

THESE  
*présentée à*

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE  
*en vue de l'obtention*

DU GRADE DE DOCTEUR D'ETAT

Discipline : Sciences  
Mention : Mécanique

par

ABEL AFOUDA  
Docteur de 3<sup>ème</sup> Cycle

CONTRIBUTION A LA REPRESENTATION MATHEMATIQUE  
DU FONCTIONNEMENT HYDRODYNAMIQUE DES BASSINS VERSANTS

soutenue le 10 juillet 1985 devant le Jury

MM. THIRRIOT

Président

CERON  
DESSENS  
EZIN  
FONTAN  
GAUDU  
THIBAUT

Membres

T H E S E  
*présentée à*

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE  
*en vue de l'obtention*

DU GRADE DE DOCTEUR D'ETAT  
Discipline : Sciences  
Mention : Mécanique

par

ABEL AFOUDA  
Docteur de 3ème Cycle

CONTRIBUTION A LA REPRESENTATION MATHEMATIQUE  
DU FONCTIONNEMENT HYDRODYNAMIQUE DES BASSINS VERSANTS

soutenu le 10 juillet 1985 devant le Jury

MM. THIRRIOT

Président

CERON  
DESSENS  
EZIN  
FONTAN  
GAUDU  
THIBAUT

Membres

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



AFOUDA (Abel). - Contribution à la représentation mathématique du fonctionnement hydrodynamique des bassins versants - 350 p.

Th. de Doctorat d'Etat ès Sciences : Mécanique,  
Toulouse, I N P , juillet 1985

---

RESUME

On propose une description du fonctionnement des bassins versants, basée sur l'analyse des propriétés dynamiques et des structures stochastiques des phénomènes naturels qui s'y déroulent. Le modèle mathématique qui se dégage de cette description est un système d'équations différentielles stochastiques non-linéaires, qui permet de mettre en relief le caractère markovien de l'évolution des bassins versants.

L'application du modèle à l'étude de la dynamique des précipitations journalières provenant de plusieurs stations de l'Afrique de l'Ouest et à l'analyse de l'évolution des débits à la station de l'Ouémé à Savé, montre qu'il est de mise en oeuvre relativement simple et peut servir de modèle de prévision à courts termes pour la gestion des ressources en eau.

Un essai de généralisation pour la prévision à long terme est proposé.

---

MOTS CLES

RELATION PLUIE-DEBIT - CYCLE DE L'EAU - REPARTITION DE L'ENERGIE -  
RELATION D'EQUIVALENCE - EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE -  
CHAINE DE MARKOV - EQUATION DE FOKKER-PLANCK - PROBABILITE DE TRANSITION - RESEAU HYDROGRAPHIQUE - PROPRIETES GEOMETRIQUES -  
METHODE DE PREVISION

---

JURY et date de soutenance : 10 juillet 1985, 10 h, salle C4, ENSEEIHT

Président : C. THIRRIOT

Membres : J.P. CERON  
J. DESSENS  
J.P. EZIN  
J. FONTAN  
R. GAUDU  
R. THIBAUT

AFOUDA (Abel) . - Contribution to the mathematical representation of the hydrodynamic behaviour of watersheds - 350 p.

Thesis Doctorat d'Etat ès Sciences, Mécanique ,  
Toulouse, I N P , July 1985

ABSTRACT

A description of the watershed behaviour is proposed based upon the analysis of the dynamic properties and the stochastic structures of the natural phenomena that occur. The resulting mathematical model consists of a system of non-linear stochastic differential equations that allows to bring to light the markovian character of the evolution of the watershed.

The application of the model to the study of the dynamics of daily rainfall at different stations situated in West Africa as well as to the analysis of the evolution of the flow of the river Ouémé measured at Savé shows that this model is easily implemented and could be used for short-term prediction for water resources management.

A generalization for long-term prediction is also proposed.

KEY WORDS

RAINFALL-RUNOFF RELATIONSHIP - WATER CYCLE - ENERGY BALANCE -  
EQUIVALENCE RELATIONSHIP - STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION -  
MARKOV CHAIN - FOKKER-PLANCK EQUATION - TRANSITION PROBABILITY -  
HYDROGRAPHIC NETWORK - GEOMETRICAL PROPERTIES - PREDICTION METHODS.

JURY and date of defense : 10 july 1985, 10 h., salle C4 , ENSEEIHT

President :	C. THIRRIOT
Members :	J.P. CERON
	J. DESSENS
	J.P. EZIN
	J. FONTAN
	R. GAUDU
	R. THIBAUT

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

PRESIDENT D'HONNEUR

M. le professeur MONTEL

PRESIDENT

M. le professeur NOUGARO

VICE-PRESIDENT

M. ALBERTINI      Professeur  
M. BUGAREL        Professeur  
M. DABOSI         Professeur  
M. MARTY          Professeur

Directeur de l'E.N.S.A.T.      M. le professeur CANDAU  
Directeur de l'E.N.S.C.T.      M. le professeur LATTES  
Directeur de l'E.N.S.E.E.I.H.T. M. le professeur CRESTIN  
Directeur de l'I.G.C.          M. le professeur ANGELINO

SECRETAIRE GENERAL

M. CROS

PROFESSEURS HONORAIRES

Melle BERDUCOU  
M. BIREBENT  
M. DIEHL  
M. HAMANT  
M. VOIGT

PROFESSEURS

M. ALBERTINI	Zootecnies et agronomie
M. ALQUIER	Mécanique fondamentale et appliquée
M. AMALRIC	Composants électroniques et optiques
M. ANDRE	Zootecnies et agronomie
M. ANGELINO	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. BAJON	Automatique, informatique industrielle, signaux, robotique
M. BAUDRAND	Composants électroniques et optiques
M. BELLET	Mécanique fondamentale et appliquée
M. BEN AIM	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. BONEL	Métallurgie chimique, solides ionocovalents et moléculaires
M. BOUCHER	Composants électroniques et optiques
M. BOURGEAT	Zootecnies et agronomie
M. BRUEL	Informatique théorique, informatique des systèmes matériels et logiciels
M. BUGAREL	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. BUIS	Biologie et physiologie végétales
M. CABANEL	Informatique théorique, informatique des systèmes matériels et logiciels
M. CALMON	Biochimie et biologie appliquées
M. CANDAU	Zootecnies et agronomie
M. CASTANIE	Automatique, informatique industrielle, signaux, robotique
M. CONSTANT	Métallurgie chimique, solides ionocovalents et moléculaires
M. COSTES	Automatique, informatique industrielle, signaux, robotique
M. COUDERC	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. CRESTIN	Informatique théorique, informatique des systèmes matériels et logiciels
M. DABOSI	Métallurgie chimique, solides ionocovalents et moléculaires

M. DAT	Mécanique fondamentale et appliquée
M. DE FORNEL	Systèmes électroniques, électrotechnique
M. DELMAS	Chimie industrielle
M. DOMENECH	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. ECOCHARD	Biochimie et biologie appliquées
M. ENJALBERT	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. FABRE	Mécanique fondamentale et appliquée
M. FALLOT	Biochimie et biologie appliquées
M. FARRENY	Informatique théorique, informatique des systèmes matériels et logiciels
M. FOCH	Systèmes électroniques, électrotechnique
M. GARDY	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. GASET	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. GIBERT	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. GILOT	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. GOURDENNE	Polymères
M. GRUAT	Mécanique fondamentale et appliquée
M. HA MINH	Mécanique fondamentale et appliquée
M. HOFFMANN	Automatique, informatique industrielle, signaux, robotique
M. KALCK	Chimie minérale, chimie analytique
M. LABAT	Zootecnies et agronomie
M. LAGUERIE	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. LEFEUVRE	Systèmes électroniques, électrotechnique
M. LENZI	Chimie industrielle
M. MARTY	Systèmes électroniques, électrotechnique
M. MASBERNAT	Mécanique fondamentale et appliquée
M. MATHEAU	Systèmes électroniques, électrotechnique
M. MATHIEU	Chimie minérale, chimie analytique
M. MOLINIER	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. MONCOULON	Zootecnies et agronomie
M. MONTEL	Métallurgie chimique, solides ionocovalents et moléculaires
M. MORA	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. MORARD	Zootecnies et agronomie
M. MORELIERE	Composants électroniques et optiques
M. NAJIM	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. NOAILLES	Modélisation, calcul scientifique, statistiques
M. NOUGARO	Mécanique fondamentale et appliquée
M. PAREILLEUX	Biochimie et biologie appliquées
M. PECH	Biochimie et biologie appliquées
M. PLANCHON	Biochimie et biologie appliquées
M. RIBA	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. ROBERT	Génie des procédés et des réactions chimiques
M. RODRIGUEZ	Informatique théorique, informatique des systèmes matériels et logiciels
M. SALLE	Informatique théorique, informatique des systèmes matériels et logiciels
M. TERRON	Zootecnies et agronomie
M. THIRRIOT	Mécanique fondamentale et appliquée
M. TORRES	Chimie minérale, chimie analytique
M. TRANNOY	Systèmes électroniques, électrotechnique
M. TRUCHASSON	Mécanique fondamentale et appliquée

(mis à jour le 1er février 1985)

*A ma mère  
In memoriam*

*A mon père  
Avec toute ma reconnaissance*

*A ma femme Rachelle  
et mon fils Emmanuel  
Pour tout le temps  
que je leur prends ;  
pour leur compréhension  
et pour leur soutien.*

*A mes frères et soeurs  
En témoignage de mon affection.*

*"Labor omnia  
vincit improbus"*

## AVANT PROPOS

La rédaction de ce mémoire de thèse, modeste contribution à la modélisation des phénomènes hydrologiques, n'aurait pas été possible sans la bienveillante collaboration de nombreuses personnes à qui nous voudrions exprimer, ici, toute notre profonde gratitude.

Quelques mots ne peuvent traduire l'importance du rôle qu'a joué le Professeur C. THIRRIOT dans notre formation. Nous devons à sa sollicitude d'avoir pu mûrir notre esprit, pendant de nombreuses années, à la réalité de la modélisation des phénomènes hydrologiques. Depuis 1971, il a su continuellement nous communiquer non seulement son goût enthousiaste pour la recherche mais aussi nous montrer que toute activité scientifique, si élevée soit-elle, était aussi faite de rapports humains. La rigueur scientifique et la sollicitude permanente dont il a fait preuve à notre égard et l'honneur qu'il nous fait de présider ce jury nous laisseront un souvenir particulièrement attachant.

Nos très sincères remerciements vont à M. Rémi GAUDU, Maître de Conférences à l'Institut National Polytechnique de Toulouse, pour l'amitié que, lui-même et sa famille, nous ont témoignée pendant nos séjours successifs, et pour avoir accepté de faire partie de ce jury.

Notre très profonde reconnaissance va aussi à la famille J.P. BOMBAUD dont l'amitié et la collaboration efficace ont été très appréciées dans l'accomplissement des travaux qui font l'objet de ce mémoire. La grande expérience de J.P. BOMBAUD en Informatique a été un apport précieux pour la constitution de nos fichiers de données et pour leur exploitation.

Monsieur J. FONTAN, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, et Monsieur J. DESSENS, Physicien C N R S au Centre de Recherches Atmosphériques de Campistrous (Lannemezan), ont accepté d'évaluer cette modeste contribution et de faire partie du jury. Qu'ils trouvent ici l'expression de nos vifs remerciements.

Nous exprimons notre très profonde gratitude à M. R. THIBAUT, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, pour l'intérêt et l'attention qu'il a portés à nos travaux et pour sa disponibilité à les discuter chaque fois que nous en avons exprimé le besoin.

.....

Nous sommes reconnaissant à M. J.P. EZIN, Professeur à l'Université Nationale du Bénin et Directeur du Département de Mathématiques, d'avoir accepté, malgré ses multiples charges et les difficultés de la distance, de se joindre au jury.

Notre profonde reconnaissance va aussi à M. J.P. CERON, de l'Ecole Nationale de Météorologie, qui a aimablement accepté de faire partie du jury.

Il nous est agréable de pouvoir exprimer notre reconnaissance à M. Elie YABI, Directeur de l'ASECNA à Cotonou et Chef de la Section Météorologie, et à ses collaborateurs, pour les facilités qu'ils ont bien voulu nous accorder lors de la collecte des données.

Que les Autorités Administratives à divers niveaux (au Bénin et en France), qui ont rendu possible ce travail par leur soutien matériel, trouvent ici l'expression de notre sentiment reconnaissant.

Que tous les collègues de l'Equipe "Crues et Sécheresses", en particulier Michel ARNAUD, Hamadi HABAIEB et Michael FONTIN, trouvent, ici, l'expression de nos remerciements, pour l'esprit de collaboration et d'amitié qu'ils ont su maintenir dans notre petite équipe.

Nos remerciements vont à MM. CANS, LELEU, BRUNATO pour leur aimable collaboration.

La tâche ingrate de rendre le manuscrit original lisible et déchiffrable est revenue à Mme Marie-Hélène PUECH. Elle l'a assumé avec dévouement et compétence. Qu'elle trouve ici l'expression de notre amitié.

Certaines idées qui font l'objet des développements présentés dans ce mémoire ont été mûries pendant que nous bénéficions de l'hospitalité du Centre International d'Hydrologie "Dino Tonini" à Padoue (Italie). Que les Responsables de ce Centre trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

L'accomplissement de nos travaux n'aurait pas été possible sans l'accueil chaleureux que nous a réservé M. Serge BORIES, Directeur de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse. Qu'il trouve, ici, l'expression de nos très sincères remerciements.

"Last, but not least" les parents et les amis ont, par leurs conseils, leurs encouragements, joué un rôle important dans l'accomplissement de ces travaux. Que les uns et les autres trouvent ici l'expression de nos sentiments reconnaissants. A tous, nous disons que "l'effort doit être notre pain quotidien pour que la joie devienne notre compagne".

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



## TABLE DES MATIERES

	Pages
<u>CHAPITRE I : INTRODUCTION</u>	1.0
Motivation	1.1
L'idée de base	1.4
Le contenu du mémoire	1.5
Les grandes divisions	1.7
Références	1.9
<u>CHAPITRE II : REPRESENTATION MATHEMATIQUE DU BASSIN VERSANT</u>	2.0
2.1. Base déterministe de la description du bassin versant	2.2
2.2. Le modèle stochastique	2.20
2.3. Conclusion	2.42
2.4. Références bibliographiques	2.45
<u>CHAPITRE III : PANORAMA DES MODELES ANTERIEURS</u>	3.0
3.1. Généralités	3.1
3.2. Présentation des chaînes de Markov appliquées à l'étude des précipitations journalières	3.2
3.3. Processus de Markov appliqué à la modélisation des bassins versants	3.25
3.4. Approximation fonctionnelle de l'équation de Fokker - Planck - Kolmogorov	3.31
3.5. Références bibliographiques	3.39
<u>CHAPITRE IV : ASPECT DYNAMIQUE DE LA DISTRIBUTION JOURNALIERE DES PRECIPITATIONS EN MILIEU TROPICAL OUEST AFRICAIN</u>	4.0
4.1. Introduction	4.1
4.2. Description du cycle de l'eau	4.2
4.3. Application à l'étude de la distribution des séquences sèches et pluvieuses	4.22
4.4. Références bibliographiques	4.41

.....

<u>CHAPITRE V : CARACTERISATION DU RESEAU DE TRANSPORT</u>	5.0
5.1. Introduction	5.1
5.2. Le réseau hydrographique	5.2
5.3. L'hydrogramme unitaire instantané géomorphologique	5.6
5.4. Classification de Thirriot	5.13
5.5. Essai de description des propriétés fractales et markoviennes du réseau hydrologique	5.15
5.6. Conclusion	5.24
5.7. Références bibliographiques	5.25
<u>CHAPITRE VI : EVOLUTION DES DEBITS DE SORTIE</u>	6.0
6.1. Introduction	6.1
6.2. Equation d'évolution déterministe du débit	6.2
6.3. Evolution stochastique de débit	6.6
6.4. Approximation de la densité de probabilité	6.9
6.5. Applications	6.11
6.6. Conclusion	6.17
6.7. Références bibliographiques	6.19
<u>CHAPITRE VII : ESSAI DE GENERALISATION A LA DESCRIPTION DE L'EVOLUTION A LONG TERME DU CYCLE HYDROMETEOROLOGIQUE</u>	7.0
7.1. Introduction	7.1
7.2. Survol des modèles de prévision à long terme	7.2
7.3. Elaboration de la méthode de prévision à long terme	7.8
7.4. Conclusions	7.23
7.5. Références bibliographiques	7.27
<u>CHAPITRE VIII : CONCLUSIONS GENERALES</u>	8.0

---

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A : Publications antérieures constituant les bases déterministes de la description du bassin versant.

### Annex A-1

A Unified Approach to Watershed Modelling.  
In "Nordic Hydrology", vol. 9, n° 3/4, 1978.  
pp. 161-172

### Annexe A-2

Analysis of the Rainfall-Runoff  
Transformation Process  
In "Nordic Hydrology", vol.11, n° 2, 1980  
pp. 93-112

### Annexe A-3

Etude théorique de modèles de transformation pluie-  
débit en milieu semi-urbain.  
In "Cah. ORSTOM, ser. Hydrol. vol. XVII, n°2, 1980  
pp. 71-90

### Annexe A-4

A generalized kinematic approach to basin Modelling.  
In "Hydrological Forecasting - Actes du Colloque  
d'Oxford", avril 1980: I A H S - A I H S. Publ. n°  
129, pp. 105-114

### Annexe A-5

Quelques aspects climatologiques de l'élaboration des  
systèmes de drainage en milieu urbain.  
In "Actes de la Conférence sur le Climat en Afrique",  
tenue à ARUSHA (Tanzanie), janvier 1982. Public. WHO/  
OMM/n° 596, Secrétariat de l'OMM, Genève - Suisse.

ANNEXE B : Liste de tableaux

### Calcul empirique

Tableau 1 : Caractéristiques géographiques des stations étudiées

Tableau 2 : Evolution moyenne de la pluviométrie  
a) Stations équatoriales et tropicales (Bénin)  
b) Stations sahéliennes (Burkina-Faso)

Tableau 3 : Calcul empirique des paramètres annuels  
a) Durées pluvieuses  
b) Durées sèches

.....

- Tableaux-4: Calcul empirique des durées pluvieuses  
a) Moyennes mensuelles  
b) Coefficients de variation
- Tableaux 5: Calcul empirique des durées sèches  
a) Moyennes mensuelles  
b) Coefficients de variation
- Tableaux 6: Calcul empirique multiclasse  
a) Variante A : seuils - 0, 10, 25, 50 mm  
b) Variante B : seuils - 0, 1, 5, 20 mm  
c) Variante C : seuils - 0, m, m+ $\sigma$ , m+2 $\sigma$

Calcul markovien (résultats binaires annuels)

- Tableaux 7: Valeurs synthétiques des moments caractéristiques de différents ordres. Périodes pluvieuses (de 7-a à 7-g)
- Tableaux 8: Valeurs synthétiques des moments caractéristiques de différents ordres. Périodes sèches (de 7-a à 7-g)
- Tableaux 9: Erreur relative sur la dispersion
- Tableaux 10: Valeurs des probabilités  
a) Probabilités marginales  
b) Probabilités de transition Markov 1  
c) Probabilités de transition Markov 2  
d) Probabilités de transition Markov 3

Calcul markovien (résultats binaires mensuels)

- Tableaux 11: Moments caractéristiques des périodes sèches et pluvieuses (de 11-a à 11-f)

Calcul markovien (résultats multiclassés binaires)

- Tableaux 12: Exemple de Cotonou  
a) Nombre de séquences  
b) Moments caractéristiques  
c) Probabilités de transition multiclasse

ANNEXE C : Figures

C-1 : Figures du chapitre IV

- Figure 1 : Carte de situation géographique
- Figures 2: Régime des pluies  
a) Régimes équatoriaux  
b) Régimes tropicaux  
c) Régimes sahéliens
- Figures 3: Evolution des hauteurs de pluie à la station de Cotonou-Aéroport  
a) Hauteurs annuelles et moyennes mobiles sur 5 ans  
b) Hauteurs mensuelles du mois de juin  
c) Hauteurs maxima en 24, 48 et 72 heures
- Figures 4: Fonctions d'autocorrélation (4-a à 4-g)
- Figures 5: Cartographie des principaux paramètres  
a) Paramètres des durées sèches et pluvieuses  
b) Probabilités conditionnelles des durées sèches  
c) Probabilités conditionnelles des durées pluvieuses
- Figures 6: Fonctions de répartition conditionnelles des hauteurs de pluies (6-a, 6-a bis - 6-f , 6-f bis)
- Figures 7: Fonctions de répartition empiriques et théoriques des durées sèches et pluvieuses : chaîne de Markov discrète d'ordre 1 à 4.  
(Figures 7-a - 7-g).
- Figures 8: Fonctions de répartition des durées sèches par l'approximation de polynômes d'Hermite  
(Figures 8-a - 8-g)
- Figures 9: Corrélogrammes des pluies journalières  
(Figures 9-a - 9-g)
- Figure 10: Variation de l'erreur relative sur la dispersion des durées
- Figures 11: Description probabiliste des états journaliers  
a) Seuil 2.0 mm  
b) Seuil 5.0 mm
- Figures 12: Fonctions de répartition des états journaliers  
a) Seuil 2.0 mm  
b) Seuil 5.0 mm
- Figure 13: Variations mensuelles des probabilités conditionnelles : Cotonou.

C-2 : Figures du chapitre V

- Figure 14: Description du réseau d'après Horton
- Figure 15: Description du réseau d'après Thirriot

Figure 16: Description markovienne du réseau

Figure 17: Description par les réservoirs en cascade.

C-3 : Figures du chapitre VI

Figure 18: Présentation du bassin de l'Ouémé au pont de Savé

Figure 19: Evolution des débits de l'Ouémé au pont de Savé

Figure 20: Structure markovienne des débits.

---

Figure 16: Description markovienne du réseau

Figure 17: Description par les réservoirs en cascade.

C-3 : Figures du chapitre VI

Figure 18: Présentation du bassin de l'Ouémé au pont de Savé

Figure 19: Evolution des débits de l'Ouémé au pont de Savé

Figure 20: Structure markovienne des débits.

---

CHAPITRE IINTRODUCTION

	Pages
<u>1.1. MOTIVATION (Position du problème)</u>	1.1
<u>1.2. L'IDEE DE BASE DU MEMOIRE (la thèse)</u>	1.4
<u>1.3. LE CONTENU DU MEMOIRE</u>	1.5
<u>1.4. LES GRANDES DIVISIONS DU MEMOIRE</u>	1.7
<u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES DU CHAPITRE I</u>	1.9

---

### 1.1. MOTIVATION (Position du problème)

Parmi les catastrophes naturelles que l'Afrique a connues ces dernières années, la sécheresse qui a frappé (et qui frappe encore) les deux bandes tropicales qui ceignent le globe reste la plus sinistre. Cette sécheresse présentait, d'après J. SIRCOULON (1976), trois caractères dont la conjonction lui a donné un aspect inhabituel : sa rigueur, son extension et surtout sa persistance pendant plusieurs années consécutives. Les effets néfastes de ce phénomène sur la vie des populations et sur l'économie des pays ont atteint des proportions inégalées. D'après H.H. LAMB (1976), lors de son paroxysme en 1971 et 1972, cette sécheresse a :

- entraîné la mort d'environ 200.000 personnes et d'un nombre incalculable de bestiaux et d'animaux sauvages ;
- obligé les populations à quitter massivement leur région et,
- soulevé des problèmes politiques importants dans la plupart des pays.

Marqués par l'ampleur d'un tel phénomène et par ses conséquences, de nombreux organismes internationaux sont intervenus, soit pour assister les populations sinistrées, soit pour essayer de mieux connaître les causes même de la sécheresse, étudier les risques de son retour et déterminer les ressources hydriques des pays concernés.

Mais, si dans l'ensemble, l'assistance des organismes internationaux aux pays les plus touchés a permis d'atténuer les effets néfastes de ce phénomène naturel, certaines questions posées à l'hydrologue et au climatologue restent toujours actuelles. La plupart de ces questions tournent autour des deux thèmes principaux suivants :

- a. *périodicité des phénomènes hydrométéorologiques,*
- b. *fonctionnement hydrodynamique des bassins des cours d'eau*

La finalité de décision attachée au premier thème est évidente. Il suffit de se rappeler le songe du pharaon d'Egypte rapporté par la Bible (Genèse 41) et où "*sept vaches laides à voir et maigres de chair mangèrent sept vaches belles à voir et grasses de chair,.... et sept épis maigres et brûlés par le vent engloutirent sept épis gras et pleins*". La connaissance de la période de retour permettrait de faire des prévisions à longs termes et donc de se prémunir contre les sécheresses à venir.

De nombreux travaux ont exploré cette possibilité en utilisant soit des méthodes statistiques (J. SIRCOULON, 1976), soit des informations paléoclimatiques (SERVANT, 1974 - PETIT-MAIRE, 1984), soit des corrélations entre zones (ROGNON, 1974). Mais ces travaux n'ont pas permis de dégager des conclusions définitives. D'après J. SIRCOULON, il ne paraît pas possible de se prononcer, faute de séries suffisamment longues, sur l'existence ou non de cycles climatiques.

D'un point de vue conceptuel, la difficulté réside, à notre avis, dans le fait que les variations climatiques résultent de la superposition de plusieurs phénomènes physiques ayant chacun une persistance propre. Pour être capable de représenter la réalité physique, tout modèle visant à la simulation de la périodicité des phénomènes hydrométéorologiques devrait tenir compte de ces échelles de temps. Il s'agit donc essentiellement de problème de "systèmes" au sens de VON BERTALANFFY (1973), c'est-à-dire de problèmes posés par un grand nombre de variables en inter-relation.

Les objectifs de gestion liés au second thème paraissent tout aussi évidents. Dans les régions tropicales et sahéliennes, les petits cours d'eau sont souvent intermittents. Après chaque crue, l'écoulement cesse, sauf lorsque le sol est perméable. Dans ce dernier cas, l'écoulement

peut être permanent. Par contre, les grands cours d'eau comme le Niger, le Sénégal, le Chari, etc. sont toujours permanents. La question que l'on se pose alors est la suivante : Peut-on, à partir de la connaissance du comportement de chacun des affluents qui peuvent être ou non permanents, prévoir la réponse d'un bassin versant aux événements pluviométriques ? Quelles vont être les influences des hétérogénéités spatiales du bassin versant et de ses dimensions ? Il s'agit d'une approche quantitative des systèmes, basée sur la construction d'un modèle capable, à l'échelle du bassin d'un cours d'eau, de fournir, suivant les termes de G. DE MARSILY (1978) des indications :

- soit sur des grandeurs concomitantes non mesurées
- soit sur ce qui se passe aux points qui n'ont pas été observés
- soit sur ce qui se passera dans le futur pour des conditions de fonctionnement différentes des conditions de calage.

Pour les deux thèmes, le problème se ramène donc à la recherche d'un modèle capable de jouer le rôle d'un outil adéquat pour la connaissance de notre milieu naturel. Pour jouer ce rôle, il doit avoir une similitude parfaite de comportement avec ce milieu et posséder de bonnes capacités prédictives.

Mais, ainsi que le souligne P. LANGEVIN (cité par J.N. LEVY-LEBLOND, 1982, P. 195) *"par une harmonie singulière, les besoins de l'esprit, soucieux de construire une représentation adéquate du réel, semblent avoir été prévus et devancés par l'analyse logique et l'esthétique abstraite du mathématicien"*. *"Les mathématiques constituent pour ainsi dire le langage à l'aide duquel une question peut être posée et résolue"* affirme de son côté W. HEISENBERG op. cité p. 196). Suivant l'analyse de LEVY-LEBLOND cette conception peut s'interpréter de diverses façons, suivant que l'on considère les mathématiques comme le langage de la nature que devra s'efforcer d'assimiler l'homme qui l'étudie, ou; à l'inverse, comme le langage de l'homme, dans lequel devront être traduits les faits de la nature pour devenir compréhensibles.

La première position semble être celle de GALILEE et d'EINSTEIN. Le second point serait celui de HEISENBERG. Mais *"les deux attitudes, loin d'être opposées, ne constituent que les points extrêmes d'un spectre continu. Il s'agit en effet de trouver un point d'équilibre à l'intérieur d'une structure reposant sur les couples de notions opposées : nature-homme, expérience-théorie, concret-abstrait..."* (op. cité p. 196). Suivant le poids assigné à l'un ou l'autre pôle de ces couples, on obtient une infinité de positions se rattachant toutes au spectre philosophique que délimite le couple empirisme-formalisme.

### 1.2. L'IDEE DE BASE DU MEMOIRE (la thèse)

Le point de vue qui guidera notre démarche dans cette étude consiste à dire que le modèle mathématique, en tant qu'outil de connaissance, et tout comme les modèles physiques (modèle réduit, modèle analogique), constitue une image du système que l'on veut étudier ; la précision de cette image dépend nécessairement de l'échelle d'observation. En d'autres termes, nos moyens de perception et leurs imprécisions s'interposent nécessairement entre le monde qui nous entoure et nous. Nous devons donc reconnaître avec J. HAMBURGER (1984) que *"nous travaillons sur les reflets que nous avons de l'objet et non sur l'objet lui-même"*. Tout modèle doit donc inclure dans sa structure une évaluation des "incertitudes" (au sens de HEISENBERG), qui sont liées à l'échelle d'observation pré-supposée. Du point de vue des incertitudes liées à l'échelle d'observation, il n'est pas équivalent de décrire un bassin versant par un réservoir linéaire ou par les équations de Saint-Venant.

Mais à travers le filtre (au sens de KALMAN), que constituent les imprécisions de nos moyens de perception, la réalité physique nous apparaît, (on pourrait même dire s'impose à notre conscience), comme un ensemble hiérarchisé de structures interdépendantes. Le fonctionnement hydrologique d'un bief aval de rivière, pour être mieux compris doit être placé dans le cadre de l'évolution de la portion de bassin qui englobe

ce bief, et suivant le degré de précision voulu, on considérerait soit le cours d'eau principal, soit le cours d'eau principal avec ses affluents de premier, deuxième, ..., n<sup>ième</sup> ordre, à la manière d'un agrandissement progressif d'une image donnée par un satellite. En adaptant un sonnet de Jonathan SWIFT, cité par H. LESIEUR (1982), on pourrait traduire cette interdépendance des structures de manière imagée en disant :

Les grands fleuves ont leurs rivières  
qui alimentent les débits  
Les rivières ont leurs ruisseaux  
Et c'est ainsi jusqu'au ru.

Cette même idée, qualifiée par B. MANDELBROT (1982) de "simple mais puissante" a été traduite sous forme de proverbe : "*tout petit réseau fluvial n'est qu'une image réduite d'un grand réseau*".

A une autre échelle, l'évolution d'un bassin versant est à situer, dans le cadre de l'évolution du système climatique, où les précipitations à l'entrée du bassin peuvent être considérées comme la sortie d'un système amont, donc comme le résultat d'une transformation dynamique. Ce qui se passe au niveau du bassin versant devient, dans ce cas, une phase d'un processus plus régulier : le cycle de l'eau. En tenant compte ici de la turbulence atmosphérique, on retrouve la même idée d'interdépendance des structures hiérarchisées, telles qu'elle avait déjà été envisagée en 1929 par L.F. RICHARDSON et formulée par A.N. KOLMOGOROV en 1941 pour l'étude de la turbulence développée (in LESIEUR, op. cité).

### 1.3. LE CONTENU DU MEMOIRE

Dans ce mémoire, le fonctionnement hydrodynamique du bassin versant est donc considéré comme une fraction de l'évolution du système climatique. Le modèle mathématique qui décrit ce système sera, de ce fait, un

modèle d'évolution. Nous ramènerons ainsi la description physique du bassin à la détermination d'un opérateur d'évolution adéquat. De même, les relations qui décrivent le comportement des différentes parties seront des relations d'évolution. Pour un phénomène naturel, les hypothèses de linéarité sont loin de la réalité physique, mais elles permettent dans une première approximation de voir l'évolution du bassin comme une superposition de l'évolution de ses différentes parties. Avec l'introduction de la non-linéarité, la structure hiérarchisée d'ensemble apparaîtra comme un tout et non plus comme une simple agrégation de ses éléments. La prise en compte des incertitudes liées à l'échelle d'observation conduit à rechercher un opérateur d'évolution capable de rendre compte à la fois :

- du caractère aléatoire associé à l'évolution des systèmes naturels et
- des influences des effets d'échelles et d'hétérogénéités sur le comportement du réseau de transport.

Le problème mathématique découle de la réunion de deux types d'outils mathématiques :

- une représentation synthétique des modèles utilisés actuellement pour simuler l'évolution des bassins versants
- une modélisation du caractère aléatoire de cette évolution par la notion de bruit, fondée sur la théorie des fonctions aléatoires. On est conduit ainsi à résoudre des équations d'évolution de type stochastique dont les solutions sont des processus de Markov (continus ou discrets).

La nécessité de tester ce modèle théorique sur des données concrètes nous conduira à choisir des exemples précis pour illustrer la démarche suivie. Nous choisirons ces exemples au Bénin (en milieu tropical humide) et nous comparerons les résultats avec ceux d'autres régimes climatiques.

#### 1.4. LES GRANDES DIVISIONS DU MEMOIRE

Après ce premier chapitre consacré aux généralités, nous identifierons, au deuxième chapitre, la réalité physique en définissant tout d'abord le bassin versant comme un système dynamique. La représentation des systèmes dynamiques sera examinée sous sa forme abstraite et le problème conceptuel sera posé.

Le troisième chapitre sera consacré à un panorama des modèles de simulation des bassins versants, tels qu'ils sont actuellement connus. Nous présenterons ainsi les modèles utilisant les équations intégrales, les modèles utilisant le concept de réservoir, les modèles distribués utilisant les équations du bilan hydrodynamique et enfin les modèles stochastiques. Nous proposerons ensuite une représentation synthétique de ces modèles sous la forme d'un système d'équations différentielles stochastiques non-linéaires. Nous pourrions ainsi faire usage par la suite des principaux résultats déjà disponibles dans ce domaine.

Le chapitre IV concerne l'étude particulière de la fonction d'entrée. Après une description des processus physiques qui déterminent le paramètre d'entrée, une expression mathématique est proposée pour décrire le cycle de l'eau, et une relation d'équivalence est introduite pour décrire l'évolution du milieu physique. L'application de la représentation synthétique à l'expression du cycle de l'eau permet de montrer après plusieurs auteurs (NEUMAN 1962, YEVJEVICH 1974, THIRRIOT 1983, THIRRIOT-ARNAUD-BERGAOUI 1984) que les précipitations à l'entrée des bassins versants sont bien représentées par des processus de Markov. Quelques exemples de climats sont examinés.

Avant d'examiner ce que peut être l'évolution des débits de sortie, il nous a paru nécessaire de revenir au chapitre V sur la description du bassin en tant que réseau de transport. On décrit ainsi la géométrie du réseau du point de vue de son arborescence et on présente une méthode originale de repérage due au Professeur THIRRIOT. On dégage ensuite, à

partir d'un schéma hydrodynamique simple, une représentation approchée pour le bassin versant ; cette nouvelle représentation est comparée au modèle synthétique proposé plus haut.

Plusieurs critères sont proposés au chapitre VI pour le choix du modèle de sortie (critère de simplicité, critère de fidélité et un critère intermédiaire). Mais pour des entrées de type stochastique, la solution théorique du modèle conduit à des sorties de type stochastique pouvant être ramenés au processus de Markov. Nous appliquons ce résultat aux débits de la station de l'Ouémé au pont de Savé.

Les deux derniers chapitres pourraient être considérés comme une sorte d'antithèse et de synthèse pour les idées développées. En effet, si l'idée de représenter la réalité physique comme un ensemble hiérarchisé de structures interdépendantes est conceptuellement correcte, on devrait s'attendre à ce que son domaine de validité excède l'échelle du bassin versant. Une méthode de généralisation souvent utilisée consiste à ramener les équations à une forme adimensionnelle en utilisant des valeurs relatives des grandeurs étudiées.

Le chapitre VII explore la généralité du modèle proposé en liaison avec l'échelle d'observation. Une méthode de passage à la limite est examinée, et on propose une description de la réalité physique qui s'appuie sur des essais d'interprétation fonctionnelle, géométrique et physique d'un opérateur qu'on a introduit. Une interprétation théorique de la relation d'équivalence introduite au chapitre IV est alors suggérée.

Enfin, le chapitre VIII s'efforce de dégager une conclusion de l'étude en insistant surtout sur les particularités de la démarche que nous avons suivie.

Pour une large part, ce mémoire prend appui sur quelques documents publiés entre 1978 et 1983. Aussi, nous a-t-il paru plus commode, pour le renvoi à des détails, de les rassembler en annexe avec les planches et les tableaux élaborés pour la présente synthèse.

---

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES DU CHAPITRE I

- BERTALANFFY, (von) L. (1973) , Théorie générale des systèmes. Dunod-Paris (nouveau tirage 1980)
- HAMBURGER, J. (1984) , La raison et la passion : réflexion sur les limites de la connaissance. Edit. du Seuil, Paris
- KEBAILI-BERGAOUI, Z. (1983), Contribution à l'étude de la pluie dans la région de Tunis; Thèse de Docteur-Ingénieur, Institut National Polytechnique de Toulouse
- LAMB, H.H. (1976) , Les fluctuations climatiques à longs termes. La Météorologie VIe série n° 7, pp. 135-141
- LESIEUR, M. (1982) , La turbulence développée. La Recherche n° 139, décembre, pp. 1412-1425
- LEVY-LEBLOND, J.M. (1982), Physique et Mathématique (In Penser les mathématiques, pp. 195-210) Edit. du Seuil, Paris
- MANDELBROT, B. (1982), Des monstres de Cantor et de Peano à la géométrie fractale de la nature (In Penser les mathématiques, pp. 226-251), Edit. du Seuil, Paris
- MARSILY (de) G. (1978), De l'identification des systèmes hydro-géologiques , Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VI
- NEUMAN, G. (1962), A Markov chain model for daily rainfall occurrence at Tel-Aviv, Roy. Met.Soc. London, cité par Kebaili-Bergaoui (1983)
- PETIT-MAIRE, N. (1984), Le Sahara, de la steppe au désert. La Recherche n° 160, novembre
- ROGNON, P. (1974), Modifications naturelles du cycle hydrométéorologique depuis 10.000 ans. Leurs utilisations pour la prévision climatique à longs termes. XIIIe Journée de l'Hydraulique S.H.F. quest I. Rapport Général.
- SERVANT, M. (1974) , Les variations climatiques des régions inter-tropicales du continent africain depuis la fin du Pléistocène. XIIIe Journées de l'Hydraulique, S.H.F., quest. I, Rapport 8
- SIRCOULON, J. (1976), Les sécheresses et les étiages : la récente sécheresse des régions sahéliennes, S.H.F. session des 18 et 19 mars.

THIRRIOT, C. (1983), Recherche d'un opérateur continu comme chaîne de Markov dans la suite des épisodes pluvieux. Rapp. Int. I.M.F. Toulouse C.T. 582, janvier.

THIRRIOT, C. , ARNAUD, M., BERGAOUI, Z. (1984) , Sur un algorithme markovien de la simulation des fortes pluies et sécheresses - 5ème Conférence Internationale sur la planification et gestion des eaux , Athènes, 1-4 octobre.

YEVJEVICH, V. (1974) , Stochastic process in hydrology. Water Res. Center Publ. Fort Collins, Colorado.

---

1871  
No. 100

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



## CHAPITRE 2

### REPRESENTATION MATHEMATIQUE DU BASSIN VERSANT

		Pages
<u>2.1.</u>	<u>BASE DETERMINISTE DE LA DESCRIPTION MATHEMATIQUE DU BASSIN VERSANT</u>	2.2
	2.1.1. Le modèle de type parabolique	2.4
	2.1.2. Le modèle de type hyperbolique	2.6
	2.1.3. Le modèle global	2.15
	2.1.4. Modèle de fonctionnement déterministe du bassin versant	2.19
 <u>2.2.</u>	 <u>LE MODELE STOCHASTIQUE</u>	 2.20
	2.2.1. Le système dynamique naturel	2.20
	2.2.2. Rappel de la définition du bruit blanc	2.22
	2.2.3. Modèle de fonctionnement stochastique du bassin	2.25
	2.2.4. Propriétés mathématiques du modèle	2.26
	a. <i>L'équation différentielle stochastique</i>	2.26
	b. <i>Intégration des processus stochastiques</i>	2.27
	c. <i>Règle de calcul stochastique</i>	2.33
	d. <i>Evaluation des paramètres du modèle</i>	2.35
 <u>2.3.</u>	 <u>CONCLUSION</u>	 2.43
 <u>2.4.</u>	 <u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u>	 2.45

La connaissance du milieu physique est basée à la fois sur l'observation directe et sur l'abstraction. Suivant le poids attaché à l'un ou l'autre aspect, on obtient une infinité de conceptions du modèle de la réalité physique, compris entre les modèles purement empiriques, qui s'appuient uniquement sur l'observation directe du milieu et les modèles purement théoriques qui constituent le domaine d'investigation des mathématiques (schéma 1).

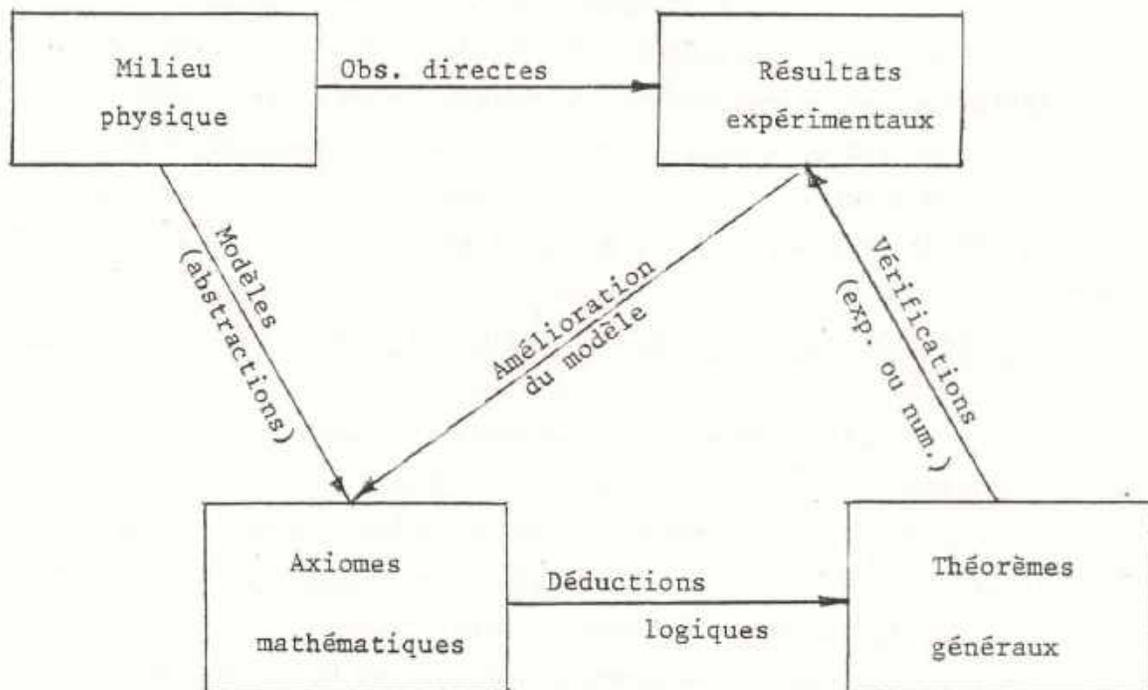


Schéma 1

Une démarche intermédiaire, et maintenant classique pour aborder l'étude du milieu physique, consiste à considérer celui-ci comme un système naturel, c'est-à-dire une entité physique qui transforme les grandeurs d'entrée : les causes, en grandeurs de sortie : les effets. Dans le cas d'un bassin versant, les grandeurs d'entrée sont

généralement les paramètres météorologiques (pluie, température, évaporation, évapotranspiration, insolation, etc.), et les grandeurs de sortie se mesurent en termes de modifications du bassin versant, imputables à l'évolution de ces paramètres (ruissellement, modification de la couverture végétale, sécheresse, etc.). Les lois mathématiques de base sont celles qui lient l'évolution des paramètres météorologiques aux modifications observées. On dira que ces lois mathématiques, si elles existent, décrivent le fonctionnement hydrodynamique des bassins versants.

L'objectif poursuivi dans ce chapitre est de dégager une description mathématique du fonctionnement hydrodynamique du bassin versant qui tienne compte des incertitudes liées à la connaissance imparfaite des paramètres météorologiques et à leur nature aléatoire. La démarche suivie consiste, à partir des connaissances antérieures sur l'évolution déterministe du milieu, à examiner les conséquences théoriques de l'adjonction des termes d'incertitudes.

### 2.1. BASE DETERMINISTE DE LA DESCRIPTION MATHEMATIQUE DU BASSIN VERSANT

Assimilons donc le bassin versant à un domaine spatial  $\Omega$  de frontières  $\Gamma$  et considérons deux entiers positifs,  $l$  et  $n$ . Appelons  $p(t, x)$ , une description des paramètres météorologiques au temps  $t \in [0, T]$  et au point  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ;  $q(t, x)$ , une description de la réponse du bassin versant;  $u_j(p, q)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , les grandeurs physiques qui caractérisent l'état du milieu. On suppose les fonctions  $p(t, x)$ ,  $q(t, x)$  et  $u_j(p, q)$  suffisamment régulières et on note, pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $D_i$  l'opérateur  $\partial / \partial x_i$  par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  variable indépendante. Si  $\alpha$  est un système de  $n$  entiers positifs,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , tels que  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq l$ , on pose :

$$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

On peut alors espérer décrire l'évolution du bassin versant par un système de  $k$  équations aux dérivées partielles d'ordre 1, à  $n + 1$  variables indépendantes :

$$F_{0j}(t, x; p, q, u_j; \frac{\partial}{\partial t}, D^{\alpha}) = 0 \quad (1)$$

$$j = 1, 2, \dots, k \quad ; (t, x) \in ]0, T[ \times \Omega$$

L'objectif fixé ci-dessus se ramène alors à la recherche d'une formulation plus explicite pour les fonctions  $F_{0j}(\cdot)$ .

Si l'on considère les diverses branches de la physique telles que la mécanique des fluides, la mécanique des solides, et la thermodynamique, etc., qui s'articulent au niveau du bassin versant, on s'aperçoit que toutes ces branches sont intimement liées les unes aux autres par quatre grandeurs physiques qui sont :

- un grandeur cinématique : la vitesse  $u_1$
- deux grandeurs dynamiques
  - la pression  $u_2$
  - la densité massique  $u_3$
- et une grandeur thermodynamique : la température  $u_4$

Même si, théoriquement, une description générale des propriétés du milieu physique est celle qui prend en compte les équations du mouvement de chaque molécule, le problème réel de l'étude se ramène très souvent à la description du comportement global de ce milieu, c'est-à-dire à suivre l'évolution des quatre grandeurs physiques ci-dessus mentionnées.

On sait que les principes appropriés pour résoudre ce problème sont les trois principes de conservation (de masse, de quantité de mouvement et d'énergie), auxquels on ajoute une équation caractéristique. L'application de ces principes conduit à la forme explicite suivante pour les fonctions  $F_{oj}(\cdot)$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A u = f(u, p) \quad (2)$$

où  $A = A(u, D^\alpha, x)$   
 et  $u = (u_1, \dots, u_k)$

Les équations (2) constituent donc une formulation mathématique des principes de conservation. Suivant les hypothèses de base admises sur les conditions initiales et les conditions aux limites, les équations de conservation peuvent se mettre sous l'une des formes suivantes :

### 2.1.1. Le modèle de type parabolique

On a alors :

$$A = (u \nabla + v \Delta) \quad (3)$$

L'exemple classique rencontré en mécanique des fluides est fourni par les équations de Navier-Stokes ; on rappelle que si l'on pose :

$$u_1 = v = (v_1, \dots, v_n) \quad \text{pour la vitesse}$$

$$u_2 = \phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \quad \text{pour la pression et}$$

$f$  désignant une description des forces de gravité

alors les équations de Navier-Stokes s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \sum_{i=1}^n v_i D_i v = f - \text{grad } \phi \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (4)$$

$$\text{div}(v) = 0 \quad \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \quad (5)$$

avec les conditions aux limites et initiales :

$$v = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, T[ \quad (6)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad \text{sur } \Omega \quad (7)$$

Dans l'élaboration du formalisme mathématique qui conduit à la démonstration de l'existence de solution théorique (solution faible ou solution turbulente au sens de Leray), l'équation (5), qui traduit le principe de conservation de masse est incorporée dans la structure de l'espace fonctionnel (LIONS 1969, p. 65), ce qui peut conduire, pour l'interprétation physique, à une perte d'information sur la signification du modèle. En effet, si cette démarche permet la définition d'un espace fonctionnel adéquat (espace de Sobolev), elle ramène le problème de Navier-Stokes à la recherche de  $v$  seul au lieu du couple  $(v, \phi)$  comme l'indique le problème de départ (LIONS 1969, p. 69, théorème 1).

L'utilisation des équations de Navier-Stokes se rencontre en hydrologie sous la forme de modèles numériques de prévision hydroclimatique ou de modèle de milieu poreux, ou encore, de modèle de la turbulence. L'application des équations complètes à la modélisation de bassin versant se rencontre rarement dans la littérature hydrologique.

On sait cependant que la conceptualisation des phénomènes physiques par des modèles de type parabolique peut permettre de prendre en compte deux types de diffusions : un premier type de diffusion d'origine purement physique et où le coefficient de diffusion est fonction de l'énergie du milieu, et un deuxième type de diffusion d'origine mathématique ; ce dernier est lié aux incertitudes sur les paramètres du milieu et, par conséquent, absent dans les modèles déterministes. On s'attend donc à ce que la prise en compte des termes d'incertitude conduise à des modèles de type parabolique (autres que les équations complètes de Navier-Stokes).

### 2.1.2. Le modèle de type hyperbolique

L'opérateur  $A$  prend dans ce cas la forme suivante :

$$A = \sum_{i=1}^n a_i(u) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (8)$$

Les équations hyperboliques sont considérées comme l'exemple type d'équation de conservation. L'exemple le plus immédiat en écoulement des fluides est fourni par les équations de Saint-Venant. Nous considérons cet exemple en posant  $u_1 = v$  et  $u_2 = h$ . On a :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (v h)}{\partial x} = p(x, t) \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(I - J) \quad (10)$$

Dans ces équations  $(x, t) \in ]0, T[ \times \Omega$

$v$  - étant la vitesse des particules fluides

$h$  - la hauteur d'eau

$p$  - le débit d'apport (ici les précipitations)

$I$  - la pente du radier

$J$  - la perte de charge linéique

$g$  - est l'accélération de la pesanteur

(9) est l'équation de conservation de masse

(10) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

On se donne les conditions initiales (de Cauchy) pour  $x \in \Omega$

$$\begin{cases} v(x, 0) = v_0(x) \\ h(x, 0) = h_0(x) \end{cases} \quad (11)$$

et des conditions aux limites compatibles avec les conditions initiales. Par exemple, si  $\Omega = [0, L]$  désigne un bief donné de rivière, on a :

$$\begin{cases} Q(v(0, t), h(0, t)) = Q_0 \\ Q(v(L, t), h(L, t)) = Q_L \end{cases} \quad (12)$$

On considère pour le système ainsi défini la formulation vectorielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} v & g \\ h & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} g(1-J) \\ p(x, t) \end{bmatrix}$$

soit en posant  $Y = \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} v & g \\ h & v \end{bmatrix}$

et

$$f = \begin{bmatrix} g(1-J) \\ p \end{bmatrix}, \quad \underline{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on a la formulation vectorielle :

$$\underline{\Pi} \cdot Y_t + B Y_x = f \quad (13)$$

Les propriétés hyperboliques de l'équation (13) sont liées à l'existence de valeurs propres de la matrice B. On dit en effet que le système est hyperbolique si cette matrice B possède des valeurs propres réelles et distinctes. Dans le cas considéré, on a :

$$\lambda_{1,2} = v \pm c \quad (\text{avec } c = gh^{1/2}).$$

On rencontre souvent les équations hyperboliques sous la forme conservatrice, par exemple, pour les équations de Saint-Venant considéré, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (E) &= g (1 - J) & E &= \frac{v^2}{2} + gh \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Q) &= p & Q &= v h \end{aligned} \quad \text{avec}$$

soit 
$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Z(Y)) = f \quad (14)$$

avec 
$$Z(Y) = \begin{bmatrix} E \\ Q \end{bmatrix}$$

$Z(Y)$  est au moins une fois différentiable en  $Y$  et  $(Z \in C^1(\Omega))$  de sorte que :

$$B = \text{grad } Z = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial v} & \frac{\partial E}{\partial h} \\ \frac{\partial Q}{\partial v} & \frac{\partial Q}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & g \\ h & v \end{bmatrix} \quad (15)$$

De nombreux travaux ont été consacrés à la démonstration de l'existence théorique de solution pour le problème de Cauchy lié aux équations du type (14), homogènes, c'est-à-dire aux équations de type :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Z(Y)) = 0 \quad (16)$$

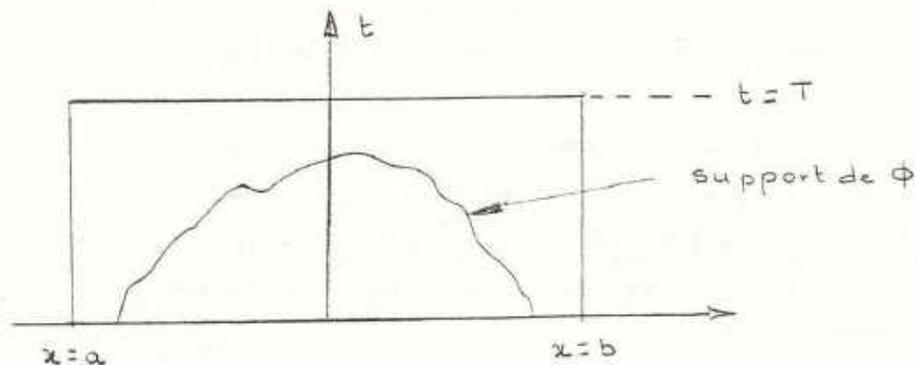
$$Y(x, 0) = Y_0(x)$$

On peut citer entre autres les travaux de LAX (1957), de WITHAM (1974), de FRITZ JOHN (1974), de CRANDALL (1978), de TANIUTI et NISHIDA (1983), de SMOLLER (1983), de BARDOS (1984), de QUESSEVEUR (1984), etc. Compte tenu des difficultés théoriques liées à l'apparition de discontinuités, la plupart de ces travaux théoriques sont centrés sur l'existence de solutions faibles. Ce sont des solutions vérifiant pour  $Y \in L^\infty(\Omega \times ]0, T[ )$  et pour toute fonction test  $\phi \in C^2(\Omega \times ]0, T[ )$ , non négative et à support compact sur  $\Omega \times ]0, T[$

$$\iint_{\Omega \times ]0, T[} (Y \phi_t + Z(Y) \phi_x) dx dt + \int_{\Omega} Y_0 \phi(x, 0) dx = 0 \quad (17)$$

$$\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{et} \quad \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Supposons en effet que  $Y$  soit une solution classique de (16). Dans le cas d'une dimension d'espace considéré pour les équations de Saint-Venant,  $(\Omega \times ]0, T[ )$  est un rectangle dans le plan  $(x, t)$  que nous définissons par :  $0 \leq t \leq T$ ,  $a \leq x \leq b$ .



$\phi$  est une fonction test dont la dérivée première est continue dans le rectangle  $(x, t)$  et  $\phi = 0$  à l'extérieur de ce rectangle et aux frontières  $t = T$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ . Multiplions (16) par  $\phi$  et intégrons pour  $t > 0$ , on obtient :

$$\iint_{t>0} \left( \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Z(Y)}{\partial x} \right) \phi \, dx \, dt = \int_a^b \int_0^T \left( \frac{\partial Y}{\partial t} \phi + \frac{\partial Z}{\partial x} \phi \right) dx \, dt = 0$$

En intégrant par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^T \frac{\partial Y}{\partial t} \phi &= \int_a^b Y \phi \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \int_a^b \int_0^T Y \frac{\partial \phi}{\partial t} dx \, dt \\ &= - \int_a^b Y_0(x) \phi(x,0) dx - \int_a^b \int_0^T Y \frac{\partial \phi}{\partial t} dx \, dt \end{aligned}$$

et de même

$$\int_0^T \int_a^b \frac{\partial Z}{\partial x} \phi = \int_0^T Z \phi \Big|_{x=a}^{x=b} dt - \int_0^T \int_a^b Z \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \, dt$$

En additionnant :

$$\iint_{t>0} \left( Y \frac{\partial \phi}{\partial t} + Z(Y) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx \, dt + \int_{t=0} Y_0(x) \phi(x,0) dx = 0 \quad (17)$$

Ce qui montre que si  $Y$  est solution de (16) alors (17) est vérifiée pour toute fonction test convenablement choisie.

Par ailleurs, la dérivabilité de  $Y(x)$  n'est plus nécessaire (puisque (17) est pris au sens des distributions). On peut donc considérer des fonctions sur des parties de  $(x,t)$  où elles ne sont pas différentiables, notamment aux points d'apparition des discontinuités. Si on désigne par  $\nu$  la normale aux lignes de discontinuité et par  $Y^+$  et  $Y^-$  les limites de  $Y$  de part et d'autre de ces lignes, alors l'équation (16) est équivalente aux deux assertions suivantes (BARDOS - 1984) :

1. En dehors des lignes de discontinuité, on a, au sens usuel, l'équation :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Z(Y)}{\partial x} = 0$$

2. Sur les lignes de discontinuité, on a la formule de saut :

$$\nu_t (Y^+ - Y^-) + \nu_x (Z(Y^+) - Z(Y^-)) = 0 \quad (18)$$

Dans (18),  $v_+$  et  $v_x$  désignent respectivement les composantes de la normale  $\nu$  dans les directions  $t$  et  $x$ . La relation (18) est connue sous le nom de relation de Rankine Hugoniot (BARDOS, 1984, p.7). On en déduit :

$$Z(Y^+) - Z(Y^-) = - (v_x / v_+) (Y^+ - Y^-)$$

ou bien en désignant par  $x(t)$  l'équation de la courbe de discontinuité, on a :

$$\frac{dx}{dt} = (Z(Y^+) - Z(Y^-)) / (Y^+ - Y^-) \quad (19)$$

qui est l'analogie discontinue de  $\partial Z(Y) / \partial Y = B$ .

En somme, la démarche revient à paramétrer par  $s$  (par exemple), la courbe de discontinuité d'équations  $x(s)$ ,  $t(s)$  et à considérer les caractéristiques d'équations :

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad ; \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\partial Z(Y)}{\partial Y} \quad (20)$$

Le long de ces courbes, on a la relation :

$$\frac{dY}{ds} = \frac{\partial Y}{\partial t} \cdot \frac{dt}{ds} + \frac{\partial Y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial Z(Y)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

Ainsi, on a  $Y$  constant le long de ces caractéristiques et puisque la pente des caractéristiques est  $1 / \frac{\partial Z}{\partial Y}$ , ces caractéristiques sont des lignes droites, ayant leurs pentes déterminées par leurs valeurs au temps  $t = 0$ , donc par  $Y_0(x)$ .

La solution faible permet donc de prendre en compte les solutions discontinues et évite de poser le problème d'unicité. Cependant, BARDOS (1984), SMOLLER (1983) et d'autres encore, ont montré l'existence de solution entropique qui correspond à la "seule solution ayant une signification physique".

L'idée de la solution entropique est basée sur les constatations suivantes :

Considérons une fonction convexe  $\eta(Y)$ . On remarque que si l'on prend  $\partial \eta(Y) / \partial Y$  et qu'on multiplie par l'équation (16), on a :

$$\frac{\partial \eta(Y)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial \eta(Y)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Z(Y)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

S'il existe une fonction vectorielle  $S(Y)$  telle que :

$$\frac{\partial S(Y)}{\partial Y} = \frac{\partial \eta(Y)}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Z(Y)}{\partial Y} \quad (22)$$

on dit que  $S(Y)$  est le flux d'entropie de la fonction  $\eta(Y)$  pour l'équation (16). Une fonction  $Y$  est une solution entropique de (16), si pour toute fonction convexe  $\eta(Y)$  elle vérifie au sens des distributions, la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(Y) + \frac{\partial}{\partial x} S(Y) = 0 \quad (23)$$

L'hypothèse physique introduite consiste à dire que l'entropie au lieu de rester constante va décroître et que l'on aura, au sens des distributions, la condition d'entropie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta(Y) + \frac{\partial}{\partial x} S(Y) \leq 0 \quad (24)$$

Dés lors, la démarche essentielle qui permet d'aboutir à l'unicité de la solution consiste à supposer l'existence, pour une suite  $\nu_n \rightarrow 0$  (pour  $n \rightarrow \infty$ ), d'une famille de fonction  $Y_{\nu}$  possédant les propriétés suivantes :

$Y_{\nu}$  est solution (dans  $\Omega \times ]0, T[$ ) du problème d'évolution

$$\frac{\partial Y_{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial Z(Y_{\nu})}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 Y_{\nu}}{\partial x^2} \quad (25)$$

$$Y_{\nu}(x, 0) = Y_{\nu 0}(x) \quad (26)$$

$Y_\nu$  est bornée et converge presque partout vers une fonction  $Y(x,t)$  (donc que  $\lim_{\nu \rightarrow 0} Z(Y_\nu) = Z(\lim_{\nu \rightarrow 0} Y_\nu)$ ).

Alors, on démontre (BARDOS, 1984, p. 13, théorème 2) que, dans ces hypothèses,  $Y$  est solution du problème (16) et vérifie la condition d'entropie.

On voit que la démarche de la solution entropique consiste à profiter des propriétés du modèle parabolique.

La signification physique réelle de l'entropie apparaît lorsque l'on considère les équations complètes de la mécanique des fluides sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0 \quad (27) \text{ (masse)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho \theta) = 0 \quad (28) \text{ (qté de mouvement)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{2}{3} \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (29) \text{ (énergie)}$$

Les équations (27), (28) et (29) traduisent respectivement les principes de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. En effet, si l'on suppose  $\rho$ ,  $u$  et  $\theta$  continument différentiables, on peut déduire de ces relations une équation supplémentaire (BARDOS - note personnelle). Pour cela, on écrit (27) et (29) sous les formes suivantes :

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{1}{\theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (31)$$

En multipliant (30) par  $\frac{2}{3}$  et en soustrayant de (31), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{Log} \left( \rho^{2/3} / \theta \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \text{Log} \left( \rho^{2/3} / \theta \right) = 0 \quad (32)$$

En multipliant (32) par  $\rho$  et (27) par  $\text{Log} (\rho^{2/3} / \theta)$  et en additionnant, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot \text{Log} (\rho^{2/3} / \theta)) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \text{Log} (\rho^{2/3} / \theta)) = 0 \quad (33)$$

$\rho_e = \text{Log} (\rho^{2/3} / \theta)$  est appelé la densité d'entropie et

$\eta = \rho \cdot \rho_e = \rho \text{Log} (\rho^{2/3} / \theta)$  est l'entropie.

L'équation (32) exprime que la densité d'entropie est conservée le long des trajectoires des particules fluides. Pour les besoins de l'analyse mathématique, on démontre que  $\eta$  est convexe. Pour trouver l'équation vectorielle à laquelle correspond l'équation (33), il suffit de mettre le système (27), (28) et (29) sous la forme conservative.

L'intérêt de la solution entropique pour notre propos apparaîtra clairement avec les propriétés du modèle stochastique. Il est lié à l'utilisation du modèle parabolique avec un terme de viscosité évanescent.

En hydraulique et en hydrologie, l'existence de discontinuité a permis le développement de la théorie des caractéristiques. Parmi les nombreux travaux consacrés au développement de cette théorie, il faut noter ceux effectués à l'I.M.F. de Toulouse sous les directions successives des Professeurs ESCANDE, NOUGARO et THIRRIOT, et qui sont abondamment cités dans le tome 3 de l'ouvrage de MAHMOOD et YEVJEVICH (1975) consacré à ce sujet.

Mais comme l'indiquait encore récemment C. THIRRIOT (1985) "l'application du modèle de Saint-Venant à l'étude des bassins versants exige une grande quantité d'informations topographiques et est souvent de mise en oeuvre lourde et coûteuse". On a de ce fait recours aux équations simplifiées. Une des simplifications, introduite souvent pour l'étude des relations pluie-débit consiste à se ramener à une formulation scalaire. On considère alors que l'écoulement non permanent sur le bassin versant est défini avec une bonne approximation par l'équation de continuité et une équation univoque liant le débit et la hauteur (EAGLESON, 1970 - WOOLHISER, 1975 - DAUD, 1976).

Les hypothèses de base de ce modèle ont été analysées dans l'annexe A. On obtient notamment les relations :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v h) = p(x, t) \quad (\text{éq. de continuité}) \quad (34)$$

$$q = v h = \psi(h, t) \quad (\text{éq. dynamique}) \quad (35)$$

Dans ses nombreux travaux sur les équations de Saint-Venant, C. THIRRIOT a indiqué souvent les limites de cette formulation. Tout récemment (1982, 1985) il a encore rappelé que si le modèle était assez peu utilisé dans les applications pratiques pour la prévision des crues, ceci serait dû au fait que la célérité des perturbations qui découle de cette expression simplifiée croît avec  $q$ , ce qui conduit à un raidissement de l'onde de crue en cours de propagation ; or, ce résultat théorique est en contradiction avec l'étalement observé naturellement. Nous montrerons plus loin que l'introduction d'un terme d'incertitude permet de lever cette contradiction puisqu'elle permet d'ajouter au caractère hyperbolique de l'équation un caractère diffusif par l'adjonction d'un terme de diffusion.

### 2.1.3. Le modèle global

Le passage de l'équation distribuée de départ, (éq. 2) au modèle global revient à poser  $Au = 0$ , donc à supposer un certain équilibre spatial et à ne considérer que l'évolution dans le temps. C'est le fondement des modèles de la boîte noire qui caractérisent la représentation globale en hydrologie. On rencontre de nombreuses variantes de ce modèle dans la littérature hydrologique. Les plus connues sont les suivantes :

- le modèle de l'hydrogramme unitaire proposé par SHERMAN en 1932 et développé par NASH en 1959 et DOOGE en 1960 (voir DOOGE, 1973).

- les modèles à réservoirs dont le schéma le plus connu est celui de STANFORD (H. ROCHE , 1960)

- le modèle non linéaire de AMOROCHO et ORLOB utilisant la série intégrale de VOLTERRA (AMOROCHO et ORLOB , 1961).

Les limites de ces modèles ont été discutées dans notre mémoire de troisième cycle (AFOUDA , 1974). L'un des avantages du modèle est qu'il est conceptuellement simple et relativement facile de mise en oeuvre. Ainsi, plusieurs auteurs ont essayé suivant leur domaine d'intérêt d'apporter des modifications à la théorie initiale. Parmi les nombreux travaux consacrés à ce modèle, on peut citer ceux de GAUDU (1978) , DE MARSILLY (1978) , LEDOUX (1982) , qui constituent des synthèses récentes, relativement complètes. L'une des faiblesses majeures du modèle est bien sûr sa nature globale qui ne permet pas de rendre compte de l'évolution spatiale.

Nous présentons en annexe A-1 la filiation des différents modèles déterministes analysés à partir du modèle basé sur les équations de Navier-Stokes. L'une des conclusions qui se dégagent de ces analyses (Annexes A-1 , A-2, A-3) est que le fonctionnement hydrodynamique d'un bassin versant peut être représenté par un ensemble d'éléments simples et individualisés : des sous-systèmes qui s'articulent en cascade et/ou en parallèle. Lorsque le nombre d'éléments simples considérés est suffisamment grand, la représentation obtenue est proche de la description donnée par un modèle distribué. On peut ainsi profiter de la simplicité du modèle de la boîte noire et se rapprocher de la précision des modèles distribués.

Le point de départ de ces analyses est la constatation que le passage de la pluie en débit au niveau du bassin versant se fait en termes d'étapes :

- une étape de production
- une étape de transformation
- et une étape de propagation

La fonction de production décrit l'action complexe de la zone non saturée par laquelle la quantité d'eau précipitée augmente la teneur en eau du milieu et se divise en hauteur d'eau efficace destinée à alimenter le ruissellement de surface et en hauteur d'eau d'infiltration destinée à alimenter (s'il y a lieu) l'écoulement souterrain. Nous avons proposé (dans notre mémoire de troisième cycle et repris dans les annexes A) la description mathématique de cette fonction de production, sous la forme d'un paramètre  $\zeta(\theta_0)$  variant de 0 à 1 suivant la teneur en eau  $\theta_0$  du bassin versant.

La fonction de transformation décrit le processus par lequel la hauteur d'eau efficace alimente le ruissellement de surface, la hauteur d'eau infiltrée alimente (s'il y a lieu) un écoulement souterrain et les deux formes de transformation se composent pour donner un écoulement résultant. La fonction de transformation va dépendre des propriétés physiographiques du bassin versant et de leurs influences sur l'écoulement. Ces influences sont analysées en détail dans l'annexe (A-2).

La fonction de propagation décrit, quant à elle, l'action par laquelle l'onde de crue formée se déplace vers l'aval.

Une représentation globale du bassin versant se présente donc sous la forme suivante :

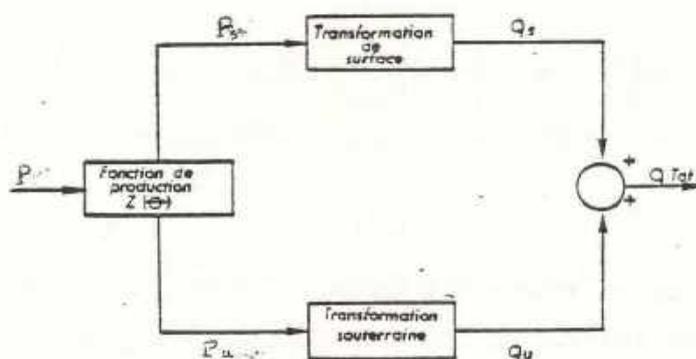


Schéma 2. Modèle mathématique de bassin versant

Pour décrire l'état de ce système, on introduit une fonction  $X = X(u)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_k)$ . Le débit de sortie est alors fonction de cet état. On a la représentation mathématique :

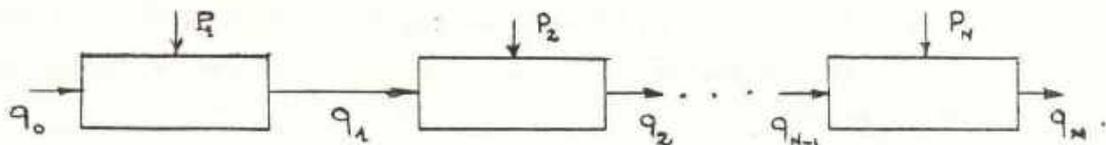
$$\frac{dX}{dt} = q - p \quad (36)$$

$$q = \psi(X, t) \quad (37)$$

La remarque intéressante à faire est que, à ce stade de schématisation, le débit de sortie  $q$  est une fonction univoque de l'état. On peut donc considérer une expression plus explicite sous la forme d'un développement limité :

$$q = \psi(X, t) = \sum_{i=1}^N a_i X^i \quad (37')$$

Le point suivant, dans la schématisation du fonctionnement hydrodynamique du bassin versant, consiste à dire que ce dernier peut être représenté par un nombre fini de biefs :



En écrivant pour chaque bief les équations analogues à (36) et à (37'), on obtient l'équation vectorielle :

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{i=1}^N A_i X_i + P \quad (38)$$

$$\psi = \sum_{i=1}^N A_i X_i \quad (39)$$

Dans ces relations, la forme prise par les  $A_i$  va dépendre des hypothèses admises sur le degré de linéarité des sous-systèmes de surface et des sous-systèmes souterrains. On donne, dans les annexes (A), une analyse de ces hypothèses. Mais quel que soit le degré de non-linéarité du système global, la précision de la description donnée par

les équations augmente avec le nombre  $N$  d'éléments considérés. Pour  $N \rightarrow \infty$ , le modèle converge vers un modèle continu qui est le modèle de l'onde cinématique.

#### 2.1.4. Modèle du fonctionnement déterministe du bassin versant

Sur la base des analyses qui précèdent, le modèle déterministe que nous prendrons comme base de la description mathématique du fonctionnement hydrodynamique du bassin versant est défini par les hypothèses suivantes :

##### Hypothèse 1

Les éléments essentiels de la description du système physique considéré sont les notions d'entrée  $P \in \mathcal{P}$ , de sortie  $q \in \mathcal{Q}$  et d'état  $X \in \mathcal{X}$  ( $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ , et  $\mathcal{X}$  étant des espaces fonctionnels appropriés). En supposant pour le moment que le système est complètement déterministe, on définit son état comme la somme minimale d'informations sur le passé,  $t \leq t_0$ , nécessaires pour décrire son évolution future, lorsque l'on connaît les entrées pour  $t > t_0$  (ATHANS et FALB - 1966, SEVELY - 1973).

Un tel système est entièrement défini par les équations :

$$\frac{\partial X}{\partial t} + A X = F(X, P) \quad (40)$$

$$q(t, x) = \psi(t, x; X(t, x), P(t, x)) \quad (41)$$

où  $\psi$  est une fonction continue de ses arguments et

$$X(t, x) = \phi(t, x; X(t_0, x), P(t, x)) \quad (42)$$

est solution de (40) pour la condition initiale  $X(t_0, x) = X_0(x)$

Hypothèse 2

Le système se décompose en éléments simples : des sous-systèmes qui s'articulent en cascade et en parallèle et pour chacun de ces sous-systèmes,  $A X = 0$ , de sorte que le système est décrit par le couple d'équations vectorielles :

$$\frac{d X}{d t} = F ( X , P , t ) \quad (43)$$

$$q (t) = \psi ( X , P , t ) \quad (44)$$

Hypothèse 3

La précision de la description spatiale du système dépend du nombre  $N$  d'éléments utilisés en cascade et en parallèle. Lorsque ce nombre est suffisamment grand, le modèle constitue une approximation acceptable de la description déterministe de l'évolution temporelle et spatiale du milieu physique.

Sur la base de ces hypothèses, les équations (43) et (44) constituent le fondement mathématique de la description déterministe du bassin versant. (Une analyse détaillée du modèle est présentée dans les annexes A).

2.2. LE MODELE STOCHASTIQUE2.2.1. Le système dynamique naturel

Dans la pratique, la connaissance des fonctions  $F$  et  $\psi$  qui définissent les équations (43) et (44) sont entachées d'incertitudes de différentes sortes :

- La première classe d'incertitudes est liée à notre connaissance imparfaite du phénomène physique. Une description complète du milieu physique est en effet celle qui prend en compte l'évolution des paramètres au niveau le plus fin possible (niveau moléculaire par exemple).

Hypothèse 2

Le système se décompose en éléments simples : des sous-systèmes qui s'articulent en cascade et en parallèle et pour chacun de ces sous-systèmes,  $A X = 0$ , de sorte que le système est décrit par le couple d'équations vectorielles :

$$\frac{d X}{d t} = F ( X , P , t ) \quad (43)$$

$$q ( t ) = \psi ( X , P , t ) \quad (44)$$

Hypothèse 3

La précision de la description spatiale du système dépend du nombre  $N$  d'éléments utilisés en cascade et en parallèle. Lorsque ce nombre est suffisamment grand, le modèle constitue une approximation acceptable de la description déterministe de l'évolution temporelle et spatiale du milieu physique.

Sur la base de ces hypothèses, les équations (43) et (44) constituent le fondement mathématique de la description déterministe du bassin versant. (Une analyse détaillée du modèle est présentée dans les annexes A).

2.2. LE MODELE STOCHASTIQUE2.2.1. Le système dynamique naturel

Dans la pratique, la connaissance des fonctions  $F$  et  $\psi$  qui définissent les équations (43) et (44) sont entachées d'incertitudes de différentes sortes :

- La première classe d'incertitudes est liée à notre connaissance imparfaite du phénomène physique. Une description complète du milieu physique est en effet celle qui prend en compte l'évolution des paramètres au niveau le plus fin possible (niveau moléculaire par exemple).

Une telle description est hors de portée dans le cas d'un bassin versant naturel. Le modèle global adopté pour la description des éléments du système constitue donc, de par sa structure, une source d'incertitude.

• Une autre classe d'incertitudes est liée à notre mode d'évaluation quantitatif des paramètres du milieu, (notamment les précipitations). Cela se fait à l'aide d'appareil de mesure dont la précision est nécessairement limitée. Une difficulté majeure dans l'appréciation de ces erreurs de mesure est que chaque réalisation d'un phénomène naturel donné constitue un événement unique. Dès lors, la compensation des erreurs par des mesures répétées est impossible. Par ailleurs, l'installation d'un appareil de mesure constitue une perturbation du milieu naturel que l'on étudie. Les effets d'une telle perturbation sur le paramètre à mesurer ne sont pas souvent bien connus.

Il nous a paru nécessaire d'inclure ces formes d'incertitude dans la structure même du modèle du bassin versant (AFOUDA - 1981, Annexe A).

On suppose donc que les fonctions  $F$  et  $\psi$  (dans les équations 43 et 44) se décomposent chacune en deux parties :

• une valeur moyenne qui permet de représenter l'évolution déterministe du milieu (et qui est formée par le terme de tendance et le terme d'évolution périodique)

• une partie fluctuante qui traduit les termes d'incertitude.

On le notera  $[\varepsilon(t), t \in (0, T) \equiv T]$  et on dira que  $\varepsilon(t)$  définit un processus stochastique.

On écrira alors :

$$F = \bar{F}(X, P, t) + \sigma_F(X, P, t) \varepsilon_F(t) \quad (45)$$

$$\psi = \bar{\psi}(X, P, t) + \sigma_\psi(X, P, t) \varepsilon_\psi(t) \quad (46)$$

Dans ces relations,  $\epsilon_F$  et  $\epsilon_\psi$  sont considérés comme le résultat de la superposition d'un grand nombre de phénomènes physiques ayant chacun une évolution aléatoire. Alors, quelle que soit la loi de répartition de ces phénomènes individuels, l'application du théorème limite central conduit à considérer  $[\epsilon_F(t), t \in T]$  et  $[\epsilon_\psi(t), t \in T]$  comme des bruits blancs gaussiens. On voit, d'après les relations (45) et (46), que le caractère stochastique de la description du système dynamique naturel en étude, sera liée aux propriétés mathématiques de bruit blanc gaussien.

La notion de bruit blanc est classique en théorie des systèmes ou en électronique par exemple, mais on le rencontre très rarement dans la modélisation des paramètres hydrologiques. Il convient donc de rappeler les traits dominants de ce processus stochastique.

### 2.2.2. Rappel de la définition du bruit blanc

Nous considérons la notion de bruit blanc en temps. Nous partons pour cela du concept de densité spectrale d'un processus stochastique stationnaire  $[y(t), t \in T]$ . Ce concept est défini dans ASTROM - 1970 (p. 35 et suiv.), VENTSEL - 1973 (p. 416 et suiv.), DOSSOU-GBETE et al; - 1976 (p.3), GUIKMAN et SKOROKHOD - 1977 (p.68 et suiv.). Il est basé sur la constatation que la fonction de covariance  $\gamma(t)$  d'un processus stationnaire est une fonction définie non-négative. Or, d'après un théorème de Kintchine-Bochner, une fonction définie non-négative peut toujours être représentée par la relation suivante :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dG(\omega) \quad (\text{pour un processus à paramètres continus})$$

$$r(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dG(\omega) \quad (\text{pour le cas des paramètres discrets})$$

Dans cette relation,  $G$  est une fonction non décroissante. La fonction  $G$  est appelée la fonction de distribution spectrale du processus stochastique. Elle est définie par :

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} g(\omega') d\omega'$$

où  $g(\omega)$  est appelée la densité spectrale ; celle-ci est définie par la transformée de Fourier de la fonction covariance :

$$\left. \begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} r(t) dt \\ r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} g(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \text{pour les paramètres continus}$$

ou

$$\left. \begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(n) e^{-in\omega} \\ r(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} g(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \text{pour les paramètres discrets}$$

On en déduit immédiatement que la variance de  $y$  :

$$\text{var}(y) = r(0) = \int dG(\omega)$$

où l'intégrale est pris dans l'intervalle  $(-\pi, \pi)$  dans le cas des paramètres discrets et dans  $(-\infty, \infty)$ , dans le cas des paramètres continus. On a alors la propriété importante que la variation totale de la distribution spectrale est égale à la variance du processus.

L'intérêt de cette propriété tient au fait qu'il permet de comprendre les propriétés du bruit blanc et sert, par la même occasion à le définir. En effet, on appelle bruit blanc un processus stochastique, stationnaire ayant une densité spectrale constante :  $g(\omega) = \text{constante} = c$ .

Suivant cette définition, on calcule aisément la fonction covariance pour un processus discret  $[y(t), t \in T]$

$$r(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} c d\omega = \frac{2c}{n} \sin n\pi$$

d'où la propriété du bruit blanc discret :

$$r(n) = \begin{cases} 2\pi c & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (47)$$

Du point de vue physique, ce résultat traduit le fait que les valeurs du processus sont non corrélées pour différents temps discret. Le bruit blanc est un processus indépendant.

Mais si l'on tente de définir la fonction covariance du processus continu, on est confronté à des difficultés d'ordre théorique. En effet, en partant toujours de  $g(\omega) = \text{cst} = c$ , on trouve en intégrant dans  $(-\infty, \infty)$ , une variance infinie. Toutefois, comme la transformation de Fourier d'une constante est égale à une distribution (au sens de Laurent Schwartz), de masse concentrée à l'origine et connu sous la forme de distribution de Dirac, on écrit formellement la variance du bruit blanc continu sous la forme :

$$r(t) = 2\pi c \delta(t) \quad (48)$$

Tout ce qui précède conduit à définir la partie fluctuante traduisant les termes d'incertitude comme un processus stochastique  $[e(t), t \in T]$  vérifiant :

$$\begin{cases} e(t) \text{ est un processus indépendant et gaussien} \\ E[e(t)] = 0 \quad (\text{il est centré}) \\ E[e(t)e(s)] = c(t)\delta(t-s) \end{cases} \quad (49)$$

2.2.3. Modèle du fonctionnement stochastique du bassin versant.

A la modélisation déterministe décrite par les équations (43) et (44) et pour laquelle la connaissance de l'état initial permet de décrire l'évolution future du système, on substitue la modélisation stochastique suivante :

$$\frac{dX}{dt} = \bar{F}(X, P, t) + \sigma_F(X, P, t) \varepsilon_F(t) \quad (50)$$

$$X(0) = X_0 + \xi \quad (51)$$

$$q(t, x) = \bar{\psi}(X, P, t) + \sigma_\psi(X, P, t) \varepsilon_\psi(t) \quad (52)$$

Les équations (50 - 52) indiquent que l'état du système à un instant  $t$  donné n'est pas défini univoquement en fonction des états pris par le système à des instants antérieurs mais qu'il est aléatoire et obéit à certaines lois de probabilités induites par le bruit blanc. Or, on a montré que la définition (49) implique une variance infinie et conduit à la non-intégrabilité de  $\varepsilon_F(t)$ . Pour contourner cette difficulté théorique, on introduit dans (50) le processus du mouvement brownien (ou processus de Wiener-Levy) dont le bruit blanc est la dérivée formelle. On a alors, pour la description de l'état du système, une équation différentielle stochastique vectorielle de la forme :

$$dX = \bar{F}(X, P, t) dt + \sigma_F(X, P, t) d\beta_F \quad (53)$$

$$X(0) = X_0 + \xi$$

avec  $d\beta_F = \varepsilon_F dt$  : écriture formelle de l'accroissement infinitésimal du mouvement brownien vectoriel tel que :

$$\begin{cases} E[\beta(t)] = 0 \\ E[\beta(t) \beta^T(\tau)] = \int_0^{\min(t, \tau)} \varphi(s) ds \end{cases} \quad (54)$$

On sait, (JAWZINSKI - 1970, p. 106) que la solution de (54) est un processus de Markov. On aura ainsi pour l'état du système :

$$\begin{aligned} \text{Prob} [ X(t_n) < \xi_n \mid X(t_{n-1}) = \xi_{n-1}, \dots, X(t_0) = \xi_0 ] \\ = \text{Prob} [ X(t_n) < \xi_n \mid X(t_{n-1}) = \xi_{n-1} ] \end{aligned} \quad (55)$$

dans le cas d'un processus d'ordre un.

Les propriétés des équations différentielles stochastiques (EDS) sont bien connues et se trouvent généralement bien analysées dans des ouvrages de mathématique ou d'analyse des systèmes stochastiques (JAWZINSKI - 1970, FRIEDMAN - 1975, BENSOUSSAN et LIONS - 1978). Cependant, la théorie des équations différentielles stochastiques est un outil mathématique relativement nouveau et encore en plein développement. On la rencontre pour le moment très rarement dans la littérature hydrologique. Nous avons dégagé dans le rapport cité plus haut et dans l'annexe (A) les propriétés essentielles des EDS qui nous paraissent les plus immédiates pour la compréhension du fonctionnement à la fois dynamique et stochastique du bassin versant. Ces différents développements sont basés sur la notion d'intégrale stochastique pris au sens de Ito. Tout récemment, UNNY (1984), UNNY et KARMESHU (1984), ont présenté un modèle basé sur une interprétation de l'intégrale stochastique au sens de Stratonovich. Pour permettre une vision plus complète du modèle proposé, il nous a paru nécessaire de rappeler quelques-unes des propriétés essentielles des EDS, en faisant apparaître plus nettement les raisons du choix que nous avons fait.

#### 2.2.4. Propriétés mathématiques du modèle stochastique

##### a. L'équation différentielle stochastique

Pour analyser les propriétés mathématiques du modèle stochastique, nous considérons la forme scalaire de l'équation (53). Pour mettre en évidence le fait que l'état du système n'est plus défini univoquement, considérons l'équation aux différences tirée de (53). On a :

$$X(t + \tau) - X(t) = F(X(t), P(t), t) \tau + \sigma_F(X(t), P(t), t) [\beta(t + \tau) - \beta(t)] \quad (56)$$

Alors,  $X(t)$  représentant l'évolution de l'état du système dynamique en fonction du temps, on voit que si, à l'instant présent  $t$ , le système se trouve dans l'état  $X(t)$  connu, son évolution entre  $t$  et  $t + \tau$  ( $\tau$  petit) est la somme d'un terme connu  $F(X, P, t) \tau$  et d'un terme aléatoire :

$$\sigma(X, P, t) (\beta(t + \tau) - \beta(t))$$

En utilisant les propriétés du processus de Wiener, on a :

$$E[\beta(t + \tau) - \beta(t)] = 0$$

$$E[\beta(t + \tau) - \beta(t)]^2 = \tau \quad (\text{avec } c = 1)$$

Par conséquent, l'évolution moyenne du système entre  $t$  et  $t + \tau$  est  $F(X, P, t) \tau$  et l'écart moyen autour de cette évolution moyenne est  $\pm |\sigma(X, P, t)| \sqrt{\tau}$ . Si l'on divise maintenant les deux membres de (56) par  $\tau$ , en faisant tendre  $\tau$  vers zéro, on obtient une équation différentielle de la forme de (53) d'où il apparaît que  $d\beta \sim (dt)^{1/2}$ . Cette dernière relation traduit une propriété importante du mouvement brownien : le processus du mouvement brownien est continu au sens de la convergence en moyenne quadratique mais son intégrale ne peut être définie au sens des intégrales classiques.

### b. Intégration des processus stochastiques

Considérons en effet l'équation (53) sous la forme intégrale :

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t F(X(s), P(s), s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(X(s), P(s), s) d\beta(s)$$

La première intégrale à droite est l'intégrale de Riemann habituelle (pour la topologie de la convergence en moyenne quadratique). La seconde contient le processus du mouvement brownien et nécessite de ce fait une définition particulière. Elle est appelée intégrale stochastique.

Une approche mathématique du problème est présentée par GUIKEMAN et SKOROKHOD (1977), BENSOUSSAN et LIONS (1978). Elle consiste à se donner une famille croissante de  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{A}_t$ , définie pour  $t \geq 0$  sur l'espace de probabilité  $(\Omega_0, \mathcal{A}, Pr)$ , à montrer ensuite que le mouvement brownien est  $\mathcal{A}_t$ -mesurable pour chaque  $t$  et l'accroissement  $\beta(t) - \beta(s)$  est indépendant des événements de  $\mathcal{A}_s$  pour  $t > s$ . La définition d'un espace des fonctions en escalier approprié  $\Lambda$  (généralement un espace de Hilbert) permet de montrer que l'intégrale stochastique définit une application linéaire et continue de  $\Lambda \rightarrow L^2(\Omega_0, \mathcal{A}, Pr)$ . Dès lors, l'étude de l'intégrale stochastique et de l'e.d.s. de départ se ramène aux problèmes d'existence et d'unicité de solution définie sur un intervalle  $[0, T]$ .

Mais il est bien connu que le problème essentiel pour l'ingénieur n'est pas de prouver l'existence et/ou l'unicité de solution, mais d'établir un modèle mathématique physiquement acceptable, de développer des méthodes de calcul des lois marginales de comportement, et des méthodes permettant une exploitation numérique du modèle.

Le point de vue développé dans ce mémoire est celui de l'hydrologue, soucieux de cerner de plus près les propriétés hydrodynamiques du bassin versant. Pour rester plus près de ces préoccupations, nous nous appuyerons sur des considérations plus physiques. On sait, par exemple, que si  $v(t)$  est une fonction déterministe, on a l'intégrale :

$$\int_0^t v(\tau) dv(\tau) = \frac{1}{2} (v^2(t) - v^2(0))$$

Considérons l'intégrale :

$$\int_0^t v(\tau) dv(\tau)$$

pour le cas où  $[v(t), t \in T]$  est un processus du mouvement brownien,

de variance unité. Si l'on procède comme dans le cas habituel (en passant de la somme de Riemann à l'intégrale de Riemann), on se retrouve en présence de deux alternatives :

$$I_0 = \lim \sum_{i=1}^N v(t_i) [v(t_{i+1}) - v(t_i)] \quad (58)$$

$$I_1 = \lim \sum_{i=1}^N v(t_{i+1}) [v(t_{i+1}) - v(t_i)]$$

où la limite est prise au sens de la convergence en moyenne quadratique. Dans le cas déterministe, la limite de  $I_0$  et  $I_1$  existe et est unique. Dans le cas considéré par contre,  $I_0$  reste distinct de  $I_1$  à la limite, puisque l'on a :

$$I_1 - I_0 = \lim \sum_{i=1}^N [v(t_{i+1}) - v(t_i)]^2 = + \quad (60)$$

La limite obtenue pour  $I_0$  et  $I_1$  va dépendre du point de l'intervalle où l'évaluation de la fonction à intégrer est faite.

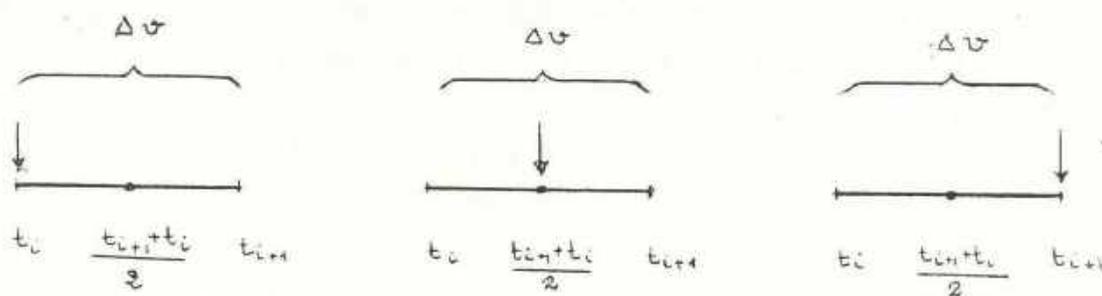


Schéma 3

La définition de l'intégrale stochastique donnée par Ito s'appuie sur une détermination de la fonction à intégrer au point  $t_i$ . Mais il existe plusieurs possibilités définies par la famille suivante d'intégrales stochastiques (ASTROM - 1970) :

$$\begin{aligned}
 I_\lambda &= (1 - \lambda) I_0 + \lambda I_1 = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N [(1 - \lambda) v(t_i) + \lambda v(t_{i+1})] [v(t_{i+1}) - v(t_i)] \quad (61)
 \end{aligned}$$

avec  $0 < \lambda < 1$

$I_0$ , introduite par Ito est appelée "Intégrale de Ito".

$I_{0,5} = (I_0 + I_1) / 2$  a été introduite par Stratonovich.

En passant à la limite dans (61), on trouve :

$$I_\lambda(v, dv) = \frac{1}{2} [v^2(t) - v^2(0)] + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \cdot t \quad (62)$$

On voit d'après cette relation que si  $\lambda = 0,5$ , l'intégrale stochastique donne le même résultat que l'intégrale de Riemann habituel. Par contre si  $\lambda = 0$  ou  $1$ , la connaissance de  $v^2$  est améliorée de  $\pm \frac{1}{2} t$ . Cette différence dans l'interprétation du phénomène subsiste pour des intégrales plus générales. On montre en effet (JAWZINSKI - 1970, pp. 99 et 100, théorèmes 4.1. et 4.2) que pour toute fonction aléatoire  $y(t, \beta)$  indépendante de

$$\{ [\beta(t_{i+1}) - \beta(t_i)] , t_i \in T \}$$

et telle que :

$$\int_T E |y(t, \beta)|^2 dt < \infty \quad (63)$$

l'intégrale de Ito est bien définie.

L'intégrale de Stratonovich est définie (au sens de la convergence en moyenne quadratique) pour toute fonction  $y(t, \beta)$ , continue en  $t$ , ayant une dérivée partielle en  $\beta$ ,  $\partial y / \partial \beta$ , et vérifiant en outre (62). Elle est liée à l'intégrale de Ito par la formule :

$$\int_T \underbrace{\gamma(t, \beta) d\beta}_{\text{Stratonovich}} = \int_T \underbrace{\gamma(t, \beta) d\beta + \frac{\sigma_0^2}{2} \int_T \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} dt}_{\text{Ito correspondant}} \quad (64)$$

L'intégrale stochastique de Stratonovich et l'équation différentielle stochastique qui en découle satisfont toutes les règles habituelles du calcul intégral et différentiel et en particulier les règles d'intégration par partie. Si l'on considère l'e.d.s. sous la forme scalaire suivante :

$$dy = f(y, t) dt + \sigma(y, t) d\beta$$

et si cette dernière est prise au sens de Stratonovich, on peut montrer (JAWZINSKI, op. cité, p. 119) que l'équation de Ito équivalent est donnée par :

$$dy = \left[ f(y, t) + \frac{1}{2} \sigma(y, t) \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right] dt + \sigma(y, t) d\beta$$

On voit que les définitions de Ito et de Stratonovich seront équivalentes si  $\partial \sigma / \partial y = 0$ . C'est par exemple le cas si  $\sigma$  est une fonction variant seulement avec le temps ( $\sigma = \sigma(t)$ ).

Ce qui montre que, dans le sens de la modélisation linéaire, il est équivalent de prendre la définition de Stratonovich ou celle de Ito.

Il reste cependant le problème du choix de l'interprétation physique du phénomène que l'on veut modéliser. La relation (62) montre que la définition de Ito introduit dans l'évolution du phénomène une correction que l'on pourrait, dans le cas simple considéré, interpréter comme la "contribution propre" du temps à l'évolution. L'un des aspects importants du fonctionnement des systèmes dynamiques naturels est que les événements qui s'y déroulent ne sont pas répétitifs. La relation (62) fournit une justification simple de cette constatation empirique.

En effet, pour interpréter ce résultat dans le cadre du fonctionnement des systèmes dynamiques naturels, on doit se rappeler que  $[w(t), t \in T]$  est un processus du mouvement brownien, de variance unité, et que pour des processus plus généraux  $[w(t), t \in T]$ , l'écart moyen autour de l'évolution moyenne entre  $t$  et  $t + \tau$  est de  $\sigma \sqrt{\tau}$  et que :

$$I_{\lambda}(w, dw) = \frac{1}{2} [w^2(t) - w^2(0)] + \sigma^2 \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \tau$$

Alors, lorsqu'on interprète l'intégrale stochastique au sens de STRATONOVICH, ( $\lambda = 0,5$ ), on suppose que, statistiquement parlant, la répétition de l'expérience entre les instants  $t$  et  $t + \tau$  permet de se ramener à un phénomène de variance nulle. La définition de STRATONOVICH est donc symétrique, et suppose l'invariance des conditions de mesure aux temps  $t$  et  $t + \tau$ , comme cela peut être le cas dans les systèmes dynamiques asservis, (en automatisme et en théorie de filtrage).

Cette condition n'est pas réalisée, (à notre avis), pour les phénomènes physiques qui se déroulent sur un bassin versant naturel. Il leur est attaché dans ce cas une incertitude permanente qui dépend aussi bien de la nature du phénomène que de l'intervalle de temps considérés.

$$\Delta I_{\lambda} = \sigma^2 \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \tau = \text{const} \neq 0$$

On voit en particulier que dans ce cas, on obtient, pour  $\tau = 0$ , un phénomène de variance infini qui est en conformité avec la définition du bruit blanc.

Pour rester dans le cadre général des modèles non-linéaires conformes à la nature réelle du comportement hydrodynamique du bassin versant, on continuera, dans la suite de ce mémoire, de parler des équations différentielles stochastiques au sens de Ito.

Une analyse du modèle de UNNY et KARMESHY (1984) sera faite dans le cadre du chapitre suivant, consacré au panorama des modèles existants.

### c. Règles de calcul stochastique

Dans la suite de ce mémoire, nous utiliserons les règles de calcul stochastique établies par Ito, notamment le théorème suivant :

#### Théorème de Ito

Soit  $X$  un vecteur  $n$ -dimensionnel, solution unique de l'équation différentielle stochastique vectorielle :

$$dX = F(X,t) dt + \sigma_F(X,t) dB \quad (65)$$

où  $[B(t), t \in T]$  est un processus de Wiener vectoriel de covariance incrémental  $\mathbb{I} \cdot dt$  ; soit  $\phi(X,t)$ , une fonction scalaire à valeur réelle, continument différentiable en  $t$  et deux fois continument différentiable en  $X$ , alors  $\phi(X,t)$  satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$d\phi = \phi_t dt + \phi_X^T dX + \frac{1}{2} \text{tr} \cdot \sigma_F^T \cdot \mathbb{I} \cdot \sigma_F \phi_{XX} dt$$

$$\text{où } \phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \phi_X^T = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial X_n} \right] \quad (66)$$

$$\phi_{XX} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_1 \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_n \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_n^2} \end{bmatrix}$$

La démonstration rigoureuse de ce théorème peut être trouvée dans les ouvrages de mathématique consacrés à ce sujet (par exemple dans BENSOUSSAN et LIONS - 1978, p. 34). Mais compte tenu de l'importance de ce théorème pour la suite de ce mémoire, on présente une justification intuitive pour le cas où  $X$  est scalaire.

Considérons donc, dans ce cas, un développement de  $\phi$  en série de Taylor en retenant les termes d'ordre deux en  $d\beta$ . On a :

$$\phi - \phi_0 = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial X} (X - X_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} (X - X_0)^2 + \dots$$

soit pour  $\Delta t$  et  $\Delta X$  petits

$$\begin{aligned} d\phi &= \phi_t dt + \phi_X dX + \frac{1}{2} \phi_{XX} (dX)^2 + \dots \\ &= \phi_t dt + \phi_X (F dt + \sigma_F d\beta) + \frac{1}{2} \phi_{XX} (F dt + \sigma_F d\beta)^2 \\ &= (\phi_t + \phi_X \cdot F + \frac{1}{2} \phi_{XX} \sigma_F^2) dt + \phi_X \sigma_F d\beta \end{aligned}$$

qui est l'analogie scalaire de l'équation ci-dessus.

Le théorème de Ito fixe les règles du calcul stochastique. On a en effet (JAWZINSKI, p. 115), pour deux processus  $X(t)$  et  $Y(t)$  définis par (65) et deux fonctions scalaires  $\phi(X,t)$  et  $\psi(Y,t)$  satisfaisant les hypothèses du théorème ci-dessus,

$$d(\phi\psi) = \psi d\phi + \phi d\psi + \text{trace}(\sigma_{FX} \cdot \mathbb{I} \cdot \sigma_{FY}^T \psi_Y \phi_X) dt \quad (67)$$

#### d. Evaluation des paramètres du modèle

La démarche que nous avons suivie pour la présentation du modèle stochastique consiste à se donner le modèle déterministe pour lequel la connaissance de l'état initial permettait de décrire l'évolution future du système. En introduisant les termes d'incertitude  $[\epsilon(t), t \in T]$ , on probabilise l'espace des fonctions d'entrée et, de ce fait, l'espace d'état et l'espace de sortie se probabilisaient de façon naturelle, par image des fonctions d'entrée. La tâche de la modélisation stochastique consiste dès lors à déterminer les divers moments des paramètres d'état et de la sortie.

#### Le modèle linéaire

Considérons le schéma déterministe présenté plus haut pour la description de l'état d'un bief. Il est défini par les équations (43) et (44) que nous récrivons, pour un bief donné, sous la forme suivante (en omettant les indices) :

$$\frac{dX}{dt} = p(t) - q(X) \quad (68)$$

$$q(X) = \psi(X, t)$$

Introduisons le terme d'incertitude dans les données d'entrée.

On a :

$$p(t) = \bar{p}(t) + \sigma_p \epsilon_p(t) \quad (69)$$

avec

$$E[\epsilon_p] = 0$$

$$E[\epsilon_p(t) \cdot \epsilon_p(\tau)] = M(t) \delta(t - \tau)$$

On a alors :

$$\frac{dX}{dt} + \psi(X) = \bar{p}(t) + \sigma_p \epsilon_p(t) \quad (70)$$

Examinons le cas linéaire :  $\psi(X) = a(t) X$

La solution de (70) est donnée par :

$$X(t) = \Phi(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \bar{p}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \sigma_p(\tau) d\beta(\tau) \quad (71)$$

$$\text{avec } \Phi(t, t_0) = \exp\left(-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right)$$

$$d\beta = \varepsilon_p d\tau$$

En prenant l'espérance mathématique dans (71), on trouve :

$$\bar{X} = E[X(t)] = \Phi(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \bar{p}(\tau) d\tau \quad (72)$$

qui est la solution habituelle donnée par les modèles déterministes linéaires.

Calculons la variance :

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= E[(X - \bar{X})(X - \bar{X})] \\ &= E\left\{ \left[ \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \sigma_p(\tau) d\beta(\tau) \right] \left[ \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \sigma_p(\tau) d\beta(\tau) \right] \right\} \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \Phi^2(t, \tau) \cdot \sigma_p^2(\tau) E[\varepsilon_p(\tau) \cdot \varepsilon_p(\tau_1)] d\tau d\tau_1 \\ &= \int_{t_0}^t \Phi^2(t, \tau) \sigma_p^2(\tau) M(\tau) d\tau \end{aligned}$$

En particulier si  $\text{var}[\varepsilon_p] = 1$ , on a

$$\text{var}[X] = \int_{t_0}^t \Phi^2(t, \tau) \sigma_p^2(\tau) d\tau \quad (73)$$

Par exemple, si  $\sigma_p = \text{cst}$  et  $a = \text{cst}$ , on aura pour  $t_0 = 0$

$$\text{var}[X] = \frac{\sigma_p^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

Les paramètres de la sortie se déduisent, compte tenu de l'hypothèse de linéarité, des paramètres d'état.

Le modèle non-linéaire

On pose maintenant  $\Psi(X) = \sum_{j=1}^n a_j(t) X^j$

Dans le cas déterministe, (étudié dans le mémoire de 3ème Cycle), on sait que la solution générale du système non linéaire décrit par un opérateur polynomial :

$$\textcircled{+} X = \frac{dX}{dt} + \sum_{j=1}^n a_j(t) X^j - \bar{p}(t) = 0$$

se déduit à partir de la solution de la composante linéaire. On est conduit, en suivant cette démarche, aux approximations suivantes pour le modèle stochastique :

$$X_1 = \phi(t, t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) \bar{p}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) \sigma(\tau) dB(\tau)$$

$$X_2 = \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) [X_1^2(\tau)] d\tau$$

$$X_3 = \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) [X_1^3(\tau)] d\tau$$

-----

$$X_j = \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) [X_1^j(\tau)] d\tau$$

et

$$X = X_1 + \sum_{j=2}^n a_j X_j$$

En se limitant aux termes d'ordre deux ( $n = 2$ ) et en posant  $X_0 = 0, t_0 = 0$ , on a :

.....

$$\begin{aligned}
X = & \int_0^+ \Phi_1(t, \tau_1) \bar{p}(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^+ \int_0^+ \Phi_2(t, \tau_1, \tau_2) \prod_{i=1}^2 \bar{p}(\tau_i) d\tau_i + \\
& + \int_0^+ \Phi_1(t, \tau_1) \sigma(\tau_1) dB(\tau_1) + \int_0^+ \int_0^+ \Phi_2(t, \tau_1, \tau_2) \bar{p}(\tau_1) \sigma(\tau_2) d\tau_1 dB(\tau_2) \\
& + \int_0^+ \int_0^+ \Phi_2(t, \tau_1, \tau_2) \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_2) dB(\tau_1) dB(\tau_2) \quad (74)
\end{aligned}$$

Dans cette relation

$$\Phi_1 = \Phi$$

$$\Phi_2 = \int_0^+ a_2 \Phi(t, \tau_1) \Phi(\tau_1) d\tau_1$$

L'espérance mathématique  $E[X]$  fait apparaître, en plus du terme déterministe, un terme additionnel qui est :

$$\begin{aligned}
E \left\{ \int_0^+ \int_0^+ \Phi(t, \tau_1, \tau_2) \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_2) dB(\tau_1) dB(\tau_2) \right\} &= \\
= \int_0^+ \int_0^+ \Phi(\cdot) \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_2) \text{cov}(\varepsilon(\tau_1), \varepsilon(\tau_2)) d\tau_1 d\tau_2 & \quad (75)
\end{aligned}$$

En clair, on voit qu'à l'approximation d'ordre deux, le calcul des moments d'ordre un fait apparaître des moments d'ordre supérieur à un. On peut vérifier que, de manière générale, pour les modèles non linéaires, l'évaluation de l'espérance mathématique de l'état et de la sortie, nécessite la connaissance des moments d'ordre supérieur. De même, le calcul du moment centré d'ordre deux conduit à la relation :

$$\begin{aligned}
E \left[ \int_0^+ \Phi_1 \sigma dB \right]^2 + E \left[ \int_0^+ \int_0^+ \Phi_2 \bar{p} \sigma d\tau_1 dB \right]^2 + E \left[ 2 \int_0^+ \Phi_1 \sigma dB \cdot \int_0^+ \int_0^+ \Phi_2 \bar{p} \sigma d\tau dB \right]^2 \\
= E \{ [X - \bar{X}] [X - \bar{X}] \} \quad (76)
\end{aligned}$$

Cette relation fait apparaître la nécessité de connaître les moments d'ordre quatre pour les termes du bruit.

Les considérations qui précèdent montrent que l'utilisation de la méthode d'intégration directe pour l'estimation des moments de différents ordres conduit à une perte d'information.

La prise en compte du caractère markovien de la solution de l'équation d'état et l'application des règles de calcul stochastique de Ito permettent une évaluation théorique directe de la densité de probabilité de transition et de la densité de probabilité marginale et l'on sait que les divers moments peuvent être déterminés si l'on connaît ces lois de probabilité.

Soit en effet :

$$\Pr (X, t | \xi, \tau) \quad , \quad t > \tau \in [0, T]$$

la densité de probabilité de transition d'un processus X vérifiant l'équation (70) :

$$dX = [ \bar{P} - \psi (X) ] dt + \sigma d\beta \quad (70)$$

Par définition, on a :

$$\Pr (X, t | \xi, \tau) dX = \Pr [ X < X(t) < X + dX | X(\tau) = \xi ]$$

On démontre, moyennant certaines hypothèses de régularité sur  $[ \bar{P} - \psi (X) ]$  et  $\sigma (X, t)$ , (généralement elles doivent être continues et bornées), que  $\Pr (X, t | \xi, \tau)$  vérifie une équation aux dérivées partielles du type parabolique (JAWZINSKI - 1970, p. 129 ; GUIKMAN et SKOROKHOD - 1977, p.65, th. 6 ; BENSOUSSAN et LIONS - 1978, p. 155) :

$$-\frac{\partial \Pr (X, t | \xi, \tau)}{\partial t} = \mathcal{L} [ \Pr (X, t | \xi, \tau) ] \quad (77)$$

Pour l'e.d.s. considérée,

$$\mathcal{L} [ \cdot ] = \frac{\partial}{\partial X} [ ( \bar{P} - \psi (X) ) \cdot ] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} [ \sigma^2 (X) \cdot ]$$

(mais  $[\bar{P} - \psi(X)]$  peut être remplacée dans (70) et dans l'opérateur, par toute fonction vérifiant les conditions de régularité requise). L'équation (77) est appelée équation de Kolmogorov ou équation directe de Fokker-Planck. La condition initiale pour cette équation est définie par :

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \text{Pr}(X, t \mid \xi, \tau) = \delta(X - \xi) \quad (78)$$

où  $\delta(X - \xi)$  est la masse ponctuelle de probabilité pour  $X = \xi$ . La condition aux limites est définie par :

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \text{Pr}(X, t \mid \xi, \tau) = 0 \quad (79)$$

BENSOUSSAN et LIONS ont montré, (dans le passage cité plus haut), que  $\text{Pr}(X, t \mid \xi, \tau)$  défini comme solution de l'équation parabolique (77) est le noyau (ou fonction de transition) de l'opérateur de Green associée à  $\mathcal{L}[\cdot]$ . En effet on sait que si une fonction  $\phi(X, t)$  est solution du problème de Cauchy :

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathcal{L}(\phi) \quad (80)$$

$$\phi(X, T) = \bar{\phi}(X)$$

elle est définie par :

$$\phi(X, t) = E[U(t, T) \cdot \bar{\phi}(X)]$$

où  $U(t, T)$  est l'opérateur de Green. Si  $\text{Pr}(\cdot)$  est le noyau de l'opérateur  $U(t, T)$ , on a :

$$E[U(t, T) \bar{\phi}(X)] = \int \text{Pr}(X, t \mid \xi, T) \phi(\xi) d\xi \quad (81)$$

On peut aussi déduire l'équation inverse de Kolmogorov pour  $\text{Pr}(\cdot)$ . En effet, par application directe des règles de calcul stochastique, on a :

$$-\frac{\partial Pr}{\partial t} = [\bar{P} - \psi(\xi)] \frac{\partial Pr}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \sigma^2(\xi) \frac{\partial^2 Pr}{\partial \xi^2} \quad (82)$$

Si cette équation a une solution unique, on montre aussi que cette solution est la densité de probabilité de transition pour le processus  $X(t)$ . On dit (JAWZINSKI, p. 130) que l'équation (82) est l'adjoint formel de (77).

En remarquant que  $Pr(X, t | \xi, \tau)$  est une fonction aléatoire (puisque'elle dépend de  $X$  et  $\xi$ ), on peut prendre dans les équations (77) et (82) l'espérance mathématique et comme :

$$E [ Pr(X(t) | X(\tau) = \xi) ] = Pr(\xi(\tau))$$

on voit que la probabilité marginale du processus vérifie les mêmes équations.

De l'analyse qui précède, il résulte que si la sortie du système défini par le bassin versant vérifie l'équation :

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = (\bar{P} - q(\xi, \tau)) \frac{\partial q}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} \quad (83)$$

on a, en utilisant (81), une évaluation directe sous la forme :

$$q(X, t) = \int Pr(X, t | \xi, \tau) q(\xi) d\xi \quad (84)$$

En particulier, si  $q(\xi) = \delta(\xi)$ , on déduit que l'espérance mathématique du débit à l'exutoire du bassin mesure la densité de probabilité du paramètre d'état.

En prenant l'espérance mathématique dans (84), on a :

$$E [ q(X, t) ] = \int Pr(\xi, \tau) q(\xi) d\xi \quad (85)$$

.....

## Exemples

=====

. si  $q(X, t) = a X(t)$ , on a

$$E [ q(X, t) ] = a E [ X(t) ] = a \int \text{Pr}(\xi, \tau) \xi \, d\xi$$

On retrouve là, le résultat habituel.

. si  $q(X, t) = \sum_{j=1}^n a_j X^j$ , on a

$$\begin{aligned} E [ q(X, t) ] &= \int \text{Pr}(\xi, \tau) \sum_{j=1}^n a_j \xi^j \, d\xi \\ &= \sum_{j=1}^n a_j \int \text{Pr}(\xi, \tau) \xi^j \, d\xi \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu plus haut et qui montre que : l'évaluation de l'espérance mathématique de la réponse du système nécessite la connaissance de tous les moments d'ordre supérieur de la fonction d'état. Si, comme cela se fait, dans la pratique hydrologique, on souhaite se limiter aux quatre premiers moments, cette évaluation de  $E [ q(X, t) ]$  pourrait se faire de manière directe, si l'on connaît une expression explicite de  $\text{Pr}(X, t)$ .

Malheureusement, l'équation de FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV n'a de solution explicite que pour quelques cas très particuliers. L'un de ces cas particuliers s'obtient en supposant, pour le système en étude, que la quantité d'eau tombée sous forme de précipitation, s'écoule intégralement à l'exutoire, sous forme de débit. On a alors  $(\bar{P} - q) = 0$  et les équations qui décrivent le système sont :

$$dX = \sigma \, d\beta \quad (\text{éq. d'état})$$

$$\frac{\partial \text{Pr}}{\partial t} = - \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial^2 \text{Pr}}{\partial X^2} \quad (\text{éq. F-P-K})$$

si  $\sigma = \mathbb{I}$  (identité)

$$P(X, t) \, dX \rightarrow \delta_0 \quad \text{pour } t \rightarrow 0.$$

La solution de ce problème est immédiate et l'on a :

$$Pr (X, t) = (2 \pi t)^{-1/2} \exp (- X^2 / 2 t)$$

Pour obtenir une expression explicite, dans le cas général, on peut utiliser soit les techniques de transformation de Fourier par rapport à la variable  $X$ , soit une méthode d'approximation fonctionnelle. Cette dernière possibilité sera examinée plus loin, dans le cadre de l'application concrète de la méthode.

### 2.3. CONCLUSION

Le développement qui précède permet de se rendre compte de l'importance de la structure stochastique de l'espace des fonctions d'entrée sur le comportement dynamique du système. On a montré en particulier que la probabilisation de l'espace des entrées conduisait de façon naturelle à une probabilisation de l'état et de la sortie. Il est donc nécessaire, pour mieux cerner l'évolution des états et de la sortie des systèmes considérés, de mieux connaître l'évolution spatiale et temporelle des structures stochastiques de la précipitation sur le bassin.

Dans le développement présenté, nous avons considéré seulement l'évolution des propriétés du bruit blanc dans le temps. Cette démarche se justifie par l'utilisation d'un modèle discret dans l'espace. Il existe en effet une différence profonde entre les incertitudes dans le temps et dans l'espace, due au fait que le temps est ordonné alors que l'espace ne l'est pas. Toutefois, si l'on considère une dimension spatiale et un sens de l'évolution, les définitions données pour la variable temps peuvent être étendues à l'espace. Mais l'avantage de la discrétisation spatiale est qu'elle

permet de rester dans un espace fonctionnel de dimension finie, donc de modéliser le comportement spatial par des variables aléatoires alors que l'évolution continue dans le temps (espace fonctionnel de dimension infinie) est modélisée par des processus stochastiques. Or, on sait que pour les variables aléatoires les techniques de calcul différentiel et du calcul intégral usuel sont utilisables, ce qui justifie que les règles du calcul stochastique ci-dessus rappelées s'appliquent dans le cadre de cette étude à l'évolution des paramètres dans le temps.

La finalité pratique de la discrétisation spatiale est immédiate. Les fonctions d'entrée ne sont connues qu'à travers un nombre limité de stations de mesure, alors que pour chaque station donnée, on peut disposer d'enregistrement continu dans le temps. Compte tenu de cette importance des fonctions d'entrée représentées par les précipitations mais aussi des considérations d'échelle dans les phénomènes physiques qui sont à l'origine de leur production, nous accorderons dans la suite de ce travail une attention particulière à l'aspect dynamique de l'évolution des précipitations en Afrique de l'Ouest.

---

2.4. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AFOUDA A. (1974)  
 Contribution à l'étude des systèmes hydrologiques non-linéaires.  
 Thèse de 3ème Cycle hydrodynamique.  
 Université Paul Sabatier - Toulouse
- AFOUDA A. (1981)  
 Les modèles pluie-débit en milieu tropical urbain.  
 Rapport - Université National du Bénin - décembre
- AMOROCHO J. , ORLOB G.T. (1961)  
 Non linear analysis of hydrologic system.  
 Water Resources Center Contribution n° 40
- ASTROM K.J. (1970)  
 Introduction to stochastic control theory  
 Academic Press, New York
- BARDOS C. (1984)  
 Introduction aux problèmes hyperboliques non linéaires.  
 Pré-publications mathématiques, C.S.P. , Dép. de Math.  
 Université Paris-Nord
- BENSOUSSAN A. et LIONS J.L. (1978)  
 Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique.  
 Coll. Méthodes math. de l'Informatique, Dunod - Paris
- CRANDALL M.G. (édit - 1978)  
 Non linear evolution equations.  
 Proc. of a Symposium conducted by the math. Research Center.  
 The Univ. of Wisconsin-Madison Academic Press - New York
- DAOUD A.J. (1976)  
 Contribution au dimensionnement des réseaux d'assainissement  
 au moyen d'un modèle de stockage.  
 Thèse de Docteur-Ingénieur , U S T L , Montpellier
- DOOGE J.C.I. (1973)  
 The linear theory of hydrologic system.  
 U.S. Depart. of Agriculture - Technical Bulletin n° 1463  
 U.S. Gvt. Printing Office
- DOSSOU-GBETE S. , ETTINGER P. , DE FALGUEROLLES A. (1976)  
 Contribution à l'étude des processus ARMA.  
 Public. du Lab. de Stat. U P S n° 05-76

- EAGLESON P.S. (1970)  
Dynamic Hydrology  
Mc Graw-Hill Book Company - New York
- FRITZ J. (1974)  
Formation of singularities in One-Dimensional Non-Linear  
Wave Propagation.  
Comm. on Pure and Applied Math. Vol. XXVII, pp. 377-405
- FRIEDMAN A. (1975)  
Stochastic differential equations (2 vol.)  
Academic Press, New-York
- GAUDU R. (1978)  
Structures arborescentes et maillées en hydraulique et  
hydrologie.  
Thèse de Doctorat d'Etat, I.N.P. , Toulouse
- GUIKHMAN I., SKOROKHOD (1977)  
Introduction à la théorie des processus aléatoires.  
Edition Mir Moscou
- JAWZINSKI H.A. (1970)  
Stochastic Process and filtering theory.  
Academic Press, New-York
- LAX P.D. (1957)  
Hyperbolic System of Conservation Law II.  
Comm. Pure and app. Math. vol. X , pp. 537-566
- LEDOUX E. (1980)  
Modélisation intégrée des écoulements de surface et des  
écoulements souterrains sur un bassin hydrologique.  
Thèse de Docteur-Ingénieur - Ecole Nat. Sup. des Mines de  
Paris et Univ. Paris VI.
- LIONS J.L. (1969)  
Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites  
non-linéaires.  
Dunod et Gauthier-Villars, Paris.
- MAHMOOD K. et YEVJEVICH V. (édit. 1975)  
Unsteady flow in open channel.  
Water Res. Publ. Fort-Collins, Colorado.
- MARSILY (DE) G. (1978)  
De l'identification des systèmes hydrogéologiques.  
Thèse de Doctorat d'Etat - Univ. Paris VI

- QUESSEVEUR P. (1984)  
Analyse et génération d'un code hydrodynamique bidimensionnel.  
Thèse de 3ème Cycle, Univ. de Bordeaux I
- ROCHE M. (1970)  
Les divers types de modèles déterministes.  
Société Hydrotech. de France - Comité Technique n° 91
- SMOLLER J. (1983)  
Shock waves and reaction-diffusion equations.  
Springer Verlag, New York
- SEVELY Y. (1973)  
Systèmes et asservissements linéaires échantillonnés.  
Dunod-Université, Paris, 2ème édit.
- TANIUTI T. et NISHIHARA K. (1983)  
Non linear waves.  
Monographs and Studies in Math. Pitman
- THIRRIOT C. (1982)  
L'égoutier et le savant.  
Société Hydrotechnique de France - XVIIe Journées de l'Hydraulique - Conférence Inaugurale
- THIRRIOT C. (1985)  
Préparation du guide pour la prévision des crues -  
Ch. 5 : Les méthodes de propagation  
(à paraître)
- UNNY T.E. (1984)  
Numerical Integration of Stochastic Differential Equation  
in Catchment Modeling.  
Water Res. Res. vol. 20 , n° 3 , pp. 360-368 , March
- UNNY T.E. and KARMESHU (1984)  
Stochastic Nature of outputs from conceptual Reservoir  
model cascades.  
Journ. of Hydrology , 68 , pp. 161-180
- VENTSEL H. (1973)  
Théorie des probabilités  
Edition Mir - Moscou
- WHITHAM G.B. (1974)  
Linear and Non Linear Waves  
John Wiley and Sons
- WOOLHISER D.A. (1975)  
Simulation of unsteady overland flow. In unsteady flow  
in open channels , vol. II  
Edit. by K.Mahmood and V. Yevjevich - Water Res. Publ.  
Fort Collins, Colorado.

1871  
No. 100

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



CHAPITRE IIIPANORAMA DES MODELES ANTERIEURS

	Pages
<u>3.1.</u> <u>GENERALITES</u>	3.1
<u>3.2.</u> <u>PRESENTATION DES CHAINES DE MARKOV APPLIQUEES A L'ETUDE DES PRECIPITATIONS JOURNALIERES</u>	3.3
3.2.1. Définition des chaînes de Markov	3.3
3.2.2. Historique	3.6
3.2.3. Synthèse des travaux réalisés à l'IMFT	3.7
3.2.4. Les tendances actuelles	3.18
<u>3.3.</u> <u>PROCESSUS DE MARKOV APPLIQUE A LA MODELISATION DES BASSINS VERSANTS</u>	3.25
3.3.1. L'équation du bassin	3.27
3.3.2. Interprétation théorique de l'équation	3.29
3.3.3. Discussion	3.30

.....

<u>3.4.</u>	<u>APPROXIMATION FONCTIONNELLE DE L'EQUATION DE FOKKER - PLANCK - KOLMOGOROV</u>	3,31
3.4.1.	Idée de base pour le choix de la méthode d'approximation	3,32
3.4.2.	Utilisation des polynômes d'Hermite	3,35
<u>3.5.</u>	<u>CONCLUSION</u>	3,36
	<u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u>	3,39

---

### 3.1. GENERALITES

*"L'expérience est la source unique de vérité ; elle seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau ; elle seule peut nous donner la certitude.... Et pourtant, la physique mathématique existe ; elle a rendu des services indéniables ; c'est qu'il ne suffit pas d'observer ; il faut se servir de ses observations .....et pour cela, il faut généraliser.... On fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison".*

Cette citation de H. POINCARÉ (tirée d'un texte de 1901, en nouvelle édition - 1968 , p. 157) montre la complémentarité de l'expérience pratique et de la théorie mathématique. Mais comme le souligne ce grand savant (dans ses "Dernières Pensées", p. 203), *"Les faits sont susceptibles de plusieurs interprétations parce qu'ils ne sont jamais qu'imparfaitement connus"*. Nul ne s'étonnera donc que l'expérience pratique dans l'étude du fonctionnement hydrodynamique du bassin versant se traduise par plusieurs approches empiriques, conceptuelles ou analytiques que l'on peut classer suivant la démarche mathématique adoptée en :

- modèles déterministes
- modèles probabilistes
- modèles stochastiques

Cependant, le problème de la modélisation des phénomènes hydrologiques est, (on l'a vu plus haut), de rendre compte à la fois de l'aspect dynamique de l'évolution et de la nature incomplète de notre connaissance du phénomène. En d'autres termes, il s'agit de dégager une description de la réalité physique, sachant

que "les circonstances où l'on a opéré ne se reproduiront jamais toutes à la fois et donc que le fait observé ne recommencera jamais". Les paramètres essentiels de cette réalité physique sur un bassin versant étant :

- les précipitations
- les transformations pluie-débit
- et le débit à l'exutoire du bassin,

on cherchera donc à rendre compte, dans une formulation mathématique cohérente, de l'évolution de ces paramètres. On est conduit de ce fait à rechercher cette représentation adéquate du réel qui, selon P. LANGEVIN *"semble avoir été prévue et devancée par l'analyse logique et l'esthétique abstraite du mathématicien"*.

D'après DIEUDONNEE (1982), le besoin de perfection qui conduit à cette esthétique abstraite est le fruit d'une *"espèce de curiosité innée de l'être humain à résoudre des devinettes"*. Aussi, les constructions purement mathématiques qui nous permettent de trouver les concepts et les principes nécessaires à la compréhension des phénomènes naturels apparaissent-elles souvent sous la forme d'une théorie mathématique, préalablement formulée comme le résultat d'un simple jeu de devinette ! C'est le cas de la théorie des processus de Markov utilisés dans l'étude du fonctionnement des bassins versants.

En effet, d'après L. TAKACS (1960), le mathématicien russe A.A. MARKOV (1856-1922) est arrivé à la notion de la chaîne qui porte son nom en examinant l'alternance des voyelles et des consonnes dans une oeuvre poétique de A.S. POUCHKINE (1799-1838) intitulée "Onéguine". Ce fut le point de départ de recherches remarquables de MARKOV lui-même et de ses continuateurs V.I. ROMANOVSKY et A.N. KOLMOGOROV.

De nos jours, le champ d'application de la théorie des processus de Markov ne cesse de s'élargir. On peut citer, entre autres,

l'application au problème de diffusion, utilisant les équations de FOKKER - PLANCK - KOLMOGOROV, l'application au problème de filtrage utilisant la théorie de KALMAN et, plus généralement, les applications au problème de contrôle stochastique....

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à l'application des processus de Markov à la modélisation du fonctionnement hydrodynamique des bassins versants. Nous présenterons ainsi les modèles des chaînes de Markov appliquées à l'étude des précipitations journalières. L'analyse des nombreux travaux consacrés à ce problème permet d'entrevoir les limites d'application de la formulation discrète. Nous présenterons le modèle des processus ponctuels, introduit récemment, comme modèle de substitution aux chaînes de Markov. Mais l'étude encore plus récente de UNNY et KAR-MESHU (1984), ainsi que le modèle présenté dans ce mémoire, montrent que, en élargissant les chaînes de Markov discrètes aux processus de Markov continus et non-linéaires, on peut, de manière très naturelle, élargir le champ d'application de cette théorie mathématique à l'étude de la transformation pluie-débit et à l'étude du débit à l'exutoire. On a montré dans le chapitre précédent que l'évolution des lois de probabilités marginales et conditionnelles est décrite par l'équation de FOKKER - PLANCK - KOLMOGOROV. Nous présentons, pour clore ce chapitre, une méthode d'approche de solution de cette équation.

### 3.2. PRESENTATION DES CHAINES DE MARKOV APPLIQUEES A L'ETUDE DES PRECIPITATIONS JOURNALIERES.

#### 3.2.1. Définition des chaînes de Markov

Une démarche fort simple pour définir les chaînes de Markov consiste à partir de la notion d'évènements indépendants et à présenter une chaîne de Markov comme une généralisation de cette notion.

Considérons en effet une famille de v.a.  $\{X(t), t \in T\}$  indexée par le paramètre  $t \in T$  ( $T$  désigne généralement le temps). Si  $T = (0, 1, 2, \dots)$ , la famille considérée forme un processus stochastique à paramètres discrets.

Par contre, si  $T = \{t; 0 < t < \infty\}$ , le processus est à paramètres continus.

Soit maintenant  $E_1, E_2, \dots, E_j$ , un système complet d'événements. Par exemple, les  $E_j$  peuvent être des classes de pluies définies par des seuils donnés. Considérons la réalisation de chaque tirage en terme de réalisation de l'évènement  $E_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) et définissons la v.a. discrète  $\{X_t; t \in T; (T = 0, 1, 2, \dots)\}$  telle que  $X_t = j$  si la réalisation du tirage au temps  $t$  est  $E_j$ .

Si les tirages sont indépendants, on a :

$$\Pr \{ X_t = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1} \} = \Pr \{ X_t = j \} \quad (1)$$

pour tout  $t \in T$  et pour toutes les valeurs possibles de la v.a.  $X_t$ .

On arrive tout naturellement à la notion de chaîne de Markov d'ordre 1, si l'on suppose plus généralement que la réalisation de chaque nouveau tirage dépend de la réalisation du tirage précédent immédiatement le tirage considéré mais qu'elle est indépendante de tout autre tirage antérieur. On arrive ainsi à la définition :

Définition :

On dit que les tirages consécutifs ou les v.a. associées à ces tirages  $\{X_t\}$  forment une chaîne de Markov si pour tout  $t \in T = (0, 1, 2, \dots)$  et pour toutes les valeurs possibles de la v.a.  $X_t$ , on a :

$$\Pr \{ X_t = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1} \} = \Pr \{ X_t = j \mid X_{t-1} = i_{t-1} \} \quad (2)$$

On dit que la chaîne de Markov est d'ordre  $r$  si, dans une séquence de tirage, la réalisation de chaque tirage dépend de la réalisation des  $r$  tirages précédents et seulement de ces tirages. En conséquence, on dit qu'une v.a.  $X_t$  forme une chaîne de Markov d'ordre  $r$  si, pour tout  $r$  donné, et pour toutes les valeurs de la v.a.  $X_t$ ,  $t \in T = (0, 1, 2, \dots)$ , on a :

$$\Pr \{ X_t = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1} \} = \Pr \{ X_t = j \mid X_{t-r} = i_{t-r}, \dots, X_{t-1} = i_{t-1} \} \quad (3)$$

On voit que les tirages indépendants définis par (1) constituent (par extension), la chaîne de Markov d'ordre zéro.

Dans les applications à l'étude des précipitations journalières :

- les événements  $E_j$  sont appelés les états du système hydrologique considéré. Pour un processus binaire, les événements  $E_j$  sont les états secs ou pluvieux (désignés généralement par l'état 0 et l'état 1) ;

- la distribution de probabilité  $\Pr \{ X_0 = j \} = P_0(j)$  ( $j = 0, 1$ ) est appelée la distribution initiale ;

- et les probabilités conditionnelles  $\Pr \{ X_t = j \mid X_{t-1} = i \}$  sont appelées les probabilités de transition.

Si  $X_{t-1} = i$  et  $X_t = j$ , on dit que le système effectue une transition  $E_i \rightarrow E_j$ .

Si l'on connaît la distribution initiale et la probabilité de transition, on peut déterminer de manière unique la distribution de la v.a.  $X_t$ .

L'un des problèmes de la théorie mathématique des chaînes de Markov discrètes est de rechercher si la distribution limite de la v.a.  $X_t$  existe lorsque  $t \rightarrow \infty$  et si elle existe comment peut-on la déterminer. Ce problème est abordé par YAKOWITZ (1979 - a, b), YAKOWITZ (1984), YAKOWITZ et SZIDAROVSKY (1983), COLLOMB (1984, a, b).

Dans la démarche adoptée dans ce mémoire, ce problème se ramène à la recherche de l'existence de solution pour l'équation de FOKKER - PLANCK - KOLMOGOROV (voir ch. II). une méthode d'approche de solution de cette équation sera présentée plus loin.

### 3.3.2. Historique

D'après COLE et SHERRIF (1972), l'étude des dépendances des jours secs et pluvieux remonte à 1916, lorsque NEWHAM a montré qu'en Angleterre la probabilité d'un jour sec est liée au nombre de jours pluvieux précédents. Au contraire, LONGLEY (1953) a montré que, au Canada, la probabilité qu'un jour sec soit suivi d'un jour sec est presque indépendante du nombre de jours secs précédents. Mais les études de LAWRENCE (1954) confirmèrent les résultats de NEWHAM. Cependant, la première étude sur le caractère markovien des dépendances des jours secs et pluvieux est due à GRABIEL et NEUMANN (1959, 1962). Par la suite, de nombreuses études ont exploré l'applicabilité des modèles de Markov à l'étude des précipitations journalières. On peut citer entre autres les travaux de WEISS (1964), WISER (1965), FINKELSTEIN (1967), ADOMOWSKI et al. (1972), COLE et al. (1972), MEDHI (1976), etc. Mais ces premières études se sont, pour la plupart, intéressées aux chaînes de Markov du 1er ordre et à la nature des dépendances fournies par ce modèle.

Par la suite, il est apparu que la précision fournie par les chaînes de Markov d'ordre un n'était pas suffisante dans bien des situations. Les hydrologues se sont intéressés alors aux chaînes de Markov d'un point de vue plus critique en faisant intervenir des chaînes d'ordre supérieur. TONG (1975), GATES et TONG (1976), CHIN (1977) ont utilisé le critère d'information de AKAIKE (une variante de la méthode de maximum de vraisemblance) pour montrer la nécessité des chaînes de Markov d'ordre supérieur à un. GATES et TONG ont appliqué la méthode aux résultats de GABRIEL et NEUMANN (1962) et ont pu conclure que les chaînes d'ordre supérieur à un conduisaient à des ajustements meilleurs.

par exemple des effets saisonniers, on parle de chaînes de Markov non homogènes.

### Chaîne de Markov homogène du 1er ordre

Plusieurs v.a. entrent très naturellement dans la description des évènements pluvieux dans le temps :

- . Une première v.a. est celle qui compte le nombre d'évènements pluvieux à l'intérieur de divers intervalles de temps ;
- . Une autre v.a. est celle qui décrit le passage d'un état  $E_i$  à un autre  $E_j$  ;
- . une troisième v.a. est celle qui associe une certaine quantité de pluie (hauteur, volume) aux évènements pluvieux.

Dans les premiers travaux de GABRIEL et NEUMANN (1962), seul, le premier aspect était pris en considération. Ces auteurs ont précisé en effet qu'il s'agissait d'une "description statistique des observations". Mais bien que la définition d'un évènement pluvieux dépende de l'intervalle de temps dans lequel le processus va être décrit, les différentes v.a. ci-dessus indiquées peuvent se déduire à partir d'une définition unique du processus physique en étude.

Considérons en effet un intervalle de temps discret (le jour par exemple). Soit  $Y_1, Y_2, \dots, Y_t$ , une séquence de v.a. telle que  $\{Y_t, t \in T\}$  définisse la hauteur de pluie au jour  $t$ . Définissons une nouvelle v.a.  $\{X_t, t \in T\}$  telle que :

$$\begin{aligned} X_t &= 1 & \text{si} & & Y_t > 0 \\ X_t &= 0 & \text{si} & & Y_t = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

et

$$\eta_t \equiv \eta(0, t) = \sum_{t=1} X_t \tag{6}$$

alors  $\{X_t, t \in T\}$  caractérise (comme précédemment défini) l'état

du système et  $\eta_t$  compte le nombre de jours pour lequel  $X_t = 1$  dans l'intervalle  $(0, t)$ .  $X_t$  est la valeur au jour  $t$  et  $X_{t-1}$  est la valeur au jour  $t - 1$ ;  $i$  est l'état réalisé au jour  $t - 1$  et  $j$  est l'état réalisé au jour  $t$ ; ( $i, j = 0, 1$ ); alors la probabilité de transition est donnée par l'équation (4). En utilisant les deux états  $(0, 1)$ , il apparaît immédiatement que l'on a quatre possibilités, d'où la forme matricielle : (Tableau 1)

$$P = \begin{array}{c|cc} & \text{jour } t & \\ \hline \text{jour } t-1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \hline 1 & \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ \hline \end{array}$$

La matrice  $P$  est une matrice carrée. Ses éléments sont non négatifs ( $\alpha_{ij} > 0$ ) et  $\sum \alpha_{ij} = 1$ . Une matrice de ce type est appelée matrice stochastique.

THIRRIOT et KEBAILI-BERGAOUI (1983) ont établi le tableau ci-dessous qui permet de comprendre comment se fait le décompte des couples d'états. (Tableau 2)

Etat au jour $t - 1$	Etat au jour $t$		Nombre d'états de la veille
	0	1	
0	$N_{00}$	$N_{01}$	$N_0 = N_{00} + N_{01}$
1	$N_{10}$	$N_{11}$	$N_1 = N_{10} + N_{11}$
Nombre d'états aujourd'hui	$N'_0 = N_{00} + N_{10}$	$N'_1 = N_{01} + N_{11}$	$N = N_0 + N_1$ $= N'_0 + N'_1$

$N_{01}$  et  $N_{10}$  représentent respectivement le nombre de jours de changement d'état, de sec vers humide et d'humide vers sec. Si la série météorologique considérée commence et finit par le même état, alors  $N_{01} = N_{10}$ , sinon, il y a une différence de un jour. Toutefois, cette différence est peu sensible sur les coefficients, lorsque la série considérée est suffisamment longue. Pour des cas pratiques, on peut supposer les égalités suivantes réalisées :

$$N_{01} = N_{10} \quad \text{d'où} \quad N'_0 = N_0$$

On en déduit

$$F_0 = \frac{N_0}{N} \quad \text{et} \quad 1 - F_0 = \frac{N_1}{N} ; \quad \alpha_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_j}$$

La probabilité marginale prend la forme :

$$F_0 = \frac{\alpha_{10}}{1 - \alpha_{00} + \alpha_{10}} \quad (7)$$

Le coefficient d'autocorrélation du premier ordre est :

$$\rho = \frac{\alpha_{00} - F_0}{1 - F_0} = \frac{\alpha_{11} - (1 - F_0)}{F_0} \quad (8)$$

En utilisant  $\rho$  et  $F_0$ , la matrice des probabilités conditionnelles devient (THIRRIOT - KEBAILI-BERGAOUI, 1983) :

$$P = \begin{bmatrix} F_0 + \rho (1 - F_0) & (1 - F_0) - \rho (1 - F_0) \\ F_0 - \rho F_0 & (1 - F_0) + F_0 \rho \end{bmatrix}$$

Caractéristiques des durées

La connaissance des probabilités de transition et marginale permet de calculer les caractéristiques des durées.

Considérons en effet l'évènement :

"observer une séquence d'exactly  $n$  jours secs"

Il est réalisé si l'on observe la succession des états sous la forme :

$$\underbrace{1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1}_{n \text{ fois}}$$

On peut donc introduire la v.a. décrivant la durée sous la forme :

$$\tau_0 = \min \{ n ; X_n = 0 \}$$

On note :

$$\Pr \{ \tau_0 = n \} = \text{Prob} \{ \underbrace{1.00 \ \dots \ 01}_{n \text{ fois}} \}$$

et on écrit :

$$\Pr \{ \tau_0 = n \} = \Pr (1) \cdot \Pr (0/1) \cdot \Pr^{n-1} (0/0) \cdot \Pr (1/0)$$

Avec les notations adoptées, on a :

$$\Pr \{ \tau_0 = n \} = (1 - F_0) \alpha_{10} \cdot \alpha_{00}^{n-1} \alpha_{01}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \Pr \{ \tau_0 = i \} &= (1 - F_0) \alpha_{10} \alpha_{01} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{00}^{i-1} \\ &= (1 - F_0) \alpha_{10} \alpha_{01} \cdot \frac{1}{1 - \alpha_{00}} \end{aligned}$$

Soit, comme  $\alpha_{00} + \alpha_{01} = 1$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Pr \{ \tau_0 = i \} = (1 - F_0) \alpha_{10}$$

On a alors les résultats suivants :

a). Espérance mathématique des durées sèches :

$$\begin{aligned} m_1(\tau_0) &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i \Pr \{ \tau_0 = i \}}{\sum_{i=1}^{\infty} \Pr \{ \tau_0 = i \}} = \frac{(1 - F_0) \alpha_{10} \alpha_{01} \sum_{i=1}^{\infty} i \alpha_{00}^{i-1}}{(1 - F_0) \alpha_{10}} \\ &= \alpha_{01} \frac{1}{(1 - \alpha_{00})^2} = \frac{1}{1 - \alpha_{00}} \\ m_1(\tau_0) &= \frac{1}{1 - \alpha_{00}} \end{aligned} \quad (9)$$

b). Variance des durées sèches :

$$\begin{aligned} m_2(\tau_0) &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \Pr \{ \tau_0 = i \}}{\sum_{i=1}^{\infty} \Pr \{ \tau_0 = i \}} = \frac{(1 - F_0) \alpha_{10} \alpha_{01} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \alpha_{00}^{i-1}}{(1 - F_0) \alpha_{10}} \\ &= \frac{\alpha_{01} \cdot (1 + \alpha_{00})}{(1 - \alpha_{00})^3} = \frac{1 + \alpha_{00}}{(1 - \alpha_{00})^2} \end{aligned} \quad (10)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mu_2(\tau_0) = \sigma^2(\tau_0) &= m_2(\tau_0) - m_1^2(\tau_0) \\ &= \frac{1 + \alpha_{00}}{(1 - \alpha_{00})^2} - \frac{1}{(1 - \alpha_{00})^2} = \frac{\alpha_{00}}{(1 - \alpha_{00})^2} \end{aligned} \quad (11)$$

d'où

$$\sigma(\tau_0) = \frac{\sqrt{\alpha_{00}}}{1 - \alpha_{00}} \quad \text{et} \quad C_V(\tau_0) = \sqrt{\alpha_{00}}$$

c). Moments d'ordre 3 :

Des calculs analogues conduisent à :

$$m_3 = \frac{(1 + \alpha_{00})^2 + 2 \alpha_{00}}{(1 - \alpha_{00})^3} \quad (12)$$

$$\mu_3 = \frac{\alpha_{00} (1 + \alpha_{00})}{(1 - \alpha_{00})^3} \quad (13)$$

$$C_s = \mu_3 / \mu_2^{3/2} = \frac{1 + \alpha_{00}}{\sqrt{\alpha_{00}}} \quad (14)$$

d). Moments d'ordre 4 :

$$m_4 = \frac{1 + 11 \alpha_{00} + 8 \alpha_{00}^2 + \alpha_{00}^3}{(1 - \alpha_{00})^4} \quad (15)$$

$$\mu_4 = \frac{13 \alpha_{00} + 4 \alpha_{00}^2 + \alpha_{00}^3}{(1 - \alpha_{00})^4} \quad (16)$$

$$\gamma = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\alpha_{00}^2}{1 + \alpha_{00}} + \frac{7(\alpha_{00} - 1)}{(1 + \alpha_{00})^2} + \frac{4}{(1 + \alpha_{00})^2} \quad (17)$$

e). Fonction de répartition

$$\begin{aligned} \Pr \{ \tau_0 < n \} &= \frac{\sum_{i=1}^n \Pr \{ \tau_0 = i \}}{\sum_{i=1}^{\infty} \Pr \{ \tau_0 = i \}} \\ &= \alpha_{01} \sum_{i=1}^n \alpha_{00}^{i-1} = \alpha_{01} \frac{1 - \alpha_{00}^n}{1 - \alpha_{00}} \end{aligned}$$

d'où :

$$\Pr \{ \tau_0 < n \} = 1 - \alpha_{00}^n \quad (18)$$

Durées pluvieuses :

Les mêmes calculs s'effectuent pour les durées pluvieuses. Ils conduisent à des résultats identiques en remplaçant les indices caractérisant la période sèche par ceux caractérisant la période pluvieuse.

### Processus multiclasse

Le système complet d'évènement est formé par  $J$  états  $E_1, E_2, \dots, E_J$  (avec  $J > 2$ ). La probabilité de transition multiclasse s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix}$$

avec  $\sum_{j=1}^J \alpha_{ij} = 1$  et  $\alpha_{ij} = N_{ij} / N_i$

La démarche pour obtenir les différents paramètres est analogue à celle présentée dans le cas binaire mais avec un degré de complexité croissant des concepts utilisés.

A l'ordre un on a :

$$m_1(\tau_k) = \frac{1}{1 - \alpha_{kk}}$$

$$\sigma^2(\tau_k) = \frac{\alpha_{kk}}{(1 - \alpha_{kk})^2} \quad (19)$$

$$C_V(\tau_k) = \sqrt{\alpha_{kk}}$$

et

$$\Pr\{\tau_k < n\} = 1 - \alpha_{kk}^n$$

Généralement, la considération de processus multiclassés soulève quelques problèmes nouveaux. Un exemple de ces problèmes est celui du découpage en classe. Le choix des seuils doit répondre en effet à des critères imposés par la gestion des ressources en eau. On peut, dans la pratique, considérer un découpage en classes d'égalles probabilités, ou encore un découpage faisant intervenir des seuils qui sont fonction de la moyenne et de l'écart type.

Chaîne de Markov homogène d'ordre 2

Le recensement des états possibles conduit à la matrice de transition suivante où les  $\beta_{ijk}$  représentent la probabilité d'avoir un doublet de classe (j, k) succédant à un doublet de classe (i, j) avec les propriétés :

$$\beta_{ijk} = N_{ijk} / N_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_k \beta_{ijk} = 1$$

Tableau 3

Etats aux jours t-1 et t-2 \ / \ Etats aux jours t-1 et t	00	01	10	11
00	$\beta_{000}$	$\beta_{001}$	0	0
01	0	0	$\beta_{010}$	$\beta_{011}$
10	$\beta_{100}$	$\beta_{101}$	0	0
11	0	0	$\beta_{110}$	$\beta_{111}$

Les mêmes considérations que pour les chaînes d'ordre un conduisent aux relations suivantes, i et j représentant les états :

a). Moment d'ordre un :

$$m_1(\tau_i) = \beta_{jij} + \beta_{jii} \frac{2 - \beta_{iii}}{1 - \beta_{iii}} \quad (20)$$

b). Moment d'ordre deux :

$$m_2(\tau_i) = \beta_{jij} + \beta_{jii} \frac{\beta_{iii}^2 - 3\beta_{iii} + 4}{(1 - \beta_{iii})^2} \quad (21)$$

c). Fonction de répartition :

$$\Pr\{\tau_i < n\} = 1 - \beta_{jii} \beta_{iii}^{n-1} \quad (22)$$

### Chaîne de Markov homogène d'ordre supérieur

Il est théoriquement possible d'étendre le raisonnement qui précède à un ordre quelconque. Alors, en considérant deux états possibles ( $i, j = 0, 1$ ), à l'ordre  $r$ , on va faire intervenir, par la liaison entre  $r$  jours successifs,  $2^r$  classes possibles. Par exemple, pour  $r = 3$ , on aura des classes de triplets qui conduisent, après le bilan des événements possibles, à la matrice de transition suivante:

$\gamma_{ijkl} = N_{ijkl} / N_{ijk}$  représente la probabilité conditionnelle d'avoir un triplet de classe ( $j k l$ ) succédant à un triplet de classe ( $i j k$ ), de sorte que l'on a :

$$\sum_l \gamma_{ijkl} = 1$$

.....

Tableau 4

Etats aux jours t - 1, t - 2 t - 3	Etats aux jours t, t - 1, t - 2							
	000	001	010	011	100	101	110	
000	Y <sub>0000</sub>	Y <sub>0001</sub>	0	0	0	0	0	0
001	0	0	Y <sub>0010</sub>	Y <sub>0011</sub>	0	0	0	0
010	0	0	0	0	Y <sub>0100</sub>	Y <sub>0101</sub>	0	0
011	0	0	0	0	0	0	Y <sub>0110</sub>	Y <sub>0111</sub>
100	Y <sub>1000</sub>	Y <sub>1001</sub>	0	0	0	0	0	0
101	0	0	Y <sub>1010</sub>	Y <sub>1011</sub>	0	0	0	0
110	0	0	0	0	Y <sub>1100</sub>	Y <sub>1101</sub>	0	0
111	0	0	0	0	0	0	Y <sub>1110</sub>	Y <sub>1111</sub>

Les démarches similaires à celles suivies pour la détermination des paramètres de la chaîne d'ordre 2 permettent de décrire complètement le comportement de la chaîne de Markov d'ordre  $r$ . C. THIRRIOT (1985) a donné une formule générale pour l'estimation des durées moyennes des épisodes. En appelant :

$$\delta_{i,m} = \Pr \left\{ \underbrace{tjjj \dots jjj}_n \right\} \quad (i, j = 0, 1)$$

il définit la durée moyenne de l'épisode sous la forme suivante pour l'ordre  $r$  :

$$m(\tau_j) = 1 + \delta_{i,2} (1 + \delta_{i,3} (1 + \delta_{i,4} (1 \dots (1 + \delta_{i,r-1} (1 + \frac{\delta_{i,r}}{1 - \delta_{r+1}})))))) \quad (22)$$

Dans la pratique de l'application de ces différents résultats, nous nous sommes arrêtés à l'ordre  $r = 4$ . Les valeurs numériques des paramètres afférents à ces différents ordres seront présentés au chapitre suivant.

### 3.2.4. Les tendances actuelles

#### Critique des modèles de Markov appliqués à la pluviométrie

Les efforts accrus pour explorer systématiquement les possibilités des chaînes de Markov permettent d'entrevoir leur limite d'application. Ainsi, des études ont été faites pour comparer les chaînes de Markov à d'autres modèles stochastiques.

SMITH et SCHREIBER (1973) ont comparé le modèle markovien au modèle de Bernoulli. D'après leurs résultats, la comparaison laisse peu de doute sur les avantages du modèle markovien et la non validité de l'hypothèse que les averses sont des phénomènes séquentiellement indépendants.

BUIHAND (1977) a comparé les hypothèses du modèle markovien binaire, (dépendance stochastique des états), avec celles qui sont à la base du modèle de renouvellement. Ces dernières supposent que les longueurs des épisodes successifs sont indépendantes. L'idée, selon laquelle les épisodes secs et pluvieux sont des processus de renouvellement, est testée à partir du calcul des coefficients de corrélation entre les longueurs des épisodes secs et pluvieux successifs ; ces coefficients devront être nuls si l'hypothèse de départ est vérifiée. D'après les résultats de l'auteur, il n'y a pas de corrélation évidente entre les longueurs des épisodes secs et pluvieux successifs. Des variantes des lois binomiales tronquées s'ajustent bien aux longueurs des épisodes. L'auteur note, toutefois, une évidente corrélation entre les hauteurs de pluies des jours successifs dans un épisode humide. Il montre que la loi gamma s'ajuste bien à la distribution des hauteurs de pluie et qu'il n'y a pas une variation saisonnière évidente de la forme des paramètres.

En conclusion, cet auteur pense que la description des épisodes secs et pluvieux de certaines stations hollandaises par les processus de renouvellement est raisonnable. Il note cependant

que, pour les stations étrangères étudiées, et pour de grandes valeurs de  $k$ , on sous estime de manière très sérieuse la variance du nombre de jours de pluie dans une période de  $k$ -jours. Il pense enfin que des recherches supplémentaires sont nécessaires pour obtenir de meilleurs modèles pour de telles situations.

ROLDAN et WOOLHISER (1982) ont, après BUISSHAND, examiné de manière critique les performances des modèles markovien et de renouvellement. Ils ont comparé en particulier le modèle de Markov d'ordre un à un processus de renouvellement utilisant une distribution géométrique tronquée, pour les épisodes secs. Leurs résultats montrent que, pour quatre stations étudiées aux Etats-Unis, le modèle de Markov est meilleur que le modèle de renouvellement. Les auteurs signalent que ces résultats sont en contradiction avec ceux obtenus par BUISSHAND (1977). Ils indiquent que les raisons de cette différence de jugement pourraient être, entre autres, l'utilisation d'un critère de choix, basé sur la méthode d'information minimum de Akaike, au lieu d'un critère du khi-deux habituel.

BOUVIER (1983) a comparé le modèle de Markov à un modèle de Polya. D'après ses résultats, le schéma de Polya convient davantage à l'étude des séquences des jours de pluies que le processus markovien.

Plus récemment, à l'IMFT, ARNAUD (1985, communication orale) a montré que sur plusieurs stations du sud-ouest de la France l'application des modèles markoviens hybrides conduisait à des résultats meilleurs que ceux fournis par le modèle de renouvellement.

Ce survol de l'application des chaînes de Markov à l'étude des précipitations journalières, bien que très partiel et très rapide, permet de faire les remarques suivantes sur l'état de la question :

1°. L'utilisation des chaînes de Markov d'ordre supérieur à un, apporte une amélioration dans la représentation des phénomènes (BOUVIER, 1983). Mais l'ordre de la chaîne qui décrit le mieux les

les processus, varie avec la saison, (CHIN - 1977). Ces constatations sont en plein accord avec les résultats des travaux en cours à l'IMFT (THIRRIOT - AFOUDA - ARNAUD - 1985).

2°. La nécessité de prévision de plus en plus fine conduit à considérer d'autres processus stochastiques pour décrire l'évolution des séquences sèches et pluvieuses. Mais les avis sont encore contradictoires quant à la supériorité des modèles de remplacement (modèle de renouvellement avec BUISSAND - 1977 , ROLDAN et WOOLHISER - 1982, modèle de Polya avec BOUVIER - 1983) sur les modèles des chaînes de Markov. Par ailleurs, l'utilisation de ces modèles est limitée à l'étude de la variabilité dans le temps, alors que la nécessité de prendre en compte les lois physiques qui sont à l'origine de la formation de ces séquences conduit à considérer l'évolution spatiale en même temps que l'évolution dans le temps (WAYMIRE et GUPTA - 1981 , WAYMIRE et al. - 1984 , EAGLESON - 1984).

3°. Enfin, une application conséquente du modèle de Markov à l'étude des distributions stochastiques des séquences sèches et pluvieuses doit prendre en compte des paramètres météorologiques autres que la pluie : par exemple, l'ensoleillement (LESTIENNE - 1978) ou la température (RICHARDSON - 1981).

On peut donc conclure, qu'à l'heure actuelle, il n'existe pas une approche mathématique standard à la modélisation des précipitations. La difficulté semble liée à la fois à une exploitation insuffisante des possibilités des outils mathématiques disponibles et à la nature des précipitations elles-mêmes. La structure des précipitations dans différentes parties du globe peut en effet présenter des variabilités considérables. (On ne peut, par exemple, pas espérer que les précipitations dans les régions tropicales ouest-africaines présentent exactement les mêmes structures que dans le Sud-Ouest de la France). Cependant, il y a des caractéristiques communes, liées à la régularité du phénomène physique de base, qui

pourraient servir à la modélisation des dépendances stochastiques. Par exemple, la pluie est un phénomène d'espace-temps. Sa représentation mathématique dans l'espace et dans le temps nécessite, de ce fait, des concepts de la théorie des champs aléatoires. Un critère d'appréciation des modèles pourrait donc bien être la possibilité de rendre compte à la fois de la variabilité dans l'espace et dans le temps.

### Modèle des processus ponctuels

Bien que les premiers travaux sur l'étude des dépendances stochastiques des événements pluvieux aient été orientés vers la détermination de la probabilité du paramètre  $\eta_t$  qui compte le nombre de jours secs ou pluvieux dans un intervalle de temps  $(0, t)$ , (GABRIEL et NEUMANN - 1962, SMITH et SCHREIBER - 1973, GUPTA et NEUMANN - 1975), l'application systématique des chaînes de Markov a été orientée vers la détermination des durées moyennes des épisodes secs et de leurs fonctions de répartition. Cela est certainement lié aux propriétés mathématiques du processus de comptage  $\eta_t$ . En effet, d'après WAYMIRE et GUPTA (1981), bien que la succession des états  $\{ X_i \}$  soit à dépendance markovienne, le processus de comptage  $\eta_t$  n'est pas markovien ; l'utilisation du schéma markovien peut seulement permettre de déterminer sa probabilité marginale comme l'ont fait GABRIEL et NEUMANN (1962). Mais d'autres hypothèses peuvent être formulées pour étudier la probabilité marginale de  $\eta(t)$ .

Une approche consiste à considérer que les  $\eta_t$  sont des v.a. indépendantes et identiquement distribuées. Elle conduit au modèle de Bernoulli dans le cas discret (SMITH et SCHREIBER - 1973), ou au modèle de Poisson dans le cas continu (GUPTA et DUCKSTEIN - 1975).

Une autre approche, en cours de développement, consiste à s'appuyer sur les régularités physiques révélées par l'observation des événements pluvieux. C'est la démarche suivie par KAVVAS et DELLEUR (1981) qui ont introduit le modèle de NEUMANN - SCOTT pour décrire le processus de comptage  $\eta_t$ .

WAYMIRE et GUPTA (1981) ont situé ce modèle dans le cadre plus général du modèle des processus ponctuels, WAYMIRE et al. (1984) l'ont utilisé pour donner une description du champ d'intensité des précipitations dans l'espace et dans le temps. Nous présentons ci-après les idées essentielles qui sont à la base de ce modèle.

### Le modèle de Kavvas et Delleur

D'après KAVVAS et DELLEUR (1981), les modèles basés sur les processus de Markov, les processus de Poisson, comme beaucoup d'autres modèles stochastiques actuellement connus, s'appuient sur la considération que les précipitations constituent le produit final d'un processus atmosphérique complexe mais ne prennent pas en compte l'évolution spatiale ou temporelle des phénomènes physiques qui aboutissent à ce produit final. Ils proposent d'utiliser une adaptation du modèle de Neyman-Scott, introduit en 1958, sous la forme d'une approche statistique en cosmologie, pour la description de la distribution spatiale des galaxies.

D'après le modèle de Kavvas et Delleur, l'évolution des précipitations dans le temps est considérée comme un phénomène hiérarchisé où l'évènement pluvieux proprement dit se trouve au niveau inférieur. Cependant, pour simplifier, les auteurs considèrent que l'adaptation du modèle de Neyman-Scott pour l'étude des phénomènes pluvieux présente seulement les deux niveaux suivants :

- a). le mécanisme générateur de pluie (M G P) correspondant à un ensemble de "noyaux pluvieux", formant un front. Les "noyaux pluvieux" sont des phénomènes atmosphériques de durée de vie de quelques minutes à plusieurs dizaines de minutes et d'extension spatiale de  $10-50 \text{ km}^2$ . (On verra plus loin que les fronts eux-mêmes sont organisés en amas, formant un plus grand ensemble : petite échelle ou mésoéchelle).
- b). la succession des évènements pluvieux dans le temps constituant le second niveau.

L'ensemble des évènements pluvieux produit par un même M G P est appelé "amas". En tenant compte de la mémoire des cyclones dans la région étudiée, les auteurs admettent que deux amas d'évènements

pluvieux peuvent se superposer et avoir en commun un certain nombre de pluies. Pour les auteurs, c'est un fait météorologique bien connu que les précipitations s'organisent dans le temps sous forme d'amas et le modèle stochastique, capable de rendre compte de cette forme d'organisation, est le modèle de Neyman-Scott. L'application de ce modèle à l'étude des précipitations journalières s'appuie sur les concepts suivants :

- 1°. la durée d'un M G P qui détermine la durée de vie de l'amas et la dépendance des événements pluvieux ;
- 2°. la structure de l'amas qui est définie par le nombre de pluies et leurs positions dans le temps, à l'intérieur de l'amas.

Ces concepts sont définis par cinq hypothèses qui permettent de construire le modèle en termes de dépendance entre trois variables aléatoires :

- une v.a.  $\Gamma_u$  pour le comptage de l'occurrence des M G P dans un intervalle de temps  $(0, t)$  ;
- une v.a.  $v(u)$  qui compte le nombre de pluie dans un amas ayant son origine au point  $u$  de l'axe des temps ;
- une v.a.  $\gamma$  qui définit la position de la pluie à l'intérieur de l'amas

Le problème de la modélisation consistera alors à trouver une liaison entre les trois variables. D'après les auteurs, la v.a. qui intéresse l'hydrologue est le processus de comptage  $\eta_t$ , le problème consiste donc à donner la description de  $\eta_t$  en fonction des trois paramètres ci-dessus. Comme le modèle de Neyman-Scott rentre dans le cadre des processus ponctuels dont l'exemple le plus usuel est le processus de Poisson, on obtient une formulation explicite du problème en supposant que les v.a. ci-dessus obéissent à des lois de Poisson.

A la suite d'une vérification sur les données de six stations en Indiana (U S A), les auteurs ont conclu que le modèle peut être utilisé dans la pratique, seulement dans le cas où les occurrences de pluies constituent un phénomène stationnaire, mais que des recherches supplémentaires étaient nécessaires pour explorer ses possibilités et ses limites.

WAYMIRE, GUPTA et RODRIGUEZ-ITURBE (1984) proposent une version différente du même modèle de Neyman-Scott et l'appliquent à l'étude des intensités du champ de précipitations. L'idée de base étant toujours d'incorporer les structures physiques que révèle l'observation empirique dans la modélisation du phénomène, ils ont précisé les hypothèses présentées par KAVVAS et DELLEUR (1981) et les ont complétées par une sixième hypothèse sur la représentation de la pluie au niveau du sol.

Le modèle ainsi complété est encore au niveau de déductions théoriques (puisque'il n'a encore donné lieu à aucun essai d'identification sur des données d'observation réelles). Nous ne nous étendons donc pas sur les expressions mathématiques des divers paramètres introduits mais d'après les auteurs, le modèle de Neyman-Scott appliqué à l'étude du champ de précipitations semble bien prometteur mais il est encore à ses débuts.

La caractéristique essentielle du modèle est qu'il s'efforce de traduire l'évolution des structures physiques qui conditionnent la formation des précipitations. Le point faible du modèle est la nécessité d'imposer à chaque étape une hypothèse simplificatrice à l'évolution de ces structures physiques ; ainsi par exemple, tous les paramètres essentiels ( $\Gamma$ ,  $v(u)$  et  $\gamma$ ) dans l'étude de WAYMIRE et al. (1984) sont des processus ponctuels qui sont statistiquement indépendants et obéissent à la loi de Poisson.

Le modèle des processus ponctuels ainsi présenté est continu dans l'espace et dans le temps. Il est permis alors de le situer par rapport à un modèle de Markov continu.

On a indiqué plus haut, (Ch. II), que la théorie des processus de Markov est basée sur l'ordre naturel des nombres sur l'axe des réels, ce qui fait qu'il est possible de définir le passé, le présent et le futur. Mais dès lors que l'on considère les dimensions spatiales supérieures à un, cet ordre trivial est perdu, ce qui peut conduire à une difficulté de généralisation des processus au champ aléatoire à plusieurs dimensions d'espace. Cependant, cette difficulté s'estompe,

lorsque le phénomène physique considéré possède une direction privilégiée d'évolution. C'est par exemple le cas de certains phénomènes synoptiques dont l'évolution provoque des perturbations orageuses, en milieu tropical africain. Nous étudierons au chapitre IV, le cas particulier du Front-Intertropical dont le déplacement majeur est l'oscillation sud-nord-sud, suivant le balancement apparent du soleil au niveau annuel. Toutefois, on peut déjà faire les remarques suivantes :

- l'hypothèse d'indépendance des paramètres (qui ne nous semble pas naturel pour le phénomène physique étudié) sera relaxée ;

- de même, la nécessité d'imposer à chaque étape de l'évolution une nouvelle hypothèse ne se fera pas sentir dès lors que les processus de Markov considérés ne sont pas homogènes, mais obtenus comme solution de système d'équations différentielles stochastiques présentées au chapitre précédent ;

- la modélisation des phénomènes hydrologiques par les équations différentielles stochastiques possède, à notre avis l'avantage de ne pas altérer la dynamique du phénomène physique et de permettre une description continue de l'évolution des processus qui déterminent l'état du système ainsi que les divers paramètres qui dépendent de cet état, à partir d'une équation de Fokker - Planck - Kolmogorov associée.

### 3.3. PROCESSUS DE MARKOV APPLIQUES A LA MODELISATION DES BASSINS VERSANTS

Les propriétés stochastiques des systèmes hydrologiques sont prises en compte dans bon nombre d'études récentes. On retrouve en effet, dans la littérature, différents modèles stochastiques qui visent à la description des structures du débit à l'exutoire du bassin versant. Dans la plupart de ces études, les structures des précipitations sont recherchées indépendamment et décrites par un processus stochastique approprié, tandis que le couplage avec la fonction de sortie se fait dans une seconde étape, à travers une transformation déterministe.

WAYMIRE et GUPTA (1981) indiquent les références des études qui ont suivi cette démarche. D'autres études (les plus nombreuses) ont considéré les débits d'écoulement à la sortie des bassins versants comme des séries temporelles et ont concentré leurs efforts sur la modélisation des processus A R M A. YAKOWITZ (1979) indique de nombreuses références sur l'utilisation des modèles A R M A pour l'étude des débits. Tout récemment, THIRRIOT (1984) a développé une méthode de passage des modèles de Markov aux modèles autorégressifs. Mais, d'après YAKOWITZ (1979), les modèles (ARMA) présentent plusieurs faiblesses parmi lesquelles on peut citer :

- L'impossibilité de représenter les débits extrêmes.

Du point de vue mathématique, les modèles A R M A sont des modèles linéaires, invariants dans le temps, qui se déduisent à partir des équations aux différences. Du point de vue physique, le terme de moyenne mobile est induit par l'évolution des précipitations à l'amont. La partie autorégressive doit donc traduire l'évolution du système, c'est-à-dire l'évolution des différentes fonctions de production, de transformation et de propagation. On sait, par exemple, que cette dernière fonction est gouvernée par des équations aux dérivées partielles non linéaires. En conséquence, l'approximation linéaire supposée par la partie A R des modèles A R M A est physiquement inadéquat.

Compte tenu des faiblesses relevées pour les modèles A R M A, YAKOWITZ (1979 - a) propose de les remplacer par des modèles non paramétriques. Le fondement de ces modèles est présenté dans YAKOWITZ (1979 - b), YAKOWITZ (1984), YAKOWITZ et SZIDAROWSKI (1983), COLLOMB (1984 a,b). Mais, d'une part les modèles non paramétriques sont des modèles purement probabilistes qui ne prennent donc pas en compte la dynamique du système physique que l'on cherche à décrire ; d'autre part, d'après COLLOMB, les modèles non paramétriques ne peuvent assurer une certaine précision que si le nombre total d'éléments qui compose la famille des processus stochastiques à étudier n'est pas très grand, c'est-à-dire si l'on peut disposer d'un nombre d'éléments permettant de s'en approcher le plus près possible. Or, les débits à

l'exutoire d'un bassin versant sont des phénomènes naturels et, en tant que tels, appartiennent à une famille infinie, tandis que le nombre d'observations, dans le meilleur des cas, reste limité à quelques dizaines d'années.

Pour ces raisons, nous pensons que les modèles non paramétriques ne constituent pas les modèles appropriés pour l'étude des débits de bassins versants. COLLOMB (1984 - a) indique d'ailleurs que "cette méthode de prédiction peut aider (seulement) dans le choix d'un modèle paramétrique pour les processus observés".

La démarche proposée dans AFOUDA (1981, a,b ; 1982) et rapportée en détail au chapitre II consiste à considérer le bassin versant comme un système dynamique décrit par un système d'équations différentielles stochastiques. UNNY (1984), UNNY et KARMESHU (1984) ont proposé un modèle de bassin versant basé sur les mêmes principes. Mais à la différence du système décrit au chapitre II et qui utilise les équations différentielles stochastiques au sens de Ito, le modèle de UNNY et KARMESHU est basé sur les équations différentielles stochastiques pris au sens de Stratonovich. La suite de ce paragraphe sera consacrée à la présentation de cette deuxième variante.

### 3.3.1. Le modèle du bassin

On considère le cas d'un réservoir conceptuel de surface  $A_s$  situé à l'exutoire d'un bassin de surface totale  $A_{so}$ . Il est caractérisé par :

a). la relation qui lie le stockage et le débit de sortie du réservoir :

$$y = a s \quad (23)$$

où  $y$  est la sortie du réservoir conceptuel au temps  $t$ , par unité d'aire du bassin versant, et  $s$  est le stockage,  $a$  est un coefficient de stockage.

b). la relation qui lie le stockage et la surface du bassin : il s'écrit sous la forme :

$$A_s / A_{s0} = u_1 (s) = c + e s \quad (24)$$

où  $c$  et  $e$  sont des coefficients.

Le bilan des entrées et sorties sur le bassin conduit à l'équation de continuité suivante :

$$ds/dt = (1 - u_1) (1 - u_2) P + (P - E) u_1 - a s \quad (25)$$

où  $P$  désigne la précipitation par unité de surface du bassin et par unité de temps.  $u_2$  est un facteur qui tient compte de toutes les soustractions d'eau autres que l'évaporation,  $E$  est l'évaporation par unité de temps et par unité de surface. En tenant compte de (23) et (24), l'équation (25) s'écrit sous la forme :

$$dy/dt = a P - (1 - u_1) a u_2 P - a u_1 E - a y \quad (26)$$

En considérant la précipitation  $P$ , le facteur  $u_2$  et l'évaporation comme des quantités aléatoires, les auteurs posent :

$$\begin{aligned} P &= \bar{P} + P' \\ u_2 &= \bar{u}_2 + u_2' \\ E &= \bar{E} + E' \end{aligned} \quad (27)$$

où les premières valeurs sont des moyennes et les secondes traduisent les fluctuations aléatoires.

En substituant dans l'équation (26), ils obtiennent après quelques transformations algébriques, la forme suivante :

$$dy/dt = f(y, t) + G(y, t) w(t) \quad (28)$$

avec

$$w^T(t) = [ P' , u_2' , E' ]$$

$$f(y,t) = a \bar{P} - (1 - u_1) a \bar{u}_2 \bar{P} - a u_1 E - a y$$

et

$$G(y,t) = \begin{bmatrix} (1 - \bar{u}_2 + \bar{u}_2 u_1) a \\ - (1 - u_1) aP \\ - a u_1 \end{bmatrix}$$

En considérant  $w(t)$  comme un bruit blanc et en introduisant

$$d\beta = w(t) dt$$

ils obtiennent l'équation d'évolution du bassin sous la forme :

$$dy = f(y,t) dt + G(y,t) d\beta \quad (29)$$

### 3.3.2. Interprétation de l'équation et choix du modèle

Le choix du modèle est basé sur des considérations physiques et sur l'interprétation mathématique de l'équation différentielle obtenue.

Les auteurs indiquent que dans le processus physique considéré, les parties stochastiques telles que  $P'$ ,  $u_2'$  et  $E'$  sont toujours corrélées, donc la modélisation par le bruit blanc n'est qu'une approximation du comportement de la partie stochastique.

En considérant le schéma d'intégration de la partie stochastique sous la forme :

$$I_\lambda = \int G(y,t) d\beta$$

UNNY (1984, p. 362) indique que l'espérance mathématique de l'intégrale  $I_\lambda$ , considérée au sens de Ito est nulle, compte tenu de l'indépendance de  $G(y,t)$  et de l'accroissement du mouvement brownien. Il indique que l'intégrale de Strotonovich est symétrique et que cela traduit une corrélation implicite entre  $G(y,t)$  et le mouvement brownien. UNNY (1984), UNNY et KARMESHU (1984) indiquent alors que l'interprétation

de l'e.d.s. qui décrit le bassin versant doit se faire au sens de Stratonovich. Mais lorsque  $G(y,t)$  est constant, les interprétations au sens de Ito et au sens de Stratonovich sont équivalentes.

UNNY a examiné des schémas numériques applicables pour l'intégration des e.d.s. Il montre que :

- la méthode d'Euler est en agrément avec la définition de l'intégrale de Ito ,
- la méthode de Runge-Gutta-Gill (R K G) correspond à la définition de l'intégrale de Stratonovich,
- en comparant les résultats de l'intégration numérique avec des solutions théoriques connues, il conclut que la méthode de RKG donne des erreurs absolues plus petites. Tant qu'une évaluation intermédiaire de la fonction est considérée dans le schéma d'intégration, les résultats obtenus sont en accord avec la définition de Stratonovich.

### 3.3.3. Discussion

La remarque importante à faire, à notre avis, est que les résultats de la théorie des équations différentielles stochastiques sont démontrés pour la topologie de la convergence en moyenne quadratique (topologie de  $L^2$ ).

L'interprétation de UNNY, qui conduit à une valeur moyenne nulle pour l'intégrale de Ito, ne se vérifie que dans le cas de la topologie de la convergence en moyenne (topologie de  $L^1$ ).

L'expression obtenue plus haut (ch. II, eq. 62), à partir des travaux de JAWZINSKI (1970) , ASTROM (1970), montre que l'intégrale de Ito, prise au sens de la convergence en moyenne quadratique, n'est pas nulle mais il fait intervenir un terme supplémentaire qui décrit la variance du processus. En somme, on peut écrire pour le cas considéré :

$$I_{\lambda}(v) = I_S(v) \pm \text{var}(v) \quad (30)$$

$I_S$  étant l'intégrale stochastique de Stratonovich et ce résultat est valable pour des cas plus généraux (voir chapitre II).

Le schéma symétrique introduit par Stratonovich vise à éliminer cette variance. (On rappelle en effet que ce schéma a été introduit en automatisme et pour les problèmes de filtrage). En conséquence, la corrélation implicite, entre l'intégrant et l'intégrateur, évoquée par les auteurs, ne semble pas apparente,

Mais alors, la similitude entre le schéma numérique de Runge - Kutta - Gill et le schéma d'intégration de Stratonovich peut-il servir de critère de choix ? La réponse doit faire intervenir, à notre avis, un critère de choix du mode de convergence (en terme plus précis, le choix d'une topologie commune),

Compte tenu de ce qui précède, il apparaît clairement que la préférence donnée à l'une ou à l'autre interprétation dépendra des propriétés que l'on cherche à modéliser dans le milieu physique. Comme le souligne H. POINCARÉ (dans ses "Dernières Pensées"), *"les faits sont susceptibles de plusieurs interprétations, parce qu'ils ne sont jamais qu'imparfaitement connus. Parmi ces interprétations, il y en a qui sont plus vraisemblables que d'autres. Malheureusement, l'appréciation de la vraisemblance est une chose délicate, fugitive, éminemment subjective, sur laquelle tous les bons esprits ne peuvent toujours s'accorder"*.

#### 3.4. APPROXIMATION FONCTIONNELLE DE L'EQUATION DE FOKKER - PLANCK - KOLMOGOROV.

Dans leurs études, UNNY (1984), UNNY et KARMESHU (1984) ont examiné, à partir de cas simples d'une équation à coefficient constant, plusieurs procédures de solution théorique du système qu'ils ont proposé. Mais la réalité des systèmes naturels est bien plus complexe. Pour l'étude de l'évolution des paramètres essentiels, le fait que la solution de l'équation d'état est un processus de Markov permet de donner une description plus complète du système à partir de l'équation de FOKKER - PLANCK - KOLMOGOROV. Malheureusement, ces équations n'ont de solution explicite que pour des cas très particuliers que l'on ne retrouve pas souvent dans les problèmes pratiques posés par la nature.

On est conduit donc à rechercher une solution théorique approchée mais suffisamment générale pour être applicable à des problèmes concrets comme ceux que pose l'étude du fonctionnement hydrodynamique des bassins versants.

### 3.4.1. Idée de base pour le choix de la méthode d'approximation

Considérons une description du système sous la forme :

$$dy = f(y,t) dt + g(y,t) d\beta \quad (31)$$

où (31) est interprétée au sens de Ito. Alors, les équations de Fokker-Planck-Kolmogorov associées sont de la forme :

- équation directe :

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \text{Pr}}{\partial t} (y,t ; \xi, s) &= \frac{\partial}{\partial y} [ f(y,t) \cdot \text{Pr}(y,t ; \xi, s) ] \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [ g^2(y,t) \cdot \text{Pr}(y,t ; \xi, s) ] \end{aligned} \quad (32-a)$$

- équation inverse :

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \text{Pr}}{\partial s} [y,t ; \xi, s] &= f(\xi, s) \frac{\partial}{\partial \xi} \text{Pr}(y,t ; \xi, s) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^2(\xi, s) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \text{Pr}(y,t ; \xi, s) \end{aligned} \quad (32-b)$$

où  $\text{Pr}(y, t ; \xi, s)$  est la probabilité conditionnelle de  $y(t)$  si  $\xi(s)$ .

Les propriétés mathématiques de ces équations sont discutées plus haut. On rappelle ici que la condition initiale qui leur est associée est donnée par :

$$\lim_{t \rightarrow s} \text{Pr}(y, t ; \xi, s) = \delta(y - \xi) \quad (33)$$

L'idée de base est de ramener la recherche de solution au problème de l'approximation de la solution d'une équation aux dérivées partielles régissant l'évolution d'une densité de probabilité :

$$\frac{\partial \text{Pr}(y, t)}{\partial t} = \mathcal{L}[\text{Pr}]$$

La démarche habituelle dans ce cas est celle basée sur les méthodes de résidus pondérés dont la méthode des moindres carrés ou la méthode de Galerkin constituent des exemples. Elles consistent à considérer, dans un espace de fonction de carré sommable dans le domaine  $\Omega_y$  formé par les  $y$ , la solution approchée  $\text{Pr}_0$  de  $\text{Pr}$  sous la forme :

$$\text{Pr}(y, t) \approx \text{Pr}_0 = \sum_{k=1}^m a_k(t) H_k(y) \quad (34)$$

où les  $H_k(y)$  forment un ensemble de fonctions de base linéairement indépendantes et les  $a_k(t)$  sont solutions d'un système d'équations différentielles ordinaires.

En effet, la substitution de  $\text{Pr}_0(y, t)$  dans l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov fera apparaître des résidus :

$$r_0(\text{Pr}_0) = \frac{\partial \text{Pr}_0}{\partial t} - \mathcal{L}[\text{Pr}_0] \quad (35)$$

Ces résidus sont une mesure du degré avec lequel la fonction  $\text{Pr}_0(y, t)$  satisfait à l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov et aux conditions initiales associées.

Si les fonctions  $H_k$  sont choisies convenablement, on peut espérer qu'une augmentation de leur nombre entraînera une diminution de la valeur des résidus. Dans le cas idéal où  $\text{Pr}(y, t) = \text{Pr}_0(y, t)$ ,  $r_0(\text{Pr}_0)$  doit être identiquement nul. Pour se rapprocher de ce cas idéal, on peut imposer que les intégrales sur  $\Omega_y$  des produits des résidus par des fonctions poids appropriées soient nulles.

Dans la méthode de Galerkin, les fonctions poids coïncident avec les  $H_k(y)$ . La méthode de Galerkin peut donc être interprétée comme une méthode d'orthogonalisation par rapport à tous les éléments du système  $H_k$ .

Dans la méthode des moindres carrés, les fonctions poids sont choisies égales à  $\partial r_o / \partial a_k$ . Ce qui revient à calculer :

$$\min \int_{\Omega_y} r_o^2 dy \quad (36)$$

en fonction des variables  $a_k$ . Cette démarche fournit, on le voit aisément, une méthode pour déterminer les  $a_k$  et rendre l'approximation optimale.

On est donc conduit à la minimisation du produit scalaire :

$$\langle r_o, r_o \rangle = \int_{\Omega_y} \left( \frac{\partial Pr_o}{\partial t} - \mathcal{L}[Pr_o] \right)^2 dy \quad (37)$$

On voit en considérant (34) et (37) que, lorsque les fonctions  $H_k(y)$  ne forment pas une base orthonormée, cette démarche conduira à inverser une matrice  $m \times m$  pour déterminer les coefficients  $a_k$ . Le choix de la fonction de base revêt donc une importance primordiale.

Une étude antérieure de l'O R S T O M (BRUNET-MORET, 1971) sert de guide pour le choix de la fonction de base appropriée. En effet, BRUNET-MORET a examiné les possibilités d'utilisation des polynômes orthogonaux dans le développement limité des fonctions de répartition des lois de probabilités. De tous les polynômes orthogonaux examiner par cet auteur, seuls les polynômes d'Hermite semblent plus appropriés. Ce résultat nous a conduit en 1981 (AFOUDA-1981) à choisir les polynômes d'Hermite comme fonction de base de l'approximation de l'équation de Fokker - Planck - Kolmogorov. Plus récemment, KREE et SOLZE (1983) ont développé une méthode d'approximation de la solution de l'équation de Fokker - Planck - Kolmogorov par les polynômes d'Hermite à plusieurs variables normalisées.

### 3.4.2. Utilisation des polynomes d'Hermite

Les polynomes d'Hermite sont des polynomes orthogonaux associés à la fonction de densité de la loi normale :

$$\theta(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \quad (38)$$

sur  $(-\infty, \infty)$ . Ils sont donnés par la fonction génératrice :

$$H_n(u) = (-1)^n e^{u^2/2} \frac{d^n}{d u^n} (e^{-u^2/2}). \quad (39)$$

En posant  $u = (y - E(y)) / \sigma$ , on peut considérer le développement en polynomes d'Hermite de la densité de probabilité sous la forme suivante :

$$Pr(u, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} \left[ 1 + \sum_{i=1}^m A_i H_{i+1}(u) \right] \quad (40)$$

où les  $A_i$  sont donnés par :

$$A_i = \sum_{j=0}^M (-1)^j \frac{\mu_{i+1-2j}}{j! (i+1-2j)! 2^j}$$

avec les  $\mu$  représentant les moments de la variable  $u$ , et  $M$ , la partie entière de  $(i+1)/2$ . On a :

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = \mu_3/3!$$

$$A_3 = (\mu_4 - 3\mu_2^2) / 4! \quad \text{etc.,}$$

D'après BRUNET-MORET (1971), ce développement est connu sous le nom de développement de Gram-Charlier.

Dans le contexte de l'approximation de l'équation de Fokker - Planck - Kolmogorov, les coefficients  $A_i$  doivent être déterminés de façon à approcher au mieux, au sens du critère d'optimalité défini plus haut, la solution de cette équation aux dérivées partielles. Compte

tenu des propriétés des polynômes d'Hermite, les coefficients du développement de Gram-Charlier répondent à ce critère.

La relation (40) donnant la densité de probabilité montre bien que les calculs des moments d'ordre un ou deux feront intervenir les moments d'ordre supérieur à un ou deux. On retrouve ainsi les résultats déjà obtenus au chapitre II.

Les résultats d'application pratique de cette méthode seront analysés au chapitre suivant.

### 3.5. CONCLUSION

L'examen des modèles antérieurs utilisés pour la modélisation des bassins versants permet de se rendre compte que :

- certains travaux récents, (UNNY - 1984 , UNNY et KARMESHU-1984) considèrent le fonctionnement hydrodynamique des bassins versants sous l'aspect de l'évolution des processus stochastiques. La description des relations entre l'entrée et la sortie se fait sous la forme de système d'équations différentielles stochastiques. Le modèle mathématique présenté au chapitre II et proposé de manière indépendante est analogue à ce modèle ;

- de nombreux travaux ont été consacrés à la description de la structure stochastique de la fonction d'entrée. Mais ces travaux partent des hypothèses implicites suivantes :

a) les précipitations à l'entrée du bassin versant sont le résultat de phénomènes physiques complexes qui leur confèrent un comportement stochastique ;

b) les chaînes de Markov discrètes permettent de rendre compte de la structure stochastique des dépendances observées dans les séries de précipitations journalières.

En tenant compte du fait que la probabilisation des espaces d'entrée conduit à une probabilisation naturelle des espaces d'état et de sortie, nous accorderons dans la suite de ce mémoire une importance toute particulière à la modélisation de ces fonctions d'entrée. Ce faisant, on se situe dans le cadre des travaux entrepris à l'I M F T sous la direction de C. THIRRIOT.

- les modèles récents qui décrivent les fonctions d'entrée s'efforcent de rendre compte de la structure des phénomènes physiques qui déterminent les précipitations (KAVVAS et DELLEUR - 1981, WAYMIRE et GUPTA - 1981, WAYMIRE et al. - 1984). Nous montrerons, dans le chapitre suivant, comment le modèle proposé permet de tenir compte de ces exigences.

---

1871  
No. 100

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- ADAMOVSKI K. et SMITH A.F. (1972)  
Stochastic generation of Rainfall  
Journ. Hydr. Divis. - Proc. Am. Soc. Civ. Eng.,  
HY-11, novembre, pp. 1935-1945
- AFOUDA A. (1981-a)  
Quelques considérations théoriques sur l'évolution des hauteurs d'eau dans le lac Nokoué,  
Sem. Nat. sur "L'environnement et pêche lagunaire" organisé conjointement par l'INFOSEC, le MESRS et la FPN 18-23 mai (11 pages dactylographiées) Cotonou, Bénin,
- AFOUDA A. (1981-b)  
Les modèles pluie-débit en milieu tropical urbain.  
Rapp. manuscrit Univers. Nat. du Bénin 62 pages, Cotonou, Bénin
- AFOUDA A. (1982)  
Quelques aspects climatologiques de l'élaboration des systèmes de drainage en milieu urbain.  
Acte de la Conférence sur le Climat en Afrique - Harusha 25-30 janvier - Publ. WMO - OMM n° 596  
Secrétariat OMM - Genève (Suisse)
- AFOUDA A., ARNAUD M. (1985)  
Aspect stochastique de la distribution journalière des précipitations en Afrique de l'Ouest,  
Publ. Inter. IMFT - CT n° 612 - février
- ARNAUD M. (1984)  
La pluviométrie toulousaine vue à travers les processus de Markov,  
Rapport Interne IMFT - CT n° 598 - février
- ASTROM J.K. (1970)  
Introduction to stochastic control theory.  
Academic Press, New York, London (299 pages)
- BOUVIER C. (1983)  
Etude des effets de dépendance dans une série chronologique. Application à l'étude des séquences de jours de pluie.  
Cah. ORSTOM, sér. Hydrol., vol. XX n° 2, pp. 79-116
- BRUNET-MORET Y. (1971)  
Fonction de distribution en développement limité.  
Cah. ORSTOM, sér. Hydrol., vol. VIII, n° 1, pp. 3-33

- BUISSHAND T.A. (1977)  
Stochastic Modelling of daily rainfall sequences.  
Mededelingen Landbouwhogeschool, Wageningen Nederland  
(211 pages)
- CHIN H.E. (1977)  
Modeling Daily Precipitation occurrence Process with  
Markov chain.  
Water Res. Res. vol. 13 n° 6 , décembre pp. 949-956
- COLE J.A. and SHERRIFF J.D.F. (1972)  
Some Single and multisite model of rainfall within discrete  
time increments.  
Journ. of Hydrol. 17, pp. 97-113
- COLLOMB G. (1984-a)  
Prédiction non paramétrique : étude de l'erreur quadratique  
du prédictogramme.  
Laboratoire de Stat. et Proba. ERA-CNRS n° 591 - U P S  
Toulouse (33 pages)
- COLLOMB G. (1984-b)  
Non parametric time series analysis and prediction : uniform  
almost sure convergence of the window and K-NN auto-  
regression estimates.  
Lab. Stat. et Proba. ERA-CNRS n° 591 , U P S Toulouse  
(9 pages)
- DIEUDONNE J. (1982)  
Mathématiques vides et mathématiques significatives.  
Dans "Penser les mathématiques" Edit, du Seuil pp. 15-38
- EAGLESON P.S. (1984)  
The distribution of catchment coverage by stationary  
rainstorm.  
Water Res.Res. vol.20, n° 5, may , pp. 581-590
- FINKELSTEIN J. (1967)  
Cité par COLE et SHERRIFF (1972)
- GABRIEL K.R. and NEUMANN J. (1962)  
A Markov chain model for daily rainfall occurrence at  
Tel Aviv.  
Quarterly Journ. of the Roy. Meteo. Soc., 88, pp.90-95
- GATES P. and TONG H. (1976)  
A Markov modeling to some weather data.  
Journ. of Appl. Meteo, vol. 15 , novembre, pp. 1145-1151

- KAVVAS M.L. and DELLEUR J.W. (1981)  
A stochastic cluster model of daily rainfall sequences.  
Water Res.Res., vol.17, n° 4, august, pp. 1151-1160
- KEBAILI-BERGAOUI Z. (1983)  
Contribution à l'étude statistique de la pluie dans la  
région de Tunis.  
Thèse de Docteur-Ingénieur - INP Toulouse, octobre (134 p.)
- KREE P. et SOIZE C. (1983)  
Mécanique aléatoire  
Dunod édit. (638 pages)
- JAZWINSKI A.H. (1970)  
Stochastic process and filtering theory.  
Academic Press, New York and London (376 pages)
- LAWRENCE E.N. (1954)  
Cité par COLE et SHERRIFF (1972)
- LESTIENNE R. (1978)  
Modèle markovien simplifié de la météorologie à deux états.  
L'exemple d'Odeillo.  
La Météorologie 12 , 53
- LESTIENNE R. , BOIS Ph. et OBLED Ch. (1979)  
Analyse temporelle et cartographie de la matrice stochas-  
tique pour le modèle markovien dans le midi de la France.  
La Météorologie VI° série n° 17 , juin
- LONGLEY R.W. (1953)  
Cité par COLE ET SHERRIFF (1972)
- MEDI J. (1976)  
A Markov chain model for the occurrence of dry and wet days,  
Indian J. Meteo. Hydrol. Geophys. 27,4,pp. 431-435
- POINCARÉ H. (1902)  
La Science et l'Hypothèse.  
Flammarion, Paris (nouvelle édition - 1968)
- POINCARÉ H. (1913)  
Dernières pensées  
Flammarion - Paris
- RICHARDSON C.W. (1981)  
Stochastic Simulation of Daily Precipitation Temperature and  
Solar Radiation.  
Water Res.Res. vol.17, n° 1, feb., pp. 182-190

- ROLDAN J. et WOOLHISER D. (1982)  
A stochastic daily precipitation model. A comparison of occurrence processes.  
Water Res.Res. vol. 18, n° 5, oct., pp. 1451-1459
- SMITH R.E. and SCHREIBER H.A. (1973)  
Point Process of seasonal thunderstorm rainfall Distribution of Rainfall event.  
Water Res.Res. vol.9, n° 4, aug., pp. 871-884
- TAKACS L. (1960)  
Stochastic Processes  
Methuen and Co Ltd and Science Paperbacks, New York
- THIRRIOT C. (1983-a)  
Etude de la variabilité des séries suivant une chaîne de Markov binaire.  
Rapp. Interne IMFT CT n° 584 , juillet
- THIRRIOT C. (1983-b)  
De l'intérêt des chaînes de Markov d'ordre supérieur dans la simulation de la pluviométrie.  
Rapp. Interne IMFT - CT n° 586 , juillet
- THIRRIOT C. (1983-c)  
Matrice de Markov ternaire pour une schématisation naïve de la dispersion turbulente.  
Rapp. Interne IMFT CT n° 589 , octobre.
- THIRRIOT C. (1984-a)  
Note sur le degré de liberté des chaînes de Markov d'ordre supérieur.  
Rapp. Interne IMFT CT n° 600 , mai
- THIRRIOT C. (1984-b)  
La sécheresse à l'ombre de Markov  
Rapp. Interne IMFT CT n° 601 (décembre)
- THIRRIOT C. (1985-a)  
Retour sur le calcul des durées moyennes d'épisodes dans les chaînes de Markov discrètes d'ordre supérieur.  
Rapp. Interne IMFT , CT n° 609 janvier
- THIRRIOT C. (1985-b)  
Confrontation de modèles de renouvellement et de chaînes de Markov discrètes pour la simulation de la pluie.  
Rapp. Interne IMFT, CT n° 610 janvier.

- THIRRIOT C. et KEBAILI-BERGAOUI Z. (1983)  
Le climat tunisois vu à travers les processus de Markov.  
Rapp. Interne IMFT, CT n° 585
- THIRRIOT C. , ARNAUD M. et KEBAILI-BERGAOUI Z. (1984)  
Modèle de simulation pluviométrique à chaîne de Markov  
saisonnnière multiclasse du premier ordre.  
Journées d'étude de la S.H.F. sur les Précipitations atmos-  
phériques, 2 et 3 mai.
- THIRRIOT C. , ARNAUD M. et KEBAILI-BERGAOUI Z. (1984)  
Sur un algorithme markovien de la simulation des périodes  
de fortes pluies et de sécheresses.  
Rapp. Interne IMFT CT n° 601 (juillet) et  
5° Conf. Inter. sur la Planification et Gestion des Eaux  
Athènes (octobre).
- THIRRIOT C. , AFOUDA A. , ARNAUD M. (1985)  
Modèle de simulation pluviométrique markovien discret et  
hybride comme outil de management hydraulique  
(à paraître)
- TONG H. (1975)  
Determination of the order of a Markov chain by Akaike's  
information criterion.  
Journ. App. Prob. 12, pp. 488-497
- UNNY T.E. (1984)  
Numerical Integration of Stochastic Differential Equation  
in Catchment Modeling.  
Water Res.Res. vol. 20 , n° 3 , march , pp. 360-368
- UNNY T.E. , KARMESHU (1984)  
Stochastic Nature of outputs from conceptual reservoir model  
cascades.  
Journ. of Hydrology , 68 , pp. 161-180
- WAYMIRE E.D. and GUPTA V.K. (1981)  
The Mathematical Structure of Rainfall Representations.  
Water Res.Res. vol.17, n° 5, oct., pp. 1261-1294
- WAYMIRE E.D., GUPTA V.K. , RODRIGUEZ-ITURBE I. (1984)  
A spectral theory of rainfall intensity at the Meso- $\beta$ -Scale,  
Water Res.Res. vol. 20, n° 10 , oct. , pp. 1453-1465
- YAKOWITZ S.I. (1979-a)  
A Nonparametric Model for Daily River flow.  
Water Res.Res. vol.15, n° 5, oct., pp. 1036-1043

- YAKOWITZ S.I. (1979-b)  
Nonparametric estimation of Markov transition functions.  
The Annals of Statistics, vol.7, n° 3, pp. 671-679
- YAKOWITZ S.I. and SZIDAROVSKY F. (1983)  
A comparison of Kriging with nonparametric regression methods.  
Preprint, Depart. of System, and Industr. Eng. Univ. of  
Arizona, Tucson, Arizona 85721
- YAKOWITZ S.I. (1984)  
Nonparametric Density, Estimation, Prediction, and Regression for Markov Sequences.  
Preprint, University of Arizona, System and Industrial Engineering, Tucson, Arizona 85721.
-

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



CHAPITRE IVASPECTS DYNAMIQUES DE LA DISTRIBUTION JOURNALIEREDES PRECIPITATIONS EN MILIEUTROPICAL OUEST - AFRICAIN,

	Pages
<u>4.1.</u> <u>INTRODUCTION</u>	4.1
<u>4.2.</u> <u>DESCRIPTION DU CYCLE DE L'EAU</u>	4.2
4.2.1. Le cycle de l'eau et la répartition de l'énergie	4.2
4.2.2. Essai de description analytique de l'évolution du cycle de l'eau	4.6
4.2.3. Le modèle discret pour l'étude des précipitations journalières	4.16
<u>4.3.</u> <u>APPLICATION A L'ETUDE DE LA DISTRIBUTION DES SEQUENCES SECHES ET PLUVIEUSES</u>	4.22
4.3.1. Présentation des stations étudiées	4.22
4.3.2. Présentation des résultats de calculs empiriques	4.23
4.3.3. Présentation des résultats de l'identification markovienne	4.27
4.3.4. Influence des effets d'échelle	4.31
<u>4.4.</u> <u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u>	4.41

#### 4.1. INTRODUCTION

Nous avons admis, dès l'introduction à ce mémoire, que la réalité physique se présente sous la forme d'une structure hiérarchisée. L'objectif dans ce chapitre est de montrer que le phénomène d'entrée dans les systèmes hydrologiques, définis comme un ensemble de structures en inter-relations dans le cadre du bassin versant, constitue la sortie d'un système amont. Ce système amont est décrit par une équation d'évolution qui, suivant le modèle proposé pour la description des systèmes naturels, (ch. II), est une équation différentielle stochastique. Le problème à résoudre consiste donc à montrer que le phénomène d'entrée pour les systèmes hydrologiques est solution d'une équation différentielle stochastique. Comme la solution à une telle équation, si elle existe au sens de la convergence en moyenne quadratique, est un processus de Markov (JAWZINSKI, 1970, p. 106, Théorème 4.5), on est amené à montrer que le phénomène d'entrée, restreint aux précipitations, est décrit par les processus de Markov.

De nombreux travaux antérieurs ont montré que les chaînes de Markov discrètes constituent un outil adapté pour la description des séquences sèches et pluvieuses (voir ch. III, pour le panorama des travaux antérieurs). Mais ces travaux partent de l'hypothèse (implicite) de l'existence a priori des chaînes de Markov discrètes. La particularité de la démarche proposée dans ce mémoire repose sur l'essai de modélisation de l'évolution du cycle de l'eau par une relation d'équivalence qui conduit à une formulation continue.

Ce chapitre comportera donc deux parties. La première partie sera consacrée à l'étude de quelques aspects dynamiques de la distribution journalière des précipitations en milieu tropical ouest-africain. Elle aboutit à l'établissement de la relation d'équivalence et

à sa formulation stochastique. Dans la seconde partie, nous considérons des exemples numériques sur quelques stations du Bénin et du Burkina-Faso (ex-Haute-Volta).

#### 4.2. DESCRIPTION DE L'EVOLUTION DU CYCLE DE L'EAU

##### 4.2.1. Le cycle de l'eau et la répartition de l'énergie

L'observation générale de notre environnement naturel révèle une relation intime entre l'évolution du cycle de l'eau et la répartition de l'énergie du milieu. DHONNEUR (1974) indique que la circulation de l'énergie, dans l'atmosphère terrestre, se fait grâce à la vapeur d'eau extraite des régions océaniques tropicales. Pour lui, l'importance de la vapeur d'eau dans le bilan énergétique de la terre rend nécessaire l'étude du bilan précipitation-évaporation en fonction de la latitude. Il montre alors que l'équilibre de l'atmosphère se fait par importation de la vapeur d'eau dans les zones à bilan positif et exportation de vapeur d'eau des zones à bilan négatif.

GOSSET (1979) montre le rôle de la turbulence dans la répartition de cette énergie.

Mais pour mieux cerner l'interaction entre le cycle de l'eau et la répartition de l'énergie, il faut considérer l'ensemble des processus physiques qui déterminent le climat et que l'on regroupe sous l'appellation de "système climatique". D'après GATES (1979, 1981), ces processus s'énumèrent : l'atmosphère, la cryosphère, l'hydrosphère, la lithosphère superficielle et la biosphère. MOREL (1979) indique que le temps caractéristique de chacun de ces éléments se présente de la manière suivante :

atmosphère	10 - 100	jours
hydrosphère	1 - 1000	ans
cryosphère	1 - 10 <sup>6</sup>	ans
biosphère	1 - 10 <sup>9</sup>	ans
lithosphère	10 <sup>8</sup> - 10 <sup>9</sup>	ans

Cette disparité des échelles de temps caractéristiques des différents éléments qui composent le système climatique et les interactions entre les échelles, expliquent les évolutions souvent capricieuses a priori, que l'on observe et les difficultés rencontrées dans

l'élaboration des modèles de prévision pour des objectifs à moyen et à long termes.

Lorsque l'on jette un premier coup d'oeil sur les différents temps caractéristiques des éléments qui composent le système climatique, on s'aperçoit que l'atmosphère constitue son élément le plus actif, et cette activité lui est conférée par l'agitation turbulente permanente dont elle est le siège. Un examen plus approfondi permet cependant de se rendre compte que cette agitation turbulente de l'atmosphère masque en réalité des mouvements d'ensemble plus généraux qui se répartissent, d'après GOSSET (1979), en quatre échelles d'observation qui sont :

- la microéchelle - celle des phénomènes caractéristiques de l'ordre de quelques dizaines de secondes ;
- la petite échelle - celle des phénomènes ayant un temps caractéristique inférieur à une heure ;
- la mésoéchelle - celle des phénomènes qui durent plusieurs heures ;
- la grande échelle - celle des phénomènes synoptiques à laquelle sont associés des concepts tels que ceux d'anticyclone et de dépression. On sait que c'est à cette échelle qu'est associée la formation des grands systèmes nuageux générateurs des précipitations durables et liées à la variation de pression. C'est la grande échelle qui détermine le temps caractéristique de 10 - 100 jours attribué à l'atmosphère de la planète.

L'atmosphère est directement liée, dans ses activités, à l'hydrosphère. L'importance de cette dernière lui est conférée par la possibilité de fournir de grandes quantités d'eau pour le cycle hydrologique mondial de précipitation, de ruissellement, d'évaporation et de condensation. Comme, en outre, la capacité thermique de l'eau est très supérieure à celle de l'air, on perçoit que l'hydrosphère constitue le principal réservoir de chaleur de notre planète.

L'importance de la cryosphère dans le système climatique est due davantage à l'albédo élevé des neiges et des glaces.

La lithosphère constitue au contraire un élément assez passif, tandis que la biosphère réagit avec les autres éléments du système climatique à un rythme correspondant aux cycles biologiques de la végétation. Ce cycle varie en fonction des variations saisonnières du rayonnement solaire, de la température et des pluies.

Lorsque l'on considère ensemble les divers éléments du système climatique, on peut dégager, sur la base des travaux cités plus haut, les remarques suivantes :

a). Si l'on considère au niveau planétaire la chaîne :

{ température | humidité | nébulosité | albédo }

on s'aperçoit que l'élévation de la température favorise l'évaporation, l'humidité accrue favorise la formation d'une couverture nuageuse étendue dont l'albédo est très élevé ; ceci entraîne une réduction de la fraction de l'énergie solaire absorbée et, par suite, tend à réduire la température. On se trouve donc en présence d'une boucle de réactions dont l'effet est stabilisateur.

Par contre, si l'on considère la chaîne :

{ température | neige ou glace | albédo }

l'élévation de la température au niveau planétaire limite l'extension de la neige et des glaces ; ceci a, pour conséquence, de diminuer l'albédo moyen de la planète et d'augmenter la fraction de l'énergie solaire absorbée et, par suite, favorise l'élévation de la température. On se trouve là en présence d'une boucle dont l'effet est destabilisateur.

b). Une description du cycle de l'eau doit mettre en relief le rôle prépondérant de l'évaporation et, partant, celui du couple atmosphère-hydrosphère. L'atmosphère représente en effet le transfert de chaleur latente de l'air à l'eau, chaleur qui est ensuite dégagée au point de condensation. Ce flux est provoqué par des mouvements turbulents et dépend de l'humidité de l'air à la surface de l'eau et de la vitesse du vent.

Nous pensons que ce rôle prépondérant du couple atmosphère - hydrosphère explique pourquoi la boucle stabilisatrice est la plus active et donne sa force à la tendance à la conservation de l'ensemble du système climatique.

Ces différentes observations suggèrent l'idée qu'il existe une relation mathématique simple entre :

- l'évolution du cycle de l'eau, décrite par l'évolution du système climatique d'une part,
- et la répartition de l'énergie d'autre part.

Nous poserons cette relation sous la forme d'une relation d'équivalence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{évolution du} \\ \text{cycle de l'eau} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{répartition de} \\ \text{l'énergie} \end{array} \right\} \quad (1)$$

#### 4.2.2. Essai de description analytique de l'évolution du cycle de l'eau.

Pour une description formelle du cycle de l'eau, on introduit une fonction  $S = S(m, x)$ , où  $m$  est une description de la densité de vapeur d'eau dans le milieu tandis que  $x$  est un paramètre de position.

Il y a bien sûr des aérosols et d'autres particules dont le comportement n'est pas simple mais que nous ne prendrons pas en compte dans cette étude, pour la simplicité de l'analyse.

On suppose que la fonction  $S(m, x)$  est régulière et linéaire par rapport à chacune de ses variables. On peut, dans ce cas, approcher cette fonction par son développement limité :

$$\left. \begin{aligned} S(m, x) = & a_{00} + a_{10} (m - m_0) + a_{20} (m - m_0)^2 + \dots \\ & + a_{01} (x - x_0) + a_{02} (x - x_0)^2 + \dots \\ & + a_{11} (m - m_0) (x - x_0) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dans cette relation,  $a_{00}$  décrit la condition initiale inconnue. Les termes en  $a_{20}$  et  $a_{02}$  sont nuls par hypothèse de linéarité admise. L'importance des termes en  $a_{10}$  et  $a_{01}$  qui décrivent l'évolution de l'ensemble par rapport à chacune des variables ne dépend que du choix de l'échelle d'observation.

DHONNEUR (1974) a montré que pour l'échelle planétaire, il existe une forme d'équilibre de l'atmosphère et de stabilité du climat. En tenant compte de cette constatation et de l'importance des interactions entre échelles, on peut considérer comme constante l'influence conjointe de  $a_{00}$  et de l'ensemble de ces deux termes.

Alors en posant pour simplifier :-

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\m_0 &= 0 \\a_{ij} &= 1 \quad (i, j = 0, 1)\end{aligned}$$

on peut écrire :

$$S = S - S_1 = m x \quad (3)$$

avec

$$S_1 = a_{00} + m + x = \text{cst} \quad (4)$$

On écrira alors la relation d'équivalence (1) sous la forme :

$$\frac{d S (m, x)}{dt} = R \quad (5)$$

avec  $S (m, x) = m x$  où  $x$  est, comme indiqué plus haut, un paramètre de position et  $m$  est une description de la densité de vapeur d'eau contenue dans l'espace considéré.

Il est clair que si l'on pose  $m = \text{cst}$ , la relation (5) permettra de suivre seulement la progression spatiale d'une masse constante de vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère. Si l'on sait définir l'expression de la répartition de l'énergie en milieu tropical africain, ce principe peut être utilisé pour suivre l'évolution du Front intertropical qui détermine les régimes pluviométriques de l'Afrique de l'Ouest. En effet, d'après RODIER (1964), DHONNEUR (1974), SIRCOULON (1976), une étude simple du mécanisme de la circulation générale de l'atmosphère à ces latitudes montre que les précipitations résultent pour l'essentiel de l'interaction de deux masses d'air :

- l'air tropical continental, sec et chaud, provenant de l'Est ou du Nord-Est du Sahara. Cette masse d'air est désignée sous le nom d'"harmattan".
- l'air équatorial maritime, humide, instable, de température relativement fraîche et de direction Sud-Ouest. On l'appelle communément la mousson. Cet air provient d'une zone de hautes pressions, centrée sur l'Océan Atlantique austral : l'anticyclone de Sainte-Hélène.

La trace au sol de la surface de contact entre l'air tropical continental et l'air équatorial maritime est connue sous le nom de Front Intertropical (F I T). D'après DHONNEUR (1974), le F. I. T appartient à une entité planétaire dénommée l'équateur météorologique et qui constitue l'équateur énergétique de la terre. Elle est matérialisée au sol et dans les couches moyennes de l'atmosphère par le creux barométrique équatorial, limite des circulations méridiennes des deux hémisphères.

Les migrations du F I T se font par une sorte de glissement de l'ensemble de l'atmosphère vers le Nord ou vers le Sud, suivant à peu près le déplacement apparent du soleil au cours de l'année mais avec un retard de six semaines. DHONNEUR indique que le soleil se trouve dans sa position la plus septentrionale le 21 juin (Tropique du Cancer :  $23^{\circ} 27' N$ ), le F I T le 15 août. Sa trace au sol est alors située entre  $20^{\circ} N$  et le  $25^{\circ} N$  sur l'Afrique Occidentale. Le

soleil se trouve dans sa position la plus méridionale le 21 décembre (Tropique du Capricorne :  $23^{\circ} 27' S$ ), le F I T le 31 janvier. Sa trace au sol se trouve alors entre les  $06^{\circ}$  Nord et  $04^{\circ}$  Nord sur l'Afrique de l'Ouest.

Si l'on pose par contre  $x = \text{cst}$  dans la relation (5), on pourra suivre l'évolution de la masse de vapeur d'eau en un lieu donné. Considérons d'abord le détail de ce dernier cas et imaginons un observateur placé en un lieu fixe. Cet observateur verra comment les migrations du Front Intertropical vers le Nord provoquent des formations orageuses importantes et des averses. En 1963, RODIER et SIRCOULON avaient déjà imaginé un observateur placé en un point fixe, Kandi, au Nord du Bénin, en régime tropical pur. Nous reprenons brièvement leur description :

- En janvier, l'anticyclone de Sainte-Hélène occupe sa position la plus méridionale et l'anticyclone saharien centré sur le trentième parallèle est très puissant. L'harmattan souffle fortement de façon continue du Nord-Est. L'observateur a la sensation d'un vent sec, souvent chargé de poussière très fine en forme de brouillard. Aucune formation nuageuse n'est observée.

- En fin mars-avril, le F I T passe par la station d'observation. Il se produit quelques formations nuageuses. S'il y a peu ou pas encore de précipitations, en revanche le degré hygrométrique augmente.

- Le F I T continuant vers le Nord, l'air de la mousson augmente d'épaisseur. Lorsqu'il atteint 7 à 800 m, il se forme une série de grains s'alignant parallèlement au F I T.

- Lorsque l'épaisseur est de l'ordre de 2000 m, des tornades se produisent sur les lignes Nord-Sud, se déplaçant d'Est en Ouest. Ces tornades sont caractéristiques par leur brièveté et leur violence. Elles ne durent au plus que quelques heures. Les hauteurs d'eau tombées atteignent souvent plus de 50 mm.

- Enfin, l'épaisseur de la mousson étant maximale, les formations nuageuses instables de cette masse d'air donnent des pluies prolongées, à caractère continu, bien moins violentes que les tornades. Ce sont les pluies de mousson.

- En septembre, le F I T redescend vers le Sud ; il passe par la station d'observation en octobre. Mais au lieu de la même série de phénomènes qu'à l'aller, il se produit un arrêt très rapide des précipitations.

Cet exemple montre que l'observateur fixe, situé à Kandi, distinguera nettement une saison de pluie et une saison sèche.

Considérons maintenant le cas où  $m = \text{cst}$  et imaginons un observateur qui désire rester en permanence dans la zone où l'épaisseur de la mousson est maximale. Il se déplacerait lentement en partant de Cotonou, au mois de juin pour atteindre Savé au mois de juillet et Kandi en fin août. Il redescendrait vers le Sud à partir de septembre pour arriver à Cotonou en octobre. S'il continue son mouvement en suivant le balancement du F I T, il resterait toute l'année en saison pluvieuse.

Il apparaît déjà, d'après ces deux exemples, que pour un observateur fixe, situé plus au Sud de Kandi, la saison de pluies tendra à s'allonger puisque le F I T passe plus tôt et redescend plus tard. Notons cependant qu'au Sud, il tend à se créer un creux de précipitations en juillet-août, ce qui conduit à une véritable petite saison sèche au Sud du Bénin. Une telle saison sèche s'explique par le fait que l'anticyclone de Sainte-Hélène étant fortement remonté vers le Nord, une zone de hautes pressions tropicales moins humide occupe les zones côtières de l'Afrique de l'Ouest. Dans ces régions, en septembre, le recul de l'anticyclone entraîne une nouvelle saison de pluie jusqu'au passage du F I T à la fin du mois d'octobre. Un observateur fixe, situé à Cotonou, comptera donc quatre saisons dans l'année tandis que celui de Kandi n'en comptait que deux.

Ces exemples montrent que si l'on sait définir la répartition de l'énergie en milieu tropical Ouest-africain, la relation (5) peut permettre de suivre l'évolution des masses d'air et de leur humidité au cours de l'année.

En tenant compte de l'importance de la vapeur d'eau dans le bilan énergétique, on posera :

$$R = R(S, t) \quad (6)$$

Toutefois, en prenant en considération les incertitudes liées à la connaissance de  $S$ , on doit admettre que cette répartition de l'énergie ne peut être déterminée avec la précision voulue. Par ailleurs, le rôle prépondérant de la turbulence atmosphérique dans le mécanisme de la répartition de l'énergie suggère l'idée que toute expression analytique qui tente de décrire ce phénomène physique doit, pour être réaliste, être capable de rendre compte des fluctuations rapides imposées par le processus turbulent. On est alors conduit à prendre la relation (6) sous la forme suivante :

$$R(S, t) = \bar{R}(S, t) + \sigma(S, t) \epsilon_R \quad (7)$$

Dans cette relation :

- $\bar{R}(S, t)$  - est une valeur moyenne de la fonction aléatoire de départ. Elle décrit le comportement déterministe de cette fonction.
- $\sigma(S, t)$  - désigne l'écart-type instantané.
- $\epsilon_R$  - est une variable aléatoire.

Une interprétation réaliste de l'évolution du milieu physique conduit à interpréter  $\epsilon_R$  comme le nombre d'écart-types instantanés qu'il faut ajouter à la valeur moyenne de la fonction aléatoire pour obtenir la valeur observée à l'instant  $t$ . Ce nombre apparaît comme le résultat d'un très grand nombre de fluctuations aléatoires indépendantes, dans l'évolution du milieu. Prises isolément, ces fluctuations peuvent paraître mineures mais l'effet total, suivant le théorème

central limite, obéit à la loi de Gauss.  $\epsilon_R$  apparaît donc comme un bruit blanc.

L'équation (5) s'écrit alors :

$$\frac{dS}{dt} = \bar{R}(S, t) + \sigma(S, t) \epsilon_R \quad (8)$$

L'importance de la notion de bruit blanc dans la modélisation des systèmes dynamiques naturels est analysée au chapitre II. On montre notamment que l'équation (8), souvent appelée équation de Langevin, n'a de signification mathématique que si elle peut être interprétée au sens des distributions de L. SCHWARTZ. Mais en tenant compte du fait que le bruit blanc est la dérivée formelle du mouvement brownien :

$$d\beta = \epsilon dt \quad (9)$$

On est conduit à la relation suivante pour traduire le principe d'équivalence posé dans (1) :

$$dS = \bar{R}(S, t) dt + \sigma(S, t) d\beta \quad (10)$$

Cette expression constitue, de ce fait, une description analytique simplifiée de l'évolution du cycle de l'eau.

D'après une définition de KOCKARTS (1982) "un modèle atmosphérique parfait est un ensemble de nombres capable de représenter toutes les propriétés physiques et chimiques de l'atmosphère dans le passé, le présent et le futur". Même si, en utilisant les techniques numériques les plus élaborées il n'est pas possible actuellement d'atteindre cet objectif, les modèles théoriques, basés sur les principes de conservation (de masse, de la quantité du mouvement et d'énergie, écrites pour chaque constituant de l'atmosphère), représentent les approches les plus rationnelles et les plus près de cette définition. Dans un espace à trois dimensions, ces modèles se présentent sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, pour lequel il faut toujours introduire des hypothèses simplificatrices (GATES, 1981 - KOCKARTS, 1982). Tout récemment, ASSAMOI et PLANTON (1984) ont utilisé "le modèle de référence" mis au point par la Météorologie Nationale Française pour la prévision des trajectoires de perturbation et pour l'étude des précipitations

associées aux perturbations cycloniques en milieu tropical ouest africain. Les résultats obtenus par ces auteurs montrent que ce modèle qui constitue la "version standard" du modèle tropical basé sur les équations primitives permet la prévision à 48 heures avec une précision satisfaisante. Pour la prévision à plus longs termes, les idéalizations et les simplifications introduites dans le modèle pourraient plus permettre de garantir la précision des résultats.

La relation (10) est un modèle semi-empirique stochastique qui vise à prendre en compte à la fois des incertitudes liées à la connaissance imparfaite de la répartition de l'énergie et l'aspect dynamique de l'évolution globale du cycle de l'eau. Or, on sait que, entre les modèles purement probabilistes, qui visent à définir les propriétés des paramètres hydroclimatiques sans tenir compte de leur ordre d'occurrence, et les modèles purement déterministes qui visent la description détaillée du cycle de l'eau, les modèles stochastiques ont cette propriété hybride de mettre en relief, à la fois le caractère incomplet des informations que nous avons sur le milieu physique et l'aspect dynamique de l'évolution de ce milieu. Alors, en tenant compte des analyses physiques qui ont été à la base de son élaboration, nous sommes conduits à penser que, malgré sa simplicité, l'équation (10) peut servir de modèle pour une approche rapide de certains processus induits par l'évolution du cycle de l'eau, comme par exemple, la répartition des séquences sèches ou pluvieuses en un point donné.

Il est intéressant de noter que, suivant la quantité d'information disponible, l'équation (10) peut être considérée soit sous la forme scalaire, soit sous la forme vectorielle. Considérons en effet la boucle stabilisatrice :

{ température | humidité | nébulosité | albédo }

On a montré plus haut que cette boucle se traduit physiquement par les implications suivantes :

L'augmentation de la température  $\implies$  évaporation  $\implies$   
 $\implies$  humidité accrue  $\implies$  nébulosité accrue  $\implies$  albédo  
 accrue  $\implies$  réduction de la fraction de l'énergie  
 solaire absorbée  $\implies$  diminution de la température.

On voit qu'il y a une liaison évidente entre les paramètres de la boucle et que la masse ( $m$ ) de vapeur d'eau qui va être disponible pour le cycle de l'eau dépend de chacun des autres paramètres.

Appelons  $R_i$ , le taux de participation de chaque élément  $i$  à la répartition de l'énergie et par  $a_{ij}$  le coefficient de corrélation entre les paramètres  $i$  et  $j$ . Alors, en se limitant à trois paramètres explicatifs, on obtient la description de la répartition de l'énergie sous la forme suivante :

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}$$

Supposons que l'on ait retenu comme paramètres explicatifs la température ( $T_p$ ), l'évaporation ( $E$ ) et la radiation solaire ( $r$ ), alors,  $R_1 = R_1(T)$ ,  $R_2 = R_2(E)$  et  $R_3 = R_3(r)$ . L'hypothèse de régularité de ces fonctions fournit la possibilité de développement limité et l'on a :

$$R_1 - R_1(T_0) = \eta_1 \cdot (T - T_0)$$

$$R_2 - R_2(E_0) = \eta_2 \cdot (E - E_0)$$

$$R_3 - R_3(r_0) = \eta_3 \cdot (r - r_0)$$

avec  $\eta_i = dR_i / db_i$  et  $b_i = (T, E \text{ ou } r)$

En posant comme référence une situation dont les paramètres sont  $T_0$ ,  $E_0$ ,  $r_0$ , on a :

$$R^*(T, E, r) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \cdot (T - T_0) \\ \eta_2 \cdot (E - E_0) \\ \eta_3 \cdot (r - r_0) \end{bmatrix}$$

En introduisant une matrice des coefficients  $A$  et une variable vectorielle  $X = [T - T_0 \quad E - E_0 \quad r - r_0]^T$ , une matrice des écarts types sur  $X$ , noté  $G$ , et un processus du mouvement brownien vectoriel  $d\beta = [d\beta_1 \quad d\beta_2 \quad d\beta_3]^T$ , on a l'é.d.s. vectorielle suivante :

$$dS = A X dt + G d\beta \quad (10bis)$$

On peut aussi considérer les paramètres  $T_0$ ,  $E_0$  et  $r_0$  comme des valeurs moyennes et faire intervenir les écarts-types dans l'expression de  $X$  ; on a alors des expressions de la forme :

$$\eta_i (b_i - b_{i0}) = \eta_i \sigma_i \frac{(b_i - b_{i0})}{\sigma_i} = \eta_i \sigma_i X_i$$

avec  $b_i = T, E$  ou  $r$ )

et l'équation différentielle :

$$dS = A^* X dt + G^* d\beta^* \quad (10ter)$$

On obtient ainsi une expression de la forme proposée par RICHARDSON (1981) et analysée au chapitre III.

Du point de vue théorique, les relations (10) sont des équations différentielles stochastiques non-linéaires. Leurs propriétés

mathématiques sont étudiées au chapitre II. Elles sont généralement liées à la présence du terme aléatoire représenté par le processus du mouvement brownien  $d\beta(t)$ . Ce dernier est de l'ordre de  $(dt)^{1/2}$ , ce qui fait que les méthodes habituelles d'intégration ne peuvent lui être appliquées. Toutefois, l'une des propriétés les plus intéressantes liée à ce modèle est que la solution de l'équation (10) (ou des équations 10-bis et 10-ter), si elle existe, est un processus de Markov. C'est cette propriété que nous tenterons d'exploiter dans la suite de ce chapitre pour la formulation scalaire du modèle.

#### 4.2.3. Le modèle discret pour l'étude des précipitations journalières

L'étude des phénomènes orageux liés aux migrations du F I T et examinés par un observateur fixe (à Kandi) suggère de distinguer les précipitations atmosphériques suivant leur durée et/ou leur extension spatiale. A Kandi, par exemple, on a pu ainsi distinguer :

- des séries de grains s'alignant parallèlement au F I T
- des tornades brèves et violentes pouvant donner jusqu'à 50 mm de pluie
- et des pluies de mousson à caractère continu et prolongé.

CHANG, KAWAS et DELLEUR (1984), citant les travaux de HOUZE et AUSTIN, donnent une classification générale des précipitations atmosphériques en terme de leur durée et de leur expansion spatiale suivant quatre échelles. Ils distinguent :

- les phénomènes orageux appartenant à la petite échelle et qui durent de quelques minutes à une demi-heure. Ils ont des aires d'extension de  $1 - 10 \text{ km}^2$  et sont associés à des formations nuageuses locales.

- les phénomènes orageux ayant une durée d'environ une heure et une extension horizontale de l'ordre de  $10 - 10^2 \text{ km}^2$ . Ils sont à situer à une échelle intermédiaire entre la petite et la méso-échelle.
- des phénomènes orageux appartenant à la mésoéchelle. Ils ont une durée de plusieurs heures et une extension spatiale de l'ordre de  $10^3 - 10^4 \text{ km}^2$ .
- et des phénomènes orageux ayant un caractère synoptique. Ils durent plusieurs jours sur une extension spatiale plus grande que  $10^4 \text{ km}^2$ .

La similitude des échelles considérées avec celle de la turbulence atmosphérique (GOSSET 1979) traduit l'influence de cette dernière dans la genèse des phénomènes orageux.

Comme le font remarquer CHANG, KAWAS et DELLEUR, la dynamique de l'organisation de l'espace-temps du champ de précipitations à une échelle donnée conduit à la formation à l'intérieur de cette échelle d'une ou plusieurs aires de précipitations d'échelles plus petites. La distribution des intensités à l'intérieur d'un phénomène orageux d'échelle donnée change continuellement au fur et à mesure que des aires de précipitations d'échelles plus petites prennent naissance, se déplacent et se dissipent à l'intérieur de cette aire.

Tous ces faits d'observation montrent que les phénomènes orageux font partie d'un ensemble de processus continus, organisés par la turbulence atmosphérique. A l'intérieur de ce cadre, la place de la modélisation des précipitations journalières doit être considérée dans une perspective de mise en valeur de ressources en eau et de gestion des phénomènes naturels. Par exemple, pour décider de la

politique agricole journalière, il est nécessaire de connaître les probabilités des différentes réalisations possibles des séquences sèches et pluvieuses. Pour obtenir ces probabilités, l'on doit analyser et modéliser les précipitations à l'échelle journalière. Pour les pluies de mousson à caractère continu, à l'échelle d'une journée, les précipitations observées à la station de mesure correspondent à l'accumulation des précipitations de diverses intensités. L'observation à l'échelle du jour permet de saisir, dans ce cas, les traits caractéristiques moyens de la pluie de mousson. Par contre, pour les tornades brèves et les séries de grains, l'observation à l'échelle du jour permet de mesurer les précipitations cumulatives provenant des processus discrets. Dans les deux cas, l'échelle journalière fournit donc une description correcte de la distribution des phénomènes orageux, en termes d'évolution moyenne.

Pour analyser les précipitations journalières en un lieu fixe à partir du modèle proposé, on pose  $x = 1$  dans l'expression  $S = m x$ , et on admet que  $m$  exprime la masse de vapeur d'eau contenue dans la masse d'air considérée, alors l'équation (10) s'écrit :

$$d m = \bar{R} (m_i, t) dt + \sigma (m_i, t) d \beta \quad (11)$$

En considérant la forme discrète de l'équation (11) et une approximation linéaire de  $\bar{R} (m_i, t)$ , on obtient :

$$m_i = A m_{i-1} + \sigma (m_{i-1}) (\beta_i - \beta_{i-1}) \quad (12)$$

On se donne un seuil  $m_0$ , tel que si  $m_i - m_0 > 0$ , le surplus de masse d'eau tombe sous forme de précipitations, alors on obtient deux états que nous noterons :

$$m_i^P = m_i - m_0 > 0 \quad ; \quad m_i^S = m_i - m_0 \leq 0$$

$m_i^p$  désigne la masse d'eau qui tombe sous forme de précipitation et détermine l'état pluvieux ;  $m_i^s$  désigne le déficit de masse d'eau et détermine l'état sec. L'équation (12) prend alors la forme vectorielle suivante :

$$(13) \quad \begin{bmatrix} m_i^s \\ m_i^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{i-1}^s \\ m_{i-1}^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\beta_i - \beta_{i-1})^s \\ (\beta_i - \beta_{i-1})^p \end{bmatrix}$$

L'analyse théorique des traits caractéristiques des mesures effectuées à l'échelle du jour nous a permis de nous rendre compte que ces mesures traduisent une évolution moyenne. En d'autres termes, les instruments de mesure à l'échelle de la journée constituent une sorte de filtre (au sens de Kalman), à travers laquelle on ne perçoit que le caractère moyen des phénomènes orageux. En considérant les valeurs moyennes des états, on arrive à :

$$(14) \quad E \begin{Bmatrix} m_i^s \\ m_i^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_i \\ P_i \end{bmatrix} \quad E \begin{Bmatrix} (\beta_i - \beta_{i-1})^s \\ (\beta_i - \beta_{i-1})^p \end{Bmatrix} = 0$$

On ramène ainsi l'équation (13) à une équation des états binaires pour un processus de premier ordre

$$\begin{bmatrix} S_i \\ P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{i-1} \\ P_{i-1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Pour analyser les précipitations en un lieu fixe, la relation (1) qui pose l'équivalence entre l'évolution du cycle de l'eau et la répartition de l'énergie, et traduite en termes simplifiés par l'équation (10), se ramène ainsi tout naturellement à l'étude des chaînes de Markov discrètes. Sous cette forme discrète, elle a fait l'objet de nombreuses études, notamment dans le groupe de recherche "Crues et Sécheresse" de l'IMFT, sous la direction du Professeur

THIRRIOT. Un aperçu de ces études est donné dans le chapitre III réservé au panorama des travaux antérieurs. On note que tous les auteurs partent en général de l'existence a priori de l'outil mathématique que constituent les chaînes de Markov. La particularité de la démarche proposée ici réside dans le fait qu'elle met à jour le contenu physique attaché à cet outil mathématique ; elle montre notamment que la description markovienne des observations pluviométriques peut être vue comme une conséquence de la formulation stochastique du principe d'équivalence (1).

On voit, d'après l'équation (13), que les probabilités de passage de l'état sec à pluvieux (et vice versa) dépendront de la valeur du seuil  $m_0$ . Plus généralement, la matrice de passage  $A$  qui décrit la transition d'un état, du jour  $(i-1)$  à un autre, au jour  $i$ , dépend de la valeur de ce seuil. On peut, par exemple, fixer  $m_0$  de manière à considérer comme état sec, toute réalisation des phénomènes orageux qui conduit à une hauteur journalière de pluie inférieure à une hauteur repère de précipitation fixée par avance. On en déduit la possibilité d'analyser les processus multiclassés en introduisant non pas un, mais plusieurs seuils. Pour obtenir un processus à  $k$  classes, on introduirait ainsi  $(k-1)$  seuils.

Par ailleurs, il apparaît, d'après l'équation (13), que la possibilité d'obtenir des processus d'ordre supérieur à un est liée non seulement à la valeur de  $m_1$  mais aussi à la persistance de  $m_0$  qui détermine de ce fait l'effet de mémoire du milieu. Par exemple, pour obtenir un processus d'ordre supérieur à un, on doit considérer dans l'expression linéarisée de  $R(m, t)$  non seulement les termes en  $m_{i-1}$ , mais aussi des termes en  $m_{i-j}$ , ( $j = 2, 3, \dots$ ). La discrétisation de l'équation différentielle se présente alors sous la forme d'un processus ARMA

$$m_i = A m_{i-1} + B m_{i-2} + \dots \quad (16)$$

$$\dots + \sigma (m_{i-1}) (\beta_1 - \beta_{i-1}) + \sigma (m_{i-2}) (\beta_{i-1} - \beta_{i-2}) + \dots$$

Dans le cas en étude, où  $E\{\beta_i - \beta_j\} = 0$ , on a des processus autorégressifs qui sont des processus de Markov exprimés sous forme paramétrique. THIRRIOT (1984) a développé une méthode de passage des processus autorégressifs aux processus markoviens non paramétriques. Il a montré notamment que les probabilités de transitions s'expriment en fonction des coefficients de régression. Dans le cadre de la démarche proposée dans cette étude, on doit, pour l'ordre deux par exemple, considérer les probabilités d'existence des états suivants :

$$(m_i - m_0) \Rightarrow \begin{cases} m_i^S \\ m_i^P \end{cases} \quad (m_{i-1} - m_0) \Rightarrow \begin{cases} m_{i-1}^S \\ m_{i-1}^P \end{cases} \quad (17)$$

et tels que

$$m_i^S \begin{cases} m_{i-1}^S = m_i^{SS} \\ m_{i-1}^P = m_i^{SP} \end{cases} \quad m_i^P \begin{cases} m_{i-1}^S = m_i^{PS} \\ m_{i-1}^P = m_i^{PP} \end{cases} \quad (18)$$

Ce qui permet d'obtenir les vecteurs des masses et des états exprimés respectivement sous la forme transposée :

$$[m^{SS} \quad m^{SP} \quad m^{PS} \quad m^{PP}]^T \quad \text{et} \quad [ss \quad sp \quad ps \quad pp]^T \quad (19)$$

Nous analysons au paragraphe suivant les résultats des différents calculs que nous avons effectués à partir de ces considérations pour quelques stations d'observation du Bénin et du Burkina-Faso (Ex-Haute-Volta), en Afrique de l'Ouest.

#### 4.3. APPLICATION A L'ETUDE DE LA DISTRIBUTION DES SEQUENCES SECHES ET PLUVIEUSES

On a distingué trois zones d'étude (carte 1) :

- la première zone est représentée par les stations béninoises pour lesquelles on dispose de données couvrant une même période (1961-1980). Les résultats obtenus à partir de ces stations constituent les bases physiques de l'interprétation du modèle proposé.

- la seconde zone est représentée par les stations du Burkina-Faso. Les données couvrent des périodes différentes. Mais leur étude est intéressante en ceci qu'elles permettent de suivre plus au nord, la progression du F I T et la validité du modèle markovien.

- la troisième zone est représentée par les stations du Sénégal, du Mali et du Niger. Les données de ces dernières couvrent des périodes variables, de l'origine à 1965, et sont donc antérieures à la sécheresse actuelle du Sahel. D'après TODOROV (1985), les pluies moyennes ou normales calculées pour les périodes antérieures à 1968 ne devraient pas être utilisées pour les applications agrométéorologiques. On peut cependant dire que pour des objectifs de planification à long terme, ces données constituent des sources d'informations intéressantes.

##### 4.3.1. Présentation des stations en études

Pour l'étude des précipitations au Bénin, 20 ans de données d'observations journalières ont été analysées aux stations de Cotonou en régime équatorial, de Bohicon en régime équatorial de transition, Savé en régime tropical de transition et Kandi en régime tropical pur. Pour certaines des stations considérées, les données disponibles couvrent une période plus longue. Ces données qui concernent les observations effectuées depuis l'origine des stations jusqu'en 1965 ont été rassemblées dans un document du CIEH. Dans un souci d'utilité et compte tenu de nos moyens limités, nous avons porté notre choix sur la période commune de 1961 à 1980, pour laquelle aucune tentative de rassemblement ou d'exploitation n'a été faite à ce jour. Les données brutes nous ont été fournies par le Service Météorologique de la Représentation de l'ASECNA à Cotonou. Les caractéristiques géographiques des stations sont présentées sur le tableau 1 et sur la carte de situation (Fig.1).

Les données d'observations journalières aux stations de Aribinda, Markoye et Gorom-Gorom au Burkina-Faso en régime sahélien, nous ont été fournies dans le cadre d'un accord de travail entre le "Groupe Crues et Sécheresses" de l'IMFT et M. SICOT de l'ORSTOM. Ces données couvrent une période variable

allant de 20 ans (1954 - 1973) pour Aribinda à 28 ans (1965-1982) pour Gorom-Gorom, la station de Markoye ayant une durée d'observations de 27 ans (1956 - 1982).

#### 4.3.2. Présentation des résultats empiriques

Le tableau 2 présente les variations saisonnières des précipitations pour chacune des stations. Il permet de distinguer différents régimes ; (tout comme dans les données d'observation qui leur ont servi de base, les résultats de calcul sont donnés en 0,1 mm).

##### a. Régime équatorial et équatorial de transition : Cotonou et Bohicon au sud du Bénin (Figure 2).

Dans cette première catégorie, on note une première saison sèche qui s'étale sur quatre mois, de novembre à février. Pour la période considérée, le minimum des précipitations est en décembre-janvier : 16,4 mm et 10,6 mm pour Cotonou et 11,3 mm et 4,6 mm pour Bohicon. La première saison des pluies commence en mars et dure jusqu'en juillet. Le mois le plus arrosé est le mois de juin avec 372,9 mm à Cotonou et 188,4 mm à Bohicon. La seconde saison des pluies, moins forte, s'étale en septembre et octobre. La seconde saison sèche a lieu au mois d'août (61,7 mm à Cotonou). Cette saison sèche est très atténuée à Bohicon où la hauteur de pluie atteint 109,5 mm.

Le nombre total de jours de pluies est de 91 jours par an à Cotonou et de 106 jours par an à Bohicon. Il fait apparaître une certaine forme d'aridité inhabituelle pour la région. Cette aridité s'explique par l'exposition de la côte du Bénin aux vents de mousson. La moyenne des jours de pluies est de 1,6 et 1,8 pour Cotonou et Bohicon respectivement (tableau 3).

Le calcul au niveau mensuel permet une vision plus fine de l'évolution des séquences sèches et pluvieuses. On remarque en effet (tableau 4) que la durée moyenne des séquences pluvieuses varie de 1 jour en décembre-janvier à 2,4 pour Cotonou et 2,0 pour Bohicon, au mois de juin. On voit apparaître par là la liaison évidente entre la longueur des séquences, les hauteurs maximales mensuelles et la position du F I T ou l'épaisseur maximale de la mousson. Une analyse au niveau journalier pour la station de Cotonou fait apparaître l'existence d'une séquence de trois jours à l'intérieur de laquelle se

produit toujours la hauteur maximale journalière. En rapprochant cette observation de l'analyse du milieu physique donnée plus haut (paragraphe 4.1), on est conduit à penser que pour la zone équatoriale en étude, les précipitations maximales journalières se produisent lorsque l'épaisseur de la mousson est maximale.

b. Régime tropical de transition : Savé (figure 3)

Pour ce régime, la saison sèche s'allonge déjà plus que pour le régime précédent et dure cinq mois, de début novembre à fin mars. Les pluies sont rares pendant cette période. La saison des pluies qui commence en avril atteint son maximum au mois de juillet avec 200.9 mm. Le creux du mois d'août est encore discernable avec 143.8 mm, mais ce léger fléchissement ne suffit plus pour marquer la discontinuité de la saison des pluies qui se prolonge jusqu'au mois d'octobre. Elle cesse très rapidement à la fin de ce mois.

Si le nombre de jours de pluies est encore égal à 106 jours (tableau 3), la légère diminution du nombre de séquences (55 séquences) et l'augmentation de la durée moyenne de ces séquences (1.9 j) traduit une certaine concentration des épisodes pluvieux. La longueur moyenne mensuelle maximale des séquences pluvieuses aura lieu au mois de juillet.

c. Le régime tropical pur : Kandi (figure 3)

Dans cette catégorie, la saison s'allonge encore et dépasse six mois, d'octobre à avril. Il ne tombe aucune pluie pendant plusieurs mois consécutifs et les moyennes interannuelles de novembre, décembre et janvier sont proches de 0 : (0.8 , 0.5 et 0.3 mm respectivement). Pendant la saison des pluies, les précipitations augmentent rapidement jusqu'en août (300.7 mm) puis elles cessent brusquement en octobre. La concentration est encore plus marquée avec deux jours en moyenne par séquence d'épisode pluvieux et la longueur moyenne mensuelle maximale pour les séquences est de 2.9 en août.

d. Le régime sahélien : Aribinda, Markoye et Gorom-Gorom (fig. 4).

Il est nettement plus sévère. La saison sèche dure près de huit mois dans l'année, d'octobre à mai. Il n'est pas rare de trouver à ces stations plus de sept mois sans une goutte d'eau (exemple de Aribinda en 1960, Markoye et Gorom-Gorom en 1967). Ici aussi, la saison des pluies atteint son point culminant en août mais les valeurs maximales restent nettement inférieures à celles de Kandi : 140.6 mm à Markoye, 152.9 mm à Gorom-Gorom et 174 mm à Aribinda. On remarque de même une chute brutale du nombre de jours de pluies par an (40, 34 et 33 jours pour Aribinda, Gorom-Gorom et Markoye respectivement) et parallèlement une diminution du nombre moyen de jours par séquence pluvieuse (1.3 pour les trois stations). Les durées moyennes des séquences sèches sont supérieures à dix pour toutes ces stations contre seulement 6.4 à Kandi et 4.8 à Cotonou. Les durées moyennes maximales mensuelles des séquences pluvieuses sont encore au mois d'août mais ne sont plus que de 1.4 et 1.5. Ces caractéristiques montrent qu'il s'agit d'un régime nettement distinct.

On a vu que le comportement de ces divers régimes s'expliquait par les migrations annuelles du F I T. L'étude des données d'observation montre que le maximum annuel se déplace lorsque l'on monte du Sud vers le Nord. Les valeurs maximales sont observées en juin pour le climat équatorial, juillet pour le climat tropical de transition et août pour les climats tropical pur et sahélien. L'une des différences fondamentales au niveau des régimes tropical pur et sahélien réside dans les hauteurs observées et dans la longueur des séquences pluvieuses. Les faibles valeurs observées pour le régime sahélien s'explique par le fait que, dans ces régions, l'épaisseur de la mousson n'atteint jamais sa valeur maximale, compte tenu de la limite extrême Nord que peut atteindre le F I T.

Le calcul empirique multiclasse (tableaux 6-a,b,c,d) permet de voir la répartition des hauteurs de pluies à l'intérieur de la saison pluvieuse. Plusieurs variantes ont été considérées : les variantes A et C (seuils 0, 10, 25 et 50 et seuils 0,  $m$ ,  $m + \sigma$  et  $m + 2\sigma$ ) peuvent servir de base d'analyse pour des considérations de gestion des ressources en eau dans sa globalité - formation de crues, alimentation des réservoirs - tandis que les variantes B et D peuvent plus spécifiquement servir dans la détermination des périodes de semences en culture sèche.

Les caractéristiques des différentes variables sont rassemblées dans les tableaux mentionnés. On remarque nettement une certaine uniformité dans la répartition des jours de pluies pour lesquels la hauteur est comprise entre 10 et 50 mm. Par contre, le nombre de jours pour lesquels la hauteur de pluie est supérieure à 50 mm ou plus généralement à  $m + 2\sigma$  a tendance à diminuer du Sud vers le Nord. Ce trait s'observe aussi pour les deux autres variantes considérées. Quelle que soit la classe considérée et la variante utilisée, le passage du climat tropical pur au climat sahélien est marqué par une nette diminution du nombre de jours de pluies (sauf, bien sûr, pour la classe sèche).

En résumé, on peut dire que le calcul empirique des divers paramètres des stations étudiées permet de donner une bonne description des régimes pluviométriques de l'Afrique de l'Ouest en parfait accord avec les notions de progression lente du maximum des pluies à partir de juin, du Sud vers le Nord. Cette progression s'arrête au mois d'août pour s'inverser à partir de septembre. Elle marque de façon claire le balancement annuel du F I T suivant le mouvement apparent du soleil. Cette régularité du phénomène physique au niveau annuel est bien marquée par la forme de la fonction d'autocorrélation qui montre une nette périodicité pour toutes les stations considérées (figure 3).

Le but du calcul markovien sera donc de retrouver les différents paramètres dégagés par l'étude empirique ainsi que leur dispersion et de passer du stade de l'observation à celui de prévision en donnant les probabilités marginales et conditionnelles des divers évènements.

#### 4.3.3. Présentation des résultats d'identification markovienne.

Les résultats des divers calculs théoriques sont présentés dans les tableaux 7 à 10 et en annexe (sous forme de tableaux et de courbes). En comparant ces résultats théoriques obtenus avec les chaînes de Markov de différents ordres (1 à 4) et les résultats de calculs empiriques, on peut faire les remarques suivantes:

- on observe une bonne restitution de la durée moyenne des séquences sèches et pluvieuses quelle que soit la station considérée et quel que soit l'ordre et, ce, malgré les différences notées plus haut entre les régimes équatoriaux et tropicaux d'une part et le régime sahélien d'autre part (tableaux 7 et 8).

- de même, quel que soit le régime considéré, on remarque une amélioration progressive de la représentation des écarts-types et des coefficients de variation lorsque l'ordre de la chaîne de Markov utilisée augmente. Il y a lieu, ici, de distinguer deux cas :

- . Pour les durées pluvieuses : ces paramètres sont restitués de manière acceptable; on note cependant que pour les régimes équatoriaux (équatorial pur et équatorial de transition), les ordres 2 et 3 suffisent pour retrouver les valeurs empiriques (tableaux 7-a,b,c,d,e,f,g), alors que pour les autres, il faut monter à l'ordre 4.

- . Pour les durées sèches : pour tous les régimes étudiés, l'amélioration progressive constatée avec les chaînes de Markov d'ordre de plus en plus élevé ne permet pas d'atteindre, même à l'ordre 4,

les valeurs empiriques calculées pour les écarts-types et les coefficients de variation. A l'ordre 4, on est d'autant plus loin de la valeur empirique que l'on se trouve plus au Nord (tableaux 8-a,b,c,d,e,f,g).

Nous avons cherché à voir s'il existait un lien possible entre cette tendance et l'évolution du F I T. Les tableaux 9 a et b présentent les erreurs relatives que l'on fait par rapport aux valeurs empiriques, en représentant l'évolution des séquences par les différents ordres de la chaîne de Markov. Pour les séquences sèches, on constate que la chaîne de Markov d'ordre 4 représente les séquences empiriques avec une erreur relative de 24% pour la station de Cotonou, de 42% pour celle de Kandî et de 50% pour les trois stations du régime sahélien. On constate que pour Bohicon, l'erreur relative que l'on fait en utilisant la chaîne de Markov d'ordre 4 est du même ordre que celle que l'on fait en utilisant la chaîne de Markov d'ordre 3 pour Cotonou. De même, pour Savé, la chaîne de Markov d'ordre 4 donne la même précision que la chaîne d'ordre 3 à Bohicon et que la chaîne d'ordre 2 à Cotonou. Pour Kandî, la précision avec l'ordre 4 est du même ordre que celle obtenue avec la chaîne d'ordre 3 à Savé ou la chaîne d'ordre 2 à Bohicon ou la chaîne d'ordre 1 à Cotonou. La plus grande erreur relative (72%) est obtenue en représentant l'évolution des séquences sèches à Kandî par la chaîne de Markov d'ordre 1. Ici encore, on constate que les régimes sahéliens représentent un cas à part. Si l'on considère donc seulement le cas des stations béninoises étudiées, on peut dire que l'ordre de la chaîne de Markov nécessaire pour obtenir une erreur relative fixée à l'avance croît avec la durée moyenne des séquences sèches. En rapprochant cette constatation des résultats de l'étude empirique, notamment de ce que la longueur des saisons sèches ou pluvieuses est liée aux dates de passage du F I T aux stations d'observation, on est amené à conclure que

le nombre de paramètres significatifs à conserver dans l'expression linéarisée de  $R(m,t)$  qui décrit la répartition de l'énergie croît du Sud vers le Nord.

On en conclut que pour les régimes équatoriaux et tropicaux en étude, le nombre de degrés de liberté à considérer augmente lorsqu'on passe d'un régime à l'autre, du Sud vers le Nord. Or, l'une des particularités de ces régimes est que le régime équatorial, plus au Sud, occupe la partie côtière du Bénin ; il est donc directement influencé par la proximité de l'Océan Atlantique, alors que pour les régimes tropicaux, plus au Nord à l'intérieur du pays, cette influence de l'Océan est moins sensible. Tout se passe donc comme si la proximité de l'Océan Atlantique et du centre de l'anticyclone à Sainte-Hélène constituait un paramètre modérateur important dans la détermination de l'ordre de la chaîne de Markov, donc dans la répartition de l'énergie. En d'autres termes l'analyse théorique semble indiquer ainsi que, pour une station donnée, plus l'influence des hautes pressions centrées sur l'Océan Atlantique austral (anticyclone de Sainte-Hélène) se fait sentir, plus faible est le nombre de paramètres nécessaires pour décrire la répartition de l'énergie. Au contraire, plus faible est l'influence de l'air tropical maritime, plus grand est le nombre de paramètres à prendre en considération. L'analyse du phénomène physique, donnée dans la première partie de ce chapitre, a permis de mettre en relief l'importance relative de chacune de ces masses d'air (§ 4.2.2), le rôle prépondérant de la vapeur d'eau dans la répartition de l'énergie et celui

du couple atmosphère-hydrosphère comme étant à l'origine de cette répartition (§ 4.2.1). Les résultats du calcul théorique (tableau 9-b) semblent constituer une confirmation de cette description de l'évolution du cycle de l'eau.

Un calcul approché, utilisant la régression linéaire, permet de se faire une idée (à titre indicatif) de l'ordre maximal que nécessiterait la dispersion du phénomène. On trouve (tableau 9-c) que la dispersion des durées sèches pour les stations béninoises serait mieux représentée par une chaîne de Markov d'ordre 8 alors que les stations sahéliennes nécessiteraient un ordre plus élevé (figure 4).

A la lueur de toute l'analyse qui précède, on s'attend à ce que les probabilités marginales et conditionnelles ainsi que les fonctions de répartition reflètent, dans leur évolution, les mêmes tendances que les paramètres représentant la dispersion. Les tableaux 10 (a,b,c,d) présentent les valeurs des probabilités pour les différents ordres. Dans l'ensemble, ces résultats confirment les résultats connus à partir de l'étude de la dispersion. Cette confirmation est particulièrement nette pour les probabilités conditionnelles des chaînes d'ordre supérieur à 1. Les figures représentant les fonctions de répartition sont présentées en annexe. Les tendances ci-dessus mentionnées s'y perçoivent encore plus nettement. On remarque en particulier que, si l'on peut considérer que les chaînes de Markov d'ordre 4 donnent une bonne description des séquences pluvieuses, les séquences sèches sont toujours mal restituées. On explique cette description relativement médiocre de la réalité physique par le fait que les diverses formules utilisées s'appuient sur une approximation linéaire du modèle de base décrit par l'équation (10). Or, on a montré plus haut (chapitre II) que la probabilité de transition des processus de Markov décrite par les équations différentielles vérifie l'équation de FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV.

Lorsque les équations différentielles de départ sont non-linéaires, une approximation de la solution de l'équation de FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV peut être obtenue à partir des polynômes d'HERMITE. Une telle approximation est présentée au chapitre III. Son application aux données d'observation permet d'améliorer la représentation des fonctions de répartition des séquences sèches, mal décrites par l'approximation linéaire (figure ).

Les résultats de calcul théorique mensuel et des calculs théoriques multiclassés sont rassemblés sous forme de tableaux en annexe ( ). On remarque que les valeurs maximales des durées moyennes des séquences pluvieuses se déplacent de juin (pour Cotonou et Bohicon) au mois d'août (pour les stations de Kandi, Aribinda, Gorom-Gorom et Markoye) en passant par l'étape intermédiaire de juillet (pour la station de Savé). On retrouve encore là l'influence de la migration du F I T. On remarque notamment que les maxima du mois d'août sont recueillis à Kandi, Aribinda, Markoye et Gorom-Gorom, alors que le F I T atteint sa position la plus au Nord (entre 20°N et 25°N) laissant les stations concernées bien plus au Sud (Markoye, la plus au Nord, est à 14°N 38'). Cette observation est conforme aux résultats des études météorologiques antérieures qui indiquent que la zone située au nord de la trace au sol du F I T est généralement claire et sans formation orageuse (RODIER 1964, DHONNEUR 1974).

#### 4.3.4. Influence des effets d'échelle

La relation d'équivalence proposée (équation 1) pour décrire l'évolution du cycle de l'eau et traduite sous la forme de l'équation différentielle stochastique (équation 10) a permis de suivre l'évolution de la répartition des précipitations par rapport aux migrations du F I T. D'après DHONNEUR, le F I T

appartient à une entité planétaire appelée équateur météorologique ou équateur énergétique de la Terre. Elle est matérialisée au sol et dans les couches moyennes par le creux barométrique équatorial qui constitue la limite des circulations méridiennes des deux hémisphères. On peut donc espérer que la prise en compte de tous les facteurs qui déterminent la répartition de l'énergie (i.e., une version vectorielle de l'équation 10), conduise à une description plus fine de la structure des précipitations dans la région. Pour la version scalaire utilisée, le modèle linéaire donne une bonne description de la répartition des durées de séquences tant que ces durées ne dépassent pas quelques jours. Lorsque cette durée dépasse quelques dizaines de jours, il faut faire appel au modèle non-linéaire. Ce fait d'observation nécessite une analyse plus détaillée.

En considérant les bases physiques de l'établissement du modèle, la question que l'on se pose est la suivante : le passage du modèle linéaire au modèle non-linéaire est-il explicable par un effet d'échelle ?

Pour répondre à cette question, il faut, d'une part analyser comment la notion d'échelle se traduit dans la structure du modèle théorique et, d'autre part comment elle se présente dans la réalité physique.

Considérons donc la formulation linéaire du modèle proposé sous la forme suivante :

$$dX = -(aX - \bar{P})dt + \sigma(t) d\beta \quad (20)$$

On obtient l'équation d'état sous la forme :

$$X = X_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \bar{P}(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \sigma(\tau) d\beta(\tau) \quad (21)$$

En prenant l'espérance mathématique de cette expression, on a :

$$E [X] = X_0 e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} \bar{P}(\tau) d\tau \quad (22)$$

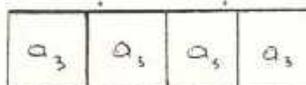
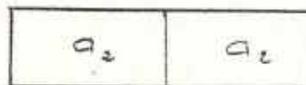
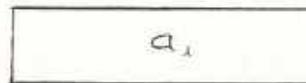
Cette dernière expression est analogue à celle que l'on rencontre dans la théorie des systèmes déterministes invariants. Mais la démarche habituelle dans ce cas consiste à considérer comme fixe la constante de temps  $\zeta = 1/a$  et à examiner les situations correspondant à  $t = 1, 2, \text{etc.}$ . On va considérer dans ce qui suit une approche différente. Pour des valeurs de temps données,  $t$ , telles que  $t_1, t_2, t_3, \dots$  soient des entiers positifs, on se donne des constantes de temps :

$$\zeta = 1/a_1 \quad ; \quad \zeta_2 = 1/a_2 \quad ; \quad \zeta_3 = 1/a_3 \quad ; \quad \text{etc...} \quad (23)$$

A chacune de ces constantes de temps, correspond un système différent. Supposons, pour fixer les idées, que :

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots \quad (24)$$

et que les  $a_i$  sont obtenus par partage d'un système initial en sous-systèmes :



On aura  $\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3 \dots$

Compte tenu des relations sur les constantes de temps, si l'on veut que, quels que soient  $a_1, a_2, a_3 \dots$

$$a_1 t_1 = a_2 t_2 = a_3 t_3 = 1 \quad (25)$$

il faudra que l'on admette les relations :

$$t_1 = \frac{a_2 t_2}{a_1} = \frac{t_2}{n} \quad ; \quad t_1 = \frac{a_3 t_3}{a_1} = \frac{t_3}{m} \quad (26)$$

ce qui montre que  $t_2$  et  $t_3$  doivent exprimer des unités  $n$  et  $m$  plus petites que  $t_1$ .

On peut aussi partir de systèmes suffisamment petits, considérés comme unitaires et compatibles avec le problème physique en étude. On procède alors à l'agrégation de plusieurs systèmes tels que les relations suivantes soient vraies pour les systèmes résultants respectifs :

$$\begin{aligned} b_1 < b_2 < b_3 < \dots & \\ \eta_1 > \eta_2 > \eta_3 > & \end{aligned} \quad (\eta_i = 1/b_i) \quad (28)$$

Avec les mêmes hypothèses sur  $t$ , on peut choisir une forme agrégée telle que la constante de temps du système global soit un multiple de la constante de temps du système élémentaire.

Cette analyse fait ressortir la liaison implicite qui existe entre les échelles de temps et d'espace dans la structure du modèle.

Examinons maintenant les liaisons entre les différentes échelles de temps et d'espace dans la répartition de l'énergie en milieu physique naturel.

D'après DHONNEUR (1974), le cycle de transfert énergétique peut se résumer en quatre phases principales comme suit :

- la source d'énergie se trouve dans les échanges existant entre l'air et l'eau (l'échelle du phénomène est de l'ordre de  $l \sim 10$  km) ;
- l'énergie est transportée sous forme de chaleur latente à la base des nuages, (l'échelle du phénomène coïncide avec la petite échelle  $\sim 10 \sim 100$  km) ;
- les nuages, organisés à l'échelle moyenne ou synoptique, transportent l'énergie dans la haute troposphère (il s'agit là de la mésoéchelle pour le premier et de la macroéchelle pour le second. Elles correspondent respectivement à des extensions de l'ordre de  $100 \sim 1000$  km et  $1000 \sim 10.000$  km) ;
- cette énergie est alors utilisée dans la circulation générale, à l'échelle planétaire.

On voit que les échelles de ces phases de transfert énergétique correspondent aux échelles de turbulence définies par GOSSET et rapportées plus haut.

De même, l'analyse des travaux de CHANG et al. (1984) a montré qu'ils donnent une classification des précipitations atmosphériques en terme de leur durée et de leur extension spatiale. La classification donnée par ces auteurs est aussi analogue à celle donnée par GOSSET pour la turbulence, mais elle s'appuie sur la dynamique de l'organisation du champ de précipitation dans l'espace-temps. Elle montre en particulier qu'à l'intérieur d'un champ de précipitation, à une échelle donnée, il s'organise un ou plusieurs champs de précipitations d'échelles plus petites.

Ces différentes observations nous ont conduit à la conclusion que les phénomènes orageux font partie d'un ensemble de processus continu. Elles doivent être considérées comme le résultat d'une interaction entre les différentes échelles. Mais plus l'échelle de temps est

petite, plus l'extension spatiale du phénomène dans son ensemble est réduite. L'échelle de temps d'un jour, considérée dans cette étude, permet de prendre dans une même famille les précipitations cumulatives provenant des phénomènes discrets (pluies convectives isolées) et les pluies de mousson ayant un caractère continu. Les premières ont une durée et une extension spatiale relativement modestes, tandis que les secondes ont un caractère synoptique. Cette différence dans la nature physique du phénomène semble transparaître dans la représentation donnée par la fonction de répartition.

En effet, en considérant les phénomènes orageux dont l'échelle de temps est de quelques minutes à une demi-heure et dont l'aire d'extension est de l'ordre de 1 à 10 km<sup>2</sup>, l'évolution des paramètres d'état pour tout le système va dépendre en grande partie des facteurs locaux situés à l'intérieur de l'aire d'extension de ces phénomènes orageux. Mais comme l'équation du système est établie à partir du principe d'équivalence de l'évolution du cycle de l'eau et la répartition de l'énergie, sans aucune référence aux facteurs locaux, en déduit que, dans la solution de l'équation d'état, seule la valeur moyenne,  $E[X]$ , correspond à la variabilité de l'état du système, expliquée par la relation d'équivalence, tandis que le terme aléatoire (dans l'équation 2) traduit l'influence des facteurs locaux. On a montré plus haut que la relation d'équivalence décrit l'évolution du P l T. Par ailleurs, d'après une étude récente de CERON et ses collaborateurs (1985), si la montée et la descente du flux de mousson demeure la première cause de la variabilité saisonnière des précipitations dans ces régions, à l'échelle journalière, elle prend en compte moins de 13% de la variabilité totale. Or, compte tenu du temps d'observation (ou du mode d'échantillonnage) ce sont les phénomènes orageux isolés qui forment la majeure partie de la population des événements d'un jour ; on en déduit que, en considérant comme unitaire un sous-système qui aurait une constante de temps d'un jour, l'évolution du paramètre d'état va être dominée par l'influence des facteurs locaux (à près de 87%).

Si l'on considère maintenant un phénomène orageux, ayant une échelle synoptique, la remarque de CHANG et al (1984) sur la dynamique de l'organisation du champ de précipitations suggère de le considérer comme une agrégation de plusieurs sous-systèmes élémentaires, le système global ayant une échelle de temps beaucoup plus grande que celle de chacun des systèmes élémentaires qui le composent. Mais une telle agrégation se traduit par un filtrage des influences locales qui se réduisent au niveau synoptique à une valeur minimale. D'après l'étude de CERON et ses collaborateurs, citée plus haut, à l'échelle de trente jours, l'influence des facteurs locaux n'est plus que de 29% environ tandis que la variabilité expliquée par le F I T monte à 71%.

On peut tirer de ces faits d'observation deux conclusions importantes :

a. La première, c'est que l'écart-type apparaît comme une fonction du nombre d'éléments agrégés et sa valeur décroît lorsque ce nombre augmente. Les conséquences de cette conclusion seront surtout intéressantes pour la prévision à longs termes et seront analysées plus loin.

b. La seconde conclusion est que le comportement moyen du système global dépend du nombre d'éléments agrégés. Lorsque ce nombre n'est pas grand (ce qui revient à considérer un événement d'une durée de quelques jours), l'influence des facteurs locaux reste prépondérante, la valeur moyenne de l'état du système global reste quantitativement modeste ; alors ce système se comporte par rapport au paramètre explicatif choisi comme un système linéaire. Pour un nombre d'éléments suffisamment grand, l'influence des facteurs locaux s'estompe, le système n'est plus linéaire.

En somme, tout se passe comme si, le système naturel ayant toujours un comportement non-linéaire, lorsque l'on considère une échelle de plusieurs dizaines de jours, il faut distinguer deux populations de phénomènes. Une première population pour laquelle toutes les causes possibles de non-linéarité sont rassemblées dans le terme aléatoire qui reste prépondérant, mais l'espérance mathématique de l'état du système est alors linéaire. Pour la seconde population, le filtrage progressif des termes aléatoires fait reporter les causes de non-linéarité sur la valeur moyenne du paramètre d'état.

Ce sont ces propriétés du système physique qui apparaissent à notre avis dans la représentation des fonctions de répartition des durées de séquences. Le même raisonnement peut être fait avec les durées de séquences sèches mais les paramètres sont expliqués non par les flux de mousson mais par le flux d'air continental sahélien (l'harmattan).

Une démarche analytique permet d'aboutir à la même conclusion beaucoup plus rapidement.

Considérons en effet la fonction de répartition conditionnelle du processus du premier ordre :

$$FR1 = 1 - \alpha_{ij}^n = 1 - e^{n \text{Log } \alpha_{ij}} \quad (29)$$

avec

$$\alpha_{ij} = P_r (X_i / X_j)$$

Posons  $\text{Log } \alpha_{ij} = A$ . Par un choix approprié de l'unité, on peut supposer une évolution continue en fonction de  $n$ ; en en déduit alors la densité de probabilité sous la forme :

$$P_r = -A e^{An} \quad (30)$$

et une équation d'évolution de la densité de probabilité sous la forme :

$$\frac{d P_r}{d .n} = A P_r \quad (31)$$

Mais par ailleurs, les développements effectués au chapitre II ont montré que pour une équation d'état du système donnée par :

$$dX = F(X, t) dt + \sigma_F dB \quad (32)$$

la densité de probabilité de l'état  $X_i$  si  $X_j$  est réalisé, est décrite par l'équation :

$$dP_r = \left( \frac{\partial P_r}{\partial t} + F \frac{\partial P_r}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma_F^2 \frac{\partial^2 P_r}{\partial X^2} \right) dt + \sigma_F \frac{\partial P_r}{\partial X} dB \quad (33)$$

Comme on a posé  $\text{Log } \alpha_{ij} = A = \text{cst}$ , la variation totale de  $P_r(X_i / X_j)$  est nulle,  $E[dP_r] = 0$  et l'on a :

$$\frac{\partial P_r}{\partial t} = - \left( F \frac{\partial P_r}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma_F^2 \frac{\partial^2 P_r}{\partial X^2} \right) = A P_r \quad (34)$$

A ce niveau, on voit apparaître l'analogie entre (31) et (34) : Cette analogie sera parfaite si l'on a l'approximation linéaire :

$$- \left( F \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma_F^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) = A = - \text{Log} (1 / \alpha_{ij}) \quad (35)$$

Ce que montre la représentation des fonctions de répartition théorique, c'est que pour une durée des phénomènes considérés ne dépassant pas quelques jours, cette approximation linéaire est acceptable.

4.4. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES DU CHAPITRE IV

ASSAMOI P. et PLANTON S.P. (1984)

Etude numérique des perturbations sur la région ouest-africaine en période de mousson.  
Journ. de Rech. Atmosph. vol 18, n° 2, avril - juin,  
pp. 81-94

CERON J.P., LAURAC J.P. et PERRET G.

Analyse statistique de la structure du champ de précipitation au Sahel.  
Rapp. Départ. SCAB - ENM - Toulouse

CHANG T.J., KAVVAS M.L. et DELLEUR J.W. (1984)

Daily Precipitation Modeling by Discrete Autoregressive Moving Average Processes.  
Water Res. Res. vol 20, n° 5, may, pp. 565-580

DHONNEUR G. (1974)

Nouvelle Approche des réalités météorologiques de l'Afrique Occidentale et Centrale.  
Thèse de Docteur-Ingénieur, n° 3, octobre, Université de Dakar - et - Direction de l'ASECNA

GATES W.L. (1981)

The climate system and its portrayal by climate models : A review of basic principle. Part I. In "Climatic variations and variability : facts and theory". (N A T O) Advanced Study Institutes Series . Series C. Math. and Phys. Sc. ; Edit. by A. Berger ; D. Reidel Publishing Company, pp. 3-19

GATES W.L. (1979)

Physical basis of climate.  
In "Proc. of World Climate Conference"  
W.M.O. N° 537, W.M.O-Geneva, pp. 112-131

GOSSET B. (1979)

La météorologie ; Présentation et perspectives.  
Exposé sur la Météorologie ; CRAS - Séances du 22 janvier

JAWZINSKI A.H. (1970)

Stochastic Process and Filtering theory.  
Academic Press - New-York

- KOCKARTS G. (1982)  
Structure générale de l'atmosphère terrestre.  
Comptes Rendus de l'Ecole d'hiver : "Application de la physique moléculaire à l'Atmosphère et l'Environnement".  
Sous la direction de Camy-Peyret C. Edit.-CNRS, Paris, pp. 30-96
- MAVRIDES S. (1973)  
L'Univers Relativiste  
Masson et Cie Edit. Paris
- MOREL P. (1979)  
Le climat ; Exposé sur la Météorologie  
CRAS, Séance du 26 février
- RODIER J. (1964)  
Les Régimes Hydrologiques de l'Afrique Noire à l'Ouest du Congo.  
Mémoire ORSTOM (Service Hydrologique) Paris
- RODIER J. et SIRCOULON J. (1963)  
Monographie de l'Ouémé Supérieur - Tome I.  
ORSTOM (Service Hydrologique) Paris
- SIRCOULON J. (1976)  
Les Sécheresses et les Etiages : la récente sécheresse des régions sahéliennes.  
ORSTOM (Service Hydrologique) Paris
- THIRRIOT C. (1984)  
Note sur le degré de liberté des chaînes de Markov d'ordre supérieur.  
Rapp. Int. C.T. n° 600, mai - INP-IMFT
- TODOROV A.V. (1985)  
Sahel : The changing Rainfall Regime and the "Normals" used for its assessment.  
Journal of Climate and Applied Meteorology, Vol. 24, n° 2, February, pp. 97-107
-

1871

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



CHAPITRE VCARACTERISATION DU RESEAU DE TRANSPORT

	Pages
<u>5.1.</u> <u>INTRODUCTION</u>	5,1
<u>5.2.</u> <u>LE RESEAU HYDROGRAPHIQUE</u>	5.2
5.2.1. Le problème de la représentation des incertitudes spatiales	5.2
5.2.2. Description du réseau	5.4
<u>5.3.</u> <u>L'HYDROGRAMME UNITAIRE INSTANTANNE GEOMORPHOLOGIQUE</u>	5.6
5.3.1. Présentation du modèle	5,6
5.3.2. Analyse critique	5.11
<u>5.4.</u> <u>CLASSIFICATION DE THIRRIOT</u>	5.13
5.4.1. Présentation du modèle	5.13
5.4.2. Perspectives	5.14

.....

<u>5.5.</u>	<u>ESSAI DE DESCRIPTION DES PROPRIETES FRACTALES ET MARKOVIENNES DU RESEAU HYDROGRAPHIQUE</u>	5.15
	5.5.1. Application de la théorie fractale	5.15
	5.5.2. Détermination de la réponse du système	5.21
<u>5.6.</u>	<u>CONCLUSION</u>	5.24
	<u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u>	5.25

---

### 5.1. INTRODUCTION

L'une des démarches les plus courantes, lorsqu'on aborde l'étude du fonctionnement hydrodynamique des bassins versants, consiste à remplacer la complexité spatiale du problème réel par une configuration déterministe et très idéalisée. Aux équations complètes décrivant le mouvement du fluide sur le bassin, on substitue un modèle global. La justification profonde de cette démarche réside dans la différence des niveaux d'échelle entre les problèmes de l'hydraulique de l'écoulement dans les canaux et l'étude du mouvement de l'eau sur un bassin versant. En effet, si dans le premier cas, l'attention est portée sur un canal unique, dans le second cas, on a affaire à un réseau formé d'un grand nombre de canaux. A un problème d'ordre purement hydraulique, s'ajoute un problème d'ordre géomorphologique dépendant de la géométrie du réseau.

Nous étudions dans ce chapitre la géométrie du réseau hydrographique et son influence sur la réponse du bassin versant. Les aspects qualitatifs de la description du réseau hydrographique sont bien connus des géographes puisqu'ils font l'objet d'étude de la "morphométrie fluviale" fondée par HORBON (LAMBERT - 1975). En hydrologie, si les aspects quantitatifs sont depuis longtemps au centre des préoccupations (EAGLESON - 1970), ce n'est que tout récemment que des caractéristiques géomorphologiques ont été introduites de manière analytique dans la réponse du bassin versant (RODRIGUEZ-ITURBE et al. - 1979, GUPTA et al. - 1980). Depuis ces premiers travaux, la théorie de l'hydrogramme unitaire instantané géomorphologique (H U I G) a fait l'objet d'un intérêt croissant de la part des hydrologues ; (voir références bibliographiques). Après avoir posé le problème de la représentation des incertitudes spatiales, nous présenterons ici l'idée de base de la démarche qui conduit à la détermination de l'H U I G. Nous montrerons le lien entre cette idée et le problème de repérage posé par C. THIRRIOT (1982). Un essai de description des propriétés fractales et markoviennes du réseau hydrographique est présenté.

## 5.2. LE RESEAU HYDROGRAPHIQUE

### 5.2.1. Le problème de la représentation des incertitudes spatiales

Le modèle stochastique présenté au chapitre II est basé sur la définition du bruit blanc en temps seulement,  $\epsilon(t)$  ; (voir § 2.2.2., éq. 49), et sur la définition de l'accroissement du mouvement brownien :

$$E[\beta(t)] = 0$$

$$E[\beta(t)\beta(\tau)] = \int_0^{\min(t,\tau)} \epsilon(s) ds$$

tel que  $d\beta = \epsilon dt$

Mais la fonction d'entrée est caractérisée non seulement par sa variation dans le temps, mais aussi sa variation dans l'espace. La description mathématique du réseau doit permettre de rendre compte non seulement de cette variation spatiale de la fonction d'entrée mais aussi des hétérogénéités spatiales. En toute rigueur, le terme d'incertitude devrait être un bruit blanc en temps et en espace. Malheureusement, la définition d'un tel processus doit faire appel à une théorie des champs aléatoires pour laquelle les outils mathématiques sont seulement en cours d'élaboration.

En effet, tout récemment, DYNKIN (1980) a montré, en donnant une définition symétrique du processus de Markov, certaines propriétés de champ aléatoire gaussien, lié à ce processus. La définition symétrique des processus de Markov consiste à remplacer la notion de dépendance conditionnelle vérifiant :

$$\Pr(X_{tn} | X_{tn-1}, \dots, X_{to}) = \Pr(X_{tn} | X_{tn-1})$$

par celle d'indépendance conditionnelle. On considère dans ce cas deux processus :

$$X_t, t > t_{n-1}, \quad X_t, t < t_{n-1}$$

et l'on dit que les deux processus sont conditionnellement indépendants lorsque  $X_{t_{n-1}}$  est donné. On peut alors envisager la généralisation du processus de Markov en un champ markovien. Si l'on définit un champ aléatoire  $\phi$  sur un espace  $E$  par une famille de v.a.

$\phi_x \in E$ , il sera markovien si sur une partie de sous ensembles  $B$  et  $C$  de  $E$ , les valeurs de  $\phi$  sur  $B$  et  $C$  sont conditionnellement indépendantes, étant donné les valeurs sur l'intersection  $B \cap C$ . On voit qu'il sera alors théoriquement possible de rendre compte des incertitudes dans l'espace et dans le temps, en définissant  $\varepsilon(t, x)$  tel que :

$$\varepsilon(t, x) ; t > t_{n-1}, \quad x > x_{n-1}$$

$$\varepsilon(t, x) ; t < t_{n-1}, \quad x < x_{n-1}$$

soient conditionnellement indépendants lorsque  $\varepsilon(t_{n-1}, x_{n-1})$  est donné.

Nous considérons ici une dimension spatiale ; on peut alors profiter du fait qu'il est ordonné et considérer  $\varepsilon(t, x)$  sur lequel, on pourra définir un processus du mouvement brownien en temps et en espace :

$$E[\beta(t, x)] = 0$$

$$E[\beta(t_1, x_1)\beta(t_2, x_2)] = \int_0^{\min(t_1, t_2)} \int_0^{\min(x_1, x_2)} C(s, \xi) ds d\xi$$

et  $d\beta = \varepsilon(t, x) dt dx$ .

Même dans ce dernier cas, l'application de la théorie de champ aléatoire nécessite un développement théorique préalable. La méthode adoptée dans cette étude consiste à considérer un champ aléatoire continu en temps et discret en espace. Nous montrerons dans les paragraphes qui suivent le lien entre ce modèle "continu-discret" et les descriptions spatiales du réseau hydrographique.

### 5.2.2. Description du réseau hydrographique

Pour décrire le comportement du complexe physique qui constitue le bassin versant, les praticiens introduisent habituellement un certain nombre de paramètres caractéristiques (ROCHE - 1970, pp. 143-172). Ce sont :

- les caractéristiques géométriques (indice de compacité, courbe hypsométrique, rectangle équivalent, indice de pente, densité de drainage), et
- les caractéristiques du sol (indice de saturation, coefficient de ruissellement, capacité d'absorption).

Cette pratique suppose que l'on admette implicitement l'existence d'une structure moyenne du réseau de drainage pour les bassins versants. EAGLESON (1970, pp. 337-378) indique que l'on admet comme raisonnable l'hypothèse qu'en moyenne le réseau de drainage possède une symétrie approximative de part et d'autre de l'axe longitudinal du bassin versant. Il montre que si les projections de bassins versants sur un plan ont des formes géométriques similaires, alors le rapport de la surface  $S$  du bassin sur le carré de la longueur doit rester constant. Mais pour BOCQUILLON (cité par THIRRIOT - 1982), à une échelle donnée, la finesse des observations est caractérisée par la taille des surfaces drainées en amont des extrémités. La longueur totale développée  $L$  et le nombre  $n$  d'extrémités sont alors fonction du rapport  $(S / S_0)$ ,  $S$  étant la surface moyenne du sous réseau considéré et  $S_0$  la surface du réseau total. L'analyse de BOCQUILLON fait donc appel aux propriétés fractales du réseau.

Mais les premières études à prendre en compte l'effet d'échelle sont celles de HORTON. En effet, d'après KIRSHEN et BRAS (1983), l'analyse quantitative du réseau hydrographique a commencé en 1945 avec l'analyse de HORTON qui classe les tronçons en leur attribuant des numéros à partir de l'amont. Les règles de numérotation sont les suivantes :

1. Les tronçons qui partent des sources sont définis comme étant des tronçons élémentaires d'ordre un.
2. Lorsque deux tronçons d'ordre  $v$  confluent, un tronçon d'ordre  $(v + 1)$  en résulte.
3. Lorsque deux tronçons de différents ordres se rencontrent, on attribue au segment de chenal qui en résulte l'ordre du tronçon amont d'ordre le plus élevé.
4. On attribue au bassin, l'ordre du chenal d'ordre le plus élevé.

Etant donné une classification, HORTON a démontré plusieurs lois empiriques parmi lesquelles on peut citer :

- la loi des nombres de tronçons
- la loi des longueurs de tronçons

Plus tard, SCHUMM (1956) partant du modèle de HORTON a proposé la loi des aires.

La loi des nombres de tronçons indique que la quantité totale de tronçons de différents ordres dans un bassin de drainage donné suit approximativement une progression géométrique décroissante dans lequel le premier terme est égal à l'unité et la raison de la série est le rapport de confluence de HORTON,  $R_B$  :

$$\sum_{v=1}^m N_v = R_B^{m-(m)} + R_B^{m-(m-1)} + \dots + R_B^{m-(1)} \quad (1)$$

A partir de l'équation (1), on a :

$$N_v = R_B^{m-v} \quad v = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

On en déduit que :

$$N_{m-1} = R_B \quad (3)$$

Cette relation montre que  $R_B$  est le nombre de tronçons d'ordre  $(m-1)$ . En utilisant le résultat de l'équation (3) dans l'équation (2), on obtient :

$$R_B = N_{v-1} / N_v \quad (4)$$

On peut donc interpréter la loi de HORTON en disant que le rapport  $N_{v-1} / N_v$  pour  $v = 1, 2, \dots, m$  approche une valeur commune donnée par  $R_B$ .

Les concepts des lois de longueur de tronçon et de surface drainée par le tronçon sont les mêmes que ceux contenus dans la loi des nombres. Indiquons seulement que les autres relations quantitatives des lois de HORTON se résument comme suit :

$$\text{Loi des longueurs de tronçon} \quad L_v / L_{v-1} = R_L \quad (5)$$

$$\text{Loi des aires} \quad S_v / S_{v-1} = R_S$$

Les résultats empiriques indiquent que pour des bassins naturels, la valeur du rapport de confluence est de l'ordre de 3 à 5. Pour  $R_L$ , cette valeur est de l'ordre de 1,5 à 3,5 et pour  $R_S$ , elle est de l'ordre de 3 à 6.

Les paramètres géomorphologiques  $R_B$ ,  $R_L$  et  $R_S$  sont les paramètres descriptifs du bassin à partir desquels l'on déduit la réponse à une excitation pluviométrique.

### 5.3. L'HYDROGRAMME UNITAIRE INSTANTANNE GEOMORPHOLOGIQUE

#### 5.3.1. Présentation du modèle

Pour déterminer l'H U I G, on considère l'entrée comme un volume composé d'une infinité de gouttes d'eau. L'analyse se concentre sur le déplacement d'une goutte (ou grain) choisie au hasard sur le bassin. La goutte d'eau est supposée se déplacer sur le bassin versant en faisant des transitions d'un tronçon d'ordre inférieur à des tronçons d'ordre

supérieur. On peut considérer une transition comme un changement d'état et l'état correspond à l'ordre du tronçon sur lequel se déplace la goutte d'eau. RODRIGUEZ-ITURBE et ses collaborateurs (1979, 1982) ont montré que le déplacement de la goutte d'eau sur le bassin versant peut être modélisé par un processus semi-markovien parce que le temps entre les transitions est dépendant de l'état actuel occupé.

Les états du processus sont définis comme étant les régions de surface ou bien encore les tronçons d'ordre  $i$  où se trouve la goutte au temps  $t$ . L'ensemble des états est noté  $A$ , avec :

$$A = \{ 1, 2, \dots, m+1 \} \quad (6)$$

Le déplacement d'une goutte est gouverné par les règles suivantes :

- a). lorsqu'une goutte est encore à la phase de surface, l'état est égal à l'ordre du tronçon à laquelle le sous bassin est directement lié ;
- b). les seules transitions possibles à partir de l'état  $v$  sont ceux de forme  $v \rightarrow j$  pour  $j > v$  (avec  $j = v+1, \dots, m$ )
- c). en définissant la sortie comme l'état attracteur  $m+1$ , l'état final de la goutte sera noté  $m+1$  et à partir de cet état, aucune transition n'est plus possible.

Ces règles définissent un ensemble fini de pas qu'un grain tombant de manière aléatoire sur le bassin pourrait suivre pour atteindre la sortie.

Par exemple, si l'on suppose que le bassin est d'ordre 3, alors l'espace des pas  $\eta = \{ u_1, u_2, u_3, u_4 \}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \text{pas } u_1 &= 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \\ \text{pas } u_2 &= 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \\ \text{pas } u_3 &= 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \\ \text{pas } u_4 &= 3 \rightarrow 4 \end{aligned}$$

où  $i = 1, 2, 3$  désigne les ordres et 4 représente la sortie du bassin.

D'après GUPTA et al. (1980), la fonction de répartition du temps que nécessite une goutte d'eau pour se déplacer jusqu'à la sortie est donnée par :

$$\Pr (T_B < t) = \sum_{u \in \eta} \Pr (T_u < t) p(u) \quad (7)$$

$T_B$  est le temps de déplacement jusqu'à la sortie

$T_u$  est le temps de déplacement pour un pas particulier  $u$

$p(u)$  est la probabilité d'un grain qui prend le pas  $u$

$\eta$  est l'ensemble de tous les pas possibles qu'une goutte d'eau peut prendre en tombant sur le bassin.

Le temps de déplacement  $T_u$  dans un pas particulier :

$$a_0 + a_1 + \dots + a_k$$

avec  $a_i \in \{1, \dots, m+1\}$

doit être égal à la somme de temps de déplacement dans les éléments du pas :

$$T_u = Ta_0 + Ta_1 + \dots + Ta_k \quad (8)$$

avec  $Ta_i$  désignant le temps de déplacement dans une région ou sur un tronçon d'ordre  $a_i$ ,  $a_i \in \{1, \dots, m+1\}$  et  $k$  le nombre de transition que la goutte d'eau doit effectuer.

Les auteurs indiquent que si l'on considère plusieurs tronçons ayant des ordres donnés et des propriétés données, on peut faire l'hypothèse que  $Ta_i$  est une variable aléatoire indépendante ayant une distribution de probabilité donnée par  $f_{a_i}(t)$ . Alors la fonction de distribution de  $T_u$  s'obtient par la convolution des distributions de probabilité  $f_{a_i}(t)$ , correspondant aux éléments du pas  $u$ .

La fonction de répartition de probabilité de  $T_u$  est aussi la convolution des fonctions de répartition des  $F_{a_i}(t)$ . Alors :

$$\Pr (T_u < t) = Fa_0(t) * Fa_1(t) * \dots * Fa_k(t) \quad (9)$$

où  $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_k$  est le pas de  $u$  et  $*$  est l'opération de convolution. Par exemple, si l'on choisit le pas  $u_2 = 1 + 3 + 4$ ,  $\Pr (T_{u_2} < t)$  est donné par :

$$\begin{aligned} \Pr (T_{u_2} < t) &= \int_0^t \int_0^{t-t'} F_1'(t') F_1(t'' - t') dt' \cdot F_3(t - t'') dt'' \\ &= F_1'(t) * F_1(t) * F_3(t) \end{aligned} \quad (10)$$

où  $F_1'(t)$  représente la répartition de probabilité correspondant au temps que la goutte passe sur la surface de la région qui draine le tronçon d'ordre 1.

Si l'on suppose que le temps d'attente dans la région de surface d'origine est négligeable, alors :

$$T_u = Ta_1 + Ta_2 + \dots + Ta_k \quad (11)$$

$$\Pr (T_u < t) = F_{a_1}(t) * F_{a_2}(t) * \dots * F_{a_k}(t) \quad (12)$$

La probabilité de suivre un pas donné  $u$ ,  $p(u)$  apparaît comme une conséquence directe de la structure markovienne de la classification de HORTON-STRAHLER et est donné par :

$$p(u) = \theta_{a_0}(0) p_{a_0 a_1} p_{a_1 a_2} \dots p_{a_{k-1} a_k} \quad (13)$$

où  $\theta_{a_0}$  est la probabilité pour que la goutte d'eau commence son déplacement dans une région de surface qui draine le tronçon d'ordre 0.

$p_{a_i a_j}$  est la probabilité de transition d'un tronçon d'ordre  $a_i$  à un tronçon d'ordre  $a_j$ .

RODRIGUEZ-ITURBE et al. (1979) ont montré que les probabilités initiales  $\theta_{a_0}(0)$  et les probabilités de transition  $p_{a_i a_j}$  sont fonctions de la géomorphologie et de la géométrie du bassin et se calculent

comme suit :

$$\theta_v(0) = S_v / S_o$$

avec  $S_v$  surface totale drainant directement le tronçon d'ordre  
et  $S_o$  surface totale du bassin

$$p_{ij} = N_{ij} / N_i$$

$N_{ij}$  le nombre de tronçons d'ordre  $i$  tombant dans le tronçon d'ordre  $j$

$N_i$  le nombre de tronçons d'ordre  $i$ .

KIRSHEN et BRAS (1983) ont donné les expressions de probabilités de transition en fonction de  $R_A$  et  $R_B$  et montré que toutes les probabilités dépendent de ces deux paramètres. Ils ont donné, pour un bassin d'ordre 3, toutes les expressions de probabilités possibles.

Ainsi, la fonction de répartition du temps de déplacement d'une goutte d'eau sur un bassin  $\text{Pr}(T_B < t)$  est définie en termes de propriétés géomorphologiques. Mais comme l'H U I G est défini par la densité de probabilité de  $T_B$ , on a :

$$h_B(t) = d \text{Pr}(T_B < t) / dt \quad (24)$$

$$= \sum_{u, \eta} f_{a_1}(t) \times \dots \times f_{a_k}(t) p(u)$$

où  $f_{a_i}(t)$  est la densité de probabilité de  $T_{a_i}$ .

En résumé, les auteurs considèrent que la fonction de répartition du temps de passage constitue une bonne description de l'influence de la géomorphologie. On peut justifier leur démarche par le fait que si l'ensemble du bassin est décrit par un réservoir linéaire, l'inverse du coefficient de stockage de ce réservoir constitue la constante du temps du système. La méthode de l'H U I G revient donc à considérer des réservoirs à coefficients aléatoires. Ces coefficients seraient fonctions de :

- la probabilité pour qu'une goutte d'eau de pluie tombe initialement sur une surface que draine un chenal d'ordre  $v$  ;
- la probabilité de transition au chenal d'ordre supérieur  $v + j$  ( $j = 1, \dots, m - v$ ) et de
- la densité de probabilité du temps passé sur un chenal d'ordre déterminé.

Les probabilités initiales et les probabilités de transition sont fonctions des caractéristiques géomorphologiques du bassin  $R_A$  et  $R_B$ . Ces probabilités de transition fournissent une description du réseau hydrographique et une liaison entre la géomorphologie quantitative et l'hydrologie.

### 5.3.2. Analyse critique du modèle

La première critique que l'on peut faire à l'adresse du modèle concerne son caractère très empirique. Par exemple, pour une application pratique du modèle, il est nécessaire de se donner la forme des fonctions  $f_{a_i}(t)$  qui décrivent les densités de probabilité. RODRIGUEZ-ITURBE et al. (1979) ont dû faire une hypothèse ad'hoc, notamment que le temps nécessaire pour le déplacement dans un tronçon d'ordre  $v$  obéit à une loi de type exponentiel :

$$f_v = K_v \exp(-K_v t) \quad (15)$$

où  $K_v$  est un paramètre exprimé en  $t^{-1}$  unités et qui caractérise le chenal d'ordre  $v$ . Comme  $1/K_v$  est aussi le temps moyen de déplacement dans la distribution ci-dessus, RODRIGUEZ-ITURBE et ses collaborateurs ont suggéré de prendre :

$$K_v = \frac{V}{L_v} \quad (16)$$

où  $V$  est la vitesse caractéristique de déplacement.

Cette vitesse constitue le paramètre dynamique du modèle.

Les auteurs ont supposé que  $V =$  est pour tout le bassin. En tenant compte de l'analogie faite ci-dessus entre la démarche des auteurs et la méthode des réservoirs linéaires, on voit que l'on arrive à un modèle décrit par une série de réservoirs à coefficients constants. KIRSHEN et BRAS (1983) suggèrent de calculer la réponse instantanée des chenaux individuels en utilisant une forme linéarisée des équations complètes de Saint-Venant. Cette réponse serait ensuite interprétée comme la densité de probabilité du temps de passage nécessaire à une goutte tombant au point le plus éloigné de la surface drainée par le chenal. Mais les auteurs indiquent que leur démarche ne permet pas encore de conclure, puisqu'elle nécessite encore des essais de calibration sur des bassins versants naturels.

La seconde critique est liée à la classification de HORTON. D'après C. THIRRIOT (1984), une telle classification fige l'acuité de l'observateur puisqu'elle fait démarrer la numérotation à partir des tronçons amont dont il est difficile de définir l'origine. S'appuyant sur l'hypothèse de BCCQUILLON, C. THIRRIOT suggère de fixer un seuil pour choisir les tronçons à considérer dans la description, suivant les objectifs ou l'effort consenti. La description de THIRRIOT est présentée plus loin.

Une troisième critique est que la classification de départ ne permet pas le repérage automatique d'un élément de cours d'eau. Une multitude de tronçons portent le même numéro, ce qui peut être gênant quand on vise l'identification automatique sur ordinateur.

Enfin, d'après GUPTA et al. (1983), le modèle de l'H U I G est inadéquat dans sa formulation actuelle. Lorsqu'on l'applique à un chenal de forme simple, il distord la structure de la réponse hydrologique.

A partir de ces critiques, on voit que si l'idée d'un hydrogramme unitaire qui prenne en compte les caractéristiques géomorphologiques du bassin versant répond aux préoccupations actuelles des hydrologues, la formulation du modèle est encore fort discutée. Cela s'explique par le fait que le modèle est encore à ses débuts et que d'autres études seront nécessaires pour aboutir à une meilleure formulation. La contribution récente de C. THIRRIOT (1984) à la description du réseau hydrographique va dans cette direction.

#### 5.4. CLASSIFICATION DE THIRRIOT

##### 5.4.1. Présentation de la démarche

Il propose de prendre comme point de départ du repérage l'exutoire du bassin versant. On considère un bassin défini une fois pour toutes, alors le postulat de base consistera à admettre qu'un confluent est la rencontre de deux éléments amont seulement. Ainsi, on a affaire à un système binaire, représenté par la figure A5. Sur cet arbre hypothétique, on peut placer l'arborescence décrivant le réseau hydrographique en s'arrêtant à une certaine taille de cours d'eau en remontant vers l'amont.

Pour le repérage automatique, la remarque fondamentale est la suivante, tout brin est parfaitement identifié par le noeud amont. Un noeud sera identifié par deux coordonnées :

- a). L'ordre de la nappe de noeud, qui est la distance au noeud aval correspond au nombre de brins rencontrés entre l'exutoire et le noeud considéré, soit  $m$ .
- b). La situation dans la nappe de noeud d'ordre  $m$ . Dans cette nappe, il y a au plus  $2^{m-1}$  noeuds compte tenu du caractère binaire.

Soit  $n$  le rang dans la nappe d'ordre  $m$  dans l'arbre,  $n \in [1, 2^{m-1}]$ .

En principe, tout cours d'eau peut donc être décrit par une succession de brin  $(m,n)$  avec  $m$  croissant d'une unité, mais  $n$  est à préciser lors de la première description. En utilisant un repérage binaire, on obtient la numérotation portée sur la figure 2. Lorsqu'on passe d'une nappe de noeud à la nappe d'ordre immédiatement supérieur, le nombre qui repère le noeud dans la nappe croît d'un chiffre binaire. Le nombre  $m$  de chiffres binaires caractérise l'ordre de la nappe de noeud, et le nombre de tronçons aval égal à  $2^m$ .

Pour le repérage d'une rivière sur un bassin versant, la numérotation choisie montre que le nom de la rivière correspond à celui de son branchement (numéro du tronçon aboutissant au confluent). Ensuite, on ajoute au nombre binaire un 0 pour chaque tronçon amont suivant.

Le nom du branchement est défini à partir du noeud aval qui est le confluent. Si  $k$  est le numéro du confluent en code décimal, le numéro de branchement en code décimal est  $2k-1$ . Les tronçons suivants écrits en code décimal sont  $(2k-1) 2^{p-1}$ ,  $p$  étant l'ordre du tronçon vers l'amont sur la rivière affluent.

#### 5.4.2. Perspectives

L'un des avantages de la description de THIRRIOT est qu'elle permet de prendre en compte l'effet d'échelle. Nous avons insisté, dans l'introduction, sur la différence dans les niveaux d'échelle liés au problème d'hydraulique des chenaux individuels et d'hydraulique de tout le bassin. La classification proposée par C. THIRRIOT permet d'aller dans le sens de la complexité croissante et d'arrêter cette complexité à un niveau voulu.

Pour la détermination du débit de sortie, l'un des problèmes importants est lié au choix de ce niveau de complexité. Le second problème est lié au caractère aléatoire du comportement du réseau. En considérant ensemble ces deux aspects, l'idée de base pour inclure les caractéristiques géomorphologiques dans le comportement hydrodynamique sera de rechercher une analogie avec d'autres formes d'évolution mettant en jeu le comportement collectif d'un grand nombre de composants. Un exemple édifiant dans le domaine peut être constitué par la loi des grands nombres et son rôle dans la théorie cinétique de gaz et en mécanique statistique. Dans sa formulation la plus simple, la loi des grands nombres indique que la moyenne arithmétique d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées converge (en probabilité) vers son espérance mathématique. La conséquence de ce théorème en mécanique statistique est qu'un grand nombre de degrés de liberté ( $\sim 10^{23}$ ) dans l'équation décrivant le mouvement des particules individuels (molécules), se réduit à quelques variables macroscopiques représentant le comportement collectif de ces particules à l'échelle macroscopique.

Dans le cadre de ce mémoire, nous essayerons de présenter la description du réseau en termes de ses propriétés fractales et des incertitudes liées à leurs influences.

## 5.5. ESSAI DE DESCRIPTION DES PROPRIETES FRACTALES ET MARKOVIENNES DU RESEAU HYDROGRAPHIQUE.

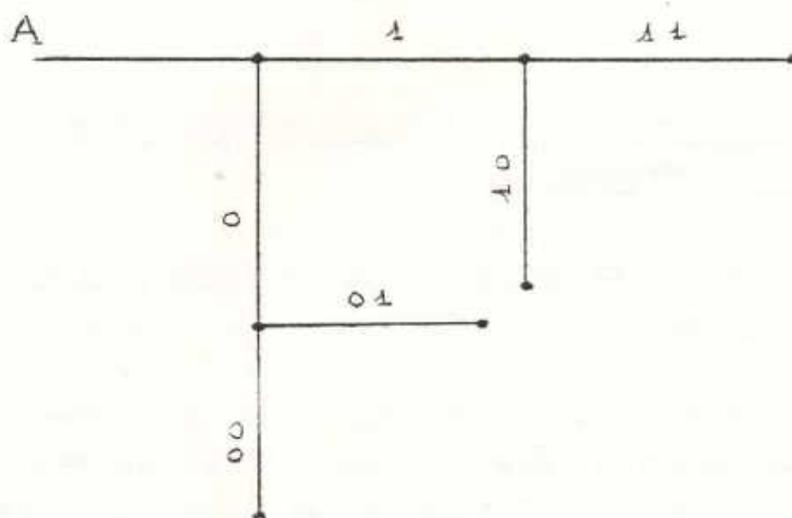
### 5.5.1. Les applications de la théorie fractale à l'étude du réseau.

Pour notre analyse, nous nous appuyerons sur un réseau hydrographique théorique schématisé par la figure 16-a. Nous adopterons la description du Professeur C. THIRRIOT mais en faisant partir la numérotation des chenaux amont supérieur au premier confluent. Les raisons d'un tel choix sont simples ; après ce premier confluent, l'évolution de la réponse du bassin est décrit par l'équation de propagation de l'onde de crue qui sera analysée au chapitre suivant.

La première propriété de ce réseau est son homothétie interne ou son caractère "scalant" (au sens de MANDELBROT - 1982), c'est-à-dire la possibilité de dégager des parties ayant la même forme que le tout, à ceci près qu'elles sont à une échelle différente. "Tout petit réseau fluvial n'est qu'une image réduite d'un grand réseau", a indiqué l'auteur des "objets fractals".

On note donc (0) et (1) les deux premières branches et on dira que ces branches forment le premier niveau. Au niveau deux, on aura les notations (00, 01, 10, 11) ; au niveau trois, (000, 001, 010, 011, 101, 110, 111), etc. Pour mettre en évidence les propriétés fractales de cet ensemble, on est amené à dégager un élément unitaire qui se répète identique à lui-même à chaque niveau. On doit remarquer que la plus petite entité est constituée par le chenal. Mais un seul chenal ne forme pas encore le réseau. Le plus petit ensemble formant un réseau est constitué par les deux premiers niveaux.

On définira donc le réseau élémentaire par un ensemble à deux niveaux, suivant le schéma ci-dessous :



D'après MANDELBROT (1984), en géomorphologie, le local et le global sont également incertain. Donc, que ce soit au niveau global ou au niveau local, on doit envisager l'adjonction de terme d'incertitude de même nature à la description déterministe. Or, on a montré (chapitre II) que, pour décrire l'évolution d'un phénomène naturel, l'adjonction d'un terme stochastique de bruit blanc conduit à une équation différentielle stochastique dont la solution est un processus de Markov. Nous suivons ici la même démarche.

Appelons  $Q$ , la réponse du système en A. Suivant la notation admise, le débit sur la branche  $i$  sera noté  $Q_i$  et sur la branche  $ij$  sera noté  $Q_{ij}$ , etc.

GAUDU (1978) a étudié l'influence de la structure arborescente sur les caractéristiques des lois de distribution des débits. Il a notamment indiqué que si les stations de contrôle sont suffisamment voisines, alors  $Q_0$  et  $Q_1$  sont des variables dépendantes telles que :

$$Q_A = Q_0 + Q_1 \quad (17)$$

L'application d'une loi de régression linéaire de la forme :

$$Q_1 = a Q_0 + b + \varepsilon \quad (18)$$

où  $\varepsilon$  est une v.a. indépendante de  $Q_0$  et  $a$  et  $b$  sont les coefficients de régression, a permis de montrer que :

$$E[Q_A] = E[Q_0] + E[Q_1] \quad (19)$$

et le moment d'ordre deux :

$$\mu_2(Q_A) = \mu_2(Q_0) + \mu_2(Q_1) + 2 \rho_{Q_0 Q_1} \sigma_{a_0} \sigma_{Q_1} \quad (20)$$

Dans la présente étude, nous admettrons que chaque branche contribue à la formation du débit total suivant les rapports d'homothétie interne du réseau. Pour les branches 0 et 1 considérées, nous noterons ces rapports par  $r_0$  et  $r_1$ . Dans la théorie de MANDELBROT, les rapports d'homothétie interne vérifient la relation :

$$\gamma_0^d + \gamma_1^d = 1 \quad (21)$$

où  $d$  est la dimension fractale. Mais dans le contexte d'une connaissance incertaine des propriétés du réseau, nous admettrons que le rapport d'homothétie interne définit une dépendance stochastique markovienne, non nécessairement linéaire. Nous poserons donc :

$$f_0 = r_0^d \quad - \text{ la probabilité marginale de } Q_0$$

$$f_1 = r_1^d \quad - \text{ la probabilité marginale de } Q_1$$

et nous déduisons que :

$$Q_A = f_0 Q_A + f_1 Q_A \quad (22)$$

On notera encore  $\alpha_{ij}$  ( $i, j = 0, 1$ ) les probabilités conditionnelles des  $Q_i$  si  $Q_{ij}$ .

On aura :

$$\sum_j \alpha_{ij} = 1$$

On aura :

$$Q_0 = Q_{00} + Q_{01} \tag{23}$$

$$Q_1 = Q_{10} + Q_{11}$$

En comparant (17) et (22), on a :

$$Q_0 = f_0 Q_A \tag{24}$$

$$Q_1 = f_1 Q_A$$

De même en comparant (23) à

$$Q_0 = \alpha_{00} Q_0 + \alpha_{01} Q_0 \tag{25}$$

on a :

$$Q_{00} = \alpha_{00} Q_0 \tag{26}$$

$$Q_{01} = \alpha_{01} Q_0$$

En procédant de la même manière pour  $Q_1$ , on arrive à :

$$(\alpha_{00} f_0 + \alpha_{01} f_0 + \alpha_{10} f_1 + \alpha_{11} f_1) = 1 \tag{27}$$

On déduit de cette expression une forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{00}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^{(1)} & f_1^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{00}^{(1)} & \alpha_{01}^{(1)} \\ \alpha_{10}^{(1)} & \alpha_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\alpha_{ij}^{(1)} = \alpha_{ij}$$

A l'étape suivante, on doit envisager le branchement de systèmes élémentaires sur les quatre branches ( $\alpha_{ij}$  ;  $i, j = 0, 1$ ). Examinons les conditions de branchement sur la branche (0,0). Pour ce faire, on pose :

$$f_0^{(2)} = \beta_{000} \quad , \quad f_1^{(2)} = \beta_{0001} \quad (29)$$

avec 
$$f_0^{(2)} + f_1^{(2)} = \alpha_{00}$$

$$\alpha_{ij}^{(2)} = \gamma_{00ij}$$

avec

$$\sum_j \alpha_{ij}^{(2)} = \sum_j \gamma_{00ij} = \alpha_{00}^{(1)} \quad (30)$$

L'application des mêmes principes que précédemment conduit à :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{00}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0^{(2)} & f_1^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{00}^{(2)} & \alpha_{01}^{(2)} \\ \alpha_{10}^{(2)} & \alpha_{11}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

L'opération se répète pour chaque branche du même niveau. Il est aussi facile de montrer, en supposant que l'opération est vraie pour le niveau  $n$ , que l'on aura aussi au niveau  $(n + 1)$  pour la branche (0 0) :

$$[\alpha_{00}^{(n)}] = \begin{bmatrix} f_0^{n+1} & f_1^{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{00}^{(n+1)} & \alpha_{01}^{(n+1)} \\ \alpha_{10}^{(n+1)} & \alpha_{11}^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (32)$$

On voit, en posant :

$$[\alpha_{ij}^{(0)}] = [I] \quad (\text{Identité}) \quad (33)$$

apparaître une suite d'opérateurs matriciels caractérisant les niveaux successifs d'agrandissement du réseau hydrographique à la manière, par exemple, de la barre de Cantor décrite par MANDELBROT (1984 - p. 52 et p. 62) ou de la transformation du boulanger présentée par PRIGOGINE (1982, p. 196 et p. 230).

L'intérêt de cette description c'est de faire apparaître les propriétés fractales du réseau hydrographique. Du point de vue conceptuel, on peut considérer, à un niveau d'agrandissement  $(n)$  donné, que le bassin versant est représenté par un système de  $n$  réservoirs en cascade. On retrouve ainsi la représentation présentée plus haut (chapitre II) et la possibilité de réunir dans une même formulation la description du comportement stochastique du système et la description des propriétés fractales.

Considérons, pour simplifier, l'influence de la géomorphologie sur l'évolution moyenne. Dans ce cas, on écrira, pour chaque système élémentaire :

$$\frac{d y_i}{d t} = f(y_i, p_i)$$

$f(y_i, p)$  est généralement une fonction non linéaire de l'état  $y_i$  mais en utilisant les résultats obtenus dans l'annexe A, on peut considérer un développement de Taylor autour d'une position initiale  $y_{0i}$  et une approximation linéaire pour chaque réservoir :

$$\frac{d y_i}{d t} = p_i - \lambda_i y_i$$

avec 
$$\lambda_i = \frac{d f}{d y_i} \Big|_{y_i = y_{0i}}$$

On sait que l'utilisation des réservoirs linéaires en cascade est à l'origine de l'élaboration de la théorie de l'hydrogramme unitaire instantané par NASH en 1959 et DOOGE en 1960. La particularité de la démarche ici consiste à interpréter  $\lambda_i$  comme reflétant l'influence des conditions géomorphologiques caractérisées par le rapport d'homothétie interne aléatoire :

$$\lambda_i = \lambda_i(r, n)$$

Malheureusement, la représentation linéaire est loin d'être satisfaisante puisque le comportement des systèmes naturels n'est pas linéaire. On a montré, en outre, au (§ 2.2.4), en étudiant les propriétés mathématiques du modèle stochastique, que l'utilisation de la méthode d'intégration directe pour l'estimation des moments de différents ordres conduit à une perte d'informations. On est conduit, pour déterminer la réponse du système, à utiliser directement les probabilités de transition d'un chenal (i j k) à un chenal (i j).

#### 5.5.2. Détermination de la réponse du système

Nous avons montré, dans le (§ 2.2.4) évoqué plus haut que la densité de probabilité conditionnelle d'un processus décrit par une équation différentielle stochastique apparaît comme une réponse impulsionnelle. Bien que cette conclusion soit analogue à celle de RODRIGUEZ-ITURBE et al. (1979), les démarches qui permettent d'y aboutir sont différentes dans les deux cas.

En effet, notre conclusion est une conséquence de la modélisation de l'évolution du système par un système d'équations différentielles stochastiques, tandis que le caractère stochastique de la réponse impulsionnelle chez RODRIGUEZ-ITURBE et al. est une hypothèse de travail, posée a priori. Mais GUPTA et al. (1983) ont montré que la description

géométrique du réseau hydrographique, utilisée par les auteurs, n'est pas appropriée. Nous montrons ici qu'en utilisant les résultats de la théorie des e.d.s. tels qu'ils sont présentés au chapitre II, on obtient une expression de l'H U I G analogue à celle de RODRIGUEZ-ITURBE et al. (1979).

Reprenons la description du système en suivant la branche (0 0 .... 0). On va avoir :

$$\begin{aligned} Q_A &= Q_0 + Q_1 \\ Q_0 &= Q_{00} + Q_{01} \\ Q_{00} &= Q_{000} + Q_{001} \\ &\text{-----} \end{aligned}$$

En utilisant les probabilités conditionnelles, on a :

$$Q_{00} = \beta_{000} Q_{00} + \beta_{001} Q_{00}$$

d'où l'on déduit :

$$Q_{000} = \beta_{000} Q_{00} = \beta_{000} \alpha_{00} f_0 Q_A$$

En utilisant les notations de THIRRIOT (1985)

$$\underbrace{\delta_i \ i \ \dots \ i}_m = \delta_m$$

$$\delta_i \ \underbrace{j \ \dots \ j}_k = \delta_{i,k}$$

on a :

$$Q_m = \delta_m \cdot \delta_{m-1} \ \dots \ \delta_2 f_0 Q_A$$

Mais  $Q_m$  n'est autre que l'excitation à l'extrémité  $m$  donc  $Q_m = P_m$  et l'on déduit que la contribution de  $P_m$  à la formation du débit de sortie  $Q_{Am}$  est donnée par :

$$Q_{Am} = (\delta_m \ \delta_{m-1} \ \dots \ \delta_2 f_0)^{-1} P_m$$

On pose :

$$HUIG_m = (\delta_m \delta_{m-1} \dots \delta_2 f_0)^{-1}$$

La tâche, maintenant, va être de déterminer les expressions des  $\delta_m$ . Or, on sait (chapitre II) que les probabilités conditionnelles sont solutions de l'équation de FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV :

$$\frac{\partial Pr}{\partial t} = \mathcal{L} [ Pr ]$$

En utilisant les résultats de la théorie des semi-groupes de transformation (que nous définirons plus loin - chapitre VII), on peut écrire :

$$Pr = \exp \{ \mathcal{L} [ Pr ] t \} (Pr_0)$$

En posant comme au (§4.2.4., éq. 35) que, à l'approximation linéaire,  $\mathcal{L} [ \cdot ] = cst = a$ , on va avoir :

$$Pr_m = \delta_m = \delta_{m_0} e^{at}$$

Mais le passage de l'espace des opérateurs à l'espace des fonctions conduit à remplacer le produit simple par le produit de convolution, tout comme le passage d'un produit simple dans l'espace des transformées de Laplace ou de Fourier devient un produit de convolution dans l'espace des fonctions (Remarquons que si l'on travaille dans l'espace des distributions, le problème ne se poserait pas).

On va avoir donc :

$$HUIG_m(t) = K \prod_{i=0}^m (x) e^{-a_i t}$$

La contribution de  $P_m$  à la formation du débit de sortie est approchée par :

$$Q_{A_m}(t) = HUIG_m(t) \times P_m(t)$$

On calcule de la même manière la contribution de toutes les extrémités et la contribution de toutes les branches sous la forme :

$$Q = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n Q_{kl}$$

#### 5.6. CONCLUSION

Nous avons montré que le problème de l'analyse du réseau de transport se ramène à l'étude de l'évaluation des incertitudes spatiales et temporelles. En utilisant une description du réseau donnée par HORTON (1945), RODRIGUEZ-ITURBE et al. (1979) ont proposé une expression de l'HUIG. Leur démarche revient à décrire chaque tronçon du réseau par un réservoir linéaire à coefficients aléatoires.

En utilisant une variante de la description proposée par THIRRIOT (1984), nous avons montré que l'on pouvait dégager les propriétés fractales du réseau que nous caractérisons par une suite d'opérateurs matriciels et donner une expression plus générale de l'HUIG. L'approximation linéaire de l'expression proposée est analogue à celle proposée par RODRIGUEZ-ITURBE et ses collaborateurs.

---

1871  
No. 100

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BEVEN K. and WOOD E.F. (1983)  
Catchment geomorphology and the dynamics of runoff contributing areas.  
Journ. Hydrol. , 65, pp. 139-158
- CORDOVA J.R. and RODRIGUEZ-ITURBE I. (1983)  
Geomorpho limatic estimation of extreme flow probabilities.  
Journ. Hydrol., 65, pp. 159-173
- DYNKIN E.B. (1980)  
Markov process and random fields  
Bull American Math. Soc. vol. 3, n° 3, Nov., pp. 975-999
- EAGLESON P.S. (1970)  
Dynamic Hydrology  
Mac Graw Hill Book, New York
- EAGLESON P.S. (1978)  
Climate, Soil and Vegetation  
Water Res.Res., vol.14, n° 5, octob., pp. 705-776
- GAUDU R. (1978)  
Structures arborescentes et maillées en hydraulique et hydrologie.  
Thèse de Doctorat d'Etat, INP Toulouse, 330 pages
- GUPTA K.V. and WAYMIRE E.D. (1983)  
On the formulation of an analytical approach to hydrologic response and similarity at the basin scale.  
Journ. Hydrol., 65 , pp. 95-123
- KLEMES V. (1983)  
Conceptualisation and scale in hydrology.  
Journ. Hydrol., 65 , pp. 1-23
- KIRSHEN M.D. and BRAS L.R. (1983)  
The linear channel and its effect on the geomorphologic tUH  
Journ. Hydrol., 65 , pp. 175-208
- LAMBERT R. (1975)  
Recherches hydrologiques dans le sud-est du bassin garonnais.  
Thèse de Doctorat d'Etat - Université de Toulouse Le Mirail  
(2 volumes).

- MANDELBROT B. (1975)  
Les objets fractals  
Edit Flammarion, 2<sup>o</sup> édition, 203 pages
- MANDELBROT B. (1982)  
Des monstres de Cantor et de Peano à la géométrie fractale  
de la nature.  
In "Penser les mathématiques"  
Edit. du Seuil, pp. 226-257
- PILGRIM H.D. (1983)  
Some problems in transferring hydrological relationships  
between small and large drainage bas and between regions.  
Journ. Hydrol., 65, pp. 49-72
- ROCHE M. (1963)  
Hydrologie de surface.  
Gauthier-Villars édit. Paris
- RODRIGUEZ-ITURBE I., GONZALEZ-SAMABRIA M. and BRAS R. (1982)  
a geomorphoclimatic theory of the instantaneous unit hydro-  
graph.  
Water Res.Res. vol. 18 , n<sup>o</sup> 4, august. pp. 877-886
- RODRIGUEZ-ITURBE I. , GONZALEZ SAMABRIA M. and COMANO (1982)  
On the climatic dependance of the I U H. A rainfall-runoff  
analysis of the Nash model and the geomorphocimatic theory.  
Water Res.Res. , vol.18, n<sup>o</sup> 4, august, pp. 887-903
- RODRIGUEZ-ITURBE I. and VALDEZ J. (1979)  
Discharge response analysis and hydrologic similarity. The  
interrelation between the geomorphologic I U H and the storm  
characteristics.  
Water Res.Res., vol,15, n<sup>o</sup> 6, dec., pp. 1435-1444
- THIRRIOT C. (1982)  
L'égoutier et le savant  
Conférence inaugurale, XVII<sup>o</sup> Journées de l'Hydraulique S H F  
La Houille Blanche
- THIRRIOT C. (1984)  
Description du réseau hydrographique d'un bassin.  
Rapport interne IMFT, CT. n<sup>o</sup> 592, mars.
- VALDES J., FIALLO et RODRIGUEZ-ITURBE I. (1979)  
A rainfall-runoff analysis of the geomorphologic I U H.  
Water Res.Res. vol. 15, n<sup>o</sup> 6, dec., pp. 1421-1434
- WANG, GUPTA V. , WAYMIRE E.D. (1981)  
A geomorphologic synthesis of nonlinearity in surface runoff.  
Water Res.Res. vol. 17, n<sup>o</sup> 3, june, pp. 545-554

1871  
No. 100

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



CHAPITRE VIEVOLUTION DES DEBITS DE SORTIE

	Pages
<u>6.1.</u> <u>INTRODUCTION</u>	6.1
<u>6.2.</u> <u>EQUATION D'EVOLUTION DETERMINISTE DU DEBIT</u>	6.2
<u>6.3.</u> <u>EVOLUTION STOCHASTIQUE DES DEBITS</u>	6.6
<u>6.4.</u> <u>APPROXIMATION DE LA DENSITE DE PROBABILITE</u>	6.9
<u>6.5.</u> <u>APPLICATIONS</u>	6.11
<u>6.6.</u> <u>CONCLUSION</u>	6.17
<u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u>	6.19

---

### 6.1. INTRODUCTION

Dans la pratique de l'étude des bassins versants, la question qui se pose aux hydrologues lorsqu'ils doivent utiliser des modèles mathématiques pour l'évaluation du débit à l'exutoire est celle de la définition d'un critère de choix. Faut-il, en effet, utiliser les équations complètes de Saint-Venant qui constituent la description fidèle du phénomène physique en étude ou des modèles plus simples, mais très souvent empiriques ou semi-empiriques qui ne prennent en compte que certaines traits dominants, ou tout simplement le comportement statistique du phénomène physique en étude ? On sait que les premières sont de mise en oeuvre coûteuse tandis que les seconds, inspirés par la pratique, reviennent souvent moins chers à l'exploitation. Compte tenu du degré de précision qu'ils souhaitent atteindre, les hydrologues ont donc développé, au cours de ces dernières années, plusieurs types de modèles simplifiés. C. THIRRIOT (1984) a présenté récemment la filiation entre ces divers modèles. En partant des équations de Saint-Venant, il a mis en évidence leur degré de caractère statistique.

Nous avons, dans les chapitres précédents, dégagé le double aspect dynamique et aléatoire des processus générés par l'évolution des systèmes naturels.

En partant de ces résultats, qui montrent notamment que dans l'étude du fonctionnement hydrodynamique des bassins versants, la probabilisation de l'espace d'entrée entraîne une probabilisation de l'espace de sortie, nous évaluons, dans ce chapitre, l'influence de l'entrée stochastique sur l'évolution des débits de sortie. Pour mieux faire apparaître l'influence de la prise en compte du caractère aléatoire de l'entrée, nous rappelons d'abord le modèle déterministe. Nous étudions ensuite l'évolution des débits en montrant que cette évolution obéit à une équation différentielle stochastique. Nous appliquons le modèle ainsi obtenu aux débits de l'Ouémé au pont de Savé.

### 6.2. EQUATION D'EVOLUTION DETERMINISTE

Considérons le modèle hydrodynamique présenté dans l'annexe A (schéma 6.1 , 6.2) et au chapitre II. La transformation de la pluie en débit est présentée en termes d'étapes :

- l'étape de production, où la précipitation  $p(x, t)$  atteignant la surface du bassin versant augmente la teneur en eau du milieu et se subdivise en hauteur d'eau efficace destinée à alimenter le ruissellement de surface et en hauteur d'eau d'infiltration destinée à alimenter, s'il y a lieu, l'écoulement souterrain ;

- l'étape de transformation où la hauteur d'eau efficace alimente le ruissellement de surface et la hauteur d'eau infiltrée alimente, s'il y a lieu, un écoulement souterrain, et les deux écoulements se rejoignent dans le réseau pour donner un écoulement résultant;

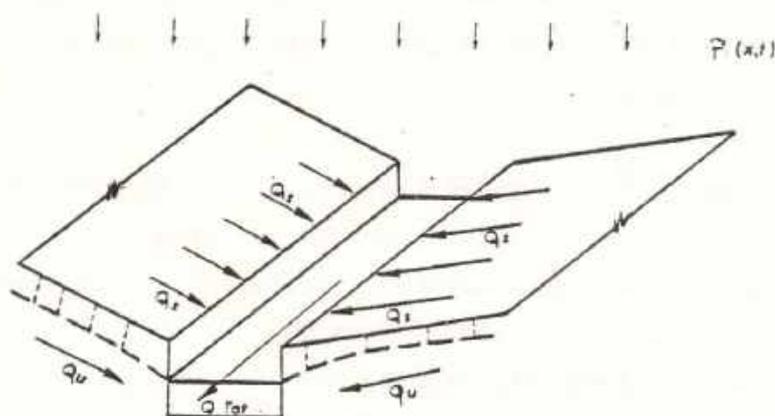


Fig. 1. — Schéma simplifié d'écoulement sur bassin versant

• enfin, l'étape de propagation où l'onde de crue ainsi formée se déplace vers l'aval.

Du point de vue du fonctionnement hydrodynamique du bassin versant, la structure stochastique de l'écoulement résultant des deux premières étapes a été considérée dans les chapitres précédents. L'évolution déterministe de l'onde de crue étant décrite par les équations de Saint-Venant, les propriétés stochastiques du débit à l'exutoire dépendront à la fois des propriétés mathématiques du modèle de Saint-Venant et du caractère aléatoire du débit d'apport. Une telle constatation avait déjà été faite par EAGLESON (1971 et 1972).

En effet, d'après KLEMES (1973), EAGLESON a été le premier à proposer un modèle hydrodynamique de bassin versant qui vise à une représentation conceptuelle des propriétés stochastiques du débit de sortie. Dans son modèle, il considère les événements indépendants formés par les pluies exceptionnelles, produisant des crues exceptionnelles. Il propose de prendre une distribution empirique, de forme exponentielle pour décrire la loi de probabilité des précipitations exceptionnelles. Il suppose en outre que l'écoulement à la surface du bassin versant est décrit par le modèle de l'onde cinématique. De même, l'évolution de l'onde de crue est décrite par un modèle de l'onde cinématique. Il trouve alors que la répartition des crues produite de cette manière suit une loi de probabilité de type exponentiel.

Mais, d'après KLEMES, si cette démarche démontre la possibilité d'obtenir la structure de la distribution d'une variable hydrologique à partir des propriétés à la fois statistiques et physiques de ses causes premières, l'auteur a dû, pour obtenir une expression mathématique simple, sacrifier la structure initiale du modèle. Pour étayer cette critique, KLEMES indique que l'auteur a dû, par exemple, faire usage d'hypothèses d'indépendance statistique pour des variables qui sont fortement interdépendantes. Par ailleurs, le choix de la distribution exponentielle pour la fonction d'entrée a été motivé par la condition d'intégrabilité ; plusieurs variables ont été remplacées par des constantes

pour satisfaire cette même condition d'intégrabilité. Enfin, KLEMES montre que la loi exponentielle obtenue pour la distribution des débits de sortie pourrait être obtenue directement en utilisant la formule rationnelle.

Nous montrerons, dans ce chapitre, que l'application des règles du calcul stochastique de Ito peut permettre d'obtenir une formulation simple des lois de distribution du débit à l'exutoire. Pour ce faire, nous considérons d'abord le modèle déterministe sous la forme :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q(x,t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(1 - J) \quad (2)$$

Dans ces équations :

- v - est la vitesse des particules fluides
  - S - est la section mouillée
  - q - est le débit d'apport, résultant des deux premières étapes de la transformation
  - l - désigne la pente longitudinale du fond de la rivière
  - J - est la perte de charge  $J = J(v^2)$
  - g - est l'accélération de la pesanteur
- (1) est l'équation de continuité  
 (2) est l'équation dynamique

La variation totale du débit est décrite par :

$$dQ = \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + v \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dt \quad (3)$$

Mais on peut utiliser la connaissance de la section mouillée et de la vitesse des particules fluides pour déterminer le débit par la relation :

$$Q = S v \quad (4)$$

On a alors la variation totale du débit sous la forme :

$$dQ = d(S V) = S dV + V dS \quad (5)$$

Dans le cas théorique d'un profil rectangulaire,  $S = Bh$  mais dans le cas d'une rivière,  $S$  n'a pas une forme aussi régulière. La largeur de la rivière et la forme du lit varient d'un point à l'autre. On peut traduire cette variation de la section mouillée par la relation :

$$S = K(x) h^{1+m(x)} \quad (6)$$

où les coefficients  $K(x)$  et  $m(x)$  vont dépendre de  $x$  et de  $x$  seul (dans l'hypothèse d'un profil stable). Alors, si l'on fixe le point  $x$ ,  $m(x)$  et  $K(x)$  pourront être connus. Pour exploiter la relation (5), reste alors à déterminer l'évolution de  $V$  et  $h$  le long du cours d'eau. Elle peut se faire par la méthode des caractéristiques. Dans la suite, nous poserons pour simplifier,  $m(x) = 0$  et on écrit l'équation de continuité sous la forme :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{q}{S} - v \frac{\partial (\text{Log } S)}{\partial x} \Big|_{h = \text{cst}} \quad (7)$$

On adjoint aux équations de Saint-Venant (7) et (2) la variation totale de  $h$  et de  $v$  :

$$dh = \frac{\partial h}{\partial t} dt + \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (8)$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

On pose, pour simplifier l'écriture :

$$\frac{q}{S} - v \frac{\partial (\text{Log } S)}{\partial x} \Big|_{h = \text{cst}} = X_1 \quad (9)$$

$$g(1-S) = X_2 \quad (10)$$

Alors, l'application de la méthode des caractéristiques donne

- la vitesse d'évolution des perturbations

$$\frac{dx}{dt} = v \pm c \quad (11)$$

- la loi de fonctionnement le long des caractéristiques

$$dv \pm g \frac{dh}{c} = (\chi_2 \pm c \chi_1) dt \quad (12)$$

où  $c = (g h)^{1/2}$  est la célérité propre des perturbations.

L'expression (12) montre que  $dv$  et  $dh$  dépendent du débit d'apport. En effet, en remarquant que

$$\left( g \frac{dh}{c} \right) = g^{1/2} h^{-1/2} dh = d(2c)$$

on écrit (12) sous la forme

$$d(v \pm 2c) = (\chi_2 \pm c \chi_1) dt \quad (13)$$

qui montre que l'évolution de la quantité  $(v \pm 2c)$  dépend des apports.

### 6.3. EVOLUTION STOCHASTIQUE DES DEBITS

D'après les résultats du chapitre II,  $q(x, t)$  est une fonction aléatoire que l'on écrira sous la forme :

$$q(x, t) = E[q] + \sigma_q \epsilon_q \quad (14)$$

En conséquence, (13) s'interprète comme une équation différentielle stochastique. On en déduit que les espaces des fonctions  $h$  et  $v$  sont probabilisés. Il résulte de cette déduction, deux observations intéressantes :

- la première est que l'équation d'évolution de la vitesse s'écrit sous la forme stochastique suivante :

$$dx = E[v(x, t)] dt + \sigma_v d\beta_v \quad (15)$$

la seconde conséquence est que,  $h(x,t)$  étant une fonction aléatoire,  $S(x,t)$  sera une fonction aléatoire quelque soit  $K(x)$ .

En reprenant les équations (1) et (2) compte tenu de ces remarques, on a :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = E [ q (x, t) ] + \sigma_q \varepsilon_q \quad (16)$$

$$Q = \psi (S, v, t) + \sigma_Q \eta_Q \quad (17)$$

avec

$$\psi (S, v, t) = E [ Q ] = \left[ 1 - \frac{1}{g} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) \right]^{1/2} \quad (18)$$

La variation totale de  $Q$  peut maintenant être décrite par :

$$E [ dQ ] = E [ d(Sv) ] \quad (19)$$

Or, par application des règles du calcul stochastique de Ito,

$$\begin{aligned} E [ d(Sv) ] &= (v dS + S dv + \sigma_v^2 \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}) dt \\ &= v \left( \frac{\partial S}{\partial t} + E[v] \cdot \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) dt \\ &+ S \left( \frac{\partial v}{\partial t} + E[v] \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dt \\ &+ \sigma_v^2 \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dt \end{aligned}$$

d'où l'on tire après regroupement :

$$E [ d (S v) ] = \left( v \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt + E [ v ] \left( v \frac{\partial S}{\partial x} + S \frac{\partial v}{\partial x} \right) dt \\ + \left( \frac{1}{2} \sigma_v^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sigma_v^2 \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dt$$

soit

$$E [ d (S v) ] = \left( \frac{\partial (v S)}{\partial t} + E [ v ] \frac{\partial (v S)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 \frac{\partial^2 (v S)}{\partial x^2} \right) dt$$

Il résulte donc que l'on a :

$$E [ dQ ] = \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + E [ v ] \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right) dt \quad (20)$$

On obtient d'ailleurs directement le même résultat en partant de la distribution des vitesses donnée par l'équation (15) et en appliquant le théorème de Ito au débit,  $Q(x, t)$ . La variation totale du débit s'écrit alors :

$$dQ = \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + E [ v ] \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\sigma_v^2}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \right) dt + \sigma_v \frac{\partial Q}{\partial x} dB \quad (21)$$

En comparant (21) et (3), on trouve que la correction apportée par l'hypothèse d'une évolution probabiliste des fonctions d'entrée est l'adjonction du terme de diffusion à l'équation déterministe et d'un terme d'incertitude.

$$\sigma_Q dB = \sigma_v \frac{\partial Q}{\partial x} dB \quad (22)$$

Il apparaît donc que l'hypothèse d'une structure stochastique des précipitations à l'entrée du bassin versant conduit à une équation différentielle stochastique de la forme :

$$dQ = L(Q, t) dt + \sigma_Q dB \quad (23)$$

En remarquant par ailleurs que la variation totale du débit à l'exutoire dépend de l'évolution du débit d'apport, on peut écrire, ( $\Gamma(\bar{q})$ , étant une fonction quelconque de  $\bar{q}$ ) :

$$E [ dQ ] = \Gamma(\bar{q}) \quad \text{avec} \quad \bar{q} = E [ q ] \quad (24)$$

En comparant (20) et (24), il vient :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + E[v] \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \Gamma(\bar{q}) \quad (25)$$

#### 6.4. APPROXIMATION DE LA DENSITE DE PROBABILITE

On a montré (§ 2.2.2.c) que pour une équation différentielle stochastique de type (23), la probabilité marginale de  $Q$  vérifie l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov ; on a donc, en notant  $Pr(Q, t)$ , la probabilité marginale de  $Q$ , l'équation :

$$d Pr(Q, t) = \left( \frac{\partial Pr}{\partial t} + L(Q, t) \frac{\partial Pr}{\partial Q} + \frac{\sigma_Q^2}{2} \frac{\partial^2 Pr}{\partial Q^2} \right) dt + \sigma_Q \frac{\partial Pr}{\partial Q} dB \quad (26)$$

Soit, comme  $L(Q, t) = \Gamma(\bar{q})$  et en posant

$$E [ d Pr(Q, t) ] = 0 \quad (27)$$

on obtient :

$$\frac{\partial Pr}{\partial t} + \Gamma(\bar{q}) \frac{\partial Pr}{\partial Q} + \frac{\sigma_Q^2}{2} \frac{\partial^2 Pr}{\partial Q^2} = 0 \quad (28)$$

Le problème majeur pour la solution de cette équation est, comme on l'a indiqué plus haut (§ 3.4), que l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov n'a de solution explicite que pour des cas très particuliers. On peut cependant, en utilisant l'approximation de Gram-Charlier, obtenir la densité de probabilité sous la forme :

$$\text{Pr}(Q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(Q-\bar{Q})^2/2\sigma^2} \left[ 1 + \sum_{i=1}^n A_i H_{i+1} \left( \frac{Q-\bar{Q}}{\sigma} \right) \right] \quad (29)$$

où  $\bar{Q} = E[Q]$ , les  $H_{i+1}$  sont des polynômes d'Hermite d'ordre  $(i+1)$ , les  $A_i$  sont les coefficients de développement et sont explicités plus haut ; ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= \mu_3 / 3! \\ A_3 &= (\mu_4 - 3) / 4! \\ &\dots \end{aligned} \quad (30)$$

$\mu_i$  est le moment centré d'ordre  $i$ .

Dans le cas particulier où  $E[dQ] = \Gamma(\bar{q}) = 0$ , l'équation (23) qui décrit l'évolution du débit conduit à la relation (voir ch. 11, § 2.2.4.d)

$$dQ = \sigma_Q d\beta \quad (31)$$

et la densité de probabilité est décrite par :

$$\frac{\partial \text{Pr}}{\partial t} = - \frac{\sigma_Q^2}{2} \frac{\partial^2 \text{Pr}}{\partial Q^2} \quad (32)$$

### 6.5. APPLICATIONS

Nous disposons, pour vérifier ces résultats théoriques, des données d'observation sur l'Ouémé au pont de Savé (figure 18).

Le bassin versant de l'Ouémé à la station du Pont de Savé a pour coordonnées géographiques

7° 58' à 10° 12' de latitude Nord  
1° 35' à 3° 05' de longitude Est

C'est l'un des trois bassins orientés Nord-Sud comprenant toute la partie centrale du Bénin et qui correspond à l'Ouémé supérieur et à ses affluents, l'Okpara et le Zou.

Les caractéristiques géographiques, physiographiques et géomorphologiques du bassin de l'Ouémé sont bien décrites par J. RODIER et J. SIRCOULON (1963).

Le bassin de l'Ouémé est limité au Nord par le bassin de l'Alibory qui est le principal affluent béninois du Niger. La ligne de partage des eaux, coulant d'une part vers le Nord en direction du Niger et d'autre part vers le Sud en direction du Golfe de Guinée, suit à peu près le dixième parallèle. Elle est assez nette mais n'est marquée par aucun relief. Les limites Ouest du bassin sont marquées par la chaîne de l'Atacora et le bassin togolais du Mono, tandis que la limite Est est formée par le bassin de l'Okpara.

Le bassin de l'Ouémé au pont de Savé a une superficie de 23.600 km<sup>2</sup>. Les relevés disponibles couvrent la période de 1964 - 1978. Ils nous ont été fournis par la Direction de l'Hydraulique à Cotonou. Le régime hydrologique de toute cette partie supérieure de l'Ouémé, communément appelé "Ouémé Supérieur", est caractéristique du régime tropical de transition et suit généralement le régime des précipitations. Cela conduit à des étiages très rigoureux en saison sèche et à des modules annuels faibles. Les pluies s'étendent en effet sur six mois et leur répartition au cours de cette période a une

d'aménagement hydraulique et de gestion de ressource en eau est liée à la connaissance des valeurs moyennes et des valeurs extrêmes des débits de cours d'eau. Que ce soit pour calculer les dimensions des ouvrages de régularisation des débits que pour garantir la bonne exploitation d'un aménagement, il est nécessaire de pouvoir préciser de manière quantitative les variations interannuelles. Le problème majeur lié à cette démarche est que la plupart des résultats statistiques ne sont applicables qu'à des variables indépendantes. Or, pour une rivière donnée, les débits à l'instant  $t$  et à l'instant  $t + \Delta t$  ne peuvent être considérés comme indépendants que pour des valeurs de  $\Delta t$  supérieures à un certain seuil qui est fonction du régime de la rivière et de l'époque de l'année. Pour analyser la qualité de la liaison entre les valeurs successives des débits, nous avons calculé les valeurs des différents coefficients d'autocorrélation. On trouve, pour le coefficient d'autocorrélation des débits annuels  $\rho_0 = 0.351$ . Au niveau mensuel et au niveau journalier, la corrélation entre les valeurs successives est par contre bien significative. Les figures 20-a et 20-b montrent la fonction d'autocorrélation des valeurs mensuelles et le corrélogramme des débits journaliers.

Au vu de ces résultats, on peut conclure que les paramètres du débit pourraient être étudiés à l'aide des lois statistiques si le pas d'échantillonnage est supérieur ou égal à l'année tandis que pour  $\Delta t$  égale à un jour ou à un mois, l'hypothèse d'indépendance ne serait pas vérifiée.

Fort de cette conclusion, nous avons ajusté quelques lois parmi les principales formules pratiques que l'on rencontre pour l'étude des débits. D'après BOBEE (1976), les principales formules utilisées en pratique sont les suivantes :

a. la formule de HAZEN

$$\text{Pr}(k) = \frac{k - 0,5}{N}$$

b. la formule de WEIBULL

$$\text{Pr}(k) = \frac{k}{N + J}$$

c. la formule de CHEGODAYEV

$$Pr(k) = \frac{k - 0,3}{N + 0,4}$$

avec N désignant la taille de l'échantillon.

La figure ( ) présente, pour les valeurs maximales journalières annuelles, une comparaison de ces trois formules empiriques à l'ajustement théorique par la méthode des moments.

Nous avons cherché à présenter, pour chaque jour de l'année, la probabilité de dépassement pour les valeurs suivantes :

- $10 \text{ m}^3/\text{s}$ . (débit moyen du mois de juin qui constitue le début de l'écoulement)
- $100 \text{ m}^3/\text{s}$ . (moyenne interannuelle)
- $200 \text{ m}^3/\text{s}$ . (moyenne sur les six mois humides de l'année - de juin à novembre)
- $359 \text{ m}^3/\text{s}$ . (moyenne sur les trois mois les plus forts - août, septembre et octobre).

L'allure de la courbe obtenue pour chaque cas est représentée par les figures (20 - a, b, c)

La première critique que l'on peut faire à l'utilisation des lois statistiques pour l'analyse des données disponibles sur l'Ouémé au pont de Savé est que la longueur de l'échantillon qui est de 14 ans est trop courte.

La seconde critique que l'on ferait à l'application des lois statistiques à l'étude des débits est liée à la nature même des phénomènes hydrologiques telle qu'elle a été présentée et analysée dans ce mémoire. En effet, on a montré plus haut (chapitres II et III), que les processus hydrologiques sont des phénomènes naturels, ayant non seulement un caractère stochastique mais aussi un aspect dynamique. En citant une étude de KLEMES (1982), on a indiqué que les lois statistiques, couramment utilisées en hydrologie, ont été mises au point pour des échantillons d'évènements qui se répètent et qui sont contrôlables, tandis que les phénomènes hydrologiques constituent des expériences uniques et incontrôlables. A notre avis donc, toute analyse des données

hydrologiques doit chercher à prendre en compte à la fois les aspects stochastiques et dynamiques.

De manière intuitive, on peut dire que l'un des paramètres caractérisant l'écoulement d'un cours d'eau est la durée des hautes eaux. Pour une rivière, caractérisée par un écoulement quasi nul pendant plusieurs mois de l'année, les paramètres de durée revêtent une importance encore plus grande pour les aménagements hydroagricoles et la gestion des ressources en eau. Cette constatation nous a incité à chercher les corrélations suivantes :

- corrélation écoulement - durée  $\rho_{e,d} = 0.435$
- corrélation racine du volume - durée  $\rho_{v,d} = 0.616$
- autocorrélation des durées d'écoulement  $\rho_{a,d} = -0.188$
- autocorrélation des durées sèches  $\rho_{s,s} = -0.053$
- corrélation durée sèche - écoulement  $\rho_{s,e} = -0.139$

DUREE SEC	DUREE ECOUL.:	DEB. MOY.:
1	59	2.07
28	384	92.54
37	327	139.23
3	340	102.75
1	750	174.79
63	14	0.00
37	288	129.76
65	288	123.67
97	284	105.25
103	256	28.04
133	287	131.81
1	156	343.79
135	71	0.19
60	262	145.73
6	2	0.00
138	275	47.14
0	163	85.95

Le tableau ci-dessus donne la succession chronologique des durées d'écoulement et des durées d'étiage absolu. Les débits moyens par durée d'écoulement sont aussi présentés.

Mais, dans la pratique de la gestion des ressources en eau, l'absence d'écoulement (ou étiage absolu) constitue une situation extrême, la situation critique étant caractérisée par une valeur  $Q_i$  donnée, considérée comme caractéristique des basses eaux. On définit dans ce cas un paramètre :

$$\eta_{k+1} = \frac{Q_{k+1} - Q_k}{\sigma_{Qk}} \quad (33)$$

Dans le cas particulier où  $Q_i$  représente la moyenne interannuelle, on retrouve la variable réduite habituelle.

A partir de la relation (33), on peut définir deux états bien distincts caractérisés par  $\xi_i$  ( $i = 0, 1$ ) tel que  $\xi_1$  caractérise les hautes eaux et  $\xi_0$  caractérise les basses eaux. On a donc :

$$\xi_i = \begin{cases} \xi_1 & \text{si } \eta_k > 0 \\ \xi_0 & \text{si } \eta_k \leq 0 \end{cases} \quad (34)$$

En prenant le pas de temps d'un jour comme unité et le débit moyen mensuel comme référence, nous avons représenté la fonction de répartition des durées des basses eaux. Par analogie avec les fonctions d'entrée, nous avons fait l'hypothèse d'une évolution markovienne du paramètre  $\xi_i$ . La figure (20-a) montre la comparaison de l'ajustement empirique et des courbes théoriques obtenues en utilisant d'une part les probabilités conditionnelles markoviennes et d'autre part l'approximation par les polynômes d'Hermite. La figure (20-b) est obtenue en pondérant les coefficients des polynômes d'Hermite par un coefficient empirique.

Dans la figure (20-c), nous avons étudié les fluctuations de l'écoulement moyen mensuel. L'une des remarques qui se dégage de cette étude est que l'approximation de la fonction de répartition par

Les polynômes d'Hermite donne une précision acceptable. On remarque en outre que les trois termes de l'approximation se superposent. Cela traduit le caractère gaussien du paramètre en étude.

Les figures (21) donnent une représentation de la fonction de répartition des débits et une approximation gaussienne qui constitue le premier terme de l'équation (29).

#### 6.6. CONCLUSION

L'une des conclusions qui se dégage de l'étude est que les propriétés stochastiques du débit à l'exutoire du bassin dépendent des propriétés dynamiques de l'équation de Saint-Venant et du caractère stochastique du débit d'apport. Ce dernier dépend de la géométrie du réseau de transport, des propriétés physiographiques du bassin et du caractère aléatoire des précipitations à l'entrée. Nous avons montré que la distribution du débit à la sortie du bassin versant et de certains des paramètres qui lui sont liés peut être représentée par une approximation de Gram-Charlier, proche de la loi de Gauss.

---

1871  
No. 100

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- BOBEE B. (1976)  
Contribution à l'étude statistique des débits maximaux annuels de crue par les distributions Pearson Type 3 et Log-Pearson Type 3.  
Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paul Sabatier, Toulouse
- EAGLESON P.S. (1971)  
The stochastic kinematic wave.  
In "System Approach to Hydrology", pp. 202-222, Water Resour. Publ., Fort Collins, Colorado. Cité par KLEMES (1978)
- EAGLESON P.S. (1972)  
Analysis of flood frequency.  
Water Resour. Res. 8 (4), pp. 878-897. Cité par KLEMES (1978)
- KLEMES V. (1978)  
Physically based stochastic hydrologic analysis.  
In "Advances in Hydrosociences", 11, pp. 285-356  
(Ven Te Chow edit.)
- KLEMES V. (1982)  
Empirical and Causal Model in Hydrology.  
In "Studies in Geophysics, Scientific Basis of Water Resource Management".  
National Academy Press, Washington D.C., pp. 95-104
- RODIER J. et SIRCOULON J. (1963)  
Monographie de l'Ouémé Supérieur,  
ORSTOM - Paris et arrondissement de l'Hydraulique  
Ministère des T.P. - Rep. du Dahomey
- THIRRIOT C. (1984)  
Préparation du Guide pour la prévision des crues.  
Chapitre 5 : Les méthodes de propagation.  
Rapport interne IMFT.
-

1871  
No. 100

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



CHAPITRE VII

ESSAI DE GENERALISATION A LA

DESCRIPTION DE L'EVOLUTION

A LONG TERME DU CYCLE HYDROMETEOROLOGIQUE

	Pages
<u>7.1.</u> <u>INTRODUCTION</u>	7.1
<u>7.2.</u> <u>SURVOL RAPIDE DES MODELES DE PREVISION A LONG TERME</u>	7.2
7.2.1. Les méthodes basées sur l'analyse statistique	7.2
7.2.2. Utilisation des informations paléoclimatologiques	7.5
a. <i>Fondement de la méthode</i>	7.5
b. <i>Les résultats de la paléoclimatologie</i>	7.6
<u>7.3.</u> <u>ELABORATION DE LA METHODE DE PREVISION A LONG TERME</u>	7.8
7.3.1. Justification physique	7.8
7.3.2. Utilisation des effets d'échelle	7.13
7.3.3. Quelques propriétés de l'opérateur d'évolution	7.16
a. <i>Propriétés géométriques</i>	7.16
b. <i>Signification conceptuelle</i>	7.18
<u>7.4.</u> <u>CONCLUSION</u>	7.23
<u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u>	7.27

---

### 7.1. INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, l'analyse de l'évolution du cycle de l'eau au niveau du bassin versant a permis de montrer la coexistence d'un aspect déterministe et d'un aspect aléatoire (chapitre II). En introduisant une relation d'équivalence qui prend en compte ce double aspect, on a obtenu (chapitre IV) une bonne description de l'évolution de la répartition des précipitations journalières par rapport aux migrations saisonnières du F I T ; la prise en compte de l'entrée stochastique permet d'obtenir une bonne description de l'évolution des débits. On en déduit que le modèle proposé fournit une bonne description du fonctionnement hydrodynamique des bassins versants.

Cependant, l'un des problèmes posés par l'étude de la répartition de la précipitation en Afrique de l'Ouest est celui de la longueur des durées sèches. Le problème de base est que l'application des modèles markoviens linéaires permet de décrire la répartition des durées (qu'elles soient d'ailleurs sèches ou pluvieuses) tant que cette durée n'excède pas une longueur donnée. Ainsi, par exemple, dans le cas des stations étudiées en Afrique de l'Ouest, les durées pluvieuses n'excèdent pas quelques jours et sont bien décrites par le processus de Markov linéaire ; par contre, dans le cas des périodes sèches dont la durée peut excéder 200 jours, c'est le modèle non linéaire qui fournit un meilleur ajustement. On rappelle que le processus physique qui sert de fondement à la description formelle présentée est la boucle de rétroaction stabilisatrice, caractérisée par la liaison :

{ température | humidité | nébulosité | albédo }

La question naturelle qui vient à l'esprit devant la catastrophe naturelle que constitue la sécheresse actuelle en Afrique est celle de la validité de cette description pour la prévision des événements futurs. Les probabilités de passage qui découlent de l'analyse des chaînes de Markov discrètes de différents ordres ou les probabilités conditionnelles fournies par la solution de l'équation de Fokker -

Planck - Kolmogorov resteront-elles valables pour des périodes suffisamment longues ? La réponse à cette question fait intervenir le concept d'échelle.

Nous discutons, dans ce chapitre, des possibilités de généralisation du modèle proposé, en élargissant l'échelle de l'étude au-delà du cadre d'un bassin versant. En effet, suivant le mot de KLEMES (1983) , *"une recherche rationnelle pour une conceptualisation significative en hydrologie peut se faire en élargissant l'échelle du phénomène soit vers le haut soit vers le bas"*. Pour justifier cet élargissement, nous ferons d'abord un survol rapide des méthodes de prévision à long terme.

## 7.2. SURVOL RAPIDE DES MODELES DE PREVISION A LONG TERME

La pratique actuelle des méthodes de prévision à long terme ne profite pas des effets d'échelle tel qu'il a été dégagé par KLEMES ; on peut, en effet, ranger ces méthodes de prévision suivant deux grandes catégories :

- les méthodes basées sur l'analyse statistique
- et les méthodes utilisant les informations paléoclimatologiques.

### 7.2.1. Les méthodes basées sur l'analyse statistique

Elles nécessitent la disponibilité des séries de mesure suffisamment longues et constituant une population unique. L'une des analyses critiques les plus actuelles sur ces méthodes est celle, récente, de C. THIRRIOT et M. ARNAUD (1985). En analysant la série des précipitations annuelles observées à Toulouse depuis 1809, ces auteurs ont mis en évidence des périodes différentes pour lesquelles il n'y a

pas recouvrement des intervalles de confiance. L'étude de la répartition dans le temps de la pluie interannuelle moyenne et de son écart-type pour des périodes de longueurs caractéristiques données a permis de confirmer cette constatation. Ils ont pu alors conclure que, pour la série étudiée, il existe des échantillons qui ne proviennent pas de la même population.

Ce résultat va dans le sens de la justification des réserves formulées par PEGUY (1979) sur l'utilisation de la notion de "période de retour" en hydrologie. Celle-ci est en effet liée au postulat de la stabilité temporaire du climat. Dire, par exemple, d'une précipitation de 150 mm en 24 heures à Cotonou qu'elle a une période de retour de vingt ans veut dire qu'elle apparaîtra en moyenne cinq fois par siècle ou, mieux, cinquante fois par millénaire. Mais il y a une certaine ambiguïté dans une telle estimation, soulignée par BLANCHET (1972), qui a analysé les précipitations tombées à Beyrouth (Liban) entre le 1er décembre 1968 et le 31 janvier 1969 par un ajustement à une loi gamma incomplète. Cet ajustement donnerait aux 1105 mm de pluies tombées en ces deux mois une période de retour de 13 à 14 siècles. Mais on ne peut prétendre faire jouer sur une telle période une loi de probabilité pure, sans prendre en compte l'éventualité d'une dérive climatique due aux phénomènes géophysiques.

Dans son analyse des modèles empiriques et causales en hydrologie, KLEMES (1982) indique que "les méthodes statistiques couramment utilisées ont été mises au point pour l'analyse de grandes masses de données provenant d'expériences répétables et contrôlées. Dans la modélisation hydrologique, ces méthodes sont appliquées à des échantillons de tailles ridiculement petites, générés par des expériences uniques et incontrôlables". Pour cet auteur, "du point de vue du concept mathématique des processus stochastiques auquel on fait appel de manière routinière, une série historique d'un processus hydrologique est un échantillon de dimension unité."

A la lueur de ce qui précède, il apparaît nettement que l'utilisation des lois statistiques pour l'étude de l'évolution du climat ne peut être envisagée qu'avec une certaine prudence. Les efforts de ces dernières années tendent à considérer les effets de dépendance affectant les termes de la série. A la notion de variables purement indépendantes, on substitue les variables à dépendance stochastique (YEVJEVICH - 1972 , BOUVIER - 1983). Ces dernières sont représentées par :

$$X(t) = X_T(t) + X_C(t) + X_R(t) \quad (1)$$

où  $X_T(t)$  représente la tendance générale. On admet que l'espérance mathématique du phénomène évolue avec le temps.

$X_C(t)$  représente le mouvement cyclique. Il est généralement le fait des propriétés géophysiques du milieu naturel (rotation de la terre sur elle-même, rotation autour du soleil, etc.). Cette composante contient aussi bien la variation saisonnière que l'évolution pseudo-cyclique à long terme.

$X_R(t)$  désigne la variation résiduelle à laquelle on attribue les propriétés stochastiques.

Si les propriétés mathématiques de la composante stochastique  $X_R$  sont bien étudiées dans la littérature hydrologique (voir chapitre II), la prise en compte de  $X_C$  et  $X_T$  se fait de manière empirique en considérant  $X_T$  soit comme une constante, soit comme une droite faisant un certain angle avec l'horizontale et  $X_C$  est représentée par une série de Fourier dont on cherche les coefficients, (YEVJEVICH - 1972). Malheureusement ces différentes représentations ne sont pas testables à partir de données d'observation et le choix d'une représentation donnée pour  $X_T$  apparaît plutôt comme une question d'ordre philosophique.

### 7.2.2. Utilisation des informations paléoclimatologiques

L'utilisation des informations paléoclimatologiques peut constituer une base qualitative de choix du modèle mathématique pour la prévision à long terme. Il nous a paru utile de présenter rapidement le fondement de la méthode et quelques traits caractéristiques de l'évolution du climat en Afrique.

Il existe de nos jours plusieurs travaux de synthèse qui font le point des connaissances paléoclimatologiques.

P. ROGNON (1974) a fait le point des connaissances depuis 10.000 ans.

GERASIMOV (1979) a fait une présentation détaillée des problèmes liés aux études paléoclimatologiques depuis l'époque plus lointaine où notre planète ne contenait qu'un continent unique appelé "Pangée" et un Océan mondial.

D'autres travaux tels que ceux de SERVANT (1974), GULI (1974), DUPLESSY et BOULANGER (1974), BOULANGER et ROYER (1976), LAMB (1976), PEGUY (1979), PETIT-MAIRE (1984) ont étudié les divers aspects du problème et donné une description des méthodes d'étude.

#### a. Fondement de la méthode

Les principales informations sur le climat du passé sont tirées de l'interprétation écologique des données fournies par la paléobiologie, c'est-à-dire l'étude des restes macroscopiques et microscopiques des plantes et d'animaux ensevelis dans les diverses couches géologiques des continents et dans les sédiments au fond des lacs et des mers. Leur qualité est variable et on les trouve d'ordinaire par hasard. On complète ces informations par l'étude des types génériques des sols fossiles de croûte d'altération et des lithosols se trouvant dans les couches continentales, ainsi que par des données dendrologiques, archéologiques et historiques. Cependant, le progrès fondamental pour la paléoclimatologie a été accompli par le développement et la mise en application de la chimie isotopique dont les techniques viennent compléter

ou préciser les informations obtenues par les techniques plus traditionnelles.

Mais quelles que soient les techniques de base utilisées, les reconstitutions paléoclimatiques se fondent sur les principes que les espèces anciennes de plantes et d'animaux servant d'indicateurs paléoclimatiques avaient besoin de conditions climatiques analogues à celles nécessaires aujourd'hui à des organismes voisins. D'après GERASIMOV (1979), ce principe s'applique aussi aux écosystèmes (biocènes), ainsi qu'aux couches d'altération, aux sols et aux aspects lithoclimatiques généraux des couches continentales. Les reconstitutions utilisant les techniques géochimiques s'appuient sur les compositions isotopiques des précipitations, des océans, des coquilles fossiles. Elles ne donnent pas toujours des résultats très précis mais permettent cependant une description quantitative des caractéristiques paléoclimatiques.

Dans le détail, plusieurs méthodes peuvent être considérées :

- les méthodes sédimentologiques appliquées à l'holocène (les méthodes applicables aux glaces, à la couverture végétale, aux lacs) ;
- les méthodes d'étude propres à l'holocène (la dendrologie, les documents historiques) ;
- les méthodes propres aux périodes antérieures à l'holocène.

#### b. Les résultats de la paléoclimatologie

Les recherches paléoclimatiques faites par diverses méthodes ont conduit à des généralisations importantes en ce qui concerne la reconstitution des climats. Les données les plus précises concernent les températures. Tout comme dans les études géologiques, on distingue :

- les climats du mésozoïque (il y a plus d'un million d'années), caractérisés par des saisons chaudes, peu marquées, et une distribution concentrique des zones terrestres différentes par leur niveau d'humidité (GERASIMOV - 1979) ;
- les climats du pléistocène (1.000.000 années B.P.) caractérisés par des grands cycles glaciaires et interglaciaires, les avances et les retraits des glaces qui sont accompagnées de fluctuations eustatiques du niveau de l'océan mondial ;

- le climat de l'holocène (10.000 ans B.P.) proche de l'actuel, mais cependant marqué par un réchauffement substantiel entre 6.000 et 4.000 ans B.P. (SERVANT - 1974, LABEYRIE - 1985).

Il nous a paru important d'examiner avec un peu plus de détail la paléoclimatologie du territoire intéressé par la sécheresse actuelle. Ce territoire occupe une bande de 500 à 800 km du Nord au Sud et est longue de 5.000 km d'Est en Ouest, en bordure sud du Sahara. L'étude paléoclimatique de cette zone (SERVANT - 1974, PETIT-MAIRE - 1984) indique que pendant le paroxysme de la dernière glaciation entre 20.000 et 12.000 à 11.000 ans B.P., des conditions d'extrême aridité régnaient dans cette région, (massif dunaire jusqu'à la latitude de Dakar ou de N'Jamena, endoréisme du fleuve Sénégal, assèchement quasi total du Lac Abhé en Ethiopie), ce qui a entraîné une extension vers l'équateur du domaine désertique. Dans le sud du Cameroun, du Nigeria, la forêt avait momentanément disparu pendant une partie du pléistocène supérieur au profit de la savane claire.

Mais peu avant l'holocène, se produit un changement majeur (SERVANT- 1974) ; la forêt s'est rétablie beaucoup plus au sud (Cameroun, Nigeria), des lacs apparaissent dans toutes les petites dépressions de la vaste cuvette tchadienne où convergent les eaux de l'Afrique Intertropicale (Chari, Logone). Tous les fonds de cuvette importante, depuis la Mauritanie jusqu'à l'Ethiopie, étaient alors occupés par ces lacs dont l'ampleur était liée à une période d'humidité générale qui a duré jusqu'à vers 7.000 ans B.P. Au cours de cette même période où s'est effectuée la dernière mise en charge des nappes aquifères, les pluies étaient assez bien étalées sur toute l'année, ce qui a pour autre conséquence de favoriser l'évaporation. Cette période (12.000 à 8.000 B.P.) correspond d'après MOREL (1979), à un réchauffement mondial. Cependant l'extension exacte de ces premiers lacs de l'holocène est moins facile à délimiter que celle des lacs qui se sont développés à nouveau vers 6.000 ans B.P., après la petite phase sèche vers 7.500 ans B.P. (PETIT-MAIRE - 1984, LABEYRIE - 1985).

Dans l'ensemble et selon SERVANT (1974), le passage des conditions très humides de l'holocène ancien (9.000 - 5.000 ans B.P.) aux conditions humides de l'holocène moyen (7.000 - 5.000 ans B.P.) correspond, au moins en Afrique centrale et occidentale, à l'instauration des climats tropicaux à saisons contrastées. Vers 6.000 ans B.P., les zones climatiques actuelles étaient décalées de 500 à 1.000 km vers le nord à l'intérieur du Sahara. Ce décalage correspond chronologiquement au maximum de réchauffement post-glaciaire de l'hémisphère nord.

Mais depuis 5.000 ans B.P., l'évolution a été caractérisée par la superposition d'une série d'oscillations mineures à une sécheresse de plus en plus accusée. D'après ELUARD (1973), les plus marquées des oscillations se situent vers 3.200 ans B.P. en Mauritanie et au Niger. Les nappes lacustres de la bordure méridionale du Sahara s'orientent vers un assèchement complet et il ne subsiste actuellement que des lacs résiduels, alimentés par le drainage des régions humides.

Cette évolution indique un déplacement probable de la limite nord du domaine balayé par la convergence intertropicale en direction de l'équateur. Nous avons montré, dans les chapitres précédents, l'importance de ce phénomène physique pour la répartition des précipitations en milieu tropical. Mais, d'après SERVANT (1974), ce déplacement est contemporain d'un léger refroidissement dans l'hémisphère. Il pourrait donc s'agir d'un phénomène plus général lié à l'évolution de l'équateur énergétique de la terre.

### 7.3. ELABORATION DE LA METHODE DE PREVISION A LONG TERME

#### 7.3.1. Justification physique

L'utilisation des résultats de la paléoclimatologie pour faire la prévision à long terme a nécessité l'orientation des efforts dans deux directions :

- l'utilisation des corrélations entre zones climatiques différentes et
- l'utilisation de la notion de cycle.

On trouvera un développement de la première démarche dans ROGNON (1974). La seconde démarche repose sur l'idée que les cycles et pseudo-cycles observés dans les oscillations naturelles du climat sont dus à des changements périodiques de l'intensité du rayonnement solaire. (GULI - 1974 , MOREL - 1979 , GERASIMOV - 1979). Or, l'idée de base du modèle stochastique développé dans les chapitres précédents est fondée sur le principe d'une équivalence entre le cycle de l'eau et la répartition de l'énergie. A partir d'une interprétation formelle de la boucle de rétroaction stabilisatrice, on a obtenu une description de l'évolution du cycle de l'eau par la relation :

$$dS = R(S, t) dt + \sigma(S, t) d\beta \quad (2)$$

En élargissant cette interprétation formelle de manière à prendre en compte la boucle de réaction destabilisatrice

{ température | neige ou glace | albédo }

on introduit un facteur de variabilité dans la répartition de l'énergie. Cela apparaîtra dans l'équation (2) sous la forme d'un terme forcé  $z(\cdot)$  qui décrit l'écart par rapport à la boucle stabilisatrice.

$$dS = R(S, z, t) dt + \sigma(S, t, z) d\beta \quad (3)$$

Pour spécifier la forme de  $z$ , la première démarche consiste à identifier les conditions dans lesquelles cette modification de la variation de l'énergie peut intervenir.

On sait (KOCKARTS - 1982 pp. 44-45) que le flux d'énergie électromagnétique provenant du soleil et arrivant au sommet de l'atmosphère à une unité astronomique constitue la "constante solaire" de base. Sa valeur la plus récente est de  $1,367 \times 10^6 \text{ erg/cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 1,367 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$ .

Comme cette énergie varie inversement avec le carré de la distance Terre-Soleil, une variation géométrique de la "constante solaire" se produit au cours de l'année. En janvier, la "constante solaire" atteint une valeur maximale de  $1,41 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}$  et en juillet une valeur minimale de  $1,32 \text{ W m}^{-2}$ . D'après KOCKARTS (1982), cette variation n'a aucun rapport avec des variations physiques de l'émission solaire; elle résulte uniquement de la géométrie du système Terre-Soleil. On en déduit qu'une définition de  $z$  doit prendre en compte la variation géométrique du système Terre-Soleil.

D'après LABEYRIE (1985, p. 148), BERGER (1982, p. 507), cette cause de variabilité de l'ensoleillement de la terre a été identifiée depuis 1842 par le mathématicien français ADHEMAR qui a établi que la variation de l'ensoleillement de la terre est liée à la précession des équinoxes mais c'est dans la première moitié du 20ème siècle que les bases d'une théorie astronomique des variations climatiques furent posées avec les travaux de MILANKOVICH publiés en 1920, 1930 et 1941 (BERGER, p. 508). L'idée de base est que toutes diminutions du rayonnement solaire reçu pendant l'hiver favorise l'accumulation de la neige et si cette couverture neigeuse ne fond pas pendant l'été, le rayonnement solaire estival est réfléchi par la neige qui a un albédo très grand (80%) et la température locale ne s'élève pas. La neige pourra alors continuer à s'accumuler pendant des milliers d'années, constituant peu à peu des calottes glaciaires, jusqu'à ce que survienne une longue période d'étés chauds.

Or, par suite des perturbations apportées par les autres planètes, les caractéristiques de l'orbite terrestre subissent au cours du temps de petites variations qui ont une influence sur la répartition du rayonnement solaire incident :

- la précession déplace la date de passage au périhélie (point de l'orbite où la distance au soleil est minimale) avec une période voisine de 21.000 ans. A l'heure actuelle, ce point est atteint au début de janvier, ce qui tend à modérer les contrastes saisonniers de l'hémisphère Nord.

- l'inclinaison varie de  $1,5^\circ$  autour de sa valeur actuelle avec une période de l'ordre de 40.000 ans, Cette variation modifie la répartition du rayonnement reçu entraînant un déplacement des cercles polaires et des tropiques ;

- l'excentricité de l'orbite varie avec une période irrégulière de 90.000 à 100.000 ans et module les amplitudes de la précession.

D'après LABEYRIE (1985 , p. 200), les périodes fondamentales de la théorie astronomique commencent à ressortir clairement lorsqu'on analyse par la méthode de Fourier les cycles climatiques. D'après BERGER (1982 , p. 522), le modèle de MILANKOVICH a passé à la fois les tests de plausibilité statistique et physique. En effet, les nouvelles techniques d'acquisition, d'interprétation et de datation des données paléoclimatiques fiables sont maintenant disponibles. En conséquence, il a été possible de tester la théorie astronomique par la méthode spectrale. Il est apparu alors que la variance climatique sur 730.000 ans est concentrée dans la bande de fréquence étroite de 19.000, 23.000 et 41.000 comme le prévoient même les modèles linéaires les plus simples (IMBRIE - 1982, p. 528).

Il résulte de ces considérations que le terme forcé  $z$  va dépendre de ces paramètres géométriques du système Terre-Soleil. On aura :

$$z = z(e_1, e_2, e_3) \quad (4)$$

avec  $e_1$  - l'excentricité de l'orbite de la terre

$e_2$  - l'obliquité du plan de l'écliptique

$e_3$  - la longitude du périhélie par rapport au point vernal.

D'après les études de IMBRIE (1982 , p. 534), on peut prendre :

$$z = e_2 + a e_1 \sin(e_3 - b) \quad (5)$$

où  $a$  et  $b$  sont des paramètres d'ajustement.

Avec ces définitions, une formulation déterministe simple de l'équation (3) est donnée par la relation :

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{T_i} (z - S) \quad (6)$$

où  $T_i$  est la constante de temps définie par :

$$T_i = \begin{cases} T_1 & \text{si le climat est à la phase de réchauffement} \\ T_2 & \text{si le climat est à la phase de refroidissement} \end{cases}$$

La relation (6) définit le modèle de IMBRIE. L'application de ce modèle permet, d'après l'auteur, de dire que la "phase de refroidissement qui a commencé voici environ 6.000 ans va se poursuivre pendant les 23.000 prochaines années". Ces résultats fournissent une bonne indication de l'exploitation possible des modèles de prévision à long terme, mais la prévision annoncée devrait être considérée avec une certaine réserve.

On pense en effet que la prise en compte conséquente des termes d'incertitudes est nécessaire pour apprécier à sa juste valeur les résultats de la prévision du modèle. D'une part l'action de l'homme est devenue aujourd'hui l'un des facteurs d'incertitude, les plus importants pour la prévision à long terme du climat, d'autre part il est certain que les causes évoquées plus haut ne sont pas les seules responsables de la variabilité de la répartition de l'énergie électromagnétique reçue du soleil. L'une des propriétés les plus évidentes du système solaire est que tous les corps célestes à l'intérieur de ce système sont en rotation d'une manière ou d'une autre. D'après Mc CREA (1984), ce mouvement de rotation constitue une propriété absolue qui traduit le lien avec le reste de l'univers. GOUGH (1984) indique que la rotation influence la fréquence des oscillations libres du soleil. Pour STEPHENSON et

et MORRISON (1984), l'effet de marée (de la lune) constitue le couple de forces dominant dans la variation de la rotation de la terre mais il existe d'autres variations qui ne s'expliquent pas par cet effet de marée et dont l'échelle de temps est de l'ordre de quelques décades à quelques millénaires. BROCHE (1984) indique que le moment angulaire du système Terre-Lune n'est pas une quantité arbitraire mais correspond bien à la corrélation masse-moment angulaire des autres planètes.

Des études récentes justifient éloquemment que l'on ne peut pas attribuer toute la variabilité du flux d'énergie électromagnétique à la modification de la géométrie du système Terre-Soleil mais que l'on doit envisager une certaine interaction avec l'univers tout entier (Principe de Mach). Mais comme cette interaction ne peut pas être évaluée à l'état actuel des connaissances, on pense que la prise en compte des termes d'incertitudes est nécessaire pour traduire notre ignorance de ces phénomènes. L'introduction de ces termes d'incertitudes dans le modèle différentiel de IMBRIE doit permettre de présenter les résultats de prévision en termes de probabilité. Ainsi, la prise en compte des facteurs géophysiques permettrait de donner un sens à la probabilité d'évènements multi-millénaires.

Il apparaît, d'après tout ce qui précède, que l'utilisation de la répartition de l'énergie peut servir de base de description aussi bien pour l'évolution à court terme que pour les évènements à long terme. Pour faire apparaître le lien entre ces deux échelles extrêmes de description, nous utiliserons les résultats du paragraphe (4.4.2) en faisant correspondre à des constantes de temps données des extensions spatiales bien déterminées.

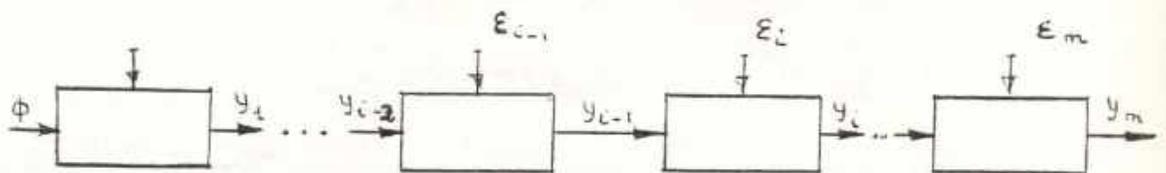
### 7.3.2. Utilisation des effets d'échelle

La pratique quotidienne des météorologues montre que pour prévoir le temps à 24 heures ou à 48 heures d'échéances, il est possible d'utiliser les images de satellites géostationnaires, situés à

36.000 km dans le plan équatorial. Ces satellites décrivent leur orbite circulaire en 23 heures 56 minutes (durée du jour sidéral); ils tournent dans le même sens et à la même vitesse angulaire que la terre. Tout se passe donc comme si, pour faire la prévision à 24 heures ou 48 heures d'échéance, il faut considérer une structure spatiale beaucoup plus grande que le système climatique planétaire.

De même, on peut penser que si plusieurs millénaires d'observation empirique n'avaient pas forgé notre connaissance de la succession des saisons et si les lois de la physique n'avaient pas permis la détermination des orbites planétaires, il aurait fallu une station d'observation hors du système solaire pour prévoir, à partir de la situation actuelle, ce que sera la saison prochaine. En suivant le même raisonnement, on pourrait dire que les prévisions pour une échéance du millénaire (théorie astronomique) nécessiteraient un observateur situé hors de la galaxie. Donc, plus loin on se place, plus long est l'échéancier de la prévision.

Du point de vue conceptuel, on peut alors considérer pour la prévision à long terme un système plus grand que le système climatique planétaire. En choisissant comme échelle de référence le système ayant une échelle de temps de un an, le système correspondant à une échelle de plusieurs années pourrait être désagrégé suivant ce système unitaire de façon que les observations de l'année  $(i-1)$  servent de fonction d'entrée à l'année  $i$ . En tenant compte des résultats du chapitre 4, on prendra le système unitaire sous la forme linéaire. Alors, en appelant  $\phi = \bar{\phi} + \sigma_1 \varepsilon_1$  l'état du système de départ (i.e. l'état initial de l'année de départ), on obtient le système d'équations suivant pour la prévision de l'état final,  $y_m$  :



$$\frac{d y_1}{d t} + \lambda y_1 = \phi$$

$$\frac{d y_2}{d t} + \lambda y_2 = y_1 + \sigma_2 \varepsilon_2$$

$$\frac{d y_i}{d t} + \lambda y_i = y_{i-1} + \sigma_i \varepsilon_i$$

$$\frac{d y_m}{d t} + \lambda y_m = y_{m-1} + \sigma_m \varepsilon_m$$

(7)

Les relations (7) sont prises au sens des distributions de Laurent SCHWARTZ. On obtient une description de l'état du système au niveau du  $m^{\text{ième}}$  élément sous la forme :

$$y_m = \left( \frac{d}{d t} + \lambda \right)^{-m} \times \bar{\phi} + \sum_{k=1}^m \left( \frac{d}{d t} + \lambda \right)^{-(m-k+1)} \times \sigma_k \varepsilon_k \quad (8)$$

En utilisant les résultats du chapitre 4 qui indiquent que l'écart type est une fonction du nombre d'éléments agrégés et que sa valeur décroît lorsque ce nombre augmente, on voit que l'on a (  $\forall k, \sigma_k = \sigma(m)$  ) alors :

$$\sum_{k=1}^m \left( \frac{d}{d t} + \lambda \right)^{-(m-k+1)} \times \sigma_k \sigma_k = \sigma(m) \sum_{k=1}^m \left( \frac{d}{d t} + \lambda \right)^{-(m-k+1)} \times \varepsilon_k$$

Si l'on pose, pour décrire les termes d'incertitude :

$$\left( \frac{d}{d t} + \lambda \right)^{-(m-k+1)} \times \varepsilon_k = \xi_k$$

alors l'application du théorème central limite conduit à la variable

adimensionnelle gaussienne de moyenne nulle, en définissant les  $\xi_k$  comme des variables adimensionnelles de moyenne nulle :

$$w = \sum_{k=1}^m \xi_k \quad (9)$$

On va avoir :

$$y_m = \left( \frac{d}{d+t} + \lambda \right)^{-m} * \bar{\phi} + \sigma(m) w \quad (10)$$

Dans ces relations (\*) est mis pour le produit de convolution. On a pris  $\lambda$ , coefficient des systèmes, comme constant. Cette simplification est une schématisation de ce que peut être la situation physique réelle mais elle permet de voir que le problème de prévision à long terme se ramène à l'étude des opérateurs de la forme :

$$D = \left( \frac{d}{d+t} + \lambda \right)^m$$

Avec  $\lambda = \text{cst}$ , on a :

$$D^{-1} = \left( \frac{d}{d+t} + \lambda \right)^{-m} = \gamma(t) e^{-\lambda t} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \quad (11)$$

où  $\gamma(t)$  est une fonction de Heaviside.

Si  $\lambda = \lambda(m, t)$  est une fonction de  $(m)$  et de  $(t)$ , on ne peut plus dire avec certitude si  $D$  est inversible ou si l'équation (8) a un sens. On peut cependant, en adoptant un point de vue conceptuel et en donnant à  $\lambda(m, t)$  des valeurs particulières, dégager certaines propriétés formelles de  $D$ .

### 7.3.3. Quelques propriétés de l'opérateur d'évolution

#### a. Propriétés géométriques

Si l'on remarque que la plupart des structures qui interviennent dans le système conceptuel élaboré évolue avec une période propre (révolution de la terre, révolution du système terre-lune, révolution du système solaire autour d'un centre galactique, etc.)

on peut considérer des  $\lambda_j$  qui soient constants tant que l'on reste à l'intérieur d'une structure naturelle donnée. Alors, en partant de l'équation (7), on définit l'opérateur D sous la forme :

$$D = \prod_j \left( \frac{d}{dt} + \lambda_j \right)^{m_j}$$

où  $j$  est le nombre de structures naturelles considérées et  $m_j$  est le nombre de système dans chaque structure naturelle. On sait que pour qu'une exponentielle  $e^{\lambda_j t}$  ait la période T réelle positive il faut et il suffit que  $e^{\lambda_j T} = 1$  ou bien  $\lambda_j T = 2\pi i \nu_j$  ; de là,, on déduit  $\lambda_j = i \nu_j \frac{2\pi}{T} = i \omega \nu_j$ . Alors :

$$D^{-1} = \sum_{k=1}^j \gamma(t) e^{-i \omega \nu_k t} \frac{t^{m_k-1}}{(m_k - 1)!} \quad (12)$$

L'évolution de l'état se présente dans ce cas sous la forme de somme de fonctions trigonométriques. On sait que pour de telles sommes, le rapport des périodes constitue le paramètre primordial pour la détermination de la tendance.

Si les fréquences des composantes sont des multiples entiers ou harmoniques d'une certaine fréquence fondamentales, alors l'évolution du système résultant se fait à cette fréquence fondamentale.

Si le rapport des fréquences est un nombre rationnel, le caractère périodique de l'évolution du système apparaît aussi nettement. Mais si ce rapport des fréquences est très grand, on n'observe pas de répétition dans l'évolution du phénomène. Dans ce cas, la vision que l'on a de l'évolution de ce phénomène dépendra de l'échelle des temps considérée et de la définition des termes de bruits.

L'application de la série de Fourier pour la description des séries d'observation hydrologique s'appuie sur la première hypothèse, tandis que l'utilisation des résultats de la théorie astronomique suggère un rapport des fréquences très grand.

b. Signification conceptuelle

On peut montrer (AFOUDA - 1980 - Annexe) que le système d'équations (7) provient de la discrétisation d'une équation de conservation donnée par

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial F(h, t)}{\partial x} = \phi \quad (13)$$

pour laquelle on a posé :

$$y_i = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} h(t, x) dx$$

$$\psi_i - \psi_{i-1} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial F(h, t)}{\partial x} dx$$

$$\text{où } \psi_i = \lambda y_i$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{x_m - x_1} \int_{x_1}^{x_m} \phi(x, t) dx$$

Dans ce cas, en écrivant (13) sous la forme :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \phi \quad (14)$$

et en comparant avec :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{dh}{dt} \quad (15)$$

on déduit :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h} \quad (16)$$

$$\frac{dh}{dt} = \phi$$

Comme d'après la définition

$$h = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{d}{d+t} + \lambda \right)^{-m} \times \phi \quad (17)$$

on déduit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{d}{d+t} + \lambda \right)^m = \frac{d}{d+t} \quad (18)$$

La relation (18) permet de passer d'un système ayant une structure complexe à un système simple et cette opération peut théoriquement se répéter indéfiniment :

$$\frac{d}{d+t} = \left\{ \lim_{m_V \rightarrow \infty} \dots \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \left[ \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \left( \frac{d}{d+t} + \lambda_1(m_1) \right)^{m_1} + \lambda_2(m_2) \right]^{m_2} \dots + \lambda_V(m_V) \right\}^{m_V}$$

Une telle description avait été prévue par POINCARÉ dès 1901 qui indique (nouvelle édition - 1968 - p. 164) : *Sans doute, si nos moyens d'investigation devenaient de plus en plus pénétrants, nous découvririons le simple sous le complexe, puis le complexe sous le simple, puis de nouveau le simple sous le complexe, et ainsi de suite sans que nous puissions prévoir quel sera le dernier terme*". On passe d'un niveau de complexité inférieur à un niveau de simplicité supérieur par le jeu des moyennes et des grands nombres. En effet, comme l'indique KLEMES (1983), *"un élément à un niveau d'échelle donné s'obtient à partir de l'interaction d'un grand nombre d'éléments de niveau inférieur. Il s'ensuit que les lois à l'échelle supérieure expriment les moyennes ou les intégrales des lois dominant au niveau inférieur"*. Ainsi, l'équation (18) apparaît comme une relation qui permet d'associer à plusieurs éléments un élément unique. D'après KLEMES, un aspect dominant de cette relation est que, en passant d'un niveau de complexité inférieur à un niveau de simplicité supérieur, la prédominance de l'aspect aléatoire faiblit et l'aspect déterministe du processus examiné apparaît en fonction du niveau de complexité à partir duquel l'observation est faite. C'est aussi le

sens des résultats du paragraphe 4.2.4, En somme, l'augmentation du désordre avec le nombre d'éléments conduit à un ordre que l'on traduit par un système unique. On retrouve ainsi ce que C. THIRRIOT a appelé "le paradoxe de l'information, vue sous l'angle de l'entropie". On exprime ces faits d'observation dans la relation (10) en posant :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma(m) = 0 \quad (20)$$

Il apparaît, à partir de ce qui précède, que l'élaboration d'un modèle de prévision qui prenne en compte aussi bien l'évolution à court, moyen et long terme nécessite :

1°. La définition mathématique de l'opérateur

$$D_m = \left( \frac{d}{d+t} + \lambda(m,t) \right)^m$$

telle que :

$$D_m = \begin{cases} \mathbb{I} \text{ (Identité) si } m = 0 \\ D_{m+n} = D_m * D_n \\ \lim_{m \rightarrow \infty} D_m = \frac{d}{d+t} \end{cases} \quad (21)$$

Une telle définition permettrait de faire un rapprochement avec la famille d'opérateurs bornés appelée semi-groupe de contraction et définie, d'après BREZIS (1973), dans E, une partie d'un espace de Hilbert, par :

$$\{ U(t) \mid t \in (0, \infty) \}$$

et satisfaisant

- 1°.  $U(0) = \mathbf{I}$
- 2°.  $U(t_1 + t_2) = U(t_1) \cdot U(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$
- 3°.  $\lim_{t \rightarrow 0} \|U(t)\phi - \phi\| = 0 \quad \forall \phi \in E$
- 4°.  $\|U(t)\phi_1 - U(t)\phi_2\| < \|\phi_1 - \phi_2\| \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in E$   
 $\forall t \geq 0$

On sait que ce résultat est une généralisation du théorème de Hille-Yosida qui indique que si  $A$  est un opérateur linéaire défini sur un espace de Banach  $E$  avec la propriété que  $(I + \alpha A)^{-1}$  est défini sur  $E$  et

$$\|(I + \alpha A)^{-1}\| \leq 1 \quad \alpha > 0$$

alors, il existe, pour tout  $t \geq 0$  et  $\phi \in E$

$$y(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \mathbf{I} + \frac{tA}{m} \right)^{-m} \phi = e^{-tA} \phi \quad (22)$$

En outre  $y(t)$  est solution du problème de Cauchy

$$\frac{d y}{d t} + A y = 0, \quad y(0) = \phi \quad (23)$$

Si nous considérons la formule exponentielle (22), en posant  $\lambda(m, t) = \frac{tA}{m}$  avec  $A$  vérifiant les conditions du théorème de Hille-Yosida, on peut écrire en utilisant la définition (21) :

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \mathbf{I} + \frac{tA}{m} \right)^{-m} \phi = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{d}{dt} + \frac{tA}{n} \right)^{-n} + \frac{tA}{m} \right)^{-m} \phi \\ &= e^{-tA} \phi \end{aligned} \quad (24)$$

La signification physique de l'opérateur  $D_m$  étant précisée plus haut, la relation (24) montre que la famille d'opérateurs définie par  $D_m$  n'est pas vide, ce qui constitue un argument de plausibilité pour

son existence.

2°. On peut envisager la définition de processus stochastiques plus généraux, indicés à la fois par  $t$  et par  $m$  ( $t$  étant la variable temporelle et  $m$  la variable spatiale). Une démarche simple consiste à poser  $T$  ensemble des indices :  $(t, m) \in T$ . Si l'on note  $E$  l'ensemble des états, muni de la tribu  $B$  des parties, le processus stochastique indexé dans  $T$  et ayant des états dans  $(E, B)$ , relatif à un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, Pr)$  sera défini par une application :

$$(t, m) \rightarrow y_m(t)$$

de  $T$  dans l'espace des variables aléatoires sur  $\Omega$  à valeur dans  $E$ . Dans ce cas,  $y_m(t)$  est un champ aléatoire. On ramène ainsi le problème de la prévision à l'étude d'un champ aléatoire dont l'évolution est déterminée par l'opérateur  $D_m$ .

Dans le cas habituel,  $E = R^n$  et est muni de sa tribu borélienne et  $T$  est une partie de  $R^d$  avec  $d = 1$ . Dans le cas envisagé ici,  $d > 1$ .

Les problèmes liés à la définition mathématique du champ aléatoire ne sont pas abordés dans ce mémoire. On pense cependant, compte tenu des résultats intuitifs rassemblés dans AFOUDA (1983), que  $E$  et  $T$  doivent être choisis de manière à préserver les propriétés géométriques de l'opérateur  $D_m$  dont l'aspect essentiel doit rester la liaison entre les échelles de l'espace et du temps. L'importance de cette liaison intime entre les échelles de temps et d'espace a déjà été soulignée par KLEMES (1983) qui indique que, lorsqu'une échelle de temps est donnée dans un modèle hydrologique, le choix de l'échelle d'espace détermine le type de relation que l'on cherche à identifier. Mais cet aspect important de la liaison entre les échelles de temps et d'espace n'apparaît très clairement que lorsqu'on se situe dans le contexte relativiste. On sait que le point essentiel de cette théorie est l'impossibilité absolue de séparer la mesure de l'espace de la mesure du temps. En effet, la mesure du temps ne peut être séparée de la gravitation universelle et celle-ci est une propriété

géométrique de l'espace-temps, correspondant à une généralisation de la notion de courbure de la géométrie ordinaire. La possibilité d'une extension relativiste des modèles hydrologiques a été envisagée dans AFOUDA (1982, 1983).

#### 7.4. CONCLUSION

Face aux catastrophes climatiques que connaissent aujourd'hui les zones intertropicales de la planète, l'une des grandes interrogations de toutes les sociétés humaines est de savoir ce que sera le climat du futur. La réponse à cette question nécessite l'élaboration de méthode de prévision à long terme qui s'appuie sur l'analyse des climats passés et présents et leur extrapolation sur le futur. Mais, compte tenu de la grande inconnue que constitue l'action de l'homme, ces méthodes doivent aussi être basées sur une connaissance approfondie du comportement géophysique de notre milieu naturel.

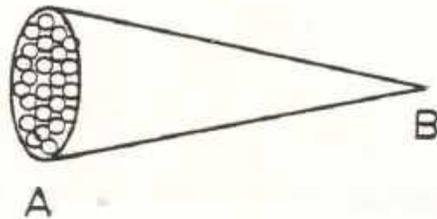
Or, tout phénomène hydrométéorologique peut se repérer dans l'espace et dans le temps. Il possède, non seulement une extension spatiale propre mais également une durée de vie propre. La pratique quotidienne des méthodes de prévision montre en outre que les perturbations hydrométéorologiques sont identifiables par satellite puisque toute perturbation est associée à un système nuageux identifiable. Mais, vues des orbites géostationnaires des satellites, les structures des perturbations atmosphériques qui peuvent paraître aléatoires au niveau local apparaissent en fait comme parfaitement organisées dans l'espace et dans le temps.

Nous avons utilisé ces faits d'observation pour dégager un opérateur d'évolution qui permet de prendre en compte dans une même formulation la notion d'échelle d'espace et de temps. La propriété essentielle de cet opérateur est de montrer le passage de la situation locale fortement aléatoire à la situation globale qui montre une organisation spatio-temporelle régulière.

Compte tenu de l'analogie formelle que l'on observe dans la description donnée par cet opérateur et les concepts habituels de la théorie de la Relativité Générale, il nous paraît souhaitable que des études plus approfondies soient consacrées à la recherche des propriétés mathématiques de l'opérateur.

De telles recherches pourraient, à notre avis, s'appuyer sur les notions d'infiniment grand et d'infiniment petit pris au sens de l'analyse non-standard.

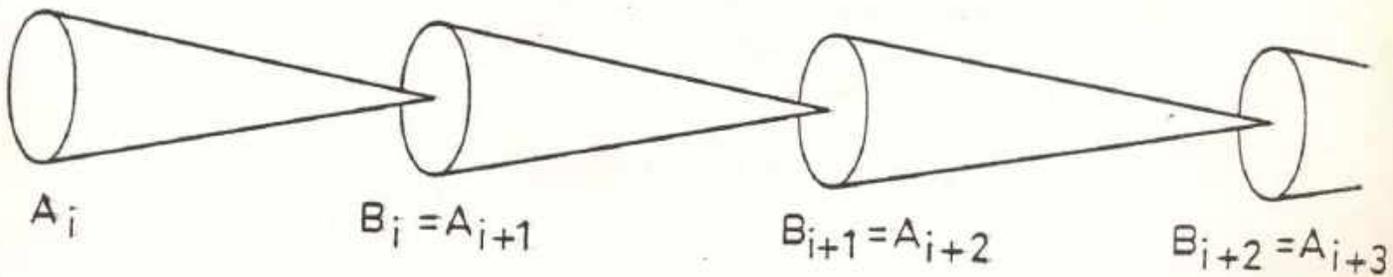
---



Schema 7.1.a : Passage du complexe au simple

A — Niveau de complexité inférieur

B — Niveau de simplicité supérieur



Schema 7.1.b :

Présentation conceptuelle des passages successifs  
du complexe au simple

1871  
No. 100

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- AFOUDA A. (1982)  
Extension relativiste des modèles hydrologiques.  
Le Courrier de la Recherche au Bénin, Bulletin de liaison  
entre les chercheurs du Bénin. Direction de la Recherche  
Scientifique et Technique, n° 3, décembre.
- AFOUDA A. (1983)  
Théorie relativiste des systèmes hydrologiques.  
Communication présentée au Séminaire de l'A I S H sur les  
"Nouvelles approches dans le calcul des bilans hydriques".  
XVIII<sup>e</sup> Assemblée Générale. Hambourg, 15-27 août.
- BERGER A.L. (1981)  
The Astronomical theory of Paleoclimates  
in Climatic Variations and Variability : Facts and Theories  
A. Berger (éd.), pp. 501-525, D. reidel Publishing Company.
- BLANCHET G. (1972)  
Les précipitations exceptionnelles de décembre 1968 et jan-  
vier 1969 au Liban. Cité par Péguy (1979 dans la "Météoro-  
logie VI" n° 19, pp. 93-104
- BOULANGER M. et ROYER J.F. (1976)  
Les problèmes généraux de la paléoclimatologie.  
La Météorologie, VI<sup>e</sup> série, n° 5, pp. 111-122
- BOUVIER C. (1983)  
Etude des effets de dépendance dans une série chronologique.  
Application à l'étude des séquences de jours de pluie.  
Cah. O.R.S.T.O.M., Ser. Hydrol., vol. XX, n° 2, pp. 79-116
- BROSCHÉ P. (1984)  
Tidal friction in the Earth-Moon System.  
Phil. Trans. R. Soc. Lond. A-313, pp. 71-75
- DUPLESSY J.C. et BOULANGER M. (1974)  
Le point actuel de la paléoclimatologie.  
XIII<sup>e</sup> Journées de la Société Hydrotechnique de France,  
Question 1, Rapport 1.
- ELUARD P. (1973)  
Oscillations climatiques de l'Holocène à nos jours en Mauri-  
tanie atlantique et dans la vallée du Sénégal,  
cité par P. ROGNON - 1974.

- GERASIMOV I.P. (1979)  
 Les climats des époques antérieures.  
 Conférence Mondiale sur le Climat. Secrétariat de l'O.M.M.  
 Genève.
- GOUGH D.O. (1984)  
 On the rotation of the sun.  
 Phil. Trans. R. Soc. Lond. A-313, pp. 27-38
- GULI F.P. (1974)  
 Les cycles de l'eau et de température du milieu.  
 XIIIe Journées de l'Hydraulique. Société Hydrotechnique de  
 France, Question I, Rapport 10.
- IMBRIE J. (1981)  
 Time-dependent models of the climatic response to orbital  
 variation.  
 In "Climatic Variations and Variability, Facts and Theories"  
 A. Berger (édit.), pp. 527-538, Reidel Publishing Company.
- KLEMES V. (1983)  
 Conceptualisation and scale in Hydrology.  
 In I. Rodriguez-Iturbe and V.K. Gupta (Guest-Edit.) Scale  
 Problems in Hydrology.  
 Journ. Hydrol. n° 65, pp. 1-23
- KLEMES V. (1982)  
 Empirical and Causal Models in Hydrology.  
 In "Studies in Geophysics : Scientific Basis of Water-Resource  
 Management".  
 National Academy Press Washington D.C.
- KOCKARTS G. (1982)  
 Structure générale de l'atmosphère terrestre.  
 Comptes Rendus de l'Ecole d'Hiver : "Applications de la Physique  
 Moléculaire à l'atmosphère et l'environnement".  
 Edit. du CNRS, pp. 30 - 96
- LABEYRIE J. (1985)  
 L'homme et le climat  
 Edit. Denoël. Paris
- LAMB H.H. (1976)  
 Les fluctuations climatiques à longs termes.  
 La Météorologie, VIe Série, n° 7, pp. 135-141
- Mc CREA W.H. (1984)  
 Rotation in the Solar System : Introductory remarks.  
 Phil. Trans. R. Soc. London, A-313, pp. 3-4
- MOREL P. (1979)  
 Le Climat ; Exposé sur la météorologie  
 Académie des Sciences. Séance du 26 février 1979

- PEGUY C. (1979)  
Ordre et désordre des climats.  
La Météorologie, VIe Série, n° 19, pp. 93-104
- PETIT-MAIRE N. (1984)  
Le Sahara, de la steppe au désert.  
La Recherche, vol. 15, n° 160, novembre, pp. 1372-1382
- ROGNON P. (1974)  
Modifications naturelles du cycle hydrométéorologique depuis  
10.000 ans. Leur utilisation pour la prévision climatique à  
long terme.  
XIIIe Journées de l'Hydraulique, Société Hydrotechnique de  
France. Question 1, Rapport Général.
- SERVANT M. (1974)  
Les variations climatiques des régions intertropicales du  
continent africain depuis la fin du pléistocène.  
XIIIe Journées de l'Hydraulique, Société Hydrotechnique de  
France. Question 1, Rapport n° 8
- STEPHENSON F.R. and MORRISON L.V. (1984)  
Long-term changes in the rotation of the Earth : 700 B.C. to  
A.D. 1980.  
Phil. Trans. R. Soc. Lond. A-313, pp. 47-70
- THIRRIOT C. et ARNAUD M. (1985)  
Histoire de pluie à Toulouse.  
Rapport interne IMFT C.T. n° 620  
A paraître dans "Journ. de Phys. Atmosph."
- YEVJEVICH V. (1972)  
Stochastic process in hydrology.  
Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado.
-

1871  
No. 100

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



CHAPITRE VIII

CONCLUSIONS GENERALES

Le problème posé dès le début de ce mémoire présente deux aspects :

- le fonctionnement hydrodynamique du bassin versant et
- la périodicité des phénomènes hydrologiques.

Face à ces deux problèmes, le point de vue que nous avons soutenu consiste à dire que la réalité physique apparaît comme un ensemble hiérarchisé et que tout modèle qui vise à la description de l'évolution du phénomène naturel doit inclure dans sa structure une évaluation des incertitudes liées à l'échelle d'observation.

Nous avons ramené ainsi l'étude du fonctionnement du bassin versant à celle d'un système dynamique naturel en insistant sur l'importance des incertitudes et leur modélisation. La propriété essentielle qui résulte de cette modélisation est le caractère markovien de l'évolution de l'ensemble du système.

La présentation du panorama des modèles antérieures permet de voir que, bien que la modélisation des fonctions d'entrée par les chaînes de Markov discrètes soit courante en hydrologie, l'utilisation des équations différentielles stochastiques constitue une approche nouvelle. Aussi, il nous a paru utile de tester la validité de la formulation que nous avons proposée sur l'évolution des différents paramètres du système.

Pour étudier la fonction d'entrée, nous avons introduit un principe d'équivalence entre le cycle de l'eau et la répartition de l'énergie. Cette équivalence est basée sur la boucle de réactions stabilisatrices constituée par la liaison :

{ température | humidité | nébulosité | albédo }

La traduction mathématique formelle de ce principe d'équivalence, sous forme d'équations différentielles stochastiques, nous a permis de retrouver le caractère markovien de la distribution journalière des précipitations en Afrique de l'Ouest. Le rôle tout particulier de l'évolution du Front Inter-Tropical a été mis en relief.

Nous avons analysé, à la lueur des travaux récents, l'influence du réseau hydrographique et considéré l'influence de sa géométrie sur la réponse du système.

Une évaluation des termes correctifs apportés par l'hypothèse stochastique, sur la description de l'évolution des débits de sortie, a été faite. On a montré notamment que cette évolution peut être traduite sous la forme d'une équation différentielle stochastique.

Enfin, la dernière partie de ce travail a été réservée à la recherche d'un modèle d'évolution à long terme. Nous proposons un modèle de prévision à long terme qui doit permettre de faire dépendre les grandes tendances de l'évolution de notre milieu naturel des paramètres astronomiques de la planète. Ce faisant, nous avons pu retrouver une description formelle du milieu physique prévue dès 1901 par POINCARÉ. Quelques propriétés de l'opérateur d'évolution qui résulte de cette description formelle ont été présentées.

Cependant, les problèmes liés aux propriétés mathématiques de l'opérateur n'ont été abordés que d'un point de vue conceptuel. Il nous paraît souhaitable que des études plus approfondies soient consacrées à la recherche des propriétés mathématiques de cet opérateur. Compte tenu des résultats intuitifs déjà obtenus (AFOUDA, 1983), nous pensons que l'utilisation de cet opérateur et l'extension du principe d'équivalence peuvent permettre une description complète de cette homothétie interne de notre milieu naturel dont parle MANDELBROT dans son livre sur les objets fractals.

---



DECISION

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Toulouse

VU les dispositions de l'article 9 de l'arrêté du 16 avril 1974  
sur le DOCTORAT d'ETAT

VU les rapports de M. THIRRIOT

M. DESSEN

M. FONTAN

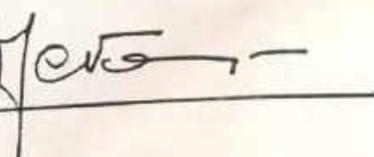
AUTORISE Monsieur Abel AFOUDA

à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du grade de  
DOCTEUR d'ETAT.

A Toulouse, le 25 juin 1985

Le Président de l'I.N.P.T.



  
J. NOUGARO

T H E S E  
présentée à

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE  
en vue de l'obtention

DU GRADE DE DOCTEUR D'ETAT  
Discipline : Sciences  
Mention : Mécanique

par

ABEL AFOUDA  
Docteur de 3ème Cycle

CONTRIBUTION A LA REPRESENTATION MATHEMATIQUE  
DU FONCTIONNEMENT HYDRODYNAMIQUE DES BASSINS VERSANTS

ANNEXES

soutenue le 10 juillet 1985 devant le Jury

MM. THIRRIOT

Président

  
CERON  
DESSENS  
EZIN  
FONTAN  
GAUDU  
THIBAUT

Membres

ANNEXES A

ANNEXE A - 1

A UNIFIED APPROACH TO WATERSHED  
MODELLING.

IN "NORDIC HYDROLOGY ,VOL. 9 , N° 3/4  
1978 ; PP 161-172".

### The Simplified Conceptual Watershed Model

A large number of schemes have been proposed for the representation of the Hydrologic processes in the land phase of the hydrological cycle, but they are generally too complex for the parametrical modelling of the rainfall-runoff process. A description of these models has been made by Dooge (1977). This study is based on the simplified model shown in Fig. 1.

This model makes a distinction between direct storm response and baseflow and also between the movement of soil moisture in the unsaturated zone and the flow of ground water in the saturated zone.

This simplified catchment model has thus two main components: that is, the component of overland flow (direct storm response) and the component of underground flow which is in itself a component of several processes. A detailed description of inter-actions between the two components is given elsewhere (Afoua 1974) and it can be summarized as follows: the unsaturated zone is of main importance in that it separates the total amount of water into two major parts: the overland component and the underground component. The processes in the unsaturated zone also comprise depletion of soil moisture by evaporation and transpiration soil moisture movement. The resulting overland flow can be positive or equal to zero. As a response to the change in the stream stage, due to the overland runoff, the base flow decreases and inflow to the aquifer can occur (i.e. the baseflow can be either positive or negative). These model features are given in the form of block diagram in Fig. 1.

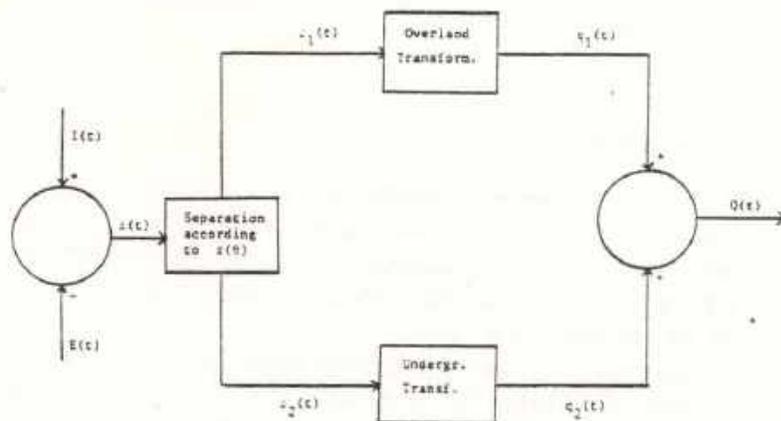


Fig. 1. Simplified catchment model.

**Mathematical Description of the Model**

Now, let  $x$  be the total storage of water not yet discharged from the watershed and be defined by

$$x(t) = \int_{t_0}^t (\rho(\tau) - Q(\tau)) d\tau$$

where

$$\rho(t) = I(t) - E(t);$$

$I(t)$  is the rainfall intensity and  $E(t)$  is the evaporation flux in the watershed;  $Q(t)$  is the discharge at the outlet from the watershed. Let  $x_1, x_2$  be the volume of rainfall not yet discharged from the watershed and thus in surface and subsurface storage.

Conservation of mass yields:

$$x = x_1 + x_2 \tag{1}$$

If the action of the unsaturated zone is characterized by a parameter  $z(\theta)$  depending on the water content, then  $x_1$  and  $x_2$  are related to the total volume by the following relations.

$$x_1 = [1 - z(\theta)] x \tag{2}$$

$$x_2 = z(\theta) x \tag{3}$$

$z(\theta)$  can vary from 0 to 1 and physically it depends on the rainfall intensity, the antecedent precipitation and evaporation and the soil properties. For any given soil structure however, this parameter will largely be governed by the amount and distribution of moisture in the soil. The soil structure is assumed as constant and  $z(\theta)$  is approximated as a function of soil moisture only.

Further, when  $\rho(t)$  and  $Q(t)$  are designating the input and the output of the system, the lumped continuity equation for the system is given by:

$$\frac{dx(t)}{dt} + Q(t) = \rho(t) \tag{4}$$

and the momentum equation will have the form

$$Q(t) = G[x; z(\theta); \rho(t); t] \tag{5}$$

Eqs. (4) and (5) can be combined to obtain

$$\frac{dx(t)}{dt} = F[x; z(\theta); \rho(t); t] \tag{6}$$

Eq. (6) describes in principle the dynamic behaviour of the hydrologic system in study, and together with Eq. (5) it constitutes the state equation.

### Explicit Formulation of the State Equations

In a previous paragraph we have considered the system to be composed of two subsystems of which one produced the overland runoff and the other produced the underground contribution to the watershed response. This decomposition is now used to specify explicitly the state equations of the hydrologic system.

Let us consider the overland component characterized by  $x_1(t)$ ,  $\rho_1(t)$ ;  $q_1(t)$  which represent the rainfall volume available for overland transformation and the input and the output of the subsystem respectively. As previously, the lumped continuity equation for the subsystem is given by

$$\frac{dx_1(t)}{dt} + q_1(t) = \rho_1(t) \quad (7)$$

and the dynamic equation takes the form

$$q_1(t) = g_1(x_1; \rho_1; t) \quad (8)$$

As it will be demonstrated later that hydrological analyses have shown that a simple power relationship can be assumed between discharge at the downstream end of the catchment and the corresponding surface storage over this catchment,  $q_1$  can be assumed to be given by

$$q_1(t) = \epsilon_2 x_1^k(t) \quad (9)$$

If  $x_2(t)$ ,  $\rho_2(t)$ ,  $q_2(t)$  are the total amounts of rainfall volume available for underground transformation and the input and output of the underground subsystem respectively, the same argument leads to the following equation

$$\frac{dx_2(t)}{dt} + q_2(t) = \rho_2(t) \quad (10)$$

$$q_2(t) = g_2(x_2; \rho_2; t) \quad (11)$$

It will be demonstrated later that  $g_2(x; \rho_2; t)$  can have the form

$$q_2(t) = \epsilon_1 x_2(t) \quad (12)$$

Now Eqs. (7), (9) and (10), (12) can be combined with (1), (2) and (3) to yield the equations of the system as

$$\frac{dx(t)}{dt} + \epsilon_1 z(\theta)x(t) + \epsilon_2 [1-z(\theta)]^k [x(t)]^k = \rho(t) \quad (13)$$

$$Q(t) = \epsilon_1 z(\theta)x(t) + \epsilon_2 [1-z(\theta)]^k [x(t)]^k \quad (14)$$

where

$\epsilon_1$  is the coefficient of underground transformation

$\epsilon_2$  is the coefficient of overland transformation

and the other parameters are defined as previously. Eqs. (13) and (14) are explicit forms of Eqs. (5) and (6).

From Eqs. (13) and (14) it appears that, although the system is described in the lumped form, it remains non-linear.

Non-linearity is introduced by the parameters  $z(\theta)$ ,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  which characterize the system and summarize the information about the past history of the system. The basic assumption made is that for all

$$x(t_0) = x[\rho(t_0); z(\theta)|_{t=t_0}; \epsilon_1; \epsilon_2]$$

at  $t_0$  and all  $\rho(t)$  for  $t > t_0$ , knowledge of  $x(t_0)$  and  $\rho(t)$  uniquely determine  $Q(t)$  for the same time interval.

In fact this is an approximation as the hydrological system of a watershed is well known to behave in a way that is dynamic, non-linear and stochastic. Nevertheless, for the moment this deterministic approximation of the physical process can be accepted.

Further, non-linearity is introduced by the power relationship between overland flow and the storage. This non-linearity is of a dynamic character and related to the turbulence processes while the first mentioned non-linearity is related to the structural characteristics of the watershed.

### **Solution of the State Equations**

*Parameter estimation* – Since the parameters of Eqs. (13) and (14), summarize all the information about the past behaviour of the system, it can be expected that available information on the past behaviour of the system allows for their objective estimation.

*Estimation of  $z(\theta)$*  – From Eqs. (2) and (3) it appears that the estimation of  $z(\theta)$  involves either the knowledge of  $x$  and  $x_2$  or the knowledge of  $x$  and  $x_1$ . Let us define

$$z_2 = \int (r(\tau) - q_2(\tau)) d\tau$$

where  $r(t) = \rho_2(t)$  is the infiltration rate. This infiltration rate can be estimate from soil physics or hydrologic models of infiltration and  $q_2$  can be evaluated utilizing traditional hydrograph separation methods. It is not the purpose of this study to present in detail these methods and their validity. Basic information and discussions can be found in classical hydrological textbooks such as Roche (1963), Eagleson (1970), Remenieras (1970), Overton and Meadows (1976), and others.

The mathematical expression for both  $z(\theta)$  and other parameters is here presented.

Suppose that  $r(t)$  and  $q_2(t)$  have been adequately evaluated, then  $z(\theta)$  can be estimated from the following:

$$z(\theta) = \frac{\int_{t_0}^t (r(\tau) - q_2(\tau)) d\tau}{\int_{t_0}^t (p(\tau) - q(\tau)) d\tau} \quad (15)$$

For a given rainfall event  $z(\theta)$  is thus the ratio of the volume of rainfall not yet discharged from subsurface storage and the total amount of water not yet discharged from the watershed. When calculated from past events,  $z(\theta)$  is a constant parameter for each rainfall event. Hence the mean value can be estimated for a particular watershed by:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i(\theta) \quad (16)$$

where  $n$  is the number of storms considered.

*Estimation of  $\epsilon_1$*  - From ground water flow theory, it is well known that under appropriate assumptions (Rorabaugh 1969, Dooge 1973), the contribution of groundwater to runoff for a uniform rate of recharge is given by

$$q = 2T \frac{h_0}{a} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \exp \left\{ -i^2 \frac{\pi^2 T}{4a^2 S} t \right\} \quad (17)$$

where  $q$  = the horizontal flow per unit width and for one side of the watercourse.

$h_0$  = the maximum elevation of water table

$T$  = the transmissivity coefficient

$S$  = the underground storage coefficient

$a$  = the distance to the topographic divide of the ground watershed

It has been shown that as  $t$  becomes large and if  $(T/a^2S) t > 0.2$  the first term in the infinite series will dominate and the outflow will approximate that from a single reservoir (Dooge 1973).

Taking this result into consideration and bearing in mind the knowledge of  $\bar{z}$ ; then  $\epsilon_1$  can be calculated from

$$\epsilon_1 = \frac{\pi^2 T}{4a^2 S \bar{z}} \quad (18)$$

### A Unified Approach to Watershed Modelling

Thus  $\epsilon_1$ , which is the coefficient of underground transformation is shown to depend on the transmissivity, the underground storage coefficient, the size of the watershed and the initial saturation condition. Hence  $1/\epsilon_1$  which corresponds to the time constant for this linear groundwater reservoir is related to the characteristics of the watershed by a physics based expression.

*Estimation of  $\epsilon_2$*  - Among the parameters to be determined  $\epsilon_2$  and  $k$  are the most familiar to hydrologists. These two parameters can be easily derived from the kinematic wave theory. Henderson (1969), Eagleson (1970), Woolhiser (1977) Overton et al. (1976) have discussed the governing equation of this approximation. Following Henderson's analysis on the order of magnitude and taking into account the kinematic wave results, the momentum equation for overland flow can be written in the form:

$$q_2 = A^{-k} C \eta I_0 \frac{k+1}{3} x_2^k \quad (19)$$

where

$C$  = the Chezy resistance coefficient or laminar resistance coefficient

$\eta$  = the wetted area of the section

$I_0$  = the bed slope

$A$  = the watershed area.

Eagleson (1970) has shown that for laminar flow  $k = 3$  and for turbulent flow  $k = 5/3$ . However, for a typical vegetated surface the flow regime may vary between laminar and turbulent. Horton found that for natural surface  $k = 2$ . As noted by Eagleson this result is supported by the results of other investigators when dealing with surfaces varying from clipped grass to tar and gravel.

The above analysis leads to the following expression for  $\epsilon_2$  and  $k$ .

$$\epsilon_2 = \frac{C \eta I_0}{A^2} \quad (20)$$

$$k = 2 \quad (21)$$

Hence,  $\epsilon_2$  depends on the surface characteristics of the watershed i.e. the slope, the Chezy's resistance coefficient which describes the effect of roughness and the degree of vegetated surface, the watershed area and the wetted area of the channel cross-section.

The parameter  $k$  gives the indication about the degree of flow turbulence.

Thus each parameter of the model has a precise physical meaning, and together they describe the dynamics of the watershed rainfall and runoff transformation.

**Mathematical Derivation of the Solution**

The state equations of the system is now given by:

$$\frac{dx}{dt} + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 = \rho(t) \quad (22)$$

$$Q(t) = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 \quad (23)$$

where

$$\lambda_1 = \epsilon_1 \bar{s} \quad (24)$$

$$\lambda_2 = \epsilon_2 [1 - \bar{s}]^2 \quad (25)$$

Eqs. (22) and (23) can be solved using the local inverse theorem as presented by Halme and Orava (1972) and applied to hydrologic systems by Afouda (1974). When appropriate initial conditions are found, the solution of the state equation is given by:

$$x(t) = \sum_{j=1}^m \int_0^t \dots \int_0^t k_j(\tau_1 \dots \tau_j) \prod_{l=1}^j \rho(t - \tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_j \quad (26)$$

If we call

$$x_1 = \int_0^t k_1(\tau_1) \rho(t - \tau_1) d\tau_1 \quad (27)$$

the linear part of Eq.(26), then

$$k_1 = \exp \{-\lambda_1 \tau_1\} \quad (27a)$$

The  $k_j$  Kernel functions for the non-linear components are derived from the following convolution product

$$x_j = -\lambda_2 (k_1 * (\sum_{v=1}^j x_v x_{j-v+1})) \quad (28)$$

The discharge is then given by:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t \dots \int_0^t H_i(\tau_1 \dots \tau_i) \prod_{l=1}^i \rho(t - \tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_i \quad (29)$$

where the  $H_i(t; \tau_1 \dots \tau_i)$  Kernel functions are obtained by appropriate combination of Kernel function  $k_j$  in accordance with Eq. (23).

### Discussion

The following discussion deals with the theoretical aspects of applicability. Whether the developed model has a good performance in practical applications has yet to be proved.

*Comparison with earlier models* – Most of the earlier physics-based models are devoted either to overland flow studies (kinematic wave theory) or to the transient saturated-unsaturated flow-studies.

Nevertheless Smith and Woolhiser (1971) have presented a physics-based model that combines the differential equation for overland flow with infiltration from rainfall. The infiltration model developed in the form of Richard's equation was combined with the overland flow equation formulated as a cascading kinematic wave equation. The model presented in this paper allows for the use of the complete infiltration equation when  $z(\theta)$  is to be found for a selected rainfall event. Moreover, in Eqs. (13) and (14) the combination of overland flow and underground flow appears clearly through parameter  $z(\theta)$  as an internal coupling while in the studies of Smith et al. an external coupling was obtained between overland flow and infiltration. It should also be noted that Smith et al. did not take into account the effect of underground flow and the effect of evaporation.

Another physics-based model that combines three dimensional transient saturated-unsaturated subsurface flow and one dimensional gradually varied unsteady channel flow models has been developed by Freeze (1972). But as reported by Natale et al. (1977), the computer implementation of the model uses programs that are very complex and requires a large amount of computer time. Moreover the model was concerned only with base flow generation. The model studied in this paper deals with the major components involved in the complex runoff process that occurs in a watershed.

*Parameter variations* – The parameters involved in the mathematical formulation have been shown to have precise physical meaning. The accuracy in estimating the watershed behaviour are of course related to the approximations made on the parameters, in particular  $z(\theta)$ .

If  $z(\theta) = 1$ ;  $\rho(t) > 0$  the watershed response take the form of underground contribution

If  $z(\theta) = 1$ ;  $\rho(t) < 0$ ; that is  $I(t) = 0$  then  $\rho(t) = -E(t)$  and  $r(t) = -E(t)$ . Assuming  $Q(t) = 0$  and  $E = n_a (\theta_s - \theta_e)$  Eq. (30) is obtained:

$$\frac{dx}{dt} = -n_a (\theta_s - \theta_e) \quad (30)$$

where

$\eta_a$  is an atmosphere transfer coefficient  
 $\theta_0$  refers to the soil moisture at the soil surface  
 and  $\theta_e$  is the surface moisture content which would be in equilibrium with the vapor pressure existing at elevation  $h$  above the soil surface.

If  $z(\theta) = 0; \rho(t) > 0$ , the model corresponds to the well known Horton-Izzard model for urban studies.

If  $z(\theta) = \text{const.} \neq 0; \rho(t) > 0$ , for a given interval we necessarily underestimate and overestimate the volume of infiltration for dry and wetted period respectively. This is the reason why time invariant model linear (linear reservoirs IUH), as well as non-linear (non-linear reservoirs, Volterra series) overestimate the low flow and underestimate the peak. The performance of the model could be improved if the values of  $\bar{z}$  are considered for each appropriate subinterval. In summary the parameter  $z(\theta)$  together with  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  relate the internal dynamics of the system to the input-output and contribute to the answer to the question «What is going on inside the black-box».

### Advantages of the Volterra Series Formulation

The solution of the state equations assuming a time invariant system lead to the Volterra' series representation of the watershed processes. This form of representation has earlier been applied to hydrologic systems by Amorochio and Orlob (1961), but their result did not have widespread application because of the difficulties involved in the identification of the non-linear Kernel function. The problem to be solved was that of the non-linear deconvolution which is a complicated inverse problem. The formulation given in this paper is a well defined problem (in a mathematical sense) which lead to separable Kernel functions which are more easy to handle. A major advantage is that the solution can be used in its analytical form (directly or with the multidimensional Laplace transform), provided the input function is known in its analytical form. An example is given for the Horton-Izzard model when  $\rho(t) = \rho_0 = \text{const.}$  Then

$$x(t) = \sum_{j=1}^m \rho_0^j \int_0^t \dots \int_0^t k_j(\tau_1 \dots \tau_j) \prod_{l=1}^j u(t-\tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_j$$

where  $u(t)$  is a unit step function. By simple calculation and algebraic transformation

$$x(t) = \frac{\rho_0^{\frac{m}{\varepsilon_2}}}{\varepsilon_2} \tanh[\varepsilon_2^{\frac{1}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}} t] \quad \text{and} \quad Q(t) = \rho_0 \tanh[\varepsilon_2^{\frac{1}{2}} \rho_0^{\frac{1}{2}} t]$$

### **Conclusion**

One of the basic ideas of this study is to consider a watershed as an inseparable environmental unit which consists of the input- the storage - the output. Any combination of the action of the major components (overland, underground) must preserve this physical unity. It has been shown that the interaction of these components through a defined parameter  $z(\theta)$  together with a lumped formulation of the continuity equation preserves the environmental unity and satisfies the theoretical physic laws of the system. The obtained mathematical formulation of the system introduces the concept of a state approach to watershed modelling. The parameters of this model are shown to have precise physical meaning and they relate the internal behaviour of the system to its input - output response.

### **Acknowledgements**

This paper is based upon a previous work presented in 1974 as a D. Thesis. Therefore the author wants to thank prof. C. Thirriot of the «Institut de Mécanique de Fluides de Toulouse» for his scientific support.

The author gratefully acknowledges the assistance of the staff of the International Centre of Hydrology of Padua Hydraulics Institute and in particular the assistance of Dr. A. Lorigiola in the preparation of the manuscript. We acknowledge also the help and the encouragement of Civil Engineer J. Hassing of Cowiconsult - Consulting Engineers and Planners, Copenhagen. Last but not least, the author gratefully acknowledges the valuable comments of prof. J.C.I. Dooge.

### **References**

- Afouda, A. (1974) Contribution à l'Etude des systèmes hydrologiques non-lineaires; Thèse de Doctorat; Université Paul Sabatier Toulouse (France).
- Amorocho, J., and Orlob, G.T. (1961) Non-linear analysis of hydrologic system; Water resources centre contribution No. 40.
- Astrom, K.J. (1970) *Introduction to stochastic control theory*. Academic Press. New York.
- Athans, M., and Falb, L.P. (1966) *Optimal control*; Mac Graw Hill, New York.
- Bucy, S.R., and Peters D.J. (1968) *Filtering for stochastic processes with application to guidance* Interscience Publisher.
- Dooge, J.C.I. (1973) *The linear theory of hydrologic systems*; U.S. Depart. of Agriculture, Technical Bulletin n. 1463; U.S. Gvt Printing office.

- Dooge, J.C.I. (1977) Problems and Methods of rainfall-runoff modelling; in *Mathematical models for surface water hydrology* edited by Ciriani, A. Maione, V. and Wallis, R.J.; John Willey et Son., London.
- Eagleson, P.S. (1970) *Dynamic hydrology*; Mac Graw Hill Books New York.
- Freeze, R.A. (1972) Role of the subsurface flow in generating surface runoff. (1) Base flow contribution to channel flow. *Water Res. Res.* 8, 3 pp. 601-623.
- Halme, A., and Orava, J. (1972) Generalized Polynomial operator for non-linear systems analysis. *I.E.E.E. Transaction on automatic control*.
- Henderson, F.M. (1969) *Open channel flow*, Mac Millian, New York.
- Natale, L., and Todini, E. (1977) A Constrained parameter Estimation technique for linear models in hydrology. In *Mathematical models for surface water hydrology*, edited by Ciriani, A. Maione, V. and Wallis, R.J.; John Willey et son, London.
- Overton, D.E., and Meadows, E.M. (1976) *Storm water modelling*; Academic press; New York.
- Remenieras, G. (1970) *L'Hydrologie de l'ingenieur*. Eyrolles édit; Paris.
- Roche, M. (1963) *Hydrologie de surface*. Gauthier Villar. Paris.
- Rorabaugh, M.I. (1969) L'estimation de la contribution à l'écoulement, des variations des reserves des berges et des eaux souterraines. *Bulletin du B.R.G.M 2a serie, section III, n. 2.*
- Smith, D.E., and Woolhiser, D.A. (1971) Mathematical simulation of infiltrating watersheds. *Hydrology paper n. 47*. Colorado state University.
- Szollósi - Nagy, A., Todini, E., and Wood, E.F. (1977) A state space model for real time forecasting of hydrological time series. *Journal of hydrological science vol. 4. No. 1.*
- Woolhiser, D.A. (1977) Unsteady free surface flow problem. In *Mathematical model for surface water hydrology*, edited by Ciriani T.A. Maione, V. and Wallis, J.R. John Willey et son. London.

Received: 24 May, 1978

**Address:**

Abel A. Afouda,  
Direction de l'Hydraulique  
B.P. 385  
Cotonou, (Rep. Pop. du Benin)  
Afrique de l'Ovest.

ANNEXE A - 2

ANALYSIS OF THE RAINFALL-RUNOFF  
TRANSFORMATION PROCESS

IN." NORDIC HYDROLOGY , VOL. 11, N°2  
1980 , PP. 93-112. "

## Analysis of the Rainfall-Runoff Transformation Process

Abel A. Afouda  
Université National du Bénin, Cotonou

Considerable effort has been expended on the theoretical aspects of the applicability of the unsteady flow equations to natural overland flow. The major difficulty when these equations are used to simulate watershed flow lies in estimating the friction factor for natural situation. In this paper a generalized friction factor is introduced and a kinematic relationship which describes the «kinematic state» of the watershed surface is proposed. The resulting equations for unsteady free surface flow is a kinematic wave approximation. These equations are solved analytically and the solution obtained in the form of integral series.

### Introduction

Because the relation between rainfall and runoff is one of the most important problems in hydrology, it has been the subject of many studies in these recent years. So there are available in hydrological literature a wide spectrum and reasonably accurate mathematical models for rainfall-runoff modelling. These models have been presented and commented on by Dooge (1973). On one hand, most of these models were lumped and did not give any information about the physics of the transformation process involved; on the other hand the one dimensional gradually varied flow equations, which constitute the basic equations for unsteady overland flow, were always simplified when applied to watershed flow. Thus hydrologists have introduced a plethora of models, based on the simplification of the flow equations «each of which reflects a small portion of hydrologic

reality, together with gross empirical simplifying assumptions based on the personal judgement of the individual modeller« (Natale and Todini 1977).

The major difficulty when flow equations are used to simulate watershed flow lies in estimating the friction resistance for natural situation. In this paper a generalized friction factor is introduced and a rational criteria for the choice of the simplified equations is proposed.

### The Rough Surface Flow

One of the watershed flow characteristics is that water moves through a medium strewn up with vegetation, stones and other roughness elements. Boundary roughness here is much greater than that encountered in ordinary hydraulic structures. As noted by Woolhiser (1975), at low rates of flow, the roughness elements protrude through the free water surface, and at high rates of flow, the boundary geometry may change in time and distance because of erosion. This is a confirmation of Wooding's analyses (1965), who suggested to define the depth as the volume of water per unit area (averaged over an area larger, compared with the dimension of the irregularities). However, since on vegetated surfaces the plant leaves and stems may offer more resistance to flow than the soil roughness, the geographical areas needed will be so large as to be topographically homogeneous.

Physically speaking, the transformation process in the watershed flow contains various sequential phases such as infiltration of rain water which forms the production process, surface flow, prompt subsurface flow, and underground response which forms the transformation process and the stream flow which is the propagation process. Each of these main processes can be described by appropriate flow equations. The transformation process is better described by the partial differential equations of gradually varied unsteady flow, known as De St Venant Equations

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q(x, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = g(I_0 - J) - q \frac{U}{H} \quad (2)$$

where  $q = q_r - q_e$ , and  $q_r$  is the rainfall rate,  $q_e$  is the rainfall loss (and will be described later).  $U$  is the local mean velocity, and  $H$ , the local depth;  $I_0$  is the slope of the watershed,  $J$  is the friction slope, and  $Q$  is the discharge resulting from the transformation process.

If Eqs. (1) and (2) should be used to describe flow over and through the watershed (Fig. 1), the basic principles underlying the theory of hydrodynamics must be applied. One of these principles states that a fluid, moving relative to a solid boundary exerts a force on the boundary. The first is shear stress which gives

The Rainfall-Runoff Transformation Process

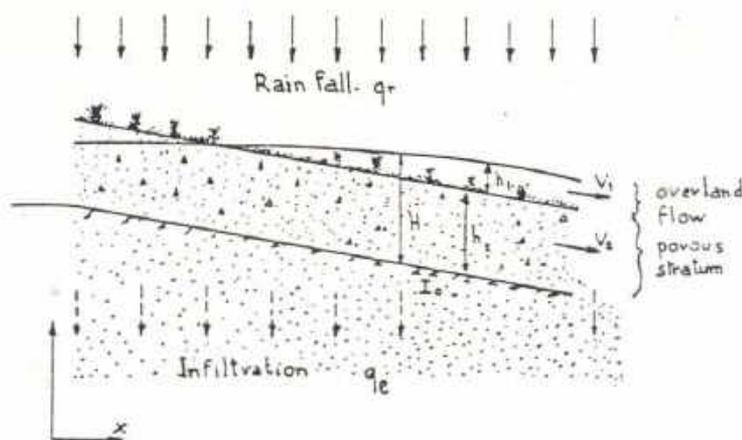


Fig. 1. Definition sketch of natural overland flow.

rise to forces tangential to the surface. The second is pressure variation along the surface that causes forces normal to the surface (Bear 1972). The vector sum of the normal and tangential surface forces integrated over the entire surface of the considered body give a resultant force. The component of this force in the direction of the velocity is called drag force. The total drag force is the sum of the frictional and pressure components and is defined by the Stokes' Equation (Bear 1972)

$$F_D = C_D \frac{\rho V^2}{2} S \quad (3)$$

where  $C_D$  is the total drag coefficient and is a function of Reynolds number  $C_D = 24/Re$ .  $S$  is the frontal area normal to the velocity  $V$ .

In this study it is assumed that roughness, plant leaves and stems are uniformly distributed, and their influence on flow per unit length can be simulated by that of spherical grain. Then if the drag coefficient per unit length is defined by

$$C_L = \frac{\eta}{Re^{m_0}} \quad (4)$$

$\eta$  will characterize the watershed surface, and  $m_0$  will be a coefficient varying slowly from 1 to 0 as the flow varies slowly from laminar to turbulent. Wooding (1965) has noted that for vegetated catchment the flow regime may vary between laminar and turbulent. Nevertheless, a value of  $m_0 = 1$  will be assumed hereafter for simplicity.

Thus, it appears that if the flow functions  $U$  and  $H$  should be determined by the continuity and dynamic equations (Eqs.(1) and (2)), the form of the friction slope  $J$  must be specified by other parameters such as  $\eta$  and  $Re$ , (the Reynolds number). It will be proved that  $\eta$  is a function of the Froude number. Then the roughness

influence can be better appreciated if a flow through it is compared to flow through a medium chosen as reference, i.e. if the similitude parameters are defined and calculated.

In hydraulic studies, normal flows are generally accepted as reference. Then the following normalizing quantities are defined:

$U_0$ -normal velocity,  $H_0$ -normal depth,  $L_0$ -a normal linear dimension of the watershed.

At this juncture if the general flow equations (continuity and dynamic) are reduced to the dimensionless form by expressing the variables in terms of dimensionless parameters which describe the scale of the water flow compared to the normal flow, it will appear that the two universal parameters which are meaningful for the watershed flow are Reynolds number  $Re$  and Froude number  $Fr$ . Hence, along with the continuity and the dynamic equations, it is necessary to have two additional relationships to describe the watershed flow. These relationships must take into account the specific characteristic of the flow through the medium, and thus must allow for an objective evaluation of  $\eta$ ; moreover they must adequately describe the influence of viscosity forces. These relationships must have the following forms

$$Re = f_0(Re_0, \eta, \Gamma) \quad (5)$$

$$Fr = f'_0(Fr_0, \eta, \Gamma) \quad (6)$$

where  $\Gamma$  is a parameter which describes the frictional forces. However, it is more convenient to eliminate  $Re_0$  and  $Fr_0$ , the Reynolds number and Froude number for normal flow accepted as reference and to write these relationships in the following forms

$$\Gamma = f_1(Re, Fr) \quad (7)$$

$$\eta = f'_1(Re, Fr) \quad (8)$$

#### Estimation of the Friction Factor

Considering the problem shown in Fig. 1, it appears that the transformation process in consideration involves a typical catchment flow in the sense given by Wooding (1965) and whose depth is  $h_1$ ; an interflow i.e. flow in the porous surface stratum  $h_2$ , with high permeability specified by Ishihara (1971), and lastly after the soil moisture storage is satisfied, a ground-water flow resulting from ground water recharge  $h_3$ . For simplicity it is assumed hereafter that  $h_3 = 0$  and then  $q_e$ , the deep infiltration rate is considered as the loss. Overland catchment flow and interflow are considered.

**Overland Catchment Flow**

For channel flow, the friction slope (or energy gradient) is usually evaluated by

$$J_1 = \frac{V_1^2}{C^2 R} \quad (9)$$

where  $C$  is the Chezy coefficient

$R$  is hydraulic radius

$V_1$  is the water velocity

The catchment flow is a rough surface flow. When one accounts for the additional drag coefficient introduced by the roughness, the friction slope for overland flow will be

$$J_1 = \left( \frac{1}{C^2 R} + \frac{C_1}{2g} \right) V_1^2 \quad (10)$$

**Interflow Component**

It is assumed that the porous surface stratum can be simulated by a porous medium made of spherical grains each of diameter  $d_0$ . Then the number of such spheres in a representative elemental volume of porous medium that forms a cylinder of length  $d\ell$  in the direction of the flow and cross section  $dS$  can be evaluated from the equation (Bear 1972).

$$n_0 = \frac{(1-P)dS d\ell}{\beta d_0^3} \quad (11)$$

where  $P$  is the porosity of the medium

$\beta$  is a coefficient which accounts for the geometry of the grain. For a spherical grain  $\beta = \pi/6$  and grains other than spherical  $\beta \neq \pi/6$

For a single sphere, the Stokes' Equation for drag is given by Eq. (3), written in the form

$$F_0 = C_D \rho \frac{V_\lambda^2}{2} S_0 \quad (12)$$

where  $V_\lambda$  is the local velocity and  $S_0$  is the surface of the sphere. Taking into account the effect of neighbouring spheres, a coefficient  $\lambda$  is introduced (Bear 1972). Then Eq. (12) may be written as

$$F_0 = \lambda \mu d_0 \bar{V}_\lambda \quad (13)$$

Taking  $\bar{V}_\lambda$  as the average velocity of flow around the particles (grains) in the main direction, it may be defined as the ratio of specific flux (apparent velocity) to the porosity (Bear 1972, Polubarinova-Kochina-1962)

$$\bar{V}_\lambda = \frac{V_2}{P} \quad (14)$$

The total drag force is given by

$$F_t = \eta_0 F_0 \quad (15)$$

Now, assuming that the body forces in the motion equations are due to gravity, the total drag is divided by the weight of water to give

$$J_2 = \frac{\eta_0 F_0}{\rho g P \frac{dA}{dx}} \quad (16)$$

By inserting the value of  $\eta$ ,  $F_0$ , and  $V_2$ , and evaluating  $So = \lambda d_0^2 / 12$  the following equation is obtained

$$J_2 = \frac{1-P}{P^3} \frac{\lambda}{24gBd_0} C_D V_2^2 \quad (17)$$

This relation is interesting in that it brings out the particular importance of the Reynolds number for the friction slope and gives an explanation to the deviation from Darcy's law and thus gives the fundament of the non-Darcian flow extensively studied in recent years (Bear 1972; Chevauteau et Thirriot 1967).

#### The Generalized Friction Factor

Assume now that the catchment flow and interflow have the same direction, then the whole watershed system can be considered as a layered porous medium where flow is parallel to layers,  $V_1$  and  $V_2$  are the upper layer and underlayer flow velocities respectively and their corresponding discharges per unit width are  $Q_1$  and  $Q_2$ ;  $h_1$  and  $h_2$  being the respective thickness and  $H = h_1 + h_2$  the total thickness. The total discharge is  $Q = Q_1 + Q_2$ .

If one wishes to consider an equivalent velocity such that the same discharge  $Q$  will be conducted through the same aquifer of thickness  $H$  such that

$$Q = UH \quad (18)$$

under a given gradient  $J$ , then the velocity  $U$  must have the following form

$$U = V_1 \left(1 - \frac{h_2}{H}\right) + V_2 \frac{h_2}{H} \quad (19)$$

By comparing this relationship with the relations for  $V_1$  and  $V_2$  and taking the gradient to be the same for both flows the following equation is obtained

$$U^2 = \left\{ \left( \frac{2gC^2R}{2g+C_1C^2R} \right) \left(1 - \frac{h_2}{H}\right)^2 + \frac{24gBd_0^3 P^3}{\lambda(1-P)C_D} \left(\frac{h_2}{H}\right)^2 + 2 \left( \frac{2gC^2R}{2g+C_1C^2R} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{24gBd_0^3 P^3}{\lambda(1-P)C_D} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{h_2}{H}\right) \left(\frac{h_2}{H}\right) \right\} J \quad (20)$$

Introducing a quantity  $\Gamma$  such that

where  $\alpha_{ws} = 4C_1 h_1 / \Gamma_0$ . When  $\Gamma_0 = 24/Re$ ,  $\alpha_{ws} = \eta h_1 / 5$

For a smooth surface  $\eta = 0$  and  $\alpha_{ws} = 0$ , then  $C_{ws} = C$ ;  $n_{ws} = n_0$ ;  $\Gamma = \Gamma_0$ .  
When  $h_1 = 0$ , we have

$$\Gamma = h_2 \frac{1-P}{P^3} \frac{\lambda}{36d_0} C_D \quad (25)$$

Assume  $d_0$  to be some length dimension of the porous matrix. For example if  $d_0$  should be a length dimension representing the elemental channel of the porous medium, then the Reynolds number will be defined through porous medium  $Re = V_2 d_0 / \nu$  ( $\nu$  being the kinematic viscosity of the fluid). However in porous medium studies, it is customary to employ some representative dimension of the grains for  $d_0$ . Bear (1972) mentioned that the mean grain diameter is often taken as the length dimension  $d_0$ . Sometimes  $d_{10}$  or  $d_{50}$  are used. Collin (1961) Suggested  $d_0 = (k/p)^{1/2}$  where  $k$  is the permeability and  $p$  the porosity. Ward (1964) used  $k^{1/2}$ . In all cases the Darcy-Weisbach friction factor  $\Gamma$  has been defined for porous media as

$$\Gamma_0 = \frac{2g d_0 J}{V_2^2} \quad (26)$$

then,  $d_0$  is defined by

$$d_0 = \frac{\Gamma_0 V_2^2}{2gJ} \quad (27)$$

Nevertheless, Fanning using analogy with overland flow gives another definition for the friction factor in porous medium

$$\Gamma_0 = \frac{2gRJ}{V_2^2} \quad (28)$$

Continuing this analogy, one can define  $h_2 = R = d_0/4$  then the friction factor for porous medium is given by

$$\Gamma = \frac{\lambda}{12B} \frac{1-P}{P^3} C_D \quad (29)$$

i.e. the friction factor for porous medium depends on the porosity and the drag coefficient.

When  $C_D = 24/Re$ , then

$$\Gamma = \frac{2\lambda}{B} \frac{1-P}{P^3} \frac{1}{Re}$$

which has the form of Fanning friction factor.

Thus it is proved that Eq. (22) gives a more general form of the friction factor and is valid for channel flow, overland flow and flow through porous media.

## The Rainfall-Runoff Transformation Process

### Estimation of the Kinematic Relation

Considering a smooth surface flow (Chezy's flow) as reference for overland flow, now, with normal depth  $H_0$  and normal velocity  $V_0^2 = C^2 R I_0$  it follows from Eq. (10) that

$$C_1 = \frac{2g(\alpha^2 - 1)}{C^2 R} \quad (30)$$

where  $\alpha = V_0 / V_1$ ; or introducing Froude numbers

$$C_1 = \frac{2J}{H_0} \left( \frac{1}{Fr_1^2} - \frac{1}{Fr_0^2} \right) \quad (31)$$

$Fr_1$  and  $Fr_0$  are Froude numbers for the rough surface and smooth surface flow respectively. For the normal flow  $J = I_0$  and

$$C_1 = \frac{2I_0}{H_0} \left( \frac{1}{Fr_1^2} - \frac{1}{Fr_0^2} \right) \quad (32)$$

Parameter  $C_1$  has dimension ( $L^{-1}$ ). If reduced to dimensionless form by introducing the reference length  $L_0$ , we have

$$C_0 = C_1 L_0 = 2(K_1 - K_0) \quad (33)$$

where  $K_1$  and  $K_0$  are the kinematic parameter for rough surface flow and smooth surface flow respectively: ( $K_i = I_0 L_0 / H_0 Fr_i^2$ ). Combining Eq. (33) and the definition of  $C_1$  (Eq. 4) gives

$$\eta = 2 \left( \frac{Re K_1}{L_0} - \frac{Re K_0}{L_0} \right) \quad (34)$$

This parameter has again a dimension of ( $L^{-1}$ ). It is convenient for the purposes of analyses to express Eq. (34) in a dimensionless form. Thus one obtains

$$K_1 = \frac{L_0}{2} \frac{\eta}{Re} + K_0 \quad (35)$$

$L_0 \eta / 2$  is a dimensionless quantity characterizing the roughness of the medium and  $L_0 \eta / 2 Re$  is equivalent to a kinematic number. Therefore, Eq. (35) will be called the kinematic relationship. It expresses the relationship between the roughness of the surface and the kinematic parameter and thus it can be used to determine the friction slope.

### The Simplified Dynamic Equation

For the purposes of analyses, write the dynamic equation in the following form

$$J = I_0 - \left( \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} \right) - \frac{q}{g} \frac{U}{H} \quad (36)$$

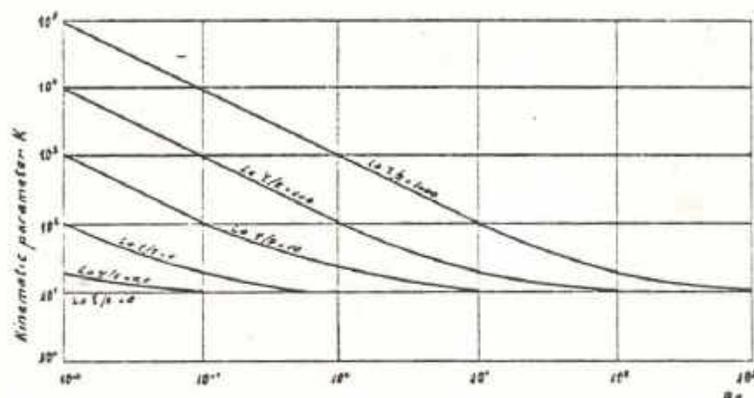


Fig. 2. Relationship between the kinematic equation and the Reynolds number.

This equation has been used to classify gradually varied flow problems into kinematic wave problems and dynamic wave problems. From Eq. (36), it can be seen that discharge (or velocity) is a function of the dynamic equation. When it is expressed as a function of depth alone, it may be derived from the continuity equation. The latter approach is called the kinematic wave approach and the former, the dynamic wave approach.

The fundament of the kinematic approach has been widely described by Wooding (1965), Eagleson (1970), Woolhiser (1975) Miller and Cunge (1975) etc. The gist of the theory is that, the kinematic approximation applies if Froude number is less than two:  $Fr < 2$ , and the dynamic approach if  $Fr < 1$ ; when  $Fr > 2$ , the kinematic approximation breaks down.

Woolhiser and Liggett (1967) have proved that kinematic approximation is valid for  $K_0 = (L_0 I_0 / H_0 Fr_0) > 10$ . Following these authors, the condition  $Fr_0 \leq 2$ ,  $1 < Fr_1 < 2$  and  $K_0 > 10$  will be assumed to hold throughout the discussion.

From Eq. (33), the condition for Reynolds number is

$$\frac{2\eta H_0}{3I_0} < Re < \infty \quad (37)$$

The lower limit of this double inequality depends on the definition of  $L_0\eta/2$ . Setting  $K_0 = 10$ , Fig. (2) shows the relationship between the kinematic equation (Eq. 35), the Reynolds number  $Re$ , and the value of  $L_0\eta/2$  describing the watershed surface. In its general form, the kinematic relation (Eq. (35)) is similar to the friction factor obtained for the rough surface flow (Eq.(24)).  $L_0\eta/2 = 0$  describes the smooth surface flow. In this case, the lower limit of the Reynolds number is zero. When  $L_0\eta/2 = 1,000$  the kinematic relation is identical to the Fanning friction factor. However, the lower limit of the Reynolds number is  $Re \approx 33$ . It is assumed in the following, that the Reynolds number induced by the equivalent velocity  $U$  is larger than this value.

The Rainfall-Runoff Transformation Process

Now if

$$K_1 > \frac{L_0 \eta}{2} \frac{1}{Re} + K_0 \quad (38)$$

the kinematic approximation is applied, then  $J = J_0$  and

$$U = \left( \frac{8g}{\Gamma} I_0 R \right)^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

There is a unique relationship between depth and discharge and depth will be normal for uniform flow at that discharge (Woolhiser 1975).  $R = H$  stands for hydraulic radius and is approximated by the depth.  $\Gamma$  is the friction factor and is evaluated by Eq. (22). Since the friction factor is a function of depth, a coefficient  $\alpha(H)$  can be defined

$$\alpha(H) = \left( \frac{8g I_0}{\Gamma(H)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

then the discharge is expressed as a unique relation of depth

$$Q = \alpha(H) H^{\frac{3}{2}} = \psi(H) \quad (41)$$

Eq. (41) is used in kinematic approximation theory assuming  $\alpha = cst$  and instead of exponent  $3/2$  an exponent  $m$ , which accounts for flow variation from laminar ( $m=3$ ) to turbulent ( $m=5/3$ ) (Eagleson 1970). Though exponent  $m$  accounts for the variability of the roughness, the influence of the friction factor is underestimated when  $\alpha$  is assumed to be constant. Eqs. (22), (24) and (25) show that  $\alpha$  is constant only for smooth surface flow. The Kinematic relationship (Eq. (35)) accounts for the variation of the flow from laminar to turbulent (Fig. 3).

If

$$K_1 < \frac{L_0 \eta}{2} \frac{1}{Re} + K_0 \quad (42)$$

the kinematic approximation will not remain valid any longer. The character of the flow will be governed by the Reynolds number and the parameter  $L_0 \eta / 2$ .

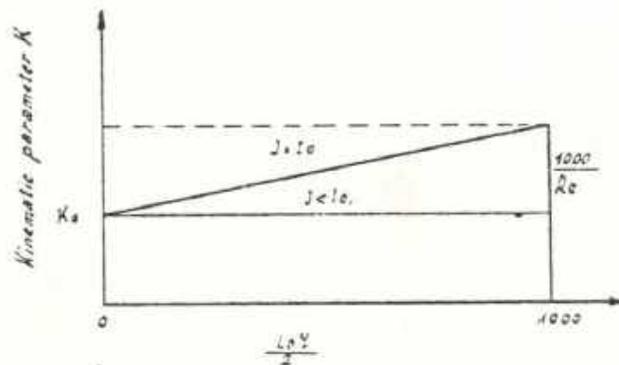


Fig. 3. Schematic representation of the Kinematic relationship  $Re = cst$ .

When  $L_0\eta/2 = 0$  (Smooth surface flow),  $J$  is evaluated by Eq. (36) taking  $\Gamma = \Gamma_0$ . When  $L_0\eta/2 > 0$  the value of  $J$  will depend on the Reynolds number and the Froude number explicitly introduced by coefficient  $C_1$ , and  $J$  will be evaluated from Eqs. (21) and (22).

Thus it can be concluded that the kinematic Eq. (35) describes entirely the watershed flow, and along with Eq. (22) determines the transformation process in the watershed.

### Analytical Solution of the Watershed Flow

When Eq. (41) is combined with Eq. (1), a system of equations which describes adequately the watershed flow is obtained. This system of equations has been solved for  $\alpha = cst$  by the methods of characteristics (Eagleson 1970, Overton and Meadow 1976) and by various numerical methods using finite difference schemes (Woolhiser 1975). An analytical approach is considered hereafter for a more general case  $\alpha = \alpha(H)$ .

In applied hydrology, when distributed parameter models are used to describe the watershed behaviour, the major problem is the areal information availability. Information on the areal variability of hydrologic parameters can be gathered only by means of dense networks of measurement stations. Because of the large cost involved, hydrological information are available, only in form of areal average values. Thus the accuracy of the distributed model is affected by the lack of data specifying the boundary and the initial condition, rainfall input distribution etc.

To match the model with the practice, various methods are used to transform the gradually varied flow equation into a lumped hydrological model. A detailed review of these methods is given by Miller and Cunge (1975). The approximated scheme described by Muzik (1974) is adopted here after, (Fig. 4).

Consider the distributed parameter  $q(x,t)$  and  $Q(x,t)$  indicating the rate of rainfall excess and the discharge to be lumped into a finite number of input and output variables respectively.  $q_i$  and  $Q_i$ , (where  $i = 1, 2 \dots n$ ). For each pair of input-output the continuity equation is considered in the «hydrologic form» (Doo-ge 1973, Thirriot 1974), by integrating Eq. (1) over a correspondent watershed reach to obtain

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \phi_1 - \psi_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \phi_2 - (\psi_2 - \psi_1) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \phi_n - (\psi_n - \psi_{n-1}) \end{aligned} \quad (43)$$

The Rainfall-Runoff Transformation Process

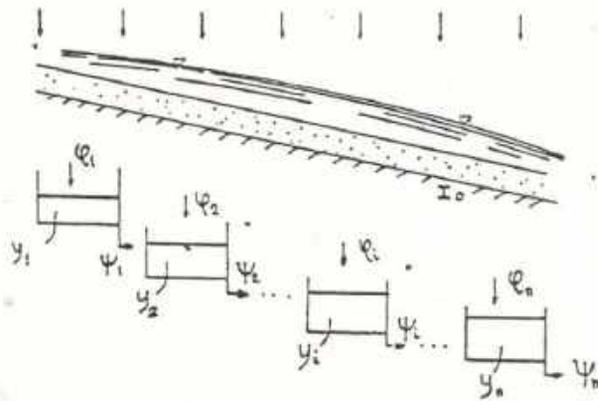


Fig. 4. Definition sketch of overland flow simulation by interacting reservoirs.

where

$$y_i = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_i(x, t) dx$$

$$\psi_i - \psi_{i-1} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial Q_i}{\partial x} dx$$

$$\phi = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x, t) dx$$

In matrix notation Eq. (43) can be written in the form

$$\frac{dY}{dt} = \phi - \Psi \tag{44}$$

Eq. (44) is the continuity equation and equivalent to Eq. (1). The dynamic equation is given by

$$\Psi = \Psi[Y(t); t] \tag{45}$$

Noting that Eq. (41) expresses the discharge as a unique relation of depth,  $\psi_i(y_i)$  can be developed in Taylor's series in the neighbourhood of  $y_i(t_0) = 0$

$$\psi_i(y_i(t); t) = \sum_{j=1}^m a_{ij}(t) y_i^j(t) \tag{46}$$

Eq. (44) then transforms into

$$\frac{dY}{dt} = \sum_{j=1}^m A_j Y_j + \phi \tag{47}$$

where

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{bmatrix}; \quad Y_j = \begin{bmatrix} y_1^j \\ \vdots \\ y_n^j \end{bmatrix}; \quad \phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} -a_{1j} & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ a_{1j} & -a_{2j} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & a_{i-1j} & -a_{ij} & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & a_{n-1j} & a_{nj} \end{bmatrix}$$

Reservoir approach is of widespread use in hydrological modelling (Miller et al - 1975). Therefore though this system can be solved numerically without too much difficulty, it is worthwhile to derive an approximative but analytical solution which gives more insight and permits a theoretical comparison with various existing reservoir model.

In terms of the system approach theory Eq. (47) is a non-linear vector differential equation which describes the state  $Y(t)$  of the considered watershed and Eq. (45) expresses the output as a non-linear function of this state. The system of Eqs. (45) and (47) can be solved using the local inverse theory. (Halme and Orava, 1972).

Define the following operator

$$\Lambda(Y) = [Y(t_0); \frac{dY}{dt} - \sum_{j=1}^m A_j Y_j] \quad (48)$$

$\Lambda(Y)$  is a polynomial operator having homogeneous components

$$D_1(Y) = [Y(t_0); \frac{dY}{dt} - A_1 Y_1] \quad (49)$$

$$D_j(Y) = [0; A_j Y_j] \quad (50)$$

The invertibility of polynomial operator has been discussed by Halme et al (1972) for a large class of non-linear equations. It is easily observed that for  $D_1(Y)$  the inverse  $D_1^{-1}(Y)$  exists and with regard to the set of pair formed by initial condition  $Y(t_0)$  and input function can be represented in the form

The Rainfall-Runoff Transformation Process

$$D_1^{-1}(Y) = Y_L(z) = \Phi(t, t_0)Y(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \xi)\omega(\xi)d\xi \quad (51)$$

where in the general case  $\Phi(t, t_0)$  is the  $n \times n$  fundamental matrix of the system. The fundamental matrix for Eq. (45) and (47) can be evaluated by means of the Laplace transform. Suppose for simplicity in the reasoning that  $A_1 = cst$  and denote the Laplace variable by «s», then taking the Laplace transform of (49) yields after some calculation, the following form for the fundamental matrix

$$L[\Phi] = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+a_{11}} & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \frac{a_{11}}{(s+a_{11})(s+a_{21})} & \frac{1}{s+a_{11}} & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\prod_{i=1}^{n-2} a_{i1}}{\prod_{i=1}^{n-1} (s+a_{i1})} & \frac{\prod_{i=2}^{n-2} a_{i1}}{\prod_{i=2}^{n-1} (s+a_{i1})} & \cdot & \frac{1}{s+a_{(n-1)1}} & \cdot & \cdot \\ \frac{\prod_{i=1}^{n-1} a_{i1}}{\prod_{i=1}^n (s+a_{i1})} & \frac{\prod_{i=2}^{n-1} a_{i1}}{\prod_{i=2}^n (s+a_{i1})} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{a_{n-1}}{(s+a_{(n-1)1})(s+a_{n1})} \frac{1}{s+a_{n1}} \end{pmatrix}$$

It can be proved (Athans and Falb 1966; Sevely et al 1973), that the fundamental matrix verifies the following properties

- a)  $\Phi(t_0, t_0) = I$
- b)  $\frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) = A_1(t)\Phi(t, t_0)$
- c)  $A_1(t) = \frac{d}{dt} \Phi(t, t_0) |_{t=t_0}$
- d)  $\Phi(t, t_0) = Y_{unf}(t)Y^{-1}(t_0)$  where  $Y_{unf}$  is a matrix which columns are solution of the unforced system.
- e)  $\Phi(t_1, t_3) = \Phi(t_1, t_2)\Phi(t_2, t_3)$
- f)  $[\Phi(t, t_0)]^{-1} = \Phi(t_0, t)$
- g)  $\det(\Phi(t, t_0)) = \exp \left[ \int_{t_0}^t \text{trace } A_1(\xi)d\xi \right]$

where  $\text{trace } A_1(\xi) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(\xi)$

When  $A_1 = cst$

$$\phi(t, t_0) = \phi(t - t_0) = \exp[A_1(t - t_0)]$$

By definition of the system  $Y(t_0) = 0$ , and in general it is possible to define a system such that  $Y(t_0) = 0$  or to introduce a new variable  $Y^* = Y(t) - Y(t_0)$  such that  $Y^*(t_0) = 0$ ; then,  $Y_L(t)$  can be written in the following form for time invariant system

$$Y_L(t) = \int_{t_0}^t \phi(t - \xi) \omega(\xi) d\xi \quad (52)$$

where  $Y_L(t)$  is a column matrix element of which has the form

$$y_{Lk}(t) = \sum_{v=1}^k \int_0^t \kappa_{v,1}(t, \xi) \phi_v(\xi) d\xi$$

and

$$\kappa_{v,1}(t, \xi) = \sum_{i=v}^k \prod_{i=v}^{k-1} a_{i,1} \exp[-a_{i,1}(t - \xi)] \quad (53)$$

Now  $D_j^{-1}(Y)$  is obtained from the knowledge of Eq. (52) which expresses the linear component; the vector column  $Y_j$  are formed, and the  $v^{\text{th}}$  element is obtained in the following form

$$y_v^j(t) = \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_j=1}^v \int_0^t \dots \int_0^t \kappa_{i_1 \dots i_j}(t, \xi_{i_1} \dots \xi_{i_j}) \phi_{i_1}(\xi_{i_1}) \phi_{i_2}(\xi_{i_2}) \dots \phi_{i_j}(\xi_{i_j}) d\xi_{i_1} \dots d\xi_{i_j} \quad (54)$$

When this expression is used to calculate  $\Psi$  the resulting equation is a column matrix, elements of which can be rearranged in the form of integral series

$$\bar{v}_k(t) = \sum_{v=1}^k \left( \sum_{i_1=1}^k \dots \sum_{i_j=1}^k \int_0^t \dots \int_0^t \kappa_{v, i_1 \dots i_j}(t, \xi_{i_1} \dots \xi_{i_j}) \phi_{i_1}(\xi_{i_1}) \dots \phi_{i_j}(\xi_{i_j}) d\xi_{i_1} \dots d\xi_{i_j} \right) \quad (55)$$

Eq. (55) is a generalized system approach solution for overland rainfall-runoff transformation process. The advantage of Volterra series representation has been discussed elsewhere (Afouda 1978). A theoretical comparison with some reservoir approaches is only made here after.

When  $n = 1, m = 1$ , the single linear reservoir approach is obtained which is widespread use in hydrology.  $\kappa(t)$  reduces to

The Rainfall-Runoff Transformation Process

$$\kappa(t) = a(t) \exp\left(-\int_0^t a(\xi) d\xi\right)$$

for time varying model, and to a simple exponential expression when  $a = \text{cst}$ . Coefficient  $a$  is often taken as an empirical coefficient. The general approach presented here allows for the calculation of  $a$  from Eq. (41) and Eq. (22). When the friction factor is presented in a simplified form, Eq. (24), the following form is obtained

$$a = \frac{3}{2} U \left( \frac{1 + \frac{2}{3} \alpha_{ws}}{1 + \alpha_{ws}} \right)$$

If  $n \geq 2$ ,  $m = 1$ , a cascading linear reservoir approach is obtained. This case has been investigated in laboratory by Muzik (1974). When Eq. (24) is used for the friction factor  $A_1 = \text{cst}$ , and if  $\varphi_1 \neq 0$ ,  $\varphi_i = 0$ , ( $i = 2, 3 \dots n$ ), the Dooge approach (1959) is obtained. When the Dooge boundary conditions are used,  $\kappa(t)$  will have the following form

$$\kappa(t) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{a_{i1}} \right)^{n-2} \left[ \prod_{v=1}^n \left( \frac{1}{a_{i1}} - \frac{1}{a_{v1}} \right) \right]^{-1} e^{-a_{i1}t} \quad (56)$$

In the particular case of the Nash conditions  $a_{11} = a_{21} = \dots = a$

$$\kappa(t) = \frac{1}{(n-1)!} (at)^{n-1} e^{-at} \quad (57)$$

If  $n = 1$ ,  $m > 2$ , a single non linear reservoir approach is obtained. The solution for this approach has been proved to have the form of Volterra series. (Afouda 1976, 1978), and  $\kappa(t)$  are appropriate combination of exponential.

The case when  $n \rightarrow \infty$ ,  $m < \infty$  is of interest. Considering the linear component

$$y_{Lk}(t) = \sum_{v=1}^k \int_0^t \kappa_{v,1}(t, \xi) \phi_v(\xi) d\xi$$

It can be easily seen from the definition of the system that if  $n \rightarrow \infty$ , this linear component will tends towards

$$y(z, t) = \int_0^t \kappa_{\infty}(z, t, \xi) q(z, \xi) d\xi \quad (58)$$

The task now is to evaluate  $\kappa_{\infty}(z, t, \xi)$ . From the definition of the linear component,

$$\kappa_{\infty}(z, t, \xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \prod_{l=1}^{k-1} a_{i,1} \exp[-a_{i,1}(t, \xi)] \quad (59)$$

Since  $k \rightarrow \infty$ ,  $a_{i1}$  tends to a fixed value  $a_1$  and Nash condition is obtained. Thus the internal summation is equal to

$$\frac{1}{(k-1)!} (at)^{k-1} e^{-a_1 t}$$

Taking now

$$\begin{aligned} \kappa_{\infty}(x, t, \xi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(k-1)!} (a_1 t)^{k-1} e^{-a_1 t} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (a_1 t)^{k-1} e^{-a_1 t} d(a_1 t) \end{aligned} \quad (60)$$

$\kappa_{\infty}(x, t, \xi)$  is found to be constant everywhere and equal to Heaviside function

$$\kappa_{\infty}(x, t, \xi) \equiv u(x, t, \xi) \quad (61)$$

Hence the linear component is

$$H(x, t) = \int_0^t u(x, t-\xi) q(x, \xi) d\xi \quad (62)$$

The resulting discharge has the following form

$$Q(x, t) = \sum_{j=1}^m \int_0^t \dots \int_0^t \bar{\kappa}_j(x, t, \xi) \prod_{\ell=1}^j q(x, \xi) d\xi_1 \dots d\xi_j \quad (63)$$

Where

$$\bar{\kappa}_j(x, t, \xi) = \int_0^t j a_j \prod_{\ell=1}^{j+1} u(x, t-\xi_j) d\xi_j$$

Now derive the solution from the distributed equation

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q(x, t) \quad (64)$$

$$Q = \sum_{j=1}^m a_j H^j \quad (65)$$

The total differential of  $H(x, t)$  is

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + v \frac{\partial H}{\partial x} \quad (66)$$

By comparing with the continuity Eq. (64) yields

$$\frac{dH}{dt} = q(x, t) \quad (67)$$

$$v = \sum_{j=1}^m j a_j H^{j-1} \quad (68)$$

### *The Rainfall-Runoff Transformation Process*

Solving Eq. (67) for  $H$ , yields Eq. (62), and the resulting discharge can be easily deduced in the form of Eq. (63).

Thus it is proved that when  $n \rightarrow \infty$ , the generalised lumped solution tends toward the distributed solution of the kinematic wave theory.

#### **Conclusion**

Considerable effort has been expended on the theoretical aspects of applicability of spatially varied unsteady flow equation to overland flow. In this paper, a generalized friction factor has been introduced to describe resistance to storm water flow over a natural watershed. This theoretical relationship has been proved to be valid for smooth surface flow, rough surface flow and flow through porous medium. A kinematic relation which accounts for the roughness of the watershed surface has been proposed. The similarity between this kinematic relation and the friction factor has been underlined. This kinematic relationship determines the applicability of the kinematic flow theory and the approximation of the friction slope. When kinematic approximation applies, an analytical solution can be obtained in the form of integral series. The lumped kinematic solution has been proved to tend towards the solution of the distributed approximation when the dimension  $n$  of the fundamental matrix tends to infinity.

#### **Acknowledgments**

This paper is based upon a report prepared and presented at International Centre of Hydrology of the Padua Hydraulic Institute in July 1978. The author gratefully acknowledges the assistance given by the staff of the Centre and in particular the comments of Prof. Di Silvio and the assistance of Dr. A. Lorigiola in the preparation of the manuscript. The author acknowledges also the valuable comments of Prof. C. Thirriot of the Institut de Mécanique de Fluides de Toulouse (France). Special tanks are extended to J. Hassing of Cowiconsult - Consulting Engineers and Planners Copenhagen.

#### **References**

- Afouda, A. A. (1976) - Une méthode de simulation pour le fleuve Niger; in Hydrology in Africa - 1976. Proc. of the Meeting of Experts on Hydrology Problems in Africa. UNESCO-WMO-ECA Addis Abeba.
- Afouda, A. A. (1978) - A unified Approach to Watershed Modelling. *Nordic Hydrology*, vol. 9, 3/4, P.P. 161-172.

Abel A. Afouda

- Afouda, A. A. (1978) - Sur l'applicabilité de la formule de Chezy au ruissellement de Surface - Rapport interne n. 7803-b Centre International d'Hydrologie «Dino Tonini» Institute d'Hydrologie, Université de Padoue.
- Athans, M., Falb P. L. (1966) - Optimal Control; Mac Graw Hill, New York.
- Bear, J. (1972) - Dynamics of Fluids in porous Media. American Elsevier - New York.
- Chevateau, G, and Thirriot, C. (1967) - Régime d'Écoulement en Milieu Poreux et Limite de la Validité de la Loi de Darcy. La Houille Blanche, n. 1, 22.
- Collin, R. E. (1961) - Flow of fluids through Porous Materials (as quoted by Bear (1972)).
- Dooge, J. CI (1959) - A General Theory of the Unit Hydrograph. Journ. of Geophys. Res. Vol. 64, n. 2.
- Dooge, J. CI (1973) - The Linear Theory of Hydrologic Systems; U. S. Depart. of Agriculture, Technical Bulletin n. 1463; U. S. Gvt. Printing Office.
- Eagleson, P. S. (1970) - Dynamic Hydrology; Mac Graw-Hill, New York.
- Halme, A., and Orava, J. (1972) - Generalized Polynomial operator for non-linear systems analysis I.E.E.E. Transaction on automatic control.
- Ishihara, T. (1971) - Transformation System in Flood Runoff Phenomena. Proc. U.S.A. - Japan Bilateral Seminar in Hydrology. Water Res. Publ. Fort Collins. Colorado.
- Miller, N. A., and Cunge, J. A. (1975) - Simplified Equation of Unsteady Flow; in Unsteady flow in Open channels. Vol. I. Edited by K. Mahmood and V. Yevjevich. Water Res. Publ. Fort Collins, Colorado.
- Muzik, I. (1974) - State variable model of overland flow, *J. Hydrol.*, 22: 347-364.
- Natale, L., and Todini, E. (1977) - A contained parameter. Estimation technique for linear Models; in Hydrology. In Mathematical Models for Surface Water Hydrology. Edited by Ciriani A., Maione V. and Wallis R. J.; John Willey et Son, London.
- Overton, D. E., and Meadows, M. E. (1976) Stormwater Modeling, Academic Press, New York.
- Polubarinova-Kochina, Ya. New York. (1962) - Theory of Ground Water Movement. English transl. by R. J. M. De Wiest. Princeton University Press, New Jersey.
- Thirriot, C. (1974) - Sur l'ajustement de fonctions de transfert non linéaires pour les systemes hydrologiques. Note interne - IMFT - C.T. 448.
- Ward (1964) - (Quoted by Bear - 1972).
- Wooding, R. A. (1965) - A hydraulic Model for the catchment stream problem. Part. I - Kinematic Wave theory. *J. Hydrol.* 3: 254-267.
- Woolisher, D. A. (1975) - Simulation of Unsteady Overland flow. In Unsteady flow in Open channels. Vol. II, Edited by K. Mahmood and V. Yevjevich. Water Ressources Publ., Fort Collins Colorado.

First received 26 April, 1979

Revised version received: 27 september, 1979

**Address:**

Université National du Bénin,  
B. P. 7 082  
Cotonou,  
Rép. Pop. du Benin.

ANNEXE A - 3

ETUDE THEORIQUE DE MODELES DE  
TRANSFORMATION PLUIE-DEBIT EN  
MILIEU SEMI-URBAIN.

IN "CAHIER ORSTOM , SER. HYDROL.  
VOL. XVII , N° 2 , 1980, PP. 71-90."

# Étude théorique de modèles de transformation pluie-débit en milieu semi-urbain <sup>(1)</sup>

A. Abel AFOUDA,  
Section de mathématiques,  
Université nationale du Bénin, Cotonou

## RÉSUMÉ

Le problème de la transformation de la pluie en débit d'écoulement est l'un des problèmes majeurs qui se posent aux hydrologues et aux techniciens de l'assainissement des centres urbains. L'extension rapide de la ville et l'absence d'un réseau d'assainissement adéquat rendent très délicat le problème de l'évacuation des eaux de pluies à Cotonou. La présence par endroits d'une végétation semi-urbaine, l'absence d'une déclivité motrice (la ville est plate) et la présence d'une nappe phréatique à faible profondeur y sont favorables à la stagnation des eaux de pluies et à l'inondation, et rendent très difficile l'adaptation des modèles conceptuels classiques qui servent au calcul des réseaux d'assainissement.

La but de cette étude est de construire, à partir des équations classiques de Navier-Stokes, un modèle mathématique de transformation de la pluie en débit qui puisse servir dans le calcul des réseaux d'assainissement à Cotonou et ailleurs.

Après avoir fait une analyse critique du modèle de CAQUOT qui a servi au calcul du réseau d'assainissement existant actuellement à Cotonou, on propose sur la base des observations en cours sur le ruissellement en milieu urbain un schéma de transformation en trois étapes de la pluie en débit: l'étape de production, l'étape de transformation et l'étape de propagation.

Bien que les résultats obtenus soient à un stade encore théorique, l'examen des différentes possibilités d'application montre que le modèle proposé est une généralisation des différents modèles à réservoirs utilisés çà et là dans la pratique hydrologique. En outre, les résultats obtenus établissent de manière explicite la relation qui existe entre les modèles conceptuels à réservoirs et les équations de Navier-Stokes, basées sur des considérations physiques.

## ABSTRACT

The transformation of rain into flow discharge is one of the main problem facing the hydrologists and technicians in charge of the improvement of the sanitation of urban centers. The fast expansion of Cotonou and the lack of an appropriate urban sewerage network make the disposal of rainwater difficult. The presence here and there of a semi-urban vegetation, the lack of flow generating slope (Cotonou is flat) and the existence of a shallow phreatic water are propitious to rainwater stagnancy and floods. Such conditions explain the difficult adaptation of conceptual models that are used for the calculation of urban drainage networks.

The goal of this study is to elaborate with the classical Navier-Stokes equations a mathematical model of rain-discharge transformation that could be used for the calculation of Cotonou urban drainage network and other places.

After a critical analysis of the CAQUOT model primary chosen for calculating the existing network of the town, a scheme of rain-discharge transformation is proposed on the basis of observations in progress on the urban runoff. This scheme is consisting of three steps: production, transformation and flood routing.

Although the results obtained by this way are still theoretic, it appears by examining the different possibilities of application that the proposed model is a generalization of the various tank-type models used for hydrological purposes. Moreover these results demonstrate the relationship existing between the conceptual tank-type models and the Navier-Stokes equations, based on physical considerations.

(1) Cet article est une version étendue de la communication n° A-5 présentée aux premières journées scientifiques de l'UNB tenues à Cotonou les 20, 21, 22 décembre 1979 par l'auteur.

SOMMAIRE

Résumé

Abstract

1. *Introduction*
2. *Formulation conceptuelle du modèle de transformation*
  - 2.1. Le modèle de CAQUOT
  - 2.2. Limite théorique de validité du modèle de CAQUOT
3. *Formulation mathématique de la relation pluie-débit*
  - 3.1. Position du problème
  - 3.2. Equations générales de l'hydrodynamique
    - 3.2.1. Conservation de la quantité de mouvement
    - 3.2.2. Conservation de masse
    - 3.2.3. Conservation de l'énergie
    - 3.2.4. Equation caractéristique du fluide
    - 3.2.5. Caractères généraux de ces équations
  - 3.3. Modèle hydrodynamique de transformation P/d
    - 3.3.1. Equation de l'écoulement (N/S)
    - 3.3.2. Simplification de l'équation d'écoulement
    - 3.3.3. La fonction de production
    - 3.3.4. L'équation de transformation
      - Ecoulement de surface
      - Ecoulement souterrain
      - Couplage de ces équations
4. *Discussion*
5. *Conclusion*
6. *Référence bibliographique*

1. INTRODUCTION

Depuis l'achèvement des travaux du port en eaux profondes, l'importance économique de la ville de Cotonou pour le pays d'abord et pour la sous-région ensuite, s'est accrue considérablement. Appelée à servir de point de transit pour le trafic entre le Ghana, le Togo et le Nigeria, la ville sert également de principal accès à l'océan Atlantique pour Niamey, la capitale du Niger. Cotonou est devenue donc un nœud de transit international et en conséquence sa population a régulièrement augmenté. Cependant le niveau d'urbanisation et l'infrastructure urbaine restent tragiquement insuffisants.

Un problème capital posé par les variations du cycle hydrologique et lié à l'insuffisance des infrastructures urbaines est celui des inondations. A Cotonou, l'intensité des précipitations atmosphériques est telle que l'absence d'un réseau d'assainissement pluvial adéquat se traduit non seulement par des inondations provisoires, mais également par des destructions définitives des chaussées et des cases. L'étude du ruissellement dans ce milieu semi-urbain devient ainsi une des toutes premières nécessités.

Par ailleurs, l'implantation du port de Cotonou en modifiant le régime hydraulique du débouché lagunaire a suscité la construction d'un barrage. Cet ouvrage pourrait avoir entre autres conséquences, d'accroître les risques d'inondations de la ville de Cotonou. Il est donc urgent de proposer des mesures propres à prévenir de telles conséquences et d'établir un plan cohérent de lutte contre les inondations à Cotonou, d'établir un programme d'assainisse-

ment qui permette de réaliser enfin une harmonie entre l'homme et le système complexe qui compose son environnement naturel. Toutefois, le succès de toute action dans le domaine dépend de la disponibilité d'informations compréhensibles et de données nouvelles suffisamment abondantes, qui permettent l'application conséquente des méthodes probabilistes. Il faut du temps pour obtenir ces informations alors que les nuisances que créent les inondations et la précarité des conditions de vie des populations commandent de prendre des décisions pratiques et immédiates.

Le but de l'étude théorique qui va suivre est de construire à partir des équations de Navier-Stokes et en s'appuyant sur les caractéristiques physiographiques et géologiques de la ville de Cotonou, un modèle mathématique de transformation de la pluie en débit. La présence dans la ville de Cotonou d'une végétation semi-urbaine, relativement dense par endroits, et l'absence de déclivité motrice y sont favorables à la stagnation et à l'infiltration de l'eau de pluie. L'intensité des précipitations, la présence d'une nappe phréatique à faible profondeur et d'un système lagunaire qui l'alimente concouramment avec l'eau d'infiltration rendent difficile l'adaptation de modèles conceptuels classiques de ruissellement.

Après une analyse critique du modèle de Caquot qui a servi au calcul du réseau d'assainissement existant actuellement à Cotonou, on propose un schéma de transformation en trois étapes, de la pluie en débit. On procède ensuite à une analyse critique du modèle proposé.

## 2. FORMULATION CONCEPTUELLE DU MODÈLE DE TRANSFORMATION PLUIE - DÉBIT

### 2.1. LE MODÈLE DE CAQUOT

La nécessité de trouver une formulation analytique pour décrire les relations pluies-débits a conduit les hydrologues à développer très tôt une multitude de modèles bien souvent empiriques pour simuler ce phénomène physique. L'un des modèles les plus employés est le modèle de Caquot qui permet théoriquement de connaître le débit de pointe  $Q$  ( $T_r$ ) de période de retour  $T_r$ , à partir de la connaissance des caractéristiques physiques du bassin versant.

Soit en effet un bassin versant urbain caractérisé par sa surface  $S$ , sa pente moyenne  $L_0$ , son coefficient de ruissellement  $C_r$ , et qui reçoit entre les instants  $t_0$  et  $t$  une hauteur de pluie  $H$  exprimée en mm. Le volume d'eau qui participe à l'écoulement sur ce bassin peut être évalué par la relation

$$Y = C_r HS \beta_0 \quad (1)$$

dans laquelle le coefficient  $\beta_0$  traduit l'effet de l'abattement en fonction des dimensions du bassin versant et de la distribution spatiale de la pluie. Ce coefficient est relié à la surface du bassin versant par une relation de la forme

$$\beta_0 = S^{-\beta_1} \quad (2)$$

$\beta_1$  étant un coefficient numérique empirique. En considérant (1) et (2) on obtient

$$Y = 10^4 C_r HS^{1-\beta_1} \quad (3)$$

où  $Y$  est en litres,  $H$  en mm,  $S$  en hectares et le coefficient numérique  $10^4$  tient compte des unités utilisées. Le principe de conservation permet de décomposer ce volume et d'écrire

$$Y = Y_{rs1} + Y_{sto} \quad (4)$$

où  $Y_{rs1}$  est le volume d'eau écoulé à l'exutoire entre les instants  $t_0$  et  $t$  et  $Y_{sto}$  est le volume d'eau stocké sur le sol et dans le réseau pendant le même temps. Si maintenant  $Q(t)$  est le débit d'écoulement à l'exutoire, on montre (REMENIERAS, 1970, p. 408) que ce débit est maximum pour une averse de durée égale au temps de concentration du bassin versant  $t_c$  (c'est à dire le temps de parcours de l'eau entre l'exutoire du bassin et le point qui en est le plus hydrauliquement éloigné). Le débit moyen correspondant au volume ruisselé  $Y_{rs1}$  pendant ce même temps peut être exprimé en fonction du débit maximum  $Q_{rs1} = \beta_2 Q_{max}$ . D'un autre côté, on peut faire correspondre à  $Y_{sto}$  un débit fictif que l'on représente aussi formellement en fonction du débit maximum  $Q_{sto} = \beta_3 Q_{max}$ . On a alors:

$$10^4 C_r HS^{1-\beta_1} = 60 (\beta_2 + \beta_3) t_c Q_{max} \quad (4)$$

d'où l'on tire

$$Q_{max} = \frac{10^4}{60} \cdot \frac{1}{\beta_2 + \beta_3} \cdot \frac{H}{t_c} \cdot C_r S^{1-\beta_1} \quad (5)$$

$H/t_0$  représente l'intensité moyenne  $r(t)$  de la pluie sur la durée  $t_0$ . Mais pour une période de retour donnée  $T_r$ , l'intensité maximale sur toute durée  $t$  peut régionalelement être représentée de façon approximative par la relation du type de celle de Grisollet ou de Montana (REMENTERAS, 1970, p. 406).

$$r(t, T_r) = \beta_4 (T_r) t^{\beta_4 (T_r)}$$

L'équation (5) peut s'écrire donc

$$Q_{\max} = \frac{10^3}{6(\beta_2 + \beta_3)} \cdot \beta_4 (T_r) \cdot t_0^{\beta_4 (T_r)} \cdot C_r \cdot S^{1-\beta_2} \quad (6)$$

Les études théoriques de CAQUOT conduisent par ailleurs à une expression du temps de concentration

$$t_0 = \beta_5 \cdot L_0^{-\beta_5} \cdot S^{\beta_6} \cdot Q_{\max}^{\beta_7} \quad (7)$$

La combinaison des équations (6) et (7) donne :

$$Q_{\max} = \left[ \frac{10^3 \cdot \beta_4 \cdot (\beta_4)^{\beta_4}}{6(\beta_2 + \beta_3)} \right]^{\frac{1}{1-\beta_4 \beta_5}} \times C_r^{\frac{1}{1-\beta_4 \beta_5}} \times L_0^{\frac{1}{1-\beta_4 \beta_5}} \times S^{\frac{1+\beta_4 \beta_6 - \beta_2}{1-\beta_4 \beta_5}} \quad (8)$$

Ainsi le modèle de Caquot utilise douze paramètres pour caractériser le bassin versant. Mais si les valeurs numériques des neuf paramètres  $\beta_1 \dots \beta_9$  sont connues, le modèle se ramène à la forme monome simple.

$$Q_{\max} (T_r) = K (T_r) \times C_r^{\gamma_1 (T_r)} \times L_0^{\gamma_2 (T_r)} \times S^{\gamma_3 (T_r)} \quad (9)$$

Dans l'étude de l'assainissement de la ville de Cotonou cette formule a été utilisée sous la forme

$$Q_{\max} (T_r) = 1\,340 \times C_r^{1,17} \times L_0^{0,39} \times S^{0,75} \quad (10)$$

calculée pour la région parisienne à partir des valeurs suivantes données aux divers paramètres

$$\begin{aligned} \beta_2 = \beta_3 = 0,75; & \quad \beta_1 = 0,10; & \quad \beta_4 = 3,7 \\ \beta_7 = 0,363; & \quad \beta_5 = 0,366; & \quad \beta_6 = 0,20 \end{aligned}$$

$\beta_4$  et  $\beta_5$  étant tirés de la formule de Grisollet pour l'averse décennale donnent

$$\beta_4 = 11; \quad \beta_5 = 0,7$$

Mais pour Cotonou, le débit théorique ainsi obtenu est corrigé par un coefficient tenant compte de la forme du bassin versant et par un coefficient de rapport d'intensité de pluie décennale parisienne sur pluie quinquennale à Cotonou.

## 2.2. LIMITE THÉORIQUE DE VALIDITÉ DU MODÈLE DE CAQUOT

Le principal avantage de la formule de Caquot est qu'elle peut être aisément mise sous forme d'abaque d'un grand intérêt pour le technicien de l'assainissement urbain s'il peut connaître sans ambiguïté les paramètres  $L_0$ ,  $C_r$ ,  $S$  des bassins en étude. Ainsi, lorsque les valeurs numériques des paramètres  $\beta_1, \dots, \beta_9$  sont connues, le modèle de Caquot donne le débit maximum comme une fonction.

$$Q_{\max} = F_0 (L_0; C_r; S) \quad (11)$$

Cependant, la forme monome finale donnée à la relation équivaut à admettre arbitrairement que les trois paramètres interviennent dans l'écoulement de façon indépendante. Il semble bien que dans la réalité, les influences des différents facteurs soient imbriquées les unes dans les autres.

L'étude générale de la validité du modèle de Caquot, entreprise par les différents travaux (REMENTERAS, 1970; LEMOINE et CRAUETTE, 1974; CRAUETTE, 1975; DEBORGES, 1975; IKOUNGA, 1976) montre que cette formulation ne permet que la connaissance du débit maximal de fréquence donnée à l'exutoire du bassin versant cad la connaissance d'un seul point de l'hydrogramme de crue. L'étude du processus de transformation pluie-débit et de l'inondation périodique de la ville de Cotonou nécessite une meilleure connaissance de l'hydrogramme de l'écoulement.

Le domaine d'application de ce modèle est limité aux bassins homogènes de petite superficie, et les essais d'adaptation aux régimes tropicaux (LEMOINE et CRAUETTE, 1974) montrent que les coefficients numériques intervenant dans la formule (10) varient d'un bassin à un autre. A ces insuffisances, il faut ajouter que dans le cas d'un

$H/t_0$  représente l'intensité moyenne  $r(t)$  de la pluie sur la durée  $t_0$ . Mais pour une période de retour donnée  $T_r$ , l'intensité maximale sur toute durée  $t$  peut régionalelement être représentée de façon approximative par la relation du type de celle de Grisollet ou de Montana (REMENTERAS, 1970, p. 406).

$$r(t, T_r) = \beta_4 (T_r) t^{\beta_4(T_r)}$$

L'équation (5) peut s'écrire donc

$$Q_{max} = \frac{10^3}{6(\beta_1 + \beta_2)} \cdot \beta_4(T_r) \cdot t_0^{\beta_4(T_r)} \cdot C_r \cdot S^{1-\beta_1} \tag{6}$$

Les études théoriques de CAQUOT conduisent par ailleurs à une expression du temps de concentration

$$t_0 = \beta_3 \cdot L_0^{-\beta_3} \cdot S^{\beta_3} \cdot Q_{max}^{-\beta_3} \tag{7}$$

La combinaison des équations (6) et (7) donne :

$$Q_{max} = \left[ \frac{10^3 \cdot \beta_4 \cdot (\beta_4)^{\beta_4}}{6(\beta_1 + \beta_2)} \right]^{\frac{1}{1-\beta_3\beta_4}} \times C_r^{\frac{1}{1-\beta_3\beta_4}} \times L_0^{\frac{1}{1-\beta_3\beta_4}} \times S^{\frac{1+\beta_3\beta_4-\beta_1}{1-\beta_3\beta_4}} \tag{8}$$

Ainsi le modèle de Caquot utilise douze paramètres pour caractériser le bassin versant. Mais si les valeurs numériques des neuf paramètres  $\beta_1 \dots \beta_9$  sont connues, le modèle se ramène à la forme monome simple.

$$Q_{max}(T_r) = K(T_r) \times C_r^{\gamma_1(T_r)} \times L_0^{\gamma_2(T_r)} \times S^{\gamma_3(T_r)} \tag{9}$$

Dans l'étude de l'assainissement de la ville de Cotonou cette formule a été utilisée sous la forme

$$Q_{max}(T_r) = 1\,340 \times C_r^{1,17} \times L_0^{0,39} \times S^{2,75} \tag{10}$$

calculée pour la région parisienne à partir des valeurs suivantes données aux divers paramètres

$$\begin{aligned} \beta_2 = \beta_3 = 0,75; & \quad \beta_1 = 0,10; & \quad \beta_4 = 3,7 \\ \beta_7 = 0,363; & \quad \beta_8 = 0,366; & \quad \beta_9 = 0,20 \end{aligned}$$

$\beta_4$  et  $\beta_3$  étant tirés de la formule de Grisollet pour l'averse décennale donnent

$$\beta_4 = 11; \quad \beta_3 = 0,7$$

Mais pour Cotonou, le débit théorique ainsi obtenu est corrigé par un coefficient tenant compte de la forme du bassin versant et par un coefficient de rapport d'intensité de pluie décennale parisienne sur pluie quinquennale à Cotonou.

## 2.2. LIMITE THÉORIQUE DE VALIDITÉ DU MODÈLE DE CAQUOT

Le principal avantage de la formule de Caquot est qu'elle peut être aisément mise sous forme d'abaque d'un grand intérêt pour le technicien de l'assainissement urbain s'il peut connaître sans ambiguïté les paramètres  $L_0, C_r, S$  des bassins en étude. Ainsi, lorsque les valeurs numériques des paramètres  $\beta_1, \dots, \beta_9$  sont connues, le modèle de Caquot donne le débit maximum comme une fonction.

$$Q_{max} = F_0(L_0; C_r; S) \tag{11}$$

Cependant, la forme monome finale donnée à la relation équivaut à admettre arbitrairement que les trois paramètres interviennent dans l'écoulement de façon indépendante. Il semble bien que dans la réalité, les influences des différents facteurs soient imbriquées les unes dans les autres.

L'étude générale de la validité du modèle de Caquot, entreprise par les différents travaux (REMENTERAS, 1970; LEMOINE et CAUETTE, 1974; CAUETTE, 1975; DEBORGES, 1975; IKOUNGA, 1976) montre que cette formulation ne permet que la connaissance du débit maximal de fréquence donnée à l'exutoire du bassin versant cad la connaissance d'un seul point de l'hydrogramme de crue. L'étude du processus de transformation pluie-débit et de l'inondation périodique de la ville de Cotonou nécessite une meilleure connaissance de l'hydrogramme de l'écoulement.

Le domaine d'application de ce modèle est limité aux bassins homogènes de petite superficie, et les essais d'adaptation aux régimes tropicaux (LEMOINE et CAUETTE, 1974) montrent que les coefficients numériques intervenant dans la formule (10) varient d'un bassin à un autre. A ces insuffisances, il faut ajouter que dans le cas d'un

bassin semi-urbain où l'occupation des sols ne s'accompagne pas d'une imperméabilisation des surfaces concernées, le coefficient de ruissellement et la pente varieront d'une année à une autre et au cours d'une même année.

Enfin la formule de Caquot, dite superficielle ne permet de tenir compte que de l'écoulement de surface et exclut toute contribution d'une nappe urbaine. Le relief, la géologie et l'hydrogéologie de la ville de Cotonou et de sa région excluent toute idée d'un assainissement de type classique qui vise à l'évacuation des débits de surface d'une fréquence donnée. L'importance des infiltrations et la faiblesse du ruissellement de surface, la faible profondeur de la nappe phréatique et sa contribution à l'écoulement, et enfin le rôle du lac Nokoué et de la lagune de Cotonou doivent être pris en considération lors de l'élaboration d'un modèle de ruissellement en milieu urbain à Cotonou.

Compte tenu de tout ce qui précède, il semble logique d'abandonner le modèle de Caquot et de s'orienter vers un modèle qui puisse tenir compte de la complexité relative du processus physique qui traduit les relations pluie-débit. Un tel modèle devra le moins possible avoir recours à l'empirisme et devra s'appuyer sur des considérations physiques et mathématiques universellement admises.

### 3. FORMULATION MATHÉMATIQUE DE LA RELATION PLUIE-DÉBIT

#### 3.1. POSITION DU PROBLÈME

On considère un domaine spatial  $\Omega$  et deux entiers positifs  $m$  et  $n$ . Appelons  $r(t, x)$ , l'intensité de la pluie au temps  $t$  et au point  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ ,  $Q(t, x)$  le débit d'écoulement consécutif, mesuré dans un exutoire du bassin, convenablement choisi;  $\beta_1 \dots \beta_l$  les paramètres qui caractérisent le relief, les effets de l'urbanisation, l'influence du milieu ambiant. On suppose les fonctions  $r(t, x)$  et  $Q(t, x)$  suffisamment régulières et on note pour tout  $i = 1, 2 \dots n$   $D_i$  l'opérateur  $\partial/\partial x_i$  par rapport à la  $i^{\text{ème}}$  variable indépendante. Si  $\alpha$  est un système de  $n$  entiers positifs,  $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$  tels que  $|\alpha| = \sum_i \alpha_i \leq m$ , on pose

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

On peut alors espérer décrire le comportement des bassins versants choisis par un système de  $j$  équations différentielles d'ordre  $m$  à  $n + 1$  variables indépendantes

$$G_j \left( t; x; r; Q; \beta_1; \frac{\partial r}{\partial t}; \frac{\partial Q}{\partial t}; \frac{\partial \beta_1}{\partial t}; D^{\alpha_1}; D^{\alpha_2}; D^{\alpha_3} \right) = 0 \quad (12)$$

Les  $G_j(\cdot)$  sont des fonctions qui peuvent être données sous forme explicite et les paramètres physiques  $\beta_j$  peuvent être, soit mesurés directement sur le milieu physique, soit estimés à partir de la connaissance de ce milieu. Notre objectif dans ce travail est de rechercher une forme pour les fonctions  $G_j(\cdot)$  de façon à décrire au mieux le phénomène de transformation hydro-pluviométrique, en réponse du milieu physique qui nous intéresse.

Mais il est bien connu que cette réponse du milieu met en jeu, quatre grandeurs physiques qui sont :

- une grandeur cinématique : la vitesse  $\beta_1 = U(t, x)$ ,
- deux grandeurs dynamiques :
  - la pression  $\beta_2 = P(t, x)$ ,
  - la densité massique  $\beta_3 = \rho(t, x)$ ;
- et une grandeur thermodynamique : la température  $\beta_4 = T_p(t, x)$ .

Le problème revient donc à trouver un système de quatre fonctions  $G_j(\cdot)$  avec  $j = (1-4)$ , qui décrivent l'évolution de ces grandeurs. Les principes les plus appropriés pour résoudre ce problème sont les trois principes de conservation :

- 1) Conservation de la quantité de mouvement (2<sup>ème</sup> loi de Newton);
  - 2) Conservation de masse (équation de continuité);
  - 3) Conservation de l'énergie (1<sup>ère</sup> loi de la thermodynamique);
- auxquels on ajoute :
- 4) L'équation caractéristique du fluide (équation d'état).

Lorsque les conditions initiales et aux frontières sont convenablement choisies, le problème considéré est un problème hydrodynamique bien posé.

### 3.2. EQUATIONS GÉNÉRALES DE L'HYDRODYNAMIQUE

Considérons donc que le domaine  $\Omega$  est occupé par le fluide. Ce domaine  $\Omega$  peut contenir des obstacles mobiles ou fixes, mais la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  doit toujours être formée de particules fluides et constituer une surface fluide. On a :  $\vec{U}(\mathcal{M})$ , le champ des vitesses,  $\sigma(N, \vec{v})$  le champ des contraintes en tout point  $N \in \Gamma$ , ( $\vec{v}$  étant la normale à  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur),  $\vec{f}(\mathcal{M})$  la densité volumique des efforts extérieurs.

#### 3.2.1. Conservation de la quantité de mouvement

Le théorème de la quantité de mouvement exprime que le torseur de la somme des forces extérieures volumiques et de surface est égal à la dérivée particulaire du torseur de la quantité de mouvement du système considéré :

$$\left[ \rho \vec{f}(\mathcal{M}) \right]_{\Omega} + \left[ \sigma(N, \vec{v}) \right]_{\Gamma} = \frac{d}{dt} \left[ \rho \vec{U} \right]_{\Omega} \quad (13)$$

Cette relation étant vérifiée pour tout le domaine  $\Omega$  on peut en déduire l'équation locale de la dynamique.

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho \vec{U} \overline{\text{grad}} \vec{U} = \rho \vec{F} - \overline{\text{grad}} P + \mu \Delta \vec{U} + (\mu + \mu') \overline{\text{grad}} (\text{div}(\vec{U})) \quad (14)$$

Dans cette relation

$\rho \vec{F}$  exprime les forces de gravité (forces volumiques),

$-\overline{\text{grad}} P$ , les forces de pression (forces de surface),

$\mu \Delta \vec{U}$ , les forces de viscosité de même que  $(\mu + \mu') \overline{\text{grad}} (\text{div}(\vec{U}))$

$\mu$  et  $\mu'$  sont des coefficients qui dépendent de la température et sont appelés coefficients de viscosité (ou coefficients de Lamé).

#### 3.2.1. Conservation de masse

Le principe de conservation de masse appliqué au domaine de contrôle  $\Omega$  conduit à l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = \sum_{i=1}^k \rho q_i \quad (15)$$

où  $q_i$  traduit le débit volumique fourni pendant un temps  $dt$  par une source quelconque située à l'intérieur du volume de contrôle.

#### 3.2.3. Conservation de l'énergie

Les principes de la thermodynamique appliqués à un système fluide en mouvement permettent de définir l'énergie interne et l'entropie du système.

Pour le domaine  $\Omega$ , on traduira ce principe de conservation en exprimant que la dérivée totale par rapport au temps, de la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique d'un volume élémentaire fluide est égale à la somme des énergies échangées par le flux de chaleur et des travaux du champ de forces, de pression du fluide et de tensions de frottement.

$$\rho \frac{d}{dt} \left( E + \sum_{i=1}^n \frac{U_{x_i}^2}{2} \right) = \rho \sum_{i=1}^n U_{x_i} F_{x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathcal{F}_{x_i}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (P U_{x_i}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij}^* U_{x_i}) \quad (16)$$

Dans cette relation  $\mathcal{F}_{x_i}$  désigne les composantes de densité de flux de chaleur ;  $E$  représente l'énergie interne du fluide par unité de masse,  $\tau_{ij}^*$  représente les composantes de tension visqueuse tangentielle et normales.

### 3.2.4. Equation caractéristique du fluide

Pour décrire les propriétés fondamentales du fluide considéré, on établit une relation qui permet de relier à partir des actions à l'échelle moléculaire, les caractéristiques du fluide :  $P, \rho, T_p$ , on a alors :

$$G_0(P; \rho; T_p) = 0 \quad (17)$$

Cette relation ne dépend que du fluide envisagé.

### 3.2.5. Caractères généraux de ces équations

On obtient ainsi un système de 4 équations à 4 inconnues, qui avec les conditions initiales et aux limites devraient permettre de résoudre le problème de la mécanique du fluide considéré. Mais malheureusement ces équations sont non-linéaires, et dans la pratique, leur résolution présente d'énormes difficultés mathématiques. Aussi essaie-t-on de simplifier le problème soit en envisageant des géométries assez simples (écoulement unidimensionnel ou bidimensionnel) soit en négligeant l'influence de certains facteurs qui peuvent paraître secondaires par rapport à d'autres. La suite de ce travail sera consacrée à la recherche d'une forme approchée acceptable pour l'étude de transformation pluie-débit.

## 3.3. MODÈLE HYDRODYNAMIQUE DE TRANSFORMATION PLUIE-DÉBIT

### 3.3.1. Equation de l'écoulement (Navier-Stokes)

Dans le problème hydrologique, on cherche à mieux comprendre le mécanisme du mouvement de l'eau, sous les effets des paramètres fondamentaux qui contrôlent la transformation, du type entrée-sortie, de la pluie en débit. Alors l'équation caractéristique pour l'eau prendra la forme :

$$\rho = G_0(T_p) \quad (18)$$

On admettra comme hypothèse fondamentale que la somme de la variation d'énergie interne du système et de la variation d'énergie cinétique par rapport au temps est nulle ; de même la densité de flux de chaleur est supposée nulle dans toutes les directions. Cela revient à négliger la convection thermique et la convection turbulente, responsables, au niveau de la surface libre, de l'évaporation et à ne considérer l'eau que dans sa phase liquide. Alors de l'équation qui traduit la conservation de l'énergie, on tire

$$\mathcal{F}_{x_i} = k \frac{\partial T_p}{\partial x_i} = 0 \quad (19)$$

La transformation subie par le fluide en mouvement est isotherme. L'équation caractéristique du fluide se réduit à  $\rho = \text{cst}$ . D'autre part on admet que le fluide est conservatif alors  $\Sigma \rho q_i = 0$ . Ainsi pour étudier le mouvement de l'eau dans le domaine  $\Omega$ , on est amené à chercher un vecteur  $\vec{U}$  défini dans  $\Omega \times ]0, t[$  et une fonction scalaire  $P$ , vérifiant

$$\text{div } \vec{U} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, t[ \quad (\text{Continuité}) \quad (20)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho \vec{U} \overrightarrow{\text{grad}} \vec{U} = \rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \mu \Delta \vec{U} \quad \text{dans } \Omega \times ]0, t[ \quad (\text{Dynamique}) \quad (21)$$

avec des conditions initiales et aux limites appropriées, par exemple :

$$\vec{U} \neq 0 \quad \text{sur } \Gamma \times ]0, t[ \quad (22)$$

$$U(x, 0) = U_0(x) \quad \text{sur } \Omega \quad (23)$$

On suppose en outre que  $F$  est donné. Les équations 20-23 constituent les équations fondamentales de l'écoulement et sont connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes. Ces équations forment encore un système non linéaire. Elles peuvent néanmoins être résolues à l'aide des différents algorithmes mathématiques disponibles et analyse numérique. Mais la solution que l'on obtient ne permet généralement pas d'exprimer de manière explicite l'évolution du débit de sortie en fonction de la pluie. Dans la pratique nous envisagerons ces équations sous leurs formes unidimensionnelles.

### 3.3.2. Simplification de l'équation de l'écoulement

On considère une configuration simplifiée du bassin versant (fig. 1) et on suppose que les conditions d'écoulement sont remplies à sa surface, il apparaît alors clairement que le processus de transformation de la pluie en débit à l'exutoire peut se décomposer en trois composantes : l'infiltration, l'écoulement de surface et la propagation dans les chenaux. Chacune de ces composantes peut être décrite par les équations de Navier-Stokes. Mais dans la pratique hydrologique seuls les précipitations et le débit à l'exutoire sont convenablement mesurés. Il convient donc de considérer le processus de transformation en termes d'étapes déterminées par les fonctions de production, de transformation (fig. 2) et de propagation telles que :

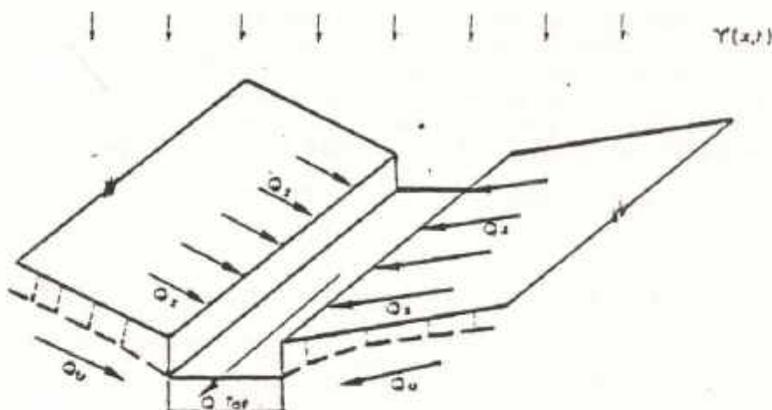


Fig. 1. — Schéma simplifié d'écoulement sur bassin versant

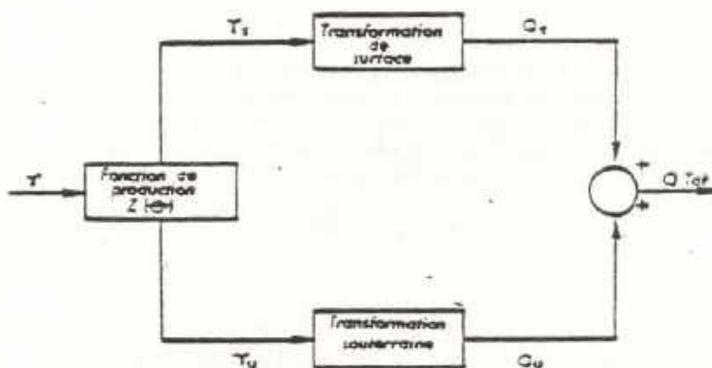


Fig. 2. — Modèle mathématique de bassin versant

— La fonction de production décrit l'action très complexe de la zone non saturée par laquelle la quantité d'eau précipitée augmente la teneur en eau du milieu et se divise en « hauteur d'eau efficace » destinée à alimenter le ruissellement de surface, et en « hauteur d'eau d'infiltration » destinée à alimenter l'écoulement souterrain. On admettra que l'infiltration est le processus déterminant qui commande cette fonction. Mais bien que les équations d'infiltration puissent être considérées sous leur forme tridimensionnelle, on ne prendra en compte que le mouvement vertical de l'eau.

On suppose en outre que  $F$  est donné. Les équations 20-23 constituent les équations fondamentales de l'écoulement et sont connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes. Ces équations forment encore un système non linéaire. Elles peuvent néanmoins être résolues à l'aide des différents algorithmes mathématiques disponibles en analyse numérique. Mais la solution que l'on obtient ne permet généralement pas d'exprimer de manière explicite l'évolution du débit de sortie en fonction de la pluie. Dans la pratique nous envisagerons ces équations sous leurs formes unidimensionnelles.

### 3.3.2. Simplification de l'équation de l'écoulement

On considère une configuration simplifiée du bassin versant (fig. 1) et on suppose que les conditions d'écoulement sont remplies à sa surface, il apparaît alors clairement que le processus de transformation de la pluie en débit à l'exutoire peut se décomposer en trois composantes : l'infiltration, l'écoulement de surface et la propagation dans les chenaux. Chacune de ces composantes peut être décrite par les équations de Navier-Stokes. Mais dans la pratique hydrologique seuls les précipitations et le débit à l'exutoire sont convenablement mesurés. Il convient donc de considérer le processus de transformation en termes d'étapes déterminées par les fonctions de production, de transformation (fig. 2) et de propagation telles que :

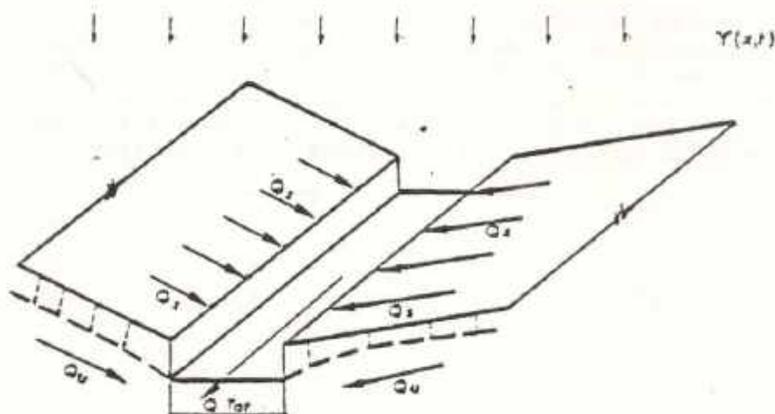


Fig. 1. — Schéma simplifié d'écoulement sur bassin versant

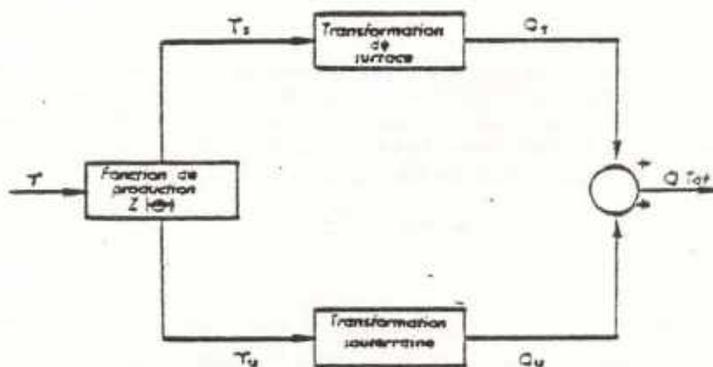


Fig. 2. — Modèle mathématique de bassin versant

— La fonction de production décrit l'action très complexe de la zone non saturée par laquelle la quantité d'eau précipitée augmente la teneur en eau du milieu et se divise en « hauteur d'eau efficace » destinée à alimenter le ruissellement de surface, et en « hauteur d'eau d'infiltration » destinée à alimenter l'écoulement souterrain. On admettra que l'infiltration est le processus déterminant qui commande cette fonction. Mais bien que les équations d'infiltration puissent être considérées sous leur forme tridimensionnelle, on ne prendra en compte que le mouvement vertical de l'eau.

— La fonction de transformation décrit le processus par lequel la « hauteur d'eau efficace » alimente le ruissellement de surface, la hauteur d'eau infiltrée alimente s'il y a lieu, un écoulement souterrain, et les deux écoulements se rejoignent dans le réseau pour donner à l'exutoire le débit résultant. On suppose aussi qu'un écoulement unidimensionnel donne dans chacun de ces cas une bonne description du processus.

Enfin la fonction de propagation décrit l'action par laquelle l'onde de crue ainsi formée se déplace vers l'aval. Ce processus est largement étudié par les équations de Saint Venant (voir dans YEVJEVICH et MAHMOOD, 1975), et peut être considéré comme classique. Il ne sera donc pas abordé ici.

Compte tenu des hypothèses simplificatrices ainsi formulées, les équations (20) et (21) seront considérées sous leur forme unidimensionnelle.

On pose donc  $n = 3$  et  $x = (x_1, x_2, x_3)$

Pour question de commodité dans l'écriture, on adopte la notation  $x_1 = \xi$ ;  $x_2 = \eta$ ;  $x_3 = z$ ; et on considère l'équation de l'écoulement dans la direction  $\xi$  (le raisonnement serait le même dans d'autres directions).

Alors si

$U_\xi, U_\eta, U_z$  sont les composantes de  $\vec{U}$

$\bar{U}_\xi, \bar{U}_\eta, \bar{U}_z$  les vitesses moyennes dans les différentes directions

$Q_\xi, Q_\eta, Q_z$  les courants de masse (ou débits) dans une direction donnée tels que :

$$Q_\xi(\xi, t) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} U_\xi(\xi, \eta, z, t) d\eta dz \neq 0$$

$$Q_\eta(\xi, t) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} U_\eta(\xi, \eta, z, t) d\eta dz = 0$$

$$Q_z(\xi, t) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} U_z(\xi, \eta, z, t) d\eta dz = 0$$

On aura

$$\bar{U}_\xi = Q_\xi(\xi, t) / (\eta_2 - \eta_1)(z_2 - z_1)$$

$$\bar{U}_\eta = 0$$

$$\bar{U}_z = 0$$

et le champ des vitesses peut s'écrire en tout point

$$U_\xi = \bar{U}_\xi(\xi, t) + \tilde{U}(\xi, \eta, z, t);$$

$$U_\eta = \tilde{U}_\eta(\xi, \eta, z, t); \quad U_z = \tilde{U}_z(\xi, \eta, z, t)$$

avec  $\tilde{U}_\xi, \tilde{U}_\eta, \tilde{U}_z$  caractérisant les hétérogénéités de vitesse autour du point considéré et l'on a :

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \tilde{U}_\xi d\eta dz = 0; \quad \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \tilde{U}_\eta d\eta dz = 0; \quad \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{z_1}^{z_2} \tilde{U}_z d\eta dz = 0$$

Pour déterminer les conditions aux frontières, on remarquera que l'équation de la surface libre est donnée par  $z = z(\xi, \eta)$ . Alors à la surface libre, on peut déterminer la condition cinématique de l'écoulement qui est décrite par  $(dz/dt + r) |_{\text{surf}} = U_z |_{\text{surf}}$ ; ( $r$  étant le débit d'apport dû à la précipitation). De même au contact du sol on pourra écrire l'équation de la surface du sol et déterminer la condition cinématique  $(dz/dt + q_{\text{inf}}) = U_z |_{\text{sol}}$ ; ( $q_{\text{inf}}$  étant le débit d'infiltration). Aux frontières latérales de l'écoulement on a  $d\eta(\xi, z)/dt = 0$ . Ces conditions se traduisent au niveau de la surface libre par

$$U_z |_{\text{surf}} = -r + \left( \frac{\partial z}{\partial t} + U_\xi \frac{\partial z}{\partial \xi} + U_\eta \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \quad (24)$$

et au niveau du front d'infiltration par des relations analogues.

En intégrant maintenant les équations de Navier-Stokes par rapport à  $\eta$  et  $z$  et en posant

$$\eta_2 - \eta_1 = B; z_2 - z_1 = H; (\eta_2 - \eta_1)(z_2 - z_1) = s; q_0 = r - q \tan \alpha; q = B q_0$$

l'équation de continuité se met sous la forme

$$\partial Q / \partial \xi + \partial s / \partial t = q \quad (25)$$

et l'équation dynamique sous la forme

$$\partial Q \xi / \partial \tau + \partial (Q \xi \bar{U}_\xi) / \partial \xi + g \partial [s(z_2 - z_1)] / \partial \xi = W(Q, z_2 - z_1, \xi, t) \quad (26)$$

La fonction  $W(Q, z_2 - z_1, \xi, t)$  traduit l'influence des propriétés physiques (topographiques, physiographiques) du milieu sur l'écoulement. Dans le cas simple d'un écoulement sur une surface plane et si l'on adopte les hypothèses de Saint-Venant (voir détails dans MAHMOUD K. et YEVJEVICH V., 1975), l'équation dynamique s'obtient sous la forme classique donnée par de Saint-Venant.

$$\frac{\partial \bar{U}_\xi}{\partial \tau} + \bar{U}_\xi \frac{\partial \bar{U}_\xi}{\partial \xi} + g \frac{\partial H}{\partial \xi} = g (I_{0\xi} - J_\xi) \quad (27)$$

$I_{0\xi}$  et  $J_\xi$  désignant respectivement la pente et la perte de charge. Les équations (25) et (27) seront utilisées pour déterminer les différentes fonctions.

### 3.3.3. La fonction de production

Le processus physique le plus important à ce stade est celui de l'infiltration. Si les propriétés du sol sont connues, les équations (25) et (27) peuvent être utilisées pour décrire le processus d'évolution de l'humidité. La particularité de l'écoulement de l'eau dans ce cas est qu'il induit l'écoulement de l'air dans le sol alors, le problème est celui d'un écoulement biphasique dans un milieu poreux.

Si l'on dénomme  $z$  la dimension verticale, mesurée à partir de la surface du sol,  $h$  désignant la distance à un point quelconque au-dessus de la nappe, alors à partir des équations (25) et (27), on obtient les relations suivantes pour décrire le mouvement vertical de l'eau dans le sol :

Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (p S_e) + \frac{\partial}{\partial z} (V_e) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (p_a p S_a) + \frac{\partial}{\partial z} (p_a V_a) = 0 \quad (29)$$

Equations dynamiques.

Les lois de Darcy qui décrivent l'équation dynamique en milieu poreux sont obtenues en négligeant dans l'équation (27) l'accélération locale et l'accélération convective, et en posant  $J = \bar{K}_0 V$ . Alors on peut écrire les équations de Darcy, respectivement pour l'eau et pour l'air.

$$V_e = -\bar{K}_e \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{P}{\rho_e g} - z \right) \quad (30)$$

$$V_a = -\bar{K}_a \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{P}{\rho_a g} - z \right) \quad (31)$$

Dans ces équations  $\rho_a$  et  $\rho_e$  désignent les masses spécifiques respectives de l'air et de l'eau ;  $v_a$  et  $v_e$  sont les vitesses respectives de l'air et de l'eau ;  $p$  désigne la porosité du milieu ;  $S_a$  et  $S_e$  désignent les saturations volumiques en air et en eau ;  $g$  est l'accélération de la gravité.

$$\bar{K}_j = -\frac{1}{\bar{K}_0} = k_j \rho_j g / \mu_j$$

désigne la conductivité hydraulique (perméabilité effective) pour le fluide  $j$  et  $k_j$  est la perméabilité intrinsèque par rapport au fluide  $j$ .

La conservation du fluide dans le milieu poreux est définie par  $S_a + S_e = 1$  et la pression capillaire est définie par  $P_c = P_a - P_e$ .

Lorsque l'on combine les équations de continuité et dynamique, on obtient pour l'air et pour l'eau des équations résultantes qui permettent de décrire le comportement du milieu pendant le processus d'infiltration (SMITH et WOOLHISER, 1971). Mais la plupart du temps ces équations doivent encore être simplifiées et la solution finale que l'on obtient dépendra des hypothèses introduites pour leur simplification.

Cependant lorsque le processus d'infiltration s'accompagne d'une recharge de la nappe, le bilan d'eau infiltrée et encore en stockage dans le milieu poreux prend la forme :

$$Y_u = (h - h_{min}) \cdot (\theta_{max} - \theta_{in}) + Y_r \quad (32)$$

où  $(h - h_{min})$  désigne la distance de la zone initialement non-saturée,  $h_{min}$  étant la hauteur de la montée capillaire.  $\theta_{max}$  est la teneur en eau maximum et  $\theta_{in}$  est la teneur en eau initiale.  $Y_r$  est le volume d'eau allant à la recharge de la nappe.

Soit  $Y$  la portion du volume total d'eau précipitée et encore disponible pour le ruissellement, on a alors

$$Z(\theta) = Y_u / Y \quad (33)$$

$Z(\theta)$  caractérise l'action de la zone non saturée puisqu'elle divise la quantité d'eau précipitée en deux parties :

— d'une part le volume d'eau infiltrée et encore en stockage dans le milieu poreux :

$$Y_u = Z(\theta) \cdot Y \quad (34)$$

— d'autre part, le volume d'eau excédentaire encore disponible pour le ruissellement de surface :

$$Y_s = [1 - Z(\theta)] Y \quad (35)$$

La conservation de volume conduit à une relation analogue à la relation (4)  $Y_u + Y_s = Y$ ;  $Z(\theta)$  est appelé fonction de production (AFOUDA, 1974, 1976, 1978). Les débits correspondant à  $Y_u$  et à  $Y_s$  sont respectivement dénommés  $Q_u$  et  $Q_s$  (fig. 1) et le débit total résultant  $Q_{tot}$ .

Si l'on utilise maintenant les équations (23-31) pour décrire le comportement du milieu pendant l'infiltration, on peut définir les grandeurs suivantes (MOREL-SEYTOUX, 1973).

La vitesse totale  $V = V_e + V_a$ .

La perméabilité relative pour le fluide  $j$  (rapport de la perméabilité effective sur la perméabilité intrinsèque)  $k_{rj} = K_j/k_j$ .

La mobilité relative pour le fluide  $j$  :  $\lambda_j = k_{rj}/\mu_j$ .

La mobilité totale  $\lambda_a + \lambda_e = \Lambda$ .

La fonction d'écoulement  $\mathcal{F}_e = V_e/V$  et la fonction  $f_e = \lambda/\Lambda$ .

Si l'on suppose que dans le milieu poreux on peut raisonnablement négliger la compressibilité de l'air (MOREL-SEYTOUX, 1973), alors en additionnant les deux équations de continuité on trouve que la vitesse totale ne dépend pas de  $z$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} [p(S_e + S_a)] + \frac{\partial}{\partial z} (V_e + V_a) = \frac{dV}{dz} = 0 \quad (36)$$

La vitesse totale dépend cependant du temps et l'on a  $V = V(t)$ . En additionnant les deux équations dynamiques et en divisant par  $\Lambda$  on obtient :

$$\frac{V}{\Lambda} = -\frac{\partial P_e}{\partial z} - (1 - f_e) \frac{\partial P_c}{\partial z} + f_e (\rho_e - \rho_a) g + \rho_a g \quad (37)$$

ou bien :

$$\frac{V}{\Lambda} = -\frac{\partial P_a}{\partial z} + f_e \frac{\partial P_c}{\partial z} + f_e (\rho_e - \rho_a) g + \rho_a g \quad (38)$$

D'après MOREL-SEYTOUX (1973), ces équations sont valables quel que soit  $t$  et quel que soit le point du milieu poreux considéré. En particulier pour un temps fixé, on peut intégrer l'équation (37) ou l'équation (38) entre deux positions de  $z$ . Pour  $z_1 = 0$  et  $z_2$  on obtient la vitesse d'infiltration :

$$V = \left( P_{a1} - P_{a2} + \rho_a g (z_2 - z_1) + \int_1^2 f_e dP_c + \int_1^2 f_e dz \right) \cdot \left( \int_1^2 \frac{dz}{\Lambda} \right)^{-1} \quad (39)$$

MOREL-SKYTOUX (1976) a montré que l'on peut admettre dans certains cas la pression de l'air égale à la pression atmosphérique, alors comme  $V_{z/2=0}$  est négative, on trouve en considérant la vitesse totale  $V = V_0 + V_3$  que  $V$  est inférieur à  $V_0$ . L'égalité a lieu seulement si  $V_{z/2=0} = 0$ . En remarquant d'autre part que de par les conditions aux frontières :

$$V_0 = U_{z/sol} = \left( \frac{dz}{dt} + q_{inf} \right)$$

on trouve :

$$V_0 - dz/dt = + q_{inf}$$

En identifiant cette équation à la relation qui donne la vitesse totale, on obtient  $V_3 = - dz/dt$ ;  $V = + q_{inf}$ . Par définition  $V_0 = V \cdot \mathcal{F}_0$ , alors, à la surface du sol, pour  $V_{z/2=0} = - dz/dt = 0$ , on a :

$$V = V_0/\mathcal{F}_0 = + q_{inf} \quad \text{soit} \quad q_{inf} = U_{z/2=0}/\mathcal{F}_0 \quad (40)$$

Ainsi le volume d'eau infiltrée et encore en stockage dans le milieu peut être évalué par la relation :

$$Y_u = \int_{-\infty}^{\theta} (V(\tau) - Q_u(\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{\theta} (U_{z/2=0}/\mathcal{F}_0 - Q_u(\tau)) d\tau \quad (41)$$

On peut utiliser cette relation pour évaluer la fonction de production. Ainsi on a :

$$Z(\theta) = \left( \int_{-\infty}^{\theta} (V(\tau) - Q_u(\tau)) d\tau \right) / \left( \int_{-\infty}^{\theta} (r(\tau) - Q_{tot}(\tau)) d\tau \right) \quad (42)$$

Il apparaît ainsi clairement que  $Z(\theta)$  varie avec la vitesse d'infiltration et avec l'intensité de la pluie ; et dépend des propriétés du milieu physique introduites par  $\mathcal{F}_0$ .

### 3.3.4. L'équation de transformation

Le processus de transformation sur un bassin versant comprend d'une part l'écoulement de surface, c'est-à-dire l'écoulement sur une surface rugueuse décrit par AFOUDA (1979 a) et l'écoulement hypodermique décrit par ISHIHARA (1971), et d'autre part, l'écoulement souterrain provenant de la recharge de la nappe par l'eau de pluie.

#### — Écoulement de surface

Appelons  $h_1$  la hauteur d'eau d'écoulement sur la surface rugueuse,  $h_2$  la hauteur de l'écoulement hypodermique et supposons que les deux écoulements aient la même direction. On définit  $V_1$  et  $V_2$  les vitesses locales respectives pour l'écoulement hypodermique, et  $Q_1$  et  $Q_2$  les débits correspondants, alors les équations (25) et (27) peuvent être utilisées pour décrire l'écoulement. On obtient après de légères transformations.

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} + \frac{\partial Q_s}{\partial \xi} = r_s(\xi, t) \quad (43)$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} + U_s \frac{\partial U_s}{\partial \xi} + g \frac{\partial H_s}{\partial \xi} = g(L_{0\xi} - J\xi) - r_s \frac{U_s}{H_s} \quad (44)$$

avec :

$r_s = r - q_{inf} = q_0$ ;  $H_s = h_1 + h_2$  est la hauteur locale

$Q_s = Q_1 + Q_2$  est le débit total provenant de l'écoulement de surface

$U_s = V_1 \left( 1 - \frac{h_2}{H_s} \right) + V_2 \frac{h_2}{H_s}$  est une vitesse équivalente

Elle correspond à la vitesse de l'eau dans un milieu homogène qui produirait le même débit  $Q_s$  à partir de la hauteur  $H_s$  (AFOUDA, 1979 a).

$L_{0\xi}$  — est la pente moyenne du bassin et

$J\xi$  — est une perte de charge généralisée.

La perte de charge généralisée est évaluée à partir des considérations suivantes : Supposons que pour l'écoulement rugueux, les feuilles, les tiges des herbes et plantes et les autres rugosités sont uniformément réparties sur une longueur  $L_0$ . Alors pour caractériser la surface du bassin on peut introduire un coefficient  $\gamma_0$  et définir un coefficient de traînée

$$C_1 = L_0 \eta_0 / R_*^{m_0} \quad (45)$$

avec  $R_*$  le nombre de Reynolds de l'écoulement et  $m_0$  un coefficient variant de 1 à 0 lorsque l'écoulement varie du laminaire au turbulent. On peut alors évaluer la perte de charge pour l'écoulement rugueux (AFOUDA, 1979 a).

$$J_1 = \left( \frac{1}{C^2 R} + \frac{C_1}{2g} \right) V_1^2 \quad (46)$$

ici,  $C$  désigne le coefficient de Chézy,  $R \simeq h_1$  désigne le rayon hydraulique et  $V_1$  est la vitesse locale précédemment définie. Bien que cette formulation impose une distribution spécifique de la rugosité, elle peut être considérée comme une approximation valable pour la perte de charge sur une surface couverte de végétation.

La perte de charge pour l'écoulement hypodermique peut être évaluée à partir de la théorie du milieu poreux (BEAR, 1972). On obtient (voir détails dans AFOUDA (1979 a)) :

$$J_2 = \frac{1-p}{p} \cdot \frac{\lambda_0}{24 g \beta d_0} \cdot C_D V_2^2 \quad (47)$$

où  $p$  désigne la porosité de la couche poreuse de surface,  $\beta$  est un coefficient qui tient compte de la géométrie des grains.

$d_0$  est le diamètre moyen des grains

$\lambda_0$  est un coefficient qui tient compte de l'influence des grains voisins

$C_D$  est le coefficient de traînée au sens de Stokes et

$V_2$  est la vitesse locale du milieu déjà définie.

Si l'on utilise les équations (46) et (47) pour calculer  $U_*^2$  en admettant que la loi de résistance de Darcy-Weisbach est valable, on obtient une expression analytique pour la perte de charge généralisée.

$$J_2 = (\Gamma_0 / 8 g H_s) U_*^2 \quad (48)$$

où  $\Gamma_0$  est le coefficient de perte de charge généralisée

$$\Gamma_0 = 8 g H_s \cdot \left( \frac{2 g C^2 h_1}{2 g + C_1 C^2 h_1} \right) \cdot \left( 1 - \frac{h_2}{H_s} \right)^2 + \frac{24 g \beta d_0 p^2}{\lambda_0 (1-p) C_D} \cdot \left( \frac{h_2}{H_s} \right)^2 + 2 \left( \frac{2 g C^2 h_1}{2 g + C_1 C^2 h_1} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{24 g \beta d_0 p^2}{\lambda_0 (1-p) C_D} \right)^{1/2} \cdot \left( 1 - \frac{h_2}{H_s} \right) \cdot \left( \frac{h_2}{H_s} \right)^{-1} \quad (49)$$

Cette expression a été analysée en détail dans AFOUDA (1979 a).

Dans la pratique hydrologique, on cherche toujours une forme simplifiée de l'équation (44) lorsque l'on écrit la relation pluie-débit. Mais malheureusement la plupart des hypothèses admises ne reflètent souvent que l'opinion personnelle des différents auteurs et n'ont par conséquent qu'une valeur subjective. La théorie la plus cohérente élaborée dans le domaine est celle de l'approximation de l'onde cinématique. Le fondement de cette théorie a été largement décrit par WOODING (1965), EACLESON (1970), WOOLHISER (1975) et d'autres encore. Pour un écoulement sur une surface libre, débarrassée de toute végétation ou obstacles (écoulement de Chézy), WOOLHISER et LIGGETT (1967) ont introduit un nombre cinématique.

$$K_0 = L_0 I_0 / H_0 F_0^2 \quad (50)$$

où  $L_0$  est la longueur de référence choisie,

$I_0$  est la pente moyenne du bassin

$H_0$  la hauteur normale et

$F_0 = V_0 / (g H_0)^{1/2}$  est le nombre de Froude correspondant à la vitesse  $V_0$ .

Ces auteurs ont montré que pour  $K_0 > 10$  l'approximation de l'onde cinématique est valable et l'équation dynamique (44) peut être utilisée dans la formulation de Darcy-Weisbach.

Lorsque l'on considère un écoulement à travers les obstacles et si l'influence des obstacles est décrite par le coefficient  $C_1$ , on obtient le nombre cinématique sous la forme (AFOUDA, 1979 a) :

$$K_1 = L_0 \eta_0 / 2 R_*^{m_0} + K_0 \quad (51)$$

Lorsque  $K_1 > L_0 \gamma_0/2 R_0^{2m} + K_0$ , la formulation de Darcy-Weisbach est valable et il existe une relation univoque entre la vitesse et la hauteur. Alors l'équation dynamique (44) peut être utilisée sous la forme :

$$U_s^2 = (8 g L_0/\Gamma) H_s \tag{52}$$

Mais comme le coefficient de perte de charge est fonction de la hauteur de l'écoulement, on peut définir un coefficient :

$$\alpha(H_s) = (8 g L_0/\Gamma)^{1/2} \tag{53}$$

Alors le débit de sortie correspondant à l'écoulement de surface s'exprime par la relation :

$$Q_s = \alpha(H_s) \cdot H_s^{3/2} = \psi(H_s) \tag{54}$$

En combinant cette équation avec l'équation de continuité (éq. 43), on obtient l'équation de l'écoulement de surface.

Procédons maintenant à la discrétisation de  $r_s(\xi, t)$  et  $Q_s(\xi, t)$  suivant la figure 3. On obtient un nombre fini de variables d'entrée-sortie,  $r_{st}$  et  $Q_{st}$  ; on intègre l'équation de continuité sur le bief correspondant et l'on a

$$\frac{d x_{s1}}{dt} = \varphi_{s1} - \psi_{s1}$$

$$\frac{d x_{s2}}{dt} = \varphi_{s2} - (\psi_{s2} - \psi_{s1})$$

.....

$$\frac{d x_{sk}}{dt} = \varphi_{sk} - (\psi_{sk} - \psi_{s(k-1)})$$
(55)

avec

$$x_{st} = \frac{1}{\xi_t - \xi_{t-1}} \int_{\xi_{t-1}}^{\xi_t} H_{st}(\xi, t) d\xi$$

$$(\psi_{st} - \psi_{s(t-1)}) = \frac{1}{\xi_t - \xi_{t-1}} \int_{\xi_{t-1}}^{\xi_t} \frac{\partial Q_{st}}{\partial \xi} d\xi$$

$$\varphi_{st} = \frac{1}{\xi_t - \xi_{t-1}} \int_{\xi_{t-1}}^{\xi_t} r_{st}(\xi, t) d\xi$$

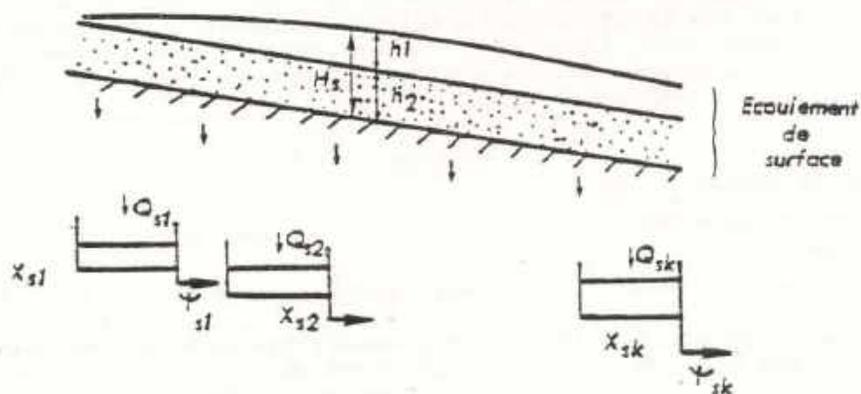


Fig. 3. — Simulation de l'écoulement de surface par les réservoirs en cascade

Ce qui donne sous forme matricielle

$$\frac{d X_s}{dt} = \varphi_s - \bar{\Psi}_s \quad (56)$$

avec

$$\bar{\Psi}_s = [\psi_{st} - \psi_{s(t-1)}]$$

L'équation (54) devient

$$\bar{\Psi}_s = \bar{\Psi} (X_s(t), t) \quad (57)$$

La remarque importante à faire ici est que la relation (45) exprime le débit comme une relation univoque de la hauteur. On peut donc espérer développer la relation (57), qui en découle, en série de Taylor. On écrit alors pour chaque bief une relation

$$\psi_s(x_{st}) = \psi_s(x_{sto}) + \sum_{j=1}^n \frac{d^j \psi_s}{d x_{st}^j} \Big|_{x_{st} = x_{sto}} \cdot (x_{st} - x_{sto})^j \quad (58)$$

On pose

$$\frac{d^j \psi_s}{d x_{st}^j} \Big|_{x_{st} = x_{sto}} = a_{1j}; \quad x_{st} - x_{sto} = y_{st} \quad (59)$$

$$\psi_s(x_{st}) - \psi_s(x_{sto}) = \psi_s(x_{st} - x_{sto}) = \psi_s(y_{st}).$$

alors pour chaque bief on a la relation

$$\frac{d y_{st}}{dt} = \varphi_{st} - (\psi_s(y_{st}) - \psi_s(y_{s(t-1)})) \quad (60)$$

$$\psi_s(y_{st}) = \sum_{j=1}^n a_{1j} y_{st}^j$$

et pour tous les biefs, on obtient une équation différentielle vectorielle.

$$\frac{d Y_s}{dt} = \sum_{j=1}^n A_{s1} Y_{s1} + \varphi_s \quad (61)$$

avec

$$\frac{d Y}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d y_{s1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d y_{sk}}{dt} \end{bmatrix}; \quad Y_{s1} = \begin{bmatrix} y_{s1}^1 \\ y_{s1}^2 \\ \vdots \\ y_{s1}^n \end{bmatrix}; \quad \varphi_s = \begin{bmatrix} \varphi_{s1} \\ \varphi_{s2} \\ \vdots \\ \varphi_{sk} \end{bmatrix}$$

$$A_{s1} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} -a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & -a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{(1-1)1} & -a_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a_{(k-1)1} & -a_{k1} \end{array} \right]$$

Ici  $a_{1j}$  désigne le jème coefficient du développement en série de Taylor.

## — L'écoulement souterrain

Il a déjà été indiqué plus haut que les équations qui décrivent l'écoulement souterrain peuvent être déduites des équations (25) et (27). EAGLESON (1970) a montré que pour un écoulement unidimensionnel et à surface libre dans un milieu poreux, l'équation de continuité et l'équation dynamique peuvent aussi être écrites sous la forme.

$$\frac{\partial H_u}{\partial \tau} + \frac{\partial Q}{\partial z} = r_u \quad (62)$$

$$Q_u = \alpha_u H_u \quad (63)$$

Dans ces relations  $H_u = p H'_u$ ;  $H'_u$  étant la hauteur de l'écoulement,  $p$  désignant la porosité du milieu.

$Q_u$  est le débit de contribution souterraine à l'écoulement,

$\alpha_u = k_0 g I_u / p v_0$  avec  $k_0$  la perméabilité intrinsèque,

$I_u$  = la pente locale de la surface phréatique,

$v_0$  = la viscosité du fluide,

$r_u = Y$  est la vitesse verticale apparente avec laquelle l'eau pénètre le système par la surface phréatique.

Si l'on utilise maintenant une approximation similaire à celle déjà utilisée plus haut, on peut écrire pour chaque bief

$$\frac{d y_{ui}}{dt} = r_{ui} - (\alpha_{ui} y_{ui} - \alpha_{u(i-1)} y_{u(i-1)})$$

$$\psi_{ui} = \alpha_{ui} y_{ui}$$

et pour tout le système, on obtient une équation différentielle vectorielle linéaire.

$$\frac{d Y_u}{dt} = \Delta_u Y_u + \Phi_u \quad (64)$$

$$\Psi_u = \Delta_u Y_u \quad (65)$$

## — Couplage des écoulements de surface et souterrain

Si l'on suppose que pour un bief donné, l'écoulement de surface et l'écoulement souterrain ont sensiblement la même direction, on peut alors réunir ces deux écoulements en utilisant la fonction de production (AFOUÉ, 1974, 1978). On obtient :

$$\frac{d Y}{dt} = \sum_{j=1}^n \Delta_j Y_j + \Phi \quad (66)$$

$$\Psi = \sum_{j=1}^n \Delta_j Y_j \quad (67)$$

avec

$$\Delta_j = \begin{cases} Z(\theta) \Delta_{s1} + [1 - Z(\theta)] \Delta_{s2} & \text{pour } j = 1 \\ [1 - Z(\theta)] \Delta_{s1} & \text{pour } j > 1 \end{cases}$$

Les équations (66) et (67) sont une approche cinématique globale des processus de transformation pluie-débit. Au sens de la théorie des systèmes, l'équation (66) est une équation différentielle non-linéaire qui décrit l'état  $Y$  du bassin considéré. L'équation (67) exprime la sortie en fonction de cet état. Les équations (66) et (67) peuvent être résolues à l'aide du théorème d'inversion locale présenté par HALDRE et ORAVA (1972). Lorsque les conditions initiales appropriées sont imposées pour le système invariant, la composante linéaire de la solution de l'équation d'état est de la forme :

$$Y_L(t) = \int_0^t X(t-\tau) \Phi(\tau) d\tau \quad (68)$$

où  $Y_L(t)$  est une matrice colonne dont les éléments sont donnés par

$$Y_{L_v}(t) = \sum_{i=1}^v \int_0^t \mathcal{K}_{i,1}(t-\tau) \varphi_i(\tau) d\tau \quad (69)$$

et

$$\mathcal{K}_{i,1}(t-\tau) = \sum_{l=1}^v \prod_{j=1}^{l-1} A_{lj} \exp[-A_{lj}(t-\tau)] \quad (70)$$

Maintenant à partir de la solution linéaire donnée par l'équation (63), on peut construire par approximations successives la solution générale de l'équation (61), on obtient les vecteurs colonne  $Y_j$  dont les  $v$ ème éléments ont la forme suivante.

$$y_{vj}(t) = \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_{j-1}=1}^v \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{j} \mathcal{K}_{i_1 \dots i_{j-1}}(t, \tau_1 \dots \tau_{j-1}) \times \varphi_{i_1}(\tau_1) \dots \varphi_{i_{j-1}}(\tau_{j-1}) d\tau_1 \dots d\tau_{j-1} \quad (71)$$

Lorsque l'on utilise cette expression pour calculer  $\psi$  la relation qui en résulte est une matrice colonne dont les éléments peuvent aussi être réarrangés sous la forme d'une série intégrale.

$$\psi_k(t) = \sum_{v=1}^k \left( \sum_{i_1=1}^v \dots \sum_{i_{j-1}=1}^v \int_0^t \dots \int_0^t \mathcal{K}_{i_1 \dots i_{j-1}}(t, \tau_1 \dots \tau_{j-1}) \times \varphi_{i_1}(\tau_1) \dots \varphi_{i_{j-1}}(\tau_{j-1}) d\tau_1 \dots d\tau_{j-1} \right) \quad (72)$$

#### 4. DISCUSSION

L'équation (72) est la solution générale de l'équation qui décrit le processus de transformation pluie-débit. Les avantages de cette représentation sous forme de la série intégrale de Volterra ont déjà été discutés ailleurs (AMOROCHO et ORLOS (1961), AFOUDA (1973)). La discussion qui suit porte seulement sur la comparaison du modèle proposé avec les modèles existants.

D'abord, on note que les paramètres introduits dans la formulation de ce modèle mathématique ont chacun une signification physique bien précise. La précision que l'on peut obtenir dans l'évaluation du comportement du bassin versant pendant le processus de transformation est liée aux hypothèses admises sur ces paramètres, en particulier sur la fonction de production.

Si  $Z(\theta) = 1$  et  $\Phi(t) > 0$ , la réponse du bassin prend la forme de la seule contribution de l'écoulement souterrain.

Si  $Z(\theta) = 1$  et  $\Phi(t) \leq 0$ , l'équation (66) décrit alors l'évolution de la teneur en eau à la surface du sol.

Lorsque  $Z(\theta) = 0$  et  $\Phi(t) > 0$ , l'équation (66) décrit l'écoulement de surface seul. La finesse de cette description dépend d'une part du paramètre  $k$  qui représente la dimension de la matrice fondamentale liée à l'équation (66) et d'autre part du paramètre  $m$  qui est le nombre de termes adoptés dans le développement en série de Taylor.

Si  $k = 1$ ,  $m = 1$  le modèle simule le comportement du bassin par un seul réservoir linéaire. Ce modèle est d'usage très courant en hydrologie ; il a été utilisé par Debordes (1975) dans le cadre d'une étude de ruissellement en milieu urbain. Dans ce cas,  $\mathcal{K}(t)$  se réduit à :

$$\mathcal{K}(t) = a_{11}(t) \exp\left(-\int_0^t a_{11}(\tau) d\tau\right) \quad (73)$$

lorsque  $a_{11}(t)$  est une fonction de temps et à une simple fonction exponentielle si  $a_{11} = \text{constante}$ . Dans les modèles antérieurs le coefficient  $a_{11}$  est considéré comme un coefficient empirique alors que l'approche généralisée présentée ici montre que

$$a_{11} = \frac{d\psi}{d\chi} \Big|_{\chi = \chi_0} \quad (74)$$

Si  $k > 2$ ,  $m = 1$ , le modèle présenté est équivalent à un système de réservoirs en cascade. Ce cas a été étudié au laboratoire par Muzik (1974). Si  $a = \text{constante}$  et si  $q_i \neq 0$ ,  $q_1 = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) on obtient le modèle proposé par Dooge (1959). Lorsque l'on adopte les conditions initiales et aux frontières de Dooge  $\mathcal{K}(t)$  s'obtient sous la forme

$$\mathcal{K}(t) = \sum_{l=1}^k \left( \frac{1}{a_{1l}} \right)^{k-l} \left[ \prod_{v=1}^k \left( \frac{1}{a_{1v}} - \frac{1}{a_{1l}} \right) \right]^{-1} e^{-a_{1l} t} \quad (75)$$

Dans le cas particulier où l'on adopte les conditions de Nash  $a_{11} = a_{12} = \dots = a$

$$\mathcal{K}(t) = \frac{a}{(k-1)!} (at)^{k-l} e^{-at} \quad (76)$$

Si  $k = 1$  et  $m \geq 2$ , le modèle se réduit à un réservoir unique non-linéaire. La solution de cette approche a été discutée dans des travaux antérieurs (AFOUDA 1974, 1978).

Le cas où  $k \rightarrow \infty$  et  $m < \infty$  est d'un intérêt tout particulier. Si l'on considère la composante linéaire dans le cas d'un système invariant dans le temps, on a :

$$\mathcal{Y}_L(t) = \sum_{v=1}^k \int_0^t \mathcal{K}_{v-1}(t-\tau) r_v(\tau) d\tau \quad (77)$$

Si l'on se base sur la définition du système alors on voit que lorsque  $k \rightarrow \infty$ , la composante linéaire tend vers

$$H(\bar{z}_0, t) - H_0 = \int_0^t \mathcal{K}_\infty(\bar{z}_0, t-\tau) r_1(\bar{z}_0, \tau) d\tau \quad (78)$$

Le problème à résoudre est donc d'évaluer  $\mathcal{K}_\infty(\bar{z}_0, t-\tau)$ . À partir de la définition même de la composante linéaire

$$\mathcal{K}_\infty(\bar{z}_0, t-\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^k \sum_{i=1}^k \prod_{v=1}^{k-l} a_{1v} \exp[-a_{1v}(t-\tau)] \quad (79)$$

Lorsque  $k \rightarrow \infty$ ,  $a_{1v}$  tend vers une valeur donnée  $a_1$ , ainsi on obtient la condition de Nash et la sommation interne devient

$$\frac{1}{(k-1)!} (a_1 t)^{k-l} e^{-a_1 t}$$

En prenant ensuite

$$\mathcal{K}_\infty(\bar{z}_0, t-\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^k \frac{1}{(k-1)!} (a_1 t)^{k-l} e^{-a_1 t}$$

On trouve que  $\mathcal{K}_\infty(\bar{z}_0, t-\tau)$  est constante et égale à la fonction échelon unité de Heaviside.

$$\mathcal{K}_\infty(\bar{z}_0, t-\tau) = u(\bar{z}_0, t-\tau) \quad (80)$$

Alors la composante linéaire est

$$H(\bar{z}_0, t) - H_0 = \int_0^t u(\bar{z}_0, t-\tau) r_1(\bar{z}_0, \tau) d\tau \quad (81)$$

Le débit résultant a la forme suivante :

$$Q(\bar{z}_0, t) = \sum_{l=1}^m \int_0^t \dots \int_0^t \bar{\mathcal{K}}_l(\bar{z}_0, t-\tau) \times \prod_{i=1}^l r_i(\bar{z}_0, \tau) d\tau_1 \dots d\tau_l \quad (82)$$

avec

$$\bar{\mathcal{K}}_l(\bar{z}_0, t-\tau) = \int_0^t \prod_{i=1}^{l-1} u(\bar{z}_0, t-\tau) d\tau$$

Mais on peut obtenir cette même solution à partir de l'équation à paramètres répartis

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = r_s(x, t) \quad (83)$$

$$Q = \sum_{j=1}^n a_j H^j$$

La différentielle totale de  $H(x, t)$  est donnée par

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} \quad (85)$$

En comparant avec (83) on a :

$$\frac{dH}{dt} = r_s(x, t) \quad (86)$$

$$U = \sum_{j=1}^n j a_j H^{j-1} \quad (87)$$

En résolvant l'équation (86) pour  $H$ , on obtient (81) et le débit résultant a la forme (82). Ainsi on voit que le modèle proposé tend à la limite vers le modèle de l'onde cinématique proposé par Wooding (1965), Woolhiser et Liggett (1967).

## 5. CONCLUSION

Le processus de la formation de crue sur un bassin versant naturel à partir des eaux de pluie est l'un des problèmes les plus complexes qui se posent à l'hydrologue. Ainsi, le problème de la transformation de la pluie tombée sur un bassin versant en débit mesuré à l'exutoire continue-t-il d'être au centre des préoccupations de l'hydrologue. Mais la plupart des modèles proposés pour étudier ce phénomène sont soit des modèles purement conceptuels, soit des modèles fondés sur l'hypothèse de transformation linéaire, alors que dans la nature l'hydrologue se trouve confronté à des phénomènes dont le comportement est loin d'être linéaire.

On a montré dans cette étude qu'à partir des équations classiques de la mécanique des fluides on peut construire un modèle mathématique de transformation pluie-débit. L'idée maîtresse du modèle est que le processus de la transformation de la pluie en onde de crue se fait en trois étapes fondamentales : une étape de production, une étape de transformation et une étape de propagation. On propose pour décrire l'étape de production, une fonction  $Z(\theta)$  qui détermine l'interaction entre la composante superficielle et la composante souterraine de l'écoulement. L'équation de transformation est obtenue par couplage de ces deux composantes.

Bien qu'apparemment très théorique, le modèle proposé est inspiré par les observations actuellement en cours sur le ruissellement à Cotonou. S'il faut bien sûr attendre les résultats de son application pratique pour juger de sa valeur, la discussion théorique montre déjà que ce modèle est une généralisation des divers modèles à réservoirs utilisés dans la pratique. Elle montre en outre que lorsque le nombre de réservoirs est suffisamment grand, ce modèle est la forme discrète du modèle de l'onde cinématique. Ce résultat établit de manière explicite la relation qui existe entre les modèles conceptuels à réservoir dits « modèles globaux » et les modèles basés sur les équations de la physique dits « modèles à paramètres répartis ».

## 6. BIBLIOGRAPHIE

AFONDA (A. A.) - 1974 - Contribution à l'étude des systèmes hydrologiques non-linéaires. Thèse de doctorat. Université Paul-Sabatier, Toulouse (France).

- AFOU DA (A. A.) - 1975 - Une méthode de simulation pour le fleuve Niger. In *Hydrology in Africa*. Proc. of the meeting of Expert on Hydrology Problems in Africa. UNESCO-WMP-ECA. Addis-Abeba.
- AFOU DA (A. A.) - 1973 - A Unified approach to watershed modelling, *Nordic Hydrology*, Vol. 9, n° 3/4, pp. 161-172.
- AFOU DA (A. A.) - 1979 a - *Hydrodynamic watershed modelling*, Rep. n° 79-TA, International Centre of Hydrology « Dino-Tonini ». University of Padova (Italie). (To be published).
- AFOU DA (A. A.) - 1979 b - A generalized kinematic approach to watershed modelling. (To be published in *Hydrological forecasting* : Proceeding of the Oxford Symposium, April 1980, IAHS publ. n° 129.)
- AMOROSO (J.) and ORLOS (G. T.) - 1961 - Non-linear analysis of hydrologic system ; water resources centre contribution, n° 40.
- BEAR (J.) - 1972 - *Dynamic of fluids in porous media*. American elsevier, New York.
- CRUETTE (J.) - 1975 - Modèles de crues en zone urbaine en Afrique occidentale. Symposium sur l'hydrologie de crues, Nairobi.
- DEBORDES (M.) - 1975 - Une étude générale de l'assainissement pluvial urbain. *La Houille blanche*, n° 1, pp. 37-41.
- DOOGH (J. Cl.) - 1959 - A General theory of the Unit hydrograph. *Journ. of Geophys. Res.*, vol. 64, n° 2.
- EAGLESON (P. S.) - 1970 - *Dynamic Hydrology*, Mac Graw-Hill, New York.
- FABOUMY (L.) - 1962 - Travaux d'assainissement de la ville de Cotonou. Note de calcul des collecteurs. Ministère des T.P. Cotonou.
- HALME (A.) and ORAYA (J.) - 1972 - Generalized polynomial operators for non-linear systems analysis. *Transacion on automatic Control*, pp. 225-258, April 1972.
- IKOUNGA (M.) - 1976 - Les modèles d'écoulement en hydrologie urbaine. *Mémoire D.E.A.* Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- ISHIHARA (T.) - 1971 - Transformation system in flood runoff phenomena. Proc. U.S.A. Japan bilateral seminar in hydrology. *Water Res. Public.*, Fort-Collins, Colorado.
- LEMONTE (L.) et CRUETTE (J.) - 1974 - Adaptation de la formule de Caquot aux régimes des régions intertropicales. Société hydrotechnique de France. XIII<sup>e</sup> Journée de l'Hydraulique, Paris.
- MAHMOOD (K.) and YEVJEVICH (V.) - edit. 1975 - Unsteady flow in open channel. *Water Res. Public.* Fort Collins, Colorado.
- MORIL-SEYTOUX (H. J.) - 1973 - Pour une théorie modifiée de l'infiltration. 2<sup>e</sup> partie : Comment ? *Ch. ORSTOM, sér. Hydrol.*, vol. X, n° 3.
- MORIL-SEYTOUX (H. J.) - 1975 - Derivation of equation for rainfall infiltration. *J. Hydrol.* 33 : 203-219.
- MUZIK (L.) - 1974 - State variable model of overland flow, *J. Hydrol.* 22 : 347-364.
- REMENTERAS (G.) - 1970 - *L'Hydrologie de l'ingénieur Eyrolles*, édit., Paris.
- SMITH (R. E.) and WOOLHISER (D. A.) - 1971 - Mathematical simulation of infiltration. *Hydrologic papers*, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.
- WOODING (R. A.) - 1965 - A Hydraulic model for the catchment stream problem. Part I : Kinematic wave theory. *J. Hydrol.* 3 : 254-267.
- WOOLHISER (D. A.) - 1975 - Simulation of unsteady overland flow. In *Unsteady flow in open channels*, vol. II. Edited by K. Mahmood and V. Yevjevich, *Water Res. Publ.* Fort-Collins, Colorado.
- WOOLHISER (D. A.) and LICCETT - 1967 - Unsteady one dimensional flow over a plane. Quoted by Eagleson P.S., 1970.

ANNEXE A - 4

A GENERALIZED KINEMATIC APPROACH  
TO BASIN MODELLING.

IN "HYDROLOGICAL FORECASTING - ACTES DU  
COLLOQUE D'OXFORD , AVRIL 1980 :  
IAHS - AISH , PUBL. N°129 PP. 105-114."

## A generalized kinematic approach to basin modelling

ABEL AFOUDA National University of Benin, Cotonou, Benin

**Abstract.** The main observation stemming from hydrological forecasting practices is that rainfall-runoff transformation in a basin involves three main processes: the production process, the transformation process, and the propagation process. This paper presents a theoretical hydrodynamical analysis of the rainfall-runoff transformation process. A production function  $Z(\theta)$  which describes the soil water movement in the unsaturated zone and accounts for evaporation is introduced. The transformation equations are obtained by coupling overland and underground flow. These equations form a lumped kinematic approach which is solved analytically, while the solution is obtained in the form of integral series. This is a theoretical validation of the Volterra series representation of the rainfall-runoff transformation process.

### Approche cinématique généralisée pour la modélisation des bassins

**Résumé.** L'observation principale que l'on peut faire sur les pratiques de prévisions hydrologiques est que la transformation pluie-débit dans un bassin nécessite trois opérations principales: le processus de production, le processus de transformation et le processus de propagation. Cette communication présente une analyse hydrodynamique théorique de processus de transformation pluie-débit. Une fonction de production  $Z(\theta)$  qui décrit les mouvements de l'eau dans le sol dans la zone non saturée est présentée par l'auteur. Les équations de transformation sont obtenues en couplant l'écoulement à la surface du sol et l'écoulement souterrain. Ces équations constituent une approche globale cinématique dont la solution est analytique, la solution est obtenue sous la forme de séries intégrales. C'est une validation théorique de la représentation par des séries de Volterra du processus de transformation pluie-débit.

## INTRODUCTION

Because the relation between rainfall and runoff is one of the most important problems in hydrology, it has been the subject of many studies in recent years. There is available in the hydrological literature a wide spectrum of reasonably accurate mathematical models for rainfall-runoff modelling. These models have been presented and widely commented on by Dooge (1973). On the one hand most of these models were lumped and did not give any information about the physics of the transformation process involved. On the other hand, most of the physics-based models considered separately overland flow and underground flow.

Nevertheless, the main idea which stems from hydrological practice is that the transformation of rainfall into runoff in a basin practice involves three main processes:

(1) *The production process.* The action of the unsaturated zone which accounts for evaporation and evapotranspiration and divides the resulting rainfall event into two components (overland and underground).

(2) *The transformation process.* The process by which the amount of rainfall volumes for the overland component and the underground component are transformed into runoff.

(3) *The propagation process.* The process of the flood wave travelling downstream.

Following these main ideas, this paper presents a hydrodynamic model which is an attempt to bring out the essential unity underlying the many methods that have been used in developing storm water models.

## THE PRODUCTION PROCESS

In a previous paper, a parameter  $Z(\theta)$  was introduced (Afouda, 1978a). This parameter which depends on the rainfall intensity, the antecedent precipitation and evaporation and the soil properties, is the main production factor in a basin, and was derived as follows.

Let  $I(t)$  be the rainfall intensity,  $E(t)$  the evaporation flux in the basin and  $Q(t)$  the discharge at the basin outlet. Defining

$$P(t) = I(t) - E(t) \quad (1)$$

and

$$X(t) = \int_{t_0}^t (P(\xi) - Q(\xi)) d\xi \quad (2)$$

then  $X(t)$  is the total volume of rainfall available at time  $t$  for overland and underground transformation. Let now  $X_s$  and  $X_u$  be the volume of rainfall, not yet discharged from the basin and thus in surface and subsurface storage, then

$$X_s = [1 - Z(\theta)] X \quad (3)$$

and

$$X_u = [Z(\theta)] X \quad (4)$$

On the other hand, conservation of mass yields

$$X = X_s + X_u \quad (5)$$

It appears from these relations that the estimation of  $Z(\theta)$  involves the estimation of the infiltrated rainfall volume. This can be done by either solving the traditional Richard's equation or by using the newly developed two-phase flow theory (Morel-Seytoux, 1976).

If  $r(t)$  is the infiltration rate and  $q_u(t)$  is the output from the underground sub-system, then

$$Z(\theta) = \int_{t_0}^t [r(\xi) - q_u(\xi)] d\xi / \int_{t_0}^t [P(\xi) - Q(\xi)] d\xi \quad (6)$$

It can be seen that for a given rainfall event,  $Z(\theta)$  varies with the infiltration rate and the intensity of the storm.

## THE TRANSFORMATION PROCESS

The transformation process involves first overland flow, i.e. a rough surface flow as described by Afouda (1979), interflow as described by Ishihara (1971) and then groundwater flow resulting from groundwater recharge.

**Overland flow**

Let  $h_1$  be the depth of the rough surface flow,  $h_2$  the depth of the interflow, and assume that the rough surface flow and interflow have the same direction. If  $V_1$  and  $V_2$  are the local velocity for rough surface flow and the apparent velocity for interflow, and  $q_1$  and  $q_2$  are the corresponding discharges, then overland flow can be described by the partial differential equations of gradually varied unsteady flow, known as the

## THE PRODUCTION PROCESS

In a previous paper, a parameter  $Z(\theta)$  was introduced (Afouda, 1978a). This parameter which depends on the rainfall intensity, the antecedent precipitation and evaporation and the soil properties, is the main production factor in a basin, and was derived as follows.

Let  $I(t)$  be the rainfall intensity,  $E(t)$  the evaporation flux in the basin and  $Q(t)$  the discharge at the basin outlet. Defining

$$P(t) = I(t) - E(t) \quad (1)$$

and

$$X(t) = \int_{t_0}^t (P(\xi) - Q(\xi)) d\xi \quad (2)$$

then  $X(t)$  is the total volume of rainfall available at time  $t$  for overland and underground transformation. Let now  $X_s$  and  $X_u$  be the volume of rainfall, not yet discharged from the basin and thus in surface and subsurface storage, then

$$X_s = [1 - Z(\theta)] X \quad (3)$$

and

$$X_u = [Z(\theta)] X \quad (4)$$

On the other hand, conservation of mass yields

$$X = X_s + X_u \quad (5)$$

It appears from these relations that the estimation of  $Z(\theta)$  involves the estimation of the infiltrated rainfall volume. This can be done by either solving the traditional Richard's equation or by using the newly developed two-phase flow theory (Morel-Seytoux, 1976).

If  $r(t)$  is the infiltration rate and  $q_u(t)$  is the output from the underground subsystem, then

$$Z(\theta) = \int_{t_0}^t [r(\xi) - q_u(\xi)] d\xi / \int_{t_0}^t [P(\xi) - Q(\xi)] d\xi \quad (6)$$

It can be seen that for a given rainfall event,  $Z(\theta)$  varies with the infiltration rate and the intensity of the storm.

## THE TRANSFORMATION PROCESS

The transformation process involves first overland flow, i.e. a rough surface flow as described by Afouda (1979), interflow as described by Ishihara (1971) and then groundwater flow resulting from groundwater recharge.

**Overland flow**

Let  $h_1$  be the depth of the rough surface flow,  $h_2$  the depth of the interflow, and assume that the rough surface flow and interflow have the same direction. If  $V_1$  and  $V_2$  are the local velocity for rough surface flow and the apparent velocity for interflow, and  $q_1$  and  $q_2$  are the corresponding discharges, then overland flow can be described by the partial differential equations of gradually varied unsteady flow, known as the

St Venant equations:

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial x} = P_s(x, t) \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial t} + U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + g \frac{\partial H_s}{\partial x} = g(I_0 - J) - P_s \frac{H_s}{U_s} \quad (8)$$

where  $P_s = P(t) - r(t)$ ;  $q_s = q_1 + q_2$  is the total discharge from overland flow;  $H_s = h_1 + h_2$  is the local depth;  $U_s$  is an equivalent velocity:

$$U_s = V_1 \left(1 - \frac{h_2}{H_s}\right) + V_2 \frac{h_2}{H_s}$$

$I_0$  is the slope of the basin and  $J$  is a generalized friction slope and is evaluated from the following considerations.

Assume for the rough surface flow that roughness, plant leaves and stones are uniformly distributed over a length  $L_0$ , then if a drag coefficient is defined by

$$C_1 = L_0 \eta / R_*^{m_0} \quad (9)$$

$\eta$  will characterize the basin surface and  $m_0$  will be a coefficient varying from 1 to 0 as flow varies slowly from laminar to turbulent. The friction slope for the rough surface flow may be evaluated from (Afouda, 1979):

$$J_1 = (1/C^2 R + C_1/2g) V_1^2 \quad (10)$$

where  $C$  is the Chezy coefficient,  $R = h_1$  is the hydraulic radius and  $V_1$  is the local water velocity as defined previously. Though this formulation imposes a specific distribution of the roughness, it may serve as a valid approximation of the friction slope over a vegetated surface.

The friction slope for the interflow may be evaluated from porous medium theory (Bear, 1972). One obtains

$$J_2 = \frac{1-p_0}{p_0^3} \cdot \frac{\lambda}{24g\beta d_0} \cdot C_D V_2^2 \quad (11)$$

where  $p_0$  is the porosity of the porous surface stratum;  $\beta$  is a coefficient which accounts for the geometry of the grains;  $d_0$  is the average diameter of the grain;  $\lambda$  is a coefficient accounting for the effect of neighbouring grains;  $C_D$  is the drag coefficient in the sense of Stokes;  $V_2$  is the apparent velocity.

Using equations (10) and (11) to calculate  $U_s^2$ , and assuming the Darcy-Weisbach resistance law to be valid one obtains an analytic expression for a generalized friction slope

$$J = (\Gamma/8gH_s) U_s^2 \quad (12)$$

where  $\Gamma$  is the generalized friction factor (Afouda, 1979):

$$\begin{aligned} \Gamma = 8gH_s \left\{ \left( \frac{2gC^2 h_1}{2g + C_1 C^2 h_1} \right) \left( 1 - \frac{h_2}{H_s} \right)^2 + \frac{24g\beta d_0 p_0^3}{\lambda(1-p_0)C_D} \cdot \left( \frac{h_2}{H_s} \right)^2 \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{2gC^2 h_1}{2g + C_1 C^2 h_1} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{24g\beta d_0 p_0^3}{\lambda(1-p_0)C_D} \right)^{1/2} \cdot \left( 1 - \frac{h_2}{H_s} \right) \cdot \frac{h_2}{H_s} \right\}^{-1} \quad (13) \end{aligned}$$

## The kinematic relation

Various simplified forms of the St Venant equation are generally adopted to describe the overland transformation process. Most of the simplifying assumptions are based on the personal judgement of individual modellers and thus reflect only a small portion of hydrological reality. The most coherent physics-based theory elaborated for the purposes of rainfall-runoff analysis is the kinematic approximation. The fundamentals of this theory have been widely described (Wooding, 1965; Eagleson, 1970; Woolhiser, 1975). For smooth surface flow (Chezy's flow) Woolhiser and Liggett (1967) introduced a kinematic number

$$K_0 = I_0 L_0 / H_0 F_{r0}^2 \quad (14)$$

where  $L_0$  is a reference length of the plane,  $I_0$  is the basin slope,  $H_0$  is the normal depth and  $F_{r0}^2 = V_0^2 / g H_0$  the corresponding Froude number for a normal velocity  $V_0$ . If  $K_0 > 10$ , the kinematic approximation is valid and the dynamic equation (8) may be used in the Darcy-Weisbach form. When a rough surface flow is considered and if the roughness is described by the drag coefficient  $C_1$ , the kinematic coefficient is obtained in the form (Afouda, 1979).

$$K_1 = L_0 \eta / 2 R_e^{m_0} + K_0 \quad (15)$$

For  $K_1 > L_0 \eta / 2 R_e^{m_0} + K_0$ , a unique relation between depth and velocity can be adopted, then the dynamic equation is used in the form:

$$U_s^2 = (8g I_0 / \Gamma) H_s \quad (16)$$

Since the friction factor is a function of depth, a coefficient  $\alpha(H_s)$  can be defined:

$$\alpha(H_s) = (8g I_0 / \Gamma (H_s))^{1/2} \quad (17)$$

then the discharge is expressed as a unique relation of depth:

$$q_s = \alpha(H_s) H_s^{3/2} = \psi(H_s) \quad (18)$$

This approximation, combined with the continuity equation, provides the distributed kinematic equation for overland flow.

Now, considering the distributed parameter  $P_s(x, t)$  and  $q_s(x, t)$  to be lumped into a finite number of input and output variables respectively  $p_{si}$  and  $q_{si}$  (where  $i = 1, 2, \dots, n$ ) (Fig. 1). For each pair of input and output the continuity equation is

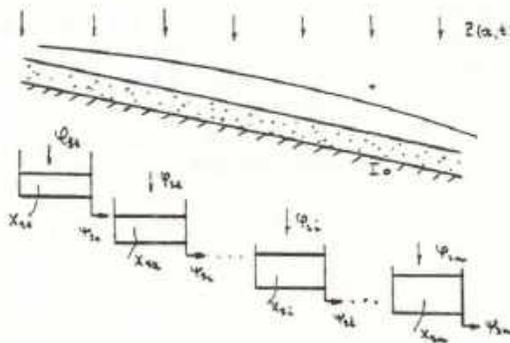


FIGURE 1. Definition sketch of overland flow simulation by interacting reservoirs.

## The kinematic relation

Various simplified forms of the St Venant equation are generally adopted to describe the overland transformation process. Most of the simplifying assumptions are based on the personal judgement of individual modellers and thus reflect only a small portion of hydrological reality. The most coherent physics-based theory elaborated for the purposes of rainfall-runoff analysis is the kinematic approximation. The fundamentals of this theory have been widely described (Wooding, 1965; Eagleson, 1970; Woolhiser, 1975). For smooth surface flow (Chezy's flow) Woolhiser and Liggett (1967) introduced a kinematic number

$$K_0 = I_0 L_0 / H_0 F_{r0}^2 \quad (14)$$

where  $L_0$  is a reference length of the plane,  $I_0$  is the basin slope,  $H_0$  is the normal depth and  $F_{r0}^2 = V_0^2 / g H_0$  the corresponding Froude number for a normal velocity  $V_0$ . If  $K_0 > 10$ , the kinematic approximation is valid and the dynamic equation (8) may be used in the Darcy-Weisbach form. When a rough surface flow is considered and if the roughness is described by the drag coefficient  $C_1$ , the kinematic coefficient is obtained in the form (Afouda, 1979).

$$K_1 = L_0 \eta / 2 R_0^{m_0} + K_0 \quad (15)$$

For  $K_1 > L_0 \eta / 2 R_0^{m_0} + K_0$ , a unique relation between depth and velocity can be adopted, then the dynamic equation is used in the form:

$$U_s^2 = (8g I_0 / \Gamma) H_s \quad (16)$$

Since the friction factor is a function of depth, a coefficient  $\alpha(H_s)$  can be defined:

$$\alpha(H_s) = (8g I_0 / \Gamma(H_s))^{1/2} \quad (17)$$

then the discharge is expressed as a unique relation of depth:

$$q_s = \alpha(H_s) H_s^{3/2} = \psi(H_s) \quad (18)$$

This approximation, combined with the continuity equation, provides the distributed kinematic equation for overland flow.

Now, considering the distributed parameter  $P_s(x, t)$  and  $q_s(x, t)$  to be lumped into a finite number of input and output variables respectively  $p_{si}$  and  $q_{si}$  (where  $i = 1, 2, \dots, n$ ) (Fig. 1). For each pair of input and output the continuity equation is

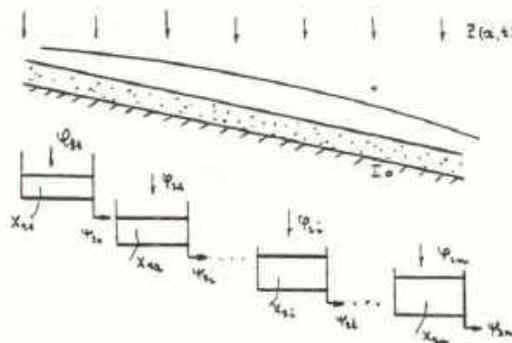


FIGURE 1. Definition sketch of overland flow simulation by interacting reservoirs.

considered in the hydrological form by integrating the continuity equation over a corresponding basin reach to obtain:

$$\begin{aligned} \frac{dX_{s1}}{dt} &= \phi_{s1} - \psi_{s1} \\ \frac{dX_{s2}}{dt} &= \phi_{s2} - (\psi_{s2} - \psi_{s1}) \\ \frac{dX_{sn}}{dt} &= \phi_{sn} - (\psi_{sn} - \psi_{s(n-1)}) \end{aligned} \tag{19}$$

where

$$\begin{aligned} X_{si} &= \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_{si}(x, t) dx; \quad \psi_{si} - \psi_{s(i-1)} = -\frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial q_{si}}{\partial x_i} dx \\ \phi_{si} &= \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{si}(x, t) dx \end{aligned}$$

In matrix notation (19) can be written in the form:

$$\frac{dX_s}{dt} = \phi_s - \bar{\psi}_s \tag{20}$$

where  $\bar{\psi}_s = [\psi_{si} - \psi_{s(i-1)}]$ , and (18) transforms into

$$\bar{\psi}_s = \bar{\psi}(X_s(t), t) \tag{21}$$

Approximating (21) by the Taylor series in the neighbourhood of  $X_s(t_0) = 0$  and combining with (20) yields the following differential equation for overland flow:

$$\frac{dX_s}{dt} = \sum_{j=1}^m A_{sj} X_{sj} + \phi_s \tag{22}$$

where

$$\begin{aligned} \frac{dX_s}{dt} &= \begin{bmatrix} \frac{dX_{s1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dX_{sn}}{dt} \end{bmatrix}; \quad X_{sj} = \begin{bmatrix} X_{s1}^j \\ \vdots \\ X_{sn}^j \end{bmatrix}; \quad \phi_s = \begin{bmatrix} \phi_{s1} \\ \vdots \\ \phi_{sn} \end{bmatrix} \\ A_{sj} &= \begin{bmatrix} -a_{1j} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{1j} & -a_{2j} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(i-1)j} & -a_{ij} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)j} & -a_{nj} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

with  $a_{ij}$ , the  $j$ th Taylor series coefficient for the reach  $i$ .

## Groundwater flow

The basic equations of groundwater flow are well established (Bear, 1972). For two-dimensional incompressible unconfined flow in a saturated porous medium, the continuity and the dynamic equations can be reduced to the following (Eagleson, 1970):

$$\frac{\partial H_u}{\partial t} + \frac{\partial q_u}{\partial x} = P_u \quad (23)$$

$$q_u = \alpha_u H_u \quad (24)$$

where  $H_u = \epsilon H'_u$ ;  $H'_u$  is the depth of the flow,  $\epsilon$  is the porosity of the medium,  $q_u$  underground discharge contribution to the runoff,  $\alpha_u = k_0 g I_u / \epsilon \nu_0$  with  $k_0$  the intrinsic permeability,  $I_u$  the local slope of the phreatic surface,  $\nu_0$  the viscosity of the fluid,  $P_u = r(t)$  is the apparent vertical velocity with which water enters the system across the phreatic surface.

Using now an approximation similar to that used for overland flow, a linear vector differential equation is obtained

$$\frac{dX_u}{dt} = A_u X_u + \phi_u \quad (25)$$

$$\Psi_u = A_u X_u \quad (26)$$

with

$$X_{ui} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_u(x, t) dx$$

$$\phi_{ui} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_u(x, t) dx$$

and

$$A_u = \begin{bmatrix} -\alpha_{u1} & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \alpha_{u1} & -\alpha_{u2} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \alpha_{u(i-1)} & \alpha_{ui} & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \alpha_{u(n-1)} & -\alpha_{un} \end{bmatrix}$$

## Coupling overland and underground flow

By assuming that for each reach, overland flow and underground flow can be coupled through the production function  $Z(\theta)$  (Afouda, 1976, 1978a, b) (Fig. 2) one obtains

$$\frac{dX}{dt} = \sum_{j=1}^m A_j X_j + \phi \quad (27)$$

$$\Psi = \sum_{j=1}^m A_j X_j \quad (28)$$

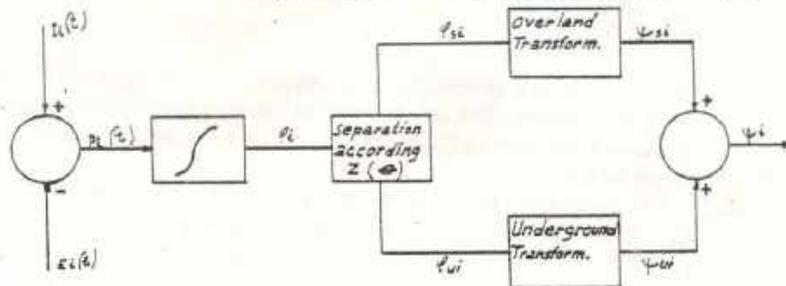


FIGURE 2. Coupling overland and underground flow.

where

$$A_j = \begin{cases} Z(\theta)A_u + [1 - Z(\theta)]A_{sj} & \text{for } j = 1 \\ [1 - Z(\theta)]A_{sj} & \text{for } j > 2 \end{cases}$$

Equations (27) and (28) are a lumped kinematic approach and describe the transformation process in the basin. In terms of systems approach theory, (27) is a nonlinear vector differential equation which describes the state  $X(t)$  of the considered basin and equation (28) expresses the output as a nonlinear function of this state. Equations (27) and (28) can be solved using the local inverse theorem as presented by Halme and Orava (1972) and applied to hydrological systems (Afouda, 1974, 1978a, b, 1979). When appropriate initial conditions are found for a time invariant system, the linear component of the solution of the state equation can be given in the forms

$$X_L(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t - \xi) \phi(\xi) d\xi \tag{29}$$

where  $X_L(t)$  is a column matrix, an element of which has the form

$$X_{L\nu}(t) = \sum_{l=1}^{\nu} \int_0^t \mathcal{K}_{l,1}(t - \xi) \phi_l(\xi) d\xi \tag{30}$$

and

$$\mathcal{K}_{l,1}(t - \xi) = \sum_{i=l}^{\nu} \prod_{i=l}^{i-1} A_{i1} \exp[-A_{i1}(t - \xi)] \tag{31}$$

Now, a general solution for (27) is obtained from the knowledge of equation (29) which expresses the linear component, the vector column  $X_d$  is formed and the  $\nu$ th element is obtained in the following form:

$$X_{j\nu}(t) = \sum_{i_1=1}^{\nu} \dots \sum_{i_j=1}^{\nu} \int_0^t \dots \int_0^t \mathcal{K}_{i_1, \dots, i_j}(t, \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_j}) \times \phi_{i_1}(\xi_{i_1}) \dots \phi_{i_j}(\xi_{i_j}) d\xi_{i_1} \dots d\xi_{i_j} \tag{32}$$

When this expression is used to calculate  $\psi$ , the resulting equation is a column matrix, elements of which can be rearranged in the form of an integral series:

$$\psi_k(t) = \sum_{\nu=1}^k \left[ \sum_{i_1=1}^k \dots \sum_{i_j=1}^k \int_0^t \dots \int_0^t \mathcal{K}_{\nu, i_1, \dots, i_j}(t, \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_j}) \times \phi_{i_1}(\xi_{i_1}) \dots \phi_{i_j}(\xi_{i_j}) d\xi_{i_1} \dots d\xi_{i_j} \right] \tag{33}$$

## DISCUSSION

Equation (33) is a generalized systems approach solution for the rainfall-runoff transformation process. The advantage of a Volterra series representation has been discussed elsewhere (Afoua, 1978a). Only a theoretical aspect of applicability is presented here.

The parameters involved in the mathematical formulation have been shown to have precise physical meaning. The accuracy in estimating the basin behaviour is of course related to the approximation made on these parameters, in particular  $Z(\theta)$ :

If  $Z(\theta) = 1$ ,  $\phi(t) > 0$ , the basin response takes the form of underground contribution.

If  $Z(\theta) = 1$ ,  $\phi(t) < 0$  equation (27) will describe the evolution of soil moisture at the soil surface.

If  $Z(\theta) = 0$ ,  $\phi(t) > 0$  then equation (27) is a generalized reservoir approach to the overland transformation process.

The accuracy of this approach depends on the parameter  $n$  which represents the dimension of the fundamental matrix related to equation (27) and parameter  $m$  which is the number of terms in the Taylor series development of (21).

When  $n = 1$ ,  $m = 1$ , the single linear reservoir approach is obtained which is widely used in hydrology.  $\mathcal{K}(t)$  reduces to

$$\mathcal{K}(t) = A_{11}(t) \exp \left[ - \int_0^t A_{11}(\xi) d\xi \right] \quad (34)$$

for time varying model, and to a simple exponential expression when  $A_{11} = \text{constant}$ . Coefficient  $A_{11}$  is often taken as an empirical coefficient. The generalized approach presented here gives the physical meaning of this coefficient. When the generalized friction factor is used for the calculation, the following form is obtained:

$$A_{11} = f(I_0, \Gamma_0, C_1) \quad (35)$$

If  $n > 2$ ,  $m = 1$  a cascading linear reservoir approach is obtained. This case has been investigated in the laboratory by Musik (1974). If  $A = \text{constant}$ , and  $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), the Dooge approach (1959) is obtained. When the Dooge boundary conditions are used,  $\mathcal{K}(t)$  will have the following form

$$\mathcal{K}(t) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{a_i} \right)^{n-2} \left[ \prod_{v=1}^n \left( \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_v} \right) \right]^{-1} \exp(-a_i t) \quad (36)$$

In the particular case of the Nash condition  $a_{11} = a_{21} = \dots = a$

$$\mathcal{K}(t) = \frac{a}{(n-1)!} (at)^{n-1} \exp(-at) \quad (37)$$

If  $n = 1$ ,  $m > 2$  a single nonlinear reservoir approach is obtained. The solution for this approach has been discussed elsewhere (Afoua, 1978a, b) and has the form of a Volterra series.

The case when  $n \rightarrow \infty$ ,  $m < \infty$  is of interest. Considering the linear component for the time invariant case

$$X_{LH}(t) = \sum_{v=1}^k \int_0^t \mathcal{K}_{v1}(t-\xi) \phi_v(\xi) d\xi \quad (38)$$

It can be easily seen from the definition of the system that if  $k \rightarrow \infty$  the linear component will tend towards

$$H(x, t) = \int_0^t \mathcal{H}_\infty(x, t - \xi) p(x, \xi) d\xi \quad (39)$$

the task then is to evaluate  $\mathcal{H}_\infty(x, t - \xi)$ . From the definition of the linear component

$$\mathcal{H}_\infty(x, t - \xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k \prod_{l=1}^{k-1} a_{i_l} \exp[-a_{i_l}(t - \xi)] \quad (40)$$

As  $k \rightarrow \infty$ ,  $a_{i_l}$  tends towards a fixed value  $a_1$  and Nash's condition is obtained. Thus the internal summation equals

$$\frac{1}{(k-1)!} (a_1 t)^{k-1} \exp(-a_1 t) \quad (41)$$

Taking now

$$\mathcal{H}_\infty(x, t - \xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{1}{(k-1)!} (a_1 t)^{k-1} \exp(-a_1 t) \quad (42)$$

$\mathcal{H}_\infty(x, t - \xi)$  is found to be constant everywhere and equals the Heaviside function

$$\mathcal{H}_\infty(x, t - \xi) = u(x, t - \xi) \quad (43)$$

Hence the linear component is

$$H(x, t) = \int_0^t u(x, t - \xi) p(x, \xi) d\xi \quad (44)$$

The resulting discharge has the form:

$$Q(x, t) = \sum_{j=1}^m \int_0^t \dots \int_0^t \mathcal{H}_j(x, t - \xi) \prod_{l=1}^j p(x, \xi_l) d\xi_1 \dots d\xi_j \quad (45)$$

where

$$\mathcal{H}_j(x, t - \xi) = \int_0^t j a_1 \prod_{l=1}^{j-1} u(x, t - \xi_l) d\xi$$

Now derive the solution from the distribution equation

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = P(x, t) \quad (46)$$

$$Q = \sum_{j=1}^m a_j H^j \quad (47)$$

The total differential of  $H(x, t)$  is

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} \quad (48)$$

which comparing with (46) yields

$$\frac{dH}{dt} = p(x, t) \quad (49)$$

$$U = \sum_{j=1}^m j a_j H^{j-1} \quad (50)$$

It can be easily seen from the definition of the system that if  $k \rightarrow \infty$  the linear component will tend towards

$$H(x, t) = \int_0^t \mathcal{K}_\infty(x, t - \xi) p(x, \xi) d\xi \quad (39)$$

the task then is to evaluate  $\mathcal{K}_\infty(x, t - \xi)$ . From the definition of the linear component

$$\mathcal{K}_\infty(x, t - \xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \sum_{t=1}^k \prod_{i=1}^{k-1} a_i \exp[-a_i(t - \xi)] \quad (40)$$

As  $k \rightarrow \infty$ ,  $a_i$  tends towards a fixed value  $a_1$  and Nash's condition is obtained. Thus the internal summation equals

$$\frac{1}{(k-1)!} (at)^{k-1} \exp(-a_1 t) \quad (41)$$

Taking now

$$\mathcal{K}_\infty(x, t - \xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^k \frac{1}{(k-1)!} (a_1 t)^{k-1} \exp(-a_1 t) \quad (42)$$

$\mathcal{K}_\infty(x, t - \xi)$  is found to be constant everywhere and equals the Heaviside function

$$\mathcal{K}_\infty(x, t - \xi) = u(x, t - \xi) \quad (43)$$

Hence the linear component is

$$H(x, t) = \int_0^t u(x, t - \xi) p(x, \xi) d\xi \quad (44)$$

The resulting discharge has the form:

$$Q(x, t) = \sum_{j=1}^m \int_0^t \dots \int_0^t \mathcal{H}_j(x, t - \xi) \prod_{i=1}^j p(x, \xi) d\xi_1 \dots d\xi_j \quad (45)$$

where

$$\mathcal{H}_j(x, t - \xi) = \int_0^t j a_j \prod_{i=1}^{j-1} u(x, t - \xi) d\xi$$

Now derive the solution from the distribution equation

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} = P(x, t) \quad (46)$$

$$Q = \sum_{j=1}^m a_j H^j \quad (47)$$

The total differential of  $H(x, t)$  is

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial x} \quad (48)$$

which comparing with (46) yields

$$\frac{dH}{dt} = p(x, t) \quad (49)$$

$$U = \sum_{j=1}^m j a_j H^{j-1} \quad (50)$$

Solving equation (49) for  $H$  yields (44) and the resulting discharge can be easily deduced in the form of (45). Thus it is proved that when  $n \rightarrow \infty$  the generalized lumped solution tends towards the distributed solution of the kinematic wave theory.

If  $Z(\theta) = \text{constant} \neq 0$ ,  $\rho(t) > 0$ , for a given interval, we necessarily underestimate and overestimate the volume of infiltration for dry and wetted periods respectively. This is the reason why time invariant models, linear (linear reservoir, unit hydrograph) as well as nonlinear (nonlinear reservoirs, Volterra series) overestimate the low flow and underestimate the peak. The performance of the model could be improved if the values of  $Z(\theta)$  are considered for each appropriate subinterval.

## CONCLUSION

The process of flood wave formation from rainfall in a natural basin is one of the most important and most complex flow phenomena the engineer has to deal with. In this paper a theoretical physics-based model has been developed for the rainfall-runoff transformation process. The basic idea of the model is that rainfall-runoff transformation involves three main processes: production, transformation and propagation. A production function  $Z(\theta)$  has been proposed which determines the interaction of the major components. The transformation process is obtained by coupling overland flow and underground flow in a lumped form. The lumped equations have been proved to tend toward a distributed form when the dimension of the fundamental matrix of the system tends to infinity. Though the propagation process can be studied by the lumped St Venant equation, it is not analysed in detail here. It is believed that the stochastic extension of the approach developed in this paper will produce a more coherent theory of hydrological systems.

## REFERENCES

- Afoua, A. A. (1974) Contribution à l'étude des systèmes hydrologiques non-linéaires. Thèse de Doctorat; Université Paul Sabatier Toulouse, France.
- Afoua, A. A. (1976) Une méthode de simulation pour le fleuve Niger. In *Hydrology in Africa - 1976* (Proceedings of the Meeting of Experts on Hydrology Problems in Africa, Addis-Ababa).
- Afoua, A. A. (1978a) A unified approach to watershed modelling. *Nordic Hydrol.* 9, no. 3/4, 162-172.
- Afoua, A. A. (1978b) A state approach to watershed modelling. *Report no. 7803-a, International Centre of Hydrology 'Dino Tonini', University of Padova, Italy.*
- Afoua, A. A. (1979) Hydrodynamic watershed modelling. *Report no. 79 TA, International Centre of Hydrology 'Dino Tonini', University of Padova, Italy.*
- Bear, J. (1972) *Dynamics of Fluids in Porous Media*: American Elsevier, New York, USA.
- Dooge, J. C. I. (1959) A general theory of the unit hydrograph. *J. Geophys. Res.* 64, no. 2.
- Dooge, J. C. I. (1973) The linear theory of hydrologic systems. *US Department of Agriculture, Tech. Bull. no. 1463*: US Government Printing Office, Washington, DC, USA.
- Eagleson, P. S. (1970) *Dynamic Hydrology*: McGraw-Hill, New York, USA.
- Haime, A. and Orava, J. (1972) Generalised polynomial operator for non-linear system analysis. *Inst. Elect. Electron. Engrs Trans. Automat. Control.*
- Ishihara, T. (1971) Transformation system in flood runoff phenomena. *Proceedings USA Japan Bilateral seminar on Hydrology*: Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA.
- Morel-Seytoux, H. J. (1976) Derivation of equations for rainfall infiltration. *J. Hydrol.* 31, no. 3/4, 203-219.
- Musik, I. (1974) State variable model of overland flow. *J. Hydrol.* 22, 347-364.
- Wooding, R. A. (1965) A hydraulic model for the catchment stream problem. Part I - kinematic wave theory. *J. Hydrol.* 3, 254-267.
- Woolhiser, D. A. (1975) Simulation of unsteady overland flow. In *Unsteady Flow in Open Channels*, vol. II (edited by K. Mahmood and V. Yevjevich): Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA.
- Woolhiser, D. A. and Liggert, J. A. (1967) Unsteady one-dimensional flow over a plane: the rising hydrograph. (Quoted by Eagleson, 1970.)

ANNEXE A - 5

QUELQUES ASPECTS CLIMATOLOGIQUES  
DE L'ELABORATION DES SYSTEMES DE  
DRAINAGE EN MILIEU URBAIN.

IN "ACTES DE LA CONFERENCE SUR LE CLIMAT  
EN AFRIQUE", TENUE A ARUSHA (TANZANIE)  
JANVIER 1982. PUBL. WHO/OMM/N°596  
SECRETARIAT DE L'OMM , GENEVE - SUISSE .

QUELQUES ASPECTS CLIMATOLOGIQUES DE L'ELABORATION DES SYSTEMES  
DE DRAINAGE EN MILIEU URBAIN

par

AFOUDA A. Abel  
Université Nationale du Bénin  
Cotonou (Rep. Pop. du Bénin)

I. INTRODUCTION

Le développement rapide des centres urbains est aujourd'hui un phénomène mondial. Il a généralement pour conséquence une modification radicale des conditions de ruissellement et du régime des cours d'eau drainant le terrain bâti. Mais l'impact des facteurs climatiques dont le plus marquant est celui de la précipitation dépend de la situation géographique et du niveau de développement du pays concerné ainsi que de l'importance économique de la ville.

En effet, les influences physiques et directes de la précipitation se traduisent d'une part, par les inondations qui affectent à la fois la sécurité des citoyens et l'économie du pays, et d'autre part, par l'érosion des sols qui affecte, dans les zones de forte pente non imperméabilisée, les chaussées, et, souvent, la stabilité des édifices. Pour lutter contre ces effets néfastes de la précipitation, il faut consentir à des investissements élevés, afin de mettre en place des systèmes de drainage appropriés.

Dans nombre de pays en développement, et particulièrement dans la plupart des pays d'Afrique Tropicale, le niveau d'urbanisation des grandes agglomérations reste tragiquement insuffisant, le développement des infrastructures urbaines ne suivant pas directement l'occupation des sols. Cette situation rend très délicate l'élaboration des systèmes de drainage. L'utilisation des modèles classiques de transformation pluie-débit, inspirés par des conditions climatiques différentes de celles de l'Afrique tropicale et des conditions de ruissellement moins sévères, ne donne souvent pas les résultats escomptés.

Après une étude rapide des modèles classiques de transformation pluie-débit en milieu urbain, on examine la notion de pluie de projet et on présente un modèle théorique de ruissellement basé sur les équations fondamentales de l'hydrodynamique. L'interprétation déterministe de ce modèle montre qu'il généralise les modèles à réservoirs classiques. L'interprétation stochastique permet d'établir une relation probabiliste entre d'une part les précipitations et la fonction de transformation du bassin et, d'autre part entre la fonction de transformation et le débit à l'exutoire.

II. LES MODELES DE DRAINAGE EN MILIEU URBAIN

On distingue en général deux types de systèmes de drainage en milieu urbain : le système mixte et le système séparatif. Dans les deux cas, la principale difficulté réside dans le fait que le réseau doit être calculé en terme de risque de défaillance en raison de la nature aléatoire des précipitations. La recherche du débit maximal pluvial à évacuer ou de l'hydrogramme de crue de projet se fait à l'aide des modèles pluie-débit.

Les modèles pluie-débit, couramment utilisés dans la recherche du débit pluvial maximal ou de l'hydrogramme devant servir à l'établissement des projets d'assainissement, peuvent être classés en plusieurs catégories, sur la base des critères préfixés. (Dooge [7], Clarke [5]). Nous avons choisi de les classer suivant le fondement théorique mathématique auquel ils font appel. On distingue ainsi : les modèles empiriques (méthode rationnelle, méthode de Caquot) ; les modèles déterministes (modèles globaux, modèles à paramètres répartis) ; les modèles stochastiques (modèles ARMA).

$$Q(t) = \phi(t, t_0) Q_0 + \frac{1}{b_0} \int_{t_0}^t \phi(t - \tau) P(\tau) d\tau \quad (7)$$

avec  $\phi(t, t_0) = \exp \{ - (t - t_0) / b_0 \}$ .

On a montré, dans [1], que lorsque l'on considère la relation (5) sous la forme :

$$Q = \sum_{i=1}^k \alpha_i y^i \quad (8)$$

le débit de sortie s'obtient sous la forme des séries intégrales

$$Q(t) = \sum_{i=1}^k \int_0^t \dots \int_0^t \phi_i(\tau_1 \dots \tau_i) \prod_{l=1}^i (t - \tau_l) d\tau_1 \dots d\tau_i \quad (9)$$

Ici, les  $\phi_i$  sont des combinaisons appropriées d'exponentielles.

### b-Les modèles analytiques

Les modèles analytiques procèdent d'une conception différente. Ils consistent en effet à résoudre le problème inverse des problèmes (3) et (4). Dans sa formulation linéaire introduite par Sherman (Dooge [7]), on suppose que l'on peut déterminer à partir d'une série d'observations sur le terrain, la fonction  $\phi(t)$  correspondant à l'averse unitaire type. La connaissance de cette fonction appelée hydrogramme unitaire du bassin permet, par convolution linéaire avec une averse quelconque donnée, de connaître le débit à la sortie dudit bassin.

#### II.2.2. Les modèles à paramètres répartis

Le modèle à paramètres répartis couramment utilisé en hydrologie urbaine est basé sur les équations de St-Venant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = P(x, t) \quad (10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g (I_0 - J) - \frac{U p}{h} \quad (11)$$

Ici,  $P(x, t)$  représente la pluie nette ;  $h$  est la hauteur de l'écoulement sur le bassin ;  $U$  est sa vitesse,  $J$  - la perte de charge et  $g$  - l'accélération de la pesanteur ;  $Q$  et  $I_0$  étant définis comme précédemment.

Il n'existe malheureusement pas (à notre connaissance) de solution analytique simple pour le système d'équations (10) et (11). Cependant, dans le cas de l'écoulement de surface, des simplifications notables peuvent s'introduire dans l'équation dynamique (eq.11). Woolhiser et Liggett [8] ont montré que le critère théorique de simplification est le nombre cinématique  $K_0 = I_0 L_0 / H_0 F_0$ ,  $I_0$  étant la pente moyenne,  $L_0$  une longueur de référence dans le plan de l'écoulement,  $H_0$  - la hauteur de l'écoulement normal, et  $F_0$  le nombre de Froude de l'écoulement. Pour  $K_0 \geq 10$ , l'équation dynamique (11) peut s'écrire sous la forme :

$$Q(t) = \lambda h^v \quad (12)$$

où  $\lambda$  et  $v$  dépendent de la formule choisie pour exprimer les termes de résistance. En utilisant la méthode des caractéristiques, Wooding [21] et ensuite Woolhiser [22] ont montré que la solution du système d'équations (10) et (12), pour des conditions initiales appropriées, est donnée par :

$$Q(t) = \lambda (P t)^v$$

#### II.3. Les modèles stochastiques

Généralement, on rencontre en hydrologie, les modèles stochastiques sous la formulation ARMA (m,n) ou ses variantes. Le modèle ARMA (m,n) est décrit par la relation :

$$Q_t = \sum_{k=1}^m \omega_k Q_{t-k} + \sum_{k=1}^n \mu_k P_{t-k} + N_t \quad (13)$$

où  $\omega_k$  et  $\mu_k$  sont des coefficients du modèle et  $N_t$  est un terme de bruit. On ramène, après quelques transformations mathématiques, cette relation sous la forme suivante :

$$Q_t = \tilde{\lambda}^{-1}(B) \cdot \tilde{\rho}(B) P_t + \phi^{-1}(B) \psi(B) w_t \quad (14)$$

Dans cette relation, B désigne l'opérateur retard tel que  $BQ_t = Q_{t-1}$  ;  $B^m Q_t = Q_{t-m}$  ;  $\tilde{\lambda}(B)$ ,  $\tilde{\rho}(B)$ ,  $\phi(B)$  et  $\psi(B)$  sont des polynômes en B de degré respectif approprié  $m_i$  ( $i = 1, 4$ ) ;  $w_t$  est un terme de bruit, de variance  $\sigma_w^2$  et de moyenne nulle. La résolution du modèle stochastique consiste alors à trouver les paramètres :

$$\tilde{\lambda}, \tilde{\rho}, \phi, \psi \text{ et } \sigma_w^2$$

Pour conclure ce survol très rapide des différents modèles de transformation pluie-débit, il faudrait souligner que :

- les modèles empiriques, malgré les essais d'adaptation ne donnent toujours pas des résultats satisfaisants en milieu tropical. Leur utilisation conduit à sous estimer dangereusement le débit maximum possible pour une pluie de fréquence donnée ;
- les modèles stochastiques servent plutôt dans la gestion des grands bassins et dans la prédiction à court terme et s'adaptent mal au problème de transformation pluie-débit en milieu urbain: (O'Connell [14], Todidini et Bouillot [19], Szollosi Nagy et al [17]).
- les modèles déterministes pourraient donner des résultats meilleurs parce qu'ils considèrent le caractère dynamique du processus de transformation, (Débordes [6]). Mais ces modèles ne prennent pas en compte l'aspect stochastique attaché à l'information climatique. Les expériences récentes en hydrologie urbaine indiquent que les efforts s'orientent vers l'amélioration de ces modèles. A notre avis, ces efforts doivent consister d'abord à mieux appréhender la faiblesse des modèles déterministes vis à vis de l'information climatique et à porter donc sur la définition correcte de la pluie de projet.

### III. LA PLUIE DE PROJET

#### III.1. Aspects socio-économiques

Une définition correcte de la pluie de projet devrait se faire par un calcul économique, mettant en balance, les coûts des investissements nécessaires pour se protéger contre un phénomène de fréquence donnée et le coût des dégâts occasionnés par les eaux, en cas de dépassement du phénomène considéré. Ainsi, sur le plan économique, la question se pose en terme de risque que représente un débordement de réseau. Mais, dans le cas général, on éprouve de grandes difficultés à effectuer de telles mesures, car on évalue mal l'étendue des inondations et les effets physiques correspondant à un phénomène de fréquence donnée, et encore moins le coût des dégâts occasionnés. Dans nombre de cas, le risque encouru peut être uniquement une gêne temporaire apportée à la circulation pendant une durée relativement courte. Ce risque peut certainement être accepté avec une fréquence assez élevée. Dans d'autres cas, au contraire, la présence de zone de peuplement très dense impose, pour des raisons de sécurité, une protection contre les crues de fréquences assez rares et pour des questions de santé une protection contre toute inondation.

Il apparaît donc nettement que, pour un même centre urbain, le problème du choix de fréquence peut se poser différemment et il convient de déterminer pour chaque cas, les fréquences correspondant à l'optimum économique et sanitaire. Le choix de la fréquence décennale, couramment utilisée dans les pays d'Afrique d'expression française pour le calcul des systèmes d'assainissement en milieu urbain, pourrait bien ne correspondre à aucun optimum souhaité, surtout si l'on tient compte du caractère torrentiel de la pluie en milieu tropical.

#### III.2. Définition de la pluie de projet

Dans leur essai d'adaptation de la formule de Caquot aux régions intertropicales, Lemoine et Cruette [12] considèrent que l'intensité de la pluie décennale dans cette zone répond approximativement à la formule :

$$i_{mm/mn} = 7,5 t_{mn}^{-0,5} \quad (15)$$

pour les averses de durée inférieure à 90 minutes. L'utilisation de cette formule, malgré les corrections suggérées par les auteurs, ne permet pas d'améliorer la performance de la

formule de Caquot en milieu tropical.

Dans une étude statistique générale des averses exceptionnelles en Afrique Occidentale, Brunet-Moret [4] a montré que les précipitations journalières dans cette région s'ajustaient à une loi de distribution gamma incomplète, sauf dans les zones cotières. S'appuyant sur les travaux antérieurs de l'ORSTOM, (Rodier [15], Herbaud [10]), il montre que le diagramme d'intensité classique d'une averse moyenne ou forte se présente comme suit :

= une période préliminaire, très souvent absente ou de très courte durée, avec des intensités moyennes inférieures à 18 mm/heure ;

= le corps de la tornade à forte ou très forte intensité moyenne, 40 à 80 ou 100 mm/h, la durée de cette période est courte, parfois très courte, 5 à 20 minutes avec, généralement, un paroxysme de 5 minutes au moins qui peut atteindre 150 à 200 mm/h ou même plus. Cette pointe peut se dédoubler, auquel cas le corps de l'averse dure plus de 20 minutes ;

= la traîne de l'averse, à faible intensité, 15 à 20 mm/h au début, tombant vite en-dessous de 5 mm/h. La traîne dure généralement 1/2 heure à 2 heures.

Dans le cas d'une averse simple dans la journée, cet auteur propose les relations suivantes respectivement pour :

- la hauteur C de précipitation correspondant au corps de l'averse :

$$C_{\text{mm}} = 0,9 [P J - 5] \quad (16)$$

PJ étant la précipitation de la journée.

- la durée de ce corps de l'averse :

$$D_{\text{min}} = 14,9 (C + 1,82)^{1/3} - 18,2 \quad (17)$$

- les intensités classées du corps suivant le temps t en minutes :

$$i(t)_{\text{mm/h}} = 6 \left[ \frac{(D - t) + 18,2}{10,5} \right]^2 \quad (18)$$

- l'intensité maximale en 5 minutes autour de la pointe :

$$i_p_{\text{mm/h}} = 12,06 [C + 1,8]^{2/3} - 4,05 [1 + 1,8]^{1/3} + 0,45 \quad (19)$$

Pour obtenir l'hyétogramme à partir du graphique des intensités classées, Brunet-Moret propose un temps de montée en intensité de 8,8 minutes (quelle que soit la hauteur de ce corps) à croissance linéaire en intensité suivant le temps.

On montre par ailleurs (W M O n° 332, p.95) que si  $P_{T_r}$  est la précipitation maximale journalière de période de retour  $T_r$ , on peut l'exprimer par la relation :

$$P_{T_r} = P_n + \Lambda S_n \quad (20)$$

où  $P_n$  et  $S_n$  sont respectivement la moyenne et l'écart type de la série de n maxima annuels;  $\Lambda$  est une variable statistique qui varie avec les différentes distributions de fréquence auxquelles s'ajustent les valeurs extrêmes des données hydrologiques étudiées. Si on remplace dans cette relation  $P_{T_r}$  par la précipitation maximale observée et  $\Lambda$  par  $\Lambda_m$ , on trouve que  $\Lambda_m$  représente le nombre d'écart types qu'il faut ajouter à la moyenne  $P_n$  pour obtenir  $P_m$  :

$$P_m = P_n + \Lambda_m S_n \quad (21)$$

Si, avec cette formulation, on applique la méthode de Brunet-Moret pour le cas d'une seule averse dans la journée, on est conduit à l'expression suivante pour représenter l'hyétogramme de projet :

$$i(t)_{\text{mm/h}} = \bar{i}(t) + \sigma(t) \epsilon_{i(t)}(t) \quad (22)$$

où  $\bar{i}(t)$  représente l'hyétogramme moyen ;  $\sigma(t)$  est l'écart type instantané;  $\epsilon_{i(t)}(t)$  représente le nombre d'écart-types instantanés qu'il faut ajouter à la valeur instantanée de l'hydrogramme moyen pour avoir l'intensité réelle de la pluie observée. Du point de vue théorique, on montre (Jawzinski [11] p.48 et p.73) que  $\epsilon_{i(t)}(t)$  est un processus du mouvement brownien.

On admettra par extension qu'un processus hydrologique de fréquence donnée peut être décrit par une relation similaire à la relation (22). Cela revient à définir pour

formule de Caquot en milieu tropical.

Dans une étude statistique générale des averses exceptionnelles en Afrique Occidentale, Brunet-Moret [4] a montré que les précipitations journalières dans cette région s'ajustaient à une loi de distribution gamma incomplète, sauf dans les zones cotières. S'appuyant sur les travaux antérieurs de l'ORSTOM, (Rodier [15], Herbaud [10]), il montre que le diagramme d'intensité classique d'une averse moyenne ou forte se présente comme suit :

= une période préliminaire, très souvent absente ou de très courte durée, avec des intensités moyennes inférieures à 18 mm/heure ;

= le corps de la tornade à forte ou très forte intensité moyenne, 40 à 80 ou 100 mm/h, la durée de cette période est courte, parfois très courte, 5 à 20 minutes avec, généralement, un paroxysme de 5 minutes au moins qui peut atteindre 150 à 200 mm/h ou même plus. Cette pointe peut se dédoubler, auquel cas le corps de l'averse dure plus de 20 minutes ;

= la traîne de l'averse, à faible intensité, 15 à 20 mm/h au début, tombant vite en-dessous de 5 mm/h. La traîne dure généralement 1/2 heure à 2 heures.

Dans le cas d'une averse simple dans la journée, cet auteur propose les relations suivantes respectivement pour :

- la hauteur C de précipitation correspondant au corps de l'averse :

$$C_{\text{mm}} = 0,9 [P J - 5] \quad (16)$$

PJ étant la précipitation de la journée.

- la durée de ce corps de l'averse :

$$D_{\text{min}} = 14,9 (C + 1,82)^{1/3} - 18,2 \quad (17)$$

- les intensités classées du corps suivant le temps t en minutes :

$$i(t)_{\text{mm/h}} = 6 \left[ \frac{(D - t) + 18,2}{10,5} \right]^2 \quad (18)$$

- l'intensité maximale en 5 minutes autour de la pointe :

$$i_p_{\text{mm/h}} = 12,06 [C + 1,8]^{2/3} - 4,05 [1 + 1,8]^{1/3} + 0,45 \quad (19)$$

Pour obtenir l'hyétogramme à partir du graphique des intensités classées, Brunet-Moret propose un temps de montée en intensité de 8,8 minutes (quelle que soit la hauteur de ce corps) à croissance linéaire en intensité suivant le temps.

On montre par ailleurs (W M O n° 332, p.95) que si  $P_{T_r}$  est la précipitation maximale journalière de période de retour  $T_r$ , on peut l'exprimer par la relation :

$$P_{T_r} = P_n + \Lambda S_n \quad (20)$$

où  $P_n$  et  $S_n$  sont respectivement la moyenne et l'écart type de la série de n maxima annuels;  $\Lambda$  est une variable statistique qui varie avec les différentes distributions de fréquence auxquelles s'ajustent les valeurs extrêmes des données hydrologiques étudiées. Si on remplace dans cette relation  $P_{T_r}$  par la précipitation maximale observée et  $\Lambda$  par  $\Lambda_m$ , on trouve que  $\Lambda_m$  représente le nombre d'écarts types qu'il faut ajouter à la moyenne  $P_n$  pour obtenir  $P_m$  :

$$P_m = P_n + \Lambda_m S_n \quad (21)$$

Si, avec cette formulation, on applique la méthode de Brunet-Moret pour le cas d'une seule averse dans la journée, on est conduit à l'expression suivante pour représenter l'hyétogramme de projet :

$$i(t)_{\text{mm/h}} = \bar{i}(t) + \sigma(t) \epsilon_{i(t)}(t) \quad (22)$$

où  $\bar{i}(t)$  représente l'hyétogramme moyen ;  $\sigma(t)$  est l'écart type instantané;  $\epsilon_{i(t)}(t)$  représente le nombre d'écarts-types instantanés qu'il faut ajouter à la valeur instantanée de l'hydrogramme moyen pour avoir l'intensité réelle de la pluie observée. Du point de vue théorique, on montre (Jawzinski [11] p.48 et p.73) que  $\epsilon_{i(t)}(t)$  est un processus du mouvement brownien.

On admettra par extension qu'un processus hydrologique de fréquence donnée peut être décrit par une relation similaire à la relation (22). Cela revient à définir pour

chaque processus hydrologique  $\xi(t)$ , une variable réduite :

$$\varepsilon_{\xi}(t) = \frac{\xi(t) - \mu_{\xi}(t)}{\sigma_{\xi}(t)} \quad (23)$$

$\xi(t)$  aura les caractéristiques décrites dans Jawzinski [11] p.72 ou dans Friedman [9] p.36. Nous considérerons par la suite uniquement les processus du mouvement brownien normalisés.

#### IV. APPROCHE CINEMATIQUE GENERALISEE

##### IV.1. Le modèle déterministe

En considérant l'écoulement de l'eau comme un mouvement fluide, on peut le décrire par les équations générales qui régissent un système fluide et qui s'appuient sur les trois principes suivants :

- conservation de la quantité de mouvement (2ème loi de Newton)
- conservation de la masse (équation de continuité)
- conservation de l'énergie (1ère loi de la thermodynamique).

A ces principes, on ajoute généralement

- l'équation caractéristique du fluide ou équation d'état, qui traduit le passage de la description de l'état moléculaire du fluide à l'état macroscopique. Le système d'équations aux dérivées partielles qui en résulte est bien complexe et difficile à manier. Mais une telle démarche permet de situer l'étude de la relation pluie-débit dans le cadre plus général de l'utilisation des informations climatologiques. Heureusement, dans le cadre de l'écoulement de l'eau sur une surface urbaine, des modifications évidentes s'introduisent qui permettent de considérer le processus de transformation pluie-débit en terme d'étapes, déterminées par les fonctions de production, de transformation et de propagation (Afouda [2] [3] ) :

- la fonction de production qu'on désigne par  $Z(\theta)$  décrit l'action complexe de la zone non saturée par laquelle la quantité d'eau précipitée augmente la teneur en eau du milieu et se divise en hauteur d'eau efficace destinée à alimenter le ruissellement de surface et en hauteur d'eau d'infiltration destinée à alimenter (s'il y a lieu) l'écoulement souterrain.

- la fonction vectorielle de transformation  $Y(t)$  est solution de l'équation différentielle vectorielle non linéaire :

$$\frac{dY}{dt} = \sum_{j=1}^m A_j Y_j + \bar{q} \quad (24)$$

$$\psi = \sum_{j=1}^m A_j Y_j \quad (25)$$

Les équations (24) et (25) constituent la forme hydrologique du système d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrit le bassin versant. Dans ces relations,  $A_j$  sont les matrices d'évolution du système,  $Y_j$  désigne les transformations partielles,  $\bar{q}$  traduit ici le débit d'alimentation par la pluie et  $\psi$  est un vecteur colonne qui représente la réponse du système. Pour obtenir le débit de sortie à partir de la fonction vectorielle  $\psi(Y,t)$ , il suffit de considérer le dernier élément de la colonne ; en d'autres termes : le débit de sortie est une fonction scalaire  $\psi_n(Y,t)$  de la fonction vectorielle de transformation. On a montré dans des travaux antérieurs (Afouda [1] [2] [3] ) que ce modèle généralise les modèles à réservoirs classiques et que, pour  $n \rightarrow \infty$  (le nombre d'éléments tend vers l'infini), le débit de sortie est solution de l'équation différentielle scalaire (équation des caractéristiques) tiré du système (10) et (11) et d'une transformation de (24) et (25) :

$$\frac{dh}{dt} = P(x,t) \quad (26)$$

$$Q = Uh = \sum_{j=1}^m j a_j h^j \quad (27)$$

Ce comportement asymptotique du système constitue l'un des résultats fondamentaux du modèle déterministe et qui sera utilisé par la suite.

- la fonction de propagation décrit l'action par laquelle l'onde de crue formée se propage vers l'aval. La propagation de l'onde de crue dans les caniveaux urbains est un phénomène purement hydraulique, il ne subit que très faiblement l'influence des apports météorologiques dans le cas des conduites à ciel ouvert et pas du tout dans le cas des conduites enterrées. Par ailleurs, ce phénomène a été très largement étudié (cf. par exemple les travaux de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse avec le Professeur C. Thirriot [18] et, tout récemment, Mahmood et Yevjevich [13] ). Il ne sera donc pas abordé ici.

IV.2. Le modèle hydrodynamique stochastique

L'un des aspects les plus marquants des événements climatiques est celui qui est lié à la notion de hasard. La représentation de tels événements doit donc prendre en compte les incertitudes liées à leur connaissance. Alors, p(x,t) doit être considéré comme un processus stochastique, c'est-à-dire une famille de variables aléatoires indexées par la variable spatiale Ω et la variable temporelle T et notées :

{ P(x,t) , t ∈ T , x ∈ Ω }

L'étude des processus stochastiques a connu ces dernières années un grand développement. On a indiqué plus haut (équations 13 et 14) les modèles stochastiques couramment utilisés en hydrologie. Le lecteur intéressé à plus de détails pourra consulter Friedman [9] pour le développement mathématique de la théorie ; Jawzinski [11] pour les applications à la théorie des systèmes et Yevjevich [23] pour les applications à l'hydrologie. Nous admettons ici que les différents processus intervenant dans l'étude du système hydrologique sont décrits chacun par une relation similaire à l'équation (22) ou (23). Alors, en posant plus généralement

Σ\_{j=1}^m A\_j Y\_j + q̄ = F (A , Y , q̄ ; t) (28)

on obtient l'équation qui décrit le comportement stochastique du bassin sous la forme :

dY = F̄ (A , Y , q̄ ; t) dt + G (A , Y , q̄ ; t) dβ̄ (t) (29)

ψ = ψ̄ (A , Y , q̄ ; t) + g\_0 (A , Y , q̄ ; t) ε\_ψ(t) (30)

Dans ces relations F̄ est une fonction n-vectorielle, G est la matrice des écarts-types sur F et β̄(t) est un processus du mouvement brownien ; g\_0 est la matrice des écarts-types sur ψ et ε\_ψ est défini comme précédemment. Une formulation équivalente de l'équation (29) est donnée par la relation :

Y(t) = Y\_0 + ∫\_{t\_0}^t F̄ (A , Y , q̄ ; τ) dτ + ∫\_{t\_0}^t G (A , Y , q̄ ; τ) dβ̄ (τ) (31)

Dans cette relation, si le premier terme du membre de droite est une forme classique de l'intégrale de Riemann, le second terme est moins connu et constitue l'intégrale stochastique de Ito (Jawzinski [11] Friedman [9] ).

La solution Y de l'équation (29) ou (31) a une propriété fort intéressante et qui peut être d'importance par la suite. Elle constitue un processus de Markov. Ce qui montre que, tout comme dans le cas déterministe, toute l'évolution passée du bassin est résumée dans la fonction de transformation ; on a ainsi :

P\_r [Y(t\_n) < X\_n / Y(t\_{n-1}) = X\_{n-1} ... Y(t\_0) = X\_0] = P\_r [Y(t\_n) < X\_n / Y(t\_{n-1}) = X\_{n-1}] (32)

On peut donc déterminer complètement la probabilité de Y par la connaissance de sa distribution initiale et de sa probabilité de transition. On notera la probabilité de transition de Y sous la forme P\_r (Y,t / X, τ). On montre alors (Jawzinski [11] ) que cette probabilité de transition obéit à l'équation de Fokker-Planck-Kolmogorov :

$$\frac{\partial P_r}{\partial t} = \mathcal{L} [ P_r (Y, t / X, \tau) ] \quad (33)$$

où  $\mathcal{L}[\cdot]$  est l'opérateur défini par

$$\mathcal{L}[\cdot] = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (F_i \cdot)}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 ( (G \cdot S \cdot G^T)_{ij} \cdot )}{\partial y_i \partial y_j}$$

avec  $S$  comme matrice de covariance de  $\beta(t)$ ,  $y_i$  et  $F_i$  étant les éléments de  $Y$  et de  $\bar{F}$  respectivement.

Par ailleurs, d'après un lemme de Ito (Jawzkinski [11] p.112), on peut déterminer une équation pour l'évolution de toute fonction scalaire à valeur réelle  $\psi_n(Y, t)$  continûment différentiable en  $t$  et deux fois continûment différentiable en  $Y$  sous la forme suivante, lorsque  $Y$  est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique (29).

$$d\psi = [ \psi_t + \psi_Y^T \cdot \bar{F} + \frac{1}{2} \text{trace} (G \cdot S \cdot G^T \psi_{YY}) ] dt + \psi_Y^T S d\beta \quad (34)$$

On voit alors que, si le débit de sortie vérifie les hypothèses du lemme de Ito son évolution est déterminée par la relation (34). Mais l'équation (34) est aussi une équation différentielle stochastique. Alors si  $\psi$  est l'unique solution de (34) et si la densité de probabilité notée  $P_r(\psi, t)$  est continûment différentiable en  $t$  et deux fois continûment différentiable en  $\psi$ , son évolution est donnée par :

$$dP_r(\psi, t) = [ P_{rt} + P_{r\psi}^T \mathcal{F} + \frac{1}{2} \text{trace} G_{\mathcal{F}} S G_{\mathcal{F}}^T P_{r\psi\psi} ] dt + P_{r\psi}^T S d\beta \quad (35)$$

Dans les relations (35) et (36),  $t, Y, \psi$  en indice traduisent la dérivation partielle par rapport à  $t, Y$  et  $\psi$  respectivement,  $T$  en exposant désigne le transposé de la matrice. On a posé en outre :

$$\mathcal{F} = \psi_t + \psi_Y^T \bar{F} + \frac{1}{2} \text{trace} G \cdot S \cdot G^T \psi_{YY}$$

$$G_{\mathcal{F}} = \psi_Y^T S$$

Les équations (29), (30), (34) constituent les outils essentiels pour l'étude du comportement du bassin versant en tant que système stochastique. En effet, à partir de ces équations, on a les résultats suivants :

1. On suppose que le débit de sortie à l'exutoire du bassin versant  $\psi(Y, t)$  est une fonction continûment différentiable en  $t$  et deux fois continûment différentiable en  $Y$ , si l'espérance mathématique de l'accroissement de  $\psi$  est nulle, alors l'espérance mathématique du débit à l'exutoire mesure la densité de probabilité de la fonction vectorielle de transformation.

2. Sous les hypothèses :

a - que toute la quantité d'eau tombée sous forme de précipitation se transforme en débit à l'exutoire du bassin versant et

b - l'espérance mathématique des accroissements de  $\psi$  est nulle et si  $\psi(Y, t_0) = \delta(Y)$  ( $\delta$  exprimant la fonction de Dirac)

alors, la densité de probabilité de la fonction vectorielle de transformation est une loi de Gauss.

3. On suppose que l'espérance mathématique des accroissements de  $\psi$  est nulle, si  $P_r(\psi, t_0) = \delta$ , alors la distribution de la densité de probabilité du débit à l'exutoire vérifie la loi de Gauss.

Si l'on passe maintenant au cas limite qui est en fait le cas le plus intéressant dans la pratique, la solution stochastique du système devient remarquablement simple. En effet, l'équivalent stochastique de l'équation (26) s'écrit :

$$dh = \hat{P}(x, t)dt + \sigma(x, t) d\beta \quad (36)$$

$\hat{P}$  et  $\sigma$  étant respectivement la moyenne et l'écart type sur  $P(x, t)$ .

L'application du résultat n° 1 conduit à la relation suivante pour exprimer le débit de sortie :

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = P(x,t) \frac{\partial Q}{\partial h} + \sigma^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial h^2} \quad (37)$$

Pour mieux faire ressortir l'influence de la variable spatiale, on pose :

$$-C_0 = \hat{P}(x,t) \left[ \frac{\partial h}{\partial x} \right]^{-1}; \quad D_0 = \sigma^2(x,t) \cdot \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]^{-1}$$

On a alors la relation suivante :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - C_0 \frac{\partial Q}{\partial x} + D_0 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0 \quad (38)$$

le long d'une caractéristique.

## V. CONCLUSION

On s'est attaché dans cet exposé à montrer comment les différents modèles de transformation pluie-débit existant permettent de tenir compte de l'information climatique en insistant plus particulièrement sur les propriétés stochastiques attachées à l'information pluviométrique. On a présenté un modèle hydrodynamique qui prend en compte à la fois le caractère stochastique des précipitations et l'aspect dynamique de la transformation. On établit ainsi différents résultats qui peuvent être utiles dans l'étude des bassins versants.

Il existe sûrement des lacunes dans le développement présenté ; cependant, il apparaît déjà (à notre avis) qu'un approfondissement théorique du modèle hydrodynamique s'impose et que les recherches sur ses performances pratiques permettront de réduire notablement le coût prohibitif, dans certains cas, des systèmes de drainage en milieu urbain.

## Remerciements.

La mise au propre de ce travail a été effectuée pendant que l'auteur séjourne à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse. Aussi, nous sentons-nous le devoir agréable de remercier le Professeur C. Thirriot pour les commentaires qu'il a bien voulu nous faire sur la version étendue de cet article, et Mme M.H. Puech pour en avoir assuré la frappe.

## REFERENCES

- [ 1 ] Afouda A.A. (1980-a). Analysis of the Rainfall-Runoff transformation process. Nordic Hydrol. vol 11, n° 2
- [ 2 ] Afouda A.A. (1980-b). A generalized kinematic approach to bassin modelling. Actes du Coll. d'Oxford sur "la Prévision Hydrologique". A I S H - Publ. n° 129
- [ 3 ] Afouda A.A. (1980-c). Etude théorique de modèle de transformation pluie-débit en milieu semi-urbain. Cah. ORSTOM ser.Hydrol. vol XVII n° 2.
- [ 4 ] Brunet-Moret Y. (1968). Etude générale des averses exceptionnelles en Afrique Occidentale. ORSTOM - Paris
- [ 5 ] Clarke R.T. (1973). Mathematical models in hydrology. FAO.Irrigation et Drainage Paper n° 19, Rome.
- [ 6 ] Débordes M. (1975). Une étude générale de l'assainissement pluvial urbain. La Houille Blanche n° 1
- [ 7 ] Dooge J.C. (1973). Linear theory of hydrologic systems. Techn. Bull. n° 1468, U.S. Dep. of Agriculture.

- [ 8 ] Eagleson P.S. (1970). Dynamic hydrology  
Mac Graw Hill, New-York
- [ 9 ] Friedman A. (1975). Stochastic differential equations (2 vol).  
Academic Press. New-York
- [ 10 ] Herbaud J. (1966). Etude du ruissellement en zone urbaine à Niamey ; les bassins versants du Gounti-Yena.  
Tome I - Publ. C I E H - ORSTOM
- [ 11 ] Jawzinski A.H. (1970). Stochastic process and filtering theory.  
Academic Press - New-York
- [ 12 ] Lemoine L. et Cruette J. (1974). Adaptation de la formule de Caquot aux régimes des régions intertropicales.  
S.H.F. XIIIe Journées de l'Hydraulique - Paris
- [ 13 ] Mahmood K. et Yevjevich V. (édit). (1975). Unsteady flow in open channel  
Water Res. Publ. Fort Collins - Colorado.
- [ 14 ] O'Connell P.E. (1971). A simple stochastic modelling of hurst-law.  
Proc. Intern. Symp. on "Mathematical Models en Hydrology". Varsaw.
- [ 15 ] Rodier J. (1964). Les régimes hydrologiques de l'Afrique Noire à l'ouest du Congo. Mémoire ORSTOM - Paris.
- [ 16 ] Singh V.P. et Mc Cann (1980). A general hydrological model.  
Nordic hydrology vol.11, n° 2
- [ 17 ] Szollosi-Nagy A., Todini E., Wood E.F. (1977). A state- space model for reel time forecasting of hydrological time series.  
Journ. of Hydrol. Sciences, vol.4, n° 1
- [ 18 ] Thirriot C. (1972). Ecoulement transitoire. Cours de DEA  
INP-ENSEEIH - Toulouse
- [ 19 ] Todini E. et Bouillot D. (1976). A rainfall runoff Kalman filter model. ,  
Proc. of the I.F.I.P. Working conf. on "Biosystems Simulation in Water Ressources and waste problems". North Holland publ. Cie - Amsterdam.
- [ 20 ] Ven. Te Chow et Kulandaiswamy (1964). cités par Singh et Mc Cann [16]
- [ 21 ] Wooding R.A. (1965). A hydraulic model for the catchment problem. Part I : Kinematic wave theory.  
J. Hydrol. 3.
- [ 22 ] Woolhiser D.A. (1975). Simulation of unsteady overland flow. (voir dans [13])
- [ 23 ] Yevjevich V. (1974). Stochastic processes in hydrology.  
Water Res. Center Public. Fort Collins - Colorado.
-

ss-  
mes  
tu  
sine-  
l ).

ANNEXE B

TABLEAUX

Tableau 1 : Caractéristiques géographiques  
des stations étudiées.

Stations	Latitude	Longitude	Altitude
Cotonou	06° 21' N	02° 23' E	3.90 m
Bohicon	07° 10' N	02° 03' E	166 m
Savè	07° 59' N	02° 26' E	198.51 m
Kandi	11° 08' N	02° 56' E	289.75 m
Aribinda	14° 14' N	0° 52' W	~ 300 ± 3 m*
G. Gorom	14° 27' N	0° 14' W	~ 300 ± 3 m*
Marboye	14° 38' N	0° 4' E	295 m

\* Estimation de Sicot. (ORSTOM)

Tableau 2 - a

Evolution moyenne de la pluviométrie

Cotonou	Jr	F	M	A	M	Jn	Jc	A	S	O	N	D	annuelle
moyenne	10.6	29.4	54.0	146.3	198.1	372.9	182.1	61.7	77.8	110.8	46.4	16.4	1339.9
$\sigma$	15.2	31.4	46.9	59.1	61.0	168.5	161.2	90.3	62.3	57.3	37.5	17.1	442.11
Cv	1.4	1.1	0.6	0.4	0.3	0.5	0.9	1.5	0.9	0.5	0.8	1.1	0.3

Bohicon

moyenne	4.6	32.7	77.5	147.4	154.5	188.4	138.2	109.5	141.3	117.6	27.0	11.3	1154.9
$\sigma$	8.5	28.3	37.6	42.1	59.1	70.2	80.4	78.7	81.0	65.3	21.5	21.9	280.6
Cv	1.8	0.9	0.5	0.3	0.4	0.4	0.6	0.7	0.6	0.6	0.8	1.9	0.2

Savè

moyenne	6.9	18.9	71.8	120.3	131.7	169.0	200.9	143.8	152.2	109.6	16.0	6.0	1150.9
$\sigma$	11.6	23.1	46.7	54.0	45.3	71.7	141.7	92.2	68.6	46.6	32.0	12.9	290.8
Cv	1.7	1.2	0.7	0.5	0.3	0.4	0.7	0.6	0.5	0.4	2.0	2.1	0.3

Kandi

moyenne	0.3	4.7	8.0	41.6	104.7	159.3	200.9	300.7	198.9	31.5	0.8	0.5	1061.7
$\sigma$	1.1	13.9	9.3	35.0	53.9	50.9	57.1	103.3	66.9	32.8	3.3	1.5	162.7
Cv	4.4	3.0	1.2	0.8	0.5	0.3	0.3	0.3	0.3	1.0	4.3	3.0	0.2

Tableau 2.5

Markoye	Jr	F	M	A	M	Jn	Jt	A	S	O	N	D	annuelle
moyenne	0.0	0.1	0.8	3.5	11.9	55.7	105.4	140.6	62.8	12.9	0.4	0.9	395.6
$\bar{s}$	0.2	0.7	2.6	8.1	12.4	37.7	47.1	42.6	30.8	19.7	1.8	2.5	92.4
Cv	5.1	5.1	3.2	2.3	1.0	0.7	0.4	0.3	0.5	1.5	4.8	2.9	0.2

Gorom - Gorom

- moyenne	0.0	0.1	1.2	2.5	17.2	67.4	123.9	152.9	64.8	11.3	0.4	0.4	305.1
- $\bar{s}$	0.3	0.5	3.8	4.3	15.6	42.6	42.3	63.0	36.0	15.8	2.0	2.0	115.6
Cv	3.6	5.2	3.0	1.7	0.9	0.6	0.3	0.4	0.6	1.4	4.7	5.0	0.3

Aribinda

moyenne	0.0	0.0	3.3	2.7	30.7	67.2	141.9	174.4	71.5	19.4	0.8	0.7	512.6
$\bar{s}$	0.0	0.0	5.8	5.0	29.1	32.9	54.9	69.7	30.8	20.6	3.1	2.5	103.1
Cv	0.0	0.0	1.2	1.8	0.9	0.5	0.4	0.4	0.4	1.0	4.0	3.4	0.3

Tableau 3a

Calcul empirique des paramètres annuels pour les durées pluvieuses

Param. Stations	Pays	nbre d'années d'observ.	nbre de jours de pluie/an	nbre de sequences/ja	durées moyennes des jours de pluie	Ecart type $\sigma$	Coef de var $C_v$
Cotonou	Bénin	20	91	58	1.6	1.20	0.76
Bohicon	Bénin	20	106	59	1.8	1.29	0.78
Savè	Bénin	20	106	55	1.9	1.43	0.74
Kandi	Bénin	20	88	43	2.0	1.75	0.86
Aribinda	Burkina-Faso	20	40	31	1.3	0.69	0.53
Gorom - Gorom	Burkina-Faso (Nile-Volta)	28	34	27	1.3	0.69	0.55
Marroye	Burkina-Faso (Nile-Volta)	27	33	26	1.3	0.68	0.53

Tableau 3-b Calcul empirique des paramètres annuels pour les durées sèches

Param. Stations	Pays	nbre d'années d'observ.	nbre de jours sec/an	nbre de sequen par an	durées moyennes en jours secs	Ecart type s	coef de var Cvs
Cotonou	Bénin	20	275	58	4.8	7.69	1.61
Bohicon	Bénin	20	259	59	4.4	8.90	2.02
Savé	Bénin	20	260	55	4.7	11.20	2.36
Kandi	Bénin	20	277	43	6.4	21.04	3.30
Aribinda	Burkina Faso	20	325	31	10.5	30.83	2.93
(Gorom - Gorom	Burkina-Faso (ex-Ha Volta)	28	331	27	12.3	35.27	2.87
Markoye	Burkina-Faso (ex-Ha-Volta)	27	332	26	12.8	36.75	2.87

Calcul empirique des durées moyennes mensuelles  
des séquences pluviées.

Tableau 4.9

Station	Janv.	1.0	1.2	1.3	1.3	1.1	1.1	1.0	1.1	1.2	1.2	1.0	1.0	2.0	Marboye
Janv.	1.0	1.2	1.3	1.3	1.3	1.1	1.1	1.0	1.1	1.1	1.2	1.0	1.0	1.0	- Gorum
Fev.	1.2	1.2	1.3	1.3	1.4	1.2	1.4	1.2	1.4	1.4	1.2	1.0	1.0	1.0	Gorum -
Mars.	1.3	1.3	1.2	1.2	1.5	1.3	1.4	1.4	1.4	1.1	1.1	1.0	0	0	Arbindu
Avr.	1.2	1.2	1.2	1.2	1.5	1.6	1.4	1.6	1.4	1.7	1.4	1.1	1.1	1.2	Kandi
Mai	1.5	1.4	1.5	1.5	1.6	1.8	1.4	1.6	1.4	1.7	1.4	1.1	1.0	1.0	Saive
Juin	1.4	1.4	1.4	1.4	1.9	2.0	1.6	1.6	1.4	1.7	1.4	1.1	1.0	1.0	Bohich
Juillet	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	2.0	1.6	1.6	1.4	1.7	1.4	1.1	1.0	1.0	Saive
Août	1.6	1.6	1.6	1.6	1.9	2.0	1.6	1.6	1.4	1.7	1.4	1.1	1.0	1.0	Bohich
Sept	1.5	1.5	1.5	1.5	1.9	2.0	1.6	1.6	1.4	1.7	1.4	1.1	1.0	1.0	Saive
Oct	1.4	1.4	1.4	1.4	1.9	2.0	1.6	1.6	1.4	1.7	1.4	1.1	1.0	1.0	Bohich
Nov	1.2	1.2	1.2	1.2	1.6	1.6	1.6	1.6	1.4	1.7	1.4	1.1	1.0	1.0	Saive
Dec.	1.1	1.1	1.1	1.1	1.6	1.6	1.6	1.6	1.4	1.7	1.4	1.1	1.0	1.0	Bohich

Tableau A-b Calcul empirique des coef de var. (cv)  
des durées moyennes de séquences pluvieuses

Stations	Janv.	Fev.	Mars.	Avr.	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept	Oct.	Nov.	Dec.
Cotonou	0.19	0.41	0.40	0.45	0.57	0.84	0.82	0.60	0.57	0.52	0.39	0.37
Bohicon	0.25	0.38	0.51	0.56	0.71	0.66	0.73	0.69	0.70	0.72	0.57	0.25
Savè	0.32	0.33	0.54	0.44	0.62	0.78	0.72	0.68	0.69	0.71	0.63	0.34
Kandi	0.0	0.0	0.35	0.50	0.49	0.63	0.71	0.88	0.84	0.53	0.35	0.35
Arbinda	0.0	0.0	0.0	0.25	0.33	0.40	0.42	0.66	0.51	0.30	0.0	0.35
Gorom - - Gorom	0.0	0.0	0.33	0.24	0.39	0.29	0.49	0.72	0.40	0.33	0.0	0.35
Moyenne	0.0	0.0	0.0	0.29	0.37	0.36	0.53	0.61	0.42	0.16	0.0	0.58

Tableau 5-a : Calcul empirique des durées moyennes mensuelles  
des sequences sèches

Stations	Janv.	Fev.	Mars.	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept	Oct	Nov.	Déc
Polonou	13.5	8.4	4.7	2.9	2.1	1.7	3.7	4.7	3.5	3.1	5.4	12.2
Bohicon	18.9	8.4	4.1	2.4	2.5	1.8	2.4	3.3	2.4	2.8	8.1	19.5
Savè	18.9	10.7	5.4	2.9	2.5	2.0	2.4	2.5	2.1	2.8	12.6	23.4
Kandi	29.5	21.5	13.4	6.2	2.9	2.2	1.8	1.5	1.9	7.1	27.1	26.8
Aribinda	31.0	28.2	21.0	17.8	7.1	4.2	2.9	2.6	4.2	10.7	26.0	26.8
Gorum - - Gorum	28.9	28.2	27.8	20.1	9.5	4.8	3.2	2.8	4.8	14.3	27.0	27.9
Marboye	29.8	28.2	27.8	19.8	11.7	5.0	3.3	2.9	4.7	12.7	26.9	26.8

Tableau 5-6 Calcul empirique des coef de var (Cv)  
des durées moyennes de sequences sèches

Stations	Janv.	Fev.	Mars	Avr.	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept	Oct.	Nov.	Dec.
Potonou	0.76	0.88	0.80	0.75	0.77	0.64	1.04	1.02	1.00	0.77	1.08	0.81
Bohicon	0.60	0.86	0.91	0.69	0.81	0.71	0.93	1.15	0.70	0.77	0.97	0.58
Savè	0.59	0.86	0.94	0.79	0.75	0.74	0.81	1.01	0.70	0.83	0.77	0.42
Kandi	0.16	0.46	0.79	0.93	0.77	0.68	0.71	0.60	0.68	1.07	0.30	0.31
Aribinda	0.0	0.02	0.51	0.61	0.83	0.77	0.86	0.72	0.88	0.85	0.31	0.31
Garon - Garon	0.23	0.02	0.26	0.52	0.86	0.81	0.82	0.76	0.88	0.78	0.27	0.26
Markope	0.14	0.02	0.25	0.52	0.79	0.84	0.85	0.72	0.87	0.83	0.29	0.33

Tableau 6-a.

Calcul empirique multiclasse

Nombre de jours par an et par classe

Variante A : ( Seuils = 0, 10, 25, 50 )

Stations	classe sèche $H = 0$	classe II $0 < H < 10$	classe III $10 \leq H < 25$	classe IV $25 \leq H < 50$	classe V $H \geq 50$
Cotonou	275	56	17	11	7
Bohicon	259	71	21	11	3
Save	260	70	22	10	4
Kandi	277	54	21	11	3

Tableau 6-b

Calcul empirique multiclasse

nombre de jours par an et par classe

Variante B : (Sewils = 0, 1, 5, 20)

Stations	classe sèche $H = 0$	classe II $0 < H < 1$	classe III $1 \leq H < 5$	classe IV $5 \leq H < 20$	classe V $H \geq 20$
Cotonou	275	20	23	25	22
Bohicon	259	27	29	30	21
Save	260	25	29	33	19
Kandi	277	17	22	30	19

Tableau 6-c

Calcul empirique multiclasse

nombre de jour par an et par classe

variante  $c$  ( seuils =  $z_1=0, z_2=m, z_3=m+\sigma, z_4=m+2\sigma$  )

Stations	moyen. m	Ec. Type. $\sigma$	classé H=0	cl. I $0 < H < z_2$	cl. II $z_2 \leq H < z_3$	cl. III $z_3 \leq H < z_4$	cl. IV H $\geq z_4$
Cotonou	14.80	23.48	275	53	18	6	4
Bohicon	10.89	15.22	259	72	20	8	6
Savè	10.90	16.00	260	72	22	7	5
Kandi	12.04	15.24	277	58	20	7	4
Aribinda	12.75	13.47	325	26	10	3	2
Gorom-Gorom	13.04	13.49	331	21	8	3	2
Markoye	11.84	12.42	332	22	6	4	2

Tableau 6-d-bis

Calcul empirique multiclasse (variante B)

Détermination des seuils à partir des valeurs de probabilité.

Station	Paramètre	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
Cotonou	Prob.	0.752	0.814	0.876	0.938
	Seuils	0.0	1.250	5.650	19.350
Béhicon	Prob.	0.710	0.782	0.855	0.925
	Seuils	0.0	0.952	4.450	15.350
Savè	Prob.	0.711	0.783	0.855	0.928
	Seuils	0.0	1.050	4.650	14.650
Kandi	Prob.	0.759	0.819	0.879	0.940
	Seuils	0.0	1.550	6.550	17.750
Aribinda	Prob.	0.890	0.917	0.945	0.972
	Seuils	0.0	3.350	8.350	17.250
Gorom - Gorom	Prob.	0.907	0.930	0.954	0.977
	Seuils	0.0	3.150	8.650	18.450
Mavkoye	Prob.	0.909	0.931	0.954	0.977
	Seuils	0.0	2.650	7.050	17.950

Tableau 7.6 Station de Bohicon

Tableau synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordre

Période pluvieuse

Paramètres Ordre	Moyenne des jours de pluie $m_p$	Ecart, type $\sigma_p$	Coef. de Var. $C_v$
Empirique	1.8	1.29	0.72
Markov 1	1.8	1.20	0.67
Markov 2	1.8	1.28	0.71
Markov 3	1.8	1.29	0.71
Markov 4	1.8	1.30	0.72

Tableau 7-c: Station de Savé

Tableau Synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordres

Période pluvieuse.

Paramètres ordre	moyenne des jours de pluie $m_p$	Ecart type $\sigma_p$	Coef de Var. $C_v$
Empirique	1.9	1.43	0.74
Markov 1	1.9	1.34	0.69
Markov 2	1.9	1.39	0.72
Markov 3	1.9	1.43	0.74
Markov 4	1.9	1.43	0.74

Tableau 7-d : Station de Kandi

Tableau Synthétique <sup>des</sup> moments  
caractéristiques de différents ordres.

Période pluvieuse

Paramètres ordre	Moyenne des jours de pluie $m_p$	Ecart type $\sigma_p$	Coef de Var. $C_v$
Empirique	2.0	1.75	0.86
Markov 1	2.0	1.45	0.71
Markov 2	2.0	1.61	0.79
Markov 3	2.0	1.63	0.80
Markov 4	2.0	1.69	0.83

Tableau 7-e : station de Aribinda

Tableau Synthétique des moments  
Caracteristiques de differents ordres

Période Pluvieuse

Paramètres Ordre	Moyenne des jours de pluie $m_p$	Ecart type $\sigma_p$	Coef de Var. $C_v$
Empirique	1.3	0.69.	0.53
Markov 1	1.3	0.62	0.48
Markov 2	1.3	0.64	0.49
Markov 3	1.3	0.67	0.52
Markov 4	1.3	0.68	0.52

Tableau 7-f : Station de Gorom - Gorom

Tableau Synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordres

Période pluvieuse

Paramètre Ordre	moyenne des jours de pluie $m_p$	Ecart - type $\sigma_p$	Coef. de Var. $C_v p$
Empirique	1.3	0.69	0.54
Markov 1	1.3	0.57	0.45
Markov 2	1.3	0.61	0.48
Markov 3	1.3	0.65	0.52
Markov 4	1.3	0.64	0.52

Tableau 7.9: Station de Markoye

Tableau Synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordres

Période pluvieuse

Paramètre Ordre	moyenne des jours de pluie $m_p$	Ecart type $\sigma_p$	Coeff de var. $C_v$
Empirique	1.3	0.68	0.53
Markov 1	1.3	0.60	0.47
Markov 2	1.3	0.65	0.51
Markov 3	1.3	0.66	0.51
Markov 4	1.3	0.68	0.53

Tableau 8-a : Station de Cotonou :

Tableau Synthétique des moments  
Caractéristiques de différents ordres

Periode sèche

Ordre \ Paramètres	moyenne des jours secs $m_s$	Ecart s types $\sigma_s$	Coef. de Var. $C_v$
Empirique	4.8	7.69	1.61
Markov 1	4.8	4.23	0.89
Markov 2	4.8	4.72	0.99
Markov 3	4.8	5.34	1.12
Markov 4	4.8	5.82	1.22

Tableau 8-b: Station de Bohicon

Tableau Synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordres

Période sèche

Paramètre, ordre	moyenne des jours secs $m_s$	Ecart types $\sigma_s$	Coef de Var. $C_v$
Empirique	4.4	8.90	2.02
Markov 1	4.4	3.87	0.87
Markov 2	4.4	4.67	1.06
Markov 3	4.4	5.37	1.21
Markov 4	4.4	5.91	1.34

Tableau 8-c: Station de Savé

Tableau synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordres

Période sèche

Paramètre Ordre	Moyenne des jours secs $m_s$	Ecart types $\sigma_s$	Coef de Var. $C_v$
Empirique	4.7	11.19	2.36
Markov 1	4.7	4.21	0.88
Markov 2	4.7	5.28	1.11
Markov 3	4.7	6.19	1.30
Markov 4	4.7	7.05	1.49

Tableau 8-d: Station de Kandi

Tableau Synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordres

Période sèche

Paramètre Ordre	Moyenne des jours secs $m_s$	Ecart types $\sigma_s$	Coef. de Var. $C_v$
Empirique	6.4	21.04	3.29
Markov 1	6.4	5.86	0.91
Markov 2	6.4	7.94	1.24
Markov 3	6.4	10.03	1.57
Markov 4	6.4	12.21	1.91

Tableau 8-e : Station de Aribinda

Tableau synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordres

Période sèche

Paramètres ordre	moyenne des jours secs $m_s$	Écart types $\sigma_s$	Coef de Var. $C_v$
Empirique	10.5	30.83	2.93
Markov 1	10.5	10.01	0.95
Markov 2	10.5	11.79	1.12
Markov 3	10.5	13.66	1.30
Markov 4	10.5	15.35	1.46

Tableau 8-e : Station de Aribinda

Tableau synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordres

Période sèche

Paramètres ordre	moyenne des jours secs $m_s$	Écart types $\sigma_s$	Coef de Var. $C_v$
Empirique	10.5	30.83	2.93
Markov 1	10.5	10.01	0.95
Markov 2	10.5	11.79	1.12
Markov 3	10.5	13.66	1.30
Markov 4	10.5	15.35	1.46

Tableau 8-f: Station de Gorom - Gorom

Tableau synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordre

Période sèche

Paramètres Ordre	Moyenne des jours secs $m_s$	Ecart type $\sigma_s$	Coef de Var $Cv_s$
Empirique	12.3	35.27	2.87
Markov 1	12.3	11.77	0.95
Markov 2	12.3	13.87	1.12
Markov 3	12.3	16.12	1.31
Markov 4	12.3	17.83	1.45

Tableau 8-f: Station de Gorom - Gorom

Tableau synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordre

Période sèche

Paramètres Ordre	Moyenne des jours secs $m_s$	Ecart type $\sigma_s$	Coef de Var $Cv_s$
Empirique	12.3	35.27	2.87
Markov 1	12.3	11.77	0.95
Markov 2	12.3	13.87	1.12
Markov 3	12.3	16.12	1.31
Markov 4	12.3	17.83	1.45

Tableau 8-g: Station de Markoye

Tableau Synthétique des moments  
caractéristiques de différents ordres

Période sèche

Paramètres ordre	moyenne des jours secs $m_s$	Ecart. types $\sigma_s$	Coeff de Var $Cv_s$
Empirique	12.8	36.74	2.87
Markov 1	12.8	12.27	0.96
Markov 2	12.8	14.14	1.10
Markov 3	12.8	16.67	1.30
Markov 4	12.8	18.08	1.49

Tableau 9.a : Erreur relative sur la dispersion  $\frac{\Delta C_{Ve} - \Delta C_{Vm}}{\Delta C_{Ve}}$   
 Période pluvieuse.

Paramètres stations	Moy. Empir des Seg. Pluv m <sub>p</sub>	Coef de Var C <sub>ve</sub>	Mark. 1 (E.R)	Mark. 2 (E.R)	Mark. 3 (E.R)	Mark. 4 (E.R)
Cotonou	1.574	0.765	0.210	0.090	-0.094	-0.142
Bohicon	1.804	0.765	0.127	0.073	0.065	0.057
Savié	1.931	0.744	0.077	0.032	0.002	0.001
Kandi	2.035	0.864	0.175	0.083	0.068	0.033
Aribinda	1.303	0.534	0.097	0.067	0.024	0.016
Cirom - Gorom	1.260	0.548	0.171	0.107	0.049	0.049
Marboye	1.287	0.530	0.109	0.036	0.025	-0.005

Tableau 9-b : Erreur relative sur la dispersion  
Période sèche

$$\frac{\Delta C_{ve} - \Delta C_{vm}}{\Delta C_{ve}}$$

Paramètres Stations	moq. Emp. des Seq. Sèche ms	Coef de Var. C <sub>v</sub>	Markov 1 (E-R)	Markov 2 (E-R)	Markov 3 (E-R)	Markov 4 (E-R)
Colonoou	4.763	1.615	0.44	0.39	0.31	0.24
Bohicon	4.409	2.020	0.56	0.47	0.39	0.33
Savè	4.742	2.361	0.62	0.53	0.44	0.37
Kandi	6.384	3.296	0.72	0.62	0.52	0.42
Aribinda	10.519	2.931	0.68	0.62	0.52	0.50
Eorom - Savon	12.287	2.871	0.66	0.61	0.54	0.50
Marboye	12.783	2.875	0.66	0.61	0.55	0.50

Tableau B-c : Estimation des coef de variation  
 pour les ordres superieurs (periode sèche)

Paramètres	Empir.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cotonou	1.615	0.899	0.991	1.114	1.224	1.336	1.446	1.557	1.667	1.778	1.889
Bohien	2.020	0.879	1.061	1.219	1.345	1.515	1.671	1.826	1.982	2.137	2.293
Saue	2.361	0.888	1.114	1.306	1.493	1.702	1.903	2.103	2.304	2.505	2.706
Kandi	3.296	0.918	1.245	1.574	1.913	2.241	2.572	2.904	3.235	3.567	3.898
Ar'binda	2.931	0.951	1.122	1.301	1.467	1.642	1.815	1.987	2.160	2.333	2.506
C. Gorom	2.871	0.958	1.129	1.313	1.453	1.621	1.797	1.964	2.131	2.298	2.465
Marboye	2.875	0.960	1.107	1.305	1.496	1.669	1.849	2.030	2.210	2.390	2.571

Tableau 10-2 : Valeurs des probabilités marginales

Stations	Probabilité d'un jour sec	Probabilité d'un jour pluvieux	Hauteur d'eau moy. pour un jour pluvieux.
Cotonou	0.75	0.25	14.72
Bohicon	0.71	0.29	10.90
Savè	0.71	0.29	10.85
Kandi	0.76	0.24	12.00
Aribinda	0.89	0.11	12.75
Gorom - Gorom	0.91	0.09	13.04
Markoye	0.91	0.09	11.84

Tableau 10-b : Probabilités de transition

Markov 1

Stations	$Pr(S/S)$ $\alpha_{00}$	$Pr(P/S)$ $\alpha_{01}$	$Pr(S/P)$ $\alpha_{10}$	$Pr(P/P)$ $\alpha_{11}$	Coef de Corr. du 1 <sup>er</sup> ordre P.
Cotonou	0.79	0.21	0.64	0.36	0.15
Bohicon	0.77	0.23	0.55	0.45	0.23
Savè	0.79	0.21	0.52	0.48	0.28
Kandi	0.84	0.16	0.49	0.51	0.36
Aribinda	0.91	0.09	0.77	0.23	0.14
Gorom-Gorom	0.92	0.08	0.79	0.21	0.13
Markoye	0.92	0.08	0.78	0.22	0.15

Tableau no-c :

Probabilités de transition

Harbou 2

Stations	$P_r(s/s)$ $P_{000}$	$P_r(p/s)$ $P_{001}$	$P_r(s/sr)$ $P_{010}$	$P_r(p/sr)$ $P_{011}$	$P_r(s/rs)$ $P_{100}$	$P_r(p/rs)$ $P_{101}$	$P_r(s/rp)$ $P_{110}$	$P_r(p/rp)$ $P_{111}$
Potonou	0.81	0.19	0.69	0.31	0.70	0.30	0.55	0.45
Bohicon	0.82	0.18	0.58	0.42	0.63	0.37	0.52	0.48
Savè	0.84	0.16	0.54	0.46	0.64	0.39	0.50	0.50
Kandi	0.89	0.11	0.54	0.46	0.59	0.41	0.44	0.56
Aribinda	0.92	0.08	0.78	0.22	0.76	0.24	0.74	0.26
Gorom - Gorom	0.93	0.07	0.81	0.19	0.77	0.23	0.74	0.26
Harbouye	0.93	0.07	0.79	0.21	0.79	0.21	0.72	0.28

Таблица 10-д: Probabilite' de transition

Марков 3

Station	$P_{0000}^{(4/555)}$	$P_{0001}^{(4/555)}$	$P_{00010}^{(4/555)}$	$P_{00011}^{(4/555)}$	$P_{0010}^{(4/555)}$	$P_{00101}^{(4/555)}$	$P_{0011}^{(4/555)}$	$P_{00100}^{(4/555)}$	$P_{00101}^{(4/555)}$	$P_{00110}^{(4/555)}$	$P_{00111}^{(4/555)}$	$P_{0100}^{(4/555)}$	$P_{0101}^{(4/555)}$	$P_{0110}^{(4/555)}$	$P_{0111}^{(4/555)}$	$P_{1000}^{(4/555)}$	$P_{1001}^{(4/555)}$	$P_{1010}^{(4/555)}$	$P_{1011}^{(4/555)}$	$P_{1100}^{(4/555)}$	$P_{1101}^{(4/555)}$	$P_{1110}^{(4/555)}$	$P_{1111}^{(4/555)}$
Ротонна	0.84	0.16	0.19	0.98	0.73	0.27	0.61	0.39	0.68	0.32	0.62	0.38	0.64	0.36	0.47	0.53	0.48	0.64	0.36	0.47	0.53	0.47	0.53
Бахичон	0.85	0.15	0.62	0.38	0.64	0.36	0.53	0.47	0.66	0.34	0.52	0.48	0.62	0.38	0.51	0.62	0.38	0.51	0.38	0.51	0.47	0.49	0.49
Сауэ	0.87	0.13	0.57	0.43	0.66	0.34	0.53	0.47	0.66	0.34	0.49	0.51	0.56	0.44	0.47	0.53	0.52	0.48	0.44	0.47	0.47	0.53	0.53
Канди	0.92	0.08	0.61	0.39	0.66	0.34	0.46	0.54	0.62	0.38	0.46	0.54	0.52	0.48	0.43	0.57	0.46	0.52	0.48	0.43	0.43	0.57	0.57
Арибинда	0.94	0.06	0.79	0.21	0.76	0.24	0.78	0.22	0.76	0.24	0.73	0.27	0.73	0.27	0.63	0.37	0.73	0.27	0.63	0.27	0.63	0.37	0.37
Горын - - Горын	0.94	0.06	0.80	0.20	0.78	0.22	0.79	0.21	0.76	0.24	0.85	0.15	0.74	0.26	0.58	0.42	0.74	0.26	0.58	0.26	0.58	0.42	0.42
Маркоче	0.95	0.05	0.80	0.20	0.81	0.19	0.73	0.27	0.75	0.25	0.76	0.24	0.72	0.28	0.68	0.32	0.72	0.28	0.68	0.28	0.68	0.32	0.32

Tableau 11 : Markov binaire mensuel  
 Moments caractéristiques  
 des périodes sèches et pluvieuses  
 a). Cotonou.

STATION DE COTONOU;  
 MOMENTS CARACTERISTIQUES  
 PERIODE SECHE

		JANV	FEVR	MARS	AVRI	MAI	JUIN	JUIL	AOUT	SEPT	OCTO	NOVE	DECE
		0.71	0.67	0.60	0.53	0.44	0.30	0.49	0.57	0.53	0.51	0.62	0.70
M-1	203	13.48	8.41	4.66	2.91	2.14	1.73	3.74	6.74	3.53	3.09	5.40	12.17
		12.97	7.89	4.13	2.36	1.56	1.12	3.20	4.21	2.99	2.54	4.57	11.66
		0.96	0.94	0.89	0.81	0.73	0.65	0.86	0.89	0.85	0.82	0.90	0.96
M-2	202	13.79	7.73	4.54	2.84	2.07	1.73	3.72	6.73	3.50	3.03	5.37	12.61
		12.93	8.28	4.24	2.36	1.50	1.01	3.43	4.38	2.85	2.40	5.27	11.96
		0.94	1.07	0.93	0.83	0.73	0.59	0.92	0.93	0.82	0.79	0.98	0.95
M-3	203	13.79	7.54	4.68	2.73	1.97	1.67	3.63	4.40	3.33	3.00	5.45	12.39
		11.98	8.50	4.27	2.35	1.55	1.07	3.66	4.85	3.18	2.68	5.44	11.35
		0.87	1.13	0.91	0.86	0.78	0.64	1.01	1.10	0.95	0.89	1.00	0.92

STATION DE COTONOU;  
 MOMENTS CARACTERISTIQUES  
 PERIODE PLUVIEUSE

		JANV	FEVR	MARS	AVRI	MAI	JUIN	JUIL	AOUT	SEPT	OCTO	NOVE	DECE
		0.03	0.07	0.14	0.21	0.30	0.44	0.25	0.17	0.21	0.23	0.12	0.04
M-1	202	1.04	1.16	1.26	1.21	1.51	2.42	1.90	1.60	1.49	1.44	1.22	1.12
		0.20	0.42	0.57	0.50	0.88	1.85	1.31	0.98	0.86	0.80	0.52	0.37
		0.19	0.37	0.45	0.41	0.58	0.77	0.69	0.61	0.57	0.55	0.43	0.33
M-2	202	0.96	1.12	1.24	1.14	1.49	2.45	1.77	1.37	1.46	1.41	1.22	1.06
		0.34	0.57	0.55	0.63	0.94	2.04	1.42	1.01	0.89	0.77	0.47	0.52
		0.35	0.51	0.44	0.55	0.63	0.83	0.80	0.64	0.61	0.55	0.39	0.49
M-3	203	0.96	1.12	1.24	1.12	1.43	2.40	1.77	1.54	1.40	1.37	1.22	1.00
		0.34	0.54	0.54	0.59	0.94	2.13	1.66	1.00	0.96	0.74	0.48	0.51
		0.35	0.48	0.44	0.53	0.64	0.88	0.94	0.65	0.69	0.54	0.39	0.51

Tableau 11 Markov binaire mensuel  
 Moments caractéristiques  
 des périodes sèches et pluvieuses  
 b) Bohicon.

STATION DE BOHICON;  
 MOMENTS CARACTERISTIQUES  
 PERIODE SECHE

	JANV	FEVR	MARS	AVRI	MAI	JUIN	JUIL	AOUT	SEPT	OCTO	NOVE	DECE
	0.72	0.67	0.57	0.45	0.42	0.36	0.42	0.47	0.41	0.44	0.66	0.72
M-1	18.94	8.38	4.09	2.35	2.47	1.83	2.43	3.29	2.44	2.77	8.12	19.55
	18.43	7.86	3.56	1.78	1.90	1.23	1.87	2.74	1.88	2.22	7.60	19.04
	0.97	0.94	0.97	0.76	0.77	0.67	0.77	0.83	0.77	0.80	0.94	0.97
M-2	17.04	8.00	3.96	2.27	2.46	1.91	2.34	3.23	2.38	2.71	7.66	20.17
	18.61	8.01	3.60	1.76	1.39	1.25	2.11	2.98	1.90	2.24	8.01	18.66
	1.09	1.00	0.91	0.78	0.77	0.69	0.90	0.92	0.80	0.83	1.05	0.93
M-3	17.19	7.95	3.82	2.22	2.36	1.74	2.31	3.21	2.28	2.76	8.06	18.93
	19.47	7.61	3.53	1.78	2.00	1.26	2.18	3.48	1.83	2.38	9.48	19.65
	1.13	0.96	0.92	0.80	0.85	0.72	0.94	1.09	0.80	0.86	1.18	1.04

STATION DE BOHICON;  
 MOMENTS CARACTERISTIQUES  
 PERIODE PLUVIEUSE

	JANV	FEVR	MARS	AVRI	MAI	JUIN	JUIL	AOUT	SEPT	OCTO	NOVE	DECE
	0.02	0.07	0.17	0.29	0.32	0.38	0.32	0.27	0.33	0.30	0.08	0.02
M-1	1.06	1.20	1.38	1.55	1.79	1.96	1.91	1.89	2.01	1.98	1.23	1.08
	0.29	0.47	0.73	0.93	1.19	1.37	1.32	1.30	1.43	1.40	0.53	0.29
	0.27	0.41	0.53	0.60	0.66	0.70	0.69	0.69	0.71	0.70	0.43	0.27
M-2	1.08	1.16	1.33	1.52	1.73	1.91	1.86	1.82	1.97	1.91	1.22	1.09
	0.28	0.53	0.77	0.95	1.23	1.43	1.40	1.38	1.48	1.49	0.70	0.29
	0.26	0.45	0.53	0.63	0.71	0.75	0.75	0.76	0.75	0.78	0.57	0.26
M-3	1.06	1.11	1.31	1.47	1.73	1.90	1.80	1.78	1.91	1.91	1.20	1.09
	0.28	0.53	0.79	0.98	1.36	1.44	1.36	1.42	1.47	1.42	0.64	0.29
	0.26	0.45	0.60	0.60	0.79	0.76	0.75	0.80	0.77	0.74	0.53	0.26

Tableau 11 : Markov binaire mensuel  
 Moments caractéristiques  
 des périodes sèches et pluvieuses  
 c) save

STATION DE SAVEJ  
 MOMENTS CARACTERISTIQU ES  
 PERIODE SECHE

		JANV	FEVR	MARS	AVRI	MAI	JUIN	JUIL	AOUT	SEPT	OCTO	NOVE	DECE
		0.72	0.69	0.61	0.50	0.46	0.36	0.37	0.38	0.37	0.45	0.68	0.73
H-1	203	18.94	10.73	5.35	2.91	2.53	1.96	2.44	2.52	2.12	2.80	12.59	23.42
		18.43	10.22	4.85	2.36	1.97	1.37	1.88	1.96	1.54	2.24	12.08	22.92
		0.97	0.95	0.90	0.81	0.78	0.70	0.77	0.78	0.73	0.80	0.96	0.98
H-2	203	16.86	9.37	5.21	2.86	2.51	1.94	2.36	2.50	2.06	2.70	12.38	23.42
		18.51	11.31	4.91	2.45	1.95	1.49	1.95	2.34	1.58	2.40	12.22	21.92
		1.10	1.21	0.94	0.55	0.78	0.77	0.82	0.93	0.77	0.89	0.99	0.94
H-3	203	17.38	9.17	4.88	2.78	2.49	1.90	2.32	2.47	2.01	2.68	13.25	21.50
		18.29	10.75	5.01	2.34	1.95	1.59	1.95	2.52	1.55	2.36	13.27	21.66
		1.05	1.17	1.03	0.34	0.80	0.84	0.84	1.02	0.77	0.88	1.00	1.01

STATION DE SAVEJ  
 MOMENTS CARACTERISTIQU ES  
 PERIODE PLUVIEUSE

		JANV	FEVR	MARS	AVRI	MAI	JUIN	JUIL	AOUT	SEPT	OCTO	NOVE	DECE
		0.02	0.05	0.13	0.24	0.28	0.38	0.37	0.36	0.37	0.29	0.06	0.01
H-1	203	1.17	1.18	1.36	1.47	1.56	2.01	2.37	2.32	2.06	1.93	1.59	1.22
		0.44	0.46	0.70	0.83	0.95	1.43	1.80	1.75	1.48	1.34	0.96	0.52
		0.38	0.39	0.52	0.56	0.60	0.71	0.76	0.75	0.72	0.69	0.61	0.43
H-2	203	1.17	1.09	1.33	1.46	1.47	2.00	2.32	2.25	2.05	1.89	1.54	1.29
		0.37	0.51	0.79	0.67	0.97	1.59	1.73	1.76	1.46	1.44	1.00	0.45
		0.32	0.47	0.60	0.45	0.66	0.79	0.74	0.78	0.71	0.76	0.65	0.35
H-3	203	1.17	1.23	1.33	1.39	1.43	1.99	2.30	2.26	1.97	1.85	1.52	1.00
		0.37	0.52	0.77	0.72	1.03	1.61	1.87	1.74	1.45	1.39	1.14	0.53
		0.32	0.51	0.51	0.52	0.72	0.81	0.81	0.77	0.73	0.74	0.75	0.53

Tableau 11

Markov binaire mensuel  
 Moments caractéristiques  
 des périodes sèches et pluvieuses

d). Arribinda.

STATION DE ARIBINDA;  
 MOMENTS CARACTERISTIQUES  
 PERIODE SECHE

		JANV	FEVR	MARS	AVRI	MAI	JUIN	JUIL	AOUT	SEPT	OCTO	NOVE	DECE
		0.74	0.74	0.73	0.72	0.66	0.59	0.52	0.47	0.58	0.69	0.74	0.74
H-1	Eto	30.00	30.00	21.03	17.76	7.06	4.17	2.87	2.59	4.17	10.70	25.96	26.78
		0.00	0.00	20.53	17.25	6.55	3.64	2.32	2.02	3.63	10.19	25.45	26.28
		0.00	0.00	0.98	0.97	0.93	0.87	0.81	0.78	0.87	0.95	0.98	0.98
H-2	Eto	30.00	30.00	19.33	16.02	6.79	4.00	2.82	2.56	4.26	10.83	25.96	26.78
		0.00	0.00	20.27	17.26	6.33	3.38	2.41	2.06	3.58	10.19	24.45	25.28
		0.00	0.00	1.05	1.08	0.94	0.85	0.86	0.91	0.84	0.94	0.94	0.94
H-3	Eto	30.00	30.00	19.98	13.21	6.54	3.90	2.77	2.46	4.26	10.85	25.96	19.27
		0.00	0.00	20.11	18.00	6.13	3.22	2.42	2.03	3.84	9.86	23.45	24.07
		0.00	0.00	1.01	1.36	0.94	0.83	0.87	0.83	0.90	0.91	0.90	1.25

STATION DE ARIBINDA;  
 MOMENTS CARACTERISTIQUES  
 PERIODE PLUVIEUSE

		JANV	FEVR	MARS	AVRI	MAI	JUIN	JUIL	AOUT	SEPT	OCTO	NOVE	DECE
		0.00	0.00	0.01	0.02	0.08	0.15	0.22	0.27	0.16	0.05	0.00	0.00
H-1	Eto	1.00	1.00	1.00	1.08	1.11	1.22	1.27	1.53	1.28	1.14	1.00	1.33
		0.00	0.00	0.00	0.29	0.35	0.52	0.59	0.90	0.60	0.39	0.00	0.67
		0.00	0.00	0.00	0.27	0.52	0.43	0.46	0.59	0.47	0.35	0.00	0.50
H-2	Eto	1.00	1.00	0.90	1.08	1.12	1.22	1.24	1.48	1.26	1.12	1.00	1.33
		0.00	0.00	0.30	0.27	0.38	0.49	0.56	0.94	0.65	0.32	0.00	0.47
		0.00	0.30	0.33	0.25	0.34	0.40	0.45	0.64	0.52	0.29	0.00	0.35
H-3	Eto	1.00	1.00	0.90	1.08	1.08	1.20	1.19	1.45	1.27	1.12	1.00	1.33
		0.00	0.00	0.30	0.27	0.38	0.49	0.60	1.02	0.67	0.32	0.00	0.47
		0.00	0.00	0.33	0.25	0.35	0.41	0.50	0.70	0.53	0.29	0.00	0.35

Tableau 11 : Markov binaire mensuel  
 Moments caractéristiques  
 des périodes sèches et pluvieuses  
 e) Markoye

STATION DE MARKOYE  
 MOMENTS CARACTERISTIQUES  
 PERIODE SECHE

		JANV	FEVR	MARS	AVRI	MAI	JUIN	JUIL	AOUT	SEPT	OCTO	NOVE	DECE
		1.00	1.00	1.00	0.98	0.94	0.84	0.74	0.67	0.81	0.95	1.00	0.99
M-1	203	29.82	28.22	27.80	19.77	11.75	5.03	3.28	2.83	4.71	12.68	26.90	26.81
	203	29.32	27.72	27.30	19.27	11.24	4.50	2.73	2.32	4.18	12.17	26.40	26.30
	203	0.98	0.98	0.98	0.97	0.94	0.90	0.83	0.81	0.89	0.96	0.98	0.98
M-2	203	27.82	0.00	27.80	19.77	10.70	4.87	3.19	2.83	4.69	12.91	26.90	20.75
	203	23.32	0.00	26.30	18.27	11.66	4.56	2.80	2.27	4.01	11.79	25.40	25.63
	203	0.95	0.00	0.95	0.92	1.09	0.94	0.88	0.80	0.85	0.91	0.94	1.24
M-3	203	27.82	0.00	27.80	18.33	10.24	4.75	3.13	2.80	4.57	13.11	26.90	20.75
	203	27.32	0.00	25.30	18.71	11.67	4.46	2.95	2.29	4.16	12.04	24.39	24.87
	203	0.92	0.00	0.91	1.32	1.14	0.94	0.94	0.82	0.91	0.92	0.91	1.20

STATION DE MARKOYE  
 MOMENTS CARACTERISTIQUES  
 PERIODE PLUVIEUSE

		JANV	FEVR	MARS	AVRI	MAI	JUIN	JUIL	AOUT	SEPT	OCTO	NOVE	DECE
		0.00	0.00	0.00	0.02	0.06	0.16	0.26	0.33	0.19	0.05	0.00	0.01
M-1	203	2.00	1.00	1.00	1.12	1.16	1.18	1.26	1.46	1.21	1.03	1.00	1.50
	203	1.41	0.00	0.00	0.36	0.44	0.46	0.57	0.82	0.50	0.17	0.00	0.87
	203	0.71	0.00	0.00	0.32	0.37	0.39	0.45	0.56	0.41	0.16	0.00	0.58
M-2	203	2.00	0.00	1.00	0.94	1.14	1.17	1.24	1.39	1.19	1.03	1.00	1.50
	203	0.00	0.00	0.00	0.56	0.47	0.45	0.65	0.96	0.55	0.16	0.00	1.12
	203	0.00	0.00	0.00	0.59	0.42	0.38	0.53	0.69	0.47	0.16	0.00	0.75
M-3	203	2.00	0.00	1.00	0.94	1.10	1.17	1.21	1.38	1.19	1.03	1.00	1.50
	203	0.00	0.00	0.00	0.56	0.48	0.45	0.70	0.95	0.56	0.16	0.00	0.87
	203	0.00	0.00	0.00	0.59	0.44	0.38	0.58	0.69	0.47	0.16	0.00	0.58

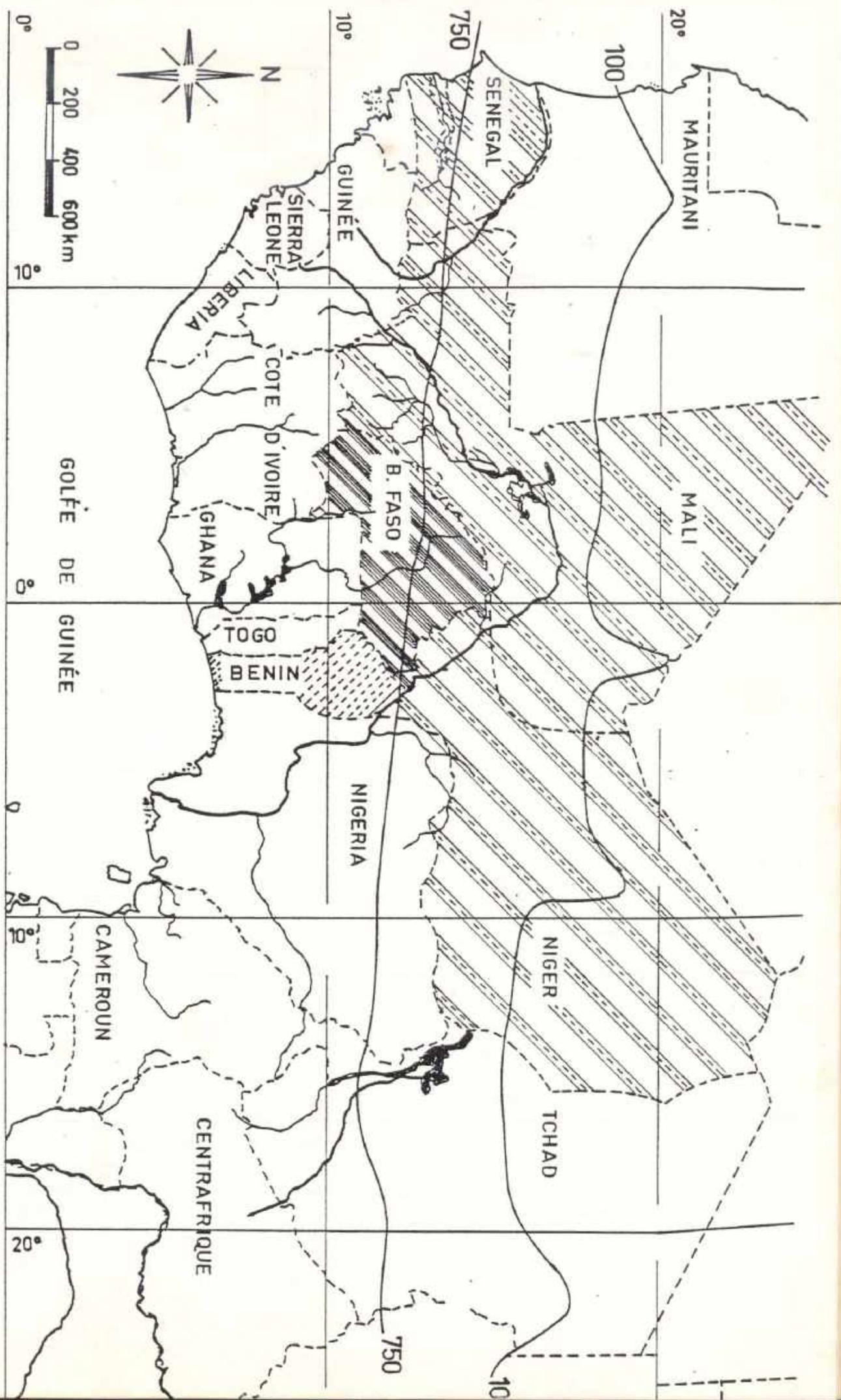


ANNEXE C

FIGURES

ANNEXE C - 1

FIGURES DU CHAPITRE IV



CARTE DE SITUATION

FIG. 1

Pluies

Figure 2 : Régime des pluies

a. REGIMES EQUATORIAUX :

— Cotonou

- - - - - Bohicon

300

200

100

J F M A M Jn Jc A S O N D Mois

Mois

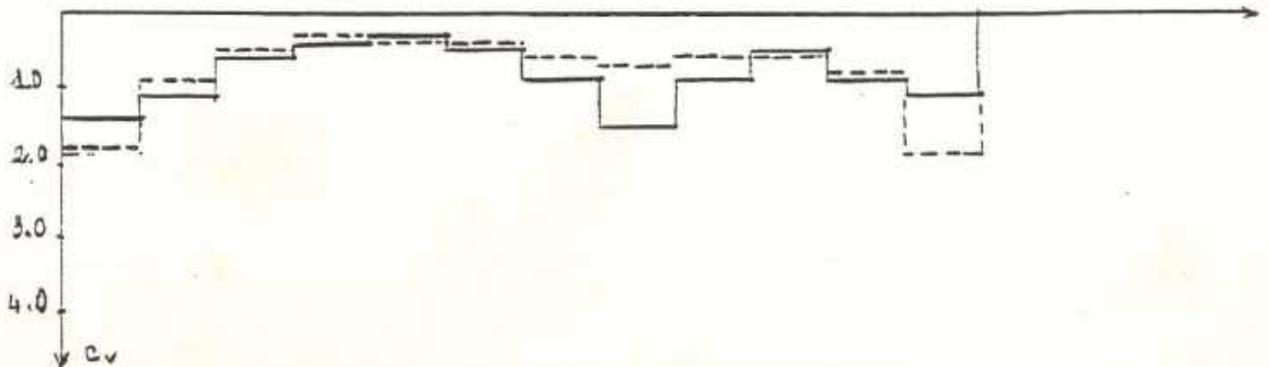
1.0

2.0

3.0

4.0

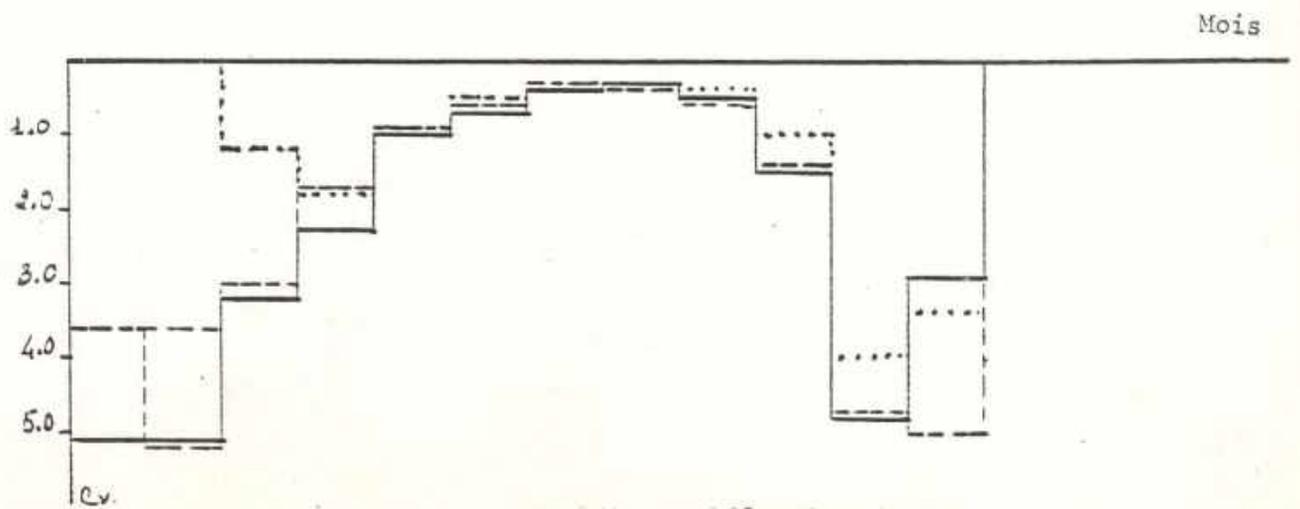
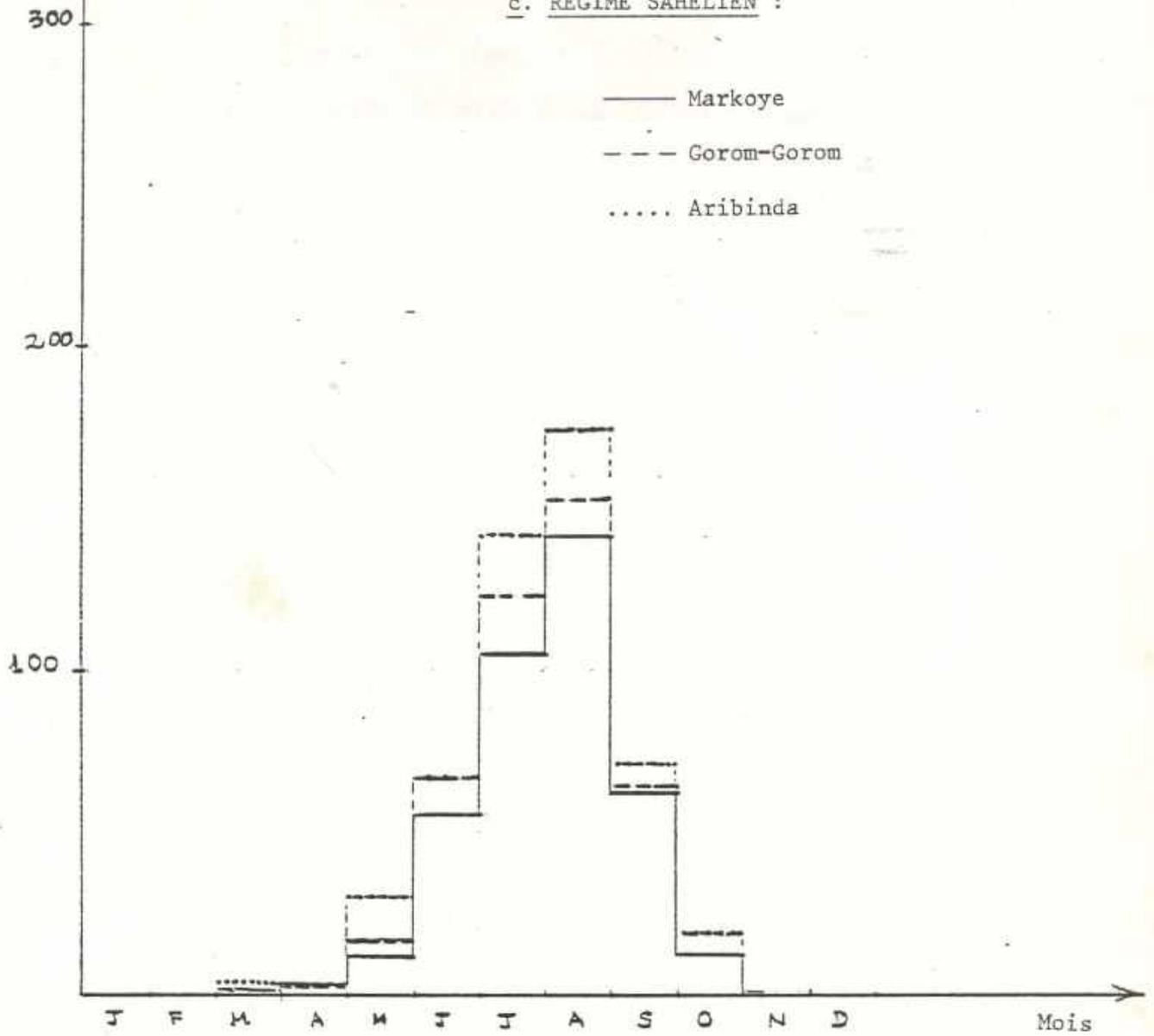
CV



Pluies

Figure 2 : Régime des pluies

c. REGIME SAHELIEEN :



# STATION - AERO COTONOU

— HAUTEUR ANNUELLE (H)  
- - - MOYENNE MOBILE DE H EN : 5 ANS

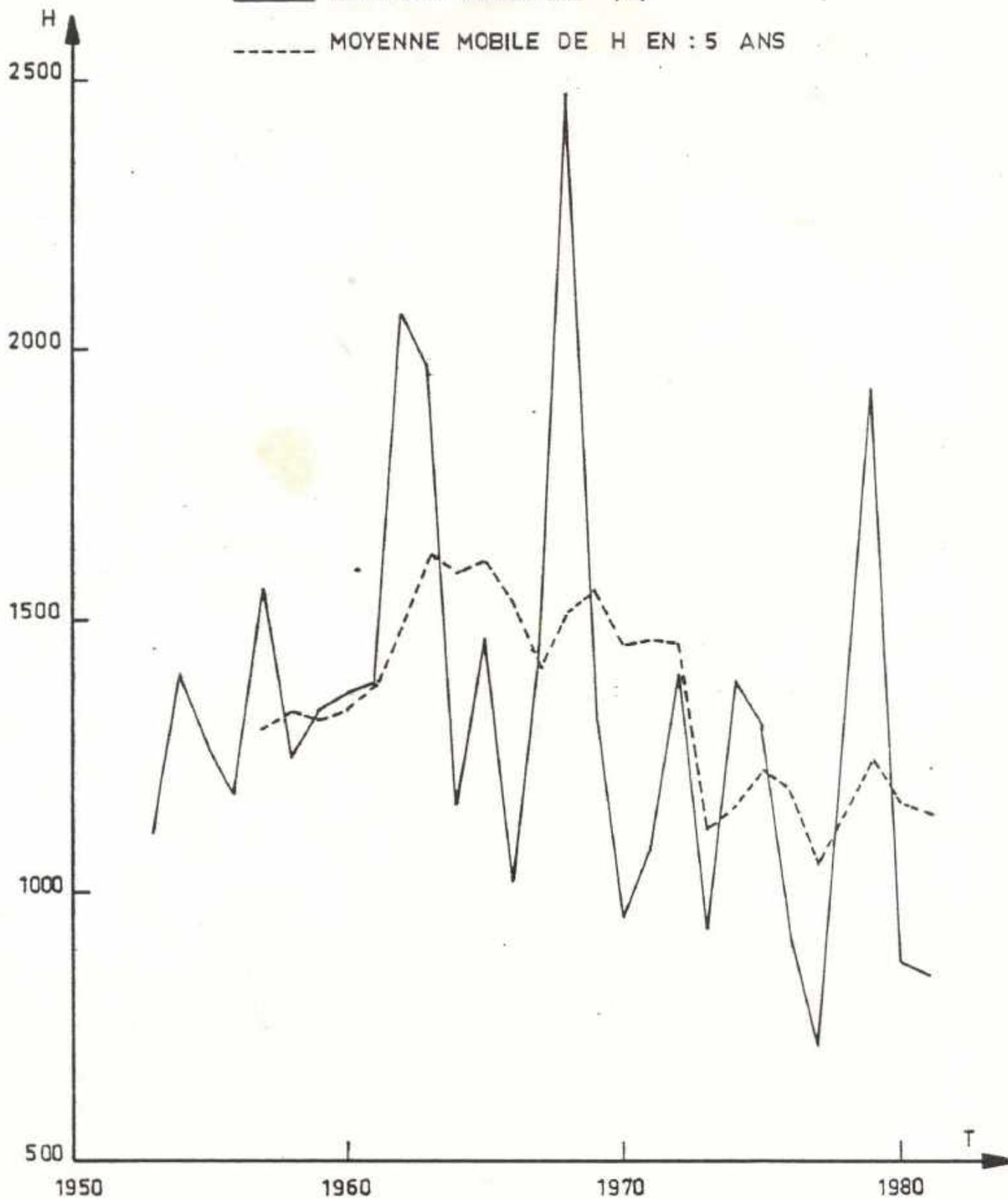


FIG. - 3 - a

# STATION - AERO COTONOU

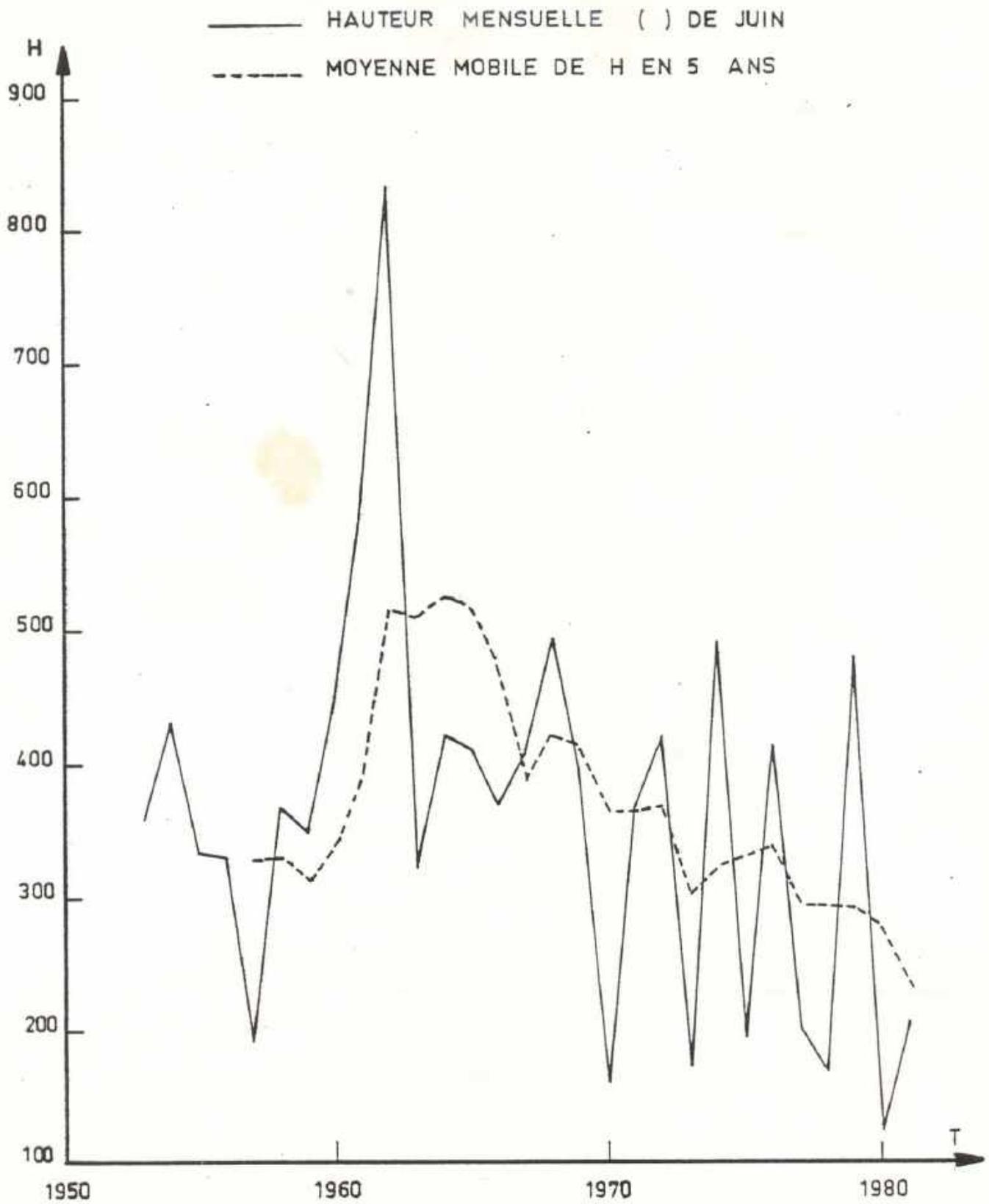


FIG. 3 - b

STATION - AERO COTONOU

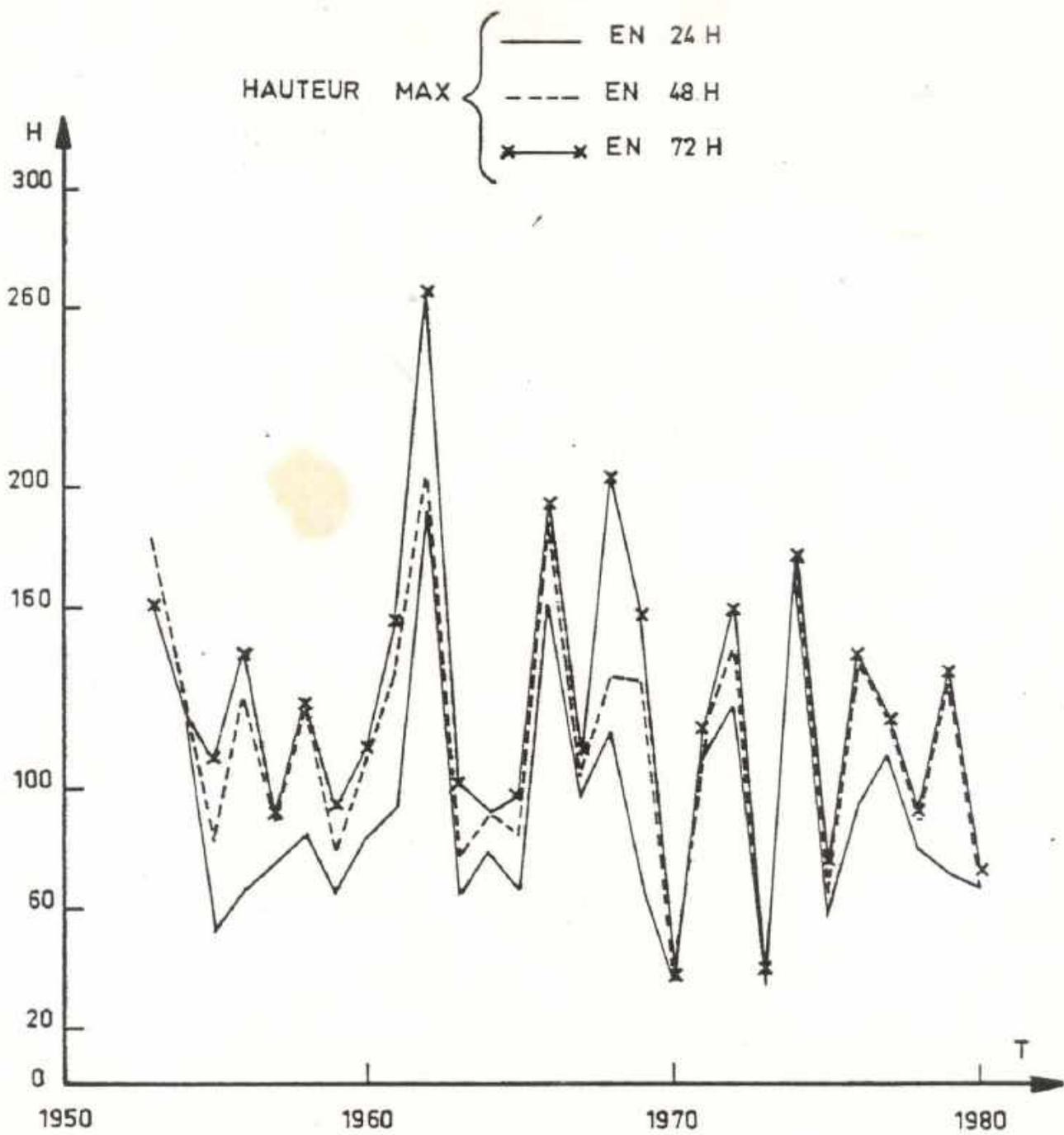
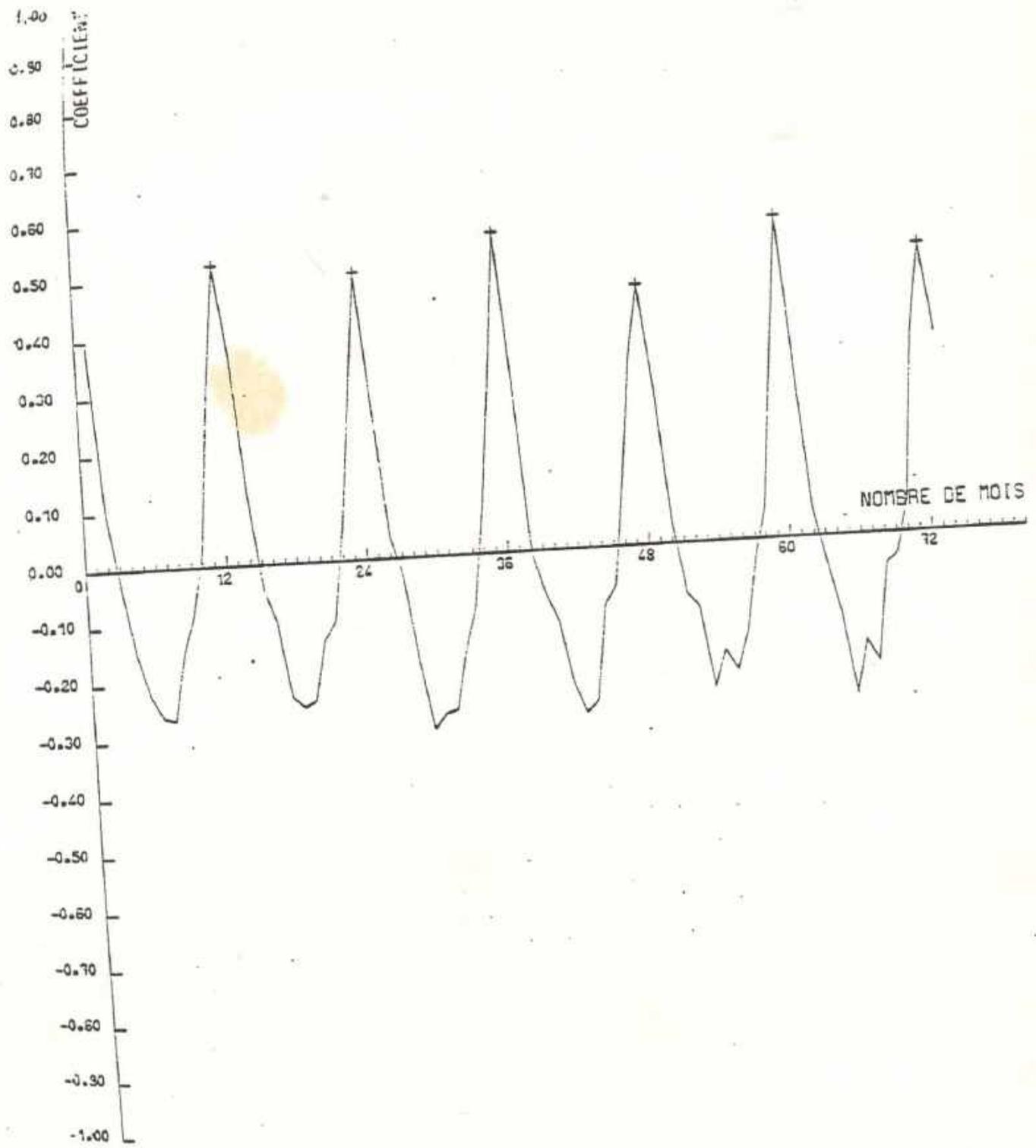


FIG. 3 - c

Figure 4 - a



FONCTION D AUTOCORRELATION: COTONOU  
Pluies mensuelles

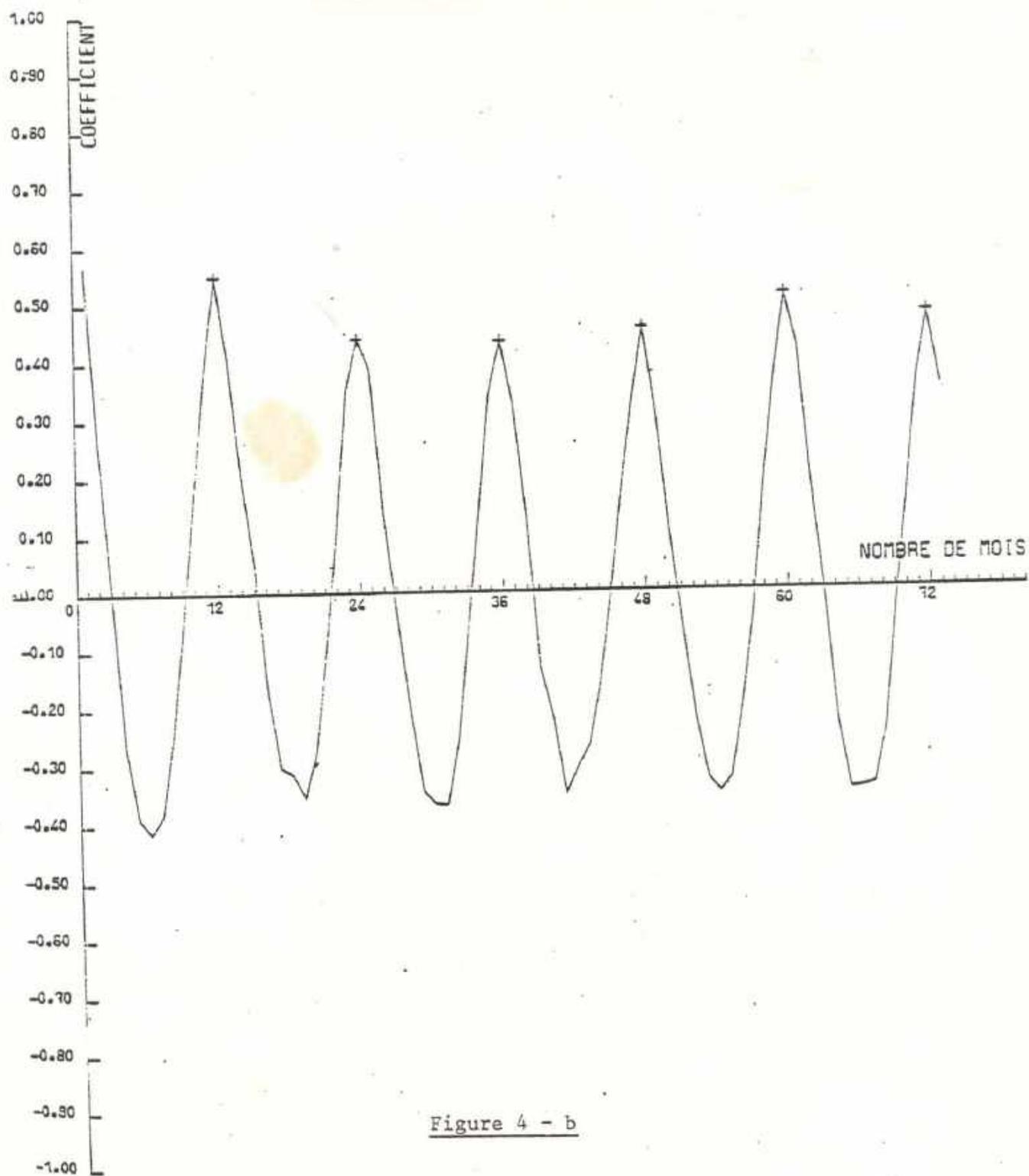


Figure 4 - b

FONCTION D AUTOCORRELATION: BOHICON

Pluies mensuelles

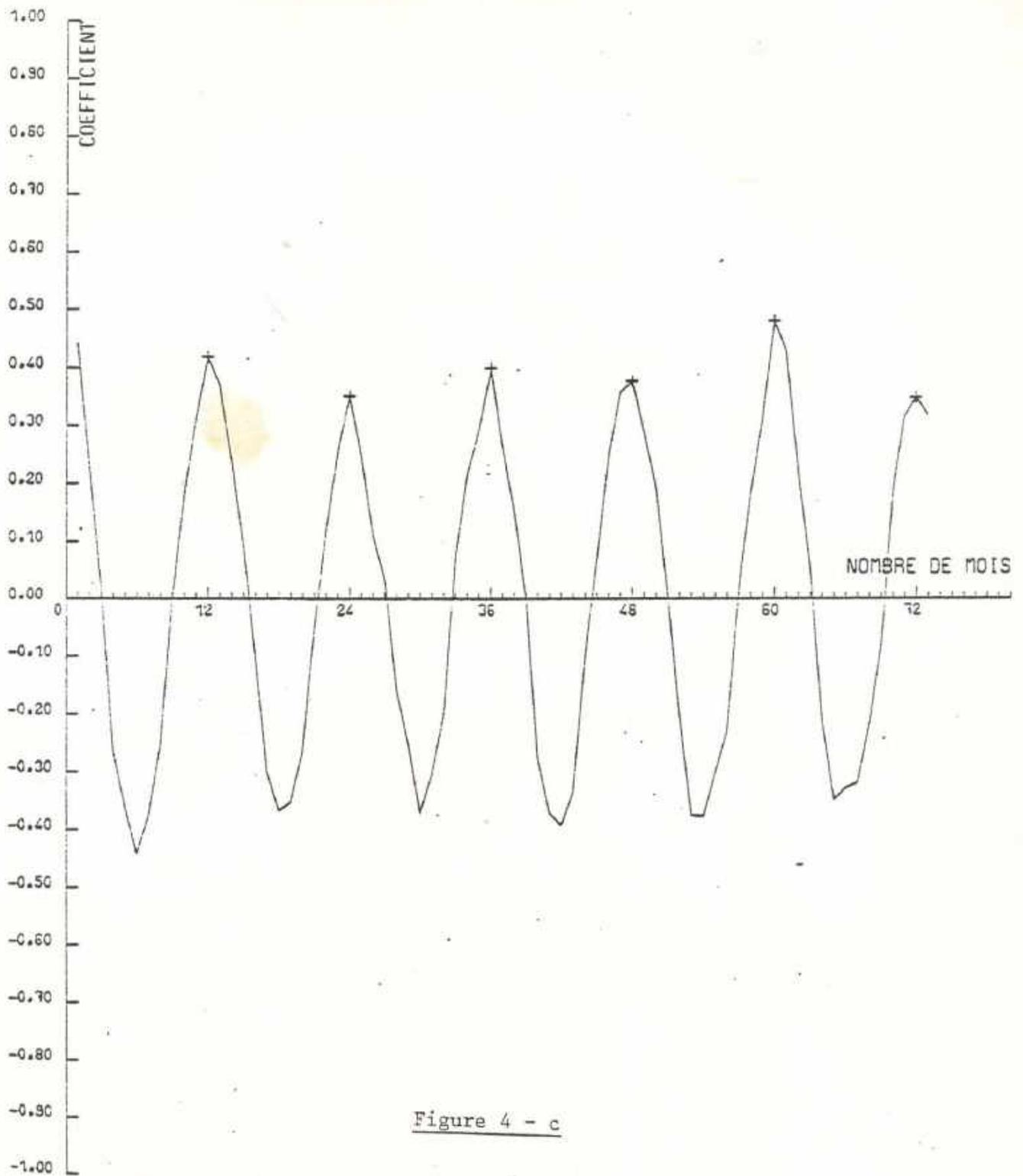


Figure 4 - c

FONCTION D AUTOCORRELATION: SAVE

Pluies mensuelles

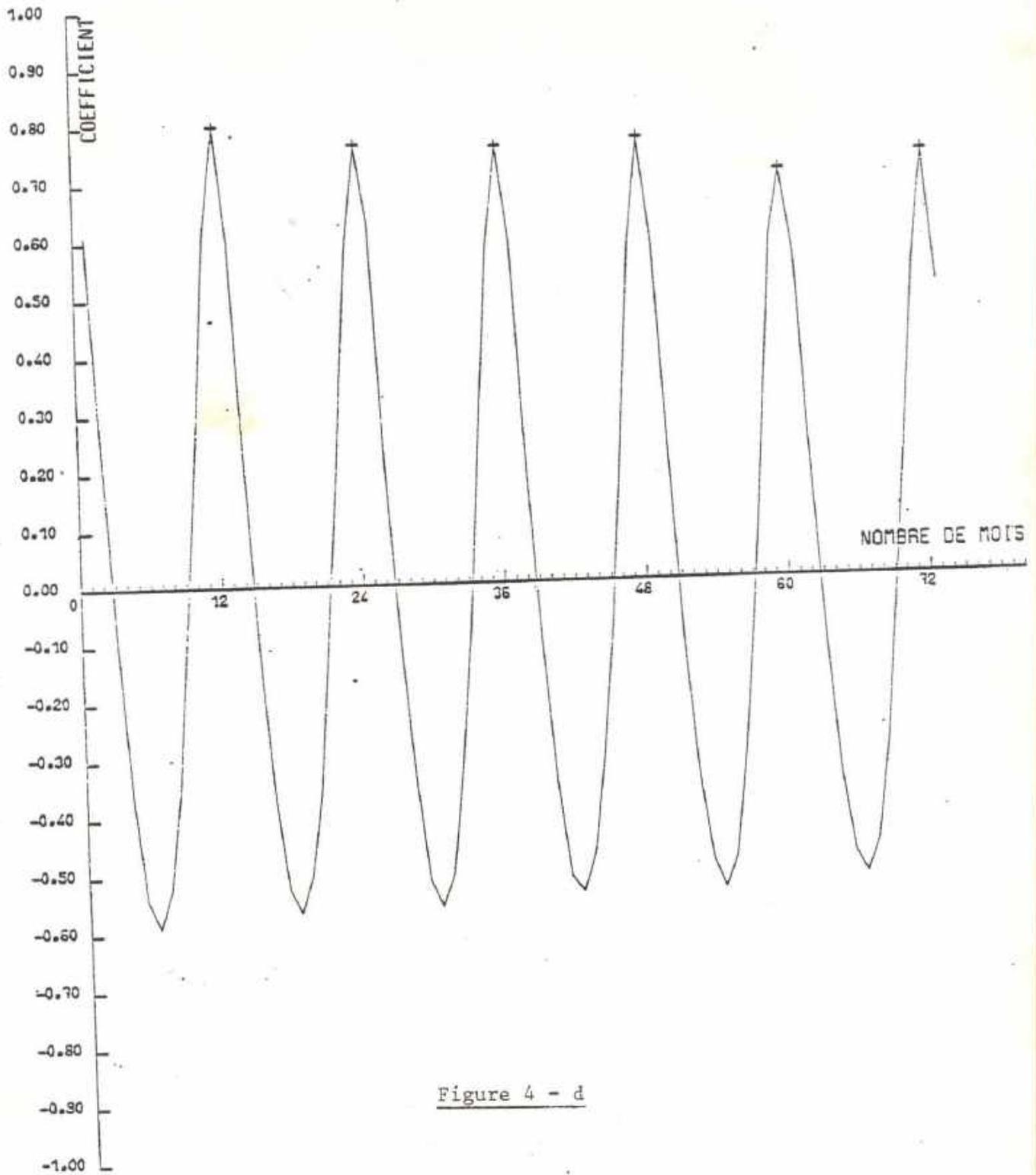


Figure 4 - d

FONCTION D AUTOCORRELATION: KANDI

Pluies mensuelles

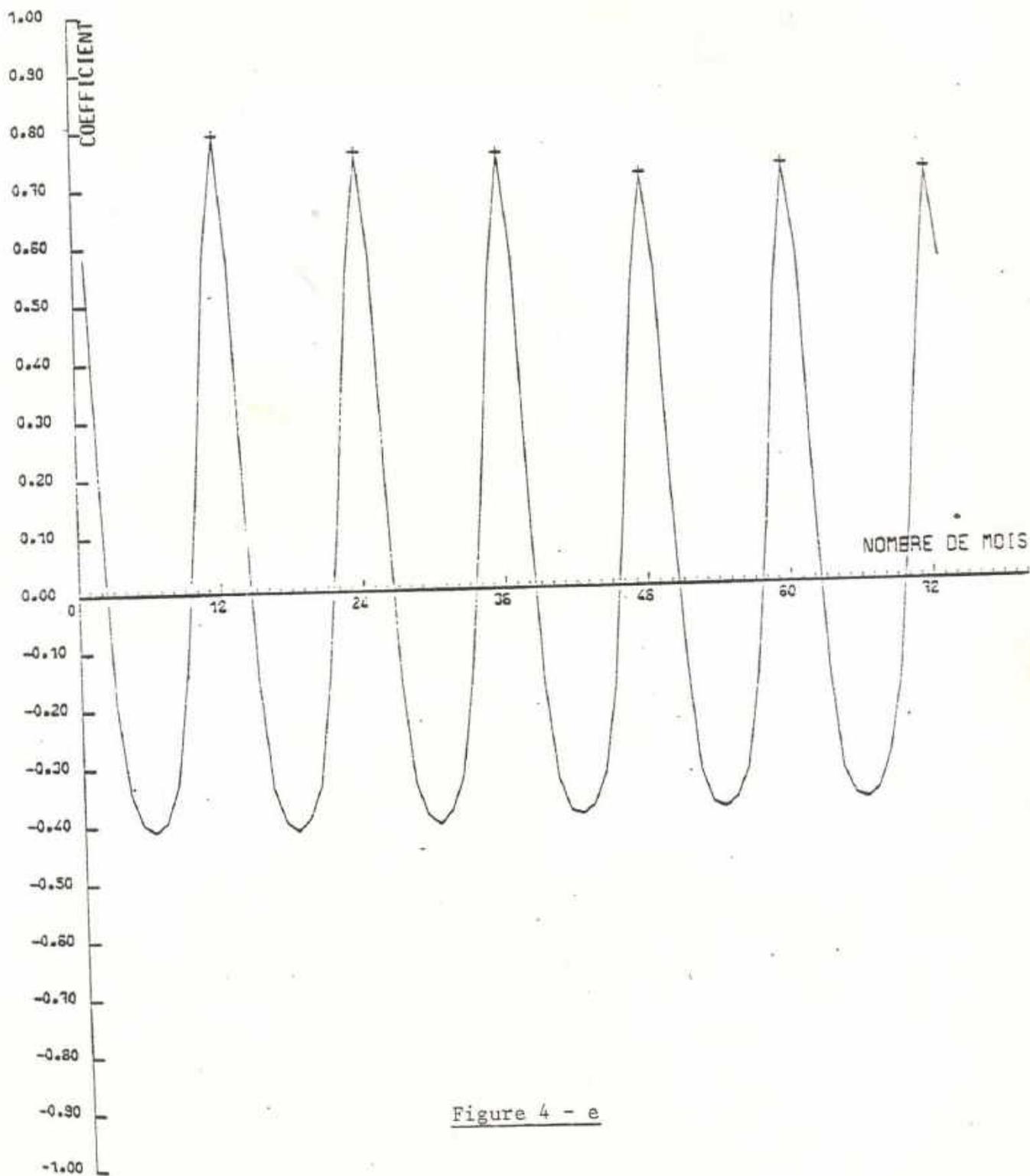


Figure 4 - e

FONCTION D AUTOCORRELATION: ARIBINDA  
Pluies mensuelles

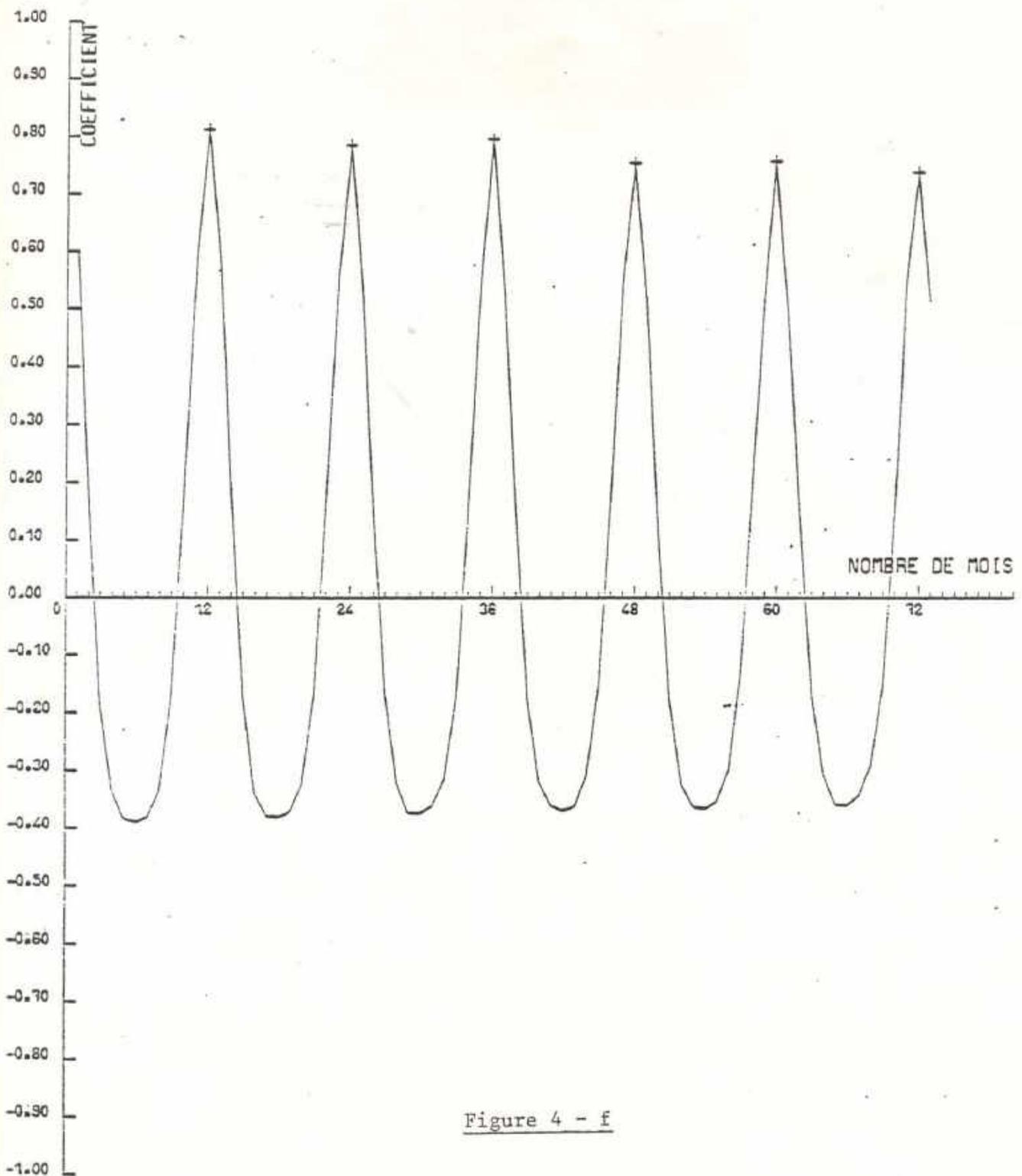


Figure 4 - f

FONCTION D AUTOCORRELATION: MARKOYE

Pluies mensuelles

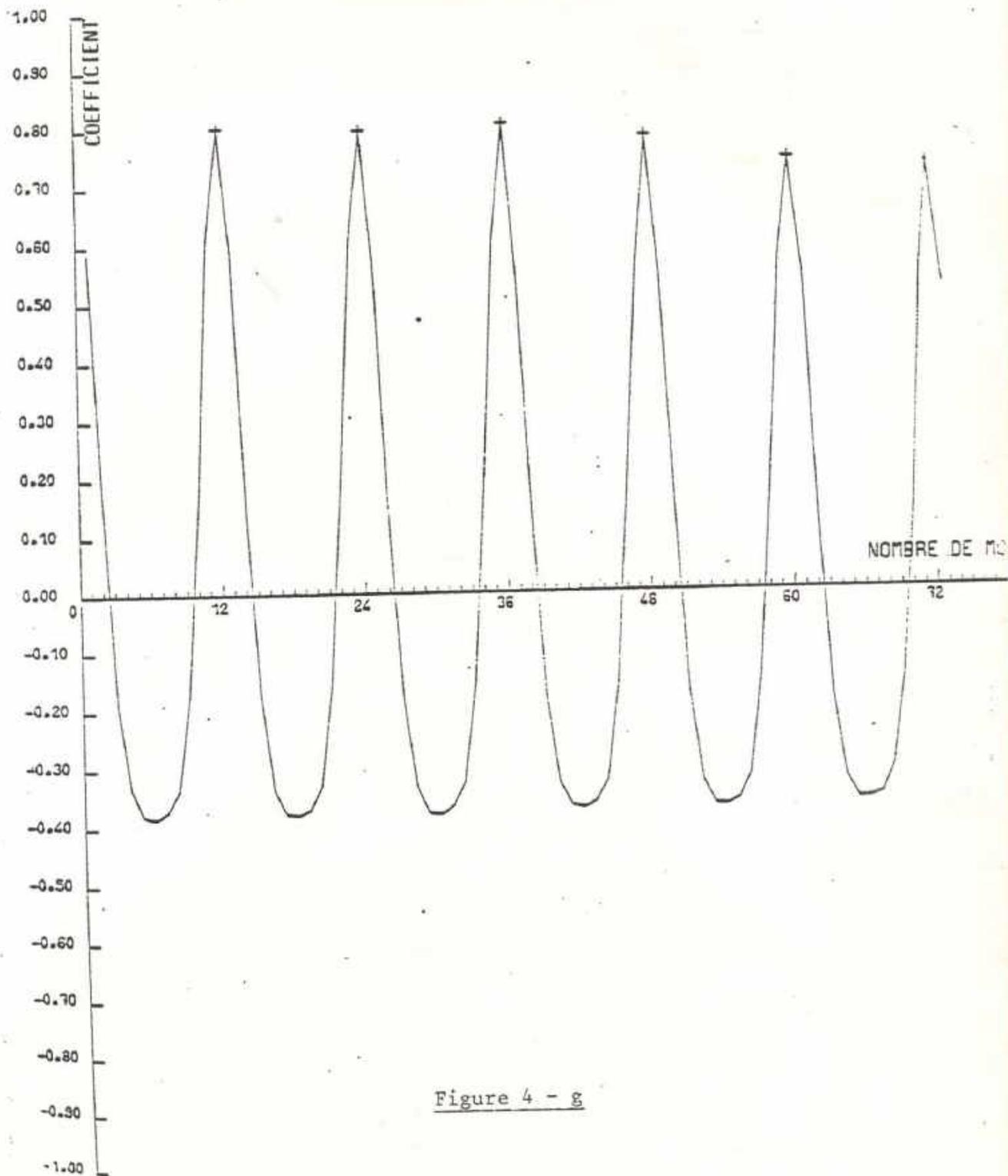
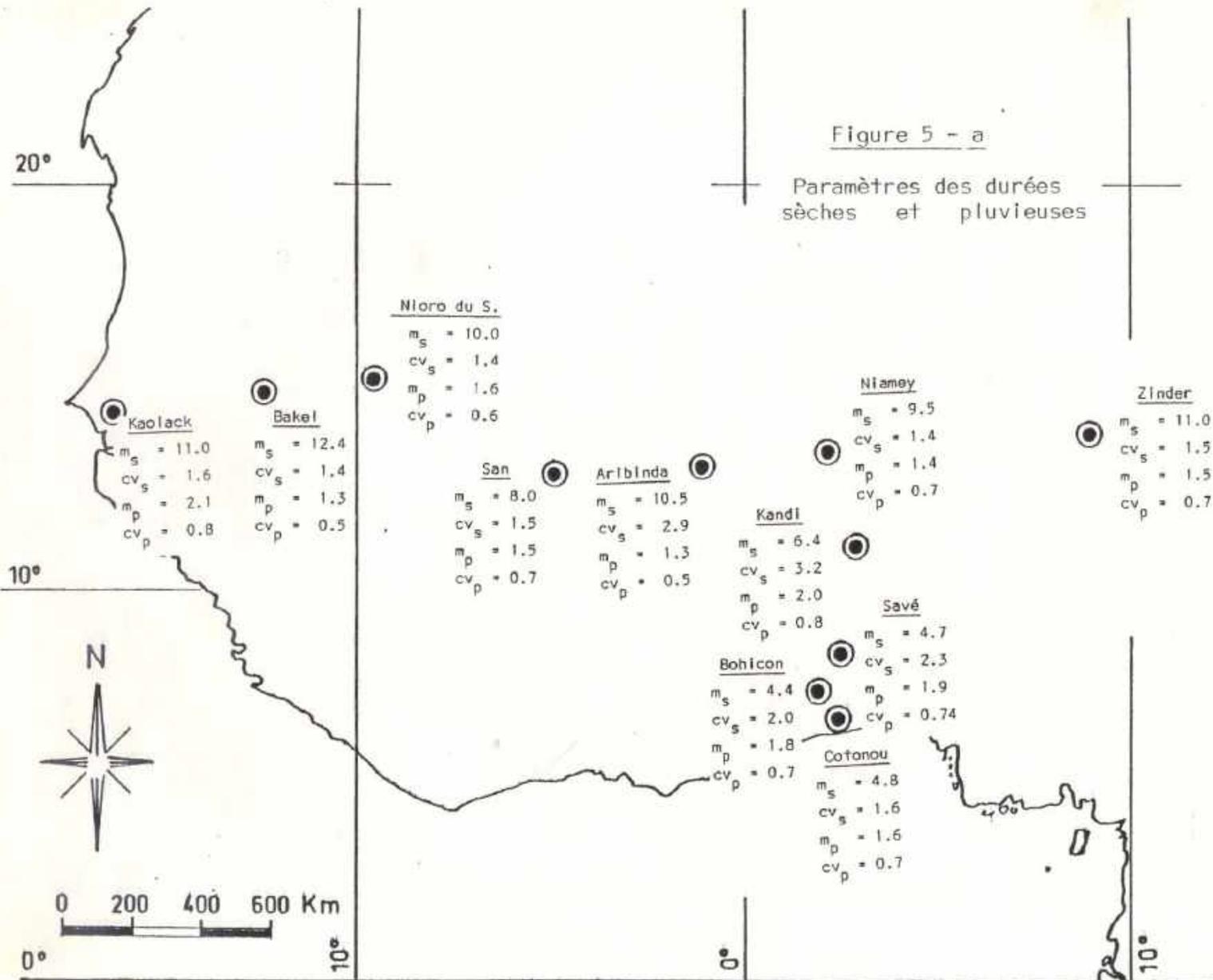


Figure 4 - g

FONCTION D AUTOCORRELATION: G. GOROM  
Pluies mensuelles

Figure 5 - a

Paramètres des durées sèches et pluvieuses



Legende

- $m_s$  - moyenne annuelle des durées sèches
- $m_p$  - moyenne annuelle des durées pluvieuses
- $cv_s$  - coefficient de variation des périodes sèches
- $cv_p$  - coefficient de variation des périodes pluvieuses

Figure 5 - b

Probabilités conditionnelles  
durées sèches

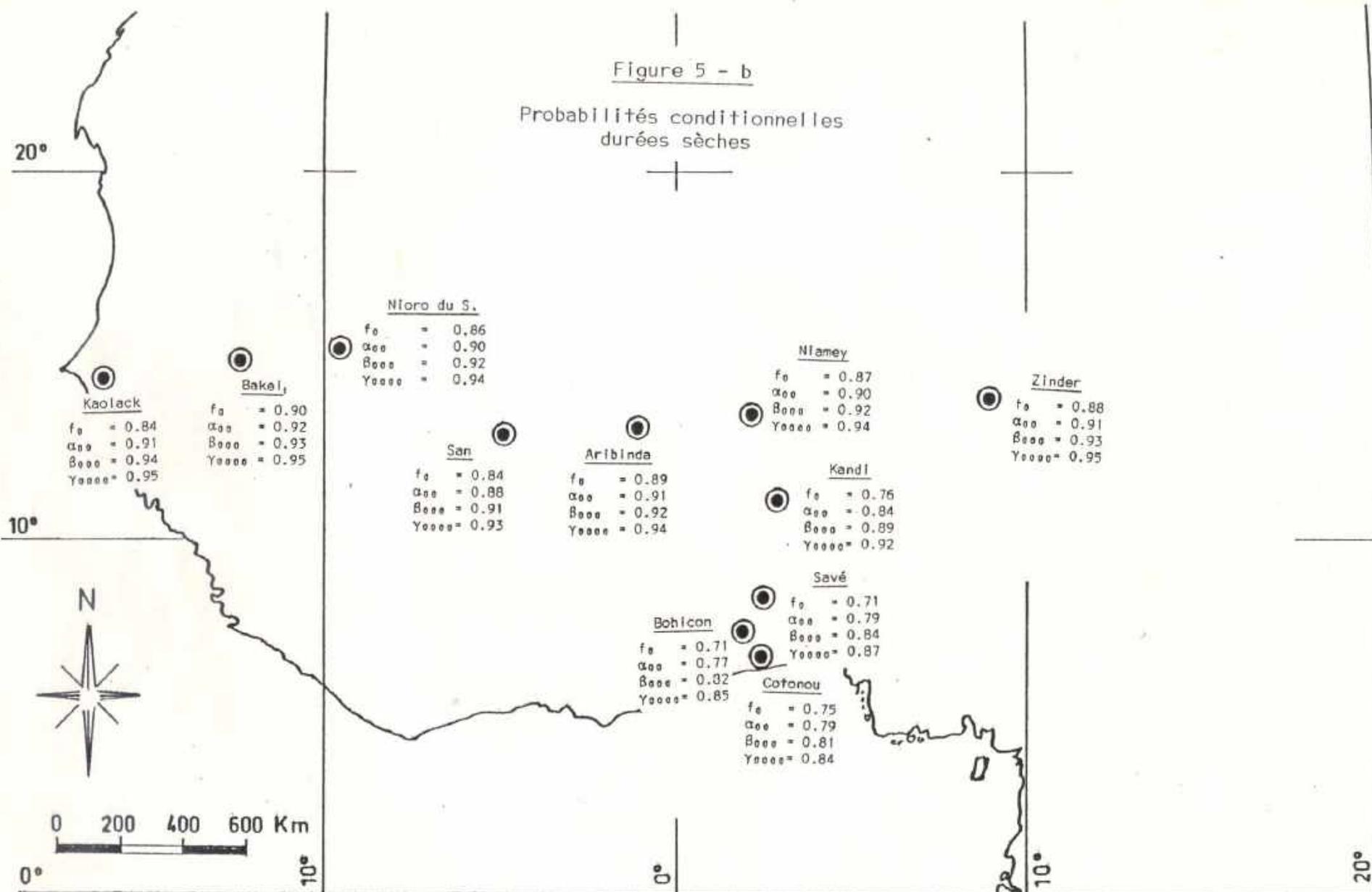


Figure 5 - c  
 Probabilités conditionnelles  
 durées pluvieuses

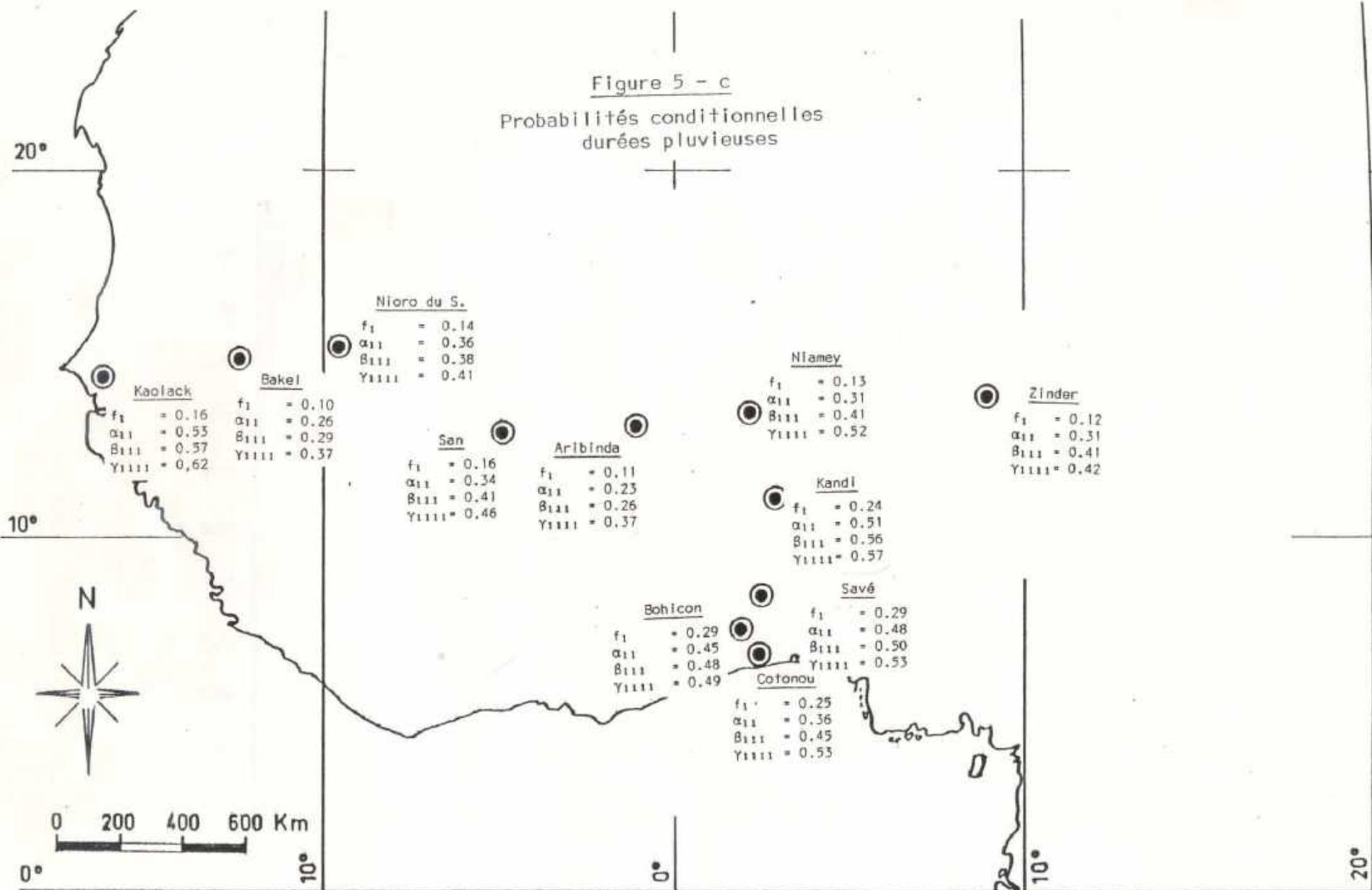
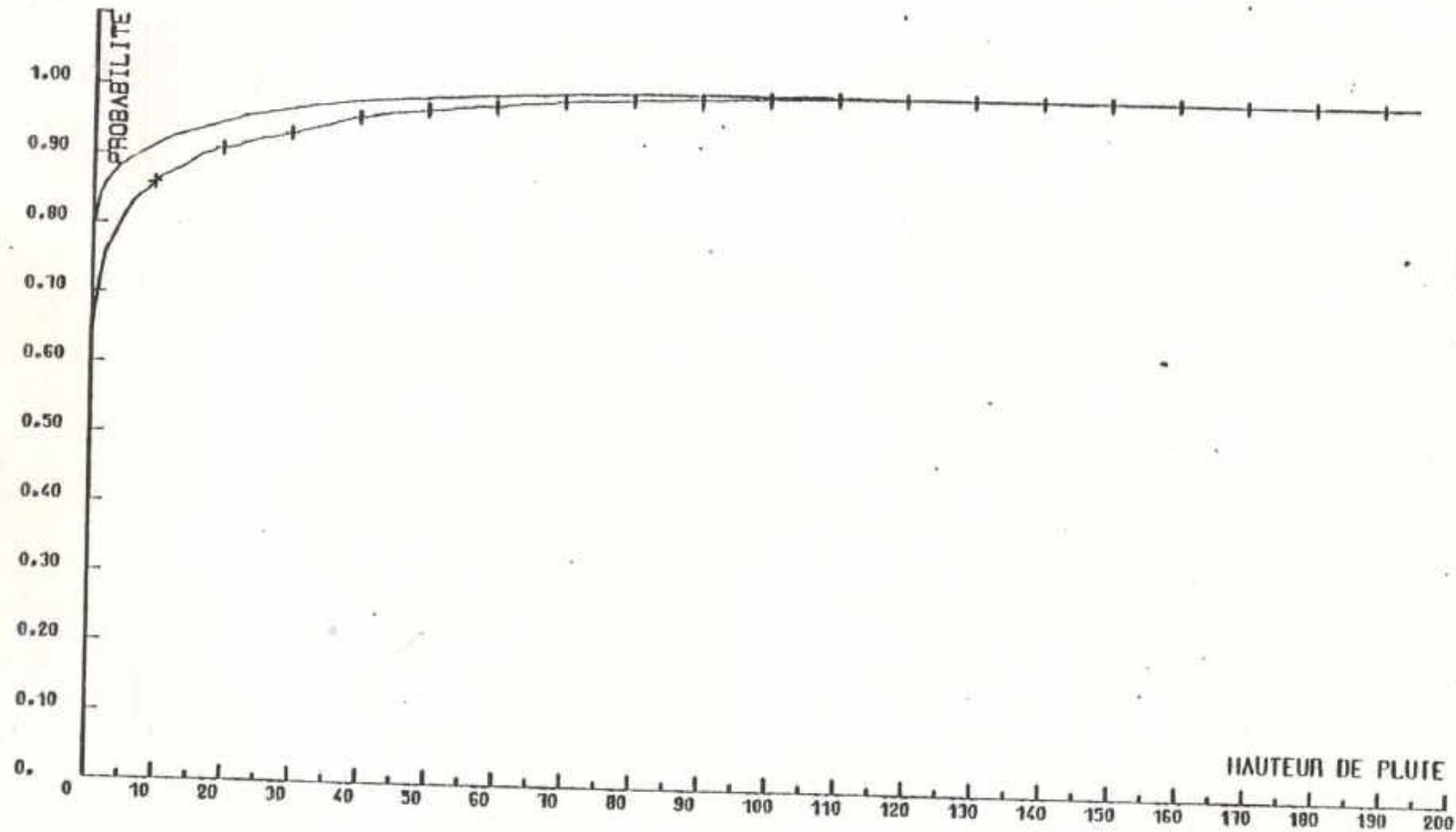
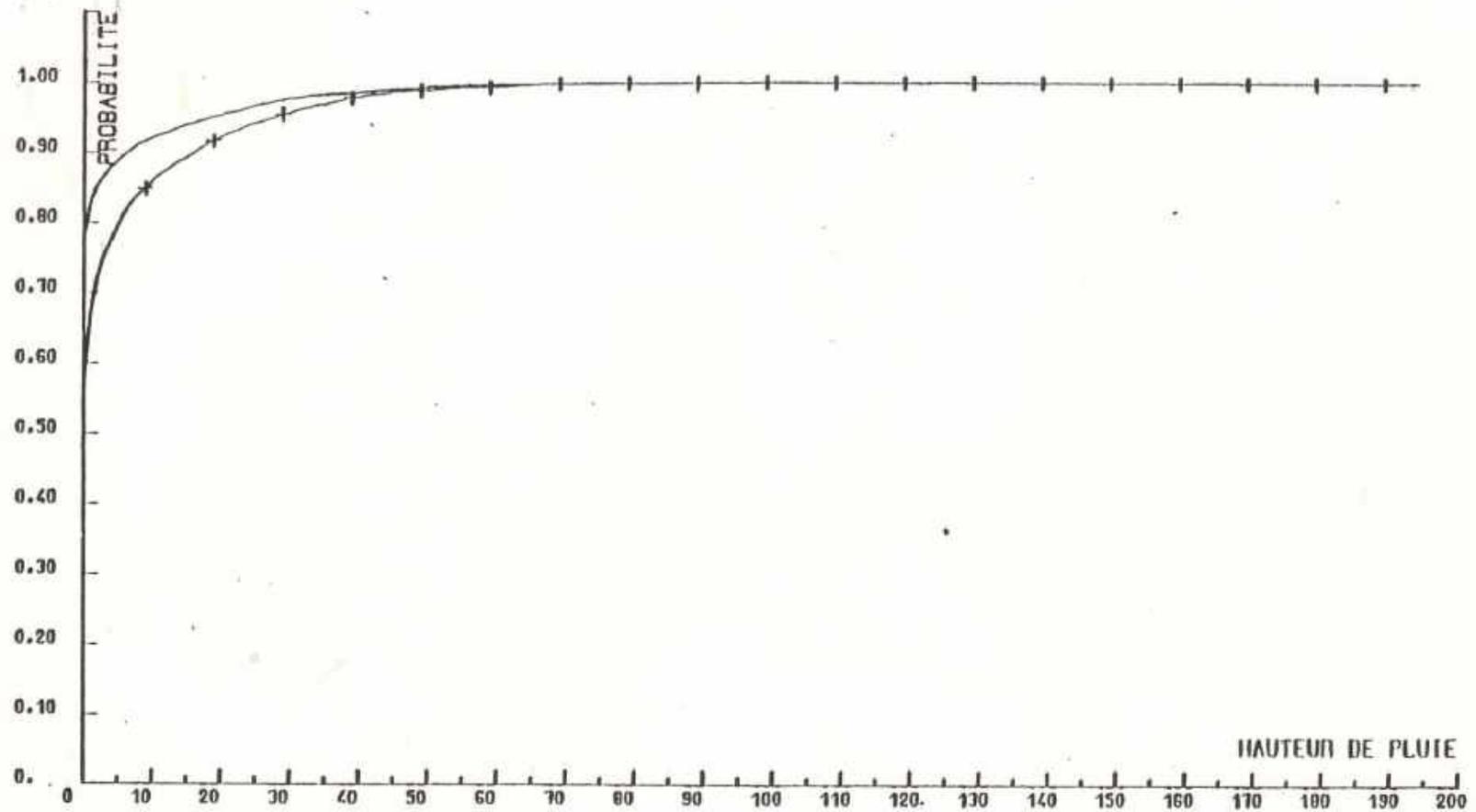


Figure 6 - a : Courbe  $F_{0i}$



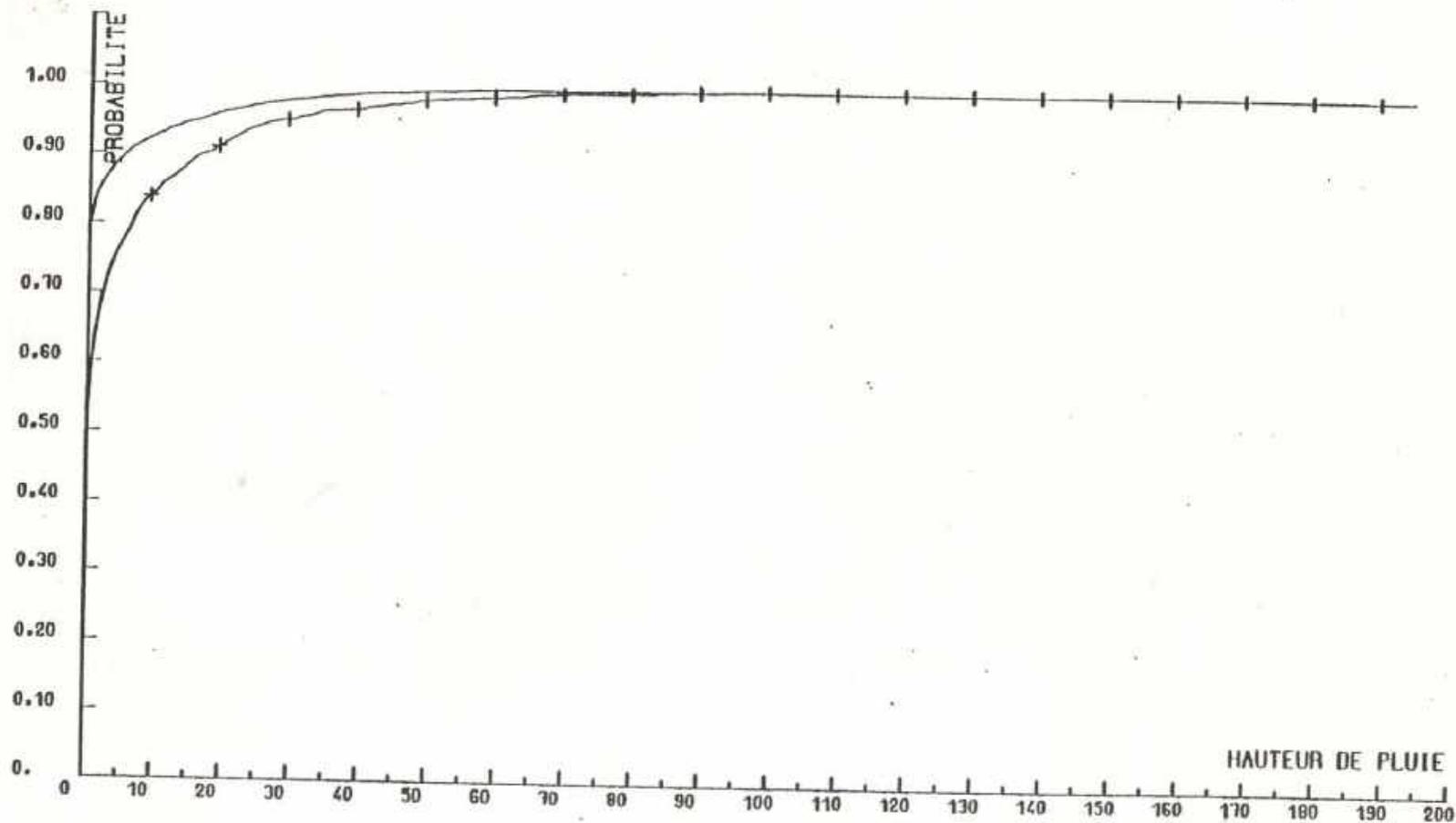
FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: COTONOU

Figure 6 - b : Courbe  $F_{0i}$



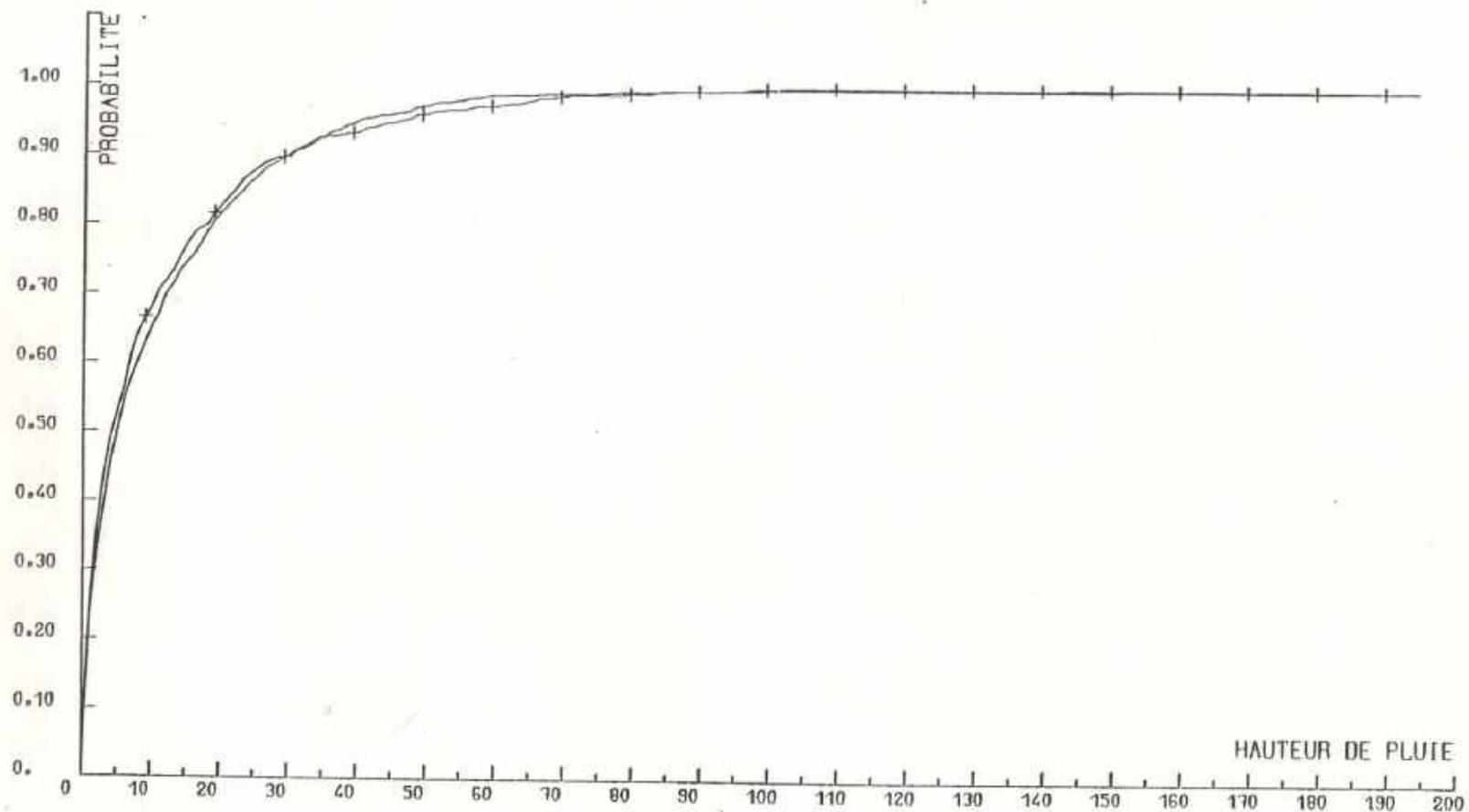
FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: BOHICON

Figure 6 - c : Courbe  $F_{0i}$



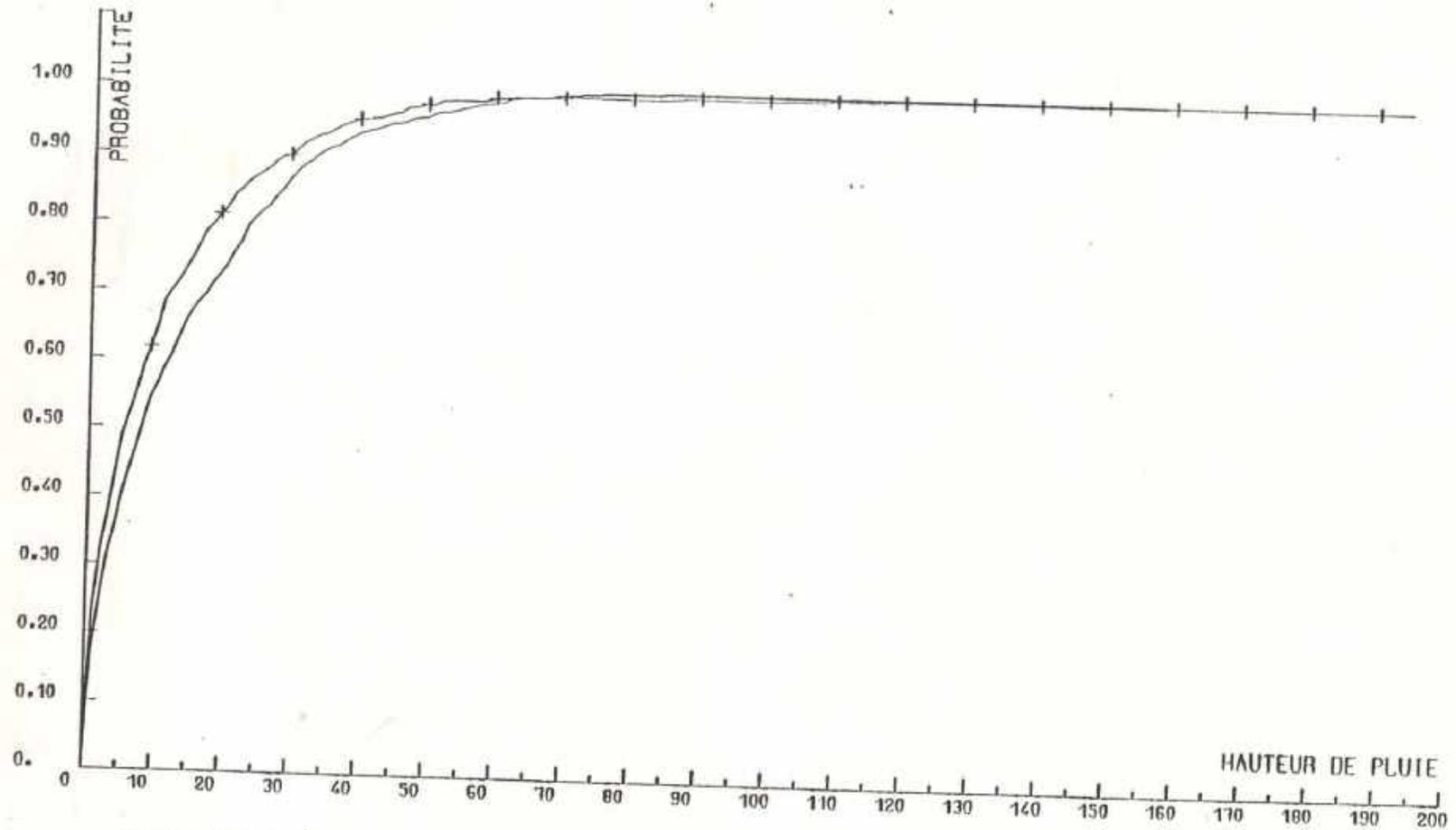
FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: SAVE

Figure 6 - c bis : Courbe F<sub>11</sub>



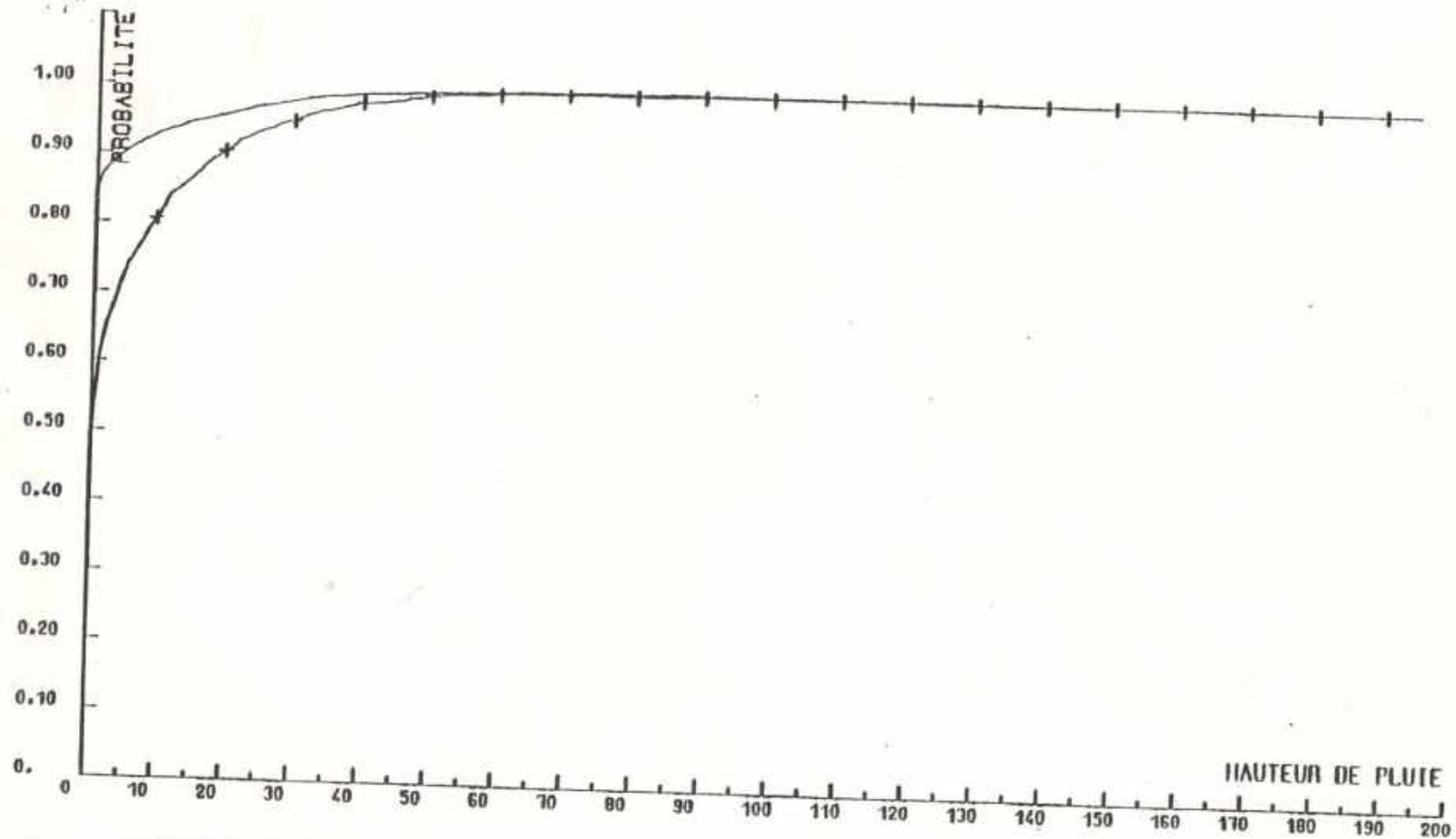
FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: SAVE

Figure 6 - d bis : Courbe  $F_{11}$



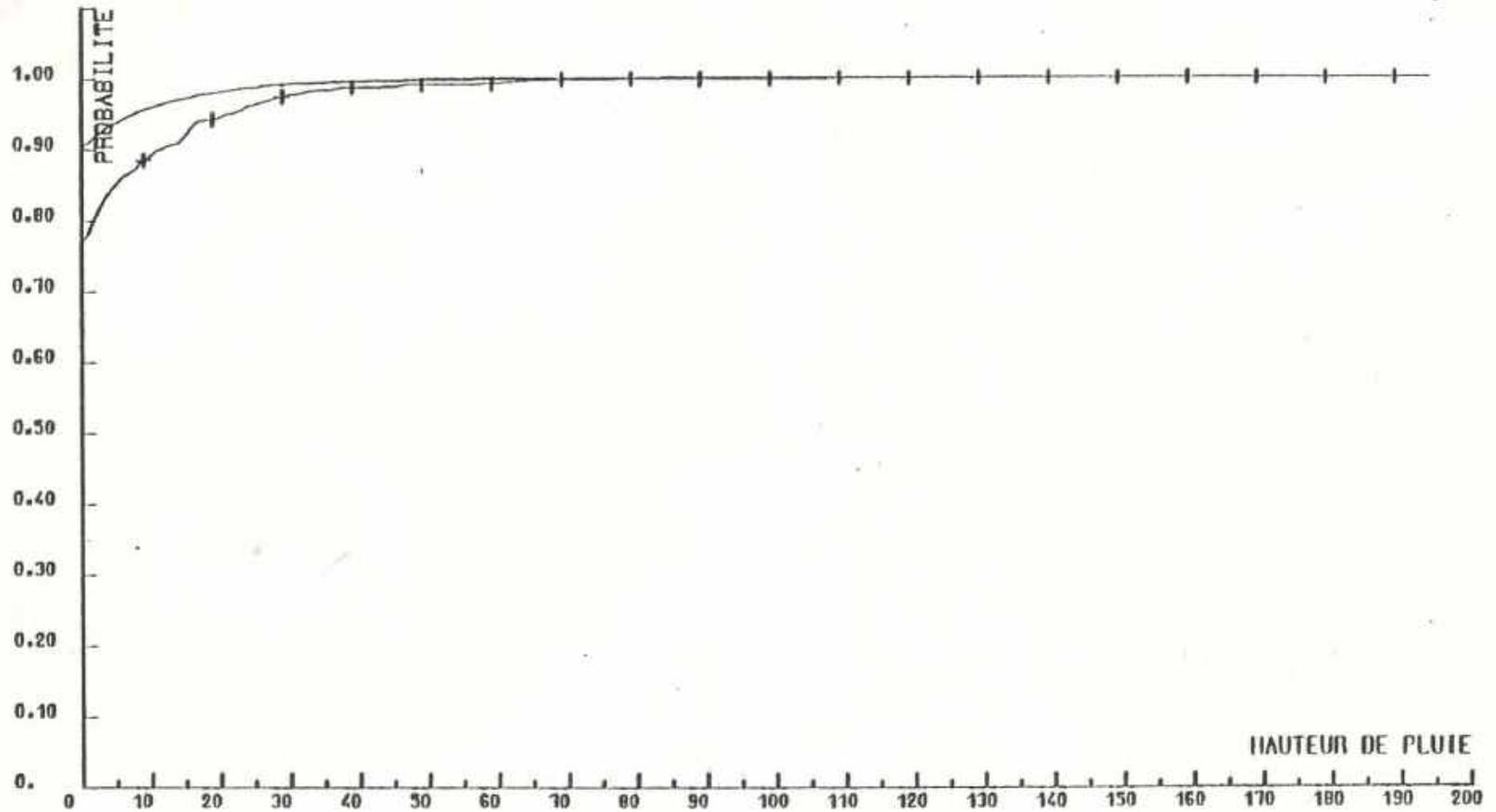
FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: KANDI

Figure 6 - d : Courbe  $F_{0i}$



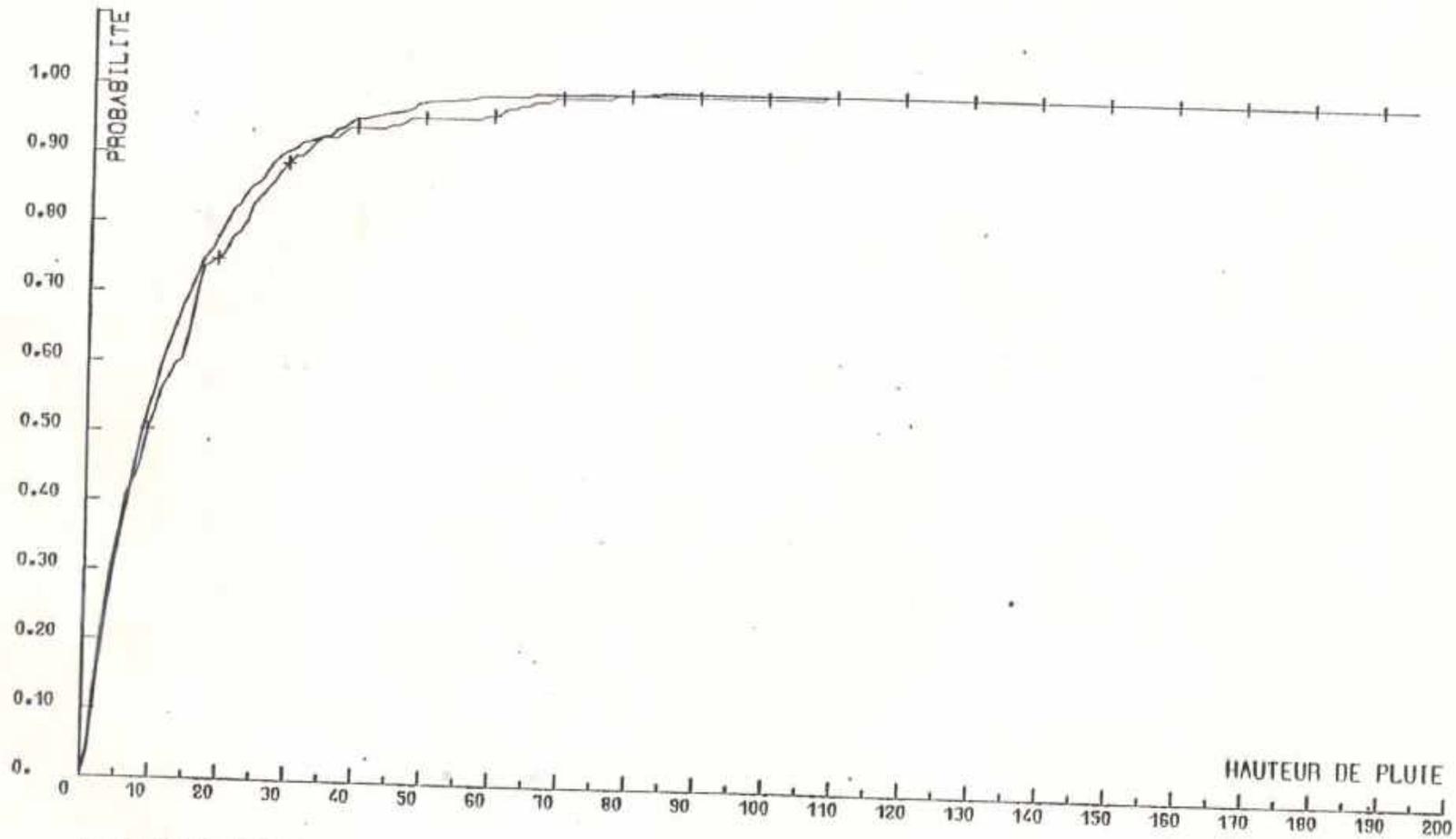
FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: KANDI

Figure 6 - e : Courbe  $F_{0i}$



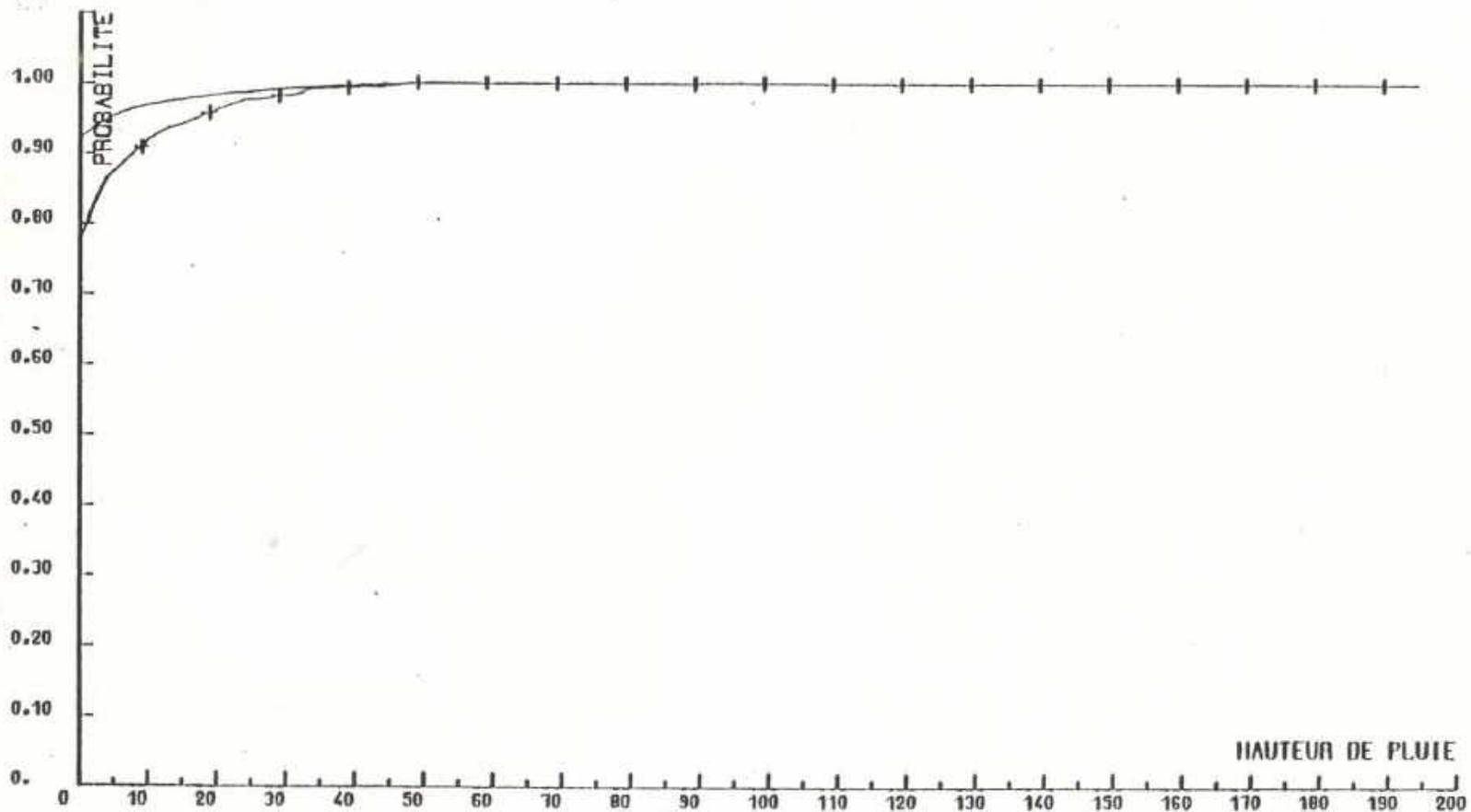
FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: ARIBINDA

Figure 6 - e bis : Courbe  $F_{11}$



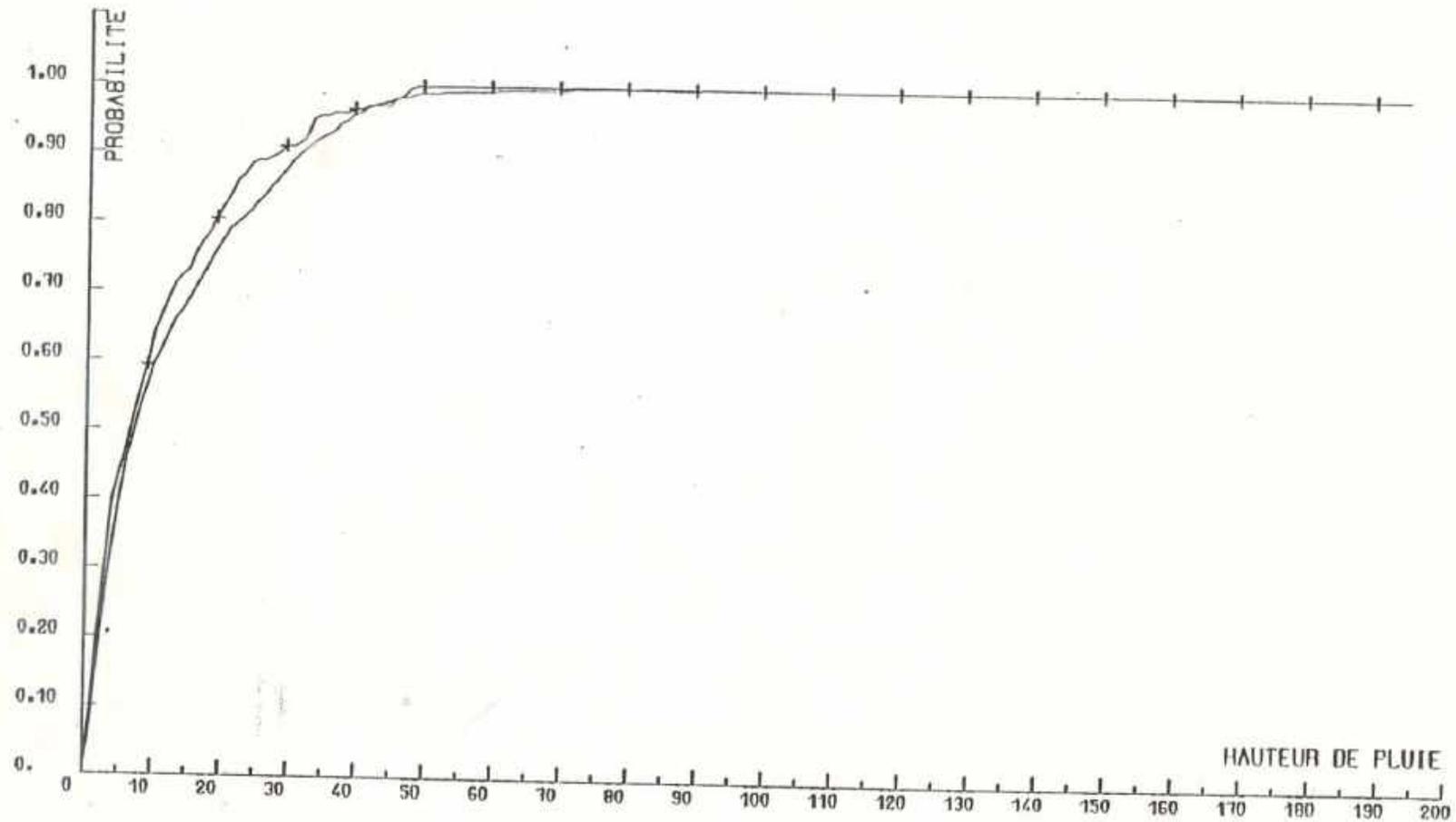
FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: ARIBINDA

Figure 6 - f : Courbe  $F_{0i}$



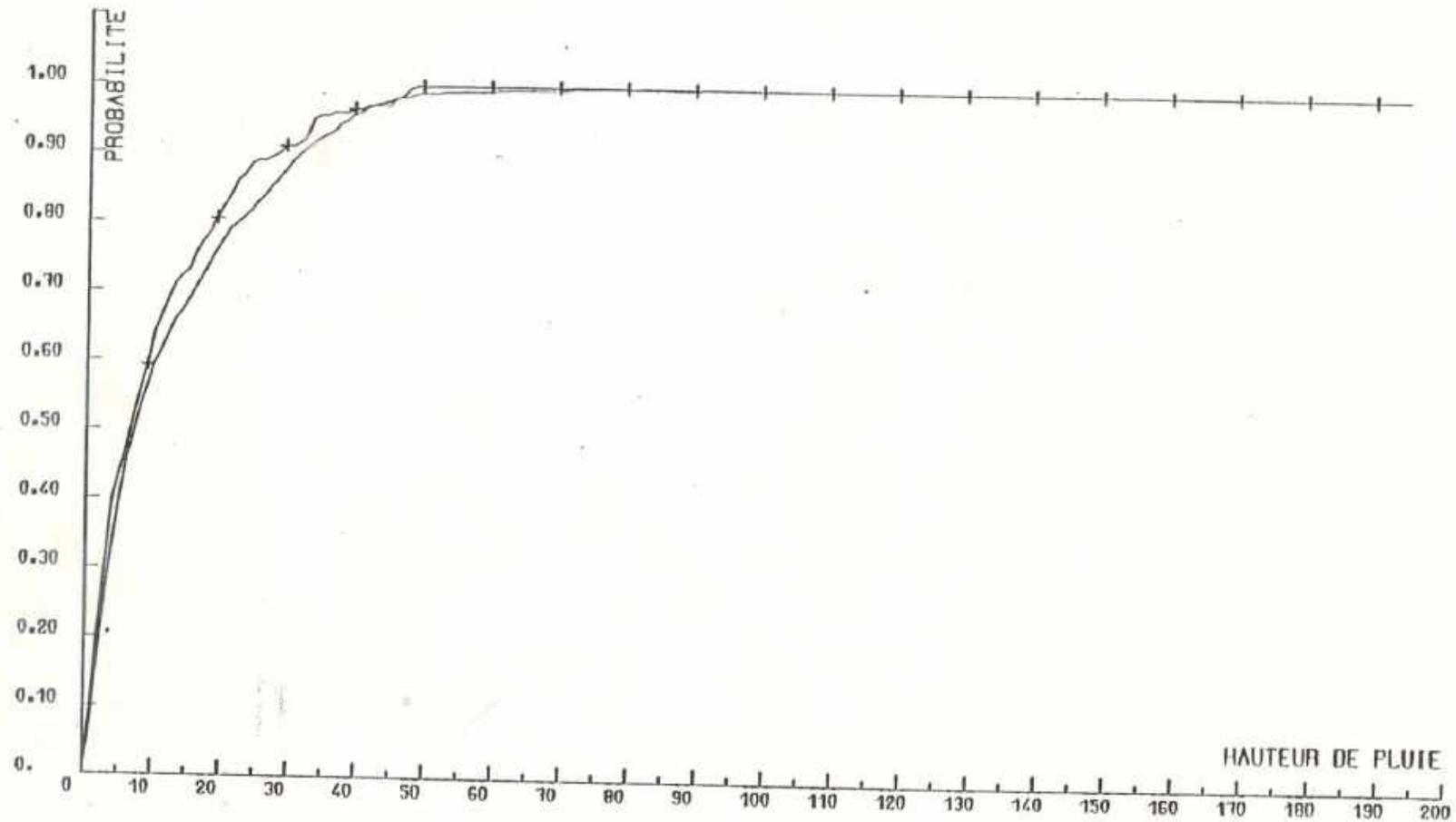
FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: MARKOYE

Figure 6 - f bis : Courbe F<sub>11</sub>



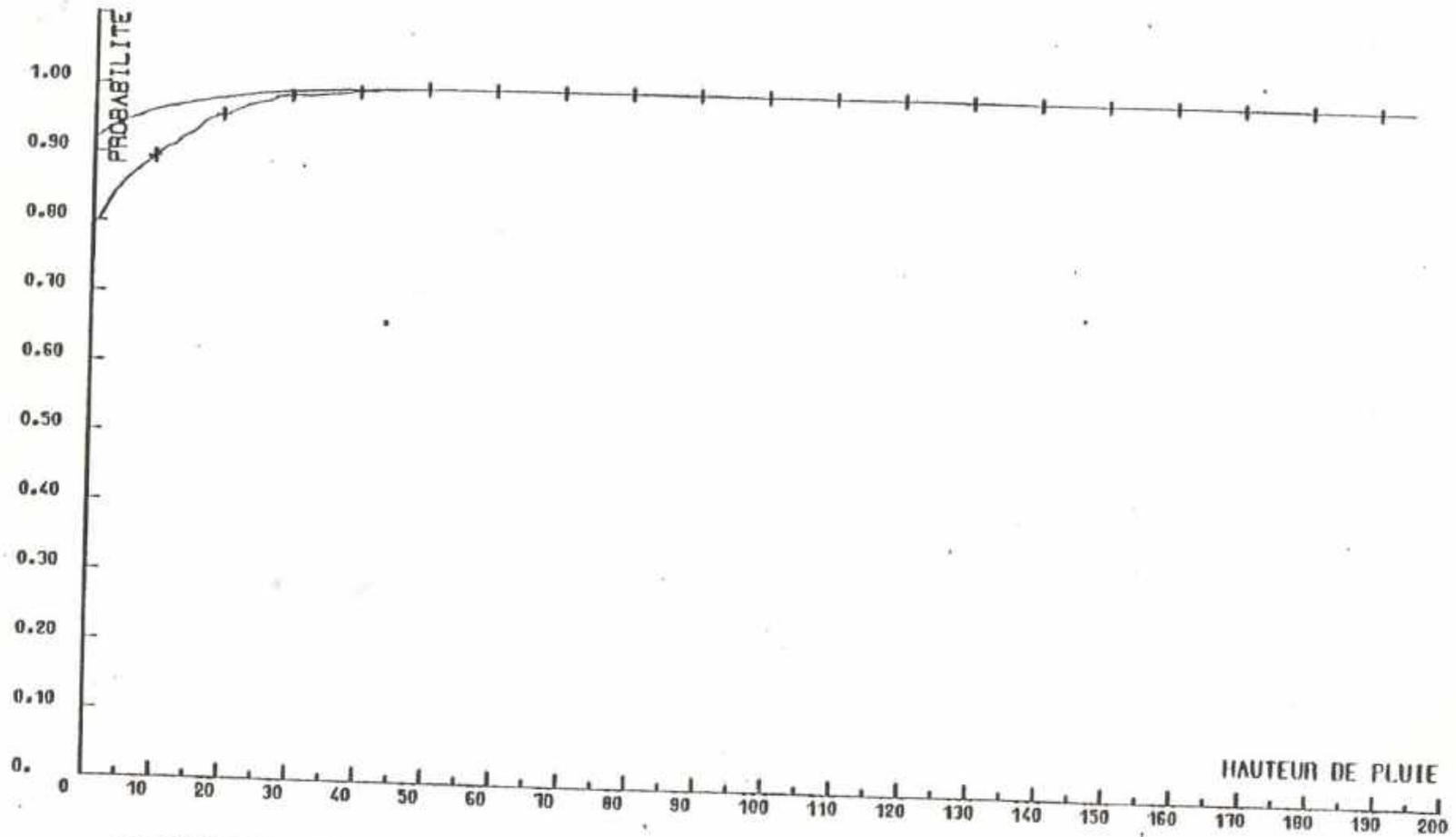
FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: MARKOYE

Figure 6 - f bis : Courbe F<sub>11</sub>



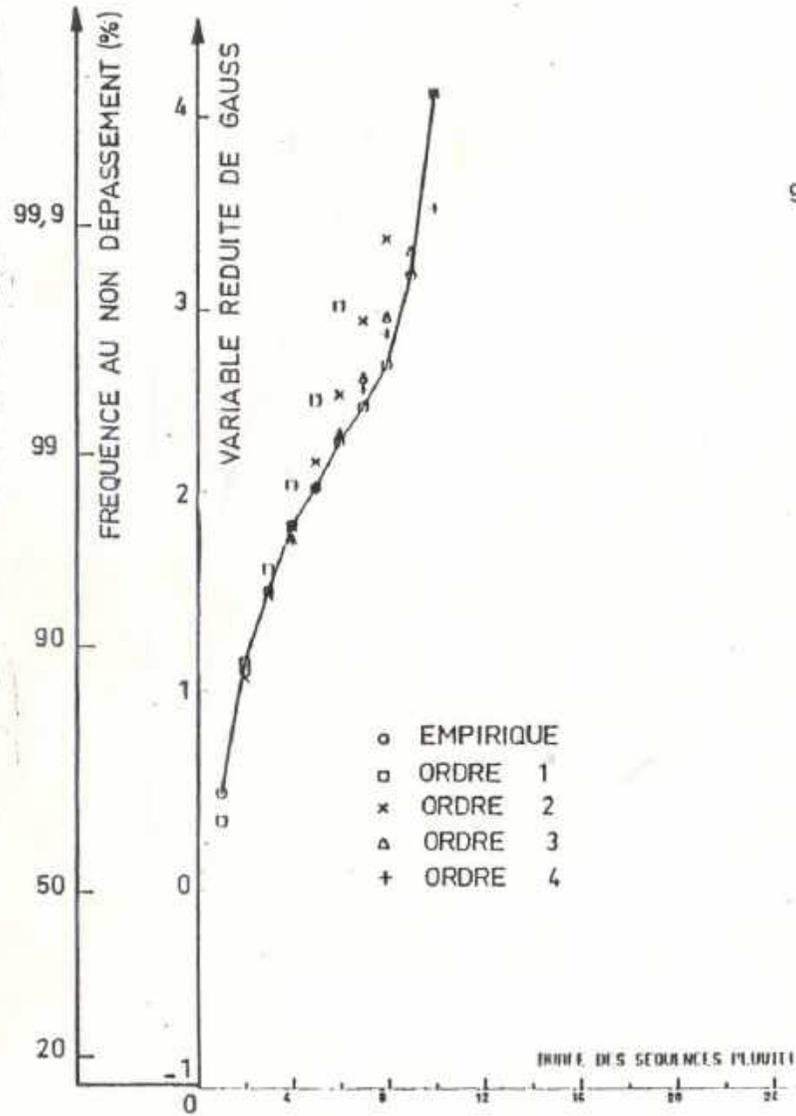
FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: MARKOYE

Figure 6 - g : Courbe  $F_{0i}$

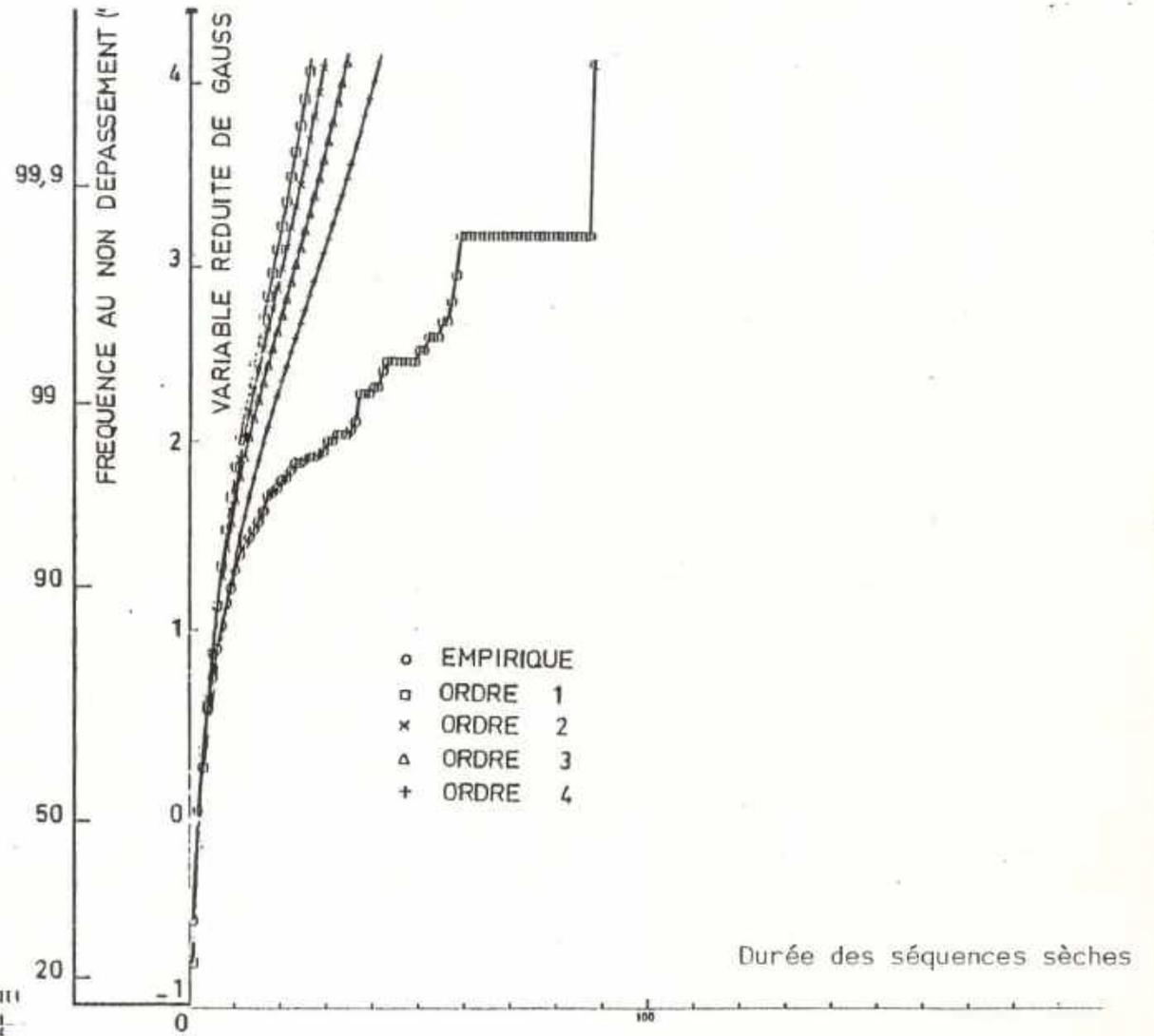


FONCTIONS DE REPARTITION CONDITIONNELLES: GOROM

Figure 7 - a : FONCTION DE REPARTITION DES DUREES



COTONOU



COTONOU

Figure 7-b: Fonction de repartition des durées

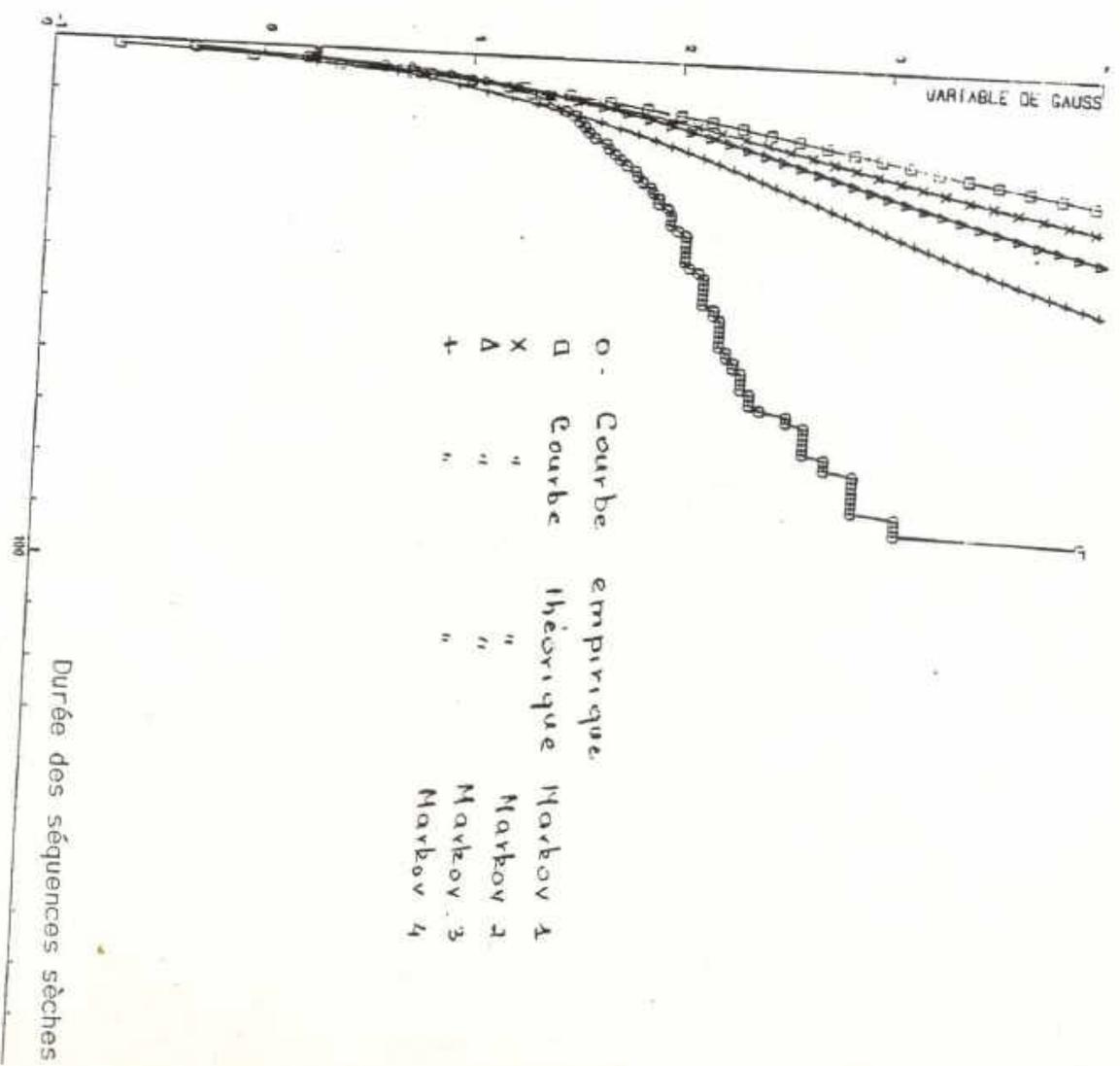
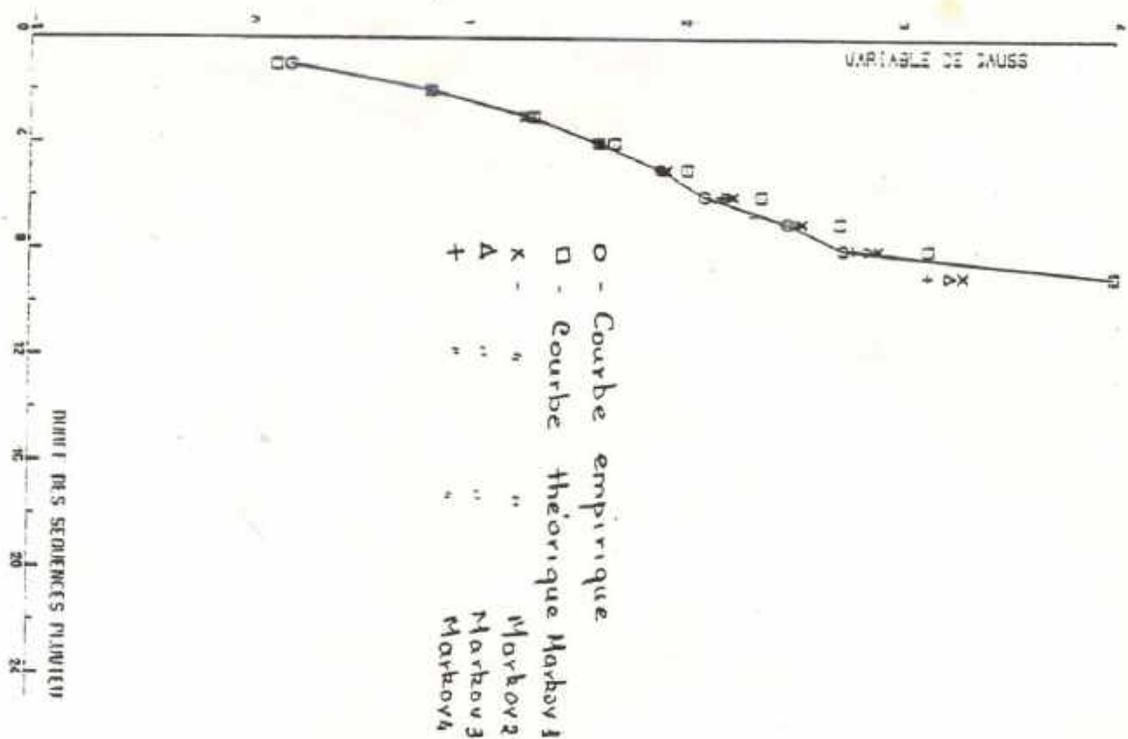


Figure 7-b: Fonction de repartition des durées

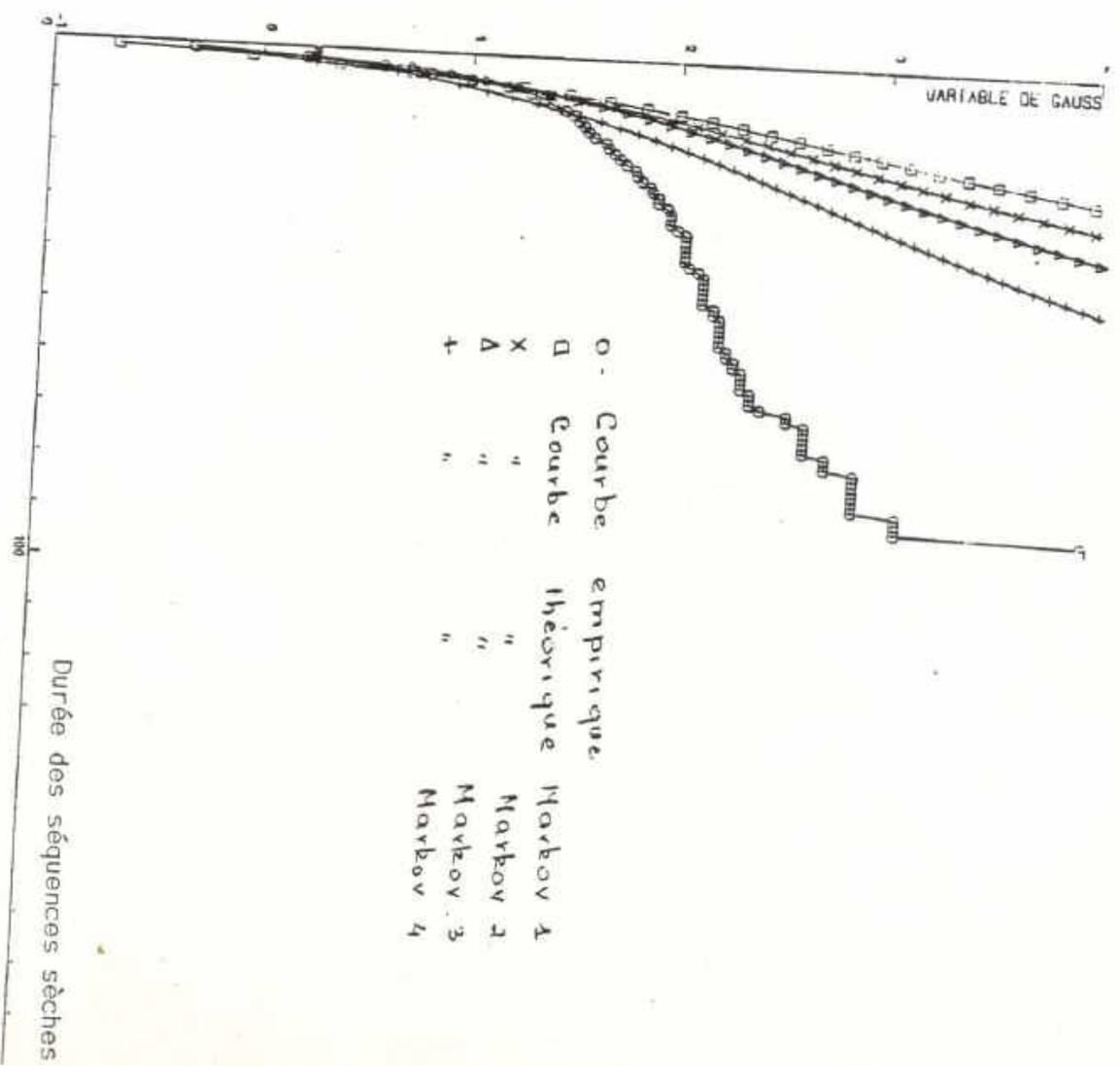
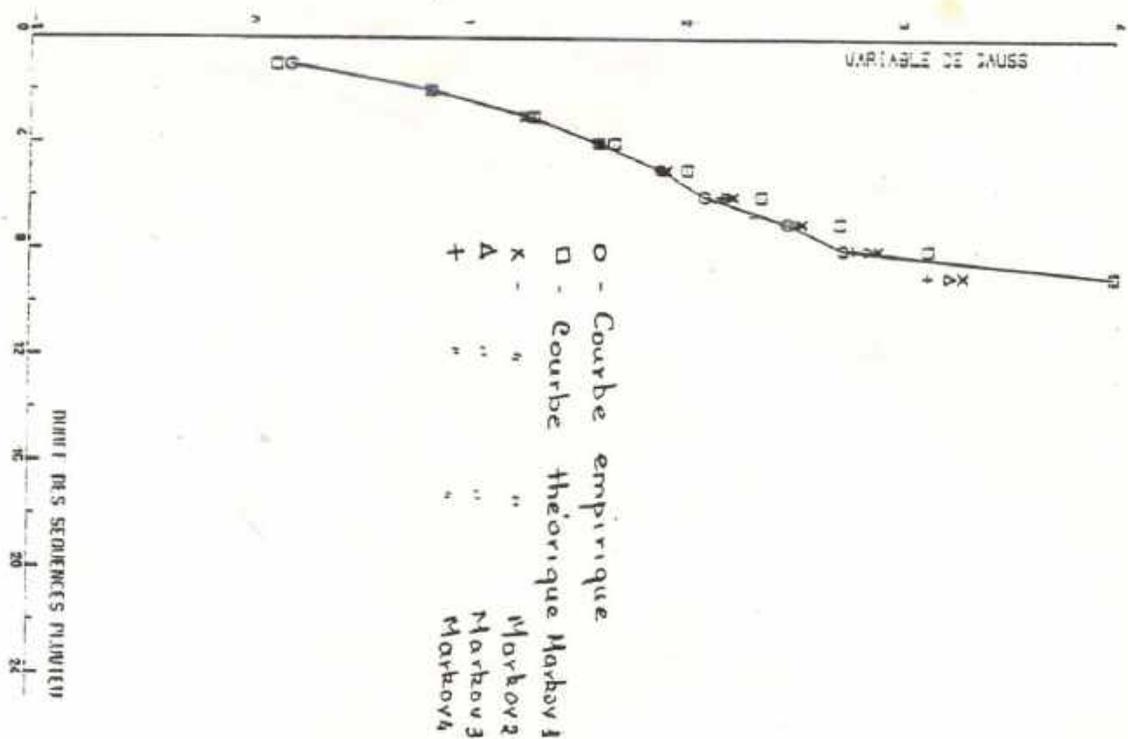


Figure 7 - c : FONCTION DE REPARTITION DES DUREES

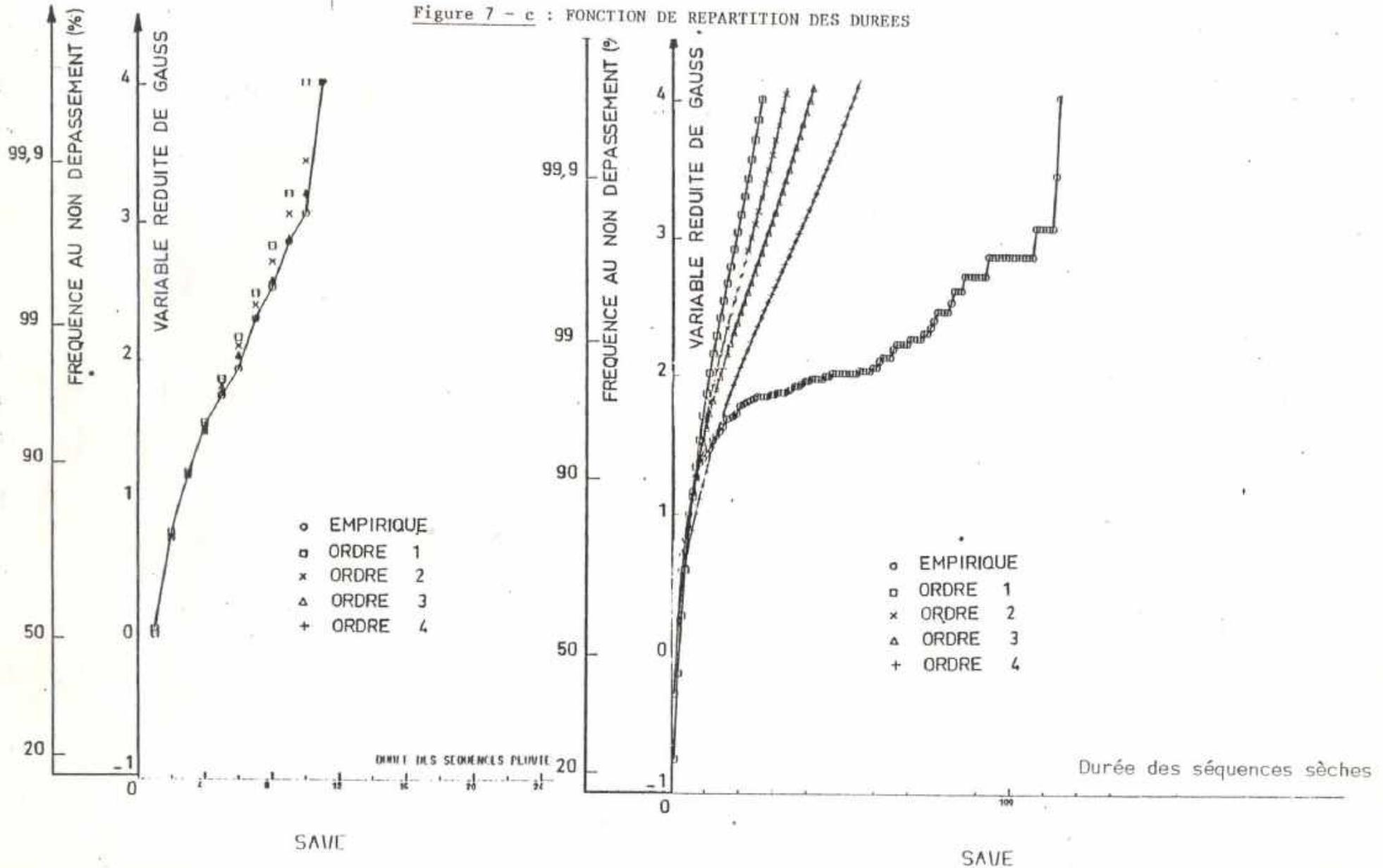


Figure 7 - c : FONCTION DE REPARTITION DES DUREES

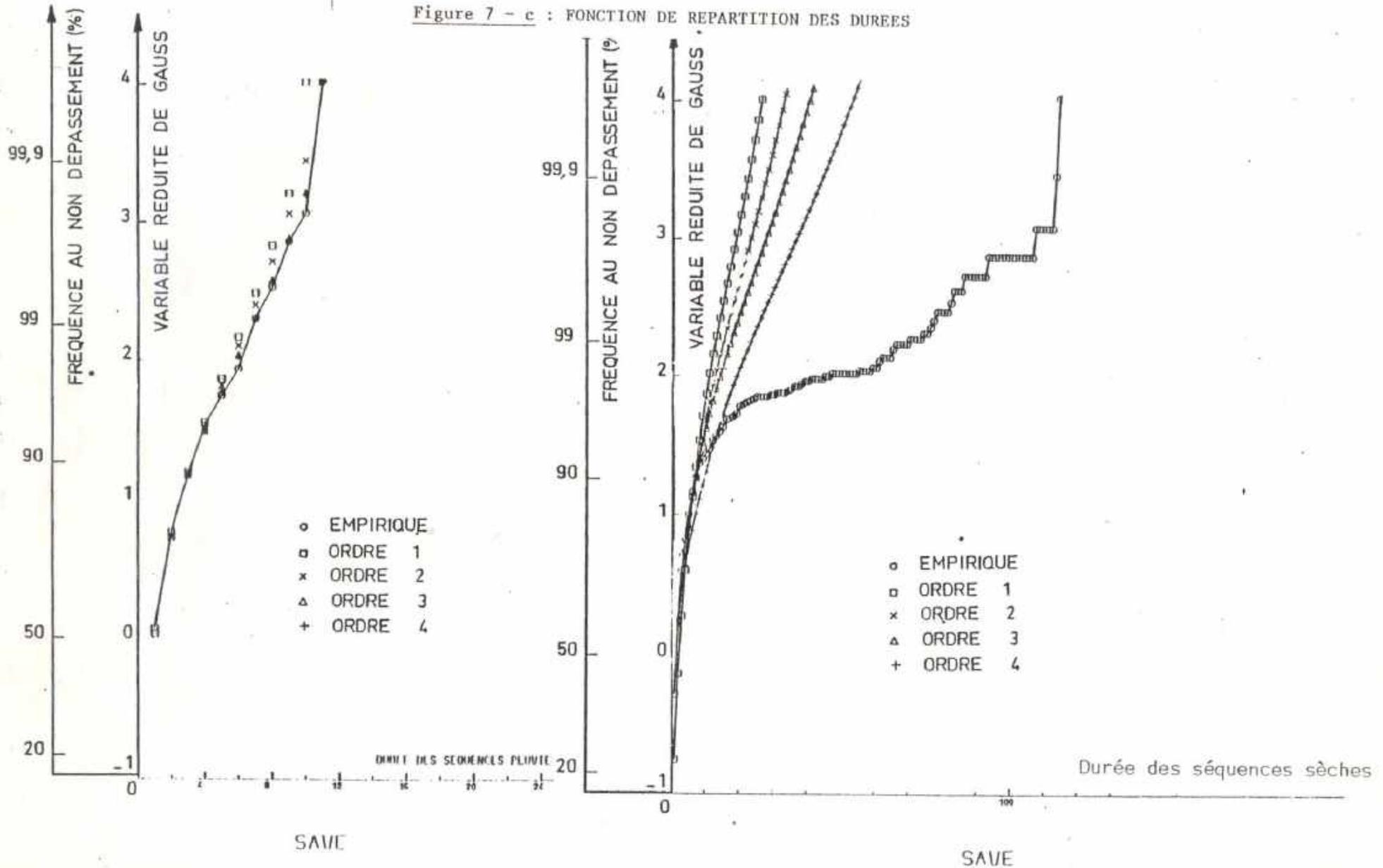
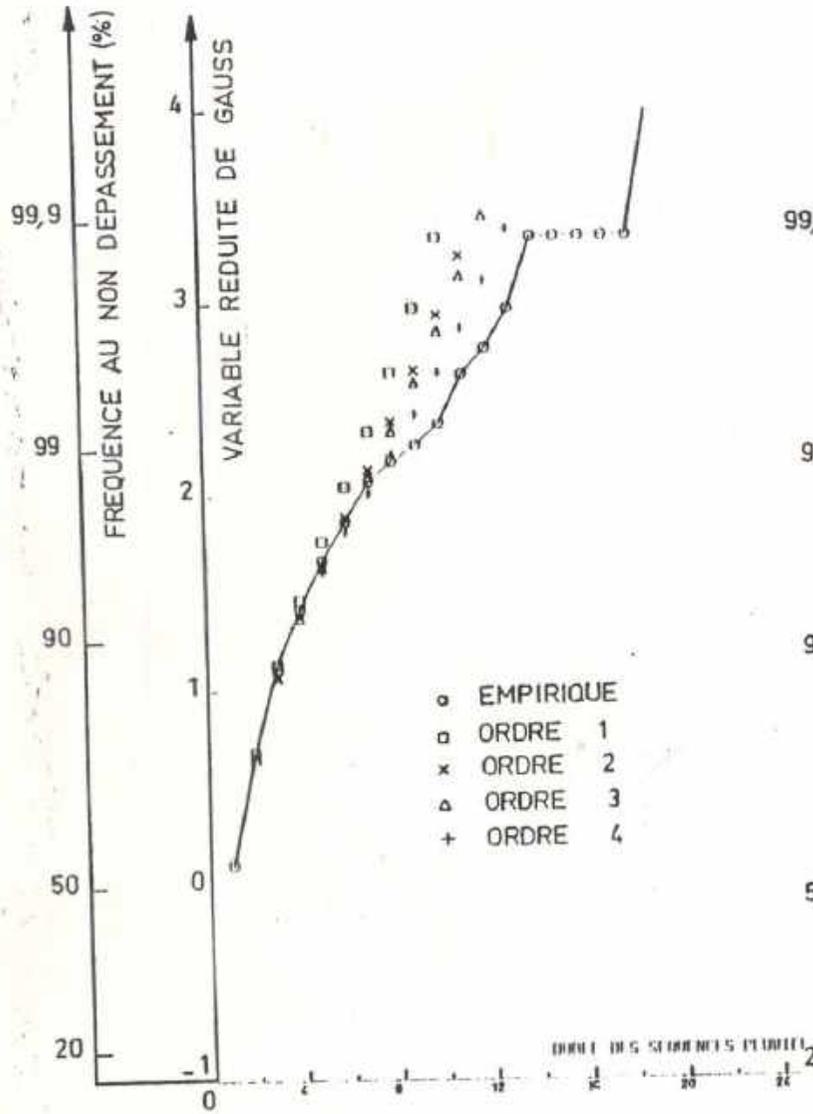
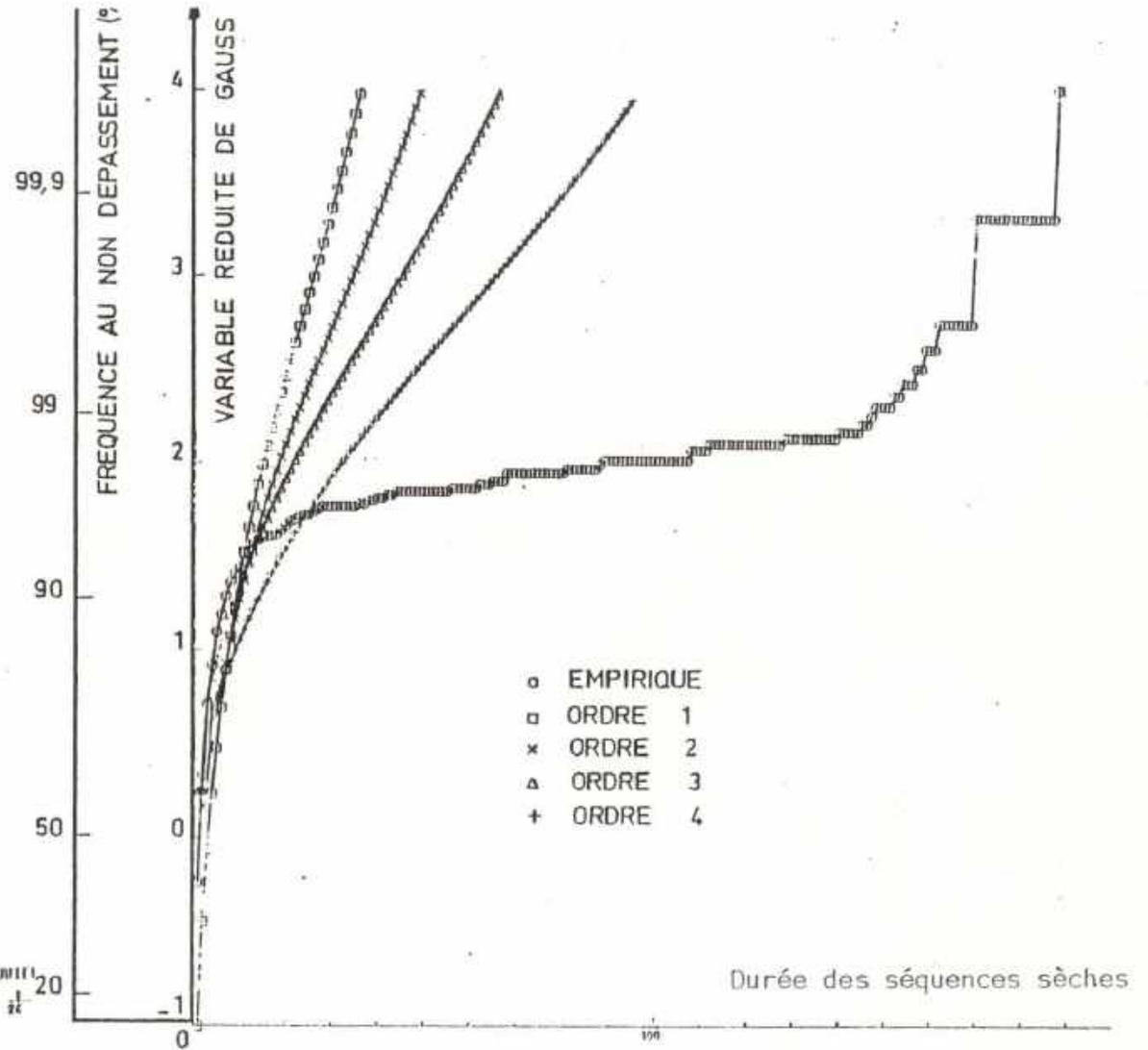


Figure 7 - d : FONCTION DE REPARTITION DES DUREES



KANDI



KANDI

Figure 7 - e : Fonction de repartition des durées

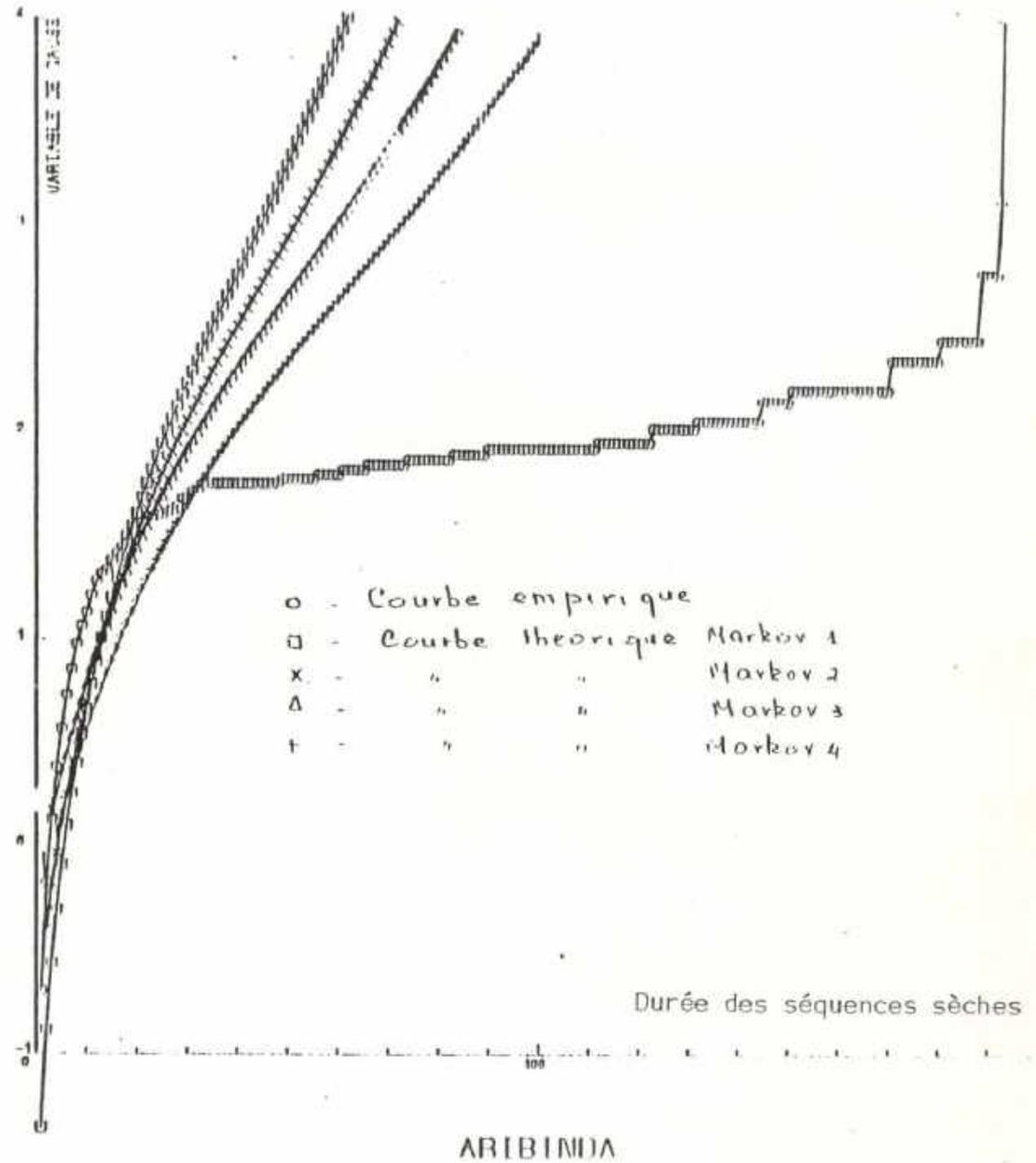
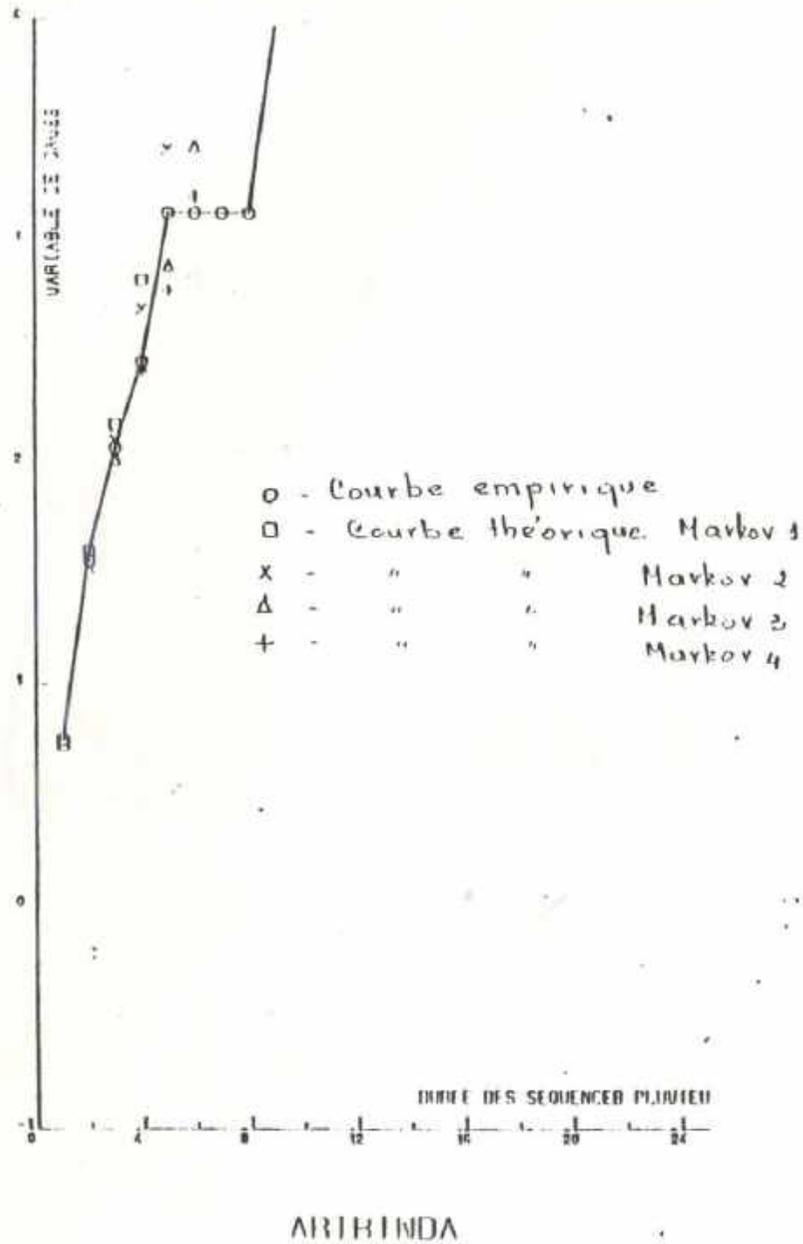


Figure 7-8: Fonction de repartition des durées

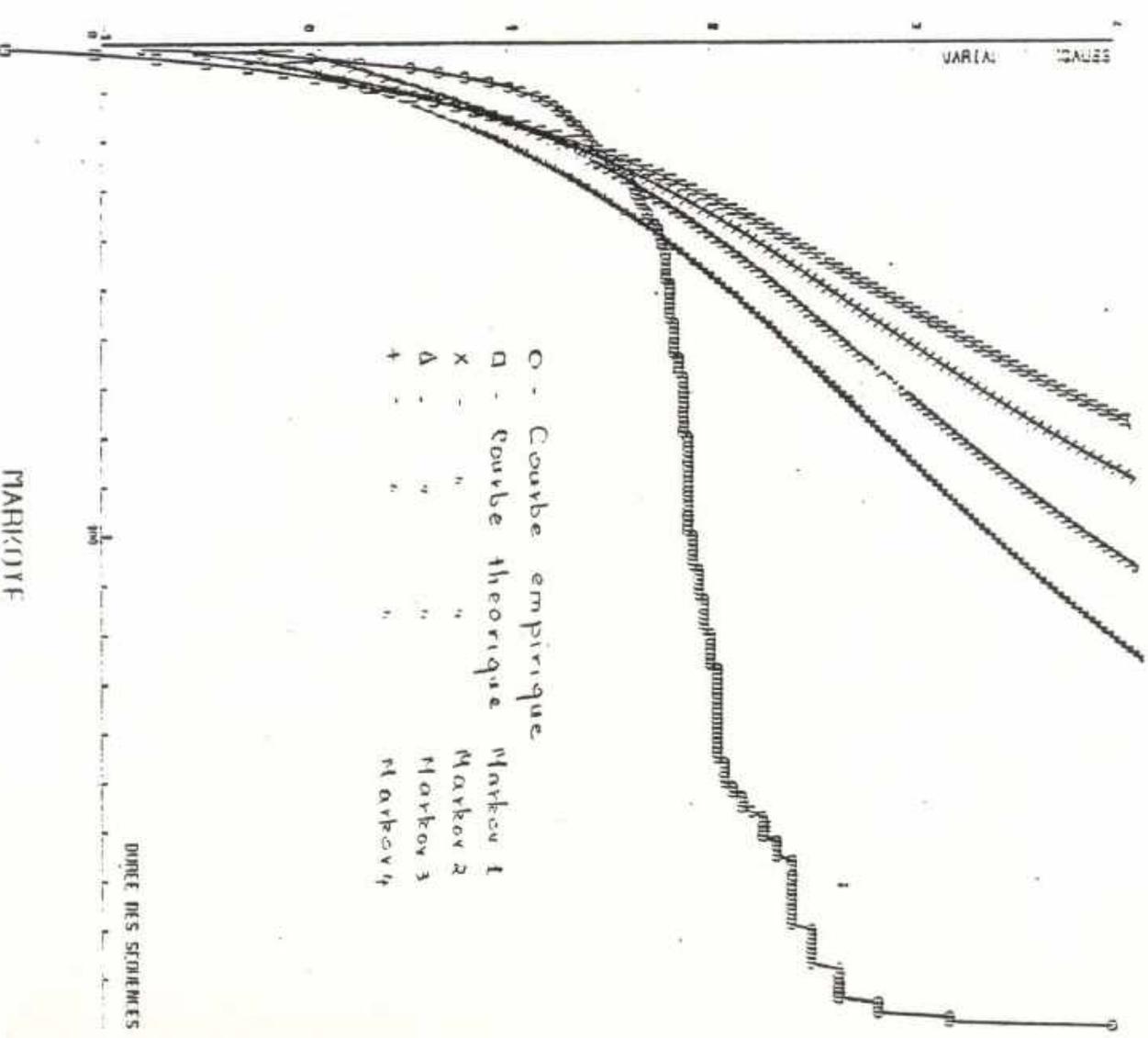
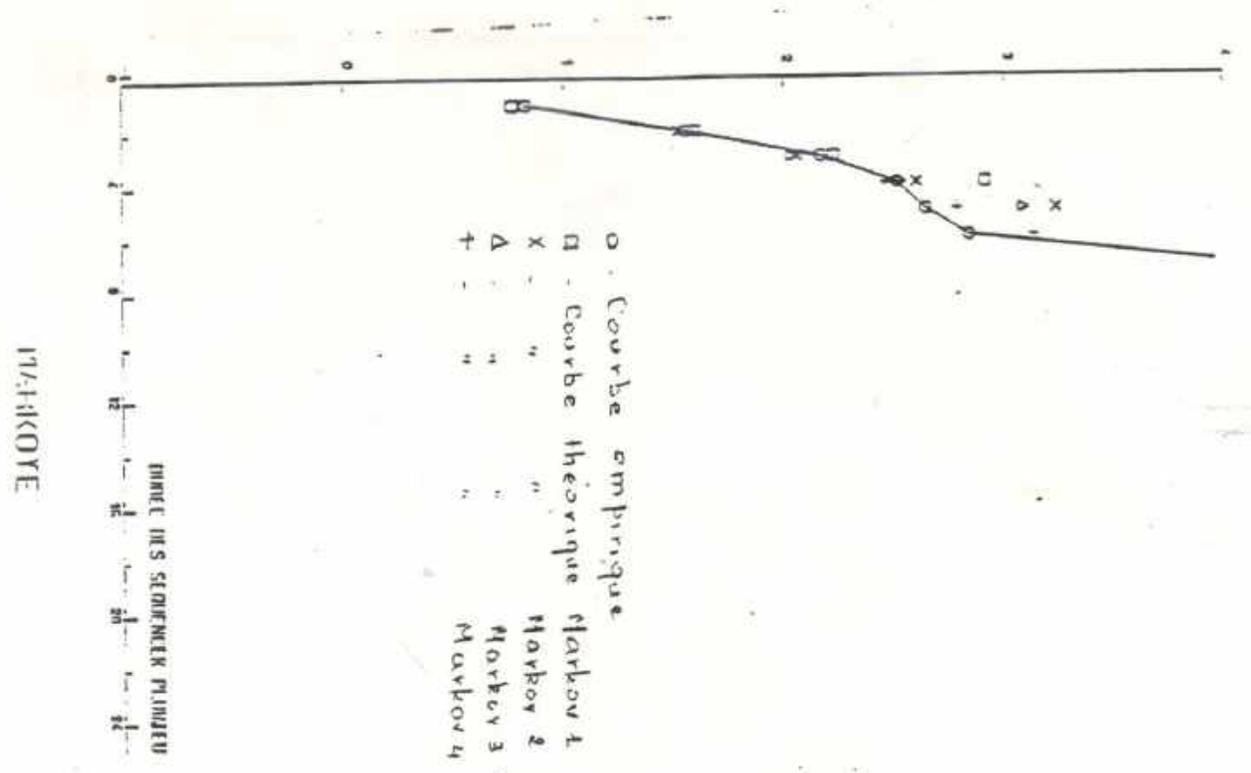


Figure 7-8: Fonction de repartition des durées

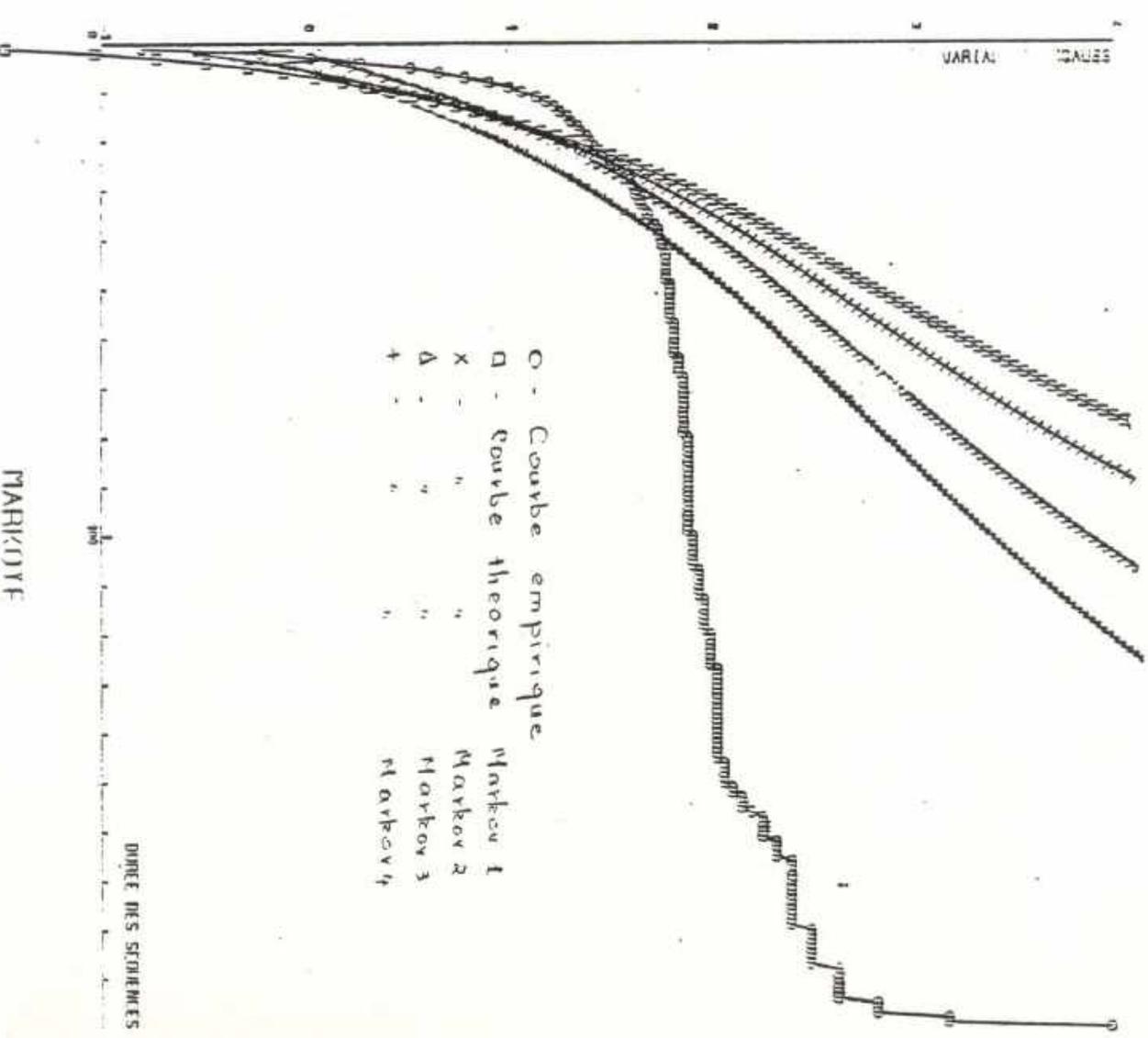
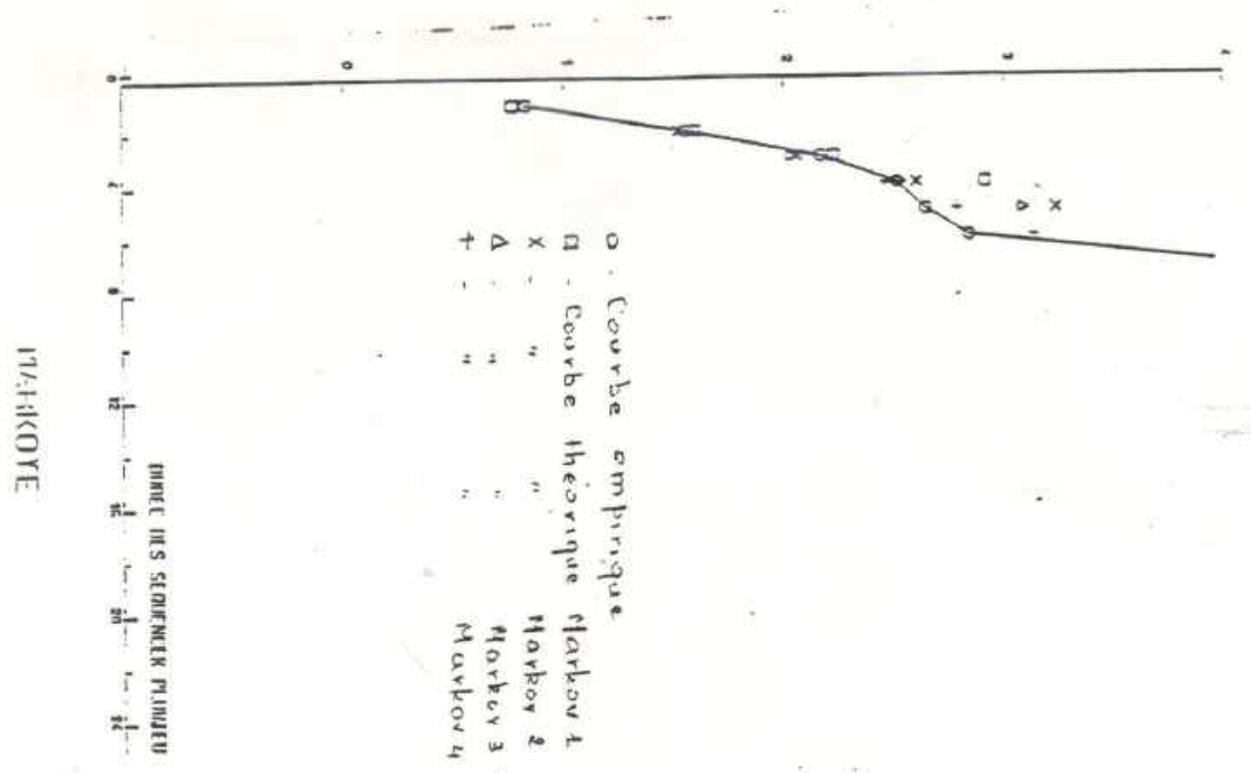


Figure 7-g: Fonction de repartition des durées

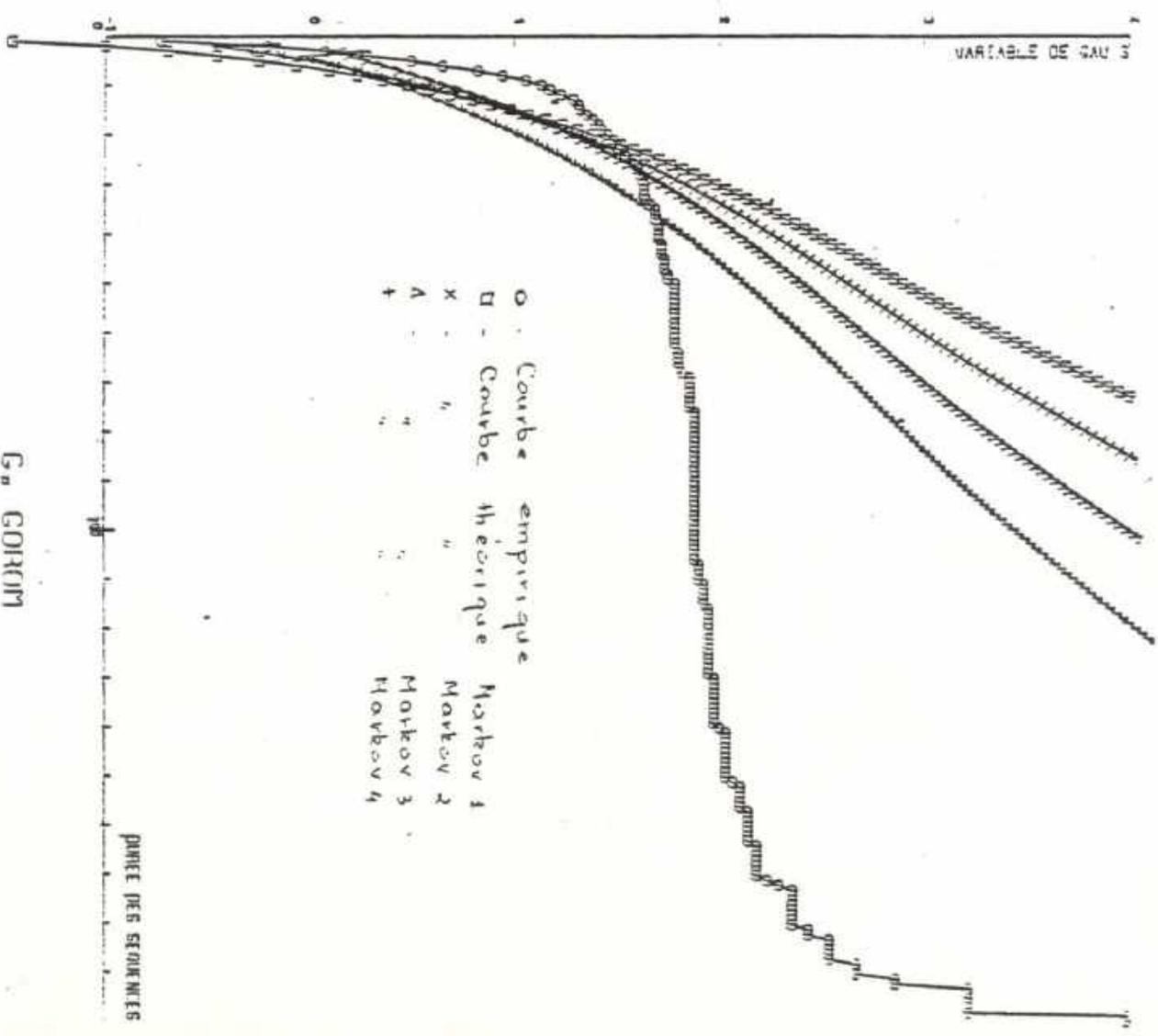
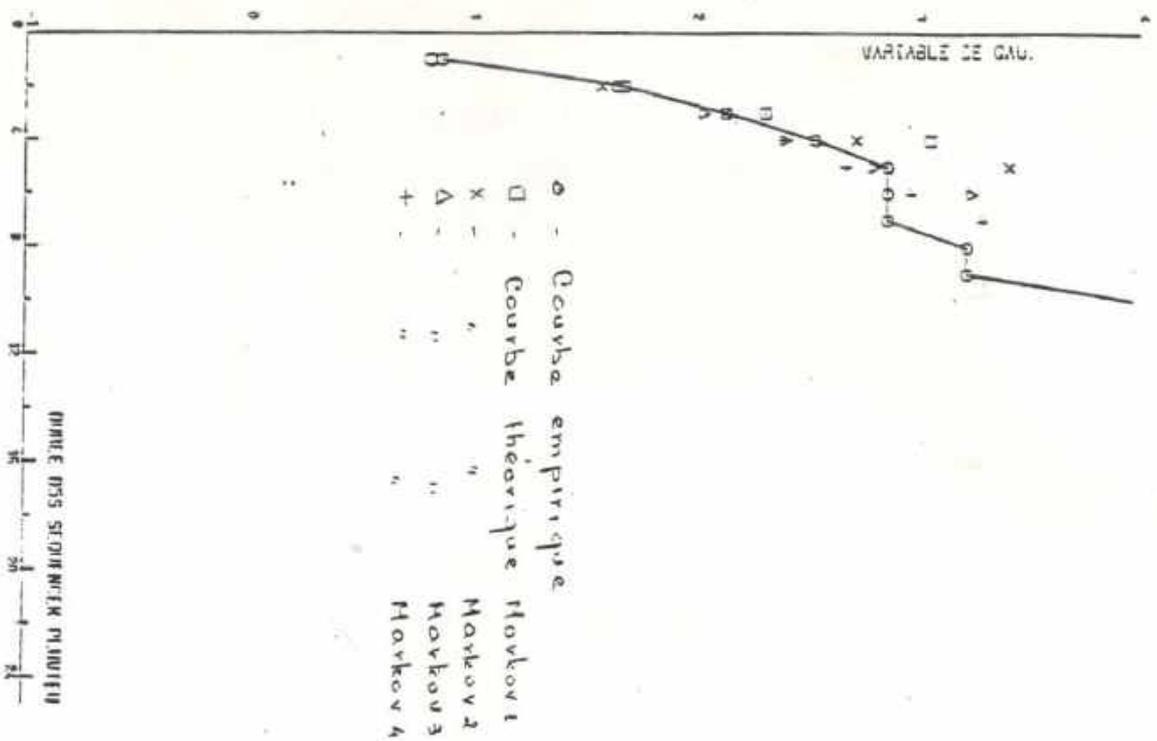
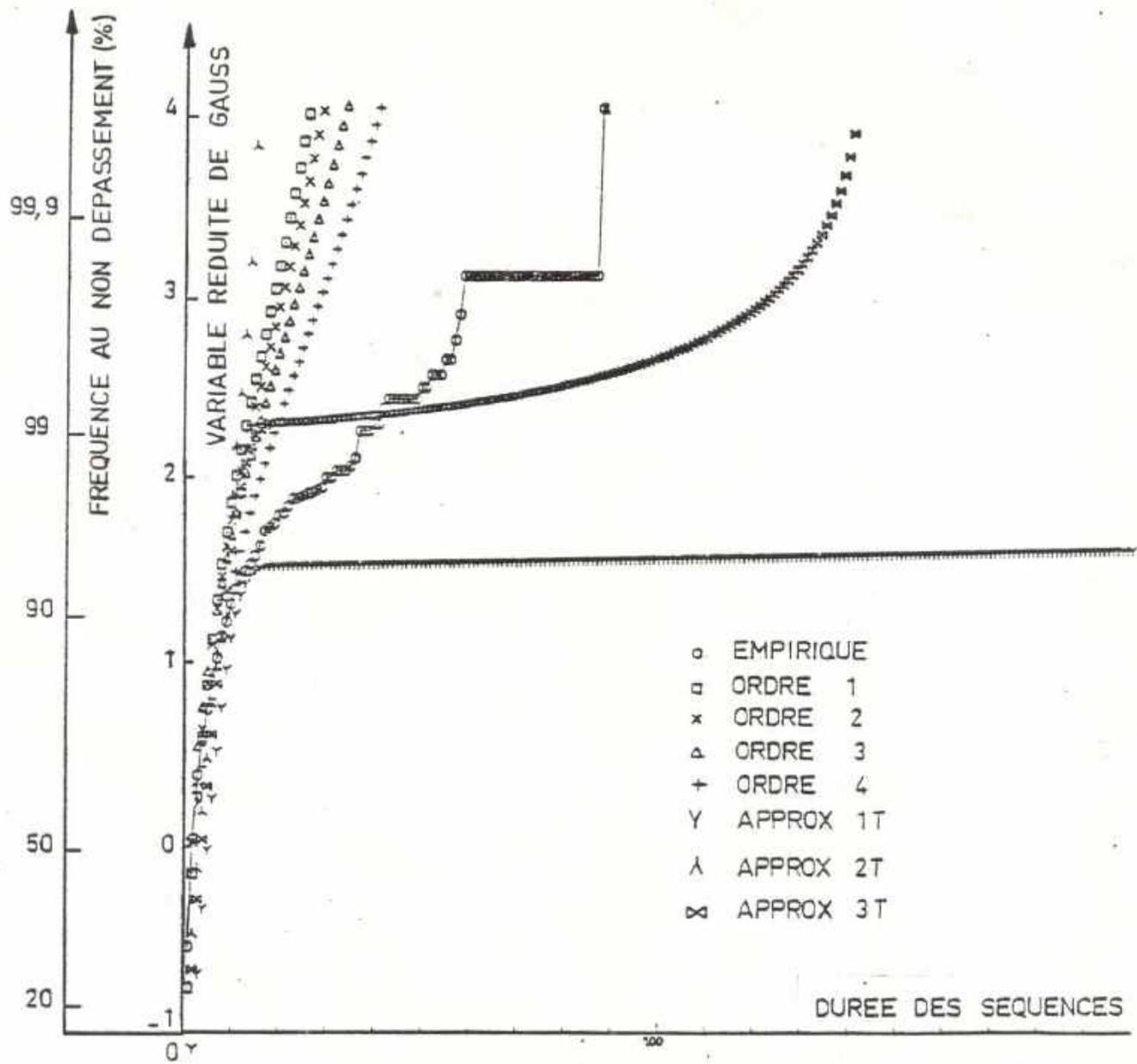
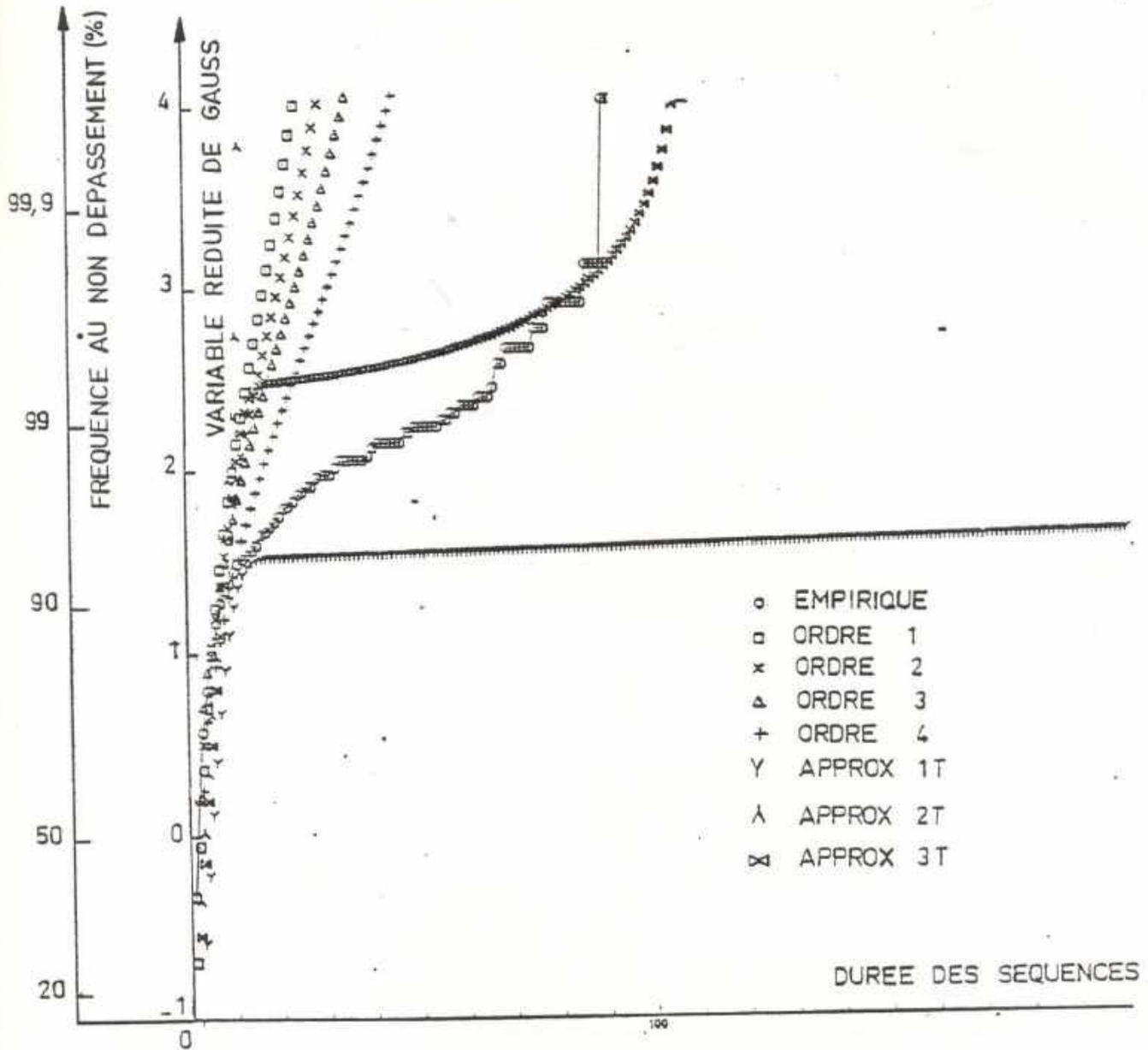


Figure 8 - a : FONCTION DE REPARTITION DES DUREES SECHES  
 APPROXIMATION " POLYNOMES D'HERMITE "



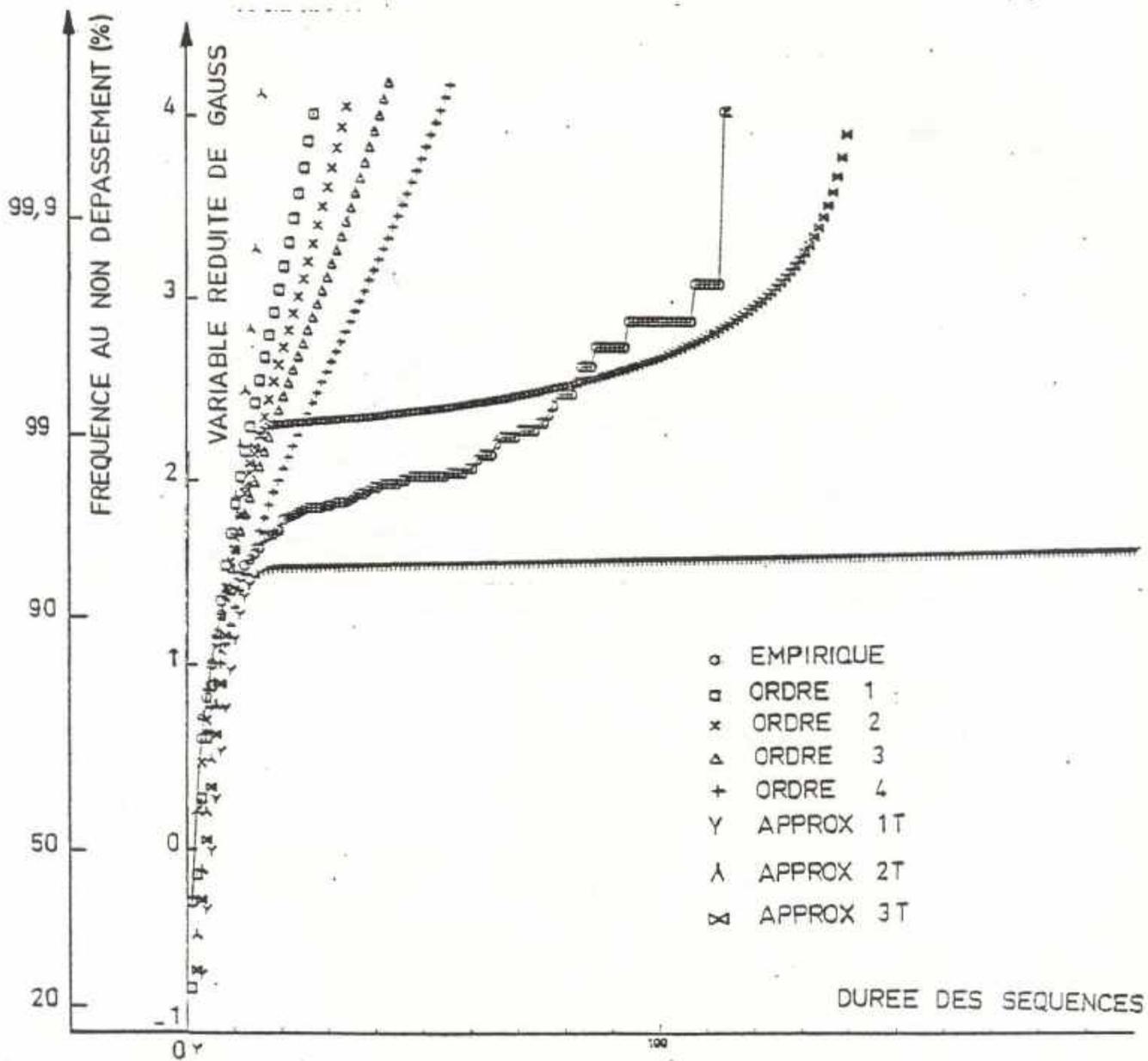
COTONOU

Figure 8 - b : FONCTION DE REPARTITION DES DUREES SECHES  
 APPROXIMATION " POLYNOMES D'HERMITE "



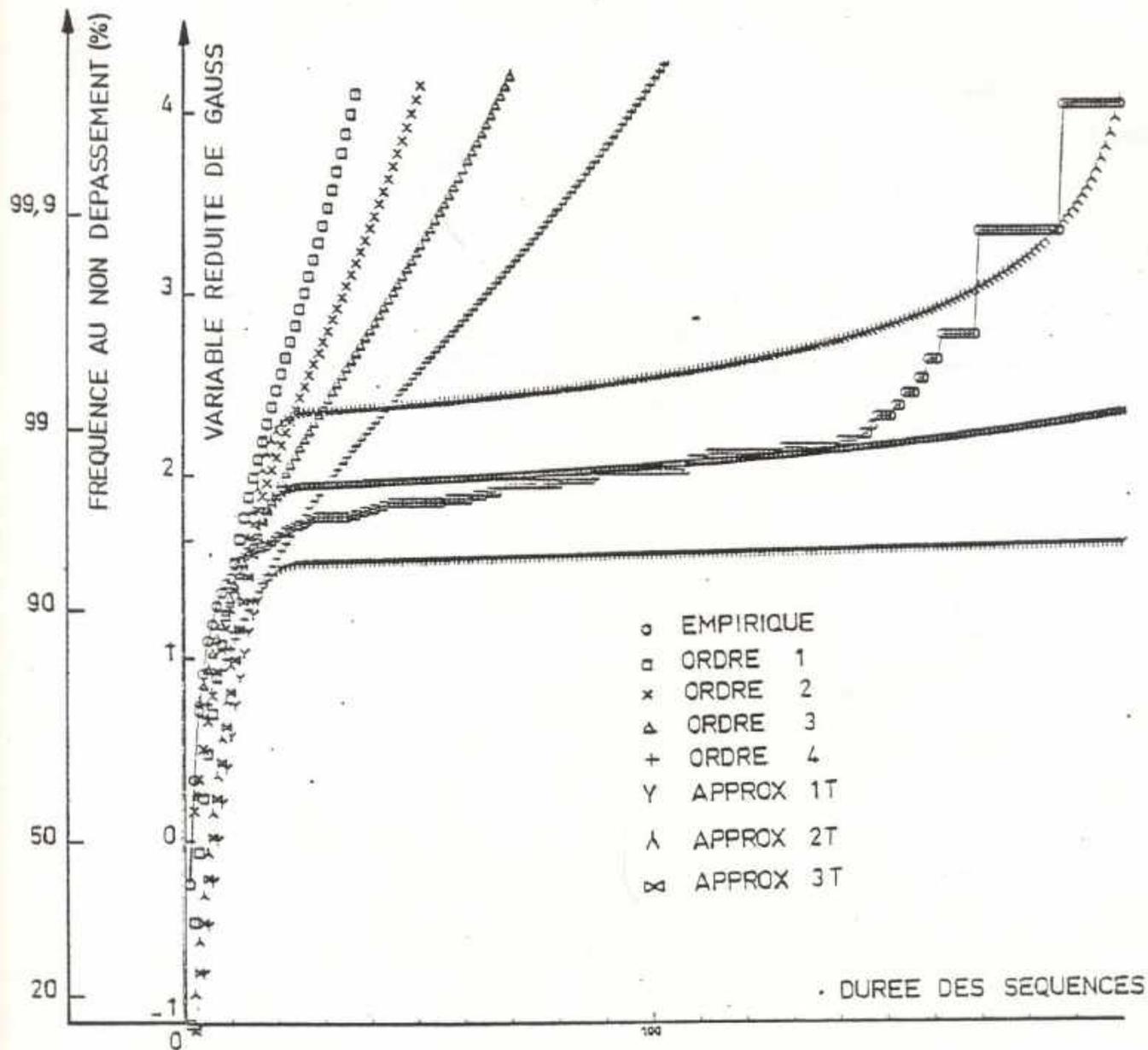
BOHICON

Figure 8 - c : FONCTION DE REPARTITION DES DUREES SECHES  
 APPROXIMATION " POLYNOMES D'HERMITE "



SAVE

Figure 8 - d : FONCTION DE REPARTITION LES DUREES SECHES  
 APPROXIMATION " POLYNOMES D'HERMITE "



KANDI

Figure 8 - e : FONCTION DE REPARTITION DES DUREES SECHES  
 APPROXIMATION " POLYNOMES D'HERMITE "

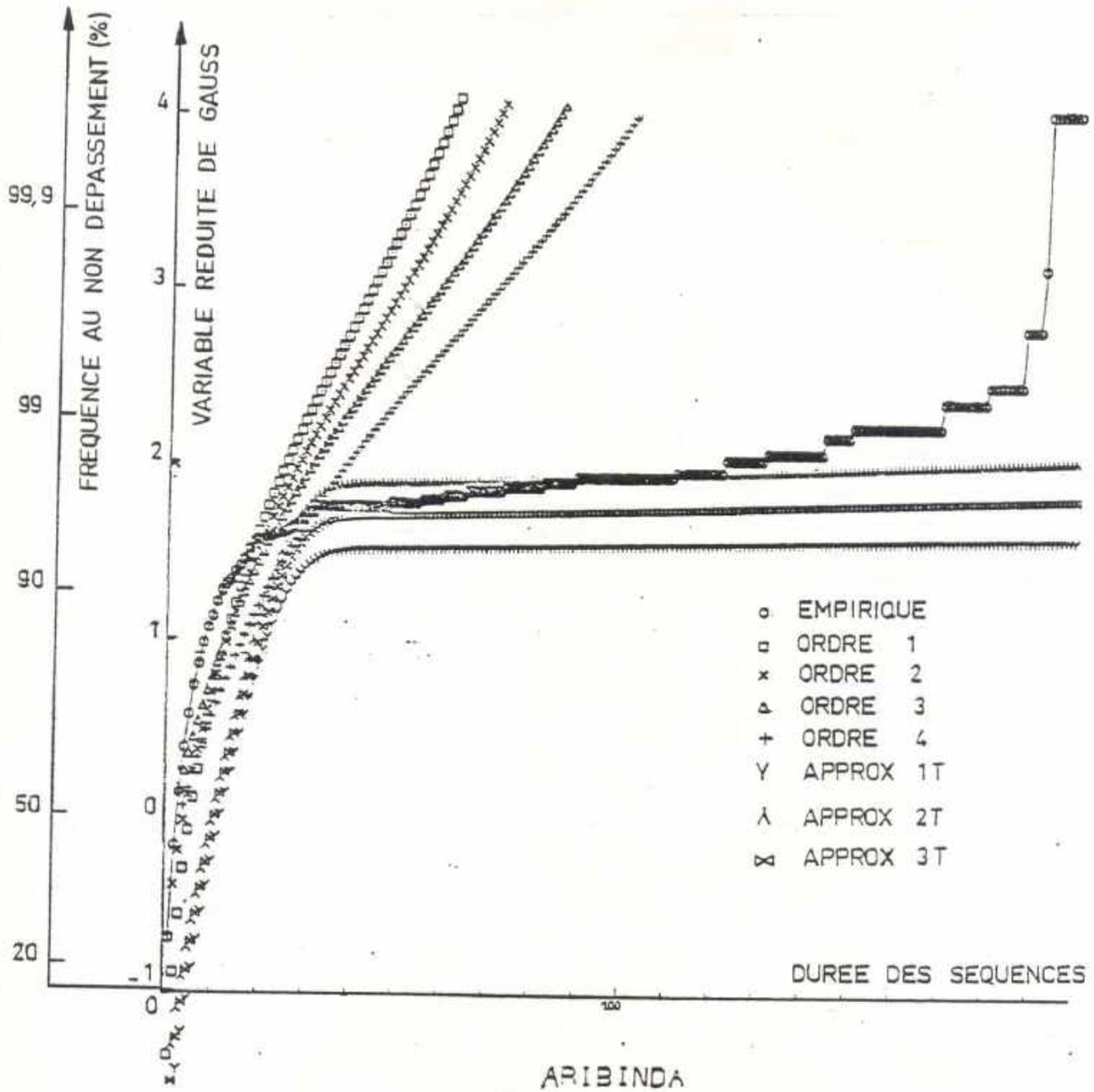
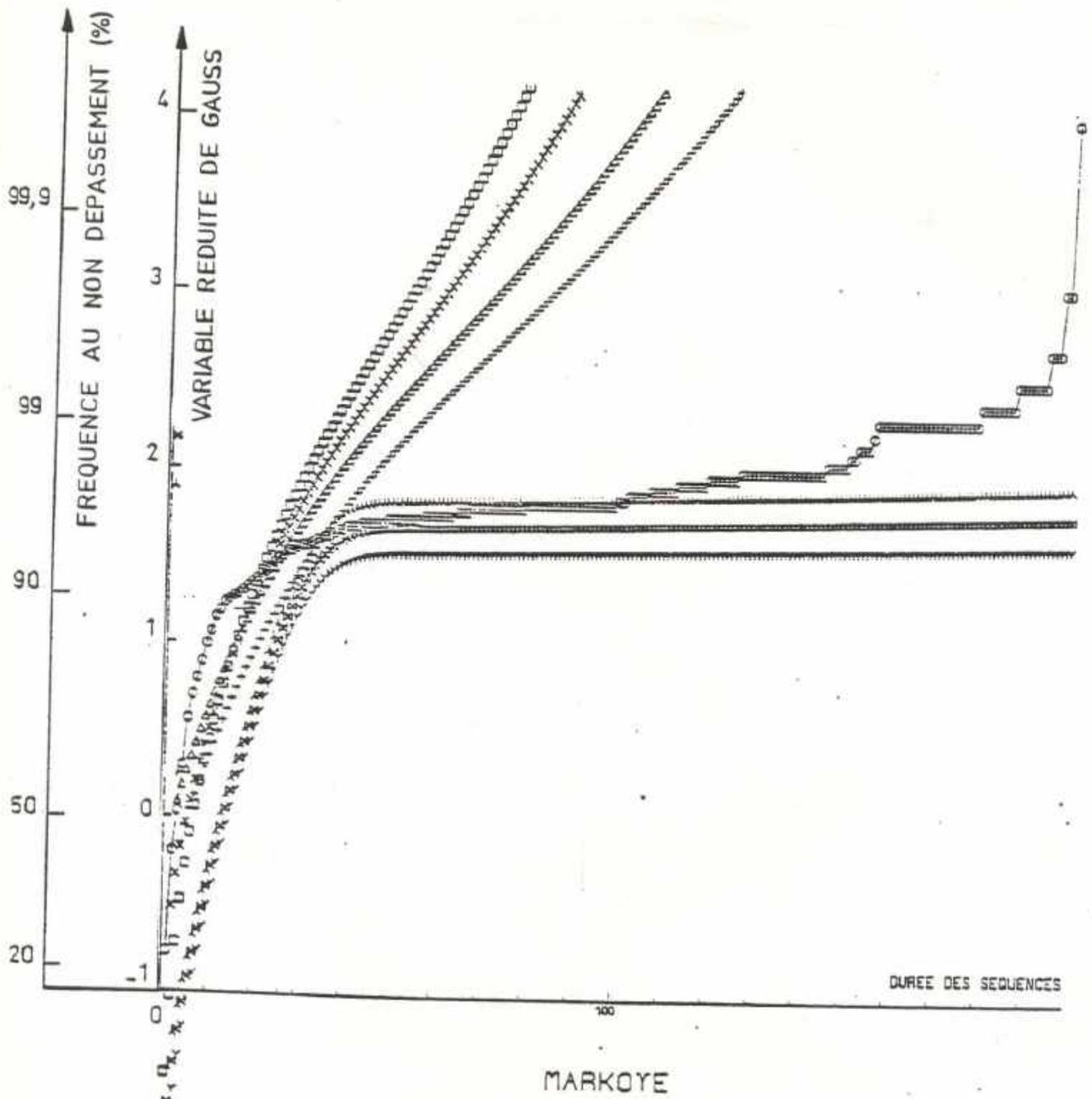
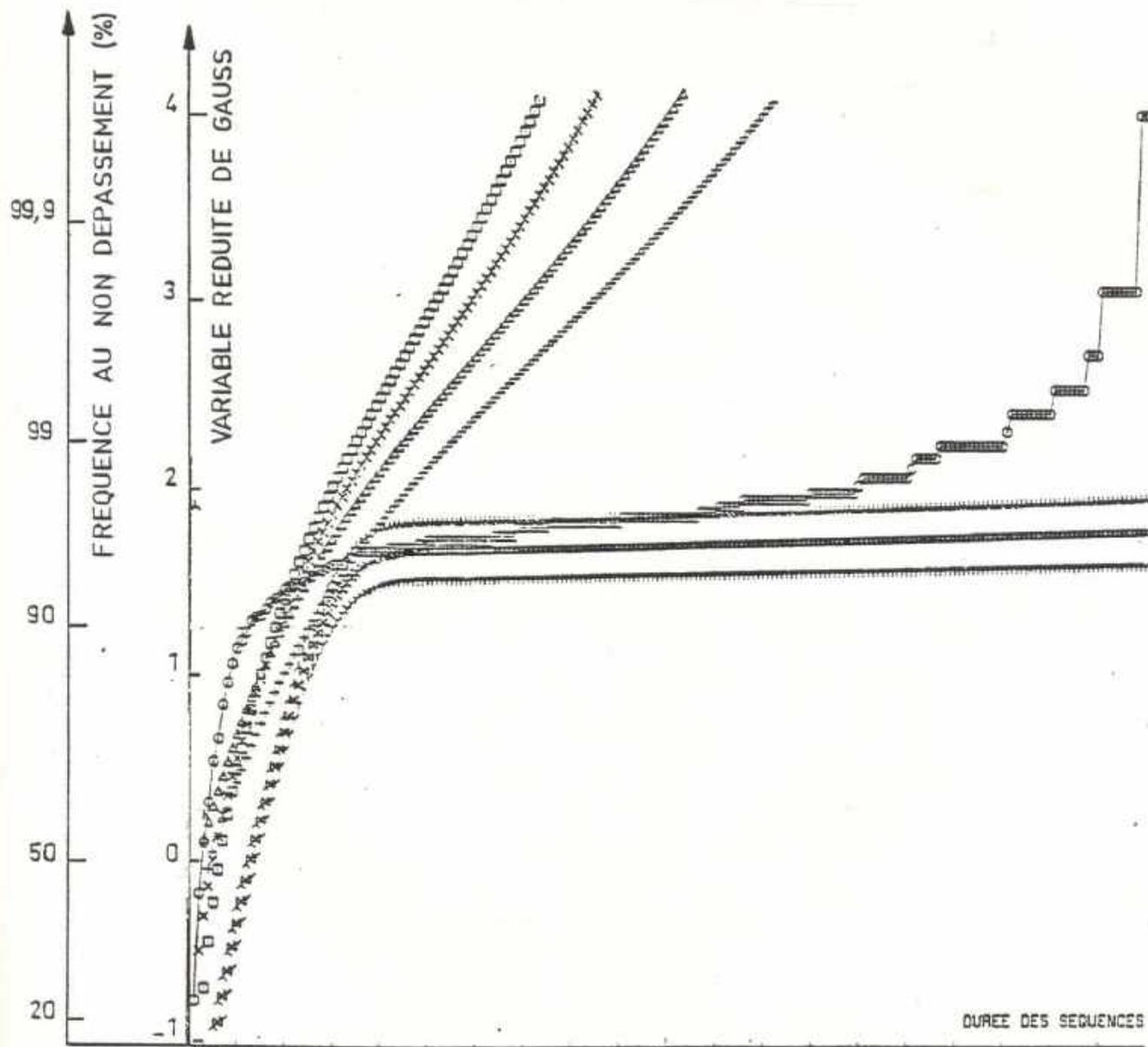


Figure 8 - f : FONCTION DE REPARTITION DES DUREES SECHES  
 APPROXIMATION " POLYNOMES D'HERMITE "



MARKOYE

Figure 8 - g : FONCTION DE REPARTITION DES DUREES SECHES  
 APPROXIMATION " POLYNOMES D'HERMITE "



G. GOROM

Figure 9-a

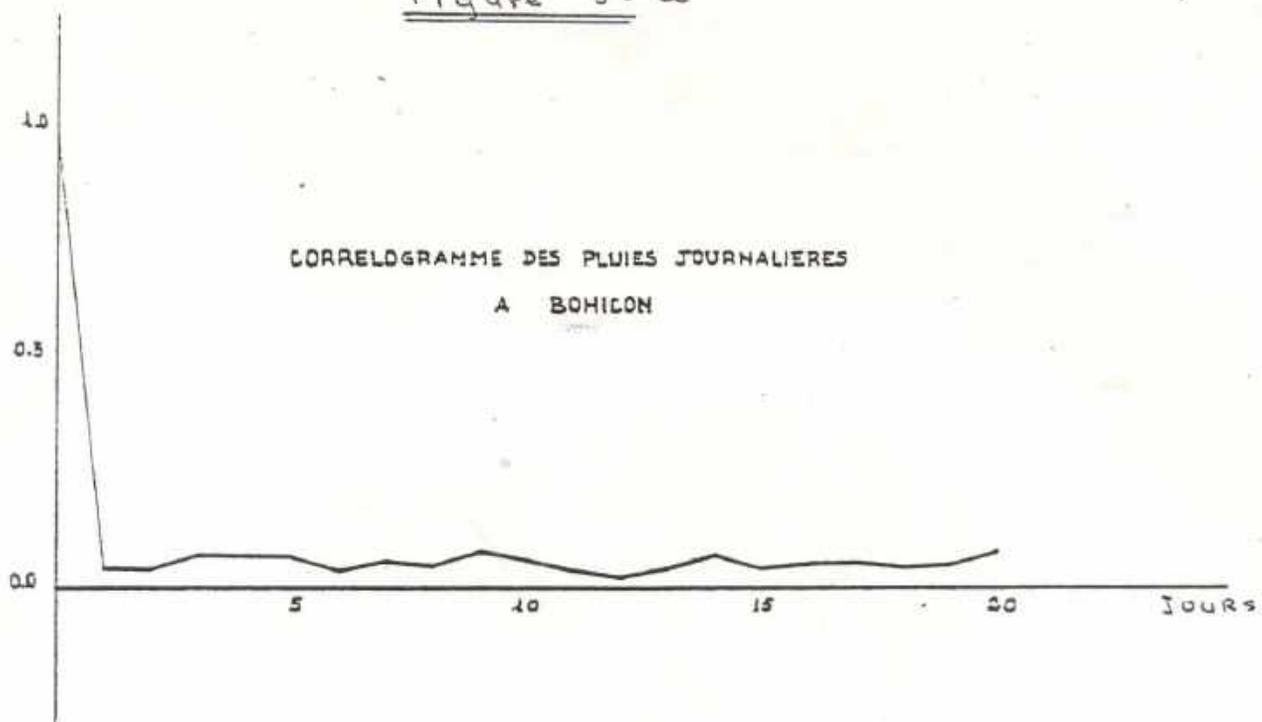


Figure 9-b

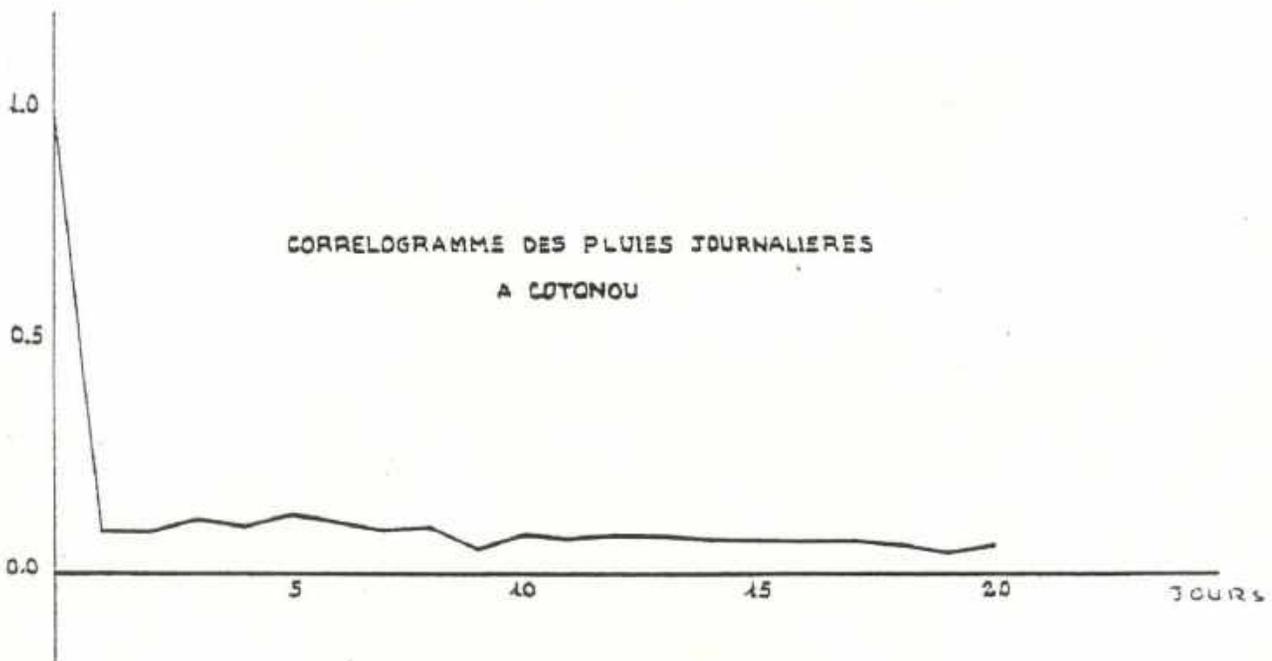


Figure 9 - c

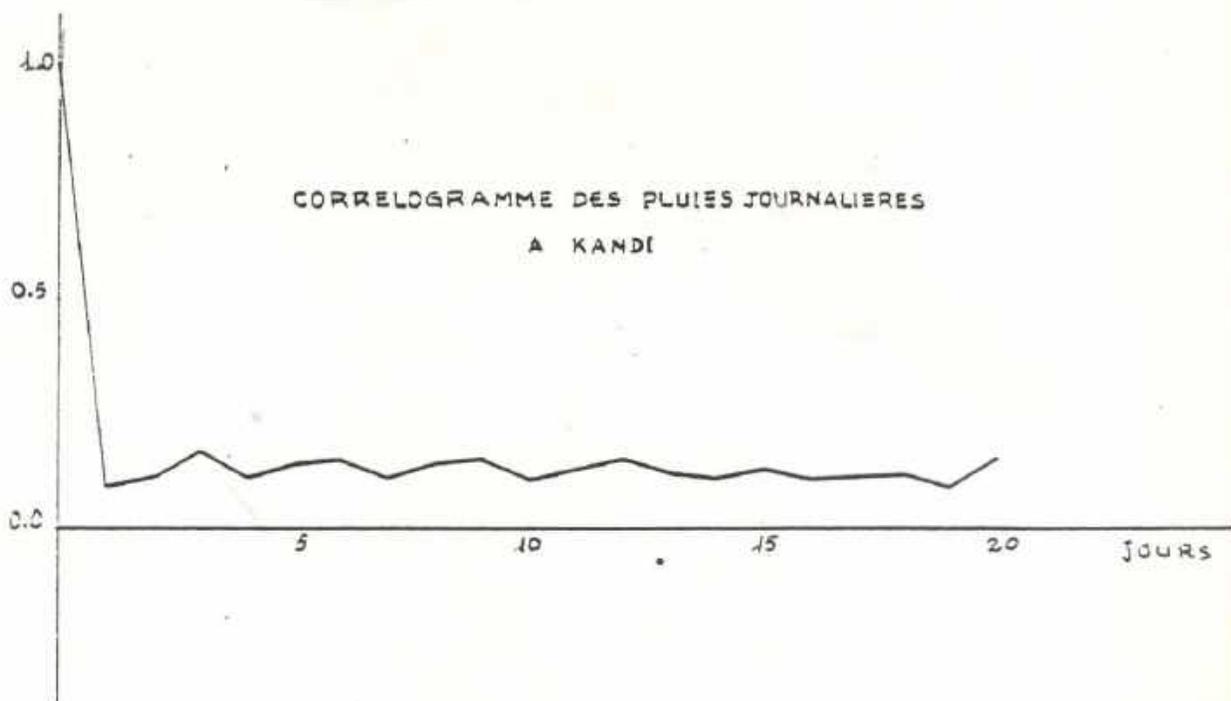


Figure 9 - d

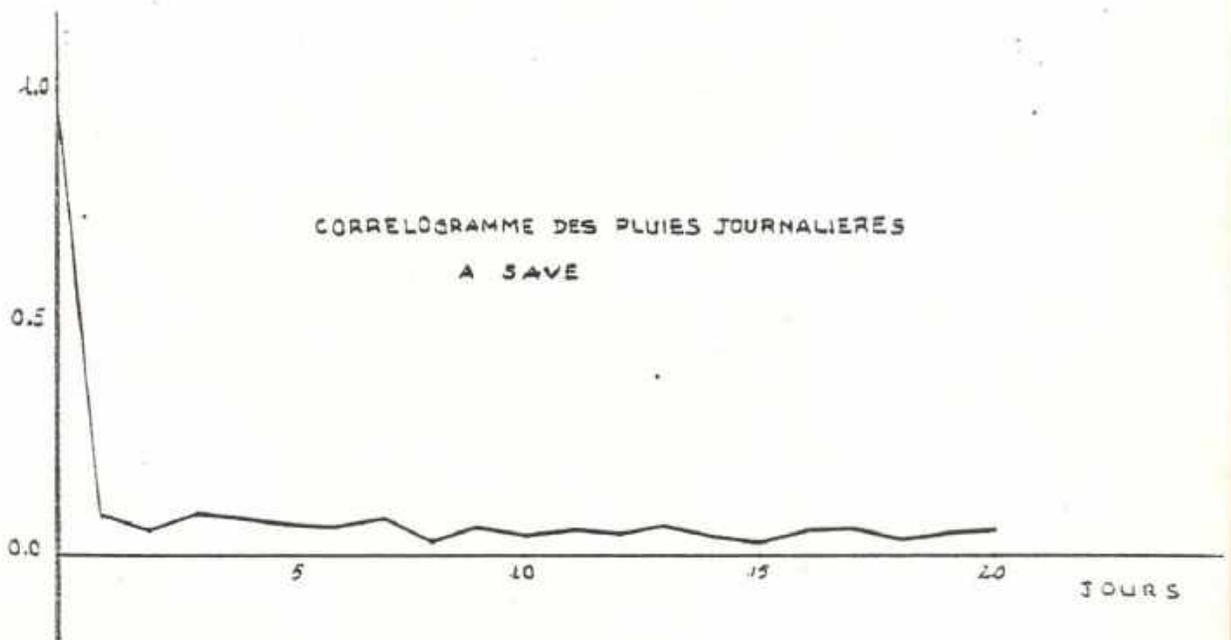


Figure 9 - e

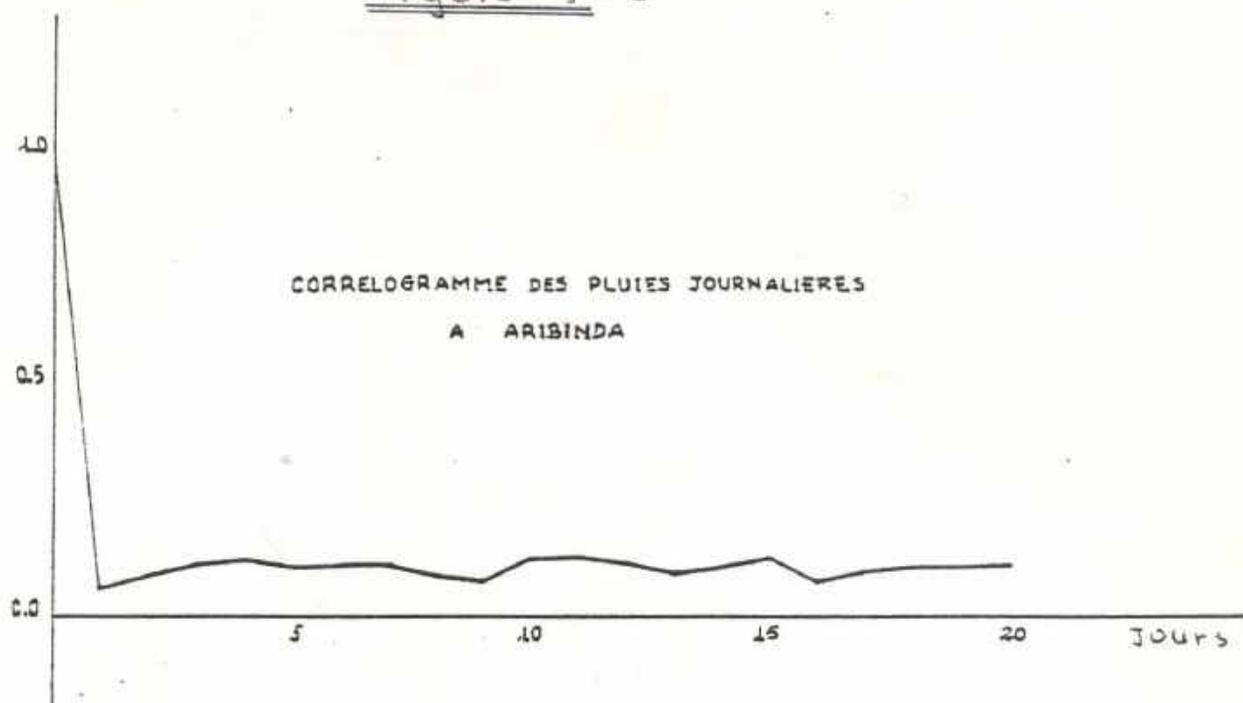


Figure 9 - f

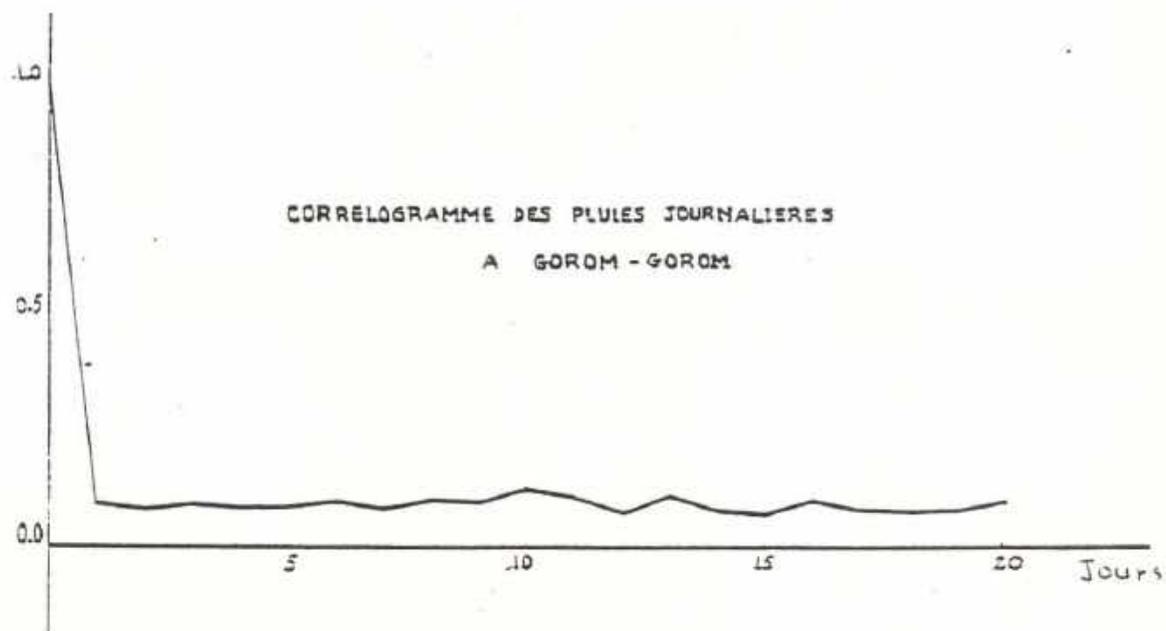


Figure 9 - 9

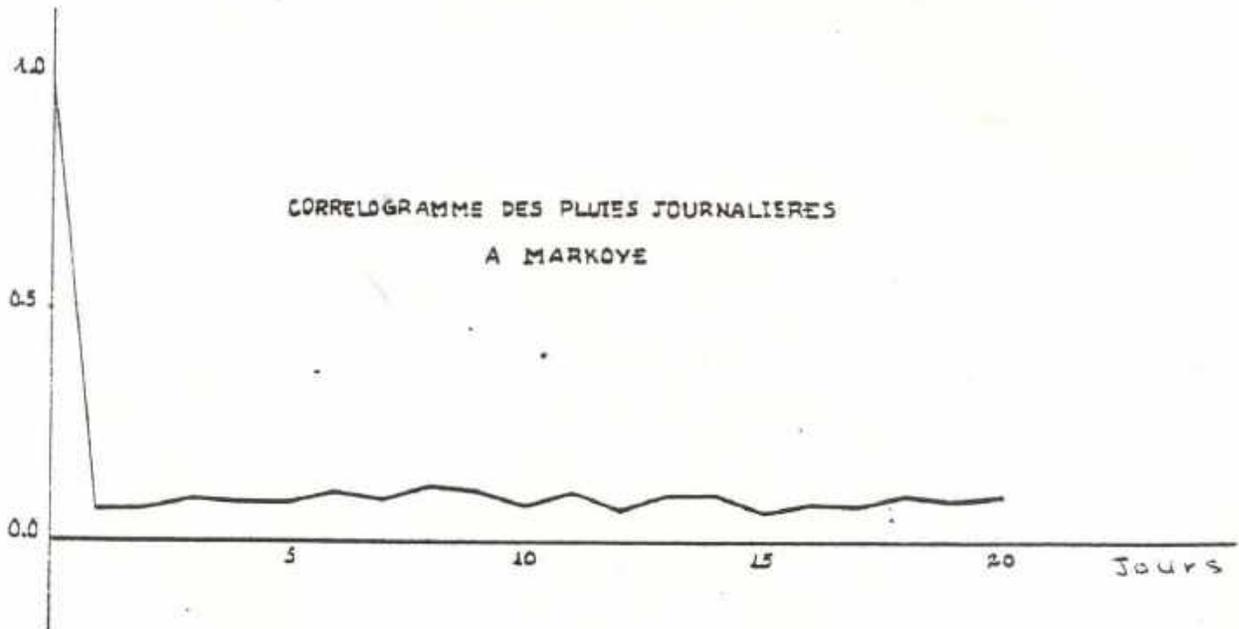


Figure 10

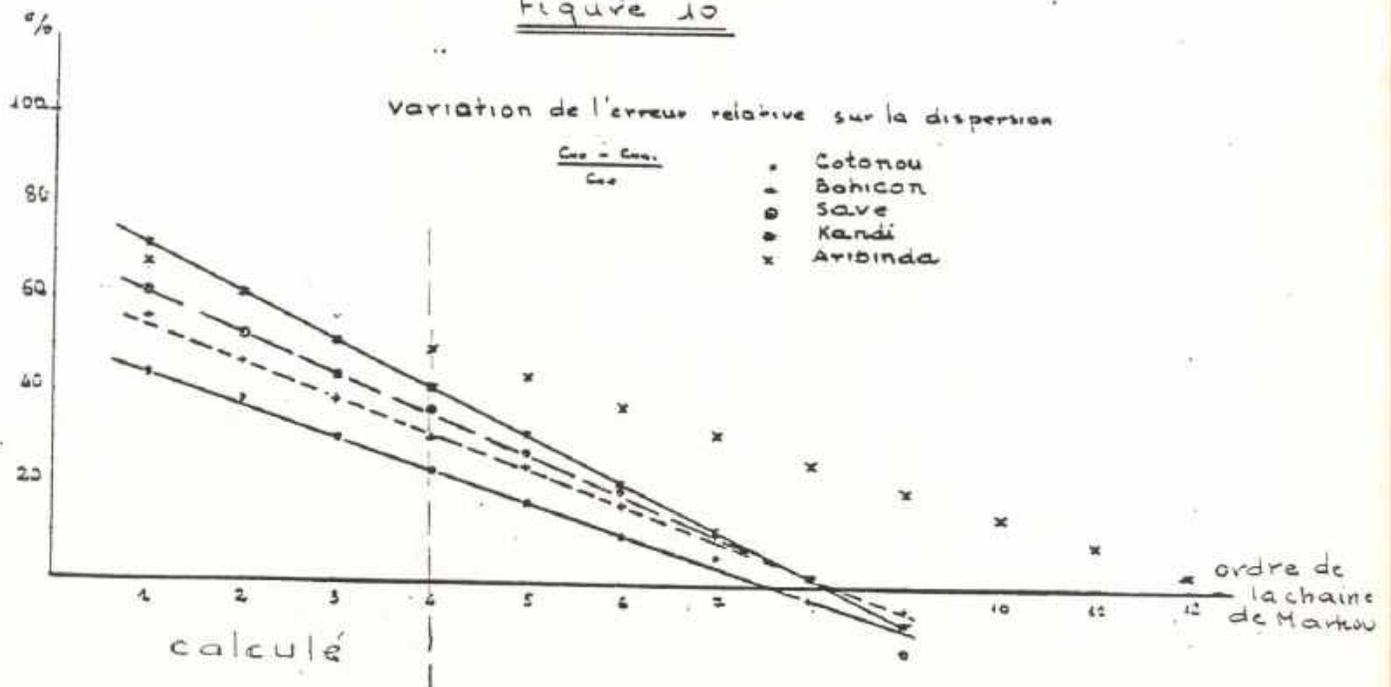


Figure 11 - a : DESCRIPTION PROBABILISTE DES  
 ETATS JOURNALIERS  
 SEUIL : 2.0 mm

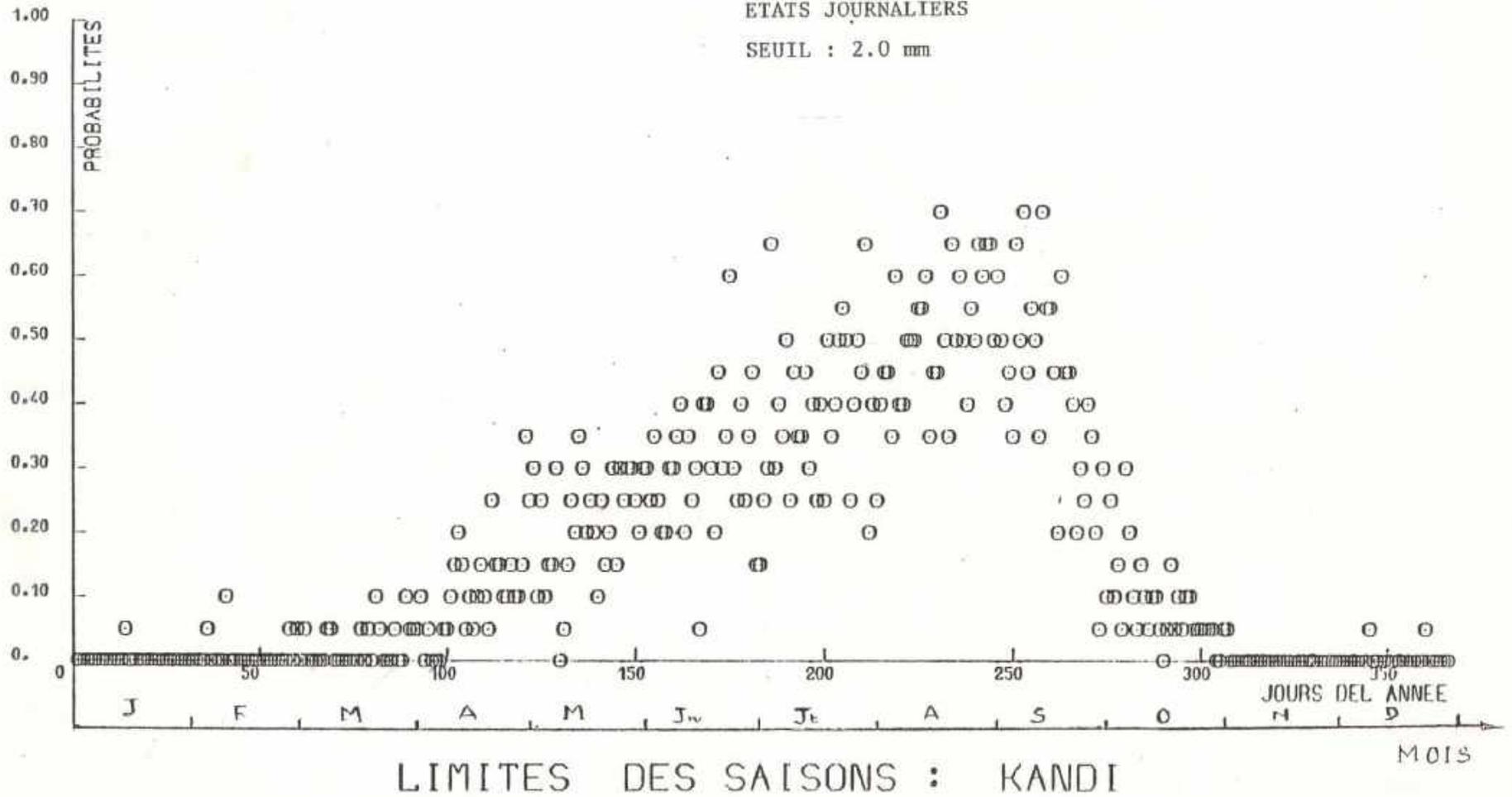
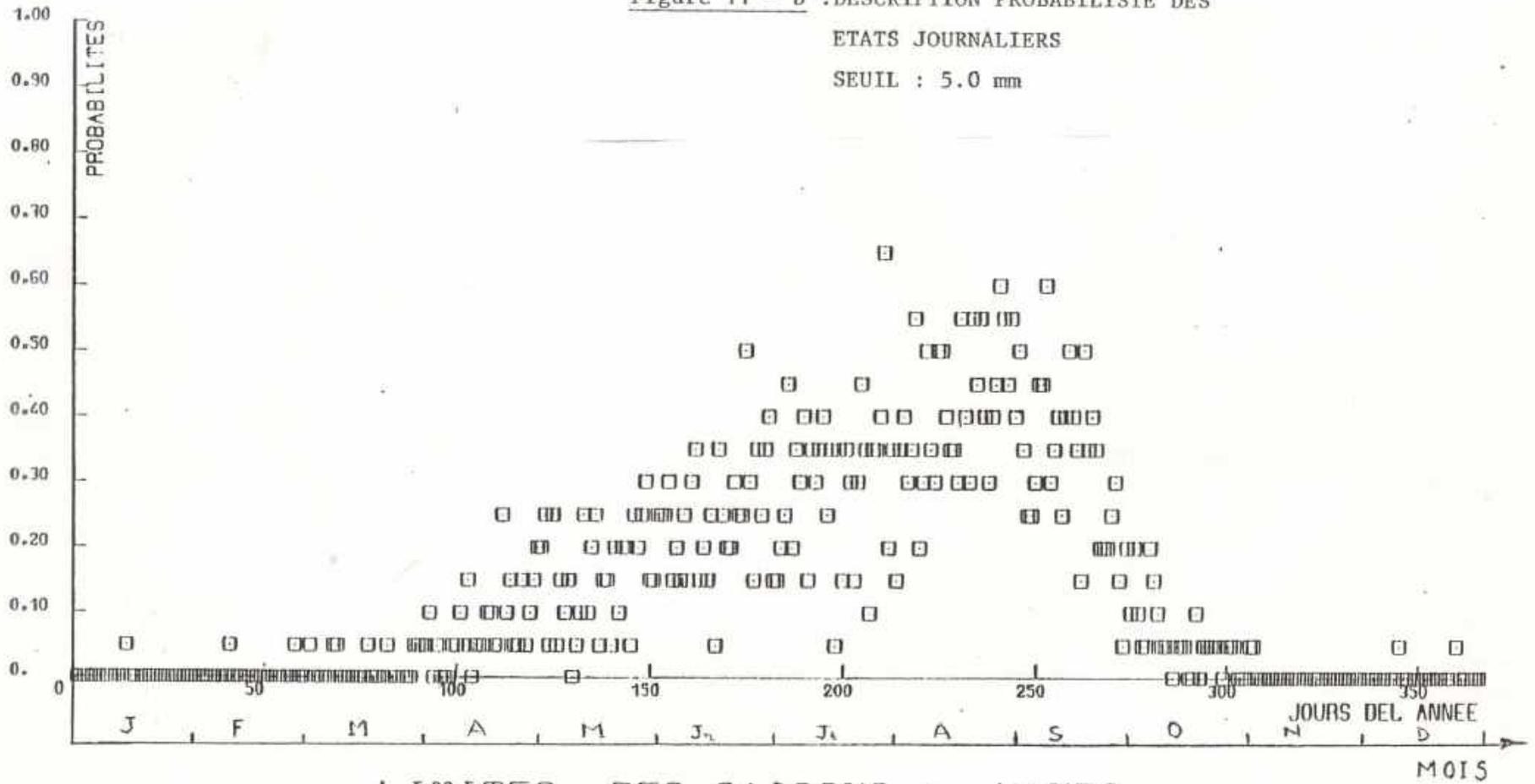
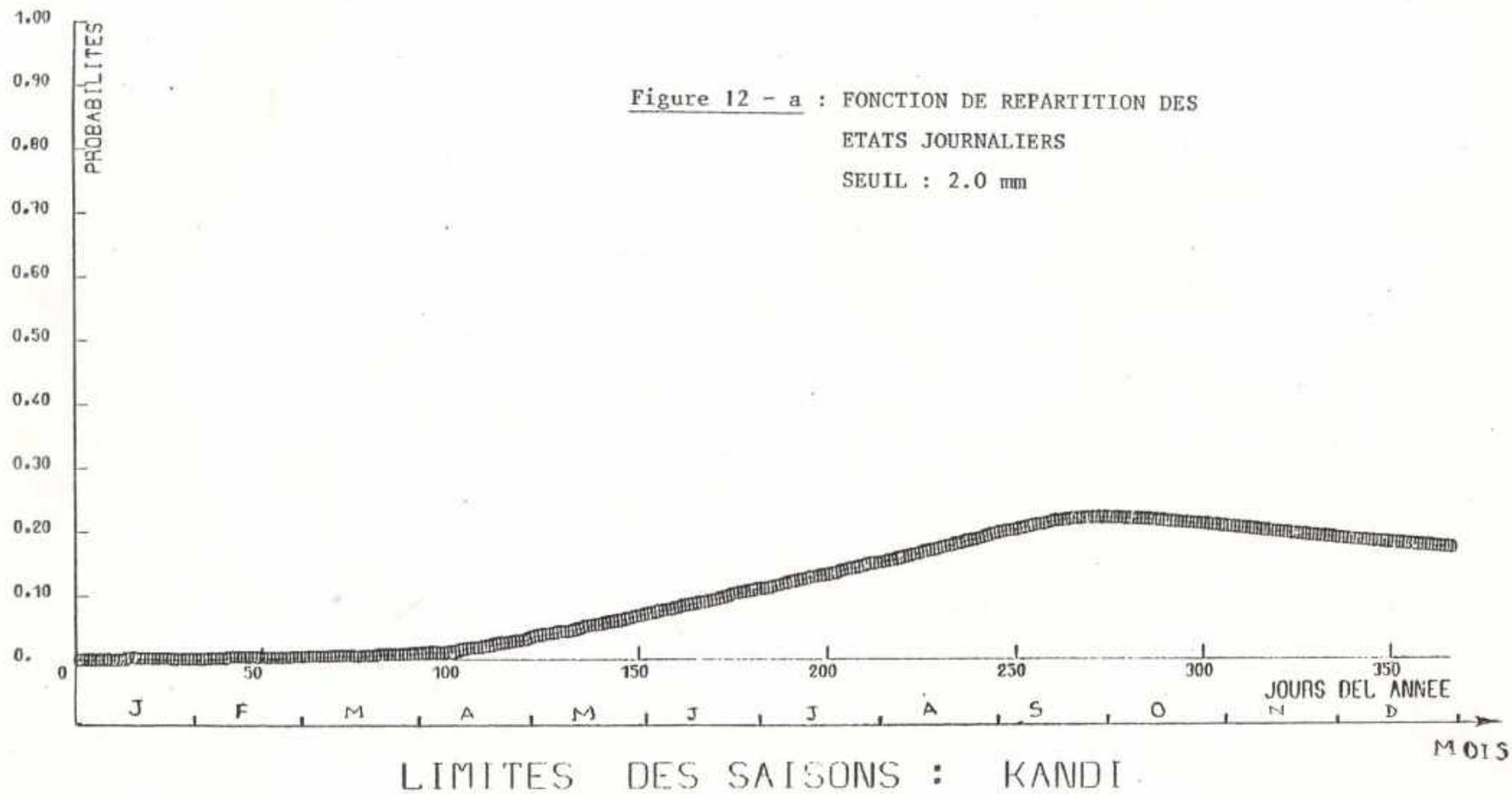
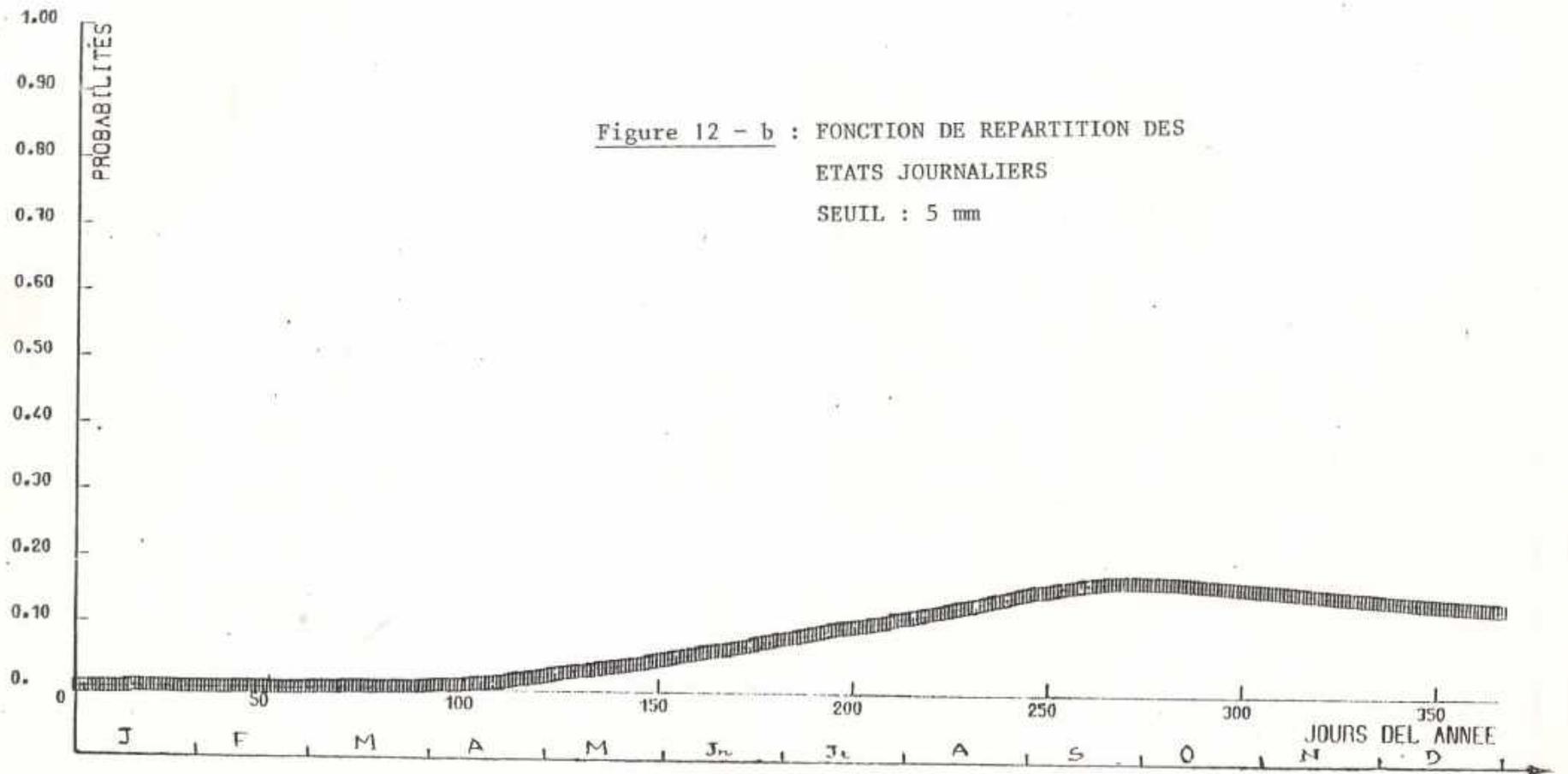


Figure 11 - b : DESCRIPTION PROBABILISTE DES  
 ETATS JOURNALIERS  
 SEUIL : 5.0 mm



LIMITES DES SAISONS : KANDI

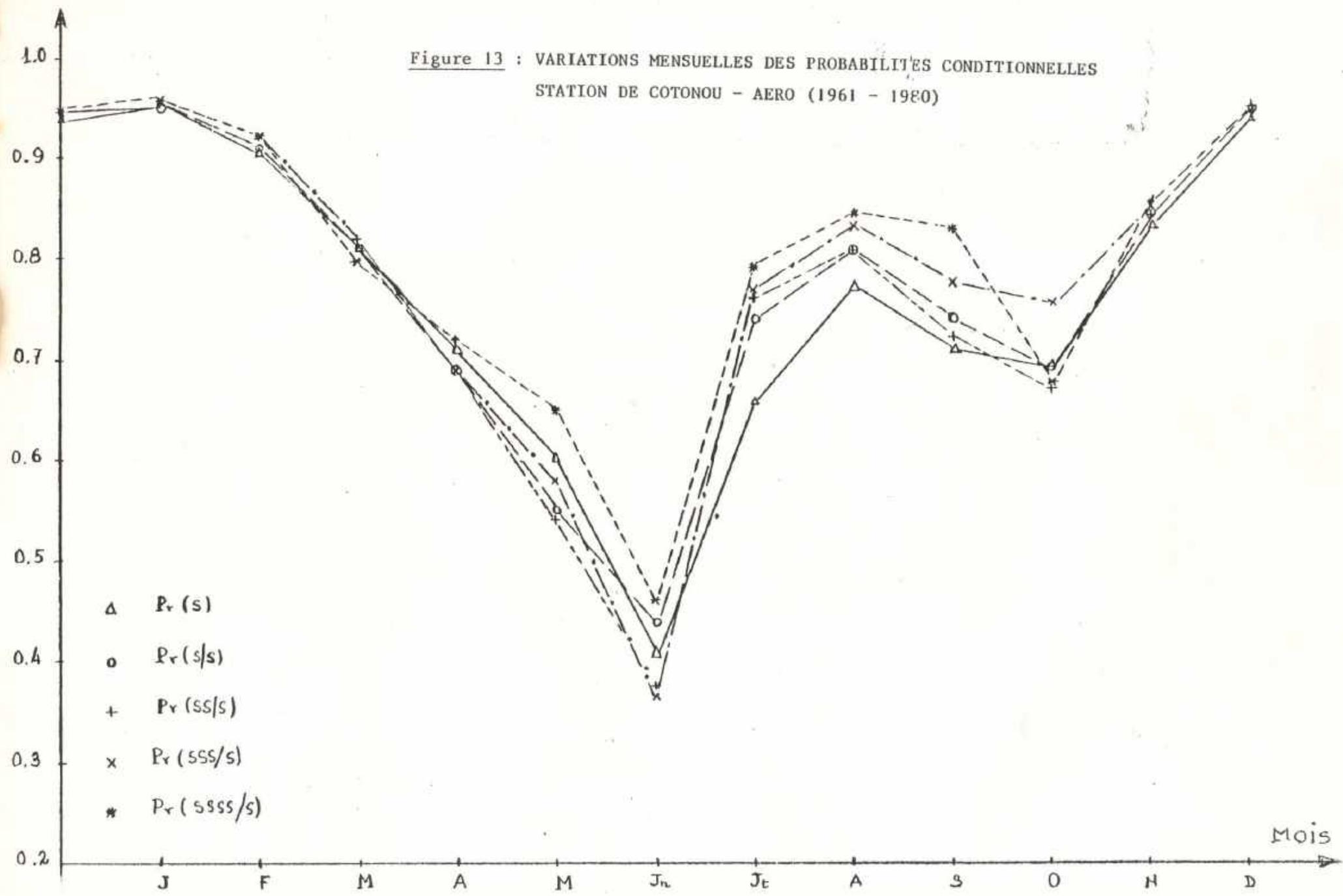




LIMITES DES SAISONS : KANDI

MOIS

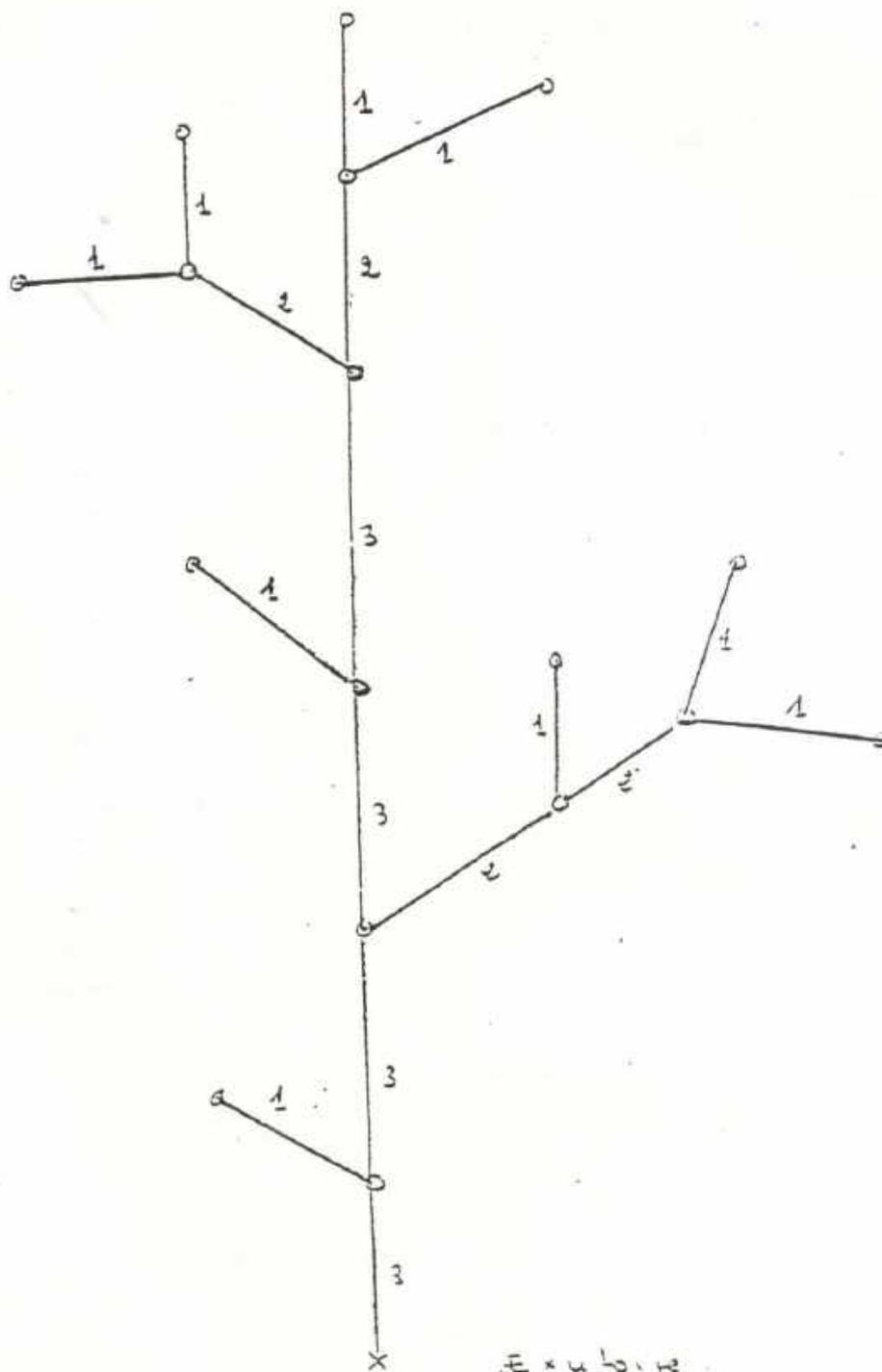
Figure 13 : VARIATIONS MENSUELLES DES PROBABILITÉS CONDITIONNELLES  
 STATION DE COTONOU - AERO (1961 - 1980)



ANNEXE C - 2

FIGURES DU CHAPITRE V

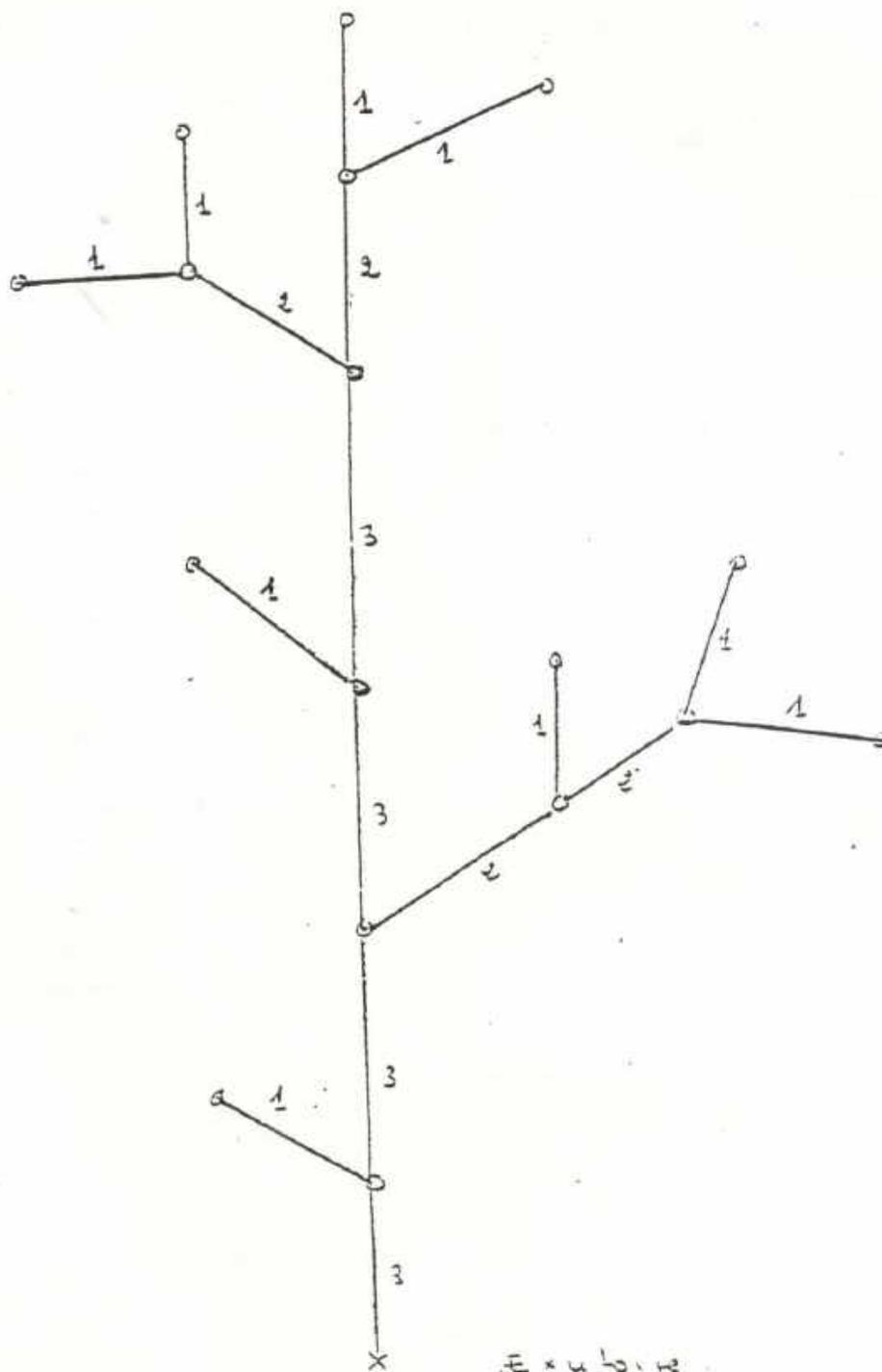
Figure 14 : DESCRIPTION DU BASSIN (D'APRES LA CLASSIFICATION DE HORTON)



- x - exutoire
- o source
- 3 — chenal du 3ème ordre

E x u l o . e

Figure 14 : DESCRIPTION DU BASSIN (D'APRES LA CLASSIFICATION DE HORTON)



x - exutoire

o source

o—o chenal du 3ème ordre



Figure 16 - a :  
 DESCRIPTION MARKOVienne  
 DU RESEAU HYDROGRAPHIQUE

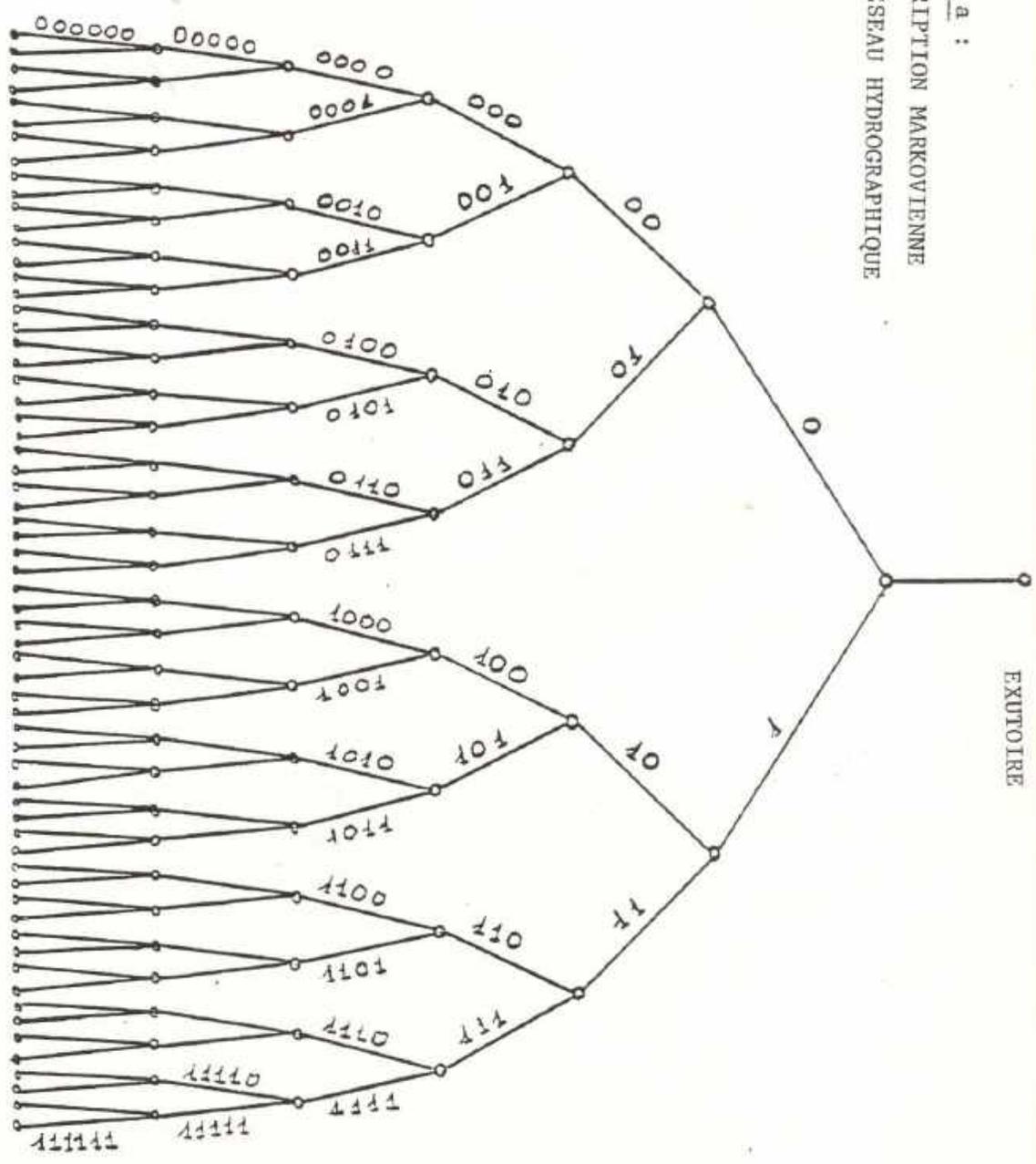


Figure 16 - b : DESCRIPTION MARKOVienne DU RESEAU  
DE LA FIGURE 14

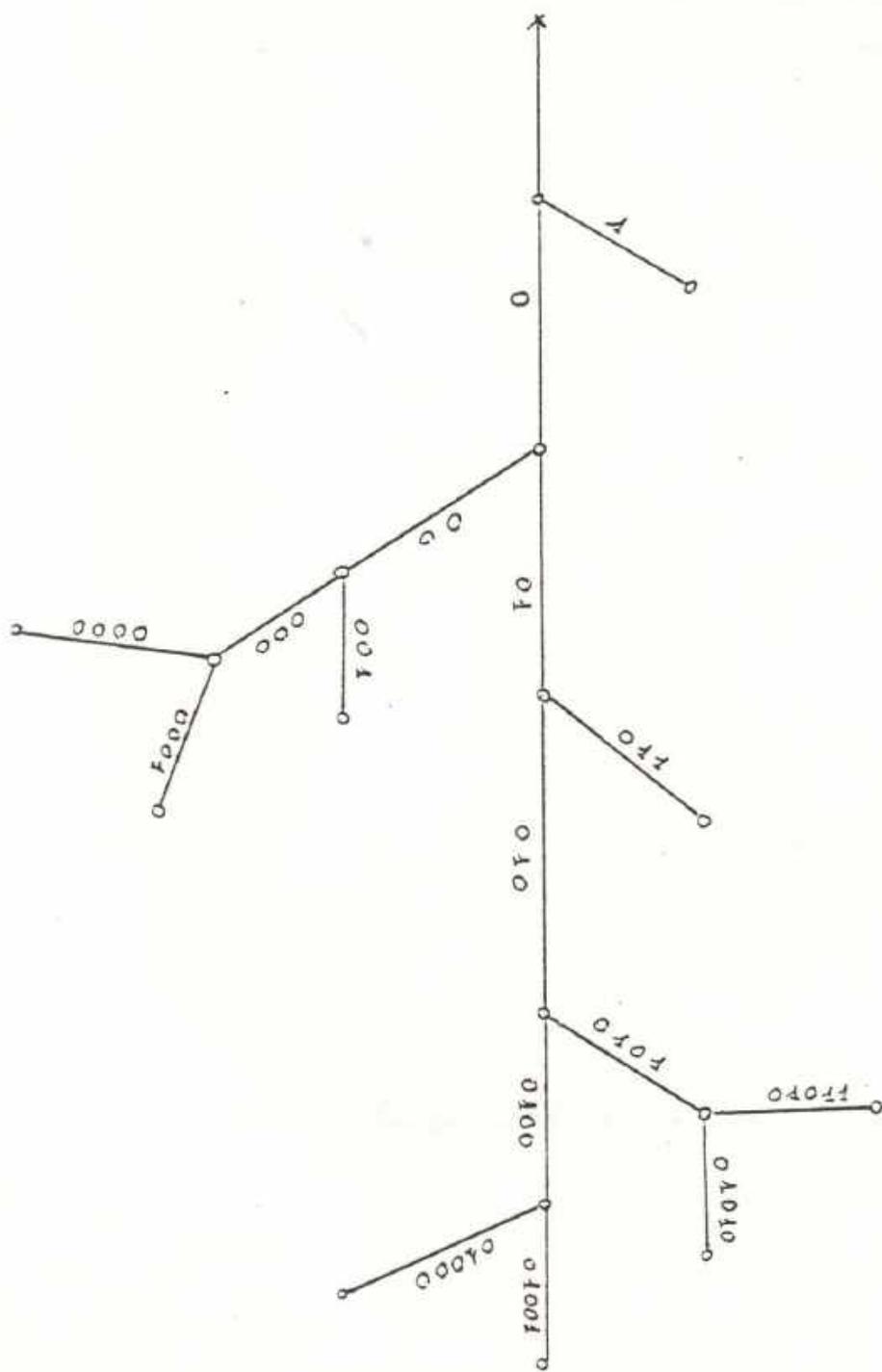
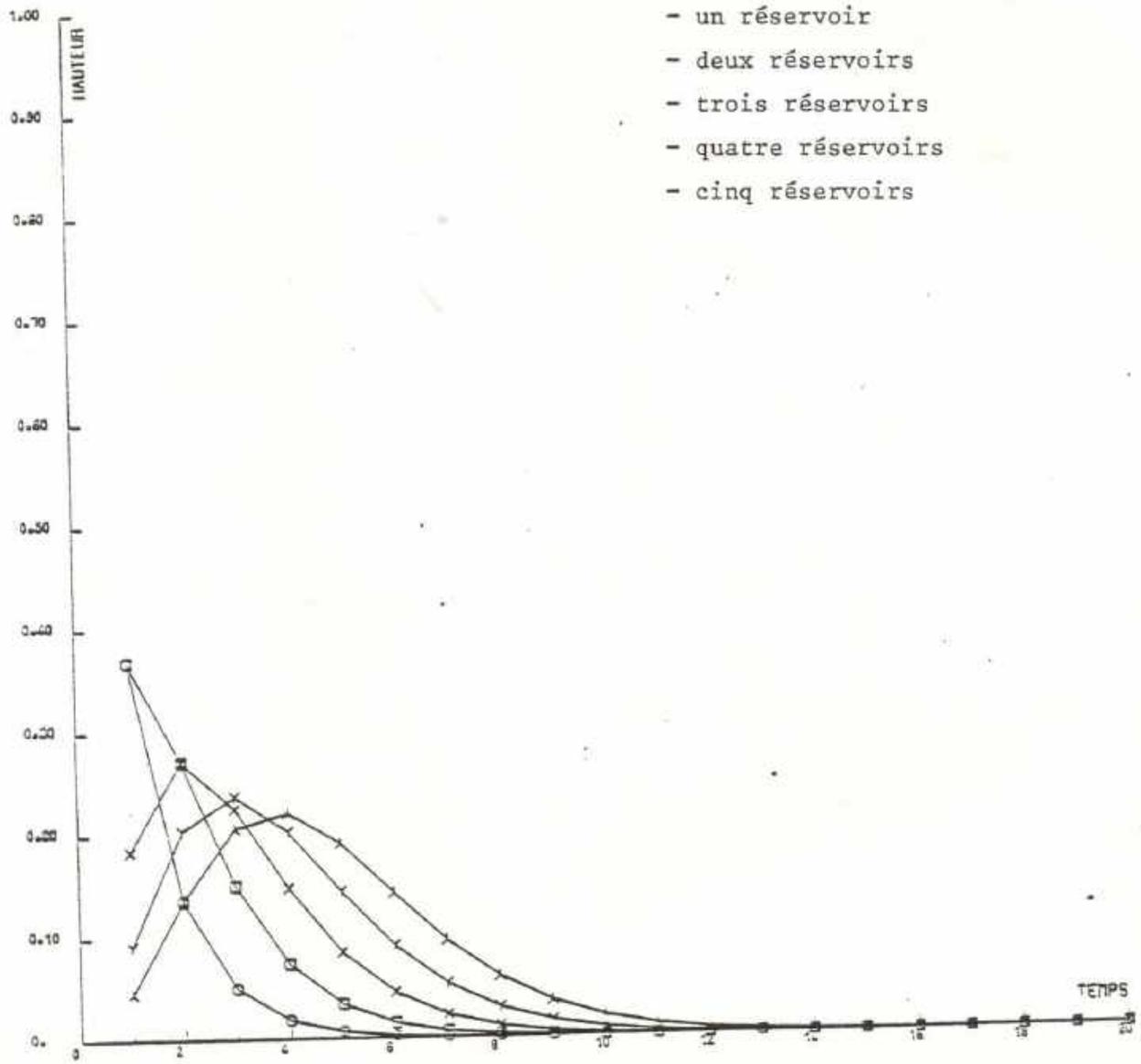
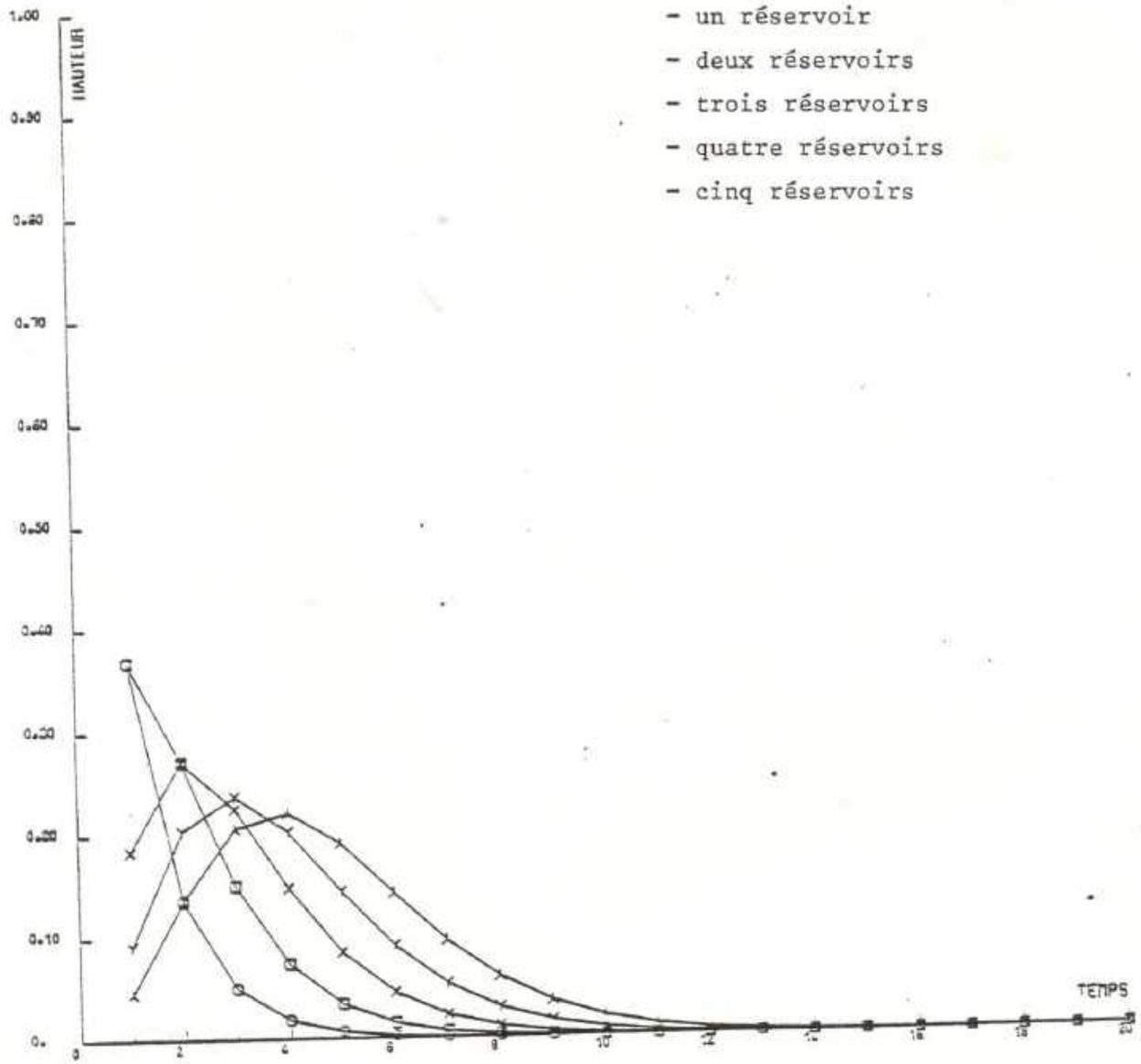


Figure 17 : DESCRIPTION PAR LES RESERVOIRS EN CASCADE

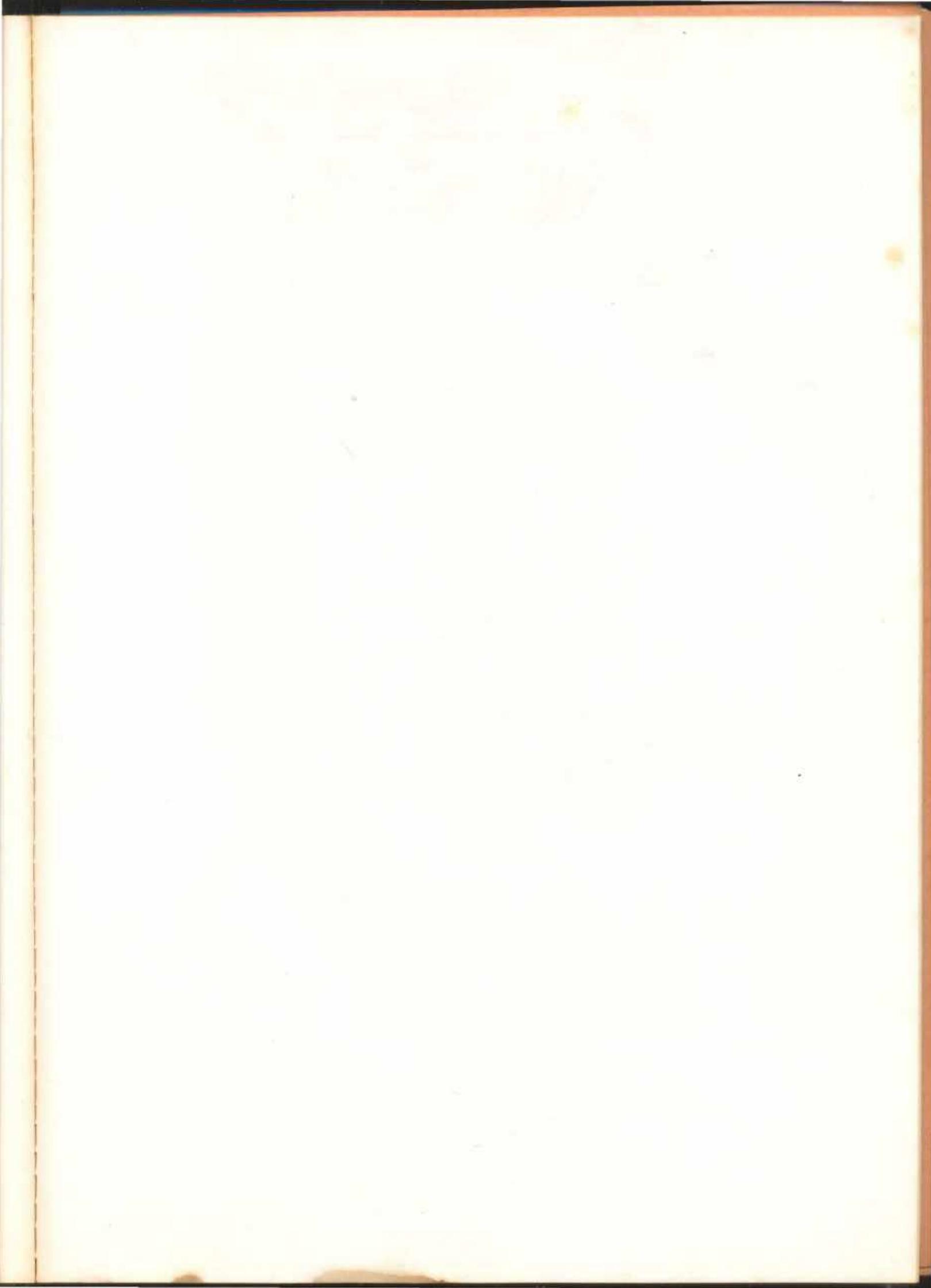


FONCTION DE TRANSFERT THEORIQUE

Figure 17 : DESCRIPTION PAR LES RESERVOIRS EN CASCADE



FONCTION DE TRANSFERT THEORIQUE



ANNEXE C - 3

FIGURES DU CHAPITRE VI

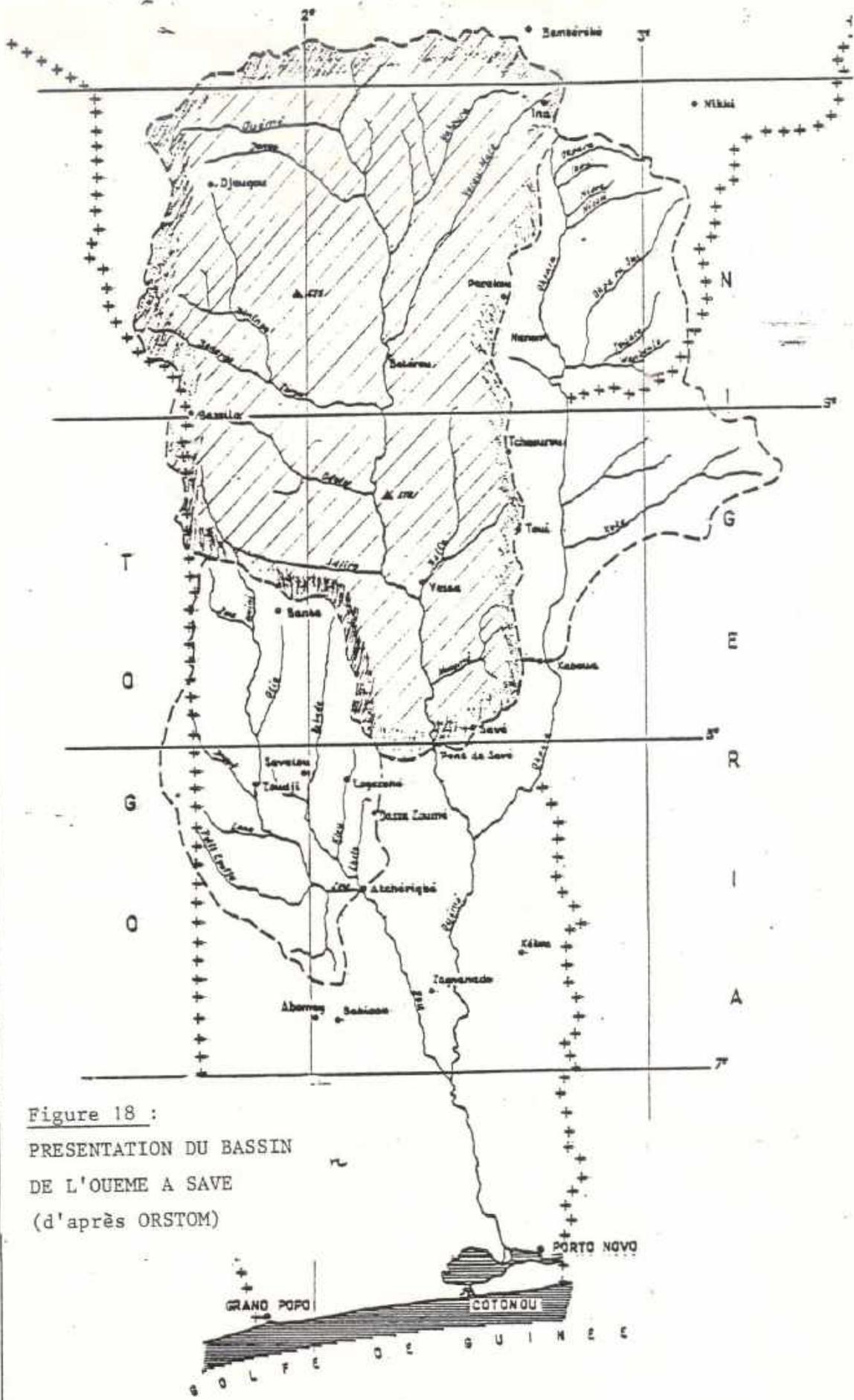


Figure 18 :  
 PRESENTATION DU BASSIN  
 DE L'OUEME A SAVE  
 (d'après ORSTOM)

Réseau hydrographique

ECHELLE : 1/

Figure 19 - a : DEBIT OUEME A SAVE  
1964 - 1977

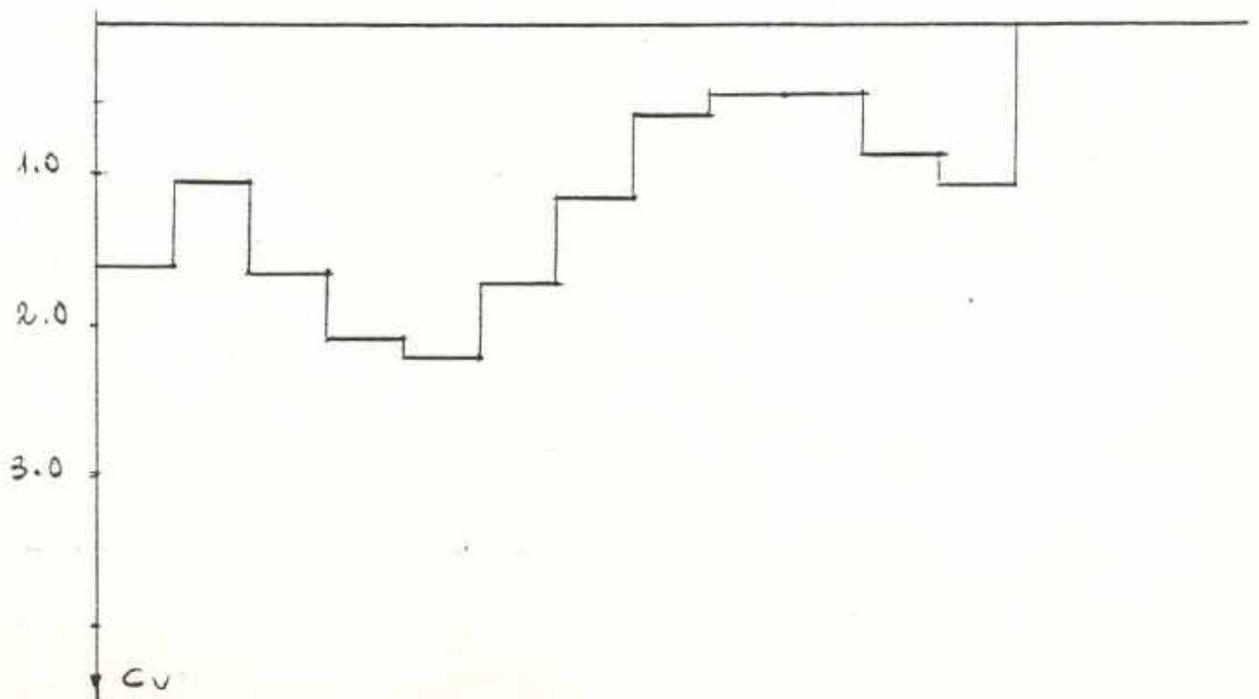
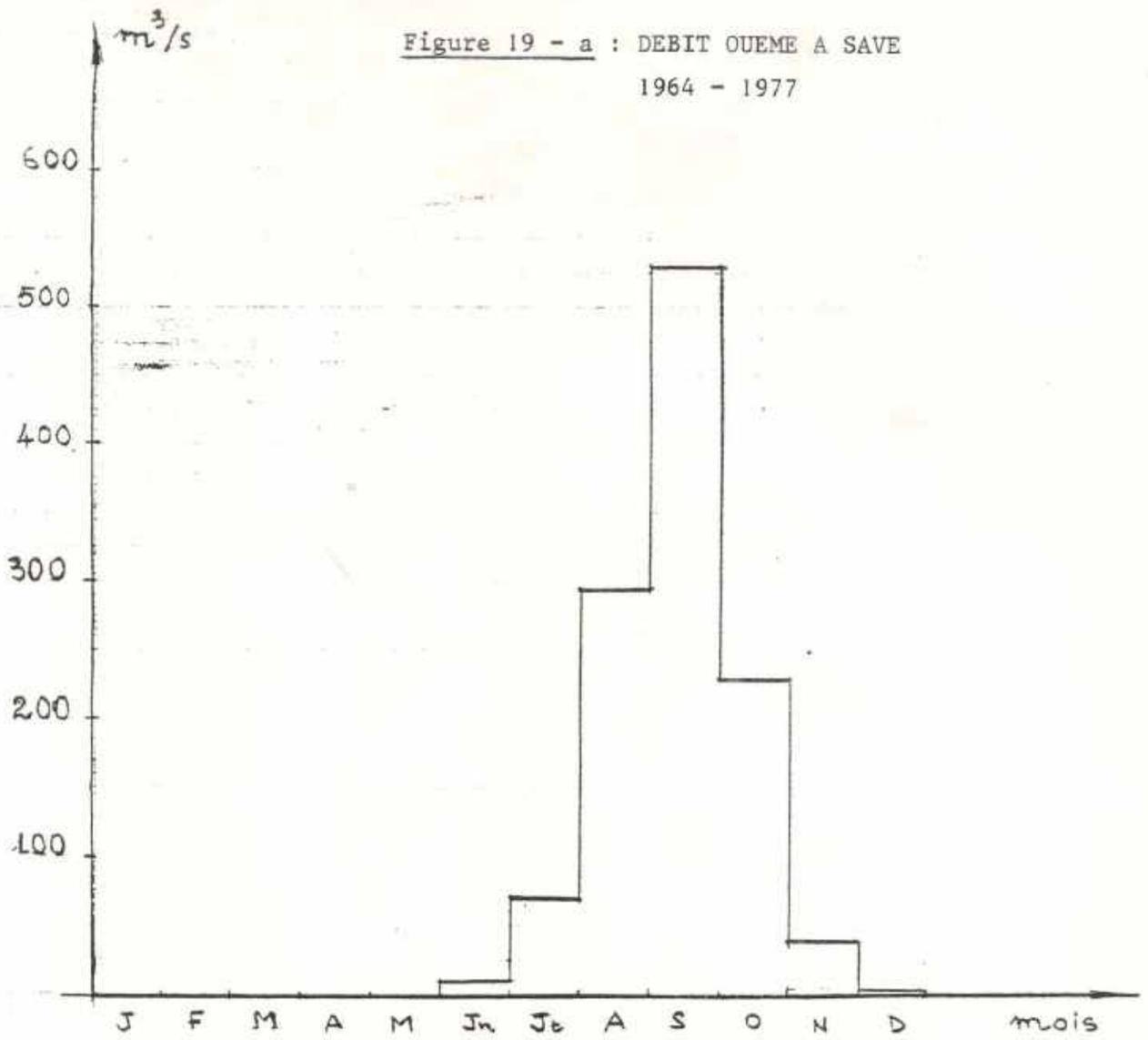


Figure 19 - b : EVOLUTION DES DEBITS DE SORTIE  
 DE L'OUEME AU PONT DE SAVE  
 1964 - 1978

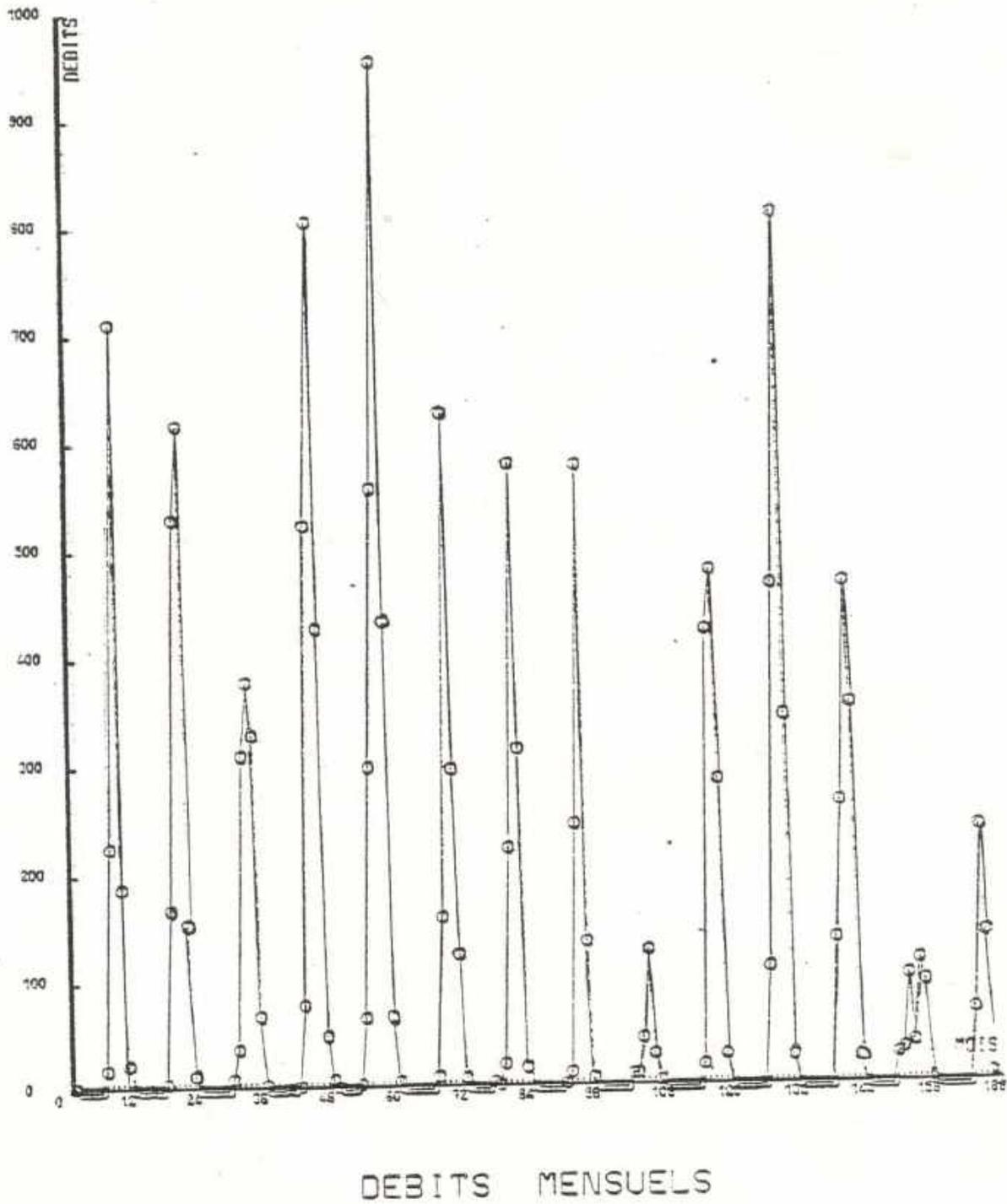


Figure 20 -a : PROBABILITE DE DEPASSEMENT  
 SEUIL : 10 m<sup>3</sup>/s

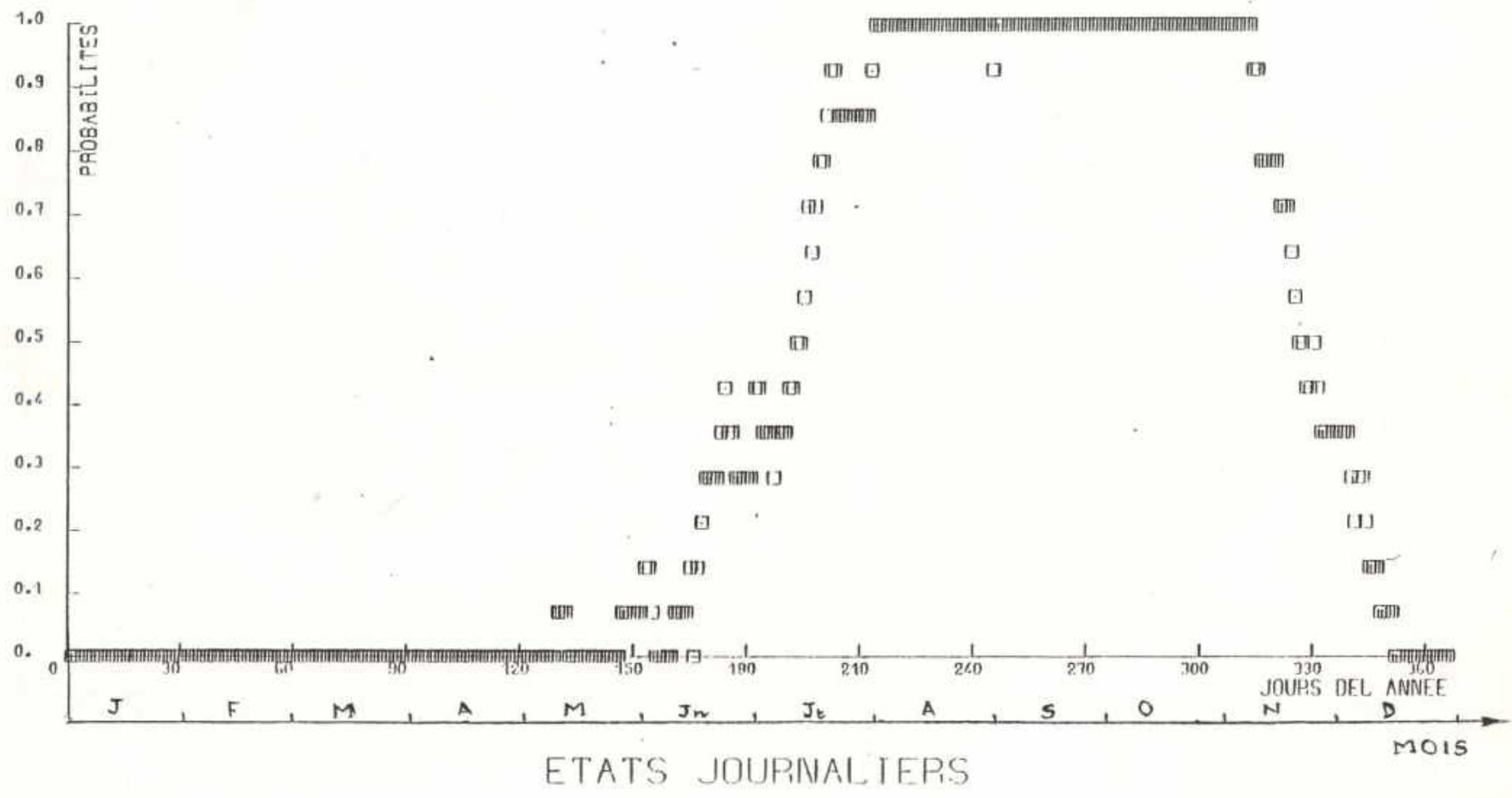


Figure 20 - b : PROBABILITE DE DEPASSEMENT

SEUIL :  $100 \text{ m}^3/\text{s}$

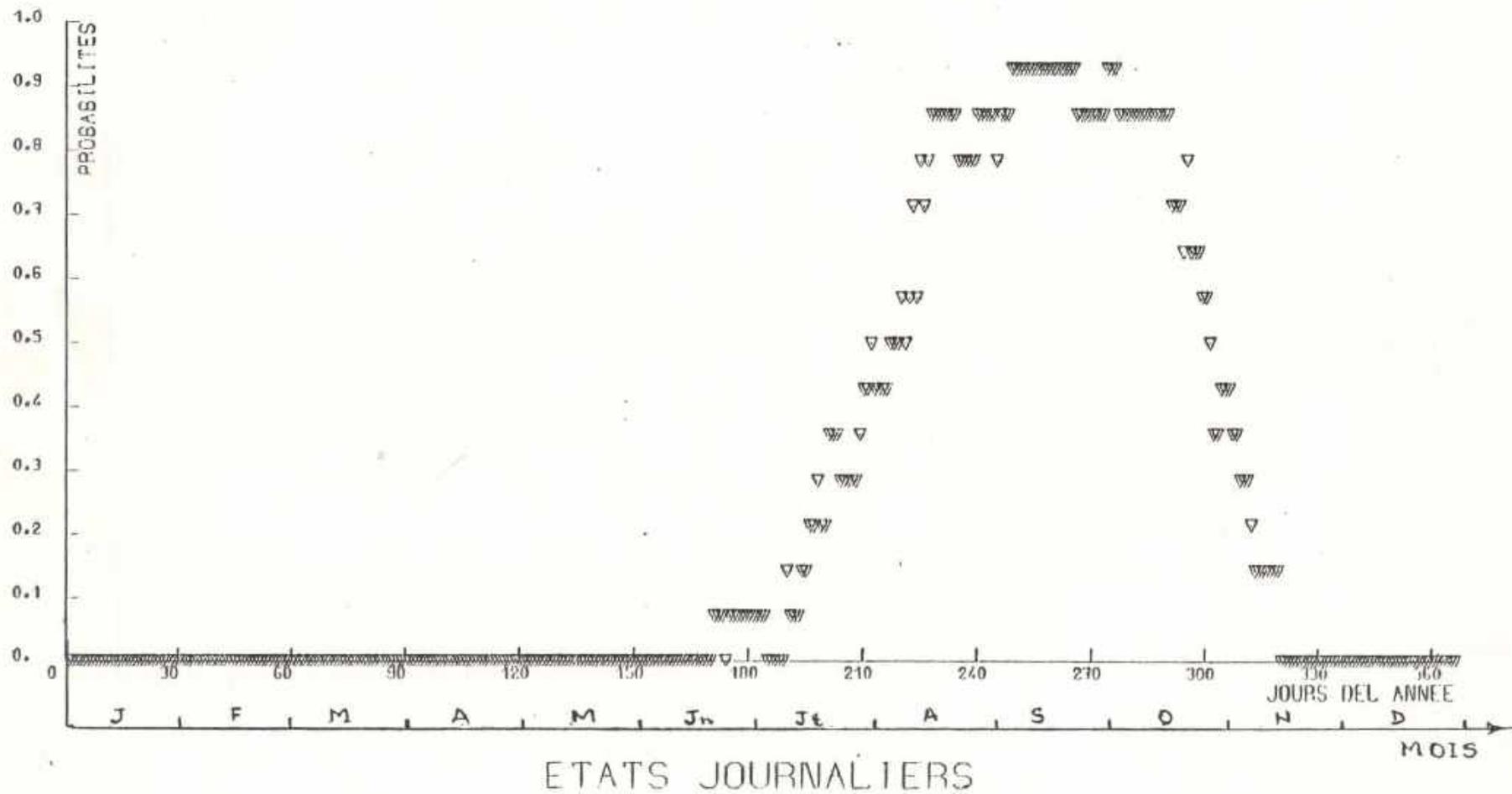


Figure 20 - c : PROBABILITE DE DEPASSEMENT  
 SEUIL : 200 m<sup>3</sup>/s

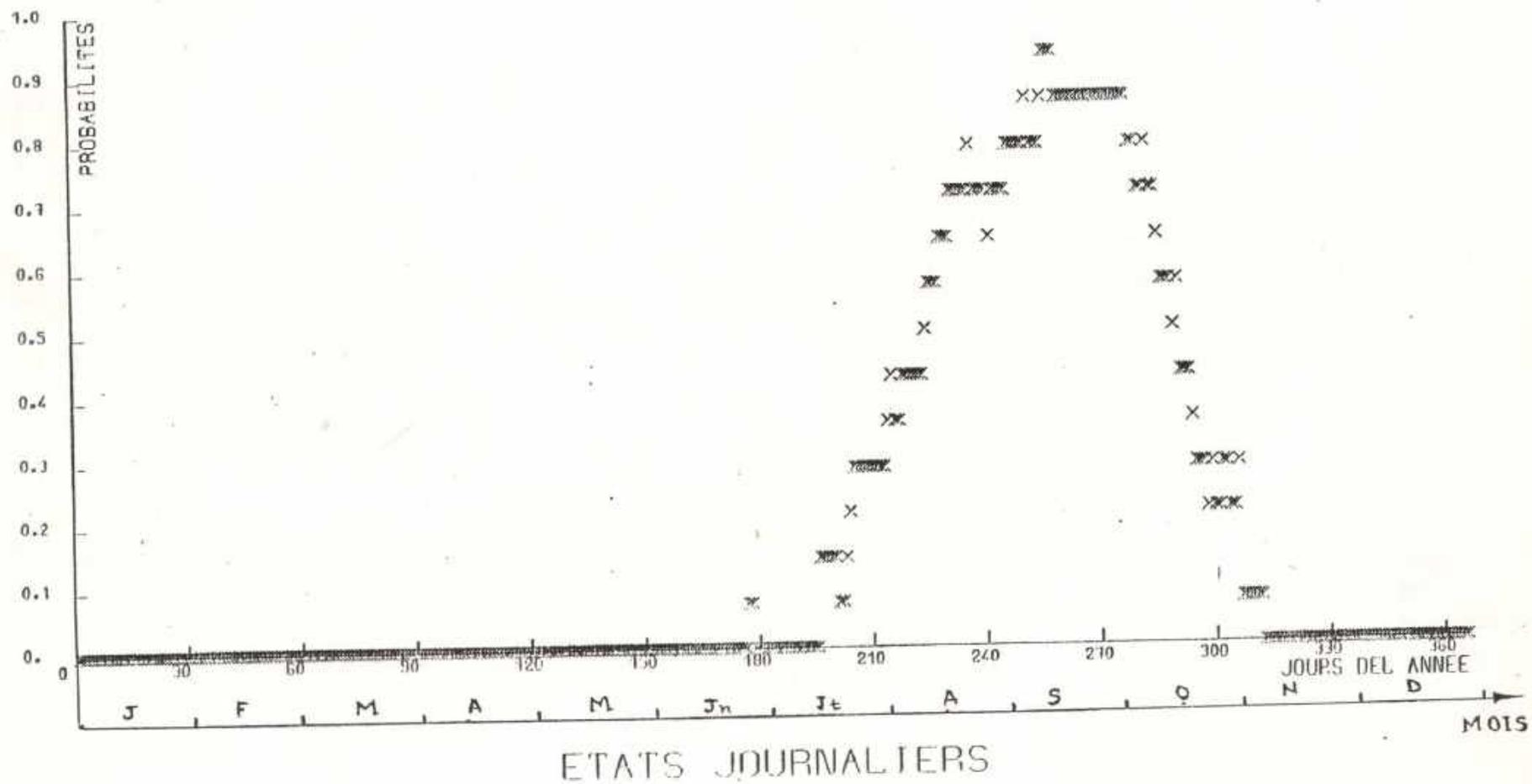


Figure 20 -d : PROBABILITE DE DEPASSEMENT  
 SEUIL :  $359 \text{ m}^3/\text{s}$

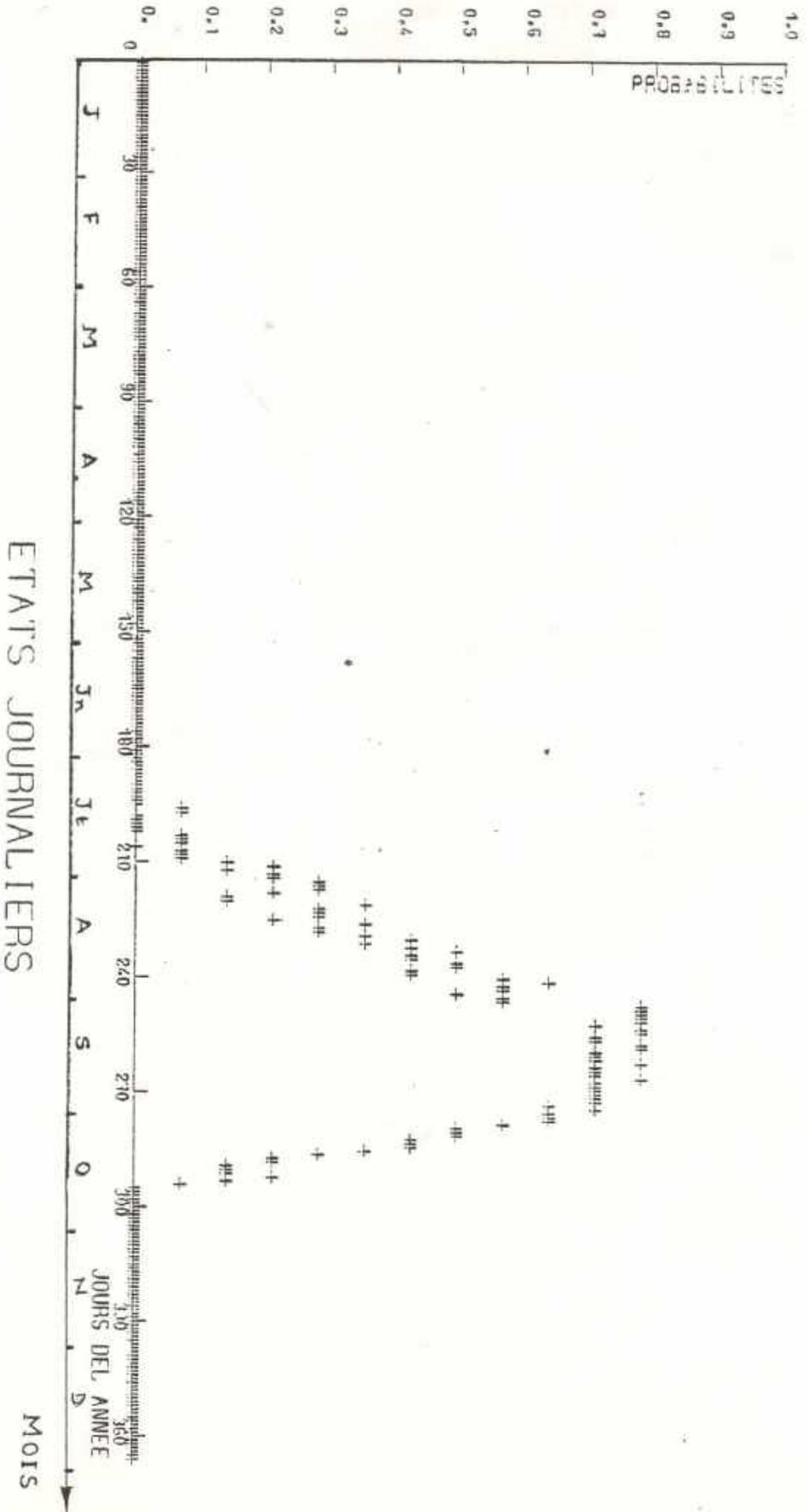
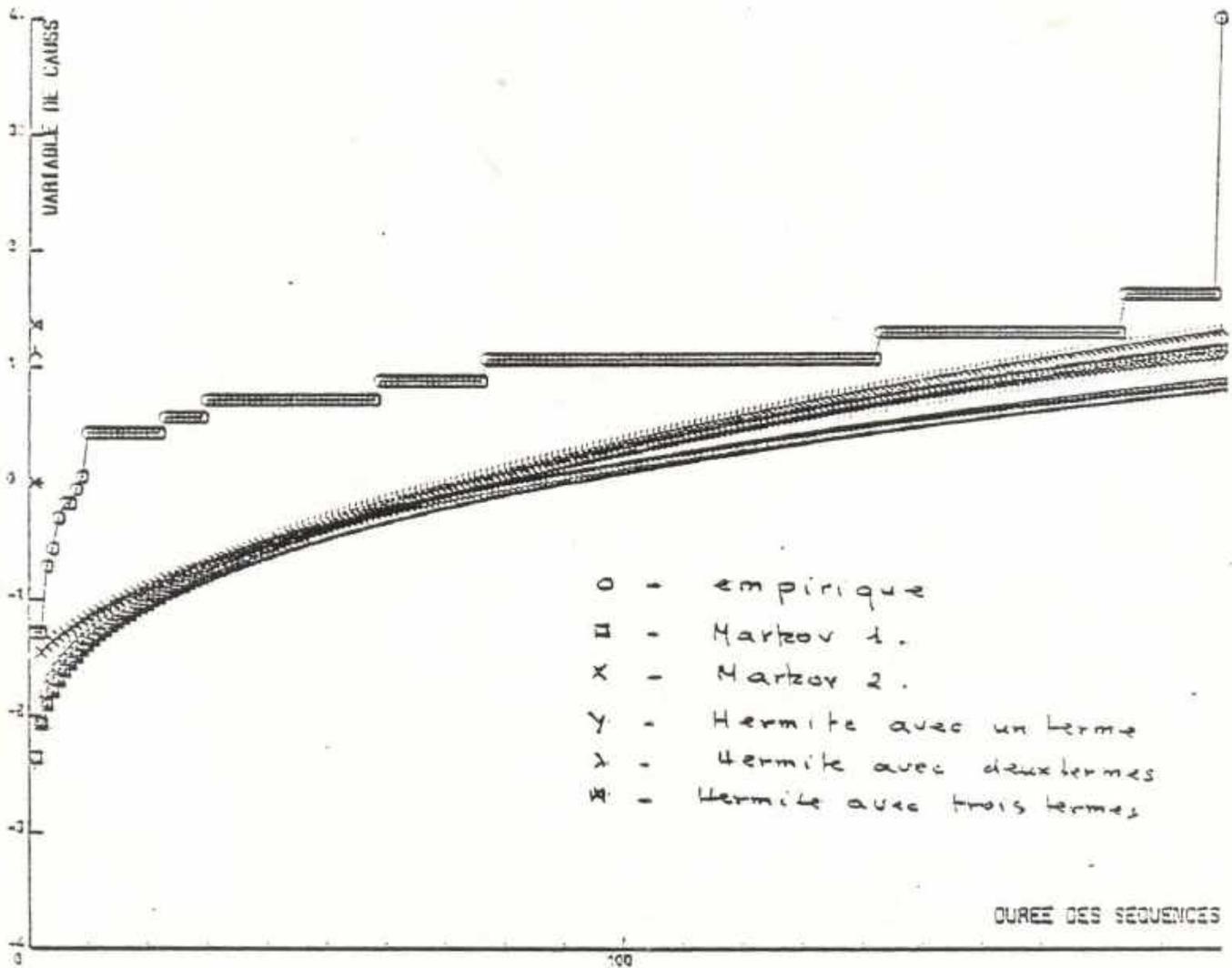
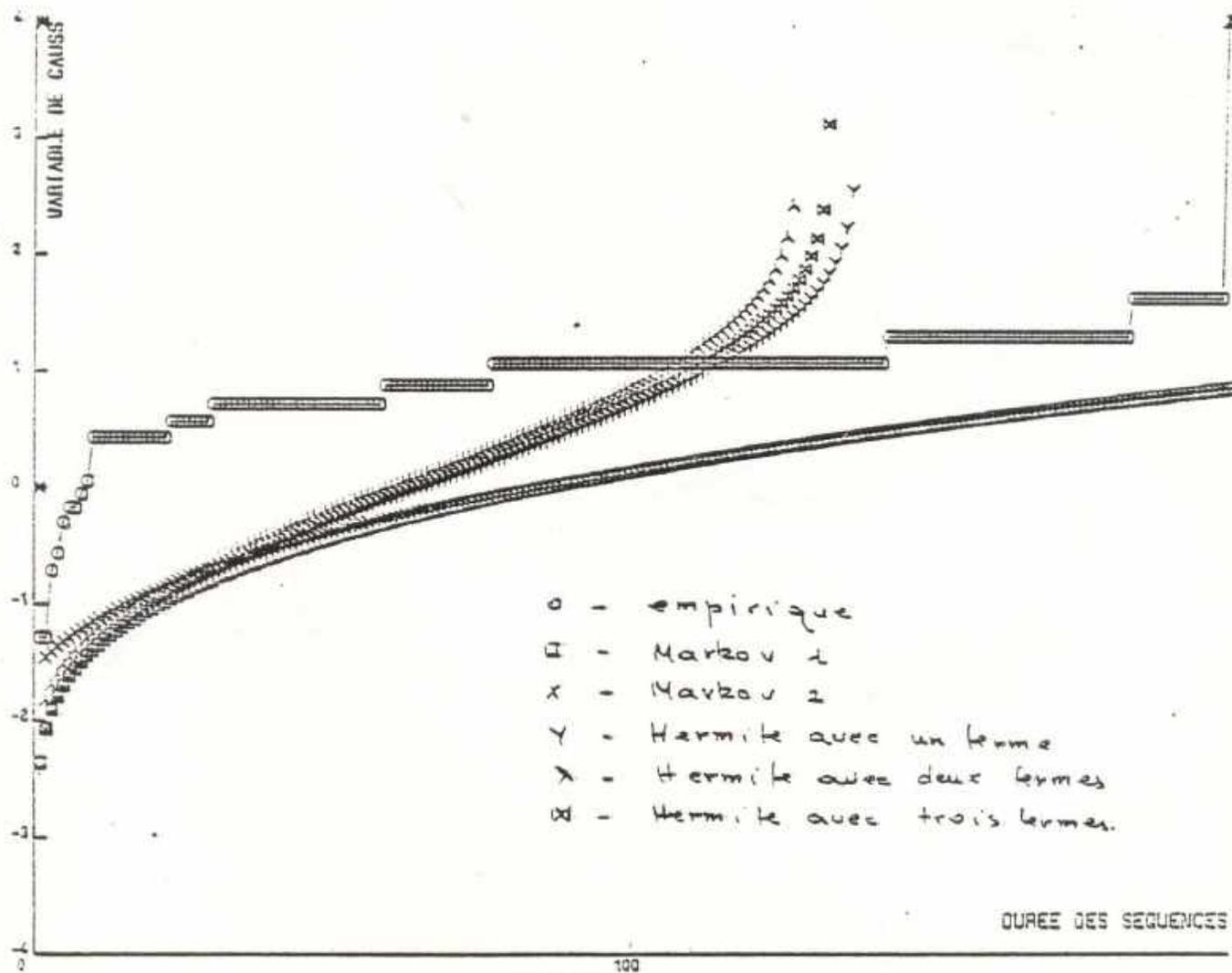


Figure 21 - a : EVOLUTION DES DEBITS DE SORTIE  
 STRUCTURE MARKOVienne DU PARAMETRE  $\epsilon_i$



QUEME-SAVE

Figure 21 - b : EVOLUTION DES DEBITS DE SORTIE  
 STRUCTURE MARKOVienne DU PARAMETRE  $\epsilon_i$   
 VALEURS CORRIGÉES

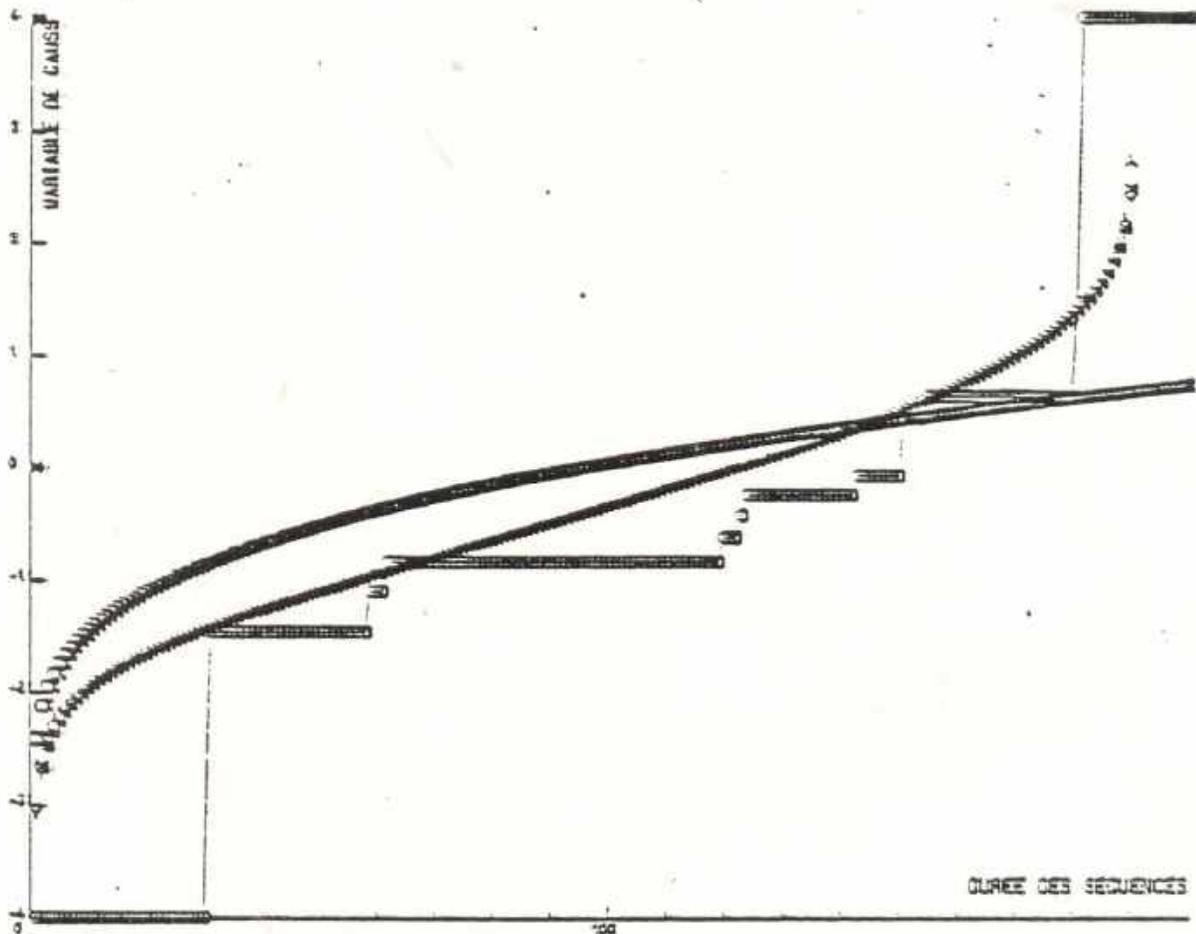


OUEME-SAVE

Figure 21 - c : EVOLUTION DES DEBITS DE SORTIE

STRUCTURE MARKOVienne DU PARAMETRE

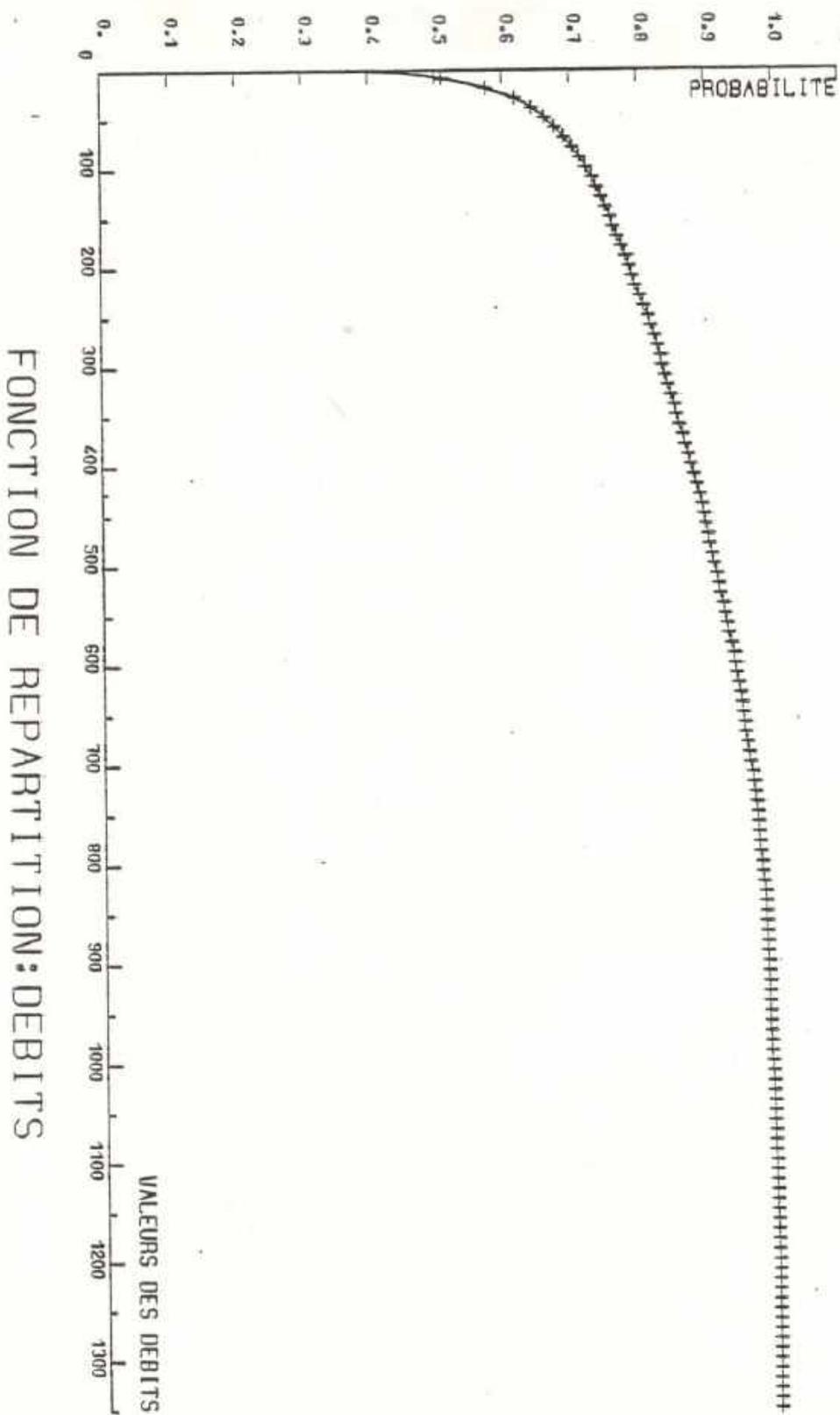
$|\eta_i|$



QUEME-SAVE

- o - empirique
- u - Markov 1
- x - Markov 2
- y - Hermite avec un terme
- y - Hermite avec deux termes
- z - Hermite avec trois termes

FIGURE 22 - a



FONCTION DE REPARTITION: DEBITS

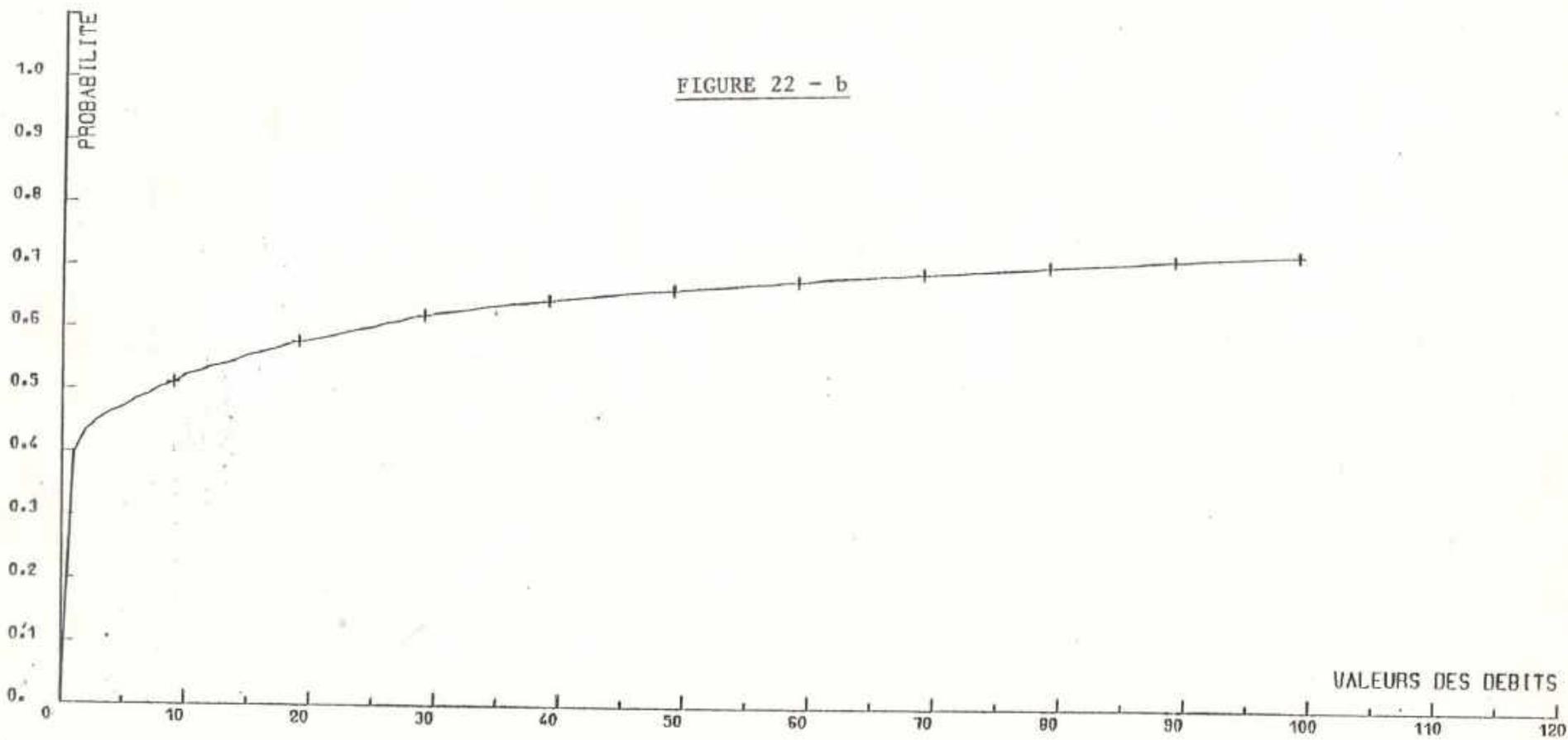


Fig: FONCTION DE REPARTITION: DEBITS

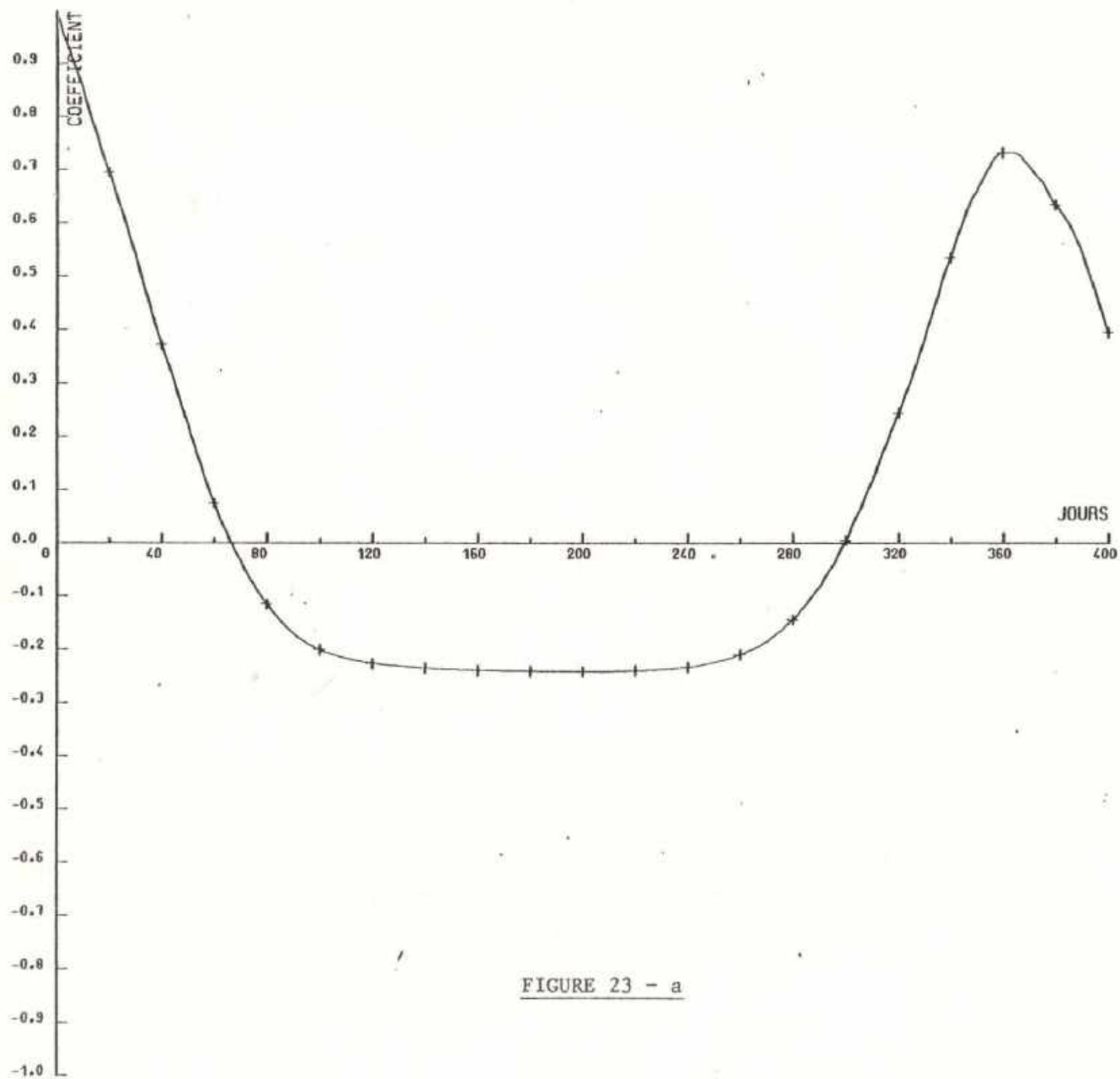


FIGURE 23 - a

CORRELOGRAMME DES DÉBITS JOURNALIERS

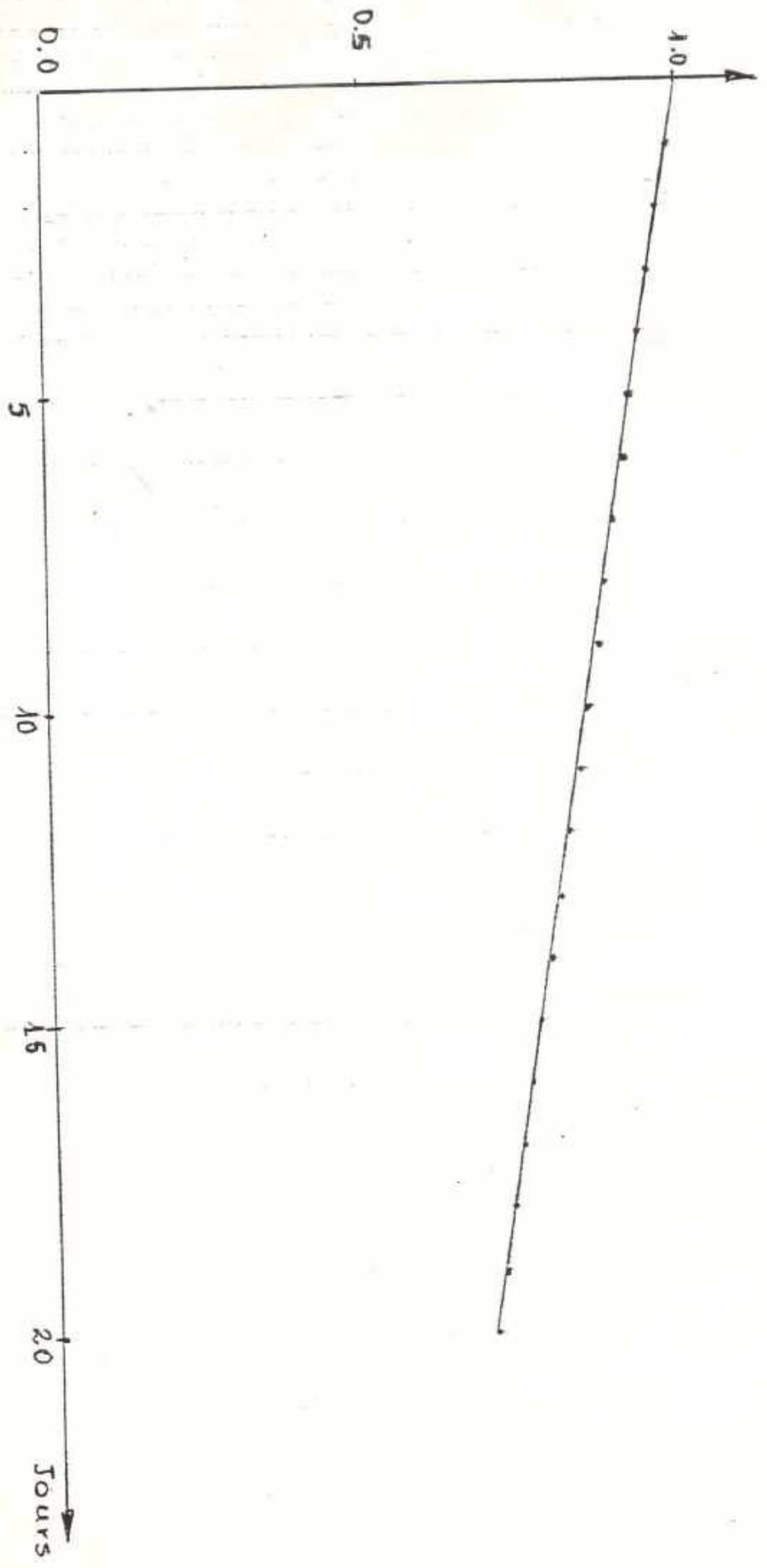


FIGURE 23 - b CORRELOGRAMME DES DEBITS JOURNALIERS

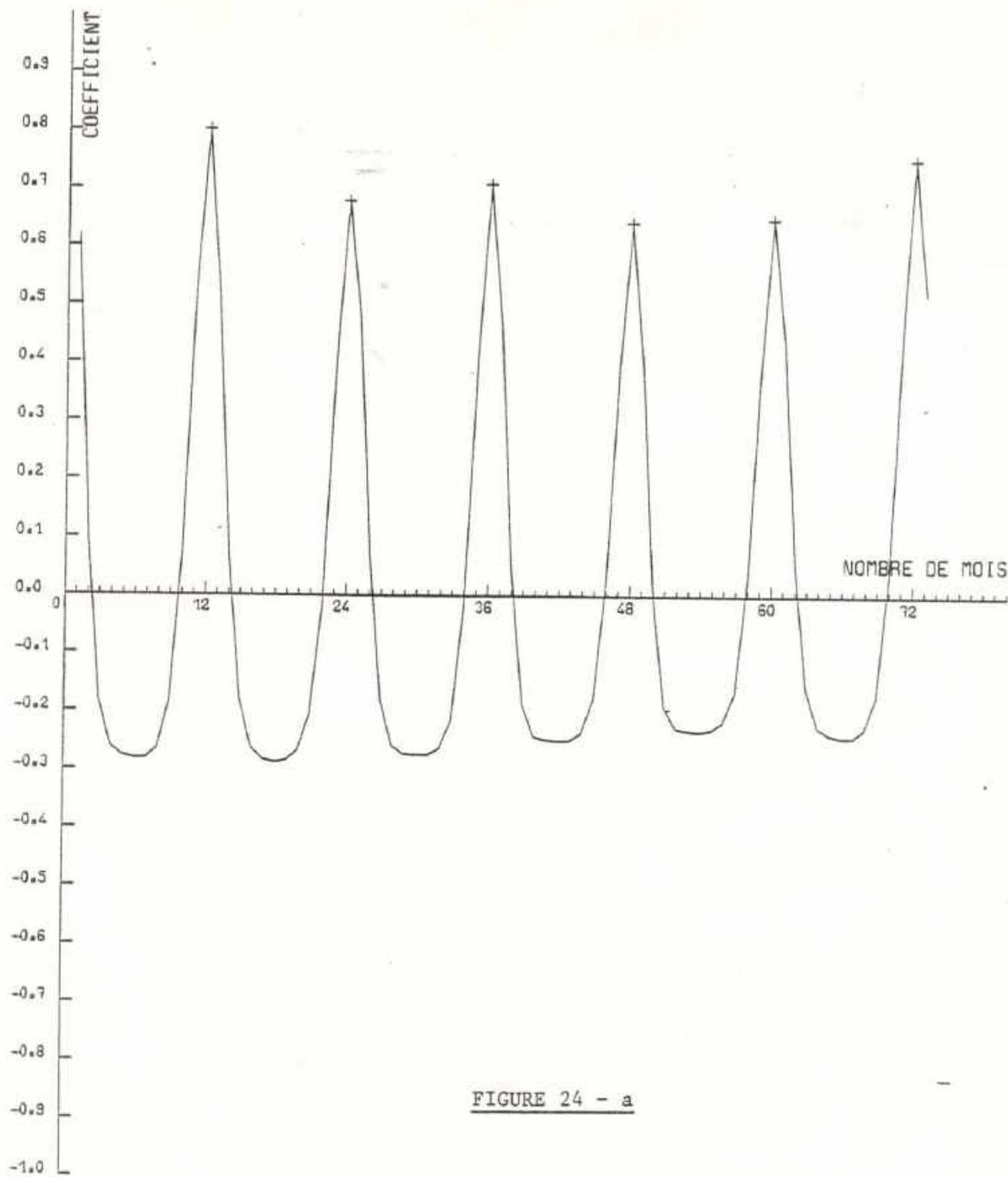


FIGURE 24 - a

FONCTION D AUTOCORRELATION: DEBIT

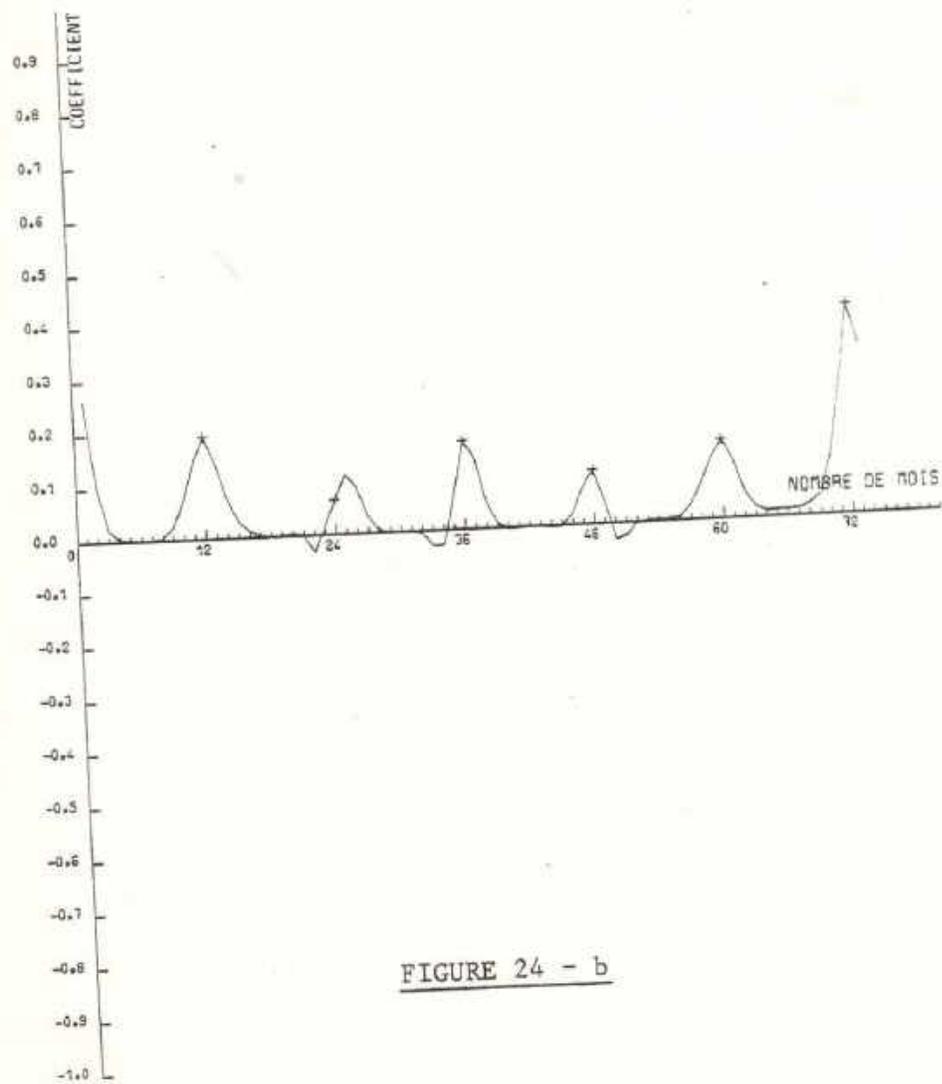
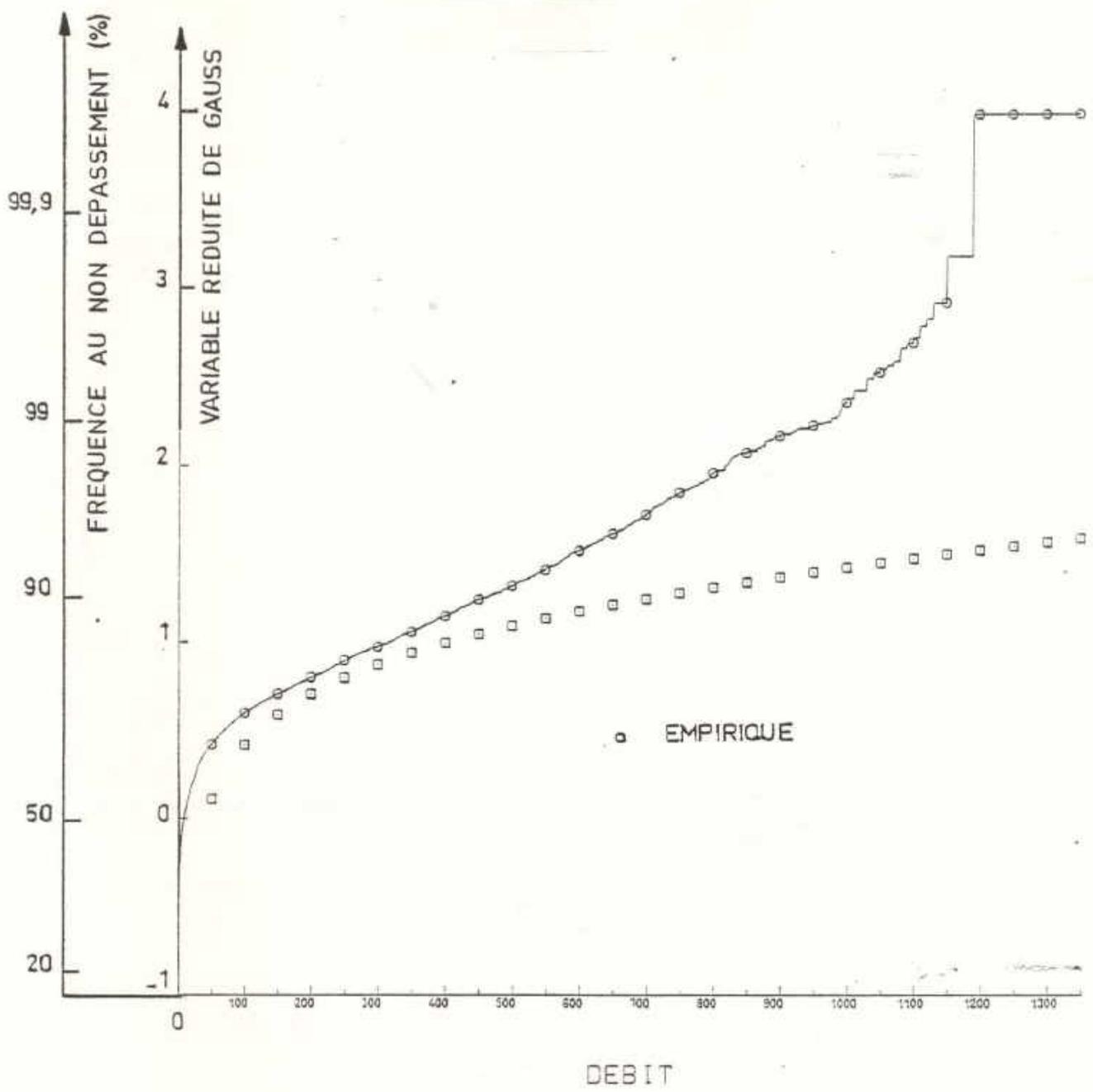
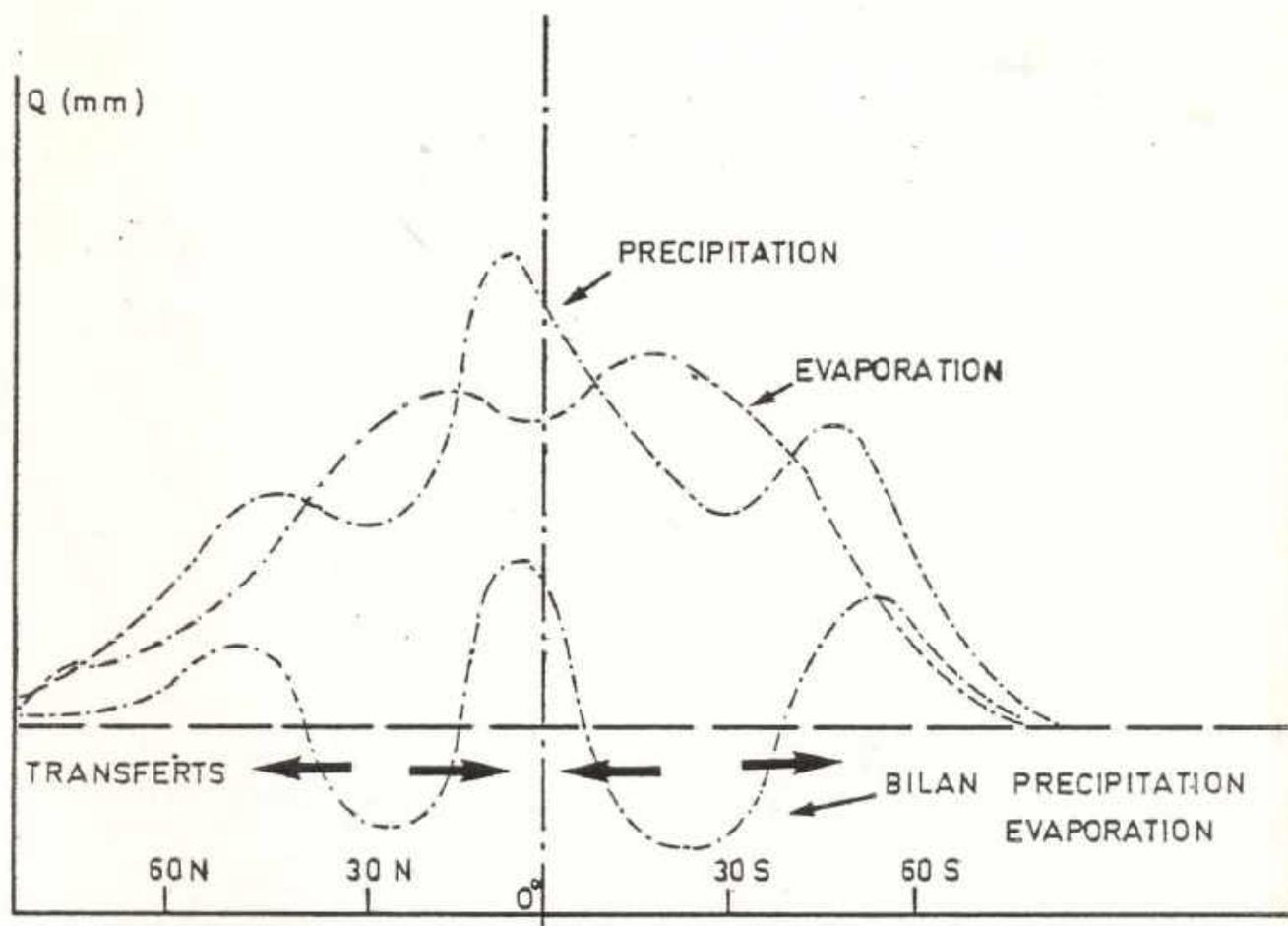


FIGURE 24 - b

FONCTION D AUTOCORRELATION: DEBIT

FIGURE 25 - a

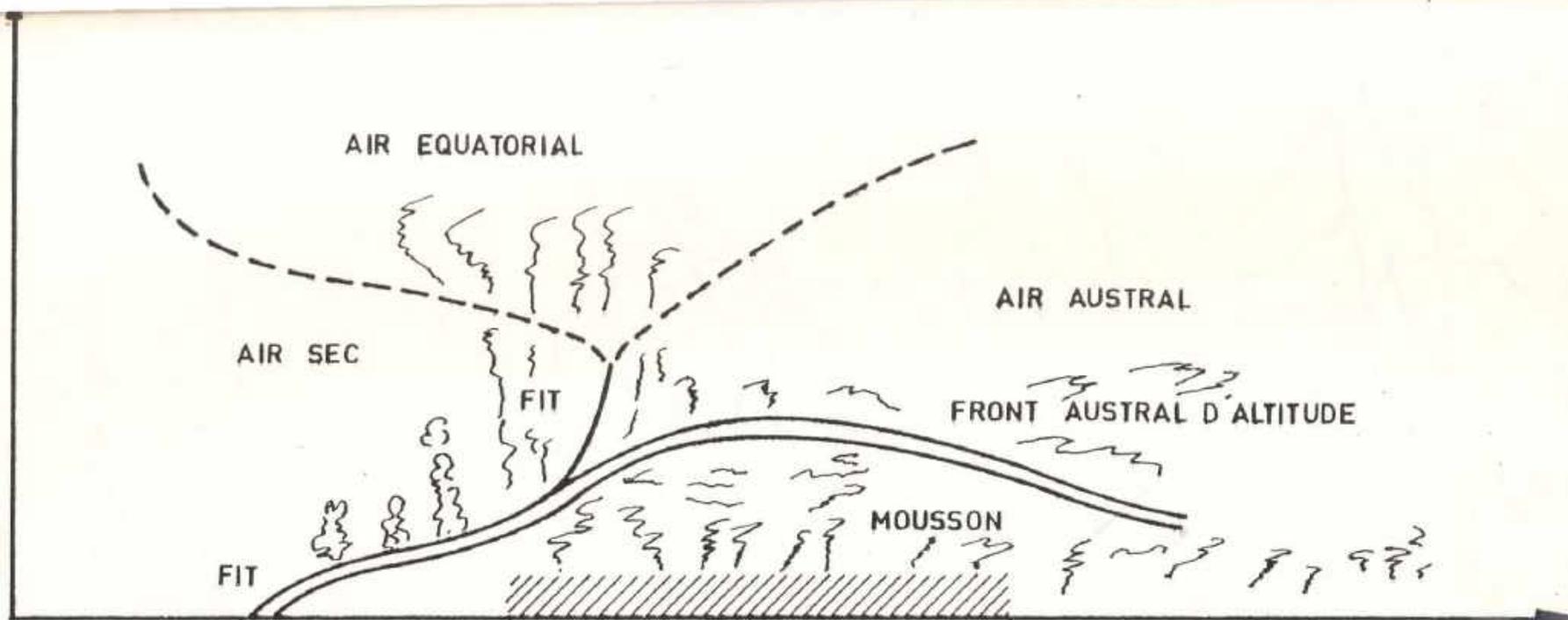




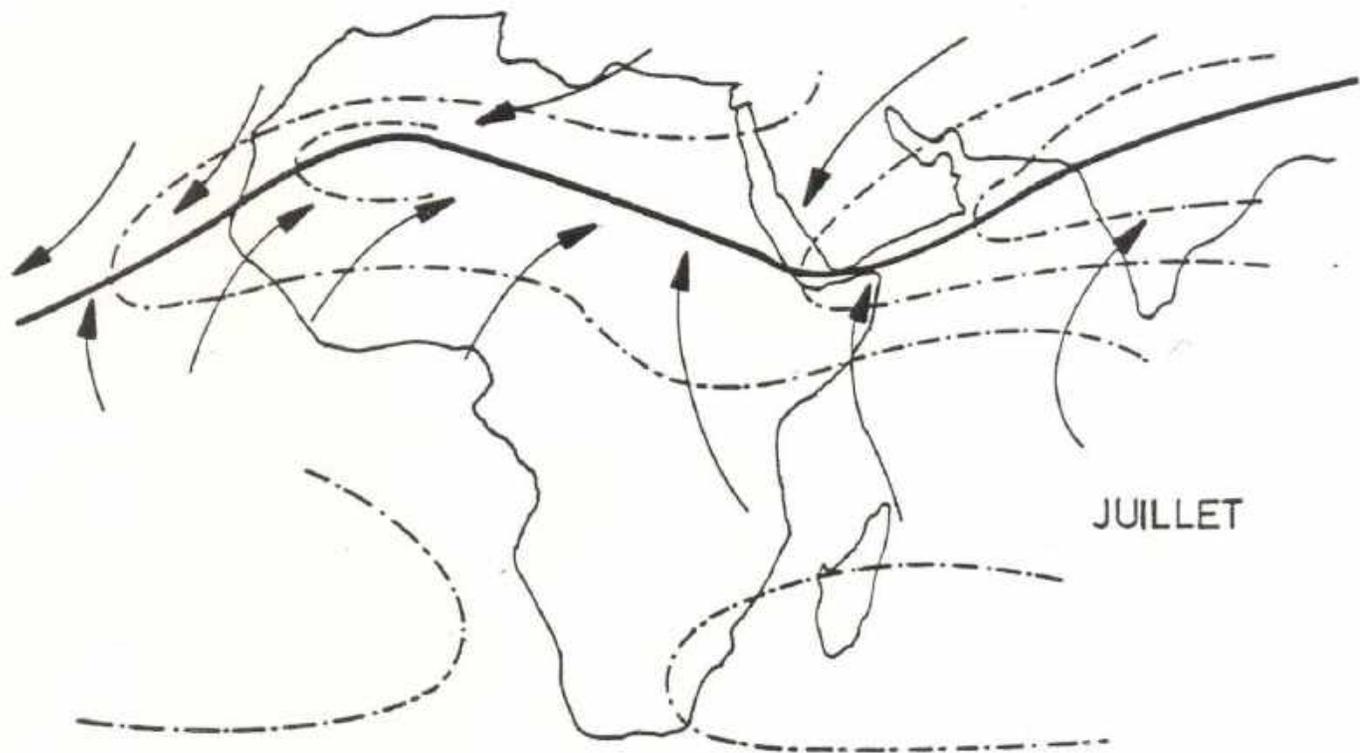
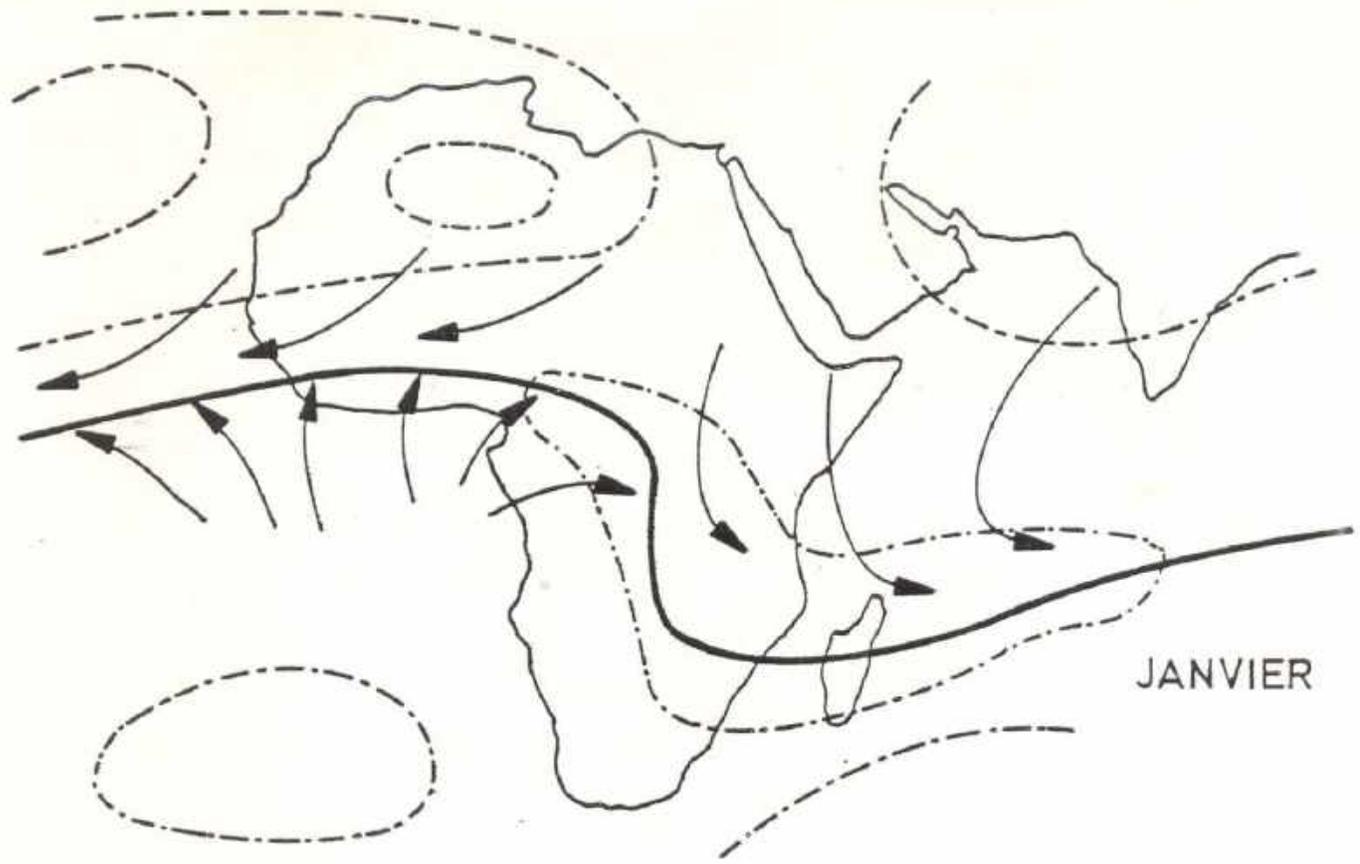
FIGURE

BILAN PRECIPITATION  
EVAPORATION

(d'après DHONNEUR 1974)

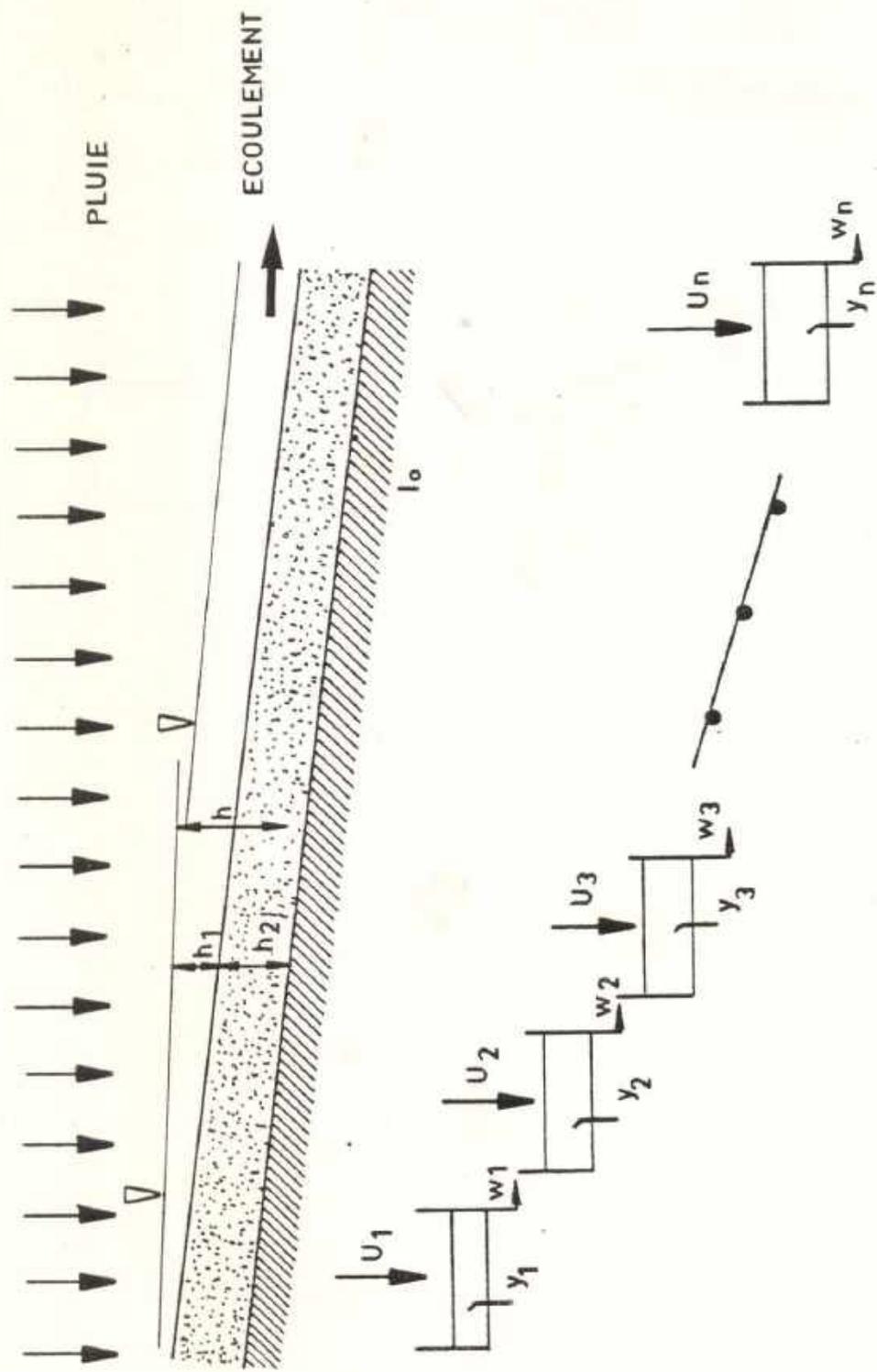


ZONES	A		B		C		D
	A	B	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>			
LARGEUR MOYENNE	200 Km		200 / 400	200 / 600			
ÉPAISSEUR MOUSSON	0 / 1000	1000 / 2500 m	1000 / 4000 m		2000 m		
NÉBULOSITE	PEU NUAGEUX		NUAGEUX		NUAGEUX		
PHÉNOMÈNE	REGIME TRANSITOIRE		LIGNE DE GRAINS PLUIES	PLUIE DE MOUSSON	PLUIE FAIBLES BRUMES		
SAISON			SAISON DE PLUIES		} LOCALEMENT		



EQUATEUR MÉTÉOROLOGIQUE EN SURFACE

( D'après Dhonneur 1974 )



SIMULATION DE L'ÉCOULEMENT DE SURFACE  
PAR LES RESERVOIRS EN CASCADE

FIG.

DEBIT

