Université de Ouagadougou

- Unité de formation et de recherche en Sciences exactes et Appliquées -

THÈSE

présentée en vue d'obtenir le titre de

Docteur de l' Université de Ouagadougou

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Option : **Théorie du Contrôle**

Par

Somdouda SAWADOGO

Titre

Contrôlabilité de systèmes dissipatifs à deux temps. Application à la théorie des sentinelles

Soutenue publiquement le 29 Mars 2005 devant le Jury ci-dessous :

Président : Jean Pierre PUEL — Professeur à l'Université de Versailles, Saint-Quentin

Examinateurs :

Konaté DIALLA — Professeur à l'Université de Virginia Tech Blacksburg (U.S.A)

Dembo GADIAGA — Maître Assistant à l'Université de Ouagadougou

Ousseynou NAKOULIMA — Co-directeur de thèse, Professeur à l'Université des Antilles et de la Guyane

Albert OUEDRAOGO — Co-directeur de thèse, Professeur à l'Université de Ouagadougou

Blaise SOME — Professeur à l'Université de Ouagadougou

DÉDICACE

Je dédie ce travail à mon père et à ma mère qui m'ont toujours soutenu durant ces longues années d'études.

Ma fiancée T. Salamata et mes frères et sœurs m'ont été d'un soutien inestimable, je leur dédie ce travail.

REMERCIEMENTS

Le Professeur Albert OUÉDRAOGO a dirigé cette thèse, il n'a cessé de m'encourager et de me prodiguer des conseils tout au long de ce travail; qu'il soit permis de lui exprimer toute ma reconnaissance et ma gratitude.

Le Professeur Ousseynou NAKOULIMA m'a proposé le sujet extrêmement riche de cette thèse et, malgré la distance, a su motivé mon intérêt pour ce travail. Il a su me communiquer par son enthousiasme, son sens aigu de la recherche et sa disponibilité, le goût de la recherche en théorie du contrôle. Ma sincère reconnaissance et ma profonde estime lui sont adressées à travers l'aboutissement de ce travail.

Le Professeur Jean-Pierre PUEL a accepté de présider le jury de cette thèse. Je lui remercie de tout cœur.

Je souhaite adresser des sincères remerciements aux Professeurs Alex Sylvère MÉRIL et Robert JANIN de l'Université des Antilles et de la Guyane pour m'avoir fait l'honneur de faire un rapport sur cette thèse. Ils ont réalisé cette tâche ingrate malgré de nombreuses activités; qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Le Professeur Konaté DIALLA m'a fait un grand honneur en participant au jury, je le remercie.

Le Professeur Blaise SOMÉ a accepté d'être membre du jury de cette thèse, je l'en remercie. Je le remercie également pour tout ce qu'il fait pour les jeunes mathématiciens.

Le Docteur Dembo GADIAGA malgré ses occupations administratives, nous fait l'honneur d'examiner ce travail, je le remercie pour tout ce qu'il a fait.

Le Docteur Oumar TRAORÉ avec qui, nous avons eu des discussions enrichissantes tout au long de ce travail a éclairci mes idées sur les problèmes de la dynamique des populations. Je lui adresse mes sincères remerciements.

Je remercie tous les enseignants et tout le personnel de l'UFR/SEA, tous ceux que je n'ai pas pu cité ici.

Je remercie mes amis des Laboratoires AMSYC, LANIBIO, LAME et AGATA.

Je ne saurais terminer sans remercier mes amis et parents qui m'ont soutenu. Que chacun trouve en ce travail son effort personnel.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La notion de sentinelles est un outil d'analyse pour étudier des systèmes d'évolution à données incomplètes. La théorie a été initiée et developpée par J.L.Lions pour des problèmes d'évolution à *un temps*. Le travail qui suit propose une extension de la notion à des problèmesd'évolution à *deux temps*. La notion de sentinelles telle que décrite par Lions repose sur trois considérations :

- une équation d'état à données incomplètes,

- un système d'observation

- une fonction d'analyse appelée sentinelle.

L'introduction générale qui suit est consaccrée à une présentation formelle de ces trois points. Leur developpement est l'objet de cette thèse.

1.1 Systèmes à données incomplètes

On considère dans ce travail des systèmes distribués qui sont décrits par des équations aux dérivées partielles d'évolution à deux temps ; c'est à dire des systèmes dont l'état du système, qui sera noté y, est donné par la résolution d'un problème aux limites pour une équation aux dérivées partielles, d'évolution à deux temps.

En précisant un peu, on suppose que la *structure générale* de l'équation aux dérivées partielles qui gouverne l'état du système étudié est connue, soit formellement

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} + \mathcal{A}y = \textit{source} \text{ dans l'ouvert } (0,T) \times (0,A) \times \Omega \tag{1.1}$$

où Ω désigne un domaine de $\mathbf{R}^n (n = 1, 2, 3$ dans les applications), t et a sont deux variables de temps et $\mathcal{A}$ est un opérateur.

Pour que l'état puisse être défini, il faut donc connaître :

$$\left| \begin{array}{l} \text{les coefficients de l'opérateur } \mathcal{A} \text{ et la structure des} \\ \text{non linéarités éventuelles} \end{array} \right. \tag{1.2}$$

les termes sources qui apparaissent au $2^{ème}$ membre de (1.1) (1.3)

les conditions initiales (1.4)

les conditions aux limites (1.5)

et

l'ouvert Ω (1.6)

Le système est dit à données incomplètes si l'une au moins des informations (1.2)...(1.6) n'est que partiellement connue.

1.2 Termes manquants et termes de pollution

Considérons la situation suivante. On suppose que l'opérateur $\mathcal{A}$ est elliptique du $2^{ème}$ ordre. On suppose que l'équation (1.1) s'écrit

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} + \mathcal{A}y = f + \lambda \widehat{f} \tag{2.1}$$

où f est donnée dans un espace fonctionnel convenable, disons Y, et où $\lambda \widehat{f}$ n'est pas connu. On suppose seulement que

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{f} \text{ est dans la boule unité de } Y \\ \lambda \text{ est "petit" dans } \mathbf{R}. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

On note $y = y(t, a, x)$. On suppose que les coefficients de $\mathcal{A}$ et l'ouvert Ω sont connus mais que les données initiales en temps t sont incomplètes. Si l'on désigne par $y(0, ., .)$ la fonction $(a, x) \longmapsto y(t = 0; a, x)$, la condition initiale en temps t s'exprime sous la forme

$$y(0, a, x) = y^0(a, x) + \tau\widehat{y}^0(a, x) \tag{2.3}$$

où y^0 est donné et où

$$\left| \begin{array}{l} \widehat{y}^0 \text{ est dans la boule unité d'un espace de Hilbert ou de Banach} \\ \text{convenable et avec } \tau \text{ "petit".} \end{array} \right. \tag{2.4}$$

On suppose par ailleurs que les conditions aux limites sont connues, par exemple

$$y = 0 \text{ pour } (t, a, x) \in (0, T) \times (0, A) \times \Gamma \tag{2.5}$$

Notre objet dans ce travail est, pour l'exemple précédent, puis éventuellement pour des familles d'autres exemples, de donner des méthodes permettant *d'obtenir des informations sur $\lambda\widehat{f}$ qui ne soit pas affectées par les variations de la donnée initiale (en temps t) au voisinage de $y^0(a, x)$.*

On établit ainsi une distinction entre le terme $\lambda\widehat{f}$ qui est dit "*terme de pollution*" et le terme $\tau\widehat{y}^0$ qui est dit "*terme manquant*" et que l'on ne cherche pas à identifier.

Remarque 1.2.1 *Pour le problème précédent, en plus de la condition initiale (2.3), nous avons besoin d'une condition initiale en temps a. Elle est donnée par*

$$y(t, 0, x) = y^1(t, x) \tag{2.6}$$

où y^1 est donnée.

Naturellement, pour espérer obtenir quelques informations il faut *"observer y "*

1.3 Observation du système

On "*observe*" l'état du système sur un observatoire O pendant un intervalle de temps T. L'observatoire O est supposé distribué i.e :

$$O \subset \Omega \tag{3.1}$$

On a donc

$$y(t,a,x;\lambda\widehat{f},\tau\widehat{y}^0) = m_0(t,a,x) \text{ dans } (0,T)\times(0,A)\times O \tag{3.2}$$

où m_0 est connue.

En fait, il y a un *"bruit"* dans l'observation m_0, et on a donc plutôt

$$y(t,a,x;\lambda\widehat{f},\tau\widehat{y}^0) = m_0(t,a,x) + \beta k(t,a,x) \text{ dans } (0,T)\times(0,A)\times O \tag{3.3}$$

où $k(t,a,x) = k \in$ espace $\mathcal{K}$, k demeurant dans la boule unité de $\mathcal{K}$ et où β est petit.

Moyennant une observation du système, le problème maintenant est le suivant :

$$\left|\begin{array}{l}\text{peut-on obtenir, à partir de la donnée de } m_0\text{, des informations sur } \lambda\widehat{f}\\ \text{qui soient indépendantes des variations de } y(0,.,.) \text{ au voisinage de } y^0\,?\end{array}\right. \tag{3.4}$$

et, dans le cas où il y a un bruit βk dans l'observation :

peut-on obtenir des informations sur $\lambda\widehat{f}$ qui soient indépendantes des variations de $y(0,.,.)$ au voisinage de y^0 et qui ne soient pas affectées par le bruit βk ? (3.5)

La notion de sentinelle tente de donner des éléments de réponses à ces questions.

1.4 Sentinelles

Soit $y(t,a,x;\lambda,\tau) = y(\lambda,\tau)$ l'état correspondant à une pollution $\lambda\widehat{f}$ et à un terme manquant $\tau\widehat{y}^0$. On écrit formellement $y(\lambda,\tau)$ pour simplifier l'écriture et on considère pour le moment le cas où il n'y a pas de bruit additif dans l'observation sur $(0,T) \times (0,A) \times O$. Les $\lambda\widehat{f}$ et $\tau\widehat{y}^0$ correspondant à la situation réelle satisfont à :

$$y(\lambda,\tau) = m_0 \text{ sur } (0,T) \times (0,A) \times O \tag{4.1}$$

Soit h_0 une fonction donnée sur $(0,T) \times (0,A) \times O$, on considère la fonction S définie par

$$S(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_0^A \int_O h_0 y(\lambda,\tau) dt da dx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega w y(\lambda,\tau) dt da dx \tag{4.2}$$

où ω est un autre ouvert de Ω et où $w = w(t,a,x)$ est une fonction à déterminer de manière que :

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0,\ \forall \widehat{y}^0,\ \ \|\widehat{y}^0\|_{L^2((0,A)\times\Omega)} \leq 1 \tag{4.3}$$

et

$$\|w\|_{L^2((0,T)\times(0,A)\times\omega)} = \min imum \tag{4.4}$$

La condition (4.3) exprime l'insensibilité (désirée) de la fonctionnelle par rapport à τ au premier ordre près.

La fonctionnelle, supposée non nulle, définie par (4.3) et (4.4) est appelée sentinelle, plus précisément la sentinelle définie par h_0, ω et O.

1.5 Informations fournies par les sentinelles

Si l'on suppose que l'état $y(\lambda, \tau)$ dépend différentiablement de λ et de τ, on peut écrire, formellement

$$S(\lambda, \tau) \simeq S(0,0) + \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) \tag{5.1}$$

(puisque, par hypothèse, $\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0$). Utilisant (4.1) on peut donc écrire

$$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) \simeq \int_0^T \int_0^A \int_O h_0(m_0 - y_0)dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega w(m_0 - y_0)dtdadx \tag{5.2}$$

où y_0 est l'état calculé pour $\lambda = 0$, $\tau = 0$.

Par conséquent, on a une estimation de la quantité

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) = \int_0^T \int_0^A \int_O h_0 y_\lambda dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega w y_\lambda dtdadx \tag{5.3}$$

où y_λ désigne la dérivée en λ de l'état pour $\lambda = 0$, $\tau = 0$. Cette dérivée y_λ ne dépend plus que des quantités connues et de $\widehat{f}$. Par conséquent l'estimation (5.2) de $\lambda\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0)$ contient des informations sur $\lambda\widehat{f}$. Plus précisément, en introduisant l'état adjoint q de l'état y comme il sera indiqué au Chapitre 2, nous verrons que (5.3) est donné par une forme linéaire sur $\lambda\widehat{f}$:

$$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) = \int_0^T \int_0^A \int_\Omega q \lambda \widehat{f} dtdadx \tag{5.4}$$

Finalement on a l'estimation

$$\int_0^T \int_0^A \int_\Omega q\lambda\widehat{f}dtdadx \simeq \int_0^T \int_0^A \int_O h_0(m_0 - y_0)dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega w(m_0 - y_0)dtdadx \tag{5.5}$$

qui est une égalité dans le cas linéaire.

Telle est l'information fournie par une sentinelle sur la pollution $\lambda\widehat{f}$. Une pollution $\lambda\widehat{f}$ est par conséquent non détectable (on dira : furtive pour la sentinelle définie par h_0) si

$$\int_0^T \int_0^A \int_\Omega q\lambda\widehat{f}dtdadx = 0. \tag{5.6}$$

On a organisé la présentation du travail de la manière suivante. On reprend au **Chapitre 2** de façon précise la notion de sentinelles pour les systèmes dissipatifs à deux temps et à données incomplètes. Ce qui nous conduira à mettre en évidence des problèmes de contrôlabilité. Les problèmes de contrôlabilité ainsi mis en évidence nécessitent pour leurs résolutions des outils mathématiques que nous présenterons au **Chapitre 3**. Le **Chapitre 4** est consacré à la résolution effective des problèmes de contrôlabilité. Enfin au **Chapitre 5** on étudiera la furtivité pour un ensemble de sentinelles.

Chapitre 2

Sentinelles pour systèmes dissipatifs à deux temps et à données incomplètes

2.1 Systèmes distribués à deux temps et à données incomplètes

2.1.1 Equation d'état à données incomplètes

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$ dans les applications) de frontière Γ variété de classe C^∞. Soient T et A deux réels strictement positifs. On pose :

$$
\begin{aligned}
U &= (0,T)\times(0,A)\\
Q_A &= (0,A)\times\Omega\\
Q_T &= (0,T)\times\Omega\\
Q &= U\times\Omega\\
\Sigma &= U\times\Gamma
\end{aligned}
$$

et on considère le problème d'évolution à deux temps suivant :

$$
\begin{cases}
\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}-\Delta y+\mu y = f+\lambda\widehat{f} \ \text{ dans } Q\,;\\
y=0 \ \text{ sur } \Sigma\,;\\
y(0,a,x)=y^0(a,x)+\tau\widehat{y}^0(a,x) \quad \text{dans } Q_A\,;\\
y(t,0,x)=\int_0^A \beta(t,a,x)y(t,a,x)da \ \text{ dans } Q_T.
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

Les données de (1.1) sont incomplètes au sens suivant :

f et y^0 sont connues avec $f\in L^2(Q)$ et $y^0\in L^2(Q_A)$. Par contre les termes $\lambda\widehat{f}$ et $\tau\widehat{y}^0$ ne sont pas connus. On sait seulement que :

$$
\begin{cases}
\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(Q)}\leq 1\,;\ \|\widehat{y}^0\|_{L^2(Q_A)}\leq 1\\
\text{et}\\
\lambda\in\mathbf{R},\ \tau\in\mathbf{R} \text{ sont supposés assez petits.}
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

Le système (1.1) est un modèle linéaire de la dynamique des populations (c'est à dire l'étude de l'évolution des populations soumises à certaines contraintes). Ce genre de problèmes posés aux démographes et biologistes a attiré l'attention des mathématiciens depuis fort longtemps : conférer entre autres Hoppenstead [12], Gurtin-MC Camy [11]. Dans le système (1.1), la dynamique de la population est décrite au moyen d'une fonction y dépendant des trois variables (t, a, x) où t est le temps, a est l'âge et x la position géographique :

$$t \in (0, T), \ a \in (0, A), \ x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$$

A est un majorant de l'âge maximum que peut atteindre un individu quelconque de l'espèce considérée. La fonction $y = y(t, a, x)$ représente la densité d'individus d'âge $a \in (0, A)$, à l'instant $t \in (0, T)$ et à la position géographique x dans le domaine Ω de $\mathbf{R}^n$. Ainsi l'intégrale $\int_{a_1}^{a_2} \int_\Omega y(t, a, x) da dx$ représente le nombre d'individus dont l'âge est compris entre a_1 et a_2, qui à l'instant t, se trouvent dans la région Ω.

Dans l'équation $(1.1)_1$ les termes μ et f s'interprètent de la manière suivante :

- le terme μ est le taux de mortalité, taux dépendant de l'âge a, et éventuellement du temps t et de la position géographique x. Ainsi si V est un volume contenu dans Ω, la quantité $\int_V \mu(t, a, x) y(t, a, x) dx$ représente le nombre de décès d'individus d'âge a dans V à l'instant t. On supposera μ bornée mais ayant une très grande valeur au voisinage de A.

- le terme $f = f(t, a, x)$ est une fonction en général nulle, elle tient compte d'éventuelles modifications dans la population dues à d'autres causes que la mort et les naissances. Si par exemple on considérait une population de poissons dans un lac, f représenterait le nombre de poissons prélevés dans le lac et le terme $\lambda \widehat{f}$ serait une incertitude associée à ce prélèvement quant au comportement global de la source.

L'équation $(1.1)_2$ indique que la frontière du domaine est inhospitalière. A l'instant initial on a une densité y^0 qui est donnée par $(1.1)_3$, le terme $\tau \widehat{y}^0$ est une incertitude associée à y^0. Enfin le processus de naissance est décrit par l'équation $(1.1)_4$ où $\beta(t, a, x)$ est le taux de natalité. Le terme $\int_0^A \beta(t, a, x) y(t, a, x) da$ représente le nombre d'individus qui naissent à l'instant t, au lieu géographique x.

Remarque 2.1.1 *Beaucoup d'auteurs se sont intéressés à la résolution de problèmes de dynamique des populations. Dans [10] les auteurs ont montré l'existence d'une solution faible d'un modèle linéaire du type (1.1). Dans [31, 26] l'auteur montre l'existence d'une solution faible pour un modèle non linéaire. D'autres auteurs ont mené des études dans le même sens avec différentes méthodes. Dans [25] l'auteur a résolu un problème non linéaire par la méthode des semi-groupe. Dans [24] les auteurs utilisent une méthode de régularisation parabolique pour montrer l'existence d'une solution positive au problème étudié dans [25]*

2.1.2 Orientation

Pour le système (1.1), (1.2) le problème posé est d'obtenir des informations sur le terme $\lambda\widehat{f}$ qui ne soient pas affectées par les variations de la donnée initiale $y(0, a, x)$ autour de $y^0(a, x)$. Le terme $\lambda\widehat{f}$ est un terme de pollution et le terme $\tau\widehat{y}^0$ est un terme manquant. On cherche à estimer la pollution. On ne cherche pas les termes manquants. On rencontre évidemment ce type de problème pour les problèmes d'évolution à un temps, par exemple l'équation de la chaleur. Pour les problèmes d'évolution à un temps, la théorie des sentinelles de Lions [15] apporte des éléments de réponses. Comme annoncé dans l'introduction, la notion de sentinelles, initiée et developpée par Lions dans les années 1980-1990 [16, 17, 18] pour des problèmes d'évolution à *un temps*, repose entre autres sur la donnée d'une fonction "observation" m_0 et la recherche d'une fonction "contrôle" w ayant toutes deux leurs supports dans *un même ouvert.*

La notion a été ensuite généralisée par Nakoulima [22] pour une observation m_0 et un contôle w ayant leurs supports dans deux *ouverts distincts* et toujours pour un problème d'évolution à *un temps.* Dans ce qui suit nous considérons le point de vue de Nakoulima pour définir et proposer une notion de sentinelles pour des problèmes d'évolution à *deux temps.*

2.2 Une notion de sentinelle pour les problèmes d'évolution à deux temps

2.2.1 Définitions

Equation d'état : c'est le système (1.1) qui gouverne l'état y du système évolutif. Pour le problème (1.1), on fait les hypothèses suivantes :

$$(H_1) : \beta, \mu \in L^{\infty}_{loc}(Q); \beta \geq 0, \mu \geq 0;$$

$$(H_2) : \widehat{y}^0 \in L^2(Q_A); \widehat{f} \in L^2(Q) \text{ et } \lambda, \tau \in \mathbf{R};$$

$$(H_3) : \begin{cases} 0 < t < A, \ x \in \Omega, \ \int_0^t \mu(\iota, a - t + \iota, x) d\iota \longrightarrow +\infty \text{ quand } a \longrightarrow A \\ A < t < T, \ x \in \Omega, \ \int_0^a \mu(t - a + \alpha, \alpha, x) d\alpha \longrightarrow +\infty \text{ quand } a \longrightarrow A \end{cases}$$

Sous les hypothèses $(H_1), (H_2)$ et (H_3) le problème (1.1) admet une solution unique dans $L^2(Q)$ notée

$$y = y(t, a, x; \lambda, \tau) = y(\lambda, \tau). \tag{2.1}$$

Remarque 2.2.1 *L'hypothèse (H_3) assure que la solution de (1.1) s'annule pour $a = A$. (voir[10, 13])*

Système d'observation : il est defini par un ouvert $O \subset \Omega$ appelé observatoire et une observation de y sur O pendant l'intervalle de temps T. On dispose donc de :

$$y(t, a, x; \lambda, \tau) = y_{obs} \text{ sur } U \times O \tag{2.2}$$

pour laquelle on distingue deux cas : le cas d'une observation sans bruit, i.e

$$y_{obs} = m_0 \tag{2.3}$$

où $m_0 \in L^2(U \times O)$ est connue. On distingue ensuite le cas d'une observation bruitée, i.e

$$y_{obs} = m_0 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i m_i \tag{2.4}$$

où les fonctions $m_0, m_1, ..., m_N$ sont connues dans $L^2(U \times O)$; mais les β_i ne sont pas connus. On sait seulement que les β_i sont "petits". On dit que les termes $\beta_i m_i$ sont les termes de *"bruits"*. Dans ce cas on veut aussi obtenir des informations sur $\lambda\widehat{f}$ qui soient indépendantes de $\tau\widehat{y}^0$ et des $\beta_i m_i$, $i = 1, ..., N$

Sentinelle $S(\lambda, \tau)$: C'est une fonctionnelle à construire à partir de l'ouvert O, d'une fonction h_0 donnée dans $L^2(U \times O)$ et d'un autre ouvert non vide ω de Ω. Plus précisément pour une fonction contrôle $w \in L^2(U \times \omega)$ à déterminer on pose :

$$S(\lambda, \tau) = \int_0^T \int_0^A \int_O h_0 y(\lambda, \tau) dt da dx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega w y(\lambda, \tau) dt da dx. \tag{2.5}$$

Comme c'est à partir de l'observation que l'on veut estimer $\lambda\widehat{f}$, on est amené à distinguer deux types de sentinelles correspondant chacun à un type d'observation. On explicite et on précise maintenant tout cela en distinguant deux problèmes modèles.

2.2.2 Problèmes modèles

Problème 1 : Sentinelles pour une observation sans bruit

On cherche à obtenir des informations sur les termes de pollution $\lambda\widehat{f}$ qui soient insensibles aux données manquantes $\tau\widehat{y}^0$. Par définition on dira que S donnée par (2.5) est une *sentinelle* définie par h_0, ω et O s'il existe une fonction contrôle w telle que le couple (w, S) vérifie les deux conditions suivantes :

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0, \forall\, \widehat{y}^0 \in L^2(Q_A), \left\|\widehat{y}^0\right\|_{L^2(Q_A)} \leq 1 \tag{2.6}$$

et

$$\|w\|_{L^2(U\times\omega)} = \min imum. \tag{2.7}$$

Remarque 2.2.2 *h_0 étant donnée, les conditions (2.6), (2.7) définissent au plus un unique w. On dira alors que S est la sentinelle définie par h_0.*

Remarque 2.2.3 *La condition (2.6) exprime l'insensibilité de S par rapport à τ (au premier ordre près); autrement dit si l'état du système est connu pour $\lambda = 0$ et $\tau = 0$ (i.e sans perturbations) alors pour une perturbation $\lambda \neq 0$, $\tau \neq 0$, on a :*

$$S(\lambda, \tau) \simeq S(0,0) + \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0)$$

Remarque 2.2.4 *Si h_0 vérifie*

$$h_0 \geq 0, \quad \int_U \int_O h_0 dt da dx = 1$$

alors

$$\int_U \int_O h_0 y(t,a,x;\lambda,\tau) dt da dx$$

est une moyenne. La condition (2.7) exprime alors que S est "proche" d'une moyenne (au sens de L^2). Dans les applications h_0 est à notre disposition. La condition (2.7) exprime que l'on "s'éloigne le moins possible"(au sens L^2) de h_0.

Problème 2 : Sentinelles pour une observation avec bruit

On cherche dans ce cas à obtenir des informations sur les termes de pollution $\lambda \widehat{f}$ qui soient non seulement insensibles aux données manquantes $\tau \widehat{y}^0$ mais aussi aux bruits $\beta_i m_i$.

Par définition, on dira que S donnée par (2.5) est une *sentinelle discriminante* définie par h_0, ω et O s'il existe une fonction contrôle w telle que le couple (w, S) vérifie les trois conditions suivantes :

$$\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0, \ \forall\, \widehat{y}^0 \in L^2(Q_A), \ \ \|\widehat{y}^0\|_{L^2(Q_A)} \leq 1 \tag{2.8}$$

$$\int_0^T \int_0^A \int_O h_0 m_i dt da dx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega w m_i dt da dx = 0, 1 \leq i \leq N \tag{2.9}$$

et

$$\|w\|_{L^2(U\times\omega)} = \min imum. \tag{2.10}$$

Remarque 2.2.5 *Le cas $\omega = O$ correspondrait au point de vue de Lions [15]. Dans ce cas les fonctions h_0 et w ont toutes deux leurs supports dans $\omega = O$. La relation (2.5) s'écrit alors*

$$S(\lambda, \tau) = \int_0^T \int_0^A \int_O (h_0 + w) y(\lambda, \tau) dt da dx \tag{2.11}$$

et il est immédiat que $w = -h_0$ est un contrôle tel que $S(\lambda, \tau) \equiv 0$. Le seul problème dans ce cas est de montrer que le contrôle w de norme minimale est tel que $w \neq -h_0$. Ce qui est évidement essentiel, sinon S serait identiquement nulle et ne pourrait donc fournir d'informations sur $\lambda\widehat{f}$. Si $\omega \neq O$, on évite l'écueil précédent puisque w et h_0 ont leurs supports dans les ouverts ω et O distincts

Remarque 2.2.6 *Reprenons la condition (2.9) de la notion de sentinelle discriminante. Par hypothèse les fonctions m_i ont leurs supports dans l'ouvert $U \times O$ et on cherche w à support dans $U \times \omega$. Si donc $\omega \cap O = \emptyset$, alors $\int_0^T \int_0^A \int_\omega w m_i dt da dx = 0$, $i = 1, ..., N$. La condition (2.9) sera réalisée dès que l'on prend la fonction h_0 orthogonale à toutes les* *fonctions m_i. En conséquence, il est naturel de considérer le cas $\omega \cap O \neq \emptyset$ et on peut alors, sans restreindre la généralité, supposer*

$$\omega \subset O \tag{2.12}$$

dans le cas d'une observation bruitée. Cette hypothèse est évidemment sans objet dans le cas d'une observation sans bruit, où on considère seulement le cas $\omega \neq O$,peu importe qu'ils soient disjoints ou non.

Nous allons maintenant voir que l'existence d'un contrôle w, et donc d'une sentinelle S, est en fait équivalente à un problème de contrôlabilité comme il apparaît dans ce qui suit.

2.3 Equivalence à un problème de contrôlabilité

2.3.1 Contrôlabilité à zéro sans contraintes sur le contrôle

On se place dans le cas d'une observation sans bruit. On commence par transformer la condition d'insensibilité (2.6). Pour ce faire on suppose que l'on peut calculer $\frac{\partial y}{\partial \tau} = y_\tau$ pour $\lambda = 0, \tau = 0$. La fonction y_τ est donnée par la résolution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial y_\tau}{\partial t} + \frac{\partial y_\tau}{\partial a} - \Delta y_\tau + \mu y_\tau = 0 & \text{dans } Q\,; \\ y_\tau = 0 & \text{sur } \Sigma\,; \\ y_\tau(0,a,x) = \widehat{y}^0 & \text{dans } Q_A\,; \\ y_\tau(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x) y_\tau(t,a,x)da & \text{dans } Q_T \end{cases} \tag{3.1}$$

Sous les hypothèses $(H_1), (H_2)$ et (H_3) le problème (3.1) admet une solution unique y_τ telle que $y_\tau(t, A, x) = 0$. Pour la preuve de l'existence d'une solution au problème (3.1), on peut se référer à [24, 31, 25, 27]

S'il en est ainsi la condition d'insensibilité (2.6) est équivalente à

$$\int_0^T \int_0^A \int_O h_0 y_\tau dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega w y_\tau dtdadx = 0, \ \forall\, \widehat{y}^0, \|\widehat{y}^0\|_{L^2(Q_A)} \leq 1 \tag{3.2}$$

On transforme alors l'équation (3.2) par l'introduction classique de l'état adjoint. Plus précisément, on définit la fonction $q = q(t, a, x)$ solution du problème :

$$\begin{cases} -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial a} - \Delta q + \mu q = \beta q(t, 0, x) + h_0 \chi_O + w \chi_\omega \text{ dans } Q \\ q = 0 \text{ sur } \Sigma \\ q(T, a, x) = 0 \text{ dans } Q_A \\ q(t, A, x) = 0 \text{ dans } Q_T \end{cases} \tag{3.3}$$

où χ_O et χ_ω désignent respectivement les fonctions caractéristiques de O et ω.

Le problème (3.3) admet une solution unique $q = q(t, a, x; w)$ dans $L^2(Q)$ où w est la fonction contrôle à déterminer. Pour la preuve de l'existence et de l'unicité de la solution de (3.3) on peut utiliser le Théorème du point fixe pour une application contractante comme dans [2, 3]

Proposition 2.3.1 *Considérons les deux systèmes d'équations (3.1) et (3.3). Alors la condition d'insensibilité (2.6) est équivalente à* $q(0, a, x) = 0$ *presque pour tout* $(a, x) \in (0, A) \times \Omega$

Preuve. En multipliant la première équation de (3.3) par y_τ et en intégrant sur Q on obtient :

$$-\int_Q (\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial a}) y_\tau dtdadx - \int_Q \Delta q y_\tau dtdadx + \int_Q \mu q y_\tau dtdadx = \int_Q \beta q(t, 0, x) y_\tau dtdadx$$

$$+ \int_0^T \int_0^A \int_O h_0 y_\tau dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega w y_\tau dtdadx \tag{3.4}$$

En considérant (2.6)(ou (3.2)),la relation (3.4) devient

$$-\int_Q (\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial a}) y_\tau dtdadx - \int_Q \Delta q y_\tau dtdadx + \int_Q \mu q y_\tau dtdadx =$$

$$\int_Q \beta q(t,0,x) y_\tau dtdadx \tag{3.5}$$

En intégrant (3.5) par parties on obtient :

$$\int_Q (\frac{\partial y_\tau}{\partial t} + \frac{\partial y_\tau}{\partial a} - \Delta y_\tau + \mu y_\tau) q dtdadx + \int_{Q_T} [(y_\tau q)(t,0,x) - (y_\tau q)(t,A,x)]\, dtdadx$$

$$+ \int_{Q_A} [(y_\tau q)(0,a,x) - (y_\tau q)(T,a,x)]\, dtdadx = \int_{Q_A} y_\tau(t,0,x) q(t,0,x) dtdadx \tag{3.6}$$

Comme

$$q(T,a,x) = q(t,A,x) = 0 \text{ et } \frac{\partial y_\tau}{\partial t} + \frac{\partial y_\tau}{\partial a} - \Delta y_\tau + \mu y_\tau = 0$$

la relation (3.6) devient

$$\int_{Q_A} q(0,a,x) \widehat{y}^0(a,x) dadx = 0 \;\forall\; \widehat{y}^0, \left\|\widehat{y}^0\right\|_{L^2(Q_A)} \leq 1$$

d'où

$$q(0,a,x) = 0 \text{ presque partout sur } Q_A$$

■

En résumé, le problème de la recherche d'un contrôle w tel que le couple (w,S) soit solution de (2.6),(2.7) est équivalent à la recherche de w tel que le couple (w,q) vérifie le système

$$\begin{cases} -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial a} - \Delta q + \mu q = \beta q(t,0,x) + h_0\chi_O + w\chi_\omega \text{ dans } Q \\ q = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma \\ q(T,a,x) = 0 \qquad \text{dans} \quad Q_A \\ q(t,A,x) = 0 \qquad \text{dans} \quad Q_T \end{cases} \tag{3.7}$$

$$q(0,a,x) = 0 \text{ dans } Q_A \tag{3.8}$$

et

$$\|w\|_{L^2(U\times\omega)} = \min imum \tag{3.9}$$

Le système (3.7),(3.8) et (3.9) est un problème de contrôlabilité à zéro avec un contrôle w de norme minimale dans $L^2(U\times\omega)$. On cherche w qui conduise l'état q de 0 (à l'instant "initial" $t = T$) jusqu'à l'état $q(0,a,x) = 0$ à l'instant "final" $t = 0$ et ceci avec une "dépense" minimum pour w, au sens (3.9).

2.3.2 Contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle

On se place cette fois-ci dans le cas d'une observation avec bruit. Comme dans le paragraphe 2.3.1, on montre que la condition d'insensibilité (2.8) est équivalente à $q(0,a,x) = 0$ dans Q_A où q est l'état adjoint de y défini par le système (3.3). Il reste alors à transformer les contraintes (2.9). Pour cela on considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{K}$ défini par

$$\begin{cases} \mathcal{K} = \text{sous-espace vectoriel engendré dans } L^2(U\times\omega) \text{ par les } N \text{ fonctions } m_i\chi_\omega \\ \text{que l'on peut supposer linéairement indépendants.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Proposition 2.3.2 *Soit $\mathcal{K}^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{K}$ dans $L^2(U \times \omega)$. Considérons (2.9). Il existe un unique élément $k_0 \in \mathcal{K}$ tel que :*

$$\int_0^T \int_0^A \int_O h_0 m_i dt da dx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega k_0 m_i dt da dx = 0, 1 \leq i \leq N \tag{3.11}$$

et donc

$$w - k_0 \in \mathcal{K}^\perp \tag{3.12}$$

Preuve. Considérons l'application linéaire

$$\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{R}^N, \ k \longmapsto \left(\int_0^T \int_0^A \int_\omega k m_i dt da dx \right)_{1 \leq i \leq N}$$

Cette application φ est bijective. Pour le voir, il suffit de montrer que φ est injective car $\dim \mathcal{K} = \dim \mathbf{R}^N = N$. Soit $k \in \mathcal{K}$ tel que $\varphi(k) = 0$. Alors

$$\int_0^T \int_0^A \int_\omega k m_i dt da dx = 0, \forall i, 1 \leq i \leq N$$

Donc $k \in \mathcal{K}^\perp$. Ainsi $k \in \mathcal{K}$ et $k \in \mathcal{K}^\perp$. Donc $k = 0$ et φ est injective. Donc φ est une bijection. Soit

$$b = \left(- \int_0^T \int_0^A \int_O h_0 m_i dt da dx \right)_{1 \leq i \leq N}.$$

On a $b \in \mathbf{R}^N$ et comme φ est bijective, il existe un élément unique $k_0 \in \mathcal{K}$ tel que

$$\varphi(k_0) = b \text{ i.e } \int_0^T \int_0^A \int_\omega k_0 m_i dt da dx = - \int_0^T \int_0^A \int_O h_0 m_i dt da dx, \forall i, 1 \leq i \leq N$$

Par suite

$$\int_0^T \int_0^A \int_O h_0 m_i dt da dx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega k_0 m_i dt da dx = 0, \forall i, 1 \leq i \leq N$$

Si maintenant on rapproche (3.11) de (2.9), on obtient

$$\int_0^T \int_0^A \int_\omega (w - k_0) m_i dtdadx = 0, \forall i, 1 \leq i \leq N$$

On en déduit que

$$w - k_0 \in \mathcal{K}^\perp.$$

■

Posons $v = w - k_0$, alors le problème de la recherche d'un contrôle w tel que le couple (w, S) vérifie (2.8) (2.9) (2.10) est équivalent à la recherche d'un contrôle v tel que le couple (v, q) vérifie le système

$$v \in \mathcal{K}^\perp, \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial a} - \Delta q + \mu q = \beta q(t, 0, x) + h_0 \chi_O + k_0 \chi_\omega + v \chi_\omega \text{ dans } Q \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma \\ q(T, a, x) = 0 & \text{dans } Q_A \\ q(t, A, x) = 0 & \text{dans } Q_T \end{cases} \tag{3.14}$$

$$q(0, a, x) = 0 \quad \text{dans } Q_A \tag{3.15}$$

et

$$\|v\|_{L^2(U \times \omega)} = \min imum. \tag{3.16}$$

Ceci est un problème de contrôlabilité à zéro avec des contraintes linéaire (en nombre fini) sur le contrôle v de norme minimale dans $L^2(U \times \omega)$.

2.4 Informations fournies par une sentinelle

2.4.1 Usage d'une sentinelle

A quoi sert une sentinelle, et la terminologie utilisée est-elle justifiée ?

Pour répondre à cette question, on se place dans le cadre d'une observation sans bruit (cf Problème 1). On connaît alors l'état observé :

$$y_{obs} = m_0 \tag{4.1}$$

où m_0 est connue dans $U \times O$.

On calcule ensuite y_0 solution du système

$$\begin{cases} \frac{\partial y_0}{\partial t} + \frac{\partial y_0}{\partial a} - \Delta y_0 + \mu y_0 = f \quad \text{dans } Q\,; \\ y_0 = 0 \quad \text{sur } \Sigma\,; \\ y_0(0,a,x) = y^0(a,x) \quad \text{dans } Q_A\,; \\ y_0(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x) y_0(t,a,x)da \quad \text{dans } Q_T \end{cases} \tag{4.2}$$

Alors si w est calculé, la sentinelle S est donnée par

$$S(\lambda,\tau) = \int_0^T \int_0^A \int_O h_0 y(\lambda,\tau) dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega wy(\lambda,\tau) dtdadx \tag{4.3}$$

et on connaît

$$S(0,0) = \int_0^T \int_0^A \int_O h_0 y_0 dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega wy_0 dtdadx. \tag{4.4}$$

On a par ailleurs

$$S(\lambda,\tau) = S(0,0) + \lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) \tag{4.5}$$

(puisque par hypothèse $\frac{\partial S}{\partial \tau}(0,0) = 0$).

Il vient que

$$\lambda \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) = \int_0^T \int_0^A \int_O h_0(m_0 - y_0)dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega w(m_0 - y_0)dtdadx. \tag{4.6}$$

Cela étant, on a aussi

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) = \int_0^T \int_0^A \int_O h_0 y_\lambda dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega w y_\lambda dtdadx \tag{4.7}$$

où y_λ est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial y_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial y_\lambda}{\partial a} - \Delta y_\lambda + \mu y_\lambda = \widehat{f} \ \text{ dans } Q\,; \\ y_\lambda = 0 \ \text{ sur } \Sigma\,; \\ y_\lambda(0,a,x) = 0 \quad \text{dans } Q_A\,; \\ y_\lambda(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x) y_\lambda(t,a,x)da \ \text{ dans } Q_T \end{cases} \tag{4.8}$$

Multiplions la première équation de (3.3) par y_λ et intégrons par partie, on obtient

$$\int_0^T \int_0^A \int_O h_0 y_\lambda dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega w y_\lambda dtdadx = \int_Q \widehat{f} q dtdadx \tag{4.9}$$

c'est à dire que

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) = \int_Q \widehat{f} q dtdadx \tag{4.10}$$

et donc

$$\lambda\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) = \int_Q (\lambda\widehat{f})q dt da dx. \tag{4.11}$$

Finallement la sentinelle S définie par h_0, O, ω donne l'information

$$\int_Q (\lambda\widehat{f})q dt da dx = \int_0^T\int_0^A\int_O h_0(m_0 - y_0) dt da dx + \int_0^T\int_0^A\int_\omega w(m_0 - y_0) dt da dx \tag{4.12}$$

Remarque 2.4.1 *La relation (4.12) est une équation intégrale dont l'inconnue est le terme $\lambda\widehat{f}$. Une résolution numérique de cette équation permettra d'estimer la pollution.*

On considère maintenant la question de l'information fournie par (4.12) en introduisant la furtivité

2.4.2 Furtivité

Au premier ordre près, on peut dire que si

$$q = q(h_0)$$

est la sentinelle définie par h_0, O et ω, alors

$$\int_Q \lambda\widehat{f}q(h_0) dt da dx = \int_0^T\int_0^A\int_O h_0(m_0 - y_0) dt da dx + \int_0^T\int_0^A\int_\omega w(m_0 - y_0) dt da dx. \tag{4.13}$$

La pollution $\lambda\widehat{f}$ est dite furtive pour la sentinelle définie par h_0, O et ω si

$$\int_Q q(h_0)\lambda\widehat{f} dt da dx = 0 \tag{4.14}$$

Les pollutions que la sentinelle définie par h_0, O et ω ne pourra pas observer sont appelées pollutions furtives. Une question naturelle est alors :

$$\left| \begin{array}{l} \text{peut-on trouver une famille de sentinelles définies par} \\ \text{des fonctions } h_{01}, h_{02}, \ldots \text{ à support dans l'observatoire} \\ O \text{ tels qu'il n'y ait pas de pollutions furtives?} \end{array} \right. \tag{4.15}$$

Ce problème sera examiné au Chapitre 5

Chapitre 3

Inégalités de Carleman

Dans ce Chapitre, nous présentons les outils mathématiques nécessaires à la résolution des problèmes de contrôlabilité mis en évidence au Chapitre 2. L'ensemble de ces outils est constitué par des inégalités de Carleman. Beaucoup d'auteurs ont utilisé des inégalités de Carleman dans leurs travaux. Dans [29] l'auteur présente une application de l'inégalité de Carleman globale aux problèmes inverses et de contrôlabilité. Dans [23], l'auteur utilise une inégalité de Carleman pour résoudre le problème de contrôlabilité avec contraintes sur le contôle pour le problème à un temps. Dans [30], l'auteur utilise une estimation de Carleman pour montrer l'existence d'un contrôle insensibilisant pour l'équation de la chaleur sémi-linéaire. Dans les travaux cités les inégalités de Carleman ont été établies pour des problèmes d'évolution à une seule variable temps. Quant aux problèmes d'évolution à deux variables temps, l'inégalité de Carleman globale a été établie par Ainseba [1]. Nous revisitons la question dans l'intention de clarifier la présentation. Nous procéderons comme dans J.P.Puel [29] où les inégalités sont présentées pour des problèmes à un temps.

3.1 Inégalité de Carleman

Nous reprenons d'abord les grandes lignes de la définition d'une fonction poids ψ que nous utiliserons pour la suite. L'existence de la fonction ψ est due à A.Fursikov et O.Imanuvilov[9, 8]

3.1.1 Fonctions poids

Lemme 3.1.1 *[29] Soit ω_0 un ouvert tel que $\overline{\omega_0} \subset \omega$ (par exemple ω_0 est une boule ouverte). Alors il existe une fonction $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que*

$$\begin{aligned} \psi(x) &> 0, \forall x \in \Omega \\ \psi(x) &= 0, \forall x \in \Gamma \\ |\nabla\psi(x)| &\neq 0, \forall x \in \overline{\Omega} - \omega_0 \end{aligned}$$

Preuve. Comme Ω est regulier, on choisit d'abord $\phi \in C^2(\mathbf{R}^n)$ tel que $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n, \phi(x) > 0\}$ et $|\nabla\phi(x)| \neq 0, \forall x \in \Gamma$. Ceci peut se faire localement, puis globalement par partition de l'unité. D'après le théorème de densité de Morse [5], il existe une suite (ϕ_k) de fonctions de Morse (i.e telles que leur gradient ne s'annule qu'en un nombre fini de points) telles que $\phi_k \to \phi$ dans $C^2(\overline{\Omega})$ si $k \to +\infty$ (ϕ_k ne s'annule pas nécessairement sur la frontière). On peut prendre $\phi_k > 0$ comme $\phi > 0$ sur Ω. Soit $C = \{x \in \mathbf{R}^n, \nabla\phi(x) = 0\}$ l'ensemble des points critiques de ϕ. Comme $|\nabla\phi(x)| \neq 0, \forall x \in \Gamma$, il existe un voisinage ouvert V de Γ dans $\mathbf{R}^n$ et $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \overline{V},\ |\nabla\phi(x)| \geq \delta$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ tel que $\varphi(x) = 1, \forall x \in \Gamma$ et $0 \leq \varphi \leq 1$. On pose

$$\mu_k(x) = \phi_k(x) + \varphi(x)(\phi(x) - \phi_k(x))$$

Alors $\mu_k(x) = 0, \forall x \in \Gamma, \mu_k(x) > 0, \forall x \in \Omega$ et de plus

$$\forall x \in \overline{\Omega - V},\ \nabla\mu_k(x) = \nabla\phi_k(x)$$

Si $x \in \Omega \cap V$, on a

$$\nabla\mu_k(x) = \nabla\phi_k(x) + \varphi(x)(\nabla\phi(x) - \nabla\phi_k(x)) + \nabla\varphi(x)(\phi(x) - \phi_k(x))$$

Ainsi pour $k \geq k_{0,}$ k_0 assez large, on a

$$\begin{aligned}
|\nabla\mu_k(x)| &\geq |\nabla\phi_k(x)| - 2\,\|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega})}\,\|\phi - \phi_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} \\
&\geq \delta - 2\,\|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega})}\,\|\phi - \phi_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} \\
&\geq \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Choisissons $k \geq k_0$ et posons $\mu(x) = \mu_k(x)$. Alors μ est une fonction de Morse car les points qui annulent son gradient sont contenus dans l'ensemble des points qui annulent $\nabla\phi_k$. De plus on a $\mu = 0$ sur Γ. Soient maintenant $x_{1,}x_2, ..., x_r$ les points critiques de μ. Alors $x_i \in \Omega - \overline{V}$, $i = 1, ..., r$. On peut trouver r chemins disjoints et reguliers $l_1, ..., l_r$ tel que pour $i = 1, ..., r$

$$\begin{aligned}
l_i &\in C^\infty([0,1]; \mathbf{R}^n); \\
l_i(t) &\in \Omega - \overline{V},\ \forall t \in [0,1], \\
l_i(t_1) &\neq l_i(t_2),\ \forall t_1, t_2 \in [0,1],\ t_1 \neq t_2, \\
l_i(1) &= x_i,\ \text{et } l_i(0) \in \omega_0, \\
\forall s, t &\in [0,1],\ l_i(s) \neq l_j(t),\ \text{si } i \neq j,
\end{aligned}$$

et on peut trouver r fonctions $f_1, ..., f_r$ telles que pour $i = 1, ..., r$

$$\begin{aligned} f_i &\in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n), \text{ et} \\ \frac{dl_i}{dt}(t) &= f_i(l_i(t)), \ \forall t \in [0,1] \end{aligned}$$

Maintenant pour $i = 1, ..., r$ on peut trouver des voisinages ouverts W_i de $\{l_i(t), t \in [0,1]\}$ tels que

$$W_i \subset \Omega - \overline{V}, \text{ et } W_i \cap W_j = \emptyset \text{ si } i \neq j$$

Ensuite on construit les fonctions $e_i \in \mathcal{D}(W_i)$ telles que $e_i(l_i(t)) = 1$, $\forall t \in [0,1]$ et on pose

$$g_i(x) = e_i(x) f_i(x)$$

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = g_i(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

On note $S_t^i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'opérateur qui à x_0 associe $x(t)$. On a

$$S_1^i(l_i(0)) = x_i, \ i = 1, ..., r$$

Posons

$$S(x) = S_1^1 \circ S_1^2 \circ ... \circ S_1^r(x).$$

On voit que si $x \in \Omega - (\cup_{i=1}^r W_i)$, alors $S(x) = x$ et donc

$$\forall x \in V, \ S(x) = x$$

D'autre part, chaque S_1^i est un difféomorphisme de Ω sur lui-même, donc S est un difféomorphisme de Ω sur lui-même et ∇S est inversible. Posons

$$\psi(x) = \mu(S(x))$$

Alors $\psi(x) = 0$, $\forall x \in \Gamma$. De plus si $\nabla\psi(x) = 0$ alors puisque ∇S est inversible, cela veut dire que $S(x) \in \{x_1, ..., x_r\}$. Mais on sait que $S_1^j = Id$ sur $\Omega - W_j$ donc

$$S(l_i(0)) = S_1^i(l_i(0)) = x_i.$$

Comme S est un difféomorphisme, on voit que

$$S(x) \in \{x_1, ..., x_r\} \Longrightarrow x \in \{l_1(0), ..., l_r(0)\} \Longrightarrow x \in \omega_0$$

Par suite

$$\nabla\psi(x) = 0 \Longrightarrow x \in \omega_0$$

et ψ satisfait à toutes les conditions du Lemme. Ce qui achève la preuve du Lemme ■

Maintenant on utilise la fonction ψ pour définir d'autres fonctions poids. On choisit

$$\alpha(t,a,x) = \frac{e^{2\lambda\|\psi\|_\infty} - e^{\lambda\psi(x)}}{at(T-t)}, \ \lambda > 0 \tag{1.1}$$

$$\varphi(t,a,x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{at(T-t)} \tag{1.2}$$

Alors $\alpha(t,a,x) > 0$, $\varphi(t,a,x) > 0$ et on a les propriétés suivantes

$$\nabla\alpha = -\lambda\nabla\psi\varphi, \ \nabla\varphi = \lambda\nabla\psi\varphi \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} |\varphi_t| &\leq C\varphi^2,\ |\varphi_a| \leq C\varphi^2,\ |\alpha_t| \leq C\varphi^2, |\alpha_{tt}| \leq C\varphi^3 \\ |\alpha_a| &\leq C\varphi^2, |\alpha_{at}| \leq C\varphi^2, |\alpha_{aa}| \leq C\varphi^3 \end{aligned} \tag{1.4}$$

3.1.2 Inégalité de Carleman globale

On considère l'opérateur différentiel L défini par :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} - \Delta + \mu I \tag{1.5}$$

et on introduit l'espace

$$\mathcal{V} = \{\rho \in C^{\infty}(\overline{Q}),\ \rho = 0 \text{ sur } \Sigma\}. \tag{1.6}$$

Théorème 3.1.2 *Il existe $\lambda_o > 1$ et $s_o > 1$ et il existe $C > 0$ tels que pour tout $\lambda > \lambda_o$ et pour tout $s \geq s_o$ on ait :*

$$\begin{aligned} &\int_Q \frac{e^{-2s\alpha}}{s\varphi} \left(|\rho_t + \rho_a|^2 + |\Delta\rho|^2\right) dtdadx + \int_Q s\lambda^2\varphi e^{-2s\alpha} |\nabla\rho|^2 \, dtdadx \\ &+ \int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\alpha} |\rho|^2 \, dtdadx \\ \leq\ & C\left(\int_Q e^{-2s\alpha} |L\rho|^2 \, dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\alpha} |\rho|^2 \, dtdadx\right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

pour tout $\rho \in \mathcal{V}$.

Preuve. Pour $s > 0$ et $\lambda > 0$ on pose

$$w(t,a,x) = e^{-s\alpha(t,a,x)}\rho(t,a,x),\ \forall \rho \in \mathcal{V}. \tag{1.8}$$

On vérifie que

$$
\begin{aligned}
w(t,0,x) &= w(t,A,x)=0 \\
w(0,a,x) &= w(T,a,x)=0.
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Calculons

$$
Pw = e^{-s\alpha}L(e^{s\alpha}w). \tag{1.10}
$$

On a

$$
\frac{\partial}{\partial t}(e^{s\alpha}w) = s\alpha_t e^{s\alpha}w + e^{s\alpha}w_t
$$

$$
\frac{\partial}{\partial a}(e^{s\alpha}w) = s\alpha_a e^{s\alpha}w + e^{s\alpha}w_a
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{s\alpha}w) &= s\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}e^{s\alpha}w + e^{s\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_i} \\
&= -s\lambda\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\varphi e^{s\alpha}w + e^{s\alpha}\frac{\partial w}{\partial x_i} \\
&= e^{s\alpha}(\frac{\partial w}{\partial x_i} - s\lambda\varphi\frac{\partial \psi}{\partial x_i}w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(e^{s\alpha}w) &= s\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}e^{s\alpha}(\frac{\partial w}{\partial x_i} - s\lambda\varphi\frac{\partial \psi}{\partial x_i}w) + e^{s\alpha}[\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - s\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi\frac{\partial \psi}{\partial x_i}w)] \\
&= e^{s\alpha}[-s\lambda\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\varphi\frac{\partial w}{\partial x_i} + s^2\lambda^2\varphi^2(\frac{\partial \psi}{\partial x_i})^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - s\lambda^2(\frac{\partial \psi}{\partial x_i})^2\varphi w] \\
&\quad + e^{s\alpha}[-s\lambda\varphi\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}w - s\lambda\varphi\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}]
\end{aligned}
$$

d'où

$$\begin{aligned}\Delta(e^{s\alpha}w) &= e^{s\alpha}[-s\lambda\varphi\nabla\psi.\nabla w + s^2\lambda^2\varphi^2\left|\nabla\psi\right|^2 w + \Delta w - s\lambda^2\varphi\left|\nabla\psi\right|^2 w] \\ &\quad +[-s\lambda\varphi\Delta\psi w - s\lambda\varphi\nabla\psi.\nabla w]\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}L(e^{s\alpha}w) &= e^{s\alpha}[w_t + w_a - \Delta w + 2s\lambda\varphi\nabla\psi\nabla w - s^2\lambda^2\varphi^2\left|\nabla\psi\right|^2 w + s\lambda^2\varphi\left|\nabla\psi\right|^2 w] \\ &\quad +e^{s\alpha}[s\lambda\varphi\Delta\psi w + \mu w + s\alpha_t w + s\alpha_a w].\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}Pw &= e^{-s\alpha}L(e^{s\alpha}w) = w_t + w_a - \Delta w + 2s\lambda\varphi\nabla\psi\nabla w - s^2\lambda^2\varphi^2\left|\nabla\psi\right|^2 w \\ &\quad +s\lambda^2\varphi\left|\nabla\psi\right|^2 w + s\lambda\varphi\Delta\psi w + \mu w + s\alpha_t w + s\alpha_a w. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Posons

$$P_1 w = -\Delta w - s^2\lambda^2\varphi^2\left|\nabla\psi\right|^2 w + s\alpha_t w + s\alpha_a w$$

$$P_2 w = w_t + w_a + 2s\lambda\varphi\nabla\psi\nabla w + 2s\lambda^2\varphi\left|\nabla\psi\right|^2 w$$

$$f_s = Pw - \mu w - s\lambda\varphi\Delta\psi w - s\lambda^2\varphi\left|\nabla\psi\right|^2 w$$

alors on a

$$P_1 w + P_2 w = f_s \tag{1.12}$$

donc

$$\|f_s\|^2 = \|P_1 w\|^2 + \|P_2 w\|^2 + 2\left(P_1 w, P_2 w\right). \tag{1.13}$$

Calculons le terme principal $\left(P_1 w, P_2 w\right)$.

$$\begin{aligned}
\left(P_1 w, P_2 w\right) \;=\; & -\int_Q \Delta w w_t dt da dx - s^2\lambda^2 \int_Q \varphi^2 \left|\nabla\psi\right|^2 w w_t dt da dx \\
& + s \int_Q \alpha_t w w_t dt da dx + s \int_Q \alpha_a w w_t dt da dx \\
& - \int_Q \Delta w w_a dt da dx - s^2\lambda^2 \int_Q \varphi^2 \left|\nabla\psi\right|^2 w w_a dt da dx \\
& + s \int_Q \alpha_t w w_a dt da dx + s \int_Q \alpha_a w w_a dt da dx \\
& -2s\lambda \int_Q \varphi \nabla\psi \nabla w \Delta w dt da dx - 2s^3\lambda^3 \int_Q \varphi^3 \left|\nabla\psi\right|^2 \nabla\psi \nabla w w dt da dx \\
& +2s^2\lambda \int_Q \varphi \alpha_t \nabla\psi \nabla w w dt da dx + 2s^2\lambda \int_Q \varphi \alpha_a \nabla\psi \nabla w w dt da dx \\
& -2s\lambda^2 \int_Q \varphi \left|\nabla\psi\right|^2 w \Delta w dt da dx - 2s^3\lambda^4 \int_Q \varphi^3 \left|\nabla\psi\right|^4 w^2 dt da dx \\
& +2s^2\lambda^2 \int_Q \varphi \alpha_t \left|\nabla\psi\right|^2 w^2 dt da dx + 2s^2\lambda^2 \int_Q \varphi \alpha_a \left|\nabla\psi\right|^2 w^2 dt da dx
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Désignons par $I_{k,l}$ les 16 termes de (1.14), alors on a

$$\begin{aligned}
\left(P_1 w, P_2 w\right) \;=\; & I_{1,1} + I_{1,2} + I_{2,1} + I_{2,2} \\
& + I_{3,1} + I_{3,2} + I_{4,1} + I_{4,2} \\
& + I_{5,1} + I_{5,2} + I_{6,1} + I_{6,2} \\
& + I_{7,1} + I_{7,2} + I_{8,1} + I_{8,2}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Dans la suite C désigne des constantes variées indépendantes de s et λ. Pour organiser les calculs nous donnerons une importance particulière aux termes suivants

$$s\lambda^2 \int_Q \varphi \left|\nabla w\right|^2 dtdadx$$

et

$$s^3\lambda^4 \int_Q \varphi^3 w^2 dtdadx.$$

On prend $s \geq 1$ et $\lambda \geq 1$ et on note A tous les termes qui peuvent être bornés par

$$C(s\lambda + \lambda^2) \int_Q \varphi \left|\nabla w\right|^2 dtdadx$$

et on note par B tous les termes qui peuvent être bornés par

$$C(s^2\lambda^4 + s^3\lambda^3) \int_Q \varphi^3 w^2 dtdadx.$$

Ces termes seront absorbés, comme on le verra par la suite. Calculons maintenant les termes $I_{k,l}$.

$$\begin{aligned}
I_{1,1} &= -\int_Q \Delta w w_t dtdadx = -\int_\Sigma \frac{\partial w}{\partial \eta} w_t dtdad\sigma + \int_Q \nabla w \nabla w_t dtdadx \\
&= -\int_\Sigma \frac{\partial w}{\partial \eta} w_t dtdad\sigma + \frac{1}{2}\int_Q \frac{d}{dt}\left|\nabla w\right|^2 dtdadx = 0 \text{ d'après } (1.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{1,2} &= -s^2\lambda^2 \int_Q \varphi^2 \left|\nabla\psi\right|^2 w w_t dtdadx \\
&= -\frac{1}{2}s^2\lambda^2 \int_Q \varphi^2 \left|\nabla\psi\right|^2 \frac{d}{dt}(w^2) dtdadx \\
&= s^2\lambda^2 \int_Q \varphi\varphi_t \left|\nabla\psi\right|^2 w^2 dtdadx
\end{aligned}$$

donc

$$I_{1,2} = B.$$

$$\begin{aligned} I_{2,1} &= s \int_Q \alpha_t w w_t dt da dx \\ &= \frac{1}{2} s \int_Q \alpha_t \frac{d}{dt}(w^2) dt da dx \\ &= -\frac{1}{2} s \int_Q \alpha_{tt} w^2 dt da dx \end{aligned}$$

d'après (1.4)

$$I_{2,1} = B.$$

$$\begin{aligned} I_{2,2} &= s \int_Q \alpha_a w w_t dt da dx \\ &= \frac{1}{2} s \int_Q \alpha_a \frac{d}{dt}(w^2) dt da dx \\ &= -\frac{1}{2} s \int_Q \alpha_{at} w^2 dt da dx \end{aligned}$$

donc d'après (1.4), on a

$$I_{2,2} = B$$

$$\begin{aligned} I_{3,1} &= -\int_Q \Delta w w_a dt da dx \\ &= -\int_\Sigma \frac{\partial w}{\partial \eta} w_a dt da d\sigma + \frac{1}{2} \int_Q \frac{d}{da} \left|\nabla w\right|^2 dt da dx = 0 \text{ d'après (1.9)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{3,2} &= -s^2\lambda^2 \int_Q \varphi^2 \left|\nabla\psi\right|^2 ww_a dtdadx \\ &= s^2\lambda^2 \int_Q \varphi\varphi_a \left|\nabla\psi\right|^2 w^2 dtdadx \end{aligned}$$

donc

$$I_{3,2} = B.$$

$$\begin{aligned} I_{4,1} &= s \int_Q \alpha_t ww_a dtdadx \\ &= -\frac{1}{2} s \int_Q \alpha_{ta} w^2 dtdadx \end{aligned}$$

donc

$$I_{4,1} = B.$$

$$\begin{aligned} I_{4,2} &= s \int_Q \alpha_a ww_a dtdadx \\ &= -\frac{1}{2} s \int_Q \alpha_{aa} w^2 dtdadx \end{aligned}$$

alors

$$I_{4,2} = B.$$

Avant de continuer les calculs, rappelons que comme ψ et w sont nulles sur Γ, on a pour tout $x \in \Gamma$

$$\nabla\psi = (\nabla\psi.\eta)\eta \text{ et } \nabla w = (\nabla w.\eta)\eta \tag{1.16}$$

où η désigne le vecteur unitaire normal extérieur à Γ.

$$
\begin{aligned}
I_{5,1} &= -2s\lambda \int_Q \varphi \nabla\psi \nabla w \Delta w dtdadx \\
&= -s\lambda \int_\Sigma \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left| \frac{\partial w}{\partial \eta} \right|^2 dtdad\sigma \\
&\quad +2s\lambda^2 \int_Q \varphi \left| \nabla\psi . \nabla w \right|^2 dtdadx \\
&\quad +2s\lambda \int_Q \varphi \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} dtdadx \\
&\quad -s\lambda^2 \int_Q \varphi \left| \nabla\psi \right|^2 \left| \nabla w \right|^2 dtdadx \\
&\quad -s\lambda \int_Q \varphi \Delta\psi \left| \nabla w \right|^2 dtdadx
\end{aligned}
$$

Donc on a

$$
\begin{aligned}
I_{5,1} &= -s\lambda \int_\Sigma \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left| \frac{\partial w}{\partial \eta} \right|^2 dtdad\sigma \\
&\quad +2s\lambda^2 \int_Q \varphi \left| \nabla\psi . \nabla w \right|^2 dtdadx \\
&\quad -s\lambda^2 \int_Q \varphi \left| \nabla\psi \right|^2 \left| \nabla w \right|^2 dtdadx \\
&\quad +A.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{5,2} &= -2s^3\lambda^3 \int_Q \varphi^3 \left| \nabla\psi \right|^2 \nabla\psi \nabla w w dtdadx \\
&= 3s^3\lambda^4 \int_Q \varphi^3 \left| \nabla\psi \right|^4 w^2 dtdadx \\
&\quad +s^3\lambda^3 \int_Q \varphi^3 div(\left| \nabla\psi \right|^2 \nabla\psi) w^2 dtdadx
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
I_{5,2} &= 3s^3\lambda^4 \int_Q \varphi^3 \left|\nabla\psi\right|^4 w^2 dtdadx \\
&\quad +B.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{6,1} &= 2s^2\lambda \int_Q \varphi\alpha_t \nabla\psi\nabla w w dtdadx \\
&= -s^2\lambda^2 \int_Q \varphi\alpha_t \left|\nabla\psi\right|^2 w^2 dtdadx \\
&\quad -s^2\lambda^2 \int_Q \varphi\varphi_t \left|\nabla\psi\right|^2 w^2 dtdadx \\
&\quad -s^2\lambda \int_Q \varphi\alpha_t \Delta\psi w^2 dtdadx
\end{aligned}
$$

donc

$$I_{6,1} = B.$$

$$
\begin{aligned}
I_{6,2} &= 2s^2\lambda \int_Q \varphi\alpha_a \nabla\psi\nabla w w dtdadx \\
&= -s^2\lambda^2 \int_Q \varphi\alpha_a \left|\nabla\psi\right|^2 w^2 dtdadx \\
&\quad -s^2\lambda^2 \int_Q \varphi\varphi_a \left|\nabla\psi\right|^2 w^2 dtdadx \\
&\quad -s^2\lambda \int_Q \varphi\alpha_a \Delta\psi w^2 dtdadx
\end{aligned}
$$

donc

$$I_{6,2} = B.$$

$$\begin{aligned}
I_{7,1} &= -2s\lambda^2 \int_Q \varphi \left|\nabla\psi\right|^2 w\Delta w dtdadx \\
&= 2s\lambda^2 \int_Q \varphi \left|\nabla\psi\right|^2 \left|\nabla w\right|^2 dtdadx \\
&\quad -s\lambda^4 \int_Q \varphi \left|\nabla\psi\right|^4 w^2 dtdadx \\
&\quad -s\lambda^3 \int_Q \varphi div(\left|\nabla\psi\right|^2 \nabla\psi) w^2 dtdadx \\
&\quad -s\lambda^3 \int_Q \varphi \nabla(\left|\nabla\psi\right|^2)\nabla\psi w^2 dtdadx \\
&\quad -s\lambda^2 \int_Q \varphi \Delta(\left|\nabla\psi\right|^2) w^2 dtdadx.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
I_{7,1} &= 2s\lambda^2 \int_Q \varphi \left|\nabla\psi\right|^2 \left|\nabla w\right|^2 dtdadx \\
&\quad +B.
\end{aligned}$$

$$I_{7,2} = -2s^3\lambda^4 \int_Q \varphi^3 \left|\nabla\psi\right|^4 w^2 dtdadx$$

$$\begin{aligned}
I_{8,1} &= 2s^2\lambda^2 \int_Q \varphi\alpha_t \left|\nabla\psi\right|^2 w^2 dtdadx \\
&= B.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{8,2} &= 2s^2\lambda^2 \int_Q \varphi\alpha_a \left|\nabla\psi\right|^2 w^2 dtdadx \\
&= B.
\end{aligned}$$

En regroupant les différents termes $I_{k,l}$ on a :

$$\begin{aligned}
2\left(P_1 w, P_2 w\right) &= A+B \\
&-2s\lambda \int_\Sigma \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\left|\frac{\partial w}{\partial \eta}\right|^2 dtdad\sigma \\
&+2s\lambda^2 \int_Q \varphi \left|\nabla \psi\right|^2 \left|\nabla w\right|^2 dtdadx \\
&+2s^3\lambda^4 \int_Q \varphi^3 \left|\nabla \psi\right|^4 w^2 dtdadx \\
&+4s\lambda^2 \int_Q \varphi \left|\nabla \psi . \nabla w\right|^2 dtdadx. \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

Comme

$$-2s\lambda \int_\Sigma \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\left|\frac{\partial w}{\partial \eta}\right|^2 dtdad\sigma \geq 0$$

on a

$$\begin{aligned}
2\left(P_1 w, P_2 w\right) &\geq A+B+2s\lambda^2 \int_Q \varphi \left|\nabla \psi\right|^2 \left|\nabla w\right|^2 dtdadx \\
&+2s^3\lambda^4 \int_Q \varphi^3 \left|\nabla \psi\right|^4 w^2 dtdadx.
\end{aligned}$$

Comme $|\nabla\psi| \neq 0$ sur $\overline{\Omega - \omega_0}$, il existe $\delta > 0$ tel que $|\nabla\psi| \geq \delta$ sur $\overline{\Omega - \omega_0}$. Donc

$$\begin{aligned}
&2\left(P_1 w, P_2 w\right) + 2s\lambda^2\delta^2 \int_0^T \int_0^A \int_{\omega_0} \varphi \left|\nabla w\right|^2 dtdadx + 2s^3\lambda^4\delta^4 \int_0^T \int_0^A \int_{\omega_0} \varphi^3 w^2 dtdadx \\
\geq\ & 2s\lambda^2\delta^2 \int_Q \varphi \left|\nabla w\right|^2 dtdadx + 2s^3\lambda^4\delta^4 \int_Q \varphi^3 w^2 dtdadx + A + B. \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

On a

$$f_s = Pw - \mu w - s\lambda\varphi\Delta\psi w - s\lambda^2\varphi\left|\nabla\psi\right|^2 w$$

d'où

$$\int_Q |f_s|^2 \, dtdadx \leq \frac{5}{2}\int_Q |Pw|^2 \, dtdadx + B. \tag{1.19}$$

Des relations (1.12),(1.17) et (1.18) il vient que

$$\begin{aligned}
&\|P_1w\|^2 + \|P_2w\|^2 + 2s\lambda^2\delta^2 \int_Q \varphi \, |\nabla w|^2 \, dtdadx + 2s^3\lambda^4\delta^4 \int_Q \varphi^3 w^2 dtdadx \\
\leq \; & \int_Q |Pw|^2 \, dtdadx + 2s\lambda^2\delta^2 \int_0^T \int_0^A \int_{\omega_0} \varphi \, |\nabla w|^2 \, dtdadx \\
&+ 2s^3\lambda^4\delta^4 \int_0^T \int_0^A \int_{\omega_0} \varphi^3 w^2 dtdadx + A + B.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

On élimine A et B en choisissant λ et s suffisament grands. Il existe alors λ_0 et s_0 tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$ et $s > s_0$ on ait

$$\begin{aligned}
&\|P_1w\|^2 + \|P_2w\|^2 + s\lambda^2\delta^2 \int_Q \varphi \, |\nabla w|^2 \, dtdadx + s^3\lambda^4\delta^4 \int_Q \varphi^3 w^2 dtdadx \\
\leq \; & \int_Q |Pw|^2 \, dtdadx + 2s\lambda^2\delta^2 \int_0^T \int_0^A \int_{\omega_0} \varphi \, |\nabla w|^2 \, dtdadx \\
&+ 2s^3\lambda^4\delta^4 \int_0^T \int_0^A \int_{\omega_0} \varphi^3 w^2 dtdadx
\end{aligned} \tag{1.21}$$

On a aussi

$$-\Delta w = P_1 w + s^2\lambda^2\varphi^2 \, |\nabla\psi|^2 \, w - s\alpha_t w - s\alpha_a w \tag{1.22}$$

$$w_t + w_a = P_2 w - 2s\lambda\varphi\nabla\psi.\nabla w - 2s\lambda^2\varphi \, |\nabla\psi|^2 \, w \tag{1.23}$$

On déduit alors de (1.21), (1.22) et (1.23)que

$$\int_Q \frac{1}{s\varphi} \, |\Delta w|^2 \, dtdadx \leq C\left(\int_Q |P_1 w|^2 \, dtdadx + \int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 w^2 dtdadx\right)$$

$$\int_Q \frac{1}{s\varphi} |w_t + w_a|^2 \, dtdadx \leq C \left(\int_Q |P_2 w|^2 \, dtdadx + \int_Q s\lambda^2 \varphi \, |\nabla w|^2 \, dtdadx \right)$$

D'où

$$\begin{aligned} & \int_Q \frac{1}{s\varphi} \left(|w_t + w_a|^2 + |\Delta w|^2 \right) dtdadx + \int_Q s\lambda^2 \varphi \, |\nabla w|^2 \, dtdadx + \int_Q s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 dtdadx \\ \leq \; & C(\int_Q |Pw|^2 \, dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_{\omega_0} s\lambda^2 \varphi \, |\nabla w|^2 \, dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_{\omega_0} s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 dtdadx) \end{aligned} \tag{1.24}$$

On veut maintenant éliminer le gradient de w sur ω_0, pour cela soit ϱ une fonction telle que

$$\varrho \in \mathcal{D}(\omega), \; 0 \leq \varrho \leq 1, \; \varrho(x) = 1, \forall x \in \omega_0$$

On multiplie (1.12) par $s\lambda^2 \varrho \varphi w$ et on intègre par parties. Après quelques calculs on obtient :

$$\int_0^T \int_0^A \int_{\omega_0} s\lambda^2 \varphi \, |\nabla w|^2 \, dtdadx \leq C \left(\int_Q |Pw|^2 \, dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_{\omega} s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 dtdadx \right) \tag{1.25}$$

Et par suite (1.24) et (1.25) nous donne

$$\begin{aligned} & \int_Q \frac{1}{s\varphi} \left(|w_t + w_a|^2 + |\Delta w|^2 \right) dtdadx + \int_Q s\lambda^2 \varphi \, |\nabla w|^2 \, dtdadx \\ & + \int_Q s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 dtdadx \\ \leq \; & C \left(\int_Q |Pw|^2 \, dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_{\omega} s^3 \lambda^4 \varphi^3 w^2 dtdadx \right) \end{aligned} \tag{1.26}$$

On veut donner l'inégalité (1.26) en terme de ρ au lieu de w. En se rappelant que $w = e^{-s\alpha}\rho$ et en prenant λ et s suffisament large, l'inégalité (1.26) devient

$$\begin{aligned}
&\int_Q \frac{e^{-2s\alpha}}{s\varphi}\left(|\rho_t+\rho_a|^2+|\Delta\rho|^2\right)dtdadx+\int_Q s\lambda^2\varphi e^{-2s\alpha}|\nabla\rho|^2\,dtdadx \\
&+\int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\alpha}\rho^2 dtdadx \\
\leq\; & C\left(\int_Q e^{-2s\alpha}|L\rho|^2\,dtdadx+\int_0^T\int_0^A\int_\omega s^3\lambda^4\varphi^3e^{-2s\alpha}\rho^2dtdadx\right) \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

3.1.3 Une inégalité d'observabilité

Dans cette sous section nous allons déduire du Théorème précédent une inégalité d'observabilité qui sera utile pour la construction d'une sentinelle dans le cas d'une observation sans bruit.

Lemme 3.1.3 *Il existe une fonction" poids" θ vérifiant*

$$\begin{cases} \theta \text{ est de classe } C^2 \text{ dans } Q \\ \frac{1}{\theta} \text{ bornée sur } Q \end{cases} \qquad (1.28)$$

et il existe une constante positive $C>0$ telle que

$$\begin{aligned}
&\int_Q \frac{1}{\theta^2}|\rho|^2\,dtdadx \\
\leq\; & C\left(\int_Q \frac{1}{\theta^2}|L\rho|^2\,dtdadx+\int_0^T\int_0^A\int_\omega\frac{1}{\theta^2}|\rho|^2\,dtdadx\right) \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

pour tout $\rho \in \mathcal{V}$.

Preuve. On déduit directement de l'inégalité (1.7) que

$$\begin{aligned}
&\int_Q s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\alpha}\,|\rho|^2\,dtdadx \\
\leq\ & C\left(\int_Q e^{-2s\alpha}\,|L\rho|^2\,dtdadx + \int_0^T\int_0^A\int_\omega s^3\lambda^4\varphi^3 e^{-2s\alpha}\,|\rho|^2\,dtdadx\right) \qquad (1.30)
\end{aligned}$$

Posons

$$\theta = \frac{e^{s\alpha}}{\varphi\sqrt{\varphi}} \quad \text{alors} \quad \frac{1}{\theta} = \varphi\sqrt{\varphi}e^{-s\alpha}$$

on peut alors vérifer que $\theta \in C^2(Q)$ et que $\frac{1}{\theta}$ est bornée dans Q. L'inégalité (1.30) dévient alors

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2}\,|\rho|^2\,dtdadx \leq C\left(\int_Q \frac{1}{\theta^2\varphi^3 s^3\lambda^4}\,|L\rho|^2\,dtdadx + \int_0^T\int_0^A\int_\omega \frac{1}{\theta^2}\,|\rho|^2\,dtdadx\right) \qquad (1.31)$$

mais

$$\frac{1}{\varphi^3 s^3\lambda^4} \leq cons\tan te \qquad (1.32)$$

D'où le Lemme ■

Remarque 3.1.1 *Étant donné que $\frac{1}{\theta}$ est bornée, l'inégalité (1.29) peut être reduite à*

$$\begin{aligned}
&\int_Q \frac{1}{\theta^2}\,|\rho|^2\,dtdadx \\
\leq\ & C\left(\int_Q |L\rho|^2\,dtdadx + \int_0^T\int_0^A\int_\omega |\rho|^2\,dtdadx\right) \qquad (1.33)
\end{aligned}$$

où C est une constante positive et où $\rho \in \mathcal{V}$.

3.2 Inégalité de Carleman adaptée

Nous avons vu au Chapitre 2 que la construction des sentinelles discriminantes est aussi équivalente à la résolution de problème de contrôlabilité avec contraintes sur le contôle. Pour résoudre ce type de problème nous allons établir une inégalité de Carleman dite "adaptée"aux contraintes. C'est l'objet de ce qui suit.

3.2.1 Enoncé du Théorème

Soit ω un ouvert non vide de Ω et soit $\mathcal{K}$ un sous espace vectoriel de $L^2(U \times \omega)$ de dimension finie. On fait l'hypothèse suivante sur $\mathcal{K}$:

$$\begin{cases} \text{Il n'existe pas d'éléments non nuls } k \text{ de } \mathcal{K} \text{ tel que} \\ k \in L^2(U; H^1(\omega)) \text{ avec } \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial a} - \Delta k + \mu k = 0 \text{ dans } U \times \omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Considérons maintenant P l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(U \times \omega)$ dans $\mathcal{K}$. On peut alors énoncé le Théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *On suppose (2.1). Alors il existe une fonction "poids" θ positive de classe C^2 sur Q, $\frac{1}{\theta}$ bornée sur Q et il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} &\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 \, dtdadx \\ \leq \; & C\left(\int_Q |L\rho|^2 \, dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega |\rho - P\rho|^2 \, dtdadx\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

pour tout $\rho \in \mathcal{V}$

3.2.2 Preuve du Théorème 3.2.1

La démonstration du Théorème 3.2.1 est basée sur trois arguments : l'inégalité d'observabilité (1.33), la compacité de l'opérateur de projection P assurée par la dimension finie de l'espace vectoriel $\mathcal{K}$ et enfin la continuité de l'opérateur P.

Raisonnons par l'absurde comme dans [23]. Supposons qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que (2.2), alors

$$\begin{cases} \forall j \in \mathbf{N}^*, \exists \rho_j \in \mathcal{V}, \int_U \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} \left|\rho_j\right|^2 dtdadx = 1, \\ \int_U \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} \left|L\rho_j\right|^2 dtdadx \leq \frac{1}{j} \text{ et } \int_U \int_\omega \left|\rho_j - P\rho_j\right|^2 dtdadx \leq \frac{1}{j} \end{cases} \tag{2.3}$$

nous allons voir en trois étapes que cela conduit à une contradiction.

Étape 1 : Nous avons

$$\begin{aligned} \int_U \int_\omega \frac{1}{\theta^2} \left|P\rho_j\right|^2 dtdadx &\leq \int_U \int_\omega \frac{1}{\theta^2} \left|\rho_j\right|^2 dtdadx + \\ &+ \int_U \int_\omega \frac{1}{\theta^2} \left|\rho_j - P\rho_j\right|^2 dtdadx. \end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{\theta^2}$ est bornée, alors d'après (2.3), nous avons

$$\int_U \int_\omega \frac{1}{\theta^2} \left|P\rho_j\right|^2 dtdadx \leq C. \tag{2.4}$$

On note par $(h|g)$ le produit scalaire de $L^2(U \times \omega)$ défini par

$$(h|g) = \int_U \int_\omega hgdtdadx.$$

Soit $\{k_1, k_2, ..., k_N\}$ une base de $\mathcal{K}$. Comme $(\rho_j - P\rho_j\chi_\omega)\chi_\omega \in \mathcal{K}^\perp$,alors on a

$$(\rho_j - P\rho_j|k_i) = 0 \ \forall i, 1 \leq i \leq N, \ \forall j \in \mathbf{N}^*.$$

Donc

$$P\rho_j = \sum_{i=1}^{N} (P\rho_j|k_i)k_i = \sum_{i=1}^{N} (\rho_j|k_i)k_i$$

d'où

$$\int_U \int_\omega \frac{1}{\theta^2} \left|P\rho_j\right|^2 dtdadx = \sum_{i=1}^{N} \left|(\rho_j|k_i)\right|^2 \int_U \int_\omega \frac{1}{\theta^2} \left|k_i\right|^2 dtdadx.$$

On déduit de (2.4) que

$$\sum_{i=1}^{N} \left|(\rho_j|k_i)\right|^2 \int_U \int_\omega \frac{1}{\theta^2} \left|k_i\right|^2 dtdadx \leq C. \tag{2.5}$$

Autrement dit la suite $((\rho_j|k_i))_{j\in\mathbf{N}^*}$ est bornée dans $\mathbf{R}$. Donc d'après (2.9) la suite $(P\rho_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ est bornée dans $L^2(U\times\omega)$ et le Théorème de Pythagore nous donne

$$(\rho_j\chi_\omega)_{j\in\mathbf{N}^*} \text{ est bornée dans } L^2(U\times\omega). \tag{2.6}$$

Étape 2 : D'après (2.6) et (2.4), on peut extraire de la suite $(\rho_j\chi_\omega)_{j\in\mathbf{N}^*}$ une sous suite notée encore $(\rho_j\chi_\omega)_{j\in\mathbf{N}^*}$ et il existe une fonction $\rho\in L^2(U\times\omega)$ telle que d'une part on ait

$$\rho_j\chi_\omega \rightharpoonup \rho \text{ faiblement dans } L^2(U\times\omega) \tag{2.7}$$

et d'autre part on ait

$$(\rho_j - P\rho_j\chi_\omega)\chi_\omega \to 0 \text{ fortement dans } L^2(U\times\omega). \tag{2.8}$$

Maintenant comme $\mathcal{K}$ est un espace vectoriel de dimension finie alors l'opérateur P est compact. Ainsi, il existe une fonction $\zeta\in\mathcal{K}$ telle que

$$P\rho_j\chi_\omega \to \zeta \text{ fortement dans } L^2(U\times\omega). \tag{2.9}$$

On déduit de (2.7) et (2.8) que $\rho_j\chi_\omega \longrightarrow \rho = \zeta$ dans $L^2(U\times\omega)$ fort. Comme P est continu, on obtient

$$P\rho_j\chi_\omega \to P\rho \text{ dans } L^2(U\times\omega) \text{ fort.}$$

Il s'en suit que $P\rho = \rho$ et donc $\rho \in \mathcal{K}$.

Étape 3 : En fait, on a $\rho = 0$. En effet, d'après (2.3), nous avons aussi $L\rho_j \to 0$ fortement dans $L^2(U\times\omega)$ et donc $L\rho = 0$. L'hypothèse (2.1) implique $\rho = 0$ dans $U\times\omega$. En résumé, $\rho_j \to 0$ fortement dans $L^2(U\times\omega)$.

Conclusion : Comme $\rho_j \in \mathcal{V}$, alors l'inégalité d'observabilité (2.2) nous donne

$$\begin{aligned}&\int_U\int_\Omega \frac{1}{\theta^2}\left|\rho_j\right|^2 dtdadx\\ \leq\ & C\left(\int_U\int_\Omega \left|L\rho_j\right|^2 dtdadx + \int_U\int_\omega \left|\rho_j\right|^2 dtdadx\right)\end{aligned}$$

D'après la troisième étape on déduit que $\int_U\int_\Omega \frac{1}{\theta^2}\left|\rho_j\right|^2 dtdadx \to 0$ quand $j \to +\infty$. Ce qui contredit (2.3). D'où le Théorème 3.2.1.

Remarque 3.2.1 *Les inégalités de Carleman sont établies dans ce chapitre avec des conditions de Dirichlet. On peut aussi les établir avec des conditions de Neuman, pour ce faire on peut se référer à Ainseba et Anita[4]*

Remarque 3.2.2 *Les inégalités de Carleman peuvent être établies dans le cas général où l'opérateur L est défini par*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} + \mathcal{A}$$

où $\mathcal{A}$ est un opérateur elliptique du second ordre à coefficients réguliers de classe C^2. Les calculs se font de la même manière.

Chapitre 4

Contrôlabilité à zéro

4.1 Un problème de contrôlabilité à zéro pour un problème à deux temps

4.1.1 Position du problème

On considère le problème : trouver un contôle $v \in L^2(U \times \omega)$ tel que si $q = q(t,a,x)$ est la solution unique du système

$$\begin{cases} -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial a} - \Delta q + \mu q = \beta q(t,0,x) + h + v\chi_\omega \text{ dans } Q \\ q = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma \\ q(T,a,x) = 0 \qquad \text{dans} \quad Q_A \\ q(t,A,x) = 0 \qquad \text{dans} \quad Q_T \end{cases} \tag{1.1}$$

on ait

$$q(0,a,x) = 0 \ \text{ dans } Q_A \tag{1.2}$$

et

$$\|v\|_{L^2(U\times\omega)} = \min imum. \tag{1.3}$$

où h est donnée dans $L^2(Q)$ et ω est un ouvert non vide de Ω, χ_ω désigne la fonction caractéristique de ω. Le problème (1.1), (1.2) et (1.3) est un problème de contrôlabilité à zéro sans contraintes sur le contrôle. On cherche v qui conduise l'état de 0 (à l'instant "initial" $t = T$) jusqu'à l'état $q(0, a, x) = 0$ à l'instant final $t = 0$ et ceci avec une "dépense" minimum pour v au sens (1.3).

Le problème de contrôlabilité à zéro sans contraintes sur le contrôle pour un problème à deux temps a été étudié dans [4] puis par Ainseba[1] dans le cas d'un problème linéaire en dynamique des populations. La méthode utilisée dans [1] repose sur une inégalité d'observabilité de type Carleman. Dans le cas précis, pour le problème (1.1) (1.2) (1.3) nous utilisons une méthode variationnelle developpée dans [9] et revisitée dans [28]. La méthode utilise elle aussi une inégalité de Carleman.

4.1.2 Un problème variationnel

Au chapitre 2, nous avons montré qu'il existe une fonction poids θ vérifiant $\theta > 0, \theta$ de classe C^2 sur Q, $\frac{1}{\theta}$ borné sur Q et il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^A \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 \, dtdadx \\ \leq\ & C\left(\int_0^T \int_0^A \int_\Omega |L\rho|^2 \, dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega |\rho|^2 \, dtdadx\right) \end{aligned} \tag{1.4}$$

pour tout $\rho \in \mathcal{V} = \{\rho \in C^\infty(\overline{Q}),\ \rho = 0 \text{ sur } \Sigma\}$, et où

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} - \Delta + \mu I \text{ et } L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial a} - \Delta + \mu I.$$

Le second membre de l'inégalité (1.4) conduit à munir $\mathcal{V}$ de la forme bilinéaire

$$a_\theta(\rho,\widehat{\rho}) = \int_0^T\int_0^A\int_\Omega L\rho L\widehat{\rho}dtdadx + \int_0^T\int_0^A\int_\omega \rho\widehat{\rho}dtdadx. \tag{1.5}$$

Lemme 4.1.1 *L'application* $(\rho,\widehat{\rho}) \longmapsto a_\theta(\rho,\widehat{\rho})$ *est un produit scalaire sur* $\mathcal{V}$.

Preuve. L'application $(\rho,\widehat{\rho}) \longmapsto a_\theta(\rho,\widehat{\rho})$ est bien définie car $|a_\theta(\rho,\widehat{\rho})| < +\infty$. Par définition $a_\theta(.,.)$ est une forme bilinéaire et symétrique et pour tout $\rho \in \mathcal{V}$

$$a_\theta(\rho,\rho) = \int_0^T\int_0^A\int_\Omega |L\rho|^2 dtdadx + \int_0^T\int_0^A\int_\omega |\rho|^2 dtdadx \geq 0$$

Il reste à montrer que l'égalité $a_\theta(\rho,\rho) = 0$ implique $\rho = 0$. Or

$$0 = a_\theta(\rho,\rho) = \int_0^T\int_0^A\int_\Omega |L\rho|^2 dtdadx + \int_0^T\int_0^A\int_\omega |\rho|^2 dtdadx$$

implique $L\rho = 0$ sur Q et $\rho = 0$ sur $U \times \omega$ et l'inégalité (1.4) donne $\rho = 0$ dans Q ■

Soit V_θ le completé de $\mathcal{V}$ pour la norme

$$\rho \longmapsto \|\rho\|_\theta = \sqrt{a_\theta(\rho,\rho)} \tag{1.6}$$

V_θ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $a_\theta(,.,)$ et la norme associée et $\mathcal{V}$ est dense dans V_θ.

On introduit ensuite l'espace H_θ des fonctions $h : Q \longrightarrow \mathbf{R}$ mesurables défini par :

$$H_\theta = \left\{h : \int_0^T\int_0^A\int_\Omega \frac{1}{\theta^2}|h|^2 dtdadx < +\infty\right\} \tag{1.7}$$

Pour $h \in H_\theta$, on pose

$$|h|_{H_\theta} = \left(\int_0^T\int_0^A\int_\Omega \frac{1}{\theta^2}|h|^2 dtdadx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.8}$$

H_θ est un espace de Hilbert pour la norme $|.|_{H_\theta}$ associée au produit scalaire $(.,.)_{H_\theta}$ défini par

$$(g,h)_{H_\theta} = \int_0^T \int_0^A \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} ghdtdadx \tag{1.9}$$

Lemme 4.1.2 *On a $V_\theta \subset H_\theta$ avec injection continue.*

Preuve. Pour $\rho \in V_\theta$, on a $a_\theta(\rho,\rho) = \int_0^T \int_0^A \int_\Omega |L\rho|^2 dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega |\rho|^2 dtdadx < +\infty$ et donc (1.4) implique $\int_0^T \int_0^A \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dtdadx < +\infty$. Autrement dit $\rho \in H_\theta$. De plus d'après (1.4) $|\rho|_{H_\theta} \leq C \|\rho\|_\theta$; autrement dit l'injection est continue. ■

Lemme 4.1.3 *Soit $h \in L^2(Q)$ et θ la fonction poids définie précédement. Alors la fonction*

$$\rho \longrightarrow \int_0^T \int_0^A \int_\Omega h\rho dtdadx$$

est une forme linéaire continue sur V_θ.

Preuve. Comme $\mathcal{V}$ est dense dans V_θ, il nous suffit de vérifier le résultat sur $\mathcal{V}$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \int_0^A \int_\Omega h\rho dtdadx\right| &\leq \left(\int_0^T \int_0^A \int_\Omega \theta^2 |h|^2 dtdadx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\int_0^T \int_0^A \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 dtdadx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

On déduit du lemme 4.1.2 que

$$\left|\int_0^T \int_0^A \int_\Omega h\rho dtdadx\right| \leq \left|\theta^2 h\right|_{H_\theta} |\rho|_{H_\theta} \leq C \left|\theta^2 h\right|_{H_\theta} \|\rho\|_\theta .$$

D'où le résultat ■

Le résultat qui suit est alors une application immédiate du théorème de Lax-Milgram[6]

Proposition 4.1.4 *Pour $h \in L^2(Q)$ avec $\int_Q \theta^2 h^2 dtdadx < +\infty$ il existe ρ_θ unique dans*

V_0 solution du problème variationnel

$$a_\theta(\rho_0,\rho) = \int_0^T \int_0^A \int_\Omega h\rho dt da dx \tag{1.10}$$

pour tout $\rho \in V_0$

4.1.3 Résolution du problème de controlôlabilité

Théorème 4.1.5 *Soit $h \in L^2(Q)$ avec $\int_Q \theta^2 h^2 dt da dx < +\infty$ et ρ_0 la solution unique de (1.10). On pose*

$$\begin{cases} v_0 = -\rho_0 \chi_\omega \\ q_0 = L\rho_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

Alors le couple (v_0, q_0) est solution du problème (1.1)(1.2).

Preuve. Montrons que (v_θ, q_θ) défini en (1.11) est solution de (1.1)(1.2).

En effet, comme $\rho_\theta \in V_\theta$ on a déjà $v_\theta \in L^2(U \times \omega)$ et $q_\theta \in L^2(U \times \Omega)$. En reprenant la définition de q_0 en (1.11) et en explicitant le produit scalaire défini en (1.5), l'équation variationnelle (1.10) s'écrit

$$\int_0^T \int_0^A \int_\Omega q_0 L\rho dt da dx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega \rho_\theta \rho dt da dx = \int_0^T \int_0^A \int_\Omega h\rho dt da dx, \forall \rho \in V_\theta.$$

Il vient :

$$\int_0^T \int_0^A \int_\Omega q_0 L\rho dt da dx = \int_0^T \int_0^A \int_\Omega h\rho dt da dx - \int_0^T \int_0^A \int_\omega \rho_0 \rho dt da dx, \forall \rho \in V_0.$$

Finallement, en considérant la définition de v_0 en (1.11), on obtient

$$\int_0^T \int_0^A \int_\Omega q_0 L\rho dt da dx = \int_0^T \int_0^A \int_\Omega (h + v_0\chi_\omega)\rho dt da dx, \forall \rho \in V_0 \tag{1.12}$$

On choisit dans (1.12) $\rho \in \mathcal{D}(Q)$. Il vient que

$$L^* q_0 = h + v_0 \chi_\omega \text{ dans } \mathcal{D}'(Q). \tag{1.13}$$

Comme $h \in L^2(U, L^2(\Omega))$, alors $L^* q_0 \in L^2(U, L^2(\Omega))$. Maintenant $q_0 \in L^2(U, L^2(\Omega))$ et $\Delta q_0 \in H^{-1}(U, L^2(\Omega))$. Alors d'après les théorèmes de trace de Lions-Magenes [21] on peut donner un sens à la trace de q_0 sur Σ et on a $q_0|\Gamma \in H^{-1}(U, H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$. De même $q_0 \in L^2(U, L^2(\Omega))$ avec $\frac{\partial q_0}{\partial t} + \frac{\partial q_0}{\partial a} \in L^2(U, H^{-2}(\Omega))$. Donc $q_0 \in \mathcal{C}(\overline{U}, H^{-2}(\Omega))$ et on peut donner là aussi un sens à $q_0(0, a, x)$, $q_0(T, a, x)$, $q_0(t, 0, x)$ et à $q_0(t, A, x)$ dans $H^{-2}(\Omega)$. Multiplions maintenant (1.13) par $\varphi \in \mathcal{V}$ et intégrons par parties. On obtient alors

$$\int_Q q_0 L\varphi dt da dx + \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} q_0 d\Sigma + \int_{Q_T} [(q_0\varphi)(t, 0, x) - (q_0\varphi)(t, A, x)] dt dx +$$

$$+ \int_{Q_A} [(q_0\varphi)(0, a, x) - (q_0\varphi)(T, a, x)] dt dx = \int_Q (h + v_0\chi_\omega)\varphi dt da dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{V}. \tag{1.14}$$

En considérant la relation (1.12), la relation (1.14) devient

$$\int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} q_0 d\Sigma + \int_{Q_T} [(q_0\varphi)(t, 0, x) - (q_0\varphi)(t, A, x)] dt dx +$$

$$+ \int_{Q_A} [(q_0\varphi)(0, a, x) - (q_0\varphi)(T, a, x)] dt dx = 0, \ \forall \varphi \in \mathcal{V}. \tag{1.15}$$

On en déduit alors que

$$q_0 = 0 \text{ sur } \Sigma, \ q_0(0, a, x) = 0 \text{ et } q_0(T, a, x) = 0 \text{ dans } Q_A;$$

$$q_0(t, 0, x) = 0 \text{ et } q_0(t, A, x) = 0 \text{ dans } Q_T.$$

Remarquons que $q_\theta(t,0,x)=0$, par conséquent (1.13) est équivalent à

$$L^* q_\theta = \beta q_\theta(t,0,x) + h + v_\theta \chi_\omega. \tag{1.16}$$

Il en résulte alors que le couple (v_θ, q_θ) est solution du problème (1.1) (1.2) ∎

Remarque 4.1.1 *La structure (1.5) de $a_\theta(.,.)$ montre qu'il existe une infinité de possibilités pour le choix du produit scalaire sur $\mathcal{V}$. Donc il existe une infinité de contrôles v qui vérifient (1.1) (1.2).*

Il reste à selectionner un contrôle de norme minimale sur $L^2(U\times\omega)$. Pour cela, on définit l'ensemble $\mathcal{U}_{ad}$ des contrôles $v \in L^2(U\times\omega)$ tel que le couple (v,q) soit solution du problème (1.1) (1.2).

Lemme 4.1.6 *L'ensemble $\mathcal{U}_{ad}$ est un sous-ensemble non vide convexe et fermé de $L^2(U\times\omega)$*

Preuve. D'après le Théorème 4.1.5 $\mathcal{U}_{ad}$ est non vide. Soit $v_1 \in \mathcal{U}_{ad}$ et $v_2 \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que (v_1,q_1) et (v_2,q_2) soient solution de (1.1) (1.2) et soit $\lambda \in [0,1]$, posons

$v' = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2$ et $q' = (1-\lambda)q_1 + \lambda q_2$. Alors $v' \in L^2(U\times\omega)$ et (v',q') vérifie (1.1) et (1.2) donc $v' \in \mathcal{U}_{ad}$ et par consequent $\mathcal{U}_{ad}$ est un convexe. Il reste à montrer que $\mathcal{U}_{ad}$ est fermé. Pour cela soit $(v_n) \subset \mathcal{U}_{ad}$ tel que (v_n,q_n) vérifie (1.1) (1.2) et tel que

$$\begin{aligned} v_n &\to v \text{ dans } L^2(U\times\omega) \\ q_n &\to q \text{ dans } L^2(U\times\Omega) \end{aligned}$$

alors

$$L^* q_n \to L^* q \text{ dans } \mathcal{D}'(Q).$$

On déduit alors des équations (1.1), (1.2) vérifiées par (v_n,q_n) que le couple (v,q) est solution de (1.1) (1.2) et donc $v \in \mathcal{U}_{ad}$. Ainsi $\mathcal{U}_{ad}$ est fermé ∎

Il résulte du Lemme 4.1.6 qu'il existe un unique contrôle $\widehat{v}_\theta \in \mathcal{U}_{ad}$ de norme minimale dans $L^2(U \times \omega)$; c'est-à-dire tel que

$$\frac{1}{2} \|\widehat{v}_\theta\|^2_{L^2(U\times\omega)} = \min\{\frac{1}{2} \|v\|^2_{L^2(U\times\omega)}, v \in \mathcal{U}_{ad}\} \tag{1.17}$$

Il reste maintenant à caractériser le contrôle optimal $\widehat{v}_\theta$ par un système d'optimalité.

4.1.4 Système d'optimalité singulier

Soit $\widehat{q}_\theta$ l'état optimal du système (1.1)(1.2)(1.3) correspondant au contrôle optimal $\widehat{v}_\theta$. On utilise comme dans [2, 3] la méthode de pénalisation (voir [14, 15, 20, 19])pour obtenir le système d'optimalité du couple optimal $(\widehat{v}_\theta, \widehat{q}_\theta)$. Plus precisément pour $\epsilon > 0$ on introduit la fonction J_ϵ définie par

$$\begin{aligned} J_\epsilon(v,q) &= \frac{1}{2} \|v\|^2_{L^2(U\times\omega)} + \\ &+ \frac{1}{2\epsilon} \left\| -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial a} - \Delta q + \mu q - \beta q(t,0,x) - h - v\chi_\omega \right\|^2_{L^2(Q)} \end{aligned} \tag{1.18}$$

où les couples (v, q) sont tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in L^2(U \times \omega) \\ -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial a} - \Delta q + \mu q - \beta q(t,0,x) \in L^2(Q) \\ q = 0 \text{ on } \Sigma; q(T,a,x) = 0 \text{ in } Q_A; q(t,A,x) = 0 \text{ in } Q_T \\ q(0,a,x) = 0 \text{ in } Q_A \end{array} \right. \tag{1.19}$$

On considère alors le problème

$$\inf\{J_\epsilon(v,q) \mid (v,q) \text{ vérifie } (1.19)\} \tag{1.20}$$

Proposition 4.1.7 *Il existe un unique couple (v_ϵ, q_ϵ) tel que*

$$J_\epsilon(v_\epsilon, q_\epsilon) = \inf\{J_\epsilon(v, q) \mid (v, q) \text{ vérifie (1.19)}\}. \tag{1.21}$$

Preuve. Comme l'ensemble des couples (v, q) vérifiant (1.19) est non vide et que $J_\epsilon(v, q) \geq 0$, $\forall\ (v, q)$ vérifiant (1.19) alors

$$d_\epsilon = \inf\{J_\epsilon(v, q) \mid (v, q) \text{ vérifie } (1.19)\}$$

existe, comme borne inférieure d'une partie minorée non vide de $\mathbb{R}$. Soit $(v_n, q_n)_n$ vérifiant (1.19) une suite minimisante telle que

$$d_\epsilon \leq J_\epsilon(v_n, q_n) < d_\epsilon + \frac{1}{n} < d_\epsilon + 1.$$

Il existe alors une constante $C_\epsilon > 0$ telle que

$$\begin{cases} \|v_n\|_{L^2(U\times\omega)} \leq C_\epsilon \\ \left\|-\frac{\partial q_n}{\partial t} - \frac{\partial q_n}{\partial a} - \Delta q_n + \mu q_n - \beta q_n(t, 0, x) - h - v_n\chi_\omega\right\|_{L^2(Q)} \leq C_\epsilon \end{cases} \tag{1.22}$$

On peut donc extraire de (v_n) une suite, notée de la même façon et il existe v_ϵ, telle que

$$v_n \rightharpoonup v_\epsilon \text{ dans } L^2(U \times \omega) \text{ faible.}$$

Comme (q_n) vérifie (1.19) et (1.22), on déduit que (q_n) est bornée dans $L^2(Q)$. On peut alors extraire une suite de (q_n) notée de la même façon et il existe q_ϵ telle que

$$q_n \rightharpoonup q_\epsilon \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible.}$$

On déduit que $q_n \rightharpoonup q_\epsilon$ faiblement dans $\mathcal{D}'(Q)$ et par continuité faible de l'opérateur L^* dans $\mathcal{D}'(Q)$ on obtient $L^* q_n \rightharpoonup L^* q_\epsilon$ faiblement dans $\mathcal{D}'(Q)$. En outre de la continuité des applications traces,on déduit que (v_ϵ, q_ϵ) vérifie (1.19). Donc $\liminf J_\epsilon(v_n, q_n) \geq J_\epsilon(v_\epsilon, q_\epsilon)$ avec (v_ϵ, q_ϵ) vérifiant (1.19). On déduit de la stricte convexité de J_ϵ que (v_ϵ, q_ϵ) est l'unique solution de (1.21). ∎

Etudions maintenant la convergence du procédé.

Proposition 4.1.8 *Sous les hypothèses du Théorème 4.1.5, on a quand* $\epsilon \longmapsto 0$

$$\begin{cases} v_\epsilon \rightharpoonup \widehat{v}_0 \text{ faiblement dans } L^2(U \times \omega) \\ q_\epsilon \rightharpoonup \widehat{q}_0 \text{ faiblement dans } L^2(Q) \end{cases} \tag{1.23}$$

Preuve. Le couple $(\widehat{v}_0, \widehat{q}_0)$ vérifie (1.19) donc on a $J_\epsilon(v_\epsilon, q_\epsilon) \leq J_\epsilon(\widehat{v}_0, \widehat{q}_0)$. De plus $J_\epsilon(\widehat{v}_0, \widehat{q}_0) = \frac{1}{2} \|\widehat{v}_0\|^2_{L^2(U\times\omega)}$. On déduit de la structure (1.18) de J_ϵ que

$$\begin{cases} \|v_\epsilon\|_{L^2(U\times\omega)} \leq C \\ \left\|-\frac{\partial q_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial q_\epsilon}{\partial a} - \Delta q_\epsilon + \mu q_\epsilon - \beta q_\epsilon(t,0,x) - h - v_\epsilon \chi_\omega\right\|_{L^2(Q)} \leq C\sqrt{\epsilon} \end{cases} \tag{1.24}$$

où C est une constante indépendante de ϵ. De la relation (1.24), on déduit que la suite $(q_\epsilon)_\epsilon$ est bornée dans $L^2(Q)$. On peut donc extraire de la suite (v_ϵ, q_ϵ) une sous-suite encore notée (v_ϵ, q_ϵ) et deux fonctions $v_0 \in L^2(U \times \omega)$ et $q_0 \in L^2(Q)$ telle que

$$v_\epsilon \rightharpoonup v_0 \text{ faiblement dans } L^2(U \times \omega), \; q_\epsilon \rightharpoonup q_0 \text{ faiblement dans } L^2(Q)$$

On déduit que $q_\epsilon \rightharpoonup q_0$ faiblement dans $\mathcal{D}'(Q)$ et par continuité faible de l'opérateur L^* dans $\mathcal{D}'(Q)$ on obtient $L^* q_\epsilon \rightharpoonup L^* q_0$ faiblement dans $\mathcal{D}'(Q)$. De la relation (1.24), on déduit aussi que (v_ϵ, q_ϵ) vérifie le système suivant

$$\begin{cases} -\frac{\partial q_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial q_\epsilon}{\partial a} - \Delta q_\epsilon + \mu q_\epsilon = \beta q_\epsilon(t,0,x) + h + v_\epsilon \chi_\omega + h_\epsilon \text{ dans } Q \\ q_\epsilon = 0 \text{ sur } \Sigma \\ q_\epsilon(T,a,x) = 0 \text{ dans } Q_A \\ q_\epsilon(t,A,x) = 0 \text{ dans } Q_T \\ q_\epsilon(0,a,x) = 0 \text{ dans } Q_A \end{cases} \tag{1.25}$$

avec $\|h_\epsilon\|_{L^2(Q)} \leq C\sqrt{\epsilon}$. Alors en passant à la limite dans (1.25) on obtient (v_0, q_0) qui vérifie

$$\begin{cases} -\frac{\partial q_0}{\partial t} - \frac{\partial q_0}{\partial a} - \Delta q_0 + \mu q_0 = \beta q_0(t,0,x) + h + v_0\chi_\omega \text{ dans } Q \\ q_0 = 0 \text{ sur } \Sigma \\ q_0(T,a,x) = 0 \text{ dans } Q_A \\ q_0(t,A,x) = 0 \text{ dans } Q_T \end{cases} \tag{1.26}$$

$$q_0(0,a,x) = 0 \text{ dans } Q_A. \tag{1.27}$$

De l'estimation suivante

$$\|v_\epsilon\|^2_{L^2(U\times\omega)} \leq J_\epsilon(v_\epsilon, q_\epsilon)$$

on a

$$\|v_0\|^2_{L^2(U\times\omega)} \leq \liminf J_\epsilon(v_\epsilon, q_\epsilon)$$

Comme le couple $(\widehat{v}_\theta, \widehat{q}_\theta)$ vérifie (1.1)(1.2)(1.3), on a $\liminf J_\epsilon(v_\epsilon, q_\epsilon) \leq \|\widehat{v}_\theta\|^2_{L^2(U\times\omega)}$. On déduit alors que $\|v_0\|_{L^2(U\times\omega)} \leq \|\widehat{v}_\theta\|_{L^2(U\times\omega)}$, et donc $\|v_0\|_{L^2(U\times\omega)} = \|\widehat{v}_\theta\|_{L^2(U\times\omega)}$. Ainsi $v_0 = \widehat{v}_\theta$. De l'unicité de la solution de (1.26) on obtient $q_0 = \widehat{q}_\theta$ ■

Ecrivons maintenant les conditions d'optimalité pour l'unique solution de (1.20)

Proposition 4.1.9 *Sous les hypothèses du Théorème 4.1.5, le couple (v_ϵ, q_ϵ) est la solution optimale du problème (1.20) si et seulement si il existe une fonction ρ_ϵ telle que*

$(v_\epsilon, q_\epsilon, \rho_\epsilon)$ *soit solution du système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} -\frac{\partial q_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial q_\epsilon}{\partial a} - \Delta q_\epsilon + \mu q_\epsilon = \beta q_\epsilon(t,0,x) + h + v_\epsilon \chi_\omega + \epsilon \rho_\epsilon \ dans\ Q \\ q_\epsilon = 0\ sur\ \Sigma \\ q_\epsilon(T,a,x) = 0\ dans\ Q_A \\ q_\epsilon(t,A,x) = 0\ dans\ Q_T \end{cases} \tag{1.28}$$

$$q_\epsilon(0,a,x) = 0\ dans\ Q_A \tag{1.29}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial a} - \Delta \rho_\epsilon + \mu \rho_\epsilon = 0\ dans\ Q \\ \rho_\epsilon = 0\ sur\ \Sigma \\ \rho_\epsilon(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x)\rho_\epsilon(t,a,x)da\ dans\ Q_T \end{cases} \tag{1.30}$$

$$v_\epsilon = -\rho_\epsilon \chi_\omega \tag{1.31}$$

Preuve. La condition d'optimalité d'Euler-Lagrange est donnée par

$$\begin{aligned} &\int_U \int_\omega v_\epsilon v dt da dx + \\ &\frac{1}{\epsilon}\int_U \int_\Omega (-\frac{\partial q_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial q_\epsilon}{\partial a} - \Delta q_\epsilon + \mu q_\epsilon - \beta q_\epsilon(t,0,x) - h - v_\epsilon \chi_\omega) \\ &\times(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial a} - \Delta\varphi + \mu\varphi - \beta\varphi(t,0,x) - v\chi_\omega) dt da dx = 0 \end{aligned} \tag{1.32}$$

pour chaque couple(v,φ) satisfaisant

$$\begin{cases} v \in L^2(U\times\omega) \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial a} - \Delta\varphi + \mu\varphi - \beta\varphi(t,0,x) \in L^2(Q) \\ \varphi = 0 \text{ sur } \Sigma; \varphi(T,a,x) = 0 \text{ dans } Q_A \\ \varphi(t,A,x) = 0 \text{ dans } Q_T; \varphi(0,a,x) = 0 \text{ dans } Q_A \end{cases} \tag{1.33}$$

Posons

$$\rho_\epsilon = -\frac{1}{\epsilon}\left(-\frac{\partial q_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial q_\epsilon}{\partial a} - \Delta q_\epsilon + \mu q_\epsilon - \beta q_\epsilon(t,0,x) - h - v_\epsilon\chi_\omega\right)$$

on déduit alors (1.28) et la relation (1.32) devient

$$\int_U\int_\omega v_\epsilon v dtdadx - \\ \int_U\int_\Omega \rho_\epsilon(-\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial a} - \Delta\varphi + \mu\varphi - \beta\varphi(t,0,x) - v\chi_\omega)dtdadx = 0$$

pour chaque couple (v,φ) vérifiant (1.33). Alors, après intégration par parties, on obtient d'une part

$$\begin{cases} \frac{\partial\rho_\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial\rho_\epsilon}{\partial a} - \Delta\rho_\epsilon + \mu\rho_\epsilon = 0 \text{ dans } Q \\ \rho_\epsilon = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \rho_\epsilon(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x)\rho_\epsilon(t,a,x)da \text{ dans } Q_T \end{cases}$$

et d'autre part

$$\int_U\int_\omega (v_\epsilon + \rho_\epsilon)\, v dtdadx = 0,\ \forall v \in L^2(U\times\omega)$$

Donc

$$v_\epsilon = -\rho_\epsilon\chi_\omega \text{ dans } U\times\omega$$

D'où la Proposition.4.1.9 ■

Remarque 4.1.2 *Toutefois on a aucune information sur* $\rho_\epsilon(t, A, x)$ *et* $\rho_\epsilon(0, a, x)$, $\rho_\epsilon(T, a, x)$

Nous allons maintenant étudier le comportement de $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ quand $\epsilon \rightharpoonup 0$. D'après (1.24) et (1.31), on a

$$\|\rho_\epsilon \chi_\omega\|_{L^2(U\times\omega)} \leq C \tag{1.34}$$

Des relations (1.4),(1.5),(1.6) et (1.34), il vient que

$$\|\rho_\epsilon\|_{V_0} \leq C \tag{1.35}$$

On peut donc extraire de la suite $(\rho_\epsilon)_\epsilon$ une sous-suite, encore notée $(\rho_\epsilon)_\epsilon$ et il existe une fonction $\widehat{\rho}_0 \in V_0$ telle que

$$\rho_\epsilon \rightharpoonup \widehat{\rho}_0 \text{ faiblement dans } V_0 \tag{1.36}$$

En résumé nous avons démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.1.10 *Supposons que les hypothèses du Théorème 4.1.5 ont lieu. Un couple* $(\widehat{v}_0, \widehat{q}_0)$ *est solution optimale du problème (1.1) (1.2) et (1.3) si et seulement si il existe une fonction* $\widehat{\rho}_0$ *telle que* $(\widehat{v}_0, \widehat{q}_0, \widehat{\rho}_0)$ *soit solution du système d'optimalité singulier suivant*

$$\widehat{v}_0 \in L^2(U \times \omega),\ \widehat{q}_0 \in L^2(Q),\ \widehat{\rho}_0 \in V_0 \tag{1.37}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial \widehat{q}_0}{\partial t} - \frac{\partial \widehat{q}_0}{\partial a} - \Delta \widehat{q}_0 + \mu \widehat{q}_0 = \beta \widehat{q}_0(t, 0, x) + h + \widehat{v}_0 \chi_\omega \ \textit{dans } Q \\ \widehat{q}_0 = 0 \ \textit{sur } \Sigma \\ \widehat{q}_0(T, a, x) = 0 \ \textit{dans } Q_A \\ \widehat{q}_0(t, A, x) = 0 \ \textit{dans } Q_T \end{cases} \tag{1.38}$$

$$\widehat{q}_0(0,a,x) = 0 \ dans \ Q_A \tag{1.39}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{\rho}_0}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{\rho}_0}{\partial a} - \Delta \widehat{\rho}_0 + \mu \widehat{\rho}_0 = 0 \ dans \ Q \\ \widehat{\rho}_0 = 0 \ sur \ \Sigma \\ \widehat{\rho}_0(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x) \widehat{\rho}_0(t,a,x) da \ dans \ Q_T \end{cases} \tag{1.40}$$

$$\widehat{v}_0 = -\widehat{\rho}_0 \chi_\omega \tag{1.41}$$

4.2 Contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle

4.2.1 Position du probème

On considère les notations du Chapitre 2 paragraphe 2.1. Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert non vide et $\mathcal{K}$ un sous-espace vectoriel de $L^2(U \times \omega)$. Soit $h \in L^2(Q)$. On cherche un couple (k, q) vérifiant

$$k \in \mathcal{K}^\perp, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial a} - \Delta q + \mu q = \beta q(t,0,x) + h + k\chi_\omega \text{ dans } Q \\ q = 0 \qquad \text{sur } \Sigma \\ q(T,a,x) = 0 \qquad \text{dans } Q_A \\ q(t,A,x) = 0 \qquad \text{dans } Q_T \end{cases} \tag{2.2}$$

$$q(0,a,x) = 0 \ \text{ dans } Q_A \tag{2.3}$$

et

$$\|k\|_{L^2(U\times\omega)} = \min imum \tag{2.4}$$

Le problème (2.1)-(2.4) est un problème de contrôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle k. Il s'agit de trouver un contrôle k (mais cette fois-ci k doit appartenir à $\mathcal{K}^{\perp}$) qui conduise l'état de 0 (à l'instant "initial" $t = T$) jusqu'à l'état $q(0, a, x) = 0$ à l'instant final $t = 0$ et ceci avec une "dépense" minimum pour k au sens de (2.4).

Remarque 4.2.1 *La résolution du problème (2.1)-(2.4) fera l'objet de ce qui va suivre avec en vue une application à l'existence de sentinelles discriminantes dans le cas général où $\omega \subset O$.*

Dans toute la suite on fera l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} \mathcal{K} \text{ est de dimension finie et il n'existe pas d'éléments non nuls } k \in \mathcal{K} \\ \text{tels que } k \in L^2(U, H^1(\Omega)) \text{ avec } \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial a} - \Delta k + \mu k = 0 \text{ in } U \times \omega \end{cases} \tag{2.5}$$

On fait également l'hypothèse suivante :

$$h \in L^2(Q) \text{ est telle que } \theta h \in L^2(Q) \tag{2.6}$$

On note enfin

$$P = \text{la projection orthogonale de } L^2\left(U \times \omega\right) \text{ sur } \mathcal{K} \tag{2.7}$$

En vue de résoudre notre problème de contrôlabilité, nous définissons le problème variationnel suivant à partir de l'inégalité de Carleman adaptée aux contraintes(cfer Chapitre 3)

4.2.2 Un problème variationnel

On rappelle qu'au Chapitre 3, on a encore montré l'existence d'une fonction poids $\theta > 0, \theta \in \mathcal{C}^2(Q)$ et $\frac{1}{\theta}$ bornée sur Q tel que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^A \int_\Omega \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 \, dtdadx \\ \leq \; & C\left(\int_0^T \int_0^A \int_\Omega |L\rho|^2 \, dtdadx + \int_0^T \int_0^A \int_\omega |\rho - P\rho|^2 \, dtdadx \right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

$\forall \rho \in \mathcal{V} = \left\{ \rho \in C^\infty(\overline{Q}),\ \rho = 0 \text{ sur } \Sigma \right\}$ où C est une constante positive.

Le second membre de (2.8) conduit à munir $\mathcal{V}$ de la forme bilinéaire défini par

$$a_{\theta,P}(\rho,\widehat{\rho}) = \int_U \int_\Omega L\rho L\widehat{\rho} dtdadx + \int_U \int_\omega (\rho - P\rho)(\widehat{\rho} - P\widehat{\rho}) dtdadx \tag{2.9}$$

Lemme 4.2.1 *L'application $(\rho,\widehat{\rho}) \longmapsto a_{\theta,P}(\rho,\widehat{\rho})$ est un produit scalaire sur $\mathcal{V}$*

La démonstration du Lemme 4.2.1 est analogue à celle du Lemme 4.1.1

Soit $V_{\theta,P}$ le complété de $\mathcal{V}$ pour la norme

$$\rho \longmapsto \|\rho\|_{\theta,P} = \sqrt{a_{\theta,P}(\rho,\rho)} \tag{2.10}$$

$V_{\theta,P}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $a_{\theta,P}(\rho,\widehat{\rho})$ et la norme associée, et $\mathcal{V}$ est dense dans $V_{\theta,P}$.

Remarque 4.2.2 *Soit $L^2_\theta(Q)$ l'espace de Hilbert défini par*

$$L^2_\theta(Q) = \left\{ \rho \mid \int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 \, dtdadx < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$|\rho|_{L^2_\theta(Q)} = \left(\int_Q \frac{1}{\theta^2} |\rho|^2 \, dtdadx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Alors le premier membre de (2.8) montre que $V_{\theta,P} \subset L^2_\theta(Q)$ avec injection continu. Autrement *dit il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left|\frac{1}{\theta}\rho\right|_{L^2(Q)} \leq C\, \|\rho\|_{0,P}\, \forall \rho \in L^2_0(Q)$$

On revient à h pour laquelle on suppose (2.6). Alors l'application

$$\rho \longmapsto \int_Q h\rho dt da dx$$

est une forme linéaire continue sur $V_{0,P}$. Le théorème de Lax-Milgram[6] assure l'existence d'une solution unique $\rho_0 \in V_{0,P}$ de l'équation variationnelle

$$a_{0,P}(\rho_\theta, \rho) = \int_Q h\rho dt da dx\ \forall \rho \in V_{\theta,P} \tag{2.11}$$

4.2.3 Résolution du problème de contrôlabilité avec contraintes sur le contrôle

Proposition 4.2.2 *Considérons (2.5) (2.6). Soit ρ_0 l'unique solution de (2.11). On pose*

$$\begin{cases} k_0 = -(\rho_0 - P\rho_0\chi_\omega)\chi\omega \\ \quad q_0 = L\rho_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Alors le couple (k_0, q_0) est une solution du problème (2.1)-(2.3)

La démonstration de cette proposition est analogue à celle du Théorème 4.1.5

Remarque 4.2.3 *La structure (2.9) de $a_{0,P}(.,.)$ montre qu'il existe une infinité de choix possible du produit scalaire sur $\mathcal{V}$. Par conséquent il existe une infinité de contrôles k solution de (2.1)-(2.3)*

Si nous définissons maintenant l'ensemble des contrôles k tel que (2.1)-(2.3). On vérifie comme au Lemme 4.1.6 que cet ensemble est un sous-ensemble non vide fermé et convexe de $L^2(U \times \omega)$. Donc, il existe un contrôle unique $\widehat{k_0}$ de norme minimale dans $L^2(U \times \omega)$. En résumé nous avons prouvé le résultat suivant

Théorème 4.2.3 *Sous les hypothèses de la Proposition 4.2.2, pour chaque sous-ensemble ω de Ω, il existe un contrôle k tel que (2.1)-(2.3). De plus on peut obtenir un contrôle $\widehat{k_\theta}$ de norme minimale dans $L^2(U \times \omega)$ c'est à dire tel que (2.4).*

On établit maintenant le système d'optimalité pour $\widehat{k_\theta}$

4.2.4 Système d'optimalité pour le contrôle optimal

Soit $\widehat{q_\theta}$ l'état optimal du système (2.1)-(2.3) correspondant au contrôle optimal $\widehat{k_\theta}$. On utilise également dans ce paragraphe la méthode de pénalisation pour obtenir le système d'optimalité pour le couple optimal $(\widehat{k_\theta}, \widehat{q_\theta})$. Plus précisément pour $\epsilon > 0$ on introduit la fonction J'_ϵ définie par

$$\begin{aligned} J'_\epsilon(k,q) &= \frac{1}{2}\|k\|^2_{L^2(U\times\omega)} + \\ &+\frac{1}{2\epsilon}\left\| -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial a} - \Delta q + \mu q - \beta q(t,0,x) - h - k\chi_\omega \right\|^2_{L^2(U\times\Omega)} \end{aligned} \tag{2.13}$$

où les couples (k, q) vérifient

$$\begin{cases} k \in \mathcal{K}^\perp \\ -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial a} - \Delta q + \mu q - \beta q(t,0,x) \in L^2(Q) \\ q = 0 \text{ sur } \Sigma; q(T,a,x) = 0 \text{ dans } Q_A; q(t,A,x) = 0 \text{ dans } Q_T \\ q(0,a,x) = 0 \text{ dans } Q_A \end{cases} \tag{2.14}$$

Le problème

$$\inf\{J'_\epsilon(k,q) \mid (k,q) \text{ vérifie (2.14)}\} \tag{2.15}$$

admet une solution unique qui sera caractérisé comme suit :

Théorème 4.2.4 *Sous les hypothèses du Théorème 4.2.3, le couple (k_ϵ, q_ϵ) est la solution optimale du problème (2.15) si et seulement si, il existe une fonction ρ_ϵ telle que $(k_\epsilon, q_\epsilon, \rho_\epsilon)$*

soit solution du système d'optimalité suivante :

$$\begin{cases} -\frac{\partial q_\epsilon}{\partial t} - \frac{\partial q_\epsilon}{\partial a} - \Delta q_\epsilon + \mu q_\epsilon = \beta q_\epsilon(t,0,x) + h + k_\epsilon \chi_\omega + \epsilon \rho_\epsilon \ \textit{dans}\ Q \\ q_\epsilon = 0 \qquad \textit{sur}\ \Sigma \\ q_\epsilon(T,a,x) = 0 \qquad \textit{dans}\ Q_A \\ q_\epsilon(t,A,x) = 0 \qquad \textit{dans}\ Q_T \end{cases} \tag{2.16}$$

$$q_\epsilon(0,a,x) = 0 \qquad \textit{dans}\ Q_A \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial a} - \Delta \rho_\epsilon + \mu \rho_\epsilon = 0 \ \textit{dans}\ Q \\ \rho_\epsilon = 0 \ \textit{sur}\ \Sigma \\ \rho_\epsilon(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x)\rho_\epsilon(t,a,x)da \ \textit{dans}\ Q_T \end{cases} \tag{2.18}$$

$$k_\epsilon = -(\rho_\epsilon - P\rho_\epsilon\chi_\omega)\chi_\omega \tag{2.19}$$

La preuve de ce Théorème est analogue à celle de la Proposition 4.1.9. Ici également on a pas d'information sur $\rho_\epsilon(t,A,x)$, $\rho_\epsilon(0,a,x)$ et $\rho_\epsilon(T,a,x)$.

Pour la convergence du système d'optimalité approché (2.16)-(2.19), nous avons le résultat de convergence suivant dont la démonstration est analogue à celle de la Proposition 4.1.8

Proposition 4.2.5 *Sous les hypothèses du Théorème3.2.3, on a quand* $\epsilon \longrightarrow 0$

$$\begin{cases} k_\epsilon \rightharpoonup \widehat{k}_0 \ \textit{faiblement dans}\ L^2(U \times \omega) \\ q_\epsilon \rightharpoonup \widehat{q}_0 \ \textit{faiblement dans}\ L^2(Q) \end{cases}$$

Nous allons maintenant étudier la convergence de la suite $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ quand $\epsilon \rightharpoonup 0$. Comme au Paragraphe 4.1.4,on montre que

$$\|(\rho_\epsilon - P\rho_\epsilon\chi_\omega)\chi_\omega\| \leq C \tag{2.20}$$

et

$$\|\rho_\epsilon\|_{V_{\theta,P}} \leq C \tag{2.21}$$

On peut donc extraire de (ρ_ϵ) une sous-suite notée encore (ρ_ϵ) et il existe une fonction $\widehat{\rho}_\theta \in V_{\theta,P}$ telle que

$$\rho_\epsilon \rightharpoonup \widehat{\rho}_\theta \text{ dans } V_{\theta,P} \text{ faible} \tag{2.22}$$

Avec les même techniques developpées dans la preuve du Théorème 3.2.1(Chap 3), on montre que $\rho_\epsilon \rightharpoonup \widehat{\rho}_\theta$ dans $L^2(U \times \omega)$ faible. Ainsi $P\rho_\epsilon \to \widehat{k}_0$ dans $L^2(U \times \omega)$ fort (car l'opérateur de projection orthogonal P est compact sur le sous espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{K}$ de $L^2(U \times \omega)$). Donc $\widehat{k}_0 \in \mathcal{K}$. De la relation (2.20) on déduit aussi que, $\rho_\epsilon - P\rho_\epsilon \rightharpoonup \widehat{k}_1$ dans $\mathcal{K}^\perp$ faible. Alors $\widehat{\rho}_\theta = \widehat{k}_0 + \widehat{k}_1$ et donc $\widehat{k}_0 = P\widehat{\rho}_\theta$ et

$$\rho_\epsilon - P\rho_\epsilon \rightharpoonup \widehat{\rho}_\theta - P\widehat{\rho}_\theta \text{ dans } L^2(U \times \omega) \text{ faible}$$

En résumé nous avons prouvé le résultat suivant :

Théorème 4.2.6 *Supposons que les hypothèses du Théorème 4.2.3 ont lieu. Le couple* $(\widehat{k}_\theta, \widehat{q}_\theta)$ *est la solution optimal (2.1)-(2.4) si et seulement si il existe une fonction* $\widehat{\rho}_\theta$ *telle que* $(\widehat{k}_\theta, \widehat{q}_\theta, \widehat{\rho}_\theta)$ *soit solution du système d'optimalité singulier suivant :*

$$\widehat{k}_\theta \in \mathcal{K}^\perp, \; \widehat{q}_\theta \in L^2(U \times \Omega), \; \widehat{\rho}_\theta \in V_{\theta,P} \tag{2.23}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial \widehat{q}_\theta}{\partial t} - \frac{\partial \widehat{q}_\theta}{\partial a} - \Delta \widehat{q}_\theta + \mu \widehat{q}_\theta = \beta \widehat{q}_\theta(t,0,x) + h + \widehat{k}_\theta \chi_\omega \ dans\ Q \\ \widehat{q}_\theta = 0 \qquad\qquad sur\ \Sigma \\ \widehat{q}_\theta(T,a,x) = 0 \qquad dans\ Q_A \\ \widehat{q}_\theta(t,A,x) = 0 \qquad dans\ Q_T \end{cases} \tag{2.24}$$

$$\widehat{q}_\theta(0,a,x) = 0 \qquad\qquad dans\ Q_A \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{\rho}_\theta}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{\rho}_\theta}{\partial a} - \Delta \widehat{\rho}_\theta + \mu \widehat{\rho}_\theta = 0 \ dans\ Q \\ \widehat{\rho}_\theta = 0 \qquad\qquad sur\ \Sigma \\ \widehat{\rho}_\theta(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x)\widehat{\rho}_\theta(t,a,x)da \ dans\ Q_T \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\widehat{k} = -(\widehat{\rho}_\theta - P\widehat{\rho}_\theta \chi_\omega)\chi_\omega \tag{2.27}$$

Orientation : L'ensemble des résultats de contrôlabilité obtenus dans ce chapitre nous servira d'une part à définir des sentinelles puis d'autre part à étudier la furtivité. C'est ce qui constitue l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 5

Furtivité

On reprend les notations du Chapitre 2. Dans ce chapitre nous examinons la question de l'information fournie par une sentinelle. Mais auparavant, nous revenons sur la construction des sentinelles.

5.1 Construction de sentinelles

5.1.1 Sentinelle pour une observation sans bruit

Nous avons montré au Chapitre 2 que la construction d'une sentinelle dans le cas d'une observation sans bruit était équivalente au problème de contrôlabilité suivant :

Trouver le couple (w, q) qui vérifie le système

$$\left\{\begin{array}{lll} -\frac{\partial q}{\partial t}-\frac{\partial q}{\partial a}-\Delta q+\mu q=\beta q(t,0,x)+h_0\chi_O+w\chi_\omega \text{ dans } Q & & \\ q=0 & \text{sur} & \Sigma \\ q(T,a,x)=0 & \text{dans} & Q_A \\ q(t,A,x)=0 & \text{dans} & Q_T \end{array}\right. \tag{1.1}$$

$$q(0,a,x)=0 \ \text{ dans } Q_A \tag{1.2}$$

et

$$\|w\|_{L^2(U\times\omega)} = \min imum \tag{1.3}$$

On reconnaît alors le problème (1.1)-(1.3) du Chapitre 4, paragrahe 4.1 quand $h = h_0\chi_O$ et $v = w$. Considérons donc les résultats obtenus au paragrphe 4.1 du chapitre 4. Soit $(\widehat{v}_0, \widehat{q}_0, \widehat{\rho}_0)$ défini au Théorème 4.1.10. Alors

$$\widehat{v}_0 = -\widehat{\rho}_0\chi_\omega$$

Par conséquent la sentinelle $S(\lambda, \tau)$ est définie par

$$S(\lambda,\tau) = \int_U\int_O h_0 y(t,a,x;\lambda,\tau)dtdadx - \int_U\int_\omega \widehat{\rho}_0 y(t,a,x;\lambda,\tau)dtdadx$$

On dit que S est la sentinelle définie par h_0, O et ω.

5.1.2 Sentinelles discriminantes

La construction d'une sentinelle dans le cas d'une observation bruitée était équivalente à un problème de contrôlabilité à zéro avec des contraintes sur le contrôle (cf Chapitre 2). Plus précisément il s'agissait de trouver un couple (v, q) solution du système :

$$v \in \mathcal{K}^\perp, \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial a} - \Delta q + \mu q = \beta q(t,0,x) + h_0\chi_O + k_0\chi_\omega + v\chi_\omega & \text{dans } Q \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma \\ q(T,a,x) = 0 & \text{dans } Q_A \\ q(t,A,x) = 0 & \text{dans } Q_T \end{cases} \tag{1.5}$$

$$q(0, a, x) = 0 \quad \text{dans } Q_A \tag{1.6}$$

et

$$\|v\|_{L^2(U\times\omega)} = \min irnurn \tag{1.7}$$

Alors le problème (1.4)-(1.7) est le même que le problème (2.1)-(2.4) du Chapitre 4, paragraphe 4.2 quand $h = h_0\chi_O + k_0\chi_\omega$ et $v = k$. Ce qui nous amène à reconsidérer tous les résultats obtenus au paragraphe 4.2 du Chapitre 4. Plus précisément soit $\mathcal{K}$ défini en (3.10) (Cf Chapitre 2, paragraphe 2.3) telle que (2.5) (Cfer Chapitre 4, paragraphe 4.2) et h_0 et k_0 telle que (2.6) (Cf Chapitre 4, paragraphe 4.2). Alors soit $(\widehat{k}_\theta, \widehat{q}_\theta, \widehat{\rho}_0)$ défini au Théorème 4.2.6. On a

$$\widehat{k}_\theta = -(\widehat{\rho}_\theta - P\widehat{\rho}_\theta\chi_\omega)\chi_\omega$$

et la sentinelle $S(\lambda, \tau)$ est définie par :

$$S(\lambda,\tau) = \int_U\int_O h_0 y(t,a,x;\lambda,\tau)dtdadx + \int_U\int_\omega (k_0 - \widehat{\rho}_\theta + P\widehat{\rho}_\theta\chi_\omega)y(t,a,x;\lambda,\tau)dtdadx$$

On dit que S est la sentinelle discriminante définie par h_0, O et ω

5.2 Ensemble de sentinelles pour une observation sans bruit

5.2.1 Position du problème

Soit le système à données manquantes suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} - \Delta y + \mu y = f + \lambda \widehat{f} \quad \text{dans } Q\,; \\ y = 0 \quad \text{sur } \Sigma\,; \\ y(0, a, x) = y^0(a, x) + \tau \widehat{y}^0(a, x) \quad \text{dans } Q_A\,; \\ y(t, 0, x) = \int_0^A \beta(t, a, x) y(t, a, x) da \quad \text{dans } Q_T \end{cases} \tag{2.1}$$

On suppose que l'observation est sans bruit, c'est-à-dire

$$y_{obs} = y\chi_O \tag{2.2}$$

Remarque 5.2.1 *On examine ensuite le cas où il y a un bruit dans l'observation (2.2)*

A la section 5.1 ci-dessus, on a construit la sentinelle définie par h_0, où h_0 est donnée dans $L^2(U \times O)$.

On considère maintenant une suite de sentinelles construites à partir de $h_{01}, h_{02}, ...$ où toutes les fonctions h_{0j} sont à support dans $U \times \overline{O}$. Autrement dit toutes les sentinelles sont basées sur le même observatoire.

On rappelle qu'une pollution $\widehat{f}$ est dite furtive pour toutes les sentinelles définies par h_{0i} si

$$\int_Q \widehat{q}_0(h_{0i}) \widehat{f} dt da dx = 0, \ \forall h_{0i} \in L^2(U \times O), \ i = 1, 2, ... \tag{2.3}$$

La question à étudier est la suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \text{existe-t-il des } \widehat{f} \text{ furtifs pour toutes les sentinelles,} \\ \text{et si oui, quelle est leur structure ?} \end{array} \right. \tag{2.4}$$

5.2.2 Quelques formules

Pour un contrôle $\widehat{v}_0$ tel que $(\widehat{v}_0, \widehat{q}_0)$ soit solution du problème (1.1)-(1.3) la sentinelle est définie par

$$S(\lambda, \tau) = \int_U \int_O h_0 y(t, a, x; \lambda, \tau) dt da dx + \int_U \int_\omega \widehat{v}_0 y(t, a, x; \lambda, \tau) dt da dx \tag{2.5}$$

où rappelons-le $\widehat{v}_0$ est défini à partir de l'unique solution ρ_0 de l'équation variationnelle :

$$\begin{cases} \rho_0 \in V_0 \\ a_\theta(\rho_\theta, \rho) = (\theta^2 h_0 \chi_O, \rho)_{H_0} \ \forall \rho \in V_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Plus précisément

$$\widehat{v}_0 = -\rho_\theta \chi_\omega \tag{2.7}$$

Comme l'application $\rho \longmapsto a_\theta(\rho_0, \rho)$ est une forme linéaire continue sur V_0, il existe $A_\theta \in \mathcal{L}(V_\theta, V_0')$ tel que

$$a_0(\rho_\theta, \rho) = \langle A_\theta \rho_\theta, \rho \rangle_{V_0' V_0} \quad \forall \rho \in V_0.$$

De plus A_θ est un isomorphisme auto-adjoint, i.e. $A_0^* = A_0$ et $(A_0^{-1})^* = A_\theta^{-1}$. Rappelons qu'on a le schéma suivant :

$$V_\theta \hookrightarrow H_\theta = H_0' \hookrightarrow V_0'$$

où les injections canoniques respectives i et j de V_θ dans H_θ et de H_θ dans V'_θ sont continues. L'injection canonique j est définie comme suit (voir [6]) : étant donné $h \in H_\theta$, l'application $\rho \in V_\theta \longmapsto (h,\rho)_{H_\theta}$ est une forme linéaire continue sur H_θ et à fortiori sur V_θ; on la note $j(h) \in V'_\theta$ de sorte que

$$\langle j(h), \rho\rangle_{V'_\theta V_\theta} = (h,\rho)_{H_\theta} \quad \forall h \in H_\theta, \ \forall \rho \in V_\theta$$

Avec ces formules de représentation, l'équation (2.6) s'écrit :

$$\begin{cases} \rho_\theta \in V_\theta \\ \langle A_\theta \rho_\theta, \rho\rangle_{V'_\theta V_\theta} = \left\langle j(\theta^2 h_0 \chi_O), \rho\right\rangle_{V'_\theta V_\theta} \quad \forall \rho \in V_\theta \end{cases} \tag{2.8}$$

Par conséquent

$$A_\theta \rho_\theta = j(\theta^2 h_0 \chi_O) \text{ dans } V'_\theta$$

et donc

$$\rho_\theta = (A_\theta^{-1} \circ j)(\theta^2 h_0 \chi_O) \tag{2.9}$$

Avec ces notations, l'équation (2.6), explicitée à l'aide de la définition de $a_\theta(.,.)$ au Chapitre 4, paragraphe 4.1.2, de $\widehat{v}_\theta = -\rho_\theta \chi_\omega$ et de (2.9) donne

$$\int_Q L\rho_\theta L\rho dt da dx = \int_Q \frac{1}{\theta^2}[\theta^2 h_0 \chi_O - \theta^2 (i \circ A_\theta^{-1} \circ j)(\theta^2 h_0 \chi_O)\chi_\omega]\rho dt da dx \ \forall \rho \in V_\theta$$

On pose

$$R = i \circ A_\theta^{-1} \circ j.$$

Alors $R \in \mathcal{L}(H)$. On vérifie facilement que R est auto-adjoint, i.e $R^* = R$. Donc

$$\begin{aligned} \int_Q L\rho_0 L\rho dt da dx &= (\theta^2 h_0 \chi_O - \theta^2 R(\theta^2 h_0 \chi_O)\chi_\omega ; \rho)_{H_\theta} \\ &= (\theta^2 h_0 \chi_O ; \rho - R^*(\theta^2 \rho \chi_\omega))_{H_\theta} \end{aligned}$$

En conséquence et pour conclure la sentinelle S définie par h_0 est donnée aussi par :

$$S(\lambda,\tau) = (\theta^2 h_0 \chi_O ; y(\lambda,\tau) - R^*(\theta^2 y(\lambda,\tau)\chi_\omega))_{H_\theta} \tag{2.10}$$

5.2.3 Furtivité

On suppose maintenant que

$$h_0 \text{ parcourt une suite complète de } L^2(U \times O) \tag{2.11}$$

On rappelle qu'une pollution $\lambda \widehat{f}$ est furtive pour toutes les sentinelles définie par h_0 si

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) &= \int_Q \widehat{q}_0 \widehat{f} dt da dx \\ &= \int_Q (h_0 \chi_O + \widehat{v}_0 \chi_\omega) y_\lambda dt da dx \\ &= 0, \ \forall h_0 \end{aligned}$$

ou encore d'après (2.10)

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda}(0,0) = (\theta^2 h_0 \chi_O ; y_\lambda - R^*(\theta^2 y_\lambda \chi_\omega))_{H_\theta} = 0, \ \forall h_0 \tag{2.12}$$

On déduit de (2.11) que

$$y_\lambda - R^*(\theta^2 y_\lambda \chi_\omega) = 0 \text{ sur } U \times O \tag{2.13}$$

où y_λ est la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial y_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial y_\lambda}{\partial a} - \Delta y_\lambda + \mu y_\lambda = \widehat{f} \text{ dans } Q\,; \\ y_\lambda = 0 \text{ sur } \Sigma\,; \\ y_\lambda(0,a,x) = 0 \quad \text{dans } Q_A\,; \\ y_\lambda(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x) y_\lambda(t,a,x)da \quad \text{dans } Q_T \end{cases} \tag{2.14}$$

Quant à $R^*(\theta^2 y_\lambda \chi_\omega)$, on pose $R^*(\theta^2 y_\lambda \chi_\omega) = \rho_\lambda$.

Lemme 5.2.1 *La fonction ρ_λ est solution du problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial a} - \Delta \rho_\lambda + \mu \rho_\lambda = 0 \quad \textit{dans } Q\,; \\ \rho_\lambda = 0 \quad \textit{sur } \Sigma\,; \\ \rho_\lambda(0,a,x) = (A_\theta^{-1} \circ j)(\theta^2 y_\lambda \chi_\omega)(0,a,x) \quad \textit{dans } Q_A\,; \\ \rho_\lambda(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x)\rho_\lambda(t,a,x)da \quad \textit{dans } Q_T \end{cases} \tag{2.15}$$

Preuve. Par définition de $R^* = R$, on a $A_\theta \rho_\lambda = j(\theta^2 y_\lambda \chi_\omega)$; autrement dit

$$\begin{cases} \rho_\lambda \in V_\theta \\ a_\theta(\rho_\lambda, \rho) = (\theta^2 y_\lambda \chi_\omega, \rho)_{H_\theta}, \ \forall \rho \in V_\theta \end{cases} \tag{2.16}$$

qui explicitée donne

$$\int_Q L\rho_\lambda L\rho dtdadx = (\theta^2(y_\lambda - R^*(\theta^2 y_\lambda \chi_\omega))\chi_\omega; \rho)_{H_\theta}, \ \forall \rho \in V_0$$

et donc d'après (2.13)

$$\int_Q \frac{1}{\theta^2} L\rho_\lambda L\rho dtdadx = 0, \ \forall \rho \in V_\theta$$

Par suite $L\rho_\lambda = 0$. D'où le Lemme 5.2.1.

Théorème 5.2.2 *Soit $\widehat{f}$ une pollution furtive pour toutes les sentinelles définies par h_0, où h_0 décrit une suite complète $h_{01}, h_{02}, \ldots$ d'éléments de $L^2(U \times O)$. Alors $\widehat{f}$ est de la* *forme*

$$\widehat{f} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial a} - \Delta\phi + \mu\phi \quad dans\ Q$$

où $\phi \in V_0$ avec de plus $\phi = 0$ sur $U \times O$ et donc $\widehat{f} = 0$ sur $U \times O$.

■

Preuve. On pose

$$\phi_\lambda = y_\lambda - \rho_\lambda.$$

Alors ϕ_λ est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial a} - \Delta\phi_\lambda + \mu\phi_\lambda = 0 \text{ dans } Q \\ \phi_\lambda = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \phi_\lambda(0, a, x) = -\rho_\lambda(0, a, x) \text{ dans } Q_A \\ \phi_\lambda(t, 0, x) = \int_0^A \beta(t, a, x)\phi_\lambda(t, a, x)da \text{ dans } Q_T \end{cases} \tag{2.17}$$

avec d'après (2.13) $\phi_\lambda = 0$ sur $U \times O$ et donc $\widehat{f} = 0$ sur $U \times O$. ■

On fait maintenant l'hypothèse

$$\widehat{f} \text{ est concentrée dans un ensemble } U \times S, \text{ où } S \subset \Omega. \tag{2.18}$$

Remarque 5.2.2 *Si $S \subset O$, alors d'après le Théorème 5.2.2 $\widehat{f} \equiv 0$ et il n'y a aucune pollution furtive.*

On suppose donc que :

$$S \text{ ouvert de } \Omega \text{ et que } S \cap O = \emptyset \tag{2.19}$$

Cette dernière hypothèse correspond à la situation où l'on essaye d'observer une pollution de “loin”. On déduit alors du théorème 5.2.2 le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.3 *On suppose (2.18),(2.19). On suppose que h_0 parcourt une suite complète $h_{01}, h_{02}, \ldots$ d'éléments de $L^2(U \times O)$. Alors une pollution $\widehat{f}$ est furtive pour toutes les sentinelles définies par $h_{01}, h_{02}, \ldots$ si et seulement si $\widehat{f}$ est de la forme*

$$\widehat{f} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial a} - \Delta \phi + \mu \phi \quad sur\ U \times S \tag{2.20}$$

avec $\phi \in V_0$ et $\phi = 0$ hors de S.

5.2.4 Orientation.

On va maintenant considérer les problèmes analogues où l'observation est entachée d'un bruit.

5.3 Ensemble de sentinelles discriminantes.

5.3.1 Position du problème.

On se place dans le cadre du problème 2, Chapitre 2 où l'observation est bruitée :

$$y_{obs} = m_0 + \sum_{i=0}^{N} \beta_i m_i \tag{3.1}$$

On rappelle que la construction de la sentinelle discriminante était équivalente à la résolution du problème de contrôlabilité (3.13)-(3.16), Chapitre 2 et que ce problème est résolu par le Théorème 4.2.3, Chapitre 4.

Remarque 5.3.1 *Dans le cadre du Théorème 4.2.3, Chapitre 4, on a pris*

$$\mathcal{K} = \ \textit{espace engendré par}\ m_1\chi_\omega, m_2\chi_\omega, \ldots, m_N\chi_\omega \tag{3.2}$$

On va construire maintenant une famille de sentinelles définies par des fonctions $h_{01}, h_{02}, \ldots$ et discriminantes pour $\mathcal{K}$.

Quelle est la structure des pollutions furtives pour toutes les sentinelles ainsi construites ?

5.3.2 Quelques formules.

Soit $\widetilde{\rho}_\theta$ la solution de l'équation (2.11) Chapitre 4, i.e

$$\begin{cases} \widetilde{\rho}_\theta \in V_{\theta,P} \\ a_{\theta,P}(\widetilde{\rho}_\theta, \rho) = (\theta^2 h, \rho)_{L^2_\theta(Q)} \end{cases} \tag{3.3}$$

avec $h = h_0\chi_O + k_0\chi_\omega$ est telle que (2.6), Chapitre 4. On a

$$\widehat{k}_\theta = -(\widetilde{\rho}_\theta - P\widetilde{\rho}_\theta\chi_\omega)\chi_\omega$$

et la sentinelle discriminante est donnée par

$$S(\lambda, \tau) = \int_Q hy(\lambda, \tau)dtdadx + \int_U \int_\omega \widehat{k}_\theta y(\lambda, \tau)dtdadx$$

Comme l'application $\rho \longmapsto a_{\theta,P}(\widetilde{\rho}_\theta, \rho)$ est une forme linéaire et continue sur $V_{\theta,P}$ il existe $A_{\theta,P} \in \mathcal{L}(V_{\theta,P}, V'_{\theta,P})$ tel que

$$a_{\theta,P}(\widetilde{\rho}_\theta, \rho) = \langle A_{\theta,P}\widetilde{\rho}_\theta, \rho\rangle_{V'_{\theta,P}, V_{\theta,P}} \quad \forall \rho \in V_{\theta,P}$$

De plus $A_{\theta,P}$ est un isomorphisme auto-adjoint, i.e $A^*_{\theta,P} = A_{\theta,P}$ et $(A^{-1}_{\theta,P})^* = A^{-1}_{\theta,P}$. On a le schéma suivant

$$V_{\theta,P} \overset{i'}{\hookrightarrow} L^2_\theta(Q) \overset{j'}{\hookrightarrow} V'_{\theta,P}$$

où les injections i' et j' sont continues. Alors l'équation (3.3) devient

$$\begin{cases} \widetilde{\rho}_\theta \in V_{\theta,P} \\ \langle A_{\theta,P}\widetilde{\rho}_\theta, \rho\rangle_{V'_{\theta,P}, V_{\theta,P}} = \langle j'(\theta^2 h), \rho\rangle_{V'_{\theta,P}, V_{\theta,P}} \end{cases} \tag{3.4}$$

Par conséquent

$$A_{0,P}\widetilde{\rho}_0 = j'(\theta^2 h) \text{ dans } V'_{0,P}$$

et donc

$$\widetilde{\rho}_0 = (A_{0,P}^{-1} \circ j')(\theta^2 h) \tag{3.5}$$

Avec ces notations l'équation (3.3) explicitée à l'aide de la définition de $a_{0,P}(.,.)$, de $\widehat{k}_0 = -(\widetilde{\rho}_0 - P\widetilde{\rho}_0\chi_\omega)\chi_\omega$ et de (3.5) donne

$$\begin{aligned}\int_Q L\widetilde{\rho}_0 L\rho dt da dx &= ((i' \circ A_{0,P}^{-1} \circ j')(\theta^2 h); P(\theta^2\rho\chi_\omega) - (\theta^2\rho\chi_\omega))_{L^2_\theta(Q)} + (\theta^2 h; \rho)_{L^2_\theta(Q)} \\ &= (\theta^2 h; (T^* \circ P)(\theta^2\rho\chi_\omega) - T^*(\theta^2\rho\chi_\omega) + \rho)_{L^2_\theta(Q)}\end{aligned}$$

où $T = i' \circ A_{0,P}^{-1} \circ j'$ est un opérateur auto-adjoint, i.e $T = T^*$.

En conséquence la sentinelle discriminante est donnée par

$$S(\lambda,\tau) = (\theta^2 h; (T^* \circ P)(\theta^2 y(\lambda,\tau)\chi_\omega) - T^*(\theta^2 y(\lambda,\tau)\chi_\omega) + y(\lambda,\tau))_{L^2_\theta(Q)} \tag{3.6}$$

5.3.3 Furtivité

Une pollution $\lambda\widehat{f}$ est furtive pour toutes les sentinelles discriminantes définies par h_{0j} si

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda}(0,0) = (\theta^2 h; (T^* \circ P)(\theta^2 y_\lambda\chi_\omega) - T^*(\theta^2 y_\lambda\chi_\omega) + y_\lambda)_{L^2_\theta(Q)} = 0 \tag{3.7}$$

On suppose que

$$h_0 \text{ parcourt un ensemble complet de } L^2(U \times O) \tag{3.8}$$

On déduit alors de (3.7) que

$$(T^* \circ P)(\theta^2 y_\lambda \chi_\omega) - T^*(\theta^2 y_\lambda \chi_\omega) + y_\lambda = 0 \text{ sur } U \times O \tag{3.9}$$

avec y_λ solution de (2.14), on pose

$$\widetilde{\rho}_\lambda = T^*(\theta^2 y_\lambda \chi_\omega) - (T^* \circ P)(\theta^2 y_\lambda \chi_\omega)$$

Lemme 5.3.1 *La fonction $\widetilde{\rho}_\lambda$ est solution du problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial \widetilde{\rho}_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{\rho}_\lambda}{\partial a} - \Delta \widetilde{\rho}_\lambda + \mu \widetilde{\rho}_\lambda = 0 \quad dans\ Q\,; \\ \widetilde{\rho}_\lambda = 0 \quad sur\ \Sigma\,; \\ \widetilde{\rho}_\lambda(0,a,x) = \widetilde{\rho}^{\,0}_\lambda \quad dans\ Q_A\,; \\ \widetilde{\rho}_\lambda(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x)\widetilde{\rho}_\lambda(t,a,x)da \quad dans\ Q_T \end{cases} \tag{3.10}$$

La preuve est analogue à celle du lemme 5.2.1.

Théorème 5.3.2 *Soit $\widehat{f}$ une pollution furtive pour toutes les sentinelles discriminantes définies par h_{0j}. Alors $\widehat{f}$ est de la forme*

$$\widehat{f} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial a} - \Delta \psi + \mu \psi \ dans\ Q$$

où $\psi \in V_{0,P}$ avec de plus $\psi = 0$ sur $U \times O$ et donc $\widehat{f} = 0$ sur $U \times O$.

Preuve. On pose

$$\psi_\lambda = y_\lambda - \widetilde{\rho}_\lambda.$$

Alors ψ_λ est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\psi_\lambda}{\partial a} - \Delta\psi_\lambda + \mu\psi_\lambda = \widehat{f} \text{ dans } Q \\ \psi_\lambda = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \psi_\lambda(0,a,x) = -\widetilde{\rho}^0_\lambda \text{ dans } Q_A \\ \psi_\lambda(t,0,x) = \int_0^A \beta(t,a,x)\psi_\lambda(t,a,x)da \text{ dans } Q_T \end{cases}$$

avec d'après (3.9) $\psi_\lambda = 0$ sur $U \times O$ et donc $\widehat{f} = 0$ sur $U \times O$. ∎

On fait maintenant les hypothèses

$$\widehat{f} \text{ est concentrée dans un ensemble } U \times S, \text{ où } S \subset \Omega. \tag{3.11}$$

$$S \text{ ouvert de } \Omega \text{ et que } S \cap O = \emptyset \tag{3.12}$$

On déduit alors du théorème 5.3.2 le corollaire suivant :

Corollaire 5.3.3 *On suppose (3.11),(3.12). On suppose que h_0 parcourt une suite complète $h_{01}, h_{02}, \ldots$ d'éléments de $L^2(U \times O)$. Alors une pollution $\widehat{f}$ est furtive pour toutes les sentinelles définies par $h_{01}, h_{02}, \ldots$ si et seulement si $\widehat{f}$ est de la forme*

$$\widehat{f} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial a} - \Delta\psi + \mu\psi \quad \textit{sur } U \times S \tag{3.13}$$

avec $\psi \in V_{0,P}$ et $\psi = 0$ hors de S.

Bibliographie

[1] **B.Ainseba** : Exact and approximate controllability of age and space population dynamics structured model.J.Math.Anal.App.2002.

[2] **B.Ainseba et M.Langlais :** On a population dynamics control problem with age dependence and spatial structure.Journal of Mathematical Analysis and Applications 248,455–474(2000).

[3] **B. Ainseba et M.Langlais** : Sur un problème de contrôle d'une population structurée en âge et en espace.C.R.Acad.Sci.Paris,t.323,serie I, P.269–274,1996.

[4] **B.Ainseba and S.Anita :** Local exact controllability of the age-dependent population dynamics with diffusion.Abstract Appl.Anal.6(2001) 357-368.

[5] **J.P.Aubin and I.Ekeland**, Applied non-linear analysis, Wiley, New York 1984.

[6] **H.Brezis :** Analyse fonctionnelle.Théorie et application. Masson(1983).

[7] **R.Dautray-J.L.Lions** : Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Tome3, Masson.

[8] **O.Yu.Èmanuilov[Imanuvilov]** : Controllability of parabolic equations, Sbornik : Mathematics(1995) 186 :6 879-900.

[9] **A.Fursikov, O.Imanualov :** Controllability of evolution equation.Lecture Notes Series 34,RIM-GARC, Seoul National University,1996.

[10] **M.G.Garroni and M.Langlais** : Age-dependent population diffusion with external constraint. J.Math.Biology(1982) 14 :77-94.

[11] **Gurtin-Mc Camy** : Population dynamics with age dependent Nonlinear Anal and Mechanics-Herriot-Watt symp vol 3 pp 1-35 (1977).

[12] **F.Hoppenstead** : Mathematical theories of populations : demographics,genetics and epidemics SIAM Philadelphia (1975).

[13] **M.R.Langlais** : On a linear age-dependent population diffusion model, Quarterly of applied mathematics January 1983.

[14] **J.L.Lions** : Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, gauthier-Villars, Paris(1968).

[15] **J.L.Lions** : Sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes.Masson, Paris,1992.

[16] **J.L.Lions** : Sur les sentinelles des systèmes distribués.C.R.A.S. Paris, t. 307, 1988. Le cas des conditions initiales incomplètes, p. 819-893. Conditions frontières, termes sources, coefficients incomplètement connus, p.865-870.

[17] **J.L.Lions** : Furtivité et sentinelles pour les systèmes distribués à données incomplètes. C.R.A.S. Paris, 1990.

[18] **J.L.Lions** : Sentinels and Stealthy perturbations. International Symposium on Assimilation of Observations in Meteorology and Oceanography. Clermont-Ferrand, July 9-13,1990.

[19] **J.L.Lions** : Contrôle de systèmes distribués singuliers. Gauthier-Villars, Paris(1985).

[20] **J.L.Lions** : Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Gauthier-Villars, Paris(1969).

[21] **J.L.Lions-E.Magenes** : Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Vol I and II, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1972.

[22] **O. Nakoulima** : Contôlabilité à zéro avec contraintes sur le contrôle. C.R.Acad.Sci. Paris, Ser. I 339/6 (2004) 405-410.

[23] **O. Nakoulima :** Null-controllability with constraints on the control and discriminating sentinel (preprint).

[24] **O. Nakoulima-A. Omrane-J. Velin :** A nonlinear problem for age-structured population dynamics with spatial diffusion, TMNA,J.Juliusz Schauder Center, Vol 17,2001, 307-319.

[25] **S.Ndiaye :** Sur un problème non linéaire en dynamique des populations.Thèse de $3^{ème}$ cycle Université Cheik Anta Diop(1988).

[26] **A. Ouédraogo, O. Traoré** : Sur un problème de dynamique des populations, Imhotep, (2003). Vol 4 n°1.

[27] **A. Ouédraogo, O. Traoré :** Optimal Control for a Nonlinear Population Dynamics Problem. To appear in Port. Math (2005) Vol 62 fasc 2.

[28] **J.P.Puel :** Contrôlabilité approchée et contrôlabilité exacte.Notes de cours de D.E.A Université Paris 6,2001.

[29] **J.P.Puel :** Applications of global Carleman inequalities to controllability and inverse problems (to appear).

[30] **Luz de Teresa** : Insensitizing controls for a semilinear heat équation, Commun. in partial differential équations,25(1&2),39-72(2000).

[31] **O.Traoré :** Contrôle de problèmes de dynamique des populations. Thèse unique.Université de Ouagadougou.2002.

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de divers problèmes de contrôlabilités pour des systèmes dissipatifs à deux temps. Pour y parvenir dans chaque cas, nous établissons une inégalité d'observabilité de type Carleman.

Les résultats de contrôlabilité obtenus sont ensuite utilisés pour construire des sentinelles pour des systèmes dissipatifs à deux temps et à données incomplètes.

Nous examinons aussi la question de l'information fournie par une sentinelle par l'étude de la furtivité pour un ensemble de sentinelles.

Mots clés : Sentinelle, sentinelle discriminante, contrôlabilité, contrôlabilité avec contraintes sur le contrôle, inégalité de Carleman.