



BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	2903041S
Cote	S/MZ 03/14
Loc	

# THESE

présentée

devant l'UNIVERSITE de METZ

pour l'obtention du

DIPLOME DE DOCTORAT DE MATHEMATIQUE

Spécialité : **Théorie du Contrôle**

présentée et soutenue publiquement le 20/10/2003

par

**Ayitchéou Judicaël Tchédji**

**DEGUENON**

---

## OBSERVATEURS DES SYSTEMES ANTI-ADJOINTS DE DIMENSION INFINIE ET APPLICATIONS

---

devant le Jury :

Président :	Claude LOBRY	Professeur, Université de Nice
Rapporteurs :	Brigitte d'ANDREA-NOVEL	Professeur, Ecole des Mines de Paris
	Assia BENABDALLAH	Professeur, Université de Provence
Examineurs :	Hassan HAMMOURI	Professeur, Université de Lyon I
	Gauthier SALLET	Professeur, Université de Metz
Directeurs de thèse :	Hamidou TOURE	Professeur, Université de Ouagadougou
	Cheng-Zhong XU	Professeur, Université de Lyon I

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 486121 8





## AVERTISSEMENT

Cette thèse est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et disponible à l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Elle est soumise à la propriété intellectuelle de l'auteur au même titre que sa version papier. Ceci implique une obligation de citation, de référencement dans la rédaction de tous vos documents.

D'autre part, toutes contrefaçons, plagiat, reproductions illicites entraînent une poursuite pénale. Enfin, l'autorisation de diffusion a été accordée jusqu'à nouvel ordre.

➤ **Contact SCD Metz** : [daniel.michel@scd.univ-metz.fr](mailto:daniel.michel@scd.univ-metz.fr)

CPI articles L 122. 4

CPI articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Ecrire au du doctorant : prénom.nom@.....fr

# THESE

présentée

devant l'UNIVERSITE de METZ

pour l'obtention du

DIPLOME DE DOCTORAT DE MATHEMATIQUE

Spécialité : **Théorie du Contrôle**

présentée et soutenue publiquement le 20/10/2003

par

**Ayitchéou Judicaël Tchédji**

**DEGUENON**

---

## OBSERVATEURS DES SYSTEMES ANTI-ADJOINTS DE DIMENSION INFINIE ET APPLICATIONS

---

devant le Jury :

Président :	Claude LOBRY	Professeur, Université de Nice
Rapporteurs :	Brigitte d'ANDREA-NOVEL	Professeur, Ecole des Mines de Paris
	Assia BENABDALLAH	Professeur, Université de Provence
Examineurs :	Hassan HAMMOURI	Professeur, Université de Lyon I
	Gauthier SALLET	Professeur, Université de Metz
Directeurs de thèse :	Hamidou TOURE	Professeur, Université de Ouagadougou
	Cheng-Zhong XU	Professeur, Université de Lyon I

**OBSERVATEURS DES SYSTEMES  
ANTI-ADJOINTS DE DIMENSION  
INFINIE ET APPLICATIONS**

*A ma mère LAMATOU,  
et  
à mon père FAWANOU.*

# REMERCIEMENTS

Aucune oeuvre humaine ne se réalise sans le concours implicite et explicite d'autres personnes. Aucun travail ne s'accomplit dans la solitude. Il est donc normal que figurent en début de cette thèse, des remerciements adressés à ceux qui ont aidé, concouru à son achèvement.

Je voudrais remercier d'abord les Professeurs Claude LOBRY et Gauthier SALLET pour leurs soucis d'une formation doctorale en Afrique. Par cette formation et l'organisation de plusieurs séminaires et écoles doctorales, ils ont participé non seulement à la vulgarisation scientifique mais aussi à la promotion de la science en Afrique. Un double remerciement s'adresse au Professeur G. SALLET, Responsable du Laboratoire INRIA-LORRAINE de METZ, qui nous a permis de faire des stages de recherche dans son laboratoire.

Je voudrais remercier ensuite et malgré tout, tous les membres du réseau "EDP-MODELISATION-CONTROLE", en particulier les Professeurs MARY-TEW Niane (Université GASTON BERGER de Saint-Louis au SENEGAL), TOURE Hamidou (Université de Ouagadougou au BURKINA-FASO) et ISSELKOU Ould Ahmed Izid Bih (Université de Nouaktchott en MAURITANIE). Par les ateliers de recherche organisés, j'ai su appréhender quelques techniques utiles en analyse et contrôle.

Je salue l'appui et toute l'aide financière de l'ICTP (à TRIESTE en ITALIE), du CIMPA (à NICE en FRANCE) en vue de l'aboutissement de cette entreprise.

Je ne saurais oublier l'aide inestimable de Mr Jean Pierre EZIN (Directeur de l'IMSP de l'Université d'Abomey-Calavi du BENIN ) et de Joël TOSSA ( Professeur à l'IMSP de l'Université d'Abomey-Calavi du BENIN ) , pour m'avoir aidé à participer à certains séminaires et discuté avec les spécialistes du contrôle et avoir ainsi une partie de la documentation nécessaire.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit des Professeurs HAMMOURI Hassan (LAGEP, Université Claude-Bernard-Lyon1) et Brigitte d'ANDREA-NOVEL (ENSMP, Centre CAO & ROBOTIQUE, PARIS) et Assia BENABDALLAH (CMI, Université de Provence) pour avoir accepté être les rapporteurs de mes travaux.

Il me revient à nouveau de remercier les membres du jury de m'avoir fait l'honneur de leur présence et ceux qui ont accepté de lire ce travail et de me faire part de leurs observations, suggestions et appréciations.

C'est aussi une première occasion pour moi de remercier mes soeurs jumelles BAI KIN-SOUKPO et BAI VI KWENNY, mon frère DAKOUNA, toute la famille VICIENNON - DEGUENON SOKOU - TODJINOU - KOUBE BOKO- ATCHI SOULE pour tout leur soutien moral, spirituel, matériel, tout au long de mon cursus scolaire et universitaire.

Je remercie le Professeur BAO-ZHU GUO (Académie des Sciences de Chine) pour toutes les discussions utiles que j'ai eues avec lui .

Je remercie sincèrement tout le personnel du Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés (Université Claude-Bernard Lyon1), particulièrement son Directeur, le Professeur Hatem FESSI pour m'avoir permis d'achever ma rédaction dans de bonnes conditions.

Enfin que soit enfin remercié particulièrement le Professeur CHENG-ZHONG XU ( LA-GEP, Université Claude-Bernard-Lyon I) qui a accepté de diriger mon travail. Durant toute ma thèse, il a fait preuve d'une totale disponibilité. Sa rigueur scientifique, sa patience, sa méthodologie, tout en lui crée un champ favorable pour l'aboutissement de mes recherches.

# NOTATIONS

## 1) Opérateur linéaire $A$

$D(A)$  domaine de  $A$

$\text{Im}(A)$  image de  $A$

$\sigma(A)$  spectre de  $A$

$\overline{D(A)}$  adhérence de  $D(A)$

$\rho(A)$  ensemble résolvant de  $A$

$I$  opérateur identité.

## 2) Ensembles

$\mathbb{N}$  ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z}$  ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{R}$  ensemble des réels

$\emptyset$  ensemble vide

$\mathbb{C}_\epsilon$  ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $\Re(z) > \epsilon$ .

## 3) Fonctions

$\Re(z)$  partie réelle de  $z$

$\Im(z)$  partie imaginaire de  $z$

$f(., t)$  fonction :  $x \mapsto f(x, t)$

$\dot{f}(., t)$  dérivée de  $f(., t)$  par rapport à  $t$

$\hat{f}(., s)$  transformée de Laplace de  $f(., t)$  par rapport à la variable  $t$

**Sinh** fonction sinus hyperbolique

**Cosh** fonction cosinus hyperbolique

$O(\xi(x))$  désigne la fonction vérifiant  $|O(\xi(x))| \leq k|\xi(x)|$  où  $k > 0$  est une constante indépendante de  $x$ .

## 4) Espaces fonctionnels

$L(E, F)$  espaces des opérateurs linéaires continus de  $E$  dans  $F$ .

$L(E) = L(E, E)$

$E' = L(E, \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$  dual topologique de  $E$ .

$L^1(0, \tau_0; E)$  espace des fonctions mesurables  $f : (0, \tau_0) \rightarrow E$  telles que  $t \mapsto |f(t)|^r$  est intégrable sur  $(0, \tau_0)$ .

$L^2(0, 1)$  espace des fonctions de carré intégrable sur  $(0, 1)$

$$\mathbf{H}^m(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \left\{ f \in L^2(0, 1); \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta} \in L^2(0, 1) \text{ pour tout } \beta \in \mathbb{N}; \beta \leq m \right\}$$

$$\mathbf{H}_L^2(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \{f \in H^2(0, 1) \mid f(0) = 0, f'(0) = 0\}.$$

### 5) Notations particulières

$X$  espace d'état choisi

$\langle, \rangle_X$  produit scalaire dans  $X$

$\langle, \rangle_{W, W'}$  crochet de dualité dans  $W$

$\| \cdot \|_X$  norme dans  $X$

$U$  espace de contrôle

$Y = L^2(\mathbf{0}, \infty; \mathbb{R}^q)$  espace de sortie ( $q =$  nombre de mesures.)

$O = \mathbb{R}^q$  espace d'observation

$v^T$  transposé du vecteur  $v$

### 6) Convention

$$\frac{1}{0^+} = +\infty.$$

### 7) Figures

4 figures sous forme de fichiers .ps

# Table des matières

<b>1 Généralités et outils mathématiques</b>	<b>14</b>
1.1 Introduction . . . . .	14
1.2 Semi-groupes continus d'opérateurs linéaires . . . . .	14
1.2.1 Semi-groupes continus . . . . .	14
1.2.2 Groupe d'opérateurs linéaires bornés . . . . .	16
1.2.3 Equations d'évolution linéaire . . . . .	16
1.3 Observabilité et observateurs . . . . .	17
1.3.1 Notions d'observabilité et de capteurs . . . . .	17
1.3.2 Notions d'observateurs et de gains . . . . .	18
1.4 Systèmes réguliers . . . . .	20
1.4.1 Admissibilité . . . . .	21
1.4.2 Régularité . . . . .	22
1.4.3 Existence et unicité des solutions d'un système régulier . . . . .	22
1.5 Préliminaires sur la théorie spectrale . . . . .	24
1.5.1 Spectre d'un générateur . . . . .	24
1.5.2 Résolvante d'un générateur . . . . .	25
1.5.3 Borne spectrale . . . . .	26
1.6 Bases de Riesz . . . . .	26
<b>2 Observateurs des systèmes anti-adjoints de dimension infinie</b>	<b>28</b>
2.1 Résultat principal . . . . .	29
2.2 Preuve du théorème 2.1 . . . . .	31

<b>3 Applications pour un système hybride : body-beam</b>	<b>39</b>
3.1 Présentation du modèle hybride et des observateurs . . . . .	39
3.1.1 Présentation du modèle . . . . .	39
3.1.2 Observateurs exponentiels pour le modèle . . . . .	42
3.1.3 Observateur pour toute vitesse de convergence voulue . . . . .	43
3.2 Démonstrations et remarques basées sur le modèle considéré . . . . .	48
3.2.1 Exacte observabilité du système pour $\omega_*$ constante quelconque . . . . .	48
3.2.2 Régularité du triplet $(A_{\omega_*}, C^*, C)$ avec $\omega_*$ constante quelconque . . . . .	57
3.2.3 Estimation du taux de décroissance exponentielle de l'erreur pour $\omega_* = 0$	61
<b>A Quelques propriétés des opérateurs <math>A_0, A</math></b>	<b>71</b>
A.1 Preuve de la proposition 3.1 . . . . .	71
A.1.1 $A_0$ est auto-adjoint sur $L^2(0, 1)$ . . . . .	71
A.1.2 $A_0$ est à résolvante compacte . . . . .	74
A.2 Opérateur $A$ associé au modèle du body-beam . . . . .	74
<b>B Quelques résultats d'algèbre</b>	<b>75</b>
<b>C Calcul des fonctions de transfert</b>	<b>77</b>
C.1 Calcul de la fonction de transfert $G(s)$ de l'entrée à la sortie pour $\omega_* = 0$ . . . . .	77
C.2 Calcul de la fonction de transfert : de la condition initiale à la sortie . . . . .	79
<b>D Preuve de l'identité (3.30)</b>	<b>83</b>
<b>E Résultats numériques sur le comportement asymptotique du spectre de <math>A^\kappa</math></b>	<b>85</b>

# ABSTRACT

We consider linear infinite dimensional skew-adjoint observation systems on a Hilbert space  $X$ . The observation space is assumed to be another Hilbert space  $O$ . We consider also unbounded boundary observations operators and assume exact observability to hold. We build some Luenberger like observers which guarantee exponential stability of the error system under the assumption of some system regularity. The situation is more complex on the infinite dimension than on the finite dimension because high gain can make unstable the error system. We present also a rotating body-beam example to illustrate potential application of our observer. Through that example, we show how to choose decay rate of the observer. By the method of spectral analysis and by estimating eigenvalues of large modulus, we can determinate the exponential decay rate of the error system and prove that spectrum determined growth conditions hold. Therefore we can construct an observer with an arbitrary convergence rate.

# RÉSUMÉ

On considère des systèmes linéaires anti-adjoints de dimension infinie sur un espace de Hilbert  $X$ . L'espace d'observation est supposé être un autre espace de Hilbert  $O$ . L'opérateur de sortie est non borné puisque les mesures sont prises au bord du domaine spatial. On suppose l'exacte observabilité vérifiée. Il est alors possible de construire des observateurs de type Luenberger qui garantissent la stabilité exponentielle du système de l'erreur si une certaine hypothèse de régularité est satisfaite pour les systèmes considérés. La situation en dimension infinie présente une certaine complexité par rapport à la dimension finie, puisque le gain trop grand peut faire diverger l'observateur.

On présente une application basée sur l'exemple du modèle "corps-poutre" pour illustrer ces résultats. En particulier, on montre que pour toute vitesse angulaire constante et suffisamment petite, le taux de décroissance du semi-groupe pour le système de l'erreur est déterminé par la borne spectrale de son générateur. Par conséquent on peut régler arbitrairement la vitesse de convergence pour l'observateur.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les problèmes de modélisation et de contrôle des systèmes mécaniques constitués des corps rigides couplés avec les structures élastiques sont devenus un important domaine de recherche.

D'une part, ces systèmes sont largement utilisés dans la pratique en ingénierie (robots à bras flexibles contrôlés, véhicules spatiaux avec antennes, panneaux solaires, etc...).

D'autre part le mouvement de la plupart de ces systèmes est généralement décrit par un ensemble d'équations différentielles ordinaires (EDO) couplés avec des équations aux dérivées partielles non linéaires (EDP). Ces types de systèmes dits hybrides ont favorisé l'émergence d'autres théories mathématiques généralisant celles obtenues en contrôle des équations d'évolution en dimension infinie.

Particulièrement, le modèle à étudier représentant la source de nos motivations est le "Body-Beam System", système hybride décrit au chapitre 3.

Le problème de la stabilisation de ce système a été beaucoup étudié dans la littérature :

Bailleul et Levi ont montré (cf.[2] ) qu'en présence d'un frottement de type structurel et en absence de contrôle, le système a un nombre fini d'états d'équilibre en rotation.

Plus tard, Bloch et Titi [3] ont montré dans un cas un peu plus compliqué de frottement visqueux, l'existence d'une variété inertielle pour le système.

En prenant en compte l'effet d'amortissement visqueux, il a été montré par Xu et Bailleul (cf. [45]) que pour toute vitesse angulaire constante inférieure à une valeur critique (déterminée uniquement à partir des paramètres physiques de la poutre), le système est exponentiellement stabilisable par un feedback de type moment de contrôle seulement ( $\Gamma_1(t) = 0; \Gamma_2(t) = 0; \Gamma_3(t) = -\nu\omega(t), \nu \geq 0$ ).

Dans le même sens B. d'Andréa Novel et J. M Coron ont construit (cf. [1]) une autre loi de feedback du moment qui stabilise ainsi asymptotiquement et de façon globale le système autour du point d'équilibre  $(0, 0, \omega_*)$  dans l'espace  $H_L^2(0, 1) \times L^2(0, 1) \times \mathbb{R}$ , ( $\Gamma_1(t) = 0; \Gamma_2(t) = 0; \Gamma_3(t) = \gamma(Id + \int_0^1 u^2 dx) + 2\omega \int_0^1 uu_t dx$ ,  $\gamma$  étant bien choisi suivant que  $\omega_* \neq 0$  ou  $\omega_* = 0$ ).

Au cours de ces dernières années, il s'est posé comme problème : la stabilisabilité du système dans le cas où les sorties (mesures) aussi bien que les entrées (contrôles) sont à la frontière (bord du domaine spatial ou une partie du bord). La raison fondamentale de cette restriction est que dans la pratique, il est plus facile non seulement d'agir (contrôler) mais

aussi d'accéder aux mesures à la frontière.

le problème de la stabilisation frontière à l'extrémité libre de la poutre ( $x=L$ ) a été largement étudié. En se référant au [21] H. laousy, C.Z Xu et G. Sallet ont établi la stabilité exponentielle du système (sans amortissement) pour deux contrôles frontières linéaires à l'extrémité libre de la poutre ( $\Gamma_1(t) = -\alpha u_{tx}(L, t)$ ;  $\Gamma_2(t) = \beta u_{tx}(L, t)$ ;  $\alpha, \beta \geq 0$ ;  $\alpha + \beta \neq 0$ ) et un contrôle de type moment ( $\Gamma_3(t) = -\gamma(\omega(t) - \omega^*)$ ,  $\gamma > 0$ ).

Plus tard, B. Chentouf et J.F Couchouron ont étendu les résultats du [21] dans [6] par une classe de contrôles frontières non linéaires ( $\Gamma_1(t) = -f(u_{tx}(L, t))$ ;  $\Gamma_2(t) = g(u_{tx}(L, t))$ ;  $\Gamma_3(t) = -\gamma(\omega(t) - \omega^*)$   $\gamma, f, g$  étant des fonctions non linéaires bien définies).

Dès lors que la stabilisation du système est possible pour des mesures et des lois de feedbacks à l'extrémité libre de la poutre, il se pose alors tout naturellement la stabilisabilité du système pour des mesures recueillies à l'autre extrémité de la poutre (encastrement).

En nous inspirant des travaux de Coron et d'Andréa Novel (cf.[1]), on remarque que la loi de feedback établie par ces auteurs est non localisée et donc exige la mesure de tous les états du système pour être utile dans la pratique. Malheureusement l'état du système est de dimension infinie. L'idéal serait donc de construire un observateur sur le système pour en estimer l'état en vue de faire un retour dynamique de l'état estimé par le principe de séparation (voir Curtain et Pritchard [8], Gauthier et Kupka [11], Sontag [34]). Ceci constitue l'objectif de notre travail.

L'observabilité est la propriété à partir de laquelle on peut déterminer de façon exacte ou approchée l'état d'un système connaissant quelques mesures et contrôle.

L'observateur est un autre système dynamique qui donne une estimation de l'état du système initial à partir des mesures.

La construction des observateurs est d'une importance capitale en contrôle et applications (suivi des processus) pour les systèmes de dimensions infinies. Bien que l'état du système soit de dimension infinie on en donne une estimation à partir des mesures physiques qui sont de dimension finie.

On note un grand pas dans l'étude des observateurs en dimension finie avec Celle et al [5]. En dimension infinie l'observateur de type Luenberger proposée en [5] est aussi valable dans le cas des systèmes bilinéaires dissipatifs avec des entrées régulièrement persistentes (voir Gauthier et al dans [12]; Xu et al [46]) bien que ces dernières ne garantissent que la stabilité au sens faible. La stabilité exponentielle ne peut être obtenue parce que l'opérateur

de sortie est supposé continue et de dimensions finie.

Dans ce travail, Nous considérons d'abord des opérateurs de sorties non bornés (puisque les observations sont faites aux bords du domaine) et supposons l'exacte observabilité vérifiée pour les systèmes considérés . Si ces derniers vérifient en plus une certaine hypothèse de régularité, on montre qu'on peut construire dans ce cas des observateurs de convergence exponentielle pour des gains plus petits qu'une valeur critique. Dans ce sens, notre travail constitue une amélioration, donc un avancement des résultats du [5], [12], [46] et [8] pour la construction des observateurs de type Luenberger en dimension infinie.

Nous présentons ensuite une application de notre observateur sur le "body -beam system". Dans ce cas, l'observateur converge exponentiellement pour tout gain et il est possible vue la nature de ce modèle de régler le gain pour avoir une vitesse de convergence exponentielle aussi grande que l'on veut.

# Chapitre 1

## Généralités et outils mathématiques

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente brièvement la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires, quelques rappels sur le spectre d'un opérateur linéaire et son lien éventuel avec le taux de croissance exponentielle du semi-groupe. On y présente aussi quelques notions d'observabilité et d'observateurs et quelques résultats importants d'existence et de régularité des solutions associées à une classe de systèmes.

### 1.2 Semi-groupes continus d'opérateurs linéaires

Cette partie est consacrée à un bref rappel de la notion de semi-groupes linéaires et des résultats standards pour une classe d'équations d'évolution. Soit  $X$  un espace de Banach. On notera par  $I$  l'application identité sur  $X$ .

#### 1.2.1 Semi-groupes continus

**Définition 1.1** *Un semi-groupe continu ( $C^0$  semi-groupe) d'opérateurs linéaires sur  $X$  est une famille d'opérateurs  $T(t)_{t \geq 0}$  vérifiant :*

i)  $T(0) = I$  et  $T(t)T(\tau) = T(t + \tau)$ ,  $\forall t, \tau \geq 0$ .

ii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)\phi = \phi$ ,  $\forall \phi \in X$ .

**Définition 1.2** On appelle *générateur du semi-groupe*  $T(t)$ , l'opérateur  $A$  défini par :

$$D(A) = \left\{ \phi \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)\phi - \phi}{h} \text{ existe} \right\}$$

et pour tout  $\phi \in D(A)$ ,

$$A\phi = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)\phi - \phi}{h}.$$

**Théorème 1.1** Soit  $T(t)$  un  $C^0$  semi-groupe sur  $X$ ,  $A$  son générateur et  $\phi$  un élément de  $D(A)$ . Alors :

- 1)  $T(t)\phi \in D(A)$  pour tout  $t \geq 0$  et  $\frac{d}{dt}T(t)\phi = AT(t)\phi = T(t)A\phi$ .
- 2)  $A$  est un opérateur fermé de domaine dense dans  $X$ .
- 3) Il existe deux constantes  $M \geq 1$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  telles que  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$ . ■

Dans la pratique, on s'intéresse au minimum de ces  $\omega$  pour lesquels la condition 3) du théorème 1.1 soit réalisée. Ce minimum appelé *taux de croissance* (ou *décroissance*) exponentielle du semigroupe est défini par

$$\omega_0(A) = \inf\{\omega/\exists M, \|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \forall t \geq 0\}.$$

On montre que  $\forall \epsilon > 0$ , il existe une constante  $M_\epsilon \geq 1$  telle que

$$\|T(t)\| \leq M_\epsilon e^{t(\omega_0 + \epsilon)} \quad \forall t \geq 0.$$

$\omega_0(A)$  peut être aussi caractérisé de la façon suivante :

$$\omega_0(A) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|T(t)\|}{t}.$$

**Remarque 1.1**  $\omega_0 \in [-\infty, +\infty)$ .

**Définition 1.3**  $\omega_0$  est appelé le *taux de croissance exponentielle* de  $T(t)$ .

Lorsque  $\omega_0 < 0$  on dit que le semi-groupe  $T(t)$  est *exponentiellement stable*.

Si  $\omega = 0$  dans le 3) du théorème 1.1 alors le semi-groupe  $T(t)$  est dit *uniformément borné* ; et si de plus  $M = 1$  alors il est dit de *contraction*.

## 1.2.2 Groupe d'opérateurs linéaires bornés

**Définition 1.4** Un  $C^0$  groupe d'opérateurs bornés sur  $X$  est une famille  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$  d'opérateurs bornés de  $X$  dans  $X$  vérifiant :

- i)  $T(0) = I$  et  $T(t)T(\tau) = T(t + \tau), \forall t, \tau \in \mathbb{R}$ .
- ii)  $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)\phi = \phi, \forall \phi \in X$ .

**Théorème 1.2 (Stone).**

Soit  $X$  un espace de Hilbert.  $A$  est générateur d'un groupe d'opérateurs unitaires sur  $X$  si et seulement si  $A$  est anti-adjoint. ■

## 1.2.3 Equations d'évolution linéaire

Considérons l'équation d'évolution suivante :

$$(\Sigma) \begin{cases} \dot{\phi}(t) &= A\phi(t), \forall t \geq 0, \\ \phi(0) &= \phi_0. \end{cases}$$

Le théorème suivant assure l'existence globale des solutions de ce problème dans le cas où l'opérateur est  $m$ -dissipatif, ie  $A$  dissipatif et  $Im(\lambda I - A) = X, \forall \lambda > 0$ .

**Théorème 1.3 (Hille-Yosida-Phillips).**

On suppose  $A$  est un opérateur  $m$ -dissipatif dans le Banach  $X$ , de domaine dense. Alors il existe un unique semi-groupe de contraction  $T(t)$  tel que :

- 1) Pour tout  $\phi_0 \in D(A)$ ,  $\phi(t) = T(t)\phi_0$  est l'unique solution "forte" du problème de Cauchy  $(\Sigma)$ . De plus,

$$\phi \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); X).$$

- 2) Pour tout  $\phi_0 \in X$ ,  $\phi(t) = T(t)\phi_0$  est l'unique solution "faible" du problème de Cauchy  $(\Sigma)$ . De plus,  $\phi \in C([0, \infty); X)$ . ■

## 1.3 Observabilité et observateurs

### 1.3.1 Notions d'observabilité et de capteurs

En s'inspirant des travaux de A. EL JAI et J. PRITCHARD [9], on considère un système distribué non excité, décrit par l'équation ( $\Sigma$ ). L'état d'un tel système ne peut pas toujours être directement mesuré d'un point de vue physique. Mais il est parfois possible de recueillir certaines informations sur le système et de suivre son évolution pendant un certain intervalle de temps  $[0, \tau_0]$ . L'intermédiaire physique qui permet de réaliser cet objectif est le capteur ; tandis que le problème de l'observabilité est celui de la reconstruction de l'état du système à partir des mesures effectuées pendant le même intervalle de temps.

Puisque  $\phi(t) = T(t)\phi_0$ , il suffit pour déterminer  $\phi$  à chaque instant  $t$ , de connaître la valeur de la condition initiale  $\phi_0$ .

Supposons que l'on recueille  $q$  mesures sur le système, mesures définies par la fonction de sortie :

$$(S) \begin{cases} y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)) \\ \quad = C\phi(t), \end{cases}$$

où  $C$  est un opérateur non borné. Son domaine  $D(C) \subset X$  est supposé invariant par le  $C^0$  semi-groupe  $T(t)_{t \geq 0}$ . De plus  $y(\cdot) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^q)$ . On a :

$$\begin{aligned} y(t) &= CT(t)\phi_0 \\ &= \Psi\phi_0(t). \end{aligned}$$

Le problème de l'observabilité revient donc à l'existence d'un opérateur inverse

$$\begin{aligned} \Upsilon : L^2(0, T; \mathbb{R}^q) &\rightarrow X \\ y &\mapsto \Upsilon y = \phi_0. \end{aligned}$$

- Si  $\Psi$  est inversible, on peut observer tous les états et on pose  $(\Psi)^{-1} = \Upsilon$ .
- D'une façon générale  $\Psi$  n'est pas inversible. On montre dans ce cas sous certaines conditions que nous ne pourrions pas observer n'importe quel état  $\phi_0$ , mais observer des états aussi proches de  $\phi_0$  qu'on le souhaite. Indiquons une manière simple de construire l'opérateur  $\Upsilon$  :

A partir de (S), on déduit que

$$\Psi^* y = \Psi^* \Psi \phi_0,$$

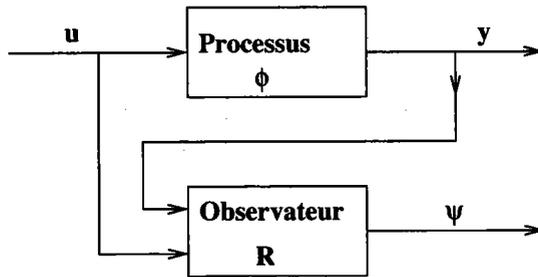


FIG. 1.1 – Principe de l'observateur

où  $\Psi^*$  désigne l'adjoint de  $\Psi$ . Posons

$$N = \Psi^* \Psi.$$

$N$  tel que défini étant auto-adjoint. Si  $N$  est en plus défini positif, il est inversible et :

$$\phi_0 = N^{-1} \Psi^* y.$$

Dans ces conditions on dit que le système est exactement observable. Une définition équivalente mais plus commode pour application est la suivante :

**Définition 1.5 (observabilité exacte)** *Le système  $(\Sigma)$  augmenté de  $(S)$  est exactement observable sur  $[0, \tau_0]$  si et seulement si il existe des constantes positives  $\tau_0 > 0$  et  $M > 0$  telles que*

$$M^{-1} \|\phi_0\|_X^2 \leq \int_0^{\tau_0} \|CT(t)\phi_0\|_O^2 dt \leq M \|\phi_0\|_X^2 \quad (1.1)$$

### 1.3.2 Notions d'observateurs et de gains

Dès lors que le système à étudier est observable, l'étape suivante est celle de la construction des observateurs en vue d'estimer l'état du système à partir des entrées, des sorties et du modèle.

La construction de l'observateur est basée sur le principe décrit par la figure (voir FIG. 1.1). C'est un autre système dynamique qui, tout en prenant en compte les mesures effectuées sur le système original, est couplé avec ce dernier en vue de fournir une certaine estimation de l'état du système.



**Remarque 1.2** *La condition initiale de l'observateur doit être proprement bien choisie. En effet l'état de l'observateur est égal à  $\phi(t)$  (état du système original à l'instant  $t$ ) lorsqu'il prend la condition initiale  $\phi_0$  du système original.* ■

Pour un système excité (ou non) augmenté d'une sortie ( $S$ ) du type :

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = A\phi(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\phi(t) \\ \phi(0) = \phi_0, \end{cases}$$

on choisit généralement l'observateur suivant :

$$(O_b) \begin{cases} \dot{\psi}(t) = A\psi(t) + Bu(t) + \Theta(R(t), C\psi(t) - y(t)) \\ \dot{R}(t) = G(R(t), u(t), y(t)) \\ \psi(0) = \psi_0 \\ \text{où } \Theta(R(t), 0) = 0. \end{cases}$$

C'est la copie du système avec un terme de correction dépendant du décalage entre les sorties réelles recueillies du système original et les mesures faites sur l'observateur. L'opérateur  $\Theta$  est défini comme le gain. Il sera choisi et réglé de façon interne dans l'observateur pour une vitesse de convergence plus grande que possible de l'erreur.  $R(t)$  vérifie habituellement une équation de type Ricatti.

**Définition 1.6** *Un observateur sera dit de type exponentiel si le système de l'erreur associée est exponentiellement stable.* ■

Le problème fondamental en contrôle est de fournir une robustesse et une performance satisfaisante aux systèmes qui sont exposés à des problèmes de perte de qualité (dégradation des paramètres, incertitudes de type structurelles, perturbations de types stochastiques), perturbations ou bruits affectant les mesures ou l'état du système.

La construction des observateurs doit donc tenir compte de ces incertitudes dans le modèle. Pour résoudre ces types de problèmes, on dispose de plusieurs approches de solutions suivant l'aspect qui se présente :

- L'approche  $L^2$  pour laquelle les bruits ou perturbations sont supposés être dans une classe de fonction de  $L^2$ . Dans ce cas, on essaye de minimiser leur impact sur les sorties en utilisant les fonctions de transfert.

- L'approche  $H^2$  consiste à minimiser la norme des fonctions de transfert.
- Dans l'approche  $H^\infty$ , il s'agit de minimiser l'effet des contrôles pour un pire effet des perturbations éventuelles.

Dans la suite, on s'attardera sur quelques principes fondamentaux de la théorie du contrôle  $H^\infty$  et de régularité des systèmes au sens de Weiss [39].

## 1.4 Systèmes réguliers

Soit  $X$  l'espace d'état. Soit  $U$  l'espace d'entrée. Soit  $O$  l'espace de sortie. On suppose que tous les trois  $X, U$  et  $O$  sont des espaces de Hilbert munis de leur propres produits scalaires. Dans cette section, en suivant les travaux de Weiss [39], on considère de façon générale, en dimension infinie le système linéaire temps invariant décrit par :

$$(\text{II}) \begin{cases} \dot{\phi}(t) = A\phi(t) + Bu(t), \\ y(t) = C\phi(t) + Du(t), \\ \phi(0) = \phi_0. \end{cases}$$

$\phi_0$  est dit état initial du système (II).

$\phi(t) \in X$  est appelé état du système (II) à l'instant  $t$ .

$u(t) \in L^2([0, \infty), U)$  est le contrôle.

$y(t) \in L^2([0, \infty), O)$  est la sortie.

$A$  est en général un opérateur non borné, générateur d'un  $C^0$  semi-groupe sur  $X$ .

Soit  $\beta \in \rho(A)$ . Le domaine  $D(A)$  muni de la norme  $\|\varphi\|_1 = \|(\beta I - A)\varphi\|_X$  sera noté  $X_1$  et le complété de  $X$  muni de la norme  $\|\varphi\|_{-1} = \|(\beta I - A)^{-1}\varphi\|_X$  sera désigné  $X_{-1}$ . Donc  $X_1 \subset X \subset X_{-1}$ . On peut considérer l'extension de  $A$  telle que  $A \in L(X, X_{-1})$  et étendre aussi le semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  sur  $X_{-1}$ . Pour tout  $\beta \in \rho(A)$ ,  $(\beta I - A)^{-1}$  peut être étendu à l'isomorphisme isométrique de  $X_{-1}$  dans  $X$ . On notera les opérateurs et leurs extensions par les mêmes symboles.

$B$  est dit opérateur de contrôle,  $B \in L(U, X_{-1})$ . On convient que  $B$  est borné s'il appartient à  $L(U, X)$  et non borné si  $B \notin L(U, X)$ .

$C$  communément appelé opérateur de sortie, appartient à  $L(X_1, O)$ . On note par  $C_\Lambda$  la



$\Lambda$  extension de  $C$  défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(C_\Lambda) = \left\{ x \in X, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda C(\lambda I - A)^{-1}x \text{ existe} \right\} \\ C_\Lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda C(\lambda I - A)^{-1}x, \forall x \in D(C_\Lambda). \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Soit  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $[\lambda_0, \infty) \subset \rho(A)$ . On muni  $D(C_\Lambda)$  de norme :

$$\|x\|_{D(C_\Lambda)} = \|x\|_X + \sup_{\lambda \geq \lambda_0} \|\lambda C(\lambda I - A)^{-1}x\|_O \quad (1.3)$$

Muni de cette norme,  $D(C_\Lambda)$  est un espace de Banach.  $C_\Lambda \in L(D(C_\Lambda), O)$  et  $X_1 \subset D(C_\Lambda) \subset X$  avec injection continue et  $X_1$  est dense dans  $D(C_\Lambda)$ .

$D$  (ou opérateur feedthrough de  $G$ ) appartient à  $L(U, O)$ .  $G$  désigne la fonction de transfert du système  $(\Pi)$ .

On suppose  $u = 0$ . Le système  $(\Pi)$  est dit en boucle ouverte. On le notera pour la suite  $(\Pi^0)$ .

$$(\Pi^0) \begin{cases} \dot{\phi}(t) = A\phi(t), \\ y(t) = C\phi(t), \\ \phi(0) = \phi_0. \end{cases}$$

### 1.4.1 Admissibilité

De la première équation de  $(\Pi^0)$ , on déduit que  $\phi(t) = T(t)\phi_0$  est solution (même faible). En considérant la deuxième équation de  $(\Pi^0)$ , on remarque que si  $\phi_0 \notin D(A)$ , on peut avoir  $\phi(t) \notin D(A)$  et donc  $y(t)$  n'est pas définie. Pour contourner cette difficulté, on introduit la notion de l'opérateur de sortie admissible  $C$  pour le semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  au sens suivant :

**Définition 1.7** [33] *On dit que  $C$  est un opérateur de sortie admissible pour le semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  ou tout simplement que la paire  $(A, C)$  est admissible s'il existe deux constantes positives  $M, \tau_0$  telles que :*

$$\int_0^{\tau_0} \|CT(t)\phi_0\|_O^2 dt \leq M \|\phi_0\|_X^2. \quad (1.4)$$

On suppose  $u \neq 0$  dans  $\Pi$ .

**Définition 1.8** [40] Avec les mêmes notations,  $B$  est dit opérateur de contrôle admissible pour le semi-groupe  $T(t)$ , si pour un certain  $\tau > 0$  et pour tout  $u \in L^2([0, \infty), U)$  on a  $\Phi_\tau u \in X$ , avec  $\Phi_\tau u$  défini par

$$\Phi_\tau u = \int_0^\tau T(\tau - \sigma)Bu(\sigma) d\sigma.$$

**Propriété 1.1** [40] Si l'opérateur  $B$  est admissible pour le semi-groupe  $(T(t))_{t \geq 0}$  alors, il existe une certaine constante  $k \geq 0$  telle que pour tout complexe  $s \in \mathbb{C}_0$  pris suffisamment grand, on a :

$$\| (sI - A)^{-1}B \|_{L(U, X)} \leq \frac{k}{\sqrt{\Re(s)}}$$

### 1.4.2 Régularité

**Définition 1.9** On dit que le système  $(\Pi)$  ou le quadruplet  $(A, B, C, D)$  est régulier au sens de Weiss si et seulement si :

- i) Les paires  $(A, C)$  et  $(A, B)$  sont admissibles.
- ii)  $\text{Im}(\lambda I - A)^{-1}B \subset D(C_\lambda)$ ,  $\forall \lambda \in \rho(A)$ .
- iii) La fonction de transfert donnée par  $C_\lambda(sI - A)^{-1}B$  est analytique et uniformément borné sur un certain  $\mathbb{C}_\alpha$ .
- iv) La fonction de transfert entrée-sortie définie par  $G(s) = C_\lambda(sI - A)^{-1}B + D$  ( $s \in \mathbb{C}_\alpha$ ) est régulière :

$$\forall v \in U, \lim_{\Re \lambda \rightarrow +\infty} G(\lambda)v \text{ existe et est égale à } Dv$$

où  $D$  désigne l'opérateur feedthrough de  $G$ .

Autrement dit

$$\lim_{\Re \lambda \rightarrow +\infty} C_\lambda(\lambda I - A)^{-1}Bv = 0, \quad v \in U$$

### 1.4.3 Existence et unicité des solutions d'un système régulier

**Théorème 1.4** Soit  $(\Pi) = (A, B, C, D)$  un système linéaire régulier. Alors pour tout  $\phi_0 \in X$  et pour tout  $u \in L^2_{loc}([0, \infty); U)$ , le système :

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = A\phi(t) + Bu(t) \\ y(t) = C_\lambda\phi(t) + Du(t) \\ \phi(0) = \phi_0, \end{cases}$$

admet une solution forte unique

$$\phi(t) = T(t)\phi_0 + \int_0^t T(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

vérifiant  $\phi(0) = \phi_0$ .

De plus, si  $u$  et  $y$  sont continues à droite pour tout  $t \geq 0$ , alors  $\phi(t) \in D(C_\Lambda)$ . ■

On suppose dans cette rubrique que le système (II) est bouclé par la loi de feedback

$$u(t) = Ky(t) + v(t)$$

où  $K$  est l'opérateur feedback de sortie, i.e.,  $K \in L(O, U)$  et  $v(\cdot)$  est une nouvelle entrée (voir FIG. 1.2).

Pour pouvoir définir le système en boucle fermée on introduit la notion d'admissibilité de feedback d'après Weiss [39].

**Définition 1.10** Soit  $\tilde{G}(s)$  une fonction de transfert bien posée. Soit  $K \in L(O, U)$ . On dit que  $K$  est un opérateur de feedback de sortie admissible pour  $\tilde{G}(s)$  si  $I - K\tilde{G}(\cdot)$  est inversible dans  $H_\infty(L(U))$ , i.e., s'il existe un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $I - K\tilde{G}(s)$  est inversible pour tout  $s \in \mathbb{C}_\alpha$  et que l'inverse  $(I - K\tilde{G}(s))^{-1}$  est analytique et uniformément borné sur  $\mathbb{C}_\alpha$ .

**Proposition 1.1** [39] On suppose que la fonction de transfert  $G$  est régulière et que l'opérateur "feedthrough"  $D \in L(U, O)$  est tel que :

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sup_{\delta \in \mathbb{R}} \|G(\sigma + i\delta) - D\| = 0.$$

Alors, pour tout  $K \in L(O, U)$ ,  $K$  est un opérateur de feedback admissible si et seulement si  $I - DK$  est inversible.

On suppose que le système (II) en boucle ouverte est régulier. Soit  $K$  un opérateur feedback de sortie admissible tel que le système (II)<sup>K</sup> en boucle fermée soit aussi régulier. Alors le système (II)<sup>K</sup> en boucle fermée est gouverné par :

$$(II)^K \begin{cases} \dot{\phi}(t) = A^K \phi(t) + B^K u(t), \\ y(t) = C^K \phi(t) + D^K u(t), \\ \phi(0) = \phi_0, \end{cases}$$

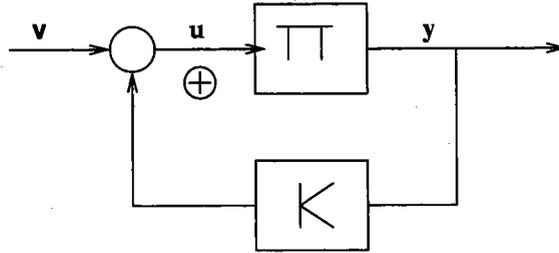


FIG. 1.2 – Système en boucle fermée  $\Pi^K$

où

$$D(C_\Lambda^K) = D(C_\Lambda) \quad (1.5)$$

$$C_\Lambda^K = (I - DK)^{-1}C_\Lambda \quad (1.6)$$

$$B^K = B(I - DK)^{-1} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} D(A^K) = \{x \in D(C_\Lambda), (A + BK(I - DK)^{-1}C_\Lambda)x \in X\} \\ A^K x = (A + BK(I - DK)^{-1}C_\Lambda)x, \forall x \in D(A^K) \\ C^K x = (I - DK)^{-1}C_\Lambda x, \forall x \in D(A^K) \end{cases} \quad (1.8)$$

**Théorème 1.5** [39]

Si  $(\Pi)$  est régulier,  $K$  admissible et  $I - DK$  est inversible, alors  $(\Pi^K)$  est régulier et

$$\begin{cases} G^K(s) = (I - G(s)K)^{-1}G(s), \\ D^K = (I - DK)^{-1}D. \end{cases} \quad (1.9)$$

**Remarque 1.3** [39, 41]

L'observabilité du système  $(\Pi)$  est invariante par un retour de sortie admissible. Autrement dit si  $(\Pi)$  est observable et  $K$  admissible alors  $(\Pi^K)$  est observable.

## 1.5 Préliminaires sur la théorie spectrale

### 1.5.1 Spectre d'un générateur

**Définition 1.11** Le spectre  $\sigma(A)$  d'un générateur  $A$  d'un  $C^0$  semi-groupe est constitué de trois parties mutuellement exclusives :

- $\sigma_p(A)$ , spectre ponctuel,
- $\sigma_c(A)$ , spectre continu,
- $\sigma_r(A)$ , spectre résiduel.
- $\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow (\lambda I - A)$  n'est pas injectif.
- $\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow (\lambda I - A)$  est injectif, mais  $\text{Im}(\lambda I - A) \neq X$  et  $\overline{\text{Im}(\lambda I - A)} = X$
- $\lambda \in \sigma_r(A) \Leftrightarrow \text{Im}(\lambda I - A)$  est injectif, mais  $\overline{\text{Im}(\lambda I - A)} \neq X$

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

**Définition 1.12** Un élément non nul  $x \in X$  est dit vecteur propre généralisé de  $A$ , correspondant à la valeur propre  $\lambda$  de  $A$ , s'il existe un entier positif  $n$  tel que  $(\lambda I - A)^n x = 0$ . Le sous espace propre généralisé de  $A$  correspondant à  $\lambda$  est donné par

$$H_\lambda = \text{Span}\{x / \exists n, (\lambda I - A)^n x = 0\}.$$

La dimension  $m_\lambda$  de  $H_\lambda$  est appelé la multiplicité algébrique de  $\lambda$ . Quand  $m_\lambda = 1$ , on dit que  $\lambda$  est algébriquement simple.

Si  $n = 1$ ,  $m_\lambda$  est appelé la multiplicité géométrique de  $\lambda$ . C'est le nombre de vecteurs propres indépendants associés à la même valeur propre  $\lambda$ .

Si  $n = 1$  et  $m_\lambda = 1$ , on dit que  $\lambda$  est géométriquement simple.

**Remarque 1.4** Si  $\lambda$  est algébriquement simple, alors  $\lambda$  est géométriquement simple.

## 1.5.2 Résolvante d'un générateur

Soit  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  un opérateur linéaire fermé. On dit que  $\lambda$  appartient à l'ensemble résolvant  $\rho(A)$  de  $A$  si  $\lambda I - A$  est bijective et  $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X)$ ; dans ce cas l'opérateur  $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$  est appelé la résolvante de  $A$  en  $\lambda$ . L'ensemble complémentaire de  $\rho(A)$  est le spectre  $\sigma(A)$ .

**Proposition 1.2** Pour qu'un opérateur  $A$  soit à résolvante compacte dans un Hilbert  $X$ , il faut et il suffit que  $\rho(A) \neq \emptyset$  et l'injection de  $D(A)$  (muni de la norme du graphe) dans  $X$  soit compacte. ■

### 1.5.3 Borne spectrale

La borne spectrale de l'opérateur  $A$  est définie par :

$$S(A) = \sup\{\Re e(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (1.10)$$

Souvent dans les applications en ingénierie, on relie  $\omega_0(A)$  à  $S(A)$ . Il est bien connu que  $S(A) \leq \omega_0(A)$ . Au cours de ces dernières décennies, beaucoup d'efforts ont été concentré sur l'établissement de la condition :

$$S(A) = \omega_0(A), \quad (1.11)$$

cette condition étant d'une certaine utilité dans la pratique pour certains systèmes. Remarquons par exemple pour le système (Voir [31])

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + e^{iy}u_x, & -\infty < x, y < +\infty, \\ u(x + 2\pi, y) = u(x, y), u(x, y + 2\pi) = u(x, y), \end{cases} \quad (1.12)$$

$$S(A) = 0, \quad \omega_0(A) \geq \frac{1}{2}.$$

Ce contre exemple nous amène à considérer de manière beaucoup plus attentionnée la condition (1.11) dans le cas des systèmes linéaires de dimension infinie, particulièrement les systèmes vibratoires pour lesquels (1.11) est satisfait à partir de certaines propriétés significatives. Parmi ces propriétés, on peut citer fondamentalement le fait que les vecteurs propres généralisés forment une base de Riesz dans l'espace d'état qui est de Hilbert.

## 1.6 Bases de Riesz

**Définition 1.13** Soit  $(y_n)_{n \geq 1}$  une suite dans un Hilbert  $W$ . Alors  $(y_n)$  est une base de Riesz si elle est équivalente à une base orthonormée  $(x_n)_{n \geq 1}$  de  $W$ , i.e., s'il existe un homéomorphisme linéaire  $L$  tel que  $y_n = Lx_n \quad \forall n \geq 1$

### Caractérisation d'une base de Riesz

Soit  $W$  un Hilbert séparable. Soit  $(x_n)$  une base de  $W$ . Alors la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est une base de Riesz de  $W$  si et seulement si l'espace vectoriel engendré par  $(x_n)_{n \geq 1}$  est dense dans  $W$  et s'il existe  $c_1, c_2 > 0$  /  $c_1 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \leq \|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\|_W^2 \leq c_2 \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ . ■

On se place dans les conditions du théorème 1.5.  $A$  est désigné par l'opérateur en boucle ouverte et  $A^K$  l'opérateur en boucle fermée obtenu par un retour de sortie admissible ( $K$  désigne l'opérateur feedback de sortie admissible). Supposons qu'une suite de vecteurs propres de  $A$  forment une base de Riesz dans  $X$ . Le théorème suivant nous donne des conditions suffisantes pour que les vecteurs propres de  $A^K$  forment une base de Riesz dans  $X$ .

**Théorème 1.6** [48] *On suppose que  $(\Pi)$  régulier et  $K$  admissible.  $A^K$  est défini comme au (1.8). De plus si :*

- i)  $\dim \text{Im}(B)=1$*
- ii)  $A$  est anti-adjoint de valeurs propres  $(i\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et de vecteurs propres correspondant  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  formant une base orthonormée de  $X$ .*
- iii) Pour  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  valeurs propres de  $A^K$  associés aux vecteurs propres  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on suppose qu'il existe un entier positif  $N$ , et une constante réelle  $r > 0$  telle que :*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |(-r + i\gamma_{n+N}) - \lambda_n|^2 < \infty, \quad (1.13)$$

*Alors il existe des vecteurs  $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \dots, \tilde{\psi}_N$  tels que*

$$\{\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2, \dots, \tilde{\psi}_N\} \cup (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

*forment une base de Riesz dans  $X$ .* ■

## Chapitre 2

# Observateurs des systèmes anti-adjoints de dimension infinie

Dans ce chapitre, on se place dans un cadre théorique général. Nous proposons une méthode théorique de construction des observateurs dans le cas des systèmes anti-adjoints de dimension infinie.

On considère le système linéaire autonome et observé sur l'espace d'état  $X$  considéré ici comme espace de Hilbert :

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = A\phi(t) \\ y(t) = C\phi(t) \\ \phi(0) = \phi_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $A$  est générateur d'un  $C^0$  groupe d'opérateurs unitaires sur  $X$  et  $C$  est un opérateur linéaire borné de  $X_1$  dans  $O$ .  $X_1$  désigne l'espace de Banach  $D(A)$  muni de la norme du graphe :

$$\|\varphi\|_{X_1} = \|(\beta I - A)\varphi\|_X$$

Ici on choisit  $\beta \in \rho(A) \cap \rho(-A)$ .

Les espaces de Hilbert  $X$  et  $O$  sont identifiés à leur dual topologique  $X'$  et  $O'$  respectivement.  $X_{-1}$  désignant le dual topologique de  $X_1$ , le produit de dualité sur  $X_1 \times X_{-1}$ , qu'on notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_1 \times X_{-1}}$ , est défini comme l'extension continue du produit scalaire sur  $X$  :

$$\langle \varphi, f \rangle_{X_1 \times X_{-1}} = \langle \varphi, f \rangle_X, \quad \forall \varphi \in X_1, f \in X.$$

On a aussi les injections suivantes qui sont continues et denses :

$$X_1 \subset X \subset X_{-1}$$

L'espace dual  $X_{-1}$  est aussi un espace de Hilbert muni de la norme induite :

$$\|\varphi\|_{X_{-1}} = \|(\beta I + A)^{-1}\varphi\|_X.$$

De plus  $(\beta I - A) \in L(X_1, X)$  et  $(\beta I + A) \in L(X, X_{-1})$  sont des isomorphismes isométriques.  $A$  ici engendre un groupe  $(e^{tA})_{t \in \mathbb{R}}$  qui peut être étendu comme un  $C^0$  semi-groupe sur  $X_{-1}$ . Si  $C^*$  désigne l'opérateur adjoint de  $C$ , alors  $C^* \in L(O, X_{-1})$ . On suppose aussi que la paire  $(A, C)$  est exactement observable. L'observateur que nous proposons ici est gouverné par le système :

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = [A - \kappa C^* C_\Lambda] \psi(t) + \kappa C^* y(t), & \kappa > 0, \\ \psi(0) = \psi_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Dans ce qui suit on adopte la définition restreinte pour la convergence d'un observateur.

**Définition 2.1** *L'observateur (2.2) est dit (exponentiellement) convergent ou stable si le système (2.9) est un système régulier et si le système de l'erreur (2.8) est exponentiellement stable.*

## 2.1 Résultat principal

**Théorème principal 2.1** *Soit  $A$  un générateur d'un  $C^0$  groupe d'opérateurs unitaires sur  $X$ . On suppose que le triplet  $(A, C^*, C)$  est régulier et  $(A, C)$  est exactement observable. Alors l'observateur (2.2) admet une solution unique dans  $C([0, \infty), X)$  pour tout  $(\phi_0, \psi_0) \in X \times X$  et son état converge dans  $X$ , exponentiellement vers celui du système (2.1) pour tout  $0 < \kappa < \frac{1}{K_{max}}$ . De plus l'observateur (2.2) est exponentiellement instable si  $\kappa > \frac{1}{K_{min}}$ . Les quantités  $K_{max}$  et  $K_{min}$  sont définies par :*

$$K_{max} = \sup_{|C_\Lambda f|_O=1} \overline{\lim}_{\substack{\beta \in \mathbb{R}^+ \\ \beta \rightarrow +\infty}} \beta \|(\beta - A)^{-1} C^* C_\Lambda f\|_X^2, \quad (2.3)$$

$$K_{min} = \inf_{|C_\Lambda f|_O=1} \underline{\lim}_{\substack{\beta \in \mathbb{R}^+ \\ \beta \rightarrow +\infty}} \beta \|(\beta - A)^{-1} C^* C_\Lambda f\|_X^2. \quad (2.4)$$

■

**Remarque 2.1** On doit noter que la limite supérieure et  $K_{max}$  sont toutes finies du fait que  $(A, C^*)$  est un système de contrôle bien posé. La limite inférieure et  $K_{min}$  sont aussi finies. Lorsque  $f \in D(A)$ , les limites supérieure et inférieure sont égales (voir les identités dans la Proposition 2.14). Dans ce cas la conclusion du Théorème 2.1 reste valable en remplaçant  $K_{max}$  et  $K_{min}$  par les constantes suivantes :

$$K_{max} = \kappa^{-1} + \kappa^{-2} \sup_{f \in D(A^\kappa), |C_\Delta f|_O=1} \langle A^\kappa f, f \rangle,$$

$$K_{min} = \kappa^{-1} + \kappa^{-2} \inf_{f \in D(A^\kappa), |C_\Delta f|_O=1} \langle A^\kappa f, f \rangle.$$

Il est intéressant de noter que ces constantes  $K_{max}$  et  $K_{min}$  sont indépendantes de  $\kappa$  (voir la preuve ultérieure dans la Proposition 2.14).

**Remarque 2.2** En général il est faux que  $K_{max} = K_{min} = 0$ . Pour s'en convaincre il suffit de considérer l'exemple suivant qui a été emprunté de la littérature [41]. Soit le système décrit par l'EDP sur  $X = L^2(0, 1)$  :

$$\begin{cases} W_t = W_x \\ W(0, t) = W(1, t) \\ W(x, 0) = W^0(x) \end{cases} \quad (2.5)$$

avec l'observation

$$y(t) = W(0, t). \quad (2.6)$$

Il est évident que l'opérateur  $A = \partial_x$  avec son domaine de définition correspondant est le générateur d'un  $C_0$  semigroupe sur  $X$ . L'espace d'observation est  $O = \mathbb{R}$ . L'observateur d'observation  $C : X_1 \rightarrow O$  est tel que  $Cf = f(0)$ . On peut montrer que la paire  $(A, C)$  est admissible et exactement observable. De plus, le triplet  $(A, C^*, C)$  est un triplet régulier. D'après le principal Théorème 2.1 l'observateur Luenberger que nous proposons est gouverné par l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \Omega_t = \Omega_x \\ \Omega(1, t) = \Omega(0, t) - \kappa [\Omega(t, 0) - W(0, t)] \\ \Omega(x, 0) = \Omega^0(x). \end{cases} \quad (2.7)$$

Il est aisé de trouver que  $K_{max} = K_{min} = \frac{1}{2}$ . Donc l'erreur de l'observateur Luenberger (2.7)  $\epsilon = \Omega - W$  converge vers zéro si le gain  $0 < \kappa < 2$ . Cependant l'erreur diverge lorsque  $\kappa > 2$ .

## 2.2 Preuve du théorème 2.1

Pour raison de simplicité, on considère  $X$  comme un espace de Hilbert réel. Les mêmes résultats sont valables via une légère modification de la preuve du théorème dans le cas où  $X$  est un Hilbert complexe.

ETAPE I . EXISTENCE ET UNICITÉ DES SOLUTIONS DE L'OBSERVATEUR (2.2)

On montre que l'observateur (2.2) admet une solution unique dans  $C([0, \infty), X)$ .

Soit  $A^\kappa = A - \kappa.C^*C_\Lambda$  et  $\varepsilon(t) = \psi(t) - \phi(t)$ . On considère l'estimation de l'erreur qui vérifie l'équation d'évolution :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = A^\kappa \varepsilon(t) & , \kappa > 0, \\ \varepsilon(0) = \varepsilon_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Soit le système auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{\Omega}(t) = A\Omega(t) + C^*v(t) \\ z(t) = C_\Lambda\Omega(t). \end{cases} \quad (2.9)$$

Par hypothèse le triplet  $(A, C^*, C)$  est régulier (avec l'opérateur feedthrough nul). Soit  $G(s)$  la fonction de transfert du triplet  $(A, C^*, C_\Lambda)$  représentant le système auxiliaire (2.9). Par régularité  $G(s) = C_\Lambda(sI - A)^{-1}C^* \in H^\infty(\mathbb{C}_\alpha, L(O))$  pour un certain  $\alpha > 0$  et

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} G(s)v = 0 \quad \forall v \in O. \quad (2.10)$$

On en déduit aussi que l'opérateur "feedthrough" est nul pour le système auxiliaire (2.9).

Soit la fonction (ou l'opérateur) de transfert  $\tilde{G}(s) : U \rightarrow U$  bien posée telle que  $\tilde{G} \in H^\infty(\mathbb{C}_0)$ . On dit que  $\tilde{G}(s)$  est une fonction de transfert réelle positive si  $\tilde{G}(s) + \tilde{G}(s)^* \geq 0$  pour tout  $s \in \mathbb{C}_0$ .

**Proposition 2.1** *La fonction de transfert du système (2.9) est réelle positive.*

Preuve de la Proposition 2.1 : Puisque  $G(s) = C_\Lambda(s - A)^{-1}C^*$ , alors son adjoint  $G(s)^* = C_\Lambda(\bar{s} + A)^{-1}C^*$ . En effet, soit  $u, v \in U$ . Soit  $s \in \mathbb{C}_0$ . Par définition et par commutativité entre opérateurs de résolvante, nous obtenons les identités suivantes :

$$\langle G(s)u, v \rangle_U = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle \lambda C(\lambda - A)^{-1}(s - A)^{-1}C^*u, v \rangle_U$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle \lambda(\lambda - A)^{-1}(s - A)^{-1}C^*u, C^*v \rangle_{X_1, X_{-1}} \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle (s - A)^{-1}C^*u, \lambda(\lambda + A)^{-1}C^*v \rangle_X \\
&= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle u, \lambda C(\lambda + A)^{-1}(\bar{s} + A)^{-1}C^*v \rangle_U = \langle u, G(s)^*v \rangle_U.
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que  $G(s) + G(s)^*$  est positif pour tout  $s \in \mathbb{C}_0$ . Par définition, on a

$$\begin{aligned}
\langle [G(s) + G(s)^*]u, u \rangle_U &= \langle C_\Lambda [(s - A)^{-1} + (\bar{s} + A)^{-1}] C^*u, u \rangle_U \\
&= \langle (s + \bar{s})C_\Lambda (s - A)^{-1}(\bar{s} + A)^{-1}C^*u, u \rangle_U = 2\Re(s) \langle (s - A)^{-1}C^*u, (s - A)^{-1}C^*u \rangle_U \\
&= 2\Re(s) \|(s - A)^{-1}C^*u\|_X^2 \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0.
\end{aligned}$$

Ainsi la preuve de la proposition est complète.  $\blacksquare$

**Proposition 2.2** *Soit  $\tilde{G}(s)$  une fonction de transfert réelle positive. Alors, pour chaque  $\kappa > 0$  l'opérateur de feedback de sortie  $K = -\kappa I$  est admissible pour  $\tilde{G}(s)$ .*

Preuve de la Proposition 2.2 : On présente la preuve de Weiss et Curtain [41] qui démontre un peu plus que l'énoncée de Proposition 2.2. On démontre l'assertion suivante : si  $cI + \tilde{G}(s)$  est réelle positive pour un certain  $c \geq 0$ , alors, pour tout  $k \in (0, 1/c)$ , l'opérateur  $K = -kI$  est admissible pour  $\tilde{G}(s)$ . En particulier, pour  $c = 0$  on obtient que  $K = -kI$  est admissible pour  $\tilde{G}(s)$ ,  $\forall k > 0$ .

Il suffit de prouver que  $I - K\tilde{G}(s)$  est inversible dans  $H^\infty(\mathbb{C}_0)$ . En effet,  $I - K\tilde{G}(s) = k(a + \tilde{G}(s))$ , où  $a = 1/k$ . Les inégalités suivantes sont évidentes :

$$\begin{aligned}
\left| \left[ aI + \tilde{G}(s) \right] u \right|_U |u|_U &\geq \left| \left\langle \left[ aI + \tilde{G}(s) \right] u, u \right\rangle_U \right| \geq \left| \Re \left\langle \left[ aI + \tilde{G}(s) \right] u, u \right\rangle_U \right| \\
&= \left| \left\langle \left[ aI + \frac{1}{2} (\tilde{G}(s) + \tilde{G}(s)^*) \right] u, u \right\rangle_U \right|.
\end{aligned}$$

En posant  $T(s) = aI + \frac{1}{2} (\tilde{G}(s) + \tilde{G}(s)^*)$ , on peut écrire

$$\left| \left[ aI + \tilde{G}(s) \right] u \right|_U |u|_U \geq \langle T(s)u, u \rangle_U \geq (a - c)|u|_U^2.$$

Donc, pour tout  $s \in \mathbb{C}_0$ ,

$$\left| \left[ aI + \tilde{G}(s) \right] u \right|_U \geq (a - c)|u|_U. \tag{2.11}$$

Par (2.11), l'opérateur  $(aI + \tilde{G}(s))$  est injectif et à l'image fermée. Montrons que l'image de  $(aI + \tilde{G}(s))$  est dense. Cela impliquera que  $(aI + \tilde{G}(s))$  est surjectif. Soit  $\xi \in U$  tel que

$$\left\langle [aI + \tilde{G}(s)] u, \xi \right\rangle_U = 0, \quad \forall u \in U.$$

Alors, en particulier,  $\left\langle [aI + \tilde{G}(s)] \xi, \xi \right\rangle_U = 0$ . Par conjugaison cela implique que

$$\left\langle [2aI + \tilde{G}(s) + \tilde{G}(s)^*] \xi, \xi \right\rangle_U = 0.$$

Or,

$$2(a - c) \|\xi\|_U^2 \leq \left\langle [2aI + \tilde{G}(s) + \tilde{G}(s)^*] \xi, \xi \right\rangle_U.$$

Puisque  $a > c$ , on obtient  $\xi = 0$ . Donc l'image de  $(aI + \tilde{G}(s))$  est dense. L'opérateur  $aI + \tilde{G}(s)$  étant à la fois injectif et surjectif admet un inverse continu. A partir de (2.11) on obtient

$$\left\| [aI + \tilde{G}(s)]^{-1} \right\|_{L(U)} \leq \frac{1}{a - c}, \quad \forall s \in \mathbb{C}_0.$$

Donc  $[aI + \tilde{G}(s)]^{-1} \in H^\infty(\mathbb{C}_0)$ . D'après la définition 1.10,  $K$  est admissible pour  $\tilde{G}(s)$  pour tout  $k \in (0, 1/c)$ . ■

Pour le système (2.9), tout opérateur feedback de sortie  $K = -\kappa I$ ,  $\kappa > 0$ , est admissible (où  $I$  désigne l'opérateur identité dans  $O$ ). Par conséquent, le système suivant obtenu en boucle fermée par le feedback  $v(t) = Kz(t) + \kappa\xi(t)$  est aussi régulier avec "feedthrough" nul (d'après théorème 1.5).

$$\begin{cases} \dot{\Omega}(t) = [A - \kappa C^* C_\Lambda] \Omega(t) + \kappa \xi(t), & \kappa > 0, \\ z(t) = C_\Lambda \Omega(t). \end{cases} \quad (2.12)$$

Notons que si  $\xi(t) = y(t)$ , le système en boucle fermée (2.12) n'est rien d'autre que l'observateur (2.2). Comme conséquence du théorème 1.4 et du (1.8), l'opérateur  $A^\kappa$  est générateur d'un  $C^0$  semi-groupe en boucle fermée et est défini par :

$$\begin{cases} D(A^\kappa) = \{\varphi \in D(C_\Lambda) / (A - \kappa C^* C_\Lambda)\varphi \in X\} \\ A^\kappa \varphi = (A - \kappa C^* C_\Lambda)\varphi, \quad \forall \varphi \in D(A^\kappa) \end{cases} \quad (2.13)$$

De plus le système d'observation (2.2) est régulier et  $\forall (\phi_0, \psi_0) \in X \times X$ , on a  $y \in L_{loc}^2([0, \infty), O)$ ,  $\psi \in C([0, \infty), X)$  avec

$$\psi(t) = e^{tA^\kappa} \psi_0 + \kappa \int_0^t e^{(t-\tau)A^\kappa} C^* C_\Lambda e^{\tau A} \phi_0 d\tau.$$

## ETAPE II. ESTIMATION EXPONENTIELLE DE L'ERREUR

**Proposition 2.3** Pour tout  $\varepsilon(0) \in D(A^\kappa)$ , la solution du système satisfait les identités suivantes :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varepsilon(t)\|_X^2 = \langle A^\kappa \varepsilon(t), \varepsilon(t) \rangle_X \quad (2.14)$$

$$= -\kappa \|C_\Lambda \varepsilon(t)\|_O^2 + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \kappa^2 \beta \|R(\beta, A)C^*C_\Lambda \varepsilon\|_X^2 \quad (2.15)$$

■

### Preuve de la Proposition 2.14

L'égalité (2.14) est évidente.

Pour la preuve de l'égalité (2.15), on rappelle que pour tout  $\lambda \in \rho(A)$ ,  $R(\lambda, A)$  est un isomorphisme de  $X$  dans  $X_{-1}$ ;  $R(\lambda, A)$  commute avec  $A$  sur  $D(A)$  et on a aussi les convergences suivantes dans  $X$  :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, -A)x = x \quad \forall x \in X. \quad (2.16)$$

Soit  $\beta \in \rho(A) \cap \mathbb{R}^+$  fixé. On remarque facilement que

$$\varepsilon + R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon = R(\beta, A)[\beta \varepsilon - A^\kappa \varepsilon] \in D(A), \quad \forall \varepsilon \in D(A^\kappa),$$

ce qui s'écrit encore

$$A^\kappa \varepsilon = A[\varepsilon + R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon] - \beta R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \in D(A^\kappa).$$

Par passage au produit scalaire dans  $X$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle A^\kappa \varepsilon, \varepsilon \rangle_X &= \langle A[\varepsilon + R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon], \varepsilon \rangle_X - \langle \beta R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon, \varepsilon \rangle_X \\ &= \langle A[\varepsilon + R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon], [\varepsilon + R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon] - R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon \rangle_X \\ &\quad - \langle \beta R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon, \varepsilon \rangle_X \\ &= \langle A[\varepsilon + R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon], [\varepsilon + R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon] \rangle_X \\ &\quad - \langle A[\varepsilon + R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon], R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon \rangle_X \\ &\quad - \langle \beta R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon, \varepsilon \rangle_X \end{aligned}$$

$A$  étant anti-adjoint ,

$$\langle A[\varepsilon + R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon], [\varepsilon + R(\beta, A)\kappa C^*C_\Lambda \varepsilon] \rangle_X = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle A^* \varepsilon, \varepsilon \rangle_X &= - \langle A [\varepsilon + R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon], R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon \rangle_X \\ &\quad - \langle \beta R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon, \varepsilon \rangle_X. \end{aligned} \quad (2.17)$$

D'après (2.16), et le caractère anti-adjoint de  $A$  dans  $X$  on obtient successivement,

$$\begin{aligned} &- \langle A [\varepsilon + R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon], R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon \rangle_X \\ &= - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle A [\varepsilon + R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon], \lambda R(\lambda, A) R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon \rangle_X \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle [\varepsilon + R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon], -\lambda A R(\lambda, A) R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon \rangle_X \end{aligned} \quad (2.18)$$

Or, comme  $A$  commute avec  $R(\lambda, A)$ , donc

$$-\lambda A R(\lambda, A) R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon = -\lambda R(\lambda, A) [A R(\beta, A)] \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon.$$

De l'identité

$$(\beta I - A) R(\beta, A) = I,$$

on déduit que

$$[A R(\beta, A)] = [-I + \beta R(\beta, A)]. \quad (2.19)$$

Du (2.19), (2.18) on déduit

$$\begin{aligned} &- \langle A [\varepsilon + R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon], -R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon \rangle_X \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle [\varepsilon + R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon], -\lambda R(\lambda, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon \\ &\quad + \beta R(\beta, A) \lambda R(\lambda, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon \rangle_X \end{aligned} \quad (2.20)$$

De même

$$- \langle \beta R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon, \varepsilon \rangle_X = - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle \beta R(\beta, A) \lambda R(\lambda, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon, \varepsilon \rangle_X. \quad (2.21)$$

En substituant (2.21), (2.20) dans (2.17), on obtient

$$\begin{aligned} \langle A^* \varepsilon, \varepsilon \rangle_X &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle \varepsilon, -\lambda R(\lambda, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon \rangle_X \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon, -\lambda R(\lambda, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon \rangle_X \\ &\quad + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle R(\beta, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon, \beta R(\beta, A) \lambda R(\lambda, A) \kappa C^* C_\Lambda \varepsilon \rangle_X. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Les limites dans l'expression (2.22) existent et sont bien définies. En effet,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle \varepsilon, -\lambda R(\lambda, A) \kappa C^* C_{\Lambda} \varepsilon \rangle_X = -\kappa \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle C \lambda R(\lambda, -A) \varepsilon, C_{\Lambda} \varepsilon \rangle_O = -\kappa \| C_{\Lambda} \varepsilon \|_O^2, \quad (2.23)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle R(\beta, A) \kappa C^* C_{\Lambda} \varepsilon, -\lambda R(\lambda, A) \kappa C^* C_{\Lambda} \varepsilon \rangle_X \quad (2.24)$$

$$= -\kappa^2 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle C \lambda R(\lambda, -A) R(\beta, A) C^* C_{\Lambda} \varepsilon, C_{\Lambda} \varepsilon \rangle_O = -\kappa^2 \langle G(\beta) C_{\Lambda} \varepsilon, C_{\Lambda} \varepsilon \rangle_O, \quad (2.25)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \langle R(\beta, A) \kappa C^* C_{\Lambda} \varepsilon, \beta R(\beta, A) \lambda R(\lambda, A) \kappa C^* C_{\Lambda} \varepsilon \rangle_X = \kappa^2 \beta \| R(\beta, A) C^* C_{\Lambda} \varepsilon \|_X^2. \quad (2.26)$$

En récapitulant (2.22), (2.23), (2.24) et (2.26) on obtient l'identité suivante pour tout  $\varepsilon$  dans  $D(A^{\kappa})$ ,

$$\langle A^{\kappa} \varepsilon, \varepsilon \rangle_X = -\kappa \| C_{\Lambda} \varepsilon \|_O^2 - \kappa^2 \langle G(\beta) C_{\Lambda} \varepsilon, C_{\Lambda} \varepsilon \rangle_O + \kappa^2 \beta \| R(\beta, A) C^* C_{\Lambda} \varepsilon \|_X^2. \quad (2.27)$$

Puisque (2.27) est vraie pour tout  $\beta \in \rho(A) \cap \mathbb{R}^+$ , en passant à la limite quand  $\beta \rightarrow +\infty$  on a d'après (2.10), l'expression (2.27) qui s'écrit encore

$$\langle A^{\kappa} \varepsilon, \varepsilon \rangle_X = -\kappa \| C_{\Lambda} \varepsilon \|_O^2 + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \kappa^2 \beta \| R(\beta, A) C^* C_{\Lambda} \varepsilon \|_X^2. \quad (2.28)$$

Ceci achève la preuve de la proposition. ■

• Lorsque  $0 < \kappa < \frac{1}{K_{max}}$ , stabilité exponentielle de l'erreur

D'après la propriété 1.1 on a  $\sqrt{\beta} \| R(\beta, A) C^* C_{\Lambda} \varepsilon \|_{L(O, X)}$  est uniformément borné pour tout  $\beta > 0$ . Ainsi la quantité  $K_{max}$  est bien définie. En outre on a d'après (2.3)

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \kappa^2 \beta \| R(\beta, A) C^* C_{\Lambda} \varepsilon \|_X^2 \leq \kappa^2 K_{max} \| C_{\Lambda} \varepsilon \|_O^2. \quad (2.29)$$

Par suite de l'inégalité précédente et de la proposition 2.14, on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \varepsilon(t) \|_X^2 \leq -\kappa(1 - \kappa K_{max}) \| C_{\Lambda} \varepsilon \|_O^2 \quad \forall \varepsilon \in D(A^{\kappa}), \quad (2.30)$$

et pour tout  $t \geq 0$  on a,

$$\| \varepsilon(t) \|_X^2 \leq \| \varepsilon_0 \|_X^2 - 2\kappa(1 - \kappa K_{max}) \int_0^t \| C_{\Lambda} \varepsilon(\tau) \|_O^2 d\tau \quad (2.31)$$

Puisque le système en boucle ouverte est exactement observable, le système (2.8) est aussi exactement observable d'après remarque 1.3. Cela implique, d'après la caractérisation (1.1), qu'il existe 2 constantes positives  $\tilde{\tau}_0$  et  $\tilde{m}$  telles que :

$$\int_0^{\tilde{\tau}_0} \|C_\Lambda \varepsilon(t)\|_O^2 dt \geq \frac{\tilde{m}}{2\kappa} \|\varepsilon_0\|_X^2. \quad (2.32)$$

En substituant (2.32) dans (2.31), on obtient :

$$\|\varepsilon(\tilde{\tau}_0)\|_X^2 \leq [1 - \tilde{m}(1 - \kappa K_{max})] \|\varepsilon_0\|_X^2.$$

On vient de montrer que pour tout  $\varepsilon_0 \in D(A^\kappa)$ ,

$$\|e^{\tau_0 A^\kappa} \varepsilon_0\|_X^2 \leq (1 - \tilde{m}) \|\varepsilon_0\|_X^2, \quad (2.33)$$

avec

$$\tilde{m} = \tilde{m}(1 - \kappa K_{max}).$$

Des propriétés de semi-groupe, il découle

$$\|\varepsilon(t)\|_X^2 \leq m e^{-rt} \|\varepsilon_0\|_X^2,$$

avec

$$m = \sup_{t \in [0, \tilde{\tau}_0]} \|e^{tA^\kappa}\|$$

et

$$r = \tilde{\tau}_0^{-1} \ln[(1 - \tilde{m})^{-1}].$$

En conclusion, l'estimation de l'erreur tend exponentiellement vers 0 dans  $X$  pour tout

$$0 < \kappa < \frac{1}{K_{max}}.$$

• **Lorsque  $\kappa > \frac{1}{K_{min}}$ , instabilité exponentielle de l'erreur**

L'expression (2.4) nous révèle que

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \kappa^2 \beta \|R(\beta, A)C^*C_\Lambda \varepsilon\|_X^2 \geq \kappa^2 K_{min} \|C_\Lambda \varepsilon\|_O^2.$$

Le raisonnement est similaire à celui du cas précédent. Par (2.15) on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\varepsilon(t)|_X^2 \geq \kappa(\kappa K_{min} - 1) |C_\Lambda \varepsilon(t)|_O^2. \quad (2.34)$$

En utilisant (2.32) dans (2.34), on obtient

$$|\varepsilon(\tilde{\tau}_0)|_X^2 \geq \left\{ 1 + \tilde{m}(\kappa K_{\min} - 1) \right\} |\varepsilon_0|_X^2. \quad (2.35)$$

En posant  $\tilde{\tilde{m}} = \tilde{m}(\kappa K_{\min} - 1)$ , l'inégalité (2.35) s'écrit

$$|\varepsilon(\tilde{\tau}_0)|_X^2 \geq (1 + \tilde{\tilde{m}}) |\varepsilon_0|_X^2. \quad (2.36)$$

Noter que  $\tilde{\tilde{m}} > 0$  lorsque  $\kappa > 1/K_{\min}$ .

Soit  $t \geq 0$ . On peut l'écrire sous la forme :  $t = n\tilde{\tau}_0 + \theta$ , où  $\theta \in [0, \tilde{\tau}_0)$ . En utilisant (2.36) et la propriété du semigroupe on trouve aisément l'inégalité suivante :

$$|e^{tA^\kappa} \varepsilon_0|_X^2 \geq (1 + \tilde{\tilde{m}})^n |e^{\theta A^\kappa} \varepsilon_0|_X^2. \quad (2.37)$$

En utilisant (2.36) encore une fois,

$$(1 + \tilde{\tilde{m}}) |\varepsilon_0|_X^2 \leq |e^{\tilde{\tau}_0 A^\kappa} \varepsilon_0|_X^2 \leq \tilde{K} |e^{\theta A^\kappa} \varepsilon_0|_X^2,$$

où

$$\tilde{K} = \sup_{t \in [0, \tilde{\tau}_0]} |e^{tA^\kappa}|_{L(X)}.$$

Par conséquent,

$$|e^{\theta A^\kappa} \varepsilon_0|_X^2 \geq \frac{1 + \tilde{\tilde{m}}}{\tilde{K}} |\varepsilon_0|_X^2. \quad (2.38)$$

Substituer (2.38) dans (2.37) permet d'obtenir

$$|e^{tA^\kappa} \varepsilon_0|_X^2 \geq \tilde{K}^{-1} (1 + \tilde{\tilde{m}})^{n+1} |\varepsilon_0|_X^2 \geq \tilde{K}^{-1} e^{\frac{t \ln(1 + \tilde{\tilde{m}})}{\tilde{\tau}_0}} |\varepsilon_0|_X^2.$$

Donc  $|e^{tA^\kappa} \varepsilon_0|_X$  croît exponentiellement vers l'infini lorsque  $t \rightarrow \infty$ . La preuve du Théorème 2.1 est complète. ■

# Chapitre 3

## Applications pour un système hybride : body-beam

### 3.1 Présentation du modèle hybride et des observateurs

#### 3.1.1 Présentation du modèle

Le modèle que nous considérons ici est un système mécanique de corps-poutre introduit par Bailleul et Levi [2] pour modéliser certaines structures de l'aérospatial (satellite avec antenne). Ce système est constitué d'une poutre (**p**) libre à une extrémité et encastrée à l'autre extrémité perpendiculairement à un disque (**d**). Le disque (**d**) peut tourner librement autour d'un axe fixe avec une vitesse angulaire  $\omega(t)$ . La poutre est contrainte à se mouvoir dans un plan fixe perpendiculaire au plan du disque (**d**) (voir FIG. 3.1). On suppose que la poutre n'est pas extensible. La formulation Lagrangienne donne les équations dynamiques du déplacement transversal  $u(x, t)$  de la poutre et de la vitesse angulaire  $\omega(t)$  du disque :

$$\begin{cases} \rho u_{tt}(x, t) + EIu_{xxxx}(x, t) + \rho B u_t(x, t) = \rho \omega^2(t) u(x, t) \\ \omega_t(t) = \frac{\Gamma(t) - 2\omega(t) \int_0^L \rho u(x, t) u_t(x, t) dx}{I_d + \int_0^L \rho u^2(x, t) dx} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ t \geq 0 \end{cases}$$

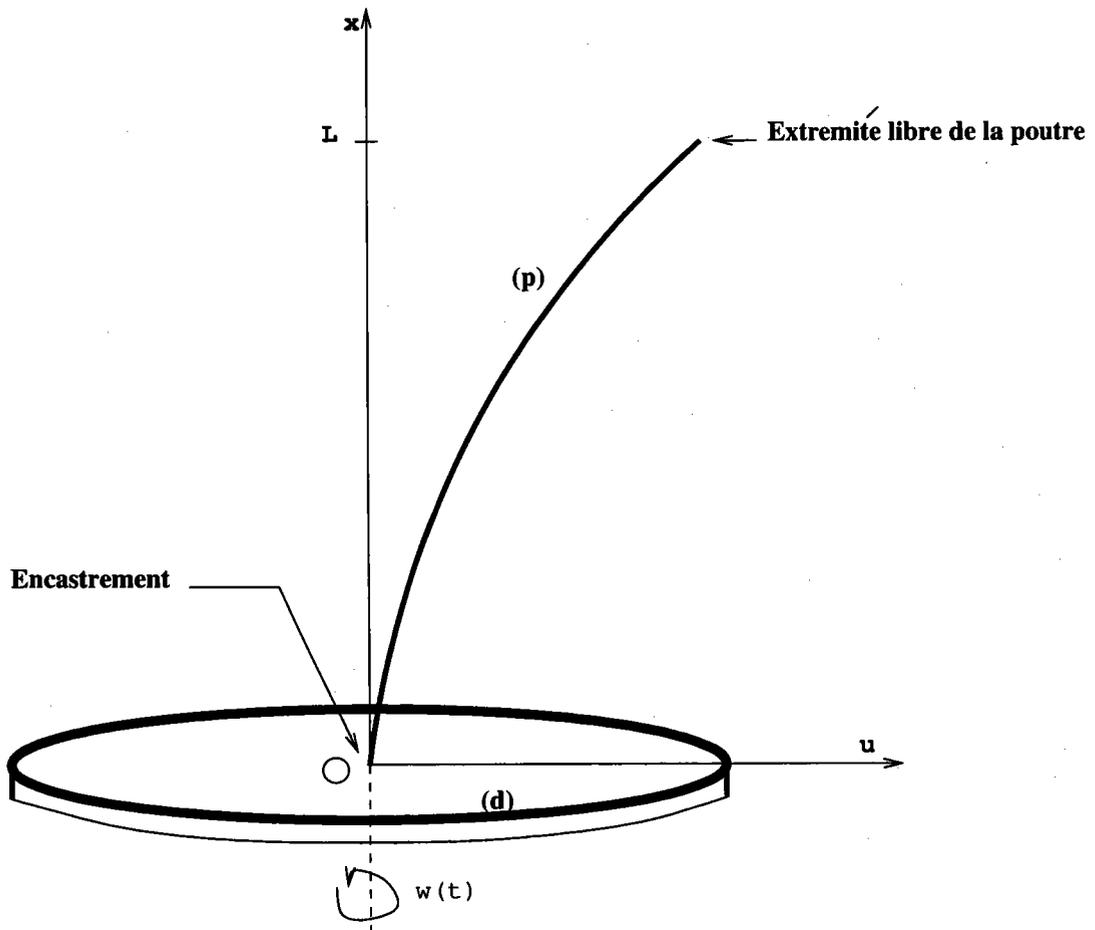


FIG. 3.1 - body-beam system



Satisfaisant les conditions frontières :

$$\begin{cases} u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \text{ (conditions d'encastrement.)} \\ u_{xx}(1, t) = \Gamma_1(t) \\ u_{xxx}(1, t) = \Gamma_2(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Où  $\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \Gamma_3(t)$  représentent respectivement le contrôle du moment, le contrôle de la force et le contrôle du couple. Les constantes  $I_d, L, EI, \rho$  représentent respectivement le moment d'inertie du disque ( $\mathbf{d}$ ), la longueur, la rigidité élastique et la densité massique de la poutre ( $\mathbf{p}$ ). L'opérateur  $B$  caractérise le frottement présent dans le système. Pour le frottement visqueux,  $Bu_t(x, t) = ku_t(x, t)$  et pour le frottement structurel  $Bu_t(x, t) = ku_{xxxxt}(x, t)$  (voir [32] pour détails).

Pour la suite, on supprime les frottements. On supposera pour raison de simplicité que

$$L = EI = \rho = 1.$$

Le système simplifié que nous prendrons en compte pour toute la suite, est gouverné par :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = \omega_*^2 u(x, t) & t > 0, \quad x \in (0, 1) \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 & t > 0, \\ u_{xx}(1, t) = u_{xxx}(1, t) = 0 & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = v_0(x) & x \in (0, 1) \\ y(t) = u_{xx}(0, t), & t > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\omega_*$  est une constante positive quelconque et  $y(t)$  est la seule mesure du moment de force au point d'encastrement.

Posons

$$H_L^2(0, 1) = \{f/f, f_x \in L^2(0, 1), f(0) = f_x(0) = 0\}$$

L'espace d'état pour le système (3.3) est l'espace de Hilbert

$$X = H_L^2(0, 1) \times L^2(0, 1),$$

muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_X = \int_0^1 \{f_{1xx}(x)g_{1xx}(x) + f_2(x)g_2(x) - \omega_*^2 f_1(x)g_1(x)\} dx.$$

L'espace d'observation est  $O = \mathbb{R}$  muni de son produit scalaire usuel.

A l'aide de  $A_0$  défini dans (3.19) on définit l'opérateur  $A_{\omega_*}$  par :

$$D(A_{\omega_*}) = D(A_0) \times H_L^2(0, 1), \quad (3.4)$$

et pour tout  $u, v \in D(A_{\omega_*})$

$$A_{\omega_*} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (x) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 + \omega_*^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (x). \quad (3.5)$$

Pour toute la suite, on désignera par  $A$  l'opérateur  $A_{\omega_*}$  pour  $\omega_* = 0$ .

**Remarque 3.1** *Il a été montré par XU et BAILLEUL dans [45] que dans le cas  $\omega_*^2 < l_1$  l'opérateur  $A$  défini dans (3.4)-(3.5) engendre un  $C^0$  groupe d'opérateurs unitaires sur  $X$  et que l'opérateur de sortie  $C$  défini par  $C(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1)_{xx}(0)$  appartient à  $L(X_1, O)$ .*

### 3.1.2 Observateurs exponentiels pour le modèle

L'observateur que nous proposons est gouverné par :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_1(x, t) = \psi_2(x, t) - \kappa \cdot F(x) [\partial_x^2 \psi_1(0, t) - y(t)], \quad \kappa > 0, t > 0, x \in (0, 1), \\ \partial_t \psi_2(x, t) = -\partial_x^4 \psi_1(x, t) + \omega_*^2 \psi_1(x, t), \\ \psi_1(0, t) = \partial_x \psi_1(0, t) = 0, \\ \partial_x^2 \psi_1(1, t) = \partial_x^3 \psi_1(1, t) = 0, \\ \psi_1(x, 0) = \psi_1^0(x), \psi_2(x, 0) = \psi_2^0(x), \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $F(x)$  est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} F''''(x) + \omega_*^2 F(x) = 0 \\ F(0) = F''(1) = F''''(1) = 0 \\ F'(0) = 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Observateur pour tout gain  $\kappa > 0$

**Théorème 3.1** *On suppose que la constante  $\omega_*^2$  est plus petite que la première valeur propre  $l_1$  de  $A_0$ , i.e.,  $0 \leq \omega_* < \sqrt{l_1}$ . Alors le système 3.3 et l'observateur (3.6) admettent une solution unique dans  $C([0, \infty), X \times X)$  pour tout  $(u_0, v_0, \psi_1^0, \psi_2^0) \in X \times X$ . De plus l'observateur (3.6) est partiellement exponentiellement stable pour tout gain  $\kappa > 0$ . ■*

**Remarque 3.2** *La stabilité partielle prise en compte dans le théorème 3.1 est au sens décrite dans [49]. Il s'agit de la stabilité exponentielle sur l'espace engendré par les vecteurs propres de  $A_{\omega_*}^\kappa$ , et dont les valeurs propres associées sont à module grand.*

Preuve du théorème 3.1 : Il s'agit de vérifier les conditions du théorème principal 2.1.

L'exacte observabilité du couple  $(A, C)$  et la régularité du triplet  $(A, C, C^*)$  se trouvent démontrées dans le chapitre 3. On montre aussi à partir du lemme C.1 que  $K_{max} = 0$ . Ce qui nous permet d'obtenir la stabilité exponentielle de l'observateur (3.6) pour tout gain  $\kappa > 0$ . ■

### 3.1.3 Observateur pour toute vitesse de convergence voulue

**Corollaire 3.1** *La vitesse de convergence de l'observateur (3.6) peut être rendue aussi grande que l'on souhaite en remplaçant la correction  $\kappa \cdot \begin{bmatrix} F(x) \\ 0 \end{bmatrix}$  par  $\kappa \cdot \begin{bmatrix} F(x) \\ 0 \end{bmatrix} + B(x)$  avec  $\kappa$  et  $B(x)$  bien choisis.* ■

#### Preuve du Corollaire 3.1

On donnera la preuve dans le cas  $\omega_* = 0$ , i.e.,  $F(x) = x$ .

Soit  $\beta > 0$ . On cherche à construire  $\kappa > 0$  tel que le taux de décroissance de l'observateur (3.6)  $\omega_0(A^\kappa) \geq -\beta$  (i.e.  $\|e^{t(A^\kappa)}\| = O(e^{-\beta t})$ ). Pour cela soit  $X_u$  le sous espace engendré par les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  de  $A^\kappa$ . Considérons la projection  $P : X \rightarrow X_u$  et posons  $X_s = (I - P)X$ . On fixe d'abord  $\kappa$  suffisamment grand tel que  $2\kappa > \beta$ . D'après le Lemme 3.8 et le Théorème 3.6, on a  $(I - P)(e^{t(A^\kappa)}) = O(e^{-t\beta})$ . Sur  $X_u$ , la paire  $(A^\kappa, C)$  est exactement observable. Puisque  $X_u$  est de dimension finie, il est possible de placer le pôle, donc de choisir  $\kappa$  et  $B(x)$  tels que  $e^{t(A^\kappa + BC\Lambda)} = O(e^{-\beta t})$  (cf. Triggiani [35]). ■

## Observateur dans le cas où la vitesse angulaire $\omega(t)$ n'est pas constante

Le système considéré ici est régi par :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = \omega^2(t)u(x, t) & t > 0, \quad x \in (0, 1) \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 & t > 0, \\ u_{xx}(1, t) = u_{xxx}(1, t) = 0 & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), u_t(0, x) = v_0(x) & x \in (0, 1), \\ y(t) = u_{xx}(0, t), & t > 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Le lemme suivant nous renseigne sur la régularité des solutions du système (3.8) pour  $\omega(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Lemme 3.1** *On suppose que la fonction  $\omega(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Alors le système (3.8) admet une unique et bonne solution  $(u, u_t) \in C(\mathbb{R}, X)$  pour tout  $(u_0, v_0) \in X$ . De plus, si  $(u_0, v_0) \in D(A)$  alors l'unique solution  $(u, u_t) \in C(\mathbb{R}, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}, X)$  et satisfait le système (3.8) pour presque tout  $t \in \mathbb{R}$ . ■*

### Preuve du lemme 3.1

Soient  $\Phi = (u, u_t)$ ;  $B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}$  qui est un opérateur linéaire borné sur  $X$ . Le système (3.8) peut se mettre sous la forme.

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi + \omega^2(t)B_0\Phi \\ \Phi(0) = (u_0, v_0)^T. \end{cases}$$

Le système a une unique bonne solution donnée par la formule de variation de constantes :

$$\Phi(t) = e^{tA}\Phi(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\omega^2(\tau)B_0\Phi(\tau) d\tau.$$

Alors pour tout  $(u_0, v_0) \in X$ , on a  $\Phi \in C(\mathbb{R}, X)$ . Si  $(u_0, v_0) \in D(A)$ , alors  $\Phi(t)$  est presque partout différentiable car  $AB_0 \in L(X)$ . ■

**Corollaire 3.2** *On suppose  $0 \leq \omega_* < \sqrt{l_1}$  et  $\omega(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Soit  $\epsilon > 0$  telle que*

$$|\omega(t) - \omega_*| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.9)$$

*On peut toujours opérer un choix sur  $\epsilon$  tel que l'observateur obtenu en remplaçant  $\omega_*$  par tout  $\omega(t)$  dans (3.6) soit exponentiellement stable. ■*

### Preuve du corollaire 3.2

La preuve est essentiellement basée sur le lemme de Gronwall.

L'observateur considéré ici est alors régi par le système

$$\begin{cases} \partial_t \psi_1(x, t) = \psi_2(x, t) - \kappa.F(x)[\partial_x^2 \psi_1(0, t) - y(t)], \kappa > 0, t > 0, x \in (0, 1), \\ \partial_t \psi_2(x, t) = -\partial_x^4 \psi_1(x, t) + \omega^2(t)\psi_1(x, t), \\ \psi_1(0, t) = \partial_x \psi_1(0, t) = 0, \\ \partial_x^2 \psi_1(1, t) = \partial_x^3 \psi_1(1, t) = 0, \\ \psi_1(x, 0) = \psi_1^0(x), \psi_2(x, 0) = \psi_2^0(x), \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $F(x)$  vérifie toujours (3.7).

L'erreur associée vérifie alors le système suivant

$$\begin{cases} \dot{\Upsilon} = A_{\omega_*}^\kappa \Upsilon + (\omega^2(t) - \omega_*^2) B_0 \Upsilon \\ \Upsilon(0) = \Upsilon_0, \end{cases} \quad (3.11)$$

Où l'opérateur  $A_{\omega_*}^\kappa$  est défini par :

$$D(A_{\omega_*}^\kappa) = D(A) = D(A_0) \times H_L^2(0, 1), \quad (3.12)$$

et pour tout  $\Upsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in D(A_{\omega_*}^\kappa)$

$$A_{\omega_*}^\kappa \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_2(x) - \kappa.F(x)(\varepsilon_1)_{xx}(0) \\ -A_0 \varepsilon_1(x) + \omega_*^2 \varepsilon_1(x) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Les solutions du (3.11) s'écrivent :

$$\Upsilon(t) = e^{tA_{\omega_*}^\kappa} \Upsilon_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A_{\omega_*}^\kappa} (\omega^2(\tau) - \omega_*^2) B_0 \Upsilon(\tau) d\tau. \quad (3.14)$$

Soit  $\alpha = \epsilon(\epsilon + \omega_*)$ . On a  $|\omega^2(t) - \omega_*^2| \leq \alpha$ . D'après théorème 3.1, il existe  $M > 0$  et  $\beta > 0$  telles que  $\|e^{tA_{\omega_*}^\kappa}\|_X \leq M e^{-\beta t}$ . Par suite de l'expression (3.14) on a :

$$\|\Upsilon(t)\|_X \leq M_1 e^{-\beta t} \|\Upsilon_0\|_X + M_1 \alpha \int_0^t e^{-(t-\tau)\beta} \|\Upsilon(\tau)\|_X d\tau. \quad (3.15)$$

$M_1$  étant une constante positive bien choisie.

Posons

$$g(t) = \int_0^t e^{\beta\tau} \|\Upsilon(\tau)\|_X d\tau.$$

En multipliant (3.15) par  $e^{\beta t}$ , on obtient l'inéquation différentielle

$$\dot{g}(t) \leq M_1 \|\Upsilon_0\|_X + M_1 \alpha g(t). \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [e^{-M_1 \alpha t} g(t)] &= -M_1 \alpha e^{-M_1 \alpha t} g(t) + e^{-M_1 \alpha t} \dot{g}(t) \\ &\leq M_1 \|\Upsilon_0\|_X e^{-M_1 \alpha t} \text{ d'après (3.16)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

En intégrant (3.17) entre 0 et  $t$ , on a :

$$\begin{aligned} e^{-M_1 \alpha t} g(t) &\leq M_1 \|\Upsilon_0\|_X \int_0^t e^{-M_1 \alpha \tau} d\tau \\ &= \frac{M_1 \|\Upsilon_0\|_X}{M_1 \alpha} [1 - e^{-M_1 \alpha t}] \\ &\leq \frac{\|\Upsilon_0\|_X}{\alpha}. \end{aligned}$$

Donc

$$g(t) \leq \frac{\|\Upsilon_0\|_X}{\alpha} e^{M_1 \alpha t}. \quad (3.18)$$

Du (3.15) et (3.18) on obtient :

$$\begin{aligned} \|\Upsilon(t)\|_X &\leq M_1 e^{-\beta t} \|\Upsilon_0\|_X + M_1 \alpha e^{-\beta t} g(t) \\ &\leq M_1 e^{-\beta t} \|\Upsilon_0\|_X + M_1 \alpha e^{-\beta t} \frac{\|\Upsilon_0\|_X}{\alpha} e^{M_1 \alpha t} \text{ d'après (3.18)} \\ &= M_1 \|\Upsilon_0\|_X [e^{-\beta t} + e^{-(\beta - M_1 \alpha)t}]. \end{aligned}$$

La décroissance exponentielle s'obtient pour  $\beta > M_1 \alpha$ , ie

$$\epsilon > \max \left( 0, \frac{1}{2} \left[ -\omega_* + \sqrt{\frac{\omega_*^2 + 4\beta}{M_1}} \right] \right).$$

■

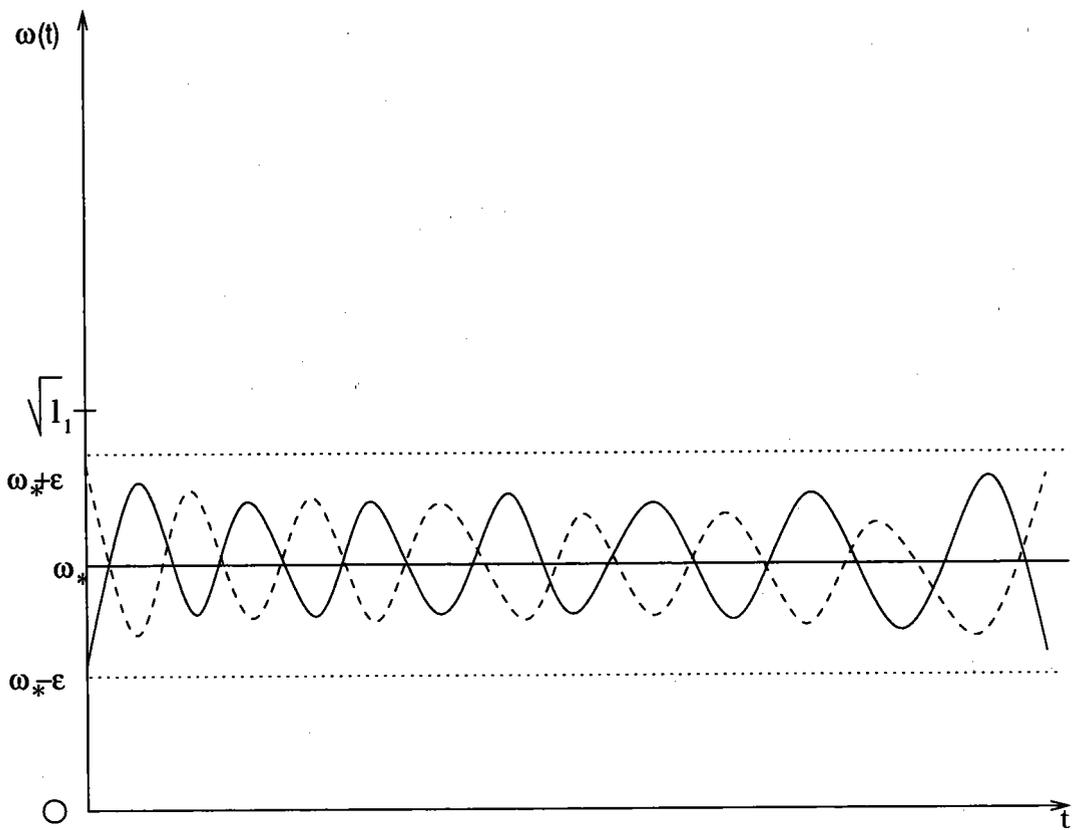


FIG. 3.2 - Allures possibles de  $\omega(t)$  pour espérer un observateur exponentiel

## 3.2 Démonstrations et remarques basées sur le modèle considéré

### 3.2.1 Exacte observabilité du système pour $\omega_*$ constante quelconque

Pour l'étude de l'exacte observabilité, on propose deux méthodes.

**1ère méthode : analyse spectrale.**

On définit l'opérateur  $A_0$  sur  $L^2(0, 1)$  par :

$$\begin{cases} D(A_0) = \{f \in H^4(0, 1) / f(0) = f_x(0) = f_{xx}(1) = f_{xxx}(1) = 0\} \\ A_0 f(x) = f^{(4)}(x), \quad \forall f \in D(A_0). \end{cases} \quad (3.19)$$

**Proposition 3.1** *L'opérateur non borné  $A_0$  ainsi défini est linéaire et admet une infinité dénombrable de valeurs propres  $0 < l_1 < l_2 < \dots < l_n < \dots$  telles que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} l_n = +\infty;$$

*les vecteurs propres correspondants  $(e_n)_{n \geq 1}$  forment une base orthogonale de  $L^2(0, 1)$ .* ■

On se place dans le cas où  $\omega_*$  est une constante très petite. Puisqu'il est possible d'estimer asymptotiquement la taille des vecteurs propres de l'opérateur  $A_{\omega_*}$ , on montre l'exacte observabilité du doublet  $(A_{\omega_*}, C)$  par l'analyse spectrale et l'inégalité d'Ingham.

**Théorème 3.2** *Pour toute vitesse angulaire constante  $\omega_* < \sqrt{l_1}$ , le système (3.3) est exactement observable.* ■

#### Preuve du théorème 3.2

Un nombre complexe  $\nu$  est valeur propre de l'opérateur  $A_{\omega_*}$  si et seulement si il existe  $(u, v) \in D(A_{\omega_*})$  non nul vérifiant :

$$\begin{cases} v = \nu u \\ u_{xxxx} - (\omega_*^2 - \nu^2)u = 0 \\ u(0) = u_x = 0 \\ u_{xx}(1) = u_{xxx}(1) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Alors  $\omega_*^2 - \nu^2$  est valeur propre de l'opérateur  $A_0$  défini au (3.19). Pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on a  $l_n = \omega_*^2 - \nu_n^2$ . En choisissant  $\omega_*$  suffisamment petit tel que

$$0 \leq \omega_*^2 < l_1 < l_2 < \dots < l_n \dots, \quad (3.21)$$

le spectre de  $A_{\omega_*}$  s'écrit

$$\sigma(A_{\omega_*}) = \left\{ \nu_{\pm n} = \pm i\lambda_n \mid \lambda_n = \sqrt{l_n - \omega_*^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}. \quad (3.22)$$

Les vecteurs propres correspondant sont donnés par :

$$\phi_n = \begin{bmatrix} e_n \\ i\lambda_n e_n \end{bmatrix}, \quad \phi_{-n} = \begin{bmatrix} e_n \\ -i\lambda_n e_n \end{bmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Pour la suite, on choisira  $(e_n)_{n \geq 1}$  de manière à ce que  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$  forment une base ortho-normée de  $X$ .

Pour  $n \geq 1$ , on définit

$$\alpha_n = \langle \phi_n, (u_0, v_0) \rangle_X,$$

$$\alpha_{-n} = \overline{\alpha_n},$$

$$\lambda_{-n} = -\lambda_n.$$

Avec ces notations, les solutions de (3.3) s'écrivent :

$$\begin{aligned} (u, v) &= \sum_{n \geq 1} \alpha_n e^{-i\lambda_n t} \phi_n + \sum_{n \geq 1} \overline{\alpha_n} e^{-i\lambda_n t} \overline{\phi_n} \\ &= \sum_{n \geq 1} \alpha_n e^{-i\lambda_n t} \phi_n + \sum_{n \leq -1} \alpha_n e^{-i\lambda_n t} \phi_n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n e^{-i\lambda_n t} \phi_n \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n (e_n)_{xx}(0) e^{-i\lambda_n t}. \quad (3.24)$$

Nous utilisons le théorème de Inghame [18] sous la forme suivante :

**Théorème 3.3** *Soit*

$$f(t) = \sum_{n=N}^{N'} a_n e^{-i\lambda_n t},$$

où les  $\lambda_n$ 's sont réelles et satisfont une relation de la séparation propre telle que pour un certain  $\gamma > 0$ ,

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} \geq \gamma > 0, \quad \forall N \leq n \leq N'.$$

Alors, pour chaque  $\epsilon > 0$  et  $T = \pi + \epsilon$  il existe une constante positive  $C(\epsilon) > 0$  (indépendante de  $N$  et de  $N'$ ) telle que

$$\frac{1}{2TC(\epsilon)} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \leq \sum_{n=N}^{N'} |a_n|^2 \leq \frac{C(\epsilon)}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt. \quad (3.25)$$

De plus, la conclusion reste valable pour des séries infinies qui convergent uniformément sur l'intervalle  $-T \leq t \leq T$ .

Notre objectif est d'appliquer le Théorème 3.3 d'Ingham (voir pages 368, 371 du [18]) pour montrer l'exacte observabilité du système (3.3). Vue la forme (3.24) de la sortie et la Définition 1.5 il suffit de montrer que  $(e_n)_{xx}(0)$  est borné et minoré par rapport à  $n$  et que  $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \rightarrow +\infty$ . Ceci est justifié dans le lemme suivant :

**Lemme 3.2**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} |(e_n)_{xx}(0)| &= \sqrt{2} \\ |\lambda_{n+1} - \lambda_n| &= O(n^2) \end{aligned}$$

■

**Preuve du lemme 3.2 :** Posons

$$l = \mu^4 = \omega_*^2 - \nu^2. \quad (3.26)$$

De la deuxième et troisième équation du système (3.20),  $u$  peut s'écrire :

$$u(x) = 2a (\cosh(\mu x) - \cos(\mu x)) + 2b (\sinh(\mu x) - \sin(\mu x)),$$

où  $a, b$  sont des constantes réelles. La dernière condition du (3.20) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cosh \mu + \cos \mu & \sinh \mu + \sin \mu \\ \sinh \mu - \sin \mu & \cosh \mu + \cos \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u$  est solution non triviale du système (3.20) si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \cosh \mu + \cos \mu & \sinh \mu + \sin \mu \\ \sinh \mu - \sin \mu & \cosh \mu + \cos \mu \end{vmatrix} = 0$$

c'est à dire,

$$\cosh \mu \cos \mu + 1 = 0 \quad (3.27)$$

**Remarque 3.3** Les propriétés suivantes sont à remarquer :

- La solution du (3.27)  $\mu \in i\mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}$ .
- $\mu > 0$  est solution du (3.27)  $\Leftrightarrow -\mu > 0$  est solution du (3.27).
- $\mu > 0$  est solution du (3.27)  $\Leftrightarrow i\mu$  est solution du (3.27). ■

Pour éviter la répétition des valeurs propres de l'opérateur  $A_{\omega_*}$ , il est suffisant de considérer le cas  $\mu > 0$ . L'équation (3.27) étant transcendante, on ne peut espérer une résolution algébrique, mais on peut donner le comportement asymptotique des solutions quand  $n \rightarrow +\infty$ . Il est aisé de constater par Rouché que les solutions positives du (3.27) ont l'estimation suivante :

$$\mu_n = \mu_{0n} + O(e^{-n}), \quad \mu_{0n} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \forall n \geq 1. \quad (3.28)$$

où  $\mu_{0n}$  sont solutions de l'équation  $\cos \mu = 0$ .

Les constantes  $a$  et  $b$  sont liées par la relation

$$a = k_n b, \quad k_n = - \left[ \frac{\sinh \mu_n + \sin \mu_n}{\cosh \mu_n + \cos \mu_n} \right].$$

$$(e_n)_{xx}(0) = 4bk_n\mu_n^2.$$

En normalisant  $\phi_n$  dans  $X$  :  $\|\phi_n\|_X^2 = (2\mu_n^4 - \omega_*^2) \|e_n\|_{L^2(0,1)}^2 = 1$ , on obtient :

$$|b| = |2\mu_n^4 - \omega_*^2|^{-\frac{1}{2}} \left| (k_n + 1)^2 \frac{e^{2\mu_n}}{2\mu_n} - (k_n - 1)^2 \frac{e^{-2\mu_n}}{2\mu_n} + 8(k_n^2 - 1)(-1)^n \frac{\cosh \mu_n}{\mu_n} - \frac{k_n}{\mu_n} + 4k_n^2 \right|^{-\frac{1}{2}}$$

D'après (3.28),

$$|k_n| \sim 1,$$

$$|b|\mu_n^2 \sim \left| 2 - O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right|^{-\frac{1}{2}} \left| 4 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right|^{-\frac{1}{2}}.$$

On en conclut donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |(e_n)_{xx}(0)| = \sqrt{2}.$$

De (3.22), (3.28) et (3.26) on déduit aisément que

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| = O(n^2)$$

■

## 2ème méthode : méthode des multiplicateurs

Par cette méthode, on généralise le résultat du théorème précédent à toute vitesse angulaire constante.

**Théorème 3.4** *L'exacte observabilité du système (3.3) est vérifiée pour toute vitesse angulaire  $\omega_*$  constante quelconque sauf pour une infinité dénombrable ( $\omega_*^2 \neq l_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $l_n$  étant définie comme valeur propre de l'opérateur  $A_0$ ; ce dernier étant définie dans la Proposition 3.1).*

■

Pour prouver le Théorème 3.4, on aura besoin des lemmes suivants.

**Lemme 3.3** *Avec les notations du Lemme 3.1, on a  $e_n''(0) \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .*

■

Preuve du Lemme 3.3 : Supposons par absurde qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que  $e_{n_0}''(0) = 0$ . Alors  $e_{n_0}$  vérifie l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} e_{n_0}''''(x) = l_{n_0} e_{n_0}(x), \\ e_{n_0}(0) = e_{n_0}'(0) = e_{n_0}''(1) = e_{n_0}'''(1) = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

En utilisant  $e_{n_0}'(x)$  comme multiplicateur et en intégrant par partie par rapport à  $x$  sur  $[0, 1]$ , on obtient, d'après (3.29),  $e_{n_0}(1) = 0$ . Le multiplicateur  $x e_{n_0}'(x)$  avec la même méthode nous conduit à :

$$\int_0^1 \left[ 3(e_{n_0}''(x))^2 + l_{n_0}(e_{n_0}(x))^2 \right] dx = 0.$$

On en déduit que  $e_{n_0}(x) = 0, \forall x \in (0, 1)$ . Ceci contredit le fait que  $e_{n_0}(x)$  est vecteur propre de l'opérateur  $A_0$ .

■

**Lemme 3.4** Pour toute vitesse angulaire constante  $\omega_*$  le spectre  $\sigma(A_{\omega_*})$  de  $A_{\omega_*}$  s'écrit :

$$\sigma(A_{\omega_*}) = \left\{ \nu_{\pm n} \mid \nu_{\pm n} = \pm \sqrt{\omega_*^2 - l_n}, \forall n = 1, 2, \dots, m-1 \right\} \cup \\ \cup \left\{ \nu_{\pm n} \mid \nu_{\pm n} = \pm i \sqrt{l_n - \omega_*^2}, \forall n = m, m+1, \dots \right\},$$

où  $m$  est le plus petit entier positif tel que  $\omega_*^2 < l_m$ . De plus les vecteurs propres généralisés correspondants seront choisis de manière à former une base de Riesz sur  $X$  et les valeurs propres  $\nu_n$  ou  $\nu_{-n}$  avec  $n \neq m-1$  sont algébriquement simples. ■

**Remarque 3.4** La preuve du lemme 3.4 est donnée par Xu et Bailleul dans [45]. Si  $\omega_*^2 \neq l_n, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , toutes les valeurs propres du système sont algébriquement simples. Si  $\omega_*^2 = l_{n_0}$  pour un certain  $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , la valeur propre correspondante  $\nu_{\pm n_0}$  est de multiplicité algébrique d'ordre 2. ■

**Définition 3.1** Avec les notations du lemme 3.4, les vecteurs propres généralisés formant une base de Riesz sur  $X$  seront notés  $\left\{ \tilde{\phi} \right\}_{k=1}^{\infty}$ . On pose  $H_1^{m-1}$  le sous espace vectoriel engendré par les  $2(m-1)$  premiers vecteurs propres généralisés  $\tilde{\phi}_k, k = \pm 1, \dots, \pm(m-1)$  et soit  $H_m^{\infty}$  le sous espace fermé engendré par le sous ensemble des vecteurs propres  $\left\{ \tilde{\phi}_{\pm k} \mid k = m, m+1, \dots \right\}$ .

**Remarque 3.5** On a la somme directe de la décomposition

$$X = H_1^{m-1} \oplus H_m^{\infty}.$$

De plus  $H_1^{m-1}$  et  $H_m^{\infty}$  sont invariants par le générateur  $A_{\omega_*}$  et le  $C^0$  groupe  $e^{tA_{\omega_*}}$ .

**Lemme 3.5** La restriction du système (3.3) sur  $H_1^{m-1}$  et  $H_m^{\infty}$  est respectivement exactement observable. ■

**Preuve du lemme 3.5 :**

A partir du lemme 3.3, on peut supposer que  $C\tilde{\phi}_{\pm n} = 1$  pour tout  $n = 1, \dots, m-1$ . La représentation matricielle du système sur  $H_1^{m-1}$  suivant sa base s'écrit :

$$C = [1, 1, \dots, 1].$$

Puisque les valeurs propres  $\nu_n$  avec  $n = \pm 1, \dots, \pm(m-1)$  sont algébriquement simples, la matrice d'observabilité de Kalman est de rang maximal. D'où l'exacte observabilité du système (3.3) sur  $H_1^{m-1}$ .

On utilise la méthode des multiplicateurs pour montrer l'exacte observabilité sur  $H_m^\infty$ . Soit  $(u_0, v_0) \in D(A_{\omega_*})|_{H_m^\infty}$  et considérons le multiplicateur  $2(x-1)u_x$  dans le système (3.3). En intégrant par parties, on obtient l'identité :

$$\int_0^\tau u_{xx}^2(0, t) dt = 2 \int_0^1 (x-1)[u_x u_t]_0^\tau dx + \int_0^\tau \int_0^1 [u_t^2 + 3u_{xx}^2 + \omega_*^2 u^2] dx dt. \quad (3.30)$$

On définit l'énergie  $\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2)$  par

$$\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 [\varphi_{xx}^2 + \varphi_2^2 - \omega_*^2 \varphi_1^2] dx.$$

Cette énergie ainsi définie est constante le long des trajectoires du système (3.3) :

$$\varepsilon(u, u_t) = \varepsilon(u_0, v_0). \quad (3.31)$$

Remarquons aussi que cette énergie est équivalente à la norme de  $X$  : il existe une constante  $M_0 > 0$  telle que

$$M_0 \|(\varphi_1, \varphi_2)\|_X^2 \leq \varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) \leq M_0^{-1} \|(\varphi_1, \varphi_2)\|_X^2, \quad \forall (\varphi_1, \varphi_2) \in H_m^\infty. \quad (3.32)$$

Il est aisé de voir que (3.31)-(3.32) impliquent les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^1 [u_t^2 + 3u_{xx}^2 + \omega_*^2 u^2] dx dt &\geq \int_0^\tau \| (u, u_t) \|_X^2 dt \\ &\geq M_0 \tau \varepsilon(u_0, v_0) \\ &\geq M_0^2 \tau \| (u_0, v_0) \|_X^2. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Des inégalités (3.31)-(3.32) on peut choisir une constante ( $M_1 > 0$ ) dépendant de  $\omega_*$  telle que l'inégalité suivante soit valable pour tout  $u \in H_L^2(0, 1)$  :

$$\int_0^\tau \int_0^1 [u_t^2 + 3u_{xx}^2 + \omega_*^2 u^2] dx dt \leq M_1 M_0^{-2} \tau \| (u_0, v_0) \|_X^2. \quad (3.34)$$

A partir de (3.31) - (3.32) et de l'inégalité de Cauchy on a :

$$\left| 2 \int_0^1 (x-1)[u_x u_t]_0^\tau dx \right| \leq 8M_0^{-2} \| (u_0, v_0) \|_X^2. \quad (3.35)$$

En substituant (3.33), (3.34) et (3.32) dans (3.30), on déduit

$$(M_0^4 \tau - 8) M_0^{-2} \| (u_0, v_0) \|_X^2 \leq \int_0^\tau u_{xx}^2(0, t) dt \leq (8 + M_1 \tau) M_0^{-2} \| (u_0, v_0) \|_X^2. \quad (3.36)$$

Alors le système (3.3) restreint sur  $H_m^\infty$  est exactement observable pour tout  $\tau > 8M_0^{-4}$ . ■

D'après la remarque 3.2.1, on définit  $P_m$  comme la projection de  $X$  dans  $H_1^{m-1}$  suivant la direction de  $H_m^\infty$ . L'opérateur de sortie  $C$  s'écrit

$$C = CP_m + C(1 - P_m).$$

Soient  $A_m$  et  $A_\infty$  les restrictions de  $A_{\omega_*}$  sur  $H_1^{m-1}$  et  $H_m^\infty$  respectivement. D'après remarque et Pazy (voir P. 122, [29])  $H_1^{m-1}$  et  $H_m^\infty$  sont  $A_{\omega_*}$ -admissible et on a :

$$e^{tA_{\omega_*}}(u_0, v_0) = e^{tA_m} P_m(u_0, v_0) + e^{tA_\infty} (1 - P_m)(u_0, v_0), \quad \forall (u_0, v_0) \in X.$$

L'observabilité du système (3.3) n'est rien d'autre que l'observabilité simultanée des sous systèmes  $(A_m, CP_m)$  et  $(A_\infty, C(1 - P_m))$ . D'après la preuve du lemme 3.5, les paires  $(A_m, CP_m)$  et  $(A_\infty, C(1 - P_m))$  sont exactement observables. Du lemme 3.4,  $\sigma(A_m) \cap \sigma(A_\infty) = \emptyset$ . Puisque  $H_1^{m-1}$  et l'espace de sortie sont de dimensions finies, d'après le résultat de Tucsnak et Weiss [36] les deux sous systèmes sont simultanément exactement observables pour tout  $\tau > 8CM_0^{-4}$ . D'où la preuve du théorème 3.4. ■

### Remarque 3.6

- Pour  $\sqrt{l_1} \geq \omega_*$  constant, la méthode de construction des observateurs suggérée dans le théorème 2.1 n'est plus efficace, puisque  $A$  n'est plus anti-adjoint même si toutes les autres conditions du théorème sont vérifiées.
- l'exacte observabilité au sens de l'inégalité de gauche dans (1.1) est aussi vraie dans le cas où  $\omega_* < \sqrt{l_1}$  lorsque la sortie  $y(t) = u_{xx}(0, t)$  est remplacée par  $y(t) = u_{xxx}(0, t)$  ou bien  $y(t) = u_{txx}(0, t)$  dans le système (3.3). De plus dans ces derniers cas, les opérateurs de sortie  $C \in L(X_1, O)$ . Il serait alors intéressant de regarder d'autres espaces d'états pour les rendre admissibles et construire des observateurs. En effet, pour justifier l'inégalité de gauche il suffit d'utiliser la méthode spectrale décrite pour l'exacte observabilité. En remarquant que

$$u_{xxx}(0, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n e^{i\lambda_n t} e_{nxxx}(0);$$

$$u_{txx}(0, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n e^{i\lambda_n t} (i\lambda_n e_{nxx}(0));$$

pour la condition initiale s'écrivant :

$$(u_0, v_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \alpha_n \phi_n,$$

avec

$$\phi_n = [e_n, i\lambda_n e_n]^T, \phi_{-n} = \bar{\phi}_n, \lambda_n = i\mu_n^2, \mu_n = (n - \frac{1}{2})\pi + O(\frac{1}{n^2}), n \in \mathbb{N}^*,$$

et

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\mu_n^2} \left\{ -\frac{\sinh \mu_n + \sin \mu_n}{\cosh \mu_n + \cos \mu_n} [\cosh \mu_n x - \cos \mu_n x] + \sinh \mu_n x - \sin \mu_n x \right\}.$$

On peut remarquer à partir de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_{nxx}(0) = \sqrt{2},$$

que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e_{nxxx}(0)n^{-1} = \sqrt{2}\pi,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n|n^{-2} = \pi^2.$$

On déduit l'inégalité de gauche de l'exacte observabilité à partir du théorème d'Ingham (page 369 du [18]). ■

**Remarque 3.7** [24] (pp. 747-748).

Le système (3.1) avec la sortie

$$y(t) = (u_{xx}(0, t), u_{xxx}(0, t), \omega(t)) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)). \quad (3.37)$$

est un système plat dans le sens où les solutions du système (3.1) peuvent être déterminées de façon formelle à partir des coordonnées de la sortie (3.37). En effet considérons la forme du système équivalent au sens de Cauchy-Kovalevskaya :

$$\begin{cases} EIu_{xxxx}(x, t) + \rho u_{tt}(x, t) = \rho y_3^2(t)u(x, t) \\ u(0, t) = u_x(0, t) = 0 \\ u_{xx}(0, t) = y_1(t) \\ u_{xxx}(0, t) = y_2(t) \end{cases} \quad (3.38)$$

Posons de façon formelle  $u(x, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i(t) \frac{x^i}{i!}$  et plongeons cette série dans (3.38). En identifiant terme par terme, on obtient :

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = y_1, \quad a_3 = y_2,$$

et par itération, on obtient les relations suivantes entre les coefficients :

$$\begin{aligned} E I a_{i+4} &= \rho y_3^2 a_i - \rho \ddot{a}_i \quad \forall i \geq 0; \\ E I a_{4i+2} &= \rho y_3^2 a_{4i-2} - \rho \ddot{a}_{4i-2} \quad \forall i \geq 1; \\ E I a_{4i+3} &= \rho y_3^2 a_{4i-1} - \rho \ddot{a}_{4i-1} \quad \forall i \geq 1; \\ a_{4i} &= 0 \quad \forall i \geq 1; \\ a_{4i+1} &= 0 \quad \forall i \geq 1. \end{aligned}$$

### 3.2.2 Régularité du triplet $(A_{\omega_*}, C^*, C)$ avec $\omega_*$ constante quelconque

**Théorème 3.5** *Le triplet  $(A_{\omega_*}, C^*, C)$  est régulier.* ■

On considère le système auxiliaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \Omega_1(x, t) = \Omega_2(x, t) + F(x) \cdot u(t), \quad x \in (0, 1), \\ \partial_t \Omega_2(x, t) = -\partial_x^4 \Omega_1(x, t) + \omega_*^2 \Omega_1(x, t), \\ \Omega_1(0, t) = \partial_x \Omega_1(0, t) = 0, \\ \partial_x^2 \Omega_1(1, t) = \partial_x^3 \Omega_1(1, t) = 0, \\ \Omega_1(x, 0) = \Omega_1^0(x), \Omega_2(x, 0) = \Omega_2^0(x), \\ y(t) = \partial_x^2 \Omega_1(0, t), \end{array} \right. \quad (3.39)$$

où  $F(x)$  vérifie (3.7).

**Remarque 3.8** *Dans le cas  $\omega_* = 0$ , l'unique solution de (3.7) est  $F(x) = x$ .*

**Remarque 3.9** Pour montrer la régularité du triplet  $(A, C^*, C)$  dans le cas  $\omega_* =$  constante quelconque, il est donc suffisant de l'étudier dans le cas  $\omega_* = 0$ . En effet toute fonction  $F(x)$  peut se décomposer de manière unique comme un vecteur somme de l'élément  $x$  et d'une fonction  $\tilde{F}(x) \in H_L^2(0, 1)$ .  $\tilde{F}(x) \in H_L^2(0, 1)$  représente un opérateur de contrôle borné de  $\mathbb{R} \rightarrow H_L^2(0, 1)$ , donc rend régulier le triplet résultant. ■

L'admissibilité du couple  $(A, C)$  étant acquise, on justifie les conditions de régularité du triplet  $(A, C^*, C)$  par le théorème suivant :

**Théorème 3.6** *La fonction de transfert  $G(s)$  est analytique et uniformément borné sur  $\mathbb{C}_\epsilon$  pour un certain  $\epsilon > 0$ . De plus*

$$\lim_{\mathbb{R} \ni s \rightarrow +\infty} G(s) = 0.$$

■

Pour montrer le théorème 3.6, on a besoin des lemmes suivants :

**Lemme 3.6** *Soit  $s = x + iy$  avec  $x > 0$  et  $y \in \mathbb{R}$ . Alors l'inégalité suivante est vérifiée,*

$$\left| \sqrt{s} \left( 1 + e^{-(1+i)\sqrt{2s}} \right) \right| \geq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}} \left( 1 - e^{-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{4}}}} \right). \quad (3.40)$$

où  $\sqrt{s}$  est désigné par l'unique racine carrée de  $s$  à partie réelle positive. ■

### Preuve du lemme 3.6

Soit

$$\sqrt{s} = \alpha + i\beta;$$

alors on a

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{x^2 + y^2} + x]} \\ \beta = \text{sign}(y) \sqrt{\frac{1}{2} [\sqrt{x^2 + y^2} - x]} \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{s} \left( 1 + e^{-(1+i)\sqrt{2s}} \right) \right| &= |\sqrt{s}| \left| 1 + e^{-(1+i)\sqrt{2s}} \right| \\ &\geq |\sqrt{s}| \left( 1 - |e^{-(1+i)\sqrt{2s}}| \right) \\ &= |\sqrt{s}| \left( 1 - e^{\Re(-(1+i)\sqrt{2s})} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

or

$$\begin{aligned} \Re \left( -(1+i)\sqrt{2s} \right) &= -\sqrt{2}(\alpha - \beta) \\ &= -\frac{\sqrt{2}x}{\alpha + \beta}, \end{aligned}$$

et on a aussi les équivalences logiques suivantes :

$$\begin{aligned}
& (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow & (\alpha + \beta)^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2) \\
\Leftrightarrow & \alpha + \beta \leq \sqrt{2}(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow & \frac{\sqrt{2}}{\alpha + \beta} \geq \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \\
\Leftrightarrow & \Re \left( -(1+i)\sqrt{2s} \right) \leq \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}} \quad \forall x > 0. \tag{3.43}
\end{aligned}$$

De (3.42), (3.43) et du fait que  $|\sqrt{s}| = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}$ , on obtient bien la preuve du Lemme 3.6.

**Lemme 3.7** Soit  $g(y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}} \left( 1 - e^{-\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}}} \right)$  avec  $x > 0$  et  $y \geq 0$ . Alors  $g(y) \geq g(0)$ . ■

### Preuve du lemme 3.7

La dérivée de  $g(y)$  par rapport à  $y$  est donnée par :

$$g'(y) = \frac{y}{2(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}} \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}} \right) e^{-\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}}}} \right\}. \tag{3.44}$$

La fonction  $\theta(r) = 1 - (1+r)e^{-r}$  vérifie :  $\theta(0) = 0$ ,  $\theta(+\infty) = 1$  et  $\theta'(r) > 0$  pour tout  $r > 0$ . Donc  $\theta(r) > 0$  pour tout  $r > 0$ . Remarquons aussi que  $g'(y)$  et  $\theta$  ont même signe pour  $y > 0$ . Alors  $g'(y) > 0$  pour  $y > 0$ . On montre bien que

$$g(y) \geq g(0) = \sqrt{x}(1 - e^{-\sqrt{x}}), \quad \forall y \geq 0$$

■

### Preuve du théorème 3.6

D'après (C.9), la fonction de transfert peut se mettre sous la forme

$$G(s) = \frac{1}{4\sqrt{2s}} \cdot \frac{-e^{-\sqrt{2s}} - ie^{-(1+i)\sqrt{2s}} + ie^{(i-1)\sqrt{2s}} + 1}{4e^{-\sqrt{2s}} + e^{-2\sqrt{2s}} + e^{-(1+i)\sqrt{2s}} + e^{(i-1)\sqrt{2s}} + 1}. \tag{3.45}$$

Sur  $C_0$ , le dénominateur de  $G(s)$  n'a pas de zéros et  $s \mapsto \sqrt{s}$  est analytique. Par suite  $G(s)$  est analytique sur  $C_0$ . De plus  $\overline{G(s)} = G(\bar{s})$ . On peut donc réduire l'étude de  $G$  sur  $\{s, \Im s \geq 0\} \cap C_0$ . Dans cette région, toutes les puissances des fonctions exponentielles dans le numérateur de l'expression du (3.45) sont à parties réelles strictement négatives. Il suffit donc de minorer le dénominateur de  $G$  par une fonction de  $x$  dont l'inverse tend vers 0. Ceci est possible avec les lemmes 3.6, 3.7 puisque les autres termes du dénominateur peuvent être rendus aussi petits que l'on veut en faisant croître  $x > 0$ . Plus précisément, posons

$$N(s) = -e^{-\sqrt{2s}} - ie^{-(1+i)\sqrt{2s}} + ie^{(i-1)\sqrt{2s}} + 1,$$

et

$$D(s) = 4 \left[ \sqrt{2s} \left( 1 + e^{-(1+i)\sqrt{2s}} \right) + \sqrt{2s} \left( 4e^{-\sqrt{2s}} + e^{-2\sqrt{2s}} + e^{(i-1)\sqrt{2s}} \right) \right].$$

On a

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (3.46)$$

Pour tout  $x > 0, y \geq 0$ , on a :

$$|N(s)| \leq 4; \quad (3.47)$$

$$|D(s)| \geq 4 \left[ \left| \sqrt{2s} \left( 1 + e^{-(1+i)\sqrt{2s}} \right) \right| - \left| \sqrt{2s} \left( 4e^{-\sqrt{2s}} + e^{-2\sqrt{2s}} + e^{(i-1)\sqrt{2s}} \right) \right| \right]. \quad (3.48)$$

En remarquant que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \sqrt{2s} \left( 4e^{-\sqrt{2s}} + e^{-2\sqrt{2s}} + e^{(i-1)\sqrt{2s}} \right) \right| = 0, \quad \forall y \geq 0.$$

On déduit qu'on peut choisir une constante réelle positive  $c$  suffisamment grande telle que

$$\left| \sqrt{2s} \left( 4e^{-\sqrt{2s}} + e^{-2\sqrt{2s}} + e^{(i-1)\sqrt{2s}} \right) \right| \leq c, \quad \forall y \geq 0.$$

Il s'ensuit avec (3.46), les lemmes 3.6, 3.7 et les inégalités (3.47), (3.48) qu'il existe  $c > 0$ ,

$$|G(s)| \leq \frac{1}{\sqrt{2x} (1 - e^{-\sqrt{x}}) - c}, \quad \forall y \geq 0. \quad (3.49)$$

■

### 3.2.3 Estimation du taux de décroissance exponentielle de l'erreur pour $\omega_* = 0$

Analyse asymptôtique des valeurs propres de l'opérateur  $A^\kappa$  associé à l'erreur

On se place à présent dans le cas  $\omega_* = 0$ . L'erreur vérifie le système :

$$\begin{cases} \partial_t \varepsilon_1(x, t) = \varepsilon_2(x, t) - \kappa \cdot x (\varepsilon_1)_{xx}(0, t), & t > 0, \quad x \in ]0, 1[ \\ \partial_t \varepsilon_2(x, t) = -\partial_x^4 \varepsilon_1(x, t), & t > 0, \quad x \in ]0, 1[ \\ \varepsilon_1(0, t) = (\varepsilon_1)_x(0, t) = 0, & t > 0 \\ (\varepsilon_1)_{xx}(1, t) = (\varepsilon_1)_{xxx}(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

**Lemme 3.8** *Le système (3.50) possède une suite de valeurs propres  $(\lambda_n)$  (telles que  $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}|$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ) qui tendent asymptôtiquement vers la droite verticale  $\Re(\lambda) = -2\kappa$  quand  $n \rightarrow \infty$ . De plus il existe un entier positif  $N$  et un nombre fini de valeurs propres  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$  telles que*

$$\begin{aligned} \sigma(A) = & \left\{ \lambda_n, \bar{\lambda}_n \mid \lambda_n = i\gamma_{n+N} + O\left(\frac{1}{n+N}\right), \gamma_n = \mu_{0n}^2, \mu_{0n} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \\ & \cup \{s_1, \dots, s_m\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \sigma(A^\kappa) \supset & \left\{ \lambda_n, \left| \lambda_n \mid \lambda_n = -2\kappa + i\gamma_{n+N} + O\left(\frac{1}{n+N}\right), \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma_n = \mu_{0n}^2, \mu_{0n} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{N}^* \right\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

#### Preuve du lemme 3.8

On définit l'opérateur  $A^\kappa$  par :

$$D(A^\kappa) = D(A) = D(A_0) \times H_L^2(0, 1), \quad (3.53)$$

et pour tout  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in D(A)$

$$A^\kappa \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} (x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_2(x) - \kappa \cdot x (\varepsilon_1)_{xx}(0) \\ -A_0 \varepsilon_1(x) \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Un nombre complexe  $\lambda$  est valeur propre de  $A^\kappa$  si et seulement si il existe  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  non nuls dans  $D(A^\kappa)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \varepsilon_2 = \lambda\varepsilon_1 + \kappa.x(\varepsilon_1)_{xx}(0), \\ \partial_x^4 \varepsilon_1 + \lambda^2 \varepsilon_1 + \lambda\kappa.x(\varepsilon_1)_{xx}(0) = 0, \\ \varepsilon_1(0) = (\varepsilon_1)_x(0) = 0, \\ (\varepsilon_1)_{xx}(1) = (\varepsilon_1)_{xxx}(1) = 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

En dérivant la deuxième équation de (3.55) deux fois par rapport à la variable  $x$ , on obtient  $\varepsilon_1$  vérifiant

$$\begin{cases} \partial_x^6 \varepsilon_1(x) + \lambda^2 \partial_x^2 \varepsilon_1(x) = 0, & x \in (0, 1) \\ \varepsilon_1(0) = (\varepsilon_1)_x(0) = 0, \\ (\varepsilon_1)_{xx}(1) = (\varepsilon_1)_{xxx}(1) = 0. \end{cases}$$

Posons

$$\lambda = i\mu^2 \quad (3.56)$$

$$e_*(x) = \partial_x^2 \varepsilon_1(1-x) \quad (3.57)$$

Alors  $e_*$  vérifie l'équation différentielle

$$\begin{cases} \partial_x^4 e_*(x) - \mu^4 e_*(x) = 0, & x \in (0, 1) \\ e_*(0) = (e_*)_x(0) = 0, \end{cases}$$

dont les solutions s'écrivent :

$$e_*(x) = c_1 (\cosh \mu x - \cos \mu x) + c_2 (\sinh \mu x - \sin \mu x),$$

$c_1$  et  $c_2$  étant des constantes réelles.

Du (3.57) on déduit :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \varepsilon_1(x) &= e_*(1-x) \\ &= c_1 (\cosh \mu(1-x) - \cos \mu(1-x)) + c_2 (\sinh \mu(1-x) - \sin \mu(1-x)) \end{aligned}$$

En intégrant deux fois cette dernière avec les conditions frontières exprimées par la troisième équation du système (3.55), on obtient

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(x) &= \frac{c_1}{\mu^2} [\cosh \mu(1-x) + \cos \mu(1-x)] + \frac{c_2}{\mu^2} [\sinh \mu(1-x) + \sin \mu(1-x)] \\ &+ \frac{c_1}{\mu} x [\sinh \mu - \sin \mu] + \frac{c_2}{\mu} x [ch\mu + \cos \mu] \\ &- \frac{c_1}{\mu^2} [\cosh \mu + \cos \mu] - \frac{c_2}{\mu^2} [\sinh \mu + \sin \mu].\end{aligned}$$

Reste à déterminer les constantes réelles  $c_1$  et  $c_2$  telles que la première équation du système (3.55) soit vérifiée.

$$\begin{aligned}\partial_x^4 \varepsilon_1 + -\mu^4 \varepsilon_1 + i\mu^2 \kappa \cdot x(\varepsilon_1)_{xx}(0) &= 0, \forall x \in (0, 1) \\ \Leftrightarrow c_1 (\cosh \mu + \cos \mu) + c_2 (\sinh \mu + \sin \mu) \\ &+ x \{c_1 [i\kappa (\cosh \mu - \cos \mu) - \mu (\sinh \mu - \sin \mu)] \\ &+ c_2 [i\kappa (\sinh \mu - \sin \mu) - \mu (\cosh \mu + \cos \mu)]\} = 0, \quad \forall x \in (0, 1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 (\cosh \mu + \cos \mu) + c_2 (\sinh \mu + \sin \mu) = 0 \\ c_1 [i\kappa (\cosh \mu - \cos \mu) - \mu (\sinh \mu - \sin \mu)] \\ + c_2 [i\kappa (\sinh \mu - \sin \mu) - \mu (\cosh \mu + \cos \mu)] = 0. \end{cases} \quad (3.58)\end{aligned}$$

$c_1, c_2$  étant nontriviaux,  $\mu$  est solution de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} \cosh \mu + \cos \mu & \sinh \mu + \sin \mu \\ i\kappa (\cosh \mu - \cos \mu) - \mu (\sinh \mu - \sin \mu) & i\kappa (\sinh \mu - \sin \mu) - \mu (\cosh \mu + \cos \mu) \end{vmatrix} = 0$$

ie

$$\tilde{F}(\mu) = 1 + \cosh \mu \cos \mu + i \frac{\kappa}{\mu} [\cosh \mu \sin \mu - \cos \mu \sinh \mu] = 0 \quad (3.59)$$

### Remarque 3.10

- $\tilde{F}(-\mu) = \tilde{F}(\mu)$ .
- $\tilde{F}(\mu) = 0 \Leftrightarrow \tilde{F}(i\bar{\mu}) = 0$ .
- $A^\kappa$  étant dissipatif sur  $X$  alors  $\Re(\mu) \cdot \Im(\mu) \geq 0$ . ■

On peut donc étudier l'équation (3.59) sur le demi-cadran

$$\mathbb{C}_{00} = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \Re(\mu) \geq \Im(\mu) \geq 0\}.$$

On rappelle que notre objectif est l'étude du comportement asymptotique des solutions de (3.59) lorsque  $|\mu| \rightarrow +\infty$ . Il suffit de travailler sur  $\mathbb{C}_{00}$  pour  $\Re(\mu) + \Im(\mu) \rightarrow +\infty$ .

**Lemme 3.9** *Asymptôtiquement, toutes les solutions de (3.59) vérifient :*

$$\begin{cases} \Im m(\mu) \text{ borné} \\ \Re e(\mu) \rightarrow +\infty \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{C}_{00} \quad (3.60)$$

■

**Preuve du lemme 3.9 :**

Supposons par absurde que  $\Im m(\mu) \rightarrow +\infty$  sur  $\mathbb{C}_{00}$ . Alors

$$\begin{cases} \Im m(\mu) \rightarrow +\infty \\ \Re e(\mu) \rightarrow +\infty \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{C}_{00}$$

L'équation (3.59) peut s'écrire asymptôtiquement

$$1 + \frac{2\kappa}{(1+i)\mu} [-i + O(e^{-|\mu|})] = O(e^{-|\mu|}).$$

Ce qui est impossible quand  $|\mu| \rightarrow +\infty$ .

Considérons à présent un voisinage  $V(\mu_{0n})$  petit de  $\mu_{0n}$  dans  $\mathbb{C}_{00}$  ;

$\mu_{0n}$  étant défini au (3.28). Sur  $V(\mu_{0n})$  l'équation (3.59) peut se mettre asymptôtiquement sous la forme

$$\cos \mu + i \frac{\kappa}{\mu} [\sin \mu - \cos \mu] = O(e^{-\mu}). \quad (3.61)$$

On peut toujours considérer  $[\sin \mu - \cos \mu]$  borné sur  $V(\mu_{0n})$ . Dans ce cas (3.61) s'écrit asymptôtiquement

$$\cos \mu = O\left(\frac{1}{\mu}\right). \quad (3.62)$$

En réinsérant (3.62) dans (3.61) on obtient

$$\cos \mu + i \frac{\kappa}{\mu} \sin \mu = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \quad (3.63)$$

Pour tout résumer, l'équation (3.59) est asymptôtiquement équivalent à {(3.62) et (3.63)}. En appliquant le Lemme de Rouché, on montre que les solutions de l'équation (3.62) peuvent se mettre dans  $\mathbb{C}_{00}$  sous la forme

$$\mu_n = \mu_{0n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.64)$$

En injectant (3.64) dans (3.63), on obtient

$$\sin\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - i\frac{\kappa}{\mu_n} \cos\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.65)$$

Remarquons que

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_{0n}} \left[1 - O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right];$$

soit  $k_1$  tel que

$$\sin\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{k_1}{\mu_{0n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a donc

$$\cos\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{k_1}{\mu_{0n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2.$$

En insérant ces trois dernières equations dans le (3.65), on obtient

$$k_1 = i\kappa.$$

Par suite

$$O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{i\kappa}{\mu_{0n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et d'après (3.64)

$$\mu_n = \mu_{0n} + \frac{i\kappa}{\mu_{0n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par le (3.56), on obtient bien le résultat. ■

**Estimation de la borne spectrale de l'opérateur  $A^\kappa$**

**Lemme 3.10**

$$-2\kappa \leq S(A^\kappa) < 0$$
■

**Preuve du Lemme 3.10**

Pour tout  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$  défini (3.52), on a  $\Re(\lambda_n) \leq S(A^\kappa) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*$ . Il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Re(\lambda_n) = -2\kappa \leq S(A^\kappa).$$

Il reste à montrer que

$$\Re(\lambda) < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A^\kappa).$$

Du fait que  $K_{max} = 0$  (voir lemme C.1) et de l'inégalité (2.29), on déduit que

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \kappa^2 \beta \| R(\beta, A) C^* C_A \varepsilon \|_X^2 = 0.$$

Par suite

$$\Re \langle A^\kappa \varepsilon, \varepsilon \rangle_X = -\kappa |\varepsilon_{1xx}(0)|^2, \quad \forall \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \in D(A_\kappa). \quad (3.66)$$

L'opérateur  $A^\kappa$  est donc dissipatif sur  $X$ . Pour  $\varepsilon$  vecteur propre de  $A^\kappa$  dans (3.66) on a  $\Re(\lambda) \leq 0$  pour tout  $\lambda \in \sigma(A^\kappa)$ .

Supposons par absurde que  $\Re(\lambda) = 0$ . Alors de la relation (3.66), on obtient toujours pour  $\varepsilon$  vecteur propre de  $A^\kappa$ ,  $\varepsilon_{1xx}(0) = 0$ . Dans ce cas  $\varepsilon_1$  est vecteur propre de l'opérateur  $A_0$ . Il existe donc un entier  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\varepsilon_1 = e_{n_1}$  vérifiant le système (3.29) augmenté de la condition  $e_{n_1xx}(0) = 0$ . Ceci est impossible d'après le Lemme 3.3. On en conclut que  $-2\kappa \leq S(A^\kappa) < 0$ . ■

### **Théorème 3.7**

- i)  $A^\kappa$  a une suite de vecteurs propres généralisés qui forment une base de Riesz sur  $X$ .
- ii) Il existe un entier  $N > 0$  tel que tous les  $\lambda_n$  soient algébriquement simples pour tout  $n > N$ .
- iii) Le taux de croissance exponentielle du semigroupe est déterminé par le spectre du générateur :  $\omega_0(A^\kappa) = S(A^\kappa)$  pour le  $C^0$  semi-groupe engendré par  $A^\kappa$ . ■

Pour la preuve du i) du théorème 3.7, il suffit à partir de la remarque 3.1, du lemme 3.8, d'appliquer le théorème 1.6 pour  $r = -2\kappa$ . Il ne nous reste qu'à vérifier que les valeurs propres de grand module de l'opérateur  $A^\kappa$  sont algébriquement simples. Le lemme suivant concerne la simplicité des valeurs propres de l'opérateur  $A^\kappa$  par une méthode directe. On achève la preuve du Théorème 3.7 à l'aide des résultats de B.Z. GUO [15].

### **Lemme 3.11**

Les valeurs propres  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}^*}$  définis au (3.52) sont algébriquement simples. ■

### **Preuve du lemme 3.11 :**

Pour  $\lambda = i\mu^2$ , on a d'après (3.59)  $\mu$  solution de l'équation

$$\tilde{F}(\mu) = 0$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mu) &= 1 + \cosh \mu \cos \mu + i \frac{\kappa}{\mu} [\cosh \mu \sin \mu - \cos \mu \sinh \mu] \\ &= 4 + e^{-(1+i)\mu} + e^{(1-i)\mu} + e^{(-1+i)\mu} + e^{(1+i)\mu} \\ &\quad + \frac{2\kappa}{(1+i)\mu} [-e^{-(1+i)\mu} - ie^{(1-i)\mu} + ie^{(-1+i)\mu} + e^{(1+i)\mu}].\end{aligned}$$

En tenant compte de la remarque 3.10, le terme dominant sur  $\mathbb{C}_0$  est  $e^{(1-i)\mu}$ . On peut donc écrire

$$\tilde{F}(\mu) = e^{(1-i)\mu} \tilde{P}(\mu) \quad (3.67)$$

où

$$\tilde{P}(\mu) = P_1(\mu) + R_1(\mu),$$

avec

$$P_1(\mu) = 1 + e^{2i\mu},$$

et

$$R_1(\mu) = 4e^{(i-1)\mu} + e^{-2\mu} + e^{2(i-1)\mu} + \frac{2\kappa}{(1+i)\mu} [-e^{-2\mu} - i + ie^{2(-1+i)\mu} + e^{2i\mu}]$$

vérifie la condition :

$$\lim_{|\mu| \rightarrow +\infty} R_1(\mu) = 0.$$

Donc  $e^{(i-1)\mu} \tilde{F}(\mu) = \tilde{P}(\mu) = 1 + e^{i2\mu} + R_1(\mu)$ . Notre objectif est de montrer que pour  $\mu$  solution de (3.59) à module grand, on a  $\tilde{F}'(\mu) \neq 0$ , i.e.,  $|\tilde{F}'(\mu)| > 0$  pour  $|\mu| \rightarrow +\infty$ .

Pour toute la suite de cette démonstration dire que  $|\mu| \rightarrow +\infty$  sous entend d'après lemme 3.9 que  $\Im m(\mu)$  est borné et  $\Re e(\mu) \rightarrow +\infty$  sur  $\mathbb{C}_0$ . Dans sa forme (3.67), en dérivant  $\tilde{F}$  par rapport à la variable  $\mu$ , on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{F}'(\mu) &= (1-i)\tilde{F}(\mu) + e^{(1-i)\mu} \tilde{P}'(\mu) \\ &= e^{(1-i)\mu} \tilde{P}'(\mu)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}|\tilde{F}'(\mu)| &= |e^{(1-i)\mu}| |\tilde{P}'(\mu)| \\ &= e^{\Re e[(1-i)\mu]} |\tilde{P}'(\mu)| \\ &= e^{[\Re e\mu + \Im m(\mu)]} |\tilde{P}'(\mu)|.\end{aligned}$$

Puisque  $e^{\Re\mu + \Im m(\mu)} > 0$ , il suffit alors de montrer que  $|\tilde{P}'(\mu)| > 0$  pour  $\mu$  solution à module grand de l'équation (3.59).

Pour cela, remarquons que

$$\tilde{P}'(\mu) = P_1'(\mu) + R_1'(\mu). \quad (3.68)$$

Un calcul directe donne

$$\begin{aligned} R_1'(\mu) &= 4(i-1)e^{(i-1)} - 2e^{-2\mu} + 2(i-1)e^{2(i-1)\mu} \\ &+ \frac{2\kappa}{(1+i)\mu} [2e^{-2\mu} + 2i(i-1)e^{2(i-1)\mu} + 2ie^{2i\mu}] \\ &- \frac{2\kappa}{(1+i)\mu^2} [-e^{-2\mu} - i + ie^{2(i-1)\mu} + e^{2i\mu}], \end{aligned} \quad (3.69)$$

et on montre que

$$\lim_{|\mu| \rightarrow +\infty} R_1'(\mu) = 0. \quad (3.70)$$

En effet  $e^{2i\mu}$  est borné pour  $|\mu| \rightarrow +\infty$  donc

$$\lim_{|\mu| \rightarrow +\infty} \frac{4i\kappa}{(1+i)\mu} e^{2i\mu} = \lim_{|\mu| \rightarrow +\infty} -\frac{4i\kappa}{(1+i)\mu^2} e^{2i\mu} = 0;$$

de plus tous les autres termes en exponentielle dans l'expression (3.69) ont leurs exposants à partie réelle tendant vers  $-\infty$  quand  $|\mu| \rightarrow +\infty$ .

En outre,

$$\begin{aligned} P_1(\mu + \tilde{\mu}) - P_1(\mu) &= e^{2i(\mu + \tilde{\mu})} - e^{2i\mu} \\ &= e^{2i\mu} [e^{2i\tilde{\mu}} - 1]. \end{aligned}$$

En nous inspirant des techniques utilisées par Mifdal dans [25], on peut écrire

$$e^{2i\tilde{\mu}} = 1 + 2i\tilde{\mu} - 4\tilde{\mu}^2 R(\tilde{\mu})$$

avec

$$R(\tilde{\mu}) = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{(2\tilde{\mu})^k}{(k+2)!}.$$

On obtient donc

$$P_1(\mu + \tilde{\mu}) - P_1(\mu) = e^{2i\mu} [2i\tilde{\mu} - 4\tilde{\mu}^2 R(\tilde{\mu})],$$

ce qui implique

$$\left| \frac{P_1(\mu + \tilde{\mu}) - P_1(\mu)}{\tilde{\mu}} \right| = |e^{2i\mu}| |2i - 4\tilde{\mu}R(\tilde{\mu})|.$$

En passant à la limite quand  $\tilde{\mu} \rightarrow 0$ , on a

$$|P_1'(\mu)| = 2|e^{2i\mu}|.$$

On en déduit puisque  $|e^{2i\mu}|$  est borné pour  $|\mu| \rightarrow +\infty$  qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\lim_{|\mu| \rightarrow +\infty} |P_1'(\mu)| = 2c > 0. \quad (3.71)$$

Donc les zéros de grand module de  $P_1$  sont simples. Montrons qu'il en est de même pour les zéros de grand module de  $\tilde{P}$ . En effet (3.68) implique

$$|\tilde{P}'(\mu)| \geq |P_1'(\mu)| - |R_1'(\mu)|. \quad (3.72)$$

Mais on sait d'après (3.70) que pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $r_\delta > 0$  tel que

$$|\mu| > r_\delta \Rightarrow |R_1'(\mu)| < \delta.$$

De plus on a démontré d'après (3.71) que pour  $|\mu| > r_1$ , il existe  $\delta_1 > 0$  tel que  $|P_1'(\mu)| > \delta_1$ . En prenant  $r = \sup(r_1, r_\delta)$  et en posant  $\delta = \frac{\delta_1}{2}$ , on obtient de l'inégalité (3.72)

$$|\tilde{P}'(\mu)| \geq \delta_1 - \delta = \frac{\delta_1}{2}.$$

On vient de montrer que pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $r = \sup(r_1, r_\delta)$  tel que

$$|\mu| > r \Rightarrow |\tilde{P}'(\mu)| \geq \frac{\delta_1}{2} > 0.$$

**Remarque 3.11** On pourrait remarquer que les valeurs propres de l'opérateur  $A^\kappa$  sont géométriquement simples. En effet, supposons que  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ ,  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$  sont deux vecteurs propres de  $A^\kappa$  correspondant à la même valeur propre  $\lambda$ . On peut choisir des constantes  $c_1, c_2$  non simultanément nulles telles que  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) = c_1\phi + c_2\psi$  satisfait la condition  $\varepsilon_{1xx}(0) = 0$ . Dans ce cas, on constate que  $\varepsilon$  est aussi vecteur propre de  $A^\kappa$  correspondant à la même valeur propre  $\lambda$ . La condition supplémentaire  $\varepsilon_{1xx}(0) = 0$  nous permet de déduire que  $\varepsilon_1$  est vecteur propre de l'opérateur  $A_0$ . D'après la preuve du lemme 3.3, on a nécessairement  $\varepsilon_1 = 0$  (et donc  $\varepsilon = 0$ ). On conclut que deux vecteurs propres correspondant à la même valeur propre sont forcément linéairement dépendants. Par l'absurdité la remarque est prouvée.

# CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Il est possible d'obtenir une estimation exponentielle du "body-beam system" en mesurant le moment de force à l'encastrement. A partir de l'observateur construit au (3.6) pour des mesures du moment de force à l'encastrement et de la vitesse angulaire du disque, notre perspective est d'appliquer le principe de séparation suggéré par Gauthier et Kupka dans [11] par combinaison avec la loi de feedback du [1] pour réaliser la stabilisation du dit système. A partir de la remarque 3.6, autre perspective envisageable serait un choix judicieux de l'espace d'état en vue de construire des observateurs sur le système 3.3 augmenté de la sortie  $y(t) = u_{xxx}(0, t)$  (ou  $y(t) = u_{xxt}(0, t)$ ) et d'en assurer la stabilisation. En se référant aussi à la remarque 3.7, on peut espérer un observateur du système(3.1) avec des sorties de dimension 3 comme indiquées au (3.37).

# Annexe A

## Quelques propriétés des opérateurs $A_0$ , $A$

### A.1 Preuve de la proposition 3.1

#### A.1.1 $A_0$ est auto-adjoint sur $L^2(0, 1)$

Pour la preuve, on montre que  $A_0$  est maximal monotone, symétrique sur  $L^2(0, 1)$  et on applique la proposition VII.6, page 113 du [4].

- $A_0$  est monotone et positif :

$$\langle A_0 f, f \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 0 \quad \forall f \in D(A_0).$$

- $A_0$  est maximal :

On veut montrer par Lax Milgram que  $\text{Im}(I + A_0) = L^2(0, 1)$ .

Soit  $f \in L^2(0, 1)$ . On cherche un élément  $u \in D(A_0)$  tel que

$$(I + A_0)u = f. \tag{A.1}$$

(A.1) est équivalent à :

$$\begin{cases} u + u_{xxxx} = f \\ u(0) = u_x(0) = 0 \\ u_{xx}(1) = u_{xxx}(1) = 0. \end{cases} \tag{A.2}$$

Soit

$$\begin{aligned} l : H_L^2(0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \int_0^1 f v dx. \end{aligned}$$

$l$  est une forme linéaire continue. En effet on a d'après Cauchy :

$$|l(v)| = \left| \int_0^1 f v dx \right| \leq \|f\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} \quad (\text{A.3})$$

Or

$$v(x) = \int_0^x v_\xi(\xi) d\xi \quad \forall v \in H_L^2(0,1)$$

et

$$v_\xi(\xi) = \int_0^\xi v_{yy}(y) dy \quad \forall v \in H_L^2(0,1);$$

donc, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_0^x \int_0^\xi v_{yy}(y) dy d\xi \\ &= \int_0^x v_{yy}(y) \int_y^x d\xi dy \\ &= \int_0^x (x-y)v_{yy}(y) dy. \end{aligned}$$

On en déduit d'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \left[ \int_0^x (x-y)^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^x |v_{yy}|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{x^3}{3}} \|v_{yy}\|_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

ie

$$|v(x)|^2 \leq \frac{x^3}{3} \|v\|_{H_L^2(0,1)}^2,$$

impliquant :

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \|v\|_{H_L^2(0,1)} \quad \forall v \in H_L^2(0,1) \quad (\text{A.4})$$

De (A.3), (A.4), on déduit :

$$|l(v)| \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \|f\|_{H_L^2(0,1)} \|v\|_{H_L^2(0,1)} \quad (\text{A.5})$$

On définit aussi  $b$  par :

$$\begin{aligned} b : H_L^2(0,1) \times H_L^2(0,1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \int_0^1 (uv + u_{xx}v_{xx}) dx = \langle u, v \rangle_{L^2(0,1)} + \langle u, v \rangle_{H_L^2(0,1)} \end{aligned}$$



Il est aisé de remarquer que

- $b$  est une forme bilinéaire
- $b$  est  $H_L^2(0,1)$  coercitive :

$$\begin{aligned} b(u, u) &= \|u\|_{L^2(0,1)}^2 + \|u\|_{H_L^2(0,1)}^2 \\ &\geq \|u\|_{H_L^2(0,1)}^2 \end{aligned}$$

-  $b$  est continue :

$$\begin{aligned} b(u, v) &\leq \|u\|_{L^2(0,1)} \|v\|_{L^2(0,1)} + \|u\|_{H_L^2(0,1)} \|v\|_{H_L^2(0,1)} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{12}\right) \|u\|_{H_L^2(0,1)} \|v\|_{H_L^2(0,1)} \text{ d'après (A.4)} \end{aligned}$$

D'après Lax Milgram (corollaire V.8 page 84 du [4]), l'équation

$$b(u, v) = l(v)$$

admet une solution unique  $u \in H_L^2(0,1)$  pour tout  $v \in H_L^2(0,1)$ .

Par un calcul direct, on montre que  $u$  satisfait l'équation suivante : pour tout  $v \in H_L^2(0,1)$ ,

$$\int_0^1 \left[ u_{xx}(x) + \int_1^x \int_1^{\tau_1} u(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \right] v_{xx}(x) dx - \int_0^1 \left[ \int_1^x \int_1^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \right] v_{xx}(x) dx = 0.$$

Ceci implique que, pour tout  $v \in L^2(0,1)$ ,

$$\int_0^1 \left[ u_{xx}(x) + \int_1^x \int_1^{\tau_1} u(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \right] v(x) dx - \int_0^1 \left[ \int_1^x \int_1^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \right] v(x) dx = 0.$$

Par suite  $u$  est solution de l'équation :

$$u_{xx}(x) + \int_1^x \int_1^{\tau_1} u(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 - \int_1^x \int_1^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 = 0. \quad (\text{A.6})$$

Pour  $x = 1$  dans l'équation (A.6) on obtient  $u_{xx}(1) = 0$ .

En dérivant une fois encore par rapport à  $x$  l'équation (A.6), on a l'identité :

$$u_{xxx}(x) + \int_1^x u(\tau) d\tau - \int_1^x f(\tau) d\tau = 0. \quad (\text{A.7})$$

La condition  $u_{xxx}(1) = 0$  s'obtient en posant  $x = 1$  dans (A.7).

On dérive une dernière fois l'équation (A.7) pour obtenir

$$u_{xxxx} + u = f,$$

avec  $u \in D(A_0)$ .

- $A_0$  symétrique.

Une double intégration par partie nous montre que

$$\langle A_0 f, g \rangle_{L^2(0,1)} = \langle f, A_0 g \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 f_{xx} g_{xx} dx \quad \forall f, g \in D(A_0)$$

### A.1.2 $A_0$ est à résolvante compacte

$A_0$  défini comme opérateur associé à la forme  $b$  du triplet variationnel  $(L^2(0, 1), H^2(0, 1), b)$ . Comme  $b$  est  $H^2(0, 1)$  coercitif, alors  $A_0$  est inversible d'après Lax Milgram. Donc  $0 \in \rho(A_0)$ . L'injection de  $H^4(0, 1)$  dans  $L^2(0, 1)$  est compacte. De plus  $D(A_0) \subset H^4(0, 1)$ . Donc l'injection de  $D(A_0)$  (muni de la norme du graphe) dans  $L^2(0, 1)$  est compacte. Le résultat découle de la proposition 1.2.

## A.2 Opérateur $A$ associé au modèle du body-beam

### Lemme A.1

- i) L'opérateur  $A$  est anti-adjoint sur  $X$  c'est-à-dire  $A^* = -A$ .
  - ii)  $A$  est à résolvante compacte sur  $X$ .
- Alors
- iii)  $iA$  est auto-adjoint avec résolvante compacte sur  $X$ .
  - iv) Il existe une suite de vecteurs propres normalisés de  $A$  qui forment une base orthonormale de  $X$  (cf. [29]).
  - v) La multiplicité géométrique de toute valeur propre de l'opérateur  $A$  est égale à la multiplicité algébrique (cf. [37]).
  - vi) Toutes les valeurs propres de l'opérateur  $A$  sont sur l'axe des imaginaires.

## Annexe B

### Quelques résultats d'algèbre

**Proposition B.1** Soit  $s \in \mathbb{C}$  et  $a(s)$  la matrice définie par

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -s^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Alors

i) La matrice  $a$  admet quatre différentes valeurs propres

$$l_1 = -(1+i)\sqrt{\frac{s}{2}},$$

$$l_2 = (1-i)\sqrt{\frac{s}{2}},$$

$$l_3 = -(1-i)\sqrt{\frac{s}{2}},$$

$$l_4 = -(1+i)\sqrt{\frac{s}{2}}.$$

ii)  $a$  se décompose de la manière suivante :

$$a(s) = V(s) \cdot \text{diag}(l_1, l_2, l_3, l_4) \cdot V^{-1}(s),$$

où

$$V(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_1^3} & \frac{1}{l_2^3} & \frac{1}{l_3^3} & \frac{1}{l_4^3} \\ \frac{1}{l_1^2} & \frac{1}{l_2^2} & \frac{1}{l_3^2} & \frac{1}{l_4^2} \\ \frac{1}{l_1} & \frac{1}{l_2} & \frac{1}{l_3} & \frac{1}{l_4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Pour tout  $x \in (0, 1)$  on a

$$e^{ax} = V(s) \cdot \text{diag}(e^{l_1 x}, e^{l_2 x}, e^{l_3 x}, e^{l_4 x}) \cdot V^{-1}(s).$$

Posons

$$e^{ax} = (e_{ij}(x, s))_{1 \leq i, j \leq 4} \quad (\text{B.3})$$

Les composantes utiles dans notre travail sont :

$$e_{33}(x, s) = \frac{1}{4} e^{-(1+i)\sqrt{\frac{s}{2}}x} \left(1 + e^{i\sqrt{2sx}}\right) \left(1 + e^{\sqrt{2sx}}\right) \quad (\text{B.4})$$

$$e_{34}(x, s) = (1+i) \frac{1}{4\sqrt{2s}} \left[ i e^{-(1+i)\sqrt{\frac{s}{2}}x} - i e^{\sqrt{\frac{s}{2}}x} + e^{-(1+i)\sqrt{\frac{s}{2}}x} - e^{(-1+i)\sqrt{\frac{s}{2}}x} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$e_{43}(x, s) = (1+i) \frac{1}{4} \sqrt{\frac{s}{2}} \left[ -e^{-(1+i)\sqrt{\frac{s}{2}}x} + e^{(1+i)\sqrt{\frac{s}{2}}x} - i e^{-(1+i)\sqrt{\frac{s}{2}}x} + i e^{(-1+i)\sqrt{\frac{s}{2}}x} \right] \quad (\text{B.6})$$

$$e_{44}(x, s) = \frac{1}{4} e^{-(1+i)\sqrt{\frac{s}{2}}x} \left(1 + e^{i\sqrt{2sx}}\right) \left(1 + e^{\sqrt{2sx}}\right) \quad (\text{B.7})$$

# Annexe C

## Calcul des fonctions de transfert

### C.1 Calcul de la fonction de transfert $G(s)$ de l'entrée à la sortie pour $\omega_* = 0$

En se référant au théorème A du [16], il s'agit de définir l'opérateur  $C(sI - A)C^*$ .

On considère le système auxiliaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \Omega_1(x, t) = \Omega_2(x, t) + x \cdot u(t), \quad s \in \mathbb{C}_0, \quad x \in (0, 1), \\ \partial_t \Omega_2(x, t) = -\partial_x^4 \Omega_1(x, t), \\ \Omega_1(0, t) = \partial_x \Omega_1(0, t) = 0, \\ \partial_x^2 \Omega_1(1, t) = \partial_x^3 \Omega_1(1, t) = 0, \\ \Omega_1(x, 0) = \Omega_1^0(x), \quad \Omega_2(x, 0) = \Omega_2^0(x), \\ y(t) = \partial_x^2 \Omega_1(0, t). \end{array} \right. \quad (\text{C.1})$$

Supposons  $\Omega_1(x, 0) = \Omega_2(x, 0) = 0$  dans (C.1). En prenant la transformée de Laplace suivant la variable temps, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} s\hat{\Omega}_1(x, s) = \hat{\Omega}_2(x, s) + x \cdot \hat{u}(s), \quad s \in \mathbb{C}_0, \quad x \in (0, 1) \\ s\hat{\Omega}_2(x, s) = -\partial_x^4 \hat{\Omega}_1(x, s), \\ \hat{\Omega}_1(0, s) = \partial_x \hat{\Omega}_1(0, s) = 0, \\ \partial_x^2 \hat{\Omega}_1(1, s) = \partial_x^3 \hat{\Omega}_1(1, s) = 0, \\ \hat{y}(s) = \partial_x^2 \hat{\Omega}_1(0, s). \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

En substituant la première équation dans la seconde, on obtient

$\hat{\Omega}_1(x, s)$  qui vérifie le système

$$\begin{cases} \partial_x^4 \hat{\Omega}_1(x, s) = -s^2 \hat{\Omega}_1(x, s) + x \hat{u}(s), & s \in \mathbb{C}_0, x \in (0, 1), \\ \hat{\Omega}_1(0, s) = \partial_x \hat{\Omega}_1(0, s) = 0, \\ \partial_x^2 \hat{\Omega}_1(1, s) = \partial_x^3 \hat{\Omega}_1(1, s) = 0, \\ \hat{y}(s) = \partial_x^2 \hat{\Omega}_1(0, s). \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Posons

$$\varphi = \begin{pmatrix} \hat{\Omega}_1 \\ \partial_x \hat{\Omega}_1 \\ \partial_x^2 \hat{\Omega}_1 \\ \partial_x^3 \hat{\Omega}_1 \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors le système (C.3) peut se réécrire sur  $\mathbb{R}^4$  sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi_x = a\varphi + bx\hat{u} \\ \hat{y} = \varphi_3(0), \end{cases}$$

Dont les solutions sont données par :

$$\varphi(x) = e^{ax} \varphi(0) + \int_0^x e^{a(x-\xi)} b \xi d\xi \hat{u}. \quad (\text{C.4})$$

( $a$  est la matrice définie au (B.1)).

En intégrant par partie l'expression (C.4), on obtient l'identité

$$\varphi(1) = e^a \varphi(0) + [-a - I + e^a] a^{-2} b s \hat{u}.$$

Cette identité, combinée avec les conditions frontières du (C.3) impliquent :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0_{2 \times 2}, I_{2 \times 2}] e^a \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3(0) \\ \varphi_4(0) \end{bmatrix} + [0_{2 \times 2}, I_{2 \times 2}] (-a - I + e^a) a^{-2} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s \hat{u} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

En outre  $0_{2 \times 2}$  et  $I_{2 \times 2}$  désignent respectivement les matrices carrées d'ordre 2 nulle et Identité. On obtient de (C.5) l'expression de la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{\varphi_3(0)}{\hat{u}} \quad (\text{C.7})$$

$$= [1, 0] \left( [0_{2 \times 2}, I_{2 \times 2}] e^a \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ \times [0_{2 \times 2}, I_{2 \times 2}] (a + I - e^a) a^{-2} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2s}} \frac{-e^{-\sqrt{2s}} - ie^{-i\sqrt{2s}} + ie^{i\sqrt{2s}} + e^{\sqrt{2s}}}{4 + e^{-\sqrt{2s}} + e^{-i\sqrt{2s}} + e^{i\sqrt{2s}} + e^{\sqrt{2s}}}. \quad (\text{C.9})$$

## C.2 Calcul de la fonction de transfert : de la condition initiale à la sortie

Notre objectif ici est de définir l'opérateur  $C(sI - A)^{-1}$ .

On considère à nouveau notre système (C.1) mais avec  $u = 0$ . En prenant La transformée de Laplace suivant la variable temps, on obtient :

$$\begin{cases} s\hat{\Omega}_1(x, s) - \Omega_1^0(x) = \hat{\Omega}_2(x, s), & s \in \mathbb{C}_0, x \in (0, 1) \\ s\hat{\Omega}_2(x, s) - \Omega_2^0(x) = -\partial_x^4 \hat{\Omega}_1(x, s), \\ \hat{\Omega}_1(0, s) = \partial_x \hat{\Omega}_1(0, s) = 0, \\ \partial_x^2 \hat{\Omega}_1(1, s) = \partial_x^3 \hat{\Omega}_1(1, s) = 0, \\ \Omega_1(x, 0) = \Omega_1^0(x), \Omega_2(x, 0) = \Omega_2^0(x), \\ \hat{y}(s) = \partial_x^2 \hat{\Omega}_1(0, s). \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Par substitution, on a  $\hat{\Omega}_1(x, s)$  vérifie le système

$$\begin{cases} \partial_x^4 \hat{\Omega}_1(x, s) = -s^2 \hat{\Omega}_1(x, s) + s\Omega_1^0(x) + \Omega_2^0(x), & s \in \mathbb{C}, x \in (0, 1), \\ \hat{\Omega}_1(0, s) = \partial_x \hat{\Omega}_1(0, s) = 0, \\ \partial_x^2 \hat{\Omega}_1(1, s) = \partial_x^3 \hat{\Omega}_1(1, s) = 0, \\ \hat{y}(s) = \partial_x^2 \hat{\Omega}_1(0, s). \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Posons

$$\varphi = \begin{pmatrix} \hat{\Omega}_1 \\ \partial_x \hat{\Omega}_1 \\ \partial_x^2 \hat{\Omega}_1 \\ \partial_x^3 \hat{\Omega}_1 \end{pmatrix}$$

et

$$g(x, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s\Omega_1^0(x) + \Omega_2^0(x) \end{pmatrix}.$$

Alors le système (C.3) peut se réécrire sur  $\mathbb{R}^4$  sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi_x = a\varphi + g \\ \hat{y} = \varphi_3(0), \end{cases}$$

dont les solutions sont données par :

$$\varphi(x) = e^{ax} \varphi(0) + \int_0^x e^{a(x-\xi)} g(\xi, s) d\xi. \quad (\text{C.12})$$

( $a$  est la matrice définie au (B.1)).

En posant  $x = 1$  dans (C.12)), on obtient l'identité

$$\varphi(1) = e^a \varphi(0) + \int_0^1 e^{a(1-\xi)} g(\xi, s) d\xi.$$

Cette identité, combinée avec les conditions frontières du (C.11) impliquent :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= [0_{2 \times 2}, I_{2 \times 2}] e^a \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3(0) \\ \varphi_4(0) \end{bmatrix} \\ &+ \int_0^1 [0_{2 \times 2}, I_{2 \times 2}] e^{a(1-\xi)} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s\Omega_1^0(\xi) + \Omega_2^0(\xi) \end{bmatrix} d\xi. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

où  $J$  est défini au (C.6).

$$\begin{aligned} \varphi_3(0) &= [1, 0] \left( [0_{2 \times 2}, I_{2 \times 2}] e^a \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &\times \int_0^1 [0_{2 \times 2}, I_{2 \times 2}] e^{(1-\xi)a} \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s\Omega_1^0(\xi) + \Omega_2^0(\xi) \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{e_{34}(1, s)}{e_{33}(1, s)e_{44}(1, s) - e_{34}(1, s)e_{43}(1, s)} \int_0^1 e_{44}(1 - \xi, s) [s\Omega_1^0(\xi) + \Omega_2^0(\xi)] d\xi \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

$$- \frac{e_{44}(1, s)}{e_{33}(1, s)e_{34}(1, s) - e_{34}(1, s)e_{43}(1, s)} \int_0^1 e_{44}(1 - \xi, s) [s\Omega_1^0(\xi) + \Omega_2^0(\xi)] d\xi. \quad (\text{C.15})$$

Les coefficients  $(e_{ij})$  sont définis au (B.3).

Le lemme suivant justifie que  $K_{max} = 0$  :

**Lemme C.1** *Il existe des constantes positives  $M_1$  et  $\alpha$  telles que pour tout  $s \in \mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{C}_\alpha$*

$$\| \sqrt{s}C(sI + A)^{-1} \|_{L(X, O)} \leq \frac{M_1}{s^{\frac{1}{4}}} \quad \forall s > \alpha \quad (\text{C.16})$$

■

### Preuve du théorème C.1

D'après (C.14),

$$\hat{y}(s) = z_1(s) - z_2(s) \quad (\text{C.17})$$

où

$$\sqrt{s}z_1(s) = \frac{a_1(s)}{b_1(s)} \int_0^1 c_1(s, \xi) [s\Omega_1^0(\xi) + \Omega_2^0(\xi)] d\xi, \quad (\text{C.18})$$

$$\sqrt{s}z_2(s) = \frac{a_2(s)}{b_2(s)} \int_0^1 c_2(s, \xi) [s\Omega_1^0(\xi) + \Omega_2^0(\xi)] d\xi, \quad (\text{C.19})$$

avec

$$\begin{aligned}
a_1(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)e^{\sqrt{\frac{s}{2}}} \left[ -e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(-2+i)} + ie^{i\sqrt{\frac{s}{2}}} - ie^{\sqrt{\frac{s}{2}}(-2+3i)} + e^{3i\sqrt{\frac{s}{2}}} \right] \\
a_2(s) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)e^{\sqrt{\frac{s}{2}}} \left[ e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(-2+i)} + e^{i\sqrt{\frac{s}{2}}} + e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(-2+3i)} + e^{3i\sqrt{\frac{s}{2}}} \right] \\
b_1(s) &= b_2(s) = 2e^{\sqrt{2s}} \left[ e^{-\sqrt{2s}} + e^{\sqrt{2s}(-2+i)} + 4e^{\sqrt{2s}(-1+i)} + e^{i\sqrt{2s}} + e^{\sqrt{2s}(-1+2i)} \right] \\
c_1(s, \xi) &= e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} \left[ e^{-i\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} + e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(2(-1+\xi)-i(-1+\xi))} + e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(2(-1+\xi)+i(-1+\xi))} + \right. \\
&\quad \left. + e^{i\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} \right], \\
c_2(s, \xi) &= e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} \left[ e^{-i\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} - ie^{\sqrt{\frac{s}{2}}(2(-1+\xi)-i(-1+\xi))} - e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(2(-1+\xi)+i(-1+\xi))} + \right. \\
&\quad \left. + ie^{i\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} \right].
\end{aligned}$$

Pour tout  $\Omega_1^0(\xi) \in H_L^2(0, 1)$ , une double intégration par parties nous donne :

$$\int_0^1 sc_1(s, \xi) \Omega_1^0(\xi) d\xi = \int_0^1 d_1(s, \xi) \Omega_{1xx}^0(\xi) d\xi \quad (C.20)$$

$$\int_0^1 sc_2(s, \xi) \Omega_1^0(\xi) d\xi = \int_0^1 d_2(s, \xi) \Omega_{1xx}^0(\xi) d\xi, \quad (C.21)$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1(s, \xi) &= -ie^{-\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} \left[ e^{-i\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} - e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(2(-1+\xi)-i(-1+\xi))} + e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(2(-1+\xi)+i(-1+\xi))} - \right. \\
&\quad \left. - e^{i\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} \right], \\
d_2(s, \xi) &= -ie^{-\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} \left[ e^{-i\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} + ie^{\sqrt{\frac{s}{2}}(2(-1+\xi)-i(-1+\xi))} - e^{\sqrt{\frac{s}{2}}(2(-1+\xi)+i(-1+\xi))} - \right. \\
&\quad \left. - ie^{i\sqrt{\frac{s}{2}}(-1+\xi)} \right].
\end{aligned}$$

De (C.17), (C.18), (C.19), (C.20), (C.21), on déduit que

$$\sqrt{s}\hat{y}(s) = \int_0^1 e^{-\sqrt{\frac{s}{2}}\xi} f(s, \xi) (\Omega_{1xx}^0(\xi) + \Omega_1^0(\xi)) d\xi, \quad (C.22)$$

où pour tout  $s > 0$ ,

$$f(s, \xi) = O(1) \quad (C.23)$$

En tenant compte du (C.23) et en appliquant l'inégalité de Holder et de Cauchy à l'expression (C.22) on obtient bien l'inégalité du (C.16).

## Annexe D

### Preuve de l'identité (3.30)

Multiplions la première équation du (3.3) par  $(1-x)u_x$  et intégrons par rapport à  $x$  et  $t$  respectivement entre  $(0, 1)$  et  $(0, \tau)$ . On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \int_0^\tau (1-x)u_{tt}(x,t)u_x(x,t) dt dx + \int_0^\tau \int_0^1 (1-x)u_{xxxx}(x,t)u_x(x,t) dx dt \\ = \int_0^\tau \int_0^1 \omega_*^2(1-x)u(x,t)u_x(x,t) dx dt \\ u(0,t) = u_x(0,t) = 0 \\ u_{xx}(1,t) = u_{xxx}(1,t) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} \int_0^\tau (1-x)u_{tt}u_x dt &= [(1-x)u_t u_x]_0^\tau - \int_0^\tau (1-x)u_t u_{tx} dt \\ &= (1-x)u_t u_x \Big|_0^\tau - \int_0^\tau \frac{1}{2}(1-x)(u_t^2)_x dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\tau (1-x)u_{tt}u_x dt dx &= \int_0^1 [(1-x)u_t u_x]_0^\tau dx - \int_0^\tau \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)(u_t^2)_x dx dt \\ &= \int_0^1 [(1-x)u_t u_x]_0^\tau dx - \int_0^\tau \left[ \frac{1}{2}(1-x)u_t^2 \right]_0^1 dt \\ &\quad - \int_0^\tau \int_0^1 \frac{1}{2}u_t^2 dx dt = \int_0^1 [(1-x)u_t u_x]_0^\tau dx - \int_0^\tau \int_0^1 \frac{1}{2}u_t^2 dx dt, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x)u_{xxxx}u_x dx &= [(1-x)u_{xxx}u_x]_0^1 + \int_0^1 u_{xxx}((x-1)u_x)_x dx \\ &= \int_0^1 (x-1)u_{xxx}u_{xx} dx + \int_0^1 u_{xxx}u_x dx, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x-1)u_{xxx}u_{xx} dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}(x-1)(u_{xx}^2)_x dx \\
&= \left[ \frac{1}{2}(x-1)u_{xx}^2 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}u_{xx}^2 dx \\
&= \frac{1}{2}u_{xx}^2(0) - \int_0^1 \frac{1}{2}u_{xx}^2 dx
\end{aligned} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u_{xxx}u_x dx &= [u_{xx}u_x]_0^1 - \int_0^1 u_{xx}^2 dx \\
&= - \int_0^1 u_{xx}^2 dx
\end{aligned} \tag{D.5}$$

On déduit alors à partir du (D.3), (D.4), (D.5) :

$$\int_0^\tau \int_0^1 (1-x)u_{xxx}u_x dx dt = \int_0^\tau \frac{1}{2}u_{xx}^2(0, \tau) dt - \int_0^\tau \int_0^1 \frac{3}{2}u_{xx}^2 dx dt \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \omega_*^2(1-x)uu_x dx &= \int_0^1 \frac{\omega_*^2}{2}(1-x)(u^2)_x dx \\
&= \left[ \frac{1}{2}\omega_*^2(1-x)u^2 \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}\omega_*^2 u^2 dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\omega_*^2 u^2 dx
\end{aligned}$$

donc,

$$\int_0^\tau \int_0^1 \omega_*^2(1-x)uu_x dx dt = \int_0^\tau \int_0^1 \frac{1}{2}\omega_*^2 u^2 dx dt. \tag{D.7}$$

De (D.1), (D.2), (D.6), (D.7), on obtient l'identité (3.30).

## Annexe E

# Résultats numériques sur le comportement asymptotique du spectre de $A^\kappa$

Nous allons donner dans ce paragraphe quelques résultats numériques concernant le spectre de l'opérateur  $A^\kappa$ .

Tout d'abord, on sait que  $\lambda_k = i\mu_k^2$  est une valeur propre de l'opérateur  $A^\kappa$  si et seulement si le complexe  $\mu_k$  vérifie l'équation  $F(\mu) = 0$  (voir (3.59)).

Soit  $\mu_k = x_k + iy_k$  où  $x_k$  et  $y_k$  sont deux réels non simultanément nuls. Dès lors la condition  $F(\mu) = 0$  devient  $R(x_k, y_k) + iI(x_k, y_k) = 0$ , avec  $R$  et  $I$  deux fonctions réelles qui dépendent des variables  $x_k$  et  $y_k$ . De ce fait, le complexe  $\lambda_k$  défini ci dessus est une valeur propre si et seulement si  $R(x_k, y_k) = I(x_k, y_k) = 0$  pour tout  $x_k$  et  $y_k \in \mathbb{R}$  ( $(x_k^2 + y_k^2 \neq 0)$ ). En utilisant le logiciel MATLAB version 6.0, on peut trouver les points d'intersection  $(x_k, y_k)$  des graphes des fonctions  $R(x_k, y_k) = 0$  et  $I(x_k, y_k) = 0$ . Ensuite on trouve les valeurs propres  $\lambda_k$  en utilisant la relation

$$\lambda_k = i\mu_k^2 = -2x_k y_k + i(x_k^2 - y_k^2).$$

En pratique on utilise le sous-programme `fminsearch(J, x_0)` qui consiste à trouver un minimiseur local  $x$  de la fonction coût  $J$  partant d'un point initial  $x_0$ . Pour le calcul du spectre on définit  $J$  de la façon suivante :

$$P(x, y) = 1 + e^{2i\mu} + 4e^{(i-1)\mu} + e^{-2\mu} + e^{2(i-1)\mu} + \frac{2\kappa}{(1+i)\mu} [-e^{-2\mu} - i + ie^{2(-1+i)\mu} + e^{2i\mu}],$$

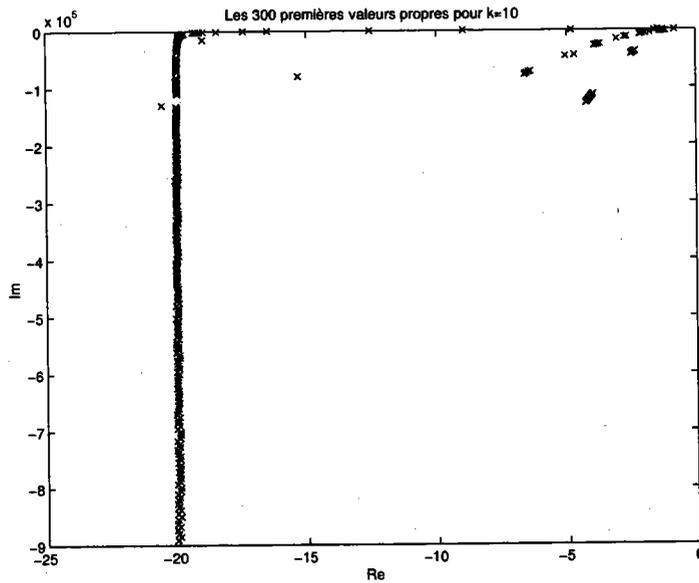


FIG. E.1 – Les premières valeurs propres de  $A^\kappa$  pour  $\kappa = 10$ .

où  $\mu = x + iy$ ,

$$R(x, y) = \Re(P(x, y)), \quad I(x, y) = \Im(P(x, y)),$$

$$J(x, y) = R^2(x, y) + I^2(x, y).$$

Les paramètres physiques étant fixés ( $EI = \rho = 1$ ), on fait varier  $\kappa$ . Les résultats numériques qu'on obtient sont illustrés aux figures Fig.E.1- Fig.E.5. On y observe l'asymptôte pour chaque valeur de  $\kappa$ . Noter que pour de basses fréquences la forme géométrique varie en fonction de  $\kappa$ .

Ci-dessous est présenté le programme MATLAB permettant la réalisation de ces simulations numériques :

```
clear all
real k
real z
global k
k=4.25;
for n=1 :100
z(n)=n*pi+pi/2;
```

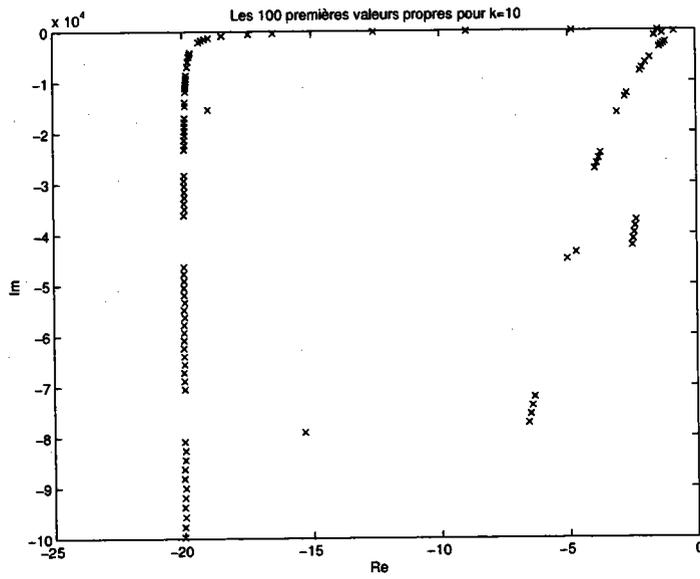


FIG. E.2 – Les premières valeurs propres de  $A^\kappa$  pour  $\kappa = 10$ .

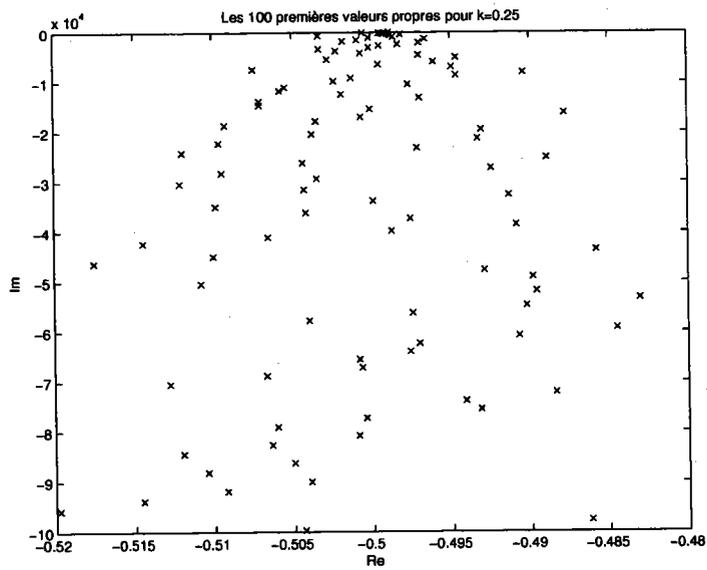


FIG. E.3 – Les premières valeurs propres de  $A^\kappa$  pour  $\kappa = 0.25$

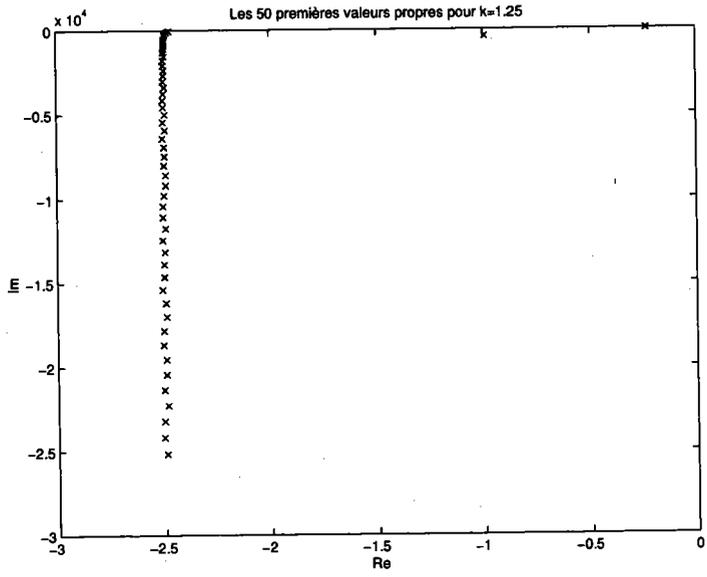


FIG. E.4 – Les premières valeurs propres de  $A^\kappa$  pour  $\kappa = 1.25$ .

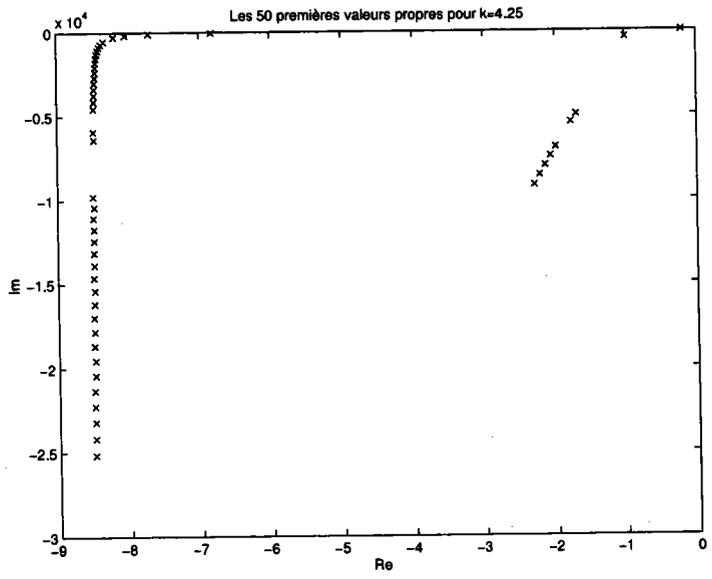


FIG. E.5 – Les premières valeurs propres de  $A^\kappa$  pour  $\kappa = 4.25$ .

```

[x,fval]=fminsearch(@caract, [z(n),0]);
valp(n)=-2*x(1)*x(2)+i*(x(1)^2-x(2)^2); end
valp=valp'
rval=real(valp);
ival=imag(valp);
plot(valp, 'x')
title('Les 100 premières valeurs propres pour k=4.25')
xlabel('Re')
ylabel('Im')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function f=caract(x)
global k
ff=exp(2*i*(x(1)+i*x(2)))+1+4*exp((i-1)*(x(1)+i*x(2)))+exp(-2*(x(1)+i*x(2)))...
+(-exp(-2*(x(1)+i*x(2)))-i+i*exp(2*(i-1)*(x(1)+i*x(2))))+...
exp(2*i*(x(1)+i*x(2)))*2*k/(x(1)+i*x(2))/(1+i);
f=real(ff)^2+imag(ff)^2;

```

# Bibliographie

- [1] **B. D'ANDRÉA-NOVEL and J. M. CORON**, Stabilization of a rotating body-beam without damping, *IEEE Transaction Automatic Control*, vol.43, no.5, pp.608-618, 1998.
- [2] **J. BAILLEUL and M. LEVI**, Rotational elastic dynamics, *Physica 27D*, pp.43-62, 1987.
- [3] **A.M. BLOCH and E.S. TITI**, On the dynamics of rotating elastic beams, *Proceedings Conf. New Trends Syst. theory*, Genoa, Italy, July 9-11, 1990, Editeurs : Conte, Perdon, and Wyman, Birkhauser, Cambridge, 1990.
- [4] **H. BREZIS**, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, 1983.
- [5] **F. CELLE, J.P. GAUTHIER, D. KAZAKOS and G. SALLET**, Synthesis of nonlinear observers : a harmonic analysis approach, *Math. System Theory* **22**, pp.291-322, 1989.
- [6] **B. CHENTOUF and J.F. COUCHOURON**, Nonlinear feedback stabilization of a rotating body-beam system, *Rapport interne*, INRIA-Lorraine (Conge project) & URA CNRS 399 (MMAS), 1999.
- [7] **F. CONRAD and M. PIERRE**, Stabilization of Euler-Bernouilli beam by nonlinear boundary feedback, *Rapport de recherche INRIA*, no.1235, 1990.
- [8] **R.F. CURTAIN and A.J. PRITCHARD**, *Infinite dimensional linear systems*, New York, Springer Verlag, 1978.
- [9] **A. EL JAI and A.J. PRITCHARD**, Capteurs et actionneurs dans l'analyse des systèmes distribués, *Recherche en Mathématiques Appliquées*, Editeurs : P.G. Ciarlet et J.L. Lions, Masson, 1986.

- [10] **J.P. GAUTHIER, H. HAMMOURI and S. OTHMAN**, A simple observer for nonlinear systems - application to a bioreactor, *IEEE Transaction Automatic Control*, vol.37, no.6, pp.875-880, 1992.
- [11] **J.P. GAUTHIER and I. KUPKA**, A separation principle for bilinear systems with dissipative drifts, submitted to *IEEE Transaction Automatic Control*, pp. 1-18.
- [12] **J.P. GAUTHIER, C.Z. XU and A. BOUNABAT**, An observer for infinite-dimensionnal skew-adjoint bilinear systems, *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control* **8**, pp.31-50, 1998.
- [13] **B.Z. GUO**, The Riesz basis property of discrete operators and application to a Euler-Bernoulli beam equation with boundary linear feedback control, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* **18**, pp.241-251, 2001.
- [14] **B.Z. GUO**, Riesz basis property and exponential stability of controlled Euler - bernoulli beam equations with variable coefficients, *SIAM J. Control and Optimization*, vol.40, no.6, pp.1905-1923, 2002.
- [15] **B.Z. GUO**, Riesz Basis approach to the stabilization of a flexible beam with a tip mass, *SIAM J. Control and Optimization*, vol.39, no.6, pp.1736-1747, 2002.
- [16] **B.Z. GUO and Y.H. LUO**, Controllability and stability of a second-order hyperbolic system with collocated sensor/actuator, *Systems & Control Letters* **46**, pp.45-65, 2002.
- [17] **B.Z. GUO and Y. XIE**, Basis property and stabilization of a translating tensioned beam through a pointwise control force, *Internationa Mechanical Engineering Congress and Exposition*, November 17-22, 2002, New Orleans, LA, USA.
- [18] **A.E. INGHAME**, Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, *Math. Zeitschrift*, vol.41, pp.367-379, 1936.
- [19] **V. KOMORNIK**, Rapid boundary stabilization of linear distributed systems, *Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée*, ISSN 0755-3390, pp.1-31, 1996.
- [20] **J.E. LAGNESE**, Recent progress in exact Boundary controllability and uniform stabilizability of thin beams and plates, Departement of Mathematics, Georgetown University, Washington, D.C., USA.

- [21] H. LAOUSY, C.Z. XU and G. SALLET, Boundary feedback stabilization of a rotating body-beam system, *IEEE Transaction Automatic Control*, vol.41, no.2, pp.241-245, 1996.
- [22] I. LASIECKA, Stabilization of wave and plate like equation with nonlinear dissipation on the boundary , *J. Diff. Equations* **79**, pp.340-381, 1989.
- [23] I. LASIECKA and R. TRIGGIANI, Exact controllability of the wave equation with Neumann boundary control, *Appl. Math. and Opt.* **19**, pp.243-290, 1989.
- [24] Ph. MARTIN, R.M. MURRAY and P. ROUCHON, Flat systems, *Lectures given at the Summer School on Mathematical Control Theory*, Lecture notes Number 2, LNS028011, ICTP, Trieste, September 3-28, 2001.
- [25] A. MIFDAL, Etude de la stabilisation forte et uniforme de système hybride : application à un modèle de pont roulant, Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré - Nancy I, 1997.
- [26] O. MORGÜL, Orientation and stabilization of flexible beam attached to a rigid body : Planar motion, *IEEE Transaction Automatic Control*, vol.36, no.5, pp.953-963, 1991.
- [27] O. MORGÜL, Constant angular velocity control of a rotating flexible structure, *Proceedings of the 2nd European Control Conference, ECC' 93*, Groningen, Netherlands, pp.299-302, 1993.
- [28] O. MORGÜL, Control of a rotating flexible structure, *IEEE Transaction Automatic Control*, vol. 39, no. 52, pp.351-356, 1994.
- [29] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer Verlag, New York, 1983.
- [30] L. PRALY, Lectures notes on an introduction to some Lyapunov designs of global asymptotic stabilizers, Banach Center summer school on mathematical control theory, Poland, September 2-20, 2002.
- [31] M. RENARDY, On the linear Stability of hyperbolic PDE's and viscoelastic flows, *Z. Angew Math. Phys. (ZAMP)* **45**, pp.854-865, 1994.
- [32] D.L. RUSSELL, Mathematical models for the elastic beam and their control-theoretic implications, Autumn College on Semigroups and Applications held at the International Center for Theoretical Physics, Italy, 1984.

- [33] D.L. RUSSELL and G. WEISS, A general necessary conditions for exact observability, *SIAM J. Control and Optimizations*, vol. 32, no.1, pp.1-23, 1994.
- [34] E.D. SONTAG, *Mathematical control theory : deterministic finite dimensional systems*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [35] R. TRIGGIANI, On the stabilizability problem in Banach space, *J. Maths. Analysis and Applications* 52, pp.383-403, 1975.
- [36] M. TUCSNAK and G. WEISS, Simultaneous exact controllability and some applications, *SIAM J. Control and Optimization*, vol.38, pp.1408-1427, 2000.
- [37] J. WEIDMANN, Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer-Verlag, Berlin.
- [38] G. WEISS, Admissible observation operators for linear semigroups, *Israël Journal of Mathematics*, vol. 65, no.1, 1989.
- [39] G. WEISS, Regular linear systems with feedback, *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 7, pp.23-57, 1994.
- [40] G. WEISS, Two conjectures on the admissibility of control operators, *International Series of Numerical Mathematics*, vol.100, Birkhauser, Basel, pp.367-378, 1991.
- [41] G. WEISS and R.F. CURTAIN, Exponential stabilization of a vibrating systems by collocated feedback, *Proceedings of the 7th IEEE Mediterranean Symposim on Control and Automation*, Haifa, Israel, June 1999.
- [42] G. WEISS, and F. CURTAIN, Dynamic stabilization of regular linear systems, *IEEE Transaction Automatic Control*, vol.42, pp. 4-21, 1997.
- [43] G. WEISS, O. STAFFANS and M. TUCSNAK, Well-posed linear systems - a survey with emphasis on conservative systems, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 11, pp.7-13, 2001.
- [44] C.Z. XU, Contrôle des Systèmes hybrides, Polycopie du Cours de DEA, Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Bénin, mars 1999.
- [45] C.Z. XU and J. BAILLEUL, Stabilizability and stabilization of a rotating body beam system with torque control, *IEEE Transaction Automatic Control*, vol.38, no.12, pp.1754-1765, 1993.
- [46] C.Z. XU, P. LIGARIUS and J.P. GAUTHIER, An observer for infinite dimensional dissipative bilinear systems, *Computers and Math. Applic.* 29, pp.13-21, 1995.

- [47] **C.Z. XU and G. SALLET**, Boundary stabilization of a rotating flexible system, *Lectures notes in Control and Information Sciences*, vol.185, Editeurs : R.F. Curtain, A. Bensoussan, and J.L. Lions, Springer Verlag, New York, pp.347-365, 1992.
- [48] **C.Z. XU and G. WEISS**, Spectral properties of semigroups obtained by feedback, *Manuscript*, pp.1-6, 2002.
- [49] **A.L. ZUYEV**, On partial stabilization of a rigid body with several elastic beams, 15 th Triennial World Congress of IFAC, Barcelona, Spain, 2002.