Ministère de l'Enseignement Supérieur
Université de Cocody

République de Côte d'Ivoire
Union-Discipline-Travail

N° d'ordre : 384/ 2003

THESE

présentée à l'UFR de Mathématiques et Informatique

pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

Spécialité : **Mathématiques Pures**

Option : **Algèbre Commutative**

par

YOUSSOUF MAHAMADOU DIAGANA

INDÉPENDANCE ANALYTIQUE GÉNÉRALISÉE AUX QUASI-GRADUATIONS D'ANNEAUX ET DE MODULES,

EXTENSIONS DE LA LARGEUR ANALYTIQUE AUX QUASI-GRADUATIONS D'ANNEAUX

soutenue le 28 juillet 2003

devant le Jury composé de :

Président : Etienne DESQUITH, Maître de Recherche à l'IRMA

Examinateurs : Saliou TOURE, Professeur à l'Université de Cocody

Daouda SANGARE, Professeur à l'Université d'Abobo-Adjamé

Henri DICHI, Maître de Conférences à l'Université de Clermont Ferrand II

Philippe AYEGNON, Maître de Conférences à l'ENS d'Abidjan

Remerciements

C'est d'abord au Professeur Daouda SANGARE que je dois d'avoir mené à bien ce travail. Je tiens à lui exprimer ici toute ma gratitude pour la bienveillance qu'il a manifestée à mon égard en toutes circonstances. Qu'il veuille accepter mes remerciements sincères pour son aide et ses encouragements constants.

Toute ma gratitude va aussi au Professeur Saliou TOURE qui a toujours oeuvré pour la promotion des mathématiques en Côte d'Ivoire et qui a bien voulu s'intéresser à ce travail tout en acceptant la co-direction.

L'excellent accueil que m'a réservé Monsieur Henri DICHI à l'Université de Clermont Ferrand II et l'intérêt qu'il porte à mes recherches m'ont beaucoup aidé dans mon travail. Je lui suis très reconnaissant d'avoir accepté la co-direction.

Qu'il me soit permis d'exprimer toute ma reconnaissance au Professeur Akry KOULIBALY, Recteur de l'Université de Bobo-Dioulasso qui m'a soutenu dans mes travaux de recherche.

Je remercie Monsieur Philippe AYEGNON de m'avoir constamment exprimé ses encouragements et pour ses conseils qui m'ont été d'une grande utilité et d'avoir accepté de faire partie du jury et d'examiner ce travail.

Tous mes remerciements vont également à Monsieur Etienne DESQUITH, Directeur de l'IRMA, pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Koua Konin, Doyen de l'UFR Mathématiques et Informatique pour sa bienveillance et ses encouragements depuis ma première année universitaire.

Je suis grandement redevable à Messieurs Abdallah BADRA, Benjamin DELAY, à Monsieur Bertin DIARRA et à tous leurs collègues du Département de Mathématiques de l'Université de Clermont Ferrand II ainsi qu'à Messieurs Abdoulaye ASSANE, Bamba SIAKA, Bio SALIFOU, Damase KAMANO, Kouakou MATHIAS, Paul REY, François TANOE, Pascal TOGBE, Mamadou SOUMARE, tous membres du séminaire d'Algèbre d'Abidjan, sans oublier l'AUF (l'Agence Universitaire de la Francophonie) et la Mission de Coopération Française qui a bien voulu m'octroyer une bourse en alternance pour la réalisation de ce travail. Qu'ils en soient vivement remerciés.

Mes remerciements vont également au Professeur Daouda AIDARA et au Professeur Etienne EHILE, Président de l'Université d'Abobo-Adjamé, ainsi qu'au Professeur Pierre KOTCHI, Doyen de l'UFR SFA, pour leur soutien constant. Je remercie également mes collègues et amis de l'Université d'Abobo-Adjamé pour leur soutien sans faille.

Notre profonde gratitude au CHERIF HAMAHOULLAH, au CHEIKH YACOUBA SYLLA et à son fidèle ami BALIOU KABA, à tous nos parents ainsi qu'à nos amis et à tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué d'une manière ou d'une autre à l'élaboration de ce travail.

Sommaire

Introduction 2

Chapitre 1 - Quasi-graduations d'anneaux et indépendance analytique généralisée 10

1.1 Indépendance analytique généralisée 10
1.2 Critères de $J-$indépendance 14

Chapitre 2 - Dimension, degré de transcendance et largeur analytique d'une $^{+}$quasi-graduation d'anneaux 21

2.1 Notations et Définitions 21
2.2 Propriétés et comparaisons 22

Chapitre 3 - Extensions de la largeur analytique 31

3.1 Indépendances affaiblies et extensions de la largeur analytique 31
3.2 Caractérisations d'extensions de la largeur analytique 33

Chapitre 4 - Cas des quasi-Filtrations et des prégraduations d'anneaux 38

4.1 Généralités 38
4.2 Comparaisons 40
4.3 Cas des $k-$préfiltrations régulières 42
4.4 Exemples 44

Chapitre 5 - Indépendance anatytique généralisée aux quasi-graduations de modules 47

5.1 Quasi-graduations de modules et indépendance analytique généralisée 47
5.2 Critères de $J-$indépendance 50

Références 56

Annexes 57

INTRODUCTION

L'étude de la largeur analytique a fait l'objet de plusieurs travaux avec des approches différentes, parmi lesquelles le nombre maximum d'éléments analytiquement indépendants dans un idéal I d'un anneau nœthérien local que nous notons $\ell(I)$.

A) Le concept de largeur analytique a été introduit par D. G. Northcott et D. Rees en 1954 dans [N R] de la manière suivante :

Soit $(\mathcal{A}, \mathfrak{M})$ un anneau nœthérien local et soit I un idéal de $\mathcal{A}$.

La fonction $\varphi_I : n \longmapsto \dim_{\mathcal{A}/\mathfrak{M}} \left(\dfrac{I^n}{\mathfrak{M}I^n}\right)$ est polynomiale. La largeur analytique de I est définie par : $\lambda(I) = 1 + d^\circ\varphi_I$, où $d^\circ\varphi_I$ est le degré du polynôme associé à φ_I.

Ils ont montré que si le corps résiduel de l'anneau $(\mathcal{A}, \mathfrak{M})$ est infini alors $\ell(I) = \lambda(I)$.

Posons $\gamma(I) = \dim \dfrac{R(\mathcal{A}, I)}{\mathfrak{M}R(\mathcal{A}, I)}$. On montre aussi que $\lambda(I) = \gamma(I)$, que $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ soit infini ou non.

J. S. Okon a défini dans [Ok] la largeur analytique d'une filtration nœthérienne $f = (I_n)$ d'un anneau $\mathcal{A}$ par :

$$\sup\left\{\dim \frac{\Re(\mathcal{A}, f)}{(u, \mathfrak{M})\,\Re(\mathcal{A}, f)} : \mathfrak{M} \in \mathrm{Max}\mathcal{A}\right\} \text{ noté } \gamma(f, 1)$$

où $\Re(\mathcal{A}, f)$ est l'anneau de Rees généralisé $\sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n X^n$ avec X une indéterminée et $u = 1/X$.

B) D. G. Northcott et D. Rees ont défini dans [N R] deux notions d'éléments analytiquement indépendants de la manière suivante :

Soit $(\mathcal{A}, \mathfrak{M})$ un anneau local nœthérien et soit I un idéal de $\mathcal{A}$.

1) Des éléments $a_1, \ldots, a_r$ de $\mathcal{A}$ sont dits analytiquement indépendants si pour tout polynôme homogène $\mathcal{F}$ de degré s, à r indéterminées et à coefficients dans $\mathcal{A}$, la relation $\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_r) = 0$ implique que $\mathcal{F}$ a tous ses coefficients dans $\mathfrak{M}$.

2) Des éléments $a_1, \ldots, a_r$ de I sont dits analytiquement indépendants dans I si pour tout polynôme homogène $\mathcal{F}$ de degré s, à r indéterminées et

à coefficients dans $\mathcal{A}$, la relation $\mathcal{F}(a_1,\dots,a_r) \in \mathfrak{M}I^s$ implique que $\mathcal{F}$ a tous ses coefficients dans $\mathfrak{M}$.
Une généralisation concernant la première notion d'indépendance analytique a été introduite par G. Valla en 1970 :

Soient $\mathcal{A}$ un anneau et J un idéal de $\mathcal{A}$. Des éléments $a_1,\dots,a_r$ de $\mathcal{A}$ sont dits $J-$indépendants si, pour tout polynôme homogène $\mathcal{F}$ de degré s, à r indéterminées et à coefficients dans $\mathcal{A}$, la relation $\mathcal{F}(a_1,\dots,a_r) = 0$ implique que $\mathcal{F}$ a tous ses coefficients dans J.
Dans ma thèse de troisième cycle, ces deux notions ont été étendues aux filtrations à l'aide d'une seule définition, ce qui a permis d'avoir des extensions de la largeur analytique notées $\ell_J(g,k)$ et j'ai défini une autre extension de $\gamma(f,1)$ par $\gamma_J(f,k)$ où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Plus tard, dans [D D S], nous avons présenté une extension de la largeur analytique en utilisant le degré de transcendance dans un sens défini par Hamann dans [Ha] et nous avons présenté des comparaisons entre ces notions pour $k = 1$ et $k = +\infty$.

C) Le premier objectif de cette thèse est de généraliser l'indépendance analytique à des familles $g = (G_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ de sous-groupes d'un anneau commutatif et unitaire $\mathcal{B}$ tels que $G_0 = \mathcal{A}$ est un sous-anneau de $\mathcal{B}$, $G_\infty = (0)$ et $G_pG_q \subseteq G_{p+q}$ $\forall p,q \in \mathbb{Z}$ (resp. $\forall p,q \in \mathbb{N}$)), appelées quasi-graduations (resp. ${}^+$quasi-graduations) de $\mathcal{B}$ et de donner des extensions de la largeur analytique aux ${}^+$quasi-graduations comparables à la définition de J.S. Okon pour les filtrations nœthériennes.
Lorsque $g = (G_n)$ est une quasi-graduation (resp. une ${}^+$quasi-graduation) de $\mathcal{B}$ avec $G_O = \mathcal{B}$ alors pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{N}$), G_n est un idéal de $\mathcal{B}$ et on dit que g est une prégraduation (resp. une ${}^+$prégraduation) de $\mathcal{B}$.
Une filtration d'un anneau $\mathcal{B}$ est une prégraduation (resp. une ${}^+$prégraduation) de $\mathcal{B}$ qui est décroissante. Une filtration $f = (I_n)$ de $\mathcal{A}$ est dite nœthérienne si son anneau de Rees $R(\mathcal{A}, f) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I_nX^n$ est nœthérien.
La filtration $I-$adique d'un anneau $\mathcal{A}$ est la famille (I^n) où I est un idéal de $\mathcal{A}$ et $I^n = \mathcal{A}\ \forall n \leq 0$.

Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires. Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $g = (G_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ une ${}^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$, $k \in \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et J un idéal de $G_0 = \mathcal{A}$ tel que $J + G_k \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$.
Des éléments $a_1,\dots,a_r$ de G_1 sont dits $J-$indépendants d'ordre k relativement à g si, pour tout polynôme homogène $\mathcal{F}$ de degré s, à r indéterminées et à coefficients dans $\mathcal{A}$, la relation $\mathcal{F}(a_1,\dots,a_r) \in JG_s + G_{s+k}$ implique que $\mathcal{F}$ a tous ses coefficients dans $J + G_k$.

Au chapitre 1 nous donnons des propriétés de l'indépendance analytique généralisée pour les $^+$quasi-graduations d'un anneau et nous établissons le Théorème (1.2.4) qui donne des critères équivalents de $J-$indépendance d'ordre k relativement à une $^+$quasi-graduation $g = (G_n)$ d'un anneau $\mathcal{B}$ en termes d'isomorphismes de $\mathcal{A}-$algèbres et d'indépendance algébrique sur $\frac{\mathcal{A}}{J+G_k\cap\mathcal{A}}$ où $\mathcal{A}$ est le sous-anneau G_0 de $\mathcal{B}$ et J est un idéal de $\mathcal{A}$.
Le nombre maximum d'éléments de J, $J-$indépendants d'ordre k relativement à la $^+$quasi-graduation $g = (G_n)$ est noté $\ell_J(g,k)$. Lorsque $(\mathcal{A},\mathfrak{M})$ est un anneau nœthérien local à corps résiduel infini, I et J des idéaux de $\mathcal{A}$ et $g = f_I$ la filtration $I-$adique, $\ell_J(g,k)$ coïncide avec la définition de J. S. Okon. Par contre, nous établissons dans [D D S] que $\ell_J(g,k)$ est en général différent de la largeur analytique au sens de Okon même pour les filtrations nœthériennes d'un anneau local $(\mathcal{A},\mathfrak{M})$ à corps résiduel infini.

Des notions affaiblies de $J-$indépendance relativement à une $^+$quasi-graduation d'un anneau permettront d'obtenir au chapitre 3 des extensions de la largeur analytique aux $^+$quasi-graduations, notées $\ell^*_J(g,k)$, $\ell^q_J(g,k)$ et $\ell^a_J(g,k)$.

D) Nous adoptons les définitions suivantes lorsque $g = (G_n)$ est une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$:

1) Soit $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. On dit que $g = (G_n)$ est $k-$décroissante si pour tout $n \geq 0$ et pour tout $i \geq 1$ on a : $G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n$.

On montre par récurrence sur i que cela revient à dire que pour tout $n \geq 0$ la suite $(G_{n+ik} \cap G_n)_{i\geq 0}$ est décroissante.

On dit que g est une $k-$quasi-filtration de $\mathcal{B}$ si g est $k-$décroissante.

2) On appelle quasi-filtration de $\mathcal{B}$ toute $^+$quasi-graduation décroissante de $\mathcal{B}$.

3) On dit que g est une $k-$préfiltration de $\mathcal{B}$ si g est une $k-$quasi-filtration de $\mathcal{B}$ et une $^+$prégraduation de $\mathcal{B}$.

4) On dit que g est régulière d'ordre $m \geq 1$ si $G_{mn} = G_m^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

5) On dit que la $^+$quasi-graduation g est fortement A-P (fortement approximable par des puissances de sous-groupes) s'il existe $m \geq 1$ vérifiant

$$G_{mn} = G_m^n \ \forall n \geq 0 \ \text{ et } \ G_m^{(n+1)} \subseteq G_{mn+i} \subseteq G_m^n \ \forall n \geq 0 \ \text{ et } \ \forall i \in [0; m-1].$$

Si un tel m est le plus petit on dit alors que g est fortement A-P de rang m.

Le Théorème (4.2.1.) permet d'exprimer $\ell^q_J(g,k)$ et $\ell^a_J(g,k)$ par des $\ell_J(G_n,k)$ lorsque g est une $k-$quasi-filtration, J contient $G_k \cap \mathcal{A}$ et $ht\, J$ est fini :

$$\ell^q_J(g,k) = \ell^a_J(g,k) = \sup\left\{\ell_J\left(g^{(n)},k\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Le Corollaire (3.2.4) permet de déterminer $\ell_J^a(g,k)$ et $\ell_J^q(g,k)$ par des $\ell_J(G_n,k)$ lorsque g est une $k-$quasi-filtration régulière, $\mathcal{A}=G_0$ un anneau nœthérien et J un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$:
Pour tout $m \geq 1$ tel que $G_{mn} = G_m^n$ $\forall n$ et pour tout $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ on a :

$$\ell_J^a(g,k) = \ell_J^q(g,k) = \ell_J^a(G_{mp},k) = \sup\{\ell_J(G_{mn},k) : n \in \mathbb{N}^*\}\ \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

E) Dans les chapitres 2 et 4 nous donnons des extensions aux $^+$quasi-graduations en posant :

$$\gamma_J(g,k) = \dim \frac{R(\mathcal{A},g)}{R(\mathcal{A},g)\cap(u^k,J)\Re(\mathcal{A},g)} \quad \text{et}$$

$$\tau_J(g,k) = \operatorname{tr}\deg_{\frac{\mathcal{A}}{J+G_k\cap\mathcal{A}}} \frac{R(\mathcal{A},g)}{R(\mathcal{A},g)\cap(u^k,J)\Re(\mathcal{A},g)}$$

où $g=(G_n)$ est une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}=(G_0)$, $R(\mathcal{A},g) = \underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} G_nX^n$ et $\Re(\mathcal{A},g) = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} G_nX^n$ et où $\operatorname{tr}\deg_{\frac{\mathcal{A}}{J+G_k\cap\mathcal{A}}} C$ est le degré de transcendance de C sur $\dfrac{\mathcal{A}}{J+G_k\cap\mathcal{A}}$ i.e., le nombre maximum d'éléments de C qui sont algébriquement indépendants sur $\dfrac{\mathcal{A}}{J+G_k\cap\mathcal{A}}$, dim désigne la dimension de Krull et $u=\dfrac{1}{X}$ (avec la convention $u^{+\infty}=0$).

La Proposition (4.3.3) généralise un résultat de [D$_1$] qui montre que lorsque $(\mathcal{A},\mathfrak{M})$ est un anneau nœthérien local à corps résiduel infini, pour toute filtration nœthérienne f de $\mathcal{A}$, $\ell_{\mathfrak{M}}^a(f,k)$ coïncide avec les extensions de la largeur analytique obtenues dans [D D S] à l'exception de $\ell_{\mathfrak{M}}(f,k)$ et qu'ils coïncident avec $\ell_{\mathfrak{M}}(f,k)$ si en plus f est une filtration adique.

Nous présentons à la fin de cette thèse les trois articles sur l'indépendance analytique généralisée et la largeur analytique pour les cas des filtrations et des prégraduations. L'étude de la largeur analytique des filtrations avec la notion d'indépendance régulière a été faite dans l'article [D$_1$] et celle des prégraduations d'anneaux a été faite dans l'article [D$_2$].

Nous établissons les résultats suivants :

4.3.2. PROPOSITION.– *Soient $\mathcal{A}$ un anneau nœthérien, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $g = (G_n)$ une k–préfiltration de $\mathcal{A}$ fortement A-P et $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\mathcal{A}$. On a:*

$$\ell_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \ell^a_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g).$$

4.3.3. PROPOSITION.– *Soient $\mathcal{A}$ un anneau nœthérien, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $g = (G_n)$ une k–préfiltration de $\mathcal{A}$ fortement A-P, et $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\mathcal{A}$.*

(i) *On a* $\ell_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \ell^a_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \gamma_{\mathfrak{M}}(g) = \tau_{\mathfrak{M}}(g)$

(ii) *Si $\mathfrak{M}$ contient G_k alors on a :*

$$\ell_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \ell^a_{\mathfrak{M}}(g,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(g) \leq \gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g) = \tau_{\mathfrak{M}}(g)$$

(iii) *Si $\mathfrak{M}$ contient G_k et si $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ est infini, alors on a :*

$$\ell_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \ell^a_{\mathfrak{M}}(g,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(g) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g) = \tau_{\mathfrak{M}}(g)$$

(iv) *Si $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ est infini, alors pour un idéal $I \subseteq \mathfrak{M}$ et pour $q > 0$ on a :*

$$\ell_{\mathfrak{M}}(I,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(I,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(I^q) = \gamma_{\mathfrak{M}}(I^q) = \gamma_{\mathfrak{M}}(I,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(I,k).$$

4.3.4. COROLLAIRE.– *Soient $\mathcal{A}$ un anneau nœthérien, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ et $g = (G_n)$ est une k–préfiltration de $\mathcal{A}$ fortement A-P de rang $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un multiple de m. Alors pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{A}$ contenant G_k et pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ on a :*

(i) $\ell_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \ell^a_{\mathfrak{M}}(g,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(g) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(G_{pq}) \leq \gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g) = \gamma_{\mathfrak{M}}(G_{pq}) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g)$.

(ii) *Si $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ est infini, alors*

a) $\ell_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \ell^a_{\mathfrak{M}}(g,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(g) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(G_{pq}) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k)$

b) *Pour tout idéal $I \subseteq \mathfrak{M}$,*

$$\ell_{\mathfrak{M}}(I,k) = \ell_{\mathfrak{M}}(I) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(I,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(I^q) = \gamma_{\mathfrak{M}}(I,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(I,k).$$

4.3.5. COROLLAIRE.– *Soient $(\mathcal{A}, \mathfrak{M})$ un anneau nœthérien local et $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. Supposons que g est une $k-$préfiltration de $\mathcal{A}$ fortement A-P de rang m et que $p \in \mathbb{N}^*$ est un multiple de m, alors pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, on a :*

(i) $\ell(g,k) \leq \ell^a(g,k) = \ell^a(g) = \ell^a(G_{pq}) \leq \gamma(g,k) = \gamma(g) = \gamma(G_{pq}) = \tau(g,k)$.

(ii) *Si $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ est infini, alors*

a) $\ell(g,k) \leq \ell^a(g,k) = \ell^a(g) = \ell^a(G_{pq}) = \gamma(g,k) = \tau(g,k)$,

b) *pour tout idéal I,*

$$\ell(I,k) = \ell(I) = \ell^a(I,k) = \ell^a(I) = \ell^a(I^q,k) = \gamma(I,k) = \tau(I,k) = \gamma(I).$$

F) Le deuxième objectif est l'extension de la notion d'indépendance analytique généralisée à des familles de sous-groupes d'un $\mathcal{B}-$module $\mathcal{M}$ compatibles avec des $^+$quasi-graduations g de $\mathcal{B}$, appelées $g-$quasi-graduations de $\mathcal{M}$.

Nous consacrons le chapitre 5 à l'étude de l'indépendance analytique généralisée aux quasi-graduations d'un module.

Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}-$module, $\mathcal{H} = (\mathbb{M}_n)_{n \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}}$ une famille de sous-groupes de $(\mathcal{M}, +)$ et $g = (G_n)_{n \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}}$ une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$.
On dit que $\mathcal{H}$ est compatible (respectivement compatible à droite) avec g ou que $\mathcal{H}$ est une $g-$quasi-graduation (respectivement une g^+-quasi-graduation) du $B-$module $\mathcal{M}$ si $\mathbb{M}_\infty = (0)$ et $G_p\mathbb{M}_q \subseteq \mathbb{M}_{p+q}$ pour p et $q \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ (respectivement p, $q \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$).

Soient $\mathcal{A}$ un sous-anneau de $\mathcal{B}$, $k \in \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Soient $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de $\mathcal{B}$ et soit I le sous$-\mathcal{A}-$module de $\mathcal{B}$ qu'ils engendrent. Posons $g(\mathcal{A}, I)$ la $^+$quasi-graduation $(I_n)_n$ telle que

$$I_n = \mathcal{A} \ \forall n \leq 0, \ I_\infty = (0) \text{ et } I_n = I^n \ \forall n \geq 1.$$

On suppose que $\mathcal{H} = (\mathbb{M}_n)$ est une $g(\mathcal{A}, I)^+-$quasi-graduation du $\mathcal{B}-$module $\mathcal{M}$. Les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont dits $J-$indépendants d'ordre k relativement à $\mathcal{H}$ si, pour tout polynôme homogène F de degré s, à r indéterminées et à coefficients dans $\mathbb{M}_0$, la relation $F(a_1, \ldots, a_r) \in J\mathbb{M}_s + \mathbb{M}_{s+k}$ implique que F a ses coefficients dans $J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k$.

Soit J un idéal de $\mathcal{A}$ tel que $J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0 \neq \mathbb{M}_0$.
On pose $\mathbb{P}_n = I_n\mathbb{M}_0 \ \forall n$ et $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$.
Alors $\mathbb{P}$ est une $g(\mathcal{A}, I)^+$−quasi-graduation du $\mathcal{B}$−module $\mathcal{M}$.

Posons $\mathbb{K}_n = \mathbb{P}_n \cap (J\ \mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k})$ et

$$R_J(\mathcal{H}, k) = \underset{n}{\oplus} \frac{\mathbb{P}_n}{\mathbb{K}_n} = \underset{n}{\oplus} \frac{I_n\mathbb{M}_0}{I_n\mathbb{M}_0 \cap (J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k})}.$$

Alors $R_J(\mathcal{H}, k)$ est un $\underset{n}{\oplus} \dfrac{I_n}{I_n \cap (JI_n + I_{n+k})}$− module gradué. Soit φ_k le morphisme gradué de $\dfrac{\mathcal{A}}{J + I^k \cap \mathcal{A}}[X_1, \ldots, X_r]$ dans $\underset{n\geq 0}{\oplus} \dfrac{I_n}{I_n \cap (JI_n + I_{n+k})}$: $X_i \mapsto s_i$ et dont la restriction à $\dfrac{\mathcal{A}}{J + I^k \cap \mathcal{A}}$ est l'identité,
où $s_i = a_i + (JI + I^{k+1} \cap I) \in \dfrac{I}{JI + I^{k+1} \cap I}$ $\forall i = 1, \ldots, r$.

Il existe un isomorphisme $\psi_k : \underset{n\geq 0}{\oplus} \dfrac{I_n}{I_n \cap (JI_n + I_{n+k})} \to \dfrac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, I)}$ dont la restriction à $\dfrac{\mathcal{A}}{J + I^k \cap \mathcal{A}}$ est l'identité.

Posons $v_i = \psi_k(s_i)$ $\forall i = 1, \ldots, r$. On a :

$$v_i = a_iX + (R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, I))$$

Soit $\tilde{\varphi}_J(\mathbb{M}, k)$ l'unique morphisme de sous-modules gradués de $\dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0}[X_1, \ldots, X_r]$ sur $R_J(\mathcal{H}, k)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi}_J(\mathbb{M}, k)(\beta X_{i_1} \cdots X_{i_n}) & = & \beta s_{i_1} \cdots s_{i_n}\ \forall\ i_1 \cdots i_n \\ & \text{et} & \\ \tilde{\varphi}_J(\mathbb{M}, k)(\beta) & = & \beta\ \ \forall \beta \in \dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0}. \end{array}\right.$$

Il existe un isomorphisme $\tilde{\psi}_k$ de $R_J(\mathcal{H}, k)$ sur $\dfrac{R(\mathbb{M}_0, I)}{R(\mathbb{M}_0, I) \cap (u^k, J)\mathbb{M}}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{\psi}_k(s_i\overline{\alpha}) & = & a_i\alpha X + R(\mathbb{M}_0, I) \cap (u^k, J)\mathbb{M} \\ & \text{et} & \\ \tilde{\psi}_k(\overline{\alpha}) & = & \alpha + R(\mathbb{M}_0, I) \cap (u^k, J)\mathbb{M} \end{array}\right.$$

$\forall \overline{\alpha} = \alpha + [J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0] \in \dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0}$.

Posons $\tilde{\varphi}_k = \tilde{\varphi}_J(\mathbb{M}, k)$ et $\tilde{\theta}_k = \tilde{\psi}_k \circ \tilde{\varphi}_k$.

Ainsi, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{\mathbb{M}_0}{\mathbb{K}_0}[X_1, \ldots, X_r] & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_k} & \dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0}[s_1, \ldots, s_r] \\
 & \searrow \tilde{\theta}_k & \wr \downarrow \tilde{\psi}_k \\
 & & \dfrac{R(\mathbb{M}_0, I)}{R(\mathbb{M}_0, I) \cap (u^k, J)\mathbb{M}} = \dfrac{\mathbb{M}_0}{\mathbb{K}_0}[v_1, \ldots, v_r]
\end{array}$$

Nous établissons le Théorème (5.2.4) suivant qui donne des critères de $J-$indépendance d'ordre k relativement à une quasi-graduation d'un $\mathcal{B}-$module $\mathcal{H}$.

5.2.4. THÉORÈME. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à $\mathcal{H}$

(ii) $\tilde{\theta}_k$ est un isomorphisme de $\dfrac{\mathbb{M}_0}{\mathbb{K}_0}[X_1, \ldots, X_r]$ sur $\dfrac{R(\mathbb{M}_0, I)}{R(\mathbb{M}_0, I) \cap (u^k, J)\mathbb{M}}$

(iii) La famille $\{s_1, \ldots, s_r\}$ est algébriquement libre sur $\dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0}$

(iv) La famille $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est algébriquement libre sur $\dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0}$.

Chapitre 1

Quasi-graduations d'anneaux et Indépendance Analytique généralisée

1.0 Dans ce chapitre nous définissons l'indépendance analytique généralisée pour les $^+$quasi-graduations d'anneaux et nous présentons quelques propriétés tout en donnant des critères équivalents de $J-$indépendance.

1.1 – Indépendance analytique généralisée

1.1.1. Définitions

1) Soient $\mathcal{B}$ un anneau et $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ une famille de sous-groupes de $\mathcal{B}$.

Nous définissons le produit de deux sous-groupes I et J de $\mathcal{B}$ par le sous-groupe formé par l'ensemble des éléments de la forme : $\sum_{i=s}^{t} a_i b_i$ tels que $a_i \in I$ et $b_i \in J$.

On dit que (G_n) est une quasi-graduation (resp. une $^+$quasi-graduation) de $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A} = G_0$ est un sous-anneau de $\mathcal{B}$, $G_\infty = (0)$ et $G_pG_q \subseteq G_{p+q}\ \forall p, q \in \mathbb{Z}$ (resp. $\forall p, q \in \mathbb{N}$).

2) Soient $g = (G_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ une $^+$quasi-graduation d'un anneau $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} = G_0$, $k \in \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et J un idéal de $\mathcal{A}$ tels que $J + G_k \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$.

Des éléments $a_1, \ldots, a_r$ de G_1 sont dits $J-$indépendants d'ordre k relativement à g si, pour tout polynôme homogène $\mathcal{F}$ de degré s, à r indéterminées et à coefficients dans $\mathcal{A}$, la relation $\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_r) \in JG_s + G_{s+k}$ implique que $\mathcal{F}$ a tous ses coefficients dans $J + G_k$.

1.1.2. PROPOSITION.– *Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $g = (G_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$ et $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. Soit J un idéal de $G_0 = \mathcal{A}$ tel que $J + G_k \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$ et soient $a_1, \dots, a_r$ des éléments de $\mathcal{B}$ $J-$indépendants d'ordre k relativement à g et $I = (a_1, \dots, a_r)$ le sous$-\mathcal{A}-$module de $\mathcal{B}$ qu'ils engendrent. On a :*

(i) *Si J contient $G_k \cap \mathcal{A}$ alors les éléments $a_1, \dots, a_r$ sont $J-$indépendants (d'ordre $+\infty$) relativement à g et à $f_I = (I^n)$.*

(ii) *S'il existe i tel que $a_i \in J + G_k \cap \mathcal{A}$ alors*

$$I^p \cap \mathcal{A} \subseteq G_p \cap \mathcal{A} \subseteq J + G_k \cap \mathcal{A} \ \forall p \geq 1$$

(iii) *Si $r \geq 2$ et si $I \subseteq \mathcal{A}$, alors*

$$I^p \subseteq G_p \cap \mathcal{A} \subseteq J + G_k \cap \mathcal{A}, \ \forall p \geq 1.$$

(iv) *Si $r \geq 2$ et si deux éléments a_i sont dans $\mathcal{A}$ alors ils sont dans $J + G_k \cap \mathcal{A}$ par conséquent $I^p \cap \mathcal{A} \subseteq G_p \cap \mathcal{A} \subseteq J + G_k \cap \mathcal{A}, \ \forall p \geq 1$.*

Preuve (i)

Soit $x = \mathcal{F}(a_1, \dots, a_r)$ où $\mathcal{F}$ est un polynôme homogène de degré s à coefficients dans $\mathcal{A}$. On considère que J contient $G_k \cap \mathcal{A}$.

$$[x \equiv 0 \pmod{JG_s} \text{ ou } x \equiv 0 \pmod{JI^s}] \Rightarrow x \in JG_s + G_{s+k} \Rightarrow$$

$$\mathcal{F} \in (J + G_k \cap \mathcal{A})[X_1, \dots, X_r].$$

Or, $J + G_k \cap \mathcal{A} = J$ donc les éléments $a_1, \dots, a_r$ sont $J-$indépendants (d'ordre $+\infty$) relativement à g et à f_I.

(ii)

Si $a_i \in J + G_k \cap \mathcal{A}$ alors pour tout $p \geq 1$ et pour tout $y \in G_p \cap \mathcal{A}$ on a:

$$ya_i^p \in G_p(J + G_k \cap \mathcal{A}) \subseteq (JG_p + G_{p+k}).$$

$a_1, \ldots, a_r$ étant $J-$indépendants d'ordre k relativement à g, on a :

$y \in (J + G_k) \cap \mathcal{A} = J + G_k \cap \mathcal{A}$ donc $G_p \cap \mathcal{A} \subseteq J + G_k \cap \mathcal{A}$ et on a alors

$$I^p \cap \mathcal{A} \subseteq G_1^p \cap \mathcal{A} \subseteq G_p \cap \mathcal{A} \subseteq J + G_k \cap \mathcal{A}.$$

(iii)

Si $i,\ j \in [1, \ldots, r]$ avec $i \neq j$ et $\mathcal{F}(X_1, \ldots, X_r) = a_i X_j - a_j X_i$ alors $\mathcal{F}$ est à coefficients dans $\mathcal{A}$ et est homogène de degré 1 et l'on a $\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_r) = 0$; d'où $a_i \in J + G_k \cap \mathcal{A}$. La conclusion découle de (ii).

(iv)

Si a_i et $a_j \in \mathcal{A}$ avec $a_i \neq a_j$, soit $\mathcal{F}(X_1, \ldots, X_r) = a_i X_j' - a_j X_i$ alors $\mathcal{F}$ est à coefficients dans $\mathcal{A}$ et est homogène de degré 1 et $\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_r) = 0$: d'où $a_i \in J + G_k \cap \mathcal{A}$; la conclusion découle de (ii).

1.1.3. PROPOSITION.– *Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $g = (G_n)$ une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$ et $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. Soit J un idéal de $\mathcal{A}$ tel que $J + G_k \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$.*

On suppose que $(G_{n+k})_{n \geq 0}$ est décroissante ou que
$G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n\ \forall n \geq 0,\ \forall i \geq 1$.
Soient $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de G_1 $J-$indépendants d'ordre k relativement à g. Alors $\forall p \geq 1$ on a :

(i) *Si $G_k \cap \mathcal{A} \subseteq J + G_{pk} \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$, alors les éléments $a_1^p, \ldots, a_r^p$ sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à la $^+$quasi-graduation $g^{(p)} = (G_{pn})$.*

(ii) *Si $G_k \cap \mathcal{A} \subseteq J + G_p^k \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$ alors les éléments $a_1^p, \ldots, a_r^p$ sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à la $^+$quasi-graduation $f_{G_p} = (G_p^n)$.*

(iii) *Si $G_k \cap \mathcal{A} \subseteq J + G_k^p \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$ alors les éléments $a_1^p, \ldots, a_r^p$ sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à la $^+$quasi-graduation $g^p = (G_n^p)$.*

(iv) *En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, si J contient $G_k \cap \mathcal{A}$ alors les éléments $a_1^p, \ldots, a_r^p$ sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à $g^{(p)}$, à g^p et à f_{G_p}.*

Preuve.
Cela découle des définitions et du fait que sous les hypothèses on a :

$$\left.\begin{array}{l} JG_p^n + G_p^{n+k} \cap G_p^n \\ JG_n^p + G_{n+k}^p \cap G_n^p \end{array}\right\} \subseteq JG_{pn} + G_{p(n+k)} \cap G_{pn} \subseteq JG_{pn} + G_{pn+k} \cap G_{pn}\ \forall n \geq 0$$

$$\text{et}\quad\begin{cases}\text{dans (i), } J+G_k\cap\mathcal{A}\subseteq J+G_{pk}\cap\mathcal{A},\\ \text{dans (ii), } J+G_k\cap\mathcal{A}\subseteq J+G_k^p\cap\mathcal{A}\\ \text{dans (iii), } J+G_k\cap\mathcal{A}\subseteq J+G_p^k\cap\mathcal{A}.\end{cases}$$

1.1.4. NOTATIONS

Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $g=(G_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$ et $k\in\overline{\mathbb{N}^*}$. Soit J un idéal de $\mathcal{A}$ tel que $J+G_k\cap\mathcal{A}\neq\mathcal{A}$. On pose :

$\ell_J(g,k)=\sup\{r\in\mathbb{N}/\ \exists a_1,\dots,a_r\in J,\ J-$indépendants d'ordre k relativement à $g\}$,

$\ell(g)=\sup\{\ell_{\mathfrak{M}}(g):\mathfrak{M}$ maximal sur $G_k\cap\mathcal{A}\}$ et

$\sup(J)=\sup\{r\in\mathbb{N}:\exists\ a_1,\dots,a_r\in J,\ J-\text{indépendants}\}$.

1.1.5. REMARQUES

(i) Si $\mathfrak{M}$ est maximal ne contenant pas $G_k\cap\mathcal{A}$ alors $\ell_{\mathfrak{M}}(g)=0$.
Par conséquent, $\ell(g)=\sup\{\ell_{\mathfrak{M}}(g):\mathfrak{M}\in\ \text{Max}\ \mathcal{A}\}$.

(ii) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Si J contient $G_k\cap\mathcal{A}$ et si on a :

$$G_{pn+pk}\cap G_{pn}\subseteq G_{pn+k}\cap G_{pn}\ \forall n\geq 0,\ \text{alors}\ \forall n\in\mathbb{N}\ \text{on a :}$$

a) $\ell_J(g,k)\leq\ell_J\left(g^{(p)},k\right)\leq\ell_J(G_p\ ,k)\leq\ell_J(G_p^n,k)$;

b) $\ell_J(g,k)\leq\ell_J\left(g^{(p)},k\right)\leq\ell_J(G_{pn},k)$ (voir (1.1.3)-(iv)).

1.1.6. PROPOSITION.- *Avec les hypothèses et notations de (1.1.4) soit P un idéal premier de $\mathcal{A}$ contenant $J+G_k\cap\mathcal{A}$. On a :*

(1.1.6.1) $\ell_J(g,k)\leq\sup(J+G_k\cap\mathcal{A})\leq ht\ (J+G_k\cap\mathcal{A})\leq\dim\mathcal{A}_p=ht\ P$.

(1.1.6.2) *Si J contient $G_k\cap\mathcal{A}$ alors*

(i) $\ell_J(g,k)\leq\ell_J(g)\leq\sup J\leq ht\,J\leq\dim\mathcal{A}$.

(ii) *Si de plus $\mathcal{A}$ est nœthérien et $G_{n+k}\subseteq G_n\forall n\geq 1$ alors la suite $n\mapsto\ell_J\left(G_p^{n!},k\right)$ est croissante et stationnaire.*

1.2 – Critères de J–indépendance

Dans cette partie, $\mathcal{B}$ désigne un anneau et $\mathcal{A}$ un sous-anneau de $\mathcal{B}$.

1.2.0.– Soit Δ un monoïde abélien et soient $(I_n)_{n\in\Delta}$ et $(K_n)_{n\in\Delta}$ deux familles de sous-groupes de $\mathcal{B}$ telles que

$$K_n \subseteq I_n \ , I_n I_m \subseteq I_{n+m} \ \text{ et } \ I_n K_m \subseteq K_{n+m} \ \forall n, m \in \Delta.$$

Alors le groupe somme directe $\underset{n\in\Delta}{\oplus} \dfrac{I_n}{K_n}$ muni de la multiplication suivante est un anneau gradué :

$$(a_n + K_n)(b_m + K_m) = (a_n b_m + K_{n+m}) \ \forall a_n \in I_n \text{ et } \forall b_m \in I_m.$$

Soient $\mathcal{P} = \underset{n\in\Delta}{\oplus} I_n$ et $L = \underset{n\in\Delta}{\oplus} K_n$. On a :

$$\frac{\mathcal{P}}{L} \simeq \underset{n\in\Delta}{\oplus} \frac{I_n}{K_n}.$$

1.2.1.– Soient $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $g = (G_n)$ et $f = (I_n)$ deux $^+$quasi-graduations de $\mathcal{B}$ telles que $G_0 = I_0 = \mathcal{A}$, $I_n \subseteq G_n \ \forall n$ et J un idéal de $\mathcal{A}$.

Posons, pour tout n, $K_n = I_n \cap (JG_n + G_{n+k})$; alors $\forall n \ \forall m$, $I_n K_m \subseteq K_{n+m}$ d'où la somme directe $\underset{n}{\oplus} \dfrac{I_n}{K_n}$ est un anneau gradué où

$$(a + K_n)(b + K_m) = (ab + K_{n+m}) \ \text{ pour tout } a \in I_n \text{ et tout } b \in I_m.$$

soient $\mathcal{P} = \underset{n}{\oplus} I_n X^n$ et $G = \underset{n}{\oplus} G_n X^n$; $L = \underset{n}{\oplus} K_n X^n = \mathcal{P} \cap (u^k, J)G$ est un idéal gradué de $\mathcal{P}$ et on a : $\dfrac{\mathcal{P}}{L} \simeq \underset{n}{\oplus} \dfrac{I_n}{K_n}$; en particulier, pour $f = g$, on a :

(1.2.1.1) $$\frac{G}{G \cap (u^k, J)G} \simeq \underset{n}{\oplus} \frac{G_n}{G_n \cap (JG_n + G_{n+k})}$$

(1.2.1.2) Si $G_{n+k} \subseteq G_n \ \forall n \in \mathbb{Z}$, en particulier si g est une filtration ou k est infini, alors $\dfrac{G}{(u^k, J)G} \simeq \underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} \dfrac{G_n}{JG_n + G_{n+k}}$.

En remplaçant $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{N}$ on a :

(1.2.1.3) $$\frac{R(g)}{R(g) \cap (u^k, J)G} \simeq \underset{n\geq 0}{\oplus} \frac{G_n}{G_n \cap (JG_n + G_{n+k})} \text{ où } R(g) = \underset{n\geq 0}{\oplus} G_n X^n.$$

1.2.2.– Soit I un sous-groupe de $\mathcal{B}$ qui est un $\mathcal{A}$−module (de type fini). Posons $R(\mathcal{A}, I) = \bigoplus_{n\geq 0} I_n X^n$ l'anneau gradué tel que $I_0 = \mathcal{A}$, $I_n = I^n$ $\forall n \geq 1$.

On suppose que $I \subseteq G_1$. On a :

$$\frac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)G} \simeq \frac{\mathcal{A}}{J + G_k \cap \mathcal{A}} \oplus \sum_{n\geq 1} \frac{I^n}{I^n \cap (JG_n + G_{n+k})}$$

1.2.3.– Soient $a_1, \ldots, a_r \in G_1$, J un idéal de $\mathcal{A}$ tel que $J + G_k \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$ et I le $\mathcal{A}$−module engendré par les éléments $a_1, \ldots, a_r$.

On pose $K_n = I^n \cap (JG_n + G_{n+k})$ pour tout $n \geq 0$ avec la convention $I^0 = \mathcal{A}$ et $Q_J(g, k)$ l'anneau gradué $\bigoplus_n \dfrac{I^n}{K_n}$.

Soit $t_i = a_i + K_1$ $\forall i = 1, \ldots, r$. On a :

$$\begin{aligned} Q_J(g,k) &= \frac{\mathcal{A}}{J + G_k \cap \mathcal{A}}[t_1, \ldots, t_r] \text{ et} \\ Q_J(g,k) &= \left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_r} (\alpha_{i_1,\ldots,i_r} + K_0)\, t_1^{i_1} \cdots t_r^{i_r} : \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \in \mathcal{A} \right\}. \end{aligned}$$

Soit $\varphi_J(g, k)$ le morphisme gradué de $\dfrac{\mathcal{A}}{J + G_k \cap \mathcal{A}}[X_1, \ldots, X_r]$ sur $Q_J(g, k)$ tel que $\varphi_J(g, k)(X_i) = t_i \,\forall i$ et $\varphi_J(g, k)(\alpha) = \alpha \,\forall \alpha \in \dfrac{\mathcal{A}}{J + G_k \cap \mathcal{A}} = \dfrac{\mathcal{A}}{K_0}$.

$\varphi_J(g, k)$ est surjectif.

Il existe un isomorphisme ψ_k de $Q_J(g, k)$ sur $\dfrac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)G}$ tel que $\psi_k(t_i) = a_i X + R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)G$ et dont la restriction à $\dfrac{\mathcal{A}}{J + G_k \cap \mathcal{A}}$ est l'identité; soit $u_i = \psi_k(t_i) \,\forall i$; alors $\dfrac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)G} = \dfrac{\mathcal{A}}{K_0}[u_1, \ldots, u_r]$.

Posons $\varphi_k = \varphi_J(g, k)$ et $\theta_k = \psi_k \circ \varphi_k$.

1.2.4. THÉORÈME.– *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à g.*

(ii) *θ_k est un isomorphisme de $\dfrac{\mathcal{A}}{K_0}[X_1, \ldots, X_r]$ sur $\dfrac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)G}$*

(iii) *La famille $\{t_1, \ldots, t_r\}$ est algébriquement libre sur $\dfrac{\mathcal{A}}{K_0}$.*

(iv) *La famille $\{u_1, \ldots, u_r\}$ est algébriquement libre sur $\dfrac{\mathcal{A}}{K_0}$.*

Preuve.
Pour tout $\mathcal{F} = \displaystyle\sum_{i_1+\cdots+i_r=s} \lambda_{i_1,\ldots,i_r} X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}$ où $\lambda_{i_1,\ldots,i_r} \in \mathcal{A}$, soit

$$\overline{\mathcal{F}}(X_1, \ldots, X_r) = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} (\lambda_{i_1,\ldots,i_r} + K_0) X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}.$$

On a : $\varphi_k(\overline{\mathcal{F}}) = \overline{\mathcal{F}}(t_1, \ldots, t_r)$ et $\theta_k(\overline{\mathcal{F}}) = \overline{\mathcal{F}}(u_1, \ldots, u_r)$.

$(i) \iff (ii)$

[Les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à g] $\Leftrightarrow$

$$[\forall \mathcal{F} = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} \lambda_{i_1,\ldots,i_r} X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r},\ \mathcal{F}(a_1, \ldots, a_r) \equiv 0 \pmod{JG_s + G_{s+k}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{F} \text{ a tous ses coefficients dans } J + G_k] \ \Leftrightarrow$$

$[\forall \mathcal{F} \in \mathcal{A}[X_1, \ldots, X_r]$ homogène de degré s.

$$\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_r) \in I^s \cap (JG_s + G_{s+k}) = K_s \Rightarrow \mathcal{F} \ \in \ K_0[X_1, \ldots, X_r]\ ] \ \Leftrightarrow$$

$$[\ \forall \mathcal{F} \in \mathcal{A}[X_1, \ldots, X_r],\ \varphi_k(\overline{\mathcal{F}}) = 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{F}} = 0\ ] \ \Leftrightarrow$$

$$\varphi_k \text{ est un isomorphisme } \Leftrightarrow$$

$$\theta_k \text{ est un isomorphisme.}$$

$(ii) \iff (iv)$

$\theta_k(X_i) = u_i$ et pour tout $G = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} \alpha_{i_1,\ldots,i_r} X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}$, on a :

$$\theta_k(\overline{G}) = \psi_k(\overline{G}(t_1,\ldots,t_r)) = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} (\alpha_{i_1,\ldots,i_r} + K_0) u_1^{i_1} \cdots u_r^{i_r} = \overline{G}(u_1,\ldots,u_r);$$

θ_k étant surjectif, (ii)$\Leftrightarrow$ θ_k est injectif $\Leftrightarrow$

$[\forall G \in \mathcal{A}[X_1,\ldots,X_r],\ \theta_k(\overline{G}) = 0 \Leftrightarrow \overline{G} = 0] \Leftrightarrow$

la famille $\{u_1,\ldots,u_r\}$ est algébriquement libre sur $\dfrac{\mathcal{A}}{J + G_k \cap \mathcal{A}}$.

$(ii) \iff (iii)$

(ii) $\Leftrightarrow$ φ_k est un isomorphisme; en remplaçant, dans la preuve de (ii) $\Leftrightarrow$ (iv), θ_k par φ_k et u_i par t_i on obtient : φ_k est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ (iii).

1.2.5. Conséquences

Soient $a_1,\ldots,a_r$ des éléments de G_1 et $g_I = (I_n)$ la $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$ telle que $I_n = \mathcal{A}$ pour tout $n \leq 0$ et $I_n = I^n$ $\forall n > 0$ où I est le sous-$\mathcal{A}$-module de $\mathcal{B}$ engendré par les éléments $a_1,\ldots,a_r$ i.e.,

$$I_n = \left\{ \sum_{i_1+\cdots+i_r=n} \alpha_{i_1,\ldots,i_r} a_1^{i_1} \cdots a_r^{i_r} : \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \in \mathcal{A} \right\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On suppose que $G_k \cap \mathcal{A} \subseteq J + I_k \cap \mathcal{A}$. Posons $\Re(\mathcal{A}, I) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I_n X^n$ et $u = \dfrac{1}{X}$. Posons $s_i = a_i + JI + I_{k+1} \cap I$. Pour la $^+$quasi-graduation g_I, en lieu et place de $t_i = a_i + I \cap (JG_1 + G_{k+1})$, φ_k et de ψ_k pour la $^+$quasi-graduation g, on a respectivement s_i et les morphismes gradués $\varphi_{1,k}$ et $\psi_{1,k}$ qui sont surjectifs où $\varphi_{1,k}(X_i) = s_i$ et $\psi_{1,k}$ est l'isomorphisme canonique de $\dfrac{\mathcal{A}}{K_0}[s_1,\ldots,s_r]$ sur $\dfrac{R(\mathcal{A},I)}{R(\mathcal{A},I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A},I)}$. Posons $\theta_{1,k} = \psi_{1,k} \circ \varphi_{1,k}$, $\theta_{2,k}$ le morphisme canonique de $\dfrac{R(\mathcal{A},I)}{R(\mathcal{A},I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A},I)}$ sur $\dfrac{R(\mathcal{A},I)}{R(\mathcal{A},I) \cap (u^k, J)G}$ et $\varphi_{2,k}$ celui de $\dfrac{\mathcal{A}}{K_0}[s_1,\ldots,s_r]$ sur $\dfrac{\mathcal{A}}{K_0}[t_1,\ldots,t_r]$.

Ce sont des morphismes d'anneaux gradués qui sont surjectifs.

$\psi_k \circ \varphi_{2,k} = \theta_{2,k} \circ \psi_{1,k}$ de telle sorte que le diagramme suivant commute :

$$
\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\mathcal{A}}{K_0}[X_1,\dots,X_r] & \overset{\varphi_{1,k}}{\longrightarrow} & \dfrac{\mathcal{A}}{K_0}[s_1,\dots,s_r] & \overset{\varphi_{2,k}}{\longrightarrow} & \dfrac{\mathcal{A}}{K_0}[t_1,\dots,t_r] \\
 & \searrow \theta_{1,k} & \wr \downarrow \psi_{1,k} & & \wr \downarrow \psi_k \\
 & & \dfrac{R(\mathcal{A},I)}{R(\mathcal{A},I)\cap(u^k,J)\Re(\mathcal{A},I)} & \overset{\theta_{2,k}}{\longrightarrow} & \dfrac{R(\mathcal{A},I)}{R(\mathcal{A},I)\cap(u^k,J)G}
\end{array}
$$

1.2.5.1. PROPOSITION.– *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Les éléments* $a_1,\dots,a_r$ *sont* $J-$*indépendants d'ordre* k *relativement à* g.

(ii) $\left\{\begin{array}{l} \text{Les éléments } a_1,\dots,a_r \text{ sont } J-\text{indépendants d'ordre } k \\ (\text{relativement à } g_I) \\ \quad \text{et} \\ I_n\cap(JG_n+G_{n+k}) = JI_n + I_{n+k}\cap I_n \ \forall n\geq 0 \end{array}\right.$

(iii) $\left\{\begin{array}{l} \text{La famille } \{s_1,\dots,s_r\} \text{ est algébriquement libre sur } \dfrac{\mathcal{A}}{J+G_k\cap\mathcal{A}} \\ \quad \text{et} \\ R(\mathcal{A},I)\cap(u^k,J)G = R(\mathcal{A},I)\cap(u^k,J)\Re(\mathcal{A},I). \end{array}\right.$

(iv) $\left\{\begin{array}{l} \theta_{1,k} \text{ est un isomorphisme} \\ \quad \text{de } \dfrac{\mathcal{A}}{K_0}[X_1,\dots,X_r] \text{ sur } \dfrac{R(\mathcal{A},I)}{R(\mathcal{A},I)\cap(u^k,J)\Re(\mathcal{A},I)} \\ \quad \text{et} \\ \theta_{2,k} \text{ est un isomorphisme} \\ \quad \text{de } \dfrac{R(\mathcal{A},I)}{R(\mathcal{A},I)\cap(u^k,J)\Re(\mathcal{A},I)} \text{ sur } \dfrac{R(\mathcal{A},I)}{R(\mathcal{A},I)\cap(u^k,J)G}. \end{array}\right.$

(v) *La famille* $\{a_1,\dots,a_r\}$ *est algébriquement libre sur* $\dfrac{\mathcal{A}}{J+G_k\cap\mathcal{A}}$.

Preuve.

(ii) $\Leftrightarrow$ *(iii)* $\Leftrightarrow$ *(iv)*

D'après le Théorème (1.2.4) les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à g_I si et seulement si la famille $\{s_1, \ldots, s_r\}$ est algébriquement libre sur $\dfrac{\mathcal{A}}{J + G_k \cap \mathcal{A}}$ ce qui équivaut au fait que $\theta_{1,k}$ soit un isomorphisme.

D'autre part, $I_n \cap (JG_n + G_{n+k}) = JI_n + I_{n+k} \cap I_n$ $\forall n \geq 0$ si et seulement si $R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, I) = R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)G$ si et seulement si $\theta_{2,k}$ est un isomorphisme.

(i) $\Leftrightarrow$ *(iv)*

On a : $\theta_{1,k}$ et $\theta_{2,k}$ sont surjectifs et $\theta_k = \theta_{2,k} \circ \theta_{1,k}$ donc θ_k est un isomorphisme si et seulement si $\theta_{1,k}$ et $\theta_{2,k}$ le sont.

En appliquant ce résultat à une $^+$prégraduation on a le Corollaire suivant :

1.2.5.2 COROLLAIRE.– *On suppose que $g = (G_n)$ est une $^+$prégraduation de $\mathcal{A}$, que $a_1, \ldots, a_r$ sont des éléments de G_1 et que $G_k \subseteq J + I^k$ où I est l'idéal de $\mathcal{A}$ engendré par les éléments $a_1, \ldots, a_r$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont J–indépendants d'ordre k relativement à g.*

$$\textbf{(ii)} \quad \begin{cases} \text{Les éléments } a_1, \ldots, a_r \text{ sont } J - \text{indépendants d'ordre } k \\ \quad \text{et} \\ I^n \cap (JG_n + G_{n+k}) = JI^n + I^{n+k} \ \forall n \geq 0 \end{cases}$$

$$\textbf{(iii)} \quad \begin{cases} \text{La famille } \{s_1, \ldots, s_r\} \text{ est algébriquement libre sur } \dfrac{\mathcal{A}}{J + G_k} \\ \quad \text{et} \\ R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)G = R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, I). \end{cases}$$

$$\textbf{(iv)} \quad \begin{cases} \theta_{1,k} \text{ est un isomorphisme} \\ \text{de } \dfrac{\mathcal{A}}{K_0}[X_1, \ldots, X_r] \text{ sur } \dfrac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, I)} \\ \quad \text{et} \\ \theta_{2,k} \text{ est un isomorphisme} \\ \text{de } \dfrac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, I)} \text{ sur } \dfrac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)G}. \end{cases}$$

CHAPITRE 2

DIMENSION, DEGRÉ DE TRANSCENDANCE ET LARGEUR ANALYTIQUE D'UNE $^{+}$QUASI-GRADUATION D'ANNEAUX

2.0 Nous utilisons la dimension de Krull et le degré de transcendance pour définir des extensions de la largeur analytique et nous présentons des comparaisons entre ces extensions.

2.1 – Notations et Définitions

Soient $g = (G_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ une $^{+}$quasi-graduation de $\mathcal{B}$, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ et J un idéal de $\mathcal{A} = G_0$ tel que $J + G_k \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$.

1) On pose :

$$R(\mathcal{A}, g) = \underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} G_n X^n \quad \text{et} \quad \Re(\mathcal{A}, g) = G = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} G_n X^n$$

$$\gamma_J(g,k) = \dim \frac{R(\mathcal{A}, g)}{R(\mathcal{A}, g) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, g)} \quad \text{et}$$

$$\tau_J(g,k) = \operatorname{tr}\deg_{\frac{\mathcal{A}}{J+G_k\cap\mathcal{A}}} \frac{R(\mathcal{A}, g)}{R(\mathcal{A}, g) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, g)}$$

où $u = \dfrac{1}{X}$ (avec la convention $u^{+\infty} = 0$), $\operatorname{tr}\deg_{\frac{\mathcal{A}}{J+G_k\cap\mathcal{A}}} C$ est le degré de transcendance de C sur $\dfrac{\mathcal{A}}{J + G_k \cap \mathcal{A}}$ i.e., le nombre maximum d'éléments de C qui sont algébriquement indépendants sur $\dfrac{\mathcal{A}}{J + G_k \cap \mathcal{A}}$ (Voir [Ha, §1]) et dim désigne la dimension de Krull. De plus, nous posons :

$$\gamma_J(g) = \gamma_J(g, +\infty), \ \tau_J(g) = \tau_J(g, +\infty),$$

$$\gamma(g,k) = \sup\{\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) : \mathfrak{M} \text{ maximal sur } G_k \cap \mathcal{A}\} \quad \text{et}$$

$$\tau(g,k) = \sup\{\tau_{\mathfrak{M}}(g,k) : \mathfrak{M} \text{ maximal sur } G_k \cap \mathcal{A}\}.$$

2) On dit que la $^+$quasi-graduation g est nœthérienne si l'anneau $R(\mathcal{A}, g)$ est nœthérien.

3) On dit que g est une $^+$prégraduation de $\mathcal{B}$ si G_n est un idéal de $\mathcal{B}$ pour tout n. On remarque que g est une $^+$prégraduation de $\mathcal{B}$ si et seulement si $\mathcal{A} = G_0 = \mathcal{B}$.

2.2 – Propriétés et comparaisons

2.2.1. Remarques

a) Si $\mathfrak{M}$ ne contient pas $G_k \cap \mathcal{A}$ alors $\gamma_{\mathfrak{M}}(g, k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g, k) = 0$.

$$\text{Par conséquent,} \quad \begin{cases} \gamma(g,k) & = & \sup\{\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) : \mathfrak{M} \in \operatorname{Max} \mathcal{A}\} \\ & \text{et} & \\ \tau(g,k) & = & \sup\{\tau_{\mathfrak{M}}(g,k) : \mathfrak{M} \in \operatorname{Max} \mathcal{A}\}. \end{cases}$$

b) On suppose que $G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n \quad \forall n \geq 0$ et $\forall i \geq 1$.
Si J contient $G_k \cap \mathcal{A}$ alors pour $p \geq 1$ on a :

$$\ell_J(g,k) \leq \ell_J\left(g^{(p)}, k\right);$$
$$\text{par conséquent,} \quad \ell(g,k) \leq \ell\left(g^{(p)}, k\right).$$

2.2.2. Proposition.– *Soit $\mathcal{B}$ un anneau et soient p et $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $g = (G_n)$ une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$ telle que $G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n$ $\forall n \geq 0$, $\forall i \geq 1$ et $\mathcal{A} = G_0$. Si J est un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$ alors*

$$\gamma_J(g,k) \leq \gamma_J(g,pk) \leq \gamma_J(g) \quad \text{et} \quad \tau_J(g,k) \leq \tau_J(g,pk) \leq \tau_J(g).$$

Preuve.

Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Posons $q = pk$ ou $q = +\infty$.

$$\text{Soit } \varphi : A_1 = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{G_n}{G_n \cap (JG_n + G_{n+q})} X^n \to A_2 = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{G_n}{G_n \cap (JG_n + G_{n+k})} X^n$$

l'application $A/J-$linéaire et graduée définie par

$$\psi : \sum_{n=t}^{s} (a_n + G_n \cap (JG_n + G_{n+q}))\, X^n \mapsto \sum_{n=t}^{s} (a_n + G_n \cap (JG_n + G_{n+k}))\, X^n$$

où $a_n \in G_n$ pour tout n.

Pour $q = pk$ ou $q = +\infty$ on a : $G_n \cap G_{n+q} \subseteq G_n \cap G_{n+k}$ d'où ψ est un morphisme d'anneaux qui est surjectif.
Donc $\dim A_2 \leq \dim A_1$ et comme J contient $G_k \cap \mathcal{A}$ et $G_{pk} \cap \mathcal{A}$, on a :

$$\operatorname{tr} \deg_{A/J} A_2 \leq \operatorname{tr} \deg_{A/J} A_1.$$

En prenant $q = pk$ puis $q = +\infty$ on en déduit la proposition.

2.2.3. Théorème.– *Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $g = (G_n)$ une ${}^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} = G_0$ et $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. Soit J un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$.*
On suppose que $G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n$ $\forall n \geq 0$, $\forall i \geq 1$.
Si $p \in \mathbb{N}^*$, alors on a :

(i) $\gamma_J(g,k) = \gamma_J\left(g^{(p)},k\right) = \gamma_J(g,pk) \leq \gamma_J\left(g^{(p)}\right) = \gamma_J(g)$

(ii) $\tau_J(g,k) \leq \tau_J\left(g^{(p)},k\right) = \tau_J(g,pk) \leq \tau_J\left(g^{(p)}\right) = \tau_J(g)$

(iii) *En particulier,*
si J contient $G_1 \cap A$ et si $G_{n+i} \cap G_n \subseteq G_{n+1} \cap G_n$ $\forall n \geq 0$, $\forall i \geq 1$ alors

$$\gamma_J(g,1) = \gamma_J\left(g^{(p)},1\right) = \gamma_J(g,p) \leq \gamma_J\left(g^{(p)}\right) = \gamma_J(g),$$

$$\tau_J(g,1) \leq \tau_J\left(g^{(p)},1\right) = \tau_J(g,p) \leq \tau_J\left(g^{(p)}\right) = \tau_J(g).$$

Preuve. (i) et (ii)

1) Soit ψ :

$$A_1 = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{G_{pn}}{G_{pn} \cap (JG_{pn} + G_{pn+pk})} X^n \to C = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{G_n}{G_n \cap (JG_n + G_{n+pk})} X^n$$

l'application $\mathcal{A}/J-$linéaire et graduée définie par ψ :

$$\sum_{n=s}^{t}(a_{pn}+G_{pn}\cap(JG_{pn}+G_{pn+pk}))X^n \mapsto \sum_{n=s}^{t}(a_{pn}+G_{pn}\cap(JG_{pn}+G_{pn+pk}))X^{pn}$$

où $a_{pn}\in G_{pn}$ pour tout n.
ψ est un morphisme d'anneaux qui est injectif et C est entier sur $B_1 = Im\,\psi$.

En effet, soit $F_n = G_n\cap(JG_n+G_{n+kp})$. Pour $c_n\in G_n$,

$$((c_n+F_n)X^n)^p = (c_n^p+F_{np})X^{np} = \psi\left((c_n^p+F_{np})X^n\right)\in B_1.$$

Donc $\dim C = \dim B_1 = \dim A_1$ et $\gamma_J\left(g^{(p)},k\right) = \gamma_J(g,pk)$.

D'autre part, ψ étant injectif, on a :

$$\tau_J\left(g^{(p)},k\right) = \operatorname{tr}\deg_{\frac{\mathcal{A}}{J}} B_1 \leq \operatorname{tr}\deg_{\frac{\mathcal{A}}{J}} C = \tau_J(g,pk).$$

2) La Proposition (2.2.2) implique que

$$\gamma_J(g,k)\leq\gamma_J(g,kp)\leq\gamma_J(g) \quad \text{et} \quad \tau_J(g,k)\leq\tau_J(g,kp)\leq\tau_J(g).$$

Alors on a :

$$\begin{cases} \gamma_J(g,k) \leq \gamma_J\left(g^{(p)},k\right) = \gamma_J(g,kp) \leq \gamma_J(g) \\ \text{et} \qquad \tau_J\left(g^{(p)},k\right) \leq \tau_J(g,kp) \leq \tau_J(g). \end{cases}$$

3) Soit $\varphi : B_2 = \underset{n\geq 0}{\oplus}\dfrac{G_n}{G_n\cap(JG_n+G_{n+k})}X^n \to A_1$
l'application $\mathcal{A}/J-$linéaire et graduée définie en posant pour $a_n\in G_n$,

$$\varphi\left([a_n+G_n\cap(JG_n+G_{n+k})]X^n\right) = \left[a_n^p+G_{pn}\cap(JG_{pn}+G_{pn+pk})\right]X^n.$$

φ est bien définie.
En effet, si $a_n\in G_n\cap(JG_n+G_{n+k})$, alors $\exists\, y\in JG_n$ et $z\in G_{n+k}\cap G_n$ tels que $a_n = y+z$; d'où $a_n^p = \sum_{i=0}^{p-1} C_p^i y^i z^{p-i}+z^p \in \sum_{i=0}^{p-1}\left(JG_{ni}G_{n(p-i)}\right)+G_{n+k}^p\cap G_n^p$.

Alors $a_n^p\in JG_{pn}+G_{np+kp}\cap G_{pn} = G_{pn}\cap(JG_{pn}+G_{pn+pk})$.
φ est un morphisme d'anneaux. Montrons que A_1 est entier sur $A_2 = Im\,\varphi$:
Soit $v = (a_{np}+G_{np}\cap(JG_{np}+G_{np+kp}))X^n\in A_1$, on a :

$$v^p = (a_{np}^p+G_{np^2}\cap(JG_{np^2}+G_{np^2+kp}))X^{np}$$

$$v^p = \varphi((a_{np} + G_{np} \cap (JG_{np} + G_{np+k}))X^{np}) \in Im\,\varphi.$$

Ainsi, $\gamma_J\left(g^{(p)}, k\right) = \dim A_1 = \dim A_2 \leq \dim B_2 = \gamma_J(g,k)$.

On conclut que $\gamma_J(g,k) = \gamma_J\left(g^{(p)}, k\right) = \gamma_J(g,pk) \leq \gamma_J(g)$.

Pour $k = +\infty$, on a : $\gamma_J\left(g^{(p)}\right) = \gamma_J(g)$.

4) Soient $u_1, \ldots, u_r$ des éléments de C algébriquement indépendants sur $\mathcal{A}/J$. Alors les éléments $v_1 = u_1^p, \ldots, v_r = u_r^p$ de B_1 sont algébriquement indépendants sur $\mathcal{A}/J$.

En effet, pour des éléments $\overline{\alpha_{i_1,\ldots,i_r}}$ de $\mathcal{A}/J$,

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r} \overline{\alpha_{i_1,\ldots,i_r}} v_1^{i_1} \cdots v_r^{i_r} = 0 \Rightarrow \sum_{i_1,\ldots,i_r} \overline{\alpha_{i_1,\ldots,i_r}} u_1^{pi_1} \cdots u_r^{pi_r} = 0 \Rightarrow \overline{\alpha_{i_1,\ldots,i_r}} = 0.$$

$$\text{Donc} \quad \operatorname{tr}\deg_{\frac{\mathcal{A}}{J}} C \;\leq\; \operatorname{tr}\deg_{\frac{\mathcal{A}}{J}} B_1 \quad \text{et}$$

$$\tau_J(g,pk) \;\leq\; \tau_J\left(g^{(p)}, k\right).$$

On conclut que $\tau_J(g,k) \leq \tau_J\left(g^{(p)}, k\right) = \tau_J(g,pk) \leq \tau_J(g)$.

En remplaçant k par $+\infty$, on a : $\tau_J(g) = \tau_J\left(g^{(p)}\right)$.

(iii)
En utilisant (i) et (ii), pour $k = 1$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lllllll} \gamma_J(g,1) & = & \gamma_J\left(g^{(p)},1\right) & = & \gamma_J(g,p) & \leq & \gamma_J(g) \\ & & \text{et} & & & & \\ \tau_J(g,1) & \leq & \tau_J\left(g^{(p)},1\right) & = & \tau_J(g,p) & \leq & \tau_J(g). \end{array}\right.$$

2.2.4 Conséquences

2.2.4.1 Corollaire – *Soit $g = (G_n)$ une ${}^+$quasi-graduation d'un anneau $\mathcal{B}$ telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $G_{mn} = G_m^n$ pour tout n et soit $\mathcal{A} = G_0$. On suppose que $G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n$ $\forall n \geq 0$, $\forall i \geq 1$.*
Pour tout entier positif non nul p multiple de m on a :

(i) *Si J est un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$, alors*

$$\gamma_J(g,k) = \gamma_J\left(g^{(p)},k\right) = \gamma_J(G_p\ ,k) \leq \gamma_J(G_p) = \gamma_J(g) \quad et$$

$$\tau_J(g,k) \leq \tau_J\left(g^{(p)},k\right) = \tau_J(G_p\ ,k) \leq \tau_J(G_p) = \tau_J\left(g^{(p)}\right) \leq \tau_J(g)$$

(ii) *Si $\mathcal{A}$ est nœthérien et si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$ alors*

$$\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(G_p\ ,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(G_p\ ,k) \leq \gamma_{\mathfrak{M}}(G_p)$$
$$\gamma_{\mathfrak{M}}(G_p) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g) = \tau_{\mathfrak{M}}(G_p) = \tau_{\mathfrak{M}}\left(g^{(p)}\right) \leq \tau_{\mathfrak{M}}(g).$$

(iii) *Si g est nœthérienne et si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$ alors*

$$\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(G_p\ ,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(G_p\ ,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}\left(g^{(p)},k\right) \leq$$
$$\gamma_{\mathfrak{M}}(G_p) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g) = \tau_{\mathfrak{M}}(g).$$

Preuve. (i) On déduit du Théorème (2.2.3) que

$$\gamma_J(g,k) = \gamma_J\left(g^{(p)},k\right) = \gamma_J(G_p\ ,k) \leq \gamma_J(g) = \gamma_J(G_p) \text{ et}$$

$$\tau_J\left(g^{(p)},k\right) = \tau_J(G_p\ ,k) \leq \tau_J\left(g^{(p)}\right) = \tau_J(G_p) \leq \tau_J(g).$$

En effet, pour $p = qm$ où $q \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \geq 0$, on a :

$$G_{pn} = G_{qmn} = G_m^{qn} = (G_m^q)^n = G_{mq}^n = G_p^n \text{ (en convenant que } G_i^0 = G_0).$$

D'où $g^{(p)} = \left(G_p^n\right)_{n \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}}$.

(ii) et *(iii)*

Si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$, comme dans [D D S, (2.12)], en utilisant le Lemme 3 de [Ha], on a :

Si g est une $^+$quasi-graduation nœthérienne, alors : $\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k)$.
Ainsi, la $^+$quasi-graduation $g_{G_p} = (G_p^n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ étant nœthérienne,

$$\gamma_{\mathfrak{M}}(G_p\ ,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(G_p\ ,k) \text{ et } \gamma_{\mathfrak{M}}(G_p) = \tau_{\mathfrak{M}}(G_p).$$

Pour (ii) on conclut en utilisant (i).

Pour (iii) on utilise l'égalité $\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k)$ et on utilise (i) et (ii).

2.2.4.2 Corollaire – *Soit $g = (G_n)$ une $^+$quasi-graduation d'un anneau $\mathcal{B}$ telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $G_m \subseteq \mathcal{A} = G_0$ et $G_{mn} = G_m^n$ pour tout n.*

On suppose que $G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n$ $\forall n \geq 0,\ \forall i \geq 1$.
Pour tout entier positif non nul p multiple de m on a :

(i) *Si J est un idéal de $\mathcal{A}$ contenant à la fois G_m et $G_k \cap \mathcal{A}$, alors on a :*

$$\gamma_J(g,k) = \gamma_J\left(g^{(p)},k\right) = \gamma_J(G_p\ ,k) = \gamma_J(G_p) = \gamma_J(g) \quad \text{et}$$

$$\tau_J\left(g^{(p)},k\right) = \tau_J(G_p\ ,k) = \tau_J(G_p) = \tau_J\left(g^{(p)}\right).$$

(ii) *Si $\mathcal{A}$ est nœthérien et si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ contenant G_m ou $G_k \cap \mathcal{A}$, alors on a :*

$$\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(G_p\ ,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(G_p) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g) =$$

$$\tau_{\mathfrak{M}}(G_p\ ,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(G_p) = \tau_{\mathfrak{M}}\left(g^{(p)}\right) = \tau_{\mathfrak{M}}(g).$$

(iii) *Si g est nœthérienne et si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ contenant G_m ou $G_k \cap \mathcal{A}$, alors on a :*

$$\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(G_p\ ,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(G_p) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g) =$$
$$\tau_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(G_p\ ,k) = \tau_{\mathfrak{M}}\left(g^{(p)},k\right).$$

Preuve. (i) On déduit du Théorème (2.2.3) que

$$\gamma_J(g,k) = \gamma_J\left(g^{(p)},k\right) = \gamma_J(G_p\,,k) \leq \gamma_J(g) = \gamma_J(G_p) \text{ et}$$

$$\tau_J\left(g^{(p)},k\right) = \tau_J(G_p\,,k) \leq \tau_J(G_p) = \tau_J\left(g^{(p)}\right) \leq \tau_J(g).$$

On a : $\gamma_J(g,k) = \gamma_J\left(g^{(p)},k\right) = \gamma_J(G_p\,,k) = \gamma_J(g) = \gamma_J(G_p)$ et

$$\tau_J\left(g^{(p)},k\right) = \tau_J(G_p\,,k) = \tau_J(G_p) = \tau_J\left(g^{(p)}\right) \leq \tau_J(g).$$

En effet, pour $p = qm$ où $q \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \geq 0$, on a :
$G_{pn} = G_{qmn} = G_m^{qn} = (G_m^q)^n = G_{mq}^n = G_p^n$ (en convenant que $G_i^0 = G_0$); d'où $g^{(p)} = \left(G_p^n\right)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$.

D'autre part, pour tout $\mathcal{A}$-module I contenu dans J on a : $I^{n+k} \subseteq JI^n$.

$$\underset{n\geq 0}{\oplus} \frac{I^n}{JI^n + I^{n+k} \cap I^n} = \underset{n\geq 0}{\oplus} \frac{I^n}{JI^n}.$$

D'où $\gamma_J(I,k) = \gamma_J(I)$ et $\tau_J(I,k) = \tau_J(I)$. Comme G_p est contenu dans J, il suffit de remplacer I par G_p.

(ii) et *(iii)*

Montrons que si $\mathfrak{M}$ contient $G_k \cap \mathcal{A}$ alors il contient G_m :
Comme g est k–décroissante, $\mathfrak{M}$ contient $G_k \cap \mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{M} \supseteq G_{mk} \cap \mathcal{A} = G_{mk}$ d'où $\mathfrak{M} \supseteq G_m^k \cap \mathcal{A} \supseteq (G_m \cap \mathcal{A})^k$.

$G_m \cap \mathcal{A}$ est un idéal de $\mathcal{A}$; donc $\mathfrak{M} \supseteq (G_m \cap \mathcal{A})$.

Montrons que si $\mathfrak{M}$ contient G_m alors il contient $G_k \cap \mathcal{A}$:

$\mathfrak{M}$ contient $G_m \Rightarrow$ G_m est un idéal de $\mathcal{A} \Rightarrow$ $\mathfrak{M} \supseteq G_m^k = G_{mk} \supseteq (G_k \cap \mathcal{A})^m$.
Comme $G_k \cap \mathcal{A}$ est un idéal de $\mathcal{A}$, alors $\mathfrak{M} \supseteq (G_k \cap \mathcal{A})$.

Si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ contenant G_m, comme dans [D D S, (2.12)], en utilisant le Lemme 3 de [Ha], on a :
Si g est une ${}^+$quasi-graduation nœthérienne, alors : $\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k)$.

Si $\mathcal{A}$ est nœthérien, alors la ${}^+$quasi-graduation $g_{G_p} = (G_p^n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ est nœthérienne. D'où $\gamma_{\mathfrak{M}}(G_p\,,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(G_p\,,k)$.

Pour (ii) on conclut en utilisant (i).

Pour (iii) on utilise l'égalité $\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k)$ et on utilise (i) et (ii).

2.2.5. Localisation

2.2.5.1 – Soit $\mathcal{B}$ un anneau et soit $\mathcal{A}$ un sous-anneau de $\mathcal{B}$. Soient P un idéal premier de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S} = \mathcal{A} - P$. Pour tout sous-$\mathcal{A}$−module M,

$$M_P = M\mathcal{A}_P = \left\{\frac{x}{s} : x \in M \text{ et } s \in \mathcal{S}\right\}$$

est un sous-$\mathcal{A}_P$−module de $\mathcal{B}_P$.
Supposons que N est un sous-$\mathcal{A}$−module de $\mathcal{B}$.
Si P contient $N \cap \mathcal{A}$ alors $P\mathcal{A}_P$ contient $N\mathcal{A}_P \cap \mathcal{A}_P$.

En effet, montrons que $(N \cap \mathcal{A})\mathcal{A}_P = (N\mathcal{A}_P) \cap \mathcal{A}_P$:

Il est clair que $(N \cap \mathcal{A})\mathcal{A}_P \subseteq (N\mathcal{A}_P) \cap \mathcal{A}_P$.

Vérifions que $(N\mathcal{A}_P) \cap \mathcal{A}_P \subseteq (N \cap \mathcal{A})\mathcal{A}_P$: Soient $y \in N$ et $\mu \in \mathcal{S}$.

$$\text{Si } \frac{y}{\mu} \in \mathcal{A}_P, \text{ alors } \exists\, a \in \mathcal{A},\ t,\ s \in \mathcal{S} :\ t(sy - a\mu) = 0.$$

alors $tsy \in N \cap \mathcal{A}$. Comme $t,\ s,\ \mu \in \mathcal{S}$, on a :

$$\frac{y}{\mu} = \frac{tsy}{ts\mu} \in (N \cap \mathcal{A})\mathcal{A}_P.$$

2.2.5.2 Proposition.– *Soient $g = (G_n)$ une ${}^+$quasi-graduation d'un anneau $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A} = G_0$. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$ on a :*

$$\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \gamma_{\mathfrak{M}\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}}(g\mathcal{A}_{\mathfrak{M}},k) \quad \text{et} \quad \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}}(g\mathcal{A}_{\mathfrak{M}},k).$$

Preuve. Soit φ :

$$A_1 = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{G_n}{G_n \cap (\mathfrak{M}G_n + G_{n+k})} \longrightarrow B_1 = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{G_n\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}}{G_n\mathcal{A}_{\mathfrak{M}} \cap (\mathfrak{M}G_n + G_{n+k})\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}}$$

l'application $\dfrac{\mathcal{A}}{\mathfrak{M}}$−linéaire et graduée définie en posant pour $a_n \in G_n$,

$$\varphi : \sum_n (a_n + G_n \cap (\mathfrak{M}G_n + G_{n+k})) \mapsto \sum_n \frac{a_n}{1} + G_n\mathcal{A}_{\mathfrak{M}} \cap (\mathfrak{M}G_n + G_{n+k})\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}.$$

φ est un morphisme d'anneaux qui est surjectif. En effet, posons

$$F_n = G_n \cap (\mathfrak{M}G_n + G_{n+k}) \text{ et } H_n = G_n\mathcal{A}_{\mathfrak{M}} \cap (\mathfrak{M}G_n + G_{n+k})\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}.$$

Pour tout $s \in \mathcal{S} = \mathcal{A} \setminus \mathfrak{M}$, l'idéal $(s, \mathfrak{M})$ est égal à $\mathcal{A}$. Alors il existe $t \in \mathcal{S}$ et $b \in \mathfrak{M}$ tels que $1 = st + b$. Pour $a_n \in G_n$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{s} + H_n = \frac{a_n(st+b)}{s} + H_n &= \frac{a_n t}{1} + \frac{b'}{s} + H_n \text{ avec } b' \in F_n. \text{ D'où} \\ \frac{a_n}{s} + H_n &= \frac{a_n t}{1} + H_n = \varphi\left(a_n t + F_n\right). \end{aligned}$$

Montrons que φ est injectif :

Pour $a_n, b_n \in G_n$, $\varphi(a_n + F_n) = \varphi(b_n + F_n)$ si et seulement si il existe $t \in \mathcal{S}$ tel que $t(a_n - b_n) \in F_n$. Soient $s \in \mathcal{S}$ et $c \in \mathfrak{M}$ tels que $1 = st + c$. Alors

$$(1-c)(a_n - b_n) \in F_n, \ (a_n - b_n) \in F_n \ \text{ et } \ a_n + F_n = b_n + F_n.$$

Il s'en suit que φ est un isomorphisme. Ainsi,

$$\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \dim A_1 = \dim B_1 = \gamma_{\mathfrak{M}\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}}\left(g\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}, k\right)$$
$$\text{et} \quad \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau\left(g\mathcal{A}_{\mathfrak{M}}, k\right).$$

2.2.6 Proposition.– *Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $g = (G_n)$ une $^+$quasi-graduation k–décroissante de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A} = G_0$. Si J est un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$, alors*

$$\ell_J(g,k) \ \leq \ \tau_J(g,k) \ \leq \ \tau_J(g).$$

Preuve.

Si des éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont J–indépendants d'ordre k relativement à g alors d'après le Théorème (1.2.4) si I est le sous-$\mathcal{A}$–module de $\mathcal{B}$ engendré par les éléments $a_1, \ldots, a_r$, $\dfrac{\mathcal{A}}{K_0}[X_1, \ldots, X_r]$ est isomorphe à $\dfrac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, g)}$ où $K_0 = J + G_k \cap \mathcal{A}$. On a alors

$$\operatorname{tr}\deg_{\frac{\mathcal{A}}{J+G_k\cap\mathcal{A}}} \frac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, g)} \geq r.$$

Or, $\dfrac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, g)}$ peut être considéré comme un sous-anneau de $\dfrac{R(\mathcal{A}, g)}{R(\mathcal{A}, g) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, g)}$. Donc $\tau_J(g,k) \ \geq r$.

On conclut que $\quad \ell_J(g,k) \leq \tau_J(g,k) \leq \tau_J(g)$.

CHAPITRE 3

EXTENSIONS DE LA LARGEUR ANALYTIQUE

3.0 Au chapitre 2 nous avons établi la comparaison suivante pour une $^+$quasi-graduation $g = (G_n)$ de $\mathcal{B}$ et un idéal J de G_0 tel que $J \supseteq G_k \cap \mathcal{A}$ avec $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$: $\ell_J(g,k) \leq \tau_J(g,k) \leq \tau_J(g)$.
Avec des conditions fortes (voir le corollaire (4.3.4)-ii on a :

$$\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k).$$

Mais, contrairement au cas des filtrations adiques d'un anneau nœthérien local à corps résiduel infini, lorsque g est nœthérienne en général, $\ell_{\mathfrak{M}}(g,k)$ peut être nul avec $\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) \neq 0$.
Cela a donné l'idée d'affaiblir la notion d'indépendance analytique généralisée pour trouver d'autres extensions de la largeur analytique comparables à $\gamma_{\mathfrak{M}}(g,k)$ et à $\tau_{\mathfrak{M}}(g,k)$.

3.1 – Indépendances affaiblies et extensions de la largeur analytique

3.1.1. DÉFINITIONS

1) Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $g = (G_n)$ une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$ et J un idéal de $\mathcal{A} = G_0$. Soient $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de $\mathcal{B}$.

a) On dit que les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont **régulièrement J−indépendants d'ordre k relativement à g** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $J + G_{pk} \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$ avec $a_1, \ldots, a_r$ J−indépendants d'ordre k relativement à $g^{(p)} = (G_{pn})_{n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}}$.

b) On dit que les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont **faiblement J−indépendants d'ordre k relativement à g** s'il existe une famille strictement croissante $(\mu_n)_{n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}}$ telle que $\mu_0 = 0$, $\mu_\infty = +\infty$, $J + G_{\mu_k} \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$ et $G_{\mu_p} G_{\mu_q} \subseteq G_{\mu_{p+q}} \forall p, q \in \mathbb{Z}$ avec $a_1, \ldots, a_r$ J−indépendants d'ordre k relativement à (G_{μ_n}).

c) On dit que les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont **quasi $J-$indépendants d'ordre k relativement à** g s'il existe une famille strictement croissante $(\mu_n)_{n \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}}$ telle que $\mu_0 = 0$, $\mu_\infty = +\infty$, $J + G_{\mu_k} \cap \mathcal{A} \neq \mathcal{A}$ et $G_{\mu_{p_1} + \ldots + \mu_{p_q}} \subseteq G_{\mu_{p_1 + \ldots + p_q}} \forall p_1, \ldots, p_q \in \mathbb{Z}$ avec $a_1, \ldots, a_r$ $J-$indépendants d'ordre k relativement à (G_{μ_n}).

2) a) On appelle **$J-$largeur analytique régulière d'ordre k de g** le nombre

$\ell^a_J(g, k) = \sup\{r \in \mathbb{N} : \exists\, a_1, \ldots, a_r \in J$, régulièrement $J-$indépendants d'ordre k relativement à $g\}$.

On appelle **largeur analytique régulière d'ordre k de g** le nombre
$\ell^a(g, k) = \sup\left\{\ell^a_{\mathfrak{M}}(g, k) : \mathfrak{M} \in \operatorname{Max} \mathcal{A} \text{ et } \mathfrak{M} \supseteq G_k \cap \mathcal{A}\right\}$.

b) On appelle **$J-$largeur analytique faible d'ordre k de g** le nombre

$\ell^*_J(g, k) = \sup\{r \in \mathbb{N} : \exists\, a_1, \ldots, a_r \in J$, faiblement $J-$indépendants d'ordre k relativement à $g\}$,

On appelle **largeur analytique faible d'ordre k de g** le nombre
$\ell^*(g, k) = \sup\left\{\ell^*_{\mathfrak{M}}(g, k) : \mathfrak{M} \in \operatorname{Max} \mathcal{A} \text{ et } \mathfrak{M} \supseteq G_k \cap \mathcal{A}\right\}$.

c) On appelle **quasi $J-$largeur analytique d'ordre k de g** le nombre

$\ell^q_J(g, k) = \sup\{r \in \mathbb{N} : \exists\, a_1, \ldots, a_r \in J$, quasi $J-$indépendants d'ordre k relativement à $g\}$.

On appelle **quasi largeur analytique d'ordre k de g** le nombre
$\ell^q(g, k) = \sup\left\{\ell^q_{\mathfrak{M}}(g, k) : \mathfrak{M} \in \operatorname{Max} \mathcal{A} \text{ et } \mathfrak{M} \supseteq G_k \cap \mathcal{A}\right\}$.

3.1.2. REMARQUES

Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $g = (G_n)$ une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A} = G_0$. Alors

(i) $J-$indépendants d'ordre $k \Rightarrow$ régulièrement $J-$indépendants d'ordre $k \Rightarrow$ quasi $J-$indépendants d'ordre $k \Rightarrow$ faiblement $J-$indépendants d'ordre k. Par conséquent $\ell_J(g, k) \leq \ell^a_J(g, k) \leq \ell^q_J(g, k) \leq \ell^*_J(g, k)$.

(ii) Si pour tout i J contient $G_{ik} \cap \mathcal{A}$ et si les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont régulièrement $J-$indépendants d'ordre k relativement à g alors ils sont $J-$indépendants d'ordre nk $\forall n \geq 1$ et d'ordre $+\infty$. Par conséquent, si P est un idéal de $\mathcal{A}$ premier sur J, on a :

$$\ell_J(g,k) \leq \ell^a_J(g,k) \leq \sup(J) \leq ht\, J \leq \dim \mathcal{A}_p$$

et $\ell^a_J(g,k)$ est fini si $\mathcal{A}$ est nœthérien.

(iii) $\ell^a(g) = \sup\left\{\ell^a_{\mathfrak{M}}(g) : \mathfrak{M} \in \operatorname{Max}\mathcal{A}\right\}$.

(iv) Si $\mathcal{A}$ est sémi-local et nœthérien alors $\ell^a(g)$ est fini et $\exists\, \mathfrak{M} \in \operatorname{Max}\mathcal{A}$ tel que

$$\ell^a(g) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(g).$$

3.2 – Caractérisations d'extensions de la largeur analytique

3.2.1. THÉORÈME. *Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ et $g = (G_n)$ une ${}^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$ telle que $G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n$ $\forall n \geq 0$, $\forall i \geq 1$. Soit $\mathcal{A} = G_0$ et J un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$.*

(3.2.1.1) *On a :* $\ell_J\left(g^{(n)}, k\right) \leq \ell_J\left(g^{(pn)}, k\right) \leq \ell^a_J(g,k)\ \forall\, n, p \in \mathbb{N}^*$

(3.2.1.2) *Si $ht\, J$ est fini, en particulier si $\mathcal{A}$ est nœthérien alors*

i) $\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\ell^a_J(g,k) = \ell_J\left(g^{(pn)}, k\right)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$

ii) $\ell^a_J(g,k) = \sup\left\{\ell_J\left(g^{(n)}, k\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\}$

iii) $\ell^a_J(g,k) = \ell^a_J\left(g^{(q)}, k\right)$ $\forall q \in \mathbb{N}^*$

iv) la suite $n \longmapsto \ell_J\left(g^{(n!)}, k\right)$ est croissante, stationnaire et converge vers $\ell^a_J(g,k)$.

Preuve. *(3.2.1.1)*

$\forall n \geq 1$, si des éléments $a_1, \ldots, a_r$ de J sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à $g^{(n)}$ alors ils sont régulièrement $J-$indépendants d'ordre k relativement à g et $\ell^a_J(g,k) \geq r$; ainsi, $\ell_J\left(g^{(n)}, k\right) \leq \ell^a_J(g,k)$.

D'autre part, d'après la Remarque (1.1.5)-(ii),

$$\ell_J\left(g^{(n)},k\right) \le \ell_J\left(\left[g^{(n)}\right]^{(p)},k\right) = \ell_J\left(g^{(pn)},k\right) \le \ell_J^a(g,k)\ \forall p \ge 1.$$

D'où (3.2.1.1).

(3.2.1.2) Si $ht\,J$ est fini alors on a :

(i) On suppose que $\ell_J^a(g,k) \neq 0$.
Supposons que des éléments $a_1,\ldots,a_r$ de J sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à $g^{(p)}$ où $p \ge 1$. Alors ils sont $J-$indépendants.

En effet, si $\mathcal{F}$ est homogène, $\mathcal{F}(a_1,\ldots,a_r)=0 \Rightarrow \mathcal{F}$ a tous ses coefficients dans $J+G_{kp}\cap\mathcal{A} \subseteq J+G_k\cap\mathcal{A}=J$.

Donc $r \le \sup J \le ht\,J$ et $\ell_J^a(g,k)$ est fini. Soit $r=\ell_J^a(g,k)$.
Il existe alors $p \ge 1$, des éléments $b_1,\ldots,b_r \in J$, $J-$indépendants d'ordre k relativement à $g^{(p)}$. D'où $\ell_J^a(g,k) \le \ell_J\left(g^{(p)},k\right)$.
(3.2.1.1) entraîne alors l'égalité de $\ell_J^a(g,k)$ avec tous les $\ell_J\left(g^{(pn)},k\right)$.

(ii) : Conséquence de (3.2.1.1) et (3.2.1.2)-(i).

(iii) (3.2.1.1) et (3.2.1.2)-(ii) entraînent :

$\ell_J^a(g,k) = \sup\left\{\ell_J\left(g^{(n)},k\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad \le \quad \sup\left\{\ell_J\left(g^{(qn)},k\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\}$
$\le \ell_J^a(g,k)$ et on a :

$$\ell_J^a(g,k) = \sup\left\{\ell_J\left(g^{(qn)},k\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\} \quad = \quad \ell_J^a\left(g^{(q)},k\right).$$

(iv) : Conséquence de (3.2.1.1) et de (3.2.1.2)-(i).

3.2.2. THÉORÈME.– *Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ et $g = (G_n)$ une ${}^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$. Soient $\mathcal{A} = G_0$ et J un idéal propre de $\mathcal{A}$. On a :*

(3.2.2.1) **i)** *On suppose que J contient $G_k \cap \mathcal{A}$.*
Si $G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n$ $\forall n \geq 0$, $\forall i \geq 1$, en particulier si k est infini ou $(G_{n+k})_{n\geq 0}$ est décroissante alors on a :

$$\ell_J\left(g^{(n)}, k\right) \leq \ell_J\left(g^{(pm)}, k\right) \leq \ell^a_J(g,k) \leq \ell^q_J(g,k) \leq \ell^*_J(g,k)$$

ii) *Si k est infini ou J contient $G_n \cap \mathcal{A}$ pour tout $n \geq 1$ alors*

$$\ell^*_J(g,k) \leq \sup J \leq \sup P \leq ht\, P \text{ où } P \text{ est un idéal de } \mathcal{A} \text{ premier sur } J$$

iii) *Soit P un idéal de $\mathcal{A}$ premier sur J. Si k est infini ou P contient $G_n \cap \mathcal{A}$ sauf pour un nombre fini de termes alors*

$$\ell^*_J(g,k) \leq \sup P \leq ht\, P$$

iv) *Si P est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ alors*

$$\ell^*_P(g,k) \leq \sup P \leq ht\, P$$

(3.2.2.2) *On suppose que k est infini ou que les conditions suivantes sont remplies :*
$$\begin{cases} a) & J \text{ contient } G_n \cap \mathcal{A} \text{ pour tout } n \geq 1 \\ b) & \text{la suite } (G_{p+nk} \cap G_p)_{n\geq 0} \text{ est décroissante } \forall p \geq 0. \end{cases}$$
Si J est de hauteur finie, en particulier si $\mathcal{A}$ est nœthérien alors on a :

i) $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\ell^q_J(g,k) = \ell_J\left(g^{(nk_0)}, k\right)\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

ii) $\ell^q_J(g,k) = \sup\left\{\ell_J\left(g^{(n)}, k\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\} = \ell^a_J(g,k)$

iii) $\ell^q_J(g,k) = \ell^q_J\left(g^{(p)}, k\right)\ \forall p \in \mathbb{N}^*.$

Preuve. *(3.2.2.1)*

i) En utilisant (3.2.1.1) et les Remarques (1.1.5)-b) et (3.1.2)-(i) on a :

$$\ell_J\left(g^{(n)}, k\right) \leq \ell_J\left(g^{(pm)}, k\right) \leq \ell^a_J(g,k) \leq \ell^q_J(g,k) \leq \ell^*_J(g,k)\ \forall n, p \in \mathbb{N}^*.$$

ii) Si des éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à (G_{μ_n}) avec $G_{\mu_p} G_{\mu_q} \subseteq G_{\mu_{p+q}}$ pour tout p et tout q alors ils sont J-indépendants : Si $\mathcal{F}$ est homogène, à r indéterminées et à coefficients dans $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_r) = 0$ alors $\mathcal{F}$ a ses coefficients dans $J + G_{\mu_k} \cap \mathcal{A} = J$. Donc $\ell^*_J(g,k) \leq \sup J$ et on conclut avec le fait que $\sup J \leq \sup P \leq ht\, P$

iii) De la même façon que précédemment, on a :
si des éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à (G_{μ_n})

avec $G_{\mu_p}G_{\mu_q} \subseteq G_{\mu_{p+q}}$ pour tout p et tout q alors ils sont P-indépendants. En effet, si $\mathcal{F}$ est homogène, à r indéterminées et à coefficients dans $\mathcal{A}$ avec $\mathcal{F}(a_1,\ldots,a_r)=0$ alors $\mathcal{F}$ a ses coefficients dans $J+G_{\mu_k}\cap\mathcal{A} \subseteq P+G_{\mu_k}\cap\mathcal{A}$. Il existe $n\geq 1$ tel que P contient $G_{\mu_{nk}}\cap\mathcal{A}$ donc P contient $(G_{\mu_k})^n\cap\mathcal{A}$ et $(G_{\mu_k}\cap\mathcal{A})^n$ d'où P contient $G_{\mu_k}\cap\mathcal{A}$ et $P+G_{\mu_k}\cap\mathcal{A}=P$.
En conclusion, $\ell^*_J(g,k)\leq \sup P$.

iv) Si P est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ et si $\ell^*_P(g,k)\neq 0$ alors $P+G_{\mu_k}\cap\mathcal{A}\neq\mathcal{A}$ pour une certaine famille (μ_n) donc P contient $G_{\mu_k}\cap\mathcal{A}$.

Ou bien $k=\infty$ et dans ce cas $\ell^*_P(g)\leq \sup P$, ou bien $k\neq\infty$ et P contient alors tous les $G_n\cap\mathcal{A}$ tels que $n\geq 1$ et dans ce cas, en utilisant ii) on a : $\ell^*_P(g,k)\leq \sup P\leq ht\,P$.

(3.2.2.2) Si J est de hauteur finie, alors on a :

(i) D'après (3.2.2.1)-i) on a : $\ell^q_J(g,k)\leq \ell^*_J(g,k)\leq \sup J\leq ht\,J<\infty$.

On suppose que $\ell^q_J(g,k)\neq 0$. Soit $r=\ell^q_J(g,k)$. Alors il existe une famille (G_{u_n}) avec $G_{\mu_{p_1}+\ldots+\mu_{p_n}} \subseteq G_{\mu_{p_1+\ldots+p_n}}$ pour $p_1,\ldots,p_n\in\mathbb{Z}$ et des éléments $b_1,\ldots,b_r\in J$, $J-$indépendants d'ordre k relativement à (G_{μ_n}).

Vérifions que pour tout $p\geq 1$, les éléments $b_1^p,\ldots,b_r^p$ sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à $g^{(p\mu_1)}=(G_{np\mu_1})_{n\in\mathbb{Z}}$: Si $\mathcal{F}$ est homogène de degré s, $\mathcal{F}(b_1^p,\ldots,b_r^p)\in JG_{p\mu_1 s}+G_{p\mu_1(s+k)}$ implique que $\mathcal{F}(b_1^p,\ldots,b_r^p)\in JG_{p\mu_1 s}+G_{p\mu_1 s+p\mu_1 k}\cap G_{p\mu_1 s}\subseteq JG_{\mu_{ps}}+G_{p\mu_1 s+\mu_1 k}\cap G_{p\mu_1 s}\subseteq JG_{\mu_{ps}}+G_{\mu_{(ps+k)}}\cap G_{p\mu_1 s}$ d'où $\mathcal{F}$ a ses coefficients dans $J+G_{\mu_k}\cap\mathcal{A}=J=J+G_{p\mu_1 k}\cap\mathcal{A}$.

Donc $\ell^q_J(g,k)\ \leq\ \ell_J\left(g^{(p\mu_1)},k\right)$; (3.2.2.1)-(i) entraîne alors l'égalité de $\ell^q_J(g,k)$ avec tous les $\ell_J\left(g^{(p\mu_1)},k\right)$.

(ii) Conséquence de (3.2.2.1)-(i) et (3.2.2.2)-(i).

(iii) (3.2.2.1)-(i) et (3.2.2.1)-(ii) entraînent :

$$\ell^q_J(g,k)=\sup\left\{\ell_J\left(g^{(n)},k\right):n\in\mathbb{N}^*\right\}\leq \sup\left\{\ell_J\left(g^{(pn)},k\right):n\in\mathbb{N}^*\right\}\leq\ \ell^q_J(g,k),$$
$$\ell^q_J(g,k)=\sup\left\{\ell_J\left(g^{(pn)},k\right):n\in\mathbb{N}^*\right\}=\ell^q_J\left(g^{(p)},k\right)\quad\text{et}\quad \ell^q_J(g,k)=\ \ell^a_J(g,k)$$

d'où $\ell^q_J(g,k)=\ell^q_J\left(g^{(p)},k\right)$ et $\ell^q_J(g,k)=\ell^a_J(g,k)$.

3.2.3. Définition

Soit $g=(G_n)$ une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$.

On dit que g est régulière s'il existe $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $G_{mn}=G_m^n\ \forall n\in\mathbb{Z}$.

En appliquant le Théorème (3.2.2) aux $^+$quasi-graduations régulières on obtient le Corollaire suivant qui donne une caractérisation de la J-largeur analytique régulière d'ordre k d'une $^+$quasi-graduation régulière $g = (I_n)$ par des $\ell_J(G_n, k)$:

3.2.4. COROLLAIRE.– *Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $g = (G_n)$ une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$ telle que $(G_{n+k})_{n\geq 0}$ est décroissante ou telle que $G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n$ $\forall n \geq 0$, $\forall i \geq 1$. Soit $\mathcal{A} = G_0$ et J un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$.*
On suppose que $\mathcal{A}$ est nœthérien et que g est une $^+$quasi-graduation régulière de $\mathcal{B}$. Soit $m \geq 1$ tel que $G_{mn} = G_m^n$ $\forall n$, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ et J un idéal propre de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$. Alors on a :

(i) $\ell_J^a(g, k) = \ell_J^a(G_{mn}, k) = \ell_J^a(g, k)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(ii) $\exists p \in \mathbb{N}^*$, *multiple de m /* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\ell_J^a(g, k) = \ell_J(G_{pn}, k)$

(iii) $\ell_J^a(g, k) = \sup\{\ell_J(G_{mn}, k) : n \in \mathbb{N}^*\}$

(iv) *la suite $n \mapsto \ell_J(G_{mn}, k)$ est croissante, stationnaire et converge vers $\ell_J^a(g, k)$*

(v) *la suite $n \mapsto \ell_J(G_{n!}, k)$ est stationnaire et converge vers $\ell_J^a(g, k)$.*

Chapitre 4

Cas des Quasi-Filtrations et des Prégraduations d'Anneaux

4.0 Dans ce chapitre nous présentons sous certaines conditions des comparaisons entre les différentes notions de largeur analytique et nous donnons quelques exemples.

4.1 – Généralités

4.1.1 Définitions

Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $g = (G_n)$ une $^+$quasi-graduation.

1) On dit que la $^+$quasi-graduation g est une $k-$quasi-filtration de $\mathcal{B}$ si $G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n$ pour tout $n \geq 0$ et pour tout $i \geq 1$.

2) On appelle quasi-filtration de $\mathcal{B}$ toute $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$ qui est décroissante.

3) On dit que g est une $^+$prégraduation de $\mathcal{B}$ si pour tout n G_n est un idéal de $\mathcal{B}$. Cela revient à dire que $G_0 = \mathcal{B}$.

4) On dit que la $^+$quasi-graduation g est une $k-$préfiltration de $\mathcal{B}$ si g est une $k-$quasi-filtration de $\mathcal{B}$ et une prégraduation de $\mathcal{B}$.

5) Une filtration de $\mathcal{B}$ est une prégraduation de $\mathcal{B}$ qui est décroissante.

6) On dit que la $^+$quasi-graduation g est fortement A-P (fortement approximable par des puissances de sous-groupes) s'il existe $m \geq 1$ vérifiant

$$G_{mn} = G_m^n \; \forall n \geq 0 \text{ et } G_m^{(n+1)} \subseteq G_{mn+i} \subseteq G_m^n \quad \forall n \geq 0 \text{ et } \forall i \in [0; m-1].$$

Si un tel m est le plus petit on dit alors que g est fortement A-P de rang m.

7) On dit que la $^+$quasi-graduation $g = (G_n)$ est régulière d'ordre $m \geq 1$ si $G_{mn} = G_m^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

4.1.2 Classification

On dit que $g = (G_n)$ est $k-$décroissante si pour tout $n \geq 0$ et pour tout $i \geq 1$ on a : $G_{n+ik} \cap G_n \subseteq G_{n+k} \cap G_n$.

On montre par récurrence sur i que cela revient à dire que pour tout $n \geq 0$ la suite $(G_{n+ik} \cap G_n)_{i \geq 0}$ est décroissante.

La condition $G_p G_q \subseteq G_{p+q}$ sera pour $p, q \in \mathbb{N}$ ou $p, q \in \mathbb{Z}$; on obtient le schéma suivant :

		Filtrations Idéaux + condition sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ + Décroissance	$\Longrightarrow$	Quasi-filtrations condition sur $\mathbb{N}$ + Décroissance
		$\Downarrow$	$\searrow$	$\Downarrow$
Filtrations Idéaux + condition sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ + Décroissance	$\Longrightarrow$	$k-$Préfiltrations Idéaux + condition sur $\mathbb{N}$ + $k-$Décroissance	$\Longrightarrow$	$k-$Quasi-filtrations condition sur $\mathbb{N}$ + $k-$Décroissance
$\Downarrow$	$\searrow$	$\Downarrow$	$\searrow$	$\Downarrow$
Prégraduations Idéaux + condition sur $\mathbb{Z}$	$\Longrightarrow$	$^{+}$Prégraduations Idéaux + condition sur $\mathbb{N}$	$\Longrightarrow$	$^{+}$Quasi-graduations condition sur $\mathbb{N}$
$\Downarrow$	$\searrow$	$\Downarrow$		
Quasi-graduations condition sur $\mathbb{Z}$	$\Longrightarrow$	$^{+}$Quasi-graduations condition sur $\mathbb{N}$		

4.1.3. Remarque

Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $g = (G_n)$ une $k-$quasi-filtration de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A} = G_0$.

Toute $^{+}$quasi-graduation $g = (G_n)$ fortement A-P telle que $\mathcal{A} = G_0$ est nœthérien est une $^{+}$quasi-graduation nœthérienne.

En effet, comme le montrent S. Goto, M. Hermann, K. Nishida et O. Villamayor dans [G-H-N-V] pour les filtrations, en utilisant l'anneau de Véronèse de la $^+$quasi-graduation g : $R(\mathcal{A},g)^{(m)} = \sum_{n\geq 0} G_{mn}X^{mn} \simeq R(\mathcal{A},g^{(m)})$, on a :

Soit $R_i = \sum_{n\geq 0} G_{mn+i}X^{mn}$. Alors $R(\mathcal{A},g) = \sum_{n=0}^{m-1} R_iX^i$.
Si g est fortement A-P de rang m alors

$$R(\mathcal{A},g^{(m)}) = \sum_{n\geq 0} G_{mn}X^n = R(\mathcal{A},G_m)$$

et R_i est un idéal de $R(\mathcal{A},g)^{(m)}$ donc c'est un $R(\mathcal{A},g)^{(m)}-$module nœthérien et $R(\mathcal{A},g)$ est un $R(\mathcal{A},g)^{(m)}-$module de type fini donc $R(\mathcal{A},g)$ est nœthérien.

4.2 – Comparaisons

4.2.1. Théorème. (Voir Théorème 3.2.1) *Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ et $g = (G_n)$ une $k-$quasi-filtration de $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{A} = G_0$ et J un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$.*

(4.2.1.1.) *On a : $\ell_J\left(g^{(n)},k\right) \leq \ell_J\left(g^{(pn)},k\right) \leq \ell_J^a(g,k)\ \forall n,p \in \mathbb{N}^*$*

(4.2.1.2) *Si ht J est fini, en particulier si $\mathcal{A}$ est nœthérien alors*

i) $\exists p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\ell_J^a(g,k) = \ell_J\left(g^{(pn)},k\right)\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

ii) $\ell_J^a(g,k) = \sup\left\{\ell_J\left(g^{(n)},k\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\}$

iii) $\ell_J^a(g,k) = \ell_J^a\left(g^{(q)},k\right)\ \ \forall q \in \mathbb{N}^*$

iv) la suite $n \mapsto \ell_J\left(g^{(n!)},k\right)$ est croissante, stationnaire et converge vers $\ell_J^a(g,k)$.

4.2.2. COROLLAIRE.– *Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $g = (G_n)$ une $k-$quasi-filtration de $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{A} = G_0$ et J un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$.*
On suppose que $\mathcal{A}$ est nœthérien, que g est une $k-$quasi-filtration régulière de $\mathcal{B}$ d'ordre $m \geq 1$ et que J est un idéal propre de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$. Alors on a :

(i) $\ell_J^a(g,k) = \ell_J^a(G_{mn},k) \forall n \in \mathbb{N}^*$

(ii) $\exists p \in \mathbb{N}^*$, *multiple de m /* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\ell_J^a(g,k) = \ell_J(G_{pn},k)$

(iii) $\ell_J^a(g,k) = \sup\{\ell_J(G_{mn},k) : n \in \mathbb{N}^*\}$

(iv) *la suite $n \mapsto \ell_J(G_{mn},k)$ est croissante, stationnaire et converge vers $\ell_J^a(g,k)$*

(v) *la suite $n \mapsto \ell_J(G_{n!},k)$ est stationnaire et converge vers $\ell_J^a(g,k)$.*

4.2.3. PROPOSITION.– *Soient $\mathcal{B}$ un anneau, $g = (G_n)$ une $k-$quasifiltration de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A} = G_0$.*
Si $\mathcal{A}$ est nœthérien et J est un idéal de $\mathcal{A}$ contenant $G_k \cap \mathcal{A}$, alors on a :

$$\ell_J(g,k) \leq \ell_J^a(g,k) \leq \tau_J(g).$$

Preuve.
Il est clair que $\ell_J(g,k) \leq \ell_J^a(g,k)$.

D'après la Proposition (2.2.6), pour toute $k-$quasi-filtration g,

$$\ell_J(g,k) \leq \tau_J(g,k).$$

Le Théorème (4.2.1) et le Théorème (2.2.3) impliquent qu'il existe $p \geq 1$ tel que

$$\ell_J^a(g,k) = \ell_J\left(g^{(p)},k\right) \quad \text{et} \quad \tau_J\left(g^{(p)},k\right) \leq \tau_J(g).$$

$$\text{Alors} \quad \ell_J(g,k) \leq \ell_J^a(g,k) \leq \tau_J\left(g^{(p)},k\right) \leq \tau_J(g).$$

4.3 – Cas des k–préfiltrations régulières

4.3.1. PROPOSITION.– *Soient $\mathcal{A}$ un anneau nœthérien, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ et $g = (G_n)$ une k–préfiltration régulière de rang m.*

(i) *Si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\mathcal{A}$ contenant G_m ou G_k alors*

$$\ell^a_{\mathfrak{M}}(g, k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(g)$$

(ii) $\ell^a(g, k) = \ell^a(g)$.

Preuve. *(i)*
Si $g = (G_n)$ et si $m \geq 1$ est tel que $G_{mn} = G^n_m$ pour tout n, alors en utilisant le Corollaire (4.2.2) on a :

$$\ell^a_{\mathfrak{M}}(g, k) = \sup \left\{\ell_{\mathfrak{M}}(G^n_m, k) : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Supposons $k \neq +\infty$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Si $\mathfrak{M} \supseteq G_m$ alors $\mathfrak{M} \supseteq G^p_m = G_{mp} \supseteq G^m_p$ donc $\mathfrak{M} \supseteq G_p$. De même si $\mathfrak{M} \supseteq G_k$ alors, comme g est k–décroissante, $\mathfrak{M} \supseteq G_{kp} \supseteq G^k_p$ donc $\mathfrak{M} \supseteq G_p$.

Alors $\mathfrak{M}G^s_p + G^{s+k}_p = \mathfrak{M}G^s_p$ et $\mathfrak{M} + G^k_p = \mathfrak{M}$ donc des éléments de G_p sont $\mathfrak{M}$–indépendants d'ordre k relativement à g_{G_p} si et seulement si ils le sont (d'ordre $+\infty$) relativement à g_{G_p} d'où on a :

$$\ell_{\mathfrak{M}}(G^n_m, k) = \ell_{\mathfrak{M}}(G^n_m)\ \forall n \geq 1 \text{ et}$$

$$\ell^a_{\mathfrak{M}}(g, k) = \sup \left\{\ell_{\mathfrak{M}}(G^n_m) : n \in \mathbb{N}^*\right\} = \ell^a_{\mathfrak{M}}(g).$$

(ii) Si $k \in \mathbb{N}^*$ et $\mathfrak{M}$ un idéal maximal sur G_k alors, en prenant les sup on a (ii).

4.3.2. PROPOSITION.– *Soient $\mathcal{A}$ un anneau nœthérien, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $g = (G_n)$ une k–préfiltration de $\mathcal{A}$ fortement A-P, et $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\mathcal{A}$. Alors on a :*

$$\ell_{\mathfrak{M}}(g, k) \ \leq\ \ell^a_{\mathfrak{M}}(g, k) \ \leq\ \tau_{\mathfrak{M}}(g, k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g).$$

Preuve. *(i)*
Si g est une k−préfiltration de $\mathcal{A}$ fortement A-P et si $\mathcal{A}$ est nœthérien, alors g est nœthérienne. Soit m le rang de g.
Montrons que si $\mathfrak{M}$ contient G_k et $k \neq +\infty$ alors $\mathfrak{M}$ contient G_m :

Comme g est k−décroissante, $\mathfrak{M}$ contient $G_k \Rightarrow \mathfrak{M} \supseteq G_{mk} \cap \mathcal{A} = G_{mk}$ d'où $\mathfrak{M} \supseteq G_m^{\prime k}$. Alors $\mathfrak{M} \supseteq G_m$.

Comme $\mathfrak{M}$ contient G_m , alors le Corollaire (2.2.4.2) implique que

$$\tau_{\mathfrak{M}}(g, k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g).$$

On conclut avec la Proposition (4.2.3).

4.3.3. PROPOSITION. *Soient $\mathcal{A}$ un anneau nœthérien, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $g = (G_n)$ une k−préfiltration de $\mathcal{A}$ fortement A-P, et $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\mathcal{A}$.*

(i) *On a* $\ell_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \ell^a_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \gamma_{\mathfrak{M}}(g) = \tau_{\mathfrak{M}}(g)$

(ii) *Si $\mathfrak{M}$ contient G_k alors on a :*

$$\ell_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \ell^a_{\mathfrak{M}}(g,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(g) \leq \gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g) = \tau_{\mathfrak{M}}(g)$$

(iii) *Si $\mathfrak{M}$ contient G_k et si $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ est infini, alors on a :*

$$\ell_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \ell^a_{\mathfrak{M}}(g,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(g) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g) = \tau_{\mathfrak{M}}(g)$$

(iv) *Si $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ est infini, alors pour un idéal $I \subseteq \mathfrak{M}$ et pour $q > 0$ on a :*

$$\ell_{\mathfrak{M}}(I,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(I,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(I^q) = \gamma_{\mathfrak{M}}(I^q) = \gamma_{\mathfrak{M}}(I,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(I,k).$$

Preuve.
On utilise le Théorème (2.2.3), les Corollaires de (2.2.4) et les Propositions (4.3.1) et (4.3.2) et pour $\ell_{\mathfrak{M}}(I,k)$ on utilise la Proposition (2.7.2) de [D₁].

4.3.4. COROLLAIRE.– *Soient $\mathcal{A}$ un anneau nœthérien, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ et $g = (G_n)$ est une k–préfiltration de $\mathcal{A}$ fortement A-P de rang $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un multiple de m. Alors pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $\mathcal{A}$ contenant G_k et pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ on a :*

(i) $\ell_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \ell^a_{\mathfrak{M}}(g,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(g) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(G_{pq}) \leq \gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g) = \gamma_{\mathfrak{M}}(G_{pq}) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g)$.

(ii) *Si $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ est infini, alors*

a) $\ell_{\mathfrak{M}}(g,k) \leq \ell^a_{\mathfrak{M}}(g,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(g) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(G_{pq}) = \gamma_{\mathfrak{M}}(g,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(g,k)$

b) *Pour tout idéal $I \subseteq \mathfrak{M}$,*

$$\ell_{\mathfrak{M}}(I,k) = \ell_{\mathfrak{M}}(I) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(I,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}}(I^q) = \gamma_{\mathfrak{M}}(I,k) = \tau_{\mathfrak{M}}(I,k).$$

4.3.5. COROLLAIRE.– *Soient $(\mathcal{A},\mathfrak{M})$ un anneau nœthérien local et $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. Supposons que g est une k–préfiltration de $\mathcal{A}$ fortement A-P de rang m et que $p \in \mathbb{N}^*$ est un multiple de m, alors pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, on a :*

(i) $\ell(g,k) \leq \ell^a(g,k) = \ell^a(g) = \ell^a(G_{pq}) \leq \gamma(g,k) = \gamma(g) = \gamma(G_{pq}) = \tau(g,k)$.

(ii) *Si $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ est infini, alors*

a) $\ell(g,k) \leq \ell^a(g,k) = \ell^a(g) = \ell^a(G_{pq}) = \gamma(g,k) = \tau(g,k)$,

b) *pour tout idéal I,*

$$\ell(I,k) = \ell(I) = \ell^a(I,k) = \ell^a(I) = \ell^a(I^q,k) = \gamma(I,k) = \tau(I,k) = \gamma(I).$$

4.4. Exemples

a) Soient $\mathcal{B} = \mathbb{Z}[X,Y]$, $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[X]$ et $I = \mathcal{A}X + \mathcal{A}Y$.

On a : $\mathcal{B}I = \mathcal{B}X + \mathcal{B}Y \supsetneq I$.

Soit $f = (G_n)$ telle que $G_n = \mathcal{A}\, \forall n \leq 0$; $G_{2n} = I^n$ et $G_{2n+1} = I^{n+1}\, \forall n \geq 1$.

On vérifie que $g = f^{(2)}$ est une quasi-graduation de $\mathcal{B}$ mais pas une prégraduation de $\mathcal{B}$;

Soit $\mathfrak{M} = \mathcal{A}X$ (l'idéal de $\mathcal{A}$ engendré par X)

X et Y sont $\mathfrak{M}$−indépendants relativement à $f^{(2)} = (G_{2n})$.

b) Soient $\mathcal{B} = \mathbb{Z}[X,Y]$, $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[Y]$ et I l'idéal de $\mathcal{B}$ égal à $\mathcal{B}X + \mathcal{B}Y$.

On a : $\mathcal{B}I = I = \mathcal{A}I$ et $\mathcal{A}I^p = I^p\ \forall p \geq 1$.

* Soit $g = (G_n)$ la quasi-graduation de $\mathcal{B}$ telle que

$$G_n = \mathcal{A}\, \forall n \leq 0,\ G_{2n} = I^n\, \forall n \geq 1 \text{ et } G_{2n+1} = I^{n+1}\, \forall n \geq 0.$$

g est une quasi-filtration de $\mathcal{B}$ fortement A-P de rang 2 mais pas une prégraduation.

Soit $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ et soit $\mathfrak{M} = \mathcal{A}Y$. Vérifions que X et Y sont $\mathfrak{M}$−indépendants d'ordre k relativement à $g^{(2)} = (G_{2n})$:

$$\mathfrak{M}G_{2s} + G_{2s+2k} \cap G_{2s} = (\mathcal{A}Y)(X,Y)^s + (X,Y)^{s+k} \subseteq (\mathcal{B}Y)(X,Y)^s + (\mathcal{B}X)(X,Y)^s.$$

Si $\mathcal{F}$ est homogène de degré s, à 2 indéterminées et à coefficients dans $\mathcal{A}$ alors on a :

$$\mathcal{F}(X,Y) = \sum_{i_1+i_2=s} \alpha_{i_1 i_2} X^{i_1} Y^{i_2} \in\ \mathfrak{M}G_{2s} + G_{2s+2k} \text{ implique que}$$

$$\sum_{i_1+i_2=s} \alpha_{i_1 i_2} X^{i_1} Y^{i_2} \in\ \mathfrak{M}G_{2s} + G_{2s+2k} \cap G_{2s}.$$

Cela entraîne que $\alpha_{i_1 i_2} \in (\mathcal{B}Y \cap \mathcal{A}) \cup (\mathcal{B}X \cap \mathcal{A}) = \mathcal{A}Y = \mathfrak{M}$.

Par contre, $XY^2 = Y(XY) \in \mathfrak{M}I^2 \subsetneq \mathfrak{M}G_3 + G_{3+k}$, $\forall k \in \overline{\mathbb{N}^*}$.
Comme $1 \notin \mathfrak{M} + G_k \subseteq I$, on conclut que
X et Y ne sont pas $\mathfrak{M}$−indépendants d'ordre k relativement à g.

* Soit $h = (H_n)$ la quasi-graduation de $\mathcal{B}$ telle que

$$H_n = \mathcal{B}\,\forall n \leq 0,\ \ H_{2n} = I^n\,\forall n \geq 1 \text{ et } H_{2n+1} = I^{n+1}\,\forall n \geq 0.$$

h est une filtration fortement A-P de $\mathcal{B}$ de rang 2. Soit $\mathfrak{M}_1 = I$.

X et Y sont $\mathfrak{M}_1-$indépendants (d'ordre k) relativement à $h^{(2)} = (H_{2n}) = f_I$
i.e., X et Y sont $\mathfrak{M}_1-$indépendants (d'ordre k) (dans I) et $\ell_{\mathfrak{M}_1}(I) \geq 2$.
Or, $\ell_{\mathfrak{M}_1}(I) \leq \sup I \leq \operatorname{ht} I \leq 2$, on conclut que $\ell_{\mathfrak{M}_1}(I) = 2$.
Pour tout $a \in H_1$ et pour tout $n \geq 1$ on a :

$$1a^{2n+2} = a\,a^{2n+1} \in H_1H_{2n+2} \subseteq \mathfrak{M}_1H_{2n+2} + H_{2n+2+k}.$$

Comme $1 \notin \mathfrak{M}_1$, a n'est pas $\mathfrak{M}_1-$indépendant d'ordre k relativement à h.

On conclut que $\ell_{\mathfrak{M}_1}(h,k) = 0$.

Par contre, comme $\mathcal{B}/\mathfrak{M}_1$ est infini, d'après la Proposition (4.3.3) on a :

$\ell^a_{\mathfrak{M}_1}(h,k) = \ell^a_{\mathfrak{M}_1}(I) = \ell_{\mathfrak{M}_1}(I) = \sup\{\ell_{\mathfrak{M}_1}(I^n) : n \in \mathbb{N}^*\} = \gamma_{\mathfrak{M}_1}(I,k) = \tau_{\mathfrak{M}_1}(I,k) = 2 \neq \ell_{\mathfrak{M}_1}(h,k)$.

Chapitre 5

Indépendance anatytique généralisée aux quasi-graduations de modules

1.0 Dans ce chapitre nous définissons l'indépendance analytique généralisée pour les quasi-graduations de modules et nous établissons des critères équivalents de $J-$indépendance.

5.1 – Quasi-graduations de modules et indépendance analytique généralisée

5.1.1. Définitions :

(5.1.1.1) Soient $\mathcal{B}$ un anneau et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}-$module.

Soit $\mathcal{H} = (\mathbb{M}_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ une famille de sous-groupes de $(\mathcal{M},+)$ et soit $g = (G_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$.

On dit que $\mathcal{H}$ est une $g-$quasi-graduation (respectivement une g^+-quasi-graduation) du $B-$module $\mathcal{M}$ ou que $\mathcal{H}$ est compatible (respectivement compatible à droite) avec g si $\mathbb{M}_\infty = (0)$ et $G_p\mathbb{M}_q \subseteq \mathbb{M}_{p+q}$ pour p et $q \in \mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$ (respectivement $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$).

(5.1.1.2) On dit que $\mathcal{H}$ est une $(J,k,g)-$quasi-graduation (respectivement une $(J,k,g)^+-$quasi-graduation) du $\mathcal{B}-$module $\mathcal{M}$ si $\mathbb{M}_\infty = (0)$ et si $G_m(J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k}) \subseteq J\mathbb{M}_{n+m} + \mathbb{M}_{n+m+k}$ $\forall n,\ m \in \mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$ (respectivement $\forall n,\ m \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$).

(5.1.1.3) Soient $\mathcal{B}$ un anneau et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}-$module. Soient $\mathcal{A}$ un sous-anneau de $\mathcal{B}$, $k \in \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$. Soient $a_1,\ldots,a_r$ des éléments de $\mathcal{B}$ et I le sous$-\mathcal{A}-$module de $\mathcal{B}$ qu'ils engendrent.

Posons $g(\mathcal{A}, I)$ la $^+$quasi-graduation (I_n) de $\mathcal{B}$ telle que

$$\begin{cases} I_n = \mathcal{A}\ \forall n \leq 0 \\ I_\infty = (0) \text{ et} \\ I_n = I^n\ \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Soit J un idéal de $\mathcal{A}$ tel que $J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0 \neq \mathbb{M}_0$.
On suppose que $\mathcal{H} = (\mathbb{M}_n)$ est une $g(\mathcal{A}, I)^+-$quasi-graduation du $\mathcal{B}-$module $\mathcal{M}$ (i.e., $\mathbb{M}_p$ est un sous-module du $\mathcal{A}-$module $\mathcal{M}$ et $I\mathbb{M}_p \subseteq \mathbb{M}_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$) ou que $\mathcal{H}$ est une $(J, k, g(\mathcal{A}, I))^+-$quasi-graduation du $\mathcal{B}-$module $\mathcal{M}$ (i.e., $\mathbb{M}_n$ est un sous-module du $\mathcal{A}-$module $\mathcal{M}$ et $I(J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k}) \subseteq J\mathbb{M}_{n+1} + \mathbb{M}_{n+k+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont dits $J-$indépendants d'ordre k relativement à $\mathcal{H}$ si, pour tout polynôme homogène F de degré s, à r indéterminées et à coefficients dans $\mathbb{M}_0$, la relation $F(a_1, \ldots, a_r) \in J\mathbb{M}_s + \mathbb{M}_{s+k}$ implique que F a ses coefficients dans $J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k$.

Pour $k = +\infty$ on omet l'expression "d'ordre k". On adopte les définitions relatives aux autres cas particuliers comme dans [D D S].

5.1.2. Proposition.– *Soient $\mathcal{B}$ un anneau et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}-$module. Soient $\mathcal{A}$ un sous-anneau de $\mathcal{B}$, $k \in \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de $\mathcal{B}$ et I le sous-$\mathcal{A}-$module de $\mathcal{B}$ qu'ils engendrent.
Soient $\mathcal{H} = (\mathbb{M}_n)_{n \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}}$ une $(J, k, g(\mathcal{A}, I))^+-$quasi-graduation de $\mathcal{M}$, J un idéal de $\mathcal{A}$ tel que $J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0 \neq \mathbb{M}_0$ et $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de $\mathcal{B}$ qui sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à $\mathcal{H}$.*

Si $J\mathbb{M}_0 \supseteq \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0$ alors les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont $J-$indépendants (d'ordre $+\infty$) relativement à $\mathcal{H}$ et $J-$indépendants d'ordre p relativement à $\mathbb{M}_0 g(\mathcal{A}, I) = g(\mathbb{M}_0, I) = (I_n \mathbb{M}_0)$ pour tout $p \in \overline{\mathbb{N}^*}$.

Preuve Soit $x = F(a_1, \ldots, a_r)$ où F est un polynôme homogène de degré s, à r indéterminées et à coefficients dans $\mathbb{M}_0$, on considère que $J\mathbb{M}_0$ contient $\mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0$. $\forall p \geq 1$, éventuellement infini on a :

$[x \equiv 0 \pmod{J\mathbb{M}_s}$ ou $x \equiv 0 \pmod{JI_s\mathbb{M}_0 + I_{p+s}\mathbb{M}_0}] \Rightarrow x \in J\mathbb{M}_s + \mathbb{M}_{s+k} \Rightarrow F \in (J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0)[X_1, \ldots, X_r]$.

Or, $J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0 = J\mathbb{M}_0 \subseteq J\mathbb{M}_0 + I_p\mathbb{M}_0$ donc les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont $J-$indépendants (d'ordre $+\infty$) relativement à $\mathcal{H}$ et d'ordre p relativement à $g(\mathcal{A}, I)\mathbb{M}_0$.

5.1.3. COROLLAIRE.– *Soient $\mathcal{B}$ un anneau et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}$–module. Soient $\mathcal{A}$ un sous-anneau de $\mathcal{B}$, $k \in \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de $\mathcal{B}$ et I le sous–$\mathcal{A}$–module de $\mathcal{B}$ qu'ils engendrent.*
Soit $\mathcal{H} = (\mathbb{M}_n)_{n \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}}$ une $g(\mathcal{A}, I)^+$–quasi-graduation du $\mathcal{B}$–module $\mathcal{M}$. Soient J un idéal de $\mathcal{A}$ tel que $J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0 \neq \mathbb{M}_0$ et $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de $\mathcal{B}$ J–indépendants d'ordre k relativement à $\mathcal{H}$. On a :

Si $J\mathbb{M}_0$ contient $\mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0$ alors pour tout $p \in \overline{\mathbb{N}^*}$ les éléments $a_1, \ldots, a_r$ sont J–indépendants (d'ordre $+\infty$) relativement à $\mathcal{H}$ et J–indépendants d'ordre p relativement à $\mathbb{M}_0 g(\mathcal{A}, I) = g(\mathbb{M}_0, I) = (I_n \mathbb{M}_0)$ où $I_n = \mathcal{A}$ $\forall n \leq 0$ et $I_n = I^n$ $\forall n \geq 1$.

5.1.4. PROPOSITION.– *Soient $\mathcal{B}$ un anneau et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}$–module. Soient $\mathcal{A}$ un sous-anneau de $\mathcal{B}$, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de $\mathcal{B}$ et I le sous–$\mathcal{A}$–module de $\mathcal{B}$ qu'ils engendrent.*
Soit $\mathcal{H} = (\mathbb{M}_n)_{n \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}}$ une $g(\mathcal{A}, I)^+$–quasi-graduation du $\mathcal{B}$–module $\mathcal{M}$ et soit J un idéal de $\mathcal{A}$ tel que $J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0 \neq \mathbb{M}_0$.

On suppose que $(\mathbb{M}_{n+k})_{n \geq 0}$ est décroissante ou que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $i \geq 1$, on a : $\mathbb{M}_{n+ik} \cap \mathbb{M}_n \subseteq \mathbb{M}_{n+k} \cap \mathbb{M}_n$.
Suposons de plus que $a_1, \ldots, a_r$ sont des éléments de $\mathcal{B}$ J– indépendants d'ordre k relativement à $\mathcal{H}$.

Si $\mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0 \subseteq J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_{pk} \cap \mathbb{M}_0 \neq \mathbb{M}_0$ alors les éléments $a_1^p, \ldots, a_r^p$ sont J–indépendants d'ordre k relativement à la $g(\mathcal{A}, I^p)^+$–quasi-graduation $\mathcal{H}^{(p)} = (\mathbb{M}_{pn})$ pour tout $p \geq 1$.

Preuve.
Cela découle du fait que sous les hypothèses on a :

$$\begin{cases} \forall n \geq 0 \quad J\mathbb{M}_{pn} + \mathbb{M}_{p(n+k)} \subseteq J\mathbb{M}_{pn} + \mathbb{M}_{pn+k} \\ \text{et} \\ J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0 \subseteq J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_{pk} \cap \mathbb{M}_0. \end{cases}$$

5.2 – Critères de J-indépendance :

$\mathcal{B}$ désigne un anneau et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}-$module.

5.2.0.– Soient (I_n) et (J_n) deux $^+$quasi-graduations de $\mathcal{B}$ telles que $J_n \subseteq I_n$, $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$ et $I_n J_m \subseteq J_{n+m}$ $\forall n$, et $\forall m$.
Alors le groupe somme directe $\underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} \dfrac{I_n}{J_n}$ est un anneau gradué.
Soient $(\mathbb{P}_n)$ et $(\mathbb{K}_n)$ deux familles de sous-groupes de $\mathcal{M}$ tels que
$\mathbb{K}_n \subseteq \mathbb{P}_n$, $I_n\mathbb{P}_m \subseteq \mathbb{P}_{n+m}$, $J_n\mathbb{P}_m \subseteq \mathbb{K}_{n+m}$ et $I_n\mathbb{K}_m \subseteq \mathbb{K}_{n+m}$ $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

Alors le groupe somme directe $\underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} \dfrac{\mathbb{P}_n}{\mathbb{K}_n}$ est un $\underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} \dfrac{I_n}{J_n}$–module gradué avec

$$(a_n + J_n)(y_m + \mathbb{K}_m) = (a_n y_m + \mathbb{K}_{n+m}) \quad \forall\ a_n \in I_n \text{ et } \forall y_m \in \mathbb{P}_m.$$

Soient $\mathbb{P} = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} \mathbb{P}_n$ et $\mathbb{L} = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} \mathbb{K}_n$. Ce sont des $F-$modules gradués où $F = \underset{n}{\oplus} I_n X^n$ et l'on a :

$$\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{L}} \simeq \underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} \frac{\mathbb{P}_n}{\mathbb{K}_n}.$$

5.2.1.– Soit $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ une $^+$quasi-graduation de $\mathcal{B}$ telle que $I_0 = \mathcal{A}$. Soient $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $\mathcal{H} = (\mathbb{M}_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ et $\mathcal{I} = (\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ deux f^+-quasi-graduations du $\mathcal{B}-$module $\mathcal{M}$ avec $\mathbb{M}_n$ et $\mathbb{P}_n$ des sous$-\mathcal{A}-$modules de $\mathcal{M}$ tels que $\mathbb{P}_0 = \mathbb{M}_0$ et $\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{M}_n$ $\forall n$. Soit J un idéal de $\mathcal{A}$.

On définit le produit d'un sous-groupe I de $\mathcal{B}$ par un $\mathcal{B}-$module $\mathcal{N}$ par :

$$I\mathcal{N} = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i x_i : a_i \in I, b_i \in \mathcal{N} \text{ et } s \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Posons, pour tout n, $\mathbb{K}_n = \mathbb{P}_n \cap (J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k})$ et $J_n = I_n \cap (JI_n + I_{n+k})$. Alors pour tout n et pour tout m on a :

$I_n\mathbb{K}_m \subseteq \mathbb{K}_{n+m}$ et $J_n\mathbb{P}_m \subseteq \mathbb{K}_{n+m}$ où $\underset{n}{\oplus} \dfrac{\mathbb{P}_n}{\mathbb{K}_n}$ est un $\underset{n}{\oplus} \dfrac{I_n}{J_n}$ – module gradué

avec $(a_n + J_n)(y_m + \mathbb{K}_m) = (a_n y_m + \mathbb{K}_{n+m}) \quad \forall a_n \in I_n$ et $\forall y_m \in \mathbb{P}_m$.

Soient $F = \underset{n}{\oplus} I_n X^n = \Re(\mathcal{A}, f)$, $\mathbb{P} = \Re(\mathbb{P}_0, \mathcal{I}) = \underset{n}{\oplus} \mathbb{P}_n X^n$ et $\mathbb{M} = \Re(\mathbb{M}_0, \mathcal{H}) = \underset{n}{\oplus} \mathbb{M}_n X^n$.

Alors F est un anneau gradué, $\mathbb{P}$ et $\mathbb{M}$ sont des F−modules gradués et $\mathbb{L} = \underset{n}{\oplus} \mathbb{K}_n X^n = \mathbb{P} \cap (u^k, J)\mathbb{M}$ est un sous-module gradué de $\mathbb{P}$ où $u = \dfrac{1}{X}$ avec la convention $u^\infty = 0$ et on a :

$$\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{L}} \simeq \underset{n}{\oplus} \frac{\mathbb{P}_n}{\mathbb{K}_n}$$

$$i.e., \quad \frac{\mathbb{P}}{\mathbb{P} \cap (u^k, J)\mathbb{M}} \simeq \underset{n}{\oplus} \frac{\mathbb{P}_n}{\mathbb{P}_n \cap (J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k})}.$$

En particulier, pour $\mathcal{I} = \mathcal{H}$ on a :

(5.2.1.1) $$\frac{\mathbb{M}}{\mathbb{M} \cap (u^k, J)\mathbb{M}} \simeq \underset{n}{\oplus} \frac{\mathbb{M}_n}{\mathbb{M}_n \cap (J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k})}$$

(5.2.1.2) Si $\mathbb{M}_{n+k} \subseteq \mathbb{M}_n \; \forall n \geq 1$, alors $\dfrac{\mathbb{M}}{(u^k, J)\mathbb{M}} \simeq \underset{n}{\oplus} \dfrac{\mathbb{M}_n}{J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k}}$;

En remplaçant $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{N}$ on a :

(5.2.1.3) $$\frac{\mathbb{M}^+}{\mathbb{M}^+ \cap (u^k, J)\mathbb{M}} \simeq \underset{n\geq 0}{\oplus} \frac{\mathbb{M}_n}{\mathbb{M}_n \cap (J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k})}, \text{ où } \mathbb{M}^+ = \underset{n\geq 0}{\oplus} \mathbb{M}_n X^n,$$

(5.2.1.4) $$\frac{\mathbb{M}^+}{J\mathbb{M}^+} \simeq \underset{n}{\oplus} \frac{\mathbb{M}_n}{J\mathbb{M}_n}.$$

5.2.2.– Soit $R(\mathbb{M}_0, I) = \underset{n\geq 0}{\oplus} I_n \mathbb{M}_0 X^n$ le $R(\mathcal{A}, I)$−module gradué tel que $I_0 = \mathcal{A}$ et $I_n = I^n \; \forall n \geq 1$ où I est un sous−$\mathcal{A}$−module de $\mathcal{B}$ tel que $I_n \mathbb{M}_0 \subseteq \mathbb{M}_n \; \forall n \geq 0$. Alors on a :

(5.2.2.1) $$\frac{R(\mathbb{M}_0, I)}{R(\mathbb{M}_0, I) \cap (u^k, J)\mathbb{M}} \simeq \underset{n}{\oplus} \frac{I_n \mathbb{M}_0}{I_n \mathbb{M}_0 \cap (J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k})}$$

(5.2.2.2) $$\frac{R(\mathbb{M}_0, I)}{R(\mathbb{M}_0, I) \cap J\mathbb{M}^+} \simeq \underset{n}{\oplus} \frac{I_n \mathbb{M}_0}{I_n \mathbb{M}_0 \cap J\mathbb{M}_n}.$$

Soit $\Re(\mathbb{M}_0, I) = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\oplus} I_n \mathbb{M}_0 X^n$ le $\Re(\mathcal{A}, I)$−module gradué tel que $I_n = \mathcal{A}$ $\forall n \leq 0$ et $I_n = I^n \forall n \geq 1$ où I est un sous−$\mathcal{A}$−module de $\mathcal{B}$ tel que $I\mathbb{M}_0 \subseteq \mathbb{M}_1$ et $I \subseteq J$. Alors on a :

(5.2.2.3) $$\frac{\Re(\mathbb{M}_0, I)}{(u, J)\Re(\mathbb{M}_0, I)} \simeq \underset{n}{\oplus} \frac{I_n \mathbb{M}_0}{J I_n \mathbb{M}_0 + I_{n+1} \mathbb{M}_0} = \underset{n}{\oplus} \frac{I_n \mathbb{M}_0}{J\, I_n \mathbb{M}_0} \simeq \frac{R(\mathbb{M}_0, I)}{J\, R(\mathbb{M}_0, I)}.$$

5.2.3.- Soient $\mathcal{B}$ un anneau et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}$−module. Soient $\mathcal{A}$ un sous-anneau de $\mathcal{B}$, $k \in \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Soient $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de $\mathcal{B}$ et soit I le sous−$\mathcal{A}$−module de $\mathcal{B}$ qu'ils engendrent. Posons $g(\mathcal{A}, I)$ la $^+$ quasi-graduation $(I_n)_n$ telle que $I_n = \mathcal{A}\ \forall n \leq 0,\ I_\infty = (0)$ et $I_n = I^n\ \forall n \geq 1$.

Soit $\mathcal{H} = (\mathbb{M}_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ une $g(\mathcal{A}, I)^+$−quasi-graduation du $\mathcal{B}$−module $\mathcal{M}$. Soit J un idéal de $\mathcal{A}$ tel que $J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0 \neq \mathbb{M}_0$.

On pose $\mathbb{P}_n = I_n\mathbb{M}_0\ \forall n$ et $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$.

Alors $\mathbb{P}$ est une $g(\mathcal{A}, I)^+$−quasi-graduation du $\mathcal{B}$−module $\mathcal{M}$ et l'on a :

$$\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{M}_n\ \forall n \text{ et } \mathbb{P}_0 = \mathbb{M}_0.$$

Posons $\mathbb{K}_n = \mathbb{P}_n \cap (J\ \mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k})$ et

$$R_J(\mathcal{H}, k) = \bigoplus_n \frac{\mathbb{P}_n}{\mathbb{K}_n} = \bigoplus_n \frac{I_n\mathbb{M}_0}{I_n\mathbb{M}_0 \cap (J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k})}.$$

Alors $I_n\mathbb{K}_m \subseteq \mathbb{K}_{n+m}\ \forall n$ et $\forall m$.

D'où $R_J(\mathcal{H}, k)$ est un $\bigoplus_n \dfrac{I_n}{I_n \cap (JI_n + I_{n+k})}$− module gradué.

Soit φ_k le morphisme gradué de

$\dfrac{\mathcal{A}}{J + I^k \cap \mathcal{A}}[X_1, \ldots, X_r]$ dans $\bigoplus_{n\geq 0} \dfrac{I_n}{I_n \cap (JI_n + I_{n+k})} : X_i \mapsto s_i$

dont la restriction à $\dfrac{\mathcal{A}}{J + I^k \cap \mathcal{A}}$ est l'identité

et où $s_i = a_i + (JI + I^{k+1} \cap I) \in \dfrac{I}{JI + I^{k+1} \cap I}\ \forall i = 1, \ldots, r$.

D'après 1.2.3 il existe un isomorphisme ψ_k :

$$\bigoplus_{n\geq 0} \frac{I_n}{I_n \cap (JI_n + I_{n+k})} \longrightarrow \frac{R(\mathcal{A}, I)}{R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, I)}$$

dont la restriction à $\dfrac{\mathcal{A}}{J + I^k \cap \mathcal{A}}$ est l'identité.

Posons $v_i = \psi_k(s_i)\ \forall i = 1, \ldots, r$. On a :

$$v_i = a_iX + (R(\mathcal{A}, I) \cap (u^k, J)\Re(\mathcal{A}, I))$$

Les produits sont définis comme suit : $\forall \alpha \in \mathbb{M}_0$ et $\forall b_n \in I_n$

$$\left\{\begin{array}{rcl} s_1^{i_1}\cdots s_r^{i_r} & = & \left(a_1^{i_1}\cdots a_r^{i_r} + (JI^n + I^{n+k})\cap I^n\right) \\ & & \text{où} \quad n = i_1 + \cdots i_r \\ & & \\ & & \text{et} \\ & & \\ (b_n + (JI_n + I_{n+k})\cap I^n)\,(\alpha + \mathbb{K}_0) & = & b_n\alpha + I_n\mathbb{M}_0 \cap (J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k}) \\ & \in & (I_n\mathbb{M}_0)\,/\,[I_n\mathbb{M}_0 \cap (J\mathbb{M}_n + \mathbb{M}_{n+k})] \end{array}\right.$$

D'où $s_1^{i_1}\cdots s_r^{i_r}(\alpha + \mathbb{K}_0) = a_1^{i_1}\cdots a_r^{i_r}\alpha + \mathbb{K}_n$.

On a :

$$\begin{array}{rcl} R_J(\mathcal{H}, k) & = & \dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0}[s_1, \ldots, s_r] \\ & = & \left\{ \displaystyle\sum_{i_1,\ldots,i_r} (\alpha_{i_1,\ldots,i_r} + \mathbb{K}_0) s_1^{i_1}\cdots s_r^{i_r} : \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \in \mathbb{M}_0 \right\}. \end{array}$$

Soit $\tilde{\varphi}_J(\mathbb{M}, k)$ l'unique morphisme de sous-modules gradués de $\dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0}[X_1, \ldots, X_r]$ sur $R_J(\mathcal{H}, k)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{\varphi}_J(\mathbb{M}, k)(\beta X_{i_1}\cdots X_{i_n}) & = & \beta s_{i_1}\cdots s_{i_n} \ \forall\, i_1\cdots i_n \\ & & \text{et} \\ \tilde{\varphi}_J(\mathbb{M}, k)(\beta) & = & \beta \ \ \forall \beta \in \dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0}. \end{array}\right.$$

Il existe un isomorphisme $\tilde{\psi}_k$ de $R_J(\mathcal{H}, k)$ sur $\dfrac{R(\mathbb{M}_0, I)}{R(\mathbb{M}_0, I) \cap (u^k, J)\mathbb{M}}$

$$\text{tel que} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \tilde{\psi}_k(s_i\overline{\alpha}) & = & a_i\alpha X + R(\mathbb{M}_0, I) \cap (u^k, J)\mathbb{M} \\ & & \text{et} \\ \tilde{\psi}_k(\overline{\alpha}) & = & \alpha + R(\mathbb{M}_0, I) \cap (u^k, J)\mathbb{M} \end{array}\right.$$

$\forall \overline{\alpha} = \alpha + [J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0] \in \dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_k \cap \mathbb{M}_0}$.

Posons $\tilde{\varphi}_k = \tilde{\varphi}_J(\mathbb{M}, k)$ et $\tilde{\theta}_k = \tilde{\psi}_k \circ \tilde{\varphi}_k$.

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{\mathbb{M}_0}{\mathbb{K}_0}[X_1,\ldots,X_r] \arrow[r, "\tilde{\varphi}_k"] \arrow[dr, "\tilde{\theta}_k"] & \dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0+\mathbb{M}_k\cap\mathbb{M}_0}[s_1,\ldots,s_r] \arrow[d, "\tilde{\psi}_k", "\wr"'] \\
 & \dfrac{R(\mathbb{M}_0,I)}{R(\mathbb{M}_0,I)\cap(u^k,J)\mathbb{M}} = \dfrac{\mathbb{M}_0}{\mathbb{K}_0}[v_1,\ldots,v_r]
\end{tikzcd}$$

5.2.4. THÉORÈME.– Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Les éléments $a_1,\ldots,a_r$ sont $J-$indépendants d'ordre k relativement à $\mathcal{H}$

(ii) $\tilde{\theta}_k$ est un isomorphisme de $\dfrac{\mathbb{M}_0}{\mathbb{K}_0}[X_1,\ldots,X_r]$ sur $\dfrac{R(\mathbb{M}_0,I)}{R(\mathbb{M}_0,I)\cap(u^k,J)\mathbb{M}}$

(iii) La famille $\{s_1,\ldots,s_r\}$ est algébriquement libre sur $\dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0+\mathbb{M}_k\cap\mathbb{M}_0}$

(iv) La famille $\{v_1,\ldots,v_r\}$ est algébriquement libre sur $\dfrac{\mathbb{M}_0}{J\mathbb{M}_0+\mathbb{M}_k\cap\mathbb{M}_0}$.

Preuve. $\forall\mathcal{F}=\displaystyle\sum_{i_1+\cdots+i_r=s}\lambda_{i_1,\ldots,i_r}X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r}$ où $\lambda_{i_1,\ldots,i_r}\in\mathbb{M}_0$,
soit $\overline{\mathcal{F}}(X_1,\ldots,X_r)=\displaystyle\sum_{i_1+\cdots+i_r=s}(\lambda_{i_1,\ldots,i_r}+\mathbb{K}_0)X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r}$.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

[Les éléments $a_1,\ldots,a_r$ sont J-indépendants d'ordre k relativement à $\mathcal{H}$]

$$\Leftrightarrow$$

$$\Big[\forall\mathcal{F}=\sum_{i_1+\cdots+i_r=s}\lambda_{i_1,\ldots,i_r}X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r}\ \text{où}\ \lambda_{i_1,\ldots,i_r}\in\mathbb{M}_0,\ \mathcal{F}(a_1,\ldots,a_r)\equiv 0 \pmod{J\mathbb{M}_s+\mathbb{M}_{s+k}}\Rightarrow\mathcal{F}\in(J\mathbb{M}_0+\mathbb{M}_k)[X_1,\ldots,X_r]\ \Big]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\big[\forall\mathcal{F}\in\mathbb{M}_0[X_1,\ldots,X_r]\ \text{homogène de degré}\ s,\ \mathcal{F}(a_1,\ldots,a_r)\in I_s\mathbb{M}_0\cap(J\mathbb{M}_s+\mathbb{M}_{s+k})=\mathbb{K}_s\Rightarrow\mathcal{F}\in\ \mathbb{K}_0[X_1,\ldots,X_r]\big]\ \Leftrightarrow$$

$$\big[\forall\mathcal{F}\in\mathbb{M}_0[X_1,\ldots,X_r],\ \tilde{\varphi}_k(\overline{\mathcal{F}})=0\Rightarrow\overline{\mathcal{F}}=0\big]\ \Leftrightarrow$$

References

[D $_1$] Y. Diagana, *Regular analytic independence and Extensions of Analytic spread,* Communications in Algebra, **30(6)**, (2002) 2745-2761.

[D $_2$] Y. Diagana, *Analytic spread of a pregraduation,* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Commutative Ring Theory and Applications, Volume **231** (2002) 107-116.

[D D S] Y. Diagana, H. Dichi and D. Sangaré, *Filtrations, Generalized analytic independence, Analytic spread,* Afrika Matematika, Série **3**, Vol. 4 (1994) 101-114.

[D S] H. Dichi , D. Sangaré, *Analytic spread of filtrations, asymptotic nature and some stability properties,* Comm in Algebra, 28(7) 3115-3124 (2000)

[G H N V] S. Goto, M. Hermann, K. Nishida and O. Villamayor, *On the structure of nœtherian symbolic Rees Algebras,* Manuscripta Math. **67**, (1990) 197-225

[Ha] E. Hamann, *Krull dimension and transcendence degree,* Comm. Algebra, **18** (4) (1990) 1189-1198.

[N R] D. G. Northcott and D. Rees, *Reduction of ideal in local rings,* Proc. Cambridge Philos. Soc., **50** (1954) 145-158.

[Ok] J. S. Okon, *Prime divisors, analytic spread and filtrations,* Pacific J. Math. **113** (1984) 451-462.

[Sm] W. Smoke, *Dimension and multiplicity of graded Algebras,* J. Algebra **21** (1972) 149-173.

Annexe : Articles

Annexe 1 : Réf. [D D S]

FILTRATIONS, GENERALIZED ANALYTIC INDEPENDENCE, ANALYTIC SPREAD

En collaboration avec H. Dichi et D. Sangaré

Afrika Matematika, Série **3**, Vol. **4** (1994) 101-114.

Afrika Matematika
Série 3 Vol. 4 (1994)

FILTRATIONS, GENERALIZED ANALYTIC INDEPENDENCE, ANALYTIC SPREAD

Y. Diagana et D. Sangaré
Université d'Abidjan
Département de Mathématiques
22 BP 582, Abidjan 22, Côte d'Ivoire

H. Dichi
Université Blaise Pascal
Mathématiques Pures, Complexe
Scientifique des Cézeaux
63 177 Aubière Cedex France

Abstract. — Let k be an integer ≥ 1 which may be infinite and let $f = (I_n)$, $n \in \mathbf{Z} \cup (\infty)$, be a filtration on the commutative ring A with the convention that $I_\infty = (0)$. Elements $a_1, \ldots, a_r$ of I_1 are said to be J-independent of order k with respect to f, where J is an ideal of A such that $J + \sqrt{I_1} \neq A$, if for any homogeneous polynomial $F \in A[X_1, ..., X_r]$ with $degF = s$, the relation $F(a_1, \ldots, a_r) \in JI_s + I_{s+k}$ implies that $F \in (J + I_k)A[X_1, \ldots, X_r]$. If $k = \infty$, we agree to omit the expression "of order infinity".

In particular if $(A, \mathfrak{M})$ is a nœtherian local ring, elements which are $\mathfrak{M}$-independent with respect to the I-adic filtration are those which are analytically independent in the ideal I in the sense of Northcott and Rees [N R]. In this paper we give criteria for J-independence of $a_1, \ldots, a_r$ with respect to a filtration $f = (I_n)$ in terms of the Rees rings of I and f, where I is the ideal generated by $a_1, \ldots, a_r$.

On the other hand, let $\ell_J(f)$ be the supremum of all integers r such that there exists elements $a_1, \ldots, a_r$ in J which are J-independent with respect to f and let $\lambda_J(f) = \dim \Re(A, f)/(u, J)\Re(A, f)$ and $\gamma_J(f) = \dim R(A, f)/JR(A, f)$, where $\Re(A, f) = \sum_{n \in Z} I_n X^n$ and $R(A, f) = \sum_{n \geq 0} I_n X^n$, are the Rees rings of f and where $u = X^{-1}$.

We investigate the relationship between the numbers $\ell_J(f)$, $\lambda_J(f)$, $\gamma_J(f)$ and $\tau_J(f) = trdeg_{A/J} \dfrac{R(A, f)}{JR(A, f)}$.

We show in particular that these four numbers are generally distinct and that each of them is an extension of the usual analytic spread.

0 - Introduction

This paper is part of a current trend to study in a unified manner properties of powers of ideals by means of the theory of filtrations. Our main interest here is to give a satisfactory extension to filtrations of the notion of analytic spread of ideals.

0.1 Let $(A, \mathfrak{M})$ be a nœtherian local ring, $k = A/\mathfrak{M}$, its residue field, I an ideal of A. For each integer n, $I^n/\mathfrak{M}I^n$ is a finite dimensional k-vector space. Let $\varphi_I(n)$ denote its dimension as vector space over k. It is well known that the function $n \rightarrow \varphi_I(n)$ is a polynomial function i.e that there exists a unique polynomial $P \in \mathbb{Q}[X]$ such that $P(n) = \varphi_I(n)$ for all large n. The degree of P is by definition the degree of φ_I. Following D.G. Northcott and D. Rees [N R], the analytic spread of I is the number $\lambda(I)$ defined by $\lambda(I) = 1 + deg\varphi_I$. The interest of the analytic spread comes among other things from its various interpretations. For example if k is infinite then the following are shown in [N R] :

(i) $\lambda(I) = \mu(J)$, where J is a minimal reduction of I and where $\mu(J)$ is the cardinal of a minimal set of generators of J.

(ii) $\lambda(I)$ is the maximal number of elements of I which are analytically independent in I.

Even if k is finite, it can be shown that $\lambda(I)$ is the Krull dimension of the graded ring $\sum_{n\geq 0} I^n/\mathfrak{M}I^n$ which is isomorphic to the ring $\dfrac{\Re(A,I)}{(u,\mathfrak{M})\Re(A,I)}$, where $\Re(A,I) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I^nX^n$ is the Rees ring of I and where we set $u = X^{-1}$, see for example [Sm]. Therefore $\lambda(I) = \dim \dfrac{\Re(A,I)}{(u,\mathfrak{M})\Re(A,I)}$.

For other interpretations of the analytic spread of an ideal, see [N R].

0.2 Let A be a commutative ring. A filtration on A is a family $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ of ideals of A such that $I_0 = A$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ and $I_nI_m \subseteq I_{m+n}$ for all $m, n \in \mathbb{Z}$.

For a given ideal I of A, the filtration $f_I = (I^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ where $I^n = A$ for all $n \leq 0$, is called the I-adic filtration. All the filtrations considered here are supposed to be different from the filtrations $f_A = (\cdots, A, A, \cdots)$ and $f_0 = (\cdots, A, A, (0), (0), \cdots)$.

0.3 The filtration $f = (I_n)$ is said to be strongly AP if there exists an integer $k \geq 1$ such that $I_{nk} = I_k^n$ for all n. f is called nœtherian if the Rees ring $\Re(A, f)$ is nœtherian. For a given filtration $f = (I_n)$ on the nœtherian local ring $(A, \mathfrak{M})$, having in mind the above interpretations of the analytic spread of an ideal, one may ask whether the function $n \mapsto \varphi_f(n) = \dim(I_n/\mathfrak{M}I_n)$ is polynomial in order to define an analytic spread for f. The following example shows that even for nice filtrations this may fail. Indeed let $A = k[X, Y]$, ere k is a field. Put $\mathfrak{M} = (X,Y)$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}A_{\mathfrak{M}}$. Consider the filtration $f = (I'_n)$ on $A_{\mathfrak{M}}$

$$\text{defined by} \quad I'_0 = A_{\mathfrak{M}}, I'_n = \begin{cases} \mathfrak{M}'^{n/2} & \text{if } n \text{ is even} \\ \mathfrak{M}'^{(n+1)/2} & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

en $\dfrac{I'_{2n}}{\mathfrak{M}' I'_{2n}} = \dfrac{\mathfrak{M}'^n}{\mathfrak{M}'^{n+1}}$; $\dfrac{I'_{2n+1}}{\mathfrak{M}' I'_{2n+1}} = \dfrac{\mathfrak{M}'^{n+1}}{\mathfrak{M}'^{n+2}}$

One can check that $\{X^{n-i}Y^i; 0 \le i \le n\}$ is a minimal generating set of $\mathfrak{M}'^n$, hence e dimension of the k-vector space $\dfrac{\mathfrak{M}'^n}{\mathfrak{M}'^{n+1}}$ is $n+1$ for all n. It follows that $\varphi_f(2n) = n+1$ d $\varphi_f(2n+1) = n+2$ for all n and φ_f is not a polynomial function. Remark that $I'_{2n} = I_2'^n$ r all n, which means that the filtration f is strongly AP hence nœtherian since $(A_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}')$ a nœtherian local ring.

Fortunately, the notion of analytic independence in an ideal introduced in [N R] can e extended to filtrations in a similar way which leads to the concept of analytic spread for iltrations.

Let k be an integer ≥ 1 which may be infinite and let $f = (I_n)_{n \in \mathbb{Z} \cup (\infty)}$ be a filtration n the commutative ring A, with the convention that $I_\infty = (0)$.

Elements $a_1, \ldots, a_r$ of I_1 are said to be J-independent of order k with respect to f, where J is an ideal of A such that $J + \sqrt{I_1} \neq A$, if for any homogeneous polynomial $F \in A[X_1, \ldots, X_r]$ with $degF = s$, the relation $F(a_1, \ldots, a_r) \in JI_s + I_{s+k}$ implies that $F \in (J + I_k)A[X_1, \ldots, X_r]$.

Elements which are J-independent of order k with respect to the I-adic filtration are aid to be J-independent of order k in I. If $a_1, \ldots, a_r$ are J-independent of order k in the deal $I = a_1A + \cdots + a_rA$, they are said to be J-independent of order k.

In all the above definitions it may happen that $k = \infty$. In this case we agree to omit he expression "of order infinity" and in the corresponding definitions it is understood that $I_\infty = (0)$. In particular if $(A, \mathfrak{M})$ is a nœtherian local ring, elements which are $\mathfrak{M}$-independent n an ideal I are those which are called analytically independent in I by Northcott and Rees N R].

Here we give criteria for J-independence of elements $a_1, \ldots, a_r$ with respect to a given iltration $f = (I_n)$ in terms of the Rees rings of I and f, where $I = a_1A + \cdots + a_rA$. In articular we show in section 1 that the following statements are equivalent :

(i) $a_1, \ldots, a_r$ are J-independent with respect to f.

(ii) The rings $\dfrac{A}{J}[X_1, \ldots, X_r]$ and $\dfrac{R(A,I)}{R(A,I) \cap JR(A,f)}$ are isomorphic.

(iii) If u_i denotes the image of X_i under the natural epimorphism of $\dfrac{A}{J}[X_1, \ldots, X_r]$ onto

$\dfrac{R(A,I)}{R(A,I)\cap JR(A,f)}$, then $u_1, u_2, \ldots, u_r$ are algebraically independent over A/J.
These criteria are generalizations of Proposition 2 of Barshay [Ba].

In section 2 we consider the following four numbers :

$\ell_J(f)$ = the supremum of all integers r such that there exists elements $a_1, \ldots, a_r$ in J, which are J-independent with respect to f,

$\lambda_J(f) = \dim \dfrac{\mathfrak{R}(A,f)}{(u,J)\mathfrak{R}(A,f)}$

$\gamma_J(f) = \dim \dfrac{R(A,f)}{JR(A,f)}$

$\tau_J(f) = \operatorname{tr}\deg_{A/J} \dfrac{R(A,f)}{JR(A,f)}$

We prove in particular that $\lambda_J(f) \leq \gamma_J(f)$ and that $\ell_J(f) \leq \tau_J(f)$. We give various examples to show that the numbers $\lambda_J(f)$, $\gamma_J(f)$, $\ell_J(f)$ and $\tau_J(f)$ need not be equal and need not be in an increasing order independent of J and f.

In Proposition 2.4, we prove in particular that if the filtration $f = (I_n)$ is strongly AP and if J contains I_1, then $\lambda_J(f) = \gamma_J(f)$.

In Proposition 2.12 we show that if $f = (I_n)$ is a nœtherian filtration on the nœtherian ring A and if $\mathfrak{M}$ is a maximal ideal of A which contains I_1, then $\tau_{\mathfrak{M}}(f) = \gamma_{\mathfrak{M}}(f) = \lambda_{\mathfrak{M}}(f)$.

It follows that if $(A, \mathfrak{M})$ is a nœtherian local ring and if I is a proper ideal of A, then $\tau_{\mathfrak{M}}(f_I) = \gamma_{\mathfrak{M}}(f_I) = \lambda_{\mathfrak{M}}(f_I) = \lambda(I)$, where f_I is the I-adic filtration and $\lambda(I)$ the usual analytic spread of I. If in addition $A/\mathfrak{M}$ is infinite, then $\ell_{\mathfrak{M}}(f_I)$ coincides with each of the above numbers, see Corollary 2.13.

Therefore each of the numbers $\gamma_J(f)$, $\lambda_J(f)$, $\ell_J(f)$ and $\tau_J(f)$ is an extension to filtrations of the usual analytic spread.

1- Criteria for J-independence

We begin with some easy consequences of J-independence with respect to a filtration.

1.1 Elements $a_1, \ldots, a_r$ of A are J-independent if and only if for any homogeneous polynomial $F \in A[X_1, \ldots, X_r]$, if $F(a_1, \ldots, a_r) = 0$ then $F \in JA[X_1, \ldots, X_r]$.

1.2 Proposition. — *If $a_1, \ldots, a_r$ are J-independent of order k with respect to the filtration $f = (I_n)$, then :*

(*i*) *If $r \geq 2$, then $a_1, \ldots, a_r$ belong to $J + I_k$ and $I_1 \subseteq J + I_k$.*

(*ii*) *Put $H_j = a_1A + \cdots + a_jA$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Then the sequence (H_n) is strictly increasing.*

(*iii*) *If in addition J contains I_k, then $a_1, \ldots, a_r$ are J-independent of order $k + p$ with respect to f, for all integers $p \geq 1$, hence $a_1, \ldots, a_r$ are J-independent with respect* to f.

Proof. (i) Put $F = a_i X_j - a_j X_i \in A[X_1, \ldots, X_r]$, with $i \neq j$. Then $F(a_1, \ldots, a_r) = 0 \in JI_1 + I_{1+k}$, hence $a_i \in J + I_k$ for all i. On the other hand let $b \in I_1$, $b \neq 0$. The polynomial $G = bX_1$ satisfies $G(a_1, \ldots, a_r) \in I_1(J + I_k)$ by the first part. Hence $G(a_1, \ldots, a_r) \in I_1 J + I_{1+k}$. Therefore $b \in J + I_k$.

(ii) Suppose that $a_{i+1} \in H_i = a_1 A + \cdots + a_i A$, where $i \leq r+1$. Then $a_{i+1} = b_1 a_1 + \cdots + b_i a_i$, with $b_i \in A$ for all i. Consider the polynomial $F = b_1 X_1 + \cdots + b_i X_i - X_{i+1}$. Then $F(a_1, \ldots, a_r) = 0$, hence $1 \in J + I_k$, which is absurd.

(iii) This is clear. □

1.3 Most of the graded rings that we will meet in the sequel of section 1 arise from the following more general situation.

Let Λ be a commutative monoid and let $(I_n)_{n \in \Lambda}$ and $(K_n)_{n \in \Lambda}$ be two families of subgroups of the ring A such that $1 \in I_0$ and for all n, m in Λ, $K_n \subseteq I_n$, $I_n I_m \subseteq I_{n+m}$ and $K_n I_m \subseteq K_{n+m}$.

Consider the abelian group $G = \sum_{n \in \Lambda} I_n / K_n$ (direct sum). Then G is a graded ring if we define its multiplication by linearity from the following :

For all n, m in Λ, a in I_n, b in I_m, $(a + K_n)(b + K_m) = ab + K_{n+m}$. In particular for any $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$)-graded ring $B = \sum B_n$ and for any graded ideal $L = \sum L \cap B_n$ of B, the quotient ring B/L graded by the $\dfrac{B_n}{L \cap B_n} \approx \dfrac{B_n + L}{L}$ is of the above type.

1.4

(1.4.1) In the sequel of this section $f = (I_n)$ will denote a filtration on A, $R(A, f) = \sum_{n \geq 0} I_n X^n$ and $\mathfrak{R}(A, f) = \sum_{n \in Z} I_n X^n$, the Rees rings of f. In particular we will write $R(A, I) = R(A, f_I)$; $\mathfrak{R}(A, I) = \mathfrak{R}(A, f_I)$, where f_I is the I-adic filtration for a given ideal I of A.

J will also denote an ideal of A and $k \geq 1$ an integer which may be infinite. We suppose that $J + \sqrt{I_1} \neq A$. We put $u = X^{-1}$.

If $k = \infty$, then by convention, $u^k = 0$ and $I_k = (0)$.

Remark 1.3, when applied to the Rees ring $\mathfrak{R}(A, f)$ (resp. $R(A, f)$; $R(A, I)$ with $I \subseteq I_1$) and to the graded ideal $L = (u^k, J)\mathfrak{R}(A, f) = \sum_{n \in Z} (JI_n + I_{n+k}) X^n$ (resp. $L = JR(A, f) = \sum_{n \geq 0} JI_n X^n$; $L = R(A, I) \cap (u^k, J)\mathfrak{R}(A, f) = \sum_{n \geq 0} [I^n \cap (JI_n + I_{n+k})] X^n$)

of $\mathfrak{R}(A,f)$ (resp. $R(A,f)$; $R(A,I)$), gives the following ring isomorphisms :

$$\frac{\mathfrak{R}(A,f)}{(u^k,J)\mathfrak{R}(A,f)} \approx \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{I_n}{JI_n + I_{n+k}} \approx \sum_{n>-k} \frac{I_n}{JI_n + I_{n+k}} \tag{1.4.2}$$

$$\frac{R(A,f)}{JR(A,f)} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{JI_n} \tag{1.4.3}$$

If $I \subseteq I_1$ then

$$\frac{R(A,I)}{R(A,I)\cap(u^k,J)\mathfrak{R}(A,f)} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{I^n}{I^n\cap(JI_n + I_{n+k})} \tag{1.4.4}$$

If in particular $k=\infty$, then

$$\frac{R(A,I)}{R(A,I)\cap J\mathfrak{R}(A,f)} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{I^n}{I^n\cap JI_n} \tag{1.4.5}$$

If in (1.4.2) we take $k=1$ and $f=f_I$, where I is an ideal such that $I\subseteq J$, then by (1.4.3) we have :

$$\frac{\mathfrak{R}(A,I)}{(u,J)\mathfrak{R}(A,I)} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{I^n}{JI^n} \approx \frac{R(A,I)}{JR(A,I)} \tag{1.4.6}$$

1.5 Under the hypotheses and notations of (1.4.1) let $a_1,\ldots,a_r$ be elements of I_1 and let $I=a_1A+\cdots+a_rA$. Consider the graded ring

$$G = G_f(J,k) = \sum_{n\geq 0} I^n/K_n = \frac{A}{J+I_k}[t_1,\ldots,t_r],$$

where $K_n = I^n\cap(JI_n + I_{n+k})$ and t_i is the image of a_i in I/K_1. Denote by φ_k the epimorphism of $\frac{A}{J+I_k}[X_1,\ldots,X_r]$ onto G such that $\varphi_k(X_i)=t_i$. By (1.4.4) there exists an isomorphism of graded rings ψ_k from G onto $\frac{R(A,I)}{R(A,I)\cap(u^k,J)\mathfrak{R}(A,f)}$ whose restriction to $\frac{A}{J+I_k}$ is the identity. Let $u_i=\psi_k(t_i)$. Then $\frac{R(A,I)}{R(A,I)\cap(u^k,J)\mathfrak{R}(A,f)} = \frac{A}{J+I_k}[u_1,\ldots,u_r]$.

1.6 THEOREM. — *Under hypotheses and notations of 1.5, the following statements are equivalent :*

(*i*) *$a_1,\ldots,a_r$ are J-independent of order k with respect to f.*

(*ii*) $\theta_k = \psi_k \circ \varphi_k$ *is a ring isomorphism of* $\frac{A}{J+I_k}[X_1, \ldots, X_r]$ *onto* $\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k, J)\mathfrak{R}(A,f)}$

(*iii*) $u_1, \ldots, u_r$ *are algebraically independent over* $\frac{A}{J+I_k}$.

Proof : $(i) \Rightarrow (ii)$ It suffices to show that $\mathrm{Ker}\varphi_k = (0)$. Remark that $\mathrm{Ker}\varphi_k$ is a graded ideal.

Let $F = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} (\lambda_{i_1\cdots i_r} + K_0) X_1^{i_1} \cdots X_r^{r}$ belong to $\mathrm{Ker}\varphi_k$. Then $0 = F(t_1, \ldots, t_r) = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} \lambda_{i_1\cdots i_r} a_1^{i_1} \cdots a_r^{i_r} + K_s$, which means that $\sum_{i_1+\cdots+i_r=s} \lambda_{i_1\cdots i_r} a_1^{i_1} \cdots a_r^{i_r} \in K_s \subseteq JI_s + I_{s+k}$. Hence each $\lambda_{i_1\cdots i_r} \in J + I_k = K_0$ and $F = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$

Let $F \in \frac{A}{J+I_k}[X_1, \ldots, X_r]$ such that $F(u_1, \ldots, u_r) = 0$. Then $\psi_k(F(t_1, \ldots, t_r)) = 0$. It follows that $F(t_1, \ldots, t_r) = 0$ and $F \in \mathrm{Ker}\varphi_k = (0)$

$(iii) \Rightarrow (i)$

Let F be a homogeneous polynomial of $A[X_1, \ldots, X_r]$ with $degF = s$ and such that $F(a_1, \ldots, a_r)$ belongs to $JI_s + I_{s+k}$. Suppose that $F = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} \lambda_{i_1\cdots i_r} X_1^{i_1} \cdots X_r^{r}$. Let $\overline{F} \in \frac{A}{J+I_k}[X_1, \ldots, X_r]$ the polynomial which is obtained from F by reduction modulo $J + I_k$. We have $\overline{F}(t_1 \cdots t_r) = F(a_1 \ldots a_r) + K_s = 0$ since $F'(a_1, \ldots, a_r) \in I^s$. Then $0 = \psi_k(\overline{F}(t_1, \ldots, t_r)) = \overline{F}(u_1, \ldots, u_r)$, hence $\overline{F} = 0$, which shows that each coefficient of F belongs to $J + I_k$. □

If in particular we take $k = \infty$ in the above theorem, then under the convention in (1.4.1) we obtain.

1.7 Corollary. — *Under the hypotheses and notations of 1.5 with* $k = \infty$, *the following statements are equivalent :*

(*i*) $a_1, \ldots, a_r$ *are* J*-independent with respect to* f.

(*ii*) $\theta_\infty = \psi_\infty \circ \phi_\infty$ *is an isomorphism of* $\frac{A}{J}[X_1, \ldots, X_r]$ *onto* $\frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap JR(A,f)}$

(*iii*) $u_1, \ldots, u_r$ *are algebraically independent over* A/J.

The following Corollary which follows at once from corollary 1.7 by taking the I-adic filtration f_I in place of f, is similar to Proposition 2 of [Ba].

1.8 Corollary. — *Let* $J \neq A$ *be an ideal of* A, $a_1, \ldots, a_r$ *elements of* J,

$I = a_1A + \cdots + a_rA$. Then $a_1, \ldots, a_r$ are J-independent if and only if the epimorphism $\theta_\infty : A/J[X_1, \ldots, X_r] \rightarrow \dfrac{R(A,I)}{JR(A,I)}$ is an isomorphism.

If in Theorem 1.6 we take $\mathfrak{R}(A,I)$ in place of $R(A,I)$ and if we take $k = 1$, then we obtain the following.

1.9 Corollary. — *Under the convention of 1.5, the following statements are equivalent :*

(i) $a_1, \ldots, a_r$ are J-independent of order 1 with respect to the filtration f.

(ii) $\theta_1 = \psi_1 \circ \varphi_1 : \dfrac{A}{J + I_1}[X_1, \ldots, X_r] \rightarrow \dfrac{\mathfrak{R}(A,I)}{\mathfrak{R}(A,I) \cap (u, J)\mathfrak{R}(A,f)}$ is a ring isomorphism

(iii) $u_1, \ldots, u_r$ are algebraically independent over $\dfrac{A}{J + I_1}$.

2 - Extensions to filtrations of the notion of analytic spread

2.1 Let $f = (I_n)$ be a filtration on A, $k \geq 1$ an integer which may be infinite, J an ideal of A such that $J + \sqrt{I_1} \neq A$. Let $\ell_J(f,k)$ be the supremum of all integers r such that there exists elements $a_1, \ldots, a_r$ in J which are J-independent of order k with respect to f, with the convention that $\ell_J(f,k) = 0$ if there exists no integer r with the above property.

If k is infinite we write $\ell_J(f)$ in place of $\ell_J(f, \infty)$.

The number $\ell_J(f,k)$ is called the J-analytic spread of order k of f and $\ell_J(f)$ is called the J-analytic spread of f. For the I-adic filtration $f = f_I$, we put $\ell_J(I) = \ell_J(f_I)$. This number is called the J-analytic spread of the ideal I. Note that if $(A, \mathfrak{M})$ is a nœtherian local ring and if $A/\mathfrak{M}$, is infinite, then by Theorem 3, section 4 of [N R], $\ell_{\mathfrak{M}}(I)$ is the analytic spread of I.

Following [V], we denote by sup J the maximal number of elements of J which are J-independent.

2.2 Proposition. — *Let A be a nœtherian ring, $f = (I_n)$ a filtration on A, k an integer ≥ 1, which may be infinite, J an ideal of A such that $J + \sqrt{I_1} \neq A$. Then the following hold :*

(i) $\ell_J(f,k) \leq \sup(J + I_k) \leq ht(J + I_k)$. In particular : $\ell_J(f) \leq \sup J \leq htJ$.

(ii) If in addition J contains I_k, then $\ell_J(f,k) \leq \ell_J(f,k+1) \leq \ell_J(f)$.

Proof. (i) Let $a_1, \ldots, a_r$ be elements of J which are J-independent of order k with respect to f and let $I = a_1A + \cdots + a_rA$. Then by 1.1, $a_1, \ldots, a_r$ are $J + I_k$-independent and the first inequality follows at once. The second one has been proved in [V].

(ii) It suffices to apply Proposition 1.2, (iii) □

2.3

Similarly to the I-adic case, we can associate to each pair (J, f), where J is an ideal of A and f a filtration on A, the following two numbers.

(2.3.1) $\lambda_J(f) = \dim \dfrac{\mathfrak{R}(A,f)}{(u,J)\mathfrak{R}(A,f)}$

$\gamma_J(f) = \dim \dfrac{R(A,f)}{JR(A,f)}$.

For any ideal I, we put $\lambda_J(I) = \lambda_J(f_I)$ and $\gamma_J(I) = \gamma_J(f_I)$.

(2.3.2) *The kernel of the canonical A-epimorphism h_n from $\dfrac{I_n}{JI_n}$ onto $\dfrac{I_n}{JI_n + I_{n+1}}$ is $\dfrac{JI_n + I_{n+1}}{JI_n}$. So h_n is injective if and only if I_{n+1} is contained in JI_n.*

The sequence (h_n) gives rise to a ring-epimorphism h from $\dfrac{R(A,f)}{JR(A,f)}$ onto $\dfrac{\mathfrak{R}(A,f)}{(u,J)\mathfrak{R}(A,f)}$ (see (1.4.2) and (1.4.3)). It follows that :

$$\lambda_J(f) \leq \gamma_J(f) \tag{2.3.3}$$

Remark that if I, J are ideals of A such that I is contained in J and if $f = f_I$ is the I-adic filtration then each h_n in (2.3.2) is an A-isomorphism and h is a ring isomorphism from $\dfrac{R(A,I)}{JR(A,I)}$ onto $\dfrac{\mathfrak{R}(A,I)}{(u,J)\mathfrak{R}(A,I)}$. Note that this was already shown in (1.4.6). So we have proved that :

$$\text{If } I \subseteq J, \text{ then } \lambda_J(I) = \gamma_J(I). \tag{2.3.4}$$

The following example shows that (2.3.3) may be a strict inequality.

(2.3.5) Example

Let $A = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$, $J = (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})A$, $\mathfrak{M} = (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) + XA$. Then J is a prime ideal of A and $\mathfrak{M}$ a maximal ideal.

Consider the filtration $f = (I_n)$ defined on A by $I_0 = A$, $I_n = \mathfrak{M}$ for all $n \geq 1$. Then $\dfrac{\mathfrak{R}(A,f)}{(u,J)\mathfrak{R}(A,f)} \approx \sum_n \dfrac{I_n}{JI_n + I_{n+1}} \approx \dfrac{A}{\mathfrak{M}}$. It follows that $\lambda_J(f) = 0$. On the other hand consider the graded ring.

$$S = \frac{R(A,f)}{JR(A,f)} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{JI_n} = \frac{A}{J} \oplus S_+, \text{ where } S_+ = \sum_{n\geq 1} \frac{I_n}{JI_n}$$

Since $S/S_+ \approx A/J$, then S_+ is a prime ideal of S and $\gamma_J(f) \geq \dim S/S_+ = \dim A/J = 1$. Hence $\lambda_J(f) < \gamma_J(f)$. □

However, equality holds in (2.3.3) for a large class of filtrations as shown in the following Proposition, where, for any filtration $f = (I_n)$, $f^{(p)}$ denotes the filtration (I_{np}), p being a given integer ≥ 1.

2.4 PROPOSITION. — *Let $f = (I_n)$ be a filtration on A and $J \neq A$, an ideal of A. Then*

(*i*) *For any integer $p \geq 1$,*

$$\lambda_J(f^{(p)}) = \lambda_J(f); \quad \gamma_J(f^{(p)}) = \gamma_J(f).$$

(*ii*) *In particular for any ideal I of A and for any integer $p \geq 1$,*

$$\lambda_J(I^p) = \lambda_J(I); \quad \gamma_J(I^p) = \gamma_J(I)$$

(*iii*) *If f is strongly AP, then there exists an integer $k \geq 1$ such that for all $n \geq 1$, $\lambda_J(f) = \lambda_J(I_{nk})$; $\gamma_J(f) = \gamma_J(I_{nk})$. If in addition, J contains I_1, then $\lambda_J(f) = \gamma_J(f)$.*

Proof

Consider the Rees rings $\mathfrak{R}(A, f^{(p)}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} I_{np}X^n$ and $R(A, f^{(p)}) = \sum_{n \geq 0} I_{np}X^n$.

Put $\mathfrak{R}_p(A, f) = A[u^p, I_pX^p, I_{2p}X^{2p}, \ldots]$, where $u = X^{-1}$ and $R_p(A, f) = A[I_pX^p, I_{2p}X^{2p}, \ldots]$. The mapping φ from $\mathfrak{R}(A, f^{(p)})$ into $\mathfrak{R}_p(A, f)$ such that $\varphi(\sum a_nX^n) = \sum a_nX^{np}$, where $a_n \in I_{np}$ for all n, is a ring isomorphism and $\varphi[(u, J)\mathfrak{R}(A, f^{(p)})] = (u^p, J)\mathfrak{R}_p(A, f)$. Therefore the rings $\dfrac{\mathfrak{R}(A, f^{(p)})}{(u, J)\mathfrak{R}(A, f^{(p)})}$ and $\dfrac{\mathfrak{R}_p(A, f)}{(u^p, J)\mathfrak{R}_p(A, f)}$ are isomorphic. On the other hand the ring $\mathfrak{R}(A, f)$ is integral over $\mathfrak{R}_p(A, f)$. Indeed, for any element a in I_n, $(aX^n)^p = a^pX^{np} \in \mathfrak{R}_p(A, f)$. It follows that $\dfrac{\mathfrak{R}(A, f)}{(u^p, J)\mathfrak{R}(A, f)}$ is integral over $\dfrac{\mathfrak{R}_p(A, f)}{\mathfrak{R}_p(A, f) \cap (u^p, J)\mathfrak{R}(A, f)}$ and consequently

$$\begin{aligned}\lambda_J(f) &= \dim \frac{\mathfrak{R}(A, f)}{(u, J)\mathfrak{R}(A, f)} = \dim \frac{\mathfrak{R}(A, f)}{(u^p, J)\mathfrak{R}(A, f)} \\ &= \dim \frac{\mathfrak{R}_p(A, f)}{\mathfrak{R}_p(A, f) \cap (u^p, J)\mathfrak{R}(A, f)}.\end{aligned}$$

But $\mathfrak{R}_p(A, f) \cap (u^p, J)\mathfrak{R}(A, f) = (u^p, J)\mathfrak{R}_p(A, f)$.

Therefore $\lambda_J(f) = \dim \dfrac{\mathfrak{R}_p(A, f)}{(u^p, J)\mathfrak{R}_p(A, f)} = \dim \dfrac{\mathfrak{R}(A, f^{(p)})}{(u, J)\mathfrak{R}(A, f^{(p)})} = \lambda_J(f^{(p)})$.

By similar arguments one can show that $\gamma_J(f) = \gamma_J(f^{(p)})$.

(ii) Let I be an ideal of A and let p be an integer ≥ 1. Take $f = f_I$. Then $f^{(p)} = f_{I^p}$ and by (i), $\lambda_J(f) = \lambda_J(f^{(p)})$, which means that $\lambda_J(I) = \lambda_J(I^p)$. Similarly it is shown that $\gamma_J(I) = \gamma_J(I^p)$.

(iii) Suppose that f is strongly AP. Then there exists an integer $k \geq 1$ such that $f^{(k)} = f_{I_k}$. Therefore $f^{(mk)} = f_{I_{mk}}$; hence $\lambda_J(f) = \lambda_J(f^{(mk)}) = \lambda_J(I_{mk})$ forall $m \geq 1$. Similar results are easily proved for $\gamma_J(f)$. As for the last part, suppose that in addition J contains I_1. Then by (2.3.4) and the above equalities, $\lambda_J(f) = \lambda_J(I_k) = \gamma_J(I_k) = \gamma_J(f)$.

2.5 Theorem 1.6 suggests that there may exist a link between the J-analytic spread $\ell_J(f,k)$ of the filtration f and some suitable transcendence degree. Let us recall first the notion of generalized transcendence degree.

Definition

Let E be a commutative A-algebra which contains the ring A. We define the transcendence degree of E over A to be the integer d such that there exists d elements in E algebraically independent over A and every subset of E with $d+1$ elements is algebraically dependent over A. The transcendence degree of E over A is denoted by $trdeg_A E$.

If there exists no integer d satisfying the above property, we set $trdeg_A E = \infty$. If E and A are fields, we recover the usual transcendence degree. But if A and E are not integral domains, some classical properties of the transcendence degree may not hold. Nevertheless the following two properties that we need here are true (see [H] for more information).

(2.5.1) If E and F are algebras containing A such that there exists an algebra-monomorphism from E into F, then $trdeg_A E \leq trdeg_A F$.

(2.5.2) (Lemma 3 of [H]). If k is a field and if E is a k-algebra which is finitely generated over k, then $trdeg_k E = \dim E$, where $\dim E$ is the Krull dimension of E.

2.6 Proposition. — *Let $f = (I_n)$ be a filtration on A, $k \geq 1$ an integer which may be infinite, J an ideal of A such that $J + \sqrt{I_1} \neq A$. Then $\ell_J(f,k) \leq trdeg_{A/J+I_k}(R(A,f)/R(A,f) \cap (u^k, J)\mathfrak{R}(A,f))$.*

Proof. Let $a_1, \ldots, a_r$ be elements of J which are J-independent of order k with respect to f. Take $I = a_1A + \cdots + a_rA$. Put

$$C = \frac{R(A,I)}{R(A,I) \cap (u^k, J)\mathfrak{R}(A,f)} \text{ and } D = \frac{R(A,f)}{R(A,f) \cap (u^k, J)\mathfrak{R}(A,f)}.$$

C can be considered as a subring of D. On the other hand since D is a graded ring with $\frac{A}{J+I_k}$ as set of homogeneous elements of degree zero, D is an $\frac{A}{J+I_k}$-algebra containing $\frac{A}{J+I_k}$. Then by Theorem 1.6, (iii) and by (2.5.1), $r \leq trdeg_{A/J+I_k} C \leq trdeg_{A/J+I_k} D$. The Proposition follows. □

Put $\tau_J(f) = trdeg_{A/J} \frac{R(A,f)}{JR(A,f)}$ and for any ideal I of A, $\tau_J(I) = \tau_J(f_I)$. Then we have :

2.7 Corollary. — *For any filtration f on A and for any proper ideal J of A, $\ell_J(f) \leq \tau_J(f)$. In particular for any proper ideal I of A, $\ell_J(I) \leq \tau_J(I)$.*

Proof. This follows at once from 2.6 where it suffices to take $k = \infty$. For the last part, take $f = f_I$ in the first part. □

The following example shows that inequality in 2.7 may bestrict.

2.8 Example : Let $A = k[X]$, where k is a field. Take $\mathfrak{M} = XA$ and $J = \mathfrak{M}^3$. Consider the $\mathfrak{M}$-adic filtration $f = f_{\mathfrak{M}}$. Then $\ell_{\mathfrak{M}}(f) < \tau_{\mathfrak{M}}(f)$.

Indeed $\frac{R(A,f)}{JR(A,f)}$ is isomorphic to $\frac{A}{\mathfrak{M}^3}[t]$, where $t = X + \mathfrak{M}^4 \cdot t$ is transcendental over $A/\mathfrak{M}^3$ as easily shown. Hence $\tau_J(f) \geq 1$. On the other hand $\ell_J(f) = 0$. Indeed let $\alpha(X)$ be an element of J. Then $\alpha(X) = \beta(X)X^3$, where $\beta(X) \in A$. Consider the homogeneous polynomial of $A[Y]$, $P(Y) = XY^s$, where s is an integer ≥ 1. Its coefficient X does not belong to J. But $P(\alpha(X)) = \beta(X)^s X^{3s+1}$, which belongs to JI_s. Hence no element of J is J-independent with respect to f. Therefore $\ell_J(f) = 0$. □

So far we have shown that $\lambda_J(f) \leq \gamma_J(f)$ and that $\ell_J(f) \leq \tau_J(f)$. One may ask if these four numbers are in an increasing order, which holds for example if $\gamma_J(f) \leq \ell_J(f)$ or if $\tau_J(f) \leq \lambda_J(f)$. The following examples give negative answers to this question.

2.9 Example with $\ell_J(f) < \tau_J(f) = \lambda_J(f) = \gamma_J(f)$

Let $A = k[X]$, where k is a field, $J = XA$, $f = (A, J, J, J^2, J^2, \ldots, J^n, J^n, \ldots)$. The Rees ring of f is $R(A,f) = k[X, XY, XY^2]$, hence f is nœtherian. $\dfrac{R(A,f)}{JR(A,f)}$ is isomorphic to $\frac{A}{J}[v,w]$, where v (resp. w) is the image of X in A_1 (resp. A_2), A_n being the n-th homogeneous component of $\dfrac{R(A,f)}{JR(A,f)}$.

We have $v^2 = 0$, hence v is algebraic over $\frac{A}{J}$. But it is easy to show that w is transcendental over $\frac{A}{J}$. It follows that $\tau_J(f) \geq 1$. More precisely $\tau_J(f) = 1$. Indeed $k[v,w] \approx \frac{k[X,Y]}{J'}$, where J' is an ideal of $k[X,Y]$ which contains X^2. Therefore $\dim k[v,w] \leq 1$. The conclusion follows, since by [H], Lemma 3, $\dim k[v,w] = trdeg_k k[v,w]$.

Let us show that $\ell_J(f) = 0$. Let $\alpha(X) \in J$. $\alpha(X) = \beta(X)X$, where $\beta(X) \in A$. Take $P(Y) = Y^{2s} \in A[Y]$, where s is an integer ≥ 1. Then $P(\alpha(X))$ belongs to $JI_{2s} = X^{s+1}A$. But $P(Y) \notin JA[Y]$. Therefore $\alpha(X)$ is not J-independent with respect to f. Hence $\ell_J(f) = 0$.

Remark that by Proposition 2.12 and Proposition 2.4, (iii), $\tau_J(f) = \lambda_J(f) = \gamma_J(f)$.

2.10 Example with $\lambda_J(f) < \tau_J(f)$

Let $A = \mathbf{Z}$, $J = (0)$. Consider the filtration $f = (I_n)$, where $I_0 = A$ and $_n = 2\mathbf{Z}$ for all $n \geq 1$. Then $\lambda_J(f) = \dim \dfrac{\mathfrak{R}(A,f)}{(u,J)\mathfrak{R}(A,f)} = \dim \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = 0$, $_J(f) = trdeg_{\mathbf{Z}} R(A,f) = 1$. Indeed $2X \in R(A,f)$ and $2X$ is transcendental over . On the other hand $\mathbf{Z} \subseteq R(A,f) \subseteq \mathbf{Z}[X]$. $R(A,f)$ is an integral domain. Therefore $rdeg_{\mathbf{Z}} R(A,f) \leq 1$. The conclusion follows.

2.11 Example with $\tau_J(f) < \lambda_J(f) = \gamma_J(f)$.

Let $A = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}[X]$, $J = \frac{4\mathbf{Z}}{8\mathbf{Z}}A$, $f = f_J$ the J-adic filtration. Note that $J^n = 0$ for ll $n \geq 2$. Hence $\dfrac{R(A,f)}{JR(A,f)} \sim \dfrac{A}{J} \oplus J = B$. Let $K = \frac{2\mathbf{Z}}{8\mathbf{Z}}A$ and $J' = \frac{K}{J} \oplus J$. Then $\frac{B}{J'} \approx \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$, hence J' is a prime ideal of B and $\dim \frac{B}{J'} = 1$. Therefore $\dim B \geq 1$, i.e. $_J(f) = \gamma_J(f) \geq 1$. Let $\alpha \in B$. Then $\alpha = v + w$, $v \in \frac{A}{J}$, $w \in J$. Then $\alpha^2 - 2v\alpha + v^2 = 0$, ence α is integral over A/J. Therefore B is integral over A/J and $0 = trdeg_{A/J} B = \tau_J(f)$. □

Under reasonable conditions, the three numbers $\tau_J(f)$, $\gamma_J(f)$ and $\lambda_J(f)$ coincide as hown in the following.

2.12 PROPOSITION. — *Let $f = (I_n)$ be a nœtherian filtration on the nœtherian ring A nd let $\mathfrak{M}$ be a maximal ideal of A. Then $\tau_{\mathfrak{M}}(f) = \gamma_{\mathfrak{M}}(f)$. In addition, if $\mathfrak{M}$ contains I_1, hen $\tau_{\mathfrak{M}}(f) = \gamma_{\mathfrak{M}}(f) = \lambda_{\mathfrak{M}}(f)$.*

Proof. Since f is nœtherian, $\dfrac{R(A,f)}{\mathfrak{M}R(A,f)}$ is a nœtherian graded ring, hence a finitely enerated $A/\mathfrak{M}$-algebra which contains $A/\mathfrak{M}$. Then by (2.5.2) $\tau_{\mathfrak{M}}(f) = \gamma_{\mathfrak{M}}(f)$.

Suppose, in addition, that $\mathfrak{M}$ contains I_1. Since f is nœtherian, it is strongly AP. Then, y Proposition 2.4 (iii), $\lambda_{\mathfrak{M}}(f) = \gamma_{\mathfrak{M}}(f) = \tau_{\mathfrak{M}}(f)$. □

To close this paper we will show in the following Corollary that each of the four numbers ntroduced in Section 2 is indeed an extension of the usual analytic spread of ideals.

2.13 COROLLARY. — *Let $(A, \mathfrak{M})$ be a nœtherian local ring and let I be a proper ideal f A. Then :*

(i) $\ell_{\mathfrak{M}}(I) \leq \tau_{\mathfrak{M}}(I) = \gamma_{\mathfrak{M}}(I) = \lambda_{\mathfrak{M}}(I) = \lambda(I)$, where $\lambda(I)$ is the analytic spread of I.

(ii) In addition if $A/\mathfrak{M}$ is infinite, then the inequality in (i) is indeed an equality.

Proof. (i) Follows from Corollary 2.7, Proposition 2.12 and from 0.1.

(ii) If $A/\mathfrak{M}$ is infinite, then $\ell_{\mathfrak{M}}(I) = \lambda(I)$ by [N R] 4, Theorem 3 and the proof is omplete.

REFERENCES

[A] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company.

[Ba] J. Barshay, "Generalized analytic independence", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 58 (1976), 32–36.

[Bo] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Chapitres 1 à 9, Masson, Paris.

[D. S.] H. Dichi and D. Sangaré, "Filtrations, Closure operations, analytic spread", (to appear).

[H] E. Hamann, "Krull dimension and transcendence degree", *Comm. Algebra*, 18 (4) (1990) 1189–1198.

[N R] D. G. Northcott and D. Rees, "Reductions of ideals in local rings", *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 50 (1954) 145–158.

[Sm] W. Smoke, "Dimension and multiplicity of graded Algebras", *J. Algebra*, 21, 149–173 (1972).

[V] G. Valla, "Elementi indipendenti rispetto ad un ideale", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 44 (1970) 339–354.

Annexe 2 : Réf. [D_1]

Regular analytic independence and Extensions of Analytic spread

Communications in Algebra, **30(6)**, (2002) 2745-2761.

COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 30(6), 2745–2761 (2002)

REGULAR ANALYTIC INDEPENDENCE AND EXTENSIONS OF ANALYTIC SPREAD

Youssouf M. Diagana

Université d'Abobo-Adjamé, *UFR–SFA*, 03 BP 1644
Abidjan 03, Côte d'Ivoire, France
Fax: (225) 20 37 81 18; E-mail: y_diagana@yahoo.com

ABSTRACT

The notion of Analytic Spread can be extended to filtrations by $\ell_J(f,k)$ which denotes the maximum number of elements of J to be J−independent of order k with respect to a filtration f. Other extensions that we give in this paper are denoted by $\gamma_J(f,k)$ and $\tau_J(f,k)$. We show that if f is an adic filtration and $(A,\mathcal{M})$ a local ring with infinite residue field, then $\ell_{\mathcal{M}}(f,k)$, $\gamma_{\mathcal{M}}(f,k)$ and $\tau_{\mathcal{M}}(f,k)$ are equal; but if f is not adic $\ell(f,k)$ may be different from the other extensions, even if f is noetherian and A a local ring with infinite residue field. We introduce a weak notion, called regular analytic independence to which corresponds an extension denoted by $\ell^a_J(f,k)$ and we show that if $f=(I_n)$ is a noetherian filtration with rank m and $\mathcal{M}$ is a maximal ideal containing $\sqrt{f}$ with $A/\mathcal{M}$ infinite, then for all $q\geq 1$ we have:

 www.dekker.com

$$\ell_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \ell_{\mathcal{M}}(f^{(n!)},k) \leq \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(f) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I_{mq}) = \gamma_{\mathcal{M}}(f,k)$$
$$= \tau_{\mathcal{M}}(f,k).$$

We also prove that in the general case, if J is maximal or contains I_k , then

$$\ell^a_J(f,k) = \lim_{n\to+\infty} \ell_J(f^{(n!)},k).$$

0. INTRODUCTION

The purpose of this paper is to introduce a weak notion of generalized analytic independence of filtrations and to give from that an extension of analytic spread that we compare with an extension of analytic spread of filtrations which is studied by J. S. Okon in [Ok]. In particular, we will be interested in the case of the noetherian filtrations.

All rings are assumed to be commutative and unitary.

0.1. Let A be a ring, $k \in \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, $f = (I_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ a filtration and J an ideal of A. The elements $a_1, \ldots, a_r$ of I_1 are said to be J–independent of order k with respect to f if for any homogeneous polynomial $F[X_1, \ldots, X_r]$, with coefficients in A and $\deg F = s$, the relation $F(a_1, \ldots, a_r) \in JI_s + I_{s+k}$ implies that F has its coefficients in $J + I_k$. The elements $a_1, \ldots, a_r$ are said to be regular J–independent of order k with respect to f if there exists $p \in \mathbb{N}^*$ such that $J + I_{pk} \neq A$ and $a_1, \ldots, a_r$ are J–independent of order k with respect to $f^{(p)} = (I_{pn})_n$.

We adopt the definitions of the particular cases as in [D D S] and we put:

$\ell_J(f,k) = \sup\{r \in \mathbb{N} / \exists\, a_1, \ldots, a_r \in J,\ J$–independent of order k with respect to $f\}$,

$\ell^a_J(f,k) = \sup\{r \in \mathbb{N} / \exists\, a_1, \ldots, a_r \in J,$ regular J–independent of order k with respect to $f\}$,

$$\ell(f,k) = \sup\{\ell_{\mathcal{M}}(f,k) : \mathcal{M} \in \text{ Max } A \quad \text{and} \quad \mathcal{M} \supseteq \sqrt{f}\} \text{ and}$$

$$\ell^a(f,k) = \sup\{\ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) : \mathcal{M} \in \text{ Max } A \quad \text{and} \quad \mathcal{M} \supseteq \sqrt{f}\}.$$

We will prove that if $(A, \mathcal{M})$ is a local ring with infinite residue field, then for any ideal I and for all $q \in \mathbb{N}^*$, we have:

$$\ell_{\mathcal{M}}(I,k) = \ell_{\mathcal{M}}(I) = \ell^a(I,k) = \ell^a(I^q).$$

When f isn't an adic filtration, we prove that $\ell(f,k)$ is generally different from $\ell^a(f,k)$, even if f is noetherian and A is a local ring with infinite residue field.

0.2. Let $f=(I_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ be a filtration of A, $k\in\overline{\mathbb{N}^*}$ and J an ideal of A such that $J+I_k\neq A$. We put:

$$R(A,f)=\sum_{n\in\mathbb{N}} I_nX^n \quad\text{and}\quad \Re(A,f)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} I_nX^n$$

$$\gamma_J(f,k)=\dim\frac{R(A,f)}{R(A,f)\cap(u^k,J)\Re(A,f)}\quad\text{and}$$

$$\tau_J(f,k)=\operatorname{tr}\deg_{\frac{A}{J+I_k}}\frac{R(A,f)}{R(A,f)\cap(u^k,J)\Re(A,f)}$$

where $u=\frac{1}{X}$ (by convention that $u^{+\infty}=0$), tr $\deg_{\frac{A}{J+I_k}} B$ is the transcendence degree of B over $\frac{A}{J+I_k}$ i.e., the maximum number of elements of B which are algebraically independent over $\frac{A}{J+I_k}$ (See [Ha, § 1]) and dim denotes the Krull dimension. Furthermore, we set:

$$\gamma_J(f)=\gamma_J(f,+\infty),\ \ \tau_J(f)=\tau_J(f,+\infty),$$

$$\gamma(f,k)=\sup\{\gamma_{\mathcal{M}}(f,k):\mathcal{M}\text{ maximal over}\sqrt{f}\}\quad\text{and}$$

$$\tau(f,k)=\sup\{\tau_{\mathcal{M}}(f,k):\mathcal{M}\text{ maximal over}\sqrt{f}\}.$$

0.3. We will prove the following result in (2.7.3):

If f is a noetherian filtration with rank m i.e., m is the smallest positive integer such that $I_{mn}=I_m^n$ for all n, then for any positive integer p which is a multiple of m, for any maximal ideal $\mathcal{M}$ containing $\sqrt{f}$ and for all $q\in\mathbb{N}^*$ we have:

(i) $\ell_{\mathcal{M}}(f,k)\le\ell^a_{\mathcal{M}}(f,k)=\ell^a_{\mathcal{M}}(f)=\ell^a_{\mathcal{M}}(I_{pq})\le\gamma_{\mathcal{M}}(f,k)=\gamma_{\mathcal{M}}(I_{pq})=\tau_{\mathcal{M}}(f,k)$.

(ii) If $A/\mathcal{M}$ is infinite, then:

a) $\ell_{\mathcal{M}}(f,k)\le\ell^a_{\mathcal{M}}(f,k)=\ell^a_{\mathcal{M}}(f)=\ell^a_{\mathcal{M}}(I_{pq})=\gamma_{\mathcal{M}}(f,k)=\tau_{\mathcal{M}}(f,k)$.

b) For any ideal $I\subseteq\mathcal{M}$,
$\ell_{\mathcal{M}}(I,k)=\ell^a_{\mathcal{M}}(I)=\ell^a_{\mathcal{M}}(I^q)=\gamma_{\mathcal{M}}(I,k)=\tau_{\mathcal{M}}(I,k)$.

Examples are given proving that the inequality of (ii)-a) can be strict.

1. REGULAR ANALYTIC INDEPENDENCE AND ANALYTIC SPREAD

Definitions 1.1.

(**1.1.1**) *The number* $\ell_J^a(f,k)$ *is called the* **regular** J**-analytic spread of order** k **of** f.

(**1.1.2**) *The number* $\ell^a(f,k)$ *is called the* **regular analytic spread of order** k **of** f.

Theorem 1.2. *Let A be a ring, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ and $f = (I_n)$ a filtration of A. Let J be a proper ideal of A which contains I_k.*

(i) *For all $n, p \in \mathbb{N}^*$,*

$$\ell_J(f,k) \le \ell_J(f^{(n)},k) \le \ell_J(f^{(pn)},k) \le \ell_J^a(f,k).$$

(ii) *If A is a noetherian ring, then:*

a) *There exists $p \in \mathbb{N}^*$ such that for all $n \in \mathbb{N}^*$*

$$\ell_J^a(f,k) = \ell_J(f^{(pn)},k)$$

b) *For all $p \in \mathbb{N}^*$*

$$\ell_J^a(f,k) = \sup\{\ell_J(f^{(n)},k) : n \in \mathbb{N}^*\} = \ell_J^a(f^{(p)},k)$$

c) *The sequence $n \mapsto \ell_J(f^{(n!)},k)$ is increasing and eventually stationary with limit $\ell_J^a(f,k)$.*

Proof. (i)

If $a_1,\dots,a_r$ are J–independent of order k with respect to f, then they are elements of I_1 and it is easy to see that if J contains I_k, then the elements $a_1^n,\dots,a_r^n$ of I_n are J–independent of order k with respect to $f^{(n)}$. Therefore,

$$\ell_J(f,k) \le \ell_J(f^{(n)},k) \quad \text{and} \quad \ell_J(f^{(n)},k) \le \ell_J([f^{(n)}]^{(p)},k) = \ell_J(f^{(pn)},k).$$

By definition, for all $q \in \mathbb{N}^*$, $\ell_J(f^{(q)},k) \le \ell_J^a(f,k)$; so *(i)* is proved.

(ii)

a) If the elements $a_1,\dots,a_r$ are J–independent of order k with respect to $f^{(p)}$, then they are J–independent in the ideal $I = (a_1,\dots,a_r)$, i.e., J–independent (with respect to f_I). Thus we have:

$$\ell_J^a(f,k) \le \sup\{r \in \mathbb{N} / \exists\, a_1,\dots,a_r \in J,\ J-\text{independent}\} \le \operatorname{ht} J.$$

Hence if A is noetherian, then $\ell_J^a(f,k)$ is finite. Since the numbers $\ell_J(f^{(n)},k)$ are integers, there exists $p \in \mathbb{N}^*$ such that
$\ell_J^a(f,k) = \ell_J(f^{(p)},k)$. By (i) one has:
$\ell_J(f^{(p)},k) \leq \ell_J(f^{(np)},k) \leq \ell_J^a(f,k)$. Therefore we have the equalities.

b) This is a consequence of (i) and (ii)-a) and equalities: $f^{(np)} = [f^{(p)}]^{(n)}$.

c) One deduces from (i) that

$$\ell_J(f^{(n!)},k) \leq \ell_J(f^{((n+1)!)},k) = \ell_J([f^{(n!)}]^{(n+1)},k) \leq \ell_J^a(f,k).$$

Hence, the sequence $n \mapsto \ell_J(f^{(n!)},k)$ is increasing and upper bounded with positive integer values. Thus, it is eventually stationary.

Let $p \in \mathbb{N}^*$ be such that $\ell_J^a(f,k) = \ell_J(f^{(pm)},k)$ for all $m \in \mathbb{N}^*$.
When $n > p$, $n!$ is a multiple of p, hence $\ell_J^a(f,k) = \ell_J(f^{(n!)},k)$.

Corollary 1.3. *Let A be a ring and $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $f = (I_n)$ a noetherian filtration of A with rank m and J a proper ideal of A which contains I_k.*

(i) *For all $n \in \mathbb{N}^*$, $\ell_J^a(f,k) = \ell_J^a(I_{mn},k)$*
(ii) *There exists $p \in \mathbb{N}^*$ which is a multiple of m, such that*

$$\ell_J^a(f,k) = \ell_J(I_{pn},k) \quad \textit{for all } n \in \mathbb{N}^*$$

(iii) $\ell_J^a(f,k) = \sup\{\ell_J(I_{mn},k) : n \in \mathbb{N}^*\}$
(iv) *The sequence $n \mapsto \ell_J(I_{m(n!)},k)$ is increasing and eventually stationary with limit $\ell_J^a(f,k)$*
(v) *For large n the sequence $n \mapsto \ell_J(I_{n!},k)$ is stationary and its value is $\ell_J^a(f,k)$.*

Proof. (i)

Theorem (1.2)-(ii)-b) implies that $\ell_J^a(f,k) = \ell_J^a(f^{(mn)},k) = \ell_J^a(I_{mn},k)$.

(ii)

From Theorem (1.2)-(ii)-a), there exists $p \in \mathbb{N}^*$ such that

$$\ell_J^a(f,k) = \ell_J(I_{\mathrm{mpn}},k) = \ell_J(I_{p'n},k) \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

where $p' = mp$ and $p \neq 0$.

(iii)

This is clear from Theorem (1.2)-(ii)-b).

(iv) We have:

$\ell_J(I_{m(n!)},k) = \ell_J(f^{(m(n!))},k) \leq \ell_J([f^{(m(n!))}]^{(n+1)},k) = \ell_J(f^{(m(n+1)!)},k) = \ell_J(I_{m((n+1)!)},k) \leq \ell_J^a(f,k)$. We conclude with Theorem (1.2)-(ii)-a).

(v)

Let p be a positive integer which satisfies the relation:

$$\ell_J^a(f,k) = \ell_J(I_{pq},k) \quad \text{for all} \quad q \in \mathbb{N}^*.$$

If $n > p$, then $n!$ is a multiple of p. So, $\ell_J^a(f,k) = \ell_J(I_{n!},k)$ for large n.

Corollary 1.4. *Let A be a ring and $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. If $f = (I_n)$ is a noetherian filtration of A, then we have:*

(i) *For any ideal J which contains I_k, $\ell_J^a(f,k) = \ell_J^a(f)$.*
In particular, for any ideal I which is contained in J,

$$\ell_J(I,k) = \ell_J(I) \leq \ell_J^a(I,k) = \ell_J^a(I).$$

(ii) $\ell^a(f,k) = \ell^a(f)$.

Proof. (i)

For any ideal I of A which is contained in J, one has $JI^s + I^{s+k} = JI^s$ and $J + I^k = J$. Therefore elements are J–independent of order k with respect to f_I if and only if they are J–independent (of order $+\infty$) with respect to f_I. Hence $\ell_J(I,k) = \ell_J(I)$.

Since $\ell_J(f,k) \leq \ell_J^a(f,k)$ for any filtration f, we have:

$$\ell_J(I,k) = \ell_J(I) \leq \ell_J^a(I,k).$$

On the other hand, by Corollary (1.3), let $p \in \mathbb{N}^*$ be such that $\ell_J^a(f,k) = \ell_J(I_{pn},k)$ and $q \in \mathbb{N}^*$ be such that $\ell_J^a(f) = \ell_J(I_{qn})$ for all $n \in \mathbb{N}^*$. Then:

$$\ell_J^a(f,k) = \ell_J(I_{pq},k) = \ell_J^a(f).$$

(ii) From (i) we deduce that

$$\begin{aligned} \ell^a(f,k) &= \sup\{\ell_{\mathcal{M}}^a(f,k) : \mathcal{M} \quad \text{maximal over } \sqrt{f}\} \\ &= \sup\{\ell_{\mathcal{M}}^a(f) : \mathcal{M} \quad \text{maximal over } \sqrt{f}\} = \ell^a(f). \end{aligned}$$

1.5. Localization

Notations 1.5.1. Let $f = (I_n)$ be a filtration of A and P a prime ideal of A. We denote by fA_P the filtration of A_P giving by $(I_nA_P)_n$ where A_P is the localization of A at P i.e., $A_P = \{\frac{a}{s} : a \in A \text{ and } s \in \mathcal{S}\}$ where $\mathcal{S} = A - P$.

Theorem 1.5.2. *Let $a_1, \dots, a_r$ be elements of A and $t_1, \dots, t_r$ elements of S. If P is a prime ideal containing I_k, then the following statements are equivalent:*

(i) *The elements $a_1, \dots, a_r$ are P–independent (resp. regular P–independent) of order k with respect to f.*
(ii) *The elements $\frac{a_1}{t_1}, \dots, \frac{a_r}{t_r}$ of A_P are PA_P–independent (resp. regular PA_P–independent) of order k with respect to fA_P.*
(iii) *The elements $t_1a_1, \dots, t_ra_r$ of A are P–independent (resp. regular P–independent) of order k with respect to f.*

Proof.

We give only the proof for the J–independence, the proof for the regular J-independence is similar.

(i) $\Longrightarrow$ *(ii)*

Let $a_1, \dots, a_r$ be P–independent of order k with respect to f.

For a homogeneous polynomial $\mathcal{F} = \sum_{i_1,\dots,i_r} \lambda_{i_1,\dots,i_r} X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}$ of degree s with coefficients in A_P let $\alpha_{i_1,\dots,i_r} \in A$ and $t_{i_1,\dots,i_r} \in \mathcal{S}$ be such that

$$\lambda_{i_1,\dots,i_r} = \frac{\alpha_{i_1,\dots,i_r}}{t_{i_1,\dots,i_r}}.$$

$$\text{If} \quad \mathcal{F}\left(\frac{a_1}{t_1}, \dots, \frac{a_r}{t_r}\right) \equiv 0 \pmod{PI_sA_P + I_{s+k}A_P},$$

$$\text{then} \sum_{i_1,\dots,i_r} \lambda_{i_1,\dots,i_r} \left(\frac{a_1}{t_1}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{a_r}{t_r}\right)^{i_r} \in (PI_s + I_{s+k})A_P$$

and there exist $s_{i_1,\dots,i_r} \in \mathcal{S}$ such that

$$\sum_{i_1,\dots,i_r} \alpha_{i_1,\dots,i_r} s_{i_1,\dots,i_r} (a_1)^{i_1} \cdots (a_r)^{i_r} \in PI_s + I_{s+k}.$$

Therefore $\alpha_{i_1,\dots,i_r} s_{i_1,\dots,i_r} \in P + I_k = P$.

Since $s_{i_1,\dots,i_r} \notin P$ which is a prime ideal, one has $\alpha_{i_1,\dots,i_r} \in P$ and $\lambda_{i_1,\dots,i_r} \in PA_P = PA_P + I_kA_P$, which implies *(ii)*.

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)*

Suppose that the elements $\frac{a_1}{t_1}, \dots, \frac{a_r}{t_r}$ are PA_P–independent of order k with respect to fA_P.

For any homogeneous polynomial $\mathcal{F} = \sum_{i_1,\dots,i_r} \alpha_{i_1,\dots,i_r} X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}$ of degree s with coefficients in A, if $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_r) \equiv 0 \pmod{PI_s + I_{s+k}}$, then $\sum_{i_1,\dots,i_r} \alpha_{i_1,\dots,i_r} t_1^{i_1} \cdots t_r^{i_r} (\frac{a_1}{t_1})^{i_1} \cdots (\frac{a_r}{t_r})^{i_r} = \sum_{i_1,\dots,i_r} \alpha_{i_1,\dots,i_r} (t_1 \frac{a_1}{t_1})^{i_1} \cdots (t_r \frac{a_r}{t_r})^{i_r} =$

$\frac{\sum_{i_1,\dots,i_r}\alpha_{i_1,\dots,i_r}a_1^{i_1}\cdots a_r^{i_r}}{1} \in (PI_s + I_{s+k})A_P$. Thus $\frac{\alpha_{i_1,\dots,i_r}t_1^{i_1}\cdots t_r^{i_r}}{1} \in PA_P$ and there exist $s_{i_1,\dots,i_r} \in S$ such that $s_{i_1,\dots,i_r}\alpha_{i_1,\dots,i_r}t_1^{i_1}\cdots t_r^{i_r} \in P$. Since $s_{i_1,\dots,i_r}t_1^{i_1}\cdots t_r^{i_r} \notin P$ one has $\alpha_{i_1,\dots,i_r} \in P$ and we have proved *(i)*.

(iii) $\Longleftrightarrow$ *(ii)*

Since $(i) \Longleftrightarrow (ii)$, the elements $t_1a_1,\dots,t_ra_r$ are P–independent of order k with respect to f if and only if the elements $\frac{a_1}{t_1} = \frac{t_1a_1}{t_1^2},\dots,\frac{a_r}{t_r} = \frac{t_ra_r}{t_r^2}$ are PA_P–independent of order k with respect to fA_P.

Corollary 1.5.3. *With notations of (1.5.1) if P contains I_k, then we have*

$$\ell_P(f,k) = \ell_{PA_P}(fA_P,k) \quad \textit{and} \quad \ell_P^a(f,k) = \ell_{PA_P}^a(fA_P,k).$$

2. DIMENSION, TRANSCENDENCE DEGREE AND ANALYTIC SPREAD

Notations 2.1.
Next, the notations and hypotheses are the same as in (0.2).

Remark 2.2.

a) $\frac{R(A,f)}{R(A,f)\cap(u^k,J)\Re(A,f)}$ is isomorphic to $\sum_{n\geq 0}\frac{I_n}{I_n\cap(JI_n+I_{n+k})}$.

b) For $k \neq +\infty$, if $\mathcal{M}$ does not contain $\sqrt{f}$, then $\mathcal{M}\not\supseteq I_k$ and $\mathcal{M}I_n + I_{n+k} \supseteq (\mathcal{M}+I_k)I_n = I_n$. Therefore

$$\frac{R(A,f)}{R(A,f)\cap(u^k,\mathcal{M})\Re(A,f)} = (0). \quad \text{Hence we have:}$$

$\gamma(f,k) = \sup\{\gamma_{\mathcal{M}}(f,k) : \mathcal{M} \in \mathrm{Max}A\}$ and
$\tau(f,k) = \sup\{\tau_{\mathcal{M}}(f,k) : \mathcal{M} \in \mathrm{Max}A\}$. $\gamma(f,1)$ is the extension of analytic spread studied by J. S. Okon in [Ok].

c) If J contains I_k, then for $p \geq 1, \ell_J(f,k) \leq \ell_J(f^{(p)},k)$; consequently $\ell(f,k) \leq \ell(f^{(p)},k)$.

d) For $k \neq +\infty$, if $\mathcal{M}$ does not contain I_k, then $\ell_{\mathcal{M}}(f,k)$ and $\ell_{\mathcal{M}}^a(f,k)$ are equal to zero.

Thus

$$\ell(f,k) = \sup\{\ell_{\mathcal{M}}(f,k) : \mathcal{M} \in \mathrm{Max}A\} \leq \ell^a(f,k) = \sup\{\ell_{\mathcal{M}}^a(f,k) : \mathcal{M} \in \mathrm{Max}A\}.$$

Propositon 2.3. *Let p and $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ and $f = (I_n)$ a filtration of A. If J contains I_k, then we have:*

$$\gamma_J(f,k) \leq \gamma_J(f,k+p) \leq \gamma_J(f) \quad \textit{and} \quad \tau_J(f,k) \leq \tau_J(f,k+p) \leq \tau_J(f).$$

Proof: Let $p \in \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$ and put $q = p$ or $q = +\infty$.

$$\text{Let } \psi : A_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{I_n \cap (JI_n + I_{n+k+q})} X^n \to A_2 \quad \text{where}$$
$$A_2 = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{I_n \cap (JI_n + I_{n+k})} X^n$$

be the A/J–linear map defined by

$$\psi : \sum_{n=t}^{s} (a_n + I_n \cap (JI_n + I_{n+k+q}))X^n \mapsto \sum_{n=t}^{s} (a_n + I_n \cap (JI_n + I_{n+k}))X^n$$

where $a_n \in I_n$ for all n. For $q = p$ or $q = +\infty$, ψ is a surjection. Thus $\dim A_2 \leq \dim A_1$ and $\operatorname{tr\,deg}_{A/J} A_2 \leq \operatorname{tr\,deg}_{A/J} A_1$. The proposition is proved.

Theorem 2.4. *Let $k \in \overline{\mathbf{N}^*}$ and $f = (I_n)$ be a filtration of A. If J contains I_k, then for a positive integer p we have:*

(i) $\gamma_J(f, k) = \gamma_J(f^{(p)}, k) = \gamma_J(f, pk) \leq \gamma_J(f)$

(ii) $\tau_J(f, k) \leq \tau_J(f, pk) \leq \tau_J(f)$ *and* $\tau_J(f^{(p)}, k) \leq \tau_J(f, pk) \leq \tau_J(f)$

(iii) *In particular, we have:*

$$\gamma_J(f, 1) = \gamma_J(f^{(p)}, 1) = \gamma_J(f, p) \leq \gamma_J(f^{(p)}) = \gamma_J(f)$$

$$\tau_J(f^{(p)}, 1) \leq \tau_J(f, p) \leq \tau_J(f) \quad \textit{and} \quad \tau_J(f^{(p)}, 1) \leq \tau_J(f^{(p)}) \leq \tau_J(f).$$

Proof. *(i)* and *(ii)*

$$\text{Let } \psi : A_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{I_{pn}}{I_{pn} \cap (JI_{pn} + I_{pn+pk})} X^n \to B \quad \text{where}$$
$$B = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{I_n \cap (JI_n + I_{n+pk})} X^n$$

be the A/J–linear map defined by

$$\psi : \sum_{n=s}^{t} (a_{pn} + I_{pn} \cap (JI_{pn} + I_{pn+pk}))X^n$$
$$\mapsto \sum_{n=s}^{t} (a_{pn} + I_{pn} \cap (JI_{pn} + I_{pn+pk}))X^{pn}$$

where $a_{pn} \in I_{pn}$ for all n. ψ is injective and B is integral over $B_1 = Im\,\psi$.
Indeed, let $F_n = I_n \cap (JI_n + I_{n+kp})$. For $c_n \in I_n$,

$$((c_n + F_n)X^n)^p = (c_n^p + F_{np})X^{np} = \psi((c_n^p + F_{np})X^n) \in B_1.$$

Therefore $\dim B = \dim B_1 = \dim A_1$ and $\gamma_J(f^{(p)}, k) = \gamma_J(f, pk)$.
On the other hand, ψ being injective, one has:

$$\tau_J(f^{(p)}, k) = \operatorname{tr}\deg_{\mathcal{A}} B_1 \leq \operatorname{tr}\deg_{\mathcal{A}} B = \tau_J(f, pk).$$

Proposition (2.3) implies that $\gamma_J(f,k) \leq \gamma_J(f,kp) \leq \gamma_J(f)$ and $\tau_J(f,k) \leq \tau_J(f,kp) \leq \tau_J(f)$. Hence we have:

$$\gamma_J(f,k) \leq \gamma_J(f^{(p)},k) = \gamma_J(f,pk) \leq \gamma_J(f) \quad \text{and}$$
$$\tau_J(f,k) \leq \tau_J(f,kp) \leq \tau_J(f) \text{ and } \tau_J(f^{(p)},k) \leq \tau_J(f,kp) \leq \tau_J(f).$$

By Proposition 2.4 of [D D S] we have $\gamma_J(f^{(p)}, 1) = \gamma_J(f, 1)$ for $p \geq 1$. So, $\gamma_J(f,p) = \gamma_J(f,1)$ for $p \in \mathbb{N}^*$ and if $k \neq \infty$, then $\gamma_J(f,k) = \gamma_J(f,1) = \gamma_J(f,pk)$. If $k = \infty$, then $\gamma_J(f,k) = \gamma_J(f,pk) = \gamma_J(f^{(p)},k)$.
We conclude that $\gamma_J(f,k) = \gamma_J(f^{(p)},k) = \gamma_J(f,pk) \leq \gamma_J(f)$ for $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$.
(iii) Using (i) and (ii), for $k = 1$, we obtain:

$$\gamma_J(f,p) = \gamma_J(f,1) \leq \gamma_J(f) \quad \text{and} \quad \tau_J(f^{(p)},1) \leq \tau_J(f,p) \leq \tau_J(f).$$

For $k = +\infty$, we have : $\gamma_J(f^{(p)}) = \gamma_J(f)$ and $\tau_J(f^{(p)},1) \leq \tau_J(f^{(p)}) \leq \tau_J(f)$.

Corollary 2.5. *If $f = (I_n)$ is a noetherian filtration with rank m, then for a positive integer p which is a multiple of m we have:*

(i) *J is an ideal over I_m implies that*

$$\gamma_J(f,k) = \gamma_J(I_p,k) = \gamma_J(f,pk) = \gamma_J(I_p) = \gamma_J(f) \quad \textit{and}$$
$$\tau_J(f^{(p)},k) = \tau_J(I_p,k) = \tau_J(I_p) = \tau_J(f^{(p)}) \leq \tau_J(f)$$

(ii) *$\mathcal{M}$ is a maximal ideal containing I_m implies that* $\gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \gamma_{\mathcal{M}}(I_p,k) = \gamma_{\mathcal{M}}(I_p) = \gamma_{\mathcal{M}}(f) = \tau_{\mathcal{M}}(f,k) = \tau_{\mathcal{M}}(I_p,k)$.

Proof. *(i)* One deduces from Theorem (2.4)-(i) that

$$\gamma_J(f,k) = \gamma_J(f^{(p)},k) = \gamma_J(I_p,k) \quad \text{and} \quad \tau_J(f^{(p)},k) = \tau_J(I_p,k).$$

Indeed, for $p = p'm$ where p' is a positive integer and for all $n \geq 0$, we have:

$$I_{pn} = I_{p'mn} = I_m^{p'n} = (I_m^{p'})^n = I_{mp'}^n = I_p^n.$$

On the other hand, for any ideal I which is contained in J we have:.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{I^n}{JI^n + I^{n+k}} = \sum_{n\geq 0} \frac{I^n}{JI^n}.$$

Thus $\gamma_J(I,k) = \gamma_J(I)$ and $\tau_J(I,k) = \tau_J(I)$. Since I_p is contained in J, it suffices to replace I by I_p.

(ii) If $\mathcal{M}$ is a maximal ideal, as in [D D S, (2.12)], using Lemma 3 of [Ha], f being a noetherian filtration, we have : $\gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \tau_{\mathcal{M}}(f,k)$. We conclude by (i).

Proposition 2.6. *Let A be a noetherian ring and $f = (I_n)$ a filtration of A. We have:*

(i) *If J is an ideal containing I_k, then $\ell_J(f,k) \leq \ell_J^a(f,k) \leq \tau_J(f)$.*
(ii) *If J is a maximal ideal over I_k and f a noetherian filtration of A, then:*

$$\ell_J(f,k) \leq \ell_J^a(f,k) \leq \tau_J(f,k) = \tau_J(f).$$

Proof. (i) It is clear that $\ell_J(f,k) \leq \ell_J^a(f,k)$. If $r = \ell_J(f,k) \neq 0$, then as in the proof of [D D S]-Proposition (2.6), we have $\ell_J(f,k) \leq \tau_J(f,k)$. Theorem (1.2) and Theorem (2.4) imply that there exists $p \geq 1$ such that $\ell_J^a(f,k) = \ell_J(f^{(p)},k)$ and $\tau_J(f^{(p)},k) \leq \tau_J(f)$.

Hence $\ell_J(f,k) \leq \ell_J^a(f,k) \leq \tau_J(f^{(p)},k) \leq \tau_J(f)$.

(ii) If J is a maximal ideal containing I_k and f a noetherian filtration of A, Corollary (2.5)-(ii) implies that $\tau_J(f,k) = \tau_J(f)$.

2.7. Localization

Proposition 2.7.1. *For a maximal ideal $\mathcal{M}$ we have:*

$$\gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \gamma_{\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}}(fA_{\mathcal{M}},k) \text{ and } \tau_{\mathcal{M}}(f,k) = \tau_{\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}}(fA_{\mathcal{M}},k)$$

Proof. Let φ:

$$A_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{I_n \cap (\mathcal{M}I_n + I_{n+k})} \longrightarrow B_1 = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n A_{\mathcal{M}}}{I_n A_{\mathcal{M}} \cap (\mathcal{M}I_n + I_{n+k})A_{\mathcal{M}}}$$

be the $\frac{A}{\mathcal{M}}$–linear map defined by setting for $a_n \in I_n$,

$$\varphi : \sum_n (a_n + I_n \cap (\mathcal{M}I_n + I_{n+k}))$$
$$\mapsto \sum_n \frac{a_n}{1} + I_n A_{\mathcal{M}} \cap (\mathcal{M}I_n + I_{n+k})A_{\mathcal{M}}.$$

φ is a surjection. Indeed, put

$$F_n = I_n \cap (\mathcal{M}I_n + I_{n+k}) \quad \text{and} \quad H_n = I_n A_{\mathcal{M}} \cap (\mathcal{M}I_n + I_{n+k})A_{\mathcal{M}}.$$

For all $s \in \mathcal{S} = A - \mathcal{M}$, the ideal $(s, \mathcal{M})$ is equal to A. Hence there exist $t \in \mathcal{S}$ and $b \in \mathcal{M}$ such that $1 = st + b$. For $a_n \in I_n$, we have

$$\frac{a_n}{s} + H_n = \frac{a_n(st+b)}{s} + H_n = \frac{a_n t}{1} + \frac{b'}{s} + H_n \text{ with } b' \in F_n.$$

Therefore $\dfrac{a_n}{s} + H_n = \dfrac{a_n t}{1} + H_n = \varphi(a_n t + F_n)$.

Let us show that φ is injective: For $a_n, b_n \in I_n$, $\varphi(a_n + F_n) = \varphi(b_n + F_n)$ if and only if there exists $t \in \mathcal{S}$ such that $t(a_n - b_n) \in F_n$. Let $s \in \mathcal{S}$ and $c \in \mathcal{M}$ be such that $1 = st + c$. Then $(1-c)(a_n - b_n) \in F_n$, $(a_n - b_n) \in F_n$ and $a_n + F_n = b_n + F_n$. It follows that φ is an isomorphism. Thus $\gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \dim A_1 = \dim B_1 = \gamma_{\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}}(fA_{\mathcal{M}}, k)$ and $\tau_{\mathcal{M}}(f,k) = \tau(fA_{\mathcal{M}}, k)$.

Proposition 2.7.2. *Assume that $f = (I_n)$ is a noetherian filtration of A and $\mathcal{M}$ a maximal ideal of A.*

(i) *We have* $\ell_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \tau_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \gamma_{\mathcal{M}}(f) = \tau_{\mathcal{M}}(f)$

(ii) *If $\mathcal{M}$ contains $\sqrt{f}$, then we have:*

$$\ell_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(f) \leq \gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \tau_{\mathcal{M}}(f,k) = \gamma_{\mathcal{M}}(f) = \tau_{\mathcal{M}}(f)$$

(iii) *If $\mathcal{M}$ contains $\sqrt{f}$ and $A/\mathcal{M}$ is infinite, then we have:*

$$\ell_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(f) = \gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \tau_{\mathcal{M}}(f,k) = \gamma_{\mathcal{M}}(f) = \tau_{\mathcal{M}}(f)$$

(iv) *If $A/\mathcal{M}$ is infinite, then for an ideal $I \subseteq \mathcal{M}$ and for $q > 0$ we have:*

$$\ell_{\mathcal{M}}(I,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I^q) = \gamma_{\mathcal{M}}(I^q) = \gamma_{\mathcal{M}}(I,k) = \tau_{\mathcal{M}}(I,k).$$

Proof. *(i)*

1) We have $\ell_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \tau_{\mathcal{M}}(f,k)$.

Indeed, if $\mathcal{M}$ does not contain $\sqrt{f}$ and $k \neq \infty$, then $\ell_{\mathcal{M}}(f,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = 0$. If $\mathcal{M}$ contains $\sqrt{f}$ or $k = \infty$, then $\mathcal{M}$ contains I_k and Proposition (2.6) implies that $\ell_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \tau_{\mathcal{M}}(f,k)$.

2) We have $\tau_{\mathcal{M}}(f,k) = \gamma_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \gamma_{\mathcal{M}}(f) = \tau_{\mathcal{M}}(f)$.

Indeed, if $\mathcal{M}$ contains $\sqrt{f}$, this is a consequence of Corollary (2.5)-(ii). If $\mathcal{M}$ does not contain $\sqrt{f}$ and $k \neq \infty$, then $\gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \tau_{\mathcal{M}}(f,k) = 0$. [D D S, (2.12)] implies that $\gamma_{\mathcal{M}}(f) = \tau_{\mathcal{M}}(f)$. If $\mathcal{M}$ does not contain $\sqrt{f}$ and $k = \infty$, we also conclude by Proposition (2.12) of [D D S].

(ii)

It suffices to apply Corollary (2.5)-(ii) and Corollary (1.4)-(i) and to use (i).

(iii)

The residue field of the local ring $A_{\mathcal{M}}$ which is $A/\mathcal{M}$ being infinite, by [D D S, Corollary (2.7)] we have: $\ell(IA_{\mathcal{M}}) = \gamma(IA_{\mathcal{M}})$, for any ideal I.

Corollary (1.3) and Corollary (2.5) imply that there exists $q \in \mathbb{N}^*$ such that

$$\ell^a(fA_{\mathcal{M}},k) = \ell(I_qA_{\mathcal{M}},k),\ \tau(fA_{\mathcal{M}},k) = \tau(I_qA_{\mathcal{M}},k) = \gamma(fA_{\mathcal{M}},k) \\ = \gamma(I_qA_{\mathcal{M}},k).$$

Using Corollary (1.5.3) and Proposition (2.7.1) and putting $I = I_q$ we have : $\ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(f) = \ell^a(fA_{\mathcal{M}},k) = \ell(IA_{\mathcal{M}},k) = \ell(IA_{\mathcal{M}}) = \tau(IA_{\mathcal{M}}) = \tau(fA_{\mathcal{M}},k) = \gamma(fA_{\mathcal{M}},k) = \tau_{\mathcal{M}}(f,k) = \gamma_{\mathcal{M}}(f,k)$.

We conclude by (i).

(iv)

Replacing f by f_I, since $A_{\mathcal{M}}/\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}$ is infinite, we have:

$$\ell_{\mathcal{M}}(I) = \ell(IA_{\mathcal{M}}) = \gamma(IA_{\mathcal{M}}) = \gamma_{\mathcal{M}}(I).$$

The result is given by (iii) and the Corollaries (1.4) and (2.5).

We have the following corollaries:

Corollary 2.7.3. *Let A be a ring and $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. If $f = (I_n)$ is a noetherian filtration of A of rank m and $p \in \mathbb{N}^*$ a multiple of m, then for any maximal ideal $\mathcal{M}$ containing $\sqrt{f}$ and for all $q \in \mathbb{N}^*$, we have:*

(i) $\ell_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(f) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I_{pq}) \leq \gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \gamma_{\mathcal{M}}(f) = \gamma_{\mathcal{M}}(I_{pq}) = \tau_{\mathcal{M}}(f,k) = \tau_{\mathcal{M}}(f)$.

(ii) If $A/\mathcal{M}$ *is infinite, then*

a) $\ell_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(f) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I_{pq}) = \gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \tau_{\mathcal{M}}(f,k)$
b) *For any ideal* $I \subseteq \mathcal{M}$,

$$\ell_{\mathcal{M}}(I,k) = \ell_{\mathcal{M}}(I) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I^q) = \gamma_{\mathcal{M}}(I,k) = \tau_{\mathcal{M}}(I,k).$$

Corollary 2.7.4. *Let* $(A,\mathcal{M})$ *be a local ring and* $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. *Assume that* $f = (I_n)$ *is a noetherian filtration of* A *of rank* m *and that* $p \in \mathbb{N}^*$ *is a multiple of* m, *then for all* $q \in \mathbb{N}^*$, *we have:*

(i) $\ell(f,k) \leq \ell^a(f,k) = \ell^a(f) = \ell^a(I_{pq}) \leq \gamma(f,k) = \gamma(f) = \gamma(I_{pq}) = \tau(f,k)$.
(ii) *If* $A/\mathcal{M}$ *is infinite, then*
a) $\ell(f,k) \leq \ell^a(f,k) = \ell^a(f) = \ell^a(I_{pq}) = \gamma(f,k) = \tau(f,k)$,
b) *for any ideal* I,

$$\ell(I,k) = \ell(I) = \ell^a(I,k) = \ell^a(I) = \ell^a(I^q,k) = \gamma(I,k) = \tau(I,k) = \gamma(I).$$

Examples 2.8. Let $A = K[X_1,X_2,X_3], I = (X_1,X_2)$ where K is a field. Let $\mathcal{M} = (X_1,X_2,X_3)$; A is a noetherian ring and $\mathcal{M}$ is a maximal ideal of A; I is a proper ideal of whose analytic spread $\gamma_{\mathcal{M}}(I) = \dim(I_n/\mathcal{M}I_n) = 2$.

If K is infinite, $A_{\mathcal{M}}/\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}$ being equal to K, applying Corollary (2.7.3)-(ii)-b), we obtain $\ell^a(IA_{\mathcal{M}}) = \ell(IA_{\mathcal{M}}) = \ell_{\mathcal{M}}(I) = \gamma_{\mathcal{M}}(I) = 2$.

a) Let $f = (I_n)$ be such that $I_n = A$ for $n \leq 0$ and $I_{2n} = I^n$, $I_{2n+1} = I^{n+1}$ for $n \geq 1$. One verifies that f is a noetherian filtration of rank 2. Let $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. For $b \in I_1$ we have:

$b^{2n+2} = b\, b^{2n+1} \in I_1\, I_{2n+2} \subseteq \mathcal{M}I_{2n+2} + I_{2n+2+k}$ for all $n \geq 1$.

Since $1 \notin \mathcal{M}$, we have $\ell(fA_{\mathcal{M}},k) = \ell_{\mathcal{M}}(f,k) = 0$. On the other hand,

$$\ell^a(fA_{\mathcal{M}},k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I,k) = \ell_{\mathcal{M}}(I) = \gamma_{\mathcal{M}}(I) = 2 \neq \ell(fA_{\mathcal{M}},k).$$

b) Let $f = (I_n)$ be such that $I_n = A$ for $n \leq 0$, $I_{4n} = I_{4n+1} = I^n$ for all $n \geq 1$ and $I_{4n+2} = I_{4n+3} = I^{n+1}$ for all $n \geq 1$.

One verifies that f is a noetherian filtration of rank 4 and deduces from Theorem (1.2) and Proposition (2.7.2) that

$$\ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(f^{(2)},k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I,k) = \gamma_{\mathcal{M}}(I) = 2.$$

But for $b \in I$ and $n \geq 1$, $1\, b^{4n+3} = b\, b^{4n+2} \in \mathcal{M}\, I_{4n+3}$. Thus

$$\ell(fA_{\mathcal{M}},k) = \ell_{\mathcal{M}}(f,k) = 0 \neq \ell^a(fA_{\mathcal{M}},k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = \gamma_{\mathcal{M}}(I) = 2.$$

2.9. Another Extension for Nœtherian Filtrations

Let A be a noetherian ring, $f = (I_n)$ a noetherian filtration of A and $\mathcal{M}$ a maximal ideal of A containing $\sqrt{f}$.

Put $\varphi_{\mathcal{M}}(.,f)$ the map : $n \mapsto \varphi_{\mathcal{M}}(n,f) = \dim_k \frac{I_n}{\mathcal{M}I_n}$ where $k = A/\mathcal{M}$.

Even if A is a local ring with infinite residue field $\varphi_{\mathcal{M}}(.,f)$ is not generally a polynomial function. But we have:

1) If f is a I-adic filtration and A a noetherian ring, not necessarily a local ring, then $\varphi_{\mathcal{M}}(.,f) = \varphi_{\mathcal{M}}(.,I)$ is a polynomial function.
2) The restriction of $\varphi_{\mathcal{M}}(.,f)$ on the set $\{n! : n \in \mathbb{N}\}$ can be identified at a polynomial function for $n \gg 0$.

Indeed, let $m > 0$ be such that $I_{mn} = I_m^n$, for all $n \geq 0$. If $n \geq m, n!$ is a multiple of m, hence

$$\varphi_{\mathcal{M}}(n!,f) = \dim_k \frac{I_m^{(n!)/m}}{\mathcal{M}I_m^{(n!)/m}} = \varphi_{\mathcal{M}}\left(\frac{n!}{m}, I_m\right).$$

Since $\varphi_{\mathcal{M}}(., I_m)$ is a polynomial function, there exist $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{Q}$ and $n_0 \geq m$ such that for all $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{M}}(n, I_m) &= a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0. \\
\varphi_{\mathcal{M}}(n!,f) &= \varphi_{\mathcal{M}}((n!)/m, I_m) \\
&= a_p[(n!)/m]^p + \cdots + a_1[(n!)/m] + a_0 \\
&= b_p(n!)^p + \cdots + b_1(n!) + b_0
\end{aligned}$$

where $b_i \in \mathbb{Q}$ for $0 \leq i \leq p$.

The polynomial $n \mapsto b_p n^p + \cdots + b_1 n + b_0$ has the same degree as $\varphi_{\mathcal{M}}(., I_m)$ and it is unique, independent from m such that $I_{mn} = I_m^n$, for $n \geq 0$, due to the fact that the set $\{n! : n \in \mathbb{N}\}$ is infinite.

Put $\delta^o \varphi_{\mathcal{M}}(.,f)$ the degree of this polynomial,

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\mathcal{M}}(f) = 1 + \delta^o \varphi_{\mathcal{M}}(.,f) \quad \text{and} \\
&\quad \lambda(f) = \sup\{\lambda_{\mathcal{M}}(f) : \mathcal{M} \text{ is maximal over } \sqrt{f}\}.
\end{aligned}$$

Thus we have the following result:

Proposition 2.10 — *Let A be a noetherian ring and $f = (I_n)$ a noetherian filtration of A of rank $m \in \mathbb{N}^*$. For any maximal ideal $\mathcal{M}$ which contains $\sqrt{f}$ we have:*

$\lambda_{\mathcal{M}}(f) = \lambda_{\mathcal{M}}(I_{mn})$ *for all* $n \geq 1$.

In particular, if $f = f_I$ where I is an ideal contained in $\mathcal{M}$, then

$$\lambda_{\mathcal{M}}(f_I) = \lambda_{\mathcal{M}}(I) = \lambda_{\mathcal{M}}(I^n) \text{ for all } n \geq 1.$$

We omit the proof of the following lemma :

Lemma 2.11. *Let A be a noetherian ring, I an ideal and $\mathcal{M}$ a maximal ideal containing I. Then* $\dim_{\frac{A_{\mathcal{M}}}{\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}}} \frac{I^n A_{\mathcal{M}}}{\mathcal{M}I^n A_{\mathcal{M}}} = \dim_{\frac{A}{\mathcal{M}}} \frac{I^n}{\mathcal{M}I^n}$.

Proposition 2.12. *Let A be a noetherian ring, $f = (I_n)$ a noetherian filtration of A and $\mathcal{M}$ a maximal ideal containing $\sqrt{f}$. Then we have :*

$$\lambda_{\mathcal{M}}(f) = \lambda(fA_{\mathcal{M}}).$$

Proof. Let $\mathcal{M}$ be a maximal ideal containing $\sqrt{f}$ and p the rank of f.

$$\lambda_{\mathcal{M}}(f) = 1 + \delta^o\varphi_{\mathcal{M}}(.,f) = 1 + \delta^o\varphi_{\mathcal{M}}(.,I_p).$$

By Lemma (2.11) we have : $\dim_{\frac{A}{\mathcal{M}}} \frac{I_p^n}{\mathcal{M}I_p^n} = \dim_{\frac{A_{\mathcal{M}}}{\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}}} \frac{I_p^n A_{\mathcal{M}}}{\mathcal{M}I_p^n A_{\mathcal{M}}}$; thus $\delta^o\varphi_{\mathcal{M}}(.,I_p) = \delta^o\varphi_{\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}}(.,I_pA_{\mathcal{M}})$ and

$$\lambda_{\mathcal{M}}(f) = 1 + \delta^o\varphi_{\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}}(.,I_pA_{\mathcal{M}}) = \lambda(fA_{\mathcal{M}}).$$

Corollary 2.13. *Let A be a ring and $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. If $f = (I_n)$ is a noetherian filtration of A of rank m and $p \in \mathbb{N}^*$ is a multiple of m, then for any maximal ideal $\mathcal{M}$ containing $\sqrt{f}$ and for all $q \in \mathbb{N}^*$ we have:*

(i) $\ell_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I_{pq}) \leq \lambda_{\mathcal{M}}(f) =$
$\gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \gamma_{\mathcal{M}}(I_{pq}) = \tau_{\mathcal{M}}(f,k)$

(ii) *If $A/\mathcal{M}$ is infinite, then*

a) $\ell_{\mathcal{M}}(f,k) \leq \ell^a_{\mathcal{M}}(f,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(f) = \lambda_{\mathcal{M}}(f) = \gamma_{\mathcal{M}}(f,k) = \tau_{\mathcal{M}}(f,k)$

b) *For any ideal $I \subseteq \mathcal{M}$,*

$$\ell_{\mathcal{M}}(I,k) = \ell_{\mathcal{M}}(I) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I^q) = \lambda_{\mathcal{M}}(I) = \gamma_{\mathcal{M}}(I,k) = \tau_{\mathcal{M}}(I,k).$$

Proof. It suffices to prove that $\lambda_{\mathcal{M}}(f) = \gamma_{\mathcal{M}}(f)$ and to apply the Corollary (2.7.3). By a result of Smoke (see [Sm]) we have :

$$\lambda_{\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}}(IpA_{\mathcal{M}}) = \gamma_{\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}}(IpA_{\mathcal{M}}).$$

Therefore, applying Proposition (2.10), Proposition (2.12), Proposition (2.7.1) and Corollary (2.5), we have :

$$\lambda_{\mathcal{M}}(f) = \lambda_{\mathcal{M}}(I_p) = \lambda_{\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}}(I_p A_{\mathcal{M}}) = \gamma_{\mathcal{M}A_{\mathcal{M}}}(IpA_{\mathcal{M}}) = \gamma_{\mathcal{M}}(I_p) = \gamma_{\mathcal{M}}(f).$$

REFERENCES

[DDS] Diagana, Y.; Dichi, H.; Sangaré, D. Filtrations, Generalized Analytic Independence, Analytic Spread. Afrika Matematika, Série **3**, **1994**, *4*, 101–114.

[Ha] Hamann, E. Krull Dimension and Transcendence Degree. Comm. Algebra **1990**, *18* (4) 1189–1198.

[NR] Northcott, D.G.; Rees, D. Reduction of Ideals in Local Rings. Proc. Cambridge Philos. Soc. **1954**, *50*, 145–158.

[Ok] Okon, J.S. Prime Divisors, Analytic Spread and Filtrations. Pacific J. Math. **1984**, *113*, 451–462.

[Sm] Smoke, W. Dimension and Multiplicity of Graded Algebras. J. Algebra **1972**, *21*, 149–173.

Received December 2000
Revised October 2001

Annexe 3 : Réf. [D_2]

ANALYTIC SPREAD OF A PREGRADUATION

Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics,

Commutative Ring Theory and Applications, Volume 231 (2002) 107-116.

Analytic Spread of a Pregraduation

YOUSSOUF M. DIAGANA Université d'Abobo-Adjamé, 03 BP 1644 Abidjan 03, Côte d'Ivoire. Email address : y_diagana@yahoo.com

ABSTRACT We define a pregraduation of a commutative ring A by a family $g = (G_n)_{n \in \mathbb{Z} \cup (+\infty)}$ of ideals of A such that $G_0 = A$, $G_\infty = (0)$ and $G_p G_q \subseteq G_{p+q}$, for all $p, q \in \mathbb{Z}$. The notion of $J-$independence of order k with respect to a pregraduation of a ring A is defined as in [1]. We will show that r elements of G_1 are $J-$independent of order k with respect to a pregraduation g if and only if there exist isomorphisms from the polynomial ring with r indeterminates over $\dfrac{A}{J+G_k}$ to some $\dfrac{A}{J+G_k}-$algebras. A weak notion of $J-$independence called the regular $J-$independence will allow to define the analytic spread of a pregraduation on a ring.

INTRODUCTION

The purpose of this paper is to define and study the analytic independence of a family $(G_n)_{n \in \mathbb{Z} \cup (+\infty)}$ of ideals of a ring A such that $G_0 = A$ and $G_p G_q \subseteq G_{p+q}$ for all $p, q \in \mathbb{Z}$, called a pregraduation of A, with the convention that $G_{+\infty} = (0)$ and to give extensions of the analytic spread for a pregraduation.

Theorem 2.4 gives criteria of $J-$independence of order k with respect to a pregraduation of a ring A, where $k \in \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ and J is an ideal of A. The maximum number of elements of J which are $J-$independent of order k with respect to $g = (G_n)$ will be denoted by $\ell_J(g, k)$. We show that this number is different from the analytic spread of a filtration as defined by J.S. Okon in [4].

The notion of regular $J-$independence of order k with respect to a pregraduation g will allow to define the regular $J-$analytic spread of g, denoted by $\ell_J^a(g, k)$, and the regular analytic spread $\ell^a(g, k)$ of g as $\ell^a(g, k) =$

$\sup\{\ell^a_{\mathcal{M}}(g,k) : \mathcal{M} \in \text{Max } A\}$.

Corollary 3.4 gives a characterization of $\ell^a_J(f,k)$ by some integers $\ell_J(I_p,k)$ when $f=(I_n)$ is a nœtherian filtration. When $(A,\mathcal{M})$ is a nœtherian local ring with infinite residue field and f a nœtherian filtration on A, Proposition (3.7) shows that the integer $\ell^a_{\mathcal{M}}(f,k)$ coincides with the various extensions of the analytic spread obtained in [1] except for $\ell_{\mathcal{M}}(f,k)$.

Throughout this paper all rings are commutative and filtrations are decreasing pregraduations. The I-adic filtration is the family (I^n), denoted f_I, where I is an ideal of A and $I^n = A$ for $n \leq 0$. A filtration $f=(I_n)$ is said to be nœtherian if its generalized Rees ring $\Re(A,f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I_n X^n$ is nœtherian.

1. GENERALIZED ANALYTIC INDEPENDENCE

DEFINITIONS 1.1. (1.1.1) Let A be a ring and $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ a family of ideals of A. We say that (G_n) is a pregraduation of A if $G_0 = A$, $G_\infty = (0)$ and $G_pG_q \subseteq G_{p+q}$ for all $p,q\in\mathbb{Z}$.

(1.1.2) Let $g=(G_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ be a pregraduation of a ring A, J an ideal of A and $k\in\overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ such that $J+G_k \neq A$. Elements $a_1,\dots,a_r$ of G_1 are said to be J-independent of order k with respect to g if for each homogeneous polynomial $F(X_1,\dots,X_r)$ of degree s with coefficients in A, the relation $F(a_1,\dots,a_r)\in JG_s+G_{s+k}$ implies that F has its coefficients in $J+G_k$.

PROPOSITION 1.2. *Let A be a ring, $g=(G_n)_{n\in\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ a pregraduation of A and $k\in\overline{\mathbb{N}^*}$. Let J be an ideal of A such that $J+G_k\neq A$, $a_1,\dots,a_r$ elements which are J-independent of order k with respect to g and I the ideal $(a_1,\dots,a_r)$. We have :*

(i) *If J contains G_k, then the elements $a_1,\dots,a_r$ are J-independent with respect to g and to $f_I=(I^n)$.*

(ii) *If there exists an integer i such that $a_i\in J+G_k$, then*
$$I^p\subseteq G_p\subseteq J+G_k \quad \textit{for } p\geq 1.$$

(iii) *If $r\geq 2$, then $I^p\subseteq G_p\subseteq J+G_k$ for $p\geq 1$.*

Proof. *(i)* Let $x=F(a_1,\dots,a_r)$ where F is an homogeneous polynomial of degree s with coefficients in A. Suppose that J contains G_k.
$[x\equiv 0 \pmod{JG_s}$ or $x\equiv 0 \pmod{JI^s}]$ implies that $x\in JG_s+G_{s+k}$.
Hence $F\in(J+G_k)[X_1,\dots,X_r]$. Furthermore, $J+G_k = J+I^k = J$.
Therefore the elements $a_1,\dots,a_r$ are J-independent (of order $+\infty$) with respect to g and to f_I.

(ii) If $a_i\in J+G_k$ then for $p\geq 1$ and $y\in G_p$, we have :
$$ya_i^p\in G_p(J+G_k)\subseteq(JG_p+G_{p+k}).$$

$a_1, \ldots, a_r$ being $J-$independent of order k with respect to g, we have : $y \in J + G_k$. Therefore $G_p \subseteq J + G_k$ and we have $I^p \subseteq G_1^p \subseteq G_p \subseteq J + G_k$.

(iii) If $r \geq 2$, for $i \neq j \in [1, \ldots, r]$, let $F(X_1, \ldots, X_r) = a_i X_j - a_j X_i$. Then F is homogeneous of degree 1 and $F(a_1, \ldots, a_r) = 0$. So, $a_i \in J + G_k$. The result follows by (ii).

PROPOSITION 1.3. *Let A be a ring, $g = (G_n)$ a pregradudation of A and $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. Let J be an ideal of A such that $J + G_k \neq A$. Assume that $(G_{n+k})_{n\geq 0}$ is decreasing or that $G_{n+k} \subseteq G_n$ for $n \geq 1$. Let $a_1, \ldots, a_r$ be $J-$independent elements of order k with respect to g. Then for $p \geq 1$ we have :*

(i) *If $G_k \subseteq J + G_{pk}$, then $a_1^p, \ldots, a_r^p$ are $J-$independent of order k with respect to the pregraduation $g^{(p)} = (G_{pn})$.*

(ii) *If $G_k \subseteq J + G_p^k$, then $a_1^p, \ldots, a_r^p$ are $J-$independent of order k with respect to the pregraduation $f_{Gp} = (G_p^n)$.*

(iii) *If $G_k \subseteq J + G_k^p$, then $a_1^p, \ldots, a_r^p$ are $J-$independent of order k with respect to the pregraduation $g^p = (G_n^p)$.*

(iv) *In particular, if $J \supseteq G_k$, $a_1^p, \ldots, a_r^p$ are $J-$independent of order k with respect to the pregraduations $g^{(p)}$, g^p and f_{G_p}.*

Proof. The Proof follows from definitions of (1.1) and from the fact that, under the hypotheses, for all $n \geq 0$ we have :

$$\begin{cases} JG_p^n + G_p^{n+k} \subseteq JG_{pn} + G_{p(n+k)} \subseteq JG_{pn} + G_{pn+k} \\ JG_n^p + G_{n+k}^p \subseteq JG_{pn} + G_{p(n+k)} \subseteq JG_{pn} + G_{pn+k}. \end{cases}$$

NOTATIONS 1.4. Let A be a ring, $g = (G_n)_{n\in \mathbb{Z}\cup\{+\infty\}}$ a pregraduation of A and $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$. Let J be an ideal of A such that $J + G_k \neq A$. We put : $\ell_J(g,k) = \sup\{r \in \mathbb{N} \,/\, \exists\, a_1, \ldots, a_r \in J,\ J-$independent of order k with respect to $g\}$, $\ell(g,k) = \sup\{\ell_{\mathcal{M}}(g,k) : \mathcal{M}$ maximal over $G_k\}$, and $\sup(J) = \sup\{r \in \mathbb{N} \,/ \exists\, a_1, \ldots, a_r \in J,\ J-\text{independent}\}$.

REMARK 1.5. (i) If $\mathcal{M}$ is a maximal ideal of A and $\mathcal{M} \not\supseteq G_k$, then $\ell_{\mathcal{M}}(g,k) = 0$. Consequently, $\ell(g,k) = \sup\{\ell_{\mathcal{M}}(g,k) : \mathcal{M} \in \operatorname{Max} A\}$.

(ii) Assume that $(G_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ is decreasing or that $G_{n+k} \subseteq G_n$ for all $n \geq 1$. If J contains G_k, then for all p and $n \in \mathbb{N}^*$ we have :

a) $\ell_J(g,k) \leq \ell_J(g^{(p)},k) \leq \ell_J(G_p,k) \leq \ell_J(G_p^n,k)$,

b) $\ell_J(g,k) \leq \ell_J(g^{(p)},k) \leq \ell_J(G_{pn},k)$. (See (1.3)-(iv))

PROPOSITION 1.6. *Under hypotheses and notations of (1.4), if P is a prime ideal over $J+G_k$, we have :*

(1.6.1) $\ell_J(g,k) \leq \sup(J+G_k) \leq ht(J+G_k) \leq \dim A_P = ht\, P$.

(1.6.2) *If J contains G_k, then*

(i) $\ell_J(g,k) \leq \ell_J(g) \leq ht\ J \leq \dim A$.

(ii) *Moreover, if A is a nœtherian ring and k is such that $(G_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ is decreasing or such that $G_{n+k} \subseteq G_n$ for all $n \geq 1$, then the sequence $n \mapsto \ell_J(G_p^{n!},k)$ is an increasing and eventually stationary sequence.*

2. CRITERIA OF J–INDEPENDENCE

2.1.– Let $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $g=(G_n)$ and $f=(I_n)$ be two pregraduations of A such that $I_n \subseteq G_n$ for all n. Let J be an ideal of A.

For each n, we put $K_n = I_n \cap (JG_n + G_{n+k})$; then we have : $K_nI_m \subseteq K_{n+m}$ for all $n,\ m \in \mathbb{Z}$. So, $\sum_n \frac{I_n}{K_n}$ is a graded ring where $(a+K_n)(b+K_m) = (ab+K_{n+m})$ for all $a \in I_n$ and $b \in I_m$. Let $F = \sum_n I_nX^n$ and $G = \sum_n G_nX^n$. Then $L = \sum_n K_nX^n = F \cap (u^k, J)G$ is a graded ideal of F where $u = \frac{1}{X}$ with the convention that $u^\infty = 0$ and we have : $\frac{F}{L} \approx \sum_n \frac{I_n}{K_n}$.

In particular, if $f = g$ we have :

(2.1.1) $$\frac{G}{G\cap(u^k,J)G} \approx \sum_n \frac{G_n}{G_n \cap (JG_n + G_{n+k})}$$

(2.1.2) If $G_{n+k} \subseteq G_n$ for all $n \geq 1$, then $\frac{G}{(u^k,J)G} \approx \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{G_n}{JG_n + G_{n+k}}$

(2.1.3) $$\frac{G^+}{G^+\cap(u^k,J)G} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{G_n}{G_n \cap (JG_n + G_{n+k})} \text{ where } G^+ = \sum_{n\geq 0} G_nX^n$$

(2.1.4) $$\frac{G^+}{JG^+} \approx \sum_n \frac{G_n}{JG_n}.$$

2.2.– Let $R(A,I) = \sum_{n\geq 0} I^nX^n$ be the Rees ring of an ideal $I \subseteq G_1$. We have :

(2.2.1) $$\frac{R(A,I)}{R(A,I)\cap(u^k,J)G} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{I^n}{I^n\cap(JG_n+G_{n+k})}$$

(2.2.2) $$\frac{R(A,I)}{R(A,I)\cap JG^+} \approx \sum_{n\geq 0} \frac{I^n}{I^n \cap JG_n}.$$

(2.2.3) If $I \subseteq J$, then $\dfrac{\Re(A,I)}{(u,J)\Re(A,I)} \approx \sum_{n\geq 0} \dfrac{I^n}{JI^n} \approx \dfrac{R(A,I)}{JR(A,I)}$,
where $\Re(A,I) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} I^n X^n$ is the generalized Rees ring of the ideal I.

2.3.- Let J be an ideal of A such that $J + G_k \neq A$, $a_1, \ldots, a_r \in G_1$ and $I = (a_1, \ldots, a_r)$. Put $K_n = I^n \cap (JG_n + G_{n+k})$ for $n \geq 0$ and $Q_J(g,k)$ the graded ring $\sum_n \dfrac{I^n}{K_n}$. Let $t_i = a_i + K_1$ for $i = 1, \ldots, r$. We have :

$$Q_J(g,k) = \frac{A}{K_0}[t_1, \ldots, t_r] = \left\{ \sum_{i_1,\ldots,i_r} (\alpha_{i_1,\ldots,i_r} + K_0)\, t_1^{i_1} \cdots t_r^{i_r} : \alpha_{i_1,\ldots,i_r} \in A \right\}.$$

Let $\varphi_J(g,k)$ be the graded morphism from $\dfrac{A}{J+G_k}[X_1, \ldots, X_r]$ to $Q_J(g,k)$ such that $\varphi_J(g,k)(X_i) = t_i$ for each i and $\varphi_J(g,k)(\alpha) = \alpha$ for $\alpha \in \dfrac{A}{J+G_k}$. There exists an isomorphism ψ_k from $Q_J(g,k)$ to $\dfrac{R(A,I)}{R(A,I)\cap(u^k,J)G}$ such that $\psi_k(t_i) = a_iX + R(A,I)\cap(u^k,J)G$ and $\psi_k(\alpha) = \alpha$ for $\alpha \in \dfrac{A}{J+G_k}$.
Let $u_i = \psi_k(t_i)$ for all i. Then $\dfrac{R(A,I)}{R(A,I)\cap(u^k,J)G} = \dfrac{A}{J+G_k}[u_1, \ldots, u_r]$.
Put $\varphi_k = \varphi_J(g,k)$ and $\theta_k = \psi_k \circ \varphi_k$. We have the following theorem :

THEOREM 2.4. *The following statements are equivalent :*

(i) $a_1, \ldots, a_r$ *are* $J-$*independent of order* k *with respect to* g;

(ii) θ_k *is an isomorphism of* $\dfrac{A}{J+G_k}[X_1, \ldots, X_r]$ *over* $\dfrac{R(A,I)}{R(A,I)\cap(u^k,J)G}$;

(iii) *The elements* $t_1, \ldots, t_r$ *are algebraically independent over* $\dfrac{A}{J+G_k}$;

(iv) *The elements* $u_1, \ldots, u_r$ *are algebraically independent over* $\dfrac{A}{J+G_k}$.

Proof. For all $F = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} \lambda_{i_1,\ldots,i_r} X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}$ where $\lambda_{i_1,\ldots,i_r} \in A$, we put

$$\overline{F}(X_1, \ldots, X_r) = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} (\lambda_{i_1,\ldots,i_r} + K_0) X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}.$$

(i) $\Longleftrightarrow$ *(ii)* The elements $a_1, \ldots, a_r$ are $J-$independent of order k with respect to g if and only if for all $F \in A[X_1, \ldots, X_r]$ homogeneous of degree s,

$F(a_1,\dots,a_r) \equiv 0 \pmod{JG_s + G_{s+k}}$ implies that F has all of its coefficients in $J + G_k$, i.e., $F(a_1,\dots,a_r) \in I^s \cap (JG_s + G_{s+k}) = K_s$ implies that $F \in K_0[X_1,\dots,X_r]$ this means that for all $F \in A[X_1,\dots,X_r]$, $\varphi_k(\overline{F}) = 0$ implies that $\overline{F} = 0$, i.e., φ_k is an isomorphism and θ_k is an isomorphism.

(ii) $\Longleftrightarrow$ *(iv)* $\theta_k(X_i) = u_i$ and, for $G = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} \alpha_{i_1,\dots,i_r} X_1^{i_1}\cdots X_r^{i_r}$,

$$\theta_k(\overline{G}) = \psi_k(\overline{G}(t_1,\dots,t_r)) = \sum_{i_1+\cdots+i_r=s} (\alpha_{i_1,\dots,i_r} + K_0) u_1^{i_1}\cdots u_r^{i_r} = \overline{G}(u_1,\dots,u_r).$$

θ_k being surjective, (ii) holds if and only if θ_k is injective if and only if for all $G \in A[X_1,\dots,X_r]$, $\theta_k(\overline{G}) = 0$ implies that $\overline{G} = 0$ this means that the elements $u_1,\dots,u_r$ are algebraically independent over $\dfrac{A}{J+G_k}$.

(ii) $\Longleftrightarrow$ *(iii)* (ii) holds if and only if φ_k is an isomorphism. Replacing θ_k by φ_k in the proof of ((ii) $\Leftrightarrow$ (iv)) and u_i by t_i one obtains : φ_k is an isomorphism if and only if (iii) holds.

3. REGULAR INDEPENDENCE AND ANALYTIC SPREAD

DEFINITIONS 3.1. **(3.1.1)** Let A be a ring, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $g = (G_n)$ a pregraduation and J an ideal of A. We say that $a_1,\dots,a_r$ are regular J-independent of order k with respect to g if there exists $p \in \mathbb{N}^*$ with $J + G_{pk} \neq A$ such that $a_1,\dots,a_r$ are J-independent of order k with respect to $g^{(p)} = (G_{pn})$.

(3.1.2) The regular J-analytic spread of order k of g is the integer $\ell_J^a(g,k) = \sup\{r \in \mathbb{N}$ such that there exist $a_1,\dots,a_r \in J$, regular J-independent of order k with respect to $g\}$.

(3.1.3) The regular analytic spread of order k of g is the integer $\ell^a(g,k) = \sup\{\ell_{\mathcal{M}}^a(g,k) : \mathcal{M} \in \operatorname{Max} A \text{ and } \mathcal{M} \supseteq G_k\}$.

REMARK 3.2. Let A be a ring and $g = (G_n)$ a pregraduation of A. Then we have :

(i) If the elements $a_1,\dots,a_r$ are J-independent of order k with respect to g, then they are regular J-independent of order k with respect to g. Consequently $\ell_J(g,k) \leq \ell_J^a(g,k)$.

(ii) Assume that J contains G_{ik} for all $i \geq 1$. If $a_1,\dots,a_r$ are regular J-independent of order k with respect to g then they are J-independent of order nk for $n \geq 1$ and of order $+\infty$; consequently,

a) if P is a prime ideal over J, then we have :

$$\ell_J(g,k) \leq \ell_J^a(g,k) \leq \sup(J) \leq ht\ J) \leq \dim A_p$$

b) if A is a nœtherian ring, then $\ell^a_J(g,k) < \infty$.

(iii) $\ell^a(g,k) = \sup\{\ell^a_{\mathcal{M}}(g,k) : \mathcal{M} \in \text{Max } A\}$.

(iv) If A is a nœtherian semi-local ring, then $\ell^a(g,k)$ is finite and there exists a maximal ideal $\mathcal{M}$ over G_k such that $\ell^a(g,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(g,k)$.

THEOREM 3.3. *Let A be a ring, $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$ and $g = (G_n)$ a pregraduation of A. We assume that the sequence $(G_{n+k})_{n\geq 0}$ is decreasing or that $G_{n+k} \subseteq G_n$ for each $n \geq 1$. Let J be an ideal of A which contains G_k.*

(i) *We have $\ell_J(g^{(n)},k) \leq \ell_J(g^{(pn)},k) \leq \ell^a_J(g,k)$ for $n,p \in \mathbb{N}^*$.*

If A is nœtherian, then we have :

(ii) *There exists $p \in \mathbb{N}^*$ such that $\ell^a_J(g,k) = \ell_J(g^{(pn)},k)$ for $n \in \mathbb{N}^*$*

(iii) $\ell^a_J(g,k) = \sup\left\{\ell_J(g^{(n)},k) : n \in \mathbb{N}^*\right\}$

(iv) $\ell^a_J(g,k) = \ell^a_J(g^{(p)},k)$ *for $p \in \mathbb{N}^*$*

(v) *The sequence $n \mapsto \ell_J(g^{(n!)},k)$ is an increasing and eventually stationary sequence of limit $\ell^a_J(g,k)$.*

Proof. *(i)* For $n \geq 1$, if elements $a_1, \dots, a_r$ are in J and are J−independent of order k with respect to $g^{(n)}$, then they are regular J−independent of order k with respect to g. Hence $\ell^a_J(g,k) \geq r$; so, $\ell_J\left(g^{(n)},k\right) \leq \ell^a_J(g,k)$.
Furthermore, from (1.5)-(ii) we have :

$$\ell_J\left(g^{(n)},k\right) \leq \ell_J\left(\left[g^{(n)}\right]^{(p)},k\right) = \ell_J\left(g^{(pn)},k\right) \leq \ell^a_J(g,k), \text{ for all } p \geq 1.$$

Hence we have (i).

Suppose that A is nœtherian. Then we have :

(ii) If $a_1, \dots, a_r \in J$ are J−independent of order k with respect to $g^{(p)}$ with $p \geq 1$, we have from (1.2)-(ii) : J contains all G_n, $n \geq 1$ and from (3.2)-(ii), $\ell^a_J(g,k)$ is finite.

Let $r = \ell^a_J(g,k)$. There exists $p \geq 1$ and elements $b_1, \dots, b_r \in J$ which are J−independent of order k with respect to $g^{(p)}$. Therefore $\ell^a_J(g,k) \leq \ell_J(g^{(p)},k)$. Using (i) we have : $\ell^a_J(g,k) = \ell_J\left(g^{(pn)},k\right)$ for $n \geq 1$.

(iii) is a consequence of (i) and (ii).

(iv) (i) and (iii) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\ell^a_J(g,k) &= \sup\left\{\ell_J(g^{(n)},k) : n \in \mathbb{N}^*\right\} \\ &\leq \sup\left\{\ell_J(g^{(pn)},k) : n \in \mathbb{N}^*\right\} \leq \ell^a_J(g,k).\end{aligned}$$

$$\text{So, } \ell^a_J(g,k) = \sup\left\{\ell_J(g^{(pn)},k) : n \in \mathbb{N}^*\right\} = \ell^a_J(g^{(p)},k).$$

(v) is a consequence of (i) and (ii).

Applying Theorem 3.3 to nœtherian filtrations we obtain the following result which gives a characterization of the regular J–analytic spread of a nœtherian filtration $f = (I_n)$ in terms of $\ell_J(I_n)$.

COROLLARY 3.4. *Let A be a nœtherian ring, $f = (I_n)$ a nœtherian filtration on A and J an ideal of A over I_1. Let k be an integer in $\overline{\mathbb{N}^*}$. We assume that m is a positive integer such that $I_{mn} = I_m^n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then*

(i) $\ell_J^a(f,k) = \ell_J^a(I_{mn},k)$ *for* $n \in \mathbb{N}^*$

(ii) *There exists $p \in \mathbb{N}^*$, which is a multiple of m such that*
$$\ell_J^a(f,k) = \ell_J(I_{pn},k) \quad \text{for } n \in \mathbb{N}^*$$

(iii) $\ell_J^a(f,k) = \sup\{\ell_J(I_{mn},k) : n \in \mathbb{N}^*\}$

(iv) *the sequence $n \mapsto \ell_J(I_{mn!},k)$ is an increasing and eventually stationary sequence of limit $\ell_J^a(f,k)$*

(v) *the sequence $n \mapsto \ell_J(I_{n!},k)$ is eventually stationary of limit $\ell_J^a(f,k)$.*

COROLLARY 3.5. *Let A be a nœtherian ring, $f = (I_n)$ a nœtherian filtration on A and $m \geq 1$ an integer such that $I_{mn} = I_m^n$ for $n \geq 0$. Let $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$.*

(i) *If $\mathcal{M}$ is a maximal ideal over $\sqrt{J}$, we have* $\ell_{\mathcal{M}}^a(f,k) = \ell_{\mathcal{M}}^a(f)$

(ii) $\ell^a(f,k) = \ell^a(f)$.

Proof. *(i)* From the definition, $\ell_{\mathcal{M}}^a(f,k) = \sup\{\ell_{\mathcal{M}}(I_m^n,k) : n \in \mathbb{N}^*\}$.

If $J \supseteq I_p$, $JI_p^s + I_p^{s+k} = JI_p^s$ and $J + I_p^k = J$. Therefore the elements of I_p are J–independent of order k with respect to f_{I_p} if and only if they are J–independent with respect to f_{I_p}. Thus we have : $\ell_{\mathcal{M}}(I_m^n,k) = \ell_{\mathcal{M}}(I_m^n)$ for $n \geq 1$ and $\ell_{\mathcal{M}}^a(f,k) = \sup\{\ell_{\mathcal{M}}(I_m^n) : n \in \mathbb{N}^*\} = \ell_{\mathcal{M}}^a(f)$.

(ii) If $k \in \mathbb{N}^*$ and $\mathcal{M}$ a maximal ideal over I_k then $\sqrt{J} \subseteq \mathcal{M}$.
Taking the supremum we have (ii).

EXAMPLE 3.6. Here we prove that $\ell(g,k)$ can be different from $\ell^a(g,k)$ even for a nœtherian filtration of a local ring with infinite residue field.

Let $(A,\mathcal{M})$ be a nœtherian local ring and I a proper ideal of A the analytic spread of which is given by $\gamma(I) = \dim \sum_{n \geq 0} (I^n/\mathcal{M}I^n) = 2$.

(For instance it is the case if A is equal to the localized of $K[X_1,X_2,X_3]$ at (X_1,X_2,X_3), I the localized of (X_1,X_2) and K a field).

If $A/\mathcal{M}$ is infinite, then by D. G. Northcott and D. Rees [3, §3, Theorem 3], $\ell(I)$ is equal to the analytic spread of I, i.e., $\ell(I) = \gamma(I) = 2$. (See [1, §0] for various interpretations of analytic spread).
Thus, there exist $a_1, a_2 \in I$ which are $\mathcal{M}$-independent with respect to f_I.

a) Let $g = (G_n)$ be such that $G_n = A$ for $n \leq 0$, $G_{4n} = I^{2n}$ for $n \geq 1$, $G_{4n+1} = G_{4n+2} = I^{2n+2}$ and $G_{4n+3} = I^{2n+3}$ for $n \geq 0$. One verifies that g is a pregraduation of A and is not a filtration. For all $a \in G_1$ we have :

$$1\,a^{4n+2} = aa^{4n+1} \in G_1 G_{4n+2} \subseteq \mathcal{M}G_{4n+2} + G_{4n+2+k}, \text{ for } n \geq 1.$$

But $1 \notin \mathcal{M} = \mathcal{M} + G_k$ therefore $\ell(g,k) = 0$.
From Theorem 3.3, Corollary 3.4 and [1, (2.4)] we have :
$\ell^a_{\mathcal{M}}(g,k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(g^{(4)},k) = \ell^a_{\mathcal{M}}(I^2,k) = \ell^a(I,k) = \sup\{\ell(I^n) : n \in \mathbb{N}^*\} = \sup\{\gamma(I^n) : n \in \mathbb{N}^*\} = \gamma(I)$. Thus $\ell^a(g,k) = 2 \neq \ell(g,k) = 0$.

b) Let $f = (I_n)$ be a filtration such that $I_n = A$ for $n \leq 0$, $I_{2n} = I^n$ for $n \geq 1$ and $I_{2n+1} = I^{n+1}$ for $n \geq 0$. One verifies that f is a nœtherian filtration.
For $k \in \overline{\mathbb{N}^*}$, $a \in G_1$ and $n \geq 1$, we have : $a^{2n+2} = a\,a^{2n+1} \in I_1 I_{2n+2}$.
Thus $a^{2n+2} \in \mathcal{M}I_{2n+2} + I_{2n+2+k}$. As $1 \notin \mathcal{M}$, we have : $\ell(f,k) = 0$.
Furthermore, $\ell^a(f,k) = \ell^a(I,k) = \sup\{\ell(I^n) : n \in \mathbb{N}^*\} = \gamma(I) = 2 \neq \ell(f,k)$.

Okon defined in [4, (2.1.7)] the analytic spread of a filtration f by the integer : $\gamma(f,1) = \sup\left\{\dim \dfrac{\Re(A,f)}{(u,\mathcal{M})\Re(A,f)} : \mathcal{M} \in \operatorname{Max} A\right\}$ where $\Re(A,f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n X^n$ for $f = (I_n)$ and $u = X^{-1}$. By (2.1.2), this means that

$$\gamma(f,1) = \sup\left\{\dim \sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{\mathcal{M}I_n + I_{n+1}} : \mathcal{M} \in \operatorname{Max} A\right\}.$$

PROPOSITION 3.7. *Let $(A,\mathcal{M})$ be a nœtherian local ring, $f = (I_n)$ a nœtherian filtration on A and I an ideal of A. If $A/\mathcal{M}$ is infinite then :*

(i) $\ell(f,k) \leq \ell(f)$ *and* $\ell(f,k) \leq \ell^a(f,k) = \ell^a(f) = \gamma(f,1) = \gamma_{\mathcal{M}}(f) = \tau_{\mathcal{M}}(f)$

(ii) $\ell(I) = \ell^a(I) = \gamma(I,1) = \gamma_{\mathcal{M}}(I) = \tau_{\mathcal{M}}(I)$

$$\textit{with } \gamma_J(f) = \dim \frac{R(A,f)}{JR(A,f)} \textit{ and } \tau_J(f) = \operatorname{tr\,deg}_{\frac{A}{J+G_k}} \frac{R(A,f)}{JR(A,f)}$$

where dim *designates the Krull dimension and* tr deg *designates the transcendence degree (See [2, §1]).*

Proof. *(i)* Let $p \geq 1$ be such that $I_{pn} = I_p^n$ for $n \geq 0$. Then

$$\ell^a(f) = \ell^a(I_p) = \sup\left\{\ell(I_p^n) : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

By Northcott and Rees [3, §3, Theorem 3], as $A/\mathcal{M}$ is infinite, we have $\ell(I_p^n) = \gamma(I_p^n)$.

From Propositions (2.4) and (2.12) of [1], there exists $q \geq 1$ such that

$$\gamma(I_p^n) = \gamma(I_p) = \gamma(I_{pq}) = \gamma_{\mathcal{M}}(f) = \gamma(f,1) = \tau_{\mathcal{M}}(f).$$

With Corollary 3.5, Remark 3.2-(i) and Proposition 1.2-(i) we have :

$$\ell^a(f,k) = \ell^a(f) \geq \ell(f,k) \text{ and } \ell(f,k) \leq \ell(f).$$

(ii) If $A/\mathcal{M}$ is infinite, then $\ell(I) = \gamma(I)$ and the conclusion follows from (i).

References

[1] Y. Diagana, H. Dichi and D. Sangaré, Filtrations, generalized analytic independence, analytic spread, Afrika Matematika, Série 3, 4 (1994) 101-114.

[2] E. Hamann, Krull dimension and transcendence degree, Comm. Algebra 18 (4) (1990) 1189-1198.

[3] D. G. Northcott and D. Rees, Reduction of ideals in local rings, Proc. Cambridge Philos. Soc. 50 (1954) 145-158.

[4] J. S. Okon, Prime divisors, analytic spread and filtrations, Pacific J. Math. 113 (1984) 451-462.