.....	36
Bibliographie	40

Introduction

Dans la théorie des feuilletages, l'étude des feuilletages riemanniens occupe une place prépondérante de par les travaux de nombreux Mathématiciens (B. REINHART, P. MOLINO, A. KACIMI, E. GHYS,...). Parmi d'autres sujets d'études dans le domaine figure en bonne place l'extension de feuilletages riemanniens. Un feuilletage riemannien \mathcal{F} admet une extension \mathcal{F}' si $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ (chaque feuille de \mathcal{F} est contenue dans une feuille de \mathcal{F}').

En effet, pour résoudre un certain nombre de problèmes sur des structures (structures algébriques, topologiques, géométriques,...) il est parfois nécessaire de les "plonger" dans des structures du même type "plus grandes" et d'étudier les problèmes ainsi posés. Cette méthode est aussi utilisée pour des structures feuilletées. Ainsi CAIRNS a montré dans [Cai] que si un feuilletage riemannien transversalement orientable \mathcal{F} admet une extension \mathcal{F}' de codimension impaire alors sa classe d'Euler fine est nulle. Cela permet par exemple de donner une obstruction à l'existence de flots riemanniens admettant une extension de dimension 2 sur des 3-variétés compactes et simplement connexes.

Dans le même sens, dans [Mol1] MOLINO a montré que sur une variété M , si un G -feuilletage de Lie \mathcal{F} admet une extension \mathcal{F}' telle que \mathcal{F} soit dense dans \mathcal{F}' et si \mathcal{F}' est invariant par l'algèbre de Lie des champs feuilletés $\mathcal{L}(M, \mathcal{F})$, alors le feuilletage \mathcal{F}' est de Lie et défini par un sous-groupe normal de G . Ce résultat a permis de montrer que si \mathcal{F} est un G -flot de Lie à feuilles denses sur une variété connexe et compacte M alors, ou bien G est abélien ($[G, G] = 0$), ou bien $[G, G] = G$ et le premier nombre de Betti de M est nul. Mais on sait que le second cas ne peut se présenter. Ce qui montre le rapport entre cette notion d'extension de feuilletages et le théorème de Yves CARRIERE sur les flots de Lie à feuilles denses.

Il est donc à priori intéressant d'étudier une extension particulière d'un flot riemannien, celle de dimension 2, ou d'une manière générale un drapeau $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ de

feuilletages riemanniens c'est-à-dire une suite $\mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_p$ d'extensions d'un flot riemannien \mathcal{F}_1 où chaque \mathcal{F}_i est un feuilletage riemannien de dimension i tel que $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

L'objet de ce travail est l'étude de tels drapeaux sur les variétés compactes.

Ainsi, nous montrons principalement que tout drapeau de feuilletages riemanniens $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ sur une variété connexe et compacte, pour lequel le flot \mathcal{F}_1 est à feuilles denses est conjugué à un drapeau de feuilletages linéaires du tore. Par un contre exemple, nous montrons que la densité du flot \mathcal{F}_1 est nécessaire pour que le drapeau $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ soit conjugué à un drapeau de feuilletages linéaires du tore.

On sait que dans l'étude des feuilletages riemanniens, les feuilletages de Lie jouent un rôle très important. Il est donc naturel d'étudier les drapeaux constitués de feuilletages de Lie. Pour de tels drapeaux, nous établissons le résultat suivant:

Soit $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ un drapeau de G_i -feuilletages de Lie de groupes d'holonomie Γ_i sur une variété connexe et compacte M , alors il existe un Γ_i -morphisme de groupes unique θ_i de G_i sur G_{i+1} tel que: $D_{i+1} = \theta_i \circ D_i$ et $\Gamma_{i+1} = \theta_i(\Gamma_i)$; où D_i désigne l'application développante du G_i -feuilletage de Lie \mathcal{F}_i . Nous déduisons de ce résultat que tout drapeau de feuilletages de Lie à feuilles denses sur le tore \mathbb{T}^n est linéaire. Ceci est un cas particulier de notre principal résultat cité ci-dessus. Nous terminons par une classification des drapeaux de feuilletages de Lie sur les variétés connexes, compactes et orientables de dimension 3.

Notre travail est organisé de la façon suivante: Le **chapitre 1** est consacré aux résultats sur les structures transverses des feuilletages, résultats indispensables pour la suite. Le **chapitre 2** est consacré à l'étude des drapeaux de feuilletages riemanniens. C'est dans ce chapitre que nous démontrons notre principal résultat et donnons le contre-exemple précité. Enfin le **chapitre 3** traite des drapeaux de feuilletages de Lie. Dans ce chapitre nous démontrons notre deuxième résultat et donnons à la fin, la classification des drapeaux de Lie sur les 3-variétés connexes, compactes et orientables.

Chapitre 1 : FEUILLETAGES ET STRUCTURES TRANSVERSES.

Dans ce travail, toutes les variétés, applications, formes, champs de vecteurs sont supposés de classe C^∞ et toutes les variétés sont connexes et paracompactes (voir séparées et à base dénombrable d'ouverts). M est une variété différentiable connexe de dimension n .

Ce premier chapitre est consacré aux résultats sur les structures transverses des feuilletages, indispensables pour la suite.

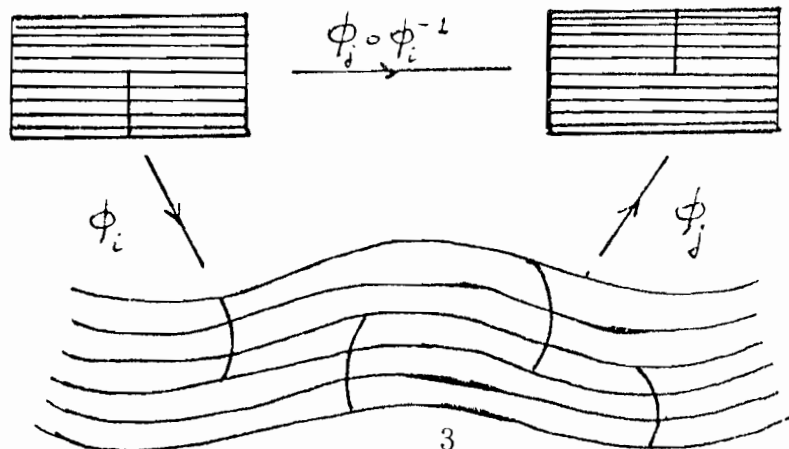
1.1- Préliminaires.

1.1.1- **Définition.** Un *feuilletage* \mathcal{F} de codimension q sur une variété M de dimension n , est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de M et d'une famille de difféomorphismes $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tels que sur chaque intersection $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le changement de coordonnées $\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x, y) = (x', y')$ soit de la forme:

$x' = \phi_{ij}(x, y); \quad y' = \gamma_{ij}(y)$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$; les γ_{ij} sont des difféomorphismes locaux de \mathbb{R}^q et les ϕ_{ij} des submersions de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ dans \mathbb{R}^p .

Ce qui signifie que l'image par $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ de tout sous-espace horizontal d'équation $y = \text{constante}$ dans \mathbb{R}^n est contenu dans un espace horizontal du même type.

La famille $\{U_i, \phi_i\}$ est appelée *atlas feuilleté* pour le feuilletage \mathcal{F} .



Pour tout $i \in I$, l'application $f_i = p \circ \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une submersion où $p : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{R}^q$ est la seconde projection de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^q .

Sur $U_i \cap U_j$, on a $f_j = \gamma_{ji} \circ f_i$.

Le recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, la famille de submersions $(f_i)_{i \in I}$ et les difféomorphismes locaux γ_{ij} caractérisent complètement le feuilletage \mathcal{F} sur M .

Les composantes connexes des fibres de f_i sont les *plaques* de \mathcal{F} dans U_i et forment une base d'une topologie \mathcal{T} sur la variété M pour laquelle M est une variété différentiable de dimension p . Cette topologie est appelée topologie des feuilles et *les composantes connexes de (M, \mathcal{T})* sont les *feuilles* de \mathcal{F} ; elle est plus fine que la topologie usuelle de M . On dit aussi que \mathcal{F} est un feuilletage de dimension p ($p + q = n$) sur M .

1.1.2- Feuilletages et systèmes différentiels.

1.1.2.1- **Définition.** Un *système différentiel* de classe C^r et de dimension p sur une variété différentiable M , est la donnée en chaque point x de M d'un sous-espace F_x de $T_x M$ de dimension p tel que; pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans M ; X_1, \dots, X_p , p champs de vecteurs sur U et linéairement indépendants de classe C^r engendrant le sous-espace F_y en tout point y de U .
$$F_y = \langle \overline{X_1, \dots, X_p} \rangle_y .$$

Notons $\varkappa_F = \{X \in \varkappa(M), X_x \in F_x\}$

1.1.2.2- **Définition.** Soit F un système différentiel de classe C^r et de dimension p sur M . Une variété intégrale de F est une sous-variété immergée W de M de dimension p telle que si $i : W \rightarrow M$ est l'immersion de W dans M alors $di(x)(T_x W) = F_x$.

1.1.2.3- **Définition.** Soit F un système différentiel de classe C^r et de dimension p sur M . On dira que F est complètement intégrable si par tout point x de M , passe une variété intégrale. Les sous-variétés intégrales maximales forment dans ces conditions une partition de M en sous-variétés connexes de dimension p c'est-à-dire un *feuilletage* de dimension p de M et on a l'équivalence suivante:

1.1.3- **Théorème [Mol2].** La donnée d'un *feuilletage* de dimension p sur M est équivalente à la donnée d'un système différentiel de dimension p sur M , complètement intégrable.

On dira qu'un champ de vecteurs est tangent au feuilletage si et seulement si, il est tangent aux feuilles de \mathcal{F} en chaque point où il est défini. L'ensemble des champs de vecteurs tangents au feuilletage \mathcal{F} est un sous-fibré du fibré tangent TM appelé *fibré tangent* à \mathcal{F} . Le quotient $Q\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ est le *fibré transverse* du feuilletage \mathcal{F} .

1.1.4- **Théorème de Frobenius [Mol2].** Soit F un système différentiel de classe C^r et de dimension p sur M . Les propositions suivantes sont équivalentes:

i) F est complètement intégrable;

ii) si X et Y sont des champs de vecteurs tangents à F , alors le crochet $[X, Y]$ est aussi tangent à F , c'est-à-dire que \mathfrak{K}_F est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{K}(M)$;

iii) Pour tout $x_0 \in M$, il existe une carte (U, φ) de M contenant x_0 ; $\omega_1, \dots, \omega_p$ ($n - p$) 1-formes différentielles sur U engendrant en tout point x de U , le sous-espace $(F_x)^\perp \subset T_x^*M$ telles que si $J_U = \{ \omega \in \Lambda^1(U, \mathbb{R}), \omega = \sum_{j=1}^q \beta_{ij} \wedge \omega_j \quad i = 1, \dots, n \}$ alors $dJ_U \subset J_U$.

Les $(\beta_{ij})_{i,j}$ étant des 1-formes différentielles définies localement sur U et $dJ_U = \{ d\omega, \omega \in J_U \}$.

1.1.5- Exemple.

1- Tout champ de vecteurs différentiable X sans singularité sur M détermine un système différentiel de classe C^∞ et de dimension 1 sur M c'est-à-dire un feuilletage de dimension 1 sur M .

2- Soit ω une 1-forme différentielle sans singularité sur M . Le sous-fibré F correspondant a pour fibre au point $x \in M$ le sous-espace de codimension un $F_x = \text{Ker}\omega(x)$.

Le sous-fibré F définit un feuilletage sur M si et seulement si il existe une 1-forme β telle que $d\omega = \beta \wedge \omega$. Ce qui est équivalent à $d\omega \wedge \omega = 0$.

En particulier si ω est fermée ($d\omega = 0$), elle définit un feuilletage de codimension un. Si M est compacte, toutes les feuilles sont difféomorphes. L'intégration de ω au-dessus des lacets de M donne un morphisme

$$h : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

L'image Γ de $\pi_1(M)$ par h est un sous-groupe de \mathbb{R} qu'on appelle groupe d'holonomie du feuilletage \mathcal{F} .

Lorsque $\mathbb{M} = \mathbb{T}^2$ et $\omega = dy - ax$ qui est clairement une forme fermée, le groupe fondamental de \mathbb{T}^2 est isomorphe à \mathbb{Z}^2 et $\Gamma = \{r + sa : r, s \in \mathbb{Z}\}$.

Lorsque a est rationnel, les feuilles sont difféomorphes au cercle \mathbb{S}^1 ; si a est irrationnel, elles sont difféomorphes à la droite réelle \mathbb{R} et sont toutes partout denses.

1.1.6- **Définition.** Une fonction différentiable f sur une variété M est dite basique pour un feuilletage \mathcal{F} si, pour tout $X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs tangents aux feuilles, la dérivée $X.f$ suivant X est identiquement nulle ($X.f = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}$).

Une forme différentielle ω sur M est dite \mathcal{F} -basique ou basique pour un feuilletage \mathcal{F} si pour tout $X \in \mathfrak{X}_{\mathcal{F}}$, on a: $i_X\omega = i_Xd\omega = 0$.

L'ensemble $\Omega^1(M/\mathcal{F})$ des 1-formes basiques sur M est un module sur l'anneau $\Omega^0(M/\mathcal{F}) = C_b^\infty(M/\mathcal{F})$ des fonctions basiques sur M .

1.1.7- **Proposition.** Soit f une fonction basique sur une variété feuilletée (M, \mathcal{F}) .

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- i) f est basique;
- ii) f est constante sur chaque feuille.

En particulier si \mathcal{F} admet une feuille partout dense, alors toute fonction basique f est constante sur M et l'anneau $\Omega^1(M/\mathcal{F})$ des 1-formes basiques sur M est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension, la codimension de \mathcal{F} .

1.1.8- Suspension d'un feuilletage par un difféomorphisme.

Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme d'une variété M . La variété M_f suspension de f est le quotient de $\mathbb{R} \times M$ par l'action du groupe discret \mathbb{Z} engendré par le difféomorphisme

$$(t, x) \mapsto (t + 1, f(x)). \quad M_f = \mathbb{R} \times M / (t, x) \sim (t + 1, f(x)).$$

Dans ces conditions, si \mathcal{F} est un feuilletage de codimension q de M invariant par f , le feuilletage produit $\mathbb{R} \times \mathcal{F}$ est invariant par l'action de \mathbb{Z} et détermine sur M_f un feuilletage \mathcal{F}_f de codimension q appelé *feuilletage suspension* de \mathcal{F} par le difféomorphisme f .

1.2- Structures transverses

1.2.1- **Définition.** Soit M une variété différentiable de dimension n et de classe C^r . Un *pseudogroupe* Γ de difféomorphismes locaux de classe C^s ($0 \leq s \leq r$) de M est une collection $\{ f_i, i \in I \}$ de difféomorphismes locaux de M de classe C^s tels que:

i) l'identité de M , $id_M : M \rightarrow M$ appartient à Γ ;

ii) si $f_i : U_i \rightarrow V_i$ appartient à Γ , sa restriction à tout sous-ensemble ouvert de son domaine appartient à Γ ;

iii) si $f_i \in \Gamma$ alors $f_i^{-1} \in \Gamma$;

iv) si $f_i, f_j \in \Gamma$, $f_i : U_i \rightarrow V_i$; $f_j : U_j \rightarrow V_j$ et $V_i \cap V_j \neq \emptyset$,

alors $f_j \circ f_i : f_i^{-1}(V_i \cap V_j) \rightarrow f_j(V_i \cap V_j)$ appartient à Γ ;

v) si $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme de M qui coïncide au voisinage de chaque point de U avec un élément de Γ ; alors $f \in \Gamma$.

1.2.2- **Définition.** Un *feuilletage* \mathcal{F} de codimension q sur M est la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de M ; d'une famille de submersions $(f_i)_{i \in I}$ $f_i : U_i \rightarrow T^q$ telles que: Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors il existe un difféomorphisme local γ_{ij} de T^q vérifiant

$$f_j(x) = (\gamma_{ji} \circ f_i)(x).$$

où T^q est une variété de dimension q , appelée *variété transverse* du feuilletage \mathcal{F} .

Les difféomorphismes locaux γ_{ij} sont appelés *changements de cartes* ou de *coordonnées transverses* et vérifient la condition de cocycle :

$$\gamma_{ik}(x) = (\gamma_{ij} \circ \gamma_{jk})(x), \text{ pour tout } x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Le système $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ est appelé *cocycle feuilleté* définissant \mathcal{F} . En outre, les γ_{ij} engendrent un *pseudogroupe* Γ de difféomorphismes locaux de la variété T^q [God1].

1.2.3- **Définition.** On appelle structure transverse à \mathcal{F} , toute structure géométrique sur T^q invariante par les difféomorphismes locaux γ_{ij} c'est-à-dire par le pseudogroupe Γ de difféomorphismes locaux engendré par les γ_{ij} .

1.2.4- Exemples de structures transverses.

1) S'il existe une métrique riemannienne g sur T^q , invariante par Γ , on dit que \mathcal{F} est un *feuilletage riemannien*. Ce premier exemple de structure transverse a été introduit par B. REINHART dans [Rei]. Dans ce cas, les γ_{ij} sont des isométries locales de la métrique g .

2) Supposons que T^q est une variété riemannienne connexe, muni d'une métrique riemannienne g . Soit G un groupe d'isométries de la variété (T^q, g) . On peut imposer à

Γ la condition supplémentaire d'être un sous-pseudogroupe du groupe G . Dans ces conditions, les changements de coordonnées transverses γ_{ij} sont des restrictions d'isométries de la variété (T^q, g) appartenant à G . Ces changements de coordonnées transverses, qui habituellement sont définis localement, ont maintenant un caractère global. Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit que \mathcal{F} admet une (G, T^q) - structure riemannienne transverse.

3) Si l'on suppose en plus des conditions de l'exemple précédent, que G agit transitivement sur T^q , alors G a la structure d'un groupe de Lie et T^q s'identifie à un espace homogène de G . On dit alors dans ce cas que \mathcal{F} est un feuilletage riemannien transversalement homogène.

4) Si en plus des conditions des exemples 2) et 3), on suppose que G est simplement connexe et agit librement sur T^q , on dit que \mathcal{F} est un G -feuilletage de Lie. Dans ces conditions, la variété T^q s'identifie au groupe de Lie G et les γ_{ij} sont les restrictions des translations à gauche de G .

5) Supposons que la variété T^q est parallélisable c'est-à-dire qu'il existe q -champs de vecteurs X_1, \dots, X_q constituant une base du module $\mathfrak{X}(T^q)$ des champs de vecteurs sur T^q . Si les champs de vecteurs X_1, \dots, X_q sont invariants par les γ_{ij} , on dit que \mathcal{F} est un feuilletage transversalement parallélisable.

1.3- Feuilletages admettant une (G, T^q) - structure transverse.

1.3.1- **Définition.** Soit G un groupe de difféomorphismes d'une variété différentiable T^q . On dit que G opère analytiquement sur la variété T^q si deux difféomorphismes appartenant à G sont égaux dès qu'ils coïncident sur un ouvert non vide de T^q .

1.3.2- **Définition.** Soit \mathcal{F} feuilletage de codimension q sur une variété M , défini par un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ de variété transverse T^q . On dit que \mathcal{F} admet une (G, T^q) -structure transverse si:

i) Les changements de cartes γ_{ij} sont des restrictions de difféomorphismes de la variété T^q , appartenant à un groupe G ;

ii) Le groupe G opère analytiquement sur T^q .

1.3.3- **Proposition [HH].** Soit \mathcal{F} un feuilletage admettant une (G, T^q) -structure transverse sur une variété M . Alors il existe :

- un homomorphisme $h : \pi_1(M) \rightarrow G$;

- une submersion D , définie de \tilde{M} (revêtement universel de M) sur un ouvert de la variété transverse T^q , équivariante par h et dont les composantes connexes des fibres sont les feuilles du feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}} = p^*\mathcal{F}$ à \tilde{M} ; $p : \tilde{M} \rightarrow M$.

D équivariante par h signifie que : pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}$, on a $D(\gamma\tilde{x}) = h(\gamma)(D(\tilde{x}))$.

L'application D est appelée *application développante* de la (G, T^q) -structure transverse.

Réciproquement, si l'on se donne un homomorphisme $h : \pi_1(M) \rightarrow G$ et une submersion D de \tilde{M} sur un ouvert de T^q , équivariante par h ; le feuilletage défini par D sur \tilde{M} passe au quotient en un feuilletage sur M admettant une (G, T^q) -structure transverse.

L'image $\Gamma = h(\pi_1(M))$ du groupe fondamental $\pi_1(M)$ de M par la représentation h est un sous-groupe de G appelé *groupe d'holonomie* du feuilletage \mathcal{F} .

Lorsque G est un groupe d'isométries de la variété connexe T^q , G opère analytiquement sur T^q . On dit alors que la (G, T^q) -structure transverse est riemannienne. Dans

ces conditions, on a le théorème de Ehresmann suivant:

1.3.4- **Théorème** [Thu]. Soit \mathcal{F} un feuilletage admettant une (G, T^q) -structure transverse riemannienne sur une variété compacte M . Alors la variété riemannienne T^q est complète et l'application développante est une fibration localement triviale de M sur T^q .

1.4- Feuilletages de Lie.

Les feuilletages de Lie ont été étudiés par Edmond FEDIDA [Fed2]. Dans cette partie, nous présentons les définitions et résultats relatifs aux feuilletages de Lie.

Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe de dimension q . On note \mathcal{G} son algèbre de Lie.

1.4.1- Définition. Une structure de G -feuilletage de Lie de codimension q sur une variété M est la donnée :

- d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de M ;
- d'une famille de submersions $f_i : U_i \rightarrow G$;
- d'une famille d'applications localement constantes $g_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow G$ telles que l'on ait $f_i = g_{ij} \circ f_j$ sur chaque intersection $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Un G -feuilletage de Lie est donc un feuilletage admettant une (G, G) -structure transverse. On a la proposition suivante :

1.4.2- Proposition [Fed2]. Soit \mathcal{F} un G -feuilletage de Lie sur une variété M . Alors il existe:

- un homomorphisme $h : \pi_1(M) \rightarrow G$;
 - une submersion $D : \widetilde{M} \rightarrow G$ telle que :
- 1) Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ relevé de \mathcal{F} sur \widetilde{M} est simple et défini par la submersion D .
 - 2) D est équivariante par h .

1.4.3- **Proposition** [Féd2]. Une structure de G -feuilletage de Lie \mathcal{F} sur une variété M est équivalente à la donnée d'une 1-forme différentielle ω sur M à valeurs dans l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G telle que :

- 1) Pour tout $x \in M$, l'application linéaire $\omega_x : T_x M \rightarrow \mathcal{G}$ est surjective ;
- 2) ω vérifie l'équation de Maurer-cartan $d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$;
- 3) deux 1-formes ω_1 et ω_2 vérifiant ces propriétés sont liées par la relation

$$\omega_2 = \text{ad}_g(\omega_1), \text{ pour un certain } g \in G.$$

En particulier si G est le groupe de Lie \mathbb{R}^q , le feuilletage \mathcal{F} est défini par une famille de 1-formes fermées $\omega_1, \dots, \omega_q$ linéairement indépendantes en chaque point. Cette propriété nous servira par la suite (Théorème 2.2). Si M est le tore \mathbb{T}^n et les 1-formes sont toutes linéaires, on dira que le feuilletage \mathcal{F} est linéaire.

Dans la suite, on suppose la variété M connexe et compacte.

1.4.4-**Théorème de structure** [Féd2]. Soit \mathcal{F} un G -feuilletage de Lie sur une variété connexe et compacte M . Alors on a :

1) L'application développante est une fibration localement triviale de \tilde{M} sur le groupe de Lie G .

2) Les adhérences des feuilles de \mathcal{F} sont les fibres d'une fibration localement triviale $\bar{D} : M \rightarrow G/H$ où $H = \bar{\Gamma}$ est l'adhérence dans G du groupe d'holonomie $\Gamma = h(\pi_1(M))$.

3) Dans chaque fibre de la fibration \bar{D} , \mathcal{F} induit un H_e -feuilletage de Lie à feuilles denses, où H_e est la composante connexe dans H de l'élément neutre e .

1.4.5- Remarque.

1) D'après 3) du théorème 1.4.4, l'étude d'un feuilletage de Lie sur une variété compacte M est, modulo une fibration ramenée à celle d'un feuilletage de Lie sur une sous-variété fermée de M ayant toutes ses feuilles partout denses.

2) Le groupe d'holonomie Γ d'un G - feuilletage de Lie est étroitement lié à la structure des feuilles du feuilletage comme montre le corollaire suivant :

1.4.6- **Corollaire**[Féd2]. Soit \mathcal{F} un G -feuilletage de Lie sur une variété connexe et compacte M . On a les propriétés suivantes :

- 1) Les feuilles de \mathcal{F} sont difféomorphes;
- 2) Le feuilletage \mathcal{F} est à feuilles denses si et seulement si le groupe d'holonomie Γ de \mathcal{F} est dense dans G ;
- 3) Le feuilletage \mathcal{F} est à feuilles compactes si et seulement si le groupe d'holonomie Γ de \mathcal{F} est un sous-groupe discret uniforme de G (G/Γ est compacte).

1.4.7- Exemples de feuilletages de Lie.

1- Soit f une submersion d'une variété M dans un groupe de Lie G . Alors le feuilletage défini par f^{-1} c'est-à-dire le feuilletage dont les feuilles sont les composantes connexes des fibres de f , est un G -feuilletage de Lie sur M .

2- Méthode générale de construction des feuilletages de Lie.

Soient G et H deux groupes de Lie simplement connexes et $D : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes surjectif. Supposons que G contient un sous-groupe discret uniforme Γ .

Le feuilletage de G par les fibres de D est invariant par l'action de Γ , de plus la variété G/Γ est muni d'un feuilletage naturel. C'est un H -feuilletage de Lie dont l'application développante est précisément D et dont l'homomorphisme d'holonomie

$$h : \pi_1(G/\Gamma) \cong \Gamma \rightarrow H; \text{ est la restriction de } D \text{ à } \Gamma.$$

Ce type de construction peut quelque fois être modifiée. Par exemple, si K est un sous-groupe compact contenant $D^{-1}(e)$, alors l'action à gauche de K sur G/Γ préserve les feuilles du feuilletage construit. Si cette action est libre, alors on obtient un H -feuilletage de Lie sur la variété $K \backslash G/\Gamma$. Les feuilletages de Lie construits par ce type de méthodes sont dits *de type homogène*.

En particulier, si H est un sous-groupe normal, fermé et connexe de G , et si l'homomorphisme D est donné par la projection $D : G \rightarrow G/H$, le feuilletage de G par ses classes modulo H possède une structure canonique de G/H -feuilletage de Lie. Dans ces conditions, si Γ est un sous-groupe discret uniforme de G , ce feuilletage détermine un feuilletage sur la variété quotient compacte $M = G/\Gamma$ avec une structure de G/H -feuilletage de Lie.

Si $G = \mathbb{R}^n$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^n$, les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n de dimension $(n-q)$ fournissent des exemples de \mathbb{R}^q -feuilletages de Lie sur le tore \mathbb{T}^n .

1.4.8- Proposition (Tishler)[God1]. Une variété compacte possédant un \mathbb{R}^q -feuilletage de Lie est fibrée sur le tore \mathbb{T}^q .

1.4.9- Proposition [God1]. Une variété compacte possédant un feuilletage de codimension 2 transversalement de Lie est fibrée sur le cercle \mathbb{S}^1 .

1.5- Flots de Lie.

On appelle flot de Lie, tout feuilletage de Lie de dimension un. Les flots de Lie (et les flots riemanniens) ont été étudiés par Yves CARRIERE dans [CC] et dans [Car].

1.5.1- Exemples de flots de Lie.

1) Flot linéaire du tore.

Soit (x_1, \dots, x_n) un vecteur de \mathbb{R}^n et considérons le sous-groupe à un paramètre du groupe de Lie \mathbb{R}^n , défini par $t \xrightarrow{\varphi} (tx_1, \dots, tx_n)$. φ_t est un flot sur \mathbb{R}^n invariant par les translations d'éléments de \mathbb{Z} . En projetant sur $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$, on obtient un \mathbb{R}^{n-1} -flot sur le tore \mathbb{T}^{n-1} . Ce flot est dit *linéaire*.

2) Flot propre du tore hyperbolique.

Considérons le groupe de Lie (résoluble) G obtenu en mettant sur l'espace $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ le produit

$$(t, u)(t', u') = (t + t', A^t u' + u)$$

où A est un automorphisme unimodulaire ($A \in SL(2, \mathbb{Z})$) à coefficients entiers du plan \mathbb{R}^2 ayant pour valeurs propres λ et $\frac{1}{\lambda}$ positives et différentes de 1, ce qui signifie que

la trace $tr A > 2$ (par exemple l'automorphisme d'Anosov $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$).

Soient v_1 et v_2 les vecteurs propres associés respectivement à λ et à $\frac{1}{\lambda}$.

L'algèbre de Lie du groupe de Lie G est engendrée par les champs de vecteurs

$$X = \left(\frac{1}{\log \lambda}\right) \frac{\partial}{\partial t}; \quad Y = \lambda^t v_1; \quad Z = \lambda^{-t} v_2 \text{ avec les crochets :}$$

$$[X, Y] = Y; \quad [X, Z] = -Z; \quad [Y, Z] = 0.$$

Le réseau Γ des points entiers de \mathbb{R}^3 est un sous-groupe discret uniforme de G ayant pour quotient la variété compacte \mathbb{T}_A^3 suspension du difféomorphisme du tore \mathbb{T}^2 induit par A ,

$$\mathbb{T}_A^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 / (t, u) \sim (t + 1, A^t u)$$

appelée *tore hyperbolique de dimension 3*.

Le sous-groupe à un paramètre engendré par Y c'est-à-dire la direction "propre" engendrée par v_1 est un sous-groupe normal et fermé de G ayant pour quotient le groupe affine $Aff^+(\mathbb{R})$ des transformations affines croissantes de la droite réelle. $Aff^+(\mathbb{R})$ est identifié au groupe de Lie obtenu en considérant sur \mathbb{R}^2 , la loi de groupe $(t, x)(t', x') = (t + t', \lambda^t x' + x)$

On en déduit que v_1 détermine sur \mathbb{T}_A^3 un flot ϕ_1 de groupe $Aff^+(\mathbb{R})$, appelé "flot propre" du tore hyperbolique \mathbb{T}_A^3 défini par λ .

La direction "propre" engendrée par v_2 détermine également sur \mathbb{T}_A^3 un flot ϕ_2 de groupe $Aff^+(\mathbb{R})$, appelé "flot propre" du tore hyperbolique \mathbb{T}_A^3 défini par $\frac{1}{\lambda}$.

Nous allons à présent donner les résultats essentiels concernant les flots de Lie.

1.5.2- Théorème [CC][Car]. Soit M une variété compacte et connexe de dimension n et \mathcal{F}_1 un \mathbb{R}^{n-1} -flot de Lie sur M . On a les possibilités suivantes :

1) Les feuilles de \mathcal{F}_1 sont les fibres d'une fibration en cercles \mathbb{S}^1 , de la variété M sur le tore \mathbb{T}^{n-1}

$$\mathbb{S}^1 \rightarrow M \rightarrow \mathbb{T}^{n-1}.$$

2) Les feuilles de \mathcal{F}_1 ne sont pas fermées, dans ce cas, la variété M est difféomorphe au tore \mathbb{T}^n et le flot \mathcal{F}_1 est conjugué à un flot linéaire sur \mathbb{T}^n .

Remarquons que si les feuilles de \mathcal{F}_1 sont fermées, le groupe d'holonomie Γ est un sous-groupe discret uniforme de \mathbb{R}^{n-1} (corollaire 1.4.6), les orbites de \mathcal{F}_1 sont alors les

fibres d'une fibration $\bar{D} : M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}/\Gamma$ et $\Gamma = \mathbb{Z}^{n-1}$.

Si les feuilles de \mathcal{F}_1 ne sont pas fermées, CARRIERE [Car] montre que le flot \mathcal{F}_1 possède une section Λ isomorphe au groupe de Lie \mathbb{T}^{n-1} et donc, que le flot \mathcal{F}_1 s'obtient par suspension d'une translation de groupe \mathbb{T}^{n-1} . La variété M est dans ce cas difféomorphe au quotient

$$\Lambda \times \mathbb{R}/(\lambda, t) \sim (R(\lambda), t + 1) \approx \mathbb{T}^n,$$

R étant un difféomorphisme de \mathbb{T}^{n-1} obtenu à partir d'une translation de \mathbb{R}^{n-1} .

1.5.3- Théorème [Car]. Soit \mathcal{F}_1 un G -flot de Lie à feuilles denses sur une variété compacte et connexe M de dimension n . Alors on a $G = \mathbb{R}^{n-1}$ et il existe un difféomorphisme de M sur le tore \mathbb{T}^n qui transporte \mathcal{F}_1 sur un flot linéaire de pente irrationnelle.

1.6- Feuilletages transversalement homogènes.

Les feuilletages transversalement homogènes ont été étudiés par R. BLUMENTHAL [Blu].

G est un groupe de Lie simplement connexe; H un sous-groupe fermé de G .

1.6.1- **Définition.** Une structure de G/H -feuilletage homogène de codimension q sur une variété différentiable M , est la donnée :

- 1) d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de M ;
- 2) d'une famille de submersions $f_i : U_i \rightarrow G/H$;
- 3) d'une famille de difféomorphismes $g_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j)$ telles que :

$$\text{Si } U_i \cap U_j \neq \emptyset \text{ alors } f_i = g_{ij} \circ f_j.$$

Les g_{ij} sont induits par les translations à gauche de G .

Un G/H -feuilletage transversalement homogène admet donc une $(G, G/H)$ -structure transverse. On a donc le résultat suivant :

1.6.2- **Théorème [Blu].** Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement homogène sur une variété connexe et compacte M et modelé sur un espace homogène G/H . $\tilde{\mathcal{F}}$ le relèvement de \mathcal{F} à \tilde{M} . Alors il existe un homomorphisme $h : \pi_1(M) \rightarrow G$ et une submersion $D : \tilde{M} \rightarrow G/H$ équivariante par h , telle que :

- 1) Les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont les composantes connexes des fibres de D ;
- 2) Pour tout élément $\gamma \in \pi_1(M)$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{D} & G/H \\ \gamma \downarrow & & \downarrow h(\gamma) \\ \tilde{M} & \xrightarrow{D} & G/H \end{array}$$

Ici $\gamma : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ est vue comme automorphisme de revêtement et l'élément $h(\gamma)$ est le

difféomorphisme de G/H induit par la translation à gauche sur G qui à g associe $h(\gamma)g$.

Lorsque $H = \{e\}$, on retrouve la notion de G -feuilletage de Lie.

1.6.3-Exemples.

1- Soit $G = SL(2, \mathbb{R})$ le groupe unimodulaire, $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & o \\ b & c \end{pmatrix} : ac = 1, a > 1 \right\}$.

et soit Γ un sous-groupe discret uniforme de $SL(2, \mathbb{R})$.

Le feuilletage de $SL(2, \mathbb{R})$ engendré par K induit sur la variété compacte $M = \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R})$ un $SL(2, \mathbb{R})/K \cong \mathbb{S}^1$ -feuilletage homogène.

2- Considérons la variété $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ obtenue comme le quotient de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par l'homothétie h de rapport 2 opérant sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Ecrivons \mathbb{R}^3 sous la forme $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ et considérons la restriction D à $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de la projection de \mathbb{R}^3 sur \mathbb{C} .

Le groupe $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$ est cyclique. Soit c_0 un générateur qui agit sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par l'homothétie h et H la représentation de $\pi_1(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1)$ dans le groupe $Sim(\mathbb{C})$ des similitudes de \mathbb{C} , qui à c_0 associe l'homothétie de rapport 2. La submersion D est équivariante par rapport à H . Elle définit donc sur $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ un flot \mathcal{F}_1 admettant une $(Sim(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -structure transverse.

Le flot \mathcal{F}_1 obtenu est un flot transversalement homogène. Il a deux orbites fermées. *C'est un flot de Morse-Smale.*

La fibration D n'est pas une fibration localement triviale puisque seule la fibre au dessus de zéro a deux composantes connexes. Le flot \mathcal{F}_1 n'est donc pas riemannien sinon D serait une fibration (Théorème 1.3.4).

1.7- Feuilletages riemanniens.

Les feuilletages riemanniens ont été introduits par Bruce REINHART sous le nom de feuilletages à "bundle-like metrics". Une bundle-like metric ou "métrique quasi-fibrée" pour un feuilletage \mathcal{F} est une métrique riemannienne pour laquelle, la distance entre les feuilles est localement constante. L'étude géométrique des feuilletages riemanniens a été développée par P. MOLINO à la suite de celle qu'il a faite pour les feuilletages transversalement parallélisables.

1.7.1- Feuilletages transversalement parallélisables [Mol2].

1.7.1.1- **Définition.** Soit T une variété différentiable de dimension q . Un *parallélisme* sur T est la donnée d'un système X_1, \dots, X_q de q -champs de vecteurs sur T formant en chaque point une base du module $\kappa(T)$ des champs de vecteurs différentiables sur T .

1.7.1.2- **Exemple.** Tout groupe de Lie G est parallélisable. Un parallélisme étant donné par une base de l'algèbre de Lie \mathcal{G} des champs de vecteurs invariants à gauche du groupe G .

1.7.1.3- **Définition.** Un feuilletage \mathcal{F} de codimension q sur une variété connexe M est dit *transversalement parallélisable*, s'il existe un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ définissant \mathcal{F} , de variété transverse T de dimension q , admettant un parallélisme invariant par les changements de coordonnées transverses γ_{ij} . En particulier, un G -feuilletage de Lie est un feuilletage transversalement parallélisable.

Une submersion f d'une variété M sur une variété parallélisable, définit un feuilletage transversalement parallélisable. Si la variété parallélisable ainsi donnée n'est pas un

groupe de Lie, on a un exemple de feuilletage transversalement parallélisable qui n'est pas de Lie.

1.7.1.4- Théorème de structure [Mol2]. Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension q transversalement parallélisable sur une variété connexe et compacte M . Les adhérences des feuilles de \mathcal{F} sont les fibres d'une fibration localement triviale de M sur une variété compacte W . Dans chacune de ces fibres, \mathcal{F} induit un feuilletage de Lie à feuilles denses.

Les adhérences des feuilles de \mathcal{F} , définissent un feuilletage noté $\overline{\mathcal{F}}$ et défini par la relation d'équivalence suivante :

x et y appartiennent à une même feuille de $\overline{\mathcal{F}}$ si, et seulement si, $f(x) = f(y)$ pour toute fonction basique f .

Pour cette raison, on dit que le feuilletage $\overline{\mathcal{F}}$ est le *feuilletage basique* défini par \mathcal{F} , que la variété W est la *variété basique* et que la fibration de M sur W définissant $\overline{\mathcal{F}}$ est la *fibration basique* du feuilletage \mathcal{F} .

1.7.2- Feuilletages riemanniens.

1.7.2.1- Définition. Soit \mathcal{F} un feuilletage sur une variété M , défini par un cocycle feuilleté $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}$ de variété transverse T , tel que :

- 1) La variété transverse T est une variété riemannienne ;
- 2) Les changements de coordonnées transverses γ_{ij} sont des isométries locales de la variété T .

On dit que \mathcal{F} est un feuilletage riemannien.

Dans ces conditions, si g_0 est une métrique quelconque sur M , la métrique riemannienne

sur T est une identification du fibré tangent TM à la somme directe des fibrés tangents $T\mathcal{F}$ et transverse $Q\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$. On peut alors construire une unique métrique riemannienne g_1 sur M , telle que :

- a) Les métriques g_0 et g_1 coïncident sur le fibré tangent $T\mathcal{F}$;
- b) Les fibrés $T\mathcal{F}$ et $Q\mathcal{F}$ sont orthogonaux pour la métrique g_1 ;
- c) La métrique induite par g_1 sur $Q\mathcal{F}$ est localement l'image par f_i de la métrique de la variété transverse T .

Une métrique vérifiant les conditions b) et c) est dite quasi-fibrée relativement à \mathcal{F} ou "bundle-like" suivant la terminologie de B. REINHART.

L'existence d'une métrique quasi-fibrée caractérise les feuilletages riemanniens [Rei]. On parle donc indifféremment de *feuilletage avec une structure riemannienne transverse* ou avec une *métrique quasi-fibrée*.

La distance entre les feuilles de \mathcal{F} est localement constante (la métrique quasi-fibrée sur le fibré normal $\mathcal{V}\mathcal{F}$ est invariante le long des feuilles).

Pour une variété M , tout feuilletage de Lie est transversalement parallélisable et tout feuilletage transversalement parallélisable est riemannien.

1.7.2.2- Définition. Un repère transverse orthonormé en un point x de M est une base orthonormée $(\overline{X}_{1x}, \dots, \overline{X}_{qx})$ de l'espace transverse Q_x , que l'on regardera comme un isomorphisme linéaire $z : \mathbb{R}^q \rightarrow Q_x$.

On note M_T l'ensemble des repères transverses orthonormés aux différents points de M et $p_T : M_T \rightarrow M$, la projection qui à un repère transverse orthonormé en un point x fait correspondre x . M_T est un fibré principal de base M et de groupe structural le groupe orthogonal $O(q, \mathbb{R})$ et appelé *fibré des repères transverses orthonormés* de la variété feuilletée (M, \mathcal{F}) .

Notons \mathcal{F}_T le feuilletage relevé de \mathcal{F} à M_T .

1.7.2.3- **Théorème** [Mol2]. Soit \mathcal{F} un feuilletage riemannien sur une variété compacte M . Alors, le feuilletage \mathcal{F}_T induit par \mathcal{F} sur la variété M_T des repères transverses orthonormés est transversalement parallélisable et vérifie les propriétés suivantes:

- i) Les feuilles de \mathcal{F} et \mathcal{F}_T ont même dimension;
- ii) L'action de $O(q, \mathbb{R})$ sur M_T laisse \mathcal{F}_T invariant;
- iii) Une feuille de \mathcal{F}_T se projette sur une feuille de \mathcal{F} par $p_T : M_T \rightarrow M$.

1.7.2.4- **Théorème de structure** [Mol2]. Soit \mathcal{F} un feuilletage riemannien sur une variété compacte M . Alors :

- 1) Les adhérences des feuilles de \mathcal{F} constituent une partition de M en sous-variétés compactes minimales pour \mathcal{F} ;
- 2) L'ouvert Σ_{r_1} formé des feuilles du feuilletage \mathcal{F} ayant une adhérence de dimension maximale r_1 , est dense dans M . Ces adhérences constituent un feuilletage riemannien $\overline{\mathcal{F}}$ de Σ_{r_1} dont toutes les feuilles sont compactes;
- 3) Le feuilletage induit par \mathcal{F} sur l'adhérence d'une feuille est un feuilletage riemannien transversalement localement homogène G/H où H est un sous-groupe connexe et fermé de G le groupe structural de \mathcal{F}_T .

1.7.2.5- **Définition**. Un groupe G est dit virtuellement résoluble s'il contient un sous-groupe résoluble G_0 d'indice fini (c'est-à-dire l'ensemble G/G_0 est fini). En particulier les groupes résolubles, nilpotents, abéliens sont virtuellement résolubles.

1.7.2.6- **Théorème** [Hae]. Soit \mathcal{F} un feuilletage riemannien à feuilles denses sur une variété riemannienne complète M à groupe fondamental $\pi_1(M)$ virtuellement résoluble. Alors \mathcal{F} est transversalement homogène.

1.7.2.7- **Remarque**. Un feuilletage \mathcal{F} admettant une $(G, G/H)$ -structure transverse n'est pas forcément riemannien. Pour que la $(G, G/H)$ -structure transverse d'un feuilletage

\mathcal{F} transversalement homogène soit riemannienne, il faut et il suffit qu'il existe sur G une métrique invariante à gauche qui soit aussi invariante à droite de H . Lorsque H est un sous-groupe compact de G , une $(G, G/H)$ structure transverse peut toujours être rendue riemannienne [Car]. En particulier, ceci est vrai si H est trivial, c'est-à-dire lorsqu'on a une (G, G) -structure transverse ou une structure de Lie G -transverse. Un G -feuilletage de Lie admet donc toujours une structure riemannienne transverse. Quitte à choisir une métrique sur G invariante à gauche.

Le flot \mathcal{F}_1 de l'exemple 1.6.3-2, n'est pas riemannien. En effet, l'application développante D du flot \mathcal{F}_1 n'est pas une fibration localement triviale comme le précise le Théorème 1.3.4.

Dans le cas d'un flot riemannien, on a les résultats suivants dûs à Yves CARRIERE:

1.7.2.8- **Théorème** [Car] Soit \mathcal{F}_1 un flot riemannien à feuilles denses sur une variété connexe et compacte M de dimension n . Alors la variété M est difféomorphe au tore \mathbb{T}^n et le flot \mathcal{F}_1 est conjugué à un flot linéaire de \mathbb{T}^n .

1.7.2.9- **Théorème** [Car] Soit \mathcal{F}_1 un flot riemannien sur une variété connexe et compacte M . Alors:

- 1) Les adhérences des orbites de \mathcal{F}_1 constituent une partition de M en sous-variétés compactes minimales pour \mathcal{F}_1 ;
- 2) Sur l'ouvert Σ_{r_1} constitué des orbites de \mathcal{F}_1 ayant une adhérence de dimension maximale r_1 , ces adhérences constituent un feuilletage riemannien;
- 3) L'adhérence d'une orbite de \mathcal{F}_1 est difféomorphe à un tore;
- 4) Le flot induit par \mathcal{F}_1 sur l'adhérence d'une orbite est conjugué à un flot linéaire sur un tore.

Chapitre 2 : DRAPEAUX DE FEUILLETAGES RIEMANNIENS.

Cette partie est consacrée à l'étude des drapeaux riemanniens. Nous montrons que tout drapeau de feuilletages riemanniens sur une variété compacte et connexe M de dimension n , pour lequel le flot est à feuilles denses, est conjugué à un drapeau linéaire sur le tore \mathbb{T}^n .

2.1- Définitions et remarques.

2.1.1- **Définition.** On appelle *drapeau* de feuilletages sur une variété M , la donnée d'une suite $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ où, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, \mathcal{F}_i est un feuilletage de dimension i sur M et tel que $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$ (C'est-à-dire que chaque feuille de \mathcal{F}_i est contenue dans une feuille de \mathcal{F}_{i+1}).

On dira que \mathcal{F} est un drapeau riemannien (resp. de Lie) si tout feuilletage \mathcal{F}_i est riemannien (resp. de Lie). L'entier p est la *longueur* de \mathfrak{F} .

2.1.2- **Remarque.** Pour tout drapeau de feuilletages $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ on a les propriétés suivantes:

1- Les feuilles de \mathcal{F}_i sont saturées pour \mathcal{F}_j , pour tout $1 \leq j \leq i \leq p$ (toute feuille de \mathcal{F}_i est une réunion de feuilles de \mathcal{F}_j).

2- Si \mathcal{F}_j est à feuilles partout denses alors pour tout $1 \leq j \leq i \leq p$, \mathcal{F}_i est à feuilles partout denses. En particulier, si le flot \mathcal{F}_1 est à feuilles partout denses, on dira que le drapeau $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ est un drapeau de feuilletages à feuilles denses.

2.1.3- Problème d'existence

2.1.3.1- **Définition.** Une variété différentiable M de dimension n est dite *totale-ment parallélisable* si et seulement si il existe n champs de vecteurs X_1, \dots, X_n linéairement indépendants en tout point de M tels que $[X_i, X_j] = a_{ij}X_i + b_{ij}X_j$ où a_{ij}, b_{ij} sont des fonctions C^∞ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

D'après le théorème de Frobenius 1.1.4, on constate que toute variété M totalement parallélisable supporte un drapeau de feuilletages transversalement intégrables (le fibré transverse est intégrable).

Les variétés $\mathbb{R}^n, \mathbb{T}^n, \mathbb{T}_A^n$ (tore hyperbolique de dimension n) sont totalement parallélisables. Elles supportent donc des drapeaux de feuilletages.

Sur le tore \mathbb{T}^n par exemple, on peut remarquer que tout point est repéré par les angles au centre $\theta_1, \dots, \theta_n$. Les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_n}$ sont linéairement indépendants en tout point et vérifient $[\frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j}] = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Ces champs de vecteurs linéaires définissent un drapeau $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n\}$ de feuilletages linéaires, donc riemanniens sur le tore \mathbb{T}^n où chaque \mathcal{F}_i est engendré par les champs $(\frac{\partial}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_i})$.

2.1.4- **Définition.** Soient M et N deux variétés munies respectivement de deux drapeaux $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ et $\mathcal{V} = \{\nu_1, \dots, \nu_p\}$ de même longueur p . On dira que \mathfrak{F} et \mathcal{V} sont conjugués, s'il existe un difféomorphisme $h : N \rightarrow M$ tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on ait $\nu_i = h^*(\mathcal{F}_i)$.

Les drapeaux de feuilletages riemanniens $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ dont le flot \mathcal{F}_1 est à feuilles denses sont conjugués à un même modèle comme le montre le théorème suivant:

2.2- Théorème. Soit $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ un drapeau de feuilletages riemanniens sur une variété connexe et compacte M avec \mathcal{F}_1 à feuilles denses. Alors \mathfrak{F} est conjugué à un drapeau de feuilletages de Lie Linéaires sur le tore \mathbb{T}^n . Cela signifie qu'il existe un difféomorphisme $h : \mathbb{T}^n \rightarrow M$ tel que chaque $h^*(\mathcal{F}_i)$ soit un \mathbb{R}^{n-i} - feuilletage linéaire à feuilles denses sur \mathbb{T}^n .

Démonstration

1) D'après le théorème 1.7.2.8, il existe un difféomorphisme $h : \mathbb{T}^n \rightarrow M$ tel que $\nu_1 = h^*(\mathcal{F}_1)$ soit un flot linéaire sur le tore \mathbb{T}^n , c'est-à-dire ν_1 a pour courbes intégrales celles d'un champ de vecteurs $X = \sum_{s=1}^n a_s \frac{\partial}{\partial x_s}$ où les a_s sont des constantes réelles.

Pour un tel flot, le module $\Omega^1(M/\nu_1)$ des 1-formes basiques de degré un sur l'anneau $\Omega^0(M/\nu_1)$ des fonctions ν_1 -basiques est un \mathbb{R} - espace vectoriel de dimension $n - 1$ ayant une base $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$ où toute τ_j est une 1-forme basique linéaire.

Le difféomorphisme h transporte la métrique riemannienne de départ sur M en une métrique riemannienne sur le tore \mathbb{T}^n pour laquelle le drapeau $\mathcal{V} = \{\nu_1, \dots, \nu_p\}$ où $\nu_i = h^*(\mathcal{F}_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, est riemannien.

Nous allons montrer que tout $\nu_i \in \{\nu_1, \dots, \nu_p\}$ (qui est à feuilles denses puisque \mathcal{F}_i l'est) est en fait un \mathbb{R}^{n-i} -feuilletage de Lie.

2) Le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{T}^n)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^n , donc virtuellement résoluble d'après la Définition 1.7.2.5. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$ et considérons le feuilletage ν_i sur \mathbb{T}^n . D'après le théorème de A. HAEFLIGER (Théorème 1.7.2.6), il existe un groupe de Lie connexe et simplement connexe G , un sous-groupe connexe fermé H et une représentation à image dense $\rho : \mathbb{Z}^n \rightarrow G$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D} & G/H \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \rho(\gamma) \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D} & G/H. \end{array}$$

On en déduit que G est abélien et donc un \mathbb{R}^k (puisque simplement connexe); il en découle que H est nécessairement un \mathbb{R}^l où l'entier l est tel que $k-l = n-i$, donc l'espace homogène G/H est en fait le groupe abélien \mathbb{R}^{n-i} . Les feuilles du feuilletage relévé $\tilde{\nu}_i$ à $\mathbb{R}^n = \tilde{\mathbb{T}}^n$ sont les composantes connexes des fibres de l'application développante

$$D : \mathbb{R}^n = \tilde{\mathbb{T}}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-i}.$$

D'autre part, la représentation $\rho : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ induit, par composition avec le morphisme de projection canonique $\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k/\mathbb{R}^l = \mathbb{R}^{n-i}$, une représentation

$$\sigma : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-i}$$

et pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^n$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D} & \mathbb{R}^{n-i} \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \sigma(\gamma) \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D} & \mathbb{R}^{n-i}. \end{array}$$

Ceci montre que ν_i est un feuilletage de Lie transversalement modelé sur le groupe de Lie \mathbb{R}^{n-i} . Il est donc défini par des formes fermées $\omega_1, \dots, \omega_{n-i}$ linéairement indépendantes en chaque point. Soit ω l'une d'entre elles; on a $i_X \omega = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à ν_i . Comme en plus ω est fermée et $i_X \omega = i_X d\omega = 0$ c'est-à-dire que ω est basique pour ν_i , elle est donc aussi basique pour ν_1 (puisque ν_1 est contenu dans ν_i) et s'écrit donc

$$\omega = \sum_{j=1}^{n-i} \sigma_j \tau_j.$$

où les σ_j sont des constantes réelles (car le \mathbb{R} -espace vectoriel des 1-formes basiques pour ν_1 est de dimension $n - 1$ engendré par $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$); la 1-forme ω est donc linéaire sur le tore \mathbb{T}^n .

Conclusion : Le drapeau $\mathcal{V} = \{\nu_1, \dots, \nu_p\}$ est un drapeau de feuilletages de Lie linéaires sur le tore \mathbb{T}^n . Ce qui achève la démonstration du théorème \blacksquare

2.3- Exemples.

1- L'hypothèse sur la densité du flot \mathcal{F}_1 est nécessaire pour que le drapeau $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ soit conjugué à un drapeau linéaire comme le montre l'exemple suivant:

2.3.1- **Exemple.** Considérons la suite $\mathbb{T}^{n+1} = \mathbb{T}^n \times \mathbb{T} \xrightarrow{pr_1} \mathbb{T}^n \xrightarrow{\theta} \mathbb{T}^{n-1}$ où θ est une submersion surjective. On suppose en plus que $\theta(0) = 0$ et que θ n'est pas un morphisme de groupes. Soient \mathcal{F}_1 le feuilletage défini par pr_1 et \mathcal{F}_2 celui défini par $\theta \circ pr_1$.

$\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ est un drapeau de feuilletages de Lie simples dont le flot \mathcal{F}_1 est linéaire; mais ce drapeau n'est conjugué à aucun drapeau linéaire. En effet, s'il l'était, $\theta \circ pr_1$ serait un morphisme de groupes. Ce qui entrainerait que θ est un morphisme de groupes. Ce qui est absurde.

2- L'exemple ci-dessous montre que si le flot \mathcal{F}_1 n'est pas à feuilles denses, la variété M n'est pas toujours le tore \mathbb{T}^n même si elle supporte un drapeau $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ de feuilletages de Lie avec \mathcal{F}_2 de dimension 2 à feuilles partout denses.

2.3.2- **Exemple.** Considérons le groupe de Heisenberg de dimension 3

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le groupe H est isomorphe au groupe obtenu en considérant sur \mathbb{R}^3 le produit

$$(a, b, c)(a', b', c') = (a + a', b + b', c + c' + ab').$$

H est connexe, simplement connexe et nilpotent.

L'algèbre de Lie \mathcal{H} du groupe de Lie H est engendrée par les champs de vecteurs X , Y et Z vérifiant $[X, Y] = Z$; $[X, Z] = [Y, Z] = 0$ [God].

Notons \mathcal{H}_1 l'idéal de \mathcal{H} engendré par le champ de vecteurs Z et \mathcal{H}_2 l'idéal de \mathcal{H} engendré par les champs Z et $X + \alpha Y$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

On a une suite d'inclusion $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_2 \supset \mathcal{H}_1$ et les algèbres quotients $\mathcal{H}/\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}/\mathcal{H}_2$ sont des algèbres de Lie commutatives ayant pour groupes de Lie simplement connexes et commutatifs \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} respectivement.

Soit $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n & k \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : n, m, k \in \mathbb{Z} \right\}$ le sous-groupe de H des matrices à coefficients entiers. C'est un sous-groupe discret de H ayant pour quotient la nilvariété compacte $M = H/\Gamma$ qui n'est pas difféomorphe au tore \mathbb{T}^3 .

Les projections $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/\mathcal{H}_2$ c'est-à-dire les submersions

$$D_1 : H \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad D_2 : H \rightarrow \mathbb{R}$$

définissent sur la variété $M = H/\Gamma$ un drapeau de feuilletages de Lie $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ avec \mathcal{F}_1 à feuilles partout denses.

Chapitre 3: DRAPEAUX DE FEUILLETAGES DE LIE.

3.1- Construction de drapeaux de Lie.

3.1.1- **Définition.** Soient G et H deux groupes de Lie et Γ un sous-groupe de Lie de G . Un Γ -morphisme de G sur H est une submersion $f : G \rightarrow H$ vérifiant:

$$f(\gamma g) = f(\gamma)f(g) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma \text{ et } g \in G.$$

3.1.2- **Proposition.** Soit \mathcal{F} un G -feuilletage de Lie sur une variété M , de groupe d'holonomie Γ . Si θ est un Γ -morphisme de G sur un groupe de Lie H alors il existe sur M un H -feuilletage de Lie \mathcal{F}_H contenant \mathcal{F} de groupe d'holonomie Γ_H tel que $\Gamma_H = \theta(\Gamma)$.

Preuve. Soit D la submersion équivariante du G -feuilletage de Lie \mathcal{F} et h son homomorphisme d'holonomie. Alors $D_H = \theta \circ D$ est une submersion équivariante pour la représentation $h_H = \theta \circ h$. En effet pour tout $\tilde{x} \in \tilde{M}$ et pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$,

$$\begin{aligned} D_H(\gamma\tilde{x}) &= (\theta \circ D)(\gamma\tilde{x}) = \theta(D(\gamma\tilde{x})) = \theta(h(\gamma)D(\tilde{x})) \\ &= \theta(h(\gamma))\theta(D(\tilde{x})) \\ &= h_H(\gamma)D_H(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Le couple (D_H, h_H) définit ainsi sur la variété M un H -feuilletage de Lie \mathcal{F}_H contenant \mathcal{F} et de groupe d'holonomie $\Gamma_H = h_H(\pi_1(M)) = \theta(h(\pi_1(M))) = \theta(\Gamma)$.

D'après la Proposition 3.1.2, la donnée d'un G_1 -flot de Lie sur une variété M et d'une suite de morphismes de groupes de Lie, surjectifs $G_1 \xrightarrow{\theta_1} G_2 \xrightarrow{\theta_2} \dots \xrightarrow{\theta_{p-1}} G_p$ où $\dim(G_i) = n - i$, détermine sur M un drapeau $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ de G_i -feuilletages de Lie tels que si Γ_i est le groupe d'holonomie du feuilletage \mathcal{F}_i , alors $\Gamma_{i+1} = \theta_i(\Gamma_i)$.

3.1.3- **Corollaire.** Soit \mathcal{F}_1 un G_1 -flot de Lie sur une variété M . Si G_1 est résoluble (resp. nilpotent), alors la variété M supporte un drapeau $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ de feuilletages de Lie.

3.2- **Théorème.** Soit $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ un drapeau de G_i -feuilletages de Lie de groupes d'holonomie Γ_i sur une variété connexe et compacte M . Pour tout $i \in \{1, \dots, p-1\}$, il existe un Γ_i -morphisme de groupes unique, θ_i de G_i sur G_{i+1} tel que si D_i est l'application développante de \mathcal{F}_i alors $D_{i+1} = \theta_i \circ D_i$ et $\Gamma_{i+1} = \theta_i(\Gamma_i)$.

Démonstration : Considérons les développements de ces feuilletages sur le revêtement universel \widetilde{M} de M et notons $\widetilde{\mathcal{F}}_i$ le feuilletage relevé de \mathcal{F}_i à \widetilde{M} . D'après la Proposition 1.4.2, chacun des feuilletages $\widetilde{\mathcal{F}}_i$ est défini par une submersion D_i de \widetilde{M} sur G_i et il existe une représentation h_i , du groupe fondamental $\pi_1(M)$ de M , dans G_i telle que D_i soit équivariante par h_i .

Si e_i désigne l'élément neutre de G_i , en posant pour $i \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$g_{i+1} = D_{i+1}(D_i^{-1}(e_i)), \quad D'_i = g_i^{-1}D_i, \quad \rho_i = g_i^{-1}h_i g_i;$$

D'_i est équivariante par ρ_i , et le développement $(\widetilde{M}, D'_i, \rho_i)$ définit le feuilletage de Lie \mathcal{F}_i . Quitte à remplacer D_i par D'_i et h_i par ρ_i , on peut supposer que $D_{i+1}(D_i^{-1}(e_i)) = e_{i+1}$ et dans ce cas D_i est unique.

Ensuite remarquons que $\widetilde{\mathfrak{F}} = \{\widetilde{\mathcal{F}}_1, \dots, \widetilde{\mathcal{F}}_p\}$ est un drapeau de feuilletages de Lie simples sur \widetilde{M} . Il existe une suite de submersions surjectives de groupes de Lie

$$G_1 \xrightarrow{\theta_1} G_2 \xrightarrow{\theta_2} \dots \xrightarrow{\theta_{p-1}} G_p$$

telle que l'on ait $D_{i+1} = \theta_i \circ D_i$ et $\theta_i(e_i) = e_{i+1}$.

Pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$ et $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ on a:

$$\begin{aligned} h_{i+1}(\gamma)D_{i+1}(\tilde{x}) &= D_{i+1}(\gamma\tilde{x}) = (\theta_i \circ D_i)(\gamma\tilde{x}) \\ &= \theta_i(D_i(\gamma\tilde{x})) \\ &= \theta_i(h_i(\gamma)D_i(\tilde{x})). \end{aligned}$$

En particulier pour $D_i(\tilde{x}) = e_i$, il vient

$$h_{i+1}(\gamma)D_{i+1}(\tilde{x}) = \theta_i(h_i(\gamma)) \text{ c'est-à-dire } h_{i+1}(\gamma)(\theta_i(D_i(\tilde{x}))) = \theta_i(h_i(\gamma)),$$

$$\text{soit } h_{i+1}(\gamma)(\theta_i(e_i)) = h_{i+1}(\gamma)e_{i+1} = \theta_i(h_i(\gamma)),$$

$$\text{donc } h_{i+1}(\gamma) = \theta_i(h_i(\gamma)).$$

Ce qui montre que $h_{i+1} = \theta_i \circ h_i$. Il résulte que $\theta_i|_{\Gamma_i}$ est un morphisme de groupes et que $\Gamma_{i+1} = \theta_i(\Gamma_i)$.

Il reste à montrer que θ_i est un Γ_i -morphisme de groupes et qu'il est unique. En effet si $\gamma_i \in \Gamma_i$ et $g_i \in G_i$, il existe $\gamma \in \pi_1(M)$ et $\tilde{x} \in \tilde{M}$ tels que $\gamma_i = h_i(\gamma)$ et $g_i = D_i(\tilde{x})$ de sorte que, comme tout D_j est h_j -équivariante, on a:

$$\begin{aligned} \theta_i(\gamma_i g_i) &= \theta_i(h_i(\gamma) \cdot D_i(\tilde{x})) = \theta_i(D_i(\gamma\tilde{x})) = D_{i+1}(\gamma\tilde{x}) \\ &= h_{i+1}(\gamma) \cdot D_{i+1}(\tilde{x}) = \theta_i(h_i(\gamma) \cdot \theta_i(D_i(\tilde{x}))) \\ &= \theta_i(\gamma_i) \cdot \theta_i(g_i). \end{aligned}$$

L'application développante D_1 du flot \mathcal{F}_1 étant fixée, si θ'_1 est un Γ_1 -morphisme répondant à la question, on aurait $\theta'_1 \circ D_1 = g \cdot (\theta_1 \circ D_1)$ et ce qui impliquerait comme D_1 est surjective que $\theta'_1 = g\theta_1$. Ensuite, puisque θ'_1 et θ_1 sont des Γ_1 -morphismes on a nécessairement $g = e_2$. Par récurrence on établit l'unicité des autres θ_i ▀

Ce théorème permet d'établir le corollaire suivant:

3.3- Corollaire. Soit $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ un drapeau de feuilletages de Lie sur une variété compacte M de dimension n . Si le flot \mathcal{F}_1 est à feuilles denses alors le drapeau \mathfrak{F} est conjugué à un drapeau de feuilletages linéaires du tore \mathbb{T}^n .

Preuve : D'après Y. Carrière [Car], M est difféomorphe au tore \mathbb{T}^n et le flot \mathcal{F}_1 est conjugué à un flot linéaire du tore \mathbb{T}^n . On peut donc supposer que $M = \mathbb{T}^n$, $G_1 = \mathbb{F}^{n-1}$ et \mathcal{F}_1 linéaire.

L'application développante du flot \mathcal{F}_1 est linéaire et il existe une suite de submersions

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{D} \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\theta_1} G_2 \xrightarrow{\theta_2} \dots \xrightarrow{\theta_{p-1}} G$ associée au drapeau $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$.

\mathcal{F}_1 étant à feuilles denses, les submersions θ_i sont des morphismes de groupes tels que $\theta_j(G_j) = G_{j+1}$ est commutatif. G_i est donc commutatif pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ c'est-à-dire un \mathbb{R}^{n-i} et l'application θ_i linéaire. Par suite, les feuilletages \mathcal{F}_i sont linéaires.

3.4- Drapeaux de feuilletages de Lie sur les variétés connexes compactes et orientées de dimension 3.

La classification des 3-variétés supportant des drapeaux de Lie découle de la classification des flots riemanniens sur les 3-variétés connexes et compactes et de l'étude des feuilletages de codimension 1 qu'elles supportent.

3.4.1- **Proposition** [Car], [God1]. Soit M une variété compacte et connexe admettant un flot de Lie \mathcal{F}_1 .

1) Si \mathcal{F}_1 est à feuilles denses, la variété M est difféomorphe au tore \mathbb{T}^3 et le flot \mathcal{F}_1 est conjugué à un flot linéaire de \mathbb{T}^3 .

2) Si \mathcal{F}_1 est à feuilles compactes, la variété M est fibrée en cercles sur le tore \mathbb{T}^2 .

3) Si les feuilles de \mathcal{F}_1 ne sont ni denses, ni fermées, on a les possibilités suivantes:

a) M est difféomorphe au tore \mathbb{T}^3 et \mathcal{F}_1 est conjugué à un flot linéaire de \mathbb{T}^3 .

b) M est difféomorphe à un tore hyperbolique \mathbb{T}_A^3 et le flot \mathcal{F}_1 est conjugué à l'un des flots propres de \mathbb{T}_A^3 .

Preuve : 1) et 2) découlent de (1.5.2) et de (1.5.3).

3) Si les feuilles du \mathcal{F}_1 ne sont ni denses, ni fermées, \mathcal{F}_1 est un feuilletage de Lie de codimension 2. Le groupe de Lie G_1 de \mathcal{F}_1 est soit \mathbb{R}^2 , soit $Aff^+(\mathbb{R})$ (ce sont les sous-groupes de Lie connexes et simplement connexes de dimension 2). Les adhérences des feuilles de \mathcal{F}_1 constituent une fibration $\bar{D} : M \rightarrow \mathbb{S}^1$ de fibre \mathbb{T}^2 .

D'après Meyer [Mey] et [Car]:

- si le groupe fondamental $\pi_1(M)$ est abélien, G_1 est le groupe \mathbb{R}^2 et M est difféomorphe au tore \mathbb{T}^3 . \mathcal{F}_1 est alors conjugué à un flot linéaire du tore \mathbb{T}^3 .

- si le groupe fondamental $\pi_1(M)$ n'est pas abélien, G_1 est le groupe $Aff^+(\mathbb{R})$ et M est difféomorphe à la variété suspension d'un difféomorphisme du tore \mathbb{T}^2 induit par

un automorphisme unimodulaire A à coefficients entiers du plan \mathbb{R}^2 n'ayant pas 1 pour valeur propre ($|\text{tr}A| > 2$). puisque \mathcal{F}_1 est orientable, on a $\text{tr}A > 2$. La variété M est donc difféomorphe à \mathbb{T}_A^3 et \mathcal{F}_1 est conjugué à l'un des *flots propres* de \mathbb{T}_A^3 .

3.4.2- Proposition [God1]. Soit \mathcal{F}_2 un feuilletage de codimension 1, sans holonomie sur une 3-variété connexe et compacte M . Alors \mathcal{F}_2 est conjugué à un feuilletage défini par une forme fermée et sans singularité. En particulier, M est fibrée sur \mathbb{S}^1 . Les feuilles de \mathcal{F}_2 sont des tores \mathbb{T}^2 , des cylindres $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ et des plans \mathbb{R}^2 .

Réciproquement, si \mathcal{F}_2 est un feuilletage de codimension 1 sans holonomie sur une 3-variété ayant pour feuilles des tores, des cylindres ou des plans, alors la variété M est fibrée en tores \mathbb{T}^2 sur le cercle \mathbb{S}^1 . De plus, dans le cas d'un feuilletage par plans, ce fibré est trivial et la variété M est le tore \mathbb{T}^3 .

3.4.3- Théorème. Soit M une variété connexe et compacte supportant un drapeau $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ de feuilletages de Lie.

1) Si le flot \mathcal{F}_1 est à feuilles denses, la variété M est difféomorphe au tore \mathbb{T}^3 et le drapeau $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ est conjugué à un drapeau de feuilletages linéaires du tore \mathbb{T}^3 .

2) Si \mathcal{F}_1 est à feuilles fermées, \mathcal{F}_1 est une fibration en cercle \mathbb{S}^1 sur \mathbb{T}^2 et \mathcal{F}_2 a pour feuilles, des tores \mathbb{T}^2 (feuilles fermées) ou des cylindres comme feuilles partout denses.

3) Les feuilles de \mathcal{F}_1 ne sont ni fermées ni partout denses: la variété M est difféomorphe soit au tore \mathbb{T}^3 soit à un tore hyperbolique \mathbb{T}_A^3 ($\text{tr}A > 2$).

• Si $M \approx \mathbb{T}^3$, \mathcal{F}_1 est linéaire et \mathcal{F}_2 est soit minimal, soit une fibration en tores \mathbb{T}^2 sur \mathbb{S}^1 .

• Si $M \approx \mathbb{T}_A^3$, \mathcal{F}_1 est conjugué à l'un des flots propres de \mathbb{T}_A^3 et \mathcal{F}_2 est une fibration en tores \mathbb{T}^2 sur \mathbb{S}^1 .

3.4.4- Lemme.

Tout $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ - morphisme de $Aff^+(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ sur \mathbb{R} est de la forme $kpr_1 + p$ où $k \in \mathbb{R}^*$ et p une fonction $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ - *périodique*.

Démonstration du lemme.

L'algèbre de Lie de $Aff^+(\mathbb{R})$ est engendrée par les champs de vecteurs $X = x \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = x \frac{\partial}{\partial y}$ avec le crochet $[X, Y] = Y$.

Si ϕ est un morphisme de groupes de $Aff^+(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R} , on a:

$$d\phi_{(0,0)}([X, Y]) = [d\phi_{(0,0)}(X), d\phi_{(0,0)}(Y)] = 0 \quad \text{et puisque } [X, Y] = Y, \text{ on a:}$$

$$d\phi_{(0,0)}(Y) = 0.$$

L'application $d\phi_{(0,0)}$ est donc à une constante multiplicative près, la projection sur la droite $\mathbb{R}X$. On en déduit que $\phi = kpr_1$, où $k \in \mathbb{R}^*$ et pr_1 est la première projection de $Aff^+(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R} . C'est-à-dire que tout morphisme de groupes de $Aff^+(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R} est de la forme kpr_1 . De plus, si θ est un $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ - morphisme de $Aff^+(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R} alors $\theta = kpr_1 + p$ où $k \in \mathbb{R}^*$ et p une fonction $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ - *périodique*.

Démonstration du Théorème 3.4.3.

Considérons le diagramme associé au drapeau de Lie $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\nu} & G_1 \xrightarrow{\theta} G_2 = \mathbb{R} \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array}$$

où \mathcal{F}_i est un G_i -feuilletage de Lie de groupe d'holonomie Γ_i ; $i \in \{1; 2\}$.

L'assertion 1) découle immédiatement du théorème 2.2.

2) Si le flot \mathcal{F}_1 est à feuilles fermées, Γ_1 est un sous-groupe discret-uniforme de G_1 et $G_1 = \mathbb{R}^2$ ou $G_1 = Aff^+(\mathbb{R})$. La variété M est une fibration en cercles \mathbb{S}^1 sur $\mathbb{T}^2 = G_1/\Gamma_1$.

Le groupe $Aff^+(\mathbb{R})$ ne contient aucun sou-groupe discret et uniforme. G_1 est donc \mathbb{R}^2 et $\Gamma_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Pour tout couple $(n, m) \in \Gamma_1$, $\theta(n, m) = \alpha n + \beta m$.

Suivant que α et β sont linéairement indépendants ou non dans \mathbb{Q} , \mathcal{F}_2 est soit minimal à feuilles cylindriques, soit une fibration en tores \mathbb{T}^2 sur \mathbb{S}^1 .

3) Si les feuilles de \mathcal{F}_1 ne sont ni fermées ni partout denses, d'après la proposition 3.4.1, la variété M est difféomorphe soit à \mathbb{T}^3 , soit à un tore hyperbolique \mathbb{T}_A^3 avec $\text{tra}(A) > 2$.

· Si $M \approx \mathbb{T}^3$, \mathcal{F}_1 est linéaire; $G_1 = \mathbb{R}^2$ et Γ_1 n'est ni discret, ni partout dense dans \mathbb{R}^2 . Donc $\bar{\Gamma}_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ et sur $\bar{\Gamma}_1$, on a $\theta(n, t) = \alpha n + \beta t$. Si $\beta = 0$, $\bar{\Gamma}_2 = \mathbb{Z}$ et \mathcal{F}_2 est une fibration en tores \mathbb{T}^2 sur \mathbb{S}^1 . Par contre si $\beta \neq 0$, $\bar{\Gamma}_2 = \mathbb{R}$ et \mathcal{F}_2 est à feuilles partout denses.

· Si $M \approx \mathbb{T}_A^3$, \mathcal{F}_1 est conjugué à l'un des flots propres de \mathbb{T}_A^3 et $G_1 = \text{Aff}^+(\mathbb{R})$. Comme M est fibrée en \mathbb{T}^2 sur $\mathbb{S}^1 = G_1/\bar{\Gamma}_1$, on a $\bar{\Gamma}_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ et donc $\theta = k\rho r_1 + \rho$. Dans ce cas $\Gamma_2 = \theta(\Gamma_1) = k\mathbb{Z}$. \mathcal{F}_2 est donc une fibration en tores \mathbb{T}^2 sur \mathbb{S}^1 .

Bibliographie.

- [Blu] BLUMENTHAL, R., - *Transversaly homogeneous foliations*.
Ann. Inst. Fourier, 29, 4(1979), 143–158.
- [Cai] CAIRNS, G. - *Feuilletages riemanniens et classes caractéristiques, "fines et exotiques"*. Thèse 3è cycle, Montpellier (1982).
- [Car] CARRIERE, Y., - *Flots riemanniens et feuilletages géodésibles de codimension un*. Thèse de 3ème cycle, Université de Lille (1981).
- [CC] CARRIERE, Y.; CARON, P., - "*Flots transversalement de Lie \mathbb{R}^n , flots transversalement de Lie minimaux*". CRAS., 280 (1980) 477-478.
- [Elk] EL KACIMI, A., - *Un survol sur la Théorie de HODGE-DE RHAM des variétés lisses et singulières*. Proyecciones Vol. 12 n°2, pp. 63-118; décembre 1993. Université Catolica del Norte. Antofagasta-Chile.
- [Féd1] FEDIDA, E., - *Sur l'existence des feuilletages de Lie*.
CRAS. 272 (1971) 999-1002.
- [Féd2] FEDIDA, E., - *feuilletages du Plan - feuilletages de Lie*.
Thèse d'Etat , Strasbourg, 1973.
- [Ghy] GHYS, E., - *Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes*.
Ann. Inst. Fourier, 34, 1984, 203-293.
- [God] GODEMENT, R., - *Introduction à la théorie des groupes de Lie*.
Tome I, Publ. Math. Univ. Paris VII,11.
- [God1] GODBILLON, C., - *Feuilletages ; Etudes géométriques I*.
Publ, IRMA, Strasbourg, 1985.
- [Hae] HAEFFLIGER, A., - *Leaf closure in Riemannian foliations*,
A fête in Topology. Papers dedicated to I. TAMURA,
London New York: Adamic Press (1988).
- [HH] HECTOR, G; HIRSCH, U., - *Introduction to the geometry of foliations*.
Vieweg Verlag, Braunschweig, Part A. 1981; Part B, 1983.

[KN] KOBAYASHI, S. et NUMIZU, K., - *Fondation of differential geometry.*

Tomes I, II. Intersciences Publishers.

[Mey] MEYER, J., - *J. of Diff. Geom.*, 12, 1977.

[Mol 1] MOLINO, P., - *Feuilletages de Lie à feuilles denses.*

Séminaire de Géométrie différentielle. Montpellier 1983.

[Mol 2] MOLINO, P., - *Riemannian Foliations,*

Progress in Mathematics 73, Birkhäuser (1988).

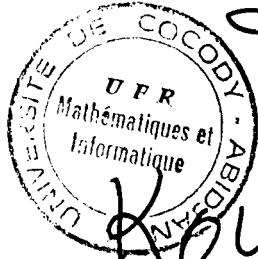
[Rei] REINHART, B., - *Foliated manifolds with bundle-like metrics,*

Ann. of Math. 69 (1959) 119-132.

[Thu] THURSTON, W., - *The geometry and topology of 3-manifolds,*

Chapitre IV, Princeton University.

Vu et Approuvé
Abidjan le 29 Mars 2001
de Directeur de l'UFR-MI



A handwritten signature in black ink, appearing to be "Koua Konin".

Koua Konin