

THESE

Présentée à

L'UNIVERSITE DE PERPIGNAN

U.F.R. SCIENCES EXACTES ET EXPERIMENTALES

pour obtenir le grade de Docteur de L'Université de Perpignan

Spécialité : Sciences de l'Ingénieur

Mention : Energétique

par

Joseph SARR

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA CONVECTION NATURELLE DANS UNE ENCEINTE FERMEE LIMITEE PAR DEUX CYLINDRES CONCENTRIQUES HORIZONTAUX ET DEUX PLANS DIAMETRAUX

Soutenue le 25 Juin 1993 devant la commission d'examen composée de

Président : M. D. RONDOT, Professeur à l'Université de Franche-Comté

Rapporteurs :

M. G. LE PALEC, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II

M. D. RONDOT, Professeur à l'Université de Franche-Comté

Examineurs :

M. S. BENET, Maître de Conférences à l'Université de Perpignan

M. S. BRUNET, Professeur à l'Université de Perpignan

M. M. DAGUENET, Professeur à l'Université de Perpignan

M. A. KERGREIS, Professeur à l'Université de Paris-XII

M. G. PIAR, Professeur à l'Université de Paris-XII

*A ma femme Geneviève
A mon fils Jean-Michel Amath*

Avant-propos

Monsieur Sauveur Bénét, Maître de Conférences à l'Université de Perpignan, Directeur du Laboratoire de Physique Appliquée (LPA), a bien voulu m'inscrire dans son équipe, m'autoriser à effectuer la partie théorique de mes recherches au Laboratoire de Thermodynamique et Energétique (LTE) de l'Université de Perpignan et m'aider à réaliser la partie expérimentale. Je lui exprime toute ma gratitude.

Monsieur le Professeur Daguinet, Directeur du Laboratoire de Thermodynamique et Energétique de l'Université de Perpignan, après m'avoir proposé ce sujet, m'a accueilli dans son Laboratoire et a dirigé mes travaux. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Messieurs Piar et Kergreis, Professeurs à l'Université de Paris-XII, Monsieur Rondot, Professeur à l'Université de Franche-Comté, Monsieur Brunet, Professeur à l'Université de Perpignan, Monsieur Le Palec, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II, ont bien voulu examiner ce travail et participer à mon jury de Thèse. Je leur exprime mes sincères remerciements.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Cheikh Mbow, chercheur du LTE qui a proposé la méthode de résolution des équations de transfert et à Monsieur Belkacem Zeghmati, Maître de Conférences à l'IUT de Belfort avec qui j'ai eu de nombreuses et fructueuses discussions.

Mes sincères remerciements vont également à l'ensemble des membres du LTE, notamment à Messieurs Shin, De Moraes, Khédari, Mammou, André Grandjean, ainsi qu'à Messieurs Roland Bergé ingénieur au LPA et Jean Xech, ingénieur, responsable du Centre de Calcul de l'Université de Perpignan.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES MATIERES	I
NOMENCLATURE	V
INTRODUCTION	1
I DEFINITION ET FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME	3
I-1 Description du problème	3
I-2 Hypothèses simplificatrices	4
I-3 Formulation vectorielle du problème	4
I-4 Introduction de la fonction de courant et de la vorticité	5
I-4-1 Définition de la fonction de courant et de la vorticité	5
I-4-2 Equations de transferts	5
I-4-3 Conditions initiales	6
I-4-4 Conditions aux limites	6
I-5 Transformations conformes	7
I-5-1 Rappels sur les fonctions d'une variable complexe	7
I-5-2 La représentation conforme	8
I-5-3 Choix de la transformation	9
I-5-4 Formules de transformations	10
I-5-5 Equations de transfert	11
I-5-6 Conditions initiales	11
I-5-7 Conditions aux limites	12
I-5-8 Coefficients d'échange de chaleur	14

I-6	Adimensionnalisation	15
	I-6-1 Choix des grandeurs de référence	15
	I-6-2 Equations de transfert adimensionnelles	16
	I-6-3 Conditions initiales	16
	I-6-4 Conditions aux limites	17
	I-6-5 Formulation des coefficients d'échange au niveau des parois	19
II	ANALYSE NUMERIQUE	20
II-1	Approximations des dérivées partielles à l'aide de la méthode aux différences finies	20
II-2	Maillage	21
II-3	Traitement numérique de l'équation de la fonction de courant	22
II-4	Discrétisation des composantes de la vitesse	24
II-5	Discrétisation des équations de la vorticité et de la chaleur à l'intérieur du domaine	24
	II-5-1 Premier demi-temps (implicite suivant ϕ entre n et $n+1/2$)	24
	II-5-2 Deuxième demi-temps (implicite suivant ψ entre n et $n+1/2$)	25
	II-5-3 Développement de la première équation	26
	II-5-4 Développement de la deuxième équation	26
	II-5-5 Formulation des coefficients	26
II-6	Conditions initiales et aux limites	27
	II-6-1 Ecriture des conditions initiales	27
	II-6-2 Ecriture des vitesses	28
	II-6-3 Discrétisation de la fonction de courant	28
	II-6-4 Discrétisations de l'équation de la chaleur aux frontières	29
	II-6-4-1 Premier demi-temps	29
	II-6-4-2 Deuxième demi-temps	30
	II-6-4-3 Développement de la première équation	31
	II-6-4-4 Développement de la deuxième équation	31
	II-6-4-5 Formulation des coefficients	32

II-6-5	Ecriture des conditions de flux et de températures	35
II-6-6	Discrétisation de la vortacité	35
II-6-7	Discrétisation des expressions du nombre de Nusselt sur les parois	36
II-7	Résolution de l'équation de la chaleur et de la vortacité	37
7-1	Première équation(implicite suivant ϕ entre n et $n + 1/2$)	37
7-2	Deuxième équation(implicite suivant ψ entre $n+1/2$ et $n+1$)	38
7-3	Factorisation des systèmes d'équations	40
II-8	Organisation générale des calculs	41
II-9	Tests de convergence des calculs	43
II-10	Facteur de forme	43
III	RESULTATS NUMERIQUES ET INTERPRETATIONS	44
A	Validation de notre algorithme par l'étude particulière de l'anneau	44
B	Résultats numériques et interprétations	45
III-1	Etude du régime transitoire	46
III-1-1	Evolution des lignes de courant et des isothermes	46
III-1-2	Evolution du nombre de Nusselt moyen	76
III-2	Etude du régime permanent	81
III-2-1	Lignes de courant	81
III-2-2	Lignes isothermes	81
III-2-3	Nombre de Nusselt local	99
III-2-4	Nombre de Nusselt moyen	99
III-2-5	Influence du fluide sur le transfert de chaleur	100
III -3	Conclusion	107

IV VALIDATION EXPERIMENTALE PAR INTERFEROMETRIE HOLOGRAPHIQUE	108
4-1 Considérations générales	108
4-1-1 Historique	108
4-1-2 Emulsions photosensibles	108
4-1-3 Enregistrements sur émulsions photosensibles	112
4-1-3-1 Enregistrement d'objets bidimensionnels	112
4-1-3-2 Enregistrement tridimensionnel : l'holographie	113
4-1-4 Particularité de l'enregistrement holographique	117
4-2 Interféromètre holographique pour l'étude des milieux transparents. Description du montage.	118
4-2-1 Schéma optique et principe de fonctionnement	118
4-2-2 Cas des milieux présentant une symétrie longitudinale	121
4-3 Mesures des températures	122
4-3-1 Description de la cellule expérimentale	122
4-3-2 Calcul de la différence de marche due aux phénomènes thermiques	125
4-4 Traitement et saisie des données	129
4-5 Résultats expérimentaux et commentaires	129
4-5-1 Visualisation du régime transitoire	129
4-5-2 Visualisation du régime permanent	134
4-5-3 Effets de bouts	134
4-6 Conclusion	136
CONCLUSION GENERALE	137
REFERENCES	138
ANNEXES	141

NOMENCLATURE DE LA PARTIE THEORIQUE

Lettres latines

- a paramètre représentant une longueur dans la transformation conforme () [m]
- b longueur caractéristique du problème [m]
- $C_{i,k,j}$ tableau des coefficients du premier système tridiagonal des équations paraboliques
- $CC_{i,k,j}$ tableau des coefficients du deuxième système tridiagonal des équations paraboliques
- C_p capacité calorifique massique du fluide à pression constante [J kg⁻¹ K⁻¹]
- $D_{i,k,j}$ tableau des coefficients du second membre du premier système tridiagonal des équations paraboliques
- $DD_{i,k,j}$ tableau des coefficients du second membre du deuxième système tridiagonal des équations paraboliques
- D_h diamètre hydraulique de l'enceinte étudiée [m]
- F fonction symbolique représentant la vorticité ou la température
- F_r facteur de forme de l'enceinte étudiée
- g accélération de la pesanteur [m s⁻²]
- G paramètre symbolique dans l'équation parabolique ()
- g_1 constante intervenant dans le calcul des coefficients $D_{i,k,j}$ et $DD_{i,k,j}$
- Gr. nombre adimensionnel de Grashoff modifié = $g \beta b^4 q_1 / \nu^2 \lambda$
- h coefficient de transfert de chaleur par convection = $q / \Delta T$ [W m⁻² K⁻¹]
- $h_{k,j}$ constante intervenant dans le calcul des coefficients $D_{i,k,j}$ et $DD_{i,k,j}$
- i nombre complexe tel que $i^2 = -1$
- L longueur de l'enceinte étudiée

M	Nombre de points de maillage dans la direction angulaire
N	Nombre de points de maillage dans la direction radiale
Nu	nombre adimensionnel de Nusselt = $h D_h / \lambda$
Nu2	deuxième définition du nombre adimensionnel de Nusselt = q^* / q_{cond}^*
p	pression [N m ⁻²]
P	paramètre symbolique dans l'équation parabolique ()
P _{k,j}	tableau des coefficients des équations des conditions aux limites du premier système parabolique
Pr	nombre adimensionnel de Prandtl = ν / α
Q _{j,k}	tableau de coefficients des équations des conditions aux limites du deuxième système parabolique
q*	flux total de chaleur traversant une paroi donnée [W]
q1	densité de flux de chaleur imposée sur la paroi cylindrique intérieure [W m ⁻²]
r, R	rayon du cylindre [m]
Re _u	nombre de Reynolds de maille horizontal = $ U P \exp(\phi_k) \Delta\phi$
Re _v	nombre de Reynolds de maille vertical = $ V P \exp(\phi_k) \Delta\psi$
T	température [K]
T0	température à l'instant initial [K]
T2	température imposée sur la paroi cylindrique extérieure [K]
t	temps [s]
u, v	composantes de la vitesse dans le système cartésien [m s ⁻¹]
U	composante horizontale de la vitesse dans le repère transformé = $\frac{1}{a e^\phi} \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) \Omega$

V composante verticale de la vitesse dans le repère transformé =

$$-\frac{1}{a e^{\phi}} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \Omega$$

x, y coordonnées dans le système cartésien [m]

z variable complexe

Lettres grecques

α diffusivité thermique du fluide [m² s⁻¹]

β coefficient d'expansion thermique du fluide [K⁻¹]

ΔT gradient de température entre les deux parois actives

Δt pas de temps [s]

$\Delta\phi, \Delta\psi$ pas d'espace suivant les directions ϕ et ψ respectivement

ϕ abscisse adimensionnelle radiale

γ facteur de relaxation dans la résolution de l'équation de Poisson

λ conductivité thermique du fluide [W m⁻¹ K⁻¹]

ν viscosité cinématique du fluide [m² s⁻¹]

ρ masse volumique du fluide [kg m⁻³]

Ω fonction de courant, telle que $u = \partial\Omega/\partial y$ et $v = -\partial\Omega/\partial x$ [m² s⁻¹]

ω vorticité = $(\partial v / \partial x - \partial u / \partial y)$ [s⁻¹]

ψ ordonnée adimensionnelle angulaire

Ψ inclinaison des plans diamétraux de l'enceinte [rd]

Indices

- 0 valeur à l'instant initial
- 1 sur le cylindre intérieur ou sur la première paroi isolée
- cond relatif à la conduction pure
- dim valeur dimensionnelle
- j, k indices de maillage suivant les axes ψ et ϕ respectivement
- M valeur sur la deuxième paroi isolée
- max valeur maximale
- n indice d'incrément du temps
- N valeur sur le cylindre extérieur
- opt optimum
- p indice d'itération

Signes

- valeur moyenne sur une paroi ou sur les deux parois
- ~ valeur adimensionnelle
- || valeur absolue

NOMENCLATURE DE LA PARTIE EXPERIMENTALE

Lettres latines

a	vibration lumineuse = $A e^{j\varphi}$
A	amplitude d'une vibration lumineuse
b_R	amplitude complexe d'une onde plane
e	base des logarithmes népériens
e	longueur de la cellule expérimentale
D	densité optique
E	énergie lumineuse
I	intensité lumineuse transmise
I_0	intensité lumineuse incidente
j	nombre complexe tel que $j^2 = -1$
L	chemin optique
m	numéro d'ordre d'une frange d'interférence
n	indice de réfraction de l'air
n_0	indice de réfraction de l'air à 0 °C sous la pression atmosphérique normale
n_t	indice de réfraction de l'air à t °C sous la pression atmosphérique normale
t	température [°C]
t	transparence en amplitude = $T^{1/2}$
T	transparence énergétique = I / I_0
$\overline{t(1,0)}$	température de la ligne de contact cylindre intérieur-isolant [°C]
t2	température imposée sur la paroi cylindrique extérieure [°C]

Indices

amb	ambiante
o	onde objet
r	onde de référence

Lettres grecques

α	coefficient de variation thermique de l'indice de réfraction = $3,678 \cdot 10^{-3} [^{\circ}\text{C}^{-1}]$
δ	différence de marche entre deux rayons optiques
Δ	écart entre deux valeurs
γ	facteur de contraste ou pente de la courbe de H et D
φ	phase d'une vibration lumineuse
κ	inclinaison de la cellule expérimentale par rapport au plan horizontal
λ	longueur d'onde
Σ_o	onde émise par l'objet
Σ_r	onde de référence
τ	durée d'exposition

Signes

—	valeur moyenne sur une paroi ou sur les deux parois
*	nombre complexe conjugué

INTRODUCTION

L'étude des transferts de chaleur par convection dans les cavités est intéressante compte tenu de leurs diverses applications dans le génie industriel. La cavité annulaire, en particulier, est souvent utilisée comme échangeur dans la conversion énergétique. Comme exemples d'applications, on peut citer le chauffage industriel de l'eau et la stérilisation médicale.

Une grande variété de corrélations mathématiques servant à la prédiction des transferts de chaleur sont disponibles dans la littérature, concernant aussi bien les processus transitoires que permanents, dans des enceintes rectangulaires [1-8] ou des cavités annulaires symétriques ou non [9 -12].

L'objectif du présent travail est d'étudier la convection naturelle transitoire et permanente dans une cavité annulaire symétrique limitée par deux plans diamétraux, avec un flux de densité constante appliqué sur le cylindre intérieur et une paroi cylindrique extérieure maintenue isotherme (fig.1-1). A notre connaissance, cette configuration n'a pas encore été étudiée. Notons que la configuration de l'enceinte étudiée est intéressante. Elle constitue en effet une généralisation qui admet comme cas particulier la cavité annulaire. Le code de calcul mis au point pourra donc aisément être appliqué à ce cas.

Dans le premier chapitre, après avoir bien posé le problème, nous établissons les équations du mouvement et du transfert de chaleur à l'aide de la fonction de courant et de la vorticité. Pour cela nous adoptons les hypothèses de bidimensionnalité de l'écoulement et les simplifications classiques de Boussinesq. Pour faciliter l'écriture des conditions aux limites, nous utilisons une représentation conforme [13] qui transforme le domaine curviligne en domaine rectangulaire.

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse numérique. Les techniques de discrétisations des différentes équations et les algorithmes des calculs sont développés. Les équations paraboliques décrivant l'écoulement sont résolues à l'aide de la méthode A.D.I. (*Alterned Direction Implicit method*) [2-15,14-16,20,21] tandis que l'équation de la fonction de courant est résolue par la méthode de surrelaxation S.O.R. (*Successive Overrelaxation*) [17].

Dans le troisième chapitre, nous présentons les résultats des simulations numériques effectuées. Les lignes de courant et les isothermes au sein du fluide étudié, ainsi que les nombres de Nusselt locaux et moyens sur les parois actives de l'enceinte, sont représentés et analysés, en fonction du nombre de Grashof modifié et du facteur de forme, aussi bien en régime transitoire que permanent.

Une étude expérimentale qui nous permet de valider les codes de calculs développés dans la première partie de ce mémoire est réalisée dans le quatrième chapitre. Des mesures de températures sont effectuées à l'aide de l'interférométrie holographique, sans perturbation des conditions opératoires. Nous décrivons le montage expérimental et présentons les interférogrammes caractéristiques. Une étude en temps réel permet de visualiser le régime transitoire et l'établissement du régime permanent

Pour ne pas alourdir le texte, nous présentons dans les annexes quelques compléments de mathématiques, l'algorithme de Thomas pour la résolution des équations tridiagonales et l'étude de l'influence du maillage sur nos résultats numériques.

CHAPITRE I

DEFINITION ET FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

I-1 Description du problème

Cette étude a pour objet la convection naturelle dans une enceinte fermée limitée par deux cylindres concentriques horizontaux et deux plans diamétraux. A l'instant initial, l'enceinte se trouve à la température T_0 . La mise en équation du problème est réalisée à l'aide des conditions aux limites suivantes: un flux de chaleur de densité constante q_1 est brusquement imposé sur la paroi cylindrique intérieure, la paroi cylindrique extérieure est maintenue à une température constante T_2 et les parois diamétrales sont isolées.

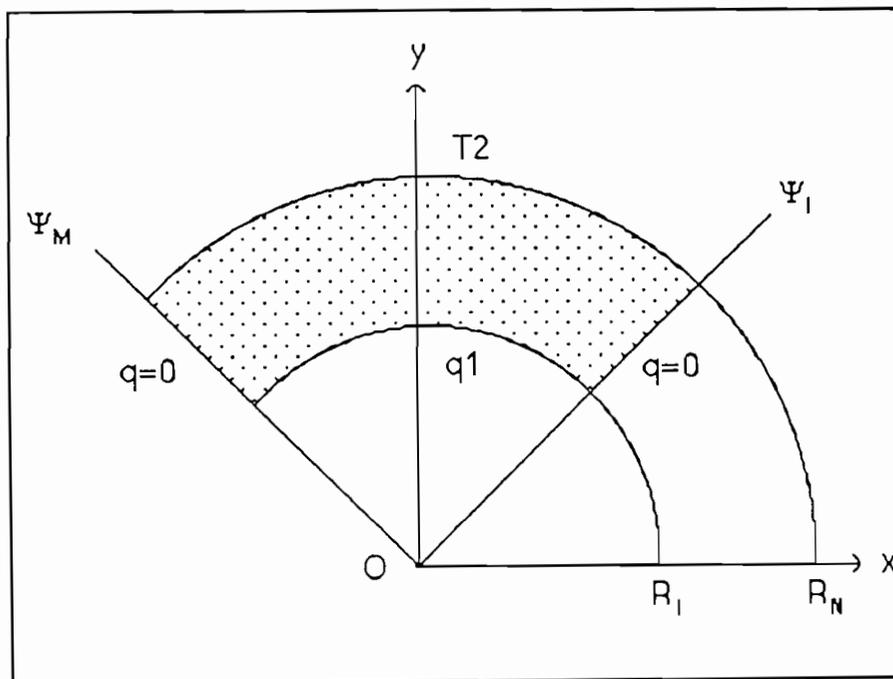


Figure 1-1: Représentation de l'enceinte dans le système cartésien

Equations des parois de l'enceinte:

- cylindre intérieur : $x^2 + y^2 = (R_1)^2$
- cylindre extérieur : $x^2 + y^2 = (R_N)^2$
- plan diamétral inférieur : $y = x \operatorname{tg}(\Psi_1)$
- plan diamétral supérieur : $y = x \operatorname{tg}(\Psi_M)$

avec:

R_1, R_N : rayons des cylindres intérieur et extérieur

Ψ_1, Ψ_M : inclinaisons des plans diamétraux inférieur et supérieur

I-2 Hypothèses simplificatrices

- Le fluide est incompressible.
- La viscosité est constante.
- La masse volumique est considérée comme constante sauf dans l'équation du mouvement. Elle obéit à l'approximation de Boussinesq suivante:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)] \quad (1-1)$$

- Dans l'équation de la chaleur, on néglige l'effet de pression, la fonction de dissipation et le rayonnement.
- La conductivité thermique est considérée comme constante
- Le problème est bidimensionnel et l'étude est réalisée dans un plan normal à l'axe des cylindres horizontaux.

I-3 Formulation vectorielle du problème

I-3-1 Equation de continuité

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (1-2)$$

I-3-2 Equation du mouvement

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \text{ grad}) \vec{V} = -\beta (T - T_0) \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{V} \quad (1-3)$$

I-3-3 Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \text{ grad}) T = \frac{\lambda}{\rho C_p} \Delta T \quad (1-4)$$

avec:

- ρ, λ : masse volumique et conductivité thermique du fluide.
- ν, β : viscosité cinématique et coefficient d'expansion thermique du fluide.
- C_p : capacité calorifique massique du fluide à pression constante.
- T : température du fluide.
- \vec{V}, \vec{g} : vitesse du fluide et accélération de la pesanteur.

I-4 Introduction de la fonction de courant et de la vorticité

I-4-1 Définition de la fonction de courant et de la vorticité

I-4-1-1 Fonction de courant

L'équation de continuité (1-2) peut encore s'écrire de la manière suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y}$$

u et v étant les composantes du vecteur \vec{V} respectivement suivant les axes Ox et Oy . Cela signifie qu'il existe une fonction de courant $\Omega(x,y)$ telle que les relations suivantes soient vérifiées:

$$u = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \tag{1-5}$$

I-4-1-2 Vorticité

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{V} = \omega \vec{k} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \tag{1-6}$$

I-4-2 Equations de transferts

En introduisant la vorticité dans notre système, le terme de pression disparaît dans l'équation du mouvement; les équations de transferts deviennent :

Equation de continuité:

$$\omega = - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) \tag{1-7}$$

Equation du mouvement:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \beta g \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (1-8)$$

Equation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1-9)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} : \text{diffusivité thermique du fluide}$$

I-4-3 Conditions initiales

Pour $t = 0$, on a : $u = v = 0$ et $T = T_0$

I-4-4 Conditions aux limites

Pour $t > 0$ on a :

- sur la paroi cylindrique intérieure

$$u = v = 0 \text{ et } q_1 = - \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad (1-10)$$

- sur la paroi cylindrique extérieure

$$u = v = 0 \text{ et } T = T_2 \quad (1-11)$$

avec $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, module du vecteur normal à la paroi cylindrique et dirigé vers l'extérieur de l'enceinte.

- sur le plan diamétral inférieur

$$u = v = 0 \text{ et } q = - \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \Psi} = 0 \quad (1-12)$$

- sur le plan diamétral supérieur

$$u = v = 0 \text{ et } q = + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial \Psi} = 0 \quad (1-13)$$

avec $\Psi = \text{Arctg} \left[\frac{y}{x} \right]$

En prévision de l'analyse numérique ultérieure, il est nécessaire de procéder à une transformation des équations de notre système. Une représentation conforme appropriée peut permettre de transformer les profils curvilignes de notre enceinte en segments de droites. La résolution numérique de notre système d'équations se fera ainsi en maillage rectangulaire dont la mise en oeuvre est plus commode.

I-5 Transformations conformes

I-5-1 Rappels sur les fonctions d'une variable complexe

On appelle *domaine* (D) du plan complexe un ensemble de points possédant les propriétés suivantes:

- avec chaque point de (D) un cercle suffisamment petit centré en ce point lui appartient
- deux points quelconques de (D) peuvent être reliés par une ligne polygonale formée de points appartenant à (D).

Dans un domaine (D) du plan xy, toute fonction $f(z)$ de la variable complexe z peut s'écrire sous la forme suivante:

$$f(z) = \Phi(x,y) + i \Psi(x,y) \quad \text{avec} \quad i^2 = -1 \quad (1-14)$$

Soit $Z = f(z)$ une fonction définie et uniforme dans un voisinage d'un point $z_0 = x_0 + i y_0$, sauf peut-être au point z_0 .

- la fonction $f(z)$ est dite *continue au point z_0* si elle est définie dans un voisinage de z_0 (y compris en z_0) et si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

- la fonction $f(z)$ est dite *continue dans un domaine (D)* si elle est continue en chaque point de ce domaine.

Soit M' un ensemble de points du plan (z). On peut définir, sur ce plan, une fonction $Z = f(z)$ si, à chaque point z de M' on fait correspondre un point déterminé ou un ensemble de points Z . La fonction $Z = f(z)$ est dite *uniforme* dans le premier cas et *multiforme* dans le second. L'ensemble M' est appelé *ensemble de définition* de la fonction $f(z)$ et l'ensemble N' de toutes les valeurs Z prises par $f(z)$ sur M' son *ensemble de variation*.

Posons : $z = x + iy$ et $Z = \Phi + i\Psi$ (1-15)

La définition d'une fonction de la variable complexe $Z = f(z)$ est équivalente à la définition de deux fonctions de deux variables réelles: $\Phi = \Phi(x,y)$ et $\Psi = \Psi(x,y)$.

En convenant de porter les valeurs z dans un plan complexe et les valeurs Z dans un autre, on peut représenter géométriquement une fonction de la variable complexe comme une *transformation* de l'ensemble M' du plan (z) sur l'ensemble N' du plan (Z).

Si la fonction $Z = f(z)$ est uniforme sur l'ensemble M' et si de plus à tout couple de points distincts de M' correspondent des points distincts de N' , alors une telle transformation est dite *biunivoque* ou *univalente* dans M' .

Citons, sans les démontrer, les deux théorèmes suivants:

- si une fonction $Z = f(z)$ est continue dans un domaine (d) et réalise une transformation biunivoque de ce domaine sur un ensemble (D) du plan (Z), alors (D) est un domaine et la fonction inverse $z = H(Z)$ est continue dans (D).

- soit $f(z) = \Phi(x,y) + i \Psi(x,y)$ une fonction définie dans un voisinage d'un point z . Supposons les fonctions $\Phi(x,y)$ et $\Psi(x,y)$ différentiables en ce point. On dit que la fonction de la variable complexe $f(z)$ est différentiable au point z si et seulement si on a, en ce point, les relations suivantes, dites conditions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (1-16)$$

Une fonction $f(z)$ différentiable en chaque point d'un domaine (D) est dite *analytique* dans ce domaine.

En d'autres termes, on peut dire qu'une fonction $f(z)$ est analytique au point z , si on peut trouver un cercle de centre z et de rayon non nul tel que, à l'intérieur de ce cercle, les fonctions $\Phi(x,y)$ et $\Psi(x,y)$ soient univoques et aient des dérivées partielles continues vérifiant identiquement les conditions Cauchy-Riemann.

I-5-2 La représentation conforme

Soit, dans le plan XY ou plan (Z), un point M' repéré par la variable complexe Z et dans le plan xy ou plan (z), un point m' repéré par la variable complexe z .

On peut écrire:

$$Z = X + iY = R e^{i\Phi} \quad \text{et} \quad z = x + iy = r e^{i\phi} \quad \text{avec } R \text{ et } r \geq 0 \quad (1-17)$$

Considérons une fonction de variable complexe $Z=f(z)$, définie et continue dans un domaine (d) du plan (z) qui établit une correspondance ponctuelle continue (fig. 1-4): à une courbe (c) décrite par un point m' dans le domaine (d) du plan (z) correspond une courbe (C) décrite par un point M' dans le domaine (D) du plan (Z).

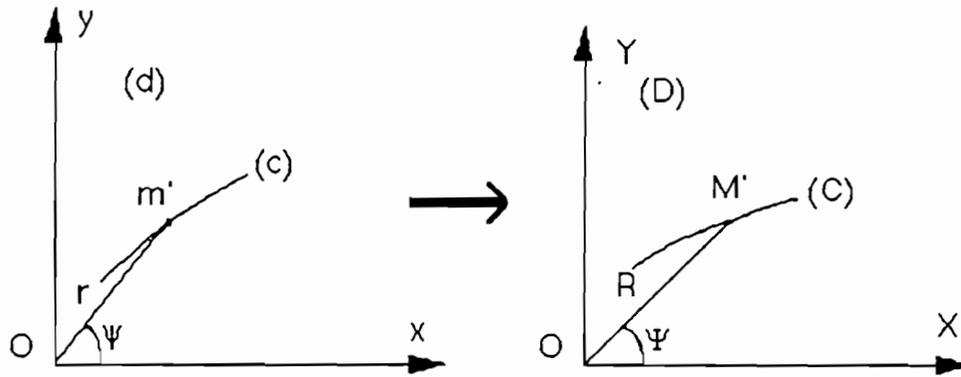


Figure 1-2 : correspondance ponctuelle continue

Si la fonction $f(z)$ est analytique et biunivoque, on dit que la correspondance est conforme, ou encore que $f(z)$ réalise une *transformation conforme*, ou une *représentation conforme*, du domaine (d) sur le domaine (D).

Une conséquence résultant de cette définition peut être exprimée par le théorème suivant : si une fonction de la variable complexe $Z = f(z)$ réalise une représentation conforme d'un domaine (d), sa dérivée est non nulle en tout point du domaine.

I-5-3 Choix de la transformation

$$\text{Posons } f(z) = \text{Log}\left(\frac{z}{a}\right) = \phi(x,y) + i \psi(x,y) \text{ et } z = x + iy \quad (1-18)$$

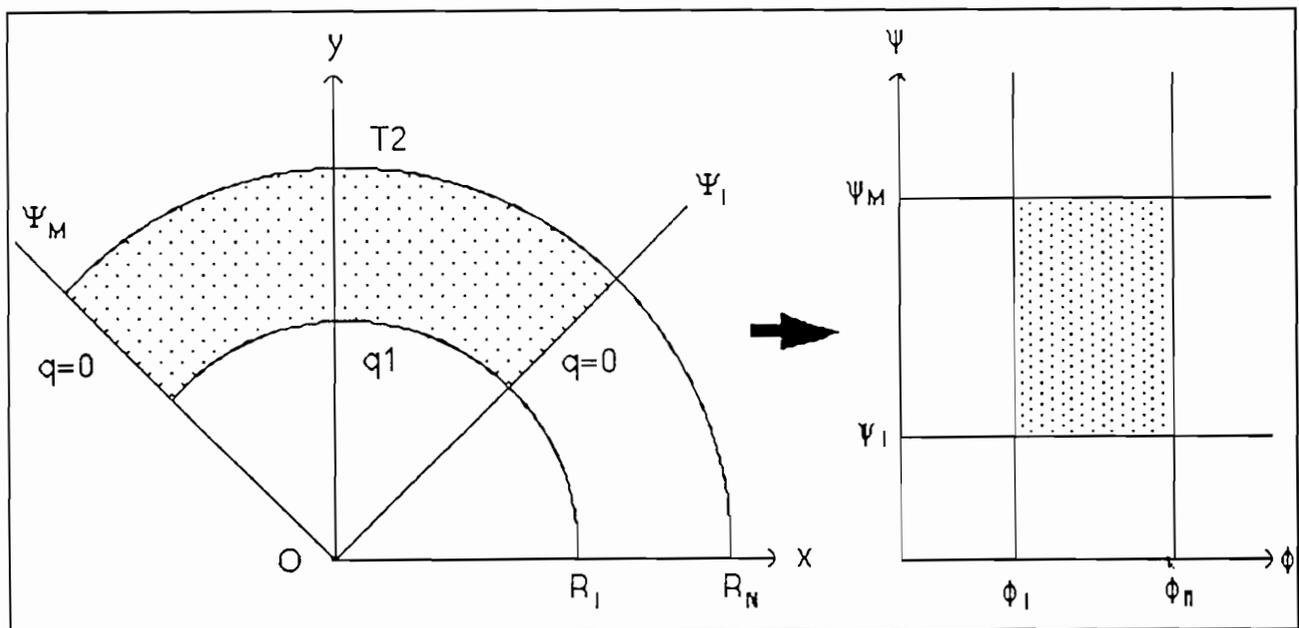


Figure 1-3 : Représentation conforme

On a ainsi:

$$z = a \exp(\phi + i\psi) = a \exp(\phi) (\cos\psi + i \sin\psi) \quad (1-19)$$

$$x = a \exp(\phi) \cos\psi \quad (1-20)$$

$$y = a \exp(\phi) \sin\psi$$

d'où:

$$x^2 + y^2 = (a e^\phi)^2 \quad \text{et donc } \phi = \text{Log} \left[\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right] \quad \text{avec } a > 0 \quad (1-21)$$

et

$$\frac{y}{x} = \text{tg}\psi \quad \text{et donc } \psi = \text{Arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (1-22)$$

I-5-4 Formules de transformations

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \quad (1-23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \quad (1-24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a e^\phi} \left(\cos\psi \frac{\partial}{\partial \phi} - \sin\psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \quad (1-25)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{a e^\phi} \left(\sin\psi \frac{\partial}{\partial \phi} + \cos\psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \quad (1-26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{(a e^\phi)^2} & \left[\cos^2\psi \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \sin^2\psi \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + 2 \sin\psi \cos\psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right. \\ & \left. - 2 \sin\psi \cos\psi \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial \phi} + \sin^2\psi \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad (1-27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{(a e^\phi)^2} & \left[\sin^2\psi \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \cos^2\psi \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - 2 \sin\psi \cos\psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right. \\ & \left. + 2 \sin\psi \cos\psi \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial \psi} + \cos^2\psi \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \quad (1-28) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{(a e^\phi)^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \quad (1-29)$$

I-5-5 Equations de transfert

Equation de continuité:

$$\omega = - \frac{1}{(a e^\phi)^2} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi^2} \right) \quad (1-30)$$

Equation du mouvement:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{a e^\phi} \left[U \frac{\partial \omega}{\partial \phi} + V \frac{\partial \omega}{\partial \psi} \right] &= \frac{\beta g}{(a e^\phi)^2} \left[\frac{\partial T}{\partial \phi} \cos \psi - \frac{\partial T}{\partial \psi} \sin \psi \right] \\ &+ \frac{\nu}{(a e^\phi)^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} \right) \end{aligned} \quad (1-31)$$

Equation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{a e^\phi} \left[U \frac{\partial T}{\partial \phi} + V \frac{\partial T}{\partial \psi} \right] = \frac{\alpha}{(a e^\phi)^2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \right] \quad (1-32)$$

avec

$$U = \frac{1}{a e^\phi} \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} \quad (1-33)$$

$$V = - \frac{1}{a e^\phi} \frac{\partial \Omega}{\partial \phi}$$

I-5-6 Conditions initiales

Au temps $t = 0$, on a :

$$U(\phi, \psi, 0) = V(\phi, \psi, 0) = 0$$

$$\omega(\phi, \psi, 0) = 0 \text{ et } \Omega(\phi, \psi, 0) = 0 \quad (1-34)$$

$$T(\phi, \psi, 0) = T_0$$

I-5-7 Conditions aux limites

sur la paroi $\phi = \phi_1$ et $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_M$:

- vitesses :

$$U(\phi_1, \psi, t) = V(\phi_1, \psi, t) = 0 \text{ d'où } \frac{\partial \Omega(\phi_1, \psi, t)}{\partial \psi} = \frac{\partial \Omega(\phi_1, \psi, t)}{\partial \phi} = 0 \quad (1-35)$$

$$\text{- flux : } q_1 = - \frac{\lambda}{a \exp(\phi_1)} \frac{\partial T(\phi_1, \psi, t)}{\partial \phi} \quad (1-36)$$

- vorticité :

$$\frac{\partial \Omega(\phi_1, \psi, t)}{\partial \psi} = 0 \text{ quel que soit } \psi \text{ implique que la fonction de courant est une constante}$$

que l'on calculera ultérieurement sur la paroi considérée.

Etant donné la difficulté d'écrire directement les conditions aux limites sur la vorticité, nous utilisons les valeurs de la fonction de courant par l'intermédiaire de l'équation de continuité (1-30).

L'expression de la vorticité sur la paroi considérée est donc:

$$\omega(\phi_1, \psi, t) = - \frac{1}{(a \exp(\phi_1))^2} \left(\frac{\partial^2 \Omega(\phi_1, \psi, t)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Omega(\phi_1, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) \quad (1-37)$$

sur la paroi $\phi = \phi_N$ et $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_M$

- vitesses et fonction de courant:

$$U(\phi_N, \psi, t) = V(\phi_N, \psi, t) = 0 \quad (1-38)$$

$$\frac{\partial \Omega(\phi_N, \psi, t)}{\partial \psi} = \frac{\partial \Omega(\phi_N, \psi, t)}{\partial \phi} = 0 \text{ et } \Omega(\phi_N, \psi, t) = \text{constante} \quad (1-39)$$

$$\text{- température: } T(\phi_N, \psi, t) = T_2 \quad (1-40)$$

- vorticité:

$$\omega(\phi_N, \psi, t) = - \frac{1}{(a \exp(\phi_N))^2} \left(\frac{\partial^2 \Omega(\phi_N, \psi, t)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Omega(\phi_N, \psi, t)}{\partial \psi^2} \right) \quad (1-41)$$

sur la paroi $\psi = \psi_1$ et $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_N$:

- vitesses et fonction de courant:

$$U(\phi, \psi_1, t) = V(\phi, \psi_1, t) = 0 \quad (1-42)$$

$$\frac{\partial \Omega(\phi, \psi_1, t)}{\partial \psi} = \frac{\partial \Omega(\phi, \psi_1, t)}{\partial \phi} = 0 \text{ et } \Omega(\phi, \psi_1, t) = \text{constante} \quad (1-43)$$

$$\text{- flux: } q = - \frac{\lambda}{a e^\phi} \frac{\partial T(\phi, \psi_1, t)}{\partial \psi} = 0 \quad (1-44)$$

- vorticité:

$$\omega(\phi, \psi_1, t) = - \frac{1}{(a \exp(\phi))^2} \left(\frac{\partial^2 \Omega(\phi, \psi_1, t)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Omega(\phi, \psi_1, t)}{\partial \psi^2} \right) \quad (1-45)$$

sur la paroi $\psi = \psi_M$ et $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_N$:

- vitesses et fonction de courant:

$$U(\phi, \psi_M, t) = V(\phi, \psi_M, t) = 0 \quad (1-46)$$

$$\frac{\partial \Omega(\phi, \psi_M, t)}{\partial \psi} = \frac{\partial \Omega(\phi, \psi_M, t)}{\partial \phi} = 0 \text{ et } \Omega(\phi, \psi_M, t) = \text{constante} \quad (1-47)$$

$$\text{- flux: } q = + \frac{\lambda}{a e^\phi} \frac{\partial T(\phi, \psi_M, t)}{\partial \psi} = 0 \quad (1-48)$$

- vorticité:

$$\omega(\phi, \psi_M, t) = - \frac{1}{(a \exp(\phi))^2} \left(\frac{\partial^2 \Omega(\phi, \psi_M, t)}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Omega(\phi, \psi_M, t)}{\partial \psi^2} \right) \quad (1-49)$$

I-5-8 Coefficients d'échange de chaleur :

Définitions:

- première définition

$$h = \frac{\lambda Nu}{D_h} = \frac{q}{\Delta T}$$

d'où :

$$Nu = \frac{q D_h}{\Delta T \lambda}$$

(1-50)

avec:

h : coefficient de transfert de chaleur par convection

Nu : nombre adimensionnel de Nusselt

q : densité du flux de chaleur à travers la paroi considérée

 D_h : diamètre hydraulique du système ΔT : gradient de température entre les parois actives

- deuxième définition

$$Nu_2 = \frac{q^*}{q_{cond}^*} = \frac{\left(-\lambda L (\psi_M - \psi_1) r \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\left(-\lambda L (\psi_M - \psi_1) \frac{\Delta T}{\text{Log}(R_N/R_1)} \right)} = \frac{r \text{Log}\left(\frac{R_N}{R_1}\right)}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (1-50^*)$$

avec :

 q^* : flux de chaleur total traversant la paroi considérée q_{cond}^* : flux de chaleur due à la conduction

L : longueur du cylindre étudié

En introduisant les formules des flux au niveau des parois , on obtient les expressions des nombres de Nusselt locaux:

sur la paroi $\phi = \phi_1$ et $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_M$:

$$Nu(\phi_1, \psi) = \frac{D_h}{a \exp(\phi_1) \Delta T(\phi_1, \psi)} \frac{\partial T(\phi_1, \psi)}{\partial \phi}$$

et

$$Nu_2(\phi_1, \psi) = \frac{\phi_N - \phi_1}{\Delta T(\phi_1, \psi)} \frac{\partial T(\phi_1, \psi)}{\partial \phi}$$

(1-51)

sur la paroi $\phi = \phi_N$ et $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_M$:

$$\text{Nu}(\phi_N, \psi) = - \frac{D_h}{a \exp(\phi_N) \Delta T(\phi_N, \psi)} \frac{\partial T(\phi_N, \psi)}{\partial \phi}$$

et

$$\text{Nu2}(\phi_N, \psi) = \frac{\phi_N - \phi_1}{\Delta T(\phi_N, \psi)} \frac{\partial T(\phi_N, \psi)}{\partial \phi}$$

(1-52)

I-6 Adimensionnalisation

I-6-1 Choix des grandeurs de référence

(1-53)

- Vorticité: $\tilde{\omega} = \frac{b^2 \text{Gr.}^{-1/2}}{\nu} \omega$

- Fonction de courant: $\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{\nu}$

- Temps: $\tilde{t} = \frac{\nu \text{Gr.}^{1/2}}{b^2} t$

- Température: $\tilde{T} = \frac{g \beta b^3 \text{Gr.}^{-3/4}}{\nu^2} (T - T_2)$

- Composantes de la vitesse:

$$\tilde{U} = \frac{b \text{Gr.}^{-1/4}}{\nu} U \quad \text{et} \quad \tilde{V} = \frac{b \text{Gr.}^{-1/4}}{\nu} V$$

- Nombre de Grashoff modifié: $\text{Gr.} = \frac{g \beta b^4 q_1}{\nu^2 \lambda}$

- Nombre de Prandtl: $\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}$

- Longueur caractéristique: $b = a \text{Gr.}^{1/4}$

I-6-2 Equations de transfert adimensionnelles

Equation de continuité:

$$\tilde{\omega} = -\frac{1}{e^{2\phi}} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}}{\partial \psi^2} \right) \quad (1-54)$$

Equations de la vorticité et de la chaleur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{e^{\phi}} \left(\tilde{U} \frac{\partial F}{\partial \phi} + \tilde{V} \frac{\partial F}{\partial \psi} \right) &= \frac{G}{e^{\phi}} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \phi} \cos \psi - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \psi} \sin \psi \right) \\ &+ \frac{1}{Pe^{2\phi}} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} \right) \end{aligned} \quad (1-55)$$

$$\text{avec : } \tilde{U} = \frac{1}{e^{\phi}} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \psi} \quad \text{et} \quad \tilde{V} = -\frac{1}{e^{\phi}} \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \phi} \quad (1-56)$$

Pour l'équation du mouvement, on a : $F = \tilde{\omega}$ $G = 1$ et $P = 1$

Pour l'équation de l'énergie, on a : $F = \tilde{T}$ $G = 0$ et $P = Pr$

L'équation de la vorticité peut également s'exprimer en fonction des composantes de la vitesse:

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{e^{\phi}} \left(\tilde{V} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \phi} - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \psi} \right) \quad (1-57)$$

Les vitesses dans le repère cartésien s'écrivent:

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = \frac{v}{a} (\tilde{U} \cos \psi - \tilde{V} \sin \psi) \\ v &= \frac{dy}{dt} = \frac{v}{a} (\tilde{U} \sin \psi + \tilde{V} \cos \psi) \end{aligned} \quad (1-58)$$

I-6-3 Conditions initiales

Au temps $\tilde{t} = 0$ on a :

$$\tilde{U}(\phi, \psi, 0) = \tilde{V}(\phi, \psi, 0) = 0$$

$$\tilde{\omega}(\phi, \psi, 0) = 0 \text{ et } \tilde{\Omega}(\phi, \psi, 0) = 0 \quad (1-59)$$

$$\tilde{T}(\phi, \psi, 0) = \frac{g \beta b^3 Gr.^{-3/4}}{v^2} (T_0 - T_2)$$

I-6-4 Conditions aux limites

sur la paroi $\phi = \phi_1$ et $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_M$

- vitesses et fonction de courant:

$$\tilde{U}(\phi_1, \psi, \tilde{t}) = \tilde{V}(\phi_1, \psi, \tilde{t}) = 0 \quad (1-60)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}(\phi_1, \psi, \tilde{t})}{\partial \psi} = \frac{\partial \tilde{\Omega}(\phi_1, \psi, \tilde{t})}{\partial \phi} = 0 \text{ et } \tilde{\Omega}(\phi_1, \psi, \tilde{t}) = \text{constante} \quad (1-61)$$

- flux:
$$\frac{\partial \tilde{T}(\phi_1, \psi, \tilde{t})}{\partial \phi} = - \exp(\phi_1) \quad (1-62)$$

- vorticité:

$$\tilde{\omega}(\phi_1, \psi, \tilde{t}) = - \frac{1}{\exp(2\phi_1)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Omega}(\phi_1, \psi, \tilde{t})}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}(\phi_1, \psi, \tilde{t})}{\partial \psi^2} \right) \quad (1-63)$$

sur la paroi $\phi = \phi_N$ et $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_M$:

- vitesses et fonction de courant:

$$\tilde{U}(\phi_N, \psi, \tilde{t}) = \tilde{V}(\phi_N, \psi, \tilde{t}) = 0 \quad (1-64)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}(\phi_N, \psi, \tilde{t})}{\partial \psi} = \frac{\partial \tilde{\Omega}(\phi_N, \psi, \tilde{t})}{\partial \phi} = 0 \text{ et } \tilde{\Omega}(\phi_N, \psi, \tilde{t}) = \text{constante} \quad (1-65)$$

- température: $\tilde{T}(\phi_N, \psi, \tilde{t}) = \tilde{T}_2 = 0$ (1-66)

- vorticité:

$$\tilde{\omega}(\phi_N, \psi, \tilde{t}) = -\frac{1}{\exp(2\phi_N)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Omega}(\phi_N, \psi, \tilde{t})}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}(\phi_N, \psi, \tilde{t})}{\partial \psi^2} \right) \quad (1-67)$$

sur la paroi $\psi = \psi_1$ et $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_N$:

- vitesses et fonction de courant:

$$\tilde{U}(\phi, \psi_1, \tilde{t}) = \tilde{V}(\phi, \psi_1, \tilde{t}) = 0 \quad (1-68)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}(\phi, \psi_1, \tilde{t})}{\partial \psi} = \frac{\partial \tilde{\Omega}(\phi, \psi_1, \tilde{t})}{\partial \phi} = 0 \text{ et } \tilde{\Omega}(\phi, \psi_1, \tilde{t}) = \text{constante} \quad (1-69)$$

- flux: $\frac{\partial \tilde{T}(\phi, \psi_1, \tilde{t})}{\partial \psi} = 0$ (1-70)

- vorticité:

$$\tilde{\omega}(\phi, \psi_1, \tilde{t}) = -\frac{1}{\exp(2\phi)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Omega}(\phi, \psi_1, \tilde{t})}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}(\phi, \psi_1, \tilde{t})}{\partial \psi^2} \right) \quad (1-71)$$

sur la paroi $\psi = \psi_M$ et $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_N$:

- vitesses et fonction de courant:

$$\tilde{U}(\phi, \psi_M, \tilde{t}) = \tilde{V}(\phi, \psi_M, \tilde{t}) = 0 \quad (1-72)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}(\phi, \psi_M, \tilde{t})}{\partial \psi} = \frac{\partial \tilde{\Omega}(\phi, \psi_M, \tilde{t})}{\partial \phi} = 0 \text{ et } \tilde{\Omega}(\phi, \psi_M, \tilde{t}) = \text{constante} \quad (1-73)$$

- flux: $\frac{\partial \tilde{T}(\phi, \psi_M, \tilde{t})}{\partial \psi} = 0$ (1-74)

- vorticité:

$$\tilde{\omega}(\phi, \psi_M, \tilde{t}) = -\frac{1}{\exp(2\phi)} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Omega}(\phi, \psi_M, \tilde{t})}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Omega}(\phi, \psi_M, \tilde{t})}{\partial \psi^2} \right) \quad (1-75)$$

I-6-5 Formulation des coefficients d'échange au niveau des parois

sur la paroi $\phi = \phi_1$ et $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_M$:

$$Nu(\phi_1, \psi) = \frac{Gr^{1/4}}{\exp(\phi_1) \Delta \tilde{T}(\phi_1, \psi)} \frac{\partial \tilde{T}(\phi_1, \psi)}{\partial \phi} \quad (1-76)$$

et

$$Nu2(\phi_1, \psi) = \frac{\phi_N - \phi_1}{\Delta \tilde{T}(\phi_1, \psi)} \frac{\partial \tilde{T}(\phi_1, \psi)}{\partial \phi}$$

avec : $\Delta \tilde{T}(\phi_1, \psi) = \overline{\tilde{T}(\phi_N, \psi)} - \tilde{T}(\phi_1, \psi)$, $\overline{\tilde{T}(\phi_N, \psi)}$ étant la moyenne de la température de la paroi (ϕ_N, ψ)    l'instant considéré. On calcule ensuite la valeur moyenne du nombre de Nusselt moyen $\overline{Nu}(\phi_1)$ par la relation suivante:

$$\overline{Nu}(\phi_1) = \frac{1}{(\psi_M - \psi_1)} \int_{\psi_1}^{\psi_M} Nu(\phi_1, \psi) d\psi \quad (1-77)$$

sur la paroi $\phi = \phi_N$ et $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_M$:

$$Nu(\phi_N, \psi) = -\frac{Gr^{1/4}}{\exp(\phi_N) \Delta \tilde{T}(\phi_N, \psi)} \frac{\partial \tilde{T}(\phi_N, \psi)}{\partial \phi} \quad (1-78)$$

et

$$Nu2(\phi_N, \psi) = -\frac{\phi_N - \phi_1}{\Delta \tilde{T}(\phi_N, \psi)} \frac{\partial \tilde{T}(\phi_N, \psi)}{\partial \phi}$$

$$\text{d'où } \overline{Nu}(\phi_N) = \frac{1}{(\psi_M - \psi_1)} \int_{\psi_1}^{\psi_M} Nu(\phi_N, \psi) d\psi \quad (1-79)$$

avec: $\Delta \tilde{T}(\phi_N, \psi) = \overline{\tilde{T}(\phi_1, \psi)} - \tilde{T}(\phi_N, \psi)$, $\overline{\tilde{T}(\phi_1, \psi)}$ étant la moyenne de la température de la paroi (ϕ_1, ψ)    l'instant considéré.

CHAPITRE II

ANALYSE NUMERIQUE

Pour la clarté des équations, le signe " " sera désormais omis dans l'écriture des fonctions et variables adimensionnelles. Les définitions du nombre adimensionnel de Grashof correspondant aux différentes conditions aux limites étudiées seront exprimées par le symbole Gr.

II-1 Approximations des dérivées partielles à l'aide de la méthode aux différences finies

Considérons une fonction $f(x, y, t)$ continue et suffisamment dérivable sur le domaine étudié. Ecrivons le développement en série de Taylor de cette fonction au voisinage du point x_0 , respectivement vers l'avant et vers l'arrière:

$$f(x_0 + \Delta x, y, t) = f(x_0, y, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots \quad (2-1)$$

$$f(x_0 - \Delta x, y, t) = f(x_0, y, t) - \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \dots$$

Soit $f_{k,j}^n$ la valeur de la fonction f en un noeud (k,j,n) du maillage défini. En additionnant et en retranchant les deux équations précédentes, on obtient les formulations des dérivées premières et secondes sous forme discrétisée:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(k,j,n) = \frac{f_{k+1,j}^n - f_{k-1,j}^n}{2 \Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2-2)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(k,j,n) = \frac{f_{k+1,j}^n - 2f_{k,j}^n + f_{k-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad (2-3)$$

En appliquant la même procédure au voisinage de y_0 , on obtient:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(k,j,n) = \frac{f_{k,j+1}^n - f_{k,j-1}^n}{2 \Delta y} + O(\Delta y^2) \quad (2-4)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(k,j,n) = \frac{f_{k,j+1}^n - 2f_{k,j}^n + f_{k,j-1}^n}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y^2) \quad (2-5)$$

Pour écrire les conditions aux limites, au niveau des parois, nous discrétisons les dérivées premières au moyen de formules à trois points déduites du développement de Taylor :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(k,j,n) = \frac{-3f_{k,j}^n + 4f_{k+1,j}^n - f_{k+2,j}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2-6)$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(k,j,n) = \frac{3f_{k,j}^n - 4f_{k-1,j}^n + f_{k-2,j}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2-7)$$

et les dérivées secondes au moyen de formules à trois points :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(k,j,n) = \frac{-7f_{k,j}^n + 8f_{k+1,j}^n - f_{k+2,j}^n - 6\Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(k,j,n)}{2(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad (2-8)$$

ou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(k,j,n) = \frac{-7f_{k,j}^n + 8f_{k-1,j}^n - f_{k-2,j}^n + 6\Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(k,j,n)}{2(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \quad (2-9)$$

II-2 Maillage

Considérons un maillage rectangulaire ayant N noeuds sur l'axe des ϕ et M noeuds sur celui des ψ .

Si les pas d'espace sont respectivement $\Delta\phi$ et $\Delta\psi$ dans ces deux directions, on obtient un rectangle dont la superficie est $(N-1)\Delta\phi \times (M-1)\Delta\psi$.

Pour chaque noeud situé dans le domaine étudié, les valeurs discrètes des variables ϕ et ψ peuvent s'écrire:

$$\phi_k = \phi_1 + (k-1)\Delta\phi$$

$$\psi_j = \psi_1 + (j-1)\Delta\psi$$

Pour le temps, on a: $t^n = n \Delta t$

Les limites du domaine sont ainsi définies par ϕ_1 et ϕ_N sur l'axe des ϕ et par ψ_1 et ψ_M sur l'axe des ψ .

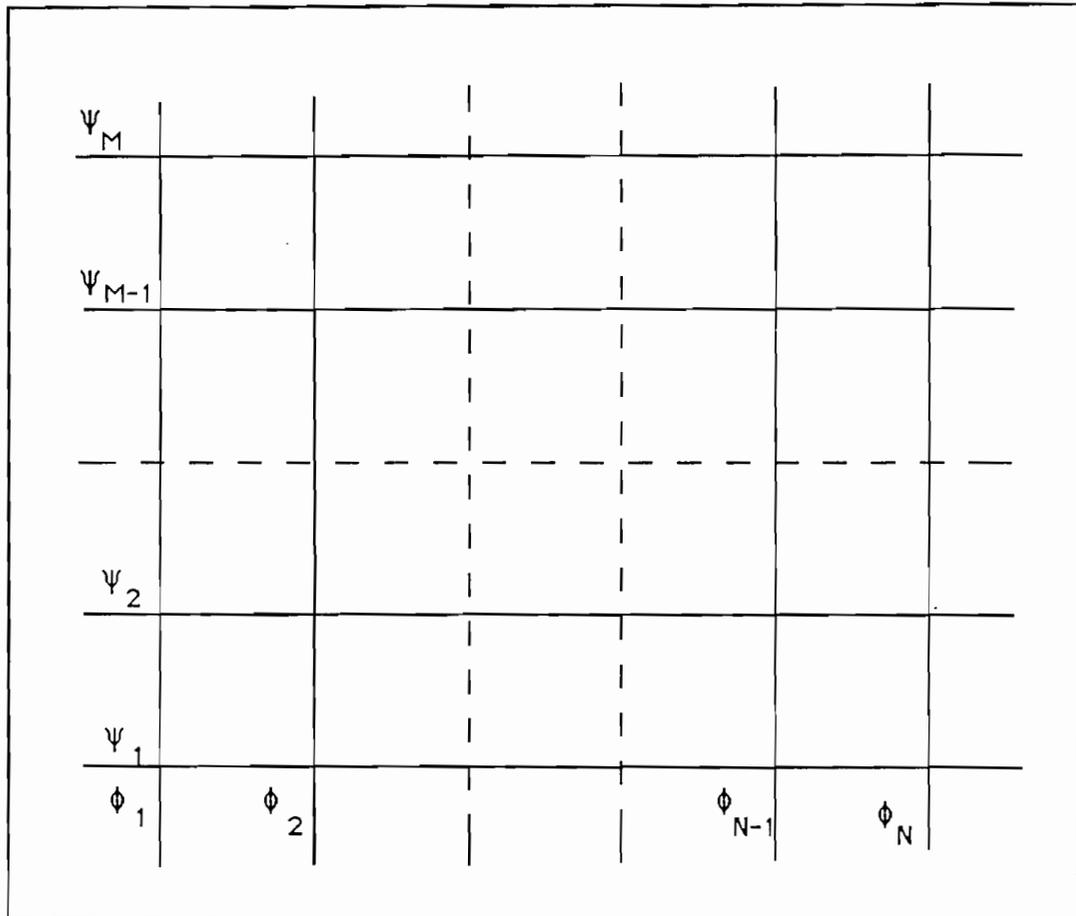


Figure 2-1 Maillage rectangulaire

II-3 Traitement numérique de l'équation de la fonction de courant

II-3-1 Discrétisation de l'équation de la fonction de courant

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi^2} = -\omega \exp(2\phi)$$

$$\frac{\Omega_{k+1,j} - 2\Omega_{k,j} + \Omega_{k-1,j}}{(\Delta\phi)^2} + \frac{\Omega_{k,j+1} - 2\Omega_{k,j} + \Omega_{k,j-1}}{(\Delta\psi)^2} = -\omega_{k,j} \exp(2\phi_k) \quad (2-10)$$

soit:

$$\Omega_{k,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{(\Delta\phi)^2 (\Delta\psi)^2}{(\Delta\phi)^2 + (\Delta\psi)^2} \right) \left(\frac{\Omega_{k+1,j} + \Omega_{k-1,j}}{(\Delta\phi)^2} + \frac{\Omega_{k,j+1} + \Omega_{k,j-1}}{(\Delta\psi)^2} - S_{k,j} \right) \quad (2-11)$$

avec:

$$S_{k,j} = -\omega_{k,j} \exp(2\phi_k)$$

II-3-2 Résolution de l'équation de courant à l'aide de la méthode S.O.R.
(Successive Overrelaxation)

$$\Omega_{k,j}^{p+1} = \Omega_{k,j}^p + \frac{\gamma}{2 \left[1 + \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi} \right)^2 \right]} \left\{ \Omega_{k+1,j}^p + \Omega_{k-1,j}^{p+1} + \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi} \right)^2 \Omega_{k,j+1}^p + \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi} \right)^2 \Omega_{k,j-1}^{p+1} - 2 \left[1 + \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi} \right)^2 \right] \Omega_{k,j}^p - (\Delta\phi)^2 S_{k,j} \right\} \quad (2-12)$$

p : indice d'itération

γ : facteur de relaxation

D'après BEJAN Adrian [17], le calcul converge pour $1 \leq \gamma \leq 2$; il converge très rapidement quand γ atteint sa valeur optimale qui peut être calculée à l'aide de la formule suivante:

$$\gamma_{opt} = \frac{2 \left[1 - (1-\lambda)^{1/2} \right]}{\lambda} \quad \text{avec } \lambda = \frac{\left[\cos \left(\frac{\pi}{N-1} \right) + \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{M-1} \right) \right]^2}{1 + \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi} \right)^2} \quad (2-13)$$

N : nombre de noeuds sur l'axe des φ

M : nombre de noeuds sur l'axe des ψ

L'équation de Poisson étant couplée aux équations de la vorticité et de l'énergie, cette formule est utilisée comme première approximation.

II-4 Discrétisation des composantes de la vitesse

Les composantes de la vitesse aux points intérieurs sont calculées à partir des valeurs de la fonction de courant obtenues en résolvant l'équation de courant à l'aide de la méthode de surrelaxation exposée précédemment.

Nous choisissons de les discrétiser à l'aide de différences centrées [18].

$$U_{k,j}^n = \frac{1}{\exp(\phi_k)} \left(\frac{\Omega_{k,j+1}^n - \Omega_{k,j-1}^n}{2\Delta\psi} \right) \quad (2-14)$$

$$V_{k,j}^n = -\frac{1}{\exp(\phi_k)} \left(\frac{\Omega_{k+1,j}^n - \Omega_{k-1,j}^n}{2\Delta\phi} \right) \quad (2-15)$$

II-5 Discrétisation des équations de la vorticité et de la chaleur à l'intérieur du domaine

Les équations du mouvement et de la chaleur se discrétisent en deux (2) demi-temps selon la méthode implicite des directions alternées (IDA). Déjà utilisée par PEACEMAN et RACHFORD en 1955 [14], cette méthode consiste à discrétiser, sur deux demi-pas de temps consécutifs, deux équations aux différences implicites alternativement suivant les directions ϕ et ψ .

II-5-1 Premier demi-temps (implicite suivant ϕ entre n et $n+1/2$) :

$$\begin{aligned} & \frac{F_{k,j}^{n+1/2} - F_{k,j}^n}{\Delta t / 2} + \frac{1}{\exp(\phi_k)} \left(U_{k,j}^n \frac{F_{k+1,j}^{n+1/2} - F_{k-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta\phi} + V_{k,j}^n \frac{F_{k,j+1}^n - F_{k,j-1}^n}{2\Delta\psi} \right) = \\ & \frac{G}{\exp(\phi_k)} \left(\cos\psi_j \frac{T_{k+1,j}^{n+1/2} - T_{k-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta\phi} - \sin\psi_j \frac{T_{k,j+1}^n - T_{k,j-1}^n}{2\Delta\psi} \right) + \\ & \frac{1}{P \exp(2\phi_k)} \left(\frac{F_{k+1,j}^{n+1/2} - 2F_{k,j}^{n+1/2} + F_{k-1,j}^{n+1/2}}{(\Delta\phi)^2} + \frac{F_{k,j+1}^n - 2F_{k,j}^n + F_{k,j-1}^n}{(\Delta\psi)^2} \right) \end{aligned} \quad (2-16)$$

II-5-2 Deuxième demi-temps (implicite suivant ψ entre $n+1/2$ et $n+1$) :

$$\begin{aligned}
& \frac{F_{k,j}^{n+1} - F_{k,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} + \frac{1}{\exp(\phi_k)} \left(U_{k,j}^n \frac{F_{k+1,j}^{n+1/2} - F_{k-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta\phi} + V_{k,j}^n \frac{F_{k,j+1}^{n+1} - F_{k,j-1}^{n+1}}{2\Delta\psi} \right) = \\
& \frac{G}{\exp(\phi_k)} \left(\cos\psi_j \frac{T_{k+1,j}^{n+1/2} - T_{k-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta\phi} - \sin\psi_j \frac{T_{k,j+1}^n - T_{k,j-1}^n}{2\Delta\psi} \right) + \\
& \frac{1}{P \exp(2\phi_k)} \left(\frac{F_{k+1,j}^{n+1/2} - 2F_{k,j}^{n+1/2} + F_{k-1,j}^{n+1/2}}{(\Delta\phi)^2} + \frac{F_{k,j+1}^{n+1} - 2F_{k,j}^{n+1} + F_{k,j-1}^{n+1}}{(\Delta\psi)^2} \right) \quad (2-17)
\end{aligned}$$

Les équations (2-16) et (2-17) permettent d'aboutir, quand elles sont appliquées à chaque point, à deux systèmes d'équations tridiagonales qu'on résout avec la méthode d'élimination de Thomas [19].

Comme hypothèse de départ, nous considérons que, pendant la période de temps Δt étudié, les gradients de température dans l'équation de la vorticité ainsi que les composantes de la vitesse U et V , dans les deux équations paraboliques, restent constants. Il en sera de même pour les valeurs de la vorticité aux frontières du domaine.

Cette approximation, adoptée par de nombreux auteurs comme WILKES et CHURCHILL [2], SAMUELS et CHURCHILL [3], TORRANCE [4], est usuellement utilisée dans cette méthode de résolution. Elle n'est cependant admissible que pour des valeurs de Δt suffisamment petites et quand il existe un régime permanent. Ces auteurs considèrent, en effet, que les erreurs qu'elle génère deviennent de plus en plus faibles au cours du temps et tendent à disparaître au voisinage du régime établi.

Lorsque l'on étudie un phénomène instationnaire, il faut associer à la méthode classique directe un processus itératif sur les grandeurs considérées comme constantes dans l'hypothèse de départ [20, 21]. Pour résoudre l'équation de la vorticité par exemple, nous procédons de la manière suivante : dans une première itération, nous prenons les composantes de la vitesse U^n et V^n au temps n . La résolution des systèmes d'équations (2-16) et (2-17) permet d'obtenir une première approximation de la distribution de la vorticité ω^{n+1} au temps $n+1$. La résolution de l'équation de la fonction de courant (2-9) permet ensuite de calculer, dans une première approximation, les composantes de la vitesse U^{n+1} et V^{n+1} au temps $n+1$    l'aide des formules (2-14) et (2-15).

A ce niveau, on recalcule les composantes de la vitesse en utilisant les moyennes arithmétiques suivantes: $U^n = \frac{(U^n + U^{n+1})}{2}$ et $V^n = \frac{(V^n + V^{n+1})}{2}$. Ces valeurs sont injectées, pour une deuxième itération, dans les systèmes d'équations (2-16) et (2-17) dont la résolution permet d'obtenir une deuxième approximation de la distribution de la vorticité ω^{n+1} au temps $n+1$.

Ces nouvelles valeurs de la vorticité sont comparées aux précédentes et le processus itératif s'arrête lorsque l'écart relatif calculé devient inférieur à une valeur préalablement fixée. Dans ce cas, on incrémente l'indice de temps et on continue le processus de calcul.

II-5-3 Développement de la première équation

$$C_{1,k,j} F_{k-1,j}^{n+1/2} + C_{2,k,j} F_{k,j}^{n+1/2} + C_{3,k,j} F_{k+1,j}^{n+1/2} = C_{4,k,j}$$

avec (2-18)

$$C_{4,k,j} = D_{1,k,j} F_{k,j-1}^n + D_{2,k,j} F_{k,j}^n + D_{3,k,j} F_{k,j+1}^n + D_{4,k,j}$$

II-5-4 Développement de la deuxième équation

$$CC_{1,k,j} F_{k,j-1}^{n+1} + CC_{2,k,j} F_{k,j}^{n+1} + CC_{3,k,j} F_{k,j+1}^{n+1} = CC_{4,k,j}$$

avec (2-19)

$$CC_{4,k,j} = DD_{1,k,j} F_{k-1,j}^{n+1/2} + DD_{2,k,j} F_{k,j}^{n+1/2} + DD_{3,k,j} F_{k+1,j}^{n+1/2} + DD_{4,k,j}$$

II-5-5 Formulation des coefficients

$$C_{1,k,j} = -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{U_{k,j}^n}{2 \exp(\phi_k) \Delta \phi} + \frac{1}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \phi)^2} \right) \quad (2-20)$$

$$C_{2,k,j} = 1 + \frac{\Delta t}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \phi)^2} \quad (2-21)$$

$$C_{3,k,j} = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{U_{k,j}^n}{2 \exp(\phi_k) \Delta \phi} - \frac{1}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \phi)^2} \right) \quad (2-22)$$

$$D_{1,k,j} = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{V_{k,j}^n}{2 \exp(\phi_k) \Delta \psi} + \frac{1}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \psi)^2} \right) \quad (2-23)$$

$$D_{2,k,j} = 1 - \frac{\Delta t}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \psi)^2} \quad (2-24)$$

$$D_{3,k,j} = \frac{\Delta t}{2} \left(-\frac{V_{k,j}^n}{2 \exp(\phi_k) \Delta \psi} + \frac{1}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \psi)^2} \right) \quad (2-25)$$

$$D_{4,k,j} = \frac{G \Delta t}{2 \exp(\phi_k)} \left[\cos \psi_j \left(\frac{T_{k+1,j}^{n+1/2} - T_{k-1,j}^{n+1/2}}{2 \Delta \phi} \right) - \sin \psi_j \left(\frac{T_{k,j+1}^n - T_{k,j-1}^n}{2 \Delta \psi} \right) \right] \quad (2-26)$$

$$CC_{1,k,j} = -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{V_{k,j}^n}{2 \exp(\phi_k) \Delta \psi} + \frac{1}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \psi)^2} \right) \quad (2-27)$$

$$CC_{2,k,j} = 1 + \frac{\Delta t}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \psi)^2} \quad (2-28)$$

$$CC_{3,k,j} = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{V_{k,j}^n}{2 \exp(\phi_k) \Delta \psi} - \frac{1}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \psi)^2} \right) \quad (2-29)$$

$$DD_{1,k,j} = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{U_{k,j}^n}{2 \exp(\phi_k) \Delta \phi} + \frac{1}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \phi)^2} \right) \quad (2-30)$$

$$DD_{2,k,j} = 1 - \frac{\Delta t}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \phi)^2} \quad (2-31)$$

$$DD_{3,k,j} = -\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{U_{k,j}^n}{2 \exp(\phi_k) \Delta \phi} - \frac{1}{P \exp(2\phi_k) (\Delta \phi)^2} \right) \quad (2-32)$$

$$DD_{4,k,j} = \frac{G \Delta t}{2 \exp(\phi_k)} \left[\cos \psi_j \left(\frac{T_{k+1,j}^{n+1/2} - T_{k-1,j}^{n+1/2}}{2 \Delta \phi} \right) - \sin \psi_j \left(\frac{T_{k,j+1}^n - T_{k,j-1}^n}{2 \Delta \psi} \right) \right] \quad (2-33)$$

II-6 Conditions initiales et aux limites

II-6-1 Ecriture des conditions initiales

$$U_{k,j}^0 = V_{k,j}^0 = 0$$

$$\omega_{k,j}^0 = 0 \text{ et } \Omega_{k,j}^0 = 0 \quad (2-34)$$

$$T_{k,j}^0 = \frac{g \beta b^3 Gr^{-3/4} (T_0 - T_2)_{dim}}{v^2}$$

II-6-2 Ecriture des vitesses

$$U_{1,j}^n = V_{1,j}^n = U_{N,j}^n = V_{N,j}^n = 0 \quad (2-35)$$

$$U_{k,1}^n = V_{k,1}^n = U_{k,M}^n = V_{k,M}^n = 0$$

II-6-3 Discrétisation de la fonction de courant

- sur la paroi (k=1,j) on a:

$$\frac{\partial \Omega(1,j,n)}{\partial \psi} = \frac{-3 \Omega_{1,j}^n + 4 \Omega_{2,j}^n - \Omega_{3,j}^n}{2 \Delta \psi} = 0 \quad (2-36)$$

et donc:

$$\Omega_{1,j}^n = \frac{4 \Omega_{2,j}^n - \Omega_{3,j}^n}{3} \quad (2-37)$$

- sur la paroi (k=N,j) on a: $\Omega_{N,j}^n = \frac{4 \Omega_{N-1,j}^n - \Omega_{N-2,j}^n}{3}$ (2-38)

- sur la paroi (k,j=1) on a: $\Omega_{k,1}^n = \frac{4 \Omega_{k,2}^n - \Omega_{k,3}^n}{3}$ (2-39)

- sur la paroi (k,j=M) on a: $\Omega_{k,M}^n = \frac{4 \Omega_{k,M-1}^n - \Omega_{k,M-2}^n}{3}$ (2-40)

II-6-4 Discrétisation de l' équation de la chaleur aux frontières

En discrétisant l'équation de la chaleur sur les quatres parois du domaine étudié, les trois cas de conditions aux limites sont simultanément pris en compte.

II-6-4-1 Premier demi-temps (implicite suivant ϕ entre n et $n+1/2$):

- sur la paroi $k=1$, $1 < j < M$:

$$\frac{T_{1,j}^{n+1/2} - T_{1,j}^n}{\Delta t/2} = \frac{1}{P \exp(2\phi_1)} \left| \frac{-7 T_{1,j}^{n+1/2} + 8 T_{2,j}^{n+1/2} - T_{3,j}^{n+1/2} - 6 \Delta \phi g_1}{2 (\Delta \phi)^2} + \frac{T_{1,j+1}^n - 2 T_{1,j}^n + T_{1,j-1}^n}{(\Delta \psi)^2} \right| \quad (2-41)$$

- sur la paroi $j=1$, $1 < k < N$:

$$\frac{T_{k,1}^{n+1/2} - T_{k,1}^n}{\Delta t/2} = \frac{1}{P \exp(2\phi_k)} \left| \frac{T_{k+1,1}^{n+1/2} - 2 T_{k,1}^{n+1/2} + T_{k-1,1}^{n+1/2}}{(\Delta \phi)^2} + \frac{-7 T_{k,1}^n + 8 T_{k,2}^n - T_{k,3}^n - 6 \Delta \psi h_{k,1}}{2 (\Delta \psi)^2} \right| \quad (2-42)$$

- sur la paroi $j=M$, $1 < k < N$:

$$\frac{T_{k,M}^{n+1/2} - T_{k,M}^n}{\Delta t/2} = \frac{1}{P \exp(2\phi_k)} \left| \frac{T_{k+1,M}^{n+1/2} - 2 T_{k,M}^{n+1/2} + T_{k-1,M}^{n+1/2}}{(\Delta \phi)^2} + \frac{-7 T_{k,M}^n + 8 T_{k,M-1}^n - T_{k,M-2}^n + 6 \Delta \psi h_{k,M}}{2 (\Delta \psi)^2} \right| \quad (2-43)$$

. sur le point $k=1$, $j=1$:

$$\frac{T_{1,1}^{n+1/2} - T_{1,1}^n}{\Delta t/2} = \frac{1}{P \exp(2\phi_1)} \left| \frac{-7 T_{1,1}^{n+1/2} + 8 T_{2,1}^{n+1/2} - T_{3,1}^{n+1/2} - 6 \Delta \phi g_1}{2 (\Delta \phi)^2} + \frac{-7 T_{1,1}^n + 8 T_{1,2}^n - T_{1,3}^n - 6 \Delta \psi h_{1,1}}{2 (\Delta \psi)^2} \right| \quad (2-44)$$

. sur le point $k=1, j=M$:

$$\frac{T_{1,M}^{n+1/2} - T_{1,M}^n}{\Delta t/2} = \frac{1}{P \exp(2\phi_1)} \left| \frac{-7 T_{1,M}^{n+1/2} + 8 T_{2,M}^{n+1/2} - T_{3,M}^{n+1/2} - 6 \Delta \phi g_1}{2 (\Delta \phi)^2} + \frac{-7 T_{1,M}^n + 8 T_{1,M-1}^n - T_{1,M-2}^n + 6 \Delta \psi h_{1,M}}{2 (\Delta \psi)^2} \right| \quad (2-45)$$

II-6-4-2 Deuxième demi-temps (implicite suivant ψ entre $n+1/2$ et $n+1$) :

- sur la paroi $1 < k < N, j=1$:

$$\frac{T_{k,1}^{n+1} - T_{k,1}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{1}{P \exp(2\phi_k)} \left| \frac{T_{k+1,1}^{n+1/2} - 2T_{k,1}^{n+1/2} + T_{k-1,1}^{n+1/2}}{(\Delta \phi)^2} + \frac{-7 T_{k,1}^{n+1} + 8 T_{k,2}^{n+1} - T_{k,3}^{n+1} - 6 \Delta \psi h_{k,1}}{2 (\Delta \psi)^2} \right| \quad (2-46)$$

- sur la paroi $1 < k < N, j=M$:

$$\frac{T_{k,M}^{n+1} - T_{k,M}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{1}{P \exp(2\phi_k)} \left| \frac{T_{k+1,M}^{n+1/2} - 2T_{k,M}^{n+1/2} + T_{k-1,M}^{n+1/2}}{(\Delta \phi)^2} + \frac{-7 T_{k,M}^{n+1} + 8 T_{k,M-1}^{n+1} - T_{k,M-2}^{n+1} + 6 \Delta \psi h_{k,M}}{2 (\Delta \psi)^2} \right| \quad (2-47)$$

- sur la paroi $1 < j < M, k=1$:

$$\frac{T_{1,j}^{n+1} - T_{1,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{1}{P \exp(2\phi_1)} \left| \frac{-7 T_{1,j}^{n+1/2} + 8 T_{2,j}^{n+1/2} - T_{3,j}^{n+1/2} - 6 \Delta \phi g_1}{2 (\Delta \phi)^2} + \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - 2 T_{1,j}^{n+1} + T_{1,j-1}^{n+1}}{(\Delta \psi)^2} \right|$$

(2-48)

. sur le point $k=1, j=1$:

$$\frac{T_{1,1}^{n+1} - T_{1,1}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{1}{P \exp(2\phi_1)} \left\{ \frac{-7T_{1,1}^{n+1/2} + 8T_{2,1}^{n+1/2} - T_{3,1}^{n+1/2} - 6 \Delta \phi g_1}{2(\Delta \phi)^2} + \frac{-7 T_{1,1}^{n+1} + 8 T_{1,2}^{n+1} - T_{1,3}^{n+1} - 6 \Delta \psi h_{1,1}}{2 (\Delta \psi)^2} \right\} \quad (2-49)$$

. sur le point $k=1, j=M$:

$$\frac{T_{1,M}^{n+1} - T_{1,M}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{1}{P \exp(2\phi_1)} \left\{ \frac{-7T_{1,M}^{n+1/2} + 8T_{2,M}^{n+1/2} - T_{3,M}^{n+1/2} - 6 \Delta \phi g_1}{2(\Delta \phi)^2} + \frac{-7 T_{1,M}^{n+1} + 8 T_{1,M-1}^{n+1} - T_{1,M-2}^{n+1} + 6 \Delta \psi h_{1,M}}{2 (\Delta \psi)^2} \right\} \quad (2-50)$$

II-6-4-3 Développement de la première équation

- sur la paroi $k=1, 1 \leq j \leq M$:

$$C_{2,1,j} T_{1,j}^{n+1/2} + C_{3,1,j} T_{2,j}^{n+1/2} + P_{1,j} T_{3,j}^{n+1/2} = C_{4,1,j} \quad (2-51)$$

avec

$$C_{4,1,j} = D_{2,1,j} T_{1,j}^n + D_{3,1,j} T_{1,j+1}^n + D_{4,1,j} \quad \text{pour } j=1$$

$$C_{4,1,j} = D_{1,1,j} T_{1,j-1}^n + D_{2,1,j} T_{1,j}^n + D_{4,1,j} \quad \text{pour } j=M$$

$$C_{4,1,j} = D_{1,1,j} T_{1,j-1}^n + D_{2,1,j} T_{1,j}^n + D_{3,1,j} T_{1,j+1}^n + D_{4,1,j} \quad \text{pour } 1 < j < M$$

Sur les autres parois, la formulation des équations est la même que pour les points intérieurs.

II-6-4-4 Développement de la deuxième équation

- sur la paroi $1 \leq k < N, j=1$:

$$CC_{2,k,1} T_{k,1}^{n+1} + CC_{3,k,1} T_{k,2}^{n+1} + Q_{1,k} T_{k,3}^{n+1} = CC_{4,k,1} \quad (2-52)$$

avec

$$CC_{4,k,1} = DD_{2,k,1} T_{k,1}^{n+1/2} + DD_{3,k,1} T_{k+1,1}^{n+1/2} + DD_{4,k,1} \quad \text{pour } k=1$$

$$CC_{4,k,1} = DD_{1,k,1} T_{k-1,1}^{n+1/2} + DD_{2,k,1} T_{k,1}^{n+1/2} + DD_{3,k,1} T_{k+1,1}^{n+1/2} + DD_{4,k,1} \quad \text{pour } 1 < k < N$$

- sur la paroi $1 \leq k < N, j=M$:

$$Q_{M,k} T_{k,M-2}^{n+1} + CC_{1,k,M} T_{k,M-1}^{n+1} + CC_{2,k,M} T_{k,M}^{n+1} = CC_{4,k,M} \quad (2-53)$$

avec

$$CC_{4,k,M} = DD_{2,k,M} T_{k,M}^{n+1/2} + DD_{3,k,M} T_{k+1,M}^{n+1/2} + DD_{4,k,M} \quad \text{pour } k=1$$

$$CC_{4,k,M} = DD_{1,k,M} T_{k-1,M}^{n+1/2} + DD_{2,k,M} T_{k,M}^{n+1/2} + DD_{3,k,M} T_{k+1,M}^{n+1/2} + DD_{4,k,M} \quad \text{pour } 1 < k < N$$

Sur les autres parois, la formulation des équations est la même que pour les points intérieurs.

II-6-4-5 Formulation des coefficients

II-6-4-5-1 Coefficients de la première équation

- pour $1 \leq j \leq M$ et $k=1$:

$$P_{1,j} = \frac{\Delta t}{4 P \exp(2\phi_1) (\Delta\phi)^2} \quad C_{2,1,j} = 1 + \frac{7 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_1) (\Delta\phi)^2}$$

$$C_{3,1,j} = - \frac{8 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_1) (\Delta\phi)^2} \quad (2-54)$$

- pour $1 < j < M$ et $k=1$:

Les expressions des coefficients $D_{1,k,j}$, $D_{2,k,j}$ et $D_{3,k,j}$ sont les mêmes que celles relatives aux points intérieurs.

$$D_{4,1,j} = - \frac{3 \Delta t g_1}{2 P \Delta\phi \exp(2\phi_1)} \quad (2-55)$$

- pour $1 < k < N$ et $j=1$ ou $j=M$

Les expressions des coefficients $C_{1,k,j}$, $C_{2,k,j}$ et $C_{3,k,j}$ sont les mêmes que celles relatives aux points intérieurs.

$$\begin{aligned}
 D_{2,k,1} &= 1 - \frac{7 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_k) (\Delta \psi)^2} & D_{2,k,M} &= 1 - \frac{7 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_k) (\Delta \psi)^2} \\
 D_{3,k,1} &= \frac{8 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_k) (\Delta \psi)^2} & D_{1,k,M} &= \frac{8 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_k) (\Delta \psi)^2} \\
 D_{4,k,1} &= \frac{\Delta t}{2 P \exp(2\phi_k)} \left(-\frac{3 h_{k,1}}{\Delta \psi} - \frac{T_{k,3}^n}{2 (\Delta \psi)^2} \right) \\
 D_{4,k,M} &= \frac{\Delta t}{2 P \exp(2\phi_k)} \left(\frac{3 h_{k,M}}{\Delta \psi} - \frac{T_{k,M-2}^n}{2 (\Delta \psi)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{2-56}$$

- pour les points $(k=1, j=1)$, $(k=1, j=M)$

$$\begin{aligned}
 D_{1,1,M} &= \frac{8 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_1) (\Delta \psi)^2} & D_{3,1,1} &= \frac{8 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_1) (\Delta \psi)^2} \\
 D_{2,1,M} = D_{2,1,1} &= 1 - \frac{7 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_1) (\Delta \psi)^2} \\
 D_{4,1,1} &= -\frac{\Delta t}{2 P \exp(2\phi_1)} \left(\frac{3 g_1}{\Delta \phi} + \frac{3 h_{1,1}}{\Delta \psi} + \frac{T_{1,3}^n}{2 (\Delta \psi)^2} \right) \\
 D_{4,1,M} &= -\frac{\Delta t}{2 P \exp(2\phi_1)} \left(\frac{3 g_1}{\Delta \phi} - \frac{3 h_{1,M}}{\Delta \psi} + \frac{T_{1,M-2}^n}{2 (\Delta \psi)^2} \right)
 \end{aligned} \tag{2-57}$$

II-6-4-5-2 Coefficients de la deuxième équation

- pour $1 \leq k < N$, $j=1$ ou $j=M$:

$$Q_{M,k} = Q_{1,k} = \frac{\Delta t}{4 P \exp(2\phi_k) (\Delta\psi)^2}$$

$$CC_{2,k,M} = CC_{2,k,1} = 1 + \frac{7 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_k) (\Delta\psi)^2} \quad (2-58)$$

$$CC_{1,k,M} = CC_{3,k,1} = -\frac{8 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_k) (\Delta\psi)^2}$$

- pour $1 < k < N$, $j=1$ ou $j=M$:

Les expressions des coefficients $DD_{1,k,j}$, $DD_{2,k,j}$ et $DD_{3,k,j}$ sont les mêmes que celles relatives aux points intérieurs.

$$DD_{4,k,1} = -\frac{3 h_{k,1} \Delta t}{2 P \Delta\psi \exp(2\phi_k)} \quad DD_{4,k,M} = \frac{3 h_{k,M} \Delta t}{2 P \Delta\psi \exp(2\phi_k)} \quad (2-59)$$

- pour $1 < j < M$, $k=1$:

Les expressions des coefficients $CC_{1,k,j}$, $CC_{2,k,j}$ et $CC_{3,k,j}$ sont les mêmes que celles relatives aux points intérieurs.

$$DD_{2,1,j} = 1 - \frac{7 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_1) (\Delta\phi)^2} \quad DD_{3,1,j} = \frac{8 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_1) (\Delta\phi)^2}$$

$$DD_{4,1,j} = \frac{\Delta t}{2 P \exp(2\phi_1)} \left(-\frac{3 g_1}{\Delta\phi} - \frac{T_{3j}^{n+1/2}}{2 (\Delta\phi)^2} \right) \quad (2-60)$$

- pour les points $(k=1, j=1)$, $(k=1, j=M)$:

$$DD_{3,1,M} = DD_{3,1,1} = \frac{8 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_1) (\Delta\phi)^2}$$

$$DD_{2,1,M} = DD_{2,1,1} = 1 - \frac{7 \Delta t}{4 P \exp(2\phi_1) (\Delta\phi)^2}$$

$$DD_{4,1,1} = -\frac{\Delta t}{2P \exp(2\phi_1)} \left(\frac{3g_1}{\Delta\phi} + \frac{3h_{1,1}}{\Delta\psi} + \frac{T_{3,1}^{n+1/2}}{2(\Delta\phi)^2} \right)$$

$$DD_{4,1,M} = \frac{\Delta t}{2P \exp(2\phi_1)} \left(-\frac{3g_1}{\Delta\phi} + \frac{3h_{1,M}}{\Delta\psi} - \frac{T_{3,M}^{n+1/2}}{2(\Delta\phi)^2} \right) \quad (2-61)$$

II-6-4-5-3 Autres coefficients

$$g_1 = \frac{\partial T(\phi_1, \psi)}{\partial \phi} = -\exp(\phi_1) \quad (2-62)$$

$$h_{k,1} = \frac{\partial T(\phi, \psi_1)}{\partial \psi} = 0 \quad h_{k,M} = \frac{\partial T(\phi, \psi_M)}{\partial \psi} = 0$$

II-6-5 Ecriture des conditions de flux et de températures

Pour $k=1$ et $1 \leq j \leq M$, on a :

$$\frac{-3T_{1,j} + 4T_{2,j} - T_{3,j}}{2\Delta\phi} = g_1 \quad \text{d'où} \quad T_{3,j} = -3T_{1,j} + 4T_{2,j} - 2\Delta\phi g_1 \quad (2-63)$$

Pour $k=N$ et $1 \leq j \leq M$, on a : $T_{N,j} = T_2$

En discrétisant de la même manière les conditions aux limites sur les parois $j=1$ et $j=M$, on obtient respectivement, pour $1 \leq k < N$, les équations suivantes:

$$T_{k,3} = -3T_{k,1} + 4T_{k,2} - 2\Delta\psi h_{k,1} \quad (2-64)$$

$$T_{k,M-2} = -3T_{k,M} + 4T_{k,M-1} + 2\Delta\psi h_{k,M}$$

II-6-6 Discrétisation de la vorticité

Développons en série de Taylor la fonction de courant au voisinage de la paroi ($k=1, j$) dans la direction des ϕ .

$$\Omega_{2,j}^n = \Omega_{1,j}^n + \frac{\Delta\phi}{1!} \frac{\partial \Omega_{1,j}^n}{\partial \phi} + \frac{(\Delta\phi)^2}{2!} \frac{\partial^2 \Omega_{1,j}^n}{\partial \phi^2} + \dots$$

En considérant que $\frac{\partial \Omega_{1,j}^n}{\partial \phi} = 0$, l'équation (1-63) de la condition aux limites sur la paroi (1,j) devient :

$$\omega_{1,j}^n = - \frac{1}{\exp(2\phi_1)} \left[\frac{\Omega_{1,j+1}^n - 2 \Omega_{1,j}^n + \Omega_{1,j-1}^n}{\Delta \psi^2} + \frac{2}{\Delta \phi^2} (\Omega_{2,j}^n - \Omega_{1,j}^n) \right] \quad (2-65)$$

En procédant de la même manière sur les autres parois, on obtient:

$$\omega_{N,j}^n = - \frac{1}{\exp(2\phi_N)} \left[\frac{\Omega_{N,j+1}^n - 2 \Omega_{N,j}^n + \Omega_{N,j-1}^n}{\Delta \psi^2} + \frac{2}{\Delta \phi^2} (\Omega_{N-1,j}^n - \Omega_{N,j}^n) \right] \quad (2-66)$$

$$\omega_{k,1}^n = - \frac{1}{\exp(2\phi_k)} \left[\frac{\Omega_{k+1,1}^n - 2 \Omega_{k,1}^n + \Omega_{k-1,1}^n}{\Delta \phi^2} + \frac{2}{\Delta \psi^2} (\Omega_{k,2}^n - \Omega_{k,1}^n) \right] \quad (2-67)$$

$$\omega_{k,M}^n = - \frac{1}{\exp(2\phi_k)} \left[\frac{\Omega_{k+1,M}^n - 2 \Omega_{k,M}^n + \Omega_{k-1,M}^n}{\Delta \phi^2} + \frac{2}{\Delta \psi^2} (\Omega_{k,M-1}^n - \Omega_{k,M}^n) \right] \quad (2-68)$$

II-6-7 Discrétisation des expressions du nombre de Nusselt sur les parois

$$Nu_{1,j}^n = \frac{Gr^{1/4}}{(\bar{T}_N^n - T_{1,j}^n) \exp(\phi_1)} \left(\frac{-3T_{1,j} + 4T_{2,j} - T_{3,j}}{2 \Delta \phi} \right) \quad (2-69)$$

$$Nu_{2,j}^n = \frac{\phi_N - \phi_1}{(\bar{T}_N^n - T_{1,j}^n)} \left(\frac{-3T_{1,j} + 4T_{2,j} - T_{3,j}}{2 \Delta \phi} \right) \quad (2-70)$$

$$Nu_{N,j}^n = - \frac{Gr^{1/4}}{(\bar{T}_1^n - T_{N,j}^n) \exp(\phi_N)} \left(\frac{3T_{N,j} - 4T_{N-1,j} + T_{N-2,j}}{2 \Delta \phi} \right) \quad (2-71)$$

$$Nu_{2,N,j}^n = - \frac{\phi_N - \phi_1}{(\bar{T}_1^n - T_{N,j}^n)} \left(\frac{3T_{N,j} - 4T_{N-1,j} + T_{N-2,j}}{2 \Delta \phi} \right) \quad (2-72)$$

II-7 Résolution de l'équation de la chaleur et de la vorticité

II-7-1 Première équation (implicite suivant ϕ entre n et $n + 1/2$):

- Equation de la chaleur:

Pour une valeur de l'indice j déterminée, on fait varier k de 1 à $N-1$. On obtient ainsi un système tridiagonal de $(N-1)$ équations à $(N-1)$ inconnues qu'on choisit de résoudre par la méthode d'élimination de Gauss. En faisant varier j de 1 à M , on obtient M systèmes de $(N-1)$ équations à résoudre.

- Equation de la vorticité:

Pour une valeur de l'indice j déterminée, on fait varier k de 2 à $(N-1)$. On obtient un système tridiagonal de $(N-2)$ équations à $(N-2)$ inconnues. En faisant varier j de 2 à $M-1$, on obtient $(M-2)$ systèmes de $(N-2)$ équations à résoudre.

Systèmes d'équations:

$$\begin{aligned}
 C_{2,1,j} F_{1,j}^{n+1/2} + C_{3,1,j} F_{2,j}^{n+1/2} &= C_{4,1,j} \\
 C_{1,2,j} F_{1,j}^{n+1/2} + C_{2,2,j} F_{2,j}^{n+1/2} + C_{3,2,j} F_{3,j}^{n+1/2} &= C_{4,2,j} \\
 C_{1,3,j} F_{2,j}^{n+1/2} + C_{2,3,j} F_{3,j}^{n+1/2} + C_{3,3,j} F_{4,j}^{n+1/2} &= C_{4,3,j} \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 C_{1,k,j} F_{k-1,j}^{n+1/2} + C_{2,k,j} F_{k,j}^{n+1/2} + C_{3,k,j} F_{k+1,j}^{n+1/2} &= C_{4,k,j} \quad (2-73) \\
 \cdot & \\
 \cdot & \\
 C_{1,N-3,j} F_{N-4,j}^{n+1/2} + C_{2,N-3,j} F_{N-3,j}^{n+1/2} + C_{3,N-3,j} F_{N-2,j}^{n+1/2} &= C_{4,N-3,j} \\
 C_{1,N-2,j} F_{N-3,j}^{n+1/2} + C_{2,N-2,j} F_{N-2,j}^{n+1/2} + C_{3,N-2,j} F_{N-1,j}^{n+1/2} &= C_{4,N-2,j} \\
 C_{1,N-1,j} F_{N-2,j}^{n+1/2} + C_{2,N-1,j} F_{N-1,j}^{n+1/2} &= C_{4,N-1,j}
 \end{aligned}$$

Certains coefficients figurant dans le système précédent ont été modifiés en utilisant les conditions aux limites sur les flux et sur la vorticité respectivement pour les équations de la chaleur et de la vorticité.

II-7-1-1 Transformation des coefficients de l'équation de la chaleur

$$C_{2,1,j} = C_{2,1,j} - 3 P_{1,j}$$

$$C_{3,1,j} = C_{3,1,j} + 4 P_{1,j}$$

et

(2-74)

$$C_{4,1,j} = C_{4,1,j} + 2 g_1 \Delta\phi P_{1,j}$$

$$C_{4,N-1,j} = C_{4,N-1,j} - C_{3,N-1,j} T_2$$

II-7-1-2 Transformation des coefficients de l'équation de la vorticité

$$C_{4,2,j} = C_{4,2,j} - \omega_{1,j}^{n+1/2} C_{1,2,j}$$

et

(2-75)

$$C_{4,N-1,j} = C_{4,N-1,j} - \omega_{N,j}^{n+1/2} C_{3,N-1,j}$$

Les valeurs de la vorticité aux limites étant inconnues au temps $n+1/2$, un calcul itératif a été nécessaire pour résoudre le système d'équations

II-7-2 Deuxième équation (implicite suivant ψ entre $n+1/2$ et $n+1$):

Pour une valeur de l'indice k déterminée, on fait varier j de 1   M . On obtient ainsi un système tridiagonal de M équations à M inconnues, puis on fait varier k de 1   $N-1$.

Systèmes d'équations:

$$CC_{2,k,1} F_{k,1}^{n+1} + CC_{3,k,1} F_{k,2}^{n+1} = CC_{4,k,1}$$

$$CC_{1,k,2} F_{k,1}^{n+1} + CC_{2,k,2} F_{k,2}^{n+1} + CC_{3,k,2} F_{k,3}^{n+1} = CC_{4,k,2}$$

$$CC_{1,k,3} F_{k,2}^{n+1} + CC_{2,k,3} F_{k,3}^{n+1} + CC_{3,k,3} F_{k,4}^{n+1} = CC_{4,k,3}$$

II-7-3 Factorisation des systèmes d'équations

Pour que la factorisation se fasse sans problèmes [22] ,il faut que chaque système d'équations soit à diagonale dominante. Cette condition s'écrit:

$$|C_{2,k,j}| > |C_{1,k,j}| + |C_{3,k,j}| \quad \text{pour la première équation} \quad (2-79)$$

$$|CC_{2,k,j}| > |CC_{1,k,j}| + |CC_{3,k,j}| \quad \text{pour la deuxième équation} \quad (2-80)$$

A l'intérieur du fluide, on a:

$$\begin{aligned} |C_{1,k,j}| + |C_{3,k,j}| = \frac{\Delta t}{2} & \left[\frac{|U|}{2 \exp(\phi_k) \Delta \phi} + \frac{1}{P \exp(2 \phi_k) (\Delta \phi)^2} \right] \\ & + \frac{\Delta t}{2} \left| \frac{|U|}{2 \exp(\phi_k) \Delta \phi} - \frac{1}{P \exp(2 \phi_k) (\Delta \phi)^2} \right| \end{aligned} \quad (2-81)$$

quel que soit le signe de U.

$$\begin{aligned} |CC_{1,k,j}| + |CC_{3,k,j}| = \frac{\Delta t}{2} & \left[\frac{|V|}{2 \exp(\phi_k) \Delta \psi} + \frac{1}{P \exp(2 \phi_k) (\Delta \psi)^2} \right] \\ & + \frac{\Delta t}{2} \left| \frac{|V|}{2 \exp(\phi_k) \Delta \psi} - \frac{1}{P \exp(2 \phi_k) (\Delta \psi)^2} \right| \end{aligned} \quad (2-82)$$

quel que soit le signe de V.

Définissons les nombres de Reynolds de maille par les formules suivantes:

$$Re_u = |U| P \exp(\phi_k) \Delta \phi : \text{nombre de Reynolds de maille horizontal}$$

$$Re_v = |V| P \exp(\phi_k) \Delta \psi : \text{nombre de Reynolds de maille vertical}$$

En appliquant la condition (2-79) au premier système d'équations, deux cas peuvent se présenter :

- $Re_u > 2$: on aboutit à une restriction sur le pas de temps:

$$\Delta t < \frac{2 P \exp(2 \phi_k) (\Delta \phi)^2}{Re_u - 2} \quad (2-83)$$

- $Re_u \leq 2$: l'inégalité (2-79) est toujours vérifiée.

De même, en appliquant la condition (2-80) au deuxième système d'équations, on peut également avoir deux cas:

- $Re_v > 2$: on a une restriction sur le pas de temps :

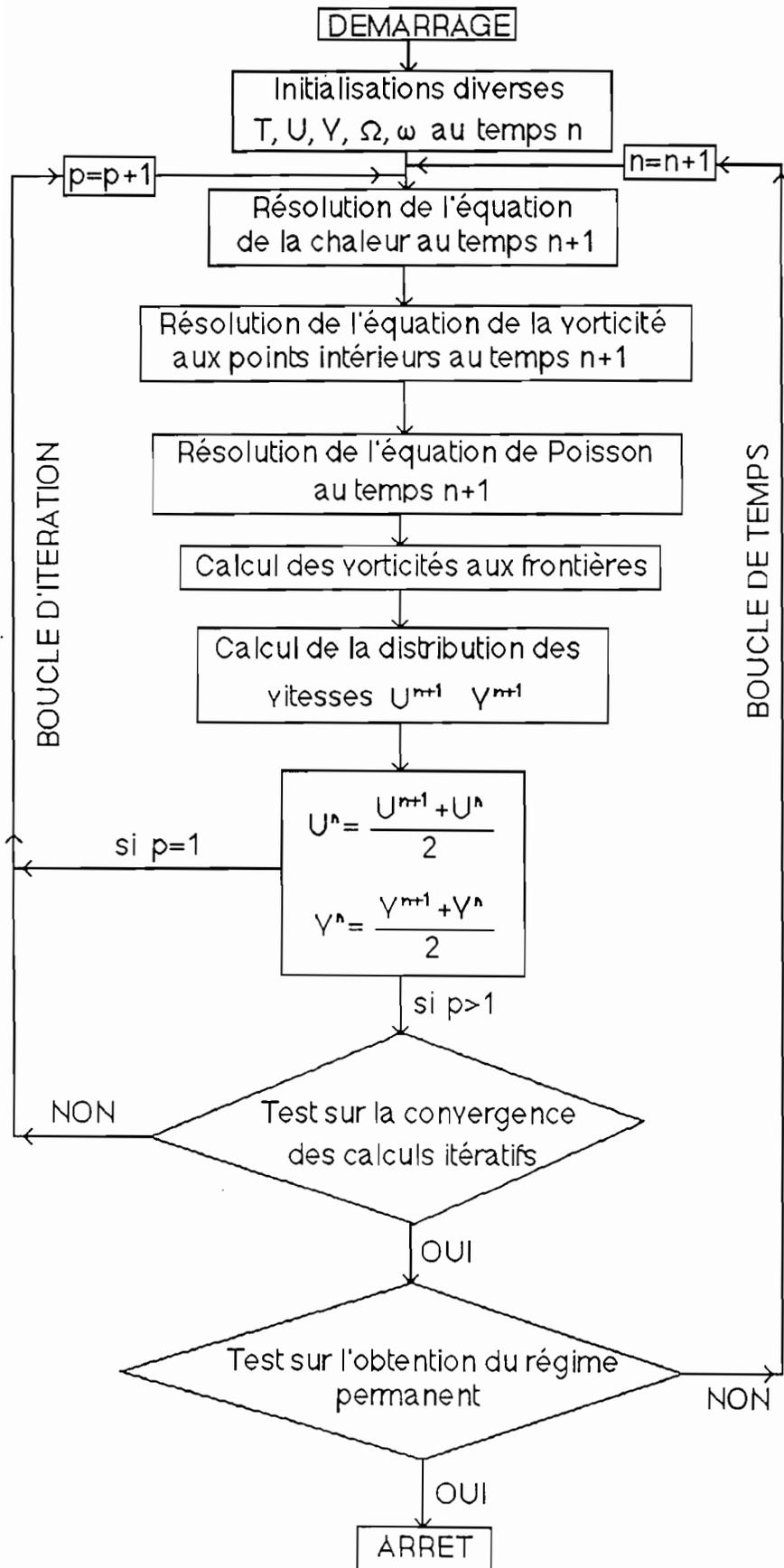
$$\Delta t < \frac{2 P \exp(2 \phi_k) (\Delta \psi)^2}{Re_v - 2} \quad (2-84)$$

- $Re_v \leq 2$: l'inégalité (2-80) est toujours vérifiée.

Sur les frontières de notre domaine, les systèmes d'équations sont toujours à diagonale dominante.

II-8 Organisation générale des calculs (voir organigramme page suivante)

Figure 2-2 Organigramme des calculs



II-9 Tests de convergence des calculs

Les tests d'arrêt sont utilisés pour apprécier la convergence des calculs dans trois cas:

- sur la convergence des calculs durant la résolution de l'équation de la fonction de courant,
- sur une période de temps Δt donné, les résultats ne sont pris en considération qu'après convergence des calculs itératifs sur les vorticités et les températures,
- à la fin d'une période de temps Δt , les résultats sont comparés à ceux de l'instant précédent et les calculs sont arrêtés lorsque la solution stationnaire est atteinte.

Pour l'équation de Poisson, le test de convergence est appliqué sur la fonction de courant. Nous choisissons par ailleurs un critère lié à la vorticité et à la température pour la convergence des calculs à chaque pas de temps et pour la recherche de l'état stationnaire:

$$\frac{\text{MAX} \left| \Omega_{k,j}^{p+1} - \Omega_{k,j}^p \right|}{\text{MAX} \left| \Omega_{k,j}^{p+1} \right|} < 10^{-5} \quad \text{et} \quad \frac{\text{MAX} \left| F_{k,j}^{n+1} - F_{k,j}^n \right|}{\text{MAX} \left| F_{k,j}^{n+1} \right|} < 10^{-5} \quad (2-85)$$

avec:

F : vorticité ou température

p : indice d'itération des calculs

n : indice d'incrémentement du temps.

II-10 Facteur de forme

Le facteur de forme de l'enceinte étudiée est défini dans le domaine transformé par la relation suivante:

$$F_r = \frac{\text{Log} \left(\frac{R_N}{R_1} \right)}{\Psi_M - \Psi_1} \quad (2-86)$$

CHAPITRE III

RESULTATS NUMERIQUES ET INTERPRETATIONS

Dans ce chapitre, nous allons valider, dans un premier temps, notre modèle en étudiant le cas particulier de l'anneau avant de présenter nos résultats.

A Validation de notre algorithme par l'étude particulière de l'anneau

L'approche du problème développée dans ce mémoire s'adapte parfaitement à l'étude de la convection naturelle dans un anneau dont les parois sont isothermes. Cette configuration, qui est un cas particulier de notre modèle, a fait l'objet de très nombreuses études, ce qui nous permet de valider par quelques exemples nos codes de calcul.

Pour nous ramener à l'étude classique de l'anneau, il suffit d'étudier notre modèle entre les plans diamétraux définis par $\psi_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $\psi_M = +\frac{\pi}{2}$ et de considérer les conditions de symétries suivantes:

$$\frac{\partial \tilde{U}(\phi, \psi, \tilde{t})}{\partial \psi} = \tilde{V}(\phi, \psi, \tilde{t}) = \tilde{\Omega}(\phi, \psi, \tilde{t}) = 0 ; \frac{\partial \tilde{T}(\phi, \psi, \tilde{t})}{\partial \psi} = 0 \text{ et } \tilde{\omega}(\phi, \psi, \tilde{t}) = 0$$

sur les plans $\psi = \psi_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_N$ et $\psi = \psi_M = +\frac{\pi}{2}$, $\phi_1 \leq \phi \leq \phi_N$.

Afin de comparer les résultats, nous avons appliqué notre algorithme à un anneau dont les parois sont isothermes. La longueur de référence utilisée dans les calculs est la différence des rayons des cylindres ($b = R_N - R_1$) et le fluide étudié est l'air.

Exec. N°	R_N / R_1	Gr	NxM	Nu2 [25]	Nos calculs	%écart
01	1,5	$0,485 \times 10^4$	31x51	1,18	1,186	+ 0,51
02	1,5	$0,115 \times 10^5$	31x51	1,48	1,517	+ 2,50
03	1,5	$0,262 \times 10^5$	31x51	1,88	1,911	+ 1,65
04	2,0	$0,100 \times 10^5$	31x51	1,64	1,674	+ 2,07
05	2,0	$0,388 \times 10^5$	31x51	2,40	2,463	+ 2,63
06	2,0	$0,880 \times 10^5$	31x51	3,08	3,077	- 0,10
07	1,2	$0,732 \times 10^3$	16x21	1,00	1,000	+ 0,00
----	-----	Ra	-----	-----[26]	-----	-----
08	2,0	$0,500 \times 10^6$	31x51	5,77615	5,869	+ 1,61

Tableau 3-1: Comparaison des nombres de Nusselt moyens

On constate que l'écart relatif maximum entre nos résultats et ceux des auteurs cités en référence est inférieur à 3 %, ce qui indique la fiabilité de notre algorithme.

- Nombre de Nusselt moyen sur la paroi isotherme interne:

$$\text{Nu2}(\phi_1, \psi) = \frac{\phi_N - \phi_1}{\tilde{T}_N - \tilde{T}_1} \frac{\partial \tilde{T}(\phi_1, \psi)}{\partial \phi} \quad \text{et} \quad \overline{\text{Nu2}}(\phi_1) = \frac{\phi_N - \phi_1}{\pi (\tilde{T}_N - \tilde{T}_1)} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\partial \tilde{T}(\phi_1, \psi)}{\partial \phi} d\psi$$

- Nombre de Nusselt moyen sur la paroi isotherme externe:

$$\text{Nu2}(\phi_N, \psi) = \frac{\phi_N - \phi_1}{\tilde{T}_N - \tilde{T}_1} \frac{\partial \tilde{T}(\phi_N, \psi)}{\partial \phi} \quad \text{et} \quad \overline{\text{Nu2}}(\phi_N) = \frac{\phi_N - \phi_1}{\pi (\tilde{T}_N - \tilde{T}_1)} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\partial \tilde{T}(\phi_N, \psi)}{\partial \phi} d\psi$$

- Nombre de Nusselt moyen utilisé dans le tableau 3-1:

$$\overline{\text{Nu2}} = \frac{\overline{\text{Nu2}}(\phi_1) + \overline{\text{Nu2}}(\phi_N)}{2}$$

B Résultats numériques et interprétations

Afin d'observer les phénomènes de symétrie, nous avons exécuté le programme de calcul sur des configurations symétriques par rapport à l'axe vertical Oy, pour des facteurs de forme variant de 0,2 à 1 et pour $100 \leq Gr \leq 10^6$.

Pour l'application numérique, nous avons utilisé de l'air avec les propriétés physiques suivantes [17]:

- viscosité cinématique : $\nu = 0,15 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
- coefficient d'expansion thermique : $\beta = 0,00341 \text{ K}^{-1}$
- conductivité thermique : $\lambda = 0,025 \text{ W/m/K}$

les autres données étant :

- accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- rayon du cylindre intérieur : $R_1 = 0,10 \text{ m}$
- température du cylindre extérieur : $T_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

Les calculs ont été effectués pour diverses combinaisons du facteur de forme, du nombre de Grashof modifié et du rapport des rayons R_N/R_1 . Le récapitulatif des principales exécutions numériques effectuées est présenté dans le tableau 3 -2. Pour chaque exécution, les calculs ont été poursuivis jusqu'à ce que les variations des nombres de Nusselt moyens \overline{Nu}_{2_1} et \overline{Nu}_{2_N} , respectivement sur les parois cylindriques intérieure et extérieure, deviennent négligeables par rapport au temps.

III-1 Etude du régime transitoire

Pour observer les phénomènes transitoires, nous avons choisi d'illustrer les résultats des exécutions NN° 2, 4, 6, 7, 10, 12, 14 et 16 du tableau 3-2.

III-1-1 Evolution des lignes de courant et des isothermes

Pour représenter graphiquement les résultats, nous avons mis au point un programme auxiliaire de calcul et de traçage inspiré du sous-programme SEARCH2 [23].

N° Exéc.	F_r	N X M	Gr	\overline{Nu}_2	Ω_{max}	D_h	R_N/R_1
001	1/1	21 x 21	10^2	1,00	$0,2230 \cdot 10^{-2}$	$0,41985 \cdot 10^{-1}$	1,4177
002	1/1	31 x 51	10^4	1,31	1,4078	$0,41985 \cdot 10^{-1}$	1,4177
003	1/1	31 x 51	10^5	2,70	$0,8432 \cdot 10^1$	$0,41985 \cdot 10^{-1}$	1,4177
004	1/1	31 x 51	10^6	5,42	$0,3723 \cdot 10^2$	$0,41985 \cdot 10^{-1}$	1,4177
005	1/2	21 x 21	10^2	1,00	$0,8830 \cdot 10^{-2}$	$0,55886 \cdot 10^{-1}$	1,4177
006	1/2	31 x 51	10^4	1,25	$0,2690 \cdot 10^1$	$0,55886 \cdot 10^{-1}$	1,4177
007	1/2	31 x 51	10^5	2,59	$0,1175 \cdot 10^2$	$0,55886 \cdot 10^{-1}$	1,4177
008	1/2	31 x 51	10^6	4,41	$0,3284 \cdot 10^2$	$0,55886 \cdot 10^{-1}$	1,4177
009	1/3	21 x 51	10^2	1,00	$0,1787 \cdot 10^{-1}$	$0,62819 \cdot 10^{-1}$	1,4177
010	1/3	31 x 51	10^4	1,16	$0,3380 \cdot 10^1$	$0,62819 \cdot 10^{-1}$	1,4177
011	1/3	31 x 51	10^5	2,37	$0,1354 \cdot 10^2$	$0,62819 \cdot 10^{-1}$	1,4177
012	1/3	31 x 51	10^6	4,04	$0,3294 \cdot 10^2$	$0,62819 \cdot 10^{-1}$	1,4177
013	1/5	21 x 21	10^2	1,00	$0,3696 \cdot 10^{-1}$	0,14652	1,8745
014	1/5	31 x 51	10^4	1,10	$0,3100 \cdot 10^1$	0,14652	1,8745
015	1/5	31 x 51	10^5	1,98	$0,1250 \cdot 10^2$	0,14652	1,8745
016	1/5	31 x 51	10^6	3,42	$0,2660 \cdot 10^2$	0,14652	1,8745

Tableau 3 - 2 : Récapitulatif des principales exécutions numériques effectuées

Sur les figures 3-1 à 3-8, nous avons représenté l'évolution des lignes de courant et des isothermes des différentes exécutions en fonction du temps adimensionnel.

Les courbes de lignes de courant prennent toujours naissance en deux points symétriques, sur la paroi intérieure chauffée à proximité des parois isolées. Au cours du temps, ces courbes se développent et les centres de rotation évoluent vers l'intérieur du fluide. A l'instant initial, on peut considérer que le mouvement est amorcé par les particules de fluide qui se chauffent au contact de la paroi intérieure chauffée. Elles deviennent plus légères et se déplacent, au niveau de l'axe de symétrie, vers la paroi isotherme où elles se refroidissent puis redescendent.

Quand le flux de chaleur imposé sur la paroi cylindrique intérieure est relativement faible, on obtient, à tout moment, deux groupes de cellules symétriques positives et négatives qui tournent respectivement dans le sens trigonométrique et dans le sens inverse. La fonction de courant prend des valeurs très faibles en début d'opération. Ces valeurs augmentent avec le temps jusqu'à une certaine limite puis diminuent avant de se stabiliser quand le transfert devient stationnaire.

Quand le flux devient très élevé (fig. 3-2-b et 3-2-c), deux cellules symétriques supplémentaires prennent naissance, au cours du temps, au niveau des "coins" inférieurs de l'enceinte et se développent en tournant en sens inverse des cellules voisines. Cette apparition de cellules supplémentaires correspond à un changement de régime d'écoulement. Dans le domaine d'investigation étudié, on a illustré ce phénomène pour un facteur de forme $F_r=1/1$ qui représente une configuration assez fermée et qui permet aussi d'avoir un flux plus élevé, pour le même nombre de Grashof modifié.

Les isothermes sont initialement parallèles et collées à la paroi intérieure chauffée. Cela montre la prédominance du régime conductif au début de l'opération. Avec le temps et suivant la valeur du flux imposé, ces lignes se décolent de la paroi, se transforment et évoluent vers le régime permanent qui peut être à conduction dominante, pour un nombre de Grashof relativement faible ou à convection dominante, pour un nombre de Grashof plus important.

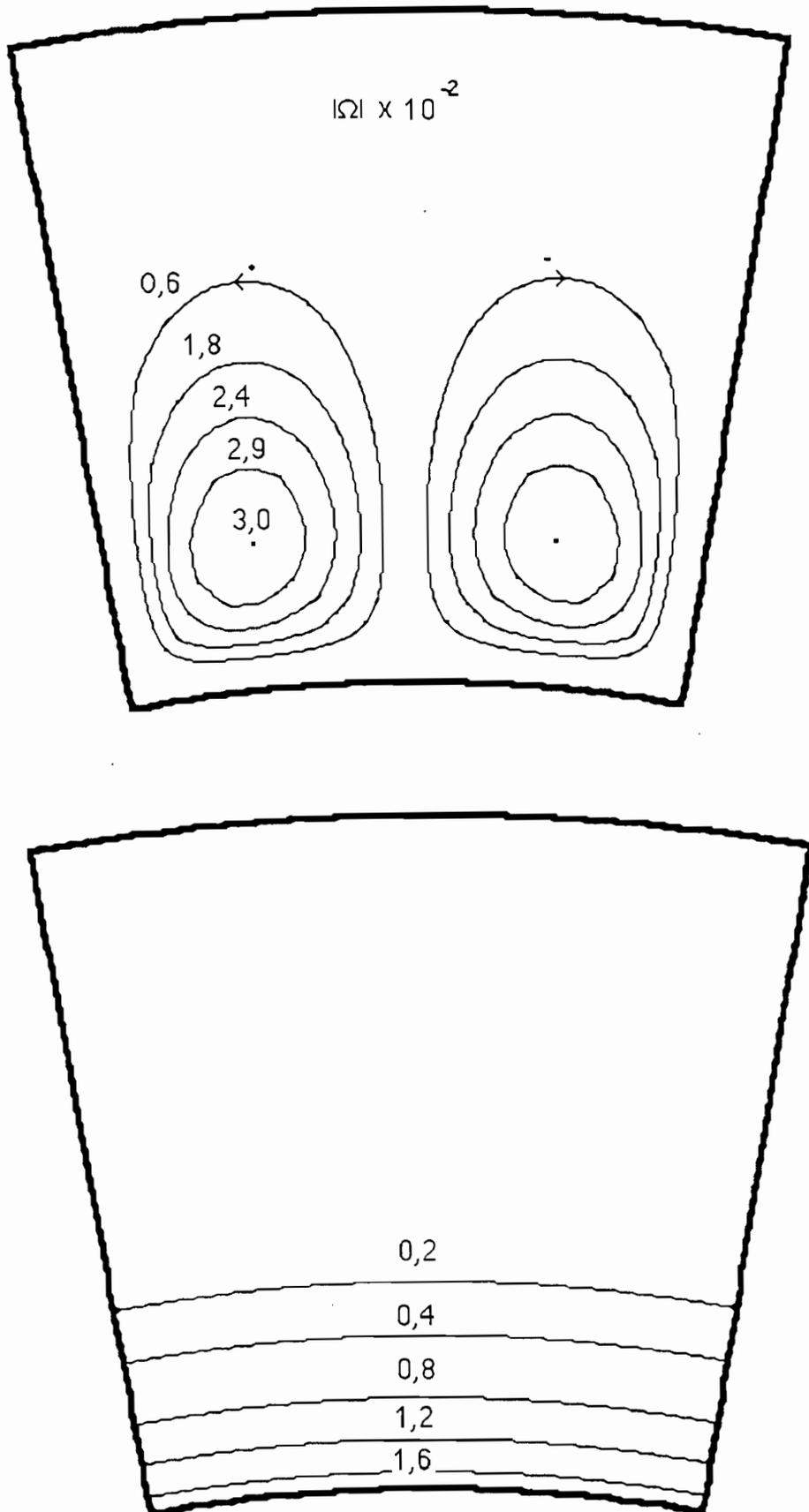


Figure 3 - 1 - a : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 2$ pour $F_r = 1/1$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

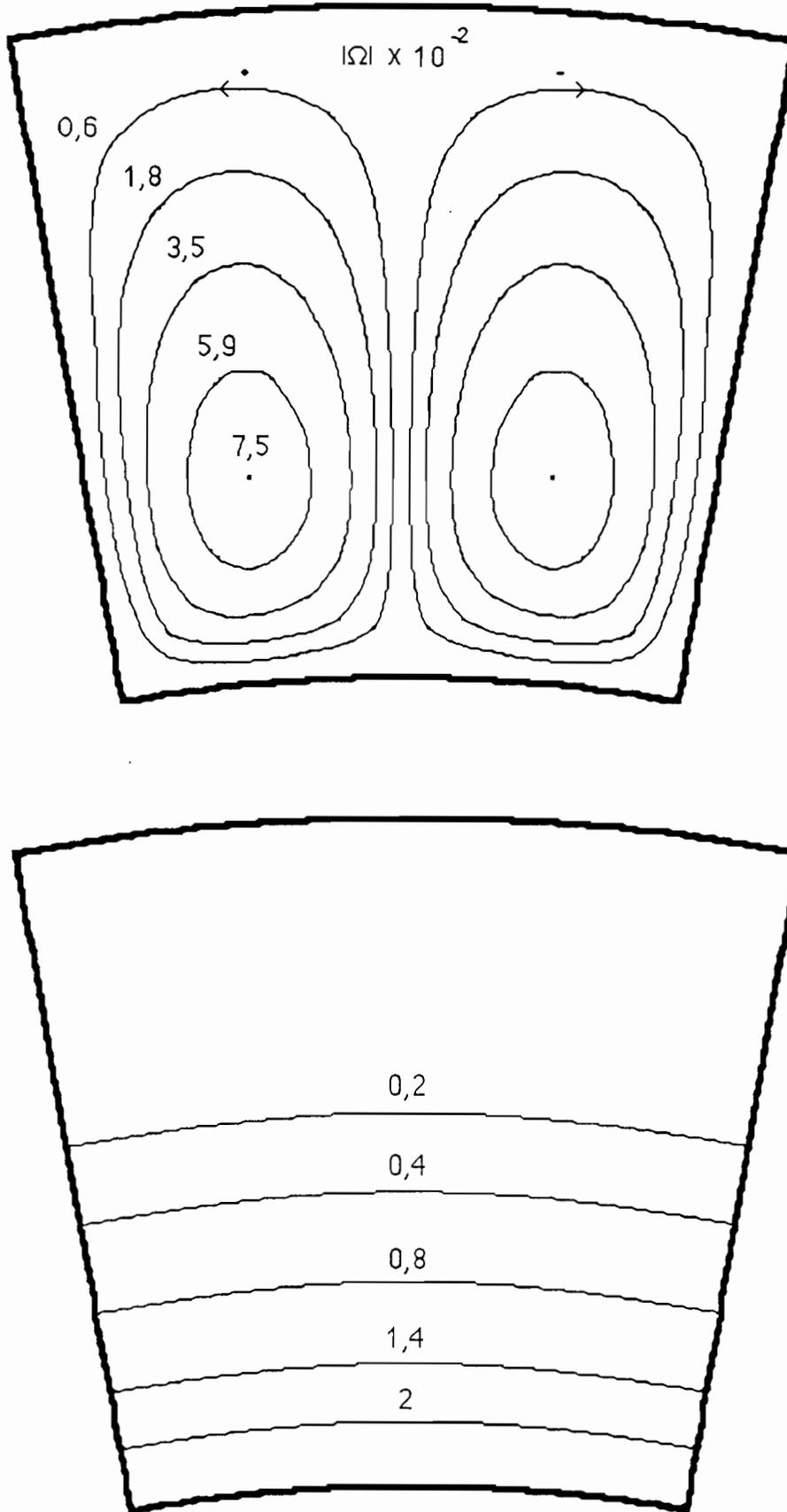


Figure 3 - 1 - b : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 5$ pour $F_r = 1/1$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

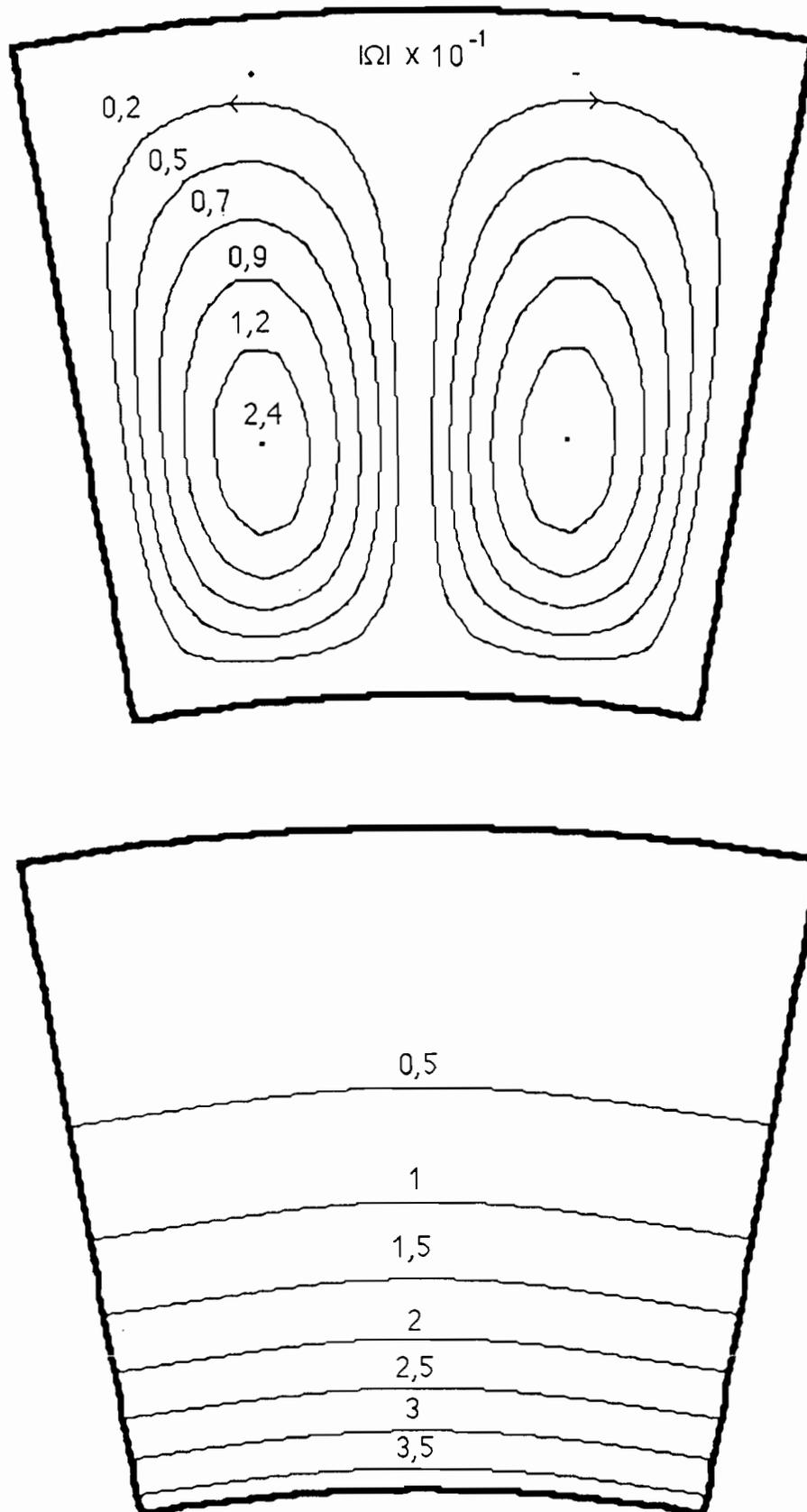


Figure 3 - 1 - c : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 9,2$ pour $F_r = 1/1$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

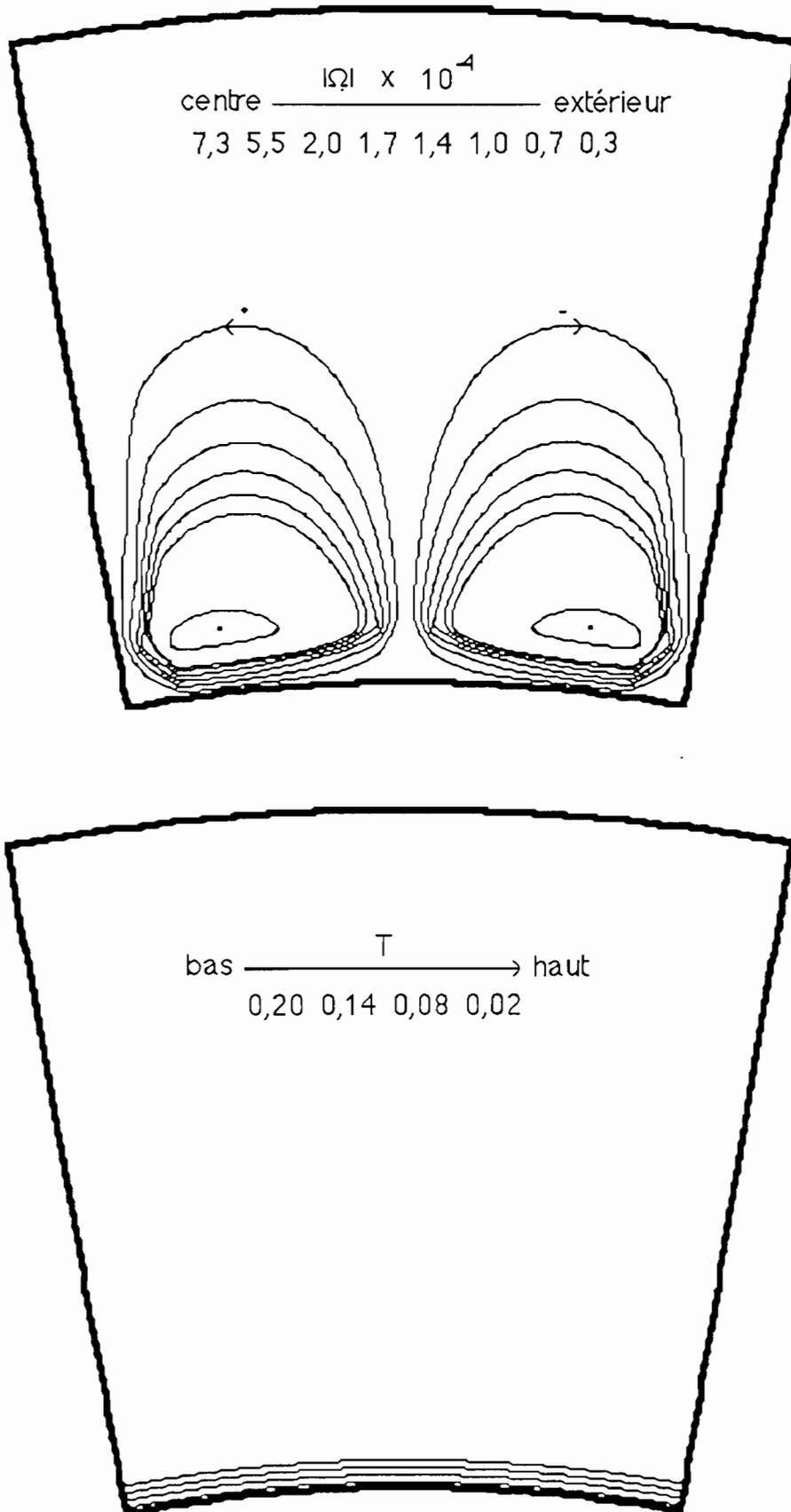


Figure 3 - 2 - a : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 0,1$ pour $F_r = 1/1$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^7$

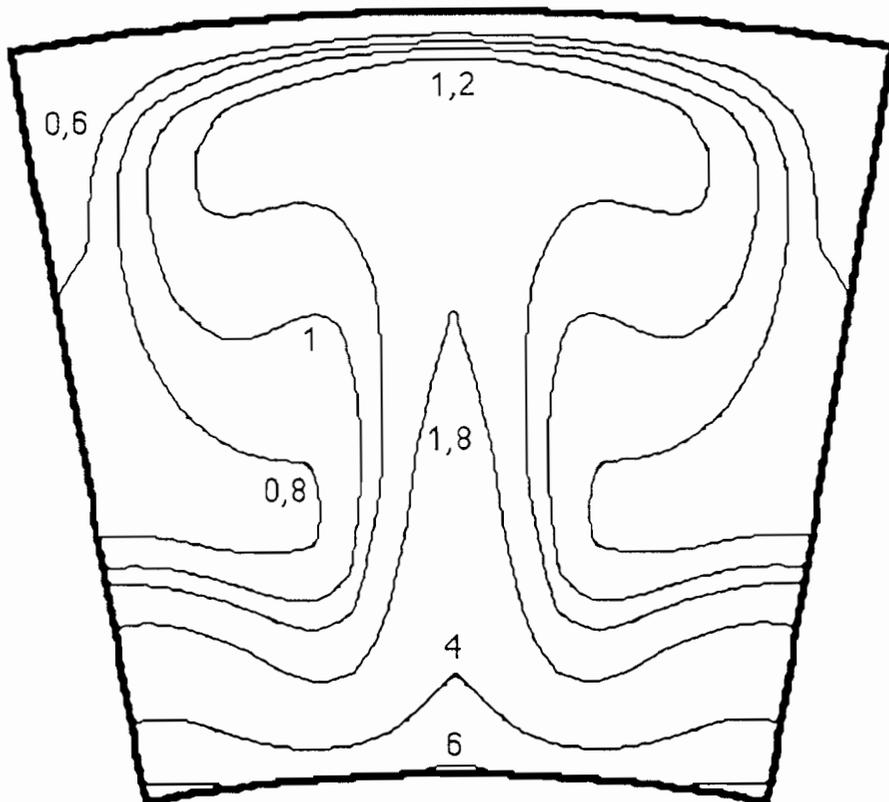
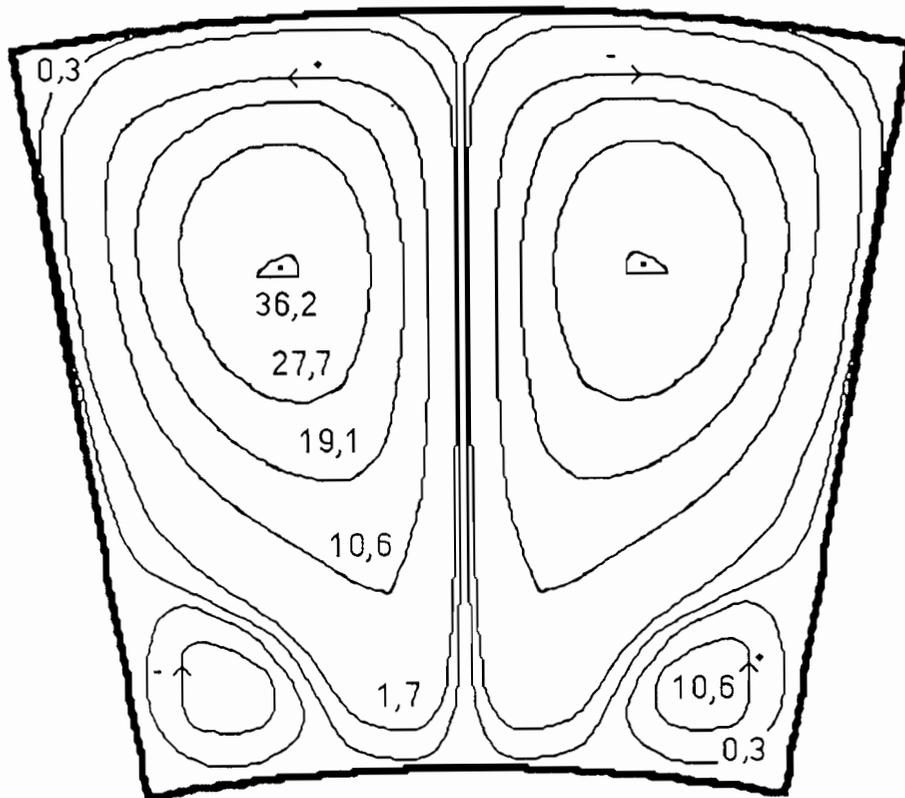


Figure 3 - 2 - b : Représentation des lignes de courant ($|\Omega_{\max}|=36,4$) et des isothermes au temps adimensionnel $t = 50$ pour $F_r = 1/1$ et $Gr=0,1 \cdot 10^7$

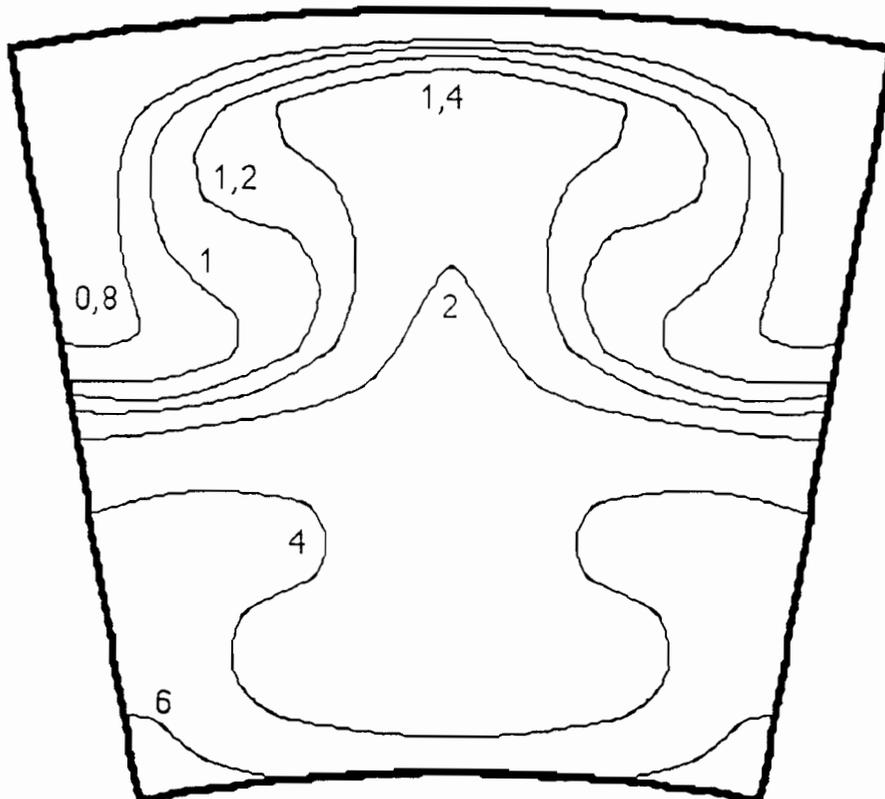
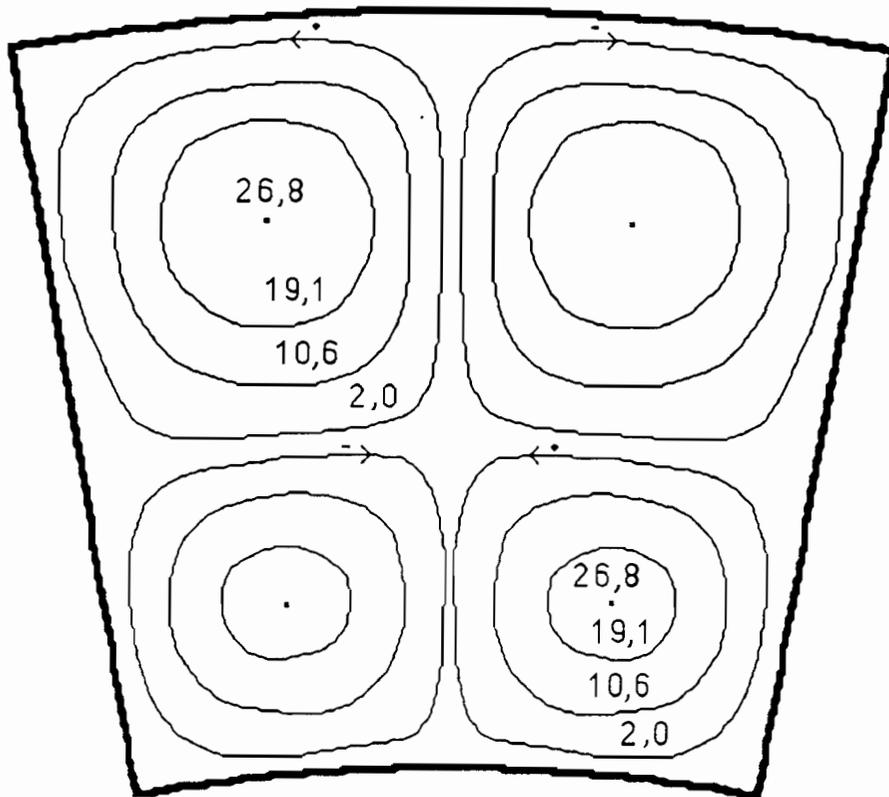


Figure 3 - 2 - c : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 100$ pour $F_r = 1/1$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^7$

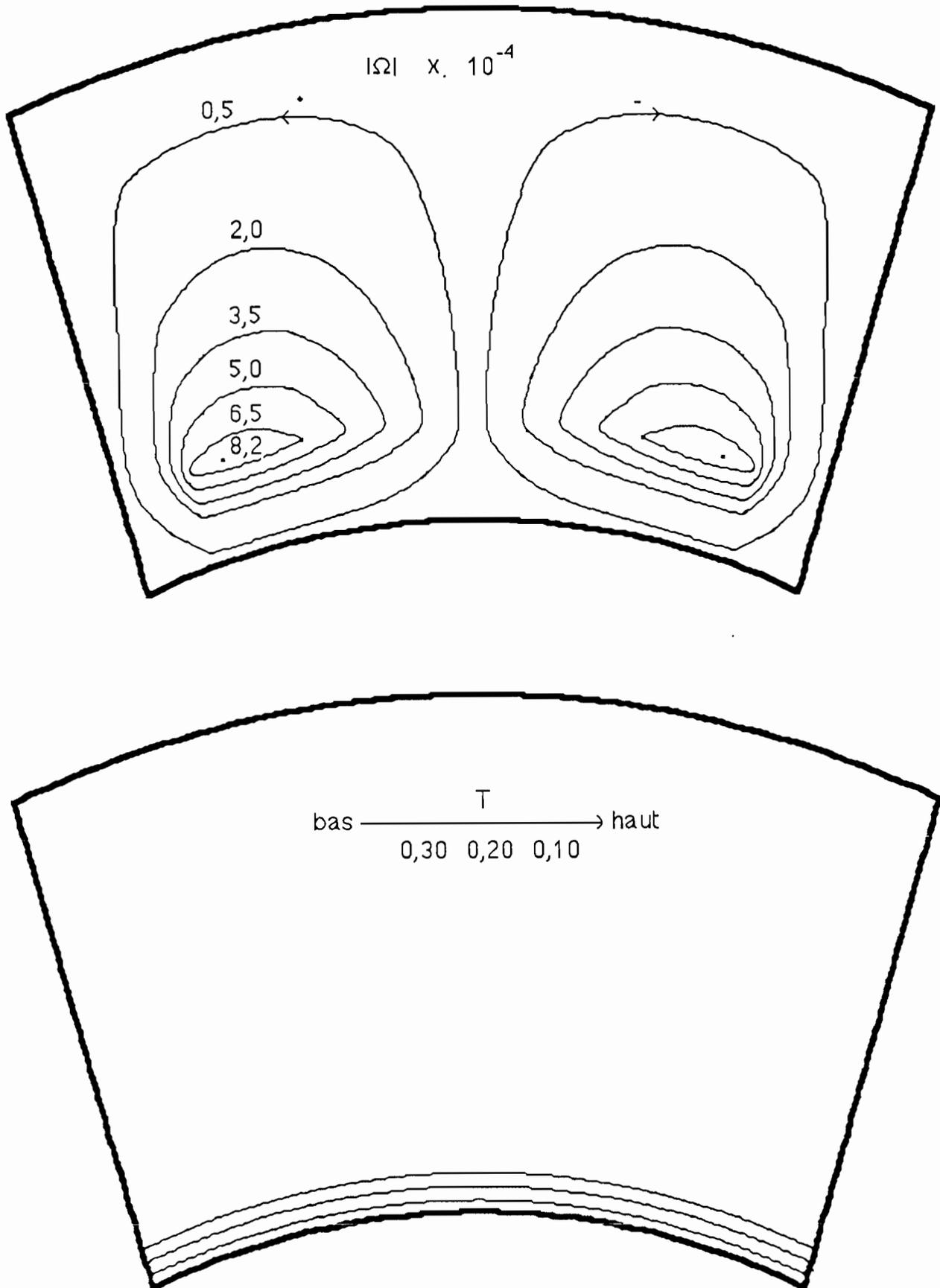


Figure 3 - 3 - a : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 0,1$ pour $F_r = 1/2$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

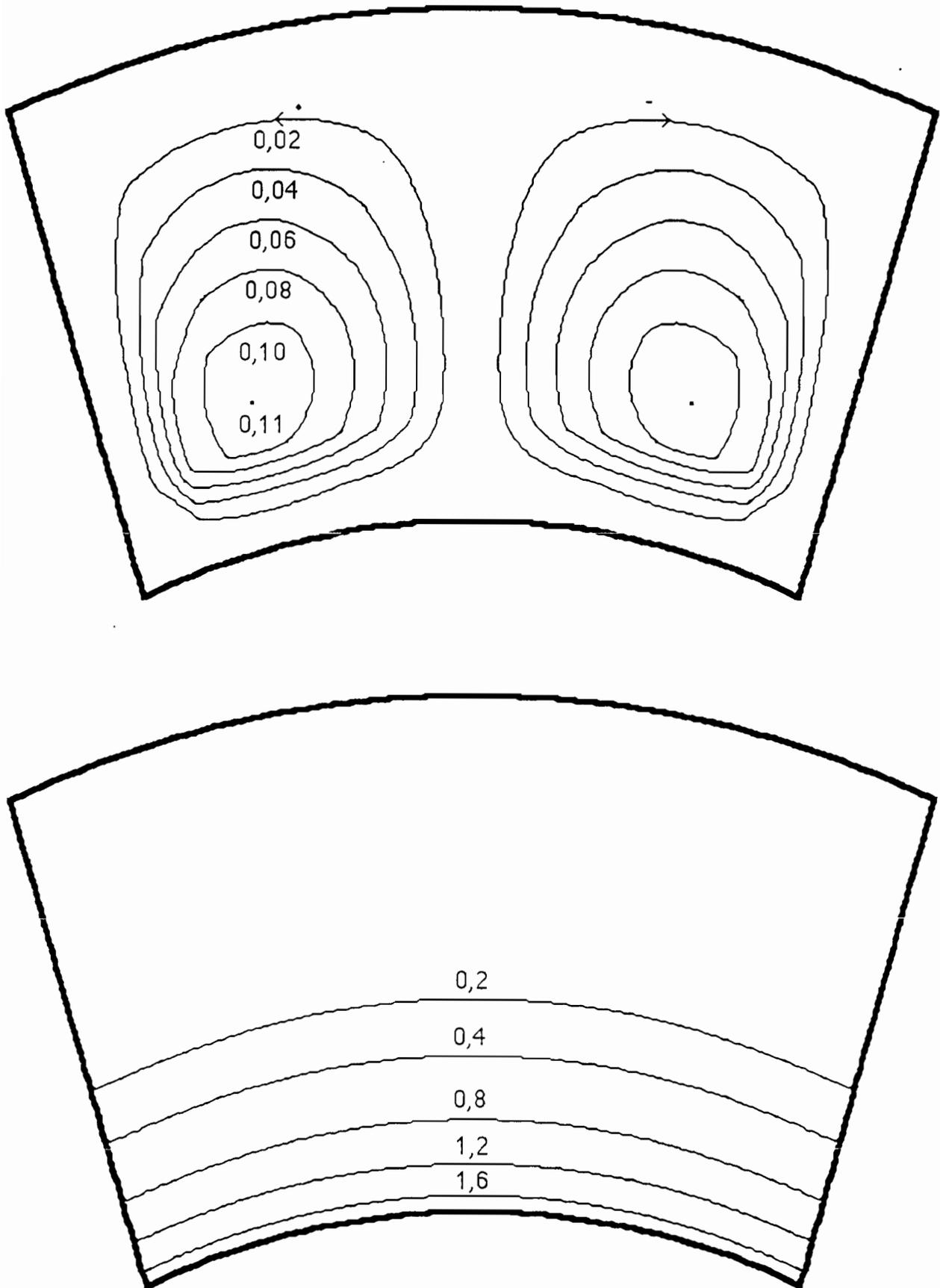


Figure 3 - 3 - b : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 2$ pour $F_r = 1/2$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

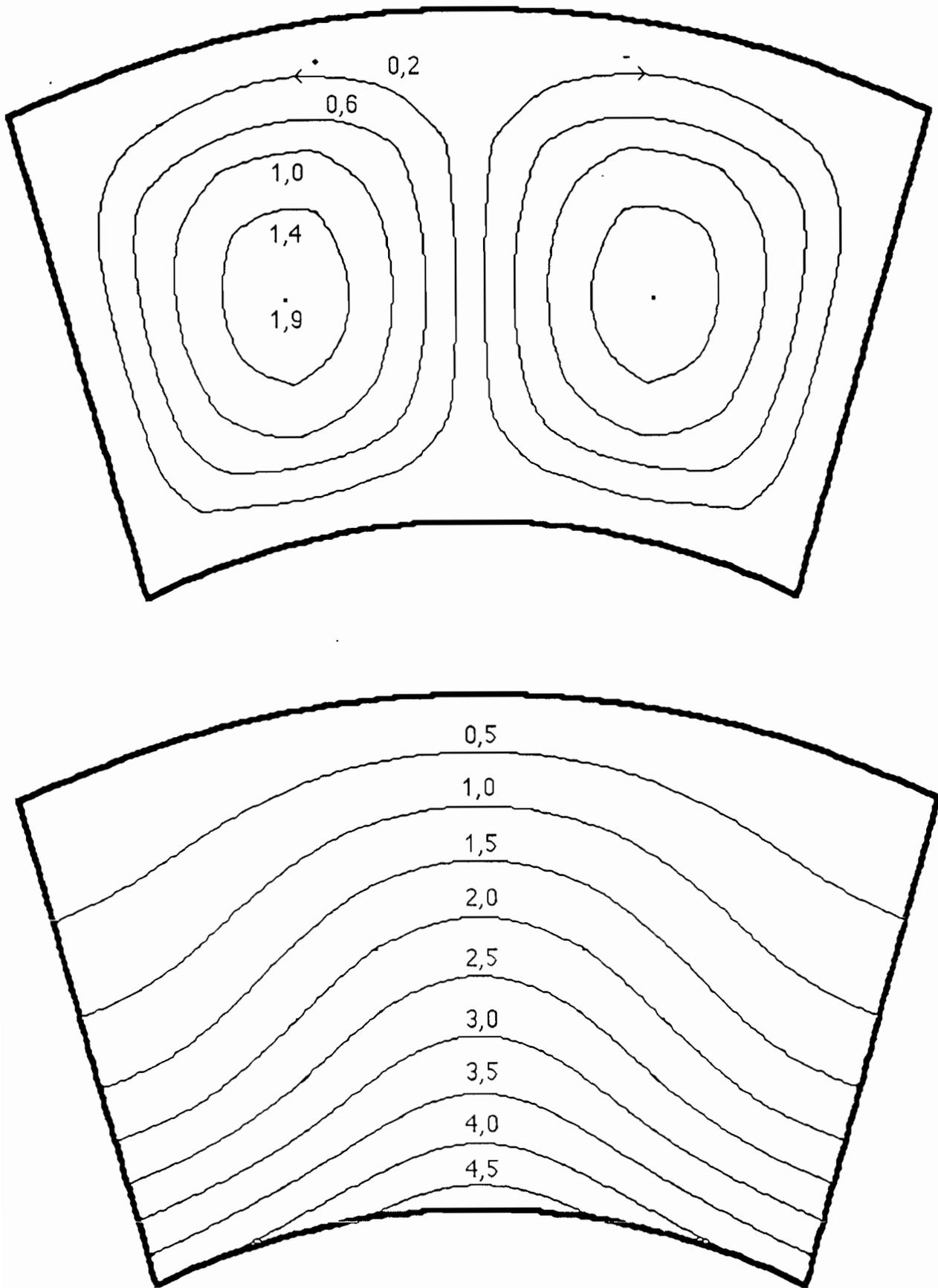


Figure 3 - 3 - c : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 5$ pour $F_r = 1/2$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

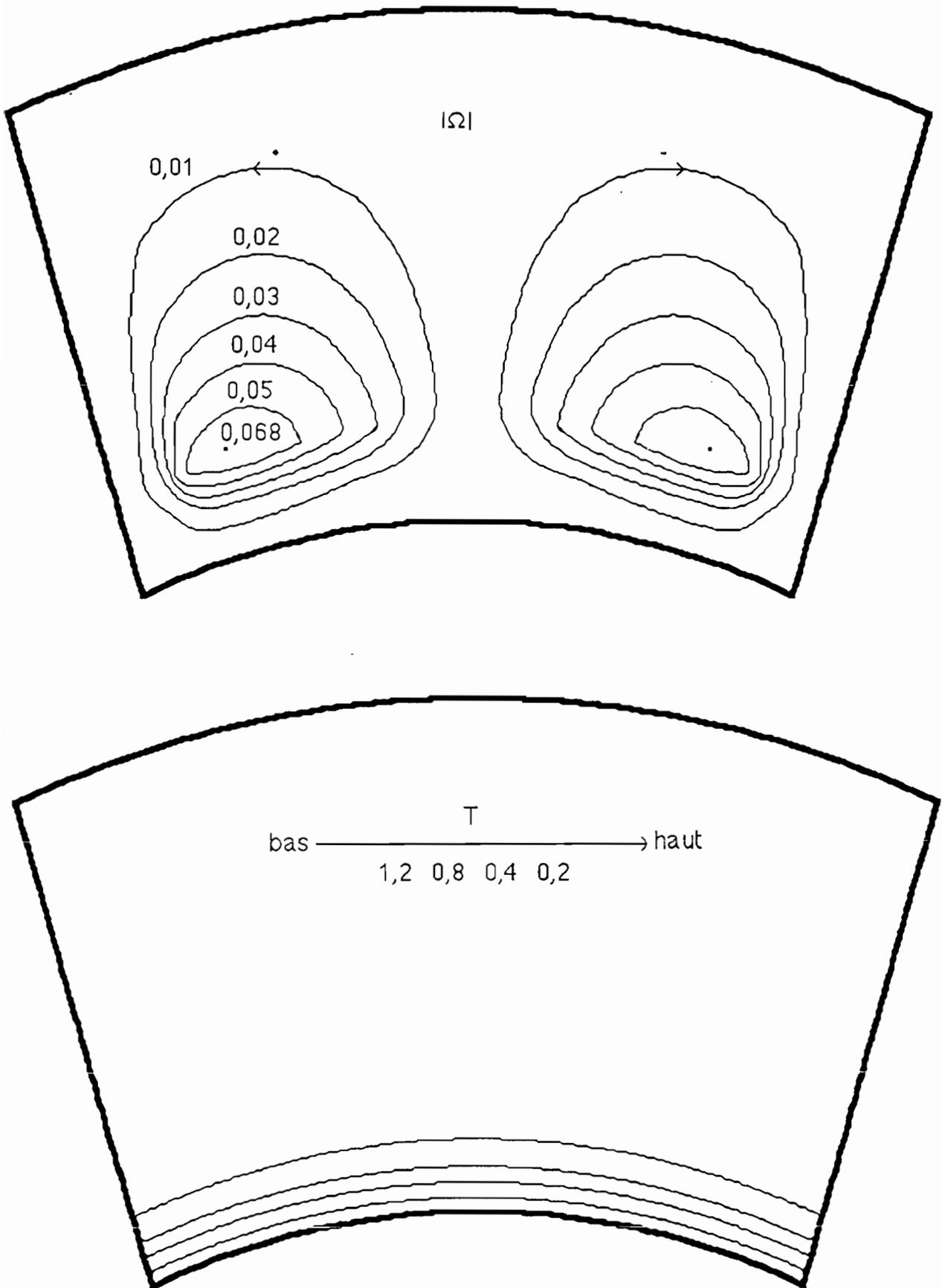


Figure 3 - 4 - a : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 0,1$ pour $F_r = 1/2$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^6$

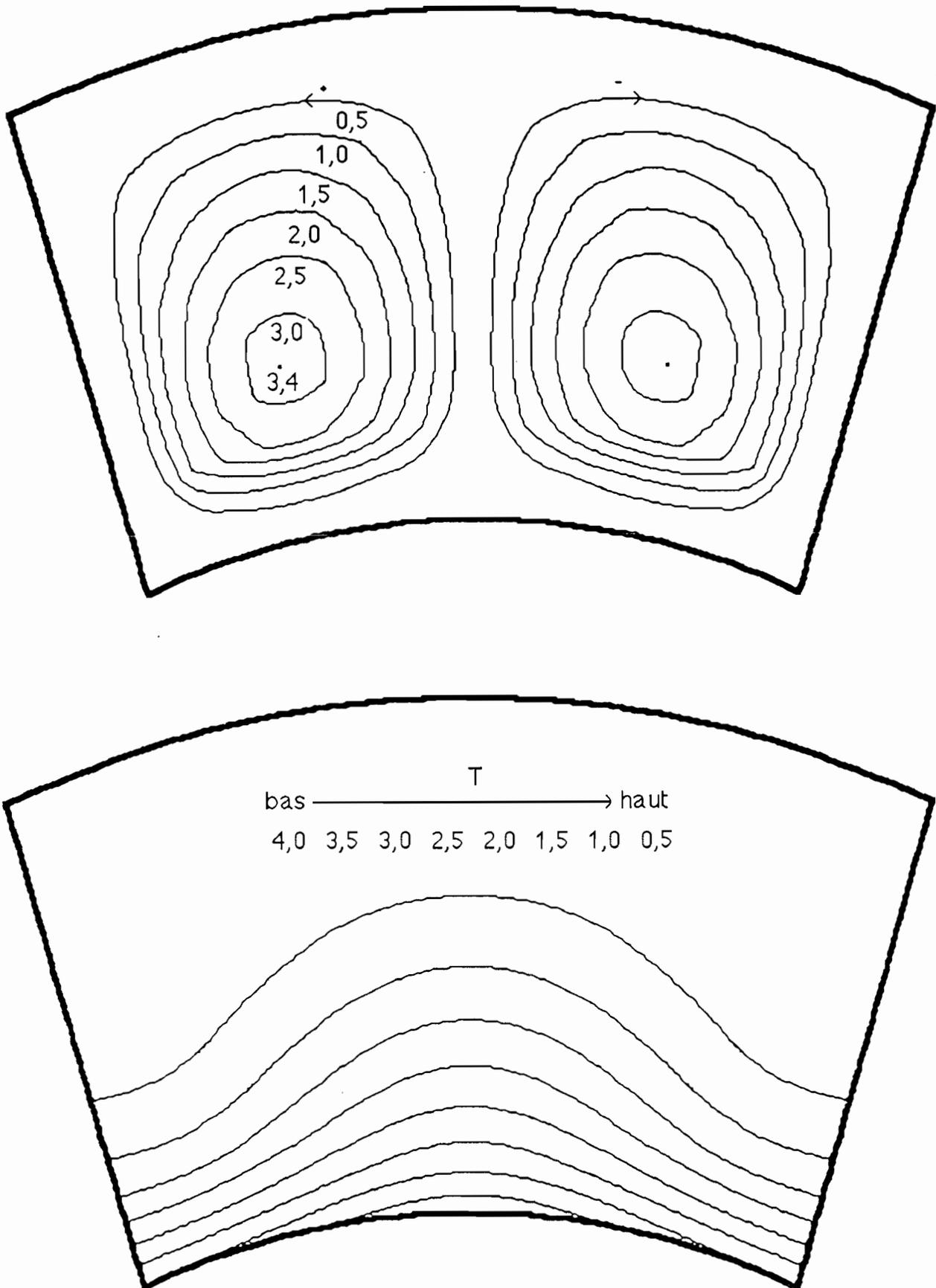


Figure 3 - 4 - b : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 10$ pour $F_r = 1/2$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^6$

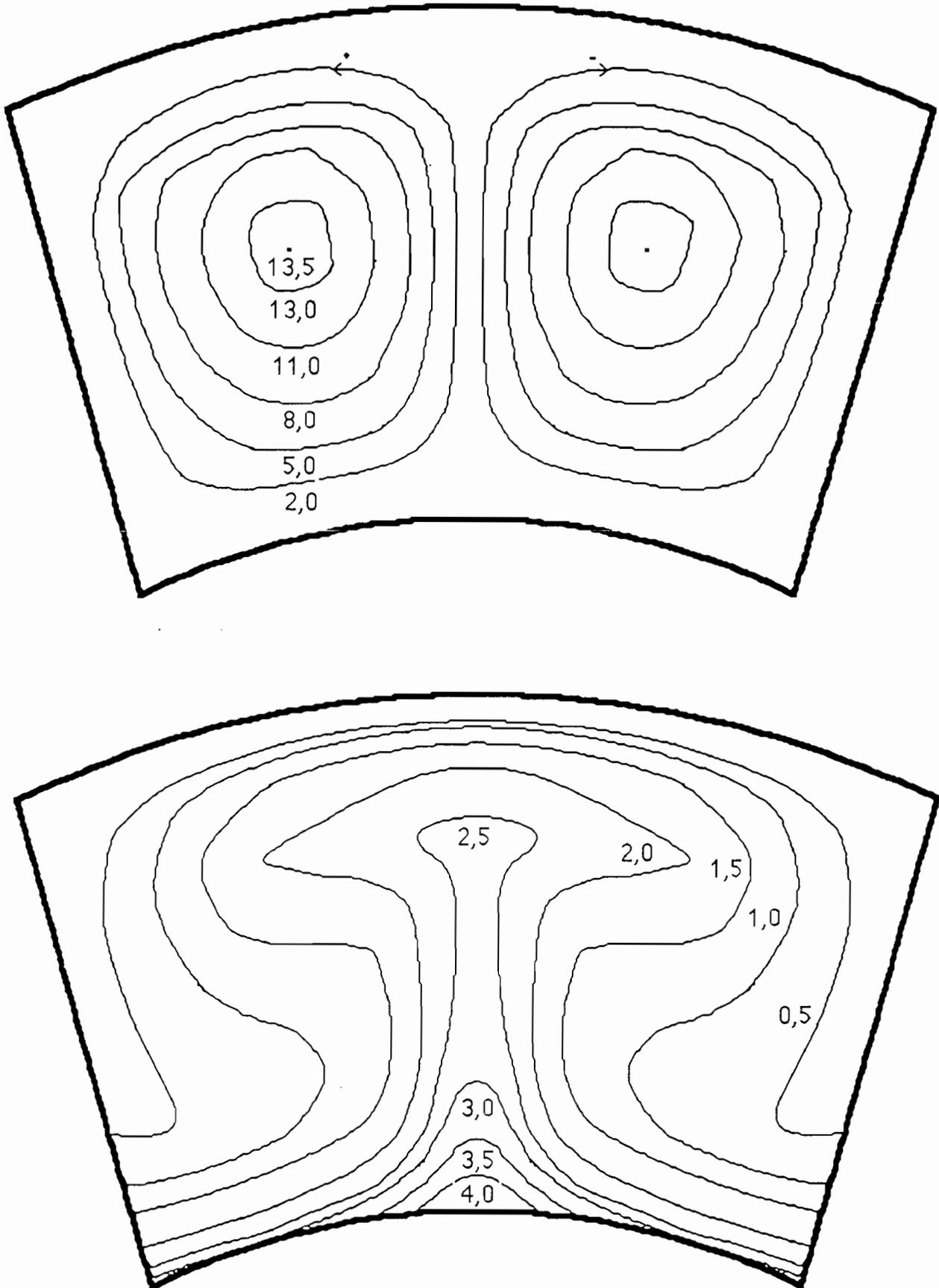
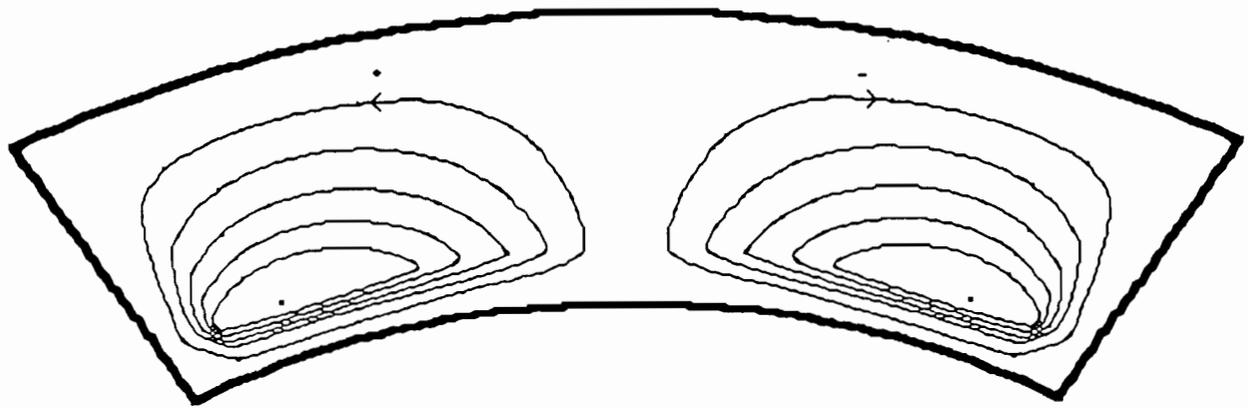
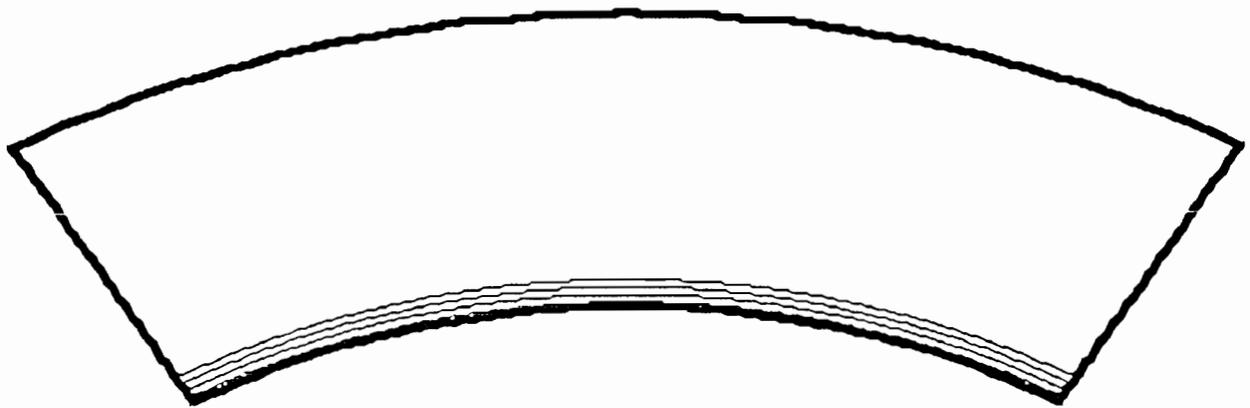


Figure 3 - 4 - c : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 19,8$ pour $F_r = 1/2$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^6$

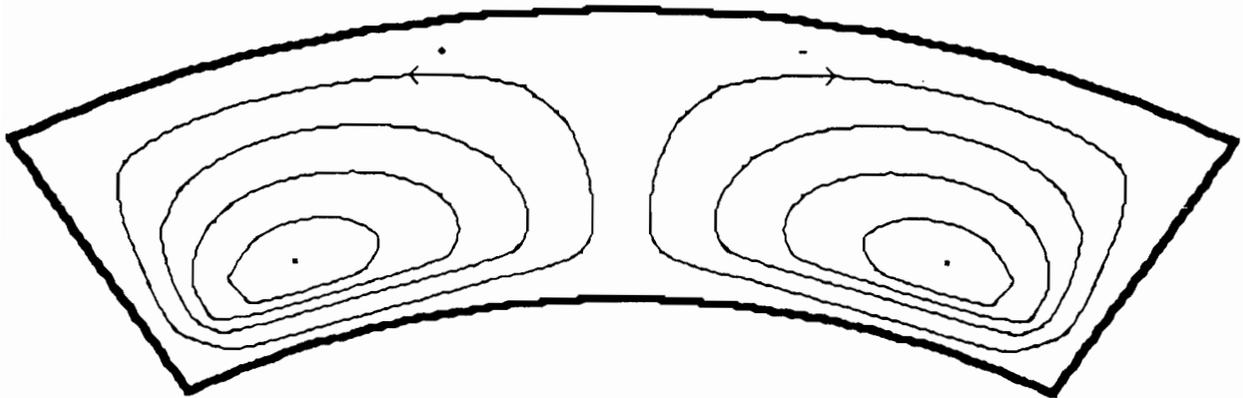


$|\Omega|$: $14,2 \cdot 10^{-4}$ $10 \cdot 10^{-4}$ $8 \cdot 10^{-4}$ $6 \cdot 10^{-4}$ $4 \cdot 10^{-4}$ $2 \cdot 10^{-4}$

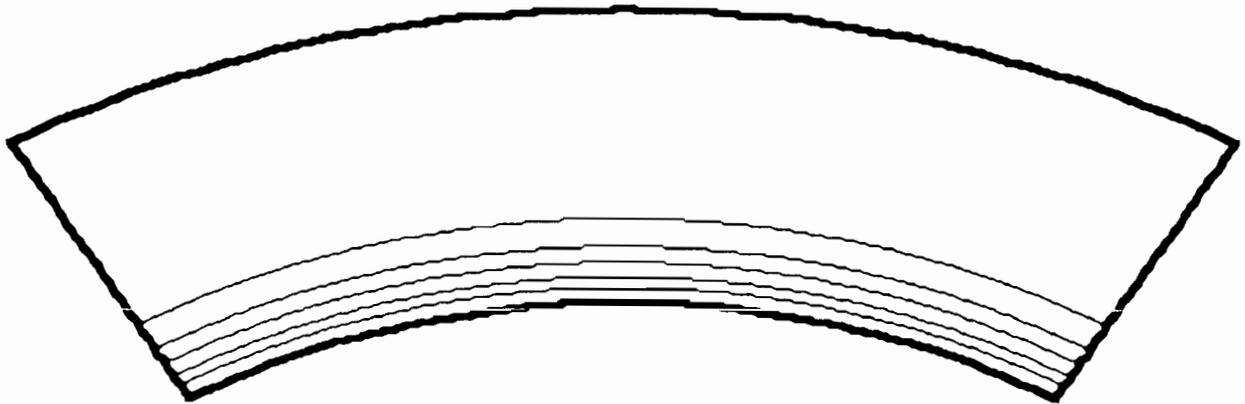


Tbas--> haut : 0,35 0,25 0,15 0,05

Figure 3 - 5 - a : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 0,1$ pour $F_r = 1/3$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

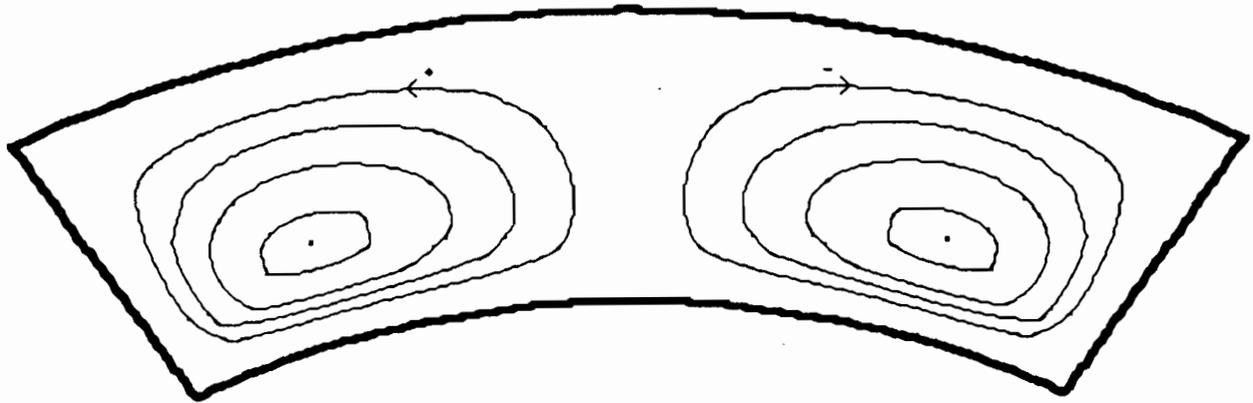


$|\Omega|$: 0,082 0,07 0,05 0,03 0,01

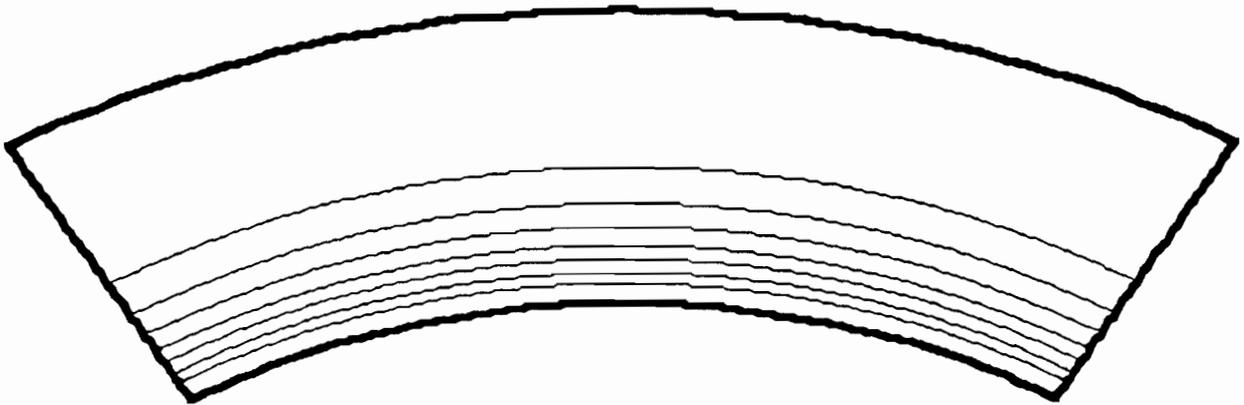


Tbas--> haut : 1,0 0,8 0,6 0,4 0,2

Figure 3 - 5 - b : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 1$ pour $F_r = 1/3$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

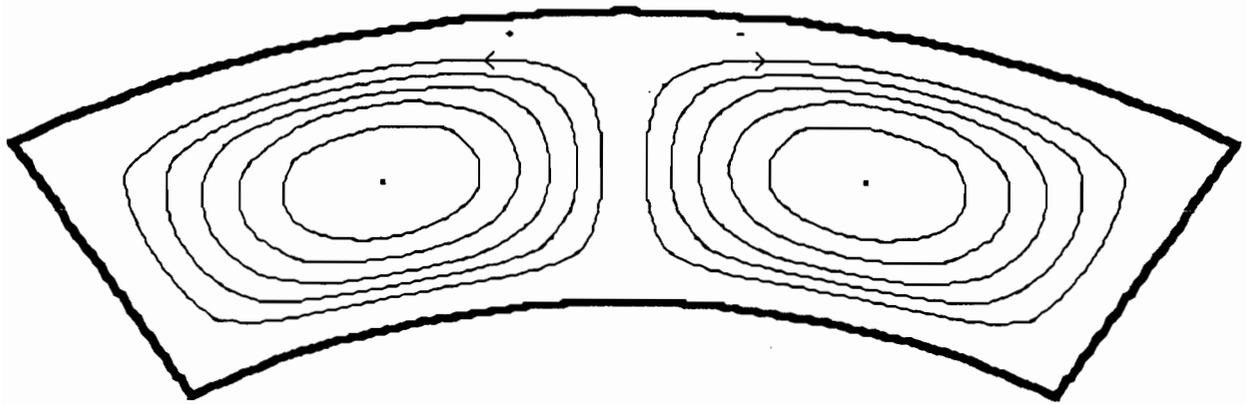


$|\Omega|$: 0,21 0,20 0,15 0,10 0,05

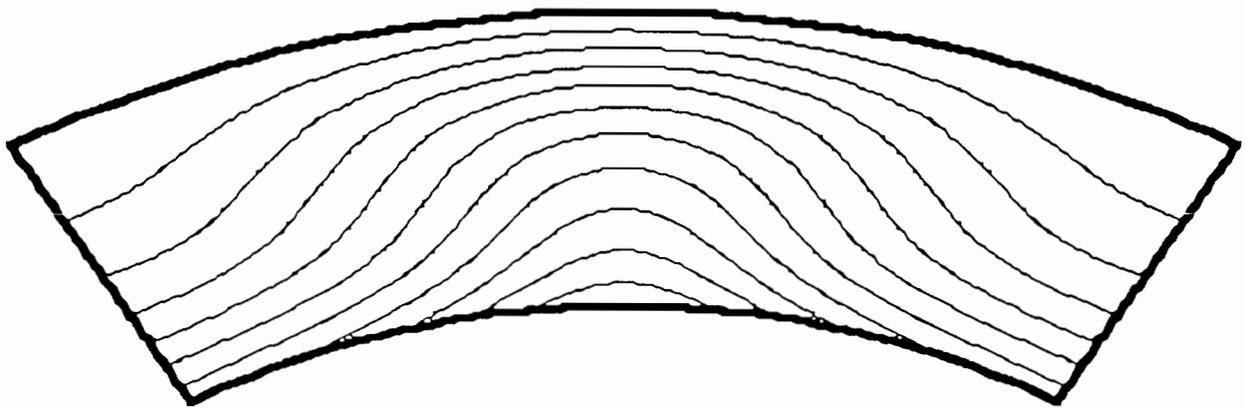


Tbas--> haut : 1,4 1,2 1,0 0,8 0,6 0,4 0,2

Figure 3 - 5 - c : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 2$ pour $F_r = 1/3$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

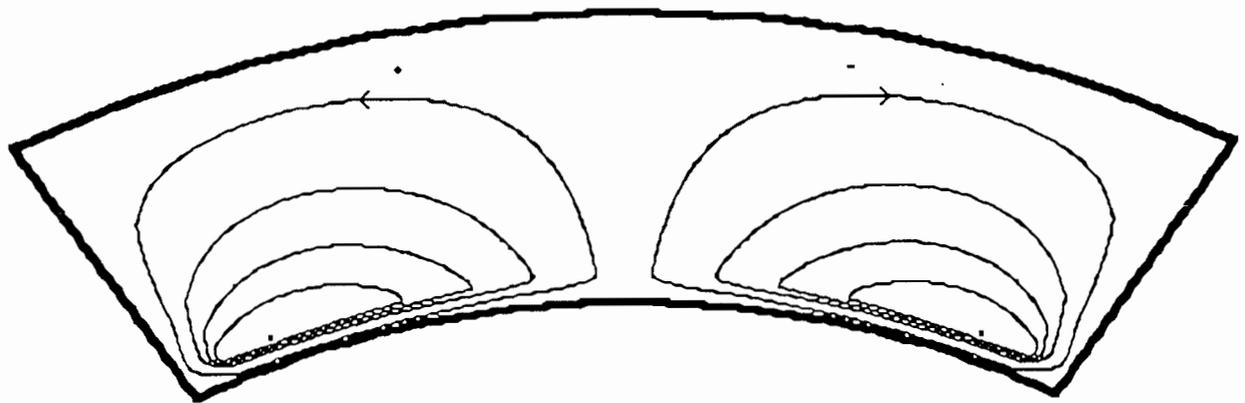


$|\Omega|$: 3,1 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5

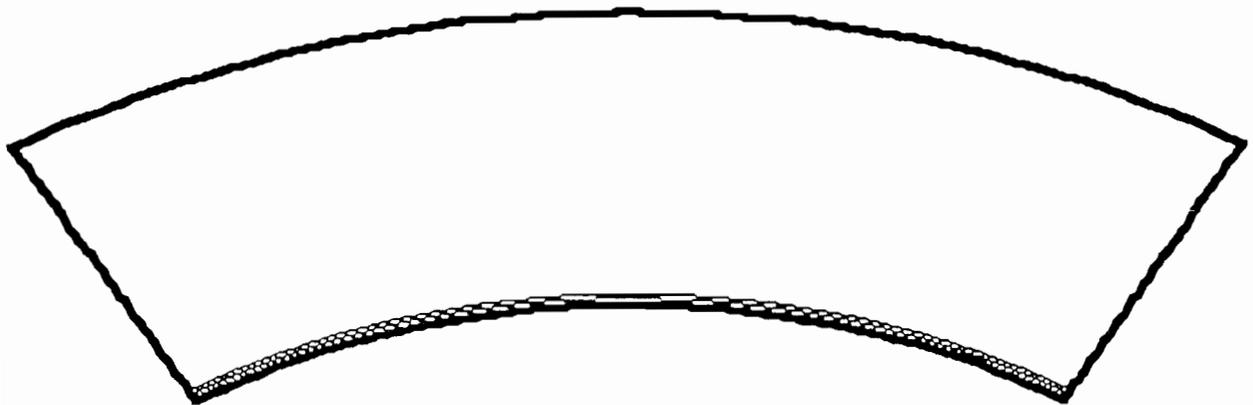


Tbas--> haut : 5,0 4,5 4,0 3,5 3,0 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5

Figure 3 - 5 - d : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 20$ pour $F_r = 1/3$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

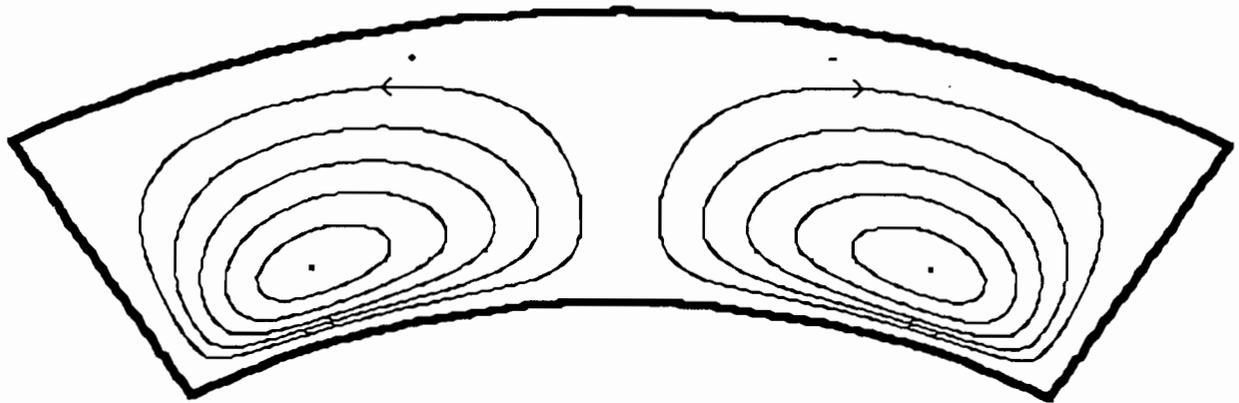


$|\Omega|$: $20 \cdot 10^{-4}$ $14 \cdot 10^{-4}$ $10 \cdot 10^{-4}$ $6 \cdot 10^{-4}$ $2 \cdot 10^{-4}$

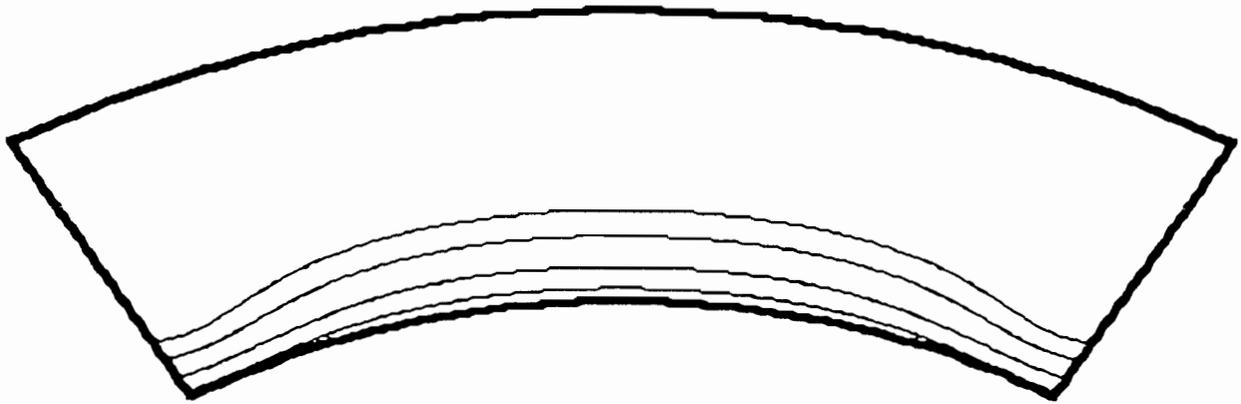


Tbas--> haut : 0,25 0,15 0,05

Figure 3 - 6 - a : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 0,1$ pour $F_r = 1/3$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^7$

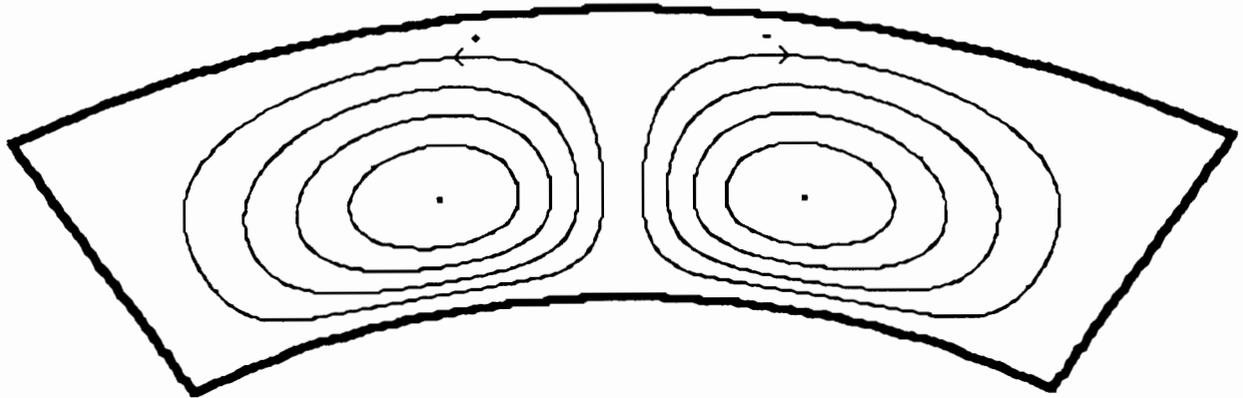


$|\Omega|$: 5,7 5,0 4,0 3,0 2,0 1,0

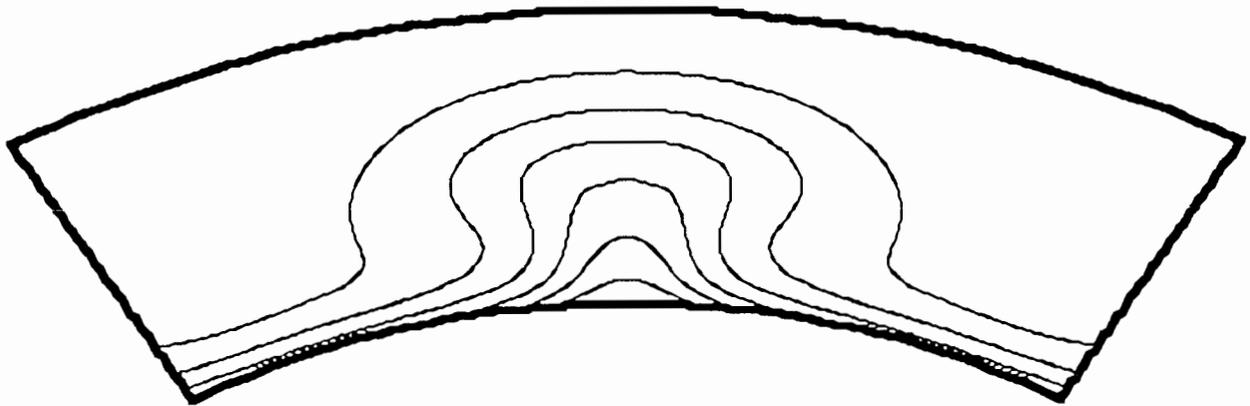


Tbas--> haut : 3,0 2,0 1,0 0,5

Figure 3 - 6 - b : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 0,8$ pour $F_r = 1/3$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^7$

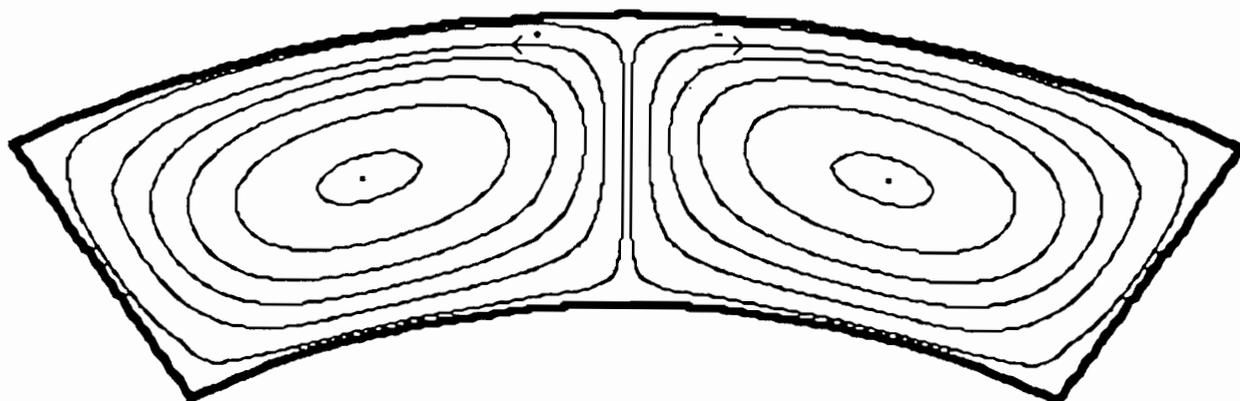


$|\Omega|$: 25,0 20,0 15,0 10,0 5,0

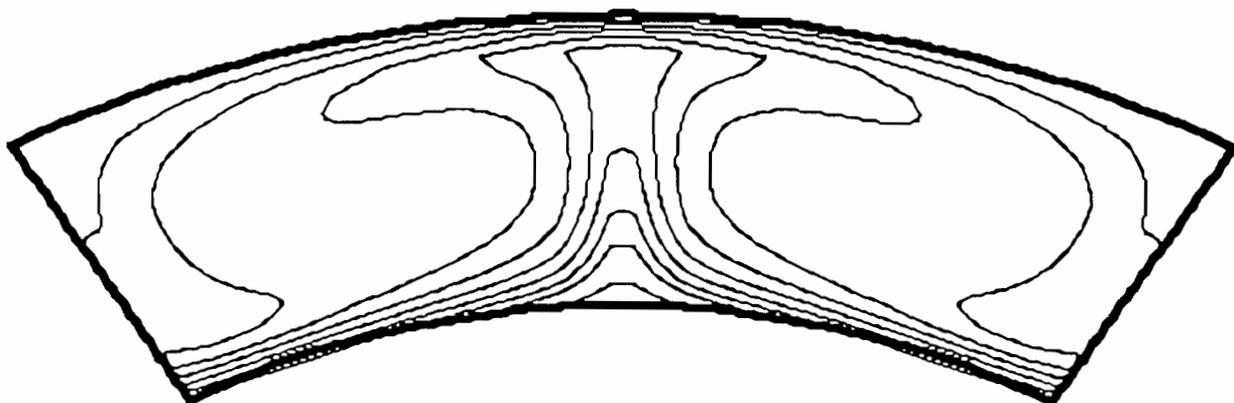


Tbas--> haut : 5,5 4,5 3,5 2,5 1,5 0,5

Figure 3 - 6 - c : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 1,6$ pour $F_r = 1/3$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^7$

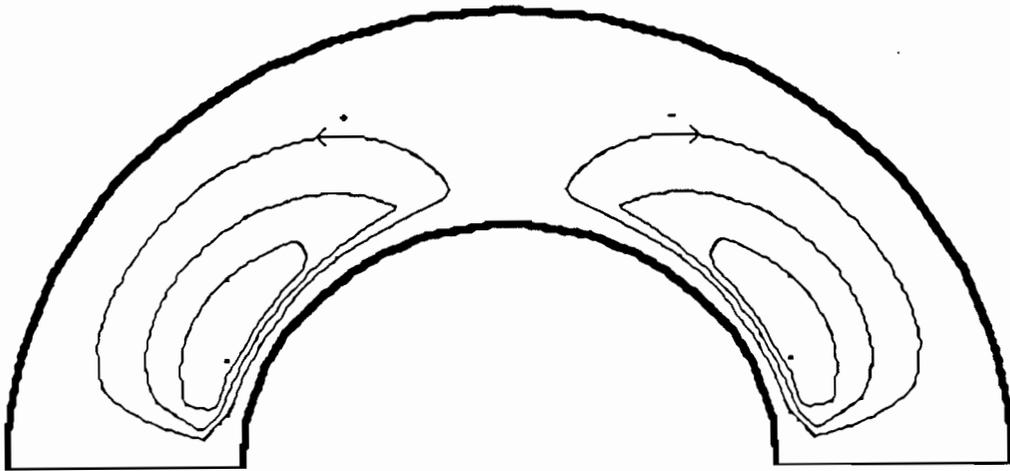


$|\Omega|$: 30,7 30,0 25,0 19,0 13,0 7,0 1,0

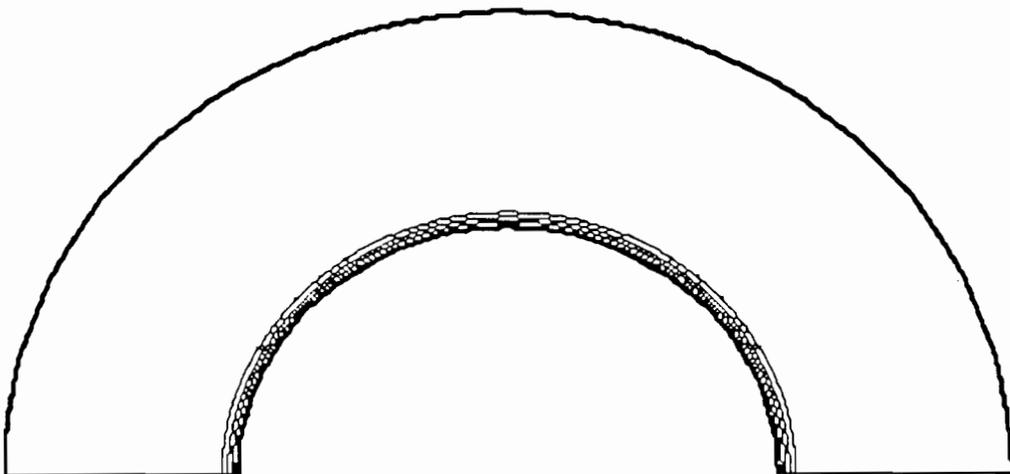


Tbas--> haut : 5,0 4,0 3,5 3,0 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5

Figure 3 - 6 - d : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 5,0$ pour $F_r = 1/3$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^7$

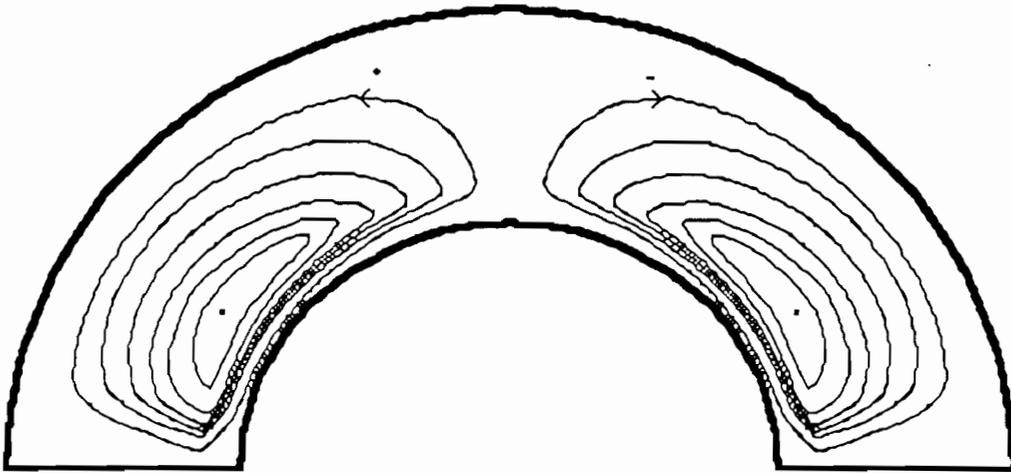


$|\Omega|$: $0,47 \cdot 10^{-4}$ $0,3 \cdot 10^{-4}$ $0,2 \cdot 10^{-4}$ $0,1 \cdot 10^{-4}$

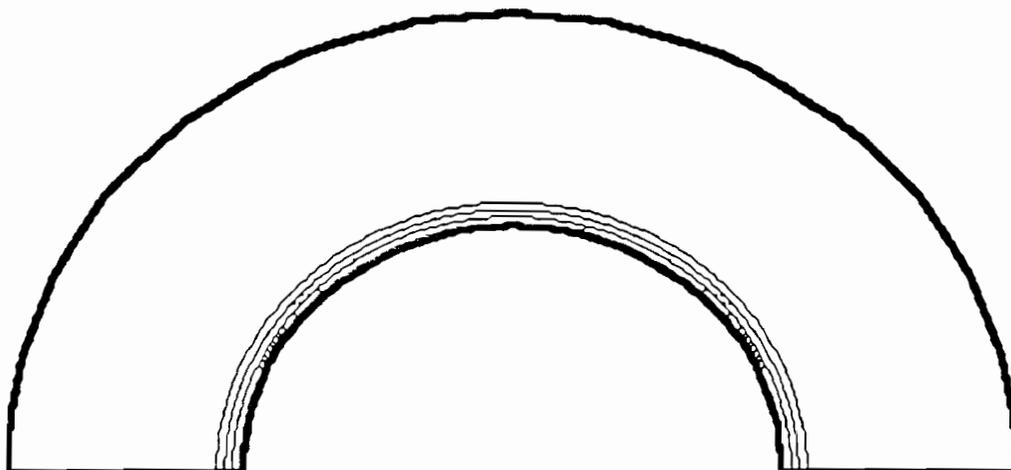


Tbas--> haut : 0,055 0,040 0,025 0,005

Figure 3 - 7 - a : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 0,1$ pour $F_r = 1/5$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

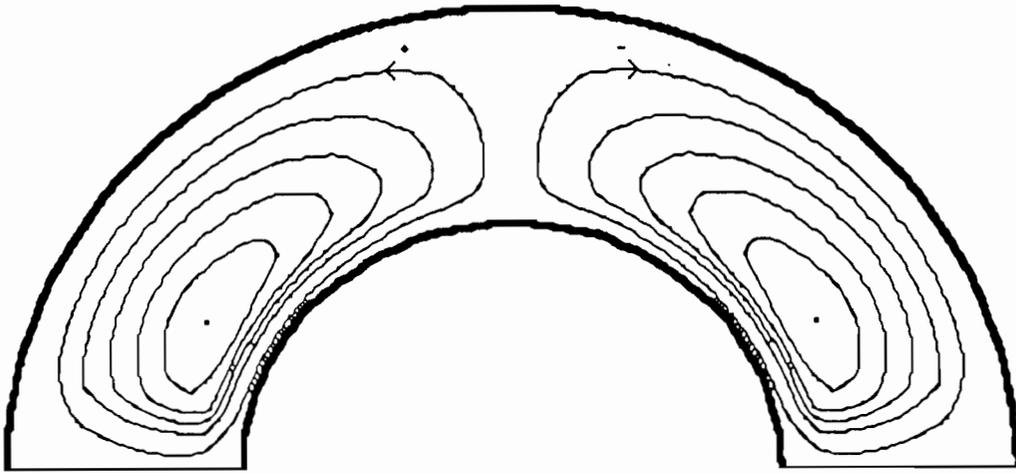


$|\Omega|$: 0,0071 0,006 0,005 0,004 0,003 0,002 0,001

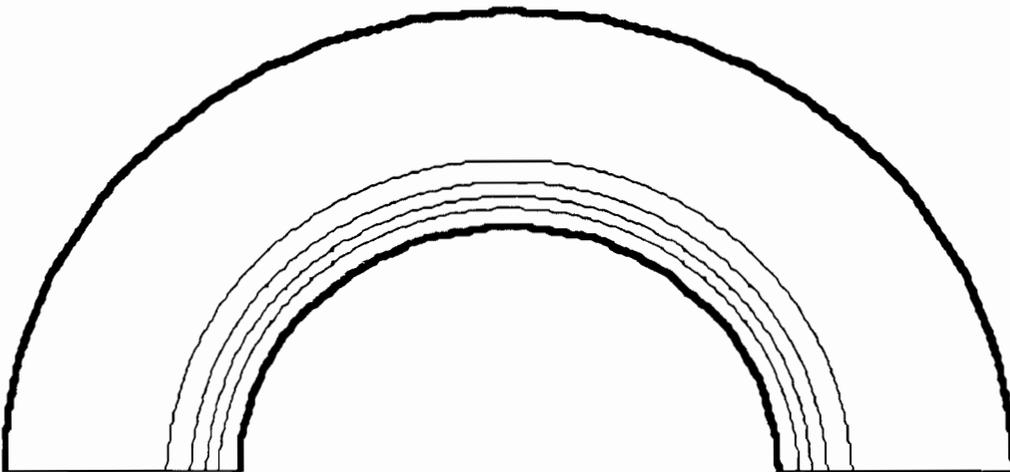


Tbas--> haut : 0,8 0,6 0,4 0,2 0,1

Figure 3 - 7 - b : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 0,5$ pour $F_r = 1/5$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

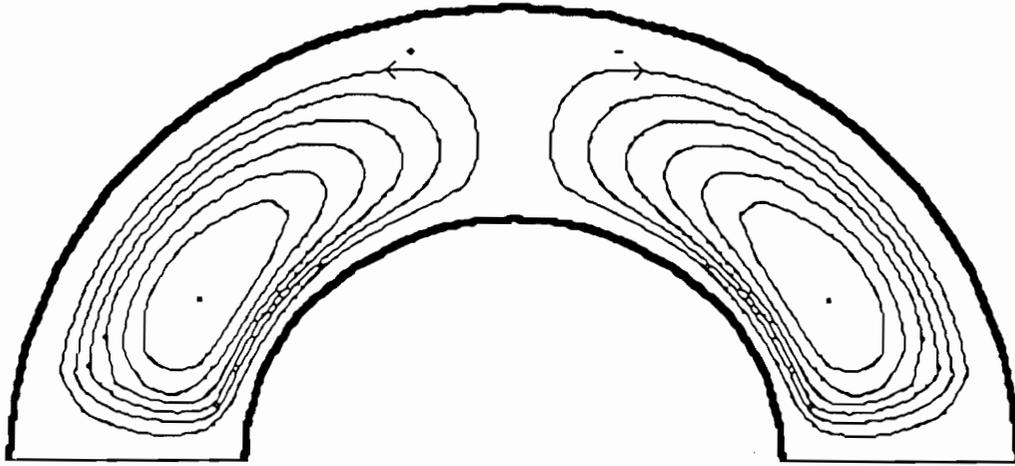


$|\Omega|$: 0,21 0,18 0,14 0,10 0,06 0,02

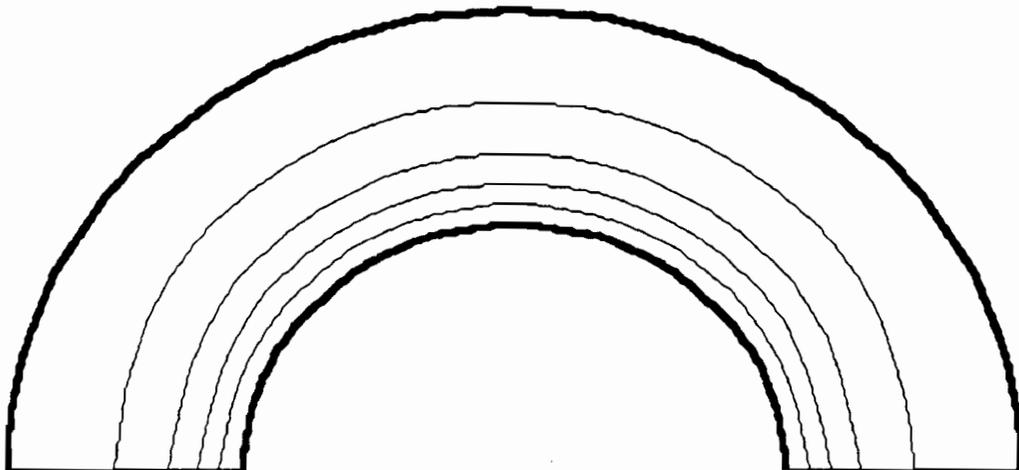


Tbas--> haut : 0,8 0,6 0,4 0,2

Figure 3 - 7 - c : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 1$ pour $F_r = 1/5$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

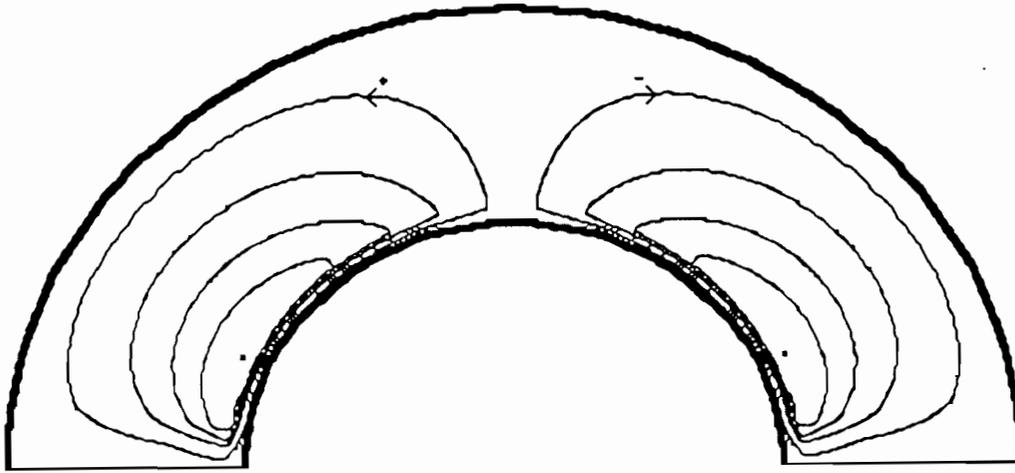


$|\Omega|$: 0,75 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1

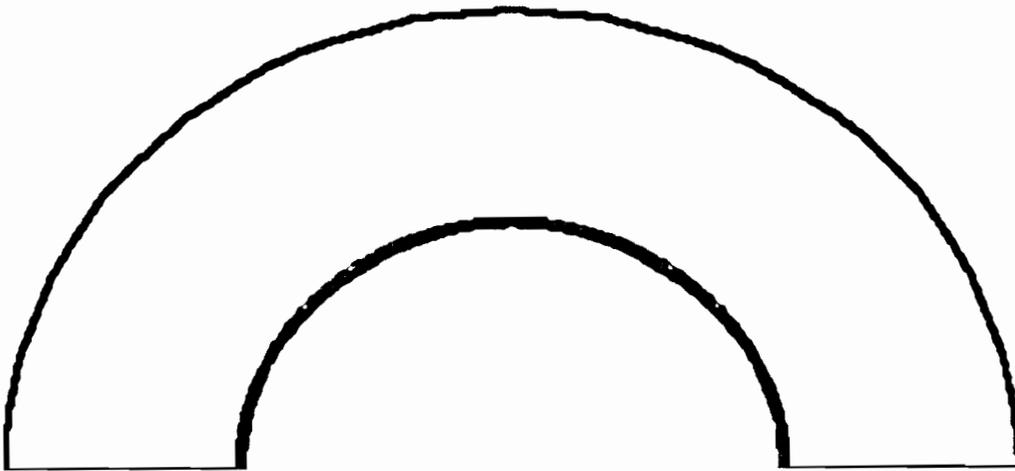


Tbas--> haut : 1,4 1,0 0,6 0,2

Figure 3 - 7 - d : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 2,5$ pour $F_r = 1/5$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^5$

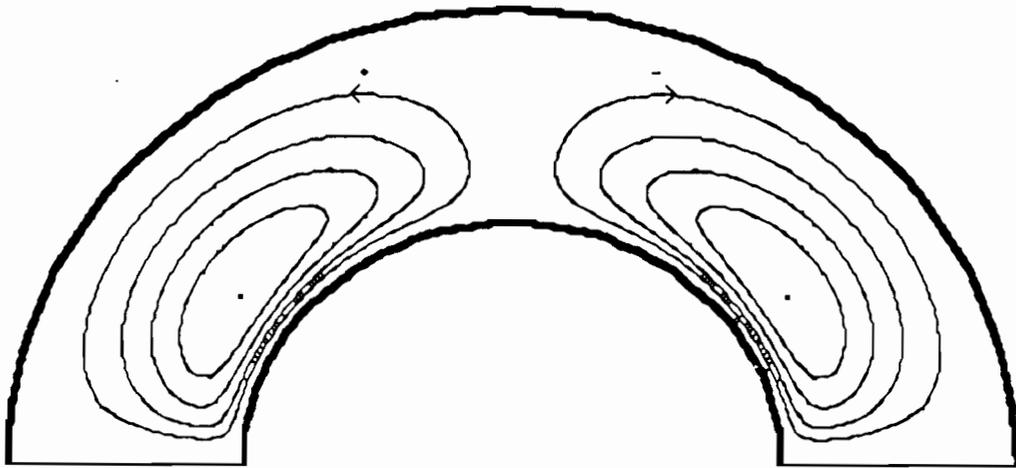


$|\Omega| : 53.10^{-4} \quad 35.10^{-4} \quad 25.10^{-4} \quad 15.10^{-4} \quad 5.10^{-4}$

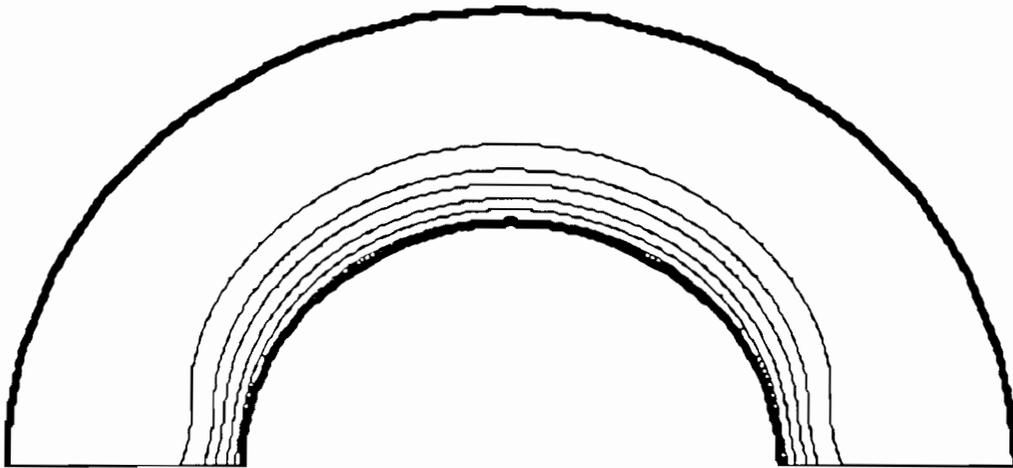


Tbas--> haut : 0,30 0,20 0,10 0,05

Figure 3 - 8 - a : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 0,1$ pour $F_r = 1/5$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^7$

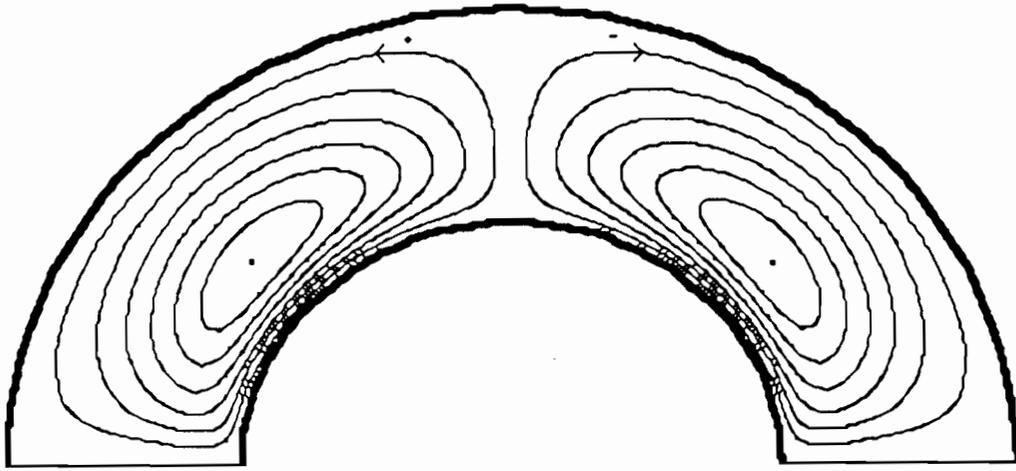


$|\Omega|$: 8,1 6,4 4,8 3,2 1,6

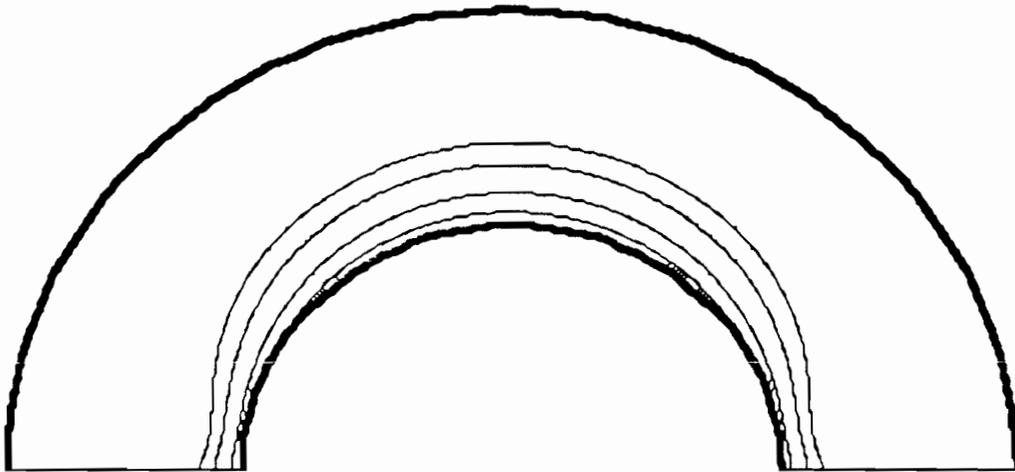


Tbas--> haut : 2,8 2,2 1,6 1,0 0,6 0,2

Figure 3 - 8 - b : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 6$ pour $F_r = 1/5$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^7$

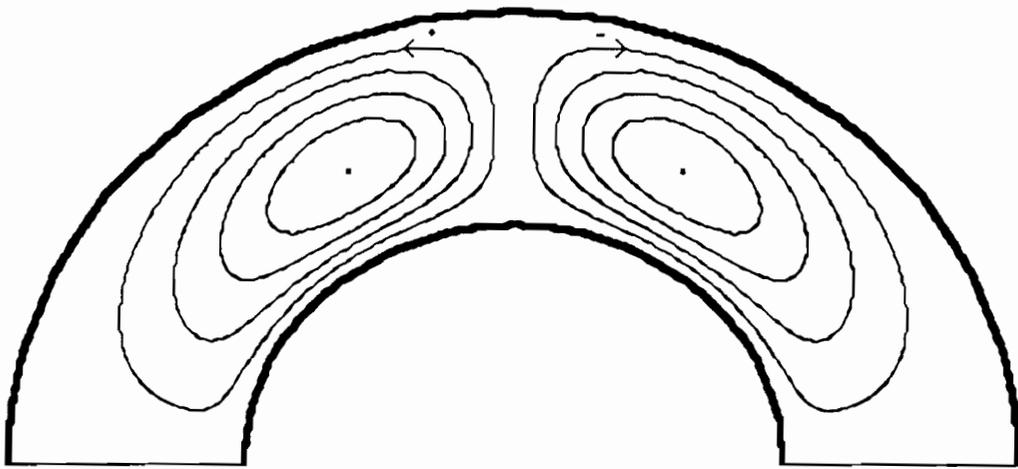


$|\Omega|$: 12,7 11,0 9,0 7,0 5,0 3,0 1,0

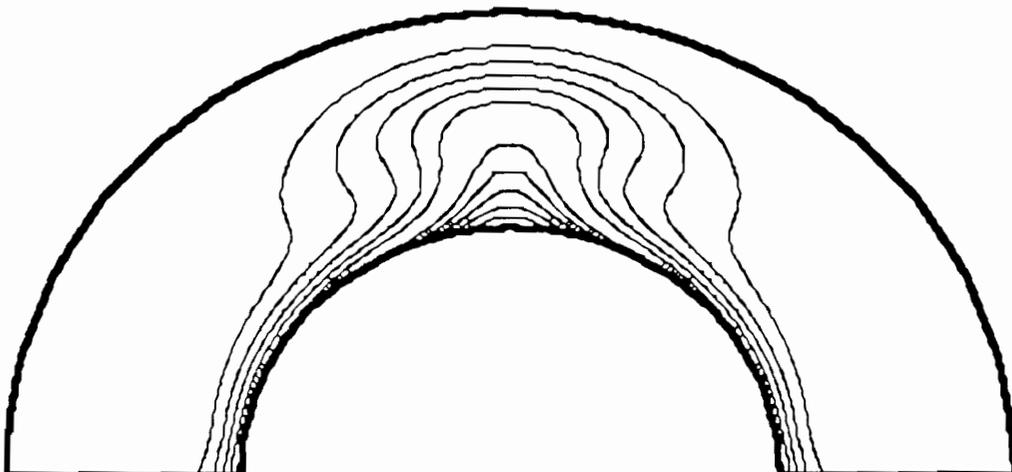


Tbas--> haut : 3,0 2,0 1,0 0,5

Figure 3 - 8 - c : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 8$ pour $F_r = 1/5$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^7$



$|\Omega|$: 29,0 23,0 17,0 11,0 5,0



Tbas--> haut : 5,5 5,0 4,5 4,0 3,5 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5

Figure 3 - 8 - d : Représentation des lignes de courant et des isothermes au temps adimensionnel $t = 14$ pour $F_r = 1/5$ et $Gr = 0,1 \cdot 10^7$

III-1-2 Evolution du nombre de Nusselt moyen

Sur les figures 3-9 à 3-16, nous avons représenté l'évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction du temps adimensionnel, pour les différents cas étudiés.

Sur ces figures, on distingue une séparation très nette des périodes transitoires et stationnaires.

En utilisant le nombre de Nusselt défini par la formule [1-50] (fig. 3-9 et 3-10), les courbes ne convergent pas, à l'approche du régime stationnaire, du fait de la différence des surfaces traversées par le flux de chaleur sur les parois cylindriques intérieure et extérieure. On notera que les changements constatés au cours de la formation des deux cellules supplémentaires (fig. 3-2-b et 3-2-c) correspondent à une modification importante du transfert thermique au niveau de la paroi cylindrique intérieure (fig.3-10).

Quand on utilise la définition [1-50*], on remarque sur les figures 3-11 à 3-16 que les nombres de Nusselt calculés sur les parois intérieure et extérieure convergent vers des valeurs qui ne s'écartent pas de plus de 2%. Dans ce cas, la séparation des périodes transitoires et stationnaires a lieu pour un temps adimensionnel d'environ 40, quand le nombre de Grashof est égal à 10^4 et d'environ 20 pour un nombre de Grashof égal à 10^6 .

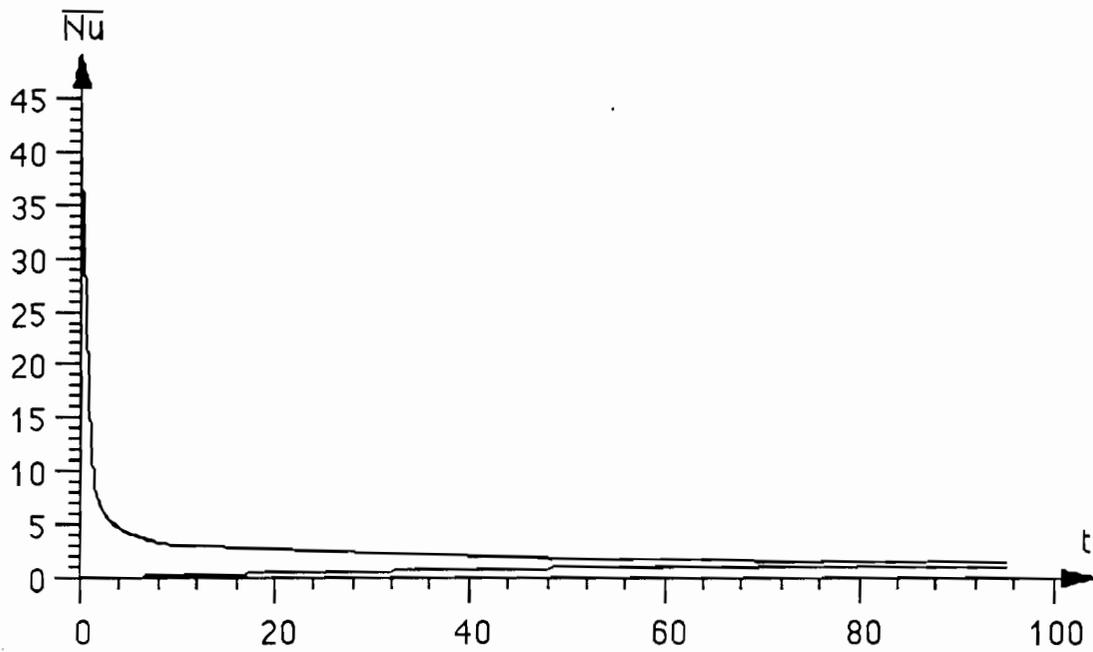


Figure 3-9 Evolution du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques extérieure et intérieure en fonction du temps adimensionnel

$$Gr = 0,1.10^5 \quad Fr = 1/1$$

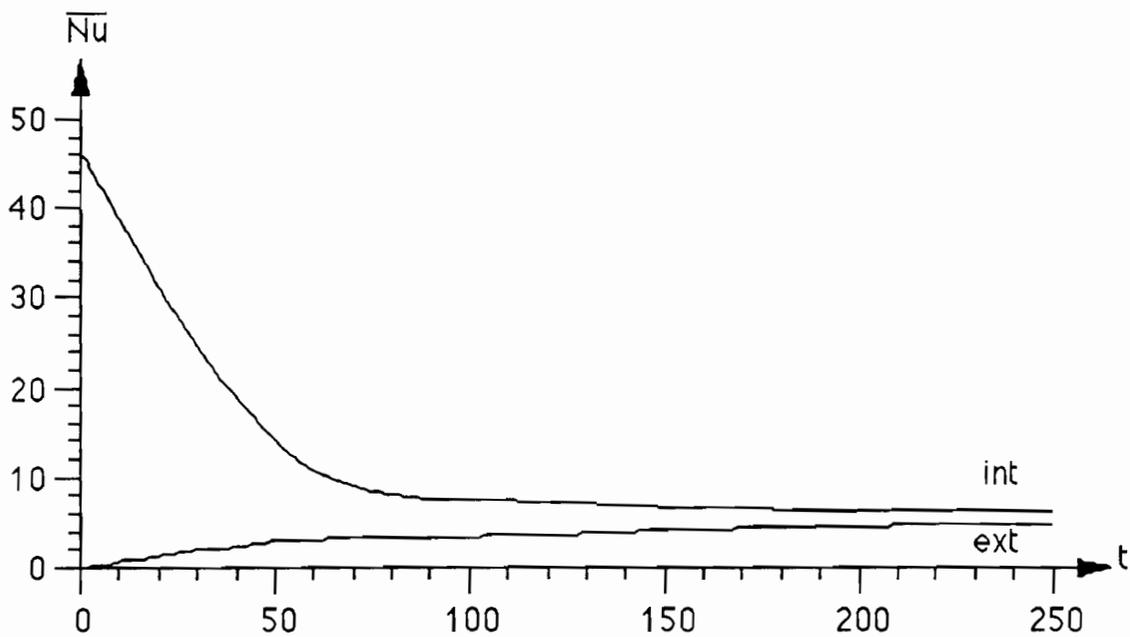


Figure 3-10 Evolution du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques extérieure et intérieure en fonction du temps adimensionnel

$$Gr = 10^6 \quad Fr = 1/1$$

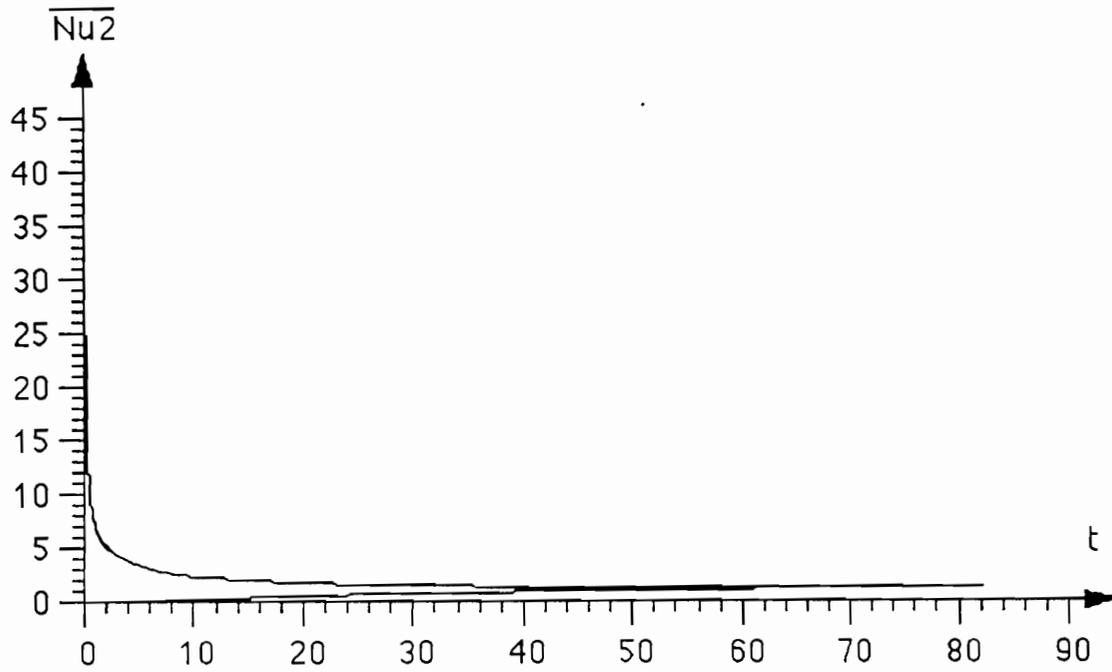


Figure 3-11 Evolution du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques extérieure et intérieure en fonction du temps adimensionnel

$$Gr = 0,1.10^5 \quad Fr = 1/2$$

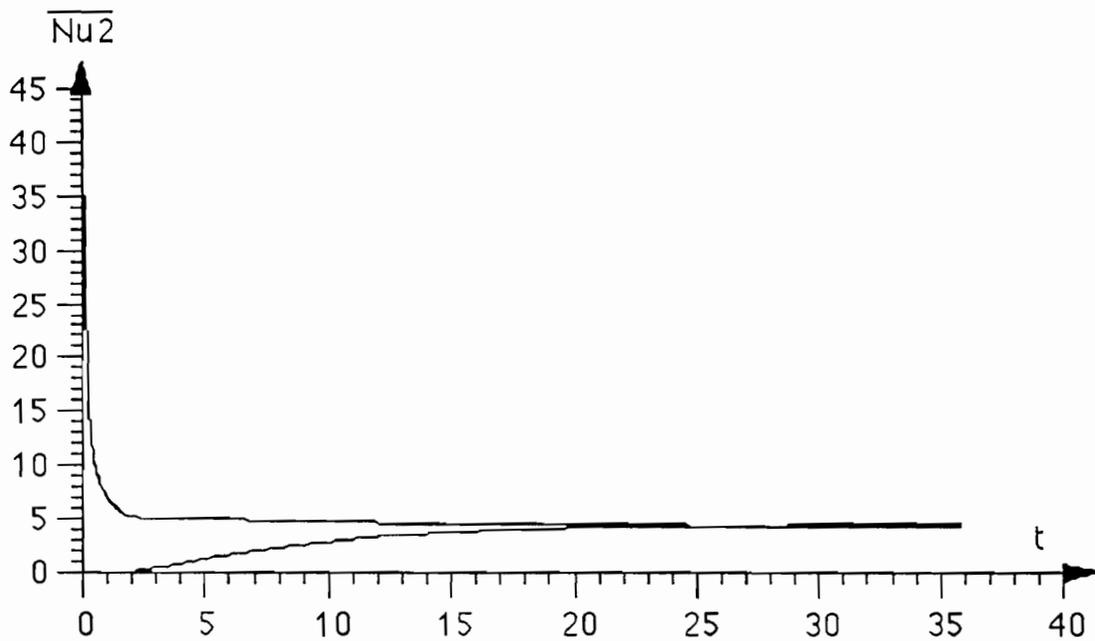


Figure 3-12 Evolution du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques extérieure et intérieure en fonction du temps adimensionnel

$$Gr = 0,1.10^7 \quad Fr = 1/2$$

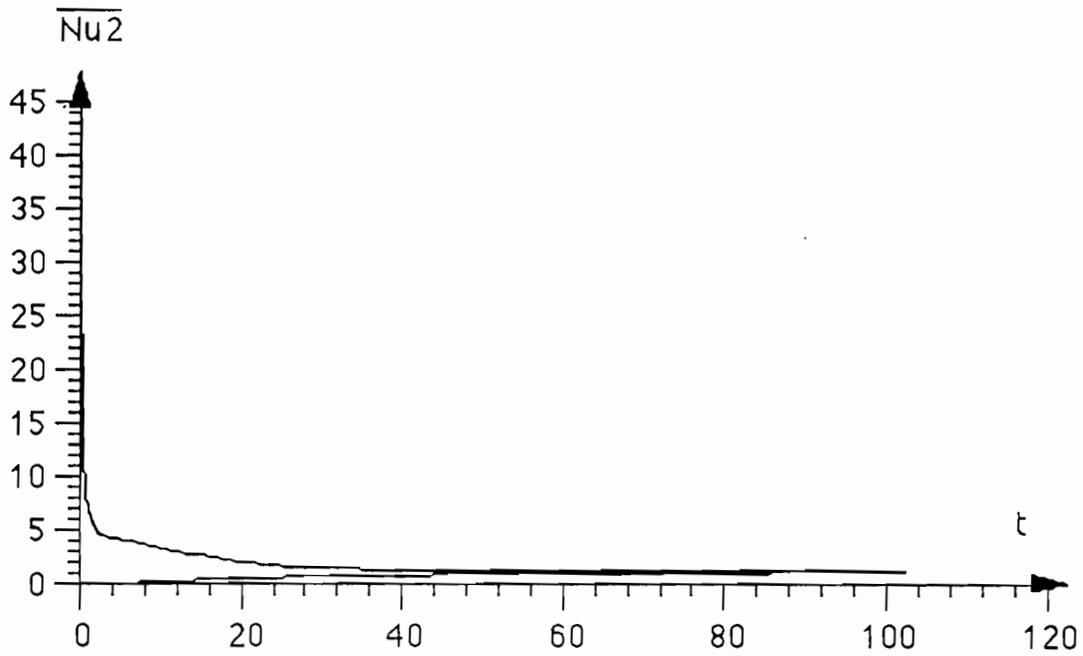


Figure 3-13 Evolution du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques extérieure et intérieure en fonction du temps adimensionnel

$$Gr = 0,1 \cdot 10^5 \quad Fr = 1/3$$

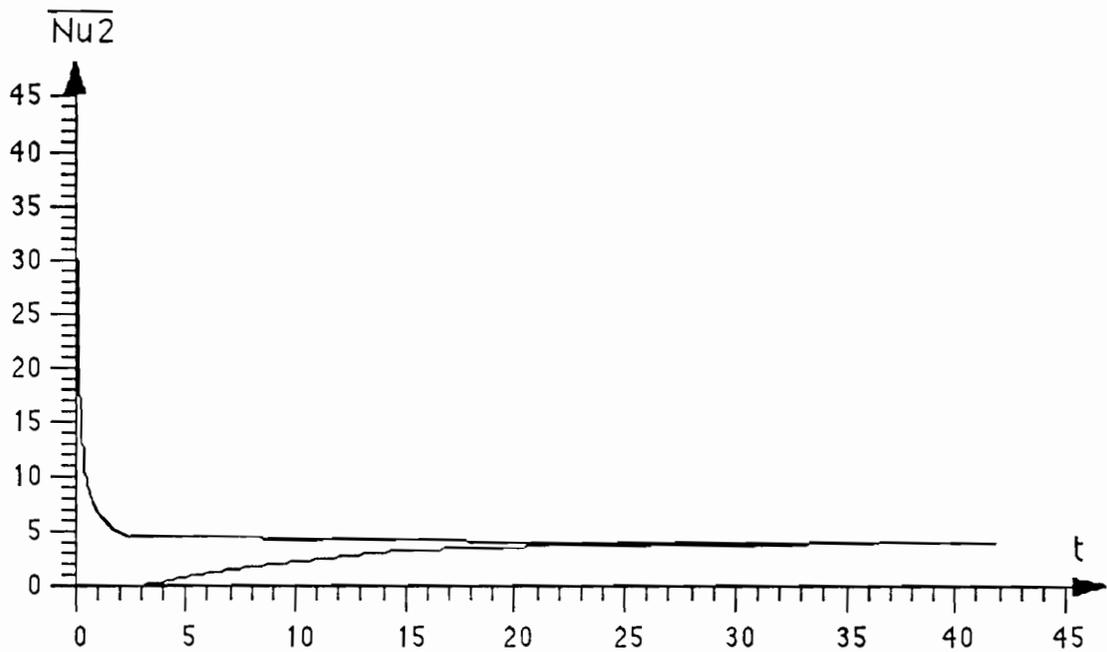


Figure 3-14 Evolution du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques extérieure et intérieure en fonction du temps adimensionnel

$$Gr = 0,1 \cdot 10^7 \quad Fr = 1/3$$

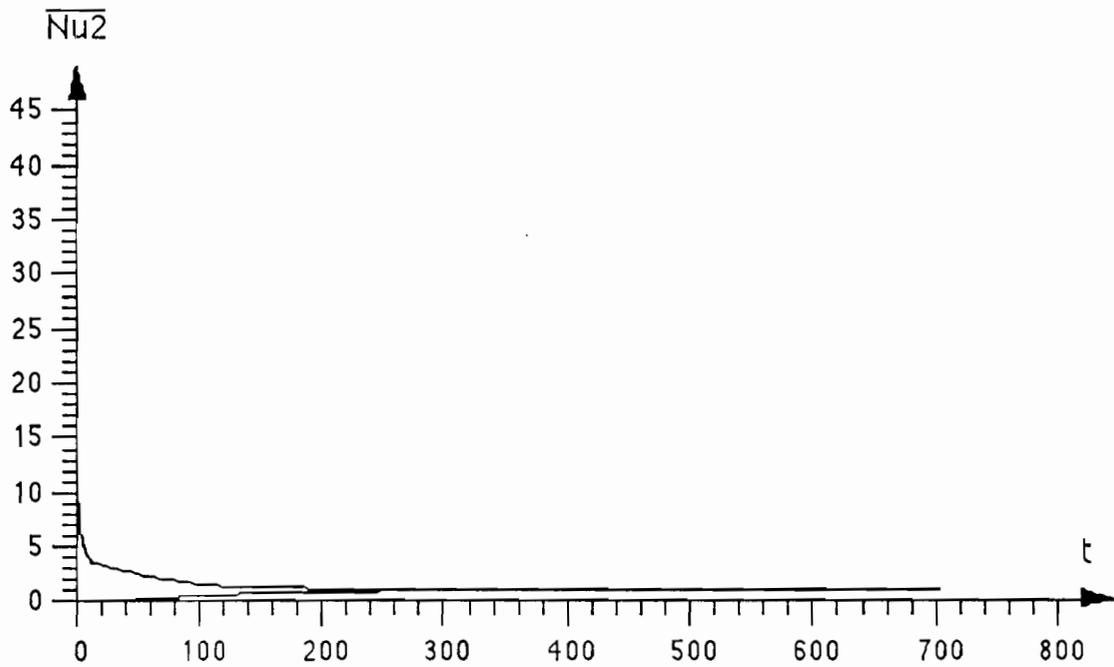


Figure 3-15 Evolution du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques extérieure et intérieure en fonction du temps adimensionnel

$$Gr = 0,1 \cdot 10^5 \quad Fr = 1/5$$

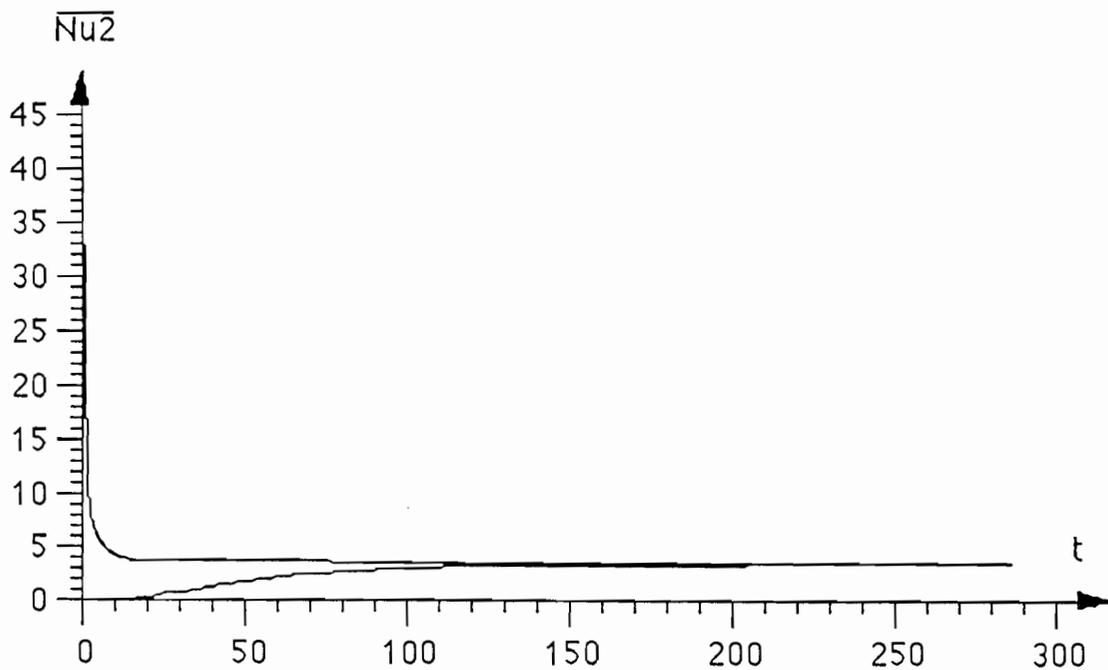


Figure 3-16 Evolution du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques extérieure et intérieure en fonction du temps adimensionnel

$$Gr = 0,1 \cdot 10^7 \quad Fr = 1/5$$

III-2 Etude du régime permanent

III-2-1 Lignes de courant

Sur les figures 3-17-a et 3-17-b, nous avons représenté les lignes de courant correspondant au régime permanent pour différents nombres de Grashof et pour un facteur de forme de 1/1.

Pour un nombre de Grashof égal à 100, on constate que le centre de rotation des lignes de courant est situé à peu près à égale distance des deux parois cylindriques et que les valeurs de la fonction de courant sont très faibles.

Quand le nombre de Grashof augmente et que le régime reste laminaire, les centres de rotation s'élèvent vers la paroi extérieure et se rapprochent légèrement de l'axe de symétrie; les valeurs de la fonction de courant augmentent également dans le même sens. Cela indique que les échanges thermiques sont relativement équilibrés entre les deux parois cylindriques, lorsque le nombre de Grashof est faible. Quand on impose un flux de chaleur plus important, l'influence de la paroi supérieure isotherme devient plus accentuée sur le transfert. Quand le flux de chaleur imposé sur la paroi cylindrique intérieure devient très élevé, on observe un changement de régime d'écoulement par la formation de deux cellules supplémentaires ($F_r=1/1$ et $Gr=10^6$).

Pour les facteurs de forme égaux à 1/2, 1/3, les lignes de courant sont représentées sur les figures 3-18 et 3-19 respectivement. La valeur de la fonction de courant augmente dans le même sens que le nombre de Grashof. Les centres de rotation de la convection s'élèvent très légèrement mais restent approximativement équidistants des deux parois cylindriques. La distance par rapport à l'axe de symétrie reste à peu près fixe.

Sur la figure 3-20, qui représente les lignes de courant correspondant à un facteur de forme égal à 1/5, les centres de rotation se rapprochent de l'axe de symétrie, quand le nombre de Grashof augmente, mais restent approximativement équidistants des deux parois intérieure et extérieure.

On peut déduire de toutes ces considérations que, pour les configurations plus ouvertes, les échanges convectifs sont plus équilibrés entre les parois actives.

III-2-2 Lignes isothermes

Sur les figures 3-21 à 3-24, nous avons représenté les lignes isothermes dans l'enceinte pour différents nombres de Grashof et pour les quatre facteurs de forme étudiés.

Ces lignes sont grossièrement parallèles pour un nombre de Grashof égal à 100. Dans ce cas, la distribution des températures est simplement décroissante de la paroi cylindrique intérieure vers la paroi isotherme. On peut dire que l'essentiel des transferts thermiques se fait par conduction au niveau de la paroi chauffée. La convection est relativement faible, ce qui explique les très petites valeurs de la fonction de courant.

Pour un nombre de Grashof plus grand, les lignes isothermes se transforment de manière symétrique par rapport à l'axe vertical Oy . Elles se modifient sensiblement et finissent par adopter la forme d'un champignon. Quand le régime de l'écoulement est laminaire, la distribution des températures devient plus complexe puisqu'elle est maintenant décroissante, non seulement de la paroi cylindrique intérieure vers la paroi cylindrique extérieure, mais aussi de l'axe de symétrie vers les parois isolées. Le sens de la déformation des isothermes est conforme au sens de rotation des lignes de courant. En effet, quand le régime reste laminaire, on peut dire que, sous l'action du mouvement des particules qui décollent de la paroi chaude au niveau de l'axe de symétrie, les lignes isothermes se "voûtent" et s'éloignent de la paroi à cet endroit.

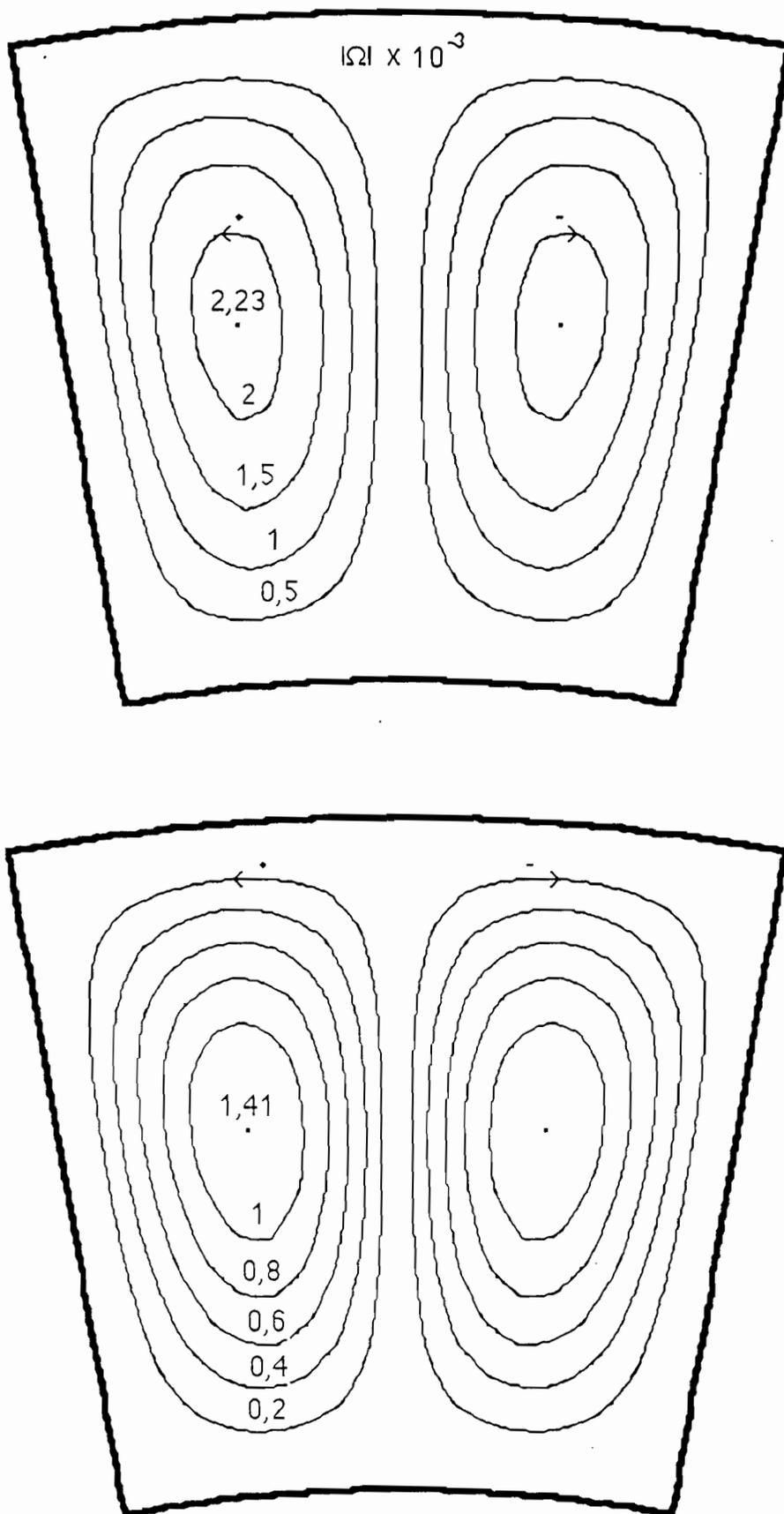


Figure 3 - 17 - a : Représentation des lignes de courant respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^3$ et $Gr=0,1 \cdot 10^5$ pour un facteur de forme de 1/1

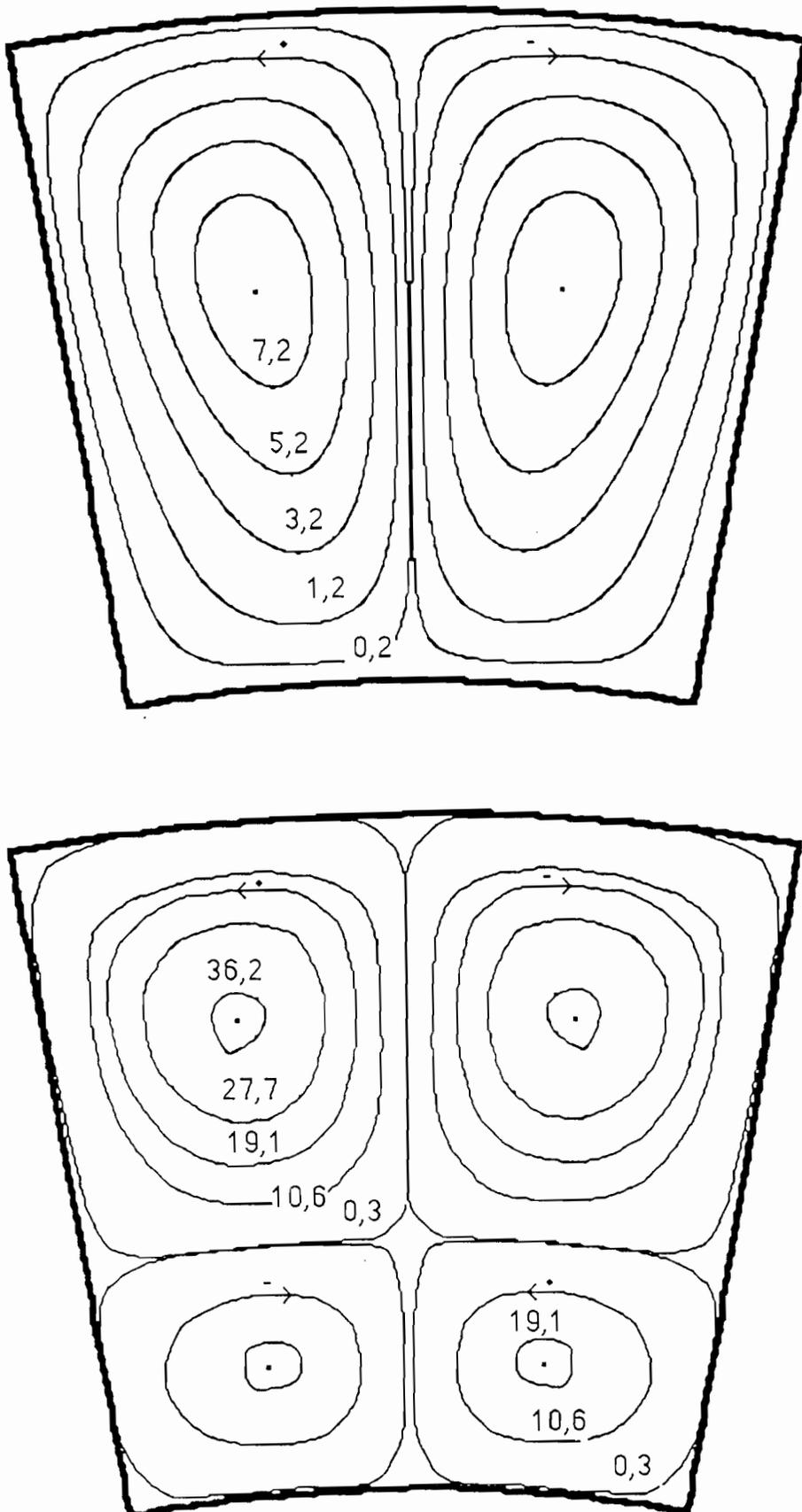


Figure 3 - 17 - b : Représentaion des lignes de courant respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^6$ ($|\Omega_{\max}| = 8,43$) et $Gr=0,1 \cdot 10^7$ ($|\Omega_{\max}| = 37,33$) pour un facteur de forme de 1/1

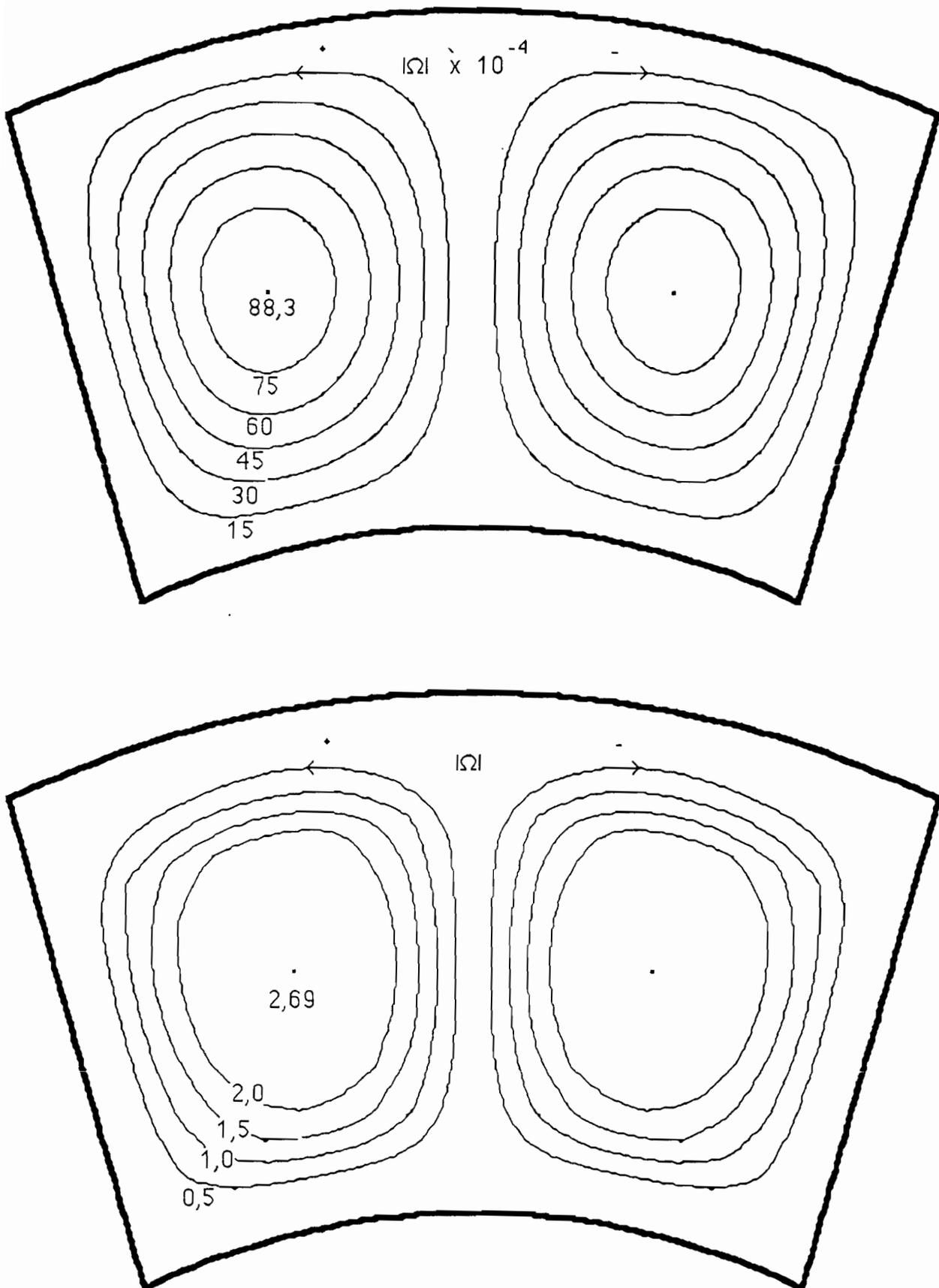


Figure 3 - 18 - a : Représentation des lignes de courant respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^3$ et $Gr=0,1 \cdot 10^5$ pour un facteur de forme de $1/2$

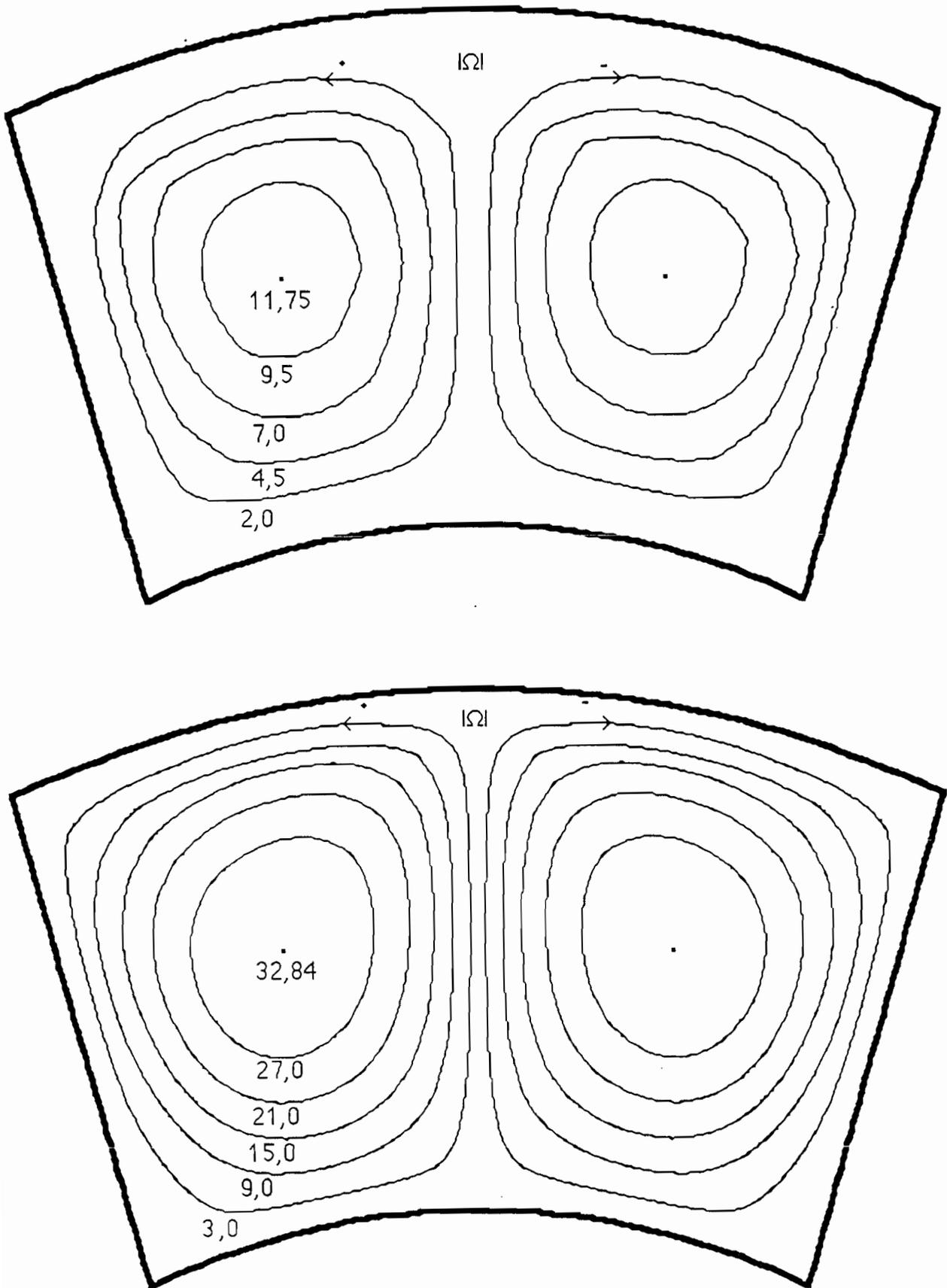
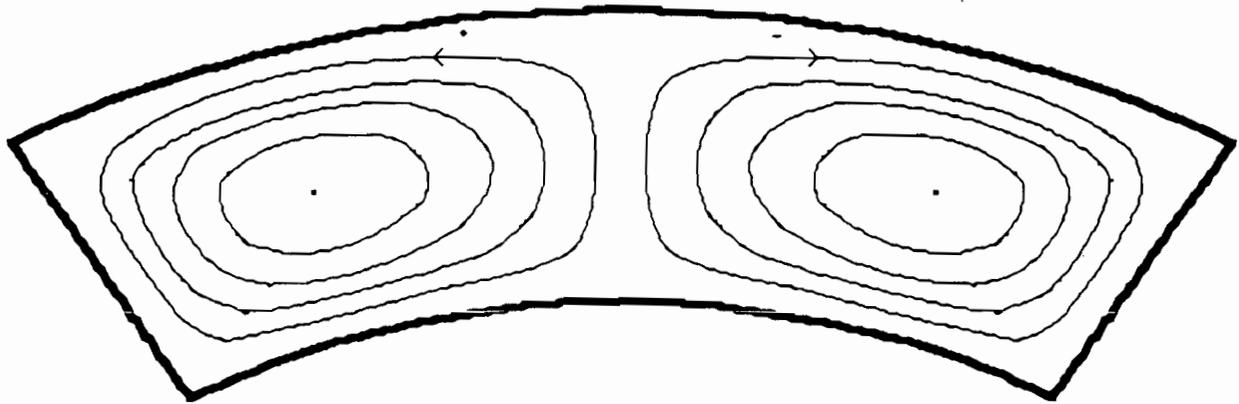
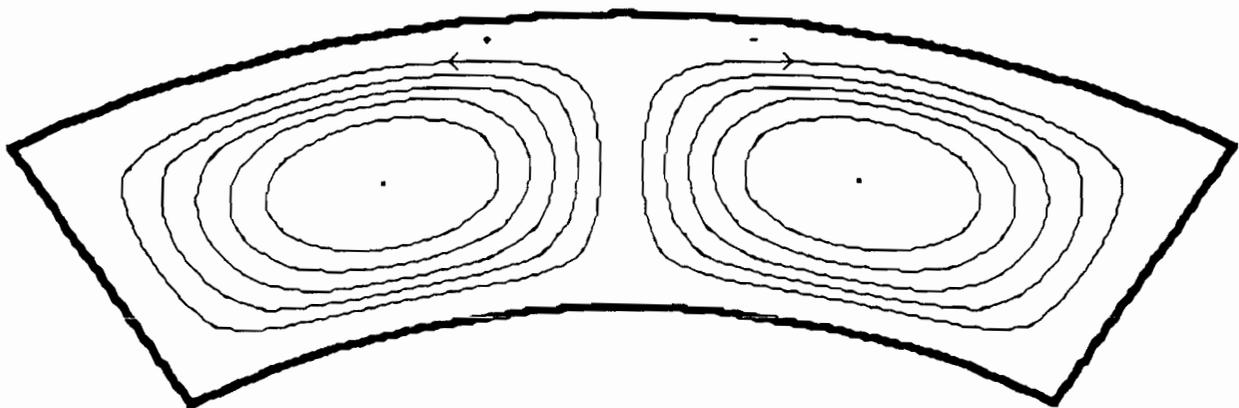


Figure 3 - 18 - b : Représentation des lignes de courant respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^6$ et $Gr=0,1 \cdot 10^7$ pour un facteur de forme de 1/2

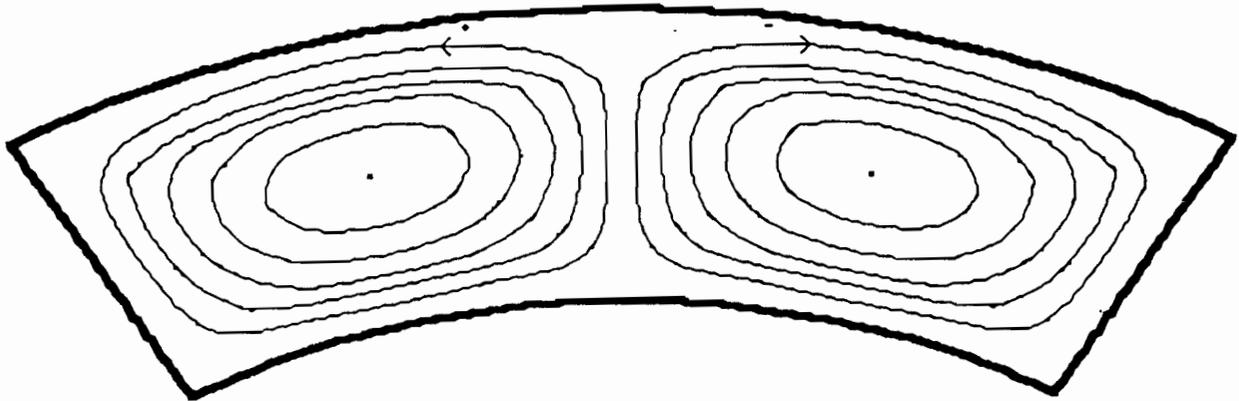


$$|\Omega| : 17,87 \cdot 10^{-3} \quad 14 \cdot 10^{-3} \quad 10 \cdot 10^{-3} \quad 6 \cdot 10^{-3} \quad 2 \cdot 10^{-3}$$

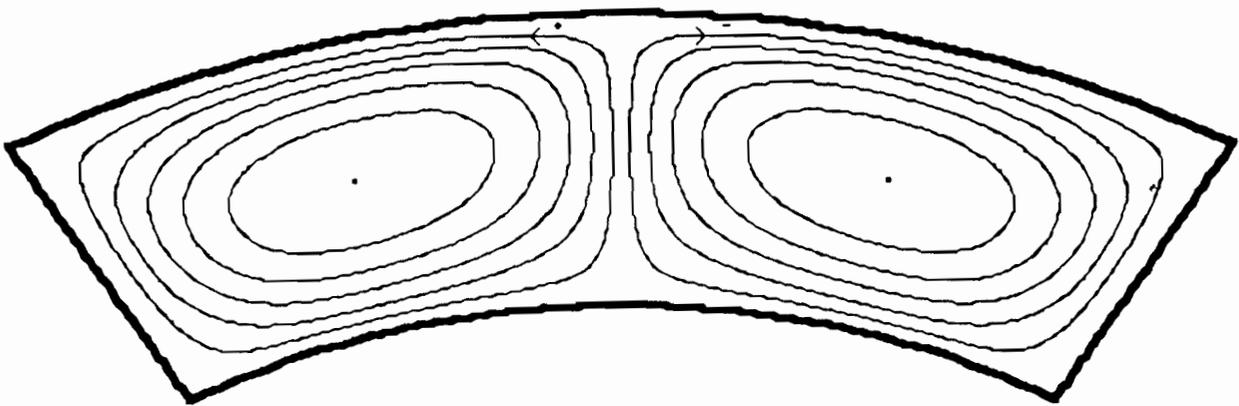


$$|\Omega| : 3,38 \quad 2,5 \quad 2,0 \quad 1,5 \quad 1,0 \quad 0,5$$

Figure 3 - 19 - a : Représentation des lignes de courant respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^3$ et $Gr=0,1 \cdot 10^5$ pour un facteur de forme de $1/3$

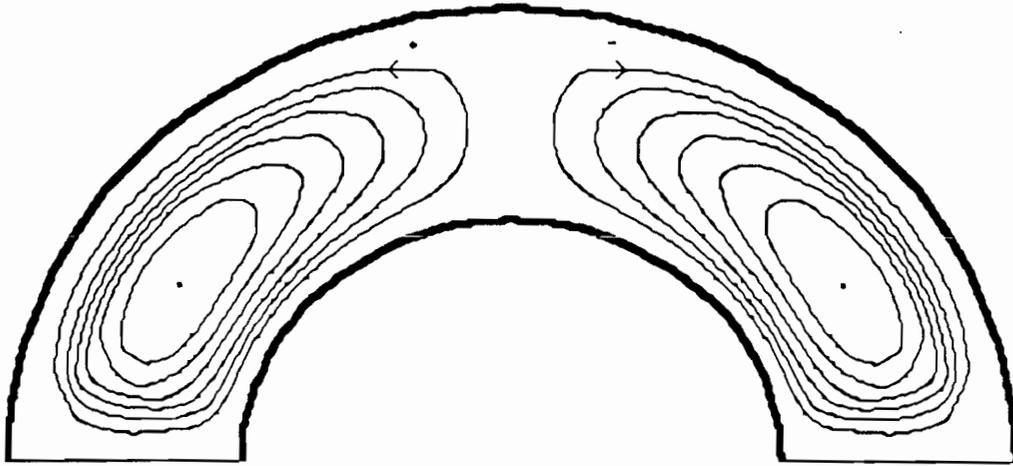


$|\Omega|$: 13,54 11,5 9,0 6,5 4,0 1,5

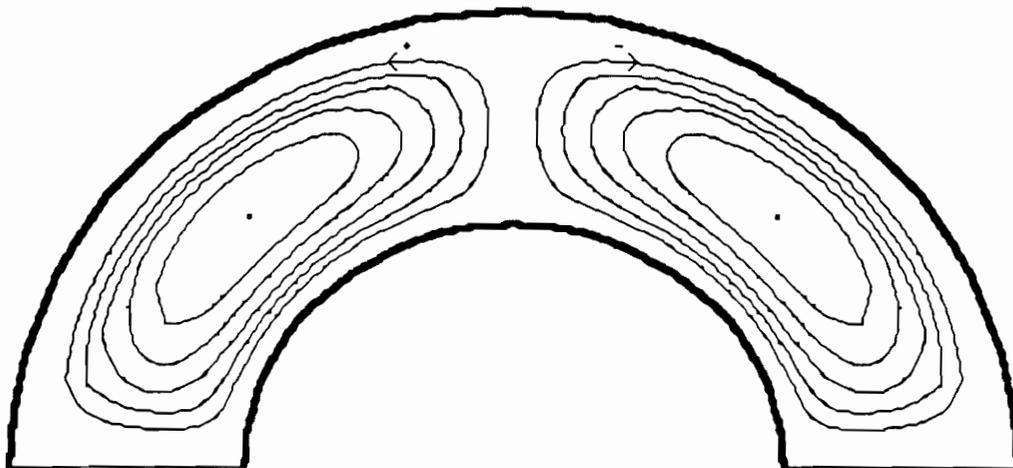


$|\Omega|$: 32,94 27,0 21,0 15,0 9,0 3,0

Figure 3 - 19 - b : Représentation des lignes de courant respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^6$ et $Gr=0,1 \cdot 10^7$ pour un facteur de forme de $1/3$

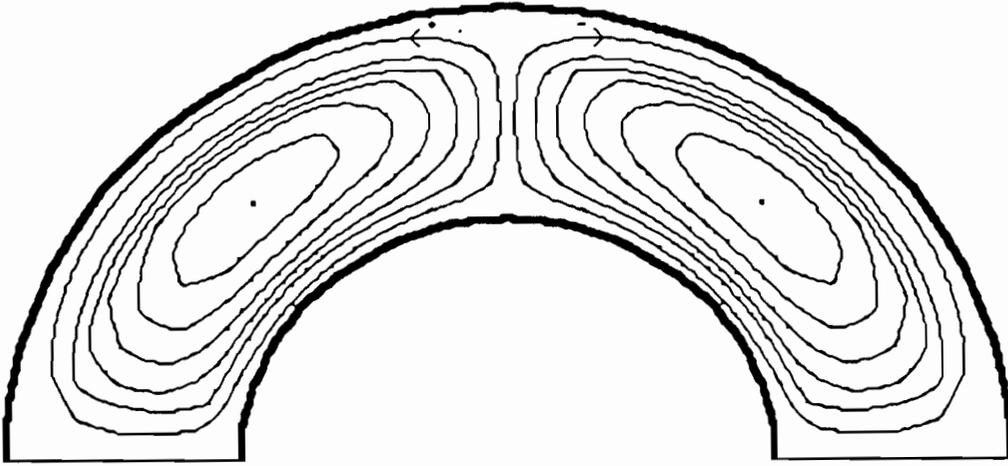


$|\Omega|$: $36,96 \cdot 10^{-3}$ $30 \cdot 10^{-3}$ $25 \cdot 10^{-3}$ $20 \cdot 10^{-3}$ $15 \cdot 10^{-3}$ $10 \cdot 10^{-3}$ $5 \cdot 10^{-3}$

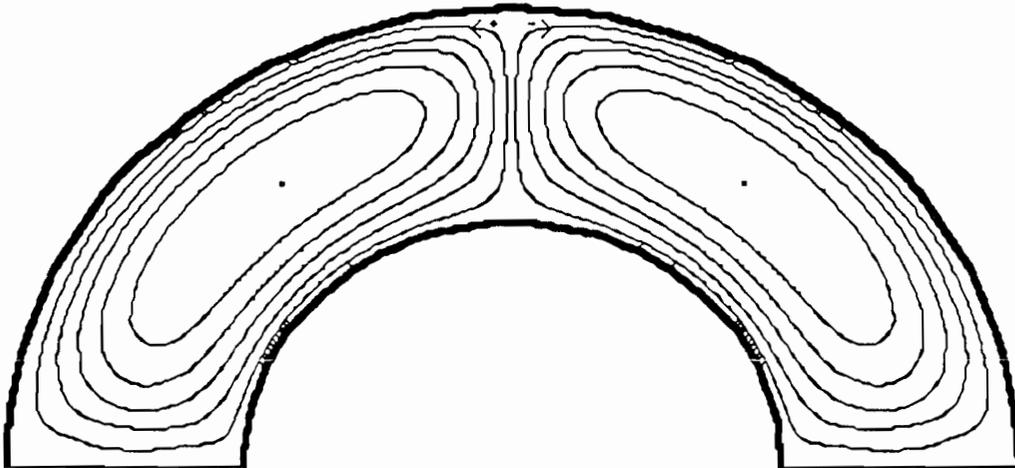


$|\Omega|$: 3,1 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5

Figure 3 - 20 - a : Représentation des lignes de courant respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^3$ et $Gr=0,1 \cdot 10^5$ pour un facteur de forme de $1/5$



$|\Omega|$: 12,5 11,0 9,0 7,0 5,0 3,0 1,0



$|\Omega|$: 26,6 22,0 17,0 12,0 7,0 2,0

Figure 3 - 20 - b : Représentation des lignes de courant respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^6$ et $Gr=0,1 \cdot 10^7$ pour un facteur de forme de 1/5

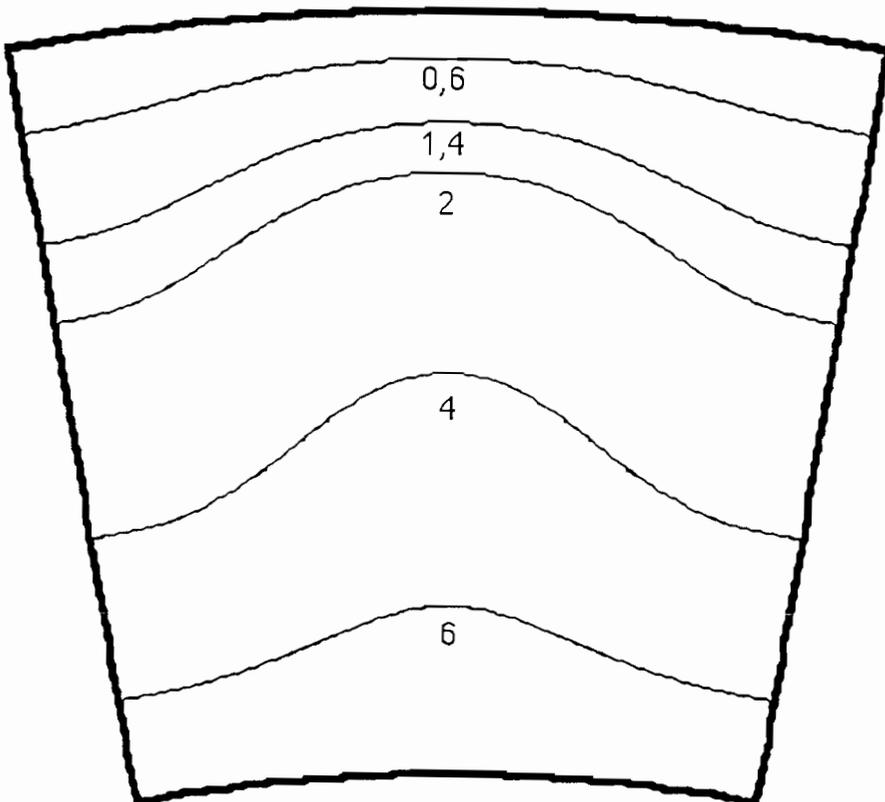
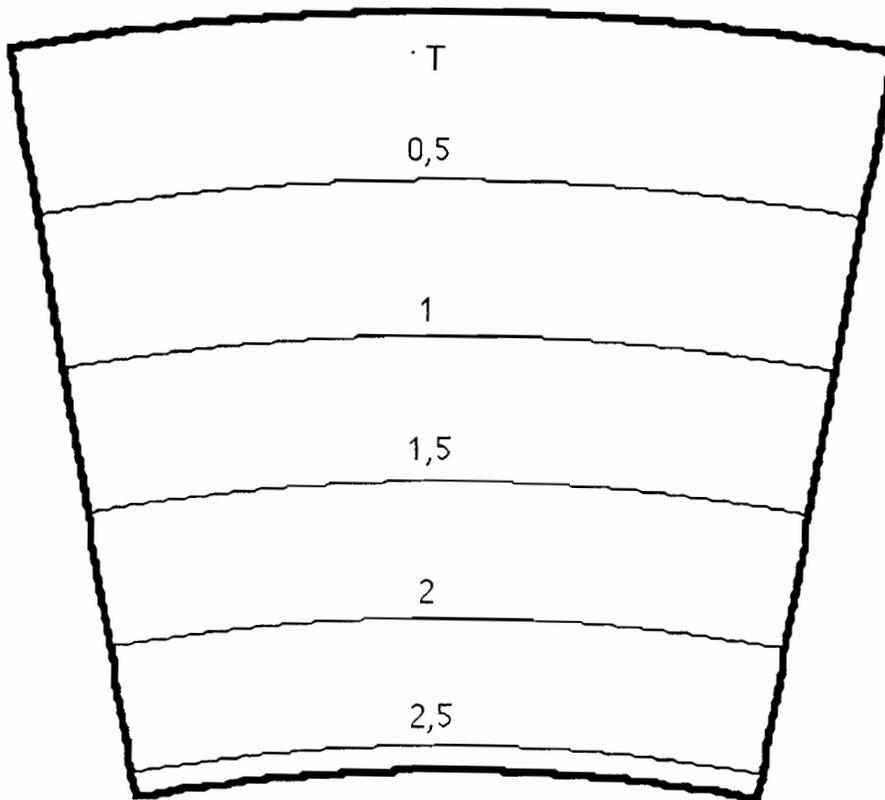


Figure 3 - 21 - a : Représentation des isothermes respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^3$ et $Gr=0,1 \cdot 10^5$ pour un facteur de forme de 1/1

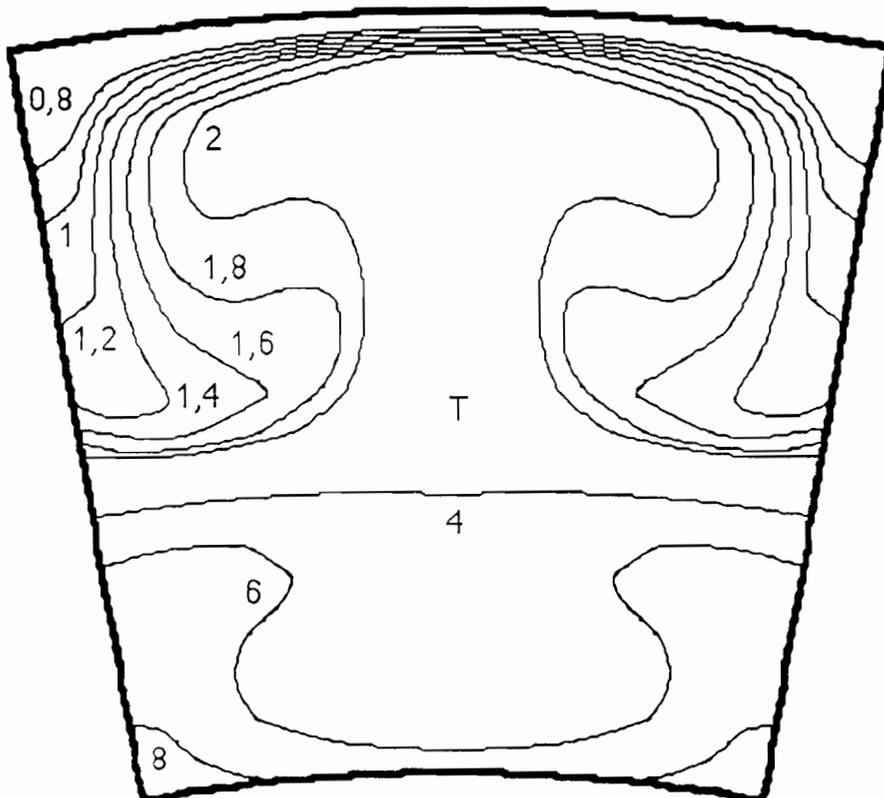
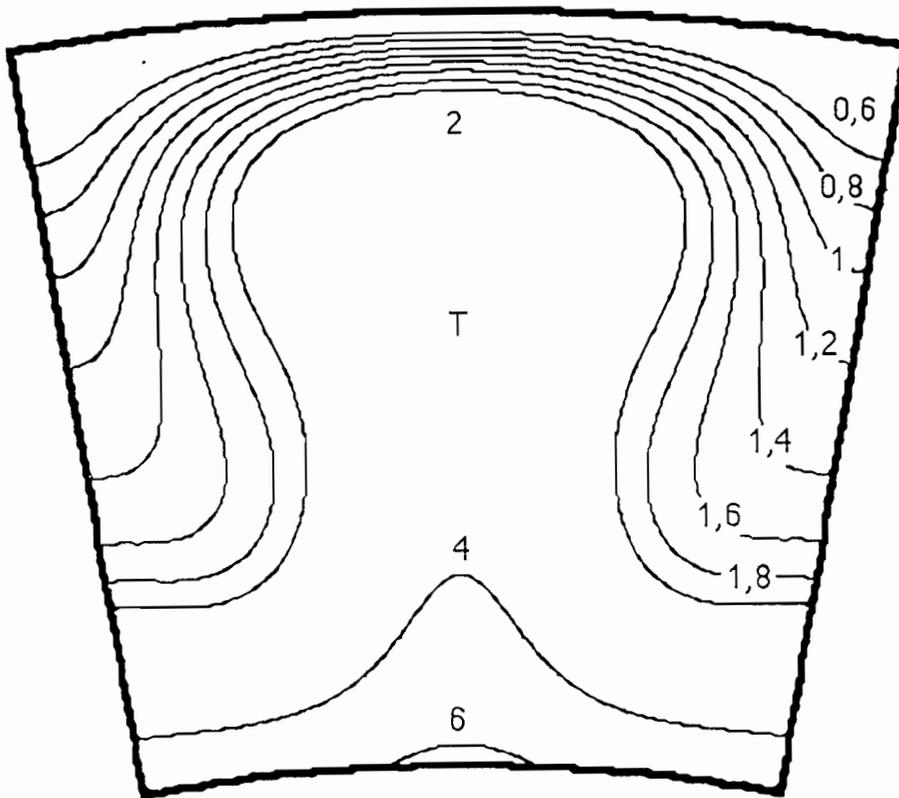


Figure 3 - 21 - b : Représentation des isothermes respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^6$ et $Gr=0,1 \cdot 10^7$ pour un facteur de forme de 1/1

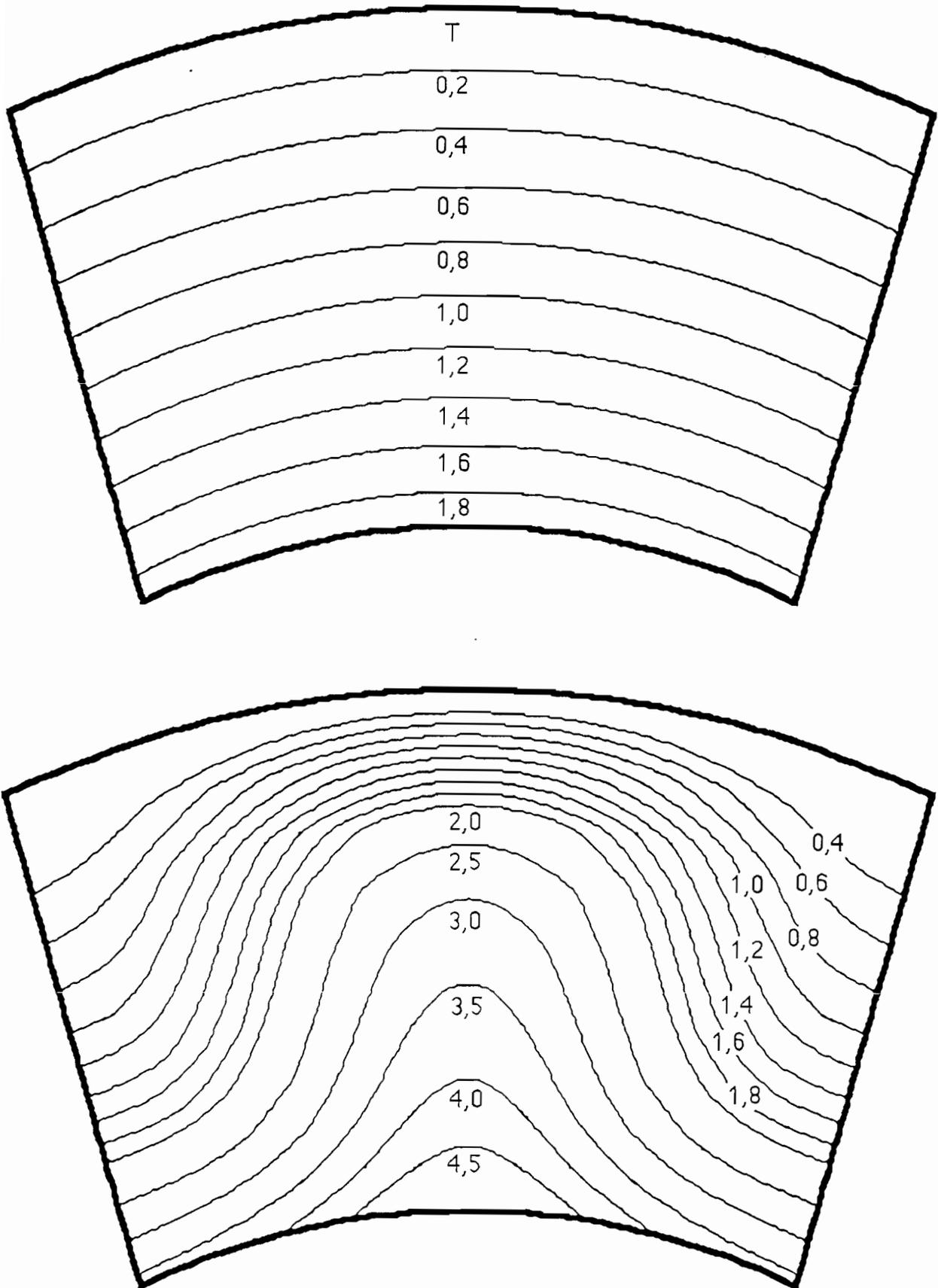


Figure 3 - 22 - a : Représentation des isothermes respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^3$ et $Gr=0,1 \cdot 10^5$ pour un facteur de forme de $1/2$

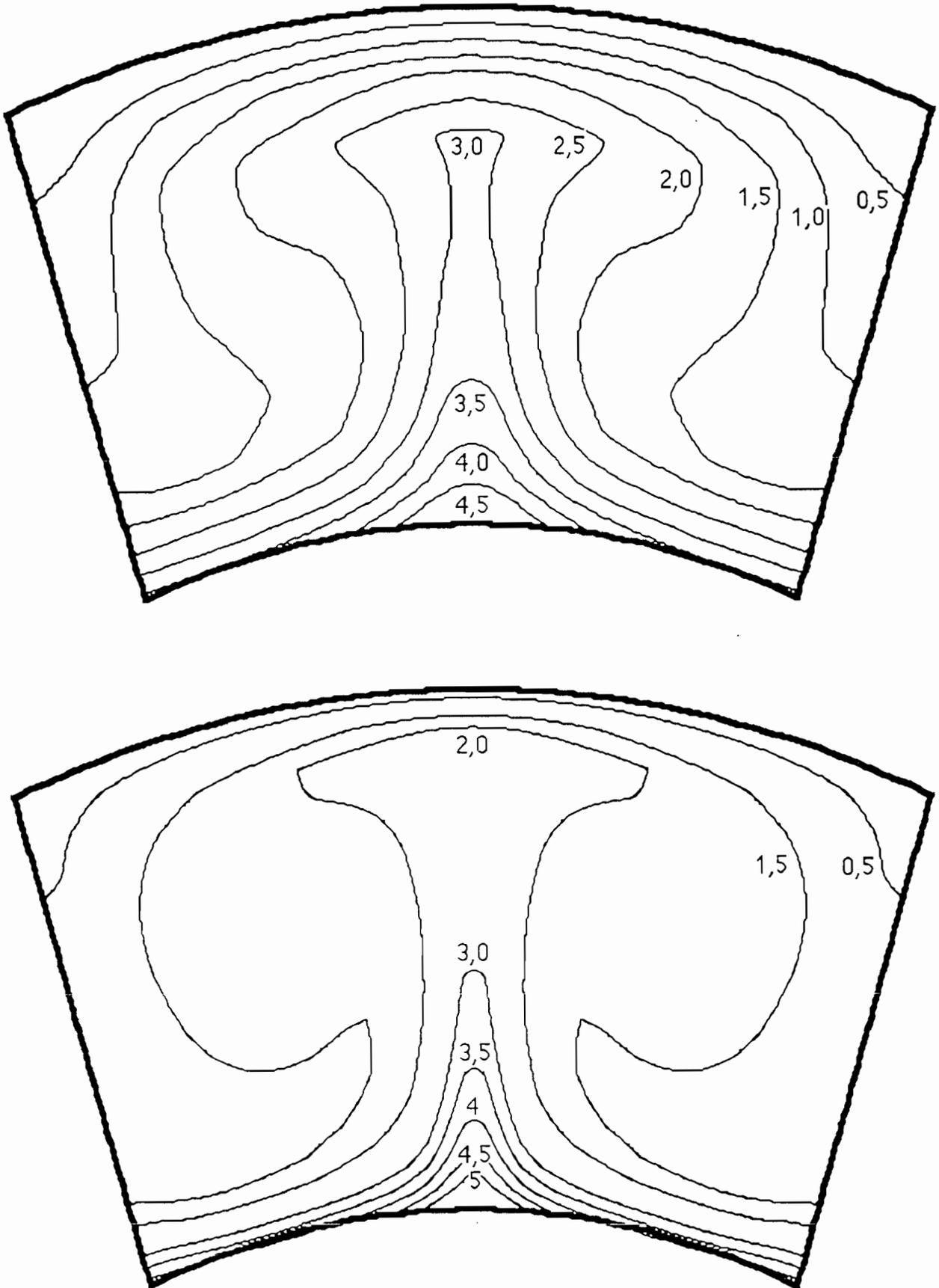
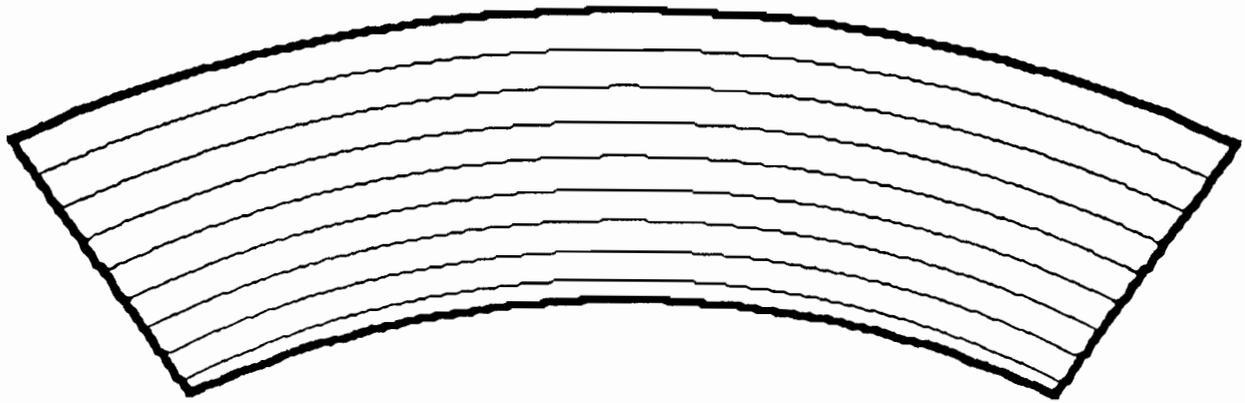
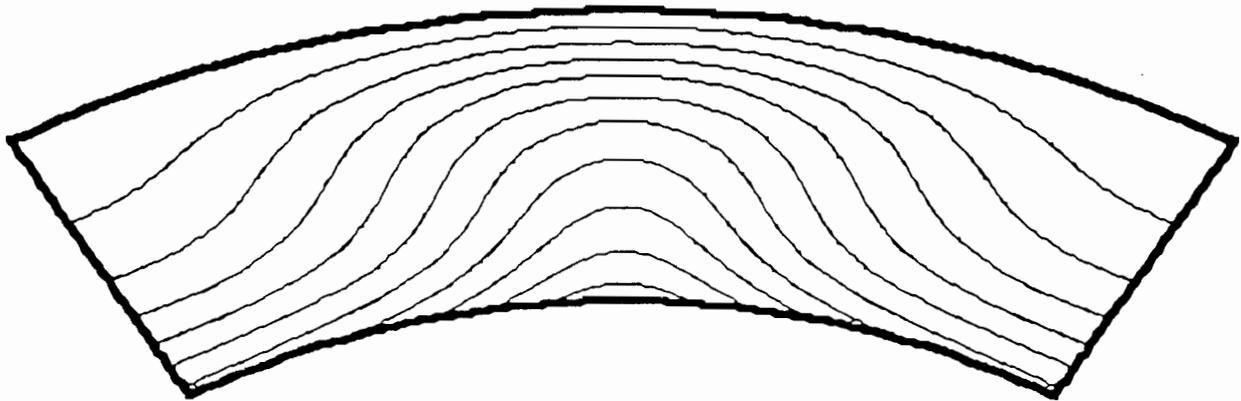


Figure 3 - 22 - b : Représentation des isothermes respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^6$ et $Gr=0,1 \cdot 10^7$ pour un facteur de forme de $1/2$

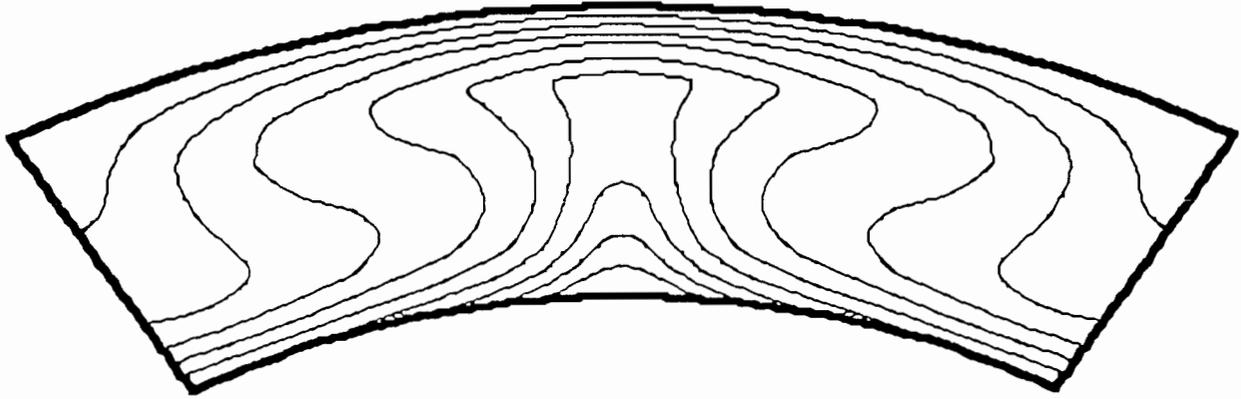


Tbas--> haut : 1,6 1,4 1,2 1,0 0,8 0,6 0,4 0,2

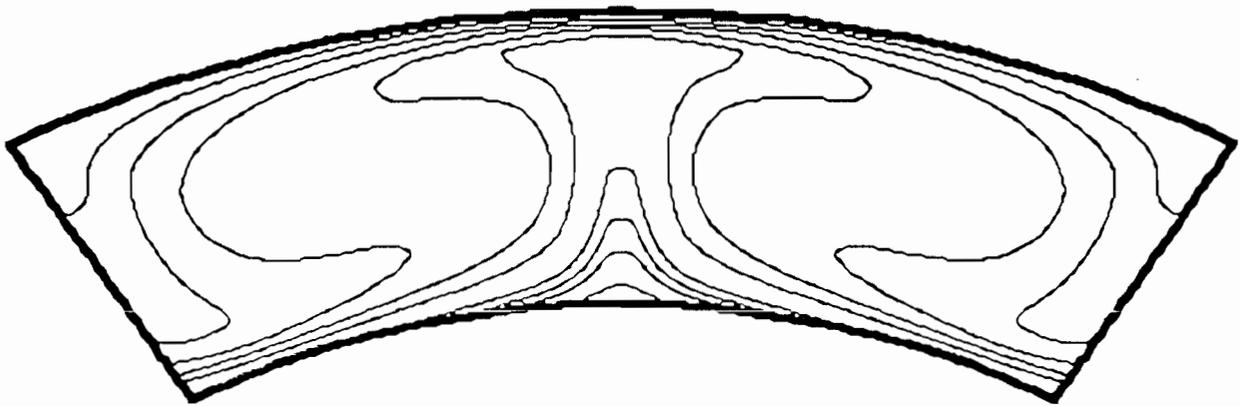


Tbas--> haut : 5,0 4,5 4,0 3,5 3,0 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5

Figure 3 - 23 - a : Représentation des isothermes respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^3$ et $Gr=0,1 \cdot 10^5$ pour un facteur de forme de $1/3$

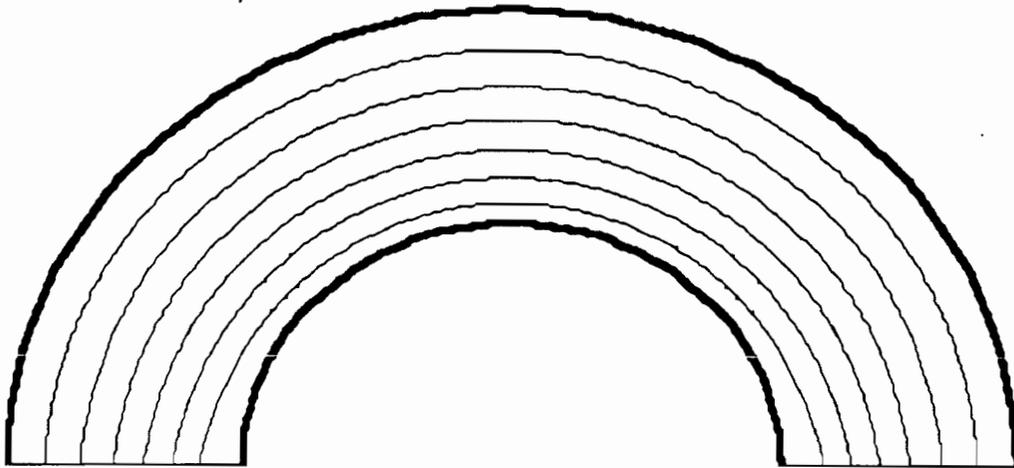


Tbas--> haut : 4,5 4,0 3,5 3,0 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5

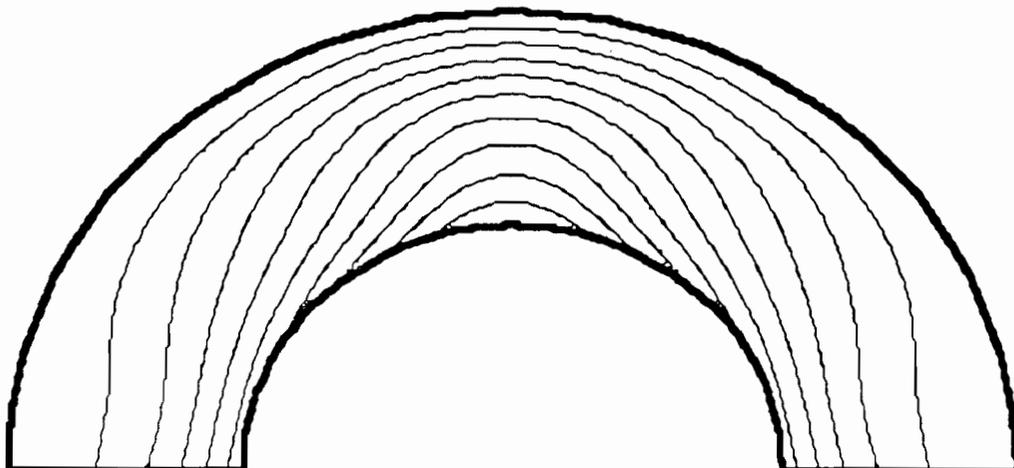


Tbas--> haut : 5,5 5,0 4,5 4,0 3,0 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5

Figure 3 - 23 - b : Représentation des isothermes respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^6$ et $Gr=0,1 \cdot 10^7$ pour un facteur de forme de $1/3$

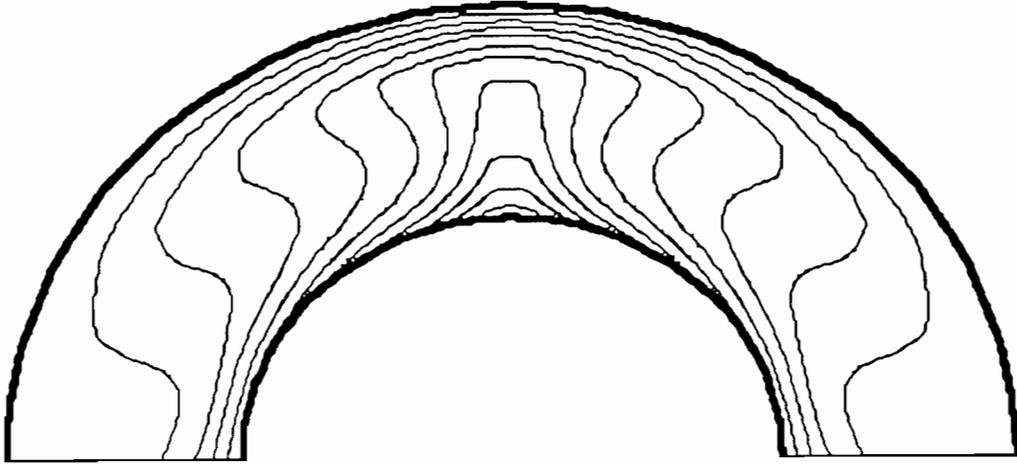


Tbas--> haut : 1,2 1,0 0,8 0,6 0,4 0,2

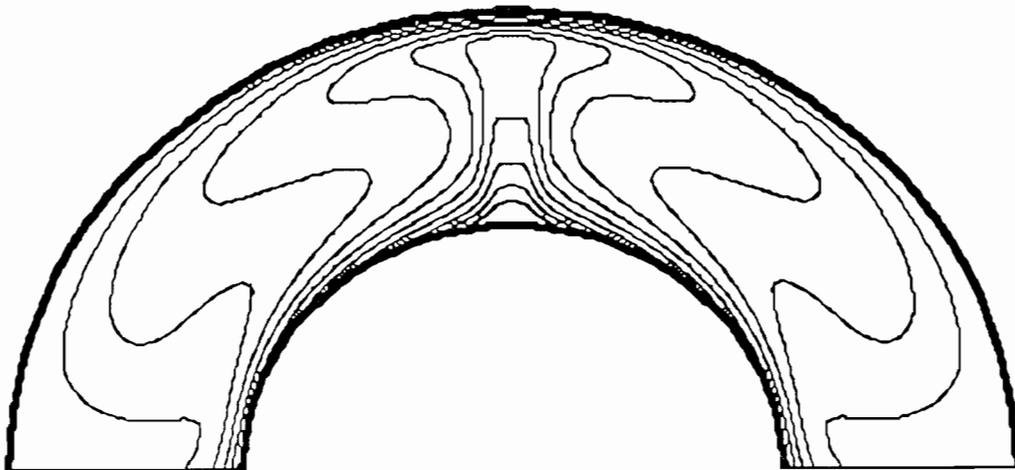


Tbas--> haut : 4,5 4,0 3,5 3,0 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5

Figure 3 - 24 - a : Représentation des isothermes respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^3$ et $Gr=0,1 \cdot 10^5$ pour un facteur de forme de $1/5$



Tbas--> haut : 4,5 4,0 3,5 3,0 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5



Tbas--> haut : 5,0 4,5 4,0 3,5 3,0 2,5 2,0 1,5 1,0 0,5

Figure 3 - 24 - b : Représentation des isothermes respectivement pour $Gr=0,1 \cdot 10^6$ et $Gr=0,1 \cdot 10^7$ pour un facteur de forme de $1/5$

III-2-3 Nombre de Nusselt local

Les figures 3-25 à 3-28 représentent les variations angulaires du nombre de Nusselt local sur la paroi cylindrique intérieure, pour différents nombres de Grashof et pour les quatre facteurs de forme étudiés; sur les figures 3-29 à 3-32, nous avons représenté les variations correspondantes sur la paroi isotherme.

Ces figures montrent que sur la paroi cylindrique intérieure, le nombre local de Nusselt est minimal sur l'axe de symétrie sauf pour le cas qui correspond à la formation de quatre cellules (fig. 3-25). Ceci s'explique par le fait que, sur cette paroi, quand l'écoulement est limité à deux cellules, ce sont des particules d'air chauffées qui se détachent de la paroi intérieure au niveau de l'axe de symétrie. Par contre, avec la formation de quatre cellules, l'air froid entre en contact avec la paroi chauffée au niveau de l'axe de symétrie et engendre des échanges plus importants.

Sur la paroi isotherme, les échanges thermiques fluide-paroi sont plus intenses au voisinage de l'axe de symétrie, pour un nombre de Grashof donné, et augmentent naturellement avec la densité de chaleur imposée sur la paroi intérieure. On peut noter toutefois que, sur cette paroi, les échanges thermiques sont mieux répartis pour un facteur de forme 1/1 que pour les autres configurations étudiées. On observe, en effet, que sur les figures 3-29 à 3-32, les sommets des courbes en cloche s'élargissent quand on augmente le facteur de forme.

Pour un facteur de forme de 1/5 et un nombre de Grashof égal à 10^4 , par exemple, on constate que les parties de la paroi isotherme situées dans les intervalles angulaires 0 - 0,7 et 2,4 - 3,14 radians participent moins bien à l'échange convectif que lorsqu'on travaille avec un nombre de Grashof égal à 100. Ces zones "mortes", toujours situées sur les coins, diminuent quand on augmente la densité de flux imposée mais restent tout de même plus importantes pour les configurations ouvertes. Cette remarque semble indiquer que les échanges thermiques sont meilleurs quand on augmente le facteur de forme.

III-2-4 Nombre de Nusselt moyen

Les figures 3-33 et 3-34 représentent les variations de la moyenne du nombre de Nusselt moyen sur les parois actives en fonction du nombre de Grashof et du facteur de forme. Elles montrent que le nombre de Nusselt moyen augmente dans le même sens que le nombre de Grashof et le facteur de forme. D'après la figure 3-34 on peut dire qu'il n'y a pas de convection pour $Gr=100$.

Afin de mieux comparer les différentes configurations étudiées, il nous a semblé plus indiqué de représenter les variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du logarithme népérien du nombre de Grashof (figure 3-35). Sur cette figure, on observe que les courbes restent pratiquement linéaires, jusqu'à un nombre de Grashof de 10^3 , correspondant approximativement à la limite supérieure du régime conductif dominant.

On constate également une séparation assez nette des courbes à partir de cette valeur du nombre de Grashof.

On peut déduire de ces résultats que, pour des nombres de Grashof supérieurs à 10^3 , les échanges thermo-convectifs sont meilleurs quand on augmente le facteur de forme (Tableau 3). Pour des nombres de Grashof inférieurs à 10^3 , on peut considérer que le transfert se fait seulement par conduction. Cette conclusion est en conformité avec les observations développées antérieurement.

Gr	\overline{Nu}_2
$Gr \leq 10^3$	régime conductif
$Gr > 10^3$	$\overline{Nu}_2_{1/1} > \overline{Nu}_2_{1/2} > \overline{Nu}_2_{1/3} > \overline{Nu}_2_{1/5}$

Tableau 3 : Variations du nombre de Nusselt moyen avec Gr et F_r

III-2-5 Influence du fluide dans le transfert de chaleur

Pour étudier l'influence de la nature du fluide sur le transfert de chaleur, quelques exécutions numériques complémentaires (Tableau 4) ont été effectuées avec le dioxyde de carbone et l'ammoniac sous forme liquide (propriétés physiques: [24]), pour $F_r=1/1$.

Exéc. N°	F_r	N X M	Gr	\overline{Nu}_2	Ω_{max}	Fluide
017	1/1	31 x 50	10^2	0,99	$0,5470 \times 10^{-2}$	CO ₂
018	1/1	31 x 50	10^4	3,00	0,8670	CO ₂
019	1/1	31 x 50	10^5	4,67	$0,3148 \times 10^1$	CO ₂
020	1/1	31 x 50	10^6	8,66	$0,9426 \times 10^1$	CO ₂
021	1/1	31 x 50	10^2	1,00	$0,5430 \times 10^{-2}$	NH ₃
022	1/1	31 x 50	10^4	2,47	0,9780	NH ₃
023	1/1	31 x 50	10^5	3,84	$0,4474 \times 10^1$	NH ₃
024	1/1	31 x 50	10^6	7,61	$0,1515 \times 10^2$	NH ₃

Tableau 4 : influence du fluide

Le nombre moyen de Nusselt sur les parois cylindriques augmente avec le nombre de Prandtl (fig.3-36), quand le coefficient de transfert de chaleur augmente naturellement avec la conductivité thermique. On constate aussi qu'il n'y a pas de régime conductif pour l'ammoniac et le dioxyde de carbone dans le domaine d'investigation étudié.

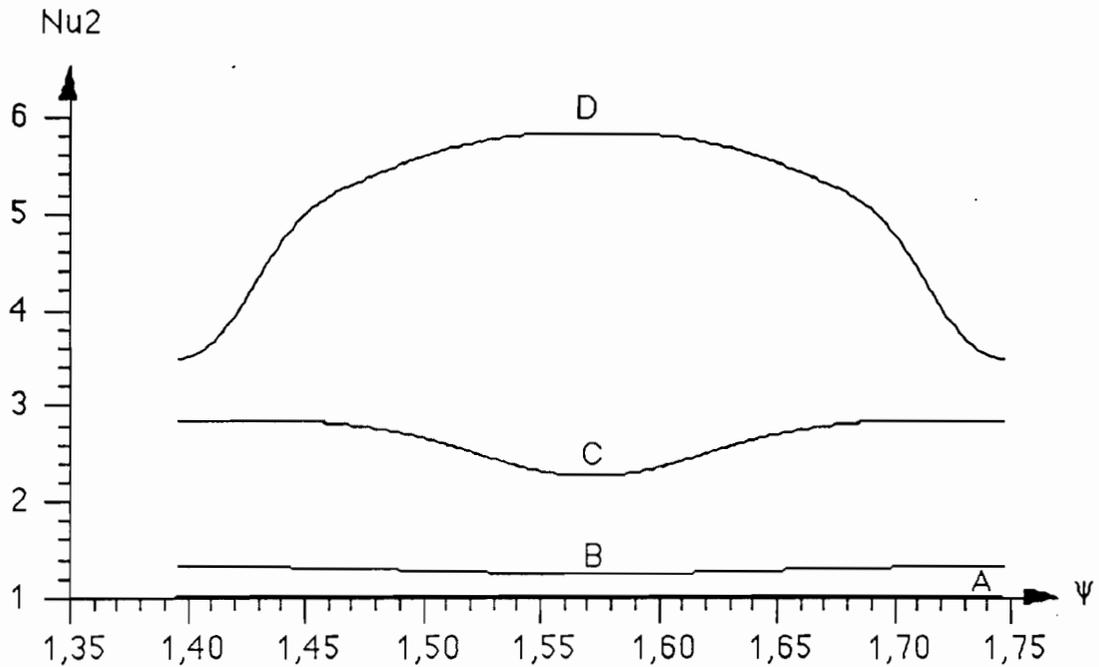


Figure 3-25 Variations angulaires du nombre de Nusselt local sur la paroi cylindrique intérieure pour un facteur de forme = 1/ 1 et pour différentes valeurs du nombre de Grashof modifié : $Gr_A = 0,1 \cdot 10^3$ $Gr_B = 0,1 \cdot 10^5$ $Gr_C = 0,1 \cdot 10^6$ $Gr_D = 0,1 \cdot 10^7$

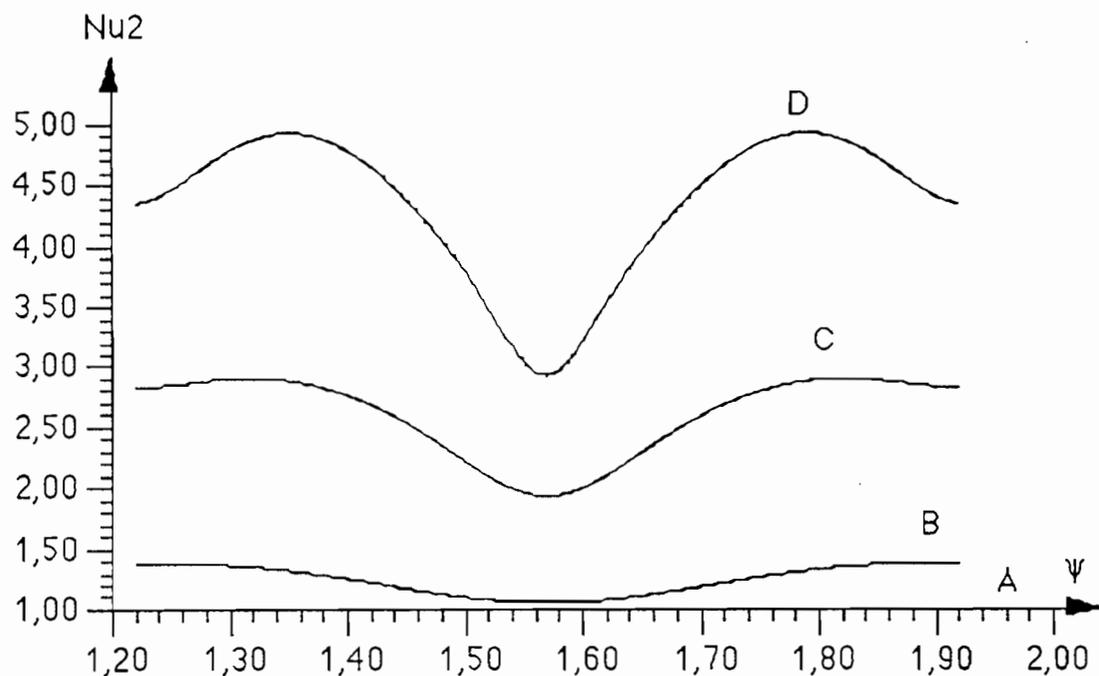


Figure 3-26 Variations angulaires du nombre de Nusselt local sur la paroi cylindrique intérieure pour un facteur de forme = 1/ 2 et pour différentes valeurs du nombre de Grashof modifié : $Gr_A = 0,1 \cdot 10^3$ $Gr_B = 0,1 \cdot 10^5$ $Gr_C = 0,1 \cdot 10^6$ $Gr_D = 0,1 \cdot 10^7$

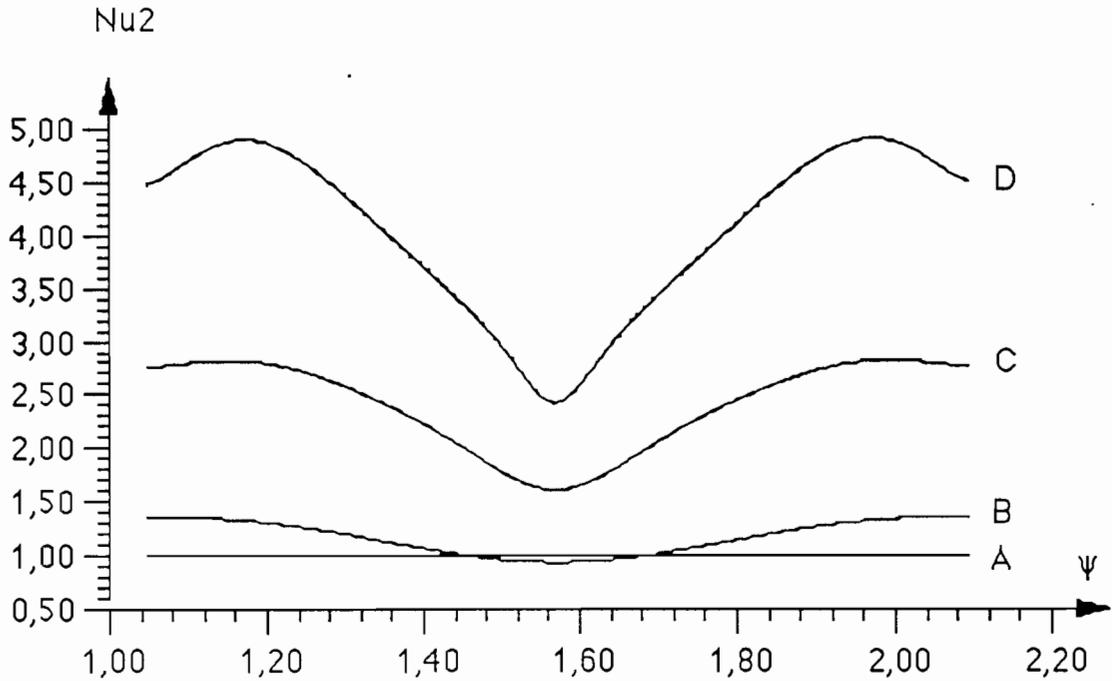


Figure 3-27 Variations angulaires du nombre de Nusselt local sur la paroi cylindrique intérieure pour un facteur de forme = 1/3 et pour différentes valeurs du nombre de Grashof modifié : $Gr_A = 0,1 \cdot 10^3$ $Gr_B = 0,1 \cdot 10^5$ $Gr_C = 0,1 \cdot 10^6$ $Gr_D = 0,1 \cdot 10^7$

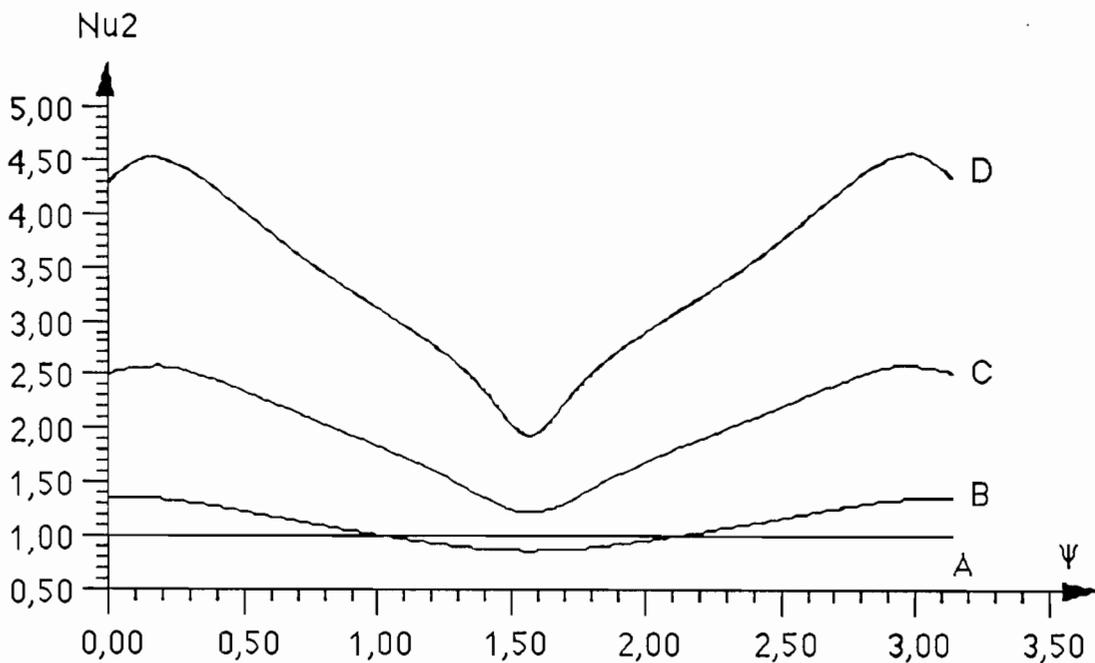


Figure 3-28 Variations angulaires du nombre de Nusselt local sur la paroi cylindrique intérieure pour un facteur de forme = 1/5 et pour différentes valeurs du nombre de Grashof modifié : $Gr_A = 0,1 \cdot 10^3$ $Gr_B = 0,1 \cdot 10^5$ $Gr_C = 0,1 \cdot 10^6$ $Gr_D = 0,1 \cdot 10^7$

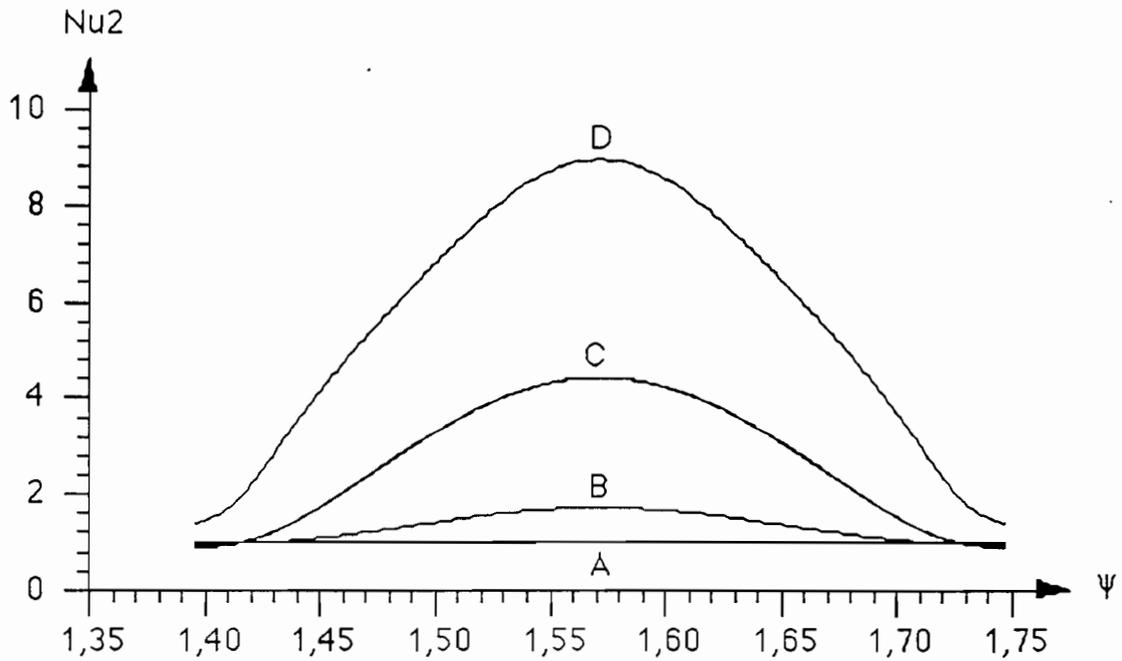


Figure 3-29 Variations angulaires du nombre de Nusselt local sur la paroi cylindrique extérieure pour un facteur de forme = 1/ 1 et pour différentes valeurs du nombre de Grashof modifié : $Gr_A = 0,1 \cdot 10^3$ $Gr_B = 0,1 \cdot 10^5$ $Gr_C = 0,1 \cdot 10^6$ $Gr_D = 0,1 \cdot 10^7$

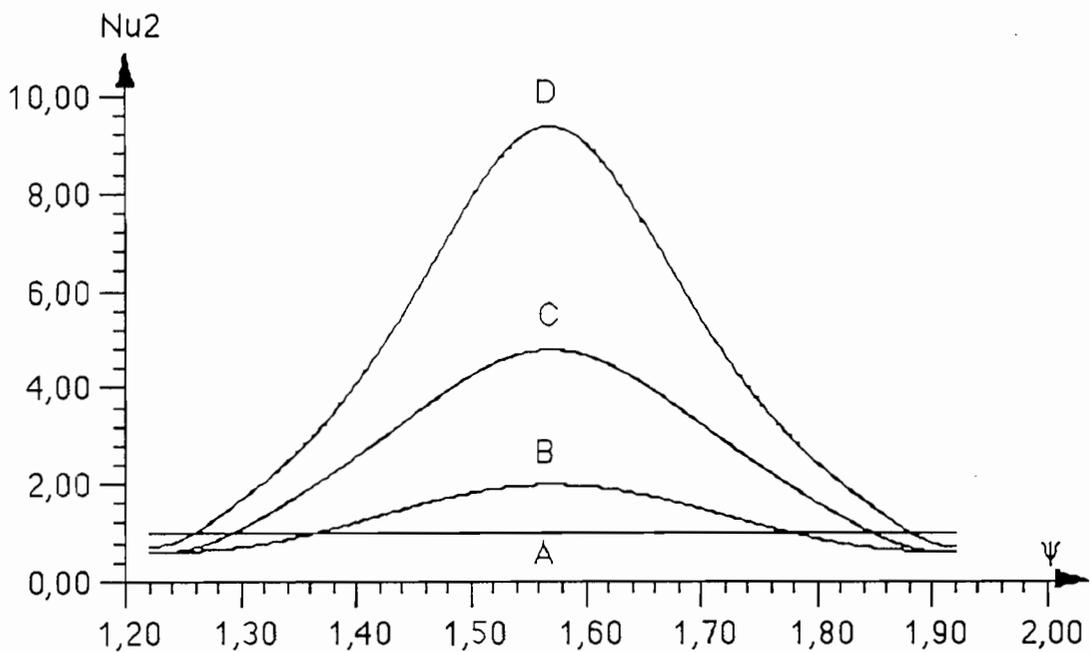


Figure 3-30 Variations angulaires du nombre de Nusselt local sur la paroi cylindrique extérieure pour un facteur de forme = 1/ 2 et pour différentes valeurs du nombre de Grashof modifié : $Gr_A = 0,1 \cdot 10^3$ $Gr_B = 0,1 \cdot 10^5$ $Gr_C = 0,1 \cdot 10^6$ $Gr_D = 0,1 \cdot 10^7$

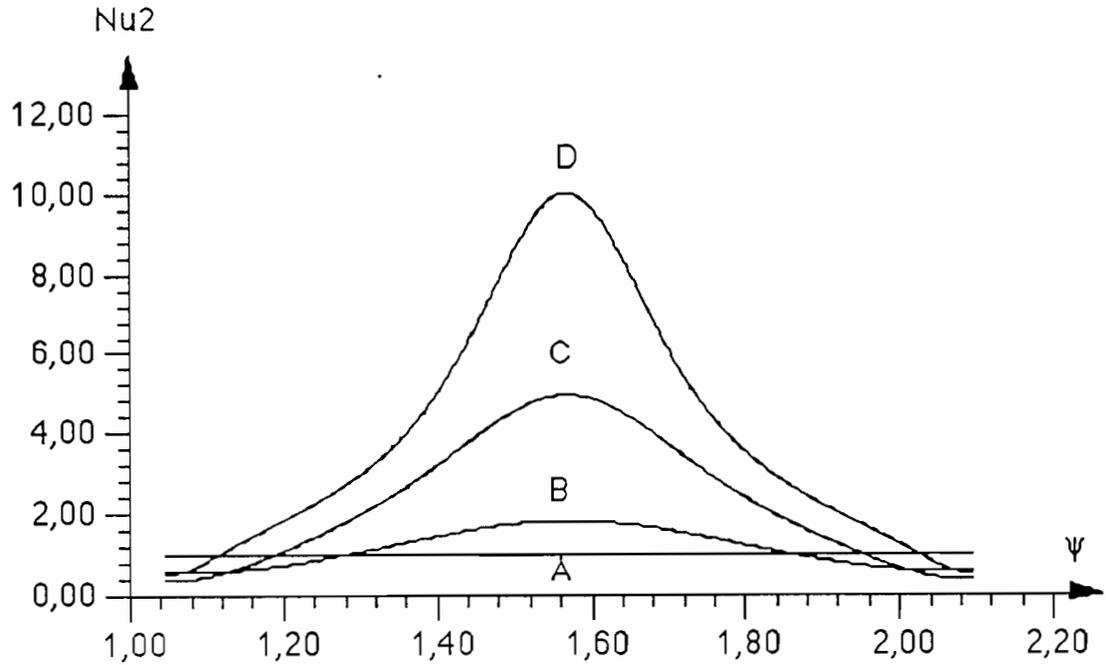


Figure 3-31 Variations angulaires du nombre de Nusselt local sur la paroi cylindrique extérieure pour un facteur de forme = 1/3 et pour différentes valeurs du nombre de Grashof modifié : $Gr_A = 0,1 \cdot 10^3$ $Gr_B = 0,1 \cdot 10^5$ $Gr_C = 0,1 \cdot 10^6$ $Gr_D = 0,1 \cdot 10^7$

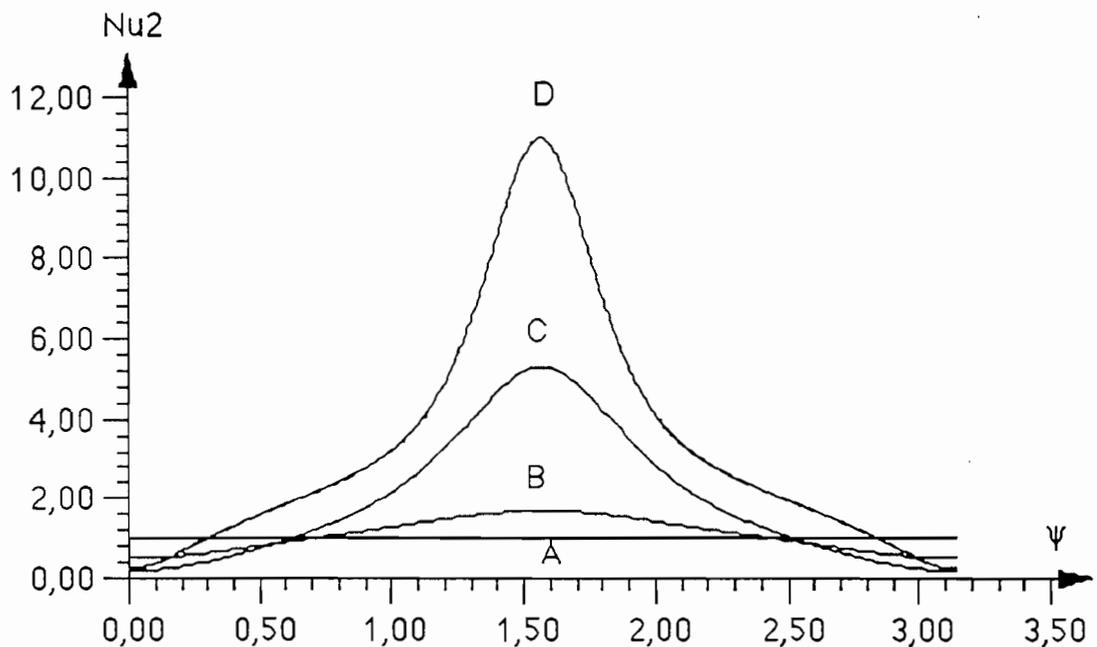


Figure 3-32 Variations angulaires du nombre de Nusselt local sur la paroi cylindrique extérieure pour un facteur de forme = 1/5 et pour différentes valeurs du nombre de Grashof modifié : $Gr_A = 0,1 \cdot 10^3$ $Gr_B = 0,1 \cdot 10^5$ $Gr_C = 0,1 \cdot 10^6$ $Gr_D = 0,1 \cdot 10^7$

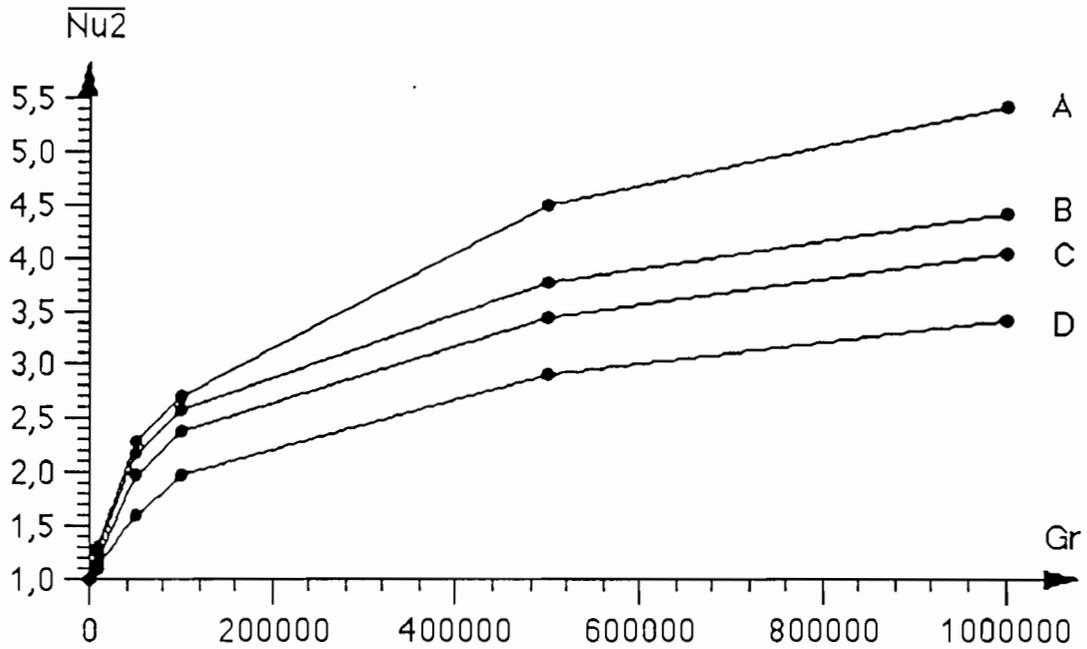


Figure 3-33 Variations du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques en fonction du nombre de Grashof modifié pour différentes valeurs du facteur de forme F_r : A=1/1 B=1/2 C=1/3 D=1/5

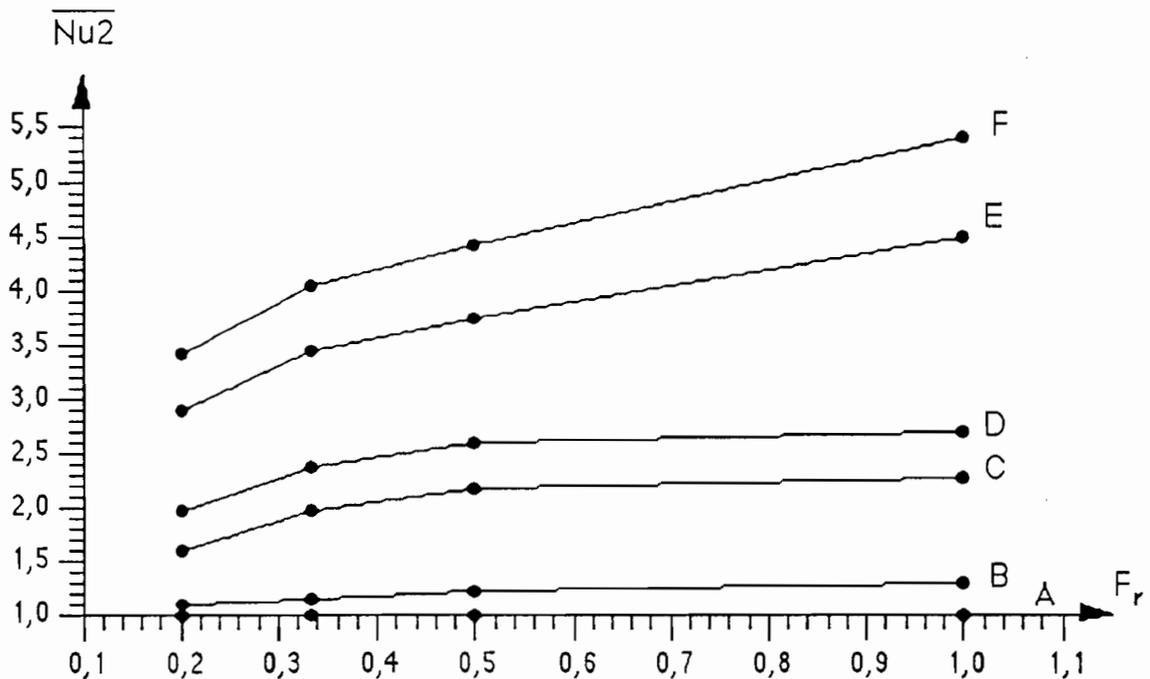


Figure 3-34 Variations du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques en fonction du facteur de forme pour différentes valeurs du nombre de Grashof modifié : $Gr_A = 0,1 \cdot 10^3$ $Gr_B = 0,1 \cdot 10^5$ $Gr_C = 0,5 \cdot 10^5$ $Gr_D = 0,1 \cdot 10^6$ $Gr_E = 0,5 \cdot 10^6$ $Gr_F = 0,1 \cdot 10^7$

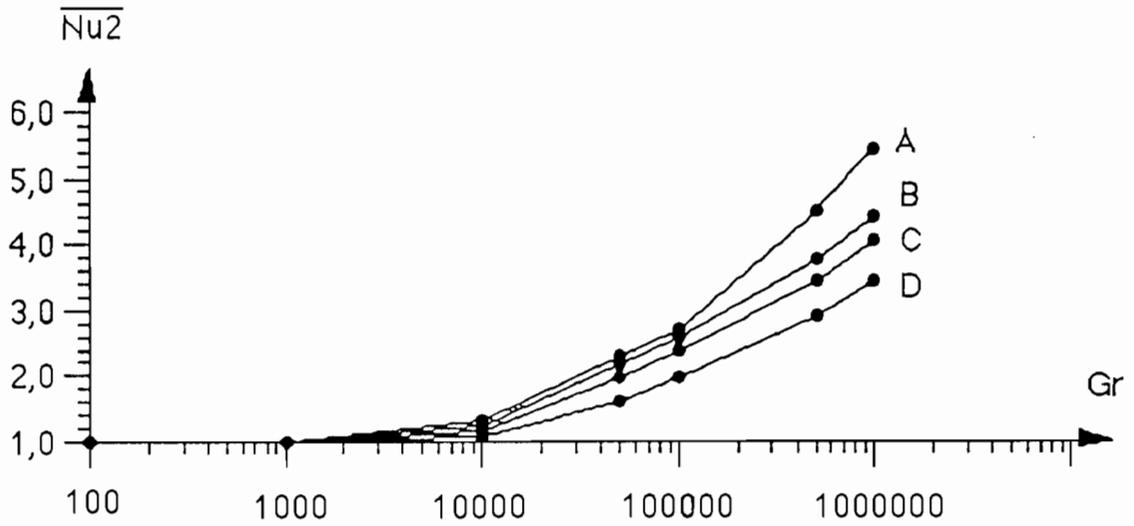


Figure 3-35 Variations du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques en fonction du nombre de Grashof modifié pour différentes valeurs du facteur de forme F_r : A=1/1 B=1/2 C=1/3 D=1/5

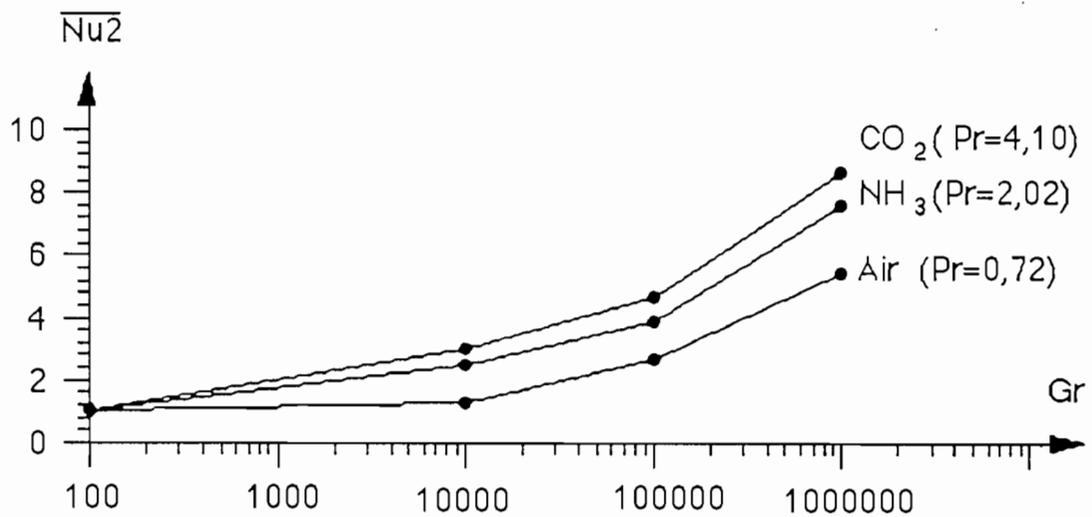


Figure 3-36: Variations du nombre de Nusselt moyen sur les parois cylindriques en fonction du nombre de Grashof modifié, pour différents fluides et pour $F_r = 1/1$.

III-3 Conclusion

Dans cette étude, nous avons présenté les différents résultats théoriques concernant la distribution de la fonction de courant et le champ des températures, ainsi que les nombres adimensionnels de Nusselt locaux et moyens en fonction du nombre de Grashof et du facteur de forme.

Quand l'écoulement est laminaire, l'analyse des lignes de courant montre, à tout instant, la formation de deux groupes de cellules positives et négatives, symétriques par rapport à l'axe vertical Oy , et tournant respectivement dans le sens trigonométrique et dans le sens inverse. Quand on impose un flux de chaleur très élevé sur la paroi cylindrique intérieure, le régime de l'écoulement change et on observe la formation de deux cellules supplémentaires au niveau des "coins" inférieurs de l'enceinte. Ces cellules supplémentaires tournent dans le sens contraires des cellules voisines.

Au régime permanent, pour $Gr=100$, les valeurs de la fonction de courant sont très faibles et les isothermes sont approximativement parallèles. Pour un nombre de Grashof plus important, les valeurs de la fonction de courant augmentent rapidement et les lignes isothermes se transforment sensiblement et adoptent la forme d'un "champignon". La conduction est le régime de transfert de chaleur dominant, pour des nombres de Grashof inférieurs à 10^3 , quel que soit le facteur de forme. Pour un nombre de Grashof supérieur à 10^3 , le rôle de la convection devient prépondérant et on peut dire que le nombre de Nusselt moyen augmente avec le facteur de forme.

Pour $F_r=1$, la comparaison du transfert de chaleur pour différents fluides tels que l'air, l'ammoniac-liquide et le dioxyde de carbone-liquide permet de conclure que le nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Prandtl.

CHAPITRE IV

VALIDATION EXPERIMENTALE PAR INTERFEROMETRIE HOLOGRAPHIQUE

Dans ce chapitre nous allons présenter la technique d'interférométrie holographique utilisée comme méthode d'enregistrement simultané de la phase et de l'amplitude d'une onde lumineuse, décrire le montage expérimental et présenter les résultats qui nous permettent de valider les codes de calcul utilisés dans les chapitres précédents.

4-1 Considérations générales

4-1-1 Historique

C'est en 1948 que Denis Gabor [27-28], prix Nobel de physique a décrit une méthode nouvelle, "l'holographie", qui permet d'obtenir l'image d'un objet à partir de la figure de diffraction produite par cet objet. Les possibilités de l'holographie ont été mises en évidence avec l'apparition du laser (*light amplification by stimulated emission of radiation*) par les expériences menées à l'Université de Michigan et en particulier par E. N. Leith et J. Upatnieks [29] qui ont perfectionné en 1962 la méthode de Gabor. Alors que la photographie classique restitue un enregistrement bidimensionnel, la technique holographique permet la restitution tridimensionnelle d'une onde lumineuse identique à celle diffusée par l'objet réel. Par ailleurs, plusieurs objets ou un même objet occupant différentes positions peuvent être enregistrés sur la même plaque sensible et restitués, soit séparément, soit simultanément, propriété qui est à la base de l'interférométrie holographique.

4-1-2 Emulsions photosensibles

Les émulsions photosensibles sont utilisées pour fixer les informations contenues dans les faisceaux lumineux issus de l'objet à holographier. Les caractéristiques et les propriétés fondamentales présentées par ces émulsions sont résumées ci-après:

4-1-2-1 Propriétés d'une émulsion photosensible:

- C'est un récepteur quadratique. Elle est sensible à l'énergie lumineuse, c'est-à-dire au carré du module de la vibration incidente.
- Après traitement chimique, les variations de l'énergie lumineuse reçue se traduisent par des variations de transparence (fig.4-1)

- Elle est caractérisée par :

. la courbe de noircissement qui donne la densité optique D en fonction du logarithme de l'éclairement reçu pendant l'unité de temps. Cette courbe présente trois régions I, II et III respectivement de sous-exposition, linéaire et de surexposition. On appelle généralement cette courbe, courbe de H et D (Hurter et Drieffield) (fig. 4-2).

. le pouvoir de résolution : la nature granuleuse du support photographique rend impossible la perception de détails de dimensions inférieures à celle du grain moyen. Le nombre maximum d'éléments d'information enregistrables sur l'unité de longueur caractérise le pouvoir de résolution de l'émulsion. Une émulsion holographique courante possède un pouvoir de résolution élevé, de l'ordre de 1000 à 1500 traits par millimètre.

4-1-2-2 Principales définitions

E énergie lumineuse

τ durée d'exposition

I_0 intensité lumineuse incidente

I intensité lumineuse transmise

T transparence énergétique $T = \frac{I}{I_0}$

t transparence en amplitude $t = T^{1/2}$

D densité optique $D = \log\left(\frac{I_0}{I}\right) = \log\left(\frac{1}{T}\right)$

γ facteur de contraste $\gamma = \text{tg}(\theta)$

On peut passer de la courbe de la figure 4-1 à celle de la figure 4-2 par la relation:

$$D = -\log \frac{I}{I_0} = -\log T = -2 \log t \quad (4-1)$$

Les émulsions photographiques sont utilisées en veillant à ce que la transparence en amplitude t de la plaque développée soit proportionnelle à l'éclairement E reçu par l'émulsion. Ainsi on peut écrire:

$$t = t_0 + t_1 (E - E_0) \quad (4-2)$$

Cette formule est applicable dans un domaine relativement grand (fig. 4-1).

E_0 , t_0 et t_1 sont définis sur la figure (4-1).

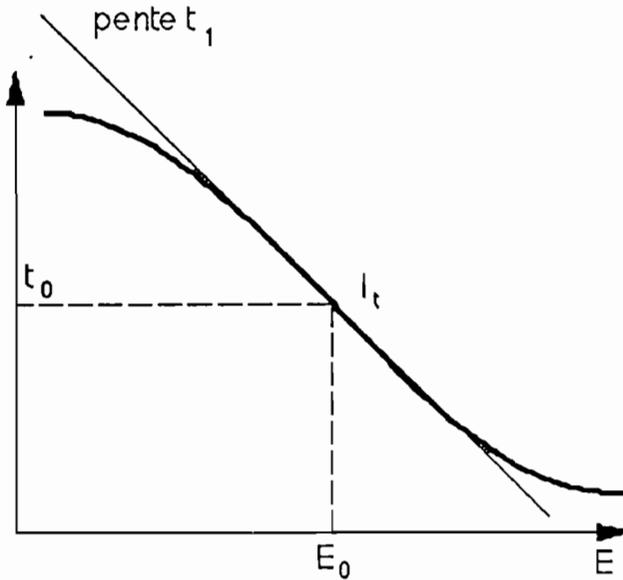


Figure 4-1

Transparence en amplitude d'une plaque photographique après développement chimique, en fonction de l'éclairement reçu (exposition de durée τ unité)

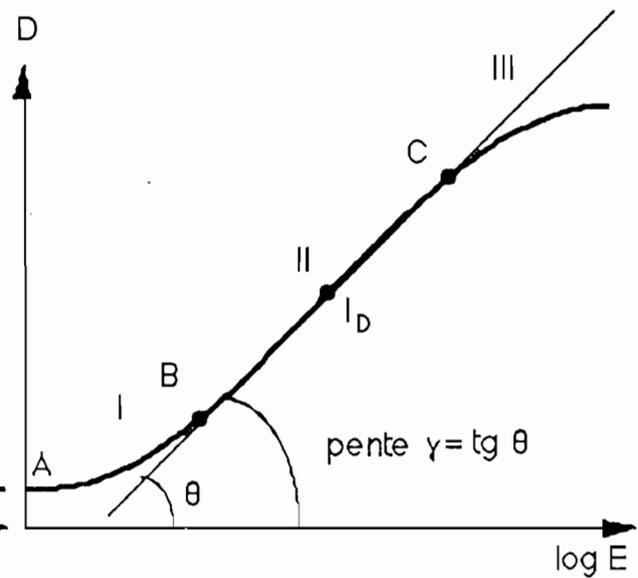


Figure 4-2

Courbe de H et D : Variation de la densité optique d'un cliché en fonction du logarithme de l'éclairement reçu (exposition de durée τ unité)

4-1-2-3 Influence des non-linéarités de l'enregistrement photographique

L'enregistrement est linéaire dans les conditions précisées par la relation (4-2), donc dans le cas où le point de fonctionnement coïncide avec le point I_t (fig. 4-1). Dans ce cas, l'image restituée traduit fidèlement les intensités émises par l'objet.

Etudions la position d'un tel point de fonctionnement sur la courbe H et D.

Le facteur de contraste γ est défini comme la pente de la courbe de H et D. On peut donc écrire:

$$\gamma = \operatorname{tg} \theta = \frac{dD}{d(\log E)} = -2 \frac{dt}{t} \frac{1}{\frac{dE}{E}}, \quad (4-3)$$

d'où :

$$\frac{dt}{dE} = -\frac{\gamma t}{2E} \quad (4-4)$$

Le point d'inflexion de la courbe de la figure 4-1 est donné par :

$$\frac{d^2t}{dE^2} = 0 \quad (4-5)$$

ainsi :

$$0 = \frac{\gamma^2}{2} + \gamma - (\log e) \frac{d\gamma}{dH} \quad (4-6)$$

(où e est la base des logarithmes népériens et $H = \log E$)

Au point I_t on a donc :

$$\frac{d^2D}{dH^2} = \frac{1}{2 \log e} \gamma (2 + \gamma) \quad (4-7)$$

Si $\gamma = -2$, les points d'inflexion sur les courbes 4-1 et 4-2 se correspondent. On utilise généralement en holographie des émulsions négatives $\gamma > 0$, ce qui donne:

$$\frac{d^2D}{dH^2} > 0 \quad (4-8)$$

Au point de fonctionnement I_t , autour duquel on doit travailler, correspond donc sur la courbe de H et D une zone dont la concavité est tournée vers les densités croissantes : c'est la zone de sous-exposition (zone I). Ce résultat nous indique que les "bons hologrammes" seront de teinte gris clair.

Si les variations ΔE de l'éclairement autour de E_0 augmentent, l'écart à la loi linéaire devient sensible. Dès lors, la courbe de sensibilité ne peut plus être assimilée à une droite. La formule $t = t_0 + t_1 (E - E_0)$ n'est plus valable. Elle doit être approchée par l'équation suivante:

$$t_0 + t_1 (E - E_0) + t_3 (E - E_0)^3 + \dots \quad (4-9)$$

On obtient des images parasites et une distorsion des intensités dans l'image qui n'est donc plus fidèle à l'objet. Cette baisse de qualité correspond à la présence d'un "bruit" qui se superpose à l'image initiale ("signal").

Si le point de fonctionnement ne coïncide pas avec le point d'inflexion I_1 de la courbe de la figure (4-1), la tolérance sur les variations ΔE diminue pour une même qualité de l'image. Pour des valeurs ΔE suffisamment petites, on peut utiliser la loi linéaire $t_0 + t_1 \Delta E$ avec une bonne approximation et se placer par conséquent en n'importe quel point de la courbe H et D caractéristique de l'émulsion. Il est à noter que la brillance de l'image augmente avec ΔE .

L'hypothèse précédente (ΔE très faible), habituellement prise pour décrire la formation de l'image, ne conduit pas à l'expression de la meilleure image. Au point de vue expérimental, on réalise généralement un compromis entre la qualité de l'image et sa brillance (choix de ΔE et, par conséquent, des intensités respectives des faisceaux objet et de référence).

4-1-3 Enregistrements sur émulsions photosensibles

Nous limiterons ici notre discussion aux émulsions photosensibles du type "noir et blanc". L'objet de notre étude va être de montrer comment l'enregistrement holographique est le mode d'enregistrement optimal sur ce type de support.

4-1-3-1 Enregistrement d'objets bidimensionnels

- L'enregistrement sur support photosensible des ombres portées de type "ombres chinoise" ne présente aucun intérêt : l'information est perdue dans l'enregistrement lors de la formation de l'ombre portée.

- On sait enregistrer une information bidimensionnelle c'est-à-dire restituer le contenu de l'information perdue dans la zone d'ombre de l'ombre chinoise. Pour cela, on forme à l'aide d'une optique une image sur le plan de l'émulsion photosensible.

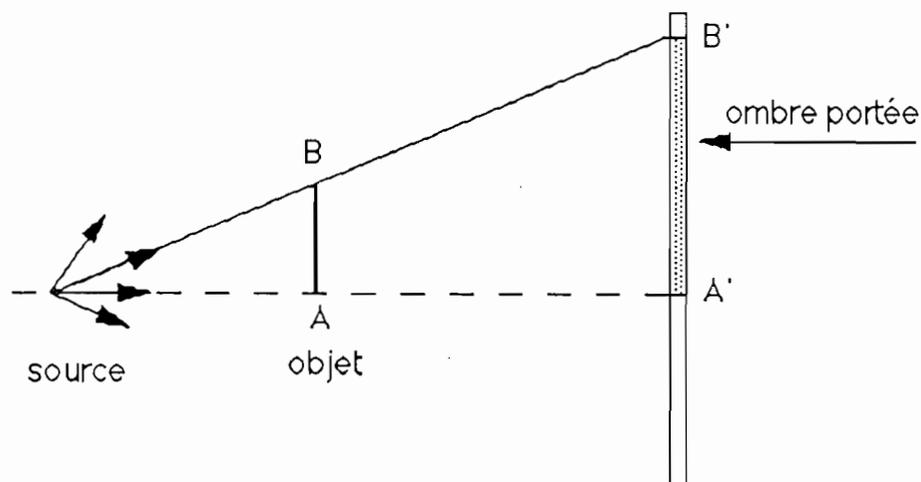


Figure 4-3

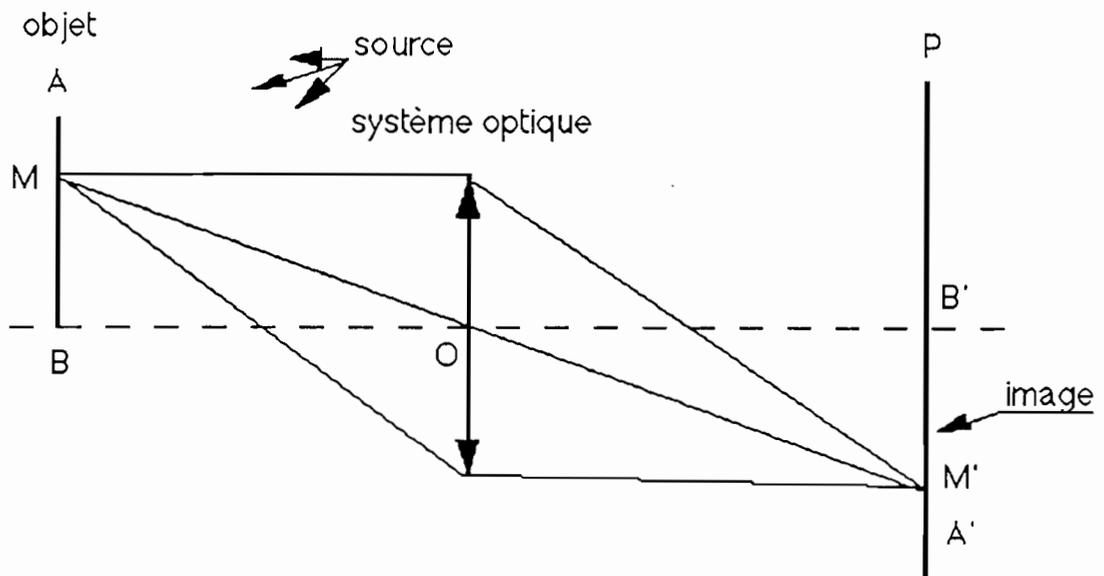


Figure 4-4

Pour la formation de cette image, tous les points de l'objet, soit émettent de la lumière, soit diffusent de la lumière incidente, issue d'une source auxiliaire par exemple, selon une loi qui leur est propre. En première approximation, on peut supposer que la lumière est monochromatique. La qualité de l'enregistrement sera fonction de la qualité de l'optique intermédiaire. En supposant que le système optique soit parfaitement stigmatique (tous les rayons issus d'un même point M de l'objet convergent en un même point de l'image M'), que l'ouverture du système soit suffisamment grande pour ne pas donner lieu à des phénomènes de diffraction, la juxtaposition des points M' reproduira dans le plan de l'émulsion photosensible une intensité lumineuse proportionnelle à celle du point M de l'objet.

L'enregistrement étant effectué dans les conditions précisées plus haut, on obtient une reproduction bidimensionnelle dans d'excellentes conditions.

L'information relative à la troisième dimension (direction d'observation), existe, sous forme de flou plus ou moins accentué selon la position d'un point objet par rapport au plan de mise au point, mais en général, elle est inexploitable

4-1-3-2 Enregistrement tridimensionnel : l'holographie

La vibration lumineuse émise par un point de l'objet s'écrit $a = A_0 e^{j\phi}$ (le terme dépendant du temps $e^{j2\pi\nu t}$ sera omis dans toutes les formulations).

Dans le procédé d'enregistrement précédent, il y a dans le plan de l'émulsion, soit addition des amplitudes, soit addition des intensités suivant que les vibrations sont respectivement cohérentes ou incohérentes; ceci conduit finalement à l'enregistrement de $|A_0|^2$. Cela signifie qu'il y a perte de l'information de phase φ qui rend compte du relief de l'objet.

La conservation de cette information est réalisée par l'enregistrement, dans le plan du récepteur photographique des variations d'intensité lumineuse. La technique généralement employée consiste à faire interférer une onde de référence avec toutes les ondes émises par les différents points de l'objet. La lumière monochromatique utilisée doit présenter un très haut degré de cohérence, ce qui implique l'usage du laser.

a) Enregistrement

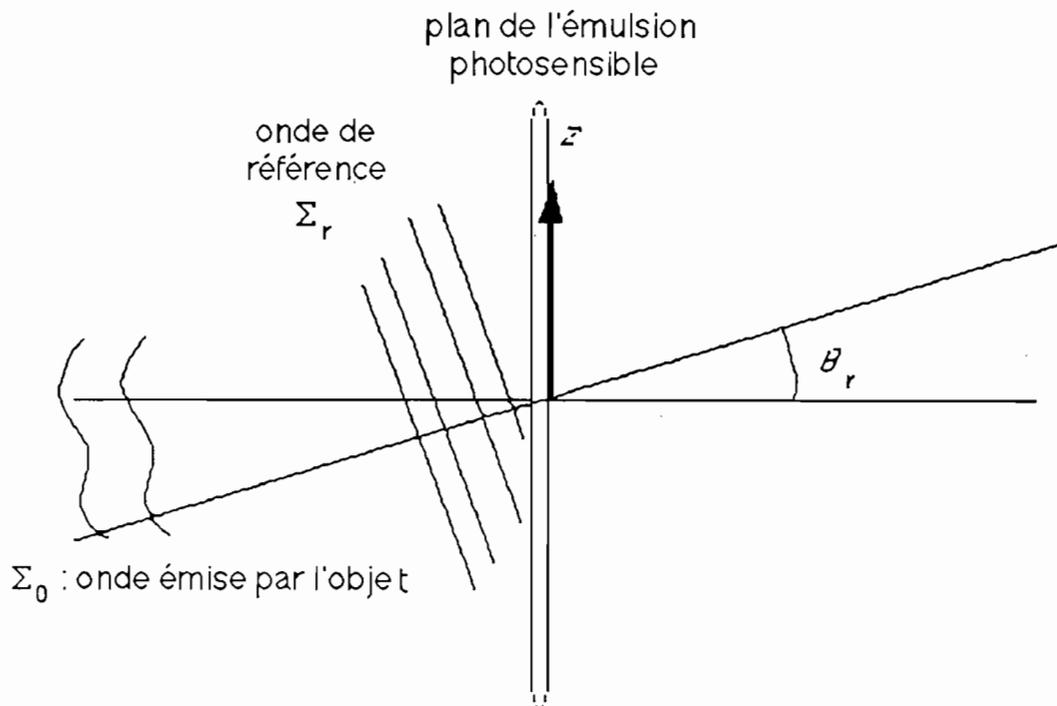


Figure 4-5

Pour obtenir facilement deux ondes cohérentes entre elles, il suffit de diviser en amplitude l'onde émise par un laser. La grande cohérence spatiale d'un tel faisceau permet d'obtenir des interférences de grand contraste entre les deux parties Σ_r (référence) et Σ_o (objet) diffusées par l'objet. Pour expliquer la formation des images en holographie, nous traiterons l'enregistrement de la phase et de l'amplitude d'une onde émise par une source ponctuelle.

La plaque photographique est éclairée par l'onde \sum_r et l'onde \sum_o cohérentes entre elles. Elles interfèrent dans son plan et tout point M du plan reçoit l'amplitude.

$$a_M(z,x) = a_o(z,x) + a_r(z,x) \quad (4-10)$$

Le matériau photosensible est impressionné par l'intensité reçue pendant le temps de pose τ constant:

$$E = (a_o + a_r)(a_o + a_r)^* = a_o a_o^* + a_r a_r^* + a_o a_r^* + a_o^* a_r \quad (4-11)$$

$$E = \|a_o\|^2 + \|a_r\|^2 + a_o^* a_r + a_o^* a_r \quad (4-12)$$

En se plaçant dans les conditions optimales d'enregistrement (linéarité, rapport d'amplitude,...) après développement chimique, le négatif obtenu donne par transmission une amplitude qui est proportionnelle à E.

D'après l'équation (4-2), on obtient :

$$t = t_0 + t_1 \left[\|a_o\|^2 + a_r^* a_o + a_o^* a_r \right] \quad (4-13)$$

Soit E_o l'intensité envoyée par l'onde de référence sur la plaque. On a:

$$E_o = \|a_r\|^2 \quad (4-14)$$

Dans l'expression (4-13) les deux derniers termes montrent que la présence du fond cohérent \sum_r a permis de conserver les informations d'amplitude et de phase de la fonction $a_o(x,y)$, onde émise par la source S.

b) Reconstitution:

En éclairant l'enregistrement obtenu après développement par une onde plane d'amplitude complexe $b_R(x,y)$ et parallèle au plan de l'hologramme, l'amplitude transmise par l'hologramme s'écrit :

$$b_R(x,y)t = t_0 b_R + b_R t_1 \left[\|a_o\|^2 + a_r^* a_o + a_o^* a_r \right] \quad (4-15)$$

En développant cette expression, en explicitant la forme de l'onde de référence a_r , telle que:

$$a_r = A_r e^{-jk_0 z} \quad \text{avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{module du vecteur d'onde}) \quad (4-16)$$

l'expression (4-15) s'écrit :

$$t b_R = t_0 b_R + b_R t_1 \| a_0 \|^2 + b_R t_1 a_r^* a_0 + b_R t_1 a_0^* a_r \quad (4-17)$$

En explicitant cette expression à l'aide de (4-16), on remarque que:

- 1) $t_0 b_R$ représente, au terme de transmission près t_0 , l'onde de reconstitution.
- 2) $t_1 \| a_0 \|^2 b_R$ rend compte d'une faible diffraction de l'onde incidente de reconstitution.

Pratiquement ces deux termes se confondent dans l'onde directement transmise.

$$3) b_R t_1 a_r^* a_0 \text{ s'écrit } b_R t_1 A_r e^{+jk\theta z} A_0 e^{jkr} \quad (4-18)$$

C'est une onde sphérique divergente tout comme l'onde objet, et située dans la direction θ par rapport à la normale à l'hologramme : c'est l'image virtuelle de l'objet

$$4) b_R t_1 a_0^* a_r \text{ s'écrit } b_R t_1 A_r e^{-jk\theta z} A_0 e^{-jkr} \quad (4-19)$$

C'est une onde sphérique convergente . Cette image se trouve dans la direction $-\theta$ avec la normale à l'hologramme et donne naissance à une image réelle de la source.

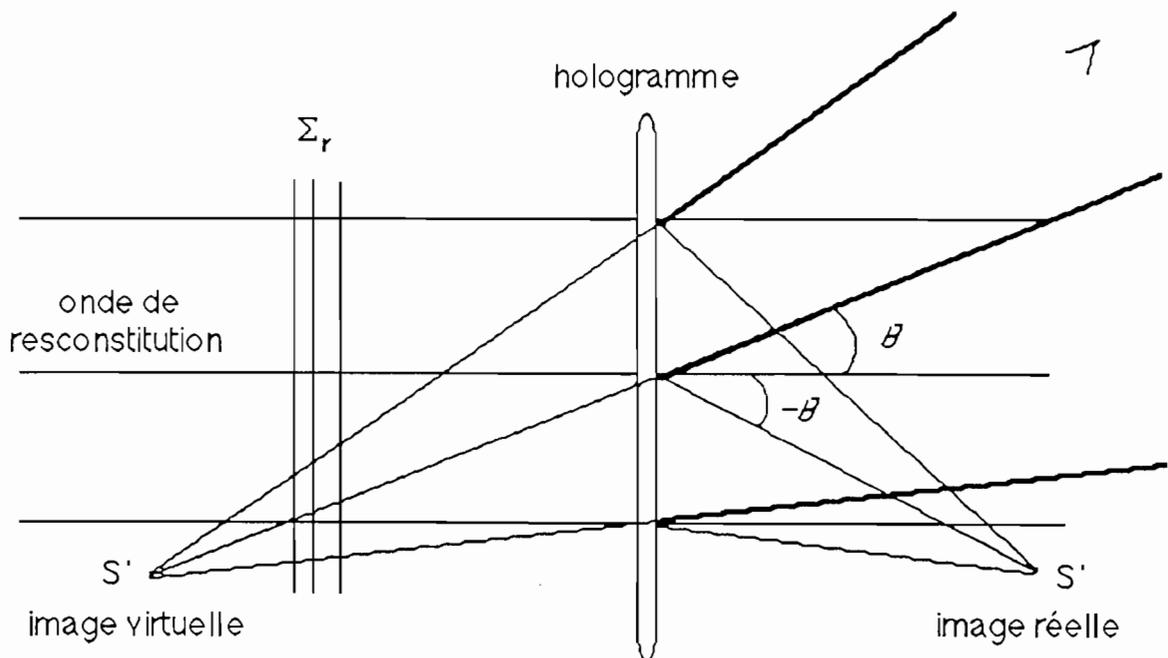


Figure 4-6

Pendant la reconstitution, on obtient donc deux images, l'une réelle, l'autre virtuelle, symétriques par rapport à la direction de reconstitution.

En conclusion, on remarque que l'enregistrement holographique permet de reconstituer une onde identique en tout point (phase et amplitude) à l'onde objet.

4-1-4 Particularité de l'enregistrement holographique

La possibilité de reproduire une onde $A_0 \exp(j \varphi_0)$ qui soit identique à l'onde provenant de l'objet réel lors de l'enregistrement, constitue l'apport fondamental de l'holographie.

Dans le domaine scientifique, cette propriété de l'holographie très riche d'applications permet l'étude de phénomènes instables; un hologramme restituant à loisir toutes les caractéristiques spatiales de l'objet à l'instant le plus intéressant.

Ceci autorise, en outre, la mise en œuvre sans limitations de temps des différents moyens optiques d'investigation.

Soit P_0 au temps t_0 et P_1 au temps t_1 , deux états voisins d'un même objet, P_0 et P_1 différant par une variation de position ou de forme. Si nous superposons à l'enregistrement de P_0 , effectué selon le processus décrit, un deuxième enregistrement concernant P_1 , tous les paramètres du montage optique demeurant inchangés, nous obtenons, lors de la restitution, une superposition des ondes objet $a_0 \exp(j \varphi_0)$ et $a_1 \exp(j \varphi_1)$ relatives à P_0 et P_1 . La variation d'état étant supposée d'amplitude faible, ces deux ondes très peu différentes donnent lieu à des phénomènes d'interférences. Les franges observées décrivent la variation d'état subie par l'objet entre t_0 et t_1 .

Cette méthode permet de faire interférer deux ondes non contemporaines et par la suite d'étudier les perturbations de faible amplitude d'un objet.

L'interférométrie holographique permet de comparer deux états successifs d'un même objet. Il s'agit d'une interférométrie à deux ondes par division d'amplitude grâce à une "séparation de temps"; le facteur de cohérence mutuel reste égal à l'unité car il est imposé par l'onde de restitution.

Les techniques d'exposition:

- La double exposition statique. Dans ce cas, les ondes qui interfèrent proviennent du même hologramme et correspondent à deux positions différentes de l'objet. Cette technique permet d'étudier l'évolution d'ensemble de l'objet entre deux instants t_1 et t_2 . Pendant la durée de chaque exposition, l'objet doit rester immobile. Le laser peut fonctionner, soit en continu, soit en impulsions (la durée de l'impulsion est alors égale à la durée d'exposition de la plaque);

- L'interférométrie en temps réel. Dans ce cas, l'interférence se produit entre l'onde restituée par l'hologramme et l'onde issue de l'objet lui-même. Elle peut poser de délicats problèmes de remise en place de l'hologramme après développement, vu l'ordre de grandeur des déplacements des deux ondes. La meilleure technique consiste à effectuer le développement "in situ" grâce à un dispositif adéquat. L'évolution temporelle de l'objet peut être contrôlée par l'observation de franges en temps réel. L'émission du laser est continue.

L'interférométrie en temps réel permet un contrôle précis des intensités des faisceaux objet et de référence. Le développement in situ est dès lors maîtrisé et l'utilisation d'une caméra C.C.D. (*coupled charge device*) permet de suivre et de traiter l'évolution en temps réel.

4-2 Interféromètre holographique pour l'étude des milieux transparents. Description du montage.

Après avoir étudié les propriétés des enregistrements et des interférogrammes holographiques, nous allons, dans ce paragraphe, montrer ce que l'on peut attendre des interférogrammes et étudier la géométrie d'un interféromètre, afin d'obtenir des enregistrements facilement exploitables.

Les interféromètres à deux faisceaux sont les appareils les plus adéquats pour effectuer des mesures dans les milieux transparents. Il s'agit de mettre en évidence la différence de phase entre un faisceau test et un faisceau de référence. Celle-ci peut être obtenue par divers facteurs créant une variation de l'indice de réfraction du milieu (élévation de température, contrainte, variation de pression, etc...) ou bien par une différence de marche dans le chemin optique d'un des deux faisceaux.

L'interféromètre développé au Laboratoire de Physique Appliquée de l'Université de Perpignan [30] peut être manipulé par des opérateurs non expérimentés dans le maniement des appareils optiques de précision.

4-2-1 Schéma optique et principe de fonctionnement

Le schéma de principe du banc d'holographie est représenté sur la figure (4-7).

Pour réaliser les hologrammes, le montage de base utilisé comporte les principaux éléments suivants:

* Éléments optiques :

- un laser He - Ne (6328 Å, 35 mW) dont la puissance et la cohérence spatiale et temporelle sont suffisantes pour les études envisagées.

- une lame séparatrice Sp qui, par division d'amplitude du front de l'onde émise par le laser permet d'obtenir les ondes d'étude et de référence.

- deux miroirs M1 et M2 qui permettent de réaliser l'égalité des trajets des deux ondes ou rendent au moins leur différence inférieure à la longueur de cohérence du laser.

- deux dispositifs atténuateurs constitués par une lame $\lambda/2$ associée à un polariseur permettent de régler la valeur du rapport entre les intensités des deux ondes d'étude et de référence.

- deux ensembles agrandisseurs de faisceau équipés de filtres spatiaux pour obtenir des ondes planes pour le faisceau d'étude, dont l'amplitude est aussi uniforme que possible sur l'ensemble de la surface d'onde utilisée.

- une caméra C.C.D. permet de réaliser l'acquisition de l'interférogramme. Elle fournit une représentation analogique de l'image suivant une matrice 512 x 512 pixels (éléments d'image). Les données sont transmises d'une part à un moniteur vidéo, ce qui permet de visualiser la figure d'interférence pour une analyse qualitative et d'autre part à un micro-ordinateur qui analyse quantitativement la figure d'interférence grâce à une carte de digitalisation d'images.

* Éléments mécaniques:

- l'obturateur est un élément indispensable car il permet de régler la durée d'exposition de la plaque holographique. En général, on utilise un obturateur électromécanique.

- les éléments optiques à partir de la lame séparatrice comprise doivent être placés sur un support rigide afin d'assurer la stabilité de l'ensemble qui doit être isolé des vibrations extérieures par un système anti-vibratoire approprié ("silent bloc").

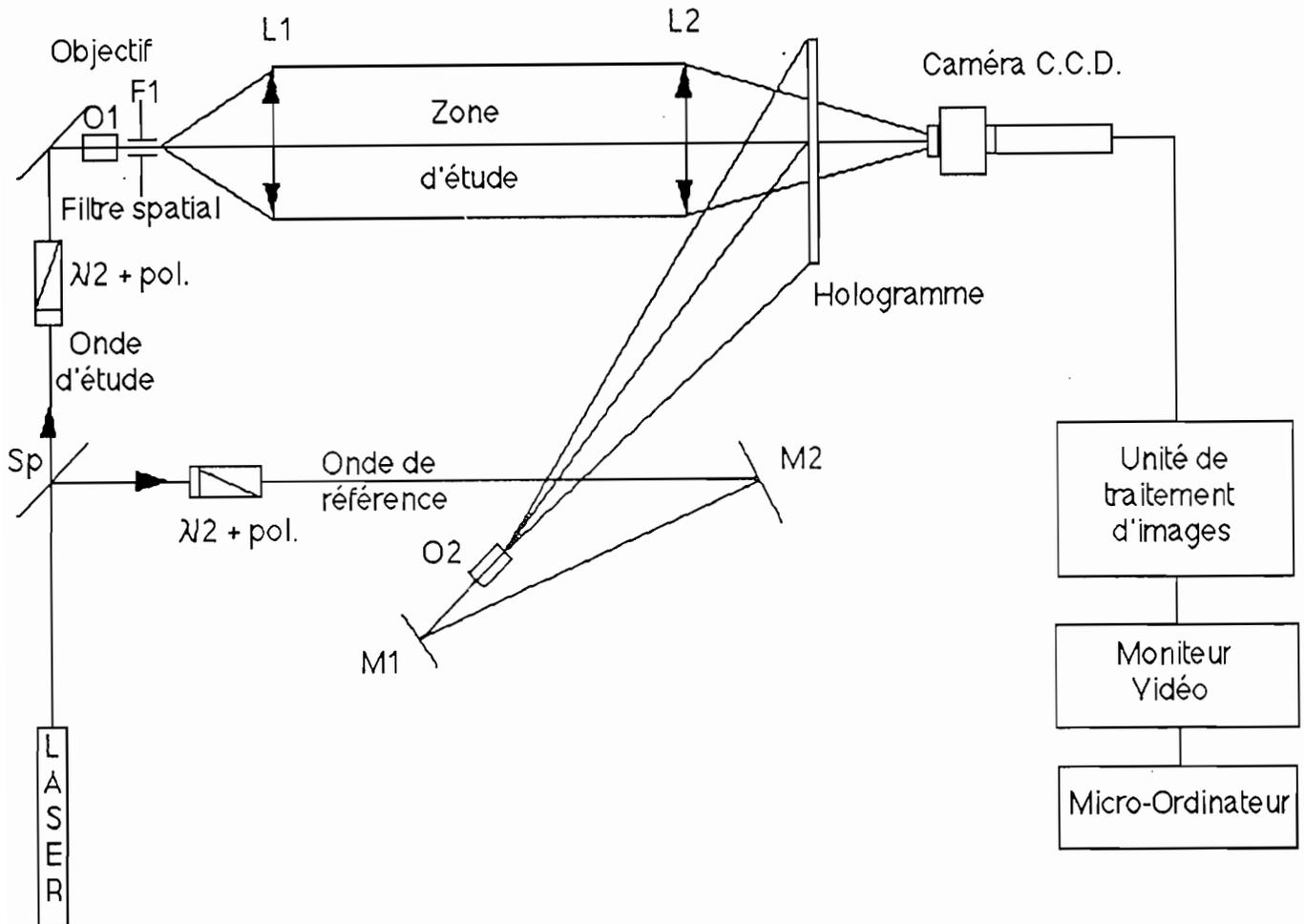


Figure 4-7: Banc d'interférométrie holographique pour l'étude de milieux optiquement transparents

Description des trajets optiques

Le faisceau lumineux est séparé en deux ondes par division d'amplitude à l'aide de la séparatrice SP. Les trajets des deux faisceaux ainsi obtenus sont rendus si possible égaux par le jeu des miroirs M1 et M2.

Le faisceau transmis par Sp constitue le trajet d'étude. Il traverse un atténuateur variable de précision, constitué par une lame $\lambda/2$ suivie d'un polariseur. Ce dispositif permet par rotation de la lame $\lambda/2$ d'ajuster l'intensité du faisceau d'étude sans introduire de perturbation ou de défauts dans le plan d'onde. Après réflexion sur le miroir M1, un objectif O1 et une lentille L1, constituant un doublet afocal donnent une onde plane qui traverse le volume d'étude. Cette onde d'étude est ensuite reprise par une lentille L2 et éclaire la plaque holographique.

L'onde de référence est obtenue par réflexion sur Sp. Elle traverse un dispositif atténuateur puis, après réflexion sur M2 et passage à travers le doublet afocal O2 L2, l'onde plane ainsi construite illumine la plaque holographique H. Cette plaque holographique est placée sur un support permettant d'effectuer le traitement chimique "in situ", ce qui permet de réaliser l'interférométrie en temps réel

Description de la zone d'étude

Sur la plaque holographique H sont enregistrées les franges d'interférences dues à la superposition dans son plan, des ondes cohérentes de référence et d'étude. Ceci constitue l'hologramme H. On peut naturellement employer ici les deux techniques déjà citées de double exposition et d'observation en temps différé, ou d'observation en temps réel.

La lentille L1 placée sur le faisceau objet est montée sur deux platines à translation micrométrique permettant de rajouter une différence de marche supplémentaire. Ceci permet de compenser les retards résiduels qui peuvent subvenir lors de l'enregistrement de l'hologramme de référence et de se placer ainsi en teinte plate. D'autre part, ces déplacements permettent d'introduire un retard supplémentaire donc des franges, appelées franges de fond, qui peuvent être utiles pour l'exploitation quantitative des interférogrammes.

Dans ce travail, nous nous limiterons à l'étude en teinte plate qui permet de visualiser et de suivre en temps réel les isothermes qui se développent dans le milieu, comme nous le montrons ci-après.

4-2-2 Cas des milieux présentant une symétrie longitudinale

L'étude de ce type de milieu est plus simple tant du point de vue expérimental que du traitement mathématique des données.

La zone d'étude est directement éclairée par une onde plane. Ce système qui permet d'avoir des durées d'exposition brèves, présente d'autres avantages, telles la diminution du "speckle" cohérent et l'amélioration de la résolution au niveau de l'exploitation de l'interférogramme.

Ainsi le montage présenté (fig.4-7) permet avec des plaques holographiques de sensibilité $5 \mu\text{J}/\text{cm}^2$ de récupérer environ 60% de l'énergie émise par le laser. Pour un laser de 35 mW, la durée d'exposition doit être d'environ un centième de seconde.

Le laser couramment utilisé dans ce type de montage est le modèle 124B de Spectra Physics de puissance 35 mW et de longueur d'onde 6328 \AA . Les plaques photographiques sont du type haute résolution Agfa Gevaert 107E75 ou Kodak 131.01.

Ce montage permet le développement de l'hologramme "in situ" pour rendre possible les expériences en temps réel.

Soulignons enfin l'importance des lentilles L1 et L2 qui figurent sur ce montage. En effet L1 qui est mobile suivant trois déplacements micrométriques permet d'une part, de corriger d'éventuels décalages de l'onde objet pour améliorer la précision du traitement des interférogrammes et d'autre part d'introduire les réseaux de franges de fond nécessaires aux exploitations quantitatives de précision. La lentille L2 sert à collimater le faisceau sur la plaque holographique dans un cercle d'environ 50 millimètres de diamètre et à éliminer tous les rayons parasites autres que ceux qui se propagent dans une direction parallèle à la direction d'éclairement. L'image du plan sur lequel apparaissent les franges d'interférence est observée à l'aide d'une optique adaptée associée soit à un boîtier photo soit à une caméra C.C.D.

On peut éviter les difficultés dues à l'utilisation d'une onde plane dirigée en plaçant un dépoli juste avant la lentille. Ainsi on réalise facilement l'hologramme (chaque point de la surface de l'hologramme contient une information provenant de l'ensemble de l'objet) et l'éclairement est parfaitement uniforme. L'inconvénient est que le grain du dépoli crée un speckle qui diminue la visibilité des franges d'interférence. Ainsi donc en fonction de l'environnement et la qualité exigée pour les interférogrammes, on choisira entre les deux dispositifs.

Conclusion:

Nous venons rapidement d'exposer les grandes lignes du principe de la méthode utilisée pour mesurer les variations de densité dans un milieu gazeux. Nous appliquerons cette méthode à l'étude des distributions de température dans notre enceinte annulaire.

4-3 Mesures des températures

4-3-1 Description de la cellule expérimentale (photographie 1 et figures 4-8 et 4-9)

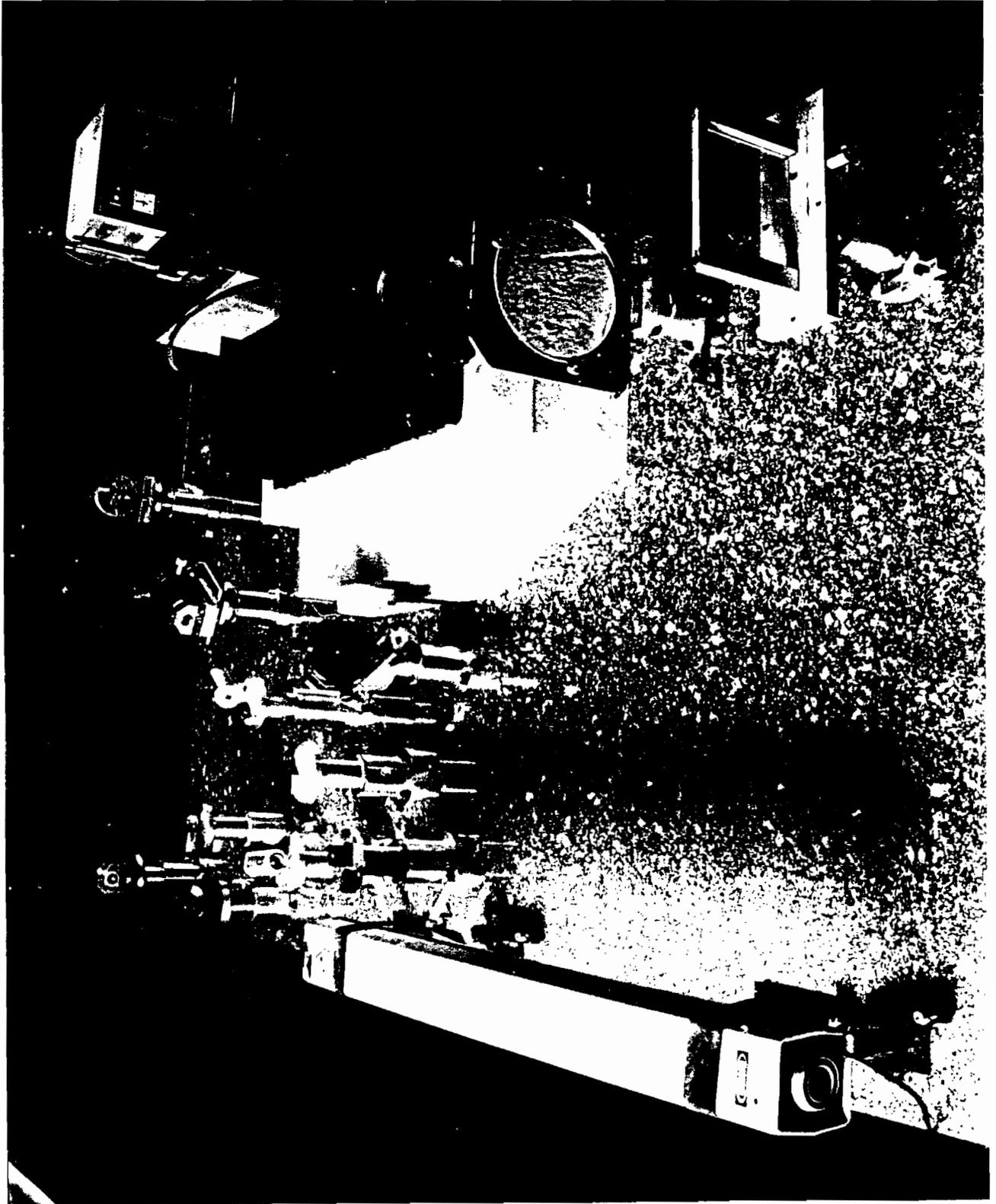
La cellule expérimentale est composée des principaux éléments suivants :

- Un tube cylindrique en cuivre de 5,4 centimètres de diamètre à l'intérieur duquel est placée une résistance chauffante bobinée et en contact avec la paroi interne du cylindre. Le contact est assuré par une graisse thermique.

- Une paroi semi-cylindrique en cuivre de 10,5 centimètres de diamètre maintenue isotherme à l'aide de la pompe de circulation d'eau d'une cuve thermostatique régulant à environ un dixième de degré.

- Un bloc d'isolation thermique en mousse de polystyrène Styrodur.

La longueur de la cellule est de 50 centimètres. Nous considérons que cette longueur est suffisamment grande, ce qui permettra par la suite de négliger les effets de bout qui se produisent sur environ deux centimètres (retard supplémentaire d'environ une frange sur 2 cm, voir page136).



Photographie 1: Vue d'ensemble du banc d'interférométrie et de la cellule expérimentale

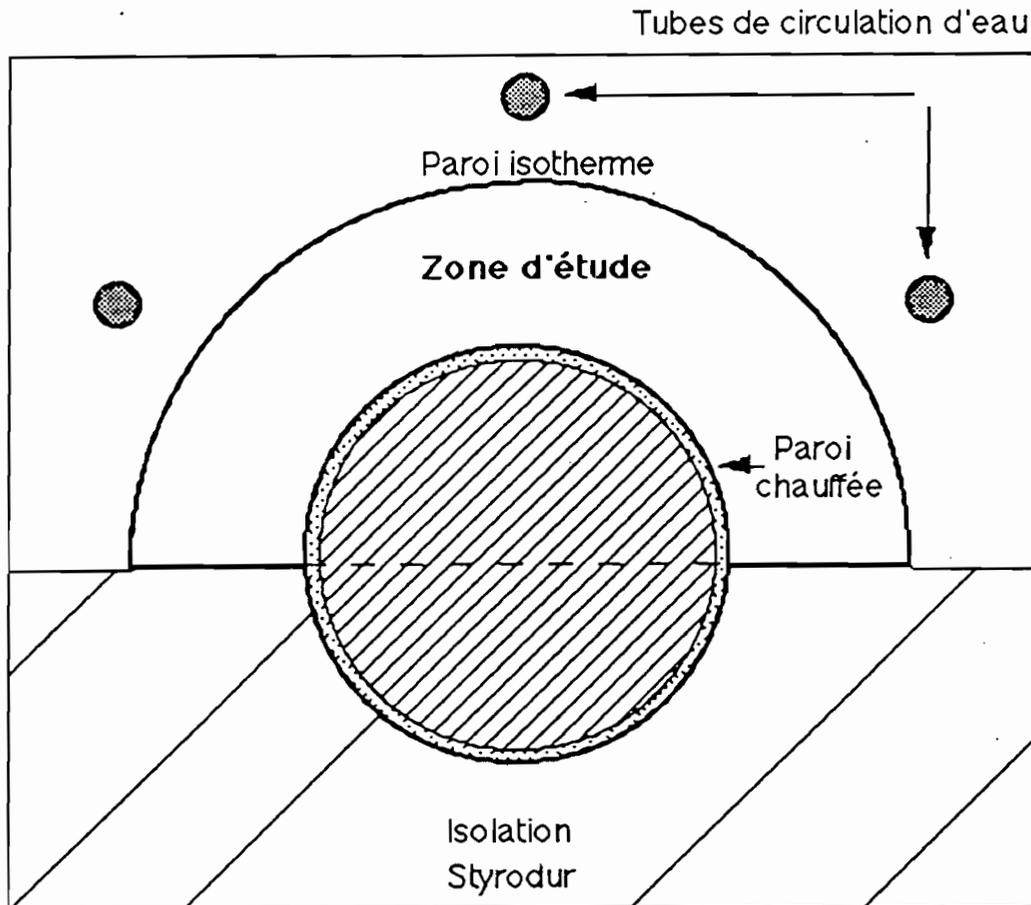


Figure 4-8 : Coupe transversale de la cellule expérimentale

Les appareils de mesures et de régulation utilisés sont :

- un enregistreur numérique-analogique Philips de 30 voies PM8237A/02
- une résistance Thermocoax 1 Nc Ac 10 de 10 mètres de long
- un régulateur de température Lauda K4R muni d'une pompe de circulation
- cinq thermocouples de type Chromel-Alumel pour la mesure des températures de référence
- un régulateur de tension permettant de faire varier la puissance électrique dissipée par la résistance chauffante.

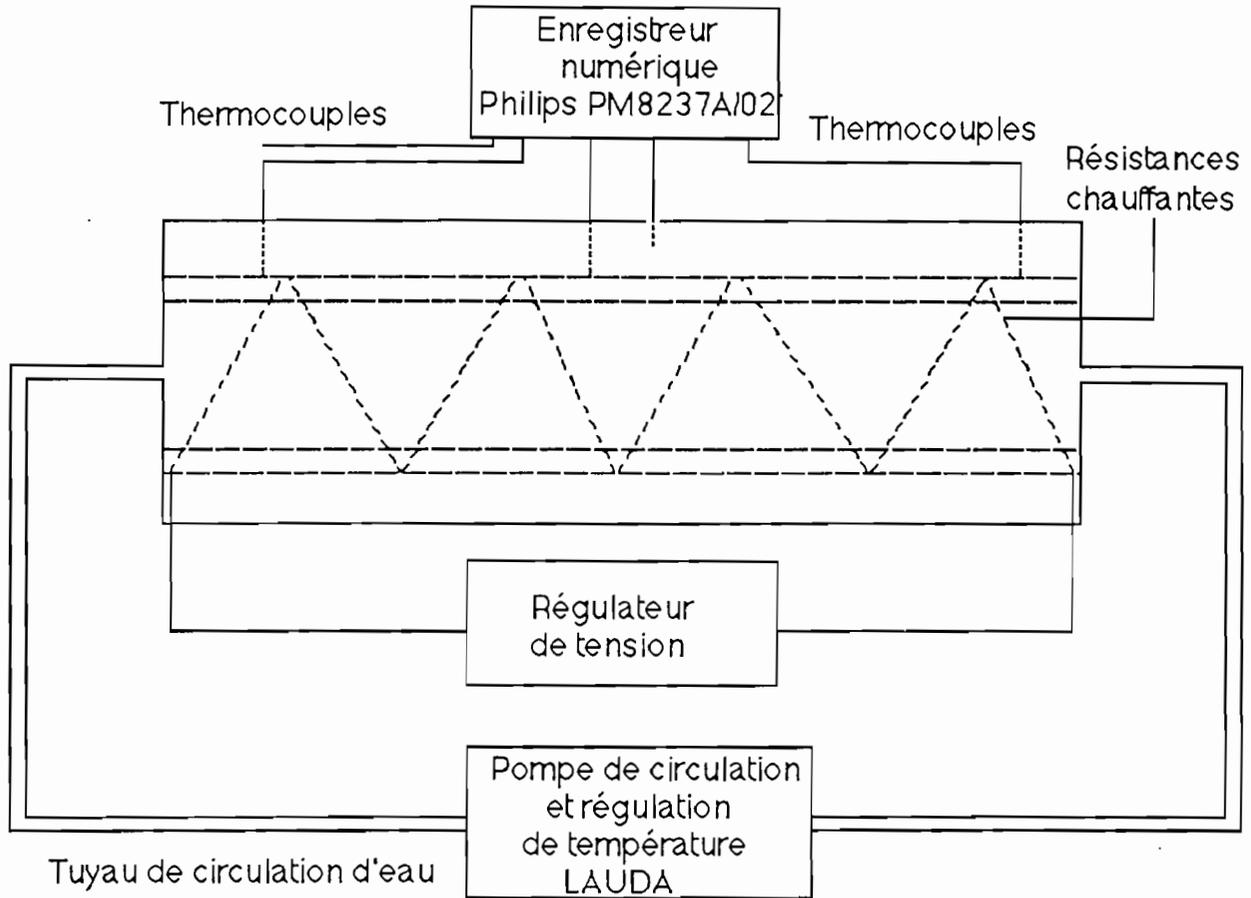


Figure 4-9 : Schéma de détail des connexions de mesures et de régulation

4-3-2 Calcul de la différence de marche due aux phénomènes thermiques

La technique employée (double exposition ou temps réel) n'affecte en rien le traitement de l'interférogramme. Les franges observées rendent compte des isothermes du milieu à étudier.

La méthode d'interférométrie met en évidence, dans un milieu d'épaisseur e et d'indice de réfraction n , des variations du chemin optique $L = n e$. Une modification ΔL du chemin optique peut être créée par des modifications d'indice du milieu et des modifications d'épaisseur. De façon générale, on peut écrire :

$$\Delta L = \Delta n e + n \Delta e \quad (4-20)$$

Dans notre cas, les dimensions de la zone d'étude sont fixées et donc $\Delta e = 0$. En fait, il faut tenir compte ici des effets thermiques qui apparaissent aux extrémités: les effets de bout. Compte tenu de la dimension longitudinale de notre maquette d'étude, ces effets, comme nous le montrerons expérimentalement, sont négligeables. Ainsi, seules les variations d'indice du milieu provoquent la formation des franges d'interférences.

Le dépouillement de l'interférogramme permet de déterminer la valeur de l'indice de réfraction n en tout point du milieu. La variation d'indice entre deux franges brillantes ou sombres est donnée par la relation:

$$\Delta n = \frac{\lambda}{e} \quad (4-21)$$

Connaissant la loi de variation de l'indice de réfraction du milieu en fonction de la température, on peut utiliser cette méthode pour déterminer le champ de température dans le milieu étudié.

La loi de Gladstone peut s'écrire au premier ordre :

$$\frac{n_0 - 1}{n_t - 1} = 1 + \alpha t \quad (4-22)$$

t étant exprimé en degré C, n_0 et n_t représentent les valeurs de l'indice de l'air respectivement à 0° et à t° C sous la pression atmosphérique normale, et $\alpha = 3,678 \cdot 10^{-3}$.

Entre les deux états (milieu à la température ambiante puis application du gradient), la différence de marche est :

$$\Delta L = \delta = (n_t - n_{t'}) e = (n_{amb} - n_{t'}) e > 0 \quad (4-23)$$

En un point M quelconque, on peut écrire : $\delta = m \lambda$, avec $m > 0$, ainsi :

$$\delta = e \left(\frac{n_0 - 1}{1 + \alpha t} - \frac{n_0 - 1}{1 + \alpha t'} \right) = m \lambda \quad (4-24)$$

$$\delta = e (n_0 - 1) \frac{\alpha (t' - t)}{(1 + \alpha t) (1 + \alpha t')} \quad (4-25)$$

En posant : $t' - t = t' - t_{amb} = \Delta t$, il vient :

$$\frac{m \lambda}{e (n_0 - 1)} = \frac{\alpha \Delta t}{1 + \alpha^2 t \Delta t + \alpha^2 t^2 + \alpha \Delta t + 2 \alpha t} \quad (4-26)$$

d'où l'écart de température:

$$\Delta t = \frac{m \lambda}{\alpha} \frac{(1 + \alpha t)^2}{e (n_0 - 1) - m \lambda (1 + \alpha t)} \quad (4-27)$$

Les franges d'interférence traduisent le lieu des points d'égale différence de marche et le passage d'une frange à la suivante correspond à une variation du chemin optique égale à une longueur d'onde.

Cependant d'après l'expression de Δt , il n'en est pas de même en ce qui concerne l'écart de température qui existe entre deux franges. Cet écart est fonction de l'ordre m de la frange observée. Les mesures sont faites aux sommets des franges. S'il n'y a pas suffisamment de franges, on peut augmenter leur nombre en introduisant les franges de fond. Il est, en effet, important d'avoir un grand nombre de mesures pour améliorer la précision du traitement par la méthode de la transformée de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform* : F.F.T.).

On peut conclure ce paragraphe en écrivant que les franges rendent bien compte des isothermes $\Delta t = \text{constante}$ pour $m = \text{constante}$ en remarquant que l'écart de température qui sépare deux franges dépend de leur ordre.

Ainsi entre $m=0$ et $m=1$, on a, d'après la relation (4-27) :

$$\Delta t = \frac{1 \times 6328 \cdot 10^{-10}}{3,678 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{(1 + 3,678 \cdot 10^{-3} \times 22,31)^2}{0,5 \times 2,9123 \cdot 10^{-4} - 1 \times 6328 \cdot 10^{-10} (1 + 3,678 \cdot 10^{-3} \times 22,31)} \right) \approx 1,39 \text{ } ^\circ\text{C}$$

avec :

$$e = 0,5 \text{ m}$$

$$\lambda = 6328 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$n_0 - 1 = 2,9123 \cdot 10^{-4}$$

$$t = 22,31 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Une exploitation quantitative de l'interférogramme par F.F.T. permet de remonter au dixième de frange.

Sur le tableau 4-1, nous présentons les écarts de température entre deux franges quelconques, en fonction de leur ordre et pour une température ambiante moyenne $t_{\text{amb}} = 22,31 \text{ } ^\circ\text{C}$. Un ordre entier se rapporte à une frange brillante sur l'interférogramme, une frange sombre correspond à un ordre entier + 1/2. Le tableau 4-1 permet donc de connaître la température sur les franges des interférogrammes; chaque frange correspond à une isotherme. D'après la formule (4-23), l'ordre est positif et croît lorsque la température s'élève.

Pour chaque interférogramme, on indique la position de l'ordre un, l'ordre croissant vers le centre de la figure. Il est alors aisé d'établir la comparaison avec les courbes théoriques obtenues précédemment.

m	Δt (°C)	Ecart entre deux franges (°C)
0,0	0,00	
0,5	0,69	0,69
1,0	1,39	0,70
1,5	2,09	0,70
2,0	2,79	0,70
2,5	3,50	0,71
3,0	4,21	0,71
3,5	4,92	0,71
4,0	5,64	0,72
4,5	6,36	0,72
5,0	7,08	0,72
5,5	7,81	0,73
6,0	8,54	0,73
6,5	9,28	0,73
7,0	10,01	0,74
7,5	10,75	0,74
8,0	11,50	0,75
8,5	12,25	0,75
9,0	13,00	0,75
9,5	13,76	0,76
10,0	14,52	0,76
10,5	15,28	0,76
11,0	16,05	0,77
11,5	16,82	0,77
12,0	17,59	0,77
12,5	18,37	0,78
13,0	19,16	0,78
13,5	19,94	0,79
14,0	20,73	0,79
14,5	21,53	0,79
15,0	22,33	0,80
15,5	23,13	0,80
16,0	23,94	0,81
16,5	24,75	0,81
17,0	25,56	0,82
17,5	26,38	0,82
18,0	27,20	0,82
18,5	28,03	0,83
19,0	28,86	0,83
19,5	29,70	0,84

Tableau 4-1: Ecart de température entre franges pour $t_{\text{amb}} = 22,31 \text{ °C}$

4-4 Traitement et saisie des données

L'image analogique est filmée en noir et blanc par la caméra C.C.D. Elle est traitée grâce à une carte MATROX qui permet de convertir une image analogique en une image numérique, de la garder en mémoire et de la restituer sur un moniteur après reconversion analogique. Cette carte est donc un convertisseur analogique-numérique et numérique-analogique.

L'image numérisée correspond à une matrice carrée de 512 x 512 points prenant des valeurs de 0 (noir) à 255 (blanc) suivant l'intensité d'éclairement du point de l'image analogique correspondante.

Un traitement numérique par F.F.T. des interférogrammes permettrait de tracer la carte des isothermes avec une précision de 0,139 °C.

4-5 Résultats expérimentaux et commentaires

Toutes les expériences ont été réalisées sur la configuration semi-annulaire décrite précédemment. Nous montrons, dans ce paragraphe, l'évolution du régime transitoire et l'établissement du régime établi pour différents flux imposés sur la paroi cylindrique intérieure.

4-5-1 Visualisation du régime transitoire (photographies N° 2 à 19)

temps (mn)	t_2 (° C)	$\overline{t(1,0)}$ (° C)	t_{amb} (° C)	Photographie N°
04	21,6	25,4	22,7	2
11	21,7	26,6	22,4	3
19	21,7	27,9	22,6	4
25	21,7	28,3	22,7	5
40	21,7	29,4	22,5	6
53	21,5	29,7	23,0	7

Tableau 4-2 : Evolution des températures pour un flux $q_1 = 37,2 \text{ W/m}^2$ et $\kappa = 0^\circ$

κ est l'angle d'inclinaison de la cellule par rapport au plan horizontal

t_2 est la température de la paroi cylindrique isotherme

t_{amb} est la température ambiante

$\overline{t(1,0)}$ est la température moyenne sur la ligne de contact entre l'isolant et la paroi cylindrique intérieure.

temps (mn)	t2 (° C)	$\overline{t(1,0)}$ (° C)	t _{amb} (° C)	Photographie N°
06	21,4	24,8	21,9	8
11	21,1	26,5	21,7	9
16	21,2	28,0	21,9	10
22	21,1	29,4	21,8	11
36	21,1	31,2	21,2	12
37	21,1	31,3	21,4	13

Tableau 4-3 : Evolution des températures pour un flux $q_1 = 65,4 \text{ W/m}^2$ et $\kappa = 0^\circ$

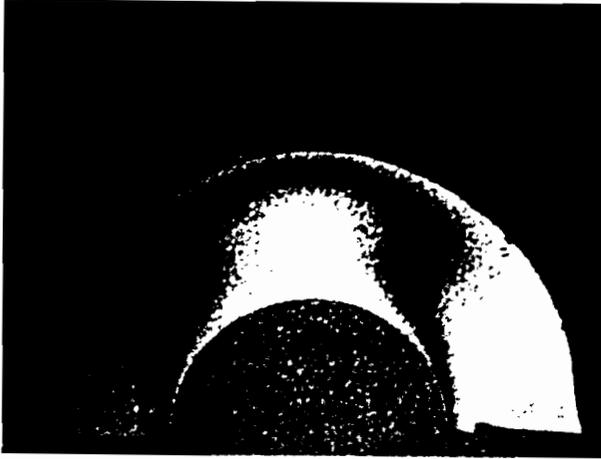
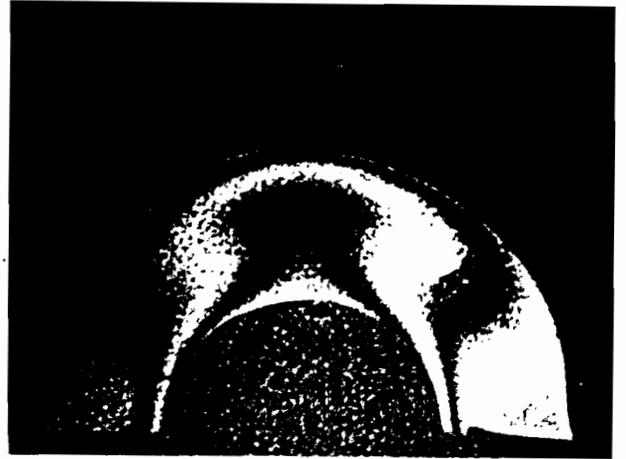
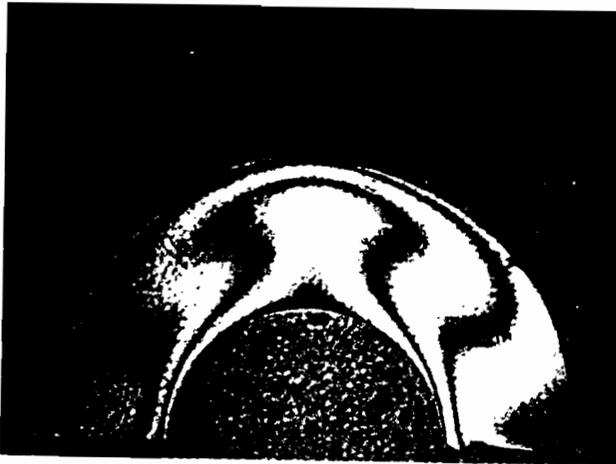
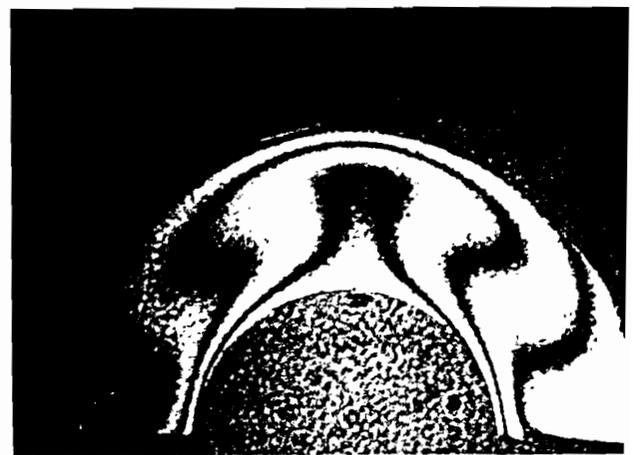
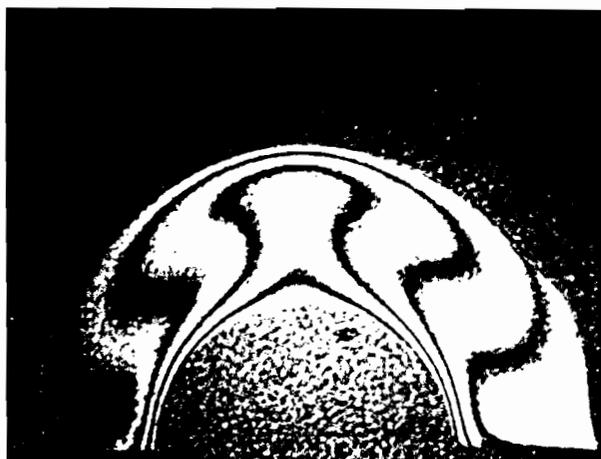
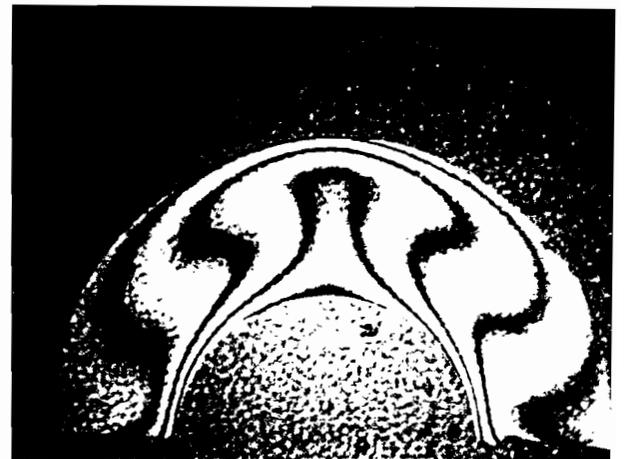
temps (mn)	t2 (° C)	$\overline{t(1,0)}$ (° C)	t _{amb} (° C)	Photographie N°
03	21,3	26,2	22,5	14
06	21,3	28,3	22,8	15
09	21,3	30,9	22,5	16
15	21,3	34,6	22,6	17
20	21,2	37,7	22,5	18
104	21,3	45,8	22,7	19

Tableau 4-4 : Evolution des températures pour un flux $q_1 = 145,2 \text{ W/m}^2$ et $\kappa = 0^\circ$

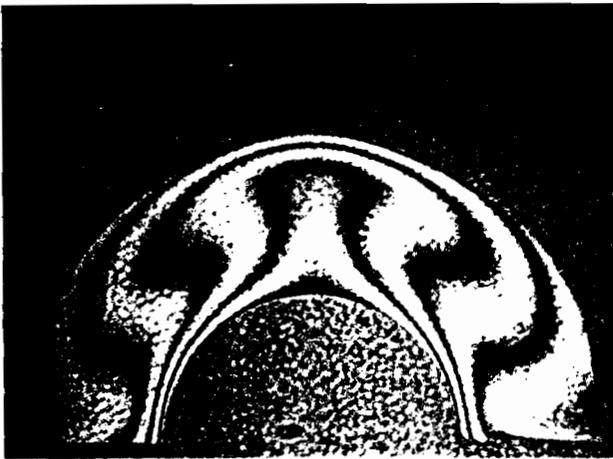
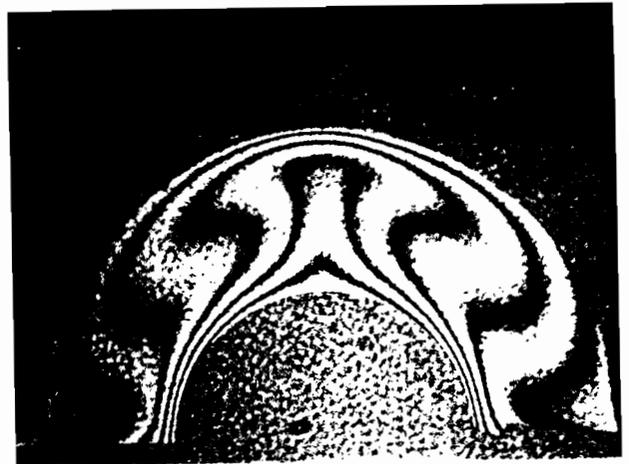
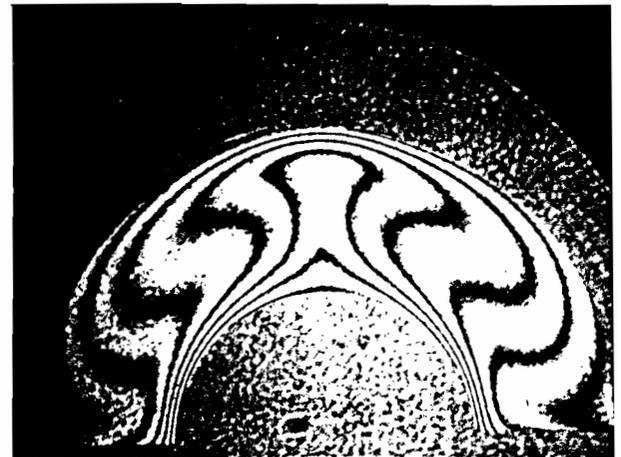
Sur les différentes photographies, on constate que les isothermes présentent une symétrie. Il est à noter que le nombre d'isothermes observables augmente avec l'écart de température entre les deux parois actives et donc avec le flux imposé sur la paroi cylindrique intérieure.

En début d'expérience, le mouvement initié est très faible et il est presque impossible de visualiser les lignes isothermes.

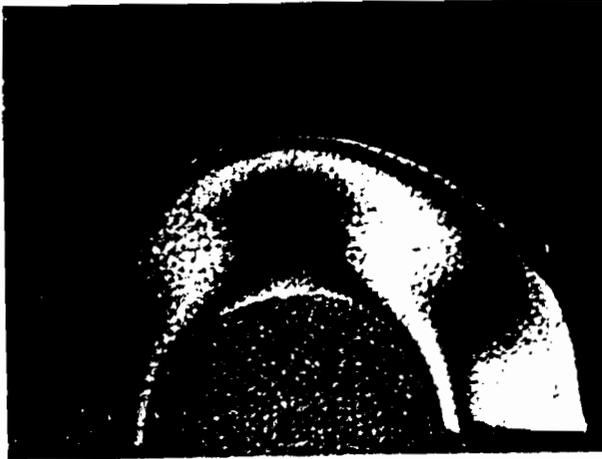
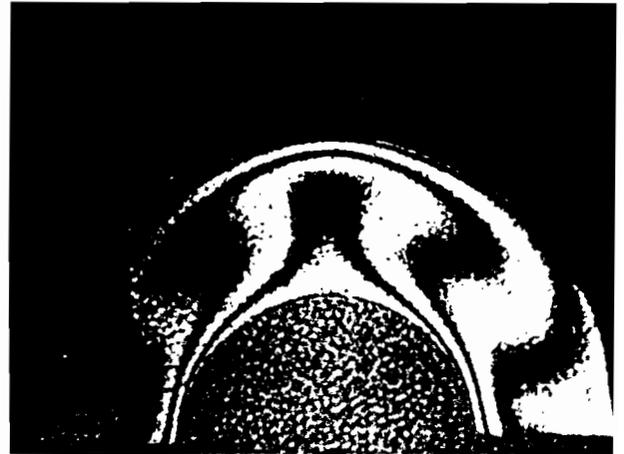
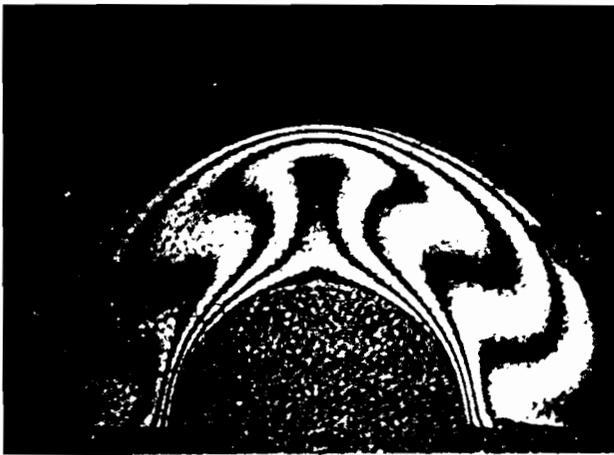
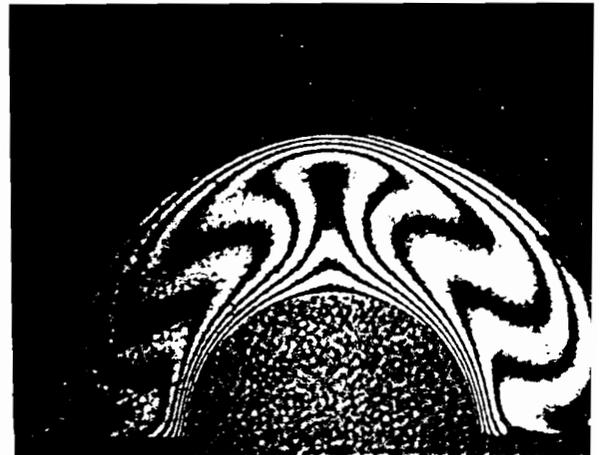
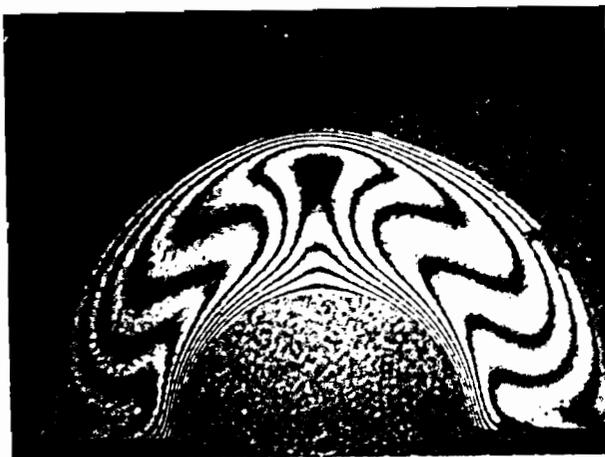
De ces photographies, on déduit que, pour les différents cas étudiés, le mouvement est toujours représenté par deux écoulements symétriques, conformément à l'étude théorique développée dans les chapitres précédents.

Photographie 2 : $t = 4$ mnPhotographie 3 : $t = 11$ mnPhotographie 4 : $t = 19$ mnPhotographie 5 : $t = 25$ mnPhotographie 6 : $t = 40$ mnPhotographie 7 : $t = 53$ mn

Evolution des isothermes pour $q_1 = 37,2 \text{ W/m}^2$ et $\kappa = 0^\circ$

Photographie 8 : $t = 6$ mnPhotographie 9 : $t = 11$ mnPhotographie 10 : $t = 16$ mnPhotographie 11 : $t = 22$ mnPhotographie 12 : $t = 36$ mnPhotographie 13 : $t = 50$ mn

Evolution des isothermes pour $q_1 = 65,4 \text{ W/m}^2$ et $\kappa = 0^\circ$

Photographie 14 : $t = 3$ mnPhotographie 15 : $t = 6$ mnPhotographie 16 : $t = 9$ mnPhotographie 17 : $t = 15$ mnPhotographie 18 : $t = 20$ mnPhotographie 19 : $t = 104$ mn

Evolution des isothermes pour $q_1 = 145,2$ W/m² et $\kappa = 0^\circ$

4-5-2 Visualisation du régime permanent

Pour l'étude du régime permanent, nous avons effectué une deuxième série d'expérimentations. Les conditions initiales et ambiantes n'étant pas rigoureusement les mêmes que pour l'étude du régime transitoire, on note quelques légères déviations.

q_1 (W/m ²)	κ (degrés)	t_2 (° C)	$\overline{t(1,0)}$ (° C)	t_{amb} (° C)	Photographie N°
18,1	0	21,3	24,3	21,9	20
37,2	0	21,5	28,1	22,3	21
50,9	0	21,4	30,7	22,4	22
65,4	0	21,3	33,7	22,4	23
65,4	45	21,1	33,8	22,7	24
65,4	60	21,2	33,6	22,3	25

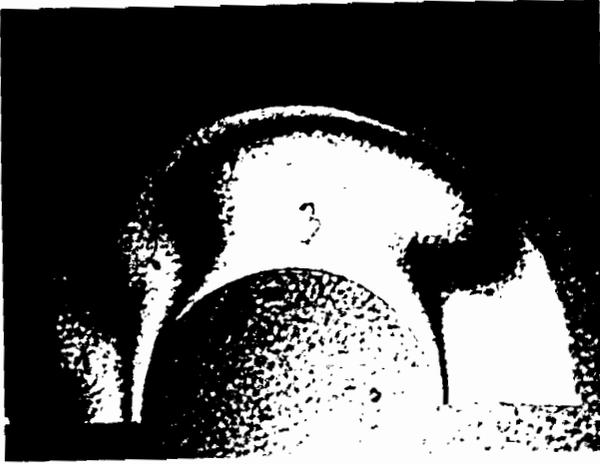
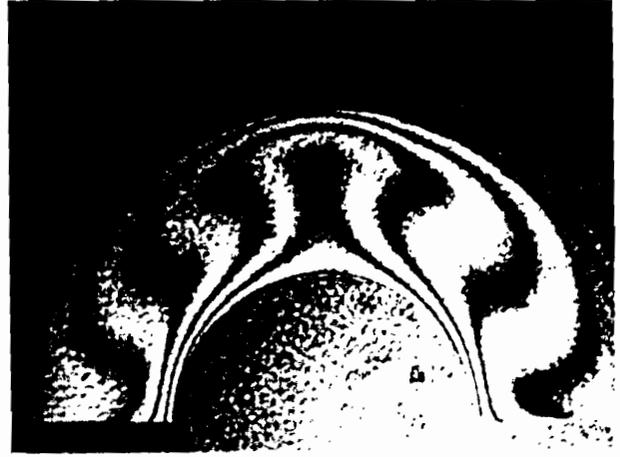
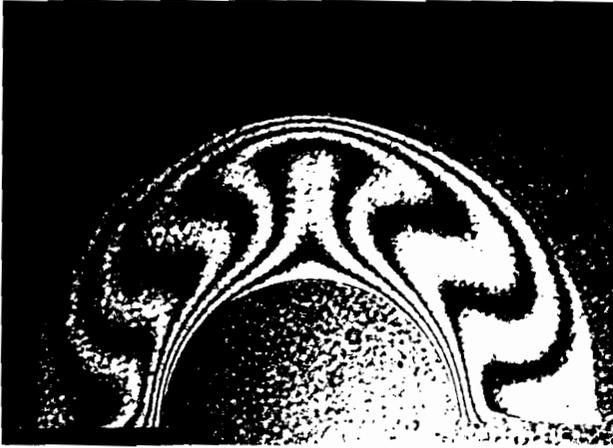
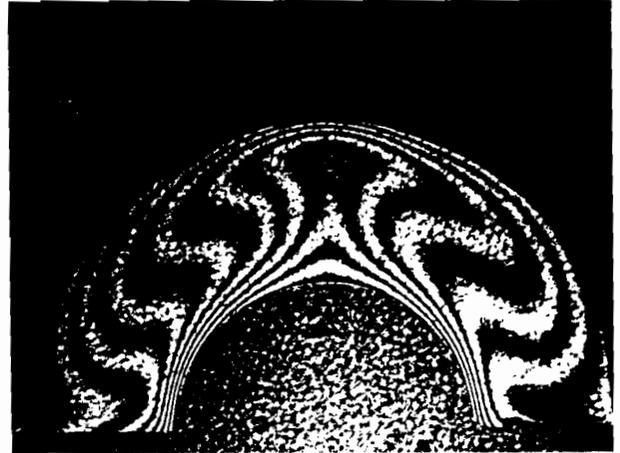
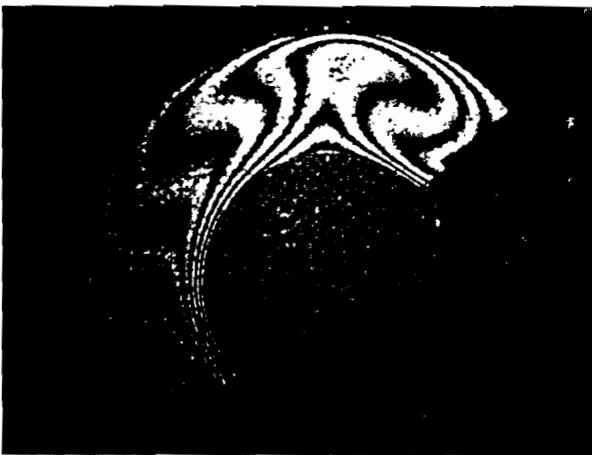
Tableau 4-5 : Valeurs des températures en régime établi

Sur les photographies 20 à 23, nous présentons les lignes isothermes, en régime établi, dans le cas de configurations symétriques et pour différents flux. Nous constatons que la symétrie de l'écoulement est relativement respectée sauf pour la photographie 20 qui correspond à un flux assez faible. Cela s'explique par le fait que, quand le flux est relativement faible, les écoulements engendrés ont des vitesses absolues très petites et sont ainsi sensibles aux conditions ambiantes perturbatrices (courants d'air, mouvements, etc...).

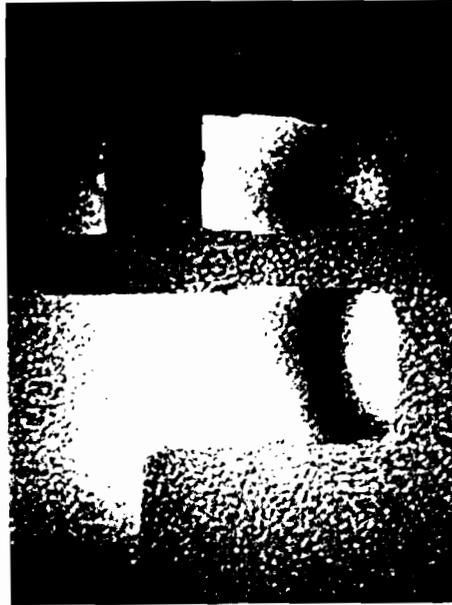
Sur les photographies 24 et 25, nous montrons les lignes isothermes correspondant à des enceintes inclinées respectivement de 45° et de 60° par rapport au plan horizontal. On observe que la symétrie est complètement rompue mais que la ligne de séparation des deux écoulements de base coïncide presque, comme dans le cas symétrique, avec le plan du rayon vertical des deux cylindres.

4-5-3 Effets de bouts

Afin d'étudier les effets de bouts, nous montrons (photographie 26, figure 4-10) l'interférogramme correspondant à $q_1 = 65,4$ W/m² et $\kappa = 0^\circ$, à la sortie de l'enceinte. On constate que, sur les sept franges observées en régime établi, seule une se manifeste hors de l'enceinte sur une distance d'environ un à deux centimètres. Cela nous confirme qu'en régime laminaire, la différence de marche produite par les effets aux extrémités de la zone d'étude sont négligeables.

Photographie 20 : $q_1 = 18,1 \text{ W/m}^2$, $\kappa = 0^\circ$ Photographie 21 : $q_1 = 37,2 \text{ W/m}^2$, $\kappa = 0^\circ$ Photographie 22 : $q_1 = 50,9 \text{ W/m}^2$, $\kappa = 0^\circ$ Photographie 23 : $q_1 = 65,4 \text{ W/m}^2$, $\kappa = 0^\circ$ Photographie 24 : $q_1 = 65,4 \text{ W/m}^2$, $\kappa = 45^\circ$ Photographie 25 : $q_1 = 65,4 \text{ W/m}^2$, $\kappa = 60^\circ$

Visualisation des isothermes au régime permanent pour différents flux



Photographie 26 : $q_1 = 65,4 \text{ W/m}^2$, $\kappa = 0^\circ$

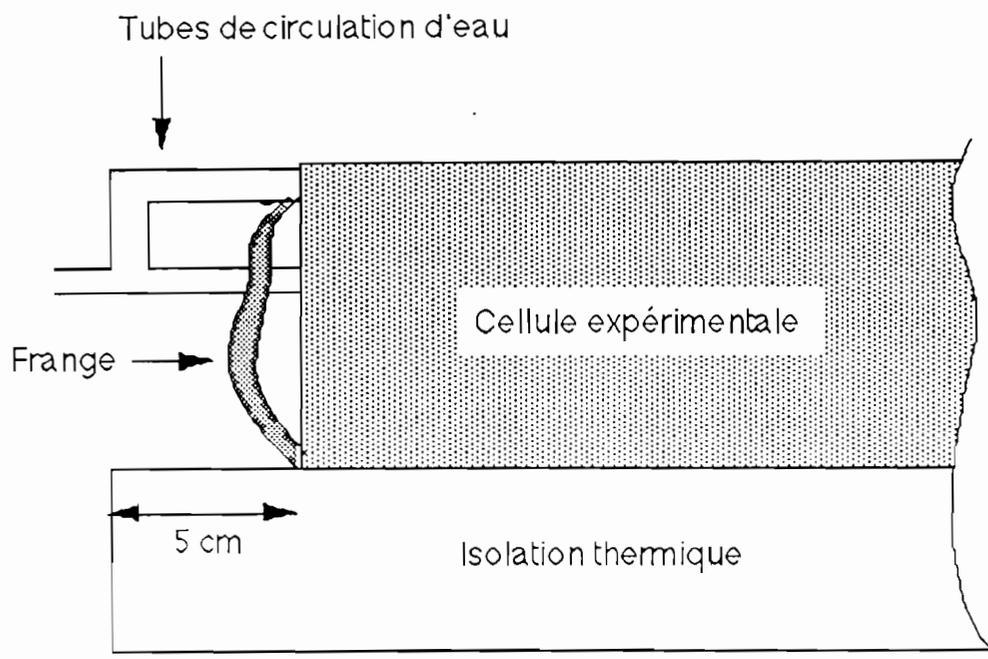


Figure 4-10 : Effets de bouts ($q_1 = 65,4 \text{ W/m}^2$, $\kappa = 0^\circ$)

4-6 Conclusion

Les résultats expérimentaux présentés confirment parfaitement bien tant sur le plan de l'évolution que sur le plan quantitatif les résultats théoriques établis précédemment.

Il reste cependant un important travail à réaliser notamment en ce qui concerne l'évaluation quantitative précise de la distribution des températures à l'intérieur de l'enceinte, en tenant compte des différentes corrections (variation de la température ambiante et effets de bouts) et la mesure des coefficients d'échange sur les parois.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons étudié la convection naturelle bidimensionnelle et laminaire dans une enceinte limitée par deux cylindres concentriques horizontaux et deux plans diamétraux, avec un flux de densité constante appliqué sur le cylindre intérieur, le cylindre extérieur étant maintenu isotherme et les parois latérales adiabatiques.

Nous avons établi un modèle mathématique traduisant les transferts de mouvement au sein du fluide et de chaleur à travers les parois actives de l'enceinte. Ce modèle repose sur l'hypothèse de Boussinesq et sur la bidimensionnalité de l'écoulement.

Nous avons mis au point un programme de calcul numérique, basé sur une méthode aux différences finies, qui permet de déterminer les champs de températures et la distribution de la fonction de courant dans le fluide, ainsi que les nombres adimensionnels de Nusselt locaux et moyens sur les parois actives de l'enceinte, en fonction des grandeurs caractérisant l'état du système.

L'influence du nombre de Grashof modifié et du facteur de forme sur l'évolution de l'écoulement au cours du temps et en régime stationnaire a été notamment examinée. Le transfert de chaleur correspondant à d'autres fluides tels que l'ammoniac-liquide et le dioxyde de carbone-liquide a été étudié et comparé au comportement thermique de l'air.

Les résultats des simulations numériques ont montré les limites du régime laminaire et l'apparition de perturbations au niveau des "coins" inférieurs de l'enceinte, quand on augmente progressivement le flux de chaleur imposé sur la paroi cylindrique intérieure. La conduction est le régime de transfert de chaleur dominant, pour des nombres de Grashof inférieurs à 10^3 , quel que soit le facteur de forme. Pour des nombres de Grashof supérieurs à 10^3 , le rôle de la convection devient prépondérant.

Dans les développements expérimentaux, la méthode d'holographie a permis de mettre en évidence l'évolution des isothermes dans l'enceinte. Celles-ci présentent une similitude parfaite, tant sur le plan de la distribution spatiale que temporelle avec celles obtenues par le calcul, dans les mêmes conditions opératoires et permettent donc de valider l'algorithme développé. Ces résultats confirment en particulier la justesse de l'hypothèse de bidimensionnalité.

Une suite intéressante de ce travail serait de généraliser l'algorithme développé en appliquant d'autres conditions aux frontières de notre enceinte et en effectuant également des simulations théoriques sur des configurations non symétriques. Il serait également souhaitable de poursuivre l'exploitation quantitative des expériences d'interférométrie holographique afin de comparer les coefficients de transfert mesurés aux valeurs calculées.

REFERENCES

1. A. E. Gill , The boundary-layer regime for convection in a rectangular cavity, *J. Fluid Mech.*, **26** (3) , 515-536 (1966).
2. J. O. Wilkes and S. W. Churchill, The Finite-Difference Computation of Natural Convection in a Rectangular Enclosure, *A.I.Ch.E.J.*, **12** (1), 161-166 (1966).
3. M. R. Samuels and S. W. Churchill, Stability of fluid in a rectangular region heated from below, *A.I.Ch.E.J.*, **13** (1) , 77-85 (1967).
4. K.E. Torrance, Comparaison of finite-difference computations of natural convection, *Journal of Research of the National Bureau of Standards-B.Mathematical Sciences*, **72B** (4), October-December, 281-301 (1968).
5. K. Kublbeck, G. P. Merker and J. Straub, Advanced numerical computation of two-dimensional time-dependent free convection in cavities, *Int. J. Heat Mass Transfer* **23**, 203-217 (1980).
6. Z. Y. Zhong, K. T. Yang and J. R. LLOYD , Variable property effects in laminar natural convection in a square cavity, In *ASME Natural Convection in Enclosures* (Edited by I. Catlin and K.E. Torrance), **26**, 69-75 (1983).
7. V. F. Nicolette, K. T. Yang , Transient Cooling by Natural Convection in a two-dimensional Square Enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer.* , **28** (9), 1721-1732 (1985).
8. M. L. Chadwick, B. W. Webb and H. S. Heaton , Natural convection from two-dimensional discrete heat sources in a rectangular enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer.* , **34** (7), 1679-1793 (1991).
9. R. Mack and E. H. Bishop, Natural Convection between horizontal concentric cylinders for low Rayleigh numbers, *Quart. Journ. Mech. and applied Math.*, **21** (2), (1986).
10. T. H. Kuehn and R. J. Goldstein, An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders, *J. Fluid Mech.*, **74**(4), 695-719(1976).
11. T. H. Kuehn and R. J. Goldstein, Correlating equations for natural convection heat transfer between horizontal circular cylinders, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **19** , 1127-1134, Pergamon Press (1976).

12. Y. F. Rao, Y. Miki, K. Fukuda, Y. Tanaka and S. Hasegawa, Flow patterns of natural convection in horizontal cylindrical annuli, *Int. J. Heat Mass Transfer* **28**, .705-714 (1985).
13. M. Lavrentiev, B. Chabat, Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Editions MIR Moscou 1972
14. D. W. Peaceman and H. H. Rachford ,The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* , **3** (1), 28-41 (1955).
15. Kambiz Vafai and Javad Eftefagh, An investigation of transient three-dimensional buoyancy- driven flow and heat transfer in a closed horizontal annulus *Int. J. Heat Mass Transfer* **34** (10), 2555-2570 (1991).
16. B. Carnahan, H. A. Luther and J.O. Wilkes Applied Numerical Methods, Wiley , New-York 1969
17. Adrian Bejan ,Convection Heat Transfer, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons. New-York (1984)
18. David R. Croft, David G. Lilley , Heat transfer Calculations Using Finite Difference Equations, Applied Sciences Publishers LTD , LONDON 1977
19. A. Gourdin, M. Boumahrat, Méthodes Numériques Appliquées, Lavoisier TEC & DOC 1983
20. E. F. Nogotov, Applications of Numerical Heat Transfer, Mc Graw Hill book company, New York,1978.
21. P. J. Roache Computational fluid dynamics, Hermosa, 1982.
22. D. Euvrard , Résolution Numérique des Equations aux Dérivées Partielles, 2° Edition Masson 1990
23. Chuen-Yen Chow , An Introduction to Computational Fluid Mechanics, John Wiley & Sons. New-York
24. J. P. Holman, Heat transfer, Fifth Edition, Mc Graw-Hill, Inc. 1985
25. Y. T. Tsui and B. Tremblay, On transient natural convection heat transfer in the annulus between concentric, horizontal cylinders with isothermal surfaces. *Int. J. Heat Mass Transfer* **27** (1), 103 -111 (1984).

26. Yan-Fei Rao, Yasutomi Miki, Kenji Fukuda, Yasuyuki Takata and Shu Hasegawa, Flow patterns of natural convection in horizontal cylindrical annuli
Int. J. Heat Mass Transfer **28** (3), 705-714 (1985).
27. D. Gabor, A New Microscopic Principle, *Nature*, **161**,777-778 (1948).
28. D. Gabor, Microscopy by Reconstructed Wave-Fronts, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A 197**, 454-487 (1949).
29. E. N. Leith and J. Upatnieks, Reconstructed Wave fronts and Communication Theory, *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 1123 (1962).
30. J. C. Madrenas, Etude, Réalisation et Mise au point d'un interféromètre holographique. Applications à finalité industrielle.
Mémoire Ingénieur CNAM, Perpignan (1979).
31. J. Sarr, C. Mbow, H. Chéhouani, B. Zeghmati, S. Bénet, M. Daguénet, Axisymmetrical natural convection in an enclosure bounded by two concentric cylinders and two diametrical planes.
First International Thermal Energy Congress Proceedings, ITEC 93, Vol. 1,160-163, 6-10 June 1993, Marrakesh, Morocco.
32. J. Sarr, C. Mbow, H. Chéhouani, B. Zeghmati, S. Bénet, M. Daguénet, Study of natural convection in an enclosure bounded by two concentric cylinders and two diametrical planes.
Article en cours de publication à *Journal of Heat Transfer*, ASME

ANNEXE 1

ELEMENTS D'ANALYSE VECTORIELLE

1. Transformation des systèmes de coordonnées

$$(x_1, x_2, x_3) (\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3) \longrightarrow (u_1, u_2, u_3) (\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3) \quad [A1-1]$$

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, x_3) \quad x_1 = x_1(u_1, u_2, u_3)$$

$$u_2 = u_2(x_1, x_2, x_3) \quad x_2 = x_2(u_1, u_2, u_3) \quad [A1-2]$$

$$u_3 = u_3(x_1, x_2, x_3) \quad x_3 = x_3(u_1, u_2, u_3)$$

$$\vec{r} = \sum_k x_k \vec{i}_k = \vec{r}(u_1, u_2, u_3)$$

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1 du_1 \vec{j}_1 + h_2 du_2 \vec{j}_2 + h_3 du_3 \vec{j}_3 \quad [A1-3]$$

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| \quad \text{est le coefficient de proportionnalité} \quad [A1-4]$$

$$d\vec{r} = \sum_i^3 h_i du_i \vec{j}_i = \sum_k^3 dx_k \vec{i}_k$$

2. Eléments d'arc

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

$$dx_k = \sum_i^3 \frac{\partial x_k}{\partial u_i} du_i$$

$$d\vec{r} = \sum_k^3 \vec{i}_k dx_k = \sum_k^3 \vec{i}_k \sum_i^3 \frac{\partial x_k}{\partial u_i} du_i = \sum_i^3 \left[\sum_k^3 \left(\vec{i}_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \right) \right] du_i = \sum_i^3 h_i du_i \vec{j}_i \quad [A1-5]$$

$$\text{d'où : } h_i \vec{j}_i = \sum_k \left(\vec{i}_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \right)$$

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \sum_i \sum_k g_{ik} du_i du_k \quad \text{où } g_{ik} \text{ représente les coefficients métriques}$$

$$\text{Pour un système orthogonal, on } g_{ik} = 0 \text{ si } i \neq k \text{ et } g_{ii} = h_i^2 = \sum_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_i} \right)^2 = g_i$$

3. Opérateurs vectoriels en coordonnées curvilignes orthogonales

$$\vec{\nabla} = \sum_k \vec{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\vec{j}_k}{h_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Soient :

$\Phi = \Phi(u_1, u_2, u_3)$ une fonction scalaire et $\vec{V} = V_1 \vec{j}_1 + V_2 \vec{j}_2 + V_3 \vec{j}_3$ une fonction vectorielle

3.1 Gradient

$$\vec{\nabla} \Phi = \text{grad } \Phi = \sum_k \frac{\vec{j}_k}{h_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \quad [\text{A1-6}]$$

3.2 Divergence

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \text{div } \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 V_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 V_3) \right]$$

[A1-7]

3.3 Rotationnel

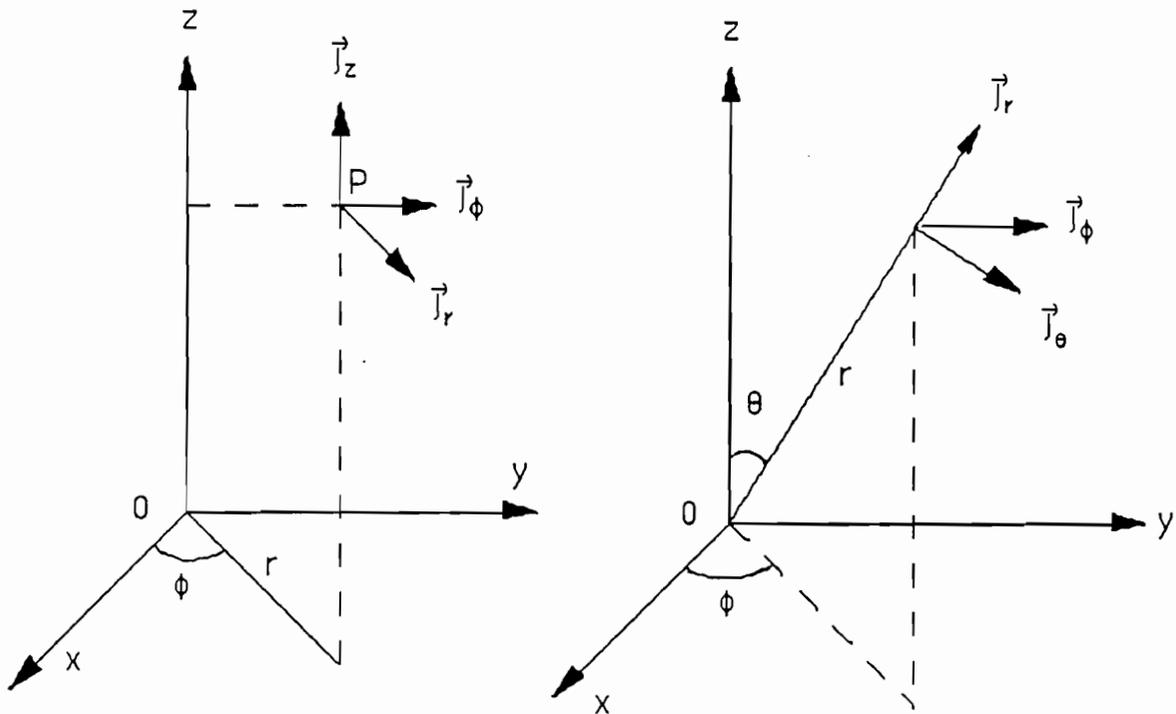
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \text{rot } \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{bmatrix} h_1 \vec{j}_1 & h_2 \vec{j}_2 & h_3 \vec{j}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{bmatrix} \quad [\text{A1-8}]$$

3.4 Laplacien

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = \Delta \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right]$$

[A1-9]

4. Détermination des coefficients de proportionnalité

Figure A1 Coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) et sphériques (r, θ, ϕ) 4.1 Coordonnées cylindriques (r, ϕ, z)

$$x = r \cos(\phi) \quad , \quad y = r \sin(\phi) \quad \text{et} \quad z = z$$

Dans le domaine étudié : $\{ r \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad \text{et} \quad -\infty \leq z \leq +\infty \}$, on a:

$$h_r = 1 \quad h_\phi = r \quad \text{et} \quad h_z = 1$$

[A1-10]

4.2 Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad , \quad y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad \text{et} \quad z = r \cos(\theta)$$

Dans le domaine étudié : $\{ r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi \text{ et } 0 \leq \phi \leq 2\pi \}$, on a :

$$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad \text{et} \quad h_\phi = r \sin(\theta) \quad [\text{A1-11}]$$

4.3 Application à notre transformation conforme

$$x = a \exp(\phi) \cos(\psi) \quad \text{et} \quad y = a \exp(\phi) \sin(\psi)$$

et donc :

$$x^2 + y^2 = (a \exp(\phi))^2 \quad \text{et} \quad \psi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$h_\phi = h_\psi = a \exp(\phi) \quad [\text{A1-12}]$$

$$\vec{\text{grad}} \Phi = \frac{1}{a \exp(\phi)} \left[\vec{j}_\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \vec{j}_\psi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right] \quad [\text{A1-13}]$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{a \exp(\phi)} \left[\frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + V_\phi + \frac{\partial V_\psi}{\partial \psi} \right] \quad [\text{A1-14}]$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{a^2 \exp(2\phi)} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \right] \quad [\text{A1-15}]$$

ANNEXE 2

RESOLUTION D'UN SYSTEME A MATRICE TRIDIAGONALE / METHODE DE THOMAS [19]

Soit un système linéaire $Ax = y$ à matrice tridiagonale. L'algorithme de Gauss peut être simplifié, en tenant compte de la structure particulière de A.

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & -- & -- & -- & -- \\ & & a_i & b_i & c_i \\ & & -- & -- & -- & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \quad [A2-1]$$

L'algorithme de Thomas consiste à réduire toutes les lignes à deux termes et à les normaliser ensuite conformément aux différentes étapes suivantes :

- normalisation de la première ligne :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{c_1}{b_1} & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & -- & -- & -- & -- \\ & & a_i & b_i & c_i \\ & & -- & -- & -- & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{x_1}{1} \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{b_1} \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad [A2-2]$$

En résumé, l'algorithme de Thomas s'écrit :

- *triangulation* :

$$\gamma_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad [A2-7]$$

$$\gamma_i = \frac{c_i}{(b_i - a_i \gamma_{i-1})} \quad i = 2, 3, 4, \dots, n-1 \quad [A2-8]$$

$$\beta_1 = \frac{y_1}{b_1} \quad [A2-9]$$

$$\beta_i = \frac{y_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i - a_i \gamma_{i-1}} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad [A2-10]$$

- *résolution du système à matrice bidiagonale* :

$$x_n = \beta_n \quad [A2-11]$$

$$x_i = \beta_i - \gamma_i x_{i+1} \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \quad [A2-12]$$

ANNEXE 3

APPROXIMATION DES DERIVEES PARTIELLES AUX FRONTIERES PAR LE DEVELOPPEMENT EN SERIE DE TAYLOR

Considérons une fonction $F(\phi, \psi)$ continue et suffisamment dérivable sur le domaine étudié $D = \{ 1 \leq k \leq N \text{ et } 1 \leq j \leq M \}$.

1. Approximation de $\frac{\partial F}{\partial \phi}$ sur la paroi (k=1,j)

Ecrivons le développement en série de Taylor de cette fonction au voisinage de la paroi (1,j) :

$$F(2,j) = F(1,j) + \frac{\Delta\phi}{1!} \frac{\partial F}{\partial \phi} + \frac{(\Delta\phi)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + 0 [\Delta\phi]^3 \quad [\text{A3-1}]$$

$$F(3,j) = F(1,j) + \frac{2\Delta\phi}{1!} \frac{\partial F}{\partial \phi} + \frac{(2\Delta\phi)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + 0 [\Delta\phi]^3 \quad [\text{A3-2}]$$

En éliminant les dérivées secondes entre les équations [A3-1] et [A3-2], on obtient :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right|_{k=1,j} = \frac{-3 F(1,j) + 4 F(2,j) - F(3,j)}{2 \Delta\phi} + 0 [\Delta\phi]^2 \quad [\text{A3-3}]$$

2. Approximation de $\frac{\partial F}{\partial \phi}$ sur la paroi (k=N,j)

Procédons de la même manière que précédemment au voisinage de la paroi (N,j) :

$$F(N-1,j) = F(N,j) - \frac{\Delta\phi}{1!} \frac{\partial F}{\partial \phi} + \frac{(\Delta\phi)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + 0 [\Delta\phi]^3 \quad [\text{A3-4}]$$

$$F(N-2,j) = F(N,j) - \frac{2\Delta\phi}{1!} \frac{\partial F}{\partial \phi} + \frac{(2\Delta\phi)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + 0 [\Delta\phi]^3 \quad [\text{A3-5}]$$

on obtient :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right]_{k=N,j} = \frac{3 F(N,j) - 4 F(N-1,j) + F(N-2,j)}{2 \Delta \phi} + 0 [\Delta \phi]^2 \quad [\text{A3-6}]$$

3. Approximation de $\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}$ sur la paroi (k=1,j)

$$F(2,j) = F(1,j) + \frac{\Delta \phi}{1!} \frac{\partial F}{\partial \phi} + \frac{(\Delta \phi)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{(\Delta \phi)^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial \phi^3} + 0 [\Delta \phi]^4 \quad [\text{A3-7}]$$

$$F(3,j) = F(1,j) + \frac{2 \Delta \phi}{1!} \frac{\partial F}{\partial \phi} + \frac{(2 \Delta \phi)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} + \frac{(2 \Delta \phi)^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial \phi^3} + 0 [\Delta \phi]^4 \quad [\text{A3-8}]$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right]_{k=1,j} = \frac{-7 F(1,j) + 8 F(2,j) - F(3,j) - 6 \Delta \phi g_1}{2 (\Delta \phi)^2} + 0 [\Delta \phi]^2 \quad [\text{A3-9}]$$

avec

$$g_1 = \left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right]_{k=1,j} \quad [\text{A3-10}]$$

4. Approximation de $\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}$ sur la paroi (k=N,j)

$$F(N-1,j) = F(N,j) - \frac{\Delta \phi}{1!} \frac{\partial F}{\partial \phi} + \frac{(\Delta \phi)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \frac{(\Delta \phi)^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial \phi^3} + 0 [\Delta \phi]^4 \quad [\text{A3-11}]$$

$$F(N-2,j) = F(N,j) - \frac{2 \Delta \phi}{1!} \frac{\partial F}{\partial \phi} + \frac{(2 \Delta \phi)^2}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \frac{(2 \Delta \phi)^3}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial \phi^3} + 0 [\Delta \phi]^4 \quad [\text{A3-12}]$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right]_{k=N,j} = \frac{-7 F(N,j) + 8 F(N-1,j) - F(N-2,j) + 6 \Delta \phi g_N}{2 (\Delta \phi)^2} + 0 [\Delta \phi]^2 \quad [\text{A3-13}]$$

avec

$$g_N = \left. \frac{\partial F}{\partial \phi} \right]_{k=N,j} \quad [\text{A3-14}]$$

5. Approximation des dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial \phi}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}$ sur les parois (k,j=1) et (k,j=M)

En procédant de la même manière que pour les parois (k=1,j) et (k=N,j), on obtient :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \psi} \right]_{k,j=1} = \frac{-3 F(k,1) + 4 F(k,2) - F(k,3)}{2 \Delta \psi} + 0 [\Delta \psi]^2 = h_{k,1} \quad [\text{A3-15}]$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \psi} \right]_{k,j=M} = \frac{3 F(k,M) - 4 F(k,M-1) + F(k,M-2)}{2 \Delta \psi} + 0 [\Delta \psi]^2 = h_{k,M} \quad [\text{A3-16}]$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} \right]_{k,j=1} = \frac{-7 F(k,1) + 8 F(k,2) - F(k,3) - 6 \Delta \psi h_{k,1}}{2 (\Delta \psi)^2} + 0 [\Delta \psi]^2 \quad [\text{A3-17}]$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial \psi^2} \right]_{k,j=M} = \frac{-7 F(k,M) + 8 F(k,M-1) - F(k,M-2) + 6 \Delta \psi h_{k,M}}{2 (\Delta \psi)^2} + 0 [\Delta \psi]^2 \quad [\text{A3-18}]$$

ANNEXE 4

ETUDE DE L'INFLUENCE DU MAILLAGE SUR LES RESULTATS

L'influence du maillage a été étudiée pour $F_r = 1/2$, $F_r = 1/3$ et $F_r = 1/5$ avec un nombre de Grashof modifié égal à 10^7 .

Dans la direction azimutale, les courbes A4-1, A4-2 et A4-3 représentent l'évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction du maillage pour les différents facteurs de forme indiqués ci-dessus. L'examen de ces courbes permet de choisir $M=51$ comme nombre de points dans cette direction.

Dans la direction radiale, nous avons retenu un nombre de points égal à 31. Ce choix résulte d'un compromis permettant d'équilibrer les deux paramètres les plus importants de notre étude : le temps de calcul et la précision des résultats.

- pour $F_r = 1/2$, l'écart entre les maillages 31×51 et 41×41 est d'environ 3.60 % sur la valeur du nombre de Nusselt moyen.
- pour $F_r = 1/3$, l'écart entre les maillages 31×51 et 41×41 est d'environ 4.12 % et l'écart entre les maillages 31×51 et 51×51 , d'environ 5.51 %.
- pour $F_r = 1/5$, l'écart entre les maillages 31×51 et 41×41 est d'environ 3.42% et l'écart entre les maillages 31×51 et 51×51 , d'environ 5.01%.

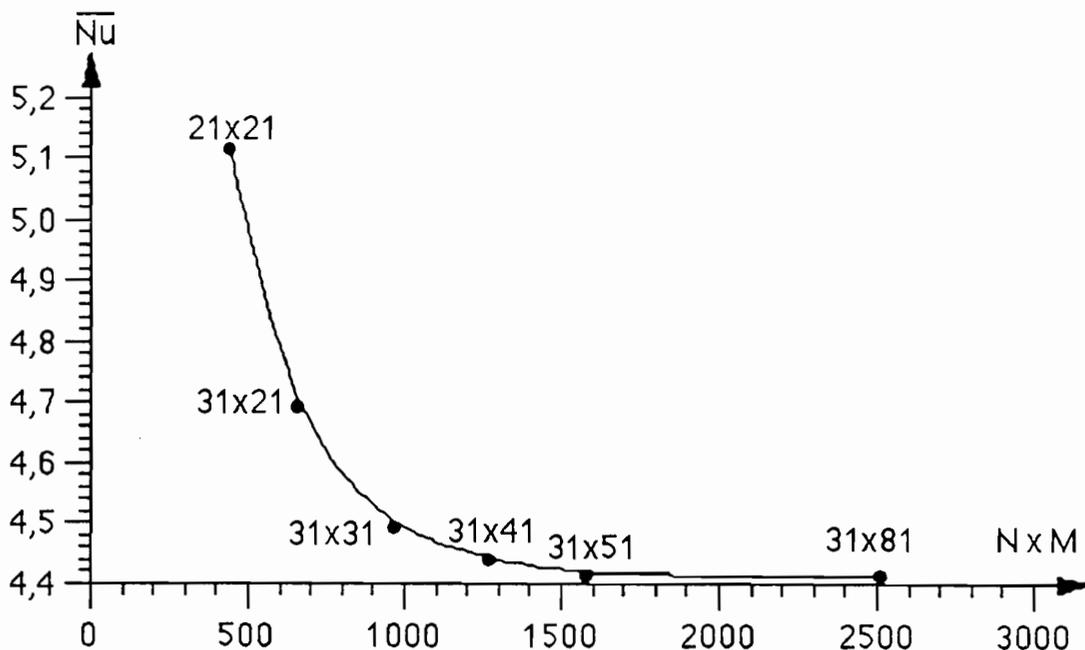


Figure A4-1 : Variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du maillage $F_r = 1/2$ et $Gr = 10^7$

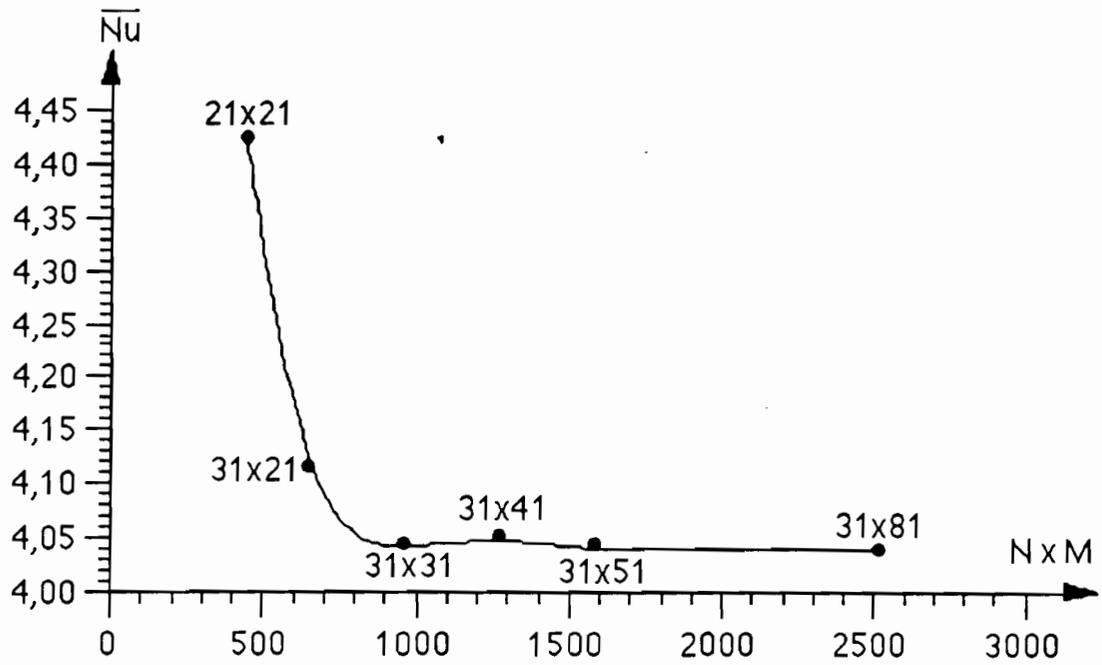


Figure A4-2: Variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du maillage $F_r = 1/3$ et $Gr=10^7$.

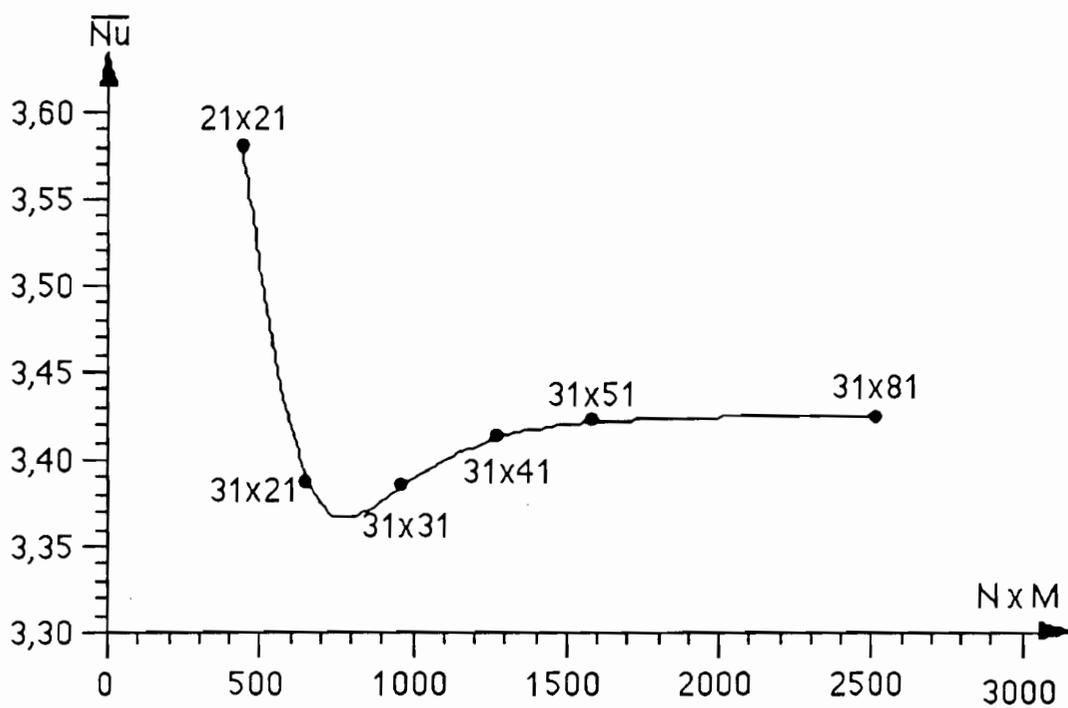


Figure A4-3: Variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du maillage $F_r = 1/5$ et $Gr=10^7$.

ANNEXE 5

COMPARAISON DES ISOTHERMES EXPERIMENTALES ET THEORIQUES EN REGIME PERMANENT

Nous avons appliqué l'algorithme de calcul développé dans la partie théorique à la cellule expérimentale. Pour simplifier, nous avons supposé que la température ambiante est constante au cours du phénomène. Les résultats théoriques sont comparés aux résultats expérimentaux illustrés sur les photographies 20 à 23 en utilisant le tableau 4-1 du chapitre IV.

Conditions opératoires:

- température ambiante $T_{amb} = 22,31 \text{ °C}$
- température du cylindre extérieur $T_2 = 22,31 \text{ °C}$
- rayon du cylindre intérieur $R_1 = 0,027 \text{ m}$
- rayon du cylindre extérieur $R_N = 0,0525 \text{ m}$

Numéro d'ordre de frange	1	2	3	4	5	6	7	8
température de la frange (°C)	23,70	25,10	26,53	27,95	29,39	30,86	32,32	33,81

Tableau A5 : Ordre et température des franges brillantes

Sur les figures A5, nous avons représenté les isothermes correspondant aux franges brillantes numérotées dans l'ordre croissant, de la paroi isotherme vers le cylindre intérieur. On constate une bonne corrélation des résultats, notamment quand on impose un flux de chaleur plus élevé sur la paroi cylindrique intérieure. On peut améliorer la précision des résultats expérimentaux en contrôlant davantage les conditions atmosphériques ambiantes.

RESUME

L'auteur étudie la convection naturelle symétrique dans une enceinte fermée limitée par deux cylindres concentriques horizontaux et deux plans diamétraux. La paroi cylindrique intérieure est soumise à un flux de chaleur de densité constante alors que la paroi cylindrique extérieure est maintenue à une température constante et les parois latérales isolées.

Pour faciliter la mise en équations du problème, l'auteur transforme ce domaine curviligne en rectangle à l'aide d'une représentation conforme appropriée. Il étudie les transferts thermiques pour des nombres de Grashof modifié variant de 100 à 10^6 et pour des facteurs de forme de 1/1, 1/2, 1/3 et 1/5.

Les résultats montrent que les échanges thermo-convectifs, au niveau de la paroi isotherme, sont meilleurs quand on augmente le facteur de forme et que la limite supérieure du régime conductif dominant est atteint pour un nombre de Grashof d'environ 10^3 .

Les résultats théoriques ont été validés par une méthode expérimentale d'interférométrie holographique.

MOTS-CLES

MECANIQUE DES FLUIDES	CONVECTION NATURELLE
THERMIQUE	HOLOGRAPHIE
ENCEINTES FERMEES	ENCEINTES CYLINDRIQUES
MESURES DE TEMPERATURE	MODELISATION