

cs-06787

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET
SIMULATION NUMÉRIQUE DE MODÈLES
D'ÉCOULEMENT DE FLUIDES
INCOMPRESSIBLES EN SURFACE LIBRE ET
MILIEU POREUX DÉFORMABLE

THÈSE

présentée à la faculté des sciences, pour obtenir

le grade de docteur ès sciences, par

Soulèye KANE

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

Institut de Mathématiques

Emile Argand 11

2000 NEUCHÂTEL (Suisse)

23 mai 2005

IMPRIMATUR POUR LA THESE

**Analyse mathématique et simulation
numérique de modèles d'écoulement de
fluides incompressibles en surface libre
et milieu poreux déformable**

Souleye KANE

UNIVERSITE DE NEUCHATEL

FACULTE DES SCIENCES

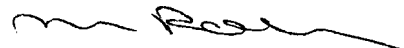
La Faculté des sciences de l'Université de
Neuchâtel, sur le rapport des membres du jury

MM. O. Besson (directeur de thèse),
P. Perrochet, A. Valette,
N.T. Niane (Saint-Louis, Sénégal)
et D. Bresch (Grenoble F)

autorise l'impression de la présente thèse.

Neuchâtel, le 31 mai 2005

La doyenne:



Prof. M. Rahier

*À mon père Moussa KANE,
À la mémoire de ma mère Ndiama SECK,
À la mémoire de ma grand-mère Oulimata DIÈYE et de ma tante N'dack
KANE,
Aux Mourides.*

Remerciements

Tous mes remerciements à mon directeur de thèse Olivier BESSON qui m'a mis dans des conditions idéales d'étude. Sa capacité à cerner un problème et à le rendre compréhensible m'a beaucoup aidé dans mon oeuvre. Toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance.

Je remercie Mary Teuw NIANE qui m'a initié au E.D.P. Il s'investit corps et âme pour la bonne marche de notre laboratoire au Sénégal le L.A.N.I. Nous lui devons beaucoup.

Didier BRESCH, Pierre PERROCHET, Alain VALETTE, je me vois honorer du fait de vous avoir dans mon jury. Merci pour vos remarques et suggestions pertinentes.

Les discussions avec Jérôme POUSIN, Mamadou SY ont été très fructueuses. Je les remercie pour leur disponibilité.

Je remercie tous les collaborateurs et Professeurs, Tallat, Christine pour votre soutien à mon intégration dans cette famille qu'est l'Institut de Mathématiques.

Ma gratitude va enfin à ma famille, mes amis, mes tantes, cousins, cousines, neveux, nièces qui ont su m'entourer de leur affection.

Table des matières

1	Introduction générale	7
I	Modèle de milieu poreux	11
2	Transfert de soluté en milieu poreux rigide	13
2.1	Modèle physique	13
2.2	Modèle mathématique	14
2.2.1	Transferts hydriques	14
2.2.2	Transferts de solutés	17
3	Transfert en milieu poreux déformable	21
3.1	Élément de mécanique des milieux continus	21
3.1.1	Point matériel ou particules du squelette et du fluide . . .	21
3.1.2	Continuité du milieu poreux	22
3.2	Transformation du squelette	22
3.2.1	Gradient de la transformation	22
3.2.2	Formule de transport	23
3.2.3	Tenseur des déformations de Green-Lagrange	24
3.2.4	Transformation infinitésimale, déformation linéarisée . . .	24
3.2.5	Cinématique de la déformation du squelette	26
3.3	Modélisation	28
3.3.1	Équation d'écoulement	29
3.3.2	Équation de transport de soluté	30
3.3.3	Modèle de retrait de vertisol	31
3.3.4	Déformation tridimensionnelle anisotrope	32
3.4	Modèle de Braudeau	34
3.4.1	Hypothèses	35
3.4.2	Formulation faible	35
3.4.3	Théorème d'existence	36

4	Étude numérique du modèle de milieu poreux déformable	49
4.1	Schéma numérique du modèle de Braudeau	49
4.2	Schéma numérique de l'équation de transport	51
4.3	Implémentation et résultats	54
II	Écoulement fluvial	61
5	Le modèle	63
5.1	Hypothèses	64
5.2	Les équations simplifiées	65
6	Existence de solutions	69
6.1	Formulation variationnelle	69
6.2	Problème linéarisé (β constant)	70
6.3	Problème non linéaire (β non constant)	71
6.3.1	Estimations a priori	71
6.3.2	Preuve du théorème (6.3.1)	76
7	Résultats numériques	79
7.1	Introduction	79
7.2	Problème approché	80
7.3	Simulations numériques	81
8	Conclusion et perspectives	87
9	Annexes	89
9.1	Annexe A	89
9.2	Annexe B	104

Chapitre 1

Introduction générale

L'Homme propose et DIEU dispose...

DIEU propose et l'Homme analyse...

L'EAU nous est proposée et depuis que le monde est monde, nous n'en sommes pas au terme de son analyse. Aussi bien sur terre que sous terre, elle n'est pas équidistribuée, et sa dynamique est très complexe. Les lois physiques sur la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, ont permis à Navier et Stokes d'établir un modèle macroscopique qui décrit son l'écoulement. Le travail que nous allons vous présenter consistera à analyser différents modèles d'écoulement aussi bien en surface qu'en milieu poreux.

L'eau, bien qu'elle règle des problèmes, en crée aussi. Elle est parfois la cause de pas mal de catastrophes naturelles : crue de fleuve, rupture de barrage, vecteur de pollution. Son absence peut provoquer la sécheresse.

Parvenir à prédire ces phénomènes sont donc de la plus haute importance. Pour se faire, les physiciens trouvent les modèles, les mathématiciens les résolvent et les informaticiens les simulent ; et nous, nous tenterons d'être dans la peau de ces trois scientifiques.

La thèse est composée de deux parties. Dans la première, la motivation essentielle est de comprendre la dynamique d'un fluide dans un milieu poreux déformable pour pouvoir donner notre point de vue sur les problèmes liés au transport de polluant dans les vertisols. L'écoulement de fluides dans les sols déformables retient l'attention de beaucoup de chercheurs vu son importance par exemple en génie civil, en ingénierie pétrolière et récemment pour les problèmes liés à l'enfouissement de déchets toxiques. Dans le cas où la déformation n'est pas prise en compte, beaucoup de résultats ont été obtenus par des études aussi bien microscopique que macroscopique du milieu poreux. L'aspect microscopique d'un milieu poreux est considéré comme un réseau de canaux où le fluide qui y circule est en interaction physique et chimique avec la matrice. Un modèle de réseau a été développé pour simuler l'écoulement de particules en suspension dans un milieu poreux [26].

J. Pousin et al. [26] ont étudié la diffusion et dissolution d'espèces chimiques dans un milieu poreux saturé. Ils ont obtenu, après dérivation du modèle, des résultats d'existence et d'unicité de solution en utilisant des méthodes de compacités, de sous-solutions et sur-solutions. Un modèle de pollution a aussi été développé par R. Aboulaich, S. Afilal, J. Pousin [1]. Dans [4], D. Aronson et al. ont étudié la stabilisation des solutions de l'équation des milieux poreux dans le cas unidimensionnel. On peut aussi citer les travaux de Bénilan P., Crandall M.G. et Pierre M. qui, dans [9] ont étudié le problème à valeur initiale

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \Delta(|u|^{m-1}u) \text{ sur } \mathbb{R}^n \times (0, T), m > 1 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

où l'intervalle d'existence $[0, T[$, $T > 0$ dépend de la valeur initiale u_0 . Leur objectif dans cet article est de résoudre ce problème pour une large classe de fonctions u_0 . Des résultats de régularité des solutions du problème $u_t = \Delta u^m$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ ont été obtenus par D.G. Aronson et P. Bénilan [3].

Lorsque $\frac{(N-2)^+}{N} < m < 1$, la solution est dans $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N)$. Bénilan et Crandall dans [8] se sont intéressés au problème plus général

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \Delta \phi(u) \text{ dans } D'((0, \infty) \times \mathbb{R}^N), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N\end{aligned}$$

où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante. Ils montrent pour ce problème l'existence et l'unicité de solution et la dépendance continue de la solution u de ϕ ; c'est à dire que si nous considérons une suite de fonctions $\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\phi_n(0) = 0$, des valeurs initiales $u_{0n} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $u_n \in C([0, \infty); L^1(\mathbb{R}^N))$ l'unique solution associée à

$$\begin{aligned}\partial_t u_n &= \Delta \phi_n(u_n) \text{ dans } D'((0, \infty) \times \mathbb{R}^N), \\ u_n(x, 0) &= u_{0n}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.\end{aligned}$$

Si $\phi_n \rightarrow \phi_\infty$ et $u_{0n} \rightarrow u_{0\infty}$ dans un certain sens, alors $u_n \rightarrow u_\infty$. Ce résultat est obtenu par la théorie des semi-groupes non linéaires. Ce même problème dans un domaine Ω borné de frontière assez régulière avec des conditions mixtes aux bords a été résolu numériquement par C. Verdi [67]. L'algorithme est basé sur la théorie des semi-groupes non linéaires de contractions, la formule de Crandall-liggett [25] et de Chernoff non linéaire [22].

Cette première partie est composée de trois chapitres. Dans le premier, nous tentons de mieux cerner le transport de polluant dans le cas non déformable. Après description du modèle physique et mathématique, nous faisons par la suite le lien avec le cas déformable; c'est l'objet du chapitre 3. Ce passage nécessite la connaissance d'éléments de la mécanique des milieux continus [24], [27]. Dans la

plupart des modèles macroscopiques développés, les différences se situent dans la détermination des caractéristiques hydrodynamiques des sols telles que la conductivité hydraulique, le potentiel matriciel, le retrait. On peut citer les modèles de Van Genuchten, de Brooks et Corey, de Gardner...[34]. Nous utilisons dans notre étude le modèle de Van Genuchten. Après dérivation du modèle général de milieu poreux déformable, nous traiterons le cas où la déformation est isotrope suivant le plan horizontal aussi bien théoriquement que numériquement. Le modèle de retrait utilisé est celui de E. Braudeau [17]. Le problème que nous allons résoudre est le suivant :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta \Gamma(w) + \frac{\partial}{\partial z} \lambda(w) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\quad (1.1)$$

$$w(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \times]0, T[\quad (1.2)$$

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (1.3)$$

Nous allons voir que régularité de la solution faible w est étroitement liée aux paramètres associés à la conductivité hydraulique et au potentiel matriciel du modèle de Van Genuchten. Dans le dernier chapitre de cette partie, nous donnons un schéma numérique de l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux déformable. Nous utilisons la méthode des éléments finis pour la résolution. La vitesse du fluide obtenue avec cette simulation est utilisée dans un deuxième schéma numérique basé sur la méthode STILS (Space Time Integrate Least Square) [6], [14] pour résoudre le transport de polluant en milieu poreux déformable non saturé. Dans la littérature, on trouve aussi beaucoup de résultats pour les milieux poreux fracturés. Dans [59], Royer P. et al. dérivent un modèle macroscopique de transfert de polluant en milieu poreux fracturé. Les techniques d'homogénéisation ont été utilisées et le milieu est supposé saturé par un fluide incompressible. La vitesse du fluide est donnée par la loi de Darcy.

Dans la deuxième partie, nous étudions un problème d'écoulement fluvial qui sera considéré comme un écoulement unidimensionnel car la largeur et la hauteur sont négligeables par rapport à la longueur. Les équations dite de Saint-Venant modélisent les écoulements à surface libre en domaines minces, en particulier en hydraulique maritime et fluviale ; voir par exemple [12], [11] et [53]. De son vrai nom **Jean-Claude Adhémar Barré, comte de Saint-Venant**, il est né le 28 août 1797 en France et publie en 1871 les équations "de Barré de Saint-Venant"[60]. La motivation essentielle était de pouvoir résoudre les problèmes de crue de la Loire, fleuve en France. Le système classique de Saint-Venant (sans viscosité) n'est pas très satisfaisant surtout pour la justification mathématique, voir [36]. On distingue dans ce cas deux types de formulations ; la forme vitesse et la forme moment. Des résultats d'existence de solutions entropiques ont été obtenus par DiPerna en 1983 [28], revisités par Gui-Qiang Chen [39] en 1997. Pour la deuxième forme, on peut citer les résultats de P.L. Lions, B. Perthame et P.E. Souganidis

montrant l'existence globale de solutions faibles [49]. Les chocs obtenus pour ces deux formulations ne sont pas les mêmes.

La question naturelle que l'on se pose est de savoir si on peut dériver les équations de Saint-Venant partant des équations de la mécanique classique en particulier celles de Navier-Stokes.

La plupart des modèles développés utilise une formulation section-débit ou hauteur-vitesse. Par exemple dans [36] cette dernière formulation aboutit à un système de Saint-Venant incluant des frottements, la viscosité et le coefficient de Coriolis-Boussinesq. Ce modèle est numériquement validé et des résultats satisfaisants sont obtenus dans le cas d'une rupture de barrage.

Dans [20], les auteurs démontrent un résultat d'existence globale de solutions faibles pour un domaine périodique de \mathbb{R}^2 . Une justification mathématique du modèle obtenu dans [36] est en cours dans [?].

On considère ici une formulation hauteur-débit. Pour la dérivation des équations de Saint-Venant on peut voir dans [12], [11], [53]. La modélisation faite ici est fortement inspirée par [12]. L'écoulement considéré est unidimensionnel dans un canal de section parallélépipédique. La dérivation du système de Saint-Venant dans le cas d'un canal trapézoïdal ou similaire conduit à un système équivalent. le lecteur peut consulter avec profit le travail fait dans [53] et qui concerne un réseau de canaux interconnectés.

Dans le premier chapitre de cette partie on dérive un système unidimensionnel de Saint-Venant. On obtient le modèle

$$\begin{cases} l \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = f_1 & \text{dans } W, \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \beta(h) \frac{\partial h}{\partial x} = f_2 & \text{dans } W \end{cases}$$

que nous étudierons dans toute la suite.

Dans le deuxième chapitre on donne les résultats d'existence de solutions dans le cas où la fonction $\beta(h) = a + bh$ est supposée constante ou non, avec a et b des constantes.

Ensuite on donne les résultats obtenus à partir de la simulation numérique de l'écoulement de l'eau dans un canal en considérant plusieurs scénarios. La simulation de l'écoulement entre les deux barrages (Diama et Manantali) du fleuve Sénégal dans le cas de la rupture du barrage de Diama se traite de la même manière.

Première partie
Modèle de milieu poreux

Chapitre 2

Transfert de soluté en milieu poreux rigide

Dans ce chapitre nous allons après avoir décrit le modèle physique, dériver un modèle mathématique. La loi physique utilisée est la conservation de la masse et du nombre de moles d'une espèce chimique. On suppose que le fluide à travers le milieu suit la loi de Darcy.

2.1 Modèle physique

Le problème que l'on se pose est le suivant : on se donne un domaine borné (un cylindre de rayon 1 et de hauteur 1 contenant un sol non saturé de teneur en eau initiale θ_r). On injecte dans ce milieu poreux à travers le sommet une solution contenant un seul soluté et on regarde l'évolution spatio-temporelle de la concentration du traceur dans le domaine.

La propagation du soluté dans le milieu poreux étant étroitement liée à l'écoulement du fluide, l'étude de ce phénomène nécessite la connaissance de l'équation gouvernant le transport de masse en milieu poreux.

Dans ce modèle physique, on suppose qu'il n'y a pas d'écoulement latéral. Le fond est ouvert et le débit de la source extérieure n'est pas élevé pour éviter d'avoir un écoulement diphasique. L'étude se fait dans un intervalle de temps tel que le front d'humectation n'atteint pas le fond. Cette hypothèse nous permet de simplifier le problème en évitant de se confronter à un autre type de problème à frontière libre où la variation du niveau de la nappe phréatique est non négligeable.

On utilise comme sol du sable qui peut être supposé comme un milieu poreux rigide. On fait aussi l'hypothèse que le soluté est inerte(chimiquement) par rapport au milieu c'est-à-dire qu'il n'y a pas de réactions chimiques (précipitation, dissolution) ni d'adsorption. Le milieu est supposé isotherme.

2.2 Modèle mathématique

Notation :

θ : la teneur en eau ;

ρ : la masse volumique de l'eau ;

v : la vitesse de filtration ;

$q := \theta v$: la vitesse de filtration de Darcy ;

C : la concentration de la solution dans le domaine ;

D : le coefficient de diffusion-dispersion ;

ρ_s : densité de la partie solide du milieu poreux ;

C_s : concentration du soluté dans la partie solide ;

ρ_d : densité apparente sèche du sol ;

f_m : densité de source volumique.

L'évolution du soluté dans le milieu poreux sera régie par deux phénomènes physico-chimiques ; l'un décrivant l'écoulement du fluide et l'autre le transport de soluté.

2.2.1 Transferts hydriques

Supposons que le milieu poreux soit le cylindre universel de \mathbb{R}^3 noté Ω . Soit ω une partie de Ω , V_ω le volume de ω et $\mathcal{M}(\omega, t)$ la masse de fluide contenue dans ω à l'instant t .

Le volume élémentaire de ω sera dV_ω et la portion de volume occupée par le fluide, θdV_ω . De là, on en déduit la masse élémentaire de fluide contenue dans dV_ω

$$dm = \rho \theta dV_\omega,$$

donc

$$\mathcal{M}(\omega, t) = \int_\omega dm = \int_\omega \rho \theta(x, t) dV_\omega.$$

Si ω est un volume fixé, la loi de conservation de la masse nous permet d'affirmer que la variation de la masse dans ω par rapport au temps est égale à la somme du flux à travers la surface $\partial\omega$ et des sources dans ω . Ceci se traduit par l'équation

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(\omega, t) = \phi_e - \phi_s + \int_\omega \rho f_m dV_\omega.$$

En remplaçant \mathcal{M} , $\phi_e - \phi_s$ par leur valeur, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_\omega \rho \theta(x, y, z; t) dV_\omega + \int_{\partial\omega} \rho q \cdot n d\sigma = \int_\omega \rho f_m dV_\omega$$

où q la vitesse de filtration et f_m le terme source volumique. La formule de la divergence nous permet d'écrire

$$\int_{\omega} \frac{\partial \rho \theta}{\partial t} dV_{\omega} + \int_{\omega} \operatorname{div}(\rho q) dV_{\omega} = \int_{\omega} \rho f_m dV_{\omega} \quad \forall \omega.$$

Ce qui donne ainsi l'équation d'écoulement :

$$\frac{\partial \rho \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho q) = \rho f_m.$$

Comme ρ est constante, on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(q) = f_m \quad (2.1)$$

où f_m désigne l'apport massique du milieu extérieur. La quantité q est donnée par la loi de Darcy généralisée par Richard :

$$q = -K(\theta) \nabla H(\theta)$$

K étant la conductivité hydraulique, H la charge hydraulique. On a $H(\theta) = h(\theta) + z$ où h désigne le potentiel matriciel et z la cote.

En rapportant cette expression de q dans (2.1), on obtient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}(K(\theta) \nabla H(\theta)) = f_m \quad (2.2)$$

Dans cette équation, on a comme inconnue θ , $K(\theta)$ et $h(\theta)$. Les deux derniers constituent les caractéristiques hydrodynamiques du sol et leur expression sont généralement empiriques. Les modèles couramment utilisés sont ceux de Van Genuchten, de Brooks et Corey et de Gardner (1958) revu par Russo (1988); pour une description de ces modèles, voir [34].

L'expression du modèle de Van Genuchten de $h(\theta)$ est donnée par l'équation :

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = (1 + (\alpha h)^n)^{-m} \quad (2.3)$$

où θ_r est la teneur en eau résiduelle et θ_s est la teneur en eau à saturation.

Les valeurs α, n, m sont des paramètres empiriques.

Dans certains cas au lieu d'utiliser θ comme variable globale, il est préférable de considérer la saturation effective notée $S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}$.

Ainsi,

$$h(S_e) = \frac{1}{\alpha} (S_e^{-\frac{1}{m}} - 1)^{\frac{1}{n}}.$$

16 CHAPITRE 2. TRANSFERT DE SOLUTÉ EN MILIEU POREUX RIGIDE

La condition de Mualem nous permet de relier n et m : $m = 1 - \frac{1}{n}$ de même que celui de Burdine : $m = 1 - \frac{2}{n}$.

Van Genuchten fournit aussi l'expression de $K(\theta)$ suivante :

$$K(S_e) = K_{sat} S_e^L \left[1 - (1 - S_e^{\frac{L}{m}})^m \right]^2. \quad (2.4)$$

La valeur L étant un paramètre empirique souvent égal à 0.5. Ce modèle contient cinq paramètres à déterminer : $\theta_s, \theta_r, K_{sat}, n, \alpha$. Cependant, Brooks et Corey en 1964 avaient proposé le modèle suivant :

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{h_c^\beta}{h}; \quad (2.5)$$

ce qui est équivalent à :

$$h(\theta) = h_c \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{\frac{-1}{\beta}} \quad (2.6)$$

avec β paramètre empirique et h_c le potentiel au point d'entrée de l'air. La conductivité hydraulique est :

$$K(\theta) = K_{sat} S_e^{p+2+2\beta}. \quad (2.7)$$

Quant à Gardner, il estime que

$$K(\theta) = K_{sat} \exp(-a|h|) \quad (2.8)$$

avec $a > 0$, paramètre empirique de l'ordre de $\frac{1}{h_c}$. Pour des milieux polydispersés on a $0 < a < \frac{1}{h_c}$. En 1988, Russo obtient à partir de l'expression de Gardner la saturation effective sous la forme :

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = [(\exp(-0.5a|h|))(1 + 0.5a|h|)]^{\frac{2}{b+2}}. \quad (2.9)$$

Le paramètre b est empirique et souvent égal à 0.5. Dans ce cas, il y a quatre paramètres à déterminer. Le modèle le plus utilisé par les physiciens du sol est celui de Van Genuchten et c'est celui là que nous étudierons.

2.2.2 Transferts de solutés

Soit C la concentration massique du soluté présent dans Ω . Avec l'hypothèse faite sur l'inertie chimique du soluté par rapport au milieu, le nombre de moles total présent dans la solution contenue dans le volume ω sera :

$$n = \mathcal{M}C.$$

Sachant que $dm = \rho\theta dV_\omega$, on a :

$$dn = dmC = \rho\theta C dV_\omega.$$

On obtient ainsi l'expression suivante :

$$n = \int_\omega dn = \int_\omega \rho\theta C dV_\omega.$$

Si on note C_v la concentration volumique du soluté, on a : $C_v dV_\omega = C dm$ ce qui implique que $C_v = \rho\theta C$.

La loi de conservation du nombre de moles nous permet d'affirmer que la variation du nombre de moles par rapport au temps dans ω est égale au flux à travers $\partial\omega$ plus la quantité diffuse et dispersée à travers $\partial\omega$, plus la quantité produite ou soustraite à l'intérieur de ω .

Le flux du soluté à travers la surface de ω est donné par

$$\phi = \phi_e - \phi_s = \int_{\partial\omega} C_v v \cdot n d\sigma = \int_{\partial\omega} \rho C q \cdot n d\sigma.$$

La quantité diffuse et dispersée à travers $\partial\omega$ est donnée par la loi de Fick.

Si on note $d\phi_c$ le flux de diffusion-dispersion de soluté à travers $d\sigma$ alors,

$$d\phi_c = \rho\theta D \nabla C \cdot n d\sigma$$

où n est la normale extérieure à $d\sigma$ et D le tenseur de diffusion-dispersion.

Ainsi

$$\phi_c = \int_{\partial\omega} \rho\theta D \nabla C \cdot n d\sigma.$$

En appliquant la loi de conservation du nombre de moles, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_\omega \rho\theta C dV_\omega = \int_\omega \rho f_c dV_\omega - \int_{\partial\omega} \rho\theta C v \cdot n d\sigma + \int_{\partial\omega} \rho\theta D \nabla C \cdot n d\sigma;$$

où f_c est la source extérieure. Ce qui implique

$$\int_\omega \frac{\partial}{\partial t} \rho\theta C dV_\omega + \int_\omega \operatorname{div}(\rho C q - \rho\theta D \nabla C) dV_\omega = \int_\omega \rho f_c dV_\omega,$$

ceci pour tout ω . Ce qui nous donne l'équation de transport de soluté sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta C) + \text{div}[Cq - \theta D \nabla C] = f_c.$$

Avec l'équation de Richard :

$$q = -K(\theta) \nabla H(\theta)$$

l'équation devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\theta C) - \text{div}[CK(\theta) \nabla H(\theta) + \theta D \nabla C] = f_c. \quad (2.10)$$

Récapitulation :

Le modèle physique défini plus haut sera donc gouverné par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \text{div}(K(\theta) \nabla H(\theta)) = f_m, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\theta C) - \text{div}[CK(\theta) \nabla H(\theta) + \theta D \nabla C] = f_c, \\ +C.B. \text{ et } C.I. \end{array} \right.$$

En posant $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où Γ_1 est le disque supérieur du cylindre, Γ_2 est la surface latérale du cylindre, Γ_3 est le fond et $Q(x, t)$ étant le débit de la source extérieure, on obtient :

$$q(x, t) = Q(x, t) \text{ sur } \Gamma_1; \quad (2.11)$$

$$q(x, 0) = 0 \forall x \in \Omega. \quad (2.12)$$

On sait que

$$\Theta = \frac{V_{liq}}{V_s} = \frac{V_{liq}}{V_t} \frac{V_t}{V_s} = \theta \frac{V_t}{m_s} \frac{m_s}{V_s} = \theta \frac{\rho_s}{\rho_d}$$

d'où $\theta = \frac{\Theta \rho_d}{\rho_s}$. Lorsque le milieu poreux est déformable, la teneur en eau dépend de la porosité qui varie avec la déformation. La quantité Θ ne dépend pas explicitement de la déformation. Elle est plus accessible pour des mesures expérimentales. Le modèle de retrait de vertisol de E. Braudeau est une fonction de cette variable. Dans la suite nous travaillerons avec la variable Θ appelée humidité pondérale. Le milieu étant supposé rigide, donc V_t est constant et donc ρ_d est constant. La densité de l'eau aussi est une constante, ainsi (2.2) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\rho_d}{\rho_s} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \text{div}\left(K\left(\frac{\Theta \rho_d}{\rho_s}\right) \nabla H\left(\frac{\Theta \rho_d}{\rho_s}\right)\right) = f_m.$$

Posons $K_1(\Theta) = \frac{\rho_s}{\rho_d} K(\Theta \frac{\rho_d}{\rho_s})$ et $H_1(\Theta) = H(\Theta \frac{\rho_d}{\rho_s})$. Ainsi, l'équation (2.2) devient :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \operatorname{div}(K_1(\Theta) \nabla H_1(\Theta)) = f_1.$$

L'équation (2.10) est équivalent à :

$$\frac{\rho_d}{\rho_s} \frac{\partial \Theta C}{\partial t} - \operatorname{div}(CK(\frac{\Theta \rho_d}{\rho_s}) \nabla H(\frac{\Theta \rho_d}{\rho_s}) + \frac{\rho_d}{\rho_s} \Theta D \nabla C) = f_c.$$

Ainsi (2.10) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Theta C) - \operatorname{div}(CK_1(\Theta) \nabla H_1(\Theta) + \Theta D \nabla C) = f_2.$$

Le problème à résoudre est donc le problème (P) suivant : Trouver Θ, C tel que :

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \operatorname{div}(K_1(\Theta) \nabla H_1(\Theta)) = f_1 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{\partial(\Theta C)}{\partial t} - \operatorname{div}(CK_1(\Theta) \nabla H_1(\Theta) + \Theta D \nabla C) = f_2 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \Theta(x, 0) = \Theta_0(x) & \text{dans } \Omega, \\ \Theta(x, t) = \Theta_1(x, t) & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ C(x, 0) = C_0(x) & \text{dans } \Omega, \\ C(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[. \end{array} \right.$$

Chapitre 3

Transfert en milieu poreux déformable

On conserve le modèle (P) du chapitre II sauf que dans ce cas on tient compte de la déformation (le sol utilisé est un vertisol).

Pour les sols déformables, les équations qui gouvernent le modèle de transport de soluté dans les milieux supposés rigides ne sont pas très appropriées. Ceci est lié aux effets de la déformation sur les caractéristiques hydrodynamiques du sol [34]. Ainsi, en plus des propriétés du sol qui sont la conductivité hydraulique, la teneur en eau et le potentiel, on a comme caractéristique additionnelle l'indice de vide qui est représenté par la courbe de retrait du sol ($e = e(\theta)$).

3.1 Élément de mécanique des milieux continus

3.1.1 Point matériel ou particules du squelette et du fluide

Soit V un volume délimitant un milieu poreux et ω un volume élémentaire entourant un point M repéré par sa position x dans un repère donné.

On appelle particule du squelette la partie matérielle du squelette et l'espace poreux connecté qui coïncide à l'instant considéré avec le point M repéré par x .

Une particule fluide est représentée par le fluide se trouvant dans l'espace poreux connecté du même volume élémentaire coïncidant au même instant avec le point M .

On appelle point matériel une particule fluide ou particule de squelette d'un volume élémentaire entourant M .

3.1.2 Continuité du milieu poreux

Le sol vu microscopiquement est un milieu hétérogène où subsistent trois phases : une liquide, une solide et une gazeuse.

Cependant, on supposera que le milieu poreux est continu. Cette hypothèse est plausible puisque l'on se placera à une échelle macroscopique pour l'observation des phénomènes et la quantification des grandeurs physiques. Par exemple pour définir la porosité en un point, on définit un volume élémentaire entourant le point et intégrant suffisamment de matières pour être représentatif du phénomène étudié.

L'existence de l'échelle est du ressort de la théorie microscopique fondée sur des méthodes d'homogénéisation [24].

La continuité des transformations affectant le squelette est supposée, c'est à dire que deux points matériels du squelette infiniment voisins à un instant donné proviennent de deux points infiniment voisins dans le temps et le restent ultérieurement.

3.2 Transformation du squelette

La déformation observable est en fait celle du squelette sous l'action de l'infiltration.

3.2.1 Gradient de la transformation

Considérons un état de référence r du milieu poreux où un point matériel du squelette est repéré par ses coordonnées cartésiennes X_α dans un repère orthonormé de vecteurs de base e_1, e_2, e_3 . Soit X son vecteur position : $X = (X_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}$. A un instant ultérieur t (instant actuel), après déformation, le squelette acquiert une nouvelle configuration dite configuration actuelle. Les nouvelles coordonnées cartésiennes du point matériel sont $(x_i)_{i=\overline{1,3}}$; on note x le nouveau vecteur position : $x = (x_i)_{i=\overline{1,3}}$. On a $x = x(X, t)$, donc $x_i = x_i(X, t)$. On définit le gradient de la transformation par

$$F = \text{Grad}(x) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \right)_{i=\overline{1,3}, \alpha=\overline{1,3}}.$$

C'est la matrice jacobienne, le majuscule de Grad signifie qu'il est relatif à la configuration r .

Si F est inversible, on a

$$(F^{-1})_{\alpha i} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i}.$$

Le jacobien de la transformation sera noté $J = \det(F)$.

3.2.2 Formule de transport

Proposition 3.2.1 Si ω est le volume élémentaire matériel dans la configuration de référence et ω_t celui à l'instant t , on a

$$\omega_t = J\omega.$$

Preuve

Soit le vecteur matériel dX attaché au squelette. dX relie les points matériels X et $X + dX$ dans la configuration r . Après déformation on a dX qui donne dx . Par définition de F , on a

$$dx = FdX.$$

Soit $\omega = (dX_1, dX_2, dX_3)$. où dX_i la composante de dX suivant la direction e_i . Le volume élémentaire ω donne après transformation

$$\omega_t = (dx_1, dx_2, dx_3)$$

avec $dx_i = F \cdot dX_i$

$$\begin{aligned} \omega_t &= (dx_1, dx_2, dx_3) \\ &= (F \cdot dX_1, F \cdot dX_2, F \cdot dX_3) \\ &= J\omega. \end{aligned} \quad \square$$

Un élément de matière est de volume non nul même après déformation, ainsi on a $J \in]0, +\infty[$, impliquant l'inversibilité de la transformation F .

On considère une facette matérielle infinitésimale dans la configuration de référence de surface σ orientée vers n la normale unitaire. Après déformation, on a σ qui devient σ_t et n donne n_t .

Proposition 3.2.2

$$\sigma_t n_t = J(F^t)^{-1} n \sigma.$$

Preuve

On considère le cylindre formé par la surface $n\sigma$ et le vecteur quelconque u . Dans la configuration actuelle, $n\sigma$ se transforme en $n_t\sigma_t$ et u en $u_t = Fu$. Ce qui fait que le volume $\sigma n \cdot u$ devient $\sigma_t n_t \cdot u_t$. Avec la proposition (3.2.1)

on a

$$\sigma_t n_t \cdot u_t = J\sigma n \cdot u.$$

En remplaçant \vec{u}_t par sa valeur, on obtient

$$\sigma_t n_t F \cdot u = J\sigma n \cdot u \quad \forall u.$$

Ainsi

$$\sigma_t n_t = \sigma J(F^t)^{-1} n. \quad \square$$

3.2.3 Tenseur des déformations de Green-Lagrange

On considère les vecteurs infinitésimaux dX, dX' dans la configuration de référence qui, après déformation donnent respectivement dx, dx' . Alors,

$$\begin{aligned} dx dx' - dX dX' &= F dX F dX' - dX dX' \\ &= dX F^t F dX' - dX dX' \\ &= dX (F^t F - 1) dX' \\ &= 2dX \Delta dX' \end{aligned}$$

avec $2\Delta = F^t F - 1$. L'opérateur Δ est appelé le tenseur de déformation de Green-Lagrange. Notons par $\psi = x - X$ le vecteur déplacement, alors $\text{Grad } \psi = \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_\beta}\right)_{\alpha, \beta = \overline{1,3}}$, donc

$$\text{Grad } \psi = F - I.$$

On a

$$\begin{aligned} \text{Grad } \psi + (\text{Grad } \psi)^t + (\text{Grad } \psi)^t \text{Grad } \psi &= F - I + F^t - I + (F - I)^t (F - I) \\ &= F + F^t - 2I - F^t - F + F^t F + I \\ &= F^t F - I \\ &= 2\Delta, \end{aligned}$$

ainsi

$$2\Delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_\beta} + \frac{\partial \psi_\beta}{\partial X_\alpha} + \sum_\delta \frac{\partial \psi_\delta}{\partial X_\beta} \frac{\partial \psi_\delta}{\partial X_\alpha}.$$

3.2.4 Transformation infinitésimale, déformation linéarisée

Les mouvements étudiés sont souvent considérés comme des transformations infinitésimales qui sont caractérisées par

$$\forall X \quad \|\text{Grad } \psi(X)\| \ll 1.$$

La norme est celle d'un vecteur appartenant à un espace vectoriel de dimension finie où toute les normes sont équivalentes.

On définit le tenseur des déformations linéarisé par ε avec

$$2\varepsilon = \text{Grad } \psi + \text{Grad } \psi^t,$$

ainsi Δ est approximé par ε . Pour une transformation infinitésimale, on a

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_\beta} \simeq \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Cette approximation est justifiée car

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_\beta} = \sum_i \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_\beta},$$

or

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial X_\beta} &= \frac{\partial \psi_i}{\partial X_\beta} + \frac{\partial X_i}{\partial X_\beta} \\ &= \frac{\partial \psi_i}{\partial X_\beta} + \delta_{i,\beta}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial X_\beta} &= \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\beta} + \sum_i \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial X_\beta} \\ &\simeq \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_\beta}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue en négligeant le terme somme. Ce qui est justifiée par l'hypothèse de la transformation infinitésimale. Toujours sous cette hypothèse, on a

Proposition 3.2.3 $J \simeq 1 + \operatorname{div} \psi$.

Preuve

$$\begin{aligned} J &= \det(F) \\ &= \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3} \\ &= \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} + 1 \right) \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial X_2} + 1 \right) \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial X_3} + 1 \right) + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} + 1 \right) \frac{\partial \psi_3}{\partial X_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial X_3} \\ &\quad + \frac{\partial \psi_2}{\partial X_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_2} \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial X_3} + 1 \right) + \frac{\partial \psi_2}{\partial X_1} \frac{\partial \psi_3}{\partial X_2} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_3} \\ &\quad + \frac{\partial \psi_3}{\partial X_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial X_3} + \frac{\partial \psi_3}{\partial X_1} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial X_2} + 1 \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial X_3}. \end{aligned}$$

L'hypothèse de la transformation infinitésimale nous permet de négliger les termes $\frac{\partial \psi_i}{\partial X_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial X_l}$ et $\frac{\partial \psi_i}{\partial X_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial X_l} \frac{\partial \psi_p}{\partial X_q}$. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} J &\simeq \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \psi_3}{\partial X_3} + 1 \\ &\simeq 1 + \operatorname{Div} \psi \\ &\simeq 1 + \operatorname{div} \psi. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.4 *La variation du volume élémentaire satisfait*

$$\frac{\omega_t - \omega}{\omega} = \operatorname{div} \psi = \operatorname{trace} \varepsilon = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}.$$

Preuve

$$\frac{\omega_t - \omega}{\omega} = \frac{J\omega - \omega}{\omega} = \operatorname{div} \psi = \operatorname{tr}(\varepsilon). \quad \square$$

Donc, pour une transformation infinitésimale la dilatation volumique est égale à la trace du tenseur des déformations linéarisées. La dilatation observable du squelette est due d'une part à la variation de volume de l'espace poreux connecté et d'autre part à la dilatation moyenne des éléments matériels constitutifs du squelette. Soient ϕ_0 la porosité dans la configuration de référence et ϕ celle dans la configuration actuelle. La dilatation volumique moyenne de la matrice est donnée par

$$\epsilon_s = \frac{\mathcal{V}_t^s - \mathcal{V}^s}{\mathcal{V}^s};$$

\mathcal{V}^s étant le volume occupé par la matrice à l'état initial et \mathcal{V}_t^s celui à l'instant actuel. On a les égalités suivantes :

$$\mathcal{V}^s = (1 - \phi_0)\mathcal{V},$$

$$\mathcal{V}_t^s = (1 - \phi)\mathcal{V}_t.$$

D'où

$$\epsilon_s = \frac{(1 - \phi) \int_{\Omega} J dV - (1 - \phi_0) \int_{\Omega} dV}{(1 - \phi_0) \int_{\Omega} dV},$$

donc

$$(1 - \phi_0)\epsilon_s = (1 - \phi) \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\Omega} \operatorname{trace}(\varepsilon) dV - (\phi - \phi_0).$$

Cette formule permet de connaître ϵ_s qui n'est pas accessible à l'expérience directe, les autres termes de l'égalité étant mesurable.

3.2.5 Cinématique de la déformation du squelette

3.2.5.1 Description lagrangienne et eulerienne de la cinématique de la déformation

Le gradient de la déformation F est en fait l'outil principal qui nous permet de décrire la déformation. La description de la déformation est lagrangienne au sens où les grandeurs dépendent de X et t et sont considérées comme attachées à la

particule de squelette repérée par son vecteur position X dans la configuration de référence.

Dans cette description, la cinématique de la déformation se déduit directement par simple dérivation partielle par rapport au temps des différentes grandeurs.

La variable X étant constante, cette dérivation est en fait une dérivée totale.

La description eulérienne quant à elle s'effectue à partir de la donnée dans la configuration actuelle et à chaque instant t de la vitesse $V(x, t)$ de la particule du squelette, coïncidant à l'instant t avec le point géométrique repéré par sa position x .

3.2.5.2 Tenseur de déformation lagrangienne

Le tenseur de déformation lagrangienne est donné par $\frac{d\Delta}{dt}$; on a la relation

$$\frac{d}{dt}(dx \cdot dx') = 2dX \frac{d\Delta}{dt} dX'.$$

3.2.5.3 Tenseur de déformation eulérienne

Cette description est indépendante de toute configuration de référence. La cinématique est décrite à partir de la donnée de la vitesse $V(x, t)$ de la particule du squelette coïncidant avec le point géométrique repéré par sa position x :

$$\frac{dx}{dt} = V(x, t).$$

Proposition 3.2.5 *On considère la fonction scalaire ϕ et le vecteur u , alors on a les relations suivantes :*

(i) $\text{Grad } \phi = (\text{grad } \phi) F^{-1}$;

(ii) $\text{div } u = (\text{Grad } u)^t : F^{-1}$; $[A : B = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}]$

(iii) $\text{grad } V = \frac{dF}{dt} F^{-1}$;

(iv) $\frac{d}{dt}[dx] = \text{grad } V \cdot dx$;

(v) $\frac{d}{dt}(dx \cdot dx') = 2dx ddx'$ avec $d := \frac{1}{2}(\text{grad } V + (\text{grad } V)^t)$. La quantité d représente le tenseur de déformation eulérienne.

(vi) $d = (F^{-1})^t \frac{d\Delta}{dt} F^{-1}$ (formule de transport).

Preuve

(i) On a $\frac{\partial \phi}{\partial X_\alpha} = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}$,

d'où

$$\text{Grad } \phi = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial X_\alpha} e_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} \right) e_\alpha = (\text{grad } \phi) \cdot F.$$

$$(ii) \quad \text{div}(u) = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_i \sum_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial X_\alpha} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} = (\text{Grad } u)^t : F^{-1}.$$

$$(iii) \quad \text{grad } V \cdot F = \text{Grad } V = \text{Grad } \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\text{Grad}(x)) = \frac{dF}{dt}.$$

$$(iv) \quad \text{grad } V \cdot dx = \frac{dF}{dt} \cdot F^{-1} dx = \frac{dF}{dt} \cdot dX = \frac{d}{dt}(F \cdot dX) = \frac{d}{dt}[dx].$$

(v)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(dx \cdot dx') &= \left(\frac{d}{dt}(dx) \cdot dx' \right) + \left(dx \cdot \frac{d}{dt}(dx') \right) \\ &= \text{grad } V dx \cdot dx' + dx \cdot \text{grad } V dx' \\ &= dx(\text{grad } V)^t \cdot dx' + dx \cdot \text{grad } V dx' \\ &= dx(\text{grad } V + (\text{grad } V)^t) dx' \\ &= 2dx ddx'. \end{aligned}$$

$$(vi) \quad \text{On a vu que } \frac{d}{dt}(dx \cdot dx') = 2dX \cdot \frac{d\Delta}{dt} \cdot dX' \text{ et } \frac{d}{dt}(dx \cdot dx') = 2dx \cdot d \cdot dx'; \text{ donc}$$

$$dX \frac{d\Delta}{dt} dX' = dx ddx',$$

d'où

$$F^{-1} dx \frac{d\Delta}{dt} F^{-1} dx' = dx ddx'.$$

Et on obtient ainsi l'équation de transport

$${}^t F^{-1} \frac{d\Delta}{dt} F^{-1} = d. \quad \square$$

3.3 Modélisation

On considère le même modèle physique que dans le chapitre II sauf que dans ce cas on tient compte de la déformation du sol, il s'agit ici d'un vertisol.

Les équations du problème (P), définies dans le système d'Euler bien que applicables pour les milieux déformables ne sont pas cependant très appropriées.

Cela provient de la nécessité de prendre en compte les effets de la déformation sur la dépendance spatio-temporelle de $K(\theta)$ et de $h(\theta)$.

D'autre part, les conditions aux limites sont plus faciles à exprimer sur des surfaces fixes par rapport à la phase solide [56], [62].

Ainsi l'utilisation d'un référentiel de Lagrange (référentiel matériel) attaché à la phase solide est plus adéquat.

3.3.1 Équation d'écoulement

Soit Ω un milieu continu où on est en présence de n phases. Si ϕ est un tenseur, sa dérivée particulaire par rapport à la phase α sera

$$\frac{D\phi}{D^\alpha t} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + v^\alpha \cdot \nabla\phi$$

avec v^α étant la vitesse de la phase α .

Si on note ρ^α la masse volumique apparente de la phase α , l'équation de conservation de la masse donne :

$$\frac{\partial\rho^\alpha}{\partial t} + \text{div}(\rho^\alpha v^\alpha) = f_\alpha, \quad (3.1)$$

c'est-à-dire

$$\frac{D\rho^\alpha}{D^\alpha t} + \rho^\alpha \text{div}(v^\alpha) = f_\alpha.$$

Soit α une phase de Ω et s la phase solide, sa masse volumique apparente sera ρ^α et sa dérivée particulaire par rapport à la phase solide sera

$$\frac{D\rho^\alpha}{D^s t} = \frac{\partial\rho^\alpha}{\partial t} + v^s \cdot \nabla\rho^\alpha.$$

En remplaçant dans (3.1) l'expression de $\frac{\partial\rho^\alpha}{\partial t}$, on aura

$$\frac{D\rho^\alpha}{D^s t} - v^s \cdot \nabla\rho^\alpha + \text{div}(\rho^\alpha v^\alpha) = f_\alpha,$$

donc

$$\frac{D\rho^\alpha}{D^s t} + \rho^\alpha \nabla \cdot v^s + \text{div}(\rho^\alpha (v^\alpha - v^s)) = f_\alpha.$$

Or la divergence de v^s est donnée par l'équation de conservation de la masse (on suppose qu'il n'y a pas d'apport de matière solide extérieure; ce qui se traduit par $f_s = 0$) :

$$\text{div}(v^s) = -\frac{1}{\rho_d} \frac{D\rho_d}{D^s t}.$$

On obtient, en utilisant la proposition (3.2.5) (ii),

$$\frac{D\rho^\alpha}{D^s t} - \frac{\rho^\alpha}{\rho_d} \frac{D\rho_d}{D^s t} + \text{Grad} [\rho^\alpha (v^\alpha - v^s)] : F^{-1} = f_\alpha;$$

donc

$$\rho_d \frac{D(\frac{\rho^\alpha}{\rho_d})}{D^s t} + \text{Grad} [\rho^\alpha (v^\alpha - v^s)] : F^{-1} = f_\alpha$$

où ρ_d la densité apparente sèche du sol. En posant $v_{\alpha/s}$ la vitesse relative de la phase α par rapport à la phase solide, l'équation ci-dessus devient

$$\rho_d \frac{D(\frac{\rho^\alpha}{\rho_d})}{D^{st}} + \text{Grad} [\rho^\alpha v_{\alpha/s}] : F^{-1} = f_\alpha. \quad (3.2)$$

Dans notre modèle physique, on a $\rho^\alpha = \rho\theta$, α est la phase fluide et $\theta v_{\alpha/s} = q_s$ est la vitesse de filtration du fluide par rapport à la phase solide. On a par la loi de Darcy généralisée

$$q = -K(\theta)\text{grad } H(\theta).$$

$$q_s = F^{-1}q = -F^{-1}K(\theta)(\text{Grad } H(\theta)).F^{-1}.$$

Notons $e = \frac{\rho_s}{\rho_d} - 1$, $K_s = F^{-1}K$, $\Theta = \theta \frac{\rho_s}{\rho_d}$. Comme $\rho = 1$ pour l'eau, l'équation d'écoulement devient

$$\frac{1}{1+e} \frac{D\Theta}{D^{st}} - \text{Grad} [K_s(\Theta)(\text{Grad } (H(\Theta))).F^{-1}] : F^{-1} = f_1 \quad (3.3)$$

avec $H = h - z + h_p$. La quantité h est le potentiel matriciel donné par Van Genuchten, z le potentiel gravitationnel, h_p le potentiel de surcharge donné en coordonnée matérielle, $K_s(\Theta)$ la conductivité hydraulique relative à la phase solide donnée par Van Genuchten, $e = e(\Theta)$ obtenue avec le modèle de retrait de vertisol de E. Braudeau (voir figure 3.1).

3.3.2 Équation de transport de soluté

Supposons la diffusion négligeable, on a dans le cas rigide l'équation de conservation

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\theta C) - \text{div}[\rho CK(\theta)\nabla H(\theta)] = f_C.$$

Dans ce cas, ρ^α est la densité du nombre de mole qui est égale à $\rho\theta C$. On obtient d'après (3.3)

$$\frac{1}{1+e} \frac{D(\Theta C)}{D^{st}} - \text{Grad} [CK_s(\Theta)(\text{Grad } (H(\Theta))).F^{-1}] : F^{-1} = f_2$$

Notre problème peut être formulé de la manière suivante :
Trouver Θ et C vérifiant

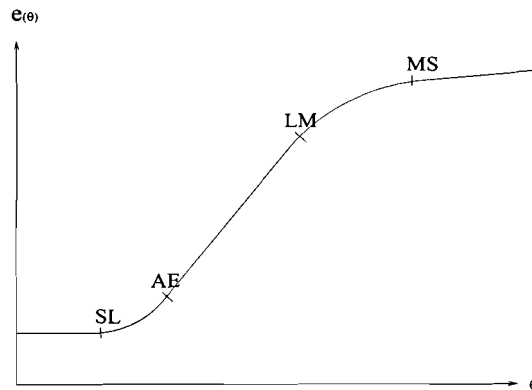


FIG. 3.1 – Courbe de retrait de vertisol et points caractéristiques du modèle de Braudeau (1988)

$$\frac{1}{1+e} \frac{D\Theta}{D^*t} - \text{Grad} [K_s(\Theta)(\text{Grad}(H(\Theta))).F^{-1}] : F^{-1} = f_1, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{1+e} \frac{D(\Theta C)}{D^*t} - \text{Grad} [CK_s(\Theta)(\text{Grad}(H(\Theta))).F^{-1}] : F^{-1} = f_2, \quad (3.5)$$

$$+C.B. \text{ et } C.I. \quad (3.6)$$

Pour une déformation et un écoulement unidirectionnels, Baveye établit en 1992 l'expression suivante :

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_r}{\rho_d} \end{pmatrix}$$

où ρ_r étant la masse volumique du sol à l'état de référence; en général $\rho_r = \rho_{d0}$ est la masse volumique initiale sèche du sol.

3.3.3 Modèle de retrait de vertisol

Cette caractéristique hydrodynamique du sol est matérialisée par l'indice de vide en fonction du taux d'humidité. Le modèle le plus complet est celui de Braudeau [34]. Ce modèle utilise dans son expression mathématique huit paramètres. Ceci est lié au fait que la courbe de retrait présente quatre points critiques qui sont *SL*, *AE*, *LM*, *MS* chacun possédant deux coordonnées. Le point *SL* représente la limite de retrait, *AE* est le point d'entrée de l'air dans les micro-aggrégats, *LM* est la limite de contribution de la macro-porosité au retrait du sol et en *MS* le sol atteint son maximum de gonflement. La courbe de retrait présente trois parties :

Régime de la déformation	Équation du modèle de Braudeau (1988)
Région SL	$e = e_{SL}$
Région $SL - AE$	$e = e_{SL} + K_r \left[\frac{\Theta_{AE} - \Theta_{SL}}{\exp(1) - 1} (\exp(V_n) - 1 - V_n) \right]$ <p style="text-align: center;">avec $V_n = \frac{\Theta - \Theta_{SL}}{\Theta_{AE} - \Theta_{SL}}$</p>
Région $AE - LM$	$e = e_{AE} + K_r(\Theta - \Theta_{AE})$
Région $LM - MS$	$e = e_{LM} + \frac{\Theta_{LM} - \Theta_{MS}}{\exp(1) - 1} \{ (K_r - K_0) [\exp(V_m) - \exp 1] - \frac{\Theta - \Theta_{LM}}{\Theta_{LM} - \Theta_{MS}} [K_r - K_0 \exp(1)] \}$ <p style="text-align: center;">avec $V_m = \frac{\Theta - \Theta_{MS}}{\Theta_{LM} - \Theta_{MS}}$</p>
Après MS	$e = e_{MS} + K_0(\Theta - \Theta_{MS})$

FIG. 3.2 – Expression mathématique du retrait d'un échantillon de sol selon Braudeau

il y a d'abord la phase de retrait résiduel où la courbe présente une pente nulle puis une partie curviligne (du début à AE), ensuite la phase de retrait principale de AE à LM (la courbe est affine dans cette partie) et enfin la phase de retrait structural qui va de LM à la saturation du sol (la courbe y est curviligne puis affine).

3.3.4 Déformation tridimensionnelle anisotrope

Nous proposons d'étudier une déformation tridimensionnelle du sol telle que la déformation soit isotrope dans la direction orthogonale à l'axe vertical z : c'est une déformation tridimensionnelle avec symétrie axiale.

Dans ce cas $dV = dXdYdZ$ et donne dans la configuration actuelle $dv = dx dy dz$. Soient e l'indice des vides associé à dv , e_r l'indice des vides associé à dV , l'indice

v est associé au vide et l'indice s au solide. Si l'on considère que la déformation se fait sans variation de masse sèche, on a :

$$e = \frac{dv_v}{dV_s}, \quad e_r = \frac{dV_v}{dV_s},$$

d'où

$$1 + e = \frac{dv_v + dV_s}{dV_s} = \frac{dv}{dV_s} \text{ et } 1 + e_r = \frac{dV_v + dV_s}{dV_s} = \frac{dV}{dV_s};$$

ce qui nous permet d'écrire la relation entre dV et dv :

$$dV = \frac{1 + e_r}{1 + e} dv.$$

Le changement de volume décrit dans cette équation peut être associé à un changement de volume dans trois directions principales x, y, z en utilisant le facteur de Bronswijk r_s [34] défini par exemple pour la direction z par :

$$1 - \frac{dV - dv}{dV} = \left(1 - \frac{dZ - dz}{dZ}\right)^{r_s}.$$

Si la déformation se fait uniquement suivant la verticale, $r_s = 1$, si la déformation est isotrope alors $r_s = 3$, si la déformation verticale est prédominante alors $1 < r_s < 3$, sinon $r_s > 3$.

Posons $\lambda = \frac{1 + e_r}{1 + e}$, alors

$$1 - \frac{dV - dv}{dV} = \left(1 - \frac{\lambda dv - dv}{\lambda dv}\right) = \frac{1}{\lambda},$$

d'où

$$\left(1 - \frac{dZ - dz}{dZ}\right)^{r_s} = \frac{1}{\lambda};$$

ce qui équivaut à

$$dz = \frac{dZ}{\lambda^{\frac{1}{r_s}}} = dZ \left(\frac{1 + e}{1 + e_r}\right)^{\frac{1}{r_s}}.$$

De l'égalité

$$1 - \frac{dV - dv}{dV} = \frac{1}{\lambda}$$

on tire $\frac{dv}{dV} = \frac{1}{\lambda}$; ce qui équivaut à

$$\frac{dx dy dz}{dX dY dz \lambda^{\frac{1}{r_s}}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ainsi on obtient l'égalité

$$dx dy = dX dY \frac{1}{\lambda^{(1-\frac{1}{r_s})}}.$$

Avec l'hypothèse faite sur l'anisotropie, on a ainsi les formules de changement de coordonnées spatiales :

$dx = dX \left(\frac{1+e}{1+e_r} \right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r_s})}$, $dy = dY \left(\frac{1+e}{1+e_r} \right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r_s})}$, $dz = dZ \left(\frac{1+e}{1+e_r} \right)^{\frac{1}{r_s}}$. On obtient ainsi le tenseur gradient de transformation

$$F = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+e}{1+e_r} \right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r_s})} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+e}{1+e_r} \right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r_s})} & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1+e}{1+e_r} \right)^{\frac{1}{r_s}} \end{pmatrix}.$$

L'état de référence peut être choisi en fonction des données expérimentales disponibles. Par exemple, il peut être choisi comme l'état initial du sol ou la limite de retrait.

Nous allons maintenant étudier le problème (3.4), (3.5), (3.6). l'équation (3.4) du problème ne dépend pas de C , donc on peut la résoudre théoriquement. Une fois Θ connue, on pourra ensuite étudier (3.5).

3.4 Modèle de Braudeau

Dans cette partie, nous ferons l'analyse du transfert hydrique pour ce modèle de retrait de vertisol. Considérons l'état de référence comme étant Ω , un domaine de \mathbb{R}^3 de frontière assez régulière. Rappelons que $H(\Theta) = h(\Theta) + z$. Posons $e_z = (0, 0, 1)$, $K_s(\Theta) = k(\Theta)I$,

$$g(\Theta) = \left(\frac{1+e(\Theta)}{1+e_r} \right)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{r_s})}, \quad g_z(\Theta) = \left(\frac{1+e(\Theta)}{1+e_r} \right)^{-\frac{1}{r_s}},$$

$$\nabla_g(\phi) = \left(g(\Theta) \frac{\partial \phi}{\partial x}, g(\Theta) \frac{\partial \phi}{\partial y}, g_z(\Theta) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^t, \quad \text{div}_g u = g(\Theta) \frac{\partial u_x}{\partial x} + g(\Theta) \frac{\partial u_y}{\partial y} + g_z(\Theta) \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Supposons qu'il n'y a pas de terme source ; ainsi le problème (3.4) devient : Trouver $u : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (1+e(u)) \text{div}_g(k(u) \nabla_g h(u) + g_z(u) k(u) e_z) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (3.7)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (3.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.9)$$

On étudiera dans cette partie le cas $r_s = 3$, ce qui implique que $g_z = g$. À cet effet, posons

$$l(u) = \int_0^u \frac{1}{(1+e(s))g(s)} ds, \quad \gamma(u) = \int_0^u k(s)g(s)h'(s)ds,$$

$$u = l^{-1}(w), \quad \Gamma(w) = \gamma(l^{-1}(w)), \quad \lambda(w) = k(l^{-1}(w))g(l^{-1}(w)).$$

Le problème (3.7), (3.8), (3.9) est alors équivalent à

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta \Gamma(w) + \frac{\partial}{\partial z} \lambda(w) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (3.10)$$

$$w(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (3.11)$$

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.12)$$

3.4.1 Hypothèses

Les fonctions λ et Γ ont les propriétés suivantes : $\lambda(0) = \Gamma(0) = 0$; Γ est strictement croissante. Pour $p > 2$, on suppose qu'il existe $q \in]0, p - 1]$ tel que

$$\Gamma(s) \leq s^q, \quad \lambda(s) \leq s^q. \quad (3.13)$$

3.4.2 Formulation faible

Soient $p > 2$, N la dimension spatiale, $r = \left(\frac{p-2}{2}\right) \frac{N}{p} + 2$. Pour $v \in H_0^r(\Omega)$, en multipliant par v et en intégrant sur Ω , on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} \nabla \Gamma(w) \nabla v dx - \int_{\Omega} \lambda(w) \frac{\partial v}{\partial z} dx = 0. \quad (3.14)$$

Nous obtenons la formulation faible : Trouver w dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T; L^p(\Omega))$ solution de (3.14) pour tout $v \in H_0^r(\Omega)$.

Nous montrerons par la suite que $\nabla \Gamma(w(t)) \in H^{-r+1}(\Omega)$.

Proposition 3.4.1 Soient $\beta(t) = \int_0^t \sqrt{\Gamma'(s)} ds$ et $M(v) = \left(\int_{\Omega} (\nabla \beta(v))^2 dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Alors il existe une constante C telle que

$$\int_0^T M(w)^p dt \leq C.$$

Preuve

En choisissant $v = w$ dans (3.14), on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \Gamma'(w)(\nabla w)^2 dx = 0. \quad (3.15)$$

Ce qui nous donne les estimations :

$$\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|w_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.16)$$

On a

$$M(v) = \left(\int_{\Omega} \Gamma'(v)(\nabla v)^2 dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Avec (3.15) et (3.16) on a $w \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et

$$\int_0^T M(w)^p dt \leq C. \quad \square$$

3.4.3 Théorème d'existence

Théorème 3.4.1 *Soit $u_0 \in L^2(\Omega)$, alors il existe une fonction u et un réel $p > 2$ tels que*

- (i) $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^p(0, T; L^p(\Omega))$;
- (ii) $\beta(u) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$;
- (iii) $u' \in L^{p'}(0, T; H^{-r}(\Omega))$

et u solution de (3.14).

3.4.3.1 Résultats utilisés pour la preuve du théorème (3.4.1)

Pour la preuve de ce théorème, on a besoin d'un résultat de compacité de Dubinskii [46],[30], [31] que nous avons un peu modifié ;

Théorème 3.4.2 *Soient B, B_1 des espaces de Banach avec $B \subset B_1$ avec injection continue et soit S un sous ensemble de B . Soit $M : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que*

- (i) $\tilde{S} = \{v \in S; M(v) \leq 1\}$ est relativement compact dans B ;
- (ii) il existe U voisinage de 0 et ∞ tel que $M(\lambda v) \leq |\lambda| M(v) \quad \forall \lambda \in U$.

Pour $1 < p_0, p_1 < \infty$, on définit l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{v; v \text{ localement sommable sur }]0, T[; \text{ à valeur dans } B_1; \int_0^T M(v) dt \leq C_1 \text{ et}$$

v' est dans un borné de $L^{p_1}(0, T; B_1)\}$.

Alors $\mathcal{F} \subset L^{p_0}(0, T; B)$ et est relativement compact dans $L^{p_0}(0, T; B)$.

Preuve

On démontre ce théorème via le lemme suivant :

Lemme 3.4.1 *Si \tilde{S} relativement compact, alors $\forall \eta > 0$, il existe C_η tel que*

$$\|u - v\|_B \leq \eta(M(u) + M(v)) + C_\eta \|u - v\|_{B_1} \quad \forall u, v \in S.$$

Admettons pour l'instant ce lemme et soit (u_k) une suite dans \mathcal{F} , on veut montrer que l'on peut en extraire une sous-suite convergente dans $L^{p_0}(0, T; B)$.

Or par le lemme (3.4.1), on a $\forall \eta > 0$

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T \|u_{n+m} - u_n\|_B^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} &\leq C_\eta^1 \left(\int_0^T M(u_{n+m})^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} + C_\eta^1 \left(\int_0^T M(u_n)^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &+ C_\eta \left(\int_0^T \|u_{n+m} - u_n\|_{B_1}^{p_0} dt \right)^{\frac{1}{p_0}}. \end{aligned}$$

Donc, il suffit de montrer que l'on peut extraire une sous-suite de Cauchy dans $L^{p_0}(0, T; B_1)$. En fait, on va extraire la suite dans $C^0(0, T; B_1)$.

On a le résultat suivant : il existe un ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle tel que pour tout t dans E^C

$$M(u_k(t)) \leq K_t < \infty. \quad (3.17)$$

Sinon, il existe $E \subset [0, T]$ tel que $m(E) \neq 0$ et pour tout t dans E

$$M(u_k(t)) \longrightarrow +\infty \quad \text{lorsque } k \longrightarrow +\infty,$$

ce qui entraîne que $\int_E M(u_k(t)) dt \leq \int_0^T M(u_k(t)) dt < +\infty$.

Et cela est absurde car le membre de gauche de cette inégalité tend vers l'infini lorsque k tend vers l'infini.

Pour chaque t , on peut choisir K_t assez grand de sorte que $\lambda_t = \frac{1}{K_t}$ soit dans U . Ainsi,

$$M(\lambda_t u_k(t)) \leq |\lambda_t| M(u_k(t)) \leq 1.$$

La dernière inégalité à lieu grâce à (3.17).

De ce fait $\lambda_t u_k(t) \in \tilde{S}$, ce qui implique qu'on peut extraire pour chaque $t \in E^C$ une sous-suite (que l'on note encore $u_k(t)$) telle que $u_k(t) \longrightarrow u(t)$ dans B_1 .

Soit (t_1, t_2, \dots) une suite dense dans $[0, T]$, $t_i \in E^C$, on peut alors extraire une sous-suite telle que

$$u_k(t_i) \longrightarrow u(t_i) \quad \text{dans } B_1 \quad \forall i.$$

Or $\forall t \in [0, T]$

$$\|u_k(t_i) - u_k(t)\|_{B_1} = \left\| \int_t^{t_i} u'_k(\sigma) d\sigma \right\|_{B_1} \leq \left(\int_t^{t_i} \|u'_k(\sigma)\|_{B_1}^{p_1} d\sigma \right)^{\frac{1}{p_1}} (t - t_i)^{\frac{1}{p_1}} \leq C |t - t_i|^{\frac{1}{p_1}}.$$

Ainsi

$$\|u_k(t) - u_l(t)\|_{B_1} \leq \|u_k(t) - u_k(t_i)\|_{B_1} + \|u_k(t_i) - u_l(t_i)\|_{B_1} + \|u_l(t_i) - u_l(t)\|_{B_1}$$

peut être rendu aussi petit que l'on veut pour tout $t \in [0, T]$.

Alors (u_k) suite de Cauchy dans $C^0(0, T; B_1)$, d'où $u_k \rightarrow u$ uniformément dans $C^0(0, T; B_1)$. \square

Pour terminer la preuve du théorème, il nous faut prouver le lemme (3.4.1).

Preuve du lemme (3.4.1) :

Si l'inégalité est fautive alors il existe η_0 tel que pour tout n , il existe u_n et v_n telles que

$$\|u_n - v_n\|_B \geq \eta_0(M(u_n) + M(v_n)) + n\|u_n - v_n\|_{B_1}.$$

Il existe aussi $\lambda_n \in U$ tel que

$$\|\lambda_n u_n - \lambda_n v_n\|_B \geq \eta_0(M(\lambda_n u_n) + M(\lambda_n v_n)) + n\|\lambda_n u_n - \lambda_n v_n\|_{B_1}$$

et de sorte que $\frac{1}{(M(\lambda_n u_n) + M(\lambda_n v_n))}$ soit dans U .

En posant $\tilde{u}_n = \frac{\lambda_n u_n}{(M(\lambda_n u_n) + M(\lambda_n v_n))}$ et $\tilde{v}_n = \frac{\lambda_n v_n}{(M(\lambda_n u_n) + M(\lambda_n v_n))}$, on a

$$\|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\|_B \geq \eta_0 + n\|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\|_{B_1} \quad (3.18)$$

et $M(\tilde{u}_n) \leq 1$, $M(\tilde{v}_n) \leq 1$.

On peut extraire une sous-suite telle que

$$\tilde{u}_n \rightarrow \tilde{u} \text{ et } \tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v} \text{ dans } B.$$

Ainsi \tilde{u}_n et \tilde{v}_n sont bornées dans B et on a (3.18) qui implique

$$\|\tilde{u}_n - \tilde{v}_n\|_{B_1} \leq \frac{C}{n}.$$

Alors $\tilde{u} = \tilde{v}$ et que $\tilde{u}_n - \tilde{v}_n \rightarrow 0$ dans B . Ceci contredit l'inégalité (3.18). \square

Démontrons maintenant que les hypothèses du théorème (3.4.2) sont vérifiées pour notre problème. Pour cela, on a la proposition suivante :

Proposition 3.4.2 *On pose $S = \{v; \beta(v) \in H_0^1(\Omega)\}$ et soit*

$$M(v)^p = \int_{\Omega} (\nabla \beta(v))^2 dx.$$

Alors, pour $B = L^p(\Omega)$ on a $\tilde{S} = \{v; M(v) \leq 1\}$ est relativement compact dans B .

Avant de faire la preuve de cette proposition, vérifions si $M(\lambda v) \leq |\lambda| M(v)$ pour tout λ dans un voisinage de zéro ou de ∞ .

Pour cela, il suffit que $\Gamma'(\lambda s) \leq \lambda^{p-2} \Gamma'(s)$ pour tout λ infiniment proche de zéro et s dans $[0, 1]$, et que cette inégalité reste vraie pour λ assez grand et s dans un voisinage de zéro. Rappelons les fonctions qui composent la fonction $\Gamma'(s)$:

$$\begin{aligned} k(s) &= k_s s^L (1 - (1 - s^{\frac{L}{m}})^m)^2, \quad h(s) = -\frac{1}{\alpha} (s^{-\frac{1}{m}} - 1)^{\frac{1}{n}}, \\ h'(s) &= \frac{1}{mn\alpha} s^{-\frac{1}{m}-1} (s^{-\frac{1}{m}} - 1)^{\frac{1}{n}-1}, \quad g(s) = \left(\frac{1 + e(s)}{1 + e_r} \right)^{-\frac{1}{3}}, \\ l(s) &= \int_0^s \frac{1}{(1 + e(\sigma))g(\sigma)} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.19)$$

En posant $s' = l^{-1}(s)$, on a $\Gamma'(s) = k(s')h'(s')g(s')^2(1 + e(s'))$. On veut que $\Gamma'(\lambda s) \leq \lambda^{p-2} \Gamma'(s)$ pour tout λ dans un voisinage de zéro ou l'infini et $s \in]0, 1[$. Cette inégalité est équivalente à une constante près à

$$\begin{aligned} \lambda^{L-\frac{1}{m}-1} (1 - (1 - (\lambda s)^{\frac{L}{m}})^m)^2 ((\lambda s)^{-\frac{1}{m}} - 1)^{\frac{1}{n}-1} \\ \leq \lambda^{p-2} (1 - (1 - s^{\frac{L}{m}})^m)^2 (s^{-\frac{1}{m}} - 1)^{\frac{1}{n}-1}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Si λ est dans un voisinage de zéro, il en est de même pour λs . Les paramètres m et n sont reliés par la condition de Mualem [34], $m = \frac{n-1}{n}$. Ainsi (3.20) devient

$$\lambda^{L+\frac{2L}{m}-1-\frac{1}{n-1}} s^{\frac{2L}{m}+1} \leq \lambda^{p-2} (1 - (1 - s^{\frac{L}{m}})^m)^2 (s^{-\frac{1}{m}} - 1)^{-m}. \quad (3.21)$$

Proposition 3.4.3 *Pour tout $s \in [0, 1]$, on a*

$$s^{\frac{2L}{m}+1} \leq (1 - (1 - s^{\frac{L}{m}})^m)^2 (s^{-\frac{1}{m}} - 1)^{-m}.$$

Preuve de la proposition (3.4.3)

Soit $\eta \geq 0$ et $\mu \geq 0$ tels que $\eta + \mu = 1$. On veut

$$s^{\eta(\frac{2L}{m}+1)} \leq (s^{-\frac{1}{m}} - 1)^{-m}$$

c'est à dire

$$1 > s^{-\frac{1}{m}}(1 - s^{-\frac{\eta}{m}(\frac{2L}{m}+1)+\frac{1}{m}}).$$

C'est le cas lorsque $\eta \leq \frac{m}{m+2L}$. Nous aimerions aussi avoir

$$s^{\mu(\frac{2L}{m}+1)} \leq (1 - (1 - s^{\frac{L}{m}})^m)^2$$

c'est-à-dire

$$s^{\frac{\mu}{2}(\frac{2L}{m}+1)} + (1 - s^{\frac{L}{m}})^m \leq 1.$$

En choisissant $\mu \geq \frac{2L}{m+2L}$, on a

$$s^{\frac{\mu}{2}(\frac{2L}{m}+1)} + (1 - s^{\frac{L}{m}})^m \leq s^{\frac{L}{m}} + (1 - s^{\frac{L}{m}})^m.$$

Le second membre de cette inégalité est une fonction du type $x + (1 - x)^m$ qui est plus petit que 1. Il suffit donc de choisir $\eta = \frac{m}{m+2L}$ et $\mu = \frac{2L}{m+2L}$. Ce qui termine la preuve de la proposition (3.4.3). \square

Remarque 3.4.1 *Ainsi, nous sommes à même de dire avec le résultat de la proposition (3.4.3) qu'une condition suffisante pour que la condition sur $\Gamma'(s)$ soit réalisée dans le cas où λ est dans un voisinage de zéro est*

$\lambda^{L+2\frac{L}{m}-\frac{1}{n-1}-1} \leq \lambda^{p-2}$, c'est à dire $L + 2\frac{L}{m} - \frac{1}{n-1} - 1 \geq p - 2$. Il faut choisir p de sorte que

$$p \leq L + 2\frac{L}{m} - \frac{1}{n-1} + 1.$$

Plus loin dans la preuve du théorème (3.4.1), on aura besoin de l'inégalité $p > 2$. Cela est possible si on a la condition $L + 2\frac{L}{m} - \frac{1}{n-1} + 1 > 2$, donc $L > \frac{n}{3n-1}$. En

général, dans la physique des sols (voir [34]), on choisit $L = \frac{1}{2}$ et on a toujours $n > 1$. Ainsi au voisinage de zéro, la condition sur M est réalisée.

Que se passe-t-il si λ est dans un voisinage de $+\infty$? Il existe un voisinage de zéro de sorte que λs reste petit pour tout s dans ce voisinage. Ainsi, en posant $\theta = \lambda s$, l'inégalité (3.20) devient

$$\lambda^{L-\frac{1}{m}-1}(1 - (1 - \theta^{\frac{L}{m}})^m)^2(\theta^{-\frac{1}{m}} - 1)^{-m}\theta^{-\frac{2L}{m}-1} \leq \lambda^{p-2-\frac{2L}{m}-L+\frac{1}{m}}s^{2\frac{L}{m}+1}. \quad (3.22)$$

Mais θ est dans un voisinage de zéro, ainsi le membre gauche de l'inégalité est de l'ordre de 1 et une condition pour que (3.22) soit vraie est

$$p \geq 2 + \frac{2L}{m} + L - \frac{1}{m}.$$

Les deux conditions sur p nous donne

$$p = 2 + \frac{2L}{m} + L - \frac{1}{m}.$$

Ainsi, on peut trouver p permettant de réaliser la condition sur M .

Donnons maintenant la preuve de la proposition (3.4.2). On a besoin pour cela de l'hypothèse

$$s^{\frac{p}{2}} \leq \beta(s). \quad (3.23)$$

Soit v_n suite dans \tilde{S} , alors $\beta(v_n)$ appartient à un borné de $H_0^1(\Omega)$ donc de $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}$ (q quelconque si $\mu = 2$).

Avec l'hypothèse (3.23), v_n est bornée dans $L^{\frac{pq}{2}}(\Omega)$, donc on peut extraire une sous-suite que l'on note encore v_n telle que

$$v_n \rightharpoonup v \text{ dans } L^{\frac{pq}{2}}(\Omega).$$

Comme $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compacte, alors on peut de nouveau extraire une sous-suite que l'on note encore $(\beta(v_n))$ telle que

$$\beta(v_n) \longrightarrow \mathcal{B} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p.}$$

La fonction β étant monotone, alors $v_n \longrightarrow \beta^{-1}(\mathcal{B})$ p.p et v_n étant bornée dans $L^{\frac{pq}{2}}(\Omega)$,

$$v_n \rightharpoonup \beta^{-1}(\mathcal{B}) \text{ dans } L^{\frac{pq}{2}}(\Omega)$$

grâce au résultat suivant :

Lemme 3.4.2 *Soit Ω ouvert borné de \mathbb{R}^N , $1 < p < +\infty$. Si f_n et $f \in L^p(\Omega)$ sont telles que $\|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C$ et $f_n \longrightarrow f$ p.p. sur Ω , alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$.*

L'unicité de la limite, on a $v = \beta^{-1}(\mathcal{B})$. Donc $v_n \rightharpoonup v$ dans $L^{\frac{pq}{2}}(\Omega)$ et p.p. Pour conclure, on a besoin du théorème d'Egorov [21] :

Théorème 3.4.3 *On suppose Ω de mesure finie. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ suite de fonctions mesurables de Ω dans \mathbb{R} telle que $f_n \longrightarrow f$ p.p dans Ω avec $|f(x)| < \infty$ p.p. Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $E \subset \Omega$ mesurable tel que $\text{mes}(E) \leq \varepsilon$ et $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur E^C .*

On déduit de ce théorème que $v_n \rightarrow v$ dans $L^s(\Omega)$ pour tout $s < \frac{pq}{2}$. En particulier pour $s = p$, car $p < p \frac{\mu}{\mu-2}$.

En effet

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v_n - v|^s dx &= \int_{EC} |v_n - v|^s dx + \int_E |v_n - v|^s dx \\ &\leq \text{mes}(\Omega) \varepsilon^s + \left(\int_E |v_n - v|^{sr} dx \right)^{\frac{1}{r}} \varepsilon^{1-\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Pour $\frac{1}{r} = \frac{2s}{pq}$, on a $v_n \rightarrow v$ dans $L^s(\Omega)$ pour $s < \frac{pq}{2}$. Ce qui termine la preuve de la proposition (3.4.2) sous réserve de la preuve du lemme (3.4.2).

Preuve du lemme (3.4.2)

Soit $E_n = \{x \in \Omega; |f_k(x) - f(x)| \leq 1 \ \forall k \geq n\}$. La suite d'ensemble des E_n est croissante, mesurable et $m(E_n) \rightarrow m(\Omega)$. Si $\Phi_n = \{\phi \in L^{p'}(\Omega); \text{supp}(\phi) \subset E_n\}$, alors $\Phi = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Phi_n$ est dense dans $L^{p'}(\Omega)$. Pour $\phi \in \Phi$, il existe n_0 tel que $\phi \in \Phi_{n_0}$ et pour $n \geq n_0$, on a

$$|\phi(x)(f_n(x) - f(x))| \leq |\phi(x)|.$$

Comme $\phi(f_n - f) \rightarrow 0$ p.p., le théorème de la convergence dominée de Lebesgue nous permet d'affirmer que

$$\int_{\Omega} \phi(f_n - f) dx \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

On considère ϕ dans $L^{p'}(\Omega)$, par densité de Φ , il existe $\phi_i \in \Phi$ telle que $\|\phi - \phi_i\|_{L^{p'}(\Omega)}$ soit aussi petit que l'on veut. Ainsi de l'inégalité

$$\left| \int_{\Omega} \phi(f_n - f) dx \right| \leq \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \|\phi - \phi_i\|_{L^{p'}(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} \phi_i(f_n - f) dx \right|$$

et de l'hypothèse sur la bornitude de la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ dans $L^p(\Omega)$, on a $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(\Omega)$.

3.4.3.2 Preuve du théorème 3.4.1

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème (3.4.1). La méthode utilisée est celle de Faedo-Galerkin. On considérera une base spéciale de $H_0^r(\Omega)$. Le réel r sera choisi de sorte que

$$\phi \in H_0^r(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega).$$

En prenant $r = \left(\frac{p-2}{2}\right) \frac{n}{p} + 2$, on a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \in H_0^{\left(\frac{p-2}{2}\right) \frac{n}{p}}(\Omega),$$

donc $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega)$, à cause de l'injection de l'espace de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ et $1 < p < \frac{n}{m}$.

Soient $(w_j)_{j \geq 1}$ une base hilbertienne de $H_0^r(\Omega)$. Notons $V_m = L(w_1, w_2, \dots, w_m)$ l'espace vectoriel engendré par w_1, \dots, w_m . Soit $u_m(t) = \sum_{j=1}^m c_j^m(t) w_j$ un élément de V_m défini par

$$(u_m'(t), w_i) + \int_{\Omega} \Gamma'(u_m) \nabla u_m \nabla w_i dx + \int_{\Omega} \lambda(u_m) \partial_3 w_i dx = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.24)$$

$$u_m(0) = u_{0m} \longrightarrow u_0 \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (3.25)$$

En remplaçant u_m par sa valeur dans (3.24), on a

$$\sum_{j=1}^m c_j^{m'}(t) \int_{\Omega} w_j w_i dx + \sum_{j=1}^m c_j^m(t) \int_{\Omega} \Gamma'(u_m) \nabla w_j \nabla w_i dx + \int_{\Omega} \lambda(u_m) \frac{\partial w_i}{\partial z} dx = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3.26)$$

En posant

$$A = \left(\int_{\Omega} w_j w_i dx \right)_{1 \leq i, j \leq m}, \quad R = \left(\int_{\Omega} \Gamma'(u_m) \nabla w_j \nabla w_i dx \right)_{1 \leq i, j \leq m}, \\ B = \left(- \int_{\Omega} \lambda(u_m) \frac{\partial w_i}{\partial z} dx \right)_{1 \leq i \leq m}, \quad (3.27)$$

$c^m = (c_j^m)_{1 \leq j \leq m}$, le problème (3.26) est équivalent au système d'E.D.O.

$$\frac{dc^m}{dt} = \phi(t, c^m) \quad (3.28)$$

avec $\phi(t, c^m) = A^{-1} R c^m + A^{-1} B$ et comme valeurs initiales $c_i^m(0)$, $i = 1, \dots, m$ les coordonnées de u_{0m} dans V_m . Pour résoudre (3.28), on utilise le cadre général

suisant.

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Considérons les problèmes

$$x'(t) = f(t, x) \quad t \in J = [t_0 - r_0, t_0 + r_0], \quad r_0 > 0, \quad (3.29)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad t_0 \in \mathcal{U} \text{ un voisinage de } t_0 \quad (3.30)$$

et

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad t \in \mathcal{U}. \quad (3.31)$$

Soit $\mathcal{K} = B(x_0, r)$. Le problème (3.29), (3.30) admet une solution grâce au théorème de Carathéodory

Théorème 3.4.4 *Si*

- (i) $f : J \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory i.e.
 - $t \mapsto f(t, x)$ mesurable pour chaque $x \in \mathcal{K}$
 - $x \mapsto f(t, x)$ est continue sur \mathcal{K} pour presque tout $t \in J$.
- (ii) Il existe $g \in L^1(J)$; $|f(t, x)| \leq g(t) \quad \forall (t, x) \in J \times \mathcal{K}$.

Alors

- a) Il existe un voisinage \mathcal{U} de t_0 et une fonction $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$ solution de (3.31).
- b) Pour presque tout $t \in \mathcal{U}$, $x'(t)$ existe et l'équation (3.29) est vérifiée en ces points.
- c) La fonction x est solution de (3.29) au sens des distributions sur \mathcal{U} .
- d) Les résultats a) - c) restent vrais dans le cas où $J = [t_0 - r_0, t_0]$ ou $[t_0, t_0 + r_0]$.

Vérifions les hypothèses du théorème de Carathéodory pour le système (3.28). La fonction $\phi(t, c^m)$ ne dépend pas de t explicitement et $\Gamma'(s)$ est continue. Ce qui prouve le i). L'assertion ii) est aussi vérifiée car nous avons $\Gamma'(s)$ dans $L^1(0, 1)$, w_i et w_j dans V_m et $\lambda(s)$ continue dans $[0, 1]$.

Le système (3.28) vérifiant ainsi les hypothèses du théorème (3.4.4), il existe une solution de (3.26) notée u_m sur $[0, t_m]$, $t_m > 0$.

Étudions le comportement de t_m lorsque $m \rightarrow +\infty$.

Soit $I = \{t \in [0, T]\}$; il existe une solution de $\frac{d}{dt}c^m(t) = \phi(t, c^m)$ dans le sens du théorème (3.4.4) dans $[0, t[$

- I est non vide.
- I est ouvert :

Soit $t \in I$. Comme $|c^m(\alpha) - c^m(\beta)| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\phi(s, c^m(s))| ds \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(s) ds$ pour tout $\alpha, \beta \in [0, t[$, on a c^m qui est uniformément continue. On peut alors résoudre (3.28) sur $[t, t + \varepsilon[$ avec comme valeur initiale $\lim_{s \rightarrow t^-} c^m(s)$ et on obtient ainsi une solution sur $[t, t + \varepsilon[$.

- I est fermé :

Soit $t_i \rightarrow t^-$ avec $t_i \in I$. $\forall \varepsilon > 0$, il existe i_0, i_1 tel que $t - t_{i_0} < t - t_{i_1} < \varepsilon$.
Soit \bar{c}^m la solution de (3.28) sur $[0, t_{i_1}]$.

Pour ε assez petit, il existe une solution de (3.28), \bar{c}^m avec comme condition initiale $\bar{c}^m(t_{i_0})$ sur $[t_{i_0}, t]$.

Ainsi, on a construit une solution de (3.28) sur $[0, t]$, ce qui implique que $t \in I$.

Ces trois points montrent que $I = [0, T]$. Ainsi (3.26) admet une solution sur $[0, T]$ (on ferme l'intervalle en T à cause de la continuité uniforme de la solution).

Donnons une estimation de u_m . L'estimation a priori de la proposition (3.4.1) donne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (\nabla \beta(u_m))^2 dx = 0.$$

Donc $u_m \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et $\beta(u_m) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

On considère la forme $a(u_m, v_m) = \int_{\Omega} \Gamma'(u_m) \nabla u_m \nabla v_m dx$ avec u_m et v_m dans V_m . On a

$$a(u_m, v_m) = - \int_{\Omega} \Gamma(u_m) \Delta v_m dx.$$

Donc

$$\begin{aligned} |a(u_m, v_m)| &\leq \|\Gamma(u_m)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\Delta v_m\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C \|\Gamma(u_m)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v_m\|_{H_0^r(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ce qui implique

$$\|\Delta \Gamma(u_m)\|_{H^{-r}(\Omega)} \leq C \|\Gamma(u_m)\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

De l'hypothèse (3.13), on tire l'inégalité

$$\|\Gamma(u_m)\|_{L^{p'}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (\Gamma(u_m))^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\int_{\Omega} |u_m|^{qp'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|u_m\|_{L^p(\Omega)}^q. \quad (3.33)$$

Donc

$$\left(\int_0^T \|\Gamma(u_m)\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C_1 \left(\int_0^T \|u_m\|_{L^p(\Omega)}^{p'q} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \quad (3.34)$$

$$\leq C'_1 \|u_m\|_{L^p(0, T; L^p(\Omega))}^q. \quad (3.35)$$

On a $\beta(u_m)$ bornée dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$; de l'hypothèse (3.23), on tire donc que u_m bornée dans $L^p(0, T; L^p(\Omega))$. Ainsi $\Delta \Gamma(u_m)$ est bornée dans $L^{p'}(0, T; H^{-r}(\Omega))$.

Estimons maintenant le terme $b(u_m, v_m) = \int_{\Omega} \lambda(u_m) \frac{\partial v_m}{\partial z} dx$.

$$|b(u_m, v_m)| \leq C \|\lambda(u_m)\|_{L^{p'}(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial z} \right\|_{L^p(\Omega)} \quad (3.36)$$

$$\leq C \|\lambda(u_m)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\Delta v_m\|_{L^p(\Omega)} \quad (3.37)$$

$$\leq C \|\lambda(u_m)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|v_m\|_{H_0^r(\Omega)}. \quad (3.38)$$

Tout comme pour $\Delta\Gamma(u_m)$ on a $\frac{\partial}{\partial z}\lambda(u_m)$ est borné dans $L^{p'}(0, T; H^{-r}(\Omega))$. Ainsi le système (3.24) est de la forme

$$(u'_m(t) - \Delta\Gamma(u_m) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(u_m), w_i) = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (3.39)$$

avec $-\Delta\Gamma(u_m) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(u_m)$ bornée dans $L^{p'}(0, T; H^{-r}(\Omega))$.

On considère maintenant le projecteur orthogonal P_m (pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$) sur V_m ; P_m est borné dans $\mathcal{L}(H_0^r(\Omega), H_0^r(\Omega))$ et dans $\mathcal{L}(H^{-r}(\Omega), H^{-r}(\Omega))$. Ainsi, (3.39) entraîne

$$u'_m(t) = P_m(\Delta\Gamma(u_m) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(u_m)).$$

Donc u'_m est bornée dans $L^{p'}(0, T; H^{-r}(\Omega))$. En posant $B_1 = H^{-r}(\Omega)$ et $B = L^p(\Omega)$ dans le théorème (3.4.2), on peut extraire de $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une sous-suite que l'on note de nouveau $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_m \rightharpoonup u \text{ faible* dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$u_m \longrightarrow u \text{ dans } L^p(0, T; L^p(\Omega)) \text{ et p.p.,}$$

$$\beta(u_m) \rightharpoonup \mathcal{B} \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

La convergence presque partout de u_m vers u et la continuité de la fonction β entraîne que $\beta(u_m)$ converge presque partout vers $\beta(u)$. De plus

$$\|\beta(u_m)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \|\nabla\beta(u_m)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C'.$$

D'après le lemme (3.4.2), on a

$$\beta(u_m) \rightharpoonup \beta(u) \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

D'où $\mathcal{B} = \beta(u)$.

Remarque 3.4.2 On a $u(t) \in L^p(\Omega)$, sachant que $\Gamma(s) \leq s^q$, alors $\Gamma(u(t)) \in L^p(\Omega)$. Or $H_0^r(\Omega)$ est inclus avec injection continue dans $L^{p'}(\Omega)$, on a $L^p(\Omega)$ qui s'injecte continument dans $H^{-r}(\Omega)$. Ainsi $\nabla\Gamma(u(t)) \in H^{-r+1}(\Omega)$. Ce qui donne un sens au deuxième terme de la somme dans (3.14).

Montrons maintenant que u est solution du problème faible (3.14). Soient j fixé et $m \geq j$; on a

$$(u'_m, w_j) + a(u_m, w_j) + b(u_m, w_j) = 0.$$

Pour le premier terme, $u_m \rightharpoonup u$ faible* dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, donc $u'_m \rightharpoonup u'$ dans $D'(0, T; L^2(\Omega))$. Comme u'_m est bornée dans $L^{p'}(0, T; H^{-r}(\Omega))$, quitte à extraire une sous-suite de $(u'_m)_{m \in \mathbb{N}}$, sa limite dans $L^{p'}(0, T; H^{-r}(\Omega))$ vaut u' .

Ainsi $(u'_m, w_j) \rightharpoonup (u', w_j)$ dans $L^{p'}(0, T)$. Pour les autres termes, des inéquations (3.32) et (3.33), on a la continuité de la forme $a(u, v)$ définie sur $L^p(\Omega) \times H_0^r(\Omega)$. On en déduit

$$a(u_m(t), w_j) \longrightarrow a(u(t), w_j) \text{ dans } L^{p'}(0, T).$$

De même,

$$b(u_m(t), w_j) \longrightarrow b(u(t), w_j) \text{ dans } L^{p'}(0, T).$$

Ainsi $(u'(t), w_j) + a(u(t), w_j) + b(u(t), w_j) = 0$.

Par densité de $L(w_j, j \geq 1)$, on obtient

$$(u'(t), v) + a(u(t), v) + b(u(t), v) = 0, \quad \forall v \in H_0^r(\Omega).$$

Ce qui termine la preuve du théorème (3.4.1). \square

Chapitre 4

Étude numérique du modèle de milieu poreux déformable

4.1 Schéma numérique du modèle de Braudeau

On fera ici l'étude du modèle de retrait de Braudeau avec $r_s = 1$.

Soient $x := (x_i)_{1 \leq i \leq 3}$, $\nabla_p := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^t$, $\text{div}_p := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ On considère ainsi l'équation

$$\begin{aligned} \partial_t u - (1 + e(u)) \text{div}_p (k(u) \nabla_p h(u)) - (1 + e(u)) g_z(u) \frac{\partial}{\partial z} \left(k(u) g_z(u) \frac{\partial}{\partial z} h(u) \right) \\ - (1 + e(u)) g_z(u) \frac{\partial}{\partial z} (g_z(u) k(u)) = (1 + e(u)) f. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Soit V_δ l'espace d'approximation des éléments finis de type Q_1 et $(\phi_i)_{i=1, \dots, n}$ une base de V_δ .

La solution approchée $u_\delta(x, t)$ s'écrit sous la forme

$$u_\delta(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \phi_i.$$

La formulation faible de l'équation ci-dessus donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t u \phi \, dx + \int_{\Omega} k(u) h'(u) \nabla_p u \nabla_p [(1 + e(u)) \phi] \, dx \\ + \int_{\Omega} k(u) g_z(u) h'(u) \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} ((1 + e(u)) g_z(u) \phi) \, dx + \int_{\Omega} k(u) g_z(u) \frac{\partial}{\partial z} ((1 + e(u)) g_z(u) \phi) \, dx \\ = \int_{\Omega} (1 + e(u)) f \phi \, dx. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \partial_t u \phi \, dx + \int_{\Omega} k(u) h'(u) \nabla_p u [e'(u) \phi \nabla_p u + (1 + e(u)) \nabla \phi] \, dx \\
& + \int_{\Omega} k(u) g_z(u) h'(u) \frac{\partial u}{\partial z} \left[e'(u) g_z(u) \phi \frac{\partial u}{\partial z} + (1 + e(u)) g'_z(u) \phi \frac{\partial u}{\partial z} + (1 + e(u)) g_z(u) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \, dx \\
& + \int_{\Omega} k(u) g_z(u) \left[e'(u) g_z(u) \phi \frac{\partial u}{\partial z} + (1 + e(u)) g'_z(u) \phi \frac{\partial u}{\partial z} + (1 + e(u)) g_z(u) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \, dx \\
& = \int_{\Omega} (1 + e(u)) f \phi \, dx.
\end{aligned}$$

Soit u^k une approximation temporelle de $u_\delta(x, t_k)$ avec $t_k = k\tau$, τ étant le pas de temps. Le schéma d'Euler implicite suivant donne ainsi une discrétisation totale du problème.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} \phi_i \, dx + \int_{\Omega} k(u^k) h'(u^k) e'(u^k) \nabla_p u^k \nabla_p u^{k+1} \phi_i \, dx \\
& + \int_{\Omega} k(u^k) h'(u^k) (1 + e(u^k)) \nabla_p u^{k+1} \nabla \phi_i \, dx \\
& + \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k)^2 h'(u^k) e'(u^k) \frac{\partial u^k}{\partial z} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial z} \phi_i \, dx \\
& + \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k) g'_z(u^k) h'(u^k) (1 + e(u^k)) \frac{\partial u^k}{\partial z} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial z} \phi_i \, dx \\
& + \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k)^2 h'(u^k) (1 + e(u^k)) \frac{\partial u^{k+1}}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \, dx \\
& + \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k)^2 e'(u^k) \frac{\partial u^{k+1}}{\partial z} \phi_i \, dx \\
& + \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k) g'_z(u^k) (1 + e(u^k)) \frac{\partial u^{k+1}}{\partial z} \phi_i \, dx \\
& + \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k)^2 (1 + e(u^k)) \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \, dx \\
& = \int_{\Omega} (1 + e(u^k)) f \phi_i \, dx \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.
\end{aligned}$$

Le problème approché devient ainsi un système de la forme

$$Au^{k+1} = b \tag{4.2}$$

où $A = A(u^k) = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $b = b(u^k) = (b_i)_{i=1,\dots,n}$. Les éléments de la matrice A et du vecteur b sont donnés par les formules :

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx + \tau \int_{\Omega} k(u^k) h'(u^k) e'(u^k) \phi_i \nabla_p \phi_j \sum_{l=1}^n u_l^k \nabla_p \phi_l dx \\
&+ \tau \int_{\Omega} k(u^k) h'(u^k) (1 + e(u^k)) \nabla_p \phi_j \nabla_p \phi_i dx \\
&+ \tau \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k)^2 h'(u^k) e'(u^k) \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \sum_{l=1}^n u_l^k \frac{\partial \phi_l}{\partial z} dx \\
&+ \tau \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k) g'_z(u^k) h'(u^k) (1 + e(u^k)) \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \sum_{l=1}^n u_l^k \frac{\partial \phi_l}{\partial z} dx \\
&+ \tau \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k)^2 h'(u^k) (1 + e(u^k)) \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dx \\
&+ \tau \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k)^2 e'(u^k) \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dx \\
&+ \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k) g'_z(u^k) (1 + e(u^k)) \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dx, \\
b_i &= \sum_{j=1}^n u_i^k \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx + \tau \int_{\Omega} (1 + e(u^k)) f \phi_i dx \\
&- \tau \int_{\Omega} k(u^k) g_z(u^k)^2 (1 + e(u^k)) \frac{\partial \phi_i}{\partial z} dx.
\end{aligned}$$

Ce schéma numérique donne ainsi une approximation de la solution de l'équation du problème (4.1) dans le cas du modèle de Baveye [34].

4.2 Schéma numérique de l'équation de transport

Pour la deuxième équation décrivant l'évolution de la concentration de polluant, on utilisera la méthode numérique STILS (Space-Time Integrated Least Squares) [51], [6].

Rapellons sa forme :

$$\frac{\partial(uC)}{\partial t} - (1 + e(u)) \nabla [CK(u)(\nabla(H(u))).F^{-1}] : F^{-1} = (1 + e(u))f_2$$

Elle sera équivalente dans ce cas à l'équation

$$\partial_t(uC) + (1 + e(u)) \operatorname{div}_p(Cq_p) + (1 + e(u))g_z(u) \frac{\partial}{\partial z} (Cg_z(u)q_z) = (1 + e(u))f_2.$$

avec q_p = composante de q suivant x et y et q_z celle suivant l'axe z .

En rebaptisant uC par C , et en posant $v_p = \frac{q_p}{u}$, $v_z = \frac{g_z(u)q_z}{u}$,
 $g_1(u) = (1 + e(u))$, $g_2(u) = (1 + e(u))g_z(u)$, $f = (1 + e(u))f_2$,
on obtient

$$\partial_t C + g_1(u)\operatorname{div}_p(Cv_p) + g_2(u)\operatorname{div}_z(Cv_z) = f.$$

On définit $\widetilde{\operatorname{div}} = \partial_t + g_1(u)\operatorname{div}_p + g_2(u)\operatorname{div}_z$ et $\widetilde{v}^T = (1, v_p, v_z)$.
Avec ces notations, l'équation s'écrit :

$$\widetilde{\operatorname{div}}(C\widetilde{v}) = f. \quad (4.3)$$

Dans une description spatio-temporelle, le temps est considéré comme la quatrième composante de la dimension spatiale. Le domaine espace-temps sera $\widetilde{\Omega} = \Omega \times]0, T[$, et la frontière influx

$$\widetilde{\Gamma}_- = \{x \in \partial\widetilde{\Omega}; (\widetilde{n}(x)|\widetilde{v}(x)) < 0\},$$

où $n(x)$ est la normale extérieure du bord $\partial\Omega$ au point x . Ce qui implique que

$$\widetilde{\Gamma}_- = \Gamma_- \times [0, T] \cup \Omega \times \{0\}.$$

On définit les espaces :

$$H(u, v, \widetilde{\Omega}) = \left\{ \psi \in L^2(\widetilde{\Omega}); \widetilde{\operatorname{div}}(\psi\widetilde{v}) \in L^2(\widetilde{\Omega}) \right\}$$

muni de la norme du graphe $\psi \mapsto \widetilde{\operatorname{div}}(\psi\widetilde{v})$ donnée par

$$\|\psi\|^2 = \|\psi\|_0^2 + \|\widetilde{\operatorname{div}}C\widetilde{v}\|_0^2$$

qui dérive du produit scalaire

$$((\psi, \phi)) = (\psi, \phi)_0 + (\widetilde{\operatorname{div}}\psi\widetilde{v}, \widetilde{\operatorname{div}}\phi\widetilde{v})_0.$$

$$H_0(u, v, \widetilde{\Omega}, \widetilde{\Gamma}_-) = \left\{ \psi \in H(u, v, \widetilde{\Omega}); \psi = 0 \text{ sur } \in \widetilde{\Gamma}_- \right\}.$$

Considérons la fonctionnelle linéaire

$$\mathcal{A} : \psi \mapsto \widetilde{\operatorname{div}}\psi\widetilde{v}.$$

Ainsi, l'équation (4.3) s'écrit $\mathcal{A}\psi = f$. Dans $L^2(\widetilde{\Omega})$, une solution de cette équation correspond à un zéro de la fonctionnelle convexe, positive :

$$J(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\widetilde{\Omega}} (\mathcal{A}\psi - f)^2 dx dt.$$

La dérivée directionnelle de J en ψ est donnée par

$$[DJ(\psi)]\phi = \int_{\tilde{\Omega}} (\mathcal{A}\psi - f)\mathcal{A}\phi dxdt.$$

La méthode *STILS* consiste à trouver un minimum de J . Une condition nécessaire pour que J admet un minimum est que $DJ(\psi) = 0$.

En considérant la forme bilinéaire

$$\mathcal{B}(\psi, \phi) = \int_{\tilde{\Omega}} \mathcal{A}\psi \mathcal{A}\phi dxdt$$

et la forme linéaire

$$\mathcal{L}(\phi) = \int_{\tilde{\Omega}} f \mathcal{A}\phi dxdt.$$

Le problème faible de *STILS* sera de trouver $\psi \in H_0(u, v, \tilde{\Omega}, \tilde{\Gamma}_-)$ telle que

$$\mathcal{B}(\psi, \phi) = \mathcal{L}(\phi) \text{ pour tout } \phi \in H_0(u, v, \tilde{\Omega}, \tilde{\Gamma}_-). \quad (4.4)$$

Pour résoudre numériquement (4.4), on utilise une marche en temps qui consiste à résoudre à chaque pas de temps un problème local où la condition initiale est l'état au pas de temps courant et l'inconnue est l'état au pas de temps suivant. Considérons pour la variable spatiale une base de Galerkin $\{\psi_i\}_{i=1, \dots, n}$ de fonctions de $H(u, v, \Omega)$ et soit V_δ l'espace engendré par cette base.

Soient τ le pas de temps et $t_k = \tau k$. On définit sur $[t_k, t_{k+1}]$ une base affine

$$a_k(t) = \frac{1}{\tau}(t_{k+1} - t), \quad a_{k+1}(t) = \frac{1}{\tau}(t - t_k).$$

Le problème local sera étudié dans le domaine $\tilde{\Omega}_k = \Omega \times]t_k, t_{k+1}[$ [avec une condition initiale sur $\Omega \times \{t_k\} \subset \tilde{\Gamma}_{k,-} = \Gamma \times]t_k, t_{k+1}[\cup \Omega \times \{t_k\}$.

On définit E comme étant le sous espace de dimension deux de $C[t_k, t_{k+1}]$ engendré par les fonctions a_k et a_{k+1} . Ainsi, le problème local de (4.4) approché sera :

Trouver $C_\delta \in H_{0,\delta} := V_\delta \times E \cap H_0(u, v, \tilde{\Omega}_k, \tilde{\Gamma}_{k,-})$ telle que

$$\mathcal{B}(C_\delta, w_\delta) = \mathcal{L}(w_\delta) \quad \forall w_\delta \in H_{0,\delta}. \quad (4.5)$$

Ceci est équivalent à

$$\int_{\Omega} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tilde{\text{div}}(C_\delta \tilde{v}) \tilde{\text{div}}(w_\delta \tilde{v}) dt dx = \int_{\Omega} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f \tilde{\text{div}}(w_\delta \tilde{v}) dt dx, \quad \forall w_\delta \in H_{0,\delta}.$$

On va choisir comme fonction test

$$w_\delta = \psi_i(x) a_{k+1}(t), \quad i \in \{1 \dots n\}.$$

Posons

$$C_\delta(x, t) = \sum_{j=1}^n \psi_j(x) (a_k(t)c_j^k + a_{k+1}(t)c_j^{k+1}).$$

Ainsi le système linéaire correspondant au problème (4.5) s'écrit :

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{B}(\psi_j a_{k+1}, \psi_j a_{k+1}) c_j^{k+1} = \mathcal{L}(\psi_i a_{k+1}) - \sum_{j=1}^n \mathcal{B}(\psi_j a_k, \psi_j a_{k+1}) c_j^k \quad (4.6)$$

ou sous forme matricielle

$$M c^{k+1} = R$$

avec

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dx + \frac{\tau}{6} \int_{\Omega} (g_1^k + 2g_1^{k+1}) (\operatorname{div}_p(v_p \phi_i) \phi_j + \operatorname{div}_p(v_p \phi_j) \phi_i) \\ &+ (g_2^k + 2g_2^{k+1}) (\operatorname{div}_z(v_z \phi_i) \phi_j + \operatorname{div}_z(v_z \phi_j) \phi_i) dx \\ &+ \frac{\tau^2}{60} \int_{\Omega} (12g_1^{k+1} + 2g_1^k + 6g_1^{k+1} g_1^k) \operatorname{div}_p(v_p \phi_j) \operatorname{div}_p(v_p \phi_i) dx \\ &+ \frac{\tau^2}{60} \int_{\Omega} (12g_1^{k+1} g_2^{k+1} + 3g_1^{k+1} g_2^k + 3g_1^k g_2^{k+1} + 2g_1^k g_2^k) \\ &(\operatorname{div}_p(v_p \phi_j) \operatorname{div}_z(v_z \phi_i) + \operatorname{div}_p(v_p \phi_i) \operatorname{div}_z(v_z \phi_j)) dx \\ &+ \frac{\tau^2}{60} \int_{\Omega} (12g_2^{k+1} + 2g_2^k + 6g_2^{k+1} g_2^k) \operatorname{div}_z(v_z \phi_j) \operatorname{div}_z(v_z \phi_i) dx; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_i &= \mathcal{L}(\phi_i a_{k+1}) + \int_{\Omega} c^k \phi_i dx \\ &+ \frac{1}{6} \int_{\Omega} c^k [(g_1^k + 2g_1^{k+1}) \operatorname{div}_p(v_p \phi_i) + (g_2^k + 2g_2^{k+1}) \operatorname{div}_z(v_z \phi_i)] dx \\ &- \frac{\tau^2}{60} \int_{\Omega} (3g_1^k + 4g_1^k g_1^{k+1} + 3g_1^{k+1}) \operatorname{div}_p(v_p c^k) \operatorname{div}_p(v_p \phi_i) dx \\ &- \frac{\tau^2}{60} \int_{\Omega} (3g_1^k g_2^k + 2g_1^k g_2^{k+1} + 2g_1^{k+1} g_2^k + 3g_1^{k+1} g_2^{k+1}) \\ &(\operatorname{div}_p(v_p c^k) \operatorname{div}_p(v_p \phi_i) + \operatorname{div}_z(v_z c^k) \operatorname{div}_z(v_z \phi_i)) dx \\ &- \frac{\tau^2}{60} \int_{\Omega} (3g_2^k + 4g_2^k g_2^{k+1} + 3g_2^{k+1}) \operatorname{div}_z(v_z c^k) \operatorname{div}_z(v_z \phi_i) dx. \end{aligned}$$

4.3 Implémentation et résultats

La méthodologie utilisée pour le calcul de la solution approchée du problème (4.1) est la même que celle pour l'équation de transport (4.3). Ainsi, nous ne

développerons dans cette partie que la mise en oeuvre pour résoudre (4.2).

Les tests se font sur le cube universitaire $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Le code de calcul est divisé en 5 fichiers : un fichier pour décrire le domaine, le maillage, le fichier des conditions limites, un fichier qui contient tous les modules utilisés et un programme principal.

Le fichier de domaine contient les coordonnées des 8 sommets du cube, le nombre de pas de discrétisation en espace pour les trois directions abscisses, ordonnées et cote, et un code pour identifier si un noeud est sur le bord ou non.

Toutes les constantes du programme sont regroupées dans le module *parametre*; il en est de même pour les fonctions de bases des éléments finis de type Q_1 et leur dérivée locale et globale que l'on peut retrouver dans le modules *Xshape*. Le module *outilMatRigid* contient les routines pour le calcul de la matrice de rigidité A et du second membre b . La matrice et second membre élémentaires sont d'abord calculés par *ematr* puis assemblés respectivement dans A et b par la routine *assma*. La résolution du système linéaire 4.2 utilise la méthode du gradient conjugué (*gc*). Cette routine se trouve dans le module *ResoudEq*. Enfin la solution est sauvée dans le fichier *result.dat* qui sera utilisé pour la visualisation avec le logiciel *AVS* (Advanced Visual Systems). Pour plus de détails, voir l'annexe A.

Les simulations suivantes représentent la surface de niveau $\Theta = 0.1$ de la teneur en eau dans Ω en différents instants. Les paramètres hydrodynamiques et de retrait du vertisol proviennent de [35]. On a les valeurs suivantes :

- Les paramètres associés à la conductivité hydraulique et au potentiel matriciel :
 $K_{sat} = 0.0095 \text{ cm h}^{-1}$, $L = 0.5$, $n = 2.088$, $\alpha = 0.0262 \text{ cm}^{-1}$, $\Theta_s = 1.26$,
 $\Theta_r = 0.064$.
- Les paramètres associés à la fonction de retrait : $\Theta_{SL} = 0.191$, $e_{SL} = 0.32$,
 $\Theta_{AE} = 0.37$, $e_{AE} = 0.4053$, $\Theta_{LM} = 1.176$, $e_{LM} = 1.32414$, $\Theta_{MS} = 1.224$,
 $e_{MS} = 1.36$, $K_r = 1.14$, $K_0 = 0.465$.

Voir aussi annexe A.

On suppose dans ce cas que le retrait et le mouillage du vertisol suit le même processus. Il n'en est pas ainsi pour tous les milieux poreux à cause du phénomène d'hystérésis [29], [33].

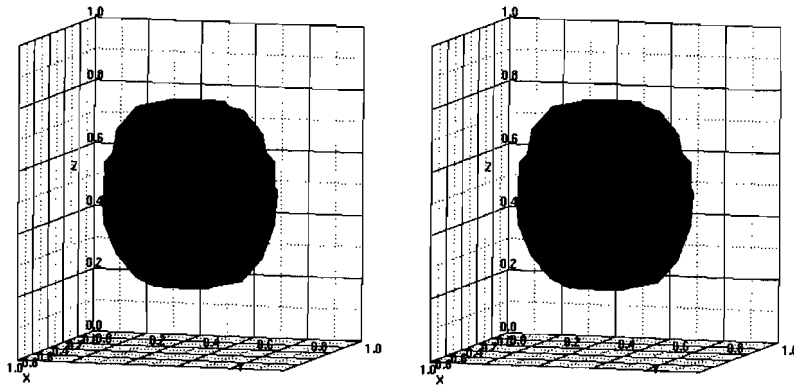


FIG. 4.1 – surface de niveau $\Theta = 0.1$ pour un milieu poreux non déformable (resp. déformable) à $t = 0$

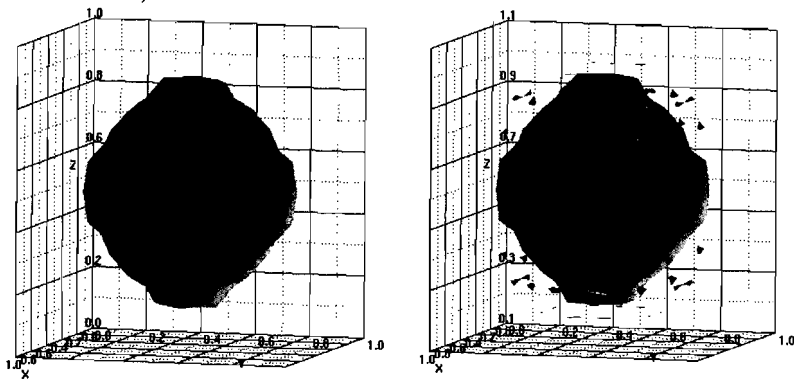


FIG. 4.2 – surface de niveau $\Theta = 0.1$ pour un milieu poreux non déformable (resp. déformable) à $t = 1h$

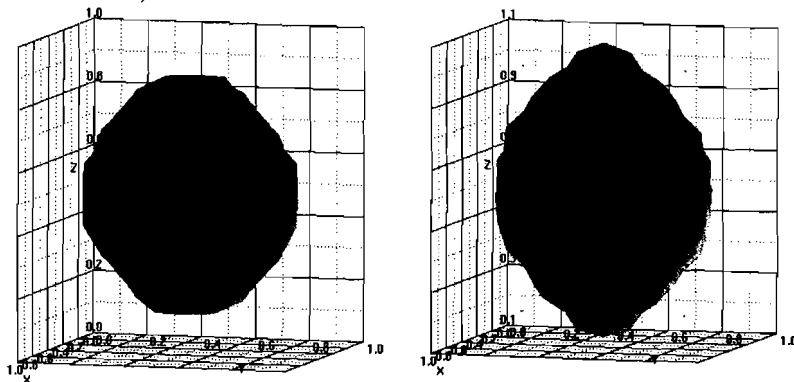


FIG. 4.3 – surface de niveau $\Theta = 0.1$ pour un milieu poreux non déformable (resp. déformable) à $t = 2h$

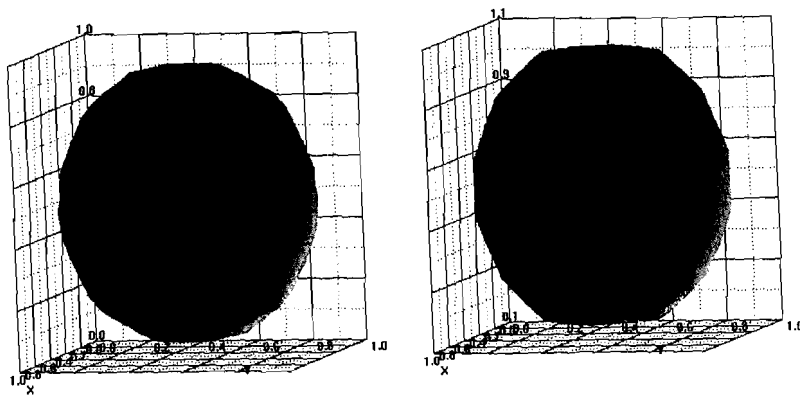


FIG. 4.4 – surface de niveau $\Theta = 0.1$ pour un milieu poreux non déformable (resp. déformable) à $t = 20h$

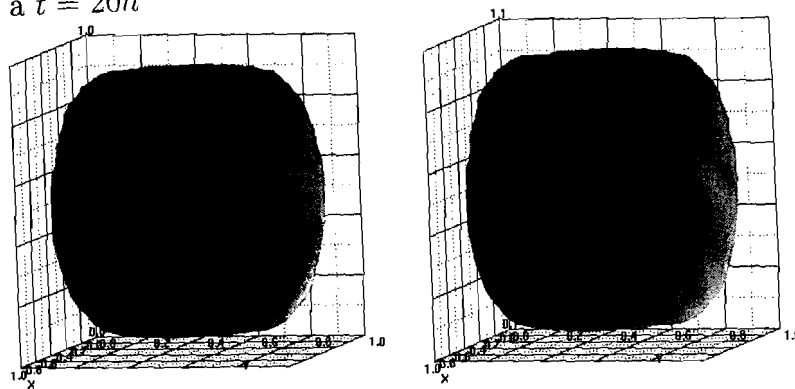


FIG. 4.5 – surface de niveau $\Theta = 0.1$ pour un milieu poreux non déformable (resp. déformable) à $t = 100h$

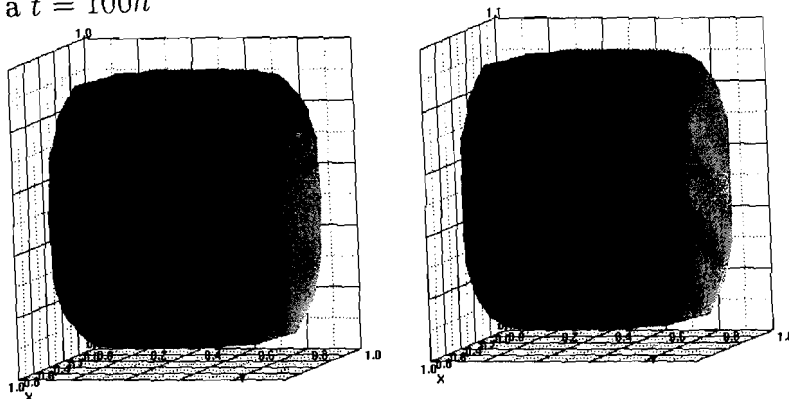


FIG. 4.6 – surface de niveau $\Theta = 0.1$ pour un milieu poreux non déformable (resp. déformable) à $t = 200h$

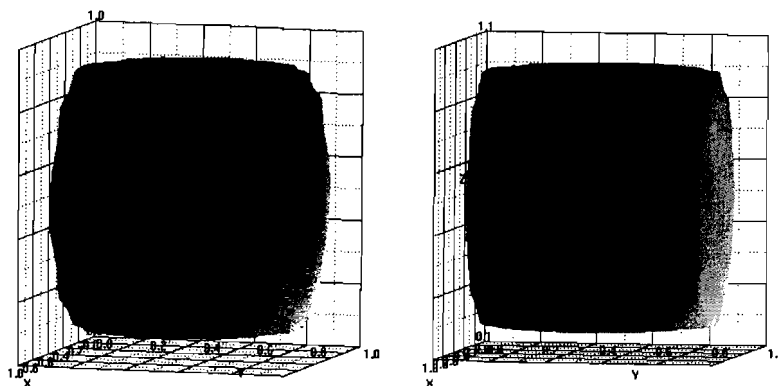


FIG. 4.7 – surface de niveau $\Theta = 0.1$ pour un milieu poreux non déformable (resp. déformable) à $t = 300h$

On observe à travers les simulations ci-dessus l'effet de la déformation sur la teneur en eau pour une surface de niveau donnée ($\Theta = 0.1$). A $t = 1h$ (4.2), on voit apparaître un bruit ; Il est essentiellement lié à la nature du problème qui est de type convection-diffusion. L'effet diffusif le fait disparaître pour des temps longs. Au bout de $300h$ la forme globale de la surface de niveau $\Theta = 0.1$ est la même pour les deux cas de figure. Cependant, le volume englobé par la surface pour le cas déformable est supérieur à celui où la déformation n'est pas pris en compte.

Les figures 4.8...4.11 représentent des coupes transversales de milieu poreux à différents instants. Le dégradé de couleurs du bleu au rouge va des zones les moins saturées aux zones les plus saturées. L'influence de la déformabilité du sol est très claire sur ces figures.

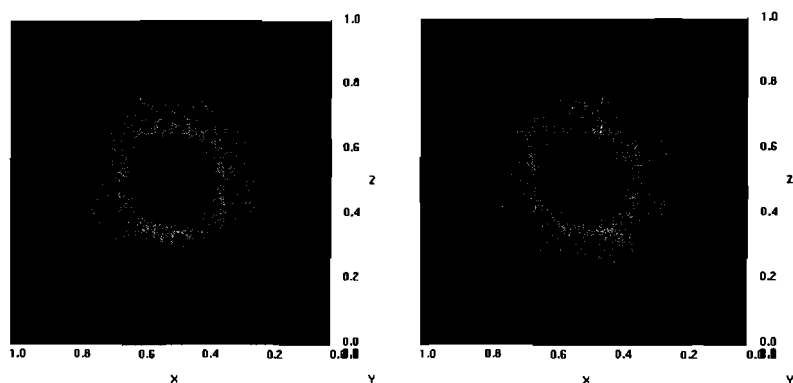


FIG. 4.8 – Coupe transversale du milieu poreux suivant le plan $x = 0.5$ pour un milieu poreux non déformable (resp. déformable) à $t = 0h$

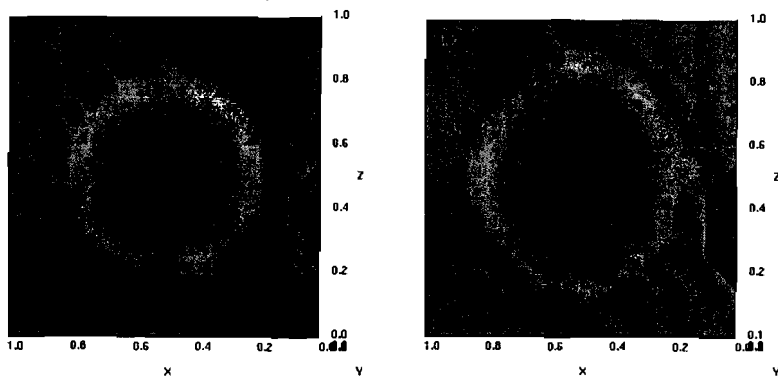


FIG. 4.9 – Coupe transversale du milieu poreux suivant le plan $x = 0.5$ pour un milieu poreux non déformable (resp. déformable) à $t = 1h$

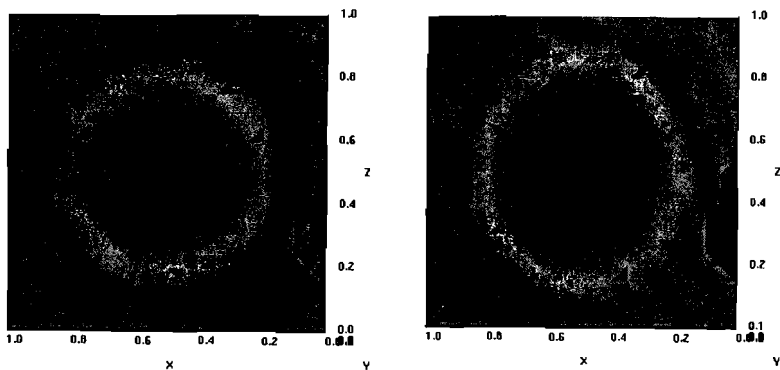


FIG. 4.10 – Coupe transversale du milieu poreux suivant le plan $x = 0.5$ pour un milieu poreux non déformable (resp. déformable) à $t = 2h$

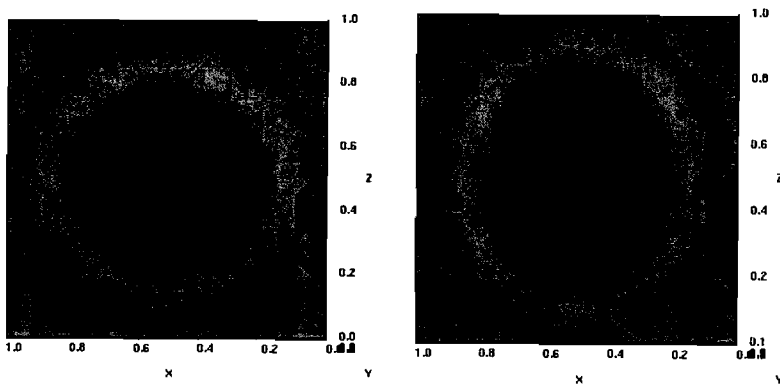


FIG. 4.11 – Coupe transversale du milieu poreux suivant le plan $x = 0.5$ pour un milieu poreux non déformable (resp. déformable) à $t = 10h$

Deuxième partie
Écoulement fluvial

Chapitre 5

Le modèle

L'écoulement des fleuves et rivières est modélisé par les équations de Saint-Venant connues aussi sous le nom de "Shallow Water". Dans cette partie, nous nous intéressons en particulier au fleuve Sénégal qui, de par ces caractéristiques nous permettent d'avoir en partant des équations de Navier-Stokes un modèle simple. Nous utilisons dans ce modèle une formulation hauteur-débit et la viscosité est pris en compte.

L'écoulement considéré ici est unidimensionnel dans un canal de section parallélépipédique. Le modèle obtenu après dérivation est le suivant :

$$\begin{cases} l \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = f_1 & \text{dans } W, \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \beta(h) \frac{\partial h}{\partial x} = f_2 & \text{dans } W. \end{cases}$$

où q est le débit, h la hauteur d'eau et l la largeur du canal. Dans la suite, nous donnerons des résultats d'existence de solutions de ce système dans le cas où la fonction $\beta(h) = a + bh$ est supposée constante ou non, avec a et b des constantes.

Le dernier chapitre de cette partie sera consacré à des simulations de ce modèle pour différentes valeurs de la viscosité et les cas β constant ou non. Cela nous permettra de voir dans un premier temps si on peut négliger la viscosité et deuxièmement s'il ne suffit pas de prendre juste une valeur moyenne de β .

Le modèle classique de Saint-Venant connu sous le nom de "Shallow water" en anglais est donné par le système

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hu) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \operatorname{div}(hu \otimes u) + \frac{1}{2} \nabla(gh^2) = -gh \nabla Z, \end{cases}$$

où $h(t, x, y)$ est la hauteur d'eau dans le fleuve, $u(t, x, y)$ la vitesse de l'eau et $Z(x, y)$ la topographie du lit.

Pour dériver les équations qui régissent les écoulements fluviaux, on intègre suivant la largeur et la profondeur du fleuve les équations de Navier-Stokes qui modélisent les écoulements géophysiques (lacs, océans, mers, fleuves, etc..).

On part du système des équations de Navier-Stokes

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \operatorname{div} \sigma = f \text{ dans }]0, T[\times \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans }]0, T[\times \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ dans } \Omega, \\ \sigma \cdot n = f_s \text{ sur la surface libre,} \end{array} \right.$$

où $u = (u_1, u_2, u_3)$ est la vitesse du fluide, $\sigma = -pI + \frac{\mu}{2}(\nabla u + \nabla u^t)$, p est la pression et f représente les forces extérieures.

Le fleuve de par sa nature physique présente des particularités qui apportent des simplifications dans les équations de Navier-Stokes.

En effet un fleuve est caractérisé par une prédominance de la longueur sur la largeur et la profondeur. Par exemple, le fleuve Sénégal est long de 1700km, a une largeur d'environ 1km et une profondeur de 5m en moyenne. Cette prédominance de la longueur sur la largeur et la profondeur va induire le sens de l'écoulement et d'autres phénomènes qui se traduisent par les différentes hypothèses qui vont suivre.

5.1 Hypothèses

- La profondeur et la largeur étant très petites par rapport à la longueur de l'écoulement impliquent que l'écoulement est essentiellement unidimensionnel et parallèle aux parois et au fond du domaine. Ainsi les courbures des lignes de courant sont petites, l'accélération verticale et celle latérale sont négligeables par rapport à celle longitudinale et en plus la distribution de la pression est hydrostatique.
- Le domaine géométrique est fixe ainsi les effets de dépôt et de lessivage de sédiments sont petits.
- Le lit du domaine a une petite pente.
- Les effets de friction aux bords seront estimés par une trainée supposée linéaire par rapport au débit. Ces effets sont négligés dans la partie théorique et ne changent pas les résultats obtenus s'ils sont pris en comptes.

- Le domaine est supposé rectiligne même s'il présente des courbures. Ce qui nous amène à considérer un domaine parallélépipédique, de longueur L et de largeur l . Ainsi la surface de l'eau au niveau de chaque section du fleuve est supposée horizontale. Les effets de la surélévation dans un domaine incliné ne sont pas pris en compte dans cette analyse et sont supposés avoir très peu d'influence sur le résultat.
- Le flux de la quantité de mouvement et de l'énergie le long de la section résultant de la non uniformité de la distribution de la vitesse devront être estimés par le biais de la vitesse moyenne et du coefficient de correction lesquels sont fonction de la localisation le long du cours d'eau et de la hauteur.
- Comme forces extérieures, seule la force de pesanteur sera considérée. L'influence des forces de Coriolis sur les écoulements fluviaux est négligeable [37].

Ces hypothèses nous permettent d'apporter des simplifications au système (1).

5.2 Les équations simplifiées

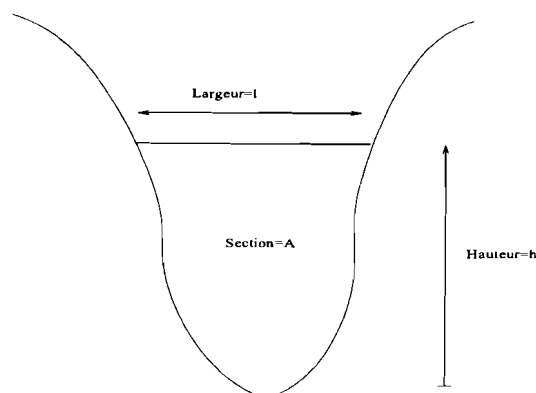
En prenant en compte les hypothèses précédentes, à travers une adimensionnalisation, et en supposant que l'écoulement se fait suivant l'axe des x , on aboutit au système :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{L}{U^2 l} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{1}{U^2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{L}{U^2 l} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial z} \right) = f, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g, \\ \operatorname{div} u = 0 \end{array} \right. ,$$

où $v = \frac{u_2}{U}$ et en rebaptisant $u_1 := \frac{u_1}{V}$, $u_3 := \frac{u_3}{V}$ on obtient

$$\sigma_{12} = \mu \left(\frac{U}{l} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{V}{L} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \sigma_{23} = \mu \left(\frac{U}{l} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{V}{L} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \sigma_{22} = -p + \frac{\mu U}{L} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad U = \frac{L}{T}.$$

U représente la vitesse caractéristique suivant l'écoulement, V celle suivant les autres directions, T le temps caractéristique. On peut consulter [68] pour plus d'informations sur la modélisation asymptotique.

Section du fleuve en un point x

On définit la section $\Omega(x, t)$ par

$$\Omega(x, t) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq l, \quad 0 \leq z \leq h(x, t)\}.$$

En intégrant sur $\Omega(x, t)$ les équations de (2) on obtient le modèle de Saint-Venant unidimensionnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_{inf}, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) - l \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{Lk}{UA} + 2 \frac{kL}{l^2 U} \right) Q \\ - \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + g \frac{l^2}{2U^2} \frac{\partial h^2}{\partial x} + \frac{2\mu l}{UL} \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0, \end{array} \right.$$

où

- $A = lh$ est l'aire de la section $\Omega(x, t)$,

- $Q(t, x) = \int_0^l \int_0^h v(t, x) dy dz$ est le débit de l'écoulement à travers la section $\Omega(x, t)$,

- $h(t, x)$ est la hauteur de l'eau à partir du point le plus bas,

- k est le coefficient de frottement,

- $\nu = \frac{2\mu}{UL}$,

- q_{inf} est la vitesse d'infiltration verticale.

En négligeant les frottements, en supposant qu'il n'y a pas d'infiltration et en linéarisant Q (on pose $\bar{v} = \frac{Q}{A}$) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{3\bar{v}}{2} \frac{\partial Q}{\partial x} - l\bar{v}^2 \frac{\partial h}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + g \frac{l^2}{2U^2} \frac{\partial h^2}{\partial x} = 0. \end{array} \right.$$

On pose

$$W =]0, T[\times I \text{ avec } I =]0, L[,$$

et

$$\beta(h) = a + 2bh \text{ avec } a = \frac{l\bar{v}^2}{2}, \quad b = \frac{gl^2}{2U^2}.$$

On obtient ainsi le modèle de Saint-Venant 1D

$$(3) \quad \begin{cases} l \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 & \text{dans } W, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \beta(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 & \text{dans } W, \\ Q(t, 0) = Q_e(t), \quad Q(t, L) = Q_s(t), \\ h(0, x) = h^0(x), \quad Q(0, x) = Q_0(x). \end{cases}$$

Soit

$$Q = q + Q_s + \frac{1}{L}(L-x)(Q_e - Q_s),$$

alors (3) devient

$$l \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = f_1 \quad \text{dans } W, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \beta(h) \frac{\partial h}{\partial x} = f_2 \quad \text{dans } W, \quad (5.2)$$

$$q(t, x) = 0 \text{ sur } \partial I, \quad (5.3)$$

$$h(0, x) = h^0(x), \quad (5.4)$$

$$q(0, x) = q_0(x) = Q_0(x) - Q_s(0) - \frac{1}{L}(L-x)(Q_e(0) - Q_s(0)),$$

avec

$$f_1(t, x) = \frac{1}{L}(Q_e(t) - Q_s(t))$$

et

$$f_2(t, x) = -Q'_s(t) - \frac{1}{L}(L-x)(Q'_e(t) - Q'_s(t)).$$

Le but de cette partie est d'étudier mathématiquement et numériquement le système (5.1)-(5.4).

Chapitre 6

Existence de solutions

Dans ce chapitre, nous allons après une formulation variationnelle du problème (5.1)-(5.4), montrer l'existence et l'unicité de solution faible dans le cas où β est constant et l'existence d'une solution faible lorsque β dépend de h .

6.1 Formulation variationnelle

Si on suppose q connue, on peut en déduire h en intégrant l'équation (5.1) entre 0 et t . On obtient alors

$$h(t, x) = h^0(x) - \int_0^t \frac{1}{l} \frac{\partial q}{\partial x} - f_1(s, x) ds. \quad (6.1)$$

Soit h donnée, et v dans $D(I)$; en multipliant (5.2) par v et en intégrant sur I , on a

$$\int_I \frac{\partial q}{\partial t} v dx + \nu \int_I \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx - \int_I (ah + \frac{1}{2}bh^2) \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_I f_2 v. \quad (6.2)$$

Pour donner un sens à (6.1), il nous faut q dans $W^{1,1}(I)$ et $\frac{\partial q}{\partial x} \in L^1(0, t)$. Quant à (6.2), nous devons avoir $v \in H_0^1(I)$, $h \in L^4(I)$ et prendre q dans $H^1(I)$ au moins. On pose

$$V = L^2(0, T; H_0^1(I)) \cap C(0, T; H^{-1}(I)), V_0 = L^2(0, T; L^2(I)), V_1 = L^\infty(0, T; H^1(I)), \\ V_2 = L^\infty(0, T; H^2(I) \cap H_0^1(I)), V_3 = L^\infty(0, T; L^4(I)) \cap L^2(0, T; H^1(I)).$$

On définit l'application $F : V \rightarrow V$ de la manière suivante :

- 1) Pour q dans V , on détermine $h = h(q)$ où h est solution de (6.1).
- 2) Pour h donnée en 1), on détermine $\bar{q} = F(q)$ où \bar{q} est la solution de (6.2).

Le problème faible que nous allons résoudre sera dans le cas β constant : trouver (q, h) dans $V \times H^1(0, T, L^2(I))$ solution de (6.1), (6.2) pour tous $v \in H_0^1(I)$. Dans le cas $\beta = \beta(h)$ ce problème devient : trouver (q, h) dans $V_2 \times V_3$ solution de (6.1), (6.2) pour tous $v \in H_0^1(I)$.

6.2 Problème linéarisé (β constant)

Avant d'étudier l'existence et l'unicité de solution du problème linéarisé, donnons un résultat sur une propriété de l'application F .

Proposition 6.2.1 *Soit $0 < T < \frac{\nu}{\beta}$. Il existe une constante $0 < C(T) < 1$ telle que*

$$\forall q_1, q_2 \in V, \quad \|F(q_1) - F(q_2)\|_V \leq C(T)\|q_1 - q_2\|_V.$$

En d'autre terme, F est contractante.

Preuve

Soient $v \in H_0^1(I)$, $\bar{q}_i = F(q_i)$, h_i $i = 1, 2$, où h_i est la solution de (6.1) associée à q_i . On a

$$\int_I \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial t} v dx + \nu \int_I \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx - \beta \int_I h_i \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_I f_2 v, \quad i = 1, 2.$$

En prenant la différence des deux égalités et en intégrant par rapport au temps, on obtient

$$\int_0^t \int_I v \frac{\partial}{\partial t} (\bar{q}_1 - \bar{q}_2) ds dx + \nu \int_0^t \int_I \frac{\partial}{\partial x} (\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \frac{\partial v}{\partial x} ds dx - \beta \int_0^t \int_I (h_1 - h_2) \frac{\partial v}{\partial x} ds dx = 0.$$

Or

$$\beta \int_0^t \int_I (h_1 - h_2) \frac{\partial v}{\partial x} ds dx = \frac{\beta}{l} \int_0^t \int_I \frac{\partial v}{\partial x} \int_0^s \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} - \frac{\partial q_2}{\partial x} \right) d\tau ds dx.$$

En prenant $v = \bar{q}_1 - \bar{q}_2$, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \int_I (\bar{q}_1 - \bar{q}_2)^2 dx ds + \nu \int_0^t \int_I \left(\frac{\partial}{\partial x} (\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \right)^2 ds dx \\ = \frac{\beta}{l} \int_0^t \int_I \left(\frac{\partial}{\partial x} (\bar{q}_1 - \bar{q}_2) \left(\int_0^s \frac{\partial}{\partial x} (q_1 - q_2) d\tau \right) \right) dx ds. \end{aligned}$$

Pour $t = T$ on obtient

$$\frac{1}{2} \|\bar{q}_1(T) - \bar{q}_2(T)\|_{L^2(I)}^2 + \nu \|\bar{q}_1 - \bar{q}_2\|_V^2 \leq \frac{\beta}{l} T \|\bar{q}_1 - \bar{q}_2\|_V \|q_1 - q_2\|_V.$$

donc

$$\|\bar{q}_1 - \bar{q}_2\|_V \leq C(T)\|q_1 - q_2\|_V$$

avec $C(T) = \frac{\beta}{l\nu}T < 1$. Ce qui donne F contractante. \square

Théorème 6.2.1 *On suppose que β est une constante.*

Soient $T > 0$ et $(f_1, f_2) \in L^1(0, T; L^2(I)) \times H^{-1}(0, T; H_0^1(I)) \cap L^2(0, T; H^{-1}(I))$. Le problème (6.1), (6.2) admet une unique solution $(q, h) \in V \times H^1(0, T; L^2(I))$.

Preuve

Pour un q donné dans V on a

$$h(t, x) = h^0(x) - \int_0^t \left(\frac{1}{l} \frac{\partial q}{\partial x} - f_1 \right) ds.$$

Cette solution est unique et on a $h \in H^1(0, T; L^2(I))$. Ainsi (6.2) qui est de type parabolique admet une unique solution $\bar{q} = F(q)$. Avec la proposition (6.2.1), F vérifie les hypothèses du théorème du point fixe de Banach pour $T^* < \frac{l\nu}{\beta}$. Ainsi il existe un couple $(q, h) \in V \times H^1(0, T; L^2(I))$ unique solution de (6.1), (6.2). L'existence globale en temps est obtenue à partir de la proposition (6.2.1). On itère en prenant comme condition initiale la valeur au temps T^* . Ainsi on recouvre l'horizon T . \square

6.3 Problème non linéaire (β non constant)

Nous étudierons dans cette partie l'existence de solution du problème (6.1), (6.2) en supposant que $\beta = \beta(h)$.

On prend dans toute la suite f_1 et f_2 dans $L^2(0, \infty; L^2(I)) \subset V_0$, $h^0 \in H^1(I)$ et $q_0 \in H_0^1(I)$. Le but de cette section est de démontrer le

Théorème 6.3.1 *Soient f_1 et f_2 dans $L^2(0, \infty; L^2(I)) \subset V_0$, $h^0 \in H^1(I)$ et $q_0 \in H_0^1(I)$. Pour T suffisamment petit, le problème (6.1), (6.2) admet au moins une solution $(q, h) \in V_2 \times V_3$.*

6.3.1 Estimations a priori

Pour que l'équation (6.2) soit bien définie il suffit d'avoir $q, \frac{\partial q}{\partial x}$ et $ah + bh^2$ dans $L^2(I)$. On doit donc choisir $h \in L^4(I)$.

Proposition 6.3.1 *Soit $h \in L^2(0, T; L^4(I))$, si q est solution de (6.2), alors elle est dans $L^\infty(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_0^1(I))$.*

Preuve

Pour $v = q$ dans (6.2), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|_{L^2(I)}^2 + \nu \left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\|_{L^2(I)}^2 &= \int_I (ah + bh^2) \frac{\partial q}{\partial x} + \int_I f_2 q \\ &\leq \left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\|_{L^2(I)} (\|ah + bh^2\|_{L^2(I)} + c \|f_2\|_{L^2(I)}) \\ &\leq C(\nu) \left(\|ah + bh^2\|_{L^2(I)}^2 + \|f_2\|_{L^2(I)}^2 \right) + \frac{\nu}{2} \left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\|_{L^2(I)}^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \|q\|_{L^2(I)}^2 + \nu \left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\|_{L^2(I)}^2 \leq C \left(\|ah + bh^2\|_{L^2(I)}^2 + \|f_2\|_{L^2(I)}^2 \right). \quad (6.3)$$

De l'inégalité (6.3) on tire les estimations

$$\|q\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^2 \leq C \left(\|ah + bh^2\|_{V_0}^2 + \|f_2\|_{V_0}^2 \right) + \|q_0\|_{L^2(I)}^2 \quad (6.4)$$

et

$$\left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\|_{V_0}^2 \leq C \left(\|ah + bh^2\|_{V_0}^2 + \|f_2\|_{V_0}^2 \right) + \|q_0\|_{L^2(I)}^2. \quad (6.5)$$

On a $h \in L^2(0, T; L^4(I))$, ainsi q est dans $L^\infty(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H_0^1(I))$. \square

Trouvons une estimation de h . Pour $q \in L^2(0, T; H_0^1(I))$, on a h solution de (6.1) est dans $L^\infty(0, T; L^2(I))$. En effet,

$$\|h(t)\|_{L^2(I)} \leq \|h^0\|_{L^2(I)} + \frac{1}{l} \left\| \int_0^t f_1(s) ds \right\|_{L^2(I)} + \frac{1}{l} \left\| \int_0^t \frac{\partial q}{\partial x}(s) ds \right\|_{L^2(I)}.$$

Et ainsi

$$\|h\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))} \leq \|h^0\|_{L^2(I)} + \frac{\sqrt{T}}{l} \left(\|f_1\|_{V_0} + \left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\|_{V_0} \right). \quad (6.6)$$

Après avoir estimé q en norme H^1 (proposition (6.3.1)), la proposition suivante nous permettra d'avoir plus de régularité sur q solution de (6.2).

Proposition 6.3.2 *Soit $h \in H^1(W)$, alors il existe*

$$q \in L^\infty(0, T; H^2(I) \cap H_0^1(I)), \quad \frac{\partial q}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(I)) \cap L^\infty(0, T; L^2(I)).$$

unique solution du problème faible

$$\int_I \frac{\partial q}{\partial t} v dx + \nu \int_I \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_I (ah + \frac{1}{2}bh^2) \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_I f_2 v dx$$

pour tous $v \in H_0^1(I)$. De plus, on a

$$\|q(t)\|_{H^2(I)} \leq C \|(a + bh)\partial_x h + f_2\|_{H^1(0, T; L^2(I))} + \|q_0\|_{H^2(I)} + \|(a + bh(0))\partial_x h(0) + f_2(0)\|_{L^2(I)}. \quad (6.7)$$

Preuve

Soit V_m l'espace engendré par w_j , $1 \leq j \leq m$ avec $w_j = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{j\pi x}{L})$. Posons

$$q_m(t) := \sum_{k=1}^m c_m^k(t) w_k.$$

Soit $g = f_2 - (a + bh)\frac{\partial h}{\partial x}$. En remplaçant q par q_m et v par w_k dans (6.2), on obtient un système d'équations différentielles ordinaires

$$c_m^{k'}(t) + \nu \sum_{k=1}^m c_m^k \int_I w_k' w_j' dx = \int_I g w_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (6.8)$$

avec la condition initiale $c_m^k(0) = \int_I q_0 w_k dx$, $k = 1, \dots, m$ qui admet une unique solution absolument continue $c_m(t) = (c_m^k(t))_{k=1 \dots m}$. Les inégalités (6.4) et (6.5) entraîne

$$\|q_m\|_{L^\infty(0, T; L^2(I))}^2 \leq C (\|g\|_{V_0}^2 + \|q_0\|_{L^2(I)}^2), \quad (6.9)$$

$$\left\| \frac{\partial q_m}{\partial x} \right\|_{V_0}^2 \leq C (\|g\|_{V_0}^2 + \|q_0\|_{L^2(I)}^2), \quad (6.10)$$

et

$$\|q_m'\|_{L^2(0, T; H^{-1}(I))}^2 \leq C (\|g\|_{V_0}^2 + \|q_0\|_{L^2(I)}^2). \quad (6.11)$$

La conséquence de ces estimations est l'existence d'une sous-suite que l'on note de nouveau $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et de $q \in L^2(0, T; H_0^1(I))$ avec $\frac{\partial q}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(I))$ telle que

$$\begin{aligned} q_m &\rightharpoonup q \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(I)), \\ q'_m &\rightharpoonup \frac{\partial q}{\partial t} \text{ dans } L^2(0, T; H^{-1}(I)). \end{aligned}$$

De plus, q est l'unique solution de (6.2) [43]. Etudions maintenant la régularité de q . On pose $p_m = q'_m$. On a alors

$$\int_I \frac{\partial p_m}{\partial t} w_j dx + \nu \int_I \frac{\partial p_m}{\partial x} w'_j dx = - \int_I \frac{\partial}{\partial t} \left((a + bh) \frac{\partial h}{\partial x} \right) \cdot w_j dx + \int_I \frac{\partial f_2}{\partial t} w_j dx.$$

En choisissant dans cette équation $w_j = p_m(t)$, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_I p_m(t)^2 dx + \nu \int_I \left(\frac{\partial p_m}{\partial x} \right)^2 dx = \int_I \frac{\partial}{\partial t} \left(f_2 - (a + 2bh) \frac{\partial h}{\partial x} \right) p_m dx. \quad (6.12)$$

En intégrant l'équation de 0 à t , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|p_m(t)\|_{L^2(I)}^2 - \frac{1}{2} \|p_m(0)\|_{L^2(I)}^2 + \nu \int_0^t \int_I \left(\frac{\partial p_m}{\partial x} \right)^2 dx dt = \\ \int_0^t \int_I \frac{\partial}{\partial t} \left(f_2 - (a + 2bh) \frac{\partial h}{\partial x} \right) p_m dx dt. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ce qui donne avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|p_m(t)\|_{L^2(I)}^2 + \nu \int_0^t \int_I \left(\frac{\partial p_m}{\partial x} \right)^2 dx dt \leq \\ \left(\int_0^T \int_I \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(f_2 - (a + bh) \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right)^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_I p_m^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \|p_m(0)\|_{L^2(I)}^2. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Avec l'inégalité de Poincare-Friedrichs et de Minkowski on aboutit à l'estimation

$$\|p_m(t)\|_{L^2(I)}^2 + \nu \left\| \frac{\partial p_m}{\partial x} \right\|_{L^2(0,t;L^2(I))}^2 \leq C(I, \nu) \left\| \frac{\partial g}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(I))}^2 + \|p_m(0)\|_{L^2(I)}^2.$$

C'est-à-dire

$$\left\| \frac{\partial q_m}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(I)}^2 + \nu \left\| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial q_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,t;L^2(I))}^2 \leq C(I, \nu) \|g\|_{H^1(0,T;L^2(I))}^2 + \left\| \frac{\partial q_m}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(I)}^2. \quad (6.15)$$

Notons $g_m = P_{V_m}g$ où P_{V_m} est la projection orthogonale sur V_m . Par construction,

$$\frac{\partial q_m}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2} = g_m.$$

Donc $\frac{\partial q_m}{\partial t}(0) = \nu \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2}(0) + g_m(0)$.

Ce qui entraîne $\left\| \frac{\partial q_m}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(I)} \leq \nu \left\| \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2}(0) \right\|_{L^2(I)} + \|g_m(0)\|_{L^2(I)}$. Mais

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2}(0) \right\|_{L^2(I)} &= \int_I \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2}(0)^2 dx \\ &= \int_I q_m(0) \frac{\partial^4 q_m}{\partial x^4}(0) dx \\ &= \int_I q_{m0} \frac{\partial^4 q_m}{\partial x^4}(0) dx \\ &= \int_I q_{m0}'' \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2}(0) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \|q_{m0}''\|_{L^2(I)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2}(0) \right\|_{L^2(I)}^2. \end{aligned}$$

Donc $\left\| \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2}(0) \right\|_{L^2(I)}^2 \leq C \|q_{m0}''\|_{L^2(I)}^2 \leq C \|q_0''\|_{H^2(I)}^2$.

L'estimation (6.15) donne finalement

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial q_m}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(I)}^2 + \nu \left\| \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial q_m}{\partial t} \right\|_{L^2(0,t;L^2(I))}^2 &\leq C (\|g\|_{H^1(0,T;L^2(I))}^2 \\ &\quad + \|q_0\|_{H^2(I)}^2 + \|g_m(0)\|_{L^2(I)}^2). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Donnons maintenant une estimation de q_m dans $H^2(I)$. On a

$$\nu \int_I q_m w_j dx = \int_I \left(g - \frac{\partial q_m}{\partial t} \right) w_j dx.$$

Donc comme $\frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2} \in V_m$, on a

$$\begin{aligned} -\nu \int_I q_m \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2} dx &= - \int_I \left(g - \frac{\partial q_m}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2} dx \\ &= \nu \int_I \left(\frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|q_m(t)\|_{H^2(I)}^2 &\leq C \int_I q_m |g - \frac{\partial q_m}{\partial t}| dx \\ &\leq C(\|q_m\|_{L^2(I)}^2 + \|g\|_{L^2(I)}^2 + \left\| \frac{\partial q_m}{\partial t} \right\|_{L^2(I)}^2). \end{aligned}$$

Mais par l'estimation à priori (6.4), on a

$$\|q_m(t)\|_{L^2(I)}^2 \leq C(\|g\|_{L^2(0,T;L^2(I))}^2 + \|q_0\|_{L^2(I)}^2).$$

En utilisant (6.16), on obtient donc

$$\|q_m(t)\|_{H^2(I)}^2 \leq C(\|g\|_{H^1(0,T;L^2(I))}^2 + \|q_0\|_{H^2(I)}^2 + \|g(0)\|_{L^2(I)}^2).$$

Par passage à la limite on a

$$\|q(t)\|_{H^2(I)}^2 \leq C(\|g\|_{H^1(0,T;L^2(I))}^2 + \|q_0\|_{H^2(I)}^2 + \|g(0)\|_{L^2(I)}^2).$$

Avec ces estimations, on a q solution du problème faible (6.2) sera ainsi dans $L^\infty(0, T; H^2(I)) \cap H_0^1(I)$ et $\frac{\partial q}{\partial t}$ dans $L^\infty(0, T; L^2(I)) \cap L^2(0, T; H^1(I))$.

6.3.2 Preuve du théorème (6.3.1)

On considère maintenant

$$K_M = \overline{B}_{L^\infty(0,T;W^{1,4}(I))}(0, M).$$

Construisons l'application $G : K_M \rightarrow K_M$, donnée par $h \mapsto G(h) = \bar{h}$ avec q solution de

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \beta(h) \frac{\partial h}{\partial x} = f_2$$

et \bar{h} définie par $\bar{h} = h^0 - \frac{1}{l} \int_0^t \left(\frac{\partial q}{\partial x}(s) - f_1(s) \right) ds$.

Récapitulons les estimations que nous avons

- 1) $\|\bar{h}\|_{L^4(I)}^4 \leq C \left(1 + T^2 \left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^4 \right);$
- 2) $\left\| \frac{\partial q}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^4 \leq C \left(1 + \|h\|_{L^\infty(0,T;L^4(I))}^4 + \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^4 \right);$
- 3) $\left\| \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^4 \leq C \left(1 + T^2 \left\| \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right\|_{L^2(0,T;L^2(I))}^4 \right);$

$$4) \left\| \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right\|_{L^2(0,T;L^2(I))}^4 \leq C \left(1 + \|h\|_{L^\infty(0,T;L^4(I))}^4 + \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^4 \right).$$

La constante C dépend de $I, f_1, f_2, \nu, h^0, q_0, l$. On considère la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de h^0 dans K_M et la relation de récurrence $h_{n+1} = \bar{h}_n$. Montrons que cette suite est bornée dans $L^\infty(0, T; W^{1,4}(I))$. On a avec les estimations (1) – (4)

$$\begin{aligned} \|h_{n+1}\|_{L^4(I)}^4 &\leq C(1 + CT^2(1 + \|h_n\|_{L^\infty(0,T;L^4(I))}^4) + C(1 + CT^2(1 + \|h_{n-1}\|_{L^\infty(0,T;L^4(I))}^4 \\ &\quad + C(1 + CT^2(1 + \|h_{n-2}\|_{L^\infty(0,T;L^4(I))}^4 + \dots)))) \\ &\leq C + (1 + C + \sup_{j \leq n} \|h_j\|_{L^\infty(0,T;L^4(I))}^4) \sum_{k \geq 1} (CT)^{2k}. \end{aligned}$$

On suppose que jusqu'à l'ordre n , h_n appartient à $B := B_{L^\infty(0,T;L^4(I))}(0, M)$ avec $M = 2C$. Trouvons T pour que h_{n+1} soit dans B . Une condition suffisante est (pour $C > 1$)

$$\frac{3C^3T^2}{1 - CT} \leq C.$$

Elle est réalisée lorsque $T \in]0; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2C}[$.

Il reste à voir que la suite $(\frac{\partial h_n}{\partial x})_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi bornée dans $L^\infty(0, T; L^4(I))$ pour un T convenable. On a

$$\left\| \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^4(I))}^4 \leq C \left(1 + T^2 \left\| \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^4 \right),$$

et avec l'estimation de la proposition (6.3.2)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^4 &\leq C \left(1 + \|h\|_{L^\infty(0,T;L^4(I))}^4 + \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^4 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(I))}^4 + \left\| \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} \right\|_{L^2(0,T;L^2(I))}^4 \right). \end{aligned}$$

En remarquant que $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{-1}{l} \frac{\partial q}{\partial x} + f_1$ et que $\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial x} = \frac{-1}{l} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$, on utilise la même méthode que précédemment pour trouver T tel que $\left\| \frac{\partial h_n}{\partial x} \right\|_{L^\infty(0,T;L^2(I))}^4 \leq M$. Ainsi la suite

$(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans K_{2M} . Comme $\frac{\partial h_n}{\partial t} = \frac{-1}{l} \frac{\partial q_n}{\partial x} + f_1$, on montre avec l'estimation 2) que la suite $(\frac{\partial h_n}{\partial t})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(I))$.

On applique maintenant le résultat de compacité suivant, voir [61]

Théorème 6.3.2 *Soient B, X, Y des espaces de Banach tels que $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$ avec injection compacte de X dans B . Soient F sous-ensemble borné de $L^\infty(0, T; X)$ et $\frac{\partial F}{\partial t} := \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}; f \in F \right\}$ borné dans $L^r(0, T; Y)$ où $r > 1$. Alors F est relativement compact dans $C(0, T; B)$.*

En posant dans ce théorème $X = W^{1,4}(I)$, $B = L^4(I)$, $Y = L^2(I)$, $F = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$; ce résultat nous dit que F est relativement compact dans $C(0, T; L^4(I))$. Ainsi h , la limite de $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $L^\infty(0, T; L^4(I))$. Ce qui entraîne que $h \in V_3$. Ce qui nous donne ainsi l'existence de (h, q) dans $V_3 \times V_2$. \square

Chapitre 7

Résultats numériques

7.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons résoudre numériquement le problème suivant :

$$l \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = f_1 \quad \text{dans } W, \quad (7.1)$$

$$\int_I \frac{\partial q}{\partial t} v dx + \nu \int_I \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx - \int_I (ah + \frac{1}{2}bh^2) \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_I f_2 v. \quad (7.2)$$

Pour la résolution numérique de ce système, on utilise un schéma de Lax-Frédéricks pour la première équation (hyperbolique). La deuxième équation est traitée par la méthode des éléments finis en espace et d'un schéma d'Euler implicite. La méthodologie utilisée est la suivante : connaissant la hauteur et le débit initial, on calcule la hauteur au pas de temps suivant avec la première équation ; puis le débit avec la deuxième équation. L'une des motivations essentielles de la mise en oeuvre de ces simulations est de pouvoir prédire la configuration du fleuve Sénégal à la suite d'une rupture de barrage ou d'une crue en amont d'un des deux barrages du fleuve. La longueur du fleuve Sénégal est de $1700km$, la largeur est d'environ $1km$, la profondeur de $5m$ en moyenne. Le barrage de Diama est à $27km$ de l'embouchure et celui de Manantali à $1100km$. Les simulations que nous ferons seront en modèle réduit : un canal de $1m$ sur $5cm$ de large.

Définissons ϕ_0 et ϕ_{n+1} par

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{\delta-x}{\delta} & \text{si } x \in [0, \delta], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{x-n\delta}{\delta} & \text{si } x \in [n\delta, (n+1)\delta], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On va ainsi approximer la solution h de (6.1) par

$$h(x, t) = \sum_{i=0}^{n+1} h_i(t) \phi_i(x)$$

et $h_i(t_k)$ par h_i^k .

Pour un $v \in V_\delta$, en ajoutant une trainée linéaire à (7.2), on a

$$\int_I \frac{\partial q}{\partial t} v dx + \nu \int_I \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx - \int_I (ah + bh^2) \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_I \kappa q v dx = \int_I f_2 v.$$

En prenant $v = \phi_j$, ($j \in \{1, \dots, n\}$), q_i^k une approximation de $q_i(t_k)$, on obtient le schéma d'Euler implicite pour (7.2)

$$\sum_{i=1}^n q_i^{k+1} \int_I \phi_i \phi_j dx + \sum_{i=1}^n \nu \tau q_i^{k+1} \int_I \phi_i' \phi_j' dx + \sum_{i=1}^n q_i^{k+1} \int_I \tau \kappa \phi_i \phi_j dx =$$

$$\sum_{i=1}^n q_i^k \int_I \phi_i \phi_j dx + \sum_{i=1}^n \int_I \tau (ah(x, t_k) + bh^2(x, t_k)) \phi_j' dx + \int_I f_2 \phi_j dx.$$

En posant

$$q^k = (q_1^k, \dots, q_n^k)^t,$$

$$A = (A_{ij})_{i,j=1,\overline{n}} \text{ avec } A_{ij} = \int_I (1 + \tau \kappa) \phi_i \phi_j dx + \nu \tau \int_I \phi_i' \phi_j' dx$$

$$B = (B_{ij})_{i,j=1,\overline{n}} \text{ avec } B_{ij} = \int_I \phi_i \phi_j dx,$$

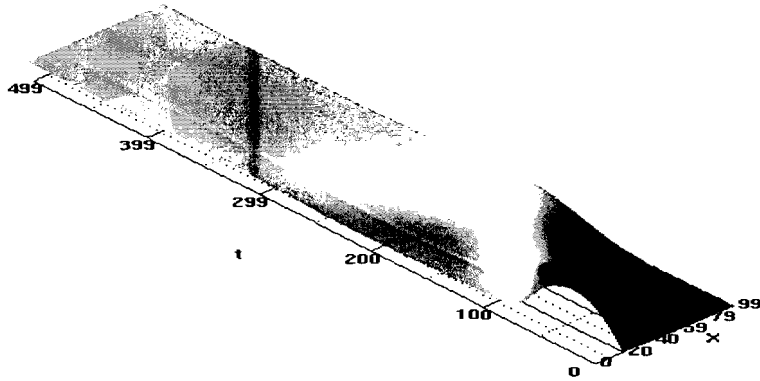
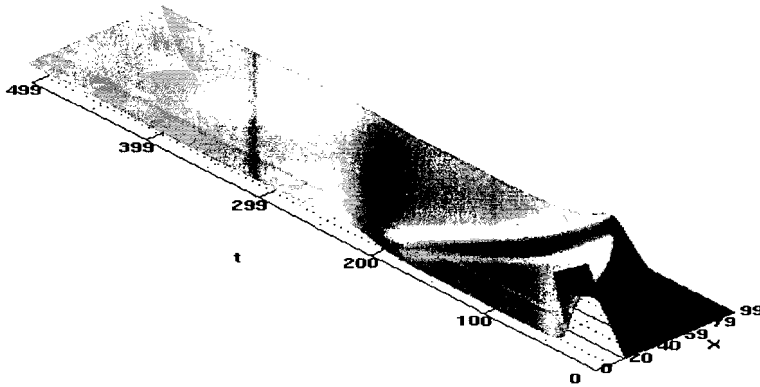
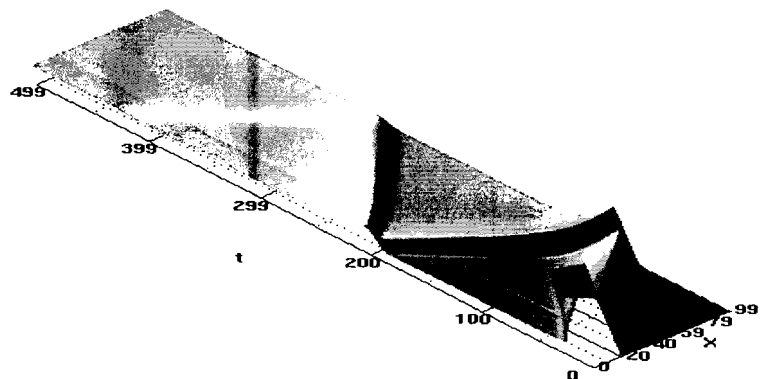
$$L^k = (L_j^k)_{j=1,\overline{n}}, \quad L_j^k = \int_I \tau (ah(x, t_k) + bh^2(x, t_k)) \phi_j' dx + \int_I f_2 \phi_j dx,$$

on aura à résoudre le système

$$Aq^{k+1} = Bq^k + L^k. \quad (7.4)$$

7.3 Simulations numériques

Le code de calcul de la solution approchée du problème faible (6.1), (6.2) est écrit en fortran 90 et tourne sur une station *Silicon Graphics*. Il est composé de deux

FIG. 7.1 - Le cas β constant avec $\nu = 5.0 \cdot 10^{-3}$ et $\kappa = 1.5$.FIG. 7.2 - Le cas β non constant avec $\nu = 5.0 \cdot 10^{-3}$ et $\kappa = 1.5$.FIG. 7.3 - Le cas β non constant avec $\nu = 1.0 \cdot 10^{-3}$ et $\kappa = 1.5$.

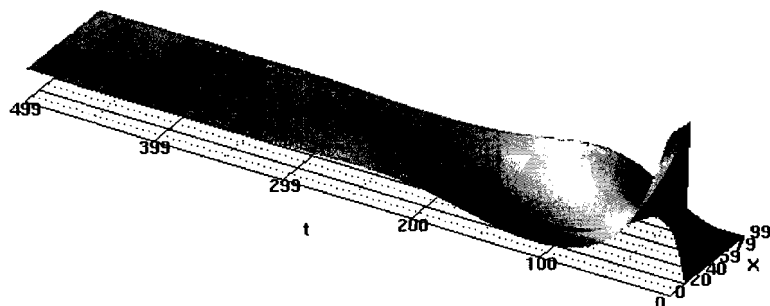


FIG. 7.6 – Le cas β non constant avec $\nu = 5.0 \cdot 10^{-2}$ et $\kappa = 0.0$.

$\nu = 5.0 \cdot 10^{-4}$, $\kappa = 0.6$. On est en présence de deux onde qui se déplace, l'un vers l'amont, l'autre vers l'aval, se réfléchissent et s'amortissent au cours du temps pour atteindre le régime stationnaire $h = \text{constante}$ et $q = 0$.

En prenant $\kappa = 0$ et $\nu = 0$, le problème change de nature (devient hyperbolique) et le schéma numérique explose. Ceci est lié au fait que la deuxième équation du problème est traité par la méthode des éléments finis qui n'est pas adéquate pour les problèmes hyperboliques.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

Les résultats obtenus aussi bien pour les milieux poreux déformables et les écoulements fluviaux avec les hypothèses restrictives que nous avons faites montrent la complexité de la tâche pour résoudre des modèles généraux.

Les simulations obtenues pour le transfert de polluant en milieu poreux déformable peuvent être utilisées comme outils de prédiction. Par exemple, les déchets toxiques sont en général enfouillis dans des sols argileux et on peut définir un seuil de pollution que le modèle pourra en cas de catastrophe détecter sans pour autant que l'on place des appareils souvent assez coûteux dans la zone sinistrée.

Un des objectifs que nous nous sommes fixés par la suite est de faire une analyse mathématique de l'équation de transport en milieu poreux déformable et du schéma numérique associé. Nous allons nous fonder sur des études déjà menées dans ce domaine [14], [15], [51].

En ce qui concerne l'écoulement fluvial, nous tenterons par la suite de prouver l'unicité de la solution du problème (6.1), (6.2). Nous étudierons une méthode mixte, Lax-Fréderichs pour la première équation et *STILS* pour la deuxième équation dans le cas où κ et ν sont nulles. D'autre part nous mènerons une étude mathématique et numérique du problème de Saint-Venant visqueux en prenant en compte la topographie du milieu. Parmi les modèles récents qui prennent en compte une topographie quelconque régulière, on peut citer celui développé par F.Bouchut et al.[16] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(H - \theta_x \frac{H^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\ln(1 - H\theta_x)}{-\theta_x} u \right) = 0, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{u^2}{2} \frac{1}{(1 - H\theta_x)^2} + Hg \cos \theta \right) = -g \sin \theta. \quad (8.2)$$

Chapitre 9

Annexes

9.1 Annexe A

Fichier de module en f90 pour la resolution d'un modèle d'écoulement souterrain

LISTE DES MODULES

parametre : contient les constantes utilisées par le programme

coordonnee : enregistrement des variables points et vitesses

outilmaillage : subroutines pour le maillage du domaine

rec(icode,rex,rey,nx,ny) : lecture de rectangle

integer function noeud(s,t,z,rex,rey,pnoeud,nn,neuv) : numérote les noeuds

findnn(x,y,z,pnoeud,nn,neuv) : recherche le numéro de noeud

fonction : fonction source

*real*8 function source(x,y,z)*

Xshape : fonctions de bases des éléments finis

b8shap(x1,x2,x3,r,s,t,shape,dadl,dadg,det,iopt,ierr) : brique a 8 noeuds

outilMatRigid : contient les routines pour déterminer la matrice de rigidité

ematr (key,stiff,be,lm,x,y,z,fl,ue) : donne la matrice élémentaire et le second membre

assma (key,na,ili,icol,neq,a,b,stiff,be,lm,ism) : assemblage de la matrice élémentaire

OperMatCreuse : opération sur les matrices creuses

mave (na,ili,icol,a,u,w,nn,ism) : calcule le produit matrice creuse* vecteur

ResoudEq : resolution de $Ax=b$

gc(na,ili,icol,a,b,u,neq,ite,r,s,q,ism) : méthode gradient conjugué

```

integer, parameter :: nfa=6      !nombre de faces par element
real*8, parameter :: ksat=0.0095d0
real*8, parameter :: alpha=0.0262d0
real*8, parameter :: nh=2.088d0
real*8, parameter :: mh=1.0d0-(1.0d0/nh)
real*8, parameter :: us=1.26d0
real*8, parameter :: ur=0.064d0
real*8, parameter :: usl=0.191d0 !Shrinkage Limit
real*8, parameter :: esl=0.32d0
real*8, parameter :: uae=0.37d0 !Air Entry into microaggregates
real*8, parameter :: eae=0.4053d0
real*8, parameter :: ulm=1.176d0 !Limit of contrib of Macorporosity
real*8, parameter :: elm=1.32414d0
real*8, parameter :: ums=1.224d0 !Maximun microaggregate Swelling
real*8, parameter :: ems=1.36d0
real*8, parameter :: kr=1.14d0 ! pente de retrait principal
real*8, parameter :: ko=0.465d0 ! pente apres gonflement maximum
!
end module parametre

subroutine donnees(ielem,nelem,pnoeud,nneu,nbfix,nfix,bcond,f,u)

! ielem: matrice de definition des topologies des elements

! nelem: nombres d'element par sous domaine

! pnoeud: coordonnees des noeuds

! nneu: nombre de noeud

! nbfix: nombre de noeuds fixes

! nfix: numeros des noeuds fixes

! bcond: valeur des cond. uax lim. fixes

! f: matrice des second membres

! u: valeur de la solution a t=0

```

```

do i=1,nbfix
  u(nfix(i))=bcond(i)
end do
!
do i=1,nneu
  f(i)=source(pnoeud%abc(i),pnoeud%ord(i), &
    pnoeud%cot(i),pastemp)
end do
!
return
!
end subroutine donnees

subroutine b8shap(x1,x2,x3,r,s,t,shape,dadl,dadg,det,iopt,ierr)
!
!-----
! call b8shap (x1,x2,x3,r,s,t,shape,dadl,dadg,det,iopt ! &
! ,ierr)
!
!
! usage
! =====
!
!
! quadrilateral element, in three dimensions.
!
! linear shape functions.
!
! purpose
!
! -----
!
! finds shape function local and global derivatives and
!
! jacobian of transformation, at a point specified by the
!
! coordinates (r,s,t)in the reference element.
!

```

```

! notes
! -----
!
!     1. iopt = 0 shape functions only.
!
! 1 local derivatives.
!
! 2 local derivatives + jacobian.
!
! 3 local derivatives + jacobian + global derivatives.
!
! -1 , -2 and -3 outputs the shape functions as well.
!
!     2. ierr = 0 successful execution
!
!             1 zero jacobian.
!
!             -1 negative jacobian.
!
! -----
!
!     implicit none
!     real*8, dimension(ndf) :: x1,x2,x3,shape
!     real*8, dimension(ndf,3) :: dadl,dadg
!     real*8, dimension(3,3) :: a,b
!     integer :: ierr,iopt,i,j,k,iopt1
!     real*8  ::r,s,t,rp,rm,sp,sm,tp,tm,det,c1,c2,c3,c
!
!
!     ierr = 0
!     rp = 1. + r
!     rm = 1. - r
!     sp = 1. + s
!     sm = 1. - s
!     tp = (1. + t)*0.125
!     tm = (1. - t)*0.125
!     if (iopt .gt. 0) go to 10
!
!     shape functions

```

```

!
!   jacobian matrix a
!
do i = 1,3
  c1   = 0.0
  c2   = 0.0
  c3   = 0.0
  do j = 1,8
    c1   = c1 + dadl(j,i)*x1(j)
    c2   = c2 + dadl(j,i)*x2(j)
    c3   = c3 + dadl(j,i)*x3(j)
  end do
  a(i,1) = c1
  a(i,2) = c2
  a(i,3) = c3
end do

!
!   invert jacobian
!
do i = 1,3
  j   = i + 1
  if (j .eq. 4) j = 1
  k   = j + 1
  if (k .eq. 4) k = 1
  b(i,i)= a(j,j)*a(k,k) - a(k,j)*a(j,k)
  b(i,j)= a(k,j)*a(i,k) - a(i,j)*a(k,k)
  b(j,i)= a(j,k)*a(k,i) - a(j,i)*a(k,k)
end do

!
!   find determinant of jacobian matrix.
!
det = a(1,1)*b(1,1) + a(1,2)*b(2,1) + a(1,3)*b(3,1)

!
!   check determinant of jacobian
!
if (abs(det) .lt. eps) go to 70
if (det .gt. 0.) go to 45
ierr = -1
45 if (iopt1 .eq. 2) return

!
!   find global derivatives

```



```

! iwork: vecteur de travail de long. neq

! isym: isym = 1 si la matrice est memorisee sous forme symetrique

! isym = 0 sinon
!
  implicit none
  integer :: i,j,na,n,nel,neuman,iel,isym,nneu
  integer :: neq,k,m
  integer, dimension(ndf+nfa,nel) :: ielem
  integer, dimension(nneu) :: ia
  integer, dimension(nnamax) :: ili
  integer, dimension(nnmax) :: icol
  integer, dimension(nnmax) :: iwork
!

na = 0
do m=1,neq
  icol(m) = na + 1
  do i=1,neq
    iwork(i) = 0
  end do
  do n=1,nel
    do i=1,ndf
      if (ia(ielem(i,n)) .eq. m) then
        do j=1,ndf
          k = ia(ielem(j,n))
          if (isym .eq. 0 .and. k .ge. 1) then
            iwork(k) = 1
          else if (isym .eq. 1 .and. k .ge. m) then
            iwork(k) = 1
          end if
        end do
      end if
    end do
  end do
end do
!

do k=1,neq
  if (iwork(k) .eq. 1)then
    na = na + 1
    if (na+1 .gt. nnamax) then

```

```

        if (abs(bcond(i)).lt.eps) ia(nd) = i
    end do
end if
!
! numerotation des equations
!
neq = 0
do j=1,nn
    if (ia(j) .ge. 0) then
        if (ia(j) .eq. 0) then
            neq = neq + 1
            ia(j) = neq
        else
            ia(j) = 0
        end if
    end if
end do
!
end subroutine veccli

subroutine gc(na,ili,icol,a,b,u,neq,ite,r,s,q,ism)
!
! resolution du systeme lineaire ax=b, a sym. def. pos.
!
! methode du gradient conjugue preconditionne
!
!     na: nb de coeff non nuls dans la matrice a
!     ili: indices de ligne pour la matrice a, de long. na
!     icol: indices de colonne pour la matrice a, de long neq+1,
!     avec icol(neq+1) = na+1
!     a: matrice du systeme memorisee sous forme creuse, les lignes
!     sont memorisee de maniere contigue

```

```

!
! iterations
!
do ite=1,itmax
!
  if(r20.eq. zero) go to 999
!
    do i=1,neq
      s(i) = r(i)          ! pas de precondition.
    end do
!
  rs = zero
  do i=1,neq
    rs = rs + r(i)*s(i)    ! rs = (r|s)
  end do
!
  if (ite .eq. 1) then
    do i=1,neq
      q(i) = s(i)
    end do
    rsold = rs
  else
    beta = rs/rsold
    do i=1,neq
      q(i) = s(i) + beta*q(i)    ! q = s + beta*q
    end do
    rsold = rs
  end if
  call mave(na,ili,icol,a,q,s,neq,ism) ! s = a*q
  qaq = zero
  do i=1,neq
    qaq = qaq + q(i)*s(i)      ! qaq = (q|a*q)
  end do
  alpha = rsold / qaq
  do i=1,neq
    u(i) = u(i) + alpha*q(i)    ! u = u + alpha*q
    r(i) = r(i) - alpha*s(i)    ! r = r - alpha*a*q
  end do
!
  r2 = zero
  do i=1,neq

```

```

      betac=6.0d-2*larg*larg*g*temps**2/(2*long**2)
      real*8,    parameter :: betac=zero
      real*8,    parameter :: alpha=1.*larg*25.D-4+betac
      real*8,    parameter :: theta=1.0d0
!      real*8,    parameter :: lambda=200
      real*8,    parameter :: lambda=1.d0
      real*8,    parameter :: beta=larg*larg*g*temps**2/(2*long**2)
!      real*8,    parameter :: beta=0.0d0
      real*8,    parameter :: kappa=0.6d0
      real*8,    parameter :: res=1.0d-8
      real*8,    parameter :: pi=3.1415926536d0
!
end module parametre

      subroutine initsolve(nh,nQ)
      implicit none
      real*8, dimension(-2:n+2) ::nh
      real*8, dimension(-2:n+2) ::nQ
      integer :: i,j,k,l
!
! initialisation debit-hauteur
!
      do i=0,n+1
        if (i.le.2000) then
          nh(i)=3.0d-01
!          nh(i)=h(i*delta,zero)
        else
!          nh(i)=h(i*delta,zero)
          nh(i)=0.0d-1
        end if
      end do
!
!Cas d'une marche comme cond init
!
      do i=0,n+1
        nQ(i)=Q(i*delta,zero)
      end do
!
end subroutine initsolve

```

```

SUBROUTINE DGTTRF( N, DL, D, DU, DU2, IPIV, INFO )

```

```

*
*      On exit, D is overwritten by the n diagonal elements of the
*      upper triangular matrix U from the LU factorization of A.
*
* DU      (input/output) DOUBLE PRECISION array, dimension (N-1)
*      On entry, DU must contain the (n-1) super-diagonal elements
*      of A.
*
*      On exit, DU is overwritten by the (n-1) elements of the first
*      super-diagonal of U.
*
* DU2     (output) DOUBLE PRECISION array, dimension (N-2)
*      On exit, DU2 is overwritten by the (n-2) elements of the
*      second super-diagonal of U.
*
* IPIV    (output) INTEGER array, dimension (N)
*      The pivot indices; for 1 <= i <= n, row i of the matrix was
*      interchanged with row IPIV(i). IPIV(i) will always be either
*      i or i+1; IPIV(i) = i indicates a row interchange was not
*      required.
*
* INFO    (output) INTEGER
*      = 0:  successful exit
*      < 0:  if INFO = -k, the k-th argument had an illegal value
*      > 0:  if INFO = k, U(k,k) is exactly zero. The factorization
*           has been completed, but the factor U is exactly
*           singular, and division by zero will occur if it is used
*           to solve a system of equations.
*
* =====
*
* .. Parameters ..
* DOUBLE PRECISION  ZERO
* PARAMETER         ( ZERO = 0.0D+0 )
*
* ..
* .. Local Scalars ..
* INTEGER           I
* DOUBLE PRECISION  FACT, TEMP
*
* ..
* .. Intrinsic Functions ..
* INTRINSIC         ABS

```

```

        FACT = D( I ) / DL( I )
        D( I ) = DL( I )
        DL( I ) = FACT
        TEMP = DU( I )
        DU( I ) = D( I+1 )
        D( I+1 ) = TEMP - FACT*D( I+1 )
        DU2( I ) = DU( I+1 )
        DU( I+1 ) = -FACT*DU( I+1 )
        IPIV( I ) = I + 1
    END IF
30 CONTINUE
    IF( N.GT.1 ) THEN
        I = N - 1
        IF( ABS( D( I ) ).GE.ABS( DL( I ) ) ) THEN
            IF( D( I ).NE.ZERO ) THEN
                FACT = DL( I ) / D( I )
                DL( I ) = FACT
                D( I+1 ) = D( I+1 ) - FACT*DU( I )
            END IF
        ELSE
            FACT = D( I ) / DL( I )
            D( I ) = DL( I )
            DL( I ) = FACT
            TEMP = DU( I )
            DU( I ) = D( I+1 )
            D( I+1 ) = TEMP - FACT*D( I+1 )
            IPIV( I ) = I + 1
        END IF
    END IF
*
*   Check for a zero on the diagonal of U.
*
    DO 40 I = 1, N
        IF( D( I ).EQ.ZERO ) THEN
            INFO = I
            GO TO 50
        END IF
    40 CONTINUE
    50 CONTINUE
*
    RETURN

```

```

*           The order of the matrix A.
*
* NRHS      (input) INTEGER
*           The number of right hand sides, i.e., the number of columns
*           of the matrix B.  NRHS >= 0.
*
* DL        (input) DOUBLE PRECISION array, dimension (N-1)
*           The (n-1) multipliers that define the matrix L from the
*           LU factorization of A.
*
* D         (input) DOUBLE PRECISION array, dimension (N)
*           The n diagonal elements of the upper triangular matrix U from
*           the LU factorization of A.
*
* DU        (input) DOUBLE PRECISION array, dimension (N-1)
*           The (n-1) elements of the first super-diagonal of U.
*
* DU2       (input) DOUBLE PRECISION array, dimension (N-2)
*           The (n-2) elements of the second super-diagonal of U.
*
* IPIV      (input) INTEGER array, dimension (N)
*           The pivot indices; for 1 <= i <= n, row i of the matrix was
*           interchanged with row IPIV(i).  IPIV(i) will always be either
*           i or i+1; IPIV(i) = i indicates a row interchange was not
*           required.
*
* B         (input/output) DOUBLE PRECISION array, dimension (LDB, NRHS)
*           On entry, the matrix of right hand side vectors B.
*           On exit, B is overwritten by the solution vectors X.
*
* LDB       (input) INTEGER
*           The leading dimension of the array B.  LDB >= max(1,N).
*
* INFO      (output) INTEGER
*           = 0:  successful exit
*           < 0:  if INFO = -i, the i-th argument had an illegal value
*
* =====
*
* .. Local Scalars ..
* LOGICAL          NOTRAN

```

```
        ITRANS = 1
    END IF
*
*   Determine the number of right-hand sides to solve at a time.
*
    IF( NRHS.EQ.1 ) THEN
        NB = 1
    ELSE
        NB = MAX( 1, ILAENV( 1, 'DGTTRS', TRANS, N, NRHS, -1, -1 ) )
    END IF
*
    IF( NB.GE.NRHS ) THEN
        CALL DGTTS2( ITRANS, N, NRHS, DL, D, DU, DU2, IPIV, B, LDB )
    ELSE
        DO 10 J = 1, NRHS, NB
            JB = MIN( NRHS-J+1, NB )
            CALL DGTTS2( ITRANS, N, JB, DL, D, DU, DU2, IPIV, B( 1, J ),
                &
                LDB )
10    CONTINUE
    END IF
*
*   End of DGTTRS
*
    END
```


Bibliographie

- [1] ABOULAICH R., AFILAL S., POUSIN J., Sur un modèle de pollution en milieu poreux, *Maths-recherche et Applications*, N°2, 108-120, (2000).
- [2] ANDERSON E. ET AL., Lapack Users'Guide, *SIAM*, Philadelphia, (1992).
- [3] ARONSON D., BÉNILAN P., Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans \mathbb{R}^N , *C.R.Acad.Sc.Paris*, t. 288, (1979).
- [4] ARONSON D., CRANDALL M.G., PELETIER L.A., Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem, *Non linear Analysis, Theory, Method and Application*, 6, N°10, 1001-1022, (1982).
- [5] AZÉRAD P., Analyse des équations de Navier-Stokes en bassin peu profond et de l'équation de transport, *Thèse de doctorat, Université de Neuchâtel* (1996).
- [6] AZÉRAD P., PERROCHET P., Space-Time Integrated Least-Squares : Solving a pure advection equation with a pure diffusion operator, *J. Comput. Phys.*, 117, 183-193, (1995).
- [7] BAVEYE P., Operational aspects of the mechanics of deforming porous media : Theory and application to expansive soils, *In T. Karalis(ed) mechanics of swelling, Springer-Verlag Berlin*, 79-96, (1992).
- [8] BÉNILAN P., CRANDALL M.G., *The continuous dependence on ϕ of solutions of $\partial_t u - \Delta\phi(u) = 0$* , *Indiana Univ. Math. J.*, 30, N°2, (1981).
- [9] BÉNILAN P., CRANDALL M.G., PIERRE M., Solution of the porous medium equation in \mathbb{R}^n under optimal conditions, *Indiana Univ. Math. J.* 33, N°1, (1984).
- [10] BENQUÉ J.P., HAUGEL A., VIOLLET P.L., Engineering Applications of Computational hydraulics, *Hommage to Alexandre Preissmann*, II, (1992).
- [11] BERMÚDEZ A., Mathematical techniques for some environmental problems related to water pollution control, in *Mathematics Climate and environment*, edited by J. I. Diaz J. L. Lions, *Masson*, (1993).
- [12] BERMÚDEZ A., Mathematical techniques for some environmental problems related to water pollution control, in *Environment, Economics and their Mathematical Models*, edited by J. I. Diaz J. L. Lions, *Masson*, (1994).

- [30] DUBINSKII J.A., Certaines inégalités intégrales et résolution de systèmes d'équations elliptiques quasi linéaires dégénérées, *Mat. Sbornik*, 64 (106), 458-480, (1964).
- [31] DUBINSKII J.A., Convergence faible dans les équations elliptiques paraboliques non linéaires, *Mat. Sbornik*, 67 (109), 609-642, (1965).
- [32] ERN A., GUERMOND J.-L., Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre, *mathématiques et Applications*, 36, Springer (2002).
- [33] ESTELLE OLCHITZKY, Couplage hydromécanique et perméabilité d'une argile gonflante non saturée sous sollicitations hydriques et thermiques ; Courbe de sorption et perméabilité à l'eau, *Thèse de Doctorat de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, France*, (2002).
- [34] GARNIER P., Détermination des caractéristiques hydrodynamiques des sols déformables par la méthode inverse, *Thèse, ORSTOM*, (1996)
- [35] GARNIER P., RIEU M., BOIVIN P. VAUCLIN M., BAVEYE P., Determining the Hydraulic Properties of a Swelling Soil from a Transient Evaporation Experiment, *Soil Sci. Soc. Am. J.* 61 :1555-1563, (1997).
- [36] GERBEAU F., PERTHAME B., Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; Numerical results, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-series B*. 1, N° 1, 89-102, (2001).
- [37] GOUTAL N., Résolution des équations de Saint-Venant en régime transcritique par une méthode d'éléments finis : application aux bancs découvrants, *Bulletin de la direction des études et recherches, série C, n°4*, (1987).
- [38] LEVEQUE R.J., Numerical Methods for Conservation Laws, Birkhauser, (1991).
- [39] GUI-QUIANG CHEN, Remarks on DiPerna's paper "Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics". *Proc. AMS*, 125 (10), 2981-2986,(1997).
- [40] HUANG S., ZHAO J., Structure of Flood Wave with Viscosity. *Math. Meth. Appl.Sci.*, 23, 949-963, (2001).
- [41] HUYAKORN P.S., PINDER G.F. Computational methods in subsurface flow *Academic Press, Inc London*, (1983).
- [42] JACOVKIS P.M., TABAK E.G., A kinematic Wave Model for Rivers with Flood Plains and Other Irregular Geometries *Math. Comput. Modelling*, 24, N°11, 1-21, (1996).
- [43] LAWRENCE C. EVANS, Partial Differential Equation, 19, *A.M.S.*, (1998).
- [44] LEIJ F.J., TORIDE N., Discrete time and length averaged solutions of the advection-dispersion equation, *Water resources research*, 31,n°7, 1713-1724, (1995).

- [60] SAINT-VENANT J.C.A., Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application au crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit, *C.R.A.S. Paris*, 73,147-154, (1871).
- [61] SIMON J., Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$ *Annali di matematica pura ed applicata*, N°IV, CXLVI, 65-96, (1987).
- [62] SPOSITO G., GIRALDEZ J.V., REGINATO R.J., The theoretical interpretation of field observations of soil swelling through a material coordinate transformation, *contribution from the departement of soil science and agricultural engineering, universite of California, Riverside, CA 92502, and the U.S. water conservation Lab., 4331 east Broadway, Phoenix, AZ 85040*, (1975).
- [63] SUNDBYE L., Global existence for the Dirichlet problem for the viscous shallow water equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 202, N°1, 236-258, (1996).
- [64] TEMAM R., Navier-Stokes Equations, *Studies in Mathematics and its Applications, Revised Edition*, 2, (1991).
- [65] TOUMA J., Étude critique de la caractérisation hydrodynamique des sols non saturés : rôle de l'air, Influence de l'écoulement multidimensionnel de l'eau, *thèse présentée à l'université scientifique et médicale et l'Institut national polytechnique de Grenoble*, (1984).
- [66] VAN GENUCHTEN M. T., SISSON J.B., Estimation of hydraulic conductivity without computing fluxes; *Proc. Int. Workshop, Indirect Methods for Estimating the Hydraulic Properties of Unsaturated Soil.*, University of California, Riverside, 665-674, (1992).
- [67] VERDI C., On the numerical approach to two-phase Stefan problem with non-linear flux, *Calcolo* 22, N°3, 351-381, (1985).
- [68] ZEYTOUNIAN R. KH., Modélisation asymptotique en mécanique des fluides newtoniens, *Springer-Verlag*, (1994).