REPUBLIQUE DU SENEGAL

– – – – – – – – – – – – –

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

– – – – – – – – – – – – –

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Département de Mathématiques et Informatique

THESE D'ETAT

Spécialité : MATHEMATIQUES PURES

Option : ALGEBRE

Thème :

ANNEAUX ET MODULES DE FRACTIONS - ENVELOPPES ET COUVERTURES PLATES DANS LES DUO-ANNEAUX

Présentée

par

Monsieur Mohamed Ben Fraj Ben Maaouia

Sous la direction du Professeur **Mamadou SANGHARE**

devant le Jury composé de :

Cheikh T. GUEYE Maître de Conf.	UCAD	Président
El Amin KAIDI LHACHMI Prof. Univ. d'Alméria (Esp.)		Rapporteur
Daouda SANGARE Prof. Univ. d'Abobo-Adjamé		Rapporteur
Nouzha EL YACOUBI Prof. Univ. Rabat (Maroc)		Rapporteur
Oumar DIANKHA Maître de Conf.	UCAD	Examinateur
Mamadou SANGHARE Professeur	UCAD	Directeur de Thèse

Année Universitaire 2010 - 2011

Table des matières

0.1 INTRODUCTION

Cette thèse est organisée de la manière suivante :

Dans le chapitre 1 nous généralisons les résultats obtenus dans notre article intitulé localisation dans les duo - anneaux [7], sur $S^{-1}(A)$ et $S^{-1}(M)$ où S est une partie multiplicative saturée vérifiant les conditions de Ore à gauche d'un anneau quelconque. D'autres résultats seront démontrés dans la suite :

Nous montrons que le foncteur $S^{-1}(\ )$ est exact, que les foncteurs $S^{-1}(\ )$ et $S^{-1}(A)\bigotimes\limits_{A}-$ sont isomorphes et que le foncteur $Hom_A(S^{-1}(A),-)$ est l'adjoint de $S^{-1}(\ )$. De plus nous montrons que le foncteur $S^{-1}(\ )$ préserve les limites directes et indirectes, la platitude et la projectivité.

D'autre part nous montrons que si S ne contient pas des diviseurs de zéro, le foncteur $S^{-1}(\ )$ est fidèle.

Dans la dernière section de ce chapitre nous étudions la notion de sous - module S - saturé d'un A - module à gauche. Nous montrons qu'il existe une bijection croissante (pour l'inclusion) de l'ensemble des sous -modules du $S^{-1}(A)$ - module $S^{-1}(M)$ sur l'ensemble des sous - modules S - saturés du A - module à gauche M. En particulier l'ensemble des idéaux à gauche de $S^{-1}(A)$ est en bijection croissante avec celui des idéaux à gauche S - saturés de A. Nous en déduisons que le foncteur $S^{-1}(\ )$ préserve les propriétés d'artiniété, de noethérienité et de simplicité.

A la fin de cette section nous montrons que si N est un sous-module de M, alors $S^{-1}(M/N)$ est isomorphe à $S^{-1}(M)/S^{-1}(N)$ et en particulier si I est un idéal à gauche de A, alors $S^{-1}(A/I)$ est isomorphe à $S^{-1}(A)/S^{-1}(I)$.

Dans le chapitre 2 nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie multiplicative saturée d'un duo-anneau vérifie les conditions de Ore. Nous montrons que toute partie multiplicative saturée de non diviseurs de zéro d'un duo-anneau vérifie les conditions de Ore. Nous montrons aussi que le localisé A_P de A en P ou P est un idéal premier, qui est $S^{-1}(A)$ où S est l'ensemble des éléments réguliers de $A\backslash P$ n'est pas local en général. Et que A_P est local si et seulement si $A\backslash P$ ne contient pas des diviseurs de zéro. En particulier si A est un duo-anneau intègre, A_P est local.

Dans la 2ème section du chapitre 2, nous étudions la localisation des anneaux quotient. En particulier l'anneau total des fractions de A/P est noté par $(A/P)_{(\bar{0})}$. Nous montrons que $(A/P)_{(\bar{0})}$ est isomorphe à A_P/P_P et nous en déduisons que P_P est un idéal maximal de A_P même si A_P n'est pas local.

Dans la 3ème section du chapitre 2, nous étudions les anneaux de valuation non nécessairement commutatifs qui forment une classe de duo-anneaux intègres locaux. Nous montrons qu'un anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif est principal et que tout idéal d'un anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif est une puissance de son idéal maximal. Ce qui motive cette étude c'est le fait que si A est un duo- anneau intègre, A_P est local mais n'est pas un duo - anneau en général. Donc A_P n'est pas en général un anneau de valuation et la question est de trouver une condition pour que A_P soit un anneau de valuation. On donne une réponse à cette question dans la dernière section de ce chapitre.

Dans la 4ème section du chapitre 2, nous introdusons les duo-anneaux de Dedekind qui sont des duo-anneaux intègres hériditaires (un anneau A est dit hériditaire si tout idéal de A est projectif). Nous montrons qu'un idéal I d'un duo-anneau de Dedekind est inversible si et seulement si I est projectif. Nous montrons aussi que si A est un duo-anneau de Dedekind, alors la classe des A-modules injectifs coïncide avec la classe des A-modules divisibles et nous déduisons que le quotient d'un A-module injectif est injectif. D'autre part nous montrons qu'un duo-anneau intègre A est un anneau de valuation discrète si et seulement si A est un duo-anneau de Dedekind local. Nous montrons que si A est un duo-anneau de Dedekind, alors pour tout idéal premier P, A_p est un duo-anneau.

Le chapitre 3 qui a fait l'objet d'une publication intitulée : "Enveloppes plates dans un duo - anneau" à publier dans International Journal of Contemporary Mathematical Sciences" [9] :

Nous étudions les enveloppes plates dans les A_P-modules à gauche, et nous montrons que si la dimension faible de A_P est finie ($WD(A_P) < +\infty$) pour tout idéal premier. Alors tout A-module à gauche admet une enveloppe plate si et seulement si A est cohérent et la dimension faible de A est telle que $W(A) \leq 2$.

Nous étudions les enveloppes plates dans les IF-duo-anneaux et nous montrons que si A est un IF-duo-anneau et M un A-module de présentation finie, alors M admet une enveloppe plate si et seulement si M est un sous-module essentiel d'un module projectif de type fini. Nous introduisons la notion d'une partie T-nilpotente d'un anneau et nous montrons que dans un IF-duo-anneau A les parties $J(A_m)$ et $J(A)$ sont T-nilpotentes ou m est un idéal maximal de A.

Nous étudions les enveloppes plates dans les duo-anneaux qui sont quasi-frobénuisien (QF-duo-anneau) et nous montrons que si A est un anneau cohérent tel que pour tout idéal maximal m A_m est un QF-anneau alors tout A-module de présentation finie admet une enveloppe plate monomorphique.

Dans le chapitre 4 nous étudions les couvertures dans la classe des A-modules sans torsion (ST-couverture), nous montrons que tout A-module sans torsion admet une ST-couverture. Et nous montrons que si A est un duo-anneau intègre semi-héridité (duo-anneau de Prufer) la classe des A-modules sans torsion coïncide avec la classe des A-modules plats. Nous déduisons que si A est un duo-anneau semi héridité tout A-module admet une couverture plate de même si A est un duo-anneau de Dedekind et si A est un anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif.

Dans la section 2 du chapitre 4, nous définissons de la même manière que dans le cas commutatif les notions de complété (I-complété) et de séparabilité (I-séparabilité) d'un A-module à gauche voir [5, chapitre 10 (complétion)]. Nous utilisons le fait que si A est un duo-anneau intègre alors pour tout idéal premier P, on a A_p est local d'idéal maximal P_p et que A_p/P_p est isomorphe à $K(p)$ qui est l'anneau de fraction de A/P. Nous généralisons et nous utilisons les notions de complété du cas commutatif d'un A_p-module libre noté par T_p et nous montrons que T_p est une couverture plate de $K(P)^{(X)}$.

D'autre part nous rappelons la définition d'un module de cotorsion qui est : un A-module C est dit de cotorsion si $Ext^1_A(F, C) = 0$, pour tout A-module à gauche. Nous montrons que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) F est une couverture plate d'un A-module de cotorsion.

ii) F est un A-module plat et de cotorsion.

iii) F est isomorphe à $\prod_{p \in X} T_p$, où $X \subset Spec(A)$.

(voir théorème 4.2.23).

Dans la section 3 du chapitre 4, nous étudions la résolution pure injective minimale d'un module plat et nous prouvons les résultats suivants (qui sont vrais si l'anneau est commutatif) :

1) Si F est un A-module plat alors pour tout $n \geq 0$

$PE^n(F) = \prod_{p \in X} T_p$, $X \subset Spec(A)$ (où A est un duo-anneau intègre).

(voir proposition 4.3.9).

2) Si A est un duo-anneau intègre noethérien avec $K\ dim(A)$ finie alors

$PE^n(F) = 0, \quad \forall n > K \ dimA$, où F est un A-module à gauche plat (voir corollaire 4.3.12).
3) Si A est un duo-anneau intègre noethérien tel que $k \ dim(A) = d$ alors pour tout A-module à gauche plat F, on a la dimension projective de F $Proj \ dim(F) \leq d$.
(voir théorème 4.2.13).

Chapitre 1

ANNEAUX ET MODULES DE FRACTIONS

Introduction

Dans ce chapitre nous généralisons les résultats obtenus dans notre article intitulé localisation dans les duo - anneaux [7], sur $S^{-1}(A)$ et $S^{-1}(M)$ où S est une partie multiplicative saturée vérifiant les conditions de Ore à gauche d'un anneau quelconque et d'autres résultats seront montrés à la suite.

Nous montrons que le foncteur $S^{-1}(\ )$ est exact, que les foncteurs $S^{-1}(\ )$ et $S^{-1}(A)\bigotimes\limits_{A}-$ sont isomorphes, que le foncteur $Hom_A(S^{-1}(A), -)$ est l'adjoint de $S^{-1}(\ )$, que le foncteur $S^{-1}(\ )$ préserve les limites directes et indirectes que le foncteur $S^{-1}(\ )$ préserve la platitude et la projectivité.

Nous montrons que si S ne contient pas des diviseurs de zéro, le foncteur $S^{-1}(\ )$ est fidèle.

Nous étudions la notion de sous - module S - saturé d'un A - module à gauche. Et nous montrons qu'il existe une bijection croissante (pour l'inclusion) de l'ensemble des sous -modules du $S^{-1}(A)$ - module $S^{-1}(M)$ sur l'ensemble des sous - modules S - saturés du A - module à gauche M.
En particulier l'ensemble des idéaux à gauche de $S^{-1}(A)$ est en bijection croissante avec celui des idéaux à gauche S - saturés de A. Nous en déduisons que le foncteur $S^{-1}(\ )$ préserve les propriétés d'artiniété, de noethérienité et de simplicité.

Enfin nous montrons que si (S est une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore). N est un sous-module de M, alors $S^{-1}(M/N)$ est isomorphe à $S^{-1}(M)/S^{-1}(N)$ et en particulier si I est un idéal à gauche de A, alors $S^{-1}(A/I)$ est isomorphe à $S^{-1}(A)/S^{-1}(I)$.

1.1 Préliminaire

Dans ce travail le mot anneau désigne un anneau associatif, unitaire et non nécessairement commutatif ; les modules sont supposés être des A -modules à gauche unitaires.

Définition 1.1.1. *Une partie S d'un anneau A est dite multiplicative si $1_A \in S$ et S est stable par multiplication c'est-à-dire pour tous $x, t \in S$, $st \in S$, une partie multiplicative S est dite saturée si pour tous $s, s' \in A$, $ss' \in S$ implique $s \in S$ et $s' \in S$.*

Définition 1.1.2. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée de A. Un anneau B est dit anneau de fractions de A par rapport à S s'il existe un morphisme d'anneaux $\varphi : A \longrightarrow B$ vérifiant :*

1) $\forall \; s \in S$, $\varphi(s)$ est inversible (dans B)

2) $\forall \; b \in B$, il existe $a \in A$ et $s \in S$ tels que $b = \varphi(s)^{-1} \varphi(a)$

3) Si $\varphi(a) = 0$, alors $sa = 0$, $\forall s \in S$.

Définition 1.1.3. *(B, φ) est dit anneau de fractions à gauche de A relativement à S.*

Remarque 1.1.4. *Si A admet un anneau de fractions à gauche relativement à une partie multiplicative saturée alors il est unique à isomorphisme près.*

Notations et Définitions

1) L'anneau de fraction à gauche de A relativement à S est noté par $S^{-1}A$.

2) Le morphisme $\varphi : A \longrightarrow S^{-1}A$ de la définition 1.1.2 est appelé morphisme canonique.

3) Les éléments de $S^{-1}(A)$ sont notés par $\dfrac{a}{s}$.

Définition 1.1.5. *Soit S une partie multiplicative saturée d'un anneau A. On dit que S vérifie les conditions de Ore à gauche si :*

a) $\forall a \in A$, $\forall s \in S$ il existe $t \in S$ et $b \in A$ tels que $ta = bs$ (S est dit permutable à gauche) *b)* $\forall a \in A$, *si* $s \in S$ *tel que* $as = 0$, *alors il existe* $t \in S$ *tel que* $ta = 0$ *(*S *est dit reversible à gauche)*

Définition 1.1.6. *Soit* A *un anneau et* S *une partie de* A. *On dit que* A *vérifie les conditions de Ore à gauche relativement à* S *si* S *est une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche.*

Théorème 1.1.7. *Soient* A *un anneau et* S *une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche,* M *un* A *- module à gauche. Alors la relation binaire définie sur* $S \times M$ *par :* $(s, m)\ \mathcal{R}(s', m')$ *si et seulement si il existe* $x, y \in S$ *tels que*

$$\begin{cases} xm = ym' \\ xs = ys' \end{cases}$$

est une relation d'équivalence.

<u>Preuve</u>

La réflexivité et la symétrie de $\mathcal{R}$ sont évidentes.
Il suffit donc de montrer la transitivité de $\mathcal{R}$. Soient $(s, m)\mathcal{R}(s', m')$ et $(s', m')\mathcal{R}(s'', m'')$ des éléments de $S \times M$ alors il existe $x, y \in S$ tels que

$$\begin{cases} xm = ym' \\ xs = ys' \end{cases}$$

et ils existent $x', y' \in S$ tels que

$$\begin{cases} x'm' = y'm'' \\ x's' = y's'' \end{cases}$$

Pour y, x' il existe $p \in S$ et $q \in A$ tels que $px' = qy$ et comme $x' \in S$ alors $px' \in S$ donc $qy \in S$ ce qui implique que $q \in S$ donc on a les implications suivantes :

$$\begin{cases} px'm' = py'm'' \\ px's' = py's'' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (px')m' = (py')m'' \\ (px')s' = (py')s'' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (qy)m' = (py')m'' \\ (qy)s' = (py'')s'' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a(ym') = (py')m'' \\ (px')s' = (py'')s'' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} q(xm) = (py')m'' \\ q(xs) = (py')s'' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (qx)m = (py')m'' \\ (qx)s) = (py'')s'' \end{cases}$$

donc comme qx et $py' \in S$ d'où $(s,m)\ \mathcal{R}(s'',m')$ d'où la transitivité de la relation $\mathcal{R}$.
<u>Notation</u> : $(S \times M)/\mathcal{R}$ est noté par $S^{-1}M$.
Les éléments de $S^{-1}M$ sont notés par $\dfrac{m}{s}$ ou $s^{-1}m$ et en particulier les éléments de $S^{-1}A$ sont notés par $\dfrac{a}{s}$ ou $s^{-1}a$.

Théorème 1.1.8. *Soient A un anneau S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche et M un A - module à gauche. Alors*

1) $S^{-1}(A)$ est muni d'une structure d'anneau de manière que si $\dfrac{a}{t}$ et $\dfrac{b}{s} \in S^{-1}(A)$ alors

$$\frac{a}{t} + \frac{b}{s} = \frac{xa+yb}{yt} \quad \text{où } x,y \in S \text{ sont tels que}$$

$$xt = ys \quad \text{et } \frac{a}{t} \times \frac{b}{s} = \frac{zb}{wt} \quad \text{où } (w,z) \in S \times A$$

2°) $S^{-1}M$ est muni d'une structure de $S^{-1}A$ - module à gauche de manière que si $\dfrac{a}{t} \in S^{-1}A$, $\dfrac{m}{s}$ et $\dfrac{m'}{s'} \in S^{-1}M$ alors $\dfrac{m}{s} + \dfrac{m'}{s'} = \dfrac{xm+ym'}{ys}$ où $x,y \in S$ sont tels que $xs = ys'$ et $\dfrac{a}{t} \centerdot \dfrac{m}{s} = \dfrac{zm}{wt}$ où $(w,z) \in S \times A$ est tel que $wa = zs$.

<u>Preuve :</u> Il suffit de montrer 2).
Montrons que les deux opérations $+$ et $\centerdot$ sont bien définies
Comme S vérifie les conditions de Ore, ils existent $x,y \in S$ tels que $xs = ys'$ donc l'opération $+$ a un sens.
Montrons que $\dfrac{m}{s} + \dfrac{m'}{s'} = \dfrac{xm+ym'}{ys'}$ est indépendant du choix de x et y dans S. Supposons qu'il existent $x',y' \in S$ vérifiant $x's = y's'$. Montrons alors que $\dfrac{xm+ym'}{ys'} = \dfrac{x'm+y'm'}{y's'}$.
Pour $x,x' \in S$ ils existent $b,t \in S$ tels que $tx = bx'$ et pour ty et $y' \in S$ ils existent $b',t' \in S$ tels que $t'ty = b'y'$ donc $t'tys' = b'y's'$ implique $t'txs = b'x's$ implique $(t'tx - b'x')s = 0$ alors d'après la 2ème

condition de Ore il existe $t'' \in S$ tel que $t''(t'tx - b'x') = 0$ ce qui implique $t''t'tx = t''b'x'$ donc

$$\frac{xm + ym'}{ys'} = \frac{t''t'txm + t''t'tym'}{t''t'tys'}$$

$$= \frac{t''b'x'm + t''b'y'm'}{t''b'y's'} = \frac{x'm + y'm'}{y's'}.$$

Donc $\dfrac{m}{s} + \dfrac{m'}{s'}$ est indépendant du choix de x et y dans S. Il en résulte que si u et $v \in S$ alors

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} = \frac{um_1}{us_1} + \frac{vm_2}{vs_2}.$$

En effet, pour $d, k \in S$ tels que $d(us_1) = k(vs_2)$, on a

$$\frac{um_1}{us_1} + \frac{vm_2}{vs_2} = \frac{md(um_2) + k(vm_2)}{k(vs_2)} = \frac{(du)m_1 + (kv)m_2}{(kv)s_2}$$

$$= \frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} \text{ car } (du)s_1 = (kv)s_2.$$

Montrons que si $\left(\dfrac{m_1}{s_1}, \dfrac{m_2}{s_2}\right) = \left(\dfrac{m'_1}{s'_1}, \dfrac{m'_2}{s'_2}\right)$ alors,

$$\frac{m_1}{s_1} + \frac{m_2}{s_2} = \frac{m'_1}{s'_1} + \frac{m'_2}{s'_2}.$$

Comme $\dfrac{m_1}{s_1} = \dfrac{m'_1}{s'_1}$, ils existent $x_1, y_1 \in S$ tels que

$$\begin{cases} x_1\ m_1 = y_2\ m'_1 \\ x_2\ s_1 = y_1\ s'_1 \end{cases}$$

et comme $\dfrac{m_2}{s_2} = \dfrac{m'_2}{s'_2}$, ils existe $x_2, y_2 \in S$ tels que

$$\begin{cases} x_2\ m_2 = y_2\ m'_2 \\ x_2\ s_2 = y_2\ s'_2 \end{cases}$$

On a donc

$$\frac{m_1}{s_2} + \frac{m_2}{s_2} = \frac{xm_1 + ym_2}{ys_2} \text{ avec } xs_1 = ys_2.$$

Pour $x, x_1 \in S$ ils existe $t, b \in S$ tels que $tx = bx_1$ et pour ty et $x_2 \in S$ ils existent $t', b' \in S$ tels que $t'ty = b'x_2$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{xm_1 + ym_2}{ys_2} &= \frac{t'txm_1 + t'tym_2}{tt'ys_2} \\ &= \frac{t'bx_1m_1 + b'x_2m_2}{b'x_2s_2} \\ &= \frac{t'by_1m_1' + b'y_2m_2'}{b'y_2s_2'}\end{aligned}$$

Posons que $x' = t'by_1$ et $y' = b'y_2$ il suffit de vérifier que $x's_1' = y's_2'$. On a

$$t'by_1s_1' = t'txs_1 = t'tys_2 = b'x_2s_2 = b'y_2s_2' = y's_2' \text{ d'où } x's_1' = y's_2'.$$

Donc
$$\frac{xm_1 + ym_2}{ys_2} = \frac{x'm_1'm + y'm_2'}{y's_2'} = \frac{m_1'}{s_1'} + \frac{m_2'}{s_2'}$$

Ainsi $+$ est bien définie. Montrons de même que $\cdot$ est bien définie d'après la 1ère condition de Ore il existe $(w, z) \in X \times A$ tel que $wa = zs$ donc l'opération a un sens, montrons que $\frac{a}{t} \cdot \frac{m}{s} = \frac{zm}{wt}$ est indépendant du choix de (w, z). Soit $(w', z') \in S \times A$ tel que $w'a = z's$. Montrons que $\frac{zm}{wt} = \frac{z'm}{w't}$ d'après la 1ère condition de Ore il existe $(p, q) \in S \times A$ tel que $pw = qw'$ comme $w \in S$ donc $pw \in S \Longrightarrow qw' \in S \Longrightarrow q \in S$ donc $pwa = qw'q$, on a $pzs' = qz's' \Longrightarrow (pz - qz')s' = 0 \Longrightarrow \exists s'' \in S$ tel que $s''(pz - qz') = 0 \Longrightarrow s''pz = s''qz'$.
Donc on a

$$\begin{cases} (s''p)(zm) = (s''q)(z'm) \\ (s''p)(wp) = (s''q)(w't) \end{cases} \Longrightarrow \frac{zm}{wt} = \frac{z'm}{w't}$$

donc $\frac{a}{t} \cdot \frac{m}{s} = \frac{zm}{wt}$ ou $(w, z) \in S \times A$ tel que $wa = zs$ est indépendant du choix de (w, z). Reste à montrer que si $\left(\frac{a}{t}, \frac{m}{s}\right) = \left(\frac{a'}{t'}, \frac{m'}{s'}\right)$ alors

$$\frac{a}{t} \cdot \frac{m}{s} = \frac{a'}{t'} \cdot \frac{m'}{s'}.$$

Supposons que

$$\begin{cases} \dfrac{a}{t} \cdot \dfrac{m}{s} & = \dfrac{zm}{wt} \text{ avec } wa = zs \\ \dfrac{a'}{t'} \cdot \dfrac{m'}{s'} & = \dfrac{z'm'}{w't'} \text{ avec } w'a' = z's' \end{cases}$$

où (w, z) et $(w', z') \in S \times A$.
Comme $wt \in S$ et $w't' \in S$, alors ils existent $p', q' \in S$ tels que $p'wt = q'w't'$.

D'autre part, comme $\dfrac{a}{t} = \dfrac{a'}{t'}$, ils existent $x, y \in S$ tels que $xa = ya'$ et $xt = yt'$.
De même, comme $\dfrac{m}{s} = \dfrac{m'}{s'}$ ils existent $x', y' \in S$ tels que $x'm = y'm'$ et $x's' = y's'$.
Comme $(p'w, x) \in S \times S$ on peut trouver $p'', q'' \in S$ tels que $p''p'w = q''x$.
Donc $q''xt = q''yt' = p''p'wt = p''q'w't'$. Donc $q''yt' - p''q'w't' = 0$.
Ce qui implique $(q''y - p''q'w')t' = 0$ alors d'après la 2ème condition de Ore il existe $r \in S$ tel que

$$r(q''y - p''q'w') = 0 \Longrightarrow rq''y = rp''q'w',$$

donc on a

$$rq''ra' = rp''q'w'a'.$$

De même comme $q''xt = p''p'wt \Longrightarrow (q''x - p''p'w)t = 0$ il existe $r' \in S$ tel que $r'(q''x - p''p'w) = 0$ ce qui implique $r'q''x = r'p''p'w$ donc $r'q''xa = r'p''p'wa$. Mais $r'q''xa = r'q''ya'$ donc

$$\boxed{r'p''p'zs = r'q''ya'} \tag{1.1}$$

et $rq''ya' = rp''q'w'a'$ donc

$$\boxed{rq''ya' = rp''q'z's',} \tag{1.2}$$

pour $r, r' \in S$ ils existent r_1, r_1' tels que $r_1r = r_1'r'$ donc d'après (1.1) on a

$$r_1'r'p''p'zs = r_1'r'q''ya' = r_1rq''ya' \Longrightarrow r_1rp''p'zs = r_1rq''ya'$$

et d'après (1.2) on a

$$r_1rq''ya' = r_1rp''q'z's'$$

donc on a

$$\boxed{r_1rp''p'zs = r_1rp''q'z's'.} \tag{1.3}$$

D'autre part on a

$$(r_1rp''p'z, x') \in A \times S,$$

alors il existe $(a_1, r_2) \in A \times S$ tels que $r_2r_1rp''p'z = a_2x'$ ce qui implique les égalités

$$r_2r_1rp''p'zs = a_1x's = r_2r_2rp''q'z's' = a_1y's'$$

alors il existe $s_1 \in S$ tel que

$$s_1r_2r_1rp''p'z = s_1a_1x' \Longrightarrow s_1r_2r_1rp''p'zm = s_1a_1x'm = s_1a_1y'm'$$

et il existe $s_1' \in S$ tel que

$$s_1'r_2r_1rp''q'z' = s_1'a_1y' \Longrightarrow s_1'r_2r_1rp''q'z'm' = s_1'a_1y'm'.$$

Mais pour s_1, s_1' ils existent $s_2, s_2' \in S$ tel que $s_2s_1 = s_2's_1'$. Donc $s_2s_1r_2r_1rp''p'zm = s_2s_1a_1y'm'$ et

$$\begin{aligned} s_2's_1'r_2r_1rp''q'z'm' \quad &= s_2's_1'a_1y'm' \\ \Longrightarrow s_2s_1r_2r_1rp''q'z'm' \quad &= s_2s_1'a_1y'm' \end{aligned}$$

Donc

$$s_2s_1r_2r_1rp''p'zm = s_2s_1r_2r_1rp''q'z'm'$$

et on a $p'wt = q'w't$ ce qui implique

$$s_2s_1r_2r_1rp''p'wt = s_2s_1r_2r_1rp''q'w't',$$

posons alors que

$$X = s_2s_1r_2r_1rp''p' \text{ et } Y = s_2s_1r_2r_1rp''q'$$

donc on a

$$\begin{cases} XZm = Yz'm' \\ XWt = YW't' \end{cases}$$

d'où $\dfrac{Zm}{Wt} = \dfrac{Z'm'}{W't'}$.
Ainsi $\cdot$ est bien définie.

Proposition 1.1.9. *Soient A un anneau, S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche et M un A - module à gauche. Alors*

$$\begin{aligned} i_M^S : M &\longrightarrow S^{-1}(M) \\ m &\longmapsto \frac{m}{1} \end{aligned}$$

est un homomorphisme de A - modules à gauche. Il est dit morphisme canonique.

Théorème 1.1.10. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée. Alors A admet un anneau de fractions si et seulement si A vérifie les conditions de Ore à gauche relativement à S.*

<u>**Preuve**</u>

Si S est une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche relativement à S, alors d'après ce qui précède le couple $(S^{-1}(A), i_M^S$ est un anneau de fraction à gauche de A relativement à S.

Supposons que A admet un anneau de fraction relativement à S et montrons que A vérifie les conditions de Ore à gauche relativement à S. Soient $a \in A$ et $s \in S$ alors $\varphi(a)\ \varphi(s)^{-1} \in S^{-1}(A)$ (où φ est le morphisme canonique) donc ils existent $t \in S$ et $b \in A$ tels que $\varphi(a)\ \varphi(s)^{-1} = \varphi(t)^{-1}\ \varphi(b)$ ce qui implique que $\varphi(ta - bs) = 0$ alors pour tout $r \in S$ $r(ta - bs) = 0$ et en particulier pour $r = 1$ donc $ta = bs$ d'où S est permutable à gauche. Montrons que S est réversible à gauche soient $a \in A$ et $s \in S$ tels que $as = 0$, alors $\varphi(a)\ \varphi(s) = \varphi(0) = 0$ et comme $\varphi(s)$ est inversible donc $\varphi(a) = 0$ d'où il existe $t \in S$ tel que $ta = 0$. Ainsi S est réversible à gauche, d'où le résultat.

Théorème 1.1.11. *Soient A un anneau, S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche et M un A - modules à gauche. Alors*

$$\begin{aligned} S^{-1}(f) : S^{-1}(M) &\longrightarrow S^{-1}(M') \\ \frac{m}{s} &\longmapsto \frac{f(m)}{s} \end{aligned}$$

est un morphisme de $S^1(A)$ - modules. Et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_M^S"'] & M' \arrow[d, "i_{M'}^S"] \\ S^{-1}(M) \arrow[r, "S^{-1}(f)"] & S^{-1}(M') \end{tikzcd}$$

Preuve

Montrons que $S^{-1}(f)$ est morphisme de $S^{-1}(A)$ - modules

$$S^{-1}(f)\left(\frac{m}{s}+\frac{m'}{s'}\right)=S^{-1}(f)\left(\frac{xm+ym'}{ys'}\right) \text{ où } xs=ys'$$

$$\Longrightarrow S^{-1}(f)\left(\frac{m}{s}+\frac{m'}{s'}\right) = \frac{f(xm+ym')}{ys'}=\frac{xf(m)+yf(m')}{ys'}$$

$$=\frac{f(m)}{s}+\frac{f(m')}{s'} \qquad = S^{1}(f)\big(\frac{m}{s}\big)+S^{1}(f)\big(\frac{m'}{s'}\big)$$

$$\text{et } S^{-1}(f)\left(\frac{a}{t}\cdot\frac{m}{s}\right)=S^{-1}(f)\left(\frac{zm}{wt}\right) \text{ où } (w,z)\in S\times A$$

tel que $wa=zs$ donc

$$S^{-1}f\left(\left(\frac{a}{t}\cdot\frac{m}{s}\right)\right)=\frac{f(zm)}{wt}=\frac{zf(m)}{wt}=\frac{a}{t}\cdot\frac{f(m)}{s}$$

d'où $S^{-1}(f)$ est $S^{-1}(A)$ linéaire.
Montrons $S^{-1}(f)\circ i_M^S=i_{M'}^S\circ f$.
Soit $m\in M$ on a

$$S^{-1}(f)\circ i_M^S(m)=S^{-1}(f)\big(i_M^S(m)\big)=S^{-1}(f)\left(\frac{m}{s}\right)=\frac{f(m)}{s}$$

$$=i_{M'}^S f(m))=i_{M'}^S\circ f(m)$$

donc

$$\forall m\in M\ S^{-1}(f)\circ i_M^S(m)=i_{M'}^S\circ f(m)$$

d'où

$$S^{-1}(f)\circ i_{M'}^S\circ f.$$

1.2 Foncteur $S^{-1}(\ \ )$

Théorème 1.2.1. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors la relation $S^{-1}(\ \ ):$ $A-Mod\longrightarrow S^{-1}A-Mod$ qui a tout $M\in A-Mod$ fait correspondre $S^{-1}M$ et à tout morphisme de A-module à gauche $f:M\longrightarrow M'$ fait correspondre $S^{-1}f$ est un foncteur covariant additif.*

a) Pour tout $M\in A-Mod$ on fait correspondre $S^{-1}(M)$ et pour tout $f:M\longrightarrow M'$ un morphisme de A - modules à gauche on fait correspondre $S^{-1}(f)$

Preuve

a) Soient $f : M \longrightarrow M'$ et $g : M' \longrightarrow M''$ deux morphismes de A - modules à gauche ; montrons que $S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}(g) \circ S^{-1}(f)$.
Soit $\dfrac{m}{s} \in S^{-1}(M)$, alors

$$\begin{aligned} S^{-1}(g \circ f)\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{g \circ f(m)}{s} = \frac{g(f(m))}{s} &= S^{-1}(g)\left(\frac{f(m)}{s}\right) \\ &= S^{-1}(g)\left[S^{-1}(f)\left(\frac{m}{s}\right)\right] \\ &= S^{-1}(g) \circ S^{-1}(f)\left(\frac{m}{s}\right) \end{aligned}$$

d'où $S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}(g) \circ S^{-1}(f)$.

b) Montrons que $S^{-1}(1_M) = 1_{S^{-1}(M)}$ où

$$\begin{aligned} 1_M : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto m \end{aligned} .$$

Soit $\dfrac{m}{s} \in S^{-1}(M)$ donc $S^{-1}(1_M)\left(\dfrac{m}{s}\right) = \dfrac{1_M(m)}{s} = \dfrac{m}{s}$

$$\Longrightarrow S^{-1}(1_M)\left(\frac{m}{s}\right) = 1_{S^{-1}(M)}\left(\frac{m}{s}\right) \Longrightarrow S^{-1}(1_M) = 1_{S^{-1}(M)}$$

c) Soient M, M' deux A - modules à gauche et f_1, f_2 deux morphismes de A - modules à gauche de M dans M'.
Soit $\dfrac{m}{s} \in S^{-1}(M)$, $S^{-1}(f_1 + f_2)\left(\dfrac{m}{s}\right) = \dfrac{(f_1 + f_2)(m)}{s}$

$$= \frac{f_1(m) + f_2(m)}{s} = \frac{f_1(m)}{s} + \frac{f_2(m)}{s} = S^{-1}(f_1)\left(\frac{m}{s}\right) + S^{-1}(f_2)\left(\frac{m}{s}\right).$$

Ainsi d'après a) b) et c) $S^{-1}(\ )$ est un foncteur covariant additif.

Théorème 1.2.2. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors le foncteur $S^{-1}(\ ) : A - Mod \longrightarrow S^{-1}(A) - Mod$ est covariant, additif et exact.*

Preuve

D'après le théorème précédent, le foncteur $S^{-1}(\ )$ est covariant et additif reste à montrer qu'il est exact.

Soit $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de A - modules à gauche. Montrons que la suite :

$$0 \longrightarrow S^{-1}(M') \xrightarrow{S^{-1}(f)} S^{-1}(M) \xrightarrow{S^{-1}(g)} S^{-1}(M'') \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de $S^{-1}(A)$ - modules

a) Montrons que $S^{-1}(f)$ est un monomorphisme.

Soit $\dfrac{m'}{s'} \in S^{-1}(M')$ tel que $S^{-1}(f)\left(\dfrac{m'}{s'}\right) = 0_{S^{-1}(M)}$ alors $\dfrac{f(m')}{s'} = \dfrac{0}{1}$ ce qui implique, ils existent $x, y \in S$ tel que $xf(m') = M$ et $xs = y$ implique que $f(xm') = 0_M$. Comme f est un monomorphisme alors

$$xm' = 0_{M'} \text{ alors } \frac{xm'}{xs'} = \frac{0_{M'}}{xs'} = 0_{S^{-1}(M')}.$$

Donc $\dfrac{f(m')}{s'} = 0_{S^{-1}(M')}$ d'où $S^{-1}(f)$ est un monomorphisme.

b) Montrons que $S^{-1}(g)$ est un épimorphisme.

Soit $\dfrac{m'}{s'} \in S^{-1}(M') \Longrightarrow m'' \in M''$ et comme g est un épimorphisme donc il existe $m \in M$ tel que

$$g(m) = m'' \Longrightarrow \frac{g(m)}{s'} = \frac{f(m'')}{s''} \Longrightarrow S^{-1}(g)\left(\frac{f(m'')}{s''}\right) = \frac{f(m'')}{s''}$$

ainsi $S^{-1}(g)$ est un épimorphisme.

c) Montrons que $Ker\ S^{-1}(g) = Im\ S^{-1}(f)$.

- Montrons que $Ker\ S^{-1}(g) \subset Im\ S^{-1}(f)$.

Soit $\dfrac{m}{s} \in Ker\ S^{-1}(g) \Longrightarrow S^{-1}(g)\left(\dfrac{m}{s}\right) = O_{S^{-1}(M'')} \Longrightarrow \dfrac{g(m)}{s} = \dfrac{O_{M''}}{1}$ alors ils existent $x, y \in S$ tel que

$$x\ g(m) = O_{M''} \text{ et } xs = y \Longrightarrow g(xm) = O_{M''}$$

donc $xm \in Kerg$ alors $xm \in Imf$ donc il existe $m' \in M'$ tel que $f(m') = xm$ donc

$$\frac{f(m')}{xs} = \frac{xm}{xs} = \frac{m}{s} \Longrightarrow S^{-1}(f)\ \left(\frac{m'}{xs}\right) = \frac{m'}{s}$$

donc $\dfrac{m}{s} \in Im\ S^{-1}(f)$. Ainsi $Ker\ S^{-1}(g) \subset Im\ S^{-1}(f)$.
- Montrons que $Im\ S^{-1}(f) \subset Ker\ S^{-1}(g)$.

Soit $\dfrac{m}{s} \in Im\ S^{-1}(f)$ et soit $\dfrac{m'}{s'} \in S^{-1}(M')$ tel que
$S^{-1}(f)\left(\dfrac{m'}{s'}\right) = \dfrac{m}{s} \Longrightarrow S^{-1}(g) \circ S^{-1}(f)\left(\dfrac{m'}{s'}\right) = S^{-1}(g)\left(\dfrac{m}{s}\right)$
$\Longrightarrow S^{-1}(g \circ f)\ \left(\dfrac{m'}{s'}\right) = S^{-1}(g)\ \left(\dfrac{m}{s}\right)$

$$\Longrightarrow \frac{g \circ f(m')}{s'} = \frac{g(m)}{s} \Longrightarrow S^{-1}(g)\left(\frac{m}{s}\right) = O_{S^{-1}(M'')}$$
$$\Longrightarrow \frac{m}{s} \in Ker\ S^{-1}(g).$$

Donc $Im\ S^{-1}(f) \subset Ker\ S^{-1}(g)$.
Ainsi $Im\ S^{-1}(f) = Ker\ S^{-1}(g)$. Il en résulte que la suite

$$0 \longrightarrow S^{-1}(M') \overset{S^{-1}(f)}{\longrightarrow} S^{-1}(M) \overset{S^{-1}(g)}{\longrightarrow} S^{-1}(M'') \longrightarrow 0$$

est exacte. D'où le foncteur $S^{-1}(\ \ )$ est exact.

Corollaire 1.2.3. *Soit S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore. Alors $S^{-1}(\ )$ est un :*

monofoncteur c'est à dire si f est un monomorphisme de $A-Mod$ alors $S^{-1}(f)$ est un monomorphisme de $S^{-1}(A)-Mod$.

2) Epifoncteur c'est-à-dire si f est un épimorphisme de $A-Mod$ alors $S^{-1}(f)$ est un épi de $S^{-1}(A)-Mod$.

Théorème 1.2.4. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors le foncteur $S^{-1}(\ )$ préserve la projectivité. C'est-à-dire si M est A - module à gauche projectif alors $S^{-1}(M)$ est un $S^{-1}(A)$ - module à gauche projectif.*

Preuve :

Soit M un A - module à gauche projectif. Montrons que $S^{-1}(M)$ est un $S^{-1}(A)$-module à gauche projectif.

Soient $f : M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ un épimorphisme de $S^{-1}(A)$ - module à gauche et $g : S^{-1}(M) \longrightarrow M_2$ un morphisme de $S^{-1}(A)$ - modules à gauche. Alors comme M est projectif il existe un morphisme de A - modules $h : M \longrightarrow M_1$ tel que $f \circ h = g \circ i_M$ ce qui implique que

$S^{-1}(f \circ h) = S^{-1}(g \circ i_M)$ donc $S^{-1}(f) \circ S^{-1}(h) = S^{-1}(g) \circ S^{-1}(i_M)$ or f et g sont deux morphismes de $S^{-1}(A)$ - module donc $S^{-1}(f) = f,\ S^{-1}(g) = g$ et $S^{-1}(i_M) = 1_{S^{-1}(M)}$ donc $S^{-1}(h) \circ f = g$. Ce qui prouve que $S^{-1}(M)$ est un $S^{-1}(A)$ - module projectif car $S^{-1}(h) : S^{-1}(M) \longrightarrow M_1$ est un morphisme de $S^{-1}(A)$ - modules.

Théorème 1.2.5. *Soit S une partie multiplicative saturée de A qui ne contient pas de diviseurs de zéro et qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors le foncteur $S^{-1}(\ )$ est fidèle.*

Preuve :

Il suffit de montrer que l'application

$$\begin{aligned} O_{M,M'} : Hom_A(M, M') &\longrightarrow Hom_{S^{-1}(A)}(S^{-1}(M), S^{-1}(M')) \\ f &\longrightarrow S^{-1}(f) \end{aligned}$$

est injective.
Soient $f, g \in Hom_A(M, M')$ tels que $S^{-1}(f) = S^{-1}(g)$ montrons que $f = g$.
$S^{-1}(f) = S^{-1}(g)$ alors pour tout $\dfrac{m}{s} \in S^{-1}(M)$ on a $S^{-1}(f)(\dfrac{m}{s}) = S^{-1}(g)(\dfrac{m}{s})$
$\Longrightarrow \dfrac{f(m)}{s} = \dfrac{g(m)}{s}$ ils existent $x, y \in S$ tels que

$$\begin{cases} x\ \ f(m) &= y\ g(m) \\ x\ s &= y\ s \end{cases}$$

Comme S ne contient pas de diviseurs

$$x = y \Longrightarrow f(m) = g(m), \quad \forall m \in M.$$

$\Longrightarrow\ f = g \Longrightarrow O_{M,M'}$ est injective d'où $S^{-1}(\ )$ est fidèle.

Théorème 1.2.6. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore. Alors le foncteur $S^{-1}(\ )$ préserve les limites directes et indirectes.*

Preuve

Découle du fait que $S^{-1}(\ )$ est exact c'est - à - dire que $S^{-1}(\ )$ est un monofoncteur et épifoncteur.

Théorème 1.2.7. *Soient* A *un anneau et* S *une partie multiplicative saturée de* A *qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors le foncteur* $S^{-1}(\ )$ *est isomorphe au foncteur* $S^{-1}(A)\bigotimes_A .-$

__**Preuve**__

Il s'agit de montrer qu'il existe un isomorphisme fonctoriel

$$\phi : S^{-1}(\ ) \longrightarrow S^{-1}(A)\bigotimes_A .-$$

Soit M un A - module à gauche, alors on a

$$\begin{array}{ll} U_M : S^{-1}(A) \times M & \longrightarrow S^{-1}(M) \\ \left(\dfrac{a}{s}, m\right) & \longmapsto \dfrac{a \centerdot m}{s} \end{array}$$

est A - bilinéaire, donc d'après la propriété universelle du produit tensoriel, il existe un homomorphisme de groupe $\overline{U}_M : S^{-1}(A)\bigotimes_A M \longrightarrow S^{-1}(M)$ défini par

$$\overline{U}_M\left(\sum \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i\right) = \sum \frac{a_i m_i}{s_i}.$$

Donc il suffit de montrer que $\overline{U}_M$ est bijectif.

a) $\overline{U}_M$ est surjectif : car pour $\dfrac{m}{s} \in S^{-1}(M)$, on a

$$\overline{U}_M\left(\frac{1}{s} \otimes m\right) = \frac{m}{s}$$

b) $\overline{U}_M$ est injectif. Soit $\sum \dfrac{a_i}{s_i} \otimes x_i$ un élement de $S^{-1}(A)\bigotimes_A M$. On a

$$\sum \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum \frac{1}{s} \otimes x_i\ a_i m_i = \frac{1}{s} \otimes \sum\ x_i\ a_i m_i$$

où $s = \prod s_i$ et $x_i = s^{-1}s_i \in S$. Donc tout élément de $S^{-1}(A)\bigotimes_A M$ est de la forme

$$\frac{1}{s} \otimes Y \text{ où } Y \in M \text{ et } s \in S.$$

Donc dire que $\dfrac{1}{s} \otimes Y \in Ker\ \overline{U}_M$ revient à dire que $\dfrac{Y}{s} = O_{S^{-1}(M)}$, ils existent $x, x' \in S$ tels que

$$xY = 0 \text{ et } xs = x' \text{ d'où } \frac{1}{s} \otimes Y = \frac{1}{sx} \otimes xY = 0.$$

Il en résulte que $Ker\ \overline{U}_M = 0$. Ainsi $\overline{U}_M$ est bijectif. On peut donc prendre $\phi_M = \overline{U}_M$.
Donc on a montré que pour tout A - module M il existe un isomorphisme $\phi_M : S^{-1}(M) \longrightarrow S^{-1}(A) \bigotimes\limits_A M.$

Soit $f : M \longrightarrow M'$ un morphisme de A - module. Alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
S^{-1}(M) \arrow[r, "\phi_M"] \arrow[d, "S^{-1}(f)"'] & S^{-1}(A) \bigotimes\limits_A M \arrow[d, "1_{S^{-1}(A)} \otimes f"] \\
S^{-1}(M') \arrow[r, "\phi_{M'}"] & S^{-1}(A) \bigotimes\limits_A M'
\end{tikzcd}$$

Soit $\dfrac{m}{s} \in S^{-1}(M)$, $\left(1_{S^{-1}(A)} \otimes f\right) \circ \phi_M\left(\dfrac{m}{s}\right)$

$$= \left(1_{S^{-1}(A)} \otimes f\right)\left(\frac{1}{s} \otimes m\right) = \frac{1}{s} \otimes f(m)$$

et

$$\phi_{M'} \circ S^{-1}(f)\left(\frac{m}{s}\right) = \phi_{M'}\left(\frac{f(m)}{s}\right) = \frac{1}{s} \otimes f(m)$$

donc le diagramme est commutatif d'où $S^{-1}(\ )$ est isomorphe à $S^{-1}(A) \bigotimes\limits_A$-

Corollaire 1.2.8. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors $S^{-1}(A)$ est un A - module plat.*

Preuve

Soit $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ une suite exacte courte de A - modules à gauche. Alors d'après ce qui précède le diagramme suivant est commutatif et à lignes exactes.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S^{-1}(M') \arrow[r, "S^{-1}(f)"] \arrow[d, "\phi'_M"] & S^{-1}(M) \arrow[r, "S^{-1}(g)"] \arrow[d, "\phi_M"] & S^{-1}(M'') \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S^{-1}(A)\bigotimes_A M' \arrow[r] & S^{-1}(A)\bigotimes_A M \arrow[r] & S^{-1}(A)\bigotimes_A M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ainsi $S^{-1}(A)$ est A - module plat.

Corollaire 1.2.9. *Soient A un anneau, S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche et M un A - module à gauche plat alors $S^{-1}(M)$ est A - module à gauche plat.*

Preuve

Soit $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2$ un monomorphisme de A - modules à droite. Alors comme M est plat, $0 \longrightarrow M\bigotimes_A M_1 \longrightarrow M\bigotimes_A M_2$ est un monomorphisme, alors $0 \longrightarrow S^{-1}(A)\bigotimes_A M\bigotimes_A M_1 \longrightarrow S^{-1}(A)\bigotimes_A M\bigotimes_A M_2$, or $S^{-1}(A)$ est un monomorphisme en tant que A - modules à gauche, donc $0 \longrightarrow S^{-1}(M)\bigotimes_A M_1 \longrightarrow S^{-1}(M)\bigotimes_A M_2$ est un monomorphisme, ainsi $S^{-1}(M)$ est un A-module à gauche plat.

Preuve

Théorème 1.2.10. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors le foncteur $S^{-1}(\ )$ conserve la platitude.*

Théorème 1.2.11. *Soient A un anneau, S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite et M un A - module à gauche. Alors M est plat si et seulement si $S^{-1}(M)$ est un $S^{-1}(A)$ - module plat.*

Preuve

Montrons que si $S^{-1}(M)$ est un $S^{-1}(A)$ - module à gauche plat alors M est un A - module à gauche plat.
Supposons que $S^{-1}(M)$ est un $S^{-1}(A)$ - module à gauche plat. Soit $0 \longrightarrow M_1 \stackrel{f}{\longrightarrow} M_2$ est un monomorphisme de A - module à droite alors $0 \longrightarrow S^{-1}(M_1) \stackrel{S^{-1}(f)}{\longrightarrow} S^1(M_2)$ est un monomorphisme de $S^{-1}(A)$ - modules à droite et comme $S^{-1}(M)$ est un $S^{-1}(A)$ - module plat alors la suite :

$$0 \longrightarrow S^{-1}(M) \bigotimes_{S^{-1}(A)} S^{-1}(M_1) \stackrel{1\otimes S^{-1}(f)}{\longrightarrow} S^{-1}(M) \bigotimes_{S^{-1}(A)} S^{-1}(M_2)$$

est exacte c'est-à-dire que $1 \bigotimes\limits_{S^{-1}(A)} S^{-1}(f)$ est un monomorphisme. Montrons que la suite

$$0 \longrightarrow M \bigotimes_{S^{-1}(A)} M_1 \stackrel{1\bigotimes\limits_{A} f}{\longrightarrow} M \bigotimes_{A} M_2$$

est exacte c'est-à-dire que $1 \bigotimes\limits_{A} f$ est un monomorphisme.

Soit $\sum x_i \bigotimes\limits_{A} y_i$ un élément de $M \bigotimes\limits_{A} M_1$ tel que

$$(1 \bigotimes_{A} f)(\sum x_i \bigotimes_{A} y_i = 0 \Longrightarrow \sum x_i \bigotimes_{A} f(y_i) = 0$$

ce qui implique $\sum \frac{x_i}{1} \bigotimes\limits_{A} \frac{y_i}{1} = 0$

$$\Longrightarrow \sum \frac{x_i}{1} \bigotimes_{S^{-1}(A)} S^{-1}(f)\left(\frac{y_i}{1}\right) = 0 \Longrightarrow \left(1 \bigotimes_{S^{-1}(A)} S^{-1}(f)\right)\left(\sum \frac{x_i}{1} \bigotimes_{A} \frac{y_i}{1}\right) = 0$$

or $1 \bigotimes\limits_{S^{-1}(A)} S^{-1}(f)$ est un monomorphisme donc $\sum \frac{x_i}{1} \bigotimes \frac{y_i}{1} = 0$ ce qui implique que

$$\sum \frac{x_i}{1} \bigotimes_{A} \frac{y_i}{1} = 0 \Longrightarrow \sum x_i \bigotimes_{A} y_i = 0$$

d'où le résultat.

Soit M un A - modules à gauche plat. Montrons que $S^{-1}(M)$ est un $S^{-1}(A)$ - module à gauche plat. Soit $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2$ un monomorphisme de $S^{-1}(A)$ - modules à droite. Montrons que

$$0 \longrightarrow S^{-1}(M) \bigotimes_{S^{-1}(A)} M_1 \longrightarrow S^{-1}(M) \bigotimes_{S^{-1}(A)} M_2$$

est un monomorphisme. Soit $\sum \frac{x_i}{s_i} \otimes y_i$ un élément de $S^{-1}(M) \bigotimes_{S^{-1}(A)} M_1$ tel que

$$\Big(1_{S^{-1}(M)} \bigotimes_{S^{-1}(A)} f\Big)\Big(\sum \frac{x_i}{s_i} \otimes y_i\Big) = 0.$$

Alors

$$\sum \frac{x_i}{s_i} \otimes f(y_i) = 0, \quad \text{donc} \quad \sum \frac{x_i}{1} \otimes f(y_i) \centerdot \frac{1}{s_i} = 0$$

ce qui implique $\sum x_i \otimes f\big(y_i \frac{1}{s_i}\big) = 0$ c'est à dire $(1_M \otimes f) \left(\sum x_i \otimes y_i \centerdot \frac{1}{s_i}\right) = 0.$
Comme M est plat donc $1_M \otimes f$ est un monomorphisme de A-modules à gauche donc
$\sum x_i \otimes y_i \centerdot \frac{1}{s_i} = 0$ ce qui implique $\sum \frac{x_i}{s_i} \otimes y_i = 0.$ Ainsi $1_{S^{-1}(A)} \otimes f$ est un monomorphisme de $S^{-1}(A)$-modules à gauches et par suite $S^{-1}(M)$ est un $S^{-1}(A)$ - module plat.

Lemme 1.2.12. *Soient M et M' deux A - modules à gauche et S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors il existe un isomorphisme*

$$\phi_{M,M'} : Hom_A(S^{-1}(A) \bigotimes_A M, M')$$

$$\Big\downarrow$$

$$Hom_A(M, Hom_A(S^{-1}(A),\ M')).$$

Preuve

On définit $\phi_{M,M'}$ de la manière suivante :

$$\phi_{M,M'} : Hom_A(S^{-1}(A)\bigotimes_A M, M') \longrightarrow Hom_A(M, Hom_A(S^{-1}(A), M'))$$

$$\begin{array}{llll} t \longrightarrow \phi_t : M & \longrightarrow Hom_A(S^{-1}(A), M') & & \\ & m \longmapsto \phi_t(m) : S^{-1}(A) & \longrightarrow M' & \\ & & \dfrac{a}{s} \longmapsto t(\dfrac{a}{s} \otimes m) & . \end{array}$$

$\phi_{M,M'}$ est un isomorphisme qui est un cas particulier du théorème d'isomorphismes adjoints.

Corollaire 1.2.13. *Soient M, M' deux A - modules à gauche et S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors il existe un isomorphisme*

$$\phi'_{M,M'} : Hom_A(S^{-1}(M), M') \longrightarrow Hom_A(M, Hom_A(S^{-1}(A), M')).$$

Preuve

Il suffit de remarquer que $S^{-1}(A)\bigotimes_A M$ est isomorphe à $S^{-1}(M)$.

Théorème 1.2.14. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors les foncteurs $S^{-1}(\ )$ et $Hom_A(S^{-1}(A), -)$ sont adjoints.*

Preuve

Pour tout M, M' on a un isomorphisme

$$\phi_{M,M'} : Hom_A(S^{-1}(M), M') \longrightarrow Hom_A(M, Hom_A(S^{-1}(A), M')).$$

Alors on a :

i) Soit $f_1 : M_1 \longrightarrow M$ un morphisme de A - modules à gauche alors le diagramme est commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Hom_A(M, Hom(S^{-1}(M), M') \arrow[r, "{Hom(f_1, Hom_A(S^{-1}(A), M'))}"] \arrow[d, "\phi^{-1}_{M,M'}"] & Hom_A(M_1, Hom(S^{-1}(A), M)) \arrow[d, "\phi^{-1}_{M_1,M'}"] \\ Hom_A(S^{-1}(M), M') \arrow[r, "{Hom(S^{-1}(f_1), M')}"] & Hom_A(S^{-1}(M_1), M') \end{tikzcd}$$

ii) Soit $f_2 : M' \longrightarrow M_2$ un morphisme de A - modules à gauche, alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
Hom_A(M, Hom(S^{-1}(M), M')) & \xrightarrow{Hom(M,Hom(S^{-1}(A),f_2))} & Hom_A(M, Hom_A(S^{-1}(A), M_2)) \\
\downarrow \phi^{-1}_{M,M'} & & \downarrow \phi^{-1}_{M,M_2} \\
Hom_A(S^{-1}(M), M') & \xrightarrow{Hom(S^{-1}(M),f_2)} & Hom_A(S^{-1}(M), M_2)
\end{array}$$

Donc les foncteurs $S^{-1}(\ )$ et $Hom_A(S^{-1}(A), -)$ sont adjoints.

1.3 Sous modules des fractions

Proposition 1.3.1. *Soient M un A - module à gauche, N un sous - module de M et S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ores à gauche. Alors $S^{-1}(N)$ est un sous module de $S^{-1}(M)$.*

Preuve

Clair (évident) car $S^{-1}(N)$ est une partie de $S^{-1}(M)$ et $S^{-1}(N)$ est un $S^{-1}(A)$ - module à gauche donc $S^{-1}(N)$ est un sous - module de $S^{-1}(M)$.

Définition 1.3.2. *Soient M un A - module à gauche et S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. On dit que le sous - module N de M est saturé à gauche pour S dans M si on a pour tout $s \in S$, $\forall x \in M$ $(sx \in N)$ implique $(x \in N)$. On dit aussi que N est S - saturé dans M.*

Proposition 1.3.3. *Soient M un A - module à gauche, N un sous - module de M et S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors N est S- saturé dans M si et seulement si il existe un sous - module N' du $S^{-1}(A)$ - module $S^{-1}(M)$ tel que $N = (i_M^S)^{-1}(N')$.*

Preuve : Condition suffisante.

Supposons qu'il existe N' un sous - module de $S^{-1}(M)$ tel que $N = (i_M^S)^{-1}(N')$.

Montrons que si $sx \in N$ où $s \in S$ et $x \in M$ alors $x \in N$. On a $\frac{sx}{1} = i_M^S(sx) \in N'$ donc $\frac{1}{s} \centerdot \frac{sx}{1} \in N' \Longrightarrow \frac{sx}{s} \in N'$ (car il suffit de prendre le couple $(w, z) \in S \times A$ avec $w = 1$ et $z = 1$.
On a $1 \times 1 = 1 \times 1 \Longrightarrow (wa = zs)$ d'où $\frac{x}{1} \in N'$

$$\Longrightarrow i_M^S(x) = \frac{x}{1} \in N' \Longrightarrow x \in (i_M^S)^{-1}(N') = N.$$

d'où N est S - saturé.
Condition nécessaire : il suffit de montrer que $N = (i_M^S)^{-1}(S^{-1}N)$. En effet on a $x \in (i_M^S)^{-1}\ (S^{-1}N) \Longleftrightarrow \frac{x}{1} \in S^{-1}(N)$. Donc ils existent $y \in N$ et $t \in S/ \ \frac{x}{1} = \frac{y}{t} \Longrightarrow$ ils existent $y \in N, t, t_1, t_2 \in S$ tels que

$$\begin{cases} t_1 x = & = t_2 y \\ t_1 x_1 & = t_2 t \end{cases}$$

$t_2 tx \in N \Longrightarrow x \in N$ car N est S - saturé d'où $(i_M^S)^{-1}(S^{-1}N) \subset N$ et d'autre part

$$(i_M^S(N) \subset S^{-1}(N) \Longrightarrow N \subset (i_M^S)^{-1}(S^{-1}N)$$

d'où l'égalité $N = (i_M^S)^{-1}(S^{-1}(N))$. Donc il suffit de prendre $N' = S^{-1}(N)$.

Proposition 1.3.4. *Soient M un A - module à gauche et S une partie multiplicative saturée à gauche.*
Soit N un sous - module du $S^{-1}(A)$- module $S^{-1}(M)$, alors $S^{-1}((i_M^S)^{-1}(N)) = N$.

<u>Preuve</u>

Montrons que $S^{-1}((i_M^S)^{-1}(N)) \subset N$.
Soit $\frac{x}{s} \in S^{-1}((i_M^S)^{-1}(N)) \Longrightarrow x \in (i_M^S)^{-1}(N)$ et $s \in S$ donc $\frac{x}{1} \in N$ or $\frac{x}{s} = \frac{1}{s} \centerdot \frac{x}{1} \in N$ car N est un sous -module de $S^{-1}(M)$ (en tant que $S^{-1}(A)$ - module). D'où $S^{-1}((i_M^S)^{-1}(N)) \subset N$.
Inversement un élément de N est de la forme $\frac{x}{s}$ avec $x \in M$ et $s \in S$ donc $\frac{x}{1} = \frac{s}{1} \centerdot \frac{x}{s} \in N$ donc

$$x \in (i_M^S)^{-1}(N) \Longrightarrow \frac{x}{s} \in S^{-1}((i_M^S)^{-1}(N)) \quad \text{d'où } N \subset S^{-1}((i_M^S)^{-1}(N)).$$

Ainsi on a l'égalité $N = S^{-1}((i_M^S)^{-1}(N))$.

Corollaire 1.3.5. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Soit I un idéal de $S^{-1}(A)$. Alors $I = S^{-1}((i_A^S)^{-1}(I))$.*

Théorème 1.3.6. *Soient M un A - module à gauche et S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors il existe une bijection croissante (pour l'inclusion) de l'ensemble des sous - modules du $S^{-1}(A)$ - module $S^{-1}(M)$ sur l'ensemble des sous - modules du A - module M saturé pour S.*

<u>**Preuve**</u>

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous - modules du $S^{-1}(A)$ - module à gauche $S^{-1}(M)$ et $\mathcal{E}'$ l'ensemble des sous - modules du A - module à gauche. M saturé pour S et considérons la correspondance

$$\begin{array}{ll} \varphi : \mathcal{E} & \longrightarrow \mathcal{E}' \\ N & \longmapsto (i_M^S)^{-1}(N) \end{array}$$

c'est évident que φ est une application. Montrons alors que φ est une bijection.

Montrons que φ est injective d'après la preuve de la proposition précédente. Si $N \in \mathcal{E}$ alors $S^{-1}((i_M^S)^{-1}(N)) = N$ donc pour tout $N_1, N_2 \in \mathcal{E}$ si $\varphi(N_1) = \varphi(N_2)$ alors $(i_M^S)^{-1}(N_1) = (i_M^S)^{-1}(N_2)$ donc

$$S^{-1}((i_M^S)^{-1}(N_1) = S^{-1}((i_M^S)^{-1}(N_2)) \Longrightarrow N_1 = N_2.$$

D'où φ est injective.

Montrons que φ est sujective.

Soit N' un sous - module S - saturé du A - module $M(N' \in \mathcal{E}')$. Alors il existe un sous - module N du $S^{-1}(A)$ - module $S^{-1}(M)$ $(N \in \mathcal{E})$ tel que $N' = (i_M^S)^{-1}(N)$ ce qui prouve

que φ est surjective et comme elle est injective donc elle est bijective d'où le résultat.

Restte à montrer que φ est croissante.

Soient N_1 et $N_2 \in \mathcal{E}$ tels que $N_1 \subset N_2$, montrons que $\varphi(N_1) \subset \varphi(N_2)$, soit

$$\begin{array}{ll} x \in \varphi(N_1) & \Longrightarrow x \in (i_M^S)^{-1}(N_1) \\ & \Longrightarrow x \in (i_M^S)^{-1}(N_2) \\ & \Longrightarrow x \in \varphi(N_2) \\ & \text{ainsi } \varphi(N_1) \subset \varphi(N_2) \end{array}.$$

Donc φ est une bijection croissante.

Corollaire 1.3.7. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors il existe une bijection croissante de l'ensemble des idéaux à gauche de $S^{-1}(A)$ sur l'ensemble des idéaux à gauche de A saturés pour S.*

Théorème 1.3.8. *Soient A un anneau, S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore, alors le foncteur $S^{-1}(\ )$ préserve les propriétés d'artiniété, de noethérienité et de simplicité.*

<u>**Preuve**</u> :

Découle du théorème et corollaire précédents, c'est à dire de la bijection strictement croissante entre les sous-modules de $S^{-1}(M)$ et les sous-modules de M saturés pour S (où M est un A-module à gauche).

Théorème 1.3.9. *Soient M un A - module à gauche N un sous - module de M et S une partie multiplicative saturée de A qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors le $S^{-1}(A)$ - module $S^{-1}(M/N)$ est isomorphe $S^{-1}(M)/S^{-1}(N)$.*

<u>**Preuve**</u>

Soit

$$\begin{aligned} \psi : S^{-1}(M/N) &\longrightarrow S^{-1}(M)/S^{-1}(N) \\ \frac{\bar{m}}{s} &\longmapsto \frac{\bar{m}}{s} \end{aligned}$$

Montrons que ψ est bien définie. Soient $\frac{\bar{m}}{s}$ et $\frac{\bar{m}'}{s'} \in S^{-1}(M/N)$ tels que $\frac{\bar{m}}{s} = \frac{\bar{m}'}{s'}$ alors ils existent $x, y \in S$ tels que

$$\begin{cases} x\bar{m} = y\bar{m}' \\ xs = ys' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} xm - ym' \in N \\ xs = yt \end{cases}$$

donc

$$\frac{xm - ym'}{xs} \in S^{-1}(N) \Longrightarrow \frac{m}{s} - \frac{m'}{s'} \in S^{-1}(N)$$

alors

$$\overline{\frac{m}{s} - \frac{m'}{s'}} = \bar{0} \Longrightarrow \frac{\bar{m}}{s} = \frac{\bar{m}'}{s}$$

d'où ψ est bien définie. Montrons maintenant que ψ est un morphisme de $S^{-1}(A)$ - modules. Soient $\dfrac{\bar{m}}{s}, \dfrac{\bar{m'}}{s'} \in S^{-1}(M/N)$ et $\dfrac{\bar{a}}{t\psi} \in S^{-1}(A)$. On a :
$* \ \psi\left(\dfrac{\bar{m}}{s} + \dfrac{\bar{m'}}{s'}\right) = \psi\left(\dfrac{x\bar{m} + y\bar{m'}}{xs}\right)$ avec $x, y \in S$ tels que

$$xs = ys' \text{ donc } \psi\left(\frac{\bar{m}}{s} + \frac{\bar{m'}}{s'}\right) = \overline{\frac{xm + ym'}{xs}} = \overline{\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'}}$$

$$= \frac{\bar{m}}{s} + \frac{\bar{m'}}{s'} = \psi(\frac{\bar{m}}{s}\Big) + \psi\left(\frac{\bar{m'}}{s}\right)$$

$*\psi\left(\dfrac{a}{t} \centerdot \dfrac{\bar{m}}{s}\right) = \psi\left(\dfrac{\bar{m}}{s}\right) = \psi\left(\dfrac{z\bar{m}}{wt}\right)$ avec $(w, z) \in S \times A$ tel que

$$wa = zs \ \text{ donc } \psi\left(\frac{a}{t} \centerdot \frac{\bar{m}}{s}\right) = \frac{\overline{zm}}{wt} = \overline{\frac{a}{t} \centerdot \frac{m}{s}}$$

$$= \frac{a}{t} \centerdot \frac{\bar{m}}{s} = \frac{a}{t} \centerdot \psi\left(\frac{\bar{m}}{s}\right)$$

$*$ Montrons que ψ est bijective. Soit

$$\frac{\bar{m}}{s} \in Ker \ \psi \Longrightarrow \psi\left(\frac{\tilde{m}}{s}\right) = \frac{\overline{m}}{s} = \bar{0} \Longrightarrow \frac{m}{s} \in S^{-1}(N) \Longrightarrow m \in N$$

donc $\dfrac{\bar{m}}{s} = \bar{0} \Longrightarrow \psi$ est injective et c'est clair que ψ est surjective donc ψ est bijective. Ainsi ψ est un isomorphisme de $S^{-1}(A)$ - modules.

Corollaire 1.3.10. *Soient A un anneau, I un idéal à gauche de A et S une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche. Alors le $S^{-1}(A)$ - module à gauche $S^{-1}(A/I)$ est isomorphe au $S^{-1}(A)$ - module à gauche $S^{-1}(A)/S^{-1}(I)$.*

Chapitre 2

MODULES DES FRACTIONS DANS LES DUO - ANNEAUX

Introduction

Dans la section 1 de ce chapitre, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie multiplicative saturée d'un duo-anneau vérifie les conditions de Ore. Nous montrons que toute partie multiplicative saturée non diviseurs de zéro d'un duo-anneau vérifie les conditions de Ore. Nous montrons que le localisé AP de A en P où P est un idéal premier (qui est $S^{-1}(A)$ ou S est l'ensemble des éléments réguliers de $A \backslash P$ voir [7]) n'est pas local en général, et que A_P est local si et seulement si $A \backslash P$ ne contient pas des diviseurs de zéro. En particulier si A est un duo-anneau intègre alors AP est local.

Dans la 2ème section de ce chapitre, nous étudions la localisation des anneaux quotient. En particulier l'anneau total de fractions de A/P noté $(A/P)_{(\bar{0})}$. Nous montrons que $(A/P)_{(\bar{0})}$ est isomorphe à A_P/P_P et nous déduisons que P_P est un idéal maximal de A_P même si A_P n'est pas local.

Dans la 3ème section de ce chapitre, nous étudions les anneaux de valuations non nécessairement commutatifs. Nous montrons qu'un anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif est principal et que tout idéal d'un anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif est une puissance de son idéal maximal. Ce qui motive cette étude est le fait que la classe des anneaux de valuation non nécessairement commutatifs est une classe de duo-anneaux intègres locaux. Donc les comparer avec le localisé A_P

d'un duo-anneau intègre qui n'est pas en général un duo-anneau. On donnee une réponse à cette question dans la 4ème section de ce chapitre.

Dans la 4ème section de ce chapitre, nous introdusons les duo-anneaux de Dedekind qui sont des duo-anneaux intègres hériditaires (un anneau A est dit hériditaire si tout idéal de A est projectif). Nous montrons qu'un idéal I d'un duo-anneau de Dedekind est inversible si et seulement si I est projectif. Nous montrons que si A est un duo-anneau de Dedekind, alors la classe des A-modules injectifs coïncide avec la classe des A-modules divisibles et nous déduisons que le quotient d'un A-module injectif est injectif. Nous montrons qu'un duo-anneau intègre A est un anneau de valuation discrète si et seulement si A est un duo-anneau de Dedekind local. Nous montrons que si A est un duo-anneau de Dedekind. Alors pour tout idéal premier P, A_p est un duo-anneau.

2.1 Etude des éléments nilpotents dans un duo - anneau et quelques résultats sur certaines parties multiplicatives saturées

Définition 2.1.1. *Soient A un anneau et a un élément non nul de A. Alors a est dit nilpotent s'il existe un entier naturel non nul n tel que $a^n = 0$.*

Définition 2.1.2. *Soient A un anneau et a un élément nilpotent. Alors a est dit nilpotent d'indice n, si n est le plus petit entier naturel tel que $a^n = 0$.*

Lemme 2.1.3. *Soient A un duo - anneau et a un élément nilpotent. Alors pour tout $x \in A$, xa et ax sont nilpotents.*

Preuve

a est nilpotent, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$, montrons que $(xa)^n = 0$

$$(xa)^n = \underbrace{(xa) \times (xa) \times ... \times (xa)}_{n \text{ fois}}$$

Pour $n = 2$ on a $(xa)^2 = (xa)(xa) = x(ax)a$

Or $ax \in aA = Aa \Longrightarrow$ il existe $x_1 \in A$ tel que

$$\begin{aligned} ax &= x_1 a \text{ d'où } (xa)^2 = x(ax)a = x(x_1a)a \\ &= xx_1a^2. \\ &\text{Pour } n = 3,\ (xa)^3 = (xa)^2(xa) \\ &= (xx_1a^2)(xa) = xx_1(a^2x)a \end{aligned}$$

et comme $a^2x \in aA$ alors il existe $x_2 \in A$ tel que $a^2x = x_2a^2$ donc

$$(xa)^3 = xx_1(a^2x)a = xx_1(x_2a^2)a = xx_1x_2a^3$$

d'où on montre par récurrence qu'ils existent $x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in A$ tels que

$$(xa)^n = xx_1x_2 \times ... \times x_{n-1}a^n = 0$$

donc xa est nilpotent. De la même façon on montre que $(ax)^n = 0$. Pour $n = 2$ on a $(ax)^2 = axax = a(xa)x$ or $xa \in Aa = aA$ donc il existe $x'_1 \in A$ tel que

$$xa = ax'_1 \text{ donc } (ax)^2 = a(xa)x = a(ax'_1)x =$$

$$a^2x'_1x, \text{ pour } n = 3,\ (ax)^3 = (ax)^2(ax) =$$

$(a^2x'_1x)(ax) = a^2(x'_1xa)x$ et comme $x'_1xa \in Aa = aA$, alors il existe $x'_2 \in A$ tel que $x'_1xa = ax'_2$ d'où $(ax)^3 = a^2(x'_1xa)x = a^2(ax'_2)x = a^3x'_2x$ et on montre par récurrence sur n qu'il existe $x'_1, x'_2, ..., x'_{n-1} \in A$ tel que

$$(ax)^n = a^n x'_{n-1}x'_{n-2}...x'_1x = 0$$

donc ax est nilpotent.

Théorème 2.1.4. *Soit A un duo - anneau. Alors l'ensemble des éléments nilpotents de A noté par $nil(A)$ est un idéal de A.*

Preuve

Posons $I =$ l'ensemble des éléments nilpotents de A. Alors $I \neq \phi$ car $0 \in I$.

Soient a et b deux éléments de I. Montrons que $a + b \in I$. Supposons que a est d'indice n et b est d'indice m, montrons que $(a + b)^{n+m} = 0$ on a $(a + b)^{n+m}$ est une somme de termes de la forme $a^ib^j = a^ib^j$ avec $i + j = n + m$ tel que $i \geq n$ ou $j \geq m$, donc $(a + b)^{n+m} = 0$. Ainsi $a + b \in I$, et d'après ce qui précède si $a \in I$ ax et $xa \in I$, d'où I est un idéal.

Théorème 2.1.5. *Soit A un duo - anneau. Alors* $nil(A) = \bigcap_{P \in spec(A)} P$, *où* $spec(A)$ *est l'ensemble des idéaux premiers de* A.

Preuve

Montrons que $nil(A) \subset \bigcap_{P \in spec(A)} P$.

Soit $x \in nil(A)$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$ donc pour tout $P \in spec(A)$ on a $x^n \in P$ et comme P est premier donc $x \in P$ d'où $x \in \bigcap_{P \in spec(A)} P$, ainsi $nil(A) \subset \bigcap_{P \in spec(A)} P$.

Montrons $\bigcap_{P \in spec(A)} P \subset nil(A)$. Soit f un élément non nilpotent de A, montrons que $f \notin \bigcap_{P \in spec(A)} P$.

Posons $\mathcal{E} =$ l'ensemble des idéaux I de A vérifiant $f^n \notin I$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\mathcal{E}$ est non vide car $\mathcal{E}$ contient l'idéal (0).

D'après le lemme de Zorn's $\mathcal{E}$ admet un élément maximal pour l'inclusion.

Soit P un élément maximal de $\mathcal{E}$, montrons que P est premier. Soient $x, y \notin P$, montrons que $xy \notin P$.

Les idéaux $P+(x)$ et $P+(y)$ contiennent P strictement, alors ils existent $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^n \in P+(x)$ et $f^m \in P+(y)$. Donc montrons que $f^n \times f^m = f^{n+m} \in P+(xy)$. On a $f^n \in P+(x)$, alors ils existent $u \in P$ et $a \in A$ tels que $f^n = u + ax$, de même $f^m \in P+(y)$, alors ils existent $v \in P$ et $b \in$ tels que $f^m = v + by$. Donc

$$f^{n+m} = (u+ax)(v+by) = u(v+by) + axv + axby.$$

Posons $w = u(v+by) + axv$, alors $w \in P$ et pour $axby$ il existe $b' \in A$ tel que $axby = ab'xy$ donc $axby \in (xy)$, d'où $f^{n+m} = w + axby$ est un élément de $P+(xy)$.

Donc $P+(xy)$ n'appartient pas à $\mathcal{E}$ d'où $xy \notin P$, ainsi P est premier et comme $f \notin P$ donc $f \notin \bigcap_{P \in spec(A)} P$. D'où le résultat.

Définition 2.1.6. *Un anneau A est dit réduit s'il ne contient pas d'élément nilpotent non nul.*

Proposition 2.1.7. *Soit A un duo - anneau. Alors l'anneau quotient $A/nil(A)$ ne contient pas d'élément nilpotents non nuls, c'est à dire qu'il est réduit.*

Preuve

Soit $\bar{x} \in A/nil(A)$, avec $\bar{x} \neq \bar{0}$ montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{x}^n \neq \bar{0}$.
Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que
$\bar{x}^n = \bar{0} = \bar{x}^n \Longrightarrow \bar{0} \Longrightarrow x^n \in nil(A)$
$\Longrightarrow$ il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x^n)^m = 0$
$\Longrightarrow x^{nm} = 0 \Longrightarrow x \in nil(A) \Longrightarrow \bar{x} = \bar{0}$ absurde.

Proposition 2.1.8. *Soient A un duo-anneau et S une partie multiplicative saturée de A. Alors S est permutable à gauche et à droite.*

Preuve

Soient $a \in A$ et $s \in A$, alors on a $sA = As \Longrightarrow$ il existe $b \in A$ tel que $sa = bs$ c'est-à-dire que S est permutable à gauche. De même il existe $b' \in A$ tel que $as = sb'$ c'est-à-dire que S est permutable à droite.

Proposition 2.1.9. *Soient A un duo-anneau et S une partie multiplicative saturée. Alors S vérifie les conditions de Ore à gauche (respectivement à droite) si et seulement si S est réversible à gauche (resp. à droite).*

Preuve

Supposons que S vérifie les conditions de Ore à gauche (resp. à droite) alors S est réversible à gauche (resp. à droite). Supposons que S est réversible à gauche (resp. à droite) et d'après la proposition précédente S est permutable à gauche (resp. à droite) donc S vérifie les conditions de Ore à gauche (resp. à droite).

Proposition 2.1.10. *Soient A un duo-anneau. Alors toute partie multiplicative saturée S formée d'éléments réguliers de A vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite.*

Preuve

Soit S une partie multiplicative saturée formée de non diviseurs de zéro, alors il suffit de montrer qu'elle est réversible à gauche et à droite. Soient $a \in A$ et $s \in S$ tels que $as = 0$ et comme s est régulier alors $a = 0$ ce qui implique $sa = 0$ donc pour tout $a \in A$ si $as = 0$ il existe $t \in S$ tel que $ta = 0$ $(t = s)$ c'est-à-dire S est réversible à gauche de même si $sa = 0$ alors $a = 0 \Longrightarrow as = 0$ c'est-à-dire que S est réversible à droite. Ainsi S vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite.

Corollaire 2.1.11. *L'ensemble des éléments réguliers d'un duo-anneau est une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite.*

Corollaire 2.1.12. *Dans un duo-anneau intèrre toute partie multiplicative saturée vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite.*

Remarque 2.1.13. *Dans un anneau commutatif (duo-anneau commutatif). Toute partie multiplicative saturée vérifie les conditions de Ore (à gauche et à droite).*

Théorème 2.1.14. *Soient A un duo-anneau et P un idéal premier, alors l'ensemble des éléments réguliers de $A\backslash P$ est une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite.*

Preuve

L'ensemble des éléments réguliers de $A\backslash P$ est une partie multiplicative saturée (d'après [7], lemme 1.3) et d'après ce qui précéde cette partie vérifie les conditions de Ore à gauche et à droite.

Notation

Si A est un duo-anneau et P un idéal premier de A. On note par A_P l'anneau $S^{-1}(A)$ où S est l'ensemble des éléments réguliers de $A\backslash P$

Théorème 2.1.15. *Soit A un duo-anneau alors l'ensemble des éléments réguliers du complémentaire de $nil(A)$ $(A\backslash nil(A))$ sont une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore.*

Preuve

Soient a, b sont réguliers de $(A\backslash A$ constituent une partie multiplicative saturée alors ab est régulier et $ab \notin nil(A)$ donc $ab \in A\backslash nil(A)$. Maintenant supposons que $ab \in S$ (ou S est l'ensemble des éléments réguliers de $A\backslash nil(A)$) donc a et b sont réguliers. Ainsi $a \notin nil(A)$ et $b \notin nil(A)$.

Proposition 2.1.16. *Soient A un duo-anneau. Alors pour tout idéal premier P, A_p (voir [7]) est un sous-anneau de $S^{-1}(A)$ ou S est l'ensemble des éléments réguliers de $A\backslash nil(A)$.*

Preuve

Il suffit de remarquer que $A\backslash P$ est une partie de $A\backslash nil(A)$.

Remarque 2.1.17. *Si A est un duo-anneau non commutatif P un idéal premier de A tel que $A\backslash P$ contient des diviseurs de zéro. Alors $A\backslash P$ est une partie multiplicative saturée mais on peut rien dire sur la réversibilité (comme l'une des conditions de Ore) car si $as = 0$ avec $a \in A$ et $s \in A\backslash P$ donc $a \in A$ et il existe $b \in A$ tel que $as = ba = 0$ mais on peut pas dire si $b \in A\backslash P$ ou non.*

Si A est un anneau commutatif et P un idéal premier alors $A\backslash P$ vérifie les conditions de Ore même si $A\backslash P$ contient des diviseurs de zéro exemple :

si $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $P = 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ c'est un idéal premier de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. On a

$$P = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \quad et \quad A\backslash P = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$$

et $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{0}$ c'est-à-dire $\bar{3}$ est un diviseur de zéro. Ainsi $A\backslash P$ contient des diviseurs de zéro et $A\backslash P$ vérifie les conditions de Ore.

Dans la suite la localisation d'un duo-anneau A est d'un A-module à gauche M. C'est l'anneau $S^{-1}(A)$ et le $S^{-1}(A)$-module à gauche $S^{-1}(M)$ ou S est l'ensemble des éléments réguliers de $A\backslash P$ avec $S^{-1}(A)$ est noté par A_P et $S^{-1}(M)$ est noté par M_P (voir [7]).

2.2 Etude des anneaux des fractions des anneaux quotients d'un duo - anneau

Proposition 2.2.1. *Soient A un duo - anneau et I un idéal de A. Alors l'anneau quotient A/I est un duo - anneau.*

<u>**Preuve**</u>

Soit J' un idéal à droite de A/I alors il existe un idéal J de A tel que $J' = J/I$. Montrons que J' est un idéal à gauche de A/I. Soient $\bar{x} \in J/I$ et $\bar{a} \in A/I$, on a $\bar{a}\bar{x} = \overline{ax}$ or A est un duo - anneau, alors il existe $a' \in A$ tel que $ax = xa'$ donc

$$\bar{a} \,.\, \bar{x} = \overline{ax} = \overline{xa'} = \bar{x} \,.\, \bar{a'} \in J/I$$

(car J/I est un idéal à droite). Ainsi $\bar{a}.\bar{x} \in J/I$ d'où si J/I est un idéal à droite alors J/I est un idéal à gauche. De même on montre que si J/I est un idéal à droite alors J/I est un idéal à gauche. D'où tout idéal de A/I est bilatère, c'est à dire que A/I est un duo - anneau.

Proposition 2.2.2. *Soient A un duo - anneau et P un idéal de A. Alors A/P est un anneau intègre si et seulement si P est premier.*

Preuve

Supposons que P est premier et montrons que A/P est intègre. Soient $\bar{x}$, $\bar{y} \in A/P$ tels que $\bar{x}.\bar{y} = \bar{0}$ alors $\overline{xy} = \bar{0}$ donc $xy \in P$ implique que $x \in P$ ou $y \in P$, alors $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{y} = \bar{0}$ d'où A/P est intègre.

Supposons A/P est intègre et montrons que P est premier. Soient $x, y \in A$ tels que $xy \in P$ implique que $\overline{xy} = \bar{0}$ alors $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$, donc $\bar{x} = \bar{0}$ ou $\bar{y} = \bar{0}$, d'où $x \in P$ ou $y \in P$. Et ainsi P est premier.

Théorème 2.2.3. *Soient A un duo - anneau, I idéal de A. Q un idéal de A/I. Alors Q est premier si et seulement si il existe un idéal premier de A tel que $Q = P/I$ (l'égalité dans le sens isomorphe).*

Preuve du théorème

Comme Q est un idéal de A/I alors il existe un idéal P de A contenant I tel que $Q \cong P/I$. Montrons alors que Q est premier si et seulement si P est premier.

Supposons que Q est premier. Soient $x, y \in A$ tel que

$$xy \in P \Longrightarrow \overline{xy} \in Q \Longrightarrow \bar{x}\,\bar{y} \in Q$$

$$\Longrightarrow \bar{x} \in Q \text{ où } \bar{y} \in Q \; (\bar{x} \in P/I \text{ où } \bar{y} \in P/P).$$

Supposons que $\bar{x} \in P/I$ alors il existe $x' \in P$ tel que $x - x' \in I$ donc $x \in P$ de même qi $\bar{y} \in P/I$ implique $y \in P$ d'où si $xy \in P$ on a $x \in P$ ou $y \in P$ c'est à dire que P est premier.

Supposons maintenant que P est premier. Soient $\bar{x}$, $\bar{y} \in A/I$ tels que $\bar{x}\,\bar{y} \in Q$ donc $\overline{xy} \in Q \Longrightarrow \overline{xy} \in P/I \Longrightarrow$ il existe $z \in P$ tel que

$$xy - z \in I \Longrightarrow xy \in P \Longrightarrow x \in P \text{ ou } y \in P$$

donc $\bar{x} \in P/I$ où $\bar{y} \in P/I$ c'est à dire $\bar{x} \in Q$ ou $\bar{y} \in Q$ d'où le résultat Q est premier.

Proposition 2.2.4. *Soient A un duo - anneau, I un idéal de A. Alors si $\bar{s}$ est un élément régulier de A/I donc s est un élément régulier de A.*

Preuve

Supposons que s n'est pas régulier alors il existe s' tel que $ss' = 0 \Longrightarrow \bar{s}\bar{s'} = \bar{0}$ donc $\bar{s}$ n'est pas régulier. Ainsi si $\bar{s}$ est régulier alors s est régulier.

Remarque 2.2.5. *:*
(1) La réciproque de la proposition précédente est fausse comme le montre l'exemple suivant :
2 est un élément régulier de $\mathbb{Z}$ *mais* $\bar{2}$ *n'est pas régulier dans* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
(2) Dans toute la suite la localisation d'un duo-anneau par un idéal premier se fait sur les éléments réguliers du complémentaire de l'idéal premier. C'est-à-dire dans les sens du localisation définit dans l'article.

Lemme 2.2.6. *Soient* A *un duo - anneau,* I *un idéal de* A *et* P *un idéal premier de* A *contenant* I*. Alors la correspondance*

$$\begin{aligned} \psi : (A/I)_{(P/I)} &\longrightarrow A_p/I_p \\ \frac{\bar{a}}{\bar{s}} &\longmapsto \overline{(\frac{a}{b})} \end{aligned}$$

est une application.

<u>**Preuve**</u>

Soient $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}$ et $\frac{\bar{b}}{\bar{t}} \in (A/I)_{(P/I)}$ tels que $\frac{\bar{a}}{\bar{s}} = \frac{\bar{b}}{\bar{t}}$ alors ils existent $\bar{x},\ \bar{y} \in (A/I)\ \backslash(P/I)$ avec $\bar{x},\ \bar{y}$ sont régulier tels que

$$\begin{cases} \bar{x}\bar{a} &= \bar{y}\bar{b} \\ \bar{x}\bar{s} &= \bar{y}\bar{t} \end{cases}$$

donc $\begin{array}{l} xa - yb \in I \\ xs - yt \in I \end{array}$

Montrons que $\overline{\frac{a}{s}} = \overline{\frac{b}{t}} \Longrightarrow \overline{\frac{a}{s} - \frac{b}{t}} = \bar{0}$. Supposons que

$$\frac{a}{s} - \frac{b}{t} = \frac{x'a - y'b}{x's} \quad \text{avec } x's = y't,$$

on a $x, x' \notin P$ et sont régulier alors ils existent $x'', y'' \in A\backslash P$ tels que

$$x''x = y''x' \quad \text{donc} \quad x''xs = y''x's = y''y't$$

d'où on peut écrire $\dfrac{x'a - y'b}{x's} = \dfrac{y''x'a - y''y'b}{y''x's}$ et d'autre part on a :

$$\begin{aligned}
xs - yt \in I \quad &\Longrightarrow x''(xs - yt) \in I \\
&\Longrightarrow x''xs - x''yt \in I \\
&y''y't - x''yt \in I \\
&\Longrightarrow (y''y' - x''y)t \in I \\
&\Longrightarrow \overline{y''y' - x''y}\ \bar{t} = \bar{0} \\
&\Longrightarrow \overline{y''y' - x''y} = \bar{0} \text{ (car } \bar{t} \text{ est régulier)} \\
&\Longrightarrow y''y' - x''y \in I
\end{aligned}$$

Supposons que $y''y' - x''y = m$ où $m \in I$. Donc $y''y' = x''y + m$. Alors on a

$$\frac{x'a - y'b}{x's} = \frac{y''x'a - y''y'b}{y''x's} = \frac{x''xa - (x''y + m)b}{y''x's} =$$

$$\frac{x''(xa - yb) - mb}{y''x's} \in I_p \text{ (car } xa - yb \in I \text{ et } m \in I).$$

donc

$$\overline{\frac{a}{s} - \frac{b}{t}} = \overline{\frac{x'a - y'b}{x's}} = \bar{0} \Longrightarrow \frac{\bar{a}}{s} = \frac{\bar{b}}{t}$$

<u>Conclusion</u> : ψ est bien définie.

Proposition 2.2.7. *On peut munir $(A/I)_{(P/I)}$ d'une structure A - module à gauche de la manière suivante si $a \in A$ et*

$$\frac{\bar{b}}{\bar{t}} \in (A/I)_{(P/I)} a \ . \ \frac{\bar{b}}{\bar{t}} = \frac{\bar{a}}{\bar{1}} \times \frac{\bar{b}}{\bar{t}}.$$

<u>Preuve</u>

Supposons que $\left(a, \dfrac{\bar{b}}{\bar{t}}\right) = \left(a', \dfrac{\bar{b'}}{\bar{t'}}\right)$ donc

$$a = a' \text{ et } \frac{\bar{b}}{\bar{t}} = \frac{\bar{b'}}{\bar{t'}} \Longrightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{1}} = \frac{\bar{a'}}{\bar{1}} \text{ et } \frac{\bar{b}}{\bar{t}} = \frac{\bar{b'}}{\bar{t'}}$$

donc

$$\frac{\bar{a}}{\bar{1}} \times \frac{\bar{b}}{\bar{t}} = \frac{\bar{a'}}{\bar{1}} \times \frac{\bar{b'}}{\bar{t'}}$$

Proposition 2.2.8. *Soient A un duo - anneau, I un idéal quelconque de A et P un idéal premier de A contenant I. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \psi : (A/I)_{(P/I)} &\longrightarrow A_p/I_p \\ \frac{\bar{a}}{\bar{s}} &\longmapsto \frac{\bar{a}}{s} \end{aligned}$$

est un monomorphisme de A - modules à gauche.

<u>Preuve</u>

Montrons que ψ est un morphisme de A - modules à gauche. Soient $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}$, $\frac{\bar{b}}{\bar{t}} \in (A/I)_{(P/I)}$ et $c \in A$ on a

$$\psi\left(\frac{\bar{a}}{\bar{s}} + \frac{\bar{b}}{\bar{t}}\right) = \psi\left(\frac{\bar{x}\bar{a} + \bar{y}\bar{b}}{\bar{x}\bar{s}}\right) \text{ avec } \bar{x}\bar{s} = \bar{y}\bar{t}$$

($\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont deux éléments réguliers de $(A/I)\backslash(P/I)$) donc

$$\psi\left(\frac{\bar{a}}{s} + \frac{\bar{b}}{t}\right) = \psi\left(\frac{\overline{xa + yb}}{\overline{xs}}\right) = \frac{\overline{xa + yb}}{xs}.$$

Supposons que $\frac{\bar{a}}{\bar{s}} + \frac{\bar{b}}{\bar{t}} = \frac{\overline{x'a + y'b}}{x's}$ avec $x's = y't$.

Montrons que $\frac{\overline{xa + yb}}{xs} = \frac{\overline{x'a + y'b}}{x's}$.

On reprend la même technique de la démonstration du lemme 2.2.6 précédent, on a $x, x' \notin P$ et sont régulier alors ils existent $x'', y'' \in A\backslash P$ avec x'', y'' régulier tels que $x'', x = y''x'$ donc $x''xs = y''x's$, on peut écrire alors $\frac{x'a + y'b}{x's} = \frac{y''x'a + y''y'b}{y''x's}$ et d'autre part

$$\bar{x}\bar{s} = \bar{y}\bar{t} \Longrightarrow xs - yt \in I \Longrightarrow x''(xs - yt) \in I$$

$$\Longrightarrow x''xz - x''yt \in I \Longrightarrow y''x's - x''yt \in I \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} y''y't - x''yt \in I &\Longrightarrow (y''y' - x''y)t \in I \\ &\Longrightarrow \overline{(y''y' - x''y)}\bar{t} = \bar{0} \Longrightarrow \overline{y''y' - x''y} = \bar{0} \end{aligned}$$

Donc $y''y' - x''y \in I$ supposons que $y''y' - x''y = m$ donc

$$\begin{aligned} \frac{x'a + y'b}{x's} &= \frac{y''x'a + (x''y + m)b}{y''x's} \\ \Longrightarrow \frac{x'a + y'b}{x's} &= \frac{y''x'a + x''yb}{y''x's} + \frac{mb}{y''x's} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \frac{x'a+y'b}{x's} &= \frac{x''xa+x''yb}{x''xs}+\frac{mb}{x''xs} \\
\Longrightarrow \quad \frac{x'a+y'b}{x's} &= \frac{xa+yb}{xs}+\frac{mb}{x''xs} \\
\Longrightarrow \quad \frac{\overline{x'a+y'b}}{x's} &= \frac{\overline{xa+yb}}{xs}+\frac{\overline{mb}}{x''xs} \\
\Longrightarrow \quad \frac{\overline{x'a+y'b}}{x's} &= \frac{\overline{xa+yb}}{xs}.
\end{aligned}$$

Donc $\quad \psi\left(\frac{\bar{a}}{\bar{s}}+\frac{\bar{b}}{\bar{t}}\right)=\overline{\frac{a}{s}+\frac{b}{t}}=\frac{\bar{\bar{a}}}{s}+\frac{\bar{b}}{t}$

$$=\psi\left(\frac{\bar{a}}{s}\right)+\psi\left(\frac{\bar{b}}{t}\right).$$

Vérifions que $\psi\left(c\,\centerdot\,\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\right)=c\,\centerdot\,\psi\left(\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\right)$. On a

$$\psi\left(c\,\centerdot\,\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\right)=\psi\left(\frac{\bar{c}}{1}\times\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\right)=\psi\left(\frac{\bar{z}\bar{a}}{w}\right) \text{ avec } \bar{w}\bar{c}=\bar{z}\bar{s}$$

ce qui implique $\psi\left(c\,\centerdot\left(\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\right)=\frac{\overline{za}}{w}\right.$ on montre de la même manière ci - dessus $\frac{\overline{za}}{w}=\frac{\bar{c}}{1}\,\centerdot\,\frac{\bar{a}}{s}$ donc

$$\psi\left(c\,\centerdot\,\frac{\bar{a}}{s}\right)=c\,\centerdot\left(\frac{\bar{a}}{s}\right)=c\psi\left(\frac{\bar{a}}{s}\right).$$

d'où ψ est un morphisme de A - modules à gauche reste à montrer que ψ est un monomorphisme.

Soit $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\in Ker\ \psi$ alors

$$\psi\left(\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\right)=\bar{0}\Longrightarrow\frac{\bar{a}}{s}=\bar{0}\Longrightarrow a\in I\Longrightarrow\bar{a}=\bar{0}\Longrightarrow\frac{\bar{a}}{\bar{s}}=\bar{0}$$

d'où ψ est un monomorphisme.

Remarque 2.2.9. *On ne peut rien dire sur la surjectivité de* ψ *car si* $\frac{\bar{a}}{s}\in A_p/I_p$ *donc on ne peut dire si* $\bar{s}$ *est régulier ou non car si* $\bar{s}$ *n'est pas régulier* $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}$ *n'a pas de sens.*

Lemme 2.2.10. *Soient A un duo - anneau, P un idéal premier de A et Q un idéal premier de A contenant P. Alors $(A/P)_{(Q/P)}$ est muni d'une structure de A_Q - modules de manière que si*

$$\frac{a}{s} \in A_Q \quad et \quad \frac{\bar{b}}{\bar{t}} \in (A/P)_{(Q/P)}$$

$$\frac{a}{s} \centerdot \frac{\bar{b}}{\bar{t}} = \frac{\bar{a}}{\bar{s}} \times \frac{\bar{b}}{\bar{t}}$$

Preuve :

Montrons que si $\left(\frac{a}{s}\ ,\ \frac{\bar{b}}{\bar{t}}\right) = \left(\frac{a}{s'}\ ,\ \frac{\bar{b'}}{\bar{t}}\right)$ alors $\frac{a}{s} \centerdot \frac{\bar{b}}{\bar{t}} = \frac{\bar{a'}}{s} \centerdot \frac{\bar{b'}}{\bar{t'}}$. On a :

$$\frac{a}{s} \centerdot \frac{\bar{b}}{t} = \frac{\bar{a}}{\bar{s}} \times \frac{\bar{b}}{\bar{t}} \text{ et } \frac{a'}{s'} \centerdot \frac{\bar{b'}}{\bar{t'}} = \frac{\bar{a'}}{\bar{s'}} \times \frac{\bar{b'}}{\bar{t'}}.$$

Or

$$\frac{a}{s} = \frac{a'}{s} \Longrightarrow \exists x, y \ \text{ tel que } \begin{cases} xa = ya' \\ xs = ys' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bar{x}\bar{a} = \bar{y}\bar{a'} \\ \bar{x}\bar{s} = \bar{y}\bar{s'} \end{cases} \Longrightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{s}} = \frac{\bar{a'}}{\bar{s'}}$$

donc $\frac{\bar{a}}{\bar{s}} \times \frac{\bar{b}}{\bar{t}} = \frac{\bar{a'}}{\bar{s'}} \times \frac{\bar{b'}}{\bar{t'}}$

Remarque 2.2.11. *Si s est un élément régulier de $A \backslash Q$ alors $s \notin P$ donc $\bar{s} \neq \bar{0}$ et comme A/P est intègre alors $\bar{s}$ est régulier.*

Théorème 2.2.12. *Soient A un duo - anneau, P un idéal premier de A et Q un idéal premier de A contenant P. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \psi : (A/P)_{(Q/P} &\longrightarrow A_Q/P_Q \\ \frac{\bar{a}}{\bar{s}} &\longmapsto \frac{\bar{a}}{s} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de A_Q - modules.

Preuve :

Montrons que ψ est un morphisme de A - modules à gauche. Soient $\frac{a}{s} \in A_Q$ et $\frac{\bar{b}}{\bar{t}} \in (A/P)_{Q/P)}$ alors

$$\psi\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{\bar{b}}{\bar{t}}\right) = \psi\left(\frac{zb}{\bar{w}\bar{s}}\right) \text{ si } \frac{\bar{a}}{\bar{s}} \times \frac{\bar{b}}{\bar{t}} = \frac{\bar{z}\bar{b}}{\bar{w}\bar{s}} \text{ avec } \bar{w}\bar{a} = \bar{z}\bar{t}$$

donc $\psi\left(\frac{\bar{a}}{s} \cdot \frac{\bar{b}}{t}\right) = \frac{\overline{zb}}{ws}$ d'après ce qui précède on montre que

$$\frac{\overline{zb}}{ws} = \frac{\overline{a\,b}}{s\,t} = \frac{a}{s} \cdot \frac{\bar{b}}{t}$$

donc $\psi\left(\frac{a}{s} \cdot \frac{\bar{b}}{\bar{t}}\right) = \frac{a}{s} \cdot \psi\left(\frac{\bar{b}}{\bar{t}}\right)$. D'où ψ est un morphisme de A_Q - modules.
D'après ce qui précède il suffit de montrer que ψ est surjective.
Soit $\frac{\bar{a}}{s} \in A_Q/P_Q$ alors s est un élément régulier de $A\backslash Q$ donc $\bar{s}$ est élément régulier de A/P et $s \notin A$ alors $\bar{s} \notin Q/P$ d'où

$$\frac{\bar{a}}{s} \in (A/P)_{(Q/P)} \text{ d'où } \psi\left(\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\right) = \frac{\bar{a}}{s}$$

et ainsi ψ est surjective d'où ψ est un isomorphisque.

Théorème 2.2.13. *Soient A un duo - anneau, P un idéal premier de A et Q un idéal premier de A contenant P. Alors A_Q/P_Q est un anneau isomorphe à l'anneau $(A/P)_{(Q/P)}$.*

Preuve :

On a $P \subset Q$ donc $A\backslash Q \subset A\backslash P$ et d'après l'article P_Q est un idéal premier de A_Q. Donc A_Q/P_Q est un anneau.
Montrons que $(A/P)_{(Q/P)}$ et A_Q/P_Q sont isomorphes. Il suffit de montrer que l'application

$$\begin{aligned} \psi : (A/P)_{(Q/P)} &\longrightarrow A_Q/P_Q \\ \frac{\bar{a}}{\bar{s}} &\longmapsto \frac{\bar{a}}{s} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux.
Soit $\frac{\bar{a}}{\bar{s}}$ et $\frac{\bar{b}}{\bar{t}}$ deux éléments de $(A/P\big/_{(Q/P)}$ alors

$$\left(\frac{\bar{a}}{\bar{s}} \times \frac{\bar{b}}{\bar{t}}\right) = \psi\left(\frac{\overline{zb}}{ws}\right) \text{ avec } \bar{w}\bar{a} = \bar{z}\bar{t}$$

$$\Longrightarrow \psi\left(\frac{\bar{a}}{\bar{s}} \times \frac{\bar{b}}{\bar{t}}\right) = \frac{\overline{zb}}{\overline{ws}} = \overline{\frac{a}{s} \times \frac{b}{t}} = \frac{\bar{a}}{s} \times \frac{\bar{b}}{t}$$

donc $\psi\left(\frac{\bar{a}}{\bar{s}} \times \frac{\bar{b}}{\bar{t}}\right) = \psi\left(\frac{\bar{a}}{\bar{s}}\right) \psi\left(\frac{\bar{b}}{\bar{t}}\right)$. Ainsi ψ est isomorphjisme d'anneau.

Corollaire 2.2.14. *Soient A un duo - anneau, P un idéal premier de A et Q un idéal premier de A contenant P. Alors A_Q/P_Q est un anneau intègre.*

Preuve :
Il suffit de remarquer que $(A/P)_{(Q/P)}$ est intègre.

Corollaire 2.2.15. *Soient A un duo - anneau et P un idéal premier de A. Alors A_P/P_P est un corps (anneau de division).*

Preuve :
D'après ce qui précéde A_P/P_P est isomorphe à $(A/P)_{(P/P)}$ c'est à dire que A_p/P_P est isomorphe à $(A/P)_{(\bar{0})}$ qui est un corps gauche, (anneau de division) donc A_P/P_P est un corps gauche.

Corollaire 2.2.16. *Soient A un duo - anneau et P un idéal premier de A. Alors l'idéal P_P est maximal dans A_P.*

Preuve :
D'après le corollaire précédent A_P/P_P est un corps gauche (anneau de division) donc P_P est un idéal maximal de A_P.

Proposition 2.2.17. *Soient A un duo - anneau et P un idéal premier de A. Alors on peut munir $(A/P)_P$ d'une structure d'anneau de la manière suivante : si*

$$\frac{\bar{a}}{s} \ et \ \frac{\bar{b}}{\bar{t}} \in (A/P)_P \ alors \frac{\bar{a}}{s} \times \frac{\bar{b}}{t} = \frac{\bar{z}\bar{b}}{ws}$$

avec $w\bar{a} = \bar{z}t$.

Proposition 2.2.18. *Soient A un duo- anneau et P un idéal premier de ‘ A. Alors l'anneau $(A/P)_P$ est un corps (anneau de division) isomorphe à A_P/P_P. Ce corps est dit corps résiduel et est noté par $K(P)$.*

Preuve :

Il suffit de remarquer que l'application

$$\begin{aligned} \psi : (A/P)_P &\longrightarrow A_P/P_P \\ \frac{\bar{a}}{s} &\longmapsto \frac{\bar{a}}{s} \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux car

$$\psi\left(\frac{\bar{a}}{s} \times \frac{\bar{b}}{t}\right) = \psi\left(\frac{\overline{za}}{ws}\right) \text{ avec } w\bar{a} = \bar{z}t$$

donc

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{\bar{a}}{s} \times \frac{\bar{b}}{t}\right) = \frac{\overline{zb}}{ws} &= \frac{\bar{a}}{s} \times \frac{\bar{b}}{t} \\ &= \psi\left(\frac{\bar{a}}{s}\right) \times \psi\left(\frac{\bar{b}}{s}\right) \end{aligned}$$

Proposition 2.2.19. *Soient A un duo - anneau et P un idéal premier de A. Alors A_P est local si et seulement si $A\backslash P$ ne contient pas des diviseurs de zéro.*

Preuve :

Supposons $A\backslash P$ ne contient pas des diviseurs de zéro donc si $\frac{x}{s} \in A_P$ et $\frac{x}{s} \notin P_P$, $\frac{x}{s}$ est inversible donc $\frac{x}{s} \notin I$ pour tout idéal I de A_P c'est si I est un idéal de A_P et $I \neq 0$ donc les éléments de I sont tous de la forme $\frac{a}{s}$ avec $a \in P$ ainsi $I \subset P_P$. D'où P_P est l'unique idéal maximal de A_P. Ainsi A_P est local.

Supposons que A_P est local donc l'unique idéal maximal de A_P est P_P. Supposons que $A\backslash P$ contient des diviseurs de zéro et soit $x \in A\backslash P$ un diviseur de zéro donc l'idéal $\left(\frac{x}{1}\right)$ est contenu dans un idéal maximal $J \neq P_P$ (théorème de Krull) ce qui est absurde.

Corollaire 2.2.20. *Soit A un duo - anneau intègre. Alors pour tout idéal premier P le localisé A_P est local.*

Remarque 2.2.21. *1) Si A est un duo - anneau et P un idéal premier et si $S = A\backslash P$ vérifie les conditions de Ore. Alors le localisé A_P est* *un anneau local même si $S = A\backslash P$ contient des diviseurs de zéro. Car la localisation se fait sur $A\backslash P$ et non sur les éléments réguliers de $A\backslash P$.*

2) On peut poser la question suivante si A est un duo - anneau réduit (ne contient pas d'éléments nilpotents non nul) est - il de même pour $S^{-1}(A)$ et en particulier si A est un duo - anneau semi - premier c'est à dire que si $nil(A)$ est premier est - il de même pour $S^{-1}(A/nil(A))$ où S est une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore.

2.3 Anneau de valuation non commutatif

Le but de cette section est de donner une méthode de construction de duo-anneau non commutatif et un exemple de localisation dans un duo-anneau non commutatif.

Définition 2.3.1. *Soit $(G, \leq)$ un groupe ordonné. Alors $(G, \leq)$ est dit direct si pour tout $a, b \in G$ on a $Max\{a, b\}$ et $min\{a, b\}$ existent.*

Remarque 2.3.2. *Dans la suite de cette section e désigne l'élément neutre de G.*

Définition 2.3.3. *Soient K un anneau de division (corps non commutatif) et $(G, \leq)$ un groupe ordonné direct.*

On pose $\bar{G} = G \cup \{\infty\}$ où $\infty \notin G$ vérifiant $g \,.\, \infty = \infty \,.\, g = \infty$, pour tout $g \in G$. On appelle valuation sur K une application $v : K \longrightarrow \bar{G}$ vérifiant :

i) $v(0) = +\infty$

ii) $v(xy) = v(x)\ v(y),\ \forall x, y \in K^*$

iii) $v(x + y) \geq min(v(x),\ v(y),\ si\ x, y \in K^*$ et $y \neq -x$.

Remarque 2.3.4. *Si $v : K \longrightarrow \overline{G}$ est une valution sur K, alors G est dit groupe de valuation v.*

Définition 2.3.5. *Une valuation $v : K \longrightarrow \overline{G}$ est dite discrète si $G = \mathbb{Z}$.*

Théorème 2.3.6. ***et Définition*** *Soit $v : K \longrightarrow \bar{G}$ une valuation d'un anneau de division K. Alors l'ensemble $A_v = \{x \in K^* \ /\ v(x) \geq e\ ou\ x = 0\}$ est un anneau, dit anneau de valuation associé à v.*

Notation :

Dans la suite tout anneau de valuation est noté par A_v.

Proposition 2.3.7. *Tout anneau de valuation est un duo-anneau.*

<u>Preuve</u> :

Soit $v : K \longrightarrow \bar{G}$ une valuation et $A_v = \{x \in K^* \ / \ v(x) \geq e \ ou \ x = 0\}$ l'anneau de valuation associé à v. On peut supposer que $a \neq 0$.

Montrons que A_v est un duo-anneau. Posons $A = \{x \in K \ / \ v(x) \geq v(a)\}$, pour tout $a \in A_v$. Montrons que $aA_v = A = A_v a$.
Soit $x \in A \Longrightarrow v(x) \geq v(a) \Longrightarrow v(xa^{-1}) \geq v(1) = e$ donc $xa^{-1} \in A_v$ supposons que $xa^{-1} = y$ alors $x = ya \in A_v a$ ce qui implique que $A \subset A_v a$. Soit maintenant $xa \in A_v a$ donc $v(xa) = v(x)\ v(a) \geq v(a)$ (car $x \in A_v$) donc $xa \in A$ ce qui implique $A_v a \subset A$. Ainsi $A = A_v a$. De même on montre que $A = aA_v$. Soit $x \in A$ donc $v(x) \geq v(a) \Longrightarrow v(a^{-1}x) \geq e \Longrightarrow a^{-1}x \in A_v$ supposons que $a^{-1}x = y \in A_v$ alors $x = ay \in aA_v$ ce qui implique que $A \subset aA_v$. Soit maintenant $ax \in aA_v$ donc $v(ax) = v(a)\ v(x) \geq v(a)$ (car $x \in A_v$) d'où $ax \in A$, ainsi $A_v \subset A$.
Conclusion : Pour tout $a \in A_v$ on a $aA_v = A = A_v a$ d'où le résultat.

Proposition 2.3.8. *Soient* $v : K \longrightarrow \overline{G}$ *une valuation et* A_v *l'anneau de valuation associé à* v*. Soit* I *un idéal principal de* A_v *alors il existe* $a \in A_v$ *tel que*

$$I = \{x \in K^*/v(x) \geq v(a) \quad ou \quad x = 0\}.$$

<u>Preuve</u> :

D'après la preuve de la proposition précédente I est principal donc il existe $a \in A_v$ tel que

$$I = aA_v = \{x \in K \ /v(x) \geq v(a)\} = \{x \in K^*/v(x) \geq v(a) \ \text{ où } \ x = 0\}$$

Proposition 2.3.9. *Soit* A_v *l'anneau de valuation associé à une valuation* v*. Alors* A_v *est local d'idéal maximal* $P = \{x \in A_v \ , \ v(x) > e \ \ ou \ \ x = 0\}$.

<u>Preuve</u> : Il suffit de montrer que P est un idéal et que si I est un idéal propre de A_v alors $I \subset P$. Soient $x, y \in P$ alors $v(x) > e$ et $v(y) > e$ donc $v(x)\ v(y) > e \Longrightarrow v(xy) > e \Longrightarrow xy \in P$. Maintenant si $a \in A_v$ et $x \in P$ on a $v(a) \geq e$ et $v(x) > e \Longrightarrow v(ax) > e$ ce qui implique $ax \in P$. Ainsi P est un idéal de A. Reste à montrer que si I est un idéal propre de A_v alors $I \subset P$ soit $x \in I$ montrons que $v(x) \neq e$. Supposons que $v(x) = e$ donc $v(xx^{-1}) = v(x)\ v(x^{-1}) = e$ ce qui implique $v(x^{-1}) = e \Longrightarrow x^{-1} \in A_v$ donc x est inversible dans A_v ce qui est absurde car I est un idéal propre de A_v.
Conclusion : P est l'unique idéal maximal de A_v donc A_v est local.

Proposition 2.3.10. *Soit* $v : K \longrightarrow \overline{G}$ *une valuation (non nécessairement commutative) avec* G *totalement ordonné. Alors tout idéal de type fini est principal.*

Preuve :

Soit I un idéal de type fini engendré par le système $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. G est totalement ordonné ; supposons que $v(a_1) \leq v(a_n)$ et montrons alors que $I = a_1\ A_v$ on a pour tout $2 \leq i \leq n\ : v(a_i) \geq v(a_2)$ donc pour tout $2 \leq i \leq n$ on a $a_i \in a_1 A_v$. d'où $I \subset a_1 A_v$ ainsi $I = a_1 A_v$.

Théorème 2.3.11. *Tout anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif est principal.*

Preuve :

Soit I un idéal propre de A_v.
Soit $x \in I$, alors $v(x) > 0$ car A_v est local donc $I \subset P$ où P est l'idéal maximal de A_v. Soit $a \in I$ donc pour tout $x \in I$; $v(x) \geq v(a)$ car $v(I)$ est une partie de $\mathbb{N}^*$. Montrons alors que I est engendré par a.
Soit $x \in I$ alors $v(x) \geq v(a)$ donc d'après ce qui précède $x \in A_v a$ (preuve de la proposition 2.3.7) donc $I = A_v a$ d'où I est principal. Ainsi A_v est principal.

Théorème 2.3.12. *Soit* A_v *un anneau de valuation associé à une valuation discrète non nécesssairement commutative* v*. alors tout idéal de* A_v *est une puissance de* P *où* P *est l'unique idéal maximal de* A_v*.*

Preuve :

A_v est un anneau de valution associé à une valuation discrète (non nécessairement commutative).
Soit K un anneau de division tel que $v : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ donc

$$\begin{array}{ll} \bar{v} : K^* & \longrightarrow \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto v(x) \end{array}$$

est un homomorphisme de groupes $(K^* = K \backslash \{0\})$. $v(xy) = v(x) + v(y)$. Ainsi $Im\ \bar{v}$ est un sous - groupe de $\mathbb{Z}$. Supposons que $Im\ \bar{v} \neq \{0\}$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $Im\ \bar{v} = k\mathbb{Z}$. Montrons que l'idéal maximal P de A_v est engendré par $a \in A_v$ vérifiant $v(a) = k$. On a

$$P = \{x \in A_v / v(x) > 0\} \cup \{0\},$$

et k est le plus petit entier strictement positif de Imv donc

$$P = \{x \in A_v / v(x) \geq k\} \cup \{0\}$$

D'où $P = \{x \in A_v / v(x) \geq v(a)\}$. Donc d'après ce qui précède P est engendré par a.
Soit I un idéal propre de A_v alors I est principal.
Supposons que I est engendré par b. Comme $I \subset P$ alors $v(b) \geq v(a)$ et $v(b) \in Im\,\bar{v}$ donc $v(b) \in k\mathbb{Z}$.
Supposons que $v(b) = k_o$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k_o = kn$ ce qui implique que $v(b) = nv(a)$ implique que $v(b) = v(a^n) = k_o$ donc I est engendré par a^n. Ainsi $I = P^n$ d'où le résultat.

Remarque 2.3.13. *Le résultat des deux théorèmes se généralise pour les anneaux de valuations si le groupe de valuation est totalement ordonné et isomorphe à* $\mathbb{Z}$.

Remarque 2.3.14. *Un sous-anneau local d'un anneau de division n'est pas en général un anneau de valuation. Il suffit de prendre l'exemple donné dans [7, Remarque 2.8]. Le localisé dans l'exemple cité est un anneau local mais n'est pas un duo-anneau donc il n'est pas de valuation et il est un sous anneau local d'un anneau de division.*

Chercher les conditions pour qu'un sous-anneau local d'un anneau de division soit un anneau de valuation. Et en particulier si A est un duo-anneau intègre et P un idéal premier de A à quelles conditions A_p qui est local est un anneau de valuation.

Théorème 2.3.15. *Soient A un duo-anneau intègre, S une partie multiplicative saturée de A et D l'anneau de division de A. Alors $S^{-1}(A)$ est un duo-anneau si et seulement si S est invariant c'est-à-dire $\forall x \in D,\ x^{-1}Sx = S$)*

Preuve :

D'après non commutative valuation rings [27].

Corollaire 2.3.16. *Soient A un duo-anneau intègre et P un idéal premier de A. Alors A_p est un duo-anneau si et seulement si $S = A \backslash P$ est invariant.*

Remarque 2.3.17. *On peut poser la question suivante si A est un duo-anneau non nécessairement intègre à quelles conditions A_P est un duo-anneau et plus généralement $S^{-1}(A)$ est un duo-anneau où S une partie multiplicative saturée quelconque de A vérifiant les conditions de Ore.*

2.4 Duo - anneau de Dedekind

Dans toute cette section S désigne l'ensemble des éléments réguliers de l'anneau A.

Définition 2.4.1. *Soient A un duo - anneau intègre et $S^{-1}(A)$ son anneau total de fractions. Et soit I un sous - A-module à droite de $S^{-1}(A)$. Alors I est dit fractionnaire à droite s'il existe $d \in S^{-1}(A)$ et $d \neq 0$ tel que $Id \subset A$.*

Définition 2.4.2. *Soit I une partie non vide de $S^{-1}(A)$. Alors I est dite un idéal fractionnaire à gauche de A si I est un A sous - module à gauche de $S^{-1}(A)$ et il existe $d \in S^{-1}(A)$ avec $d \neq 0$ tels $dI \subset A$.*

Définition 2.4.3. *Soit I une partie non vide de $S^{-1}(A)$. Alors I est dite idéal fractionnaire de A si I est un idéal fractionnaire à gauche et à droite.*

Exemple :

- Soit I un idéal de A (A est un duo - anneau intègre) non réduit à $\{0\}$. Alors I est fractionnaire.

- Si A est un duo - anneau intègre, alors tout sous - module à gauche (respectivement à droite) engendré par un seul élément non nul est fractionnaire à gauche (respectivement à droite). C'est-à-dire que si $x \in S^{-1}(A)$ avec $x \neq 0$, alors Ax est fractionnaire à droite et xA est fractionnaire à gauche.

Proposition 2.4.4. ***et définition***

Soient I et J deux idéaux d'un duo - anneau intègre. Alors l'ensemble noté par

$$(I : J) = \{x \in S^{-1}(A) \ : \ Jx \subset I\}$$

est un sous - module à droite de $S^{-1}(A)$
($S^{-1}(A)$ est un $A - A$ - bimodule).
$(I : J)$ est appelé transporteur à droite de J par I.

Preuve

$(I : J) \neq \phi$ car $0 \in (I : J)$
$x, y \in (I : J)$
donc $Jx \subset I$ et $Jy \subset I$
d'où $Jx + Jy \subset I \Longrightarrow J(x + y) \subset I.$
$\Longrightarrow x + y \in (I : J)$

$$\begin{aligned} \text{si } x \in (I:J) &\Longrightarrow Jx \subset I \\ &\Longrightarrow (Jx)a \subset Ia \subset I \\ &\Longrightarrow J(xa) \subset I \\ &\Longrightarrow xa \in (I:J) \end{aligned}$$

Donc $(I:J)$ est un sous - module à droite de $S^{-1}(A)$.

Remarque 2.4.5. *De la même manière on définit le transporteur à gauche de J par I.*

Corollaire 2.4.6. *Soient I un idéal fractionnaire à gauche et J un idéal fractionnaire à droite. Alors $(A:I)$ est un sous - module à gauche non nul et $(A:J)$ est un sous - module à droite non nul.*

Remarque 2.4.7. *On note par :*

$$(A:I)_d = \{x \in S^{-1}(A) \; / Ix \subset A\}$$

c'est le transporteur à droite de I par A

$$(A:I)_g = \{x \in S^{-1}(A) / \; xI \subset A\}$$

c'est le transporteur à gauche de I par A.

Définition 2.4.8. *Soit I un idéal fractionnaire de A. Alors I est dit inversible à droite s'ils existent $x_k \in I$ et $y_k \in (A:I)_d$ en nombre fini tels que $1 = \sum x_k y_k$.*

Définition 2.4.9. *Soit I un idéal fractionnaire à gauche de A. Alors I est dit inversible à gauche s'ils existent $x_k \in I$ et $y_k \in (A:I)_g$ en nombre fini tels que $1 = \sum y_k x_k$.*

Définition 2.4.10. *Un idéal fractionnaire est dit inversible s'il est inversible à gauche et à droite.*

Proposition 2.4.11. *Soient A un duo - anneau intègre et I un idéal fractionnaire inversible à droite (resp. à gauche). Alors*
$I \times (A:I)_d = A$ (resp.$(A:I)_g \times I = A$).

<u>Preuve</u> :

Supposons que I est inversible à droite alors ils existent $x_k \in I$ et $y_k \in (A:I)_d$ en nombre fini tels que $1 = \sum x_k y_k$ donc pour tout $a \in A$ on a

$$a = \sum a(x_k y_k) = \sum (a x_k) y_k \in I \times (A:I)_d$$

donc $A \subset I \times (A : I)_d$ et c'est clair d'après la définition de $(A : I)_d$ que $I \times (A : I) \subset A$, en effet soit $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ un élément de $I \times (A : I)_d$, alors pour tout $1 \leq i \leq n$ $x_i y_i \in A$ donc $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in A$.
Ainsi $I \times (A : I)_d = A$. Et de la même manière on montre que
$(A : I)_g \times I = A$.

Définition 2.4.12. *Si I est un idéal fractionnaire inversible à droite (resp. à gauche), alors $(A : I)_d$ est dit inverse à droite de I (resp. $(A : I)_g$ est dit inverse à gauche de I).*

Proposition 2.4.13. *et Définition*
Soit A un duo - anneau intègre et I un idéal inversible. Alors l'inverse à gauche de I coïncide avec son inverse à droite et il est dit l'inverse de I et est noté par $(A : I) = I^{-1}$.

Preuve :

On a $I \times (A:I)_d = A$ et $(A:I)_g \times I = A$ donc
$I \times (A:I)_d = (A:I)_g \times I$
$\Longrightarrow$ $(A:I)_g \times (A:I)_d = (A:I)_g \times A$
$\Longrightarrow$ $A(A:I)_d = (A:I)_g \times A$
$\Longrightarrow$ $(A:I)_d = (A:I)_g$.

Notation

- Si I est un idéal inversible à droite alors son inverse à droite $(A:I)_d$ est noté par I_d^{-1}
- Si I est un idéal inversible à gauche alors son inverse à gauche $(A:I)_g$ est noté par I_g^{-1}.
- Si I est un idéal fractionnaire inversible alors son inverse $(A:I)$ est noté par I^{-1}.

Proposition 2.4.14. *Soient A un duo - anneau intègre et $S^{-1}(A)$ son anneau de division. Alors l'ensemble des idéaux fractionnaires de A inversibles muni de la multiplication des idéaux est un groupe commutatif d'élément neutre A.*

Preuve :

Soient I et J deux idéaux fractionnaires inversibles alors $(IJ) \times (J^1 \times I^{-1}) = A$ donc IJ est inversible et son inverse est $J^{-1}I^{-1}$. D'où le résultat.

Proposition 2.4.15. *Soient A un duo - anneau intègre et I un idéal inversible à droite (resp. à gauche). Alors I est de type fini.*

Preuve

Supposons que I est inversible à droite alors il existe $x_k \in I$ et $y_k \in S^{-1}(A)$ en nombre fini tels que $1 = \sum x_k\ y_k$. Soit $a \in I$ alors $a = \sum (ax_k)\ y_k$ et comme A est un duo - anneau $\exists x'_k \in A$ tels que $ax_k = x'_k a$ donc $a = \sum (x'_k a) y_k = \sum x'_k (a y_k)$ or $a y_k \in A$ donc $a \in \sum x'_k A$ ce qui prouve que I est de type fini.
De même si I est inversible à gauche alors $1 = \sum y_k\ x_k$ donc pour tout $a \in A$

$$a = \sum (y_k x_k) a = \sum y_k (x_k a)$$

alors ils existent $x''_k \in$ tels que $x_k a = a x''_k$ d'où

$$a = \sum (y_k a) x''_k \ \text{ or } \ y_k\ a \in A$$

donc

$$I = \sum Ax''_k = \sum x''_k A$$

donc I est de type fini.

Définition 2.4.16. *(avant la proposition précédente)*

Soit I un idéal d'un duo - anneau intègre. Alors I est dit inversible s'il est inversible à gauche et à droite.

Lemme 2.4.17. *Soit M un A-module à gauche. Alors M est projectif si et seulement si il existe une famille $\{m_k,\ k \in K\}$ d'éléments de M et une famille $\{\phi_k : M \longrightarrow A\}$ de morphismes de A-modules à gauche telles que :*

i) Si $m \in M$, $\phi_k(m) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indice k

ii) Si $m \in M$, $m = \sum_{k \in K} \phi_k(m)\ m_k$.

Définition 2.4.18. *Soient A un anneau, M un A-module à gauche et $(a, m) \in A \times M$. Alors m est dit divisible par a s'il existe $m' \in M$ tel que $m = am'$.*

Définition 2.4.19. *Soit M un A-module à gauche. Alors M est dit divisible si tout élément de M est divisible par les non diviseurs de zéro de A.*

Lemme 2.4.20. *Tout module injectif est divisible.*

Lemme 2.4.21. *Le quotient d'un module divisible est divisible.*

Définition 2.4.22. *Soit A un anneau.*
Alors :

1) A est dit héréditaire à gauche si tout idéal à gauche est projectif.

2) A est dit héréditaire à droite si tout idéal à droite est projectif.

3) A est dit héréditaire s'il est héréditaire à gauche et à droite.

4) A est dit semi-héréditaire à gauche (resp. à droite) si tout idéal à gauche (resp. à droite) de type fini est projectif.

5) A est dit semi-héréditaire s'il est semi-héréditaire à gauche et à droite.

Lemme 2.4.23. *Soit A un anneau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) A est héréditaire.

2) Tout sous-module d'un A-module projectif est projectif.

3) Tout quotient d'un A-module injectif est injectif.

Théorème 2.4.24. *Soient A un duo-anneau intègre et I un idéal de A. Alors I est projectif si et seulement si I est inversible.*

Preuve

Supposons que I est projectif alors il existe une famille $\{a_k,\ k \in K\}$ d'éléments de I est une famille de morphismes $\{\phi_k : I \longrightarrow A\}$ vérifiant les deux conditions du lemme précédent soit $b \in I$, avec $b \neq 0$, posons $y_k = \phi_k(b)\ b^{-1}$. Montrons que y_k ne dépend pas du choix de b.

Soit $b' \neq 0$ et $b' \in I$, alors $b'\ \phi_k(b) = \phi_k(b'b)$. Soit $x \in A$ tel que $b'b = xb'$ alors $b'\phi_k(b) = x\ \phi_k(b')$

donc on a : $\begin{cases} b'\ \phi_k(b) & = x\ \phi_k(b') \\ b'b & = x\ b' \end{cases}$

d'où $\phi_k(b)\ b^{-1} = \phi_k(b')\ b'^{-1}$. Ainsi y_k ne dépend pas du choix de b.
Montrons que $y_k\ I \subset A$ soit $b \in I$ alors $y_k = \phi_k(b)/b = 0\ \ y_k\ \ b = \phi_k(b) \in A$.
Et d'autre part $b\ y_k = y_k\ b = 0$ sauf pour un nombre fini d'indice k.

$$\begin{aligned} \text{Soit } b \in I, \text{ alors} \quad b &= \sum(\phi_k(b))\ a_k = \sum\ (q_k(b)\ a_k \\ &= \sum(b\ q_k)\ a_k \\ b &= b(\sum(\phi_k(a_k) \end{aligned}$$

d'où il existe un nombre fini d'indice k tel que $\sum\ a_k\ q_k = 1$. Donc I est inversible.

Supposons que I est inversible à gauche, alors il existe $a_1, ..., a_n \in I$ et $q_1, ..., q_n \in S^{-1}(A)$ tels que $q_k\ I \subset A$ et $\sum_{k=1}^{n}\ a_k\ q_k = 1$.

$$\text{Soit } \phi_k : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & \phi_k(a) = q_k\ a \end{array}$$

alors $Im\ \phi_k \subset A$, soit $a \in I$, alors
$a = \sum\ a_k\ \phi_k(a) = \sum\ a_k(q_k\ a) = \sum\ (a_k\ q_k)\ a$ d'où I est A-module projectif à gauche.

De même si I est inversible à droite, alors ils existent $a_1, ..., a_n \in I$ et $q_1, ..., q_n \in S^{-1}(A)$ tels que $i\ q_k \subset A$ et $\sum\ q_k\ a_k = 1$. Soit :

$$\phi_k : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & \phi_k(a) = a\ q_k \end{array}$$

alors $Im\ \phi_k \subset A$ et $Im\ \phi_k = I\ q_k$. Soit $a \in I$
alors $a = \sum \phi_k(a)a_k = \sum(a\ q_k)\ a_k = a\ \sum q_k\ a_k$ d'où I est idéal projec-

tif à droite. Ainsi le résultat I est projectif si et seulement si I est inversible.

Corollaire 2.4.25. *Soit A un duo-anneau intègre. Alors A est héréditaire si et seulement si tout idéal non nul de A est inversible.*

Définition 2.4.26. *On appelle anneau de Dedekind un duo-anneau intègre héréditaire.*

Exemples

1°) $\mathbb{Z}$ est un anneau de Dedekind (c'est l'exemple trivial).

2°) Tout anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif est un anneau de Dedekind non nécessairement commutatif car tout anneau intègre principal est de Dedekind.

Remarque 2.4.27. *:*

1) On peut donner comme définition d'un anneau de Dedekind un duo-anneau intègre dont tout ses idéaux non nuls sont inversibles.

2) Cette définition des anneaux de Dedekind est une généralisation de la définition connue avant qui est "un anneau de Dedekind est un anneau commutatif intègre dont tout ses idéaux non nuls sont inversibles".

3) Tout anneau de Dedekind est noethérien.

Théorème 2.4.28. *Soit A un duo-anneau. Alors A est de Dedekind si et seulement si tout module divisible est injectif.*

Preuve

Supposons que A est de Dedekind. Soient D un A-module à gauche divisible, I un idéal de A et $f : I \longrightarrow D$ I un morphisme de A-module à droite. Montrons que f est prolongeable sur A. Comme A est de Dedekind alors I est inversible alors ils existent $a_1, ..., a_n \in I$ et $q_1, ..., q_n \in S^{-1}(A)$ tels que que $I\ q_k \subset A$ et $\sum\ a_k\ q_k = 1$. Comme D est divisible alors pour tout $1 \leq k \leq n$ il existe $d_k \in D$ tel que $d_k\ a_k = f(a_k)$.
Soit $a \in I$ on a $f(a) = f\big(\sum(a_k\ q_k)a\big)$

$$= f\big(\sum\ a_k(q_k\ )a\big)\ = \sum\ f(a_k)(q_k)a$$
$$= \big(\sum\ d_k\ a_k\ q_k\big)a$$

Posons $d = \sum_{k=1}^{n}\ d_k(a_k\ q_k)$ donc on $f(a) = d\ a$.

On définit alors $g: \begin{array}{l} A \longrightarrow D \\ a \longmapsto g(a) = da \end{array}$

Ainsi D est injectif.

Pour la réciproque supposons que tout A-module à droite divisible est injectif. Montrons que A est de Dedekind.
Soit D un A-module divisible à droite alors le quotient de D est divisible (voir les lemmes précédents) donc le quotient de D est injectif.
Ce qui prouve que D est héréditaire d'où D est de Dedekind. (voir les lemmes précédents.)

Corollaire 2.4.29. *Soient A un duo-anneau intègre principal et M un A-module à gauche. Alors M est injectif si et seulement si M est divisible.*

Preuve

Il suffit de montrer (remarquer) que tout idéal d'un duo-anneau intègre principal est inversible (c'est-à-dire qu'un duo-anneau intègre principal et de Dedekind) d'où un A-module est injectif si et seulement si il est divisible.

Lemme 2.4.30. *Soit A un duo - anneau de Dedekind. Alors tout idéal I de A s'écrit de façon unique comme produit de puissances positives d'idéaux maximaux.*

Preuve

Comme I est un idéal de A qui est de Dedekind alors I est inversible.
Soit P_1 un idéal maximal tel que

$$I \subset P_1 \text{ , si } IP_1^{-1} = A \text{ alors } I = P,$$

sinon $IP_1^{-1} \subset A$ donc soit P_2 un idéal maximal contenant IP_1^{-1} alors si $IP_1^{-1} \times P_2^{-1} = A$ alors $I = P_1P_2$ sinon on construit P_3 l'idéal maximal de A contenant $IP_1^{-1}\,P_2^{-1}$ on construit ainsi une suite croissante d'idéaux $I \times P_1^{-1} \times P_2^{-1} \times ... \times P^{-1}$ qui doit stationner (car A est noethérien).
Il existe donc $k_o > 0$ tel que

$$I \times P_1^{-1} \times P_2^{-1} \times ... \times P_{k_o}^{-1} = A \text{ d'où } I = P_1 \times P_2 \times ...P_{k_o}.$$

L'unicité de cette décomposition résulte du fait que les P_i sont des idéaux maximaux de A, pour tout $1 \leq i \leq k_o$.

Corollaire 2.4.31. *Soit A un duo - anneau de Dedekind. Alors tout idéal premier est maximal.*

Preuve

Soit P un idéal premier de A, alors d'après le lemme précédent P se décompose comme produit d'idéaux maximaux. Ainsi P contient au moins un idéal maximal m d'où le résultat $P = m$ ainsi P est maximal.

Théorème 2.4.32. *Soit A un duo - anneau de Dedekind. Alors tout idéal fractionnaire à gauche (resp. à droite) s'écrit de façon unique (à l'ordre près des facteurs) comme produit de puissances (positives ou négatives) d'idéaux premiers.*

Preuve

Soit I un idéal fractionnaire à gauche de A, alors il existe $d \in S^{-1}(A)$ avec $d \neq 0$ tel que l'ensemble $J = dI$ soit un idéal de A, supposons que $d = \dfrac{x}{y}$ $(x \in A$ et $0 \neq g \in A)$ donc l'ensemble $I' = \dfrac{1}{y}\ I$ est fractionnaire à gauche on a alors $J = xI'$ qui est un idéal de A, ainsi $J = (Ax)I'$ donc $I' = (Ax)^{-1}\ J$ ce qui implique que $I = y(Ax)^{-1}J = (Ay)(Ax)^{-1}J$, d'où I s'écrit comme produit d'idéaux de A.
Donc d'après ce qui précède (lemme précédent) I s'écrit comme produit de puissances d'idéaux premiers

$$I = P_1^{n_1} \times P_2^{n_1} \times ... \times P_k^{n_k} \text{ où } n_i \in \mathbb{Z},\ \forall 1 \leq i \leq k.$$

La décomposition de I est unique à l'ordre près des facteurs vient du fait que pour tout $1 \leq i \leq k$.
P_i est un idéal maximal.

Théorème 2.4.33. *Soient A un duo - anneau de Dedekind. Alors pour tout idéal premier p on peut construire une valution discrète notée v_p de la mnaière suivante :*

1) $\forall x \in S^{-1}(A)$ non nul, on pose $v_p(x)$ est l'exposant de p (qui peut être nul) dans la décomposition de l'idéal fractionnaire Ax de A en produit de facteurs premiers.

2) $v_p(0) = +\infty$.

Preuve

Soit p un idéal premier de A.
Montrons que $v_p : S^{-1}(A) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ définie ci - dessus est une valuation discrète c'est clair que v_p est une application. Soient $x, y \in S^{-1}(A)$ non nuls $v_p(xy) =$ l'exposant de p dans la décomposition de l'idéal fractionnaire

$A(xy)$, donc il suffit de remarquer que
$A(xy) = (Ax)(Ay)$ donc l'exposant $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$. Et on vérifie comme le cas commutatif que $v_p(x + y) \geq min(v_p(x), v_p(y))$. D'où v_p est une valuation discrète non nécessairement commutative.

Théorème 2.4.34. *Soient A un duo - anneau de Dedekind. On peut construire une valution discrète non nécessairement commutative. De la manière suivante.*
Soit p un idéal premier de A on pose : si $x \in A$ et $x \neq 0$, $v_p(x) =$ l'exposant de p dans la décomposition de l'idéal fractionnaire Ax de A en produit de facteurs premiers, si $x \notin A$ alors $v_p(x) = v_p(a) - v_p(b)$ où $\frac{a}{b} = x$ et $v_p(0) = +\infty$.

Preuve : La même que dans le cas commutatif.

Théorème 2.4.35. *Soit A un duo - anneau intègre. Alors A est un anneau de valution discrète (non nécessairement commutatif) si et seulement si A est un duo - anneau de Dedekind local.*

Preuve

Si A est un anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif alors d'après ce qui précède c'est un duo - anneau de Dedekind local.
Supposons que A est un duo - anneau de Dedekind local. Alors il contient un seul idéal premier P qui est maximal. Considérons la valuation v_p construite dans le théorème 2.4.33 et montrons que $A = A_{v_p}$?

$$A_{v_p} = \left\{ x \in S^{-1}(A)/v_p(x) \geq 0 \right\}$$

on a $\forall x \in A$, $v_p(x) \geq 0$ donc $A \subset A_{v_p}$. Et si $x \in P$, $v_p(x) > 0$. Donc l'idéal maximal P de A est égal à l'idéal maximal de A_{v_p}. Ainsi $A = A_{v_p}$. d'où A est un anneau valution discrète (non nécessairement commutatif).

Corollaire 2.4.36. *Soit A un duo-anneau de Dedekind local d'idéal maximal P. Alors A est principal et tout idéal de A est une puissance positive de P.*

Preuve : Découle de ce qui précède.

Théorème 2.4.37. *Soient A un duo-anneau de Dedekind et P un idéal premier. Alors A_p est un anneau de valuation discrete (non nécessairement commutatif).*

Preuve :

Posons $D =$ l'anneau total de fractions de A et $S = A \backslash P$. Donc on a A_P est local d'idéal maximal $P_P = PA_P$, alors si I est un idéal de A_P donc $(i_A^S)^{-1}(I)$ est un idéal de A contenu dans P. Ainsi on peut construire une valuation discrète

$$v : D \longrightarrow Z \cup \{+\infty\}$$

de la manière suivante :

i) Si $\frac{a}{s} \in A_P$ et $\frac{a}{s} \neq 0$, $v\big(\frac{a}{s}\big) = n$, où n est l'exposant de l'idéal P dans la décomposition de l'idéal $(i_A^S)^{-1}\big(\frac{a}{s}A_P\big)$ comme produit de puissance d'idéaux premiers.

ii) si $\frac{a}{s} \notin A_p$ $v(\frac{a}{s}) = v(a) - v(s)$

iii) $v(0) = +\infty$.

Monttrons que v est bien définie.

Soient $\frac{a}{s}$, $\frac{b}{t} \notin A_p$

si $\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Longrightarrow \exists x, y \in A$ non nuls tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} xa = yb \\ xs = yt \end{array} \right.$$

donc on a :

$v(xa) = v(x) + v(a)$, $v(xs) = v(x) + v(s)$

$v(yb) = v(y) + v(b)$ *et* $v(yt) = v(y) + v(t)$

$$or \left\{ \begin{array}{l} v(xa) = v(yb) \\ v(xs) = v(yt) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v(x) + v(a) = v(y) + v(b) \\ v(x) + v(s) = v(y) + v(t) \end{array} \right.$$

$\Longrightarrow v(a) - v(s) = v(b) - v(t)$ donc v est bien définie et comme dans le cas commutatif, v est une valuation discrète et son anneau de valuation est égal à A_p d'où le résultat.

Corollaire 2.4.38. *Soient A un duo-anneau de Dedekind et P un idéal premier. Alors A_p est un duo-anneau.*

Preuve : Découle du théorème précédent car si A est un duo-anneau de Dedekind, alors A_p est un anneau de valuation discrète donc A_p est un duo - anneau.

Chapitre 3

ENVELOPPE PLATE SUR UN DUO-ANNEAU

Introduction

Dans ce travail on suppose que A est un duo-annneau et nous utiliserons la notion de localisé A_P de A en P où $A_P = S^{-1}(A)$. S étant l'ensemble des éléments réguliers de $A \backslash P$. Nous étudions les enveloppes plates dans les A_P-modules à gauche, et nous montrons que si la dimension faible de A_P est finie ($WD(A_P) < +\infty$) pour tout idéal premier, alors tout A-module à gauche admet une enveloppe plate si et seulement si , A est cohérent et la dimension faible de A ($W(A) \leq 2$).

Nous étudions les enveloppes plates dans les IF-duo-anneaux et nous montrons que si A est un IF-duo-anneau et M un A-module de présentation finie, alors M admet une enveloppe plate si et seulement si M est un sous-module essentiel d'un module projectif de type fini. Nous introduisons la notion d'une partie T-nilpotente d'un anneau et nous montrons que dans un IF-duo-anneau A les parties $J(A_m)$ et $J(A)$ sont T-nilpotentes ou m est un idéal maximal de A.

Nous étudions les enveloppes plates dans les duo-anneaux qui sont quasi-frobéniusien (QF-duo-anneau) et nous montrons que si A est un anneau cohérent tel que pour tout idéal maximal m A_m est un QF-anneau alors tout A-module de présentation finie admet une enveloppe plate monomorphique.

Soient M un A - module à gauche, F un A - module plat. On appelle pré-enveloppe plate de M tout morphisme $f : M \longrightarrow F$ tel que pour tout morphisme $g : M \longrightarrow E$ où E est un A - module plat à gauche, il existe un morphisme $h : F \longrightarrow E$ vérifiant $h \circ f = g$.

Si en particulier dans le cas où $g = f$ tout endomorphisme $h : F \longrightarrow F$ vérifiant $h \circ f = f$ est un automorphisme, alors f est dite enveloppe plate.

Si M admet une enveloppe plate elle est unique à un isomorphisme près.

En général l'enveloppe plate d'un A-module à gauche n'existe pas toujours. Voir [2] , [3] , [4].

Dans ce travail on suppose que A est un duo - anneau et on montre les résultats suivants :

Théorème 3.0.39. *Si la dimension faible de* A $WD(A_p) < +\infty$ *pour tout idéal premier* p, *alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) A *est cohérent et* $WD(A) \leq 2$.

ii) tout A *- module à gauche admet une enveloppe plate.*

Théorème 3.0.40. *Soit* A *un duo - anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) A *est cohérent et self - injectif*

ii) Tout A *- module de présentation finie admet une enveloppe plate qui coïncide avec son enveloppe injective.*

Théorème 3.0.41. *Soit* A *un duo - anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) Tout A *- module admet une enveloppe plate monomorphique.*

ii) Pour tout idéal maximal m *de* A, *le localisé* m *de* A *est un corps où* A_m *est un anneau quasi - frobeniusien* (QF) *qui*

est un A *- module projectif.*

3.1 Définitions et Résultats préliminaires

Définition 3.1.1. *Soient* M *un* A *- module,* F *un* A *- module plat et* $f : M \longrightarrow F$ *un morphisme de* A *- modules* f *est dite pré - enveloppe plate si pour tout* A *- module plat* F' *et tout morphisme* $g : M \longrightarrow F'$ *il existe un morphisme* $h : F \longrightarrow F'$ *tel que* $h \circ f = g$. *Si de plus tout* $h : F \longrightarrow F$ *qui vérifie :* $h \circ f = f$ *est un automorphisme, alors* f *est dite enveloppe plate.*

Définition 3.1.2. *Soit* M *un* A *- module à gauche.* M *est dit de présentation finie s'il existe une suite exacte courte* $0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$

telle que F est un A - module à gauche libre de type fini et N un A - module à gauche de type fini.

Définition 3.1.3. *Un A - module est dit cohérent si tout sous - module de M de type fini est de présentation finie.*

Définition 3.1.4. *Un anneau A est dit cohérent à gauche (respectivement à droite) si le A - module à gauche ${}_AA$ est cohérent (resp. le A - module à droite ${}_AA$ est cohérent).*

Définition 3.1.5. *Soit M un A - module. On appelle couverture projective de M un épimorphisme $f : P \longrightarrow M$ où P est un A - module projectif et $Ker\ f$ est un sous - module superflu de P.*

Définition 3.1.6. *Soit M un A - module à gauche et soit N un sous - module de M. Alors*

1) N est dit sous - module essentiel de M noté $N \trianglelefteq M$ si pour tout sous - module L de M tel que $N \cap L = 0$ alors $L = 0$.

2) N est dit sous - module superflu de M noté $N \ll M$ si pour tout sous - module L de M tel que $L + N = M$ alors $L = M$.

Proposition 3.1.7. *Soit $f : P \longrightarrow M$ un morphisme de A - modules à gauche avec P projectif. Alors f est une couverture projective si et seulement si :*

a) Pour tout homomorphisme $g : P' \longrightarrow M$ où P' est un module projectif, il existe $h : P' \longrightarrow P$ tels que $f \circ h = g$.

b) Tout endomorphisme $h : P \longrightarrow P$ tel que $f \circ h = f$ est un automorphisme.

<u>Preuve</u>

Supposons maintenant que $f : P \longrightarrow M$ est une couverture projective alors f est un épimorphisme. Soit $g : P' \longrightarrow M$ un homomorphisme avec P' projectif alors il existe $h : P' \longrightarrow P$ tel que $f \circ h = g$ car P' est projectif. Et en particulier pour $g = f$ il existe $h : P \longrightarrow P$ tel que $f \circ h = f$.

Montrons que h est un automorphisme. Par hypothèse $Kerf$ est superflu dans P et donc pour tout $x \in P$ on a $x = x - h(x) + h(x)$ et

$$x - h(x) \in Kerf \text{ car } f(x - h(x)) = f(x) - f \circ h(x) = 0 \text{ et}$$

$$h(x) \in h(P) \text{ d'où } P = Kerf + h(P)$$

avec $Kerf$ superflu donc $h(P) = P$ ce qui montre que h est surjective.
On a $h : P \longrightarrow P$ est surjective alors il existe $g : P \longrightarrow P$ tel que $h \circ g = 1_p$ (ou 1_p identité) car P est projectif donc g est injective or

$$\begin{aligned} f \circ h = f &\Longrightarrow (f \circ h) \circ g = f \circ g \\ &\Longrightarrow f(h \circ g) = f \circ g \Longrightarrow f = f \circ g \end{aligned}$$

donc on montre de la même manière que g est surjective d'où h est bijective, ce qui prouve que h est un automorphisme.

Supposons que les conditions a) et b) sont vraies et montrons que f est une couverture projective.
Soit $g : P' \longrightarrow M$ un homomorphisme avec P' projectif et $h : P' \longrightarrow P$ tels que $f \circ h = g$, montrons que f est un épimorphisme. Posons $P' = A^{(M)}$ le A - module libre à gauche engendré par M et $g : A^{(M)} \longrightarrow M$ l'épimorphisme canonique alors il existe $h : A^{(M)} \longrightarrow P$ tel que $f \circ h = g$ donc f est un épimorphisme.
Reste à montrer que $Kerf$ est superflu ?

Soit L un sous - module de P tel que $Kerf + L = P$, montrons que $L = P$.
Soit $f/L : L \longrightarrow M$ la restriction de f sur L.
Soient $x \in P$, alors il existe $x_1 \in Kerf$ et $x_2 \in L$ tels que $x = x_1 + x_2$ donc $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_2)$.
Or f est épimorphisme donc pour tout $y \in M$ il existe $x \in P$ tel que $f(x) = y$ ce qui implique d'après ce qui précède que pour tout $y \in M$ il existe $x_2 \in L$ tel que $f(x_2) = y$. Donc f/L est un épimorphisme et comme P est projectif alors il existe $h : P \longrightarrow L$ tel que $f/L \circ h = f$ et $i : L \longrightarrow P$ l'injection canonique, alors $f \circ i = f/L$ donc on a

$$(f \circ i) \circ h = f \Longrightarrow f \circ (i \circ h) = f$$

et d'après b) $i \circ h$ est un automorphisme donc $L = P$ d'où $Kerf$ est superflu.

Proposition 3.1.8. *Soit A un anneau cohérent et M un A - module à droite de présentation finie. Alors M admet une enveloppe plate si et seulement si $M^* = Hom(M, A)$ admet une couverture projective.*

Preuve : [2 , d'après Proposition 1]

Proposition 3.1.9. *Soit A un anneau tel que tout A - module à droite de présentation finie admette une pré - enveloppe plate alors A est cohérent à gauche.*

Preuve : [2 , d'après Proposition 2]

Définition 3.1.10. *Un anneau A est dit semi - régulier si tout A - module de présentation finie admet une couverture projective.*

Proposition 3.1.11. *Soit A un anneau semi - régulier. Alors tout A - module à droite de présentation finie admet une enveloppe plate si et seulement si A est cohérent à gauche.*

Preuve : [2, Corollaire 3]

Définition 3.1.12. *Soient N, M et L trois A - modules à gauche. Alors la suite exacte courte $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} L \longrightarrow 0$ est dite pure si pour tout A - module à droite S la suite courte*

$$0 \longrightarrow S \bigotimes_A N \xrightarrow{1 \otimes \alpha} S \bigotimes_A M \xrightarrow{1 \otimes \beta} S \otimes L \longrightarrow 0$$

est exacte.

Définition 3.1.13. *Soit $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ une suite exacte courte pure de A - modules à gauche. Alors*
a) N est dit sous - module pure de M
b) M est dit une extension pure de N.

Définition 3.1.14. *Soit E un A - module à gauche. Alors E est dit pur injectif si pour toute suite pure $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} L \longrightarrow 0$ et pour tout morphisme $f : N \longrightarrow E$ il existe un morphisme $g : M \longrightarrow E$ tel que $g \circ \alpha = f$.*

Remarque 3.1.15. *1°) La définition de module pur injectif est équivalente à E est pur injectif si pour toute suite pure $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$, alors la suite*

$$0 \longrightarrow Hom_A(L, E) \longrightarrow Hom_A(M, E) \longrightarrow Hom_A(N, E) \longrightarrow 0$$

est exacte.
2°) Tout module injectif est pur injectif.

Définition 3.1.16. *Soit* $f : M \longrightarrow E$ *un morphisme de* A *- module à gauche où* E *est pur injectif. Alors* f *est dit pré - enveloppe pure injective. Si pour tout morphisme* $g : M \longrightarrow E'$ *avec* E' *pur injectif, il existe un morphisme* $h : E \longrightarrow E'$ *tel que* $h \circ f = g$. *Si de plus le morphisme* $h : E \longrightarrow E$ *vérifiant* $h \circ f = f$ *est un automorphisme alors* f *est dite enveloppe pure injective.*

Lemme 3.1.17. *Tout* A *- module admet une enveloppe pure injective.*

Remarque 3.1.18. *L'enveloppe injective d'un* A *- module à gauche est pure injective.*

3.2 Localisation et enveloppe plate

Lemme 3.2.1. *Soient* $f : M \longrightarrow F$ *une enveloppe plate et* $g : M \longrightarrow P$ *une pré-enveloppe plate. Alors il existe une enveloppe plate* $h : M \longrightarrow F'$ *telle que* $P = P' \oplus F'$ *et* $F \cong F'$.

Proposition 3.2.2. *Soit* A *un duo - anneau tel que tout* A *- module admet une enveloppe plate alors tout* A_p *- module admet une enveloppe plate avec* P *est un idéal premier.*

<u>**Preuve**</u>

Soit M un A_p - module. Alors M est un A - module. Soit $f : M \longrightarrow F$ une enveloppe plate de A - modules. Comme $M \cong M_p$ en tant que A_p - module, alors $f_p : M \longrightarrow F_p$ est une enveloppe plate. En effet, on sait que F_p est plat et comme f est une enveloppe plate, alors pour tout morphisme de A_p - modules $g : M \longrightarrow F'$. Comme g est un morphisme de A - modules, il existe $h : F \longrightarrow F'$ tel que $h \circ f = g$ alors $h_p \circ f_p = g_p$ et comme F' est un A_p - module alors F' est isomorphe à F'_p. Soit $\phi : F' \longrightarrow F'_p$ un isomorphisme tel que $\phi \circ g = g_p$ donc on a $(\phi^{-1} \circ h_p) \circ f_p = g$. Posons $h' = \phi^{-1} \circ h_p$ donc on a $h' \circ f_p = g$ et ainsi f_p est une pré-enveloppe plate de M. Et d'après le lemme précédent, f_p est une enveloppe plate.

Corollaire 3.2.3. *Soit* A *un duo - anneau cohérent et* P *un idéal premier, alors tout* A_p *- module à gauche de présentation finie admet une enveloppe plate.*

Preuve

D'après ce qui précède A est cohérent, donc tout A - module de présentation finie admet une enveloppe plate et d'après la proposition précédente. Si M est un A_p - module de présentation finie alors M admet une enveloppe plate.

Définition 3.2.4. *Soit N un A - module à gauche. Alors N est dit FP - injectif si pour tout A - module à gauche M de présentation finie $Ext^1_A(M,N)=0$.*

Définition 3.2.5. *Soit A un anneau. Alors A est dit self - FP - injectif à gauche si ${}_AA$ est $F.P$ - injectif.*

Corollaire 3.2.6. *Soit A un anneau self - FP - injectif à droite. Alors tout A - module à droite admet une enveloppe plate si et seulement si A est semi - régulier et cohérent à gauche.*

Preuve : [2, Corollaire 5]

Proposition 3.2.7. *Soit A un duo - anneau, tel que tout A - module admet une enveloppe plate. Alors pour tout A - module de présentation finie M le A_p - module $M_p^{(\mathbb{N})}$ admet une enveloppe plate pour tout idéal premier P.*

Preuve : D'après [2, Proposition 8]

Soit $h : M_p \longrightarrow F$ une enveloppe plate du A_p - modules M_p. Alors $h^{(\mathbb{N})} : M_p^{(\mathbb{N})} \longrightarrow F_p^{(\mathbb{N})}$ est une enveloppe plate du A_p - module $M_p^{(\mathbb{N})}$.

Définition 3.2.8. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit M un A - module. On dit que la dimension plate de M est inférieure ou égale à n et on note $Fd(M) \leq n$ s'il existe une suite exacte de A - modules :*

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où les P_i sont projectifs et F_n plat.
** $Fd(M)=n$ si $Fd(M) \not\leq n-1$*
** $Fd(M)=\infty$ s'il n'existe pas $n \in \mathbb{N}$ tel que $Fd(M) \leq n$.*

Théorème 3.2.9. *Les assertions suivantes sont équivalentes pour tout A - module à droite (resp. à gauche) M*

i) $Fd(M) \leq n$

ii) Pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} ... \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_o \xrightarrow{d_o} M \longrightarrow 0$$

où P_i *est projectif et* $K = Ker\ d_{n-1}$ *alors* K *est plat.*

iii) $Tor_m(M, M') = 0,$ *pour tout* $m \geq n+1$ *et pour tout* A *- module à gauche* M'

iv) $Tor_{n+1}(M, M') = 0,$ *pour tout* A *- module à gauche (resp. à droite)* M'.

Théorème 3.2.10. *Pour tout* A *- module à droite* M *et pour tout* A *- module à gauche* M'. *Alors* $Tor_{n+1}(M, M') = 0$ *si et seulement si* $F_d(M) \leq n$ *ou* $F_d(M') \leq n$.

Définition 3.2.11. *Soit* A *un anneau.*

1) On appelle dimension faible à gauche de A, *notée par*

$$\ell W_D(A) = sup\ \{F_d(M),\ M \in A - Mod\}$$

2) On appelle dimension faible à droite de A, *notée par :*

$$rWD(A) = \{F_d(M),\ M \in Mod - A\}$$

<u>**Théorème et Définition**</u> :

Soit A un anneau. Alors $\ell W_D(A) = rWD(A)$ et leur valeur commune est dite dimension faible de l'anneau A. Cette valeur commune est notée par : $WD(A)$.

<u>**Preuve**</u>

Il suffit de remarquer que s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Tor_{n+1}(M, M') = 0$, pour tout $M \in Mod - A$ et pour tout $M' \in A - Mod$
alors $\ell W_D(A) \leq n$ et $rWD(A) \leq n$ et sinon $\ell W_D(A) = rWD(A) = +\infty$.
Donc $\ell W_D(A) = rW_D(A) = W_D(A)$

Proposition 3.2.12. *Soient* A *un duo - anneau et* P *un idéal premier de* A *et* M *un* A *- module à gauche. Alors* $F_d(M_P) \leq F_d(M)$.

<u>**Preuve**</u>

Supposons que $F_d(M) \leq n$ alors il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_{n-2} \longrightarrow ... \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_o \xrightarrow{d_o} M \longrightarrow 0$$

où F_i projectif $\forall 0 \leq i \leq n-1$ et F_n plat alors la suite

$$0 \longrightarrow (F_n)_P \longrightarrow (F_{n-1})_P \longrightarrow ... \longrightarrow (F_1)_P \longrightarrow (F_o)_P \longrightarrow M_p \longrightarrow 0$$

est exacte.
Donc $(F_n)_P$ est plat et $(F_i)_P$ est projectif $\forall 0 \leq i \leq n-1$ donc $F_d(M_P) \leq n$. Supposons que $F_d(M) = +\infty$; alors $F_d(M_P) \leq F_d(M)$.

Lemme 3.2.13. *Soit A un anneau. Alors :*
1) Un A - module à gauche M est plat si et seulement si $Tor_1(A/I, M) = 0$, pour tout idéal à droite I de A
2) Un A - module à droite M est plat si et seulement si $Tor_1(M, A/I) = 0$, pour tout idéal à gauche I de A.

<u>Preuve</u>

Définition 3.2.14. *et Théorème :* *Soit A un anneau, alors $WD(A)$ est dite dimension faible de l'anneau A et on a*

$$\begin{aligned} WD(A) &= sup \left\{Fd(A/I) : I \text{ un idéal à gauche de } A\right\} \\ &= sup \left\{Fd(A/I) : I \text{ un idéal à droite de } A\right\} \end{aligned}$$

<u>Preuve</u> :
Soit I un idéal à droite de A.
Supposons que $sup\{F_d(A/I)\} = +\infty$ pour tout idéal à droite de A, alors

$$sup\{F_d(M), M \in A - Mod\} = +\infty.$$

Si $sup\{F_d(A/I)\} \leq n$ pour tout idéal à droite I de A donc $F_d(A/I) \leq n$ pour tout idéal à droite I de A.
Montrons que pour tout A - module à gauche M $F_d(M) \leq n$. On a $F_d(A/I) \leq n$ alors $Tor_{n+1}(A/I, M) = 0$, pour tout idéal à droite I alors si

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} ... \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_o \xrightarrow{d_o} M \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de A -moudle à gauche où P_i est projectif et $K = Kerd_{n-1}$ et d_n est l'injection canonique alors

$$Tor_{n+1}(A/I, M) = Tor_1(A/I, K) = 0$$

pour tout idéal à droite I de A donc K est un A - module à gauche plat. D'où $F_d(M) \leq n$ pour tout A -module à gauche M. Donc

$$\begin{aligned} WD(A) &= sup\ \{F_d(M), M \in A - Mod\} \\ &= sup\{F_d(A/I),\ I \text{ idéal à droite de } A\} \end{aligned}$$

De même on montre que :

$$WD(A) = sup\{F_d(A/I),\ I \text{ idéal à gauche}\}$$

Supposons $sup\{F_d(A/I),\ I$ idéal à gauche $\} = +\infty$
Alors $WD(A) = +\infty$ si $F_d(A/I) \leq n$ pour tout idéal à gauche I de A alors montrons que $WD(M) \leq n$ pour tout A - module à droite M. Soit

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-2}... \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_o \xrightarrow{d_o} M \longrightarrow 0$$

une suite exacte de A - module à droite ou P_i est projectif pour tout $0 \leq i \leq n-1$; $K = Ker\ d_{n-1}$, et i est l'injection canonique $Tor_{n+1}(M, A/I) = Tor_1(K, A/I) = 0$ ce qui implique que K est plas d'où $F_d(M) \leq n$ d'où le résultat.

Théorème 3.2.15. *Soit A un duo -anneau alors $WD(A) = sup\{WD(A_m)\}$ où $m \in MAX(A)$.*

Preuve

On a par définition de $WD(A)$

$$\sup_{m \in MAX(A} \{WD(A_m)\} \leq WD(A)$$

car A_m st A - module à gauche.
Montrons que $WD(A) \leq \sup_{m \in MAX(A} \{WD(A_m)\}$. Soit I un idéal de A alors il existe un idéal maximal m de A tel que $I \subset m$ alors $(A/I)_m$ est isomorphe à A_m/I_m donc $F_d(A/I) = F_d(A_m/I_m)$ donc $sup\{F_d(A/I),\ I$ idéal de $A\}$ est égal à $sup\ \{F_d(A_m/I_m),\ I$ idéal de A et m idéal maximal contenant I $\}$. Ainsi $WD(A) \leq sup\ \{F_d(A_m/I'),\ I'$ idéal de $A_m\}$. D'où le résultat.

Corollaire 3.2.16. *Soit A un duo - anneau, alors pour tout idéal premier P,*

$$WD(A) = \sup_{P \in spec(A)} \{WD(A_p)\}.$$

Théorème 3.2.17. *Soit A un duo - anneau $WD(A_p) < \infty$ pour tout idéal premier P, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) A est cohérent et $WD(A) \leq 2$

ii) Tout A - module admet une enveloppe plate.

Preuve

i) $\Longrightarrow$ii) [2, Théorème 9]

ii) $\Longrightarrow$ i) comme tout A - module admet une enveloppe plate alors d'après ce qui précède A est cohérent donc A_p est cohérent et $WD(A_p) < \infty$ donc $WD(A_p) \leq 2$ et comme $WD(A) = sup\ (WD(A_p))$ avec $P \in spec(A)$. Donc d'après [2, Corollaire 10] $WD(A) \leq 2$.

Corollaire 3.2.18. *Soit A un duo - anneau tel que $WD(A) < \infty$, alors tout A - module admet une enveloppe plate si et seulement si A est cohérent et $WD(A) \leq 2$.*

Preuve

Comme $WD(A) < \infty$ alors d'après ce qui précède $WD(A_p) < \infty$ pour tout $P \in spec(A)$ et d'après le théorème précédent on a le résultat.

3.3 Enveloppe plate dans les IF - duo - anneaux

Définition 3.3.1. *Soit A un anneau. A est dit IF - anneau à gauche (resp. à droite) si tout A - module à gauche (resp. à droite) injectif est plat.*

Définition 3.3.2. *Soit A un anneau. A est dit IF - anneau s'il est à la fois IF à gauche et à droite.*

Proposition 3.3.3. *Soit A un IF - anneau. M un A - module de présentation finie. Alors M admet une enveloppe plate si et seulement si M est un sous - module essentiel d'un module projectif de type fini.*

Preuve

Soit M un A - module de présentation finie et $f : M \longrightarrow F$ une enveloppe plate de M, alors d'après [18, proposition 1], F est un module projectif de type fini. Comme A est un I F - anneau alors $E(M)$ est un A - module plat donc il existe $h : F \longrightarrow E(M)$ tel que $h \circ f$ est un monomorphisme essentiel.

Soit C un sous - module de F de type fini tel que $f^{-1}(C) = 0$. Et $\pi : F \longrightarrow F/C$ l'épimorphisme canonique, alors $\pi \circ f$ est un monomorphisme et $coker(\pi \circ f)$ est de présentation finie, alors F est FP - injectif. Alors il existe $h : F/C \longrightarrow F$ tel que $h \circ \pi \circ f = f$ alors $h \circ \pi$ est un isomorphisme alors π est un monomorphisme ce qui implique que $C = 0$ donc M est un sous - module esssentiel de F.

Et inversement soit F un module projectif de type fini, $f : M \longrightarrow F$ un monomorphisme essentiel. Tout module plat est une limite directe de modules projectifs de type fini et une limite directe des modules FP - injectif, alors $f : M \longrightarrow F$ est une pré - enveloppe plate. Soit $g : F \longrightarrow F$ tel que $g \circ f = f$.
Comme f est un monomorphisme essentiel et F est $F.P$ - injectif, alors g est scindé donc g est un isomorphisme et $f : M \longrightarrow F$ est une enveloppe plate.

Corollaire 3.3.4. *Soit A un IF - anneau local. Un A - module de présentation finie admet une enveloppe plate si et seulement si il est un sous - module essentiel d'un module libre.*

Preuve [3, corollaire 2].

Corollaire 3.3.5. *Soit A un IF - anneau. M un A - module de présentation finie et N un sous - module de M de type fini. Si M et N admettent des enveloppes plates, alors l'enveloppe plate de N est un facteur direct de l'enveloppe plate de M.*

Preuve

Soit $f : N \longrightarrow F$ une enveloppe plate de N et $g : M \longrightarrow F'$ une enveloppe plate de M. Alors d'après la proposition précédente F et F' sont projectifs de type fini, f et g sont deux monomorphismes essentiels, alors F est considéré comme sous - module de F'. F est FP - injectif, alors F' et F est de repésentation finie alors F est un facteur direct de F'.

Définition 3.3.6. *Soit A un anneau et $S \subset A$, S est dite T - nilpotente à gauche (resp. à droite) si pour toute suite $(a_i \in S \;;\; i \geq 1)$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_1\, a_2 ... a_n = 0$ (resp. $a_n \times a_{n-1} \times ... \times a_1 = 0$).*

Lemme 3.3.7. *Soient $\{M_i\}$ une famille de A-modules à gauche et pour tout i, soient F_i un sous-module de M_i et $(\varphi_i : F_i \longrightarrow M_i)$ une famille* *de morphismes de modules, vérifiant pour tout i il existe un automorphisme $f_i : M_i \longrightarrow M_i$ tel que $h_i \circ \varphi_i = \varphi_i$.*

Alors il existe un morphisme $h : \oplus M_i \longrightarrow \oplus M_i$ vérifiant $h \circ \oplus\varphi_i = \oplus\varphi_i$ (où $\oplus\varphi_i : \oplus F_i \longrightarrow \oplus M_i$) si et seulement si pour toute suite $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_n...$ d'entier naturel, pour toute suite de morphismes de modules $f_n : M_{k_n} \longrightarrow M_{kn+1}$ vérifiant $f_n(F_{k_n}) = 0$ et pour tout $x \in M_{k_1}$ il existe $m \geq 1$ tel que $f_m \circ f_{m-1} \circ ... \circ f_1(x) = 0$.

<u>Preuve</u>

Théorème 3.3.8. *Soit A un IF - duo - anneau tels que tout A - module à gauche admet une enveloppe plate, alors pour tout idéal maximal m, l'idéal maximal $m_m = mA_m$ est T - nilpotent à droite.*

<u>Preuve</u>

Soit $0 \neq x \in mA_m$, $Ann_{A_m}(x)$ est de présentation finie car A_m est cohérent. Donc d'après ce qui précède il existe $f : Ann_{A_m}(x) \longrightarrow F$ une enveloppe plate tel que F est une somme directe de A_m donc $F = 0$ ou $F = A_m$. Si $F = 0$ on a $Ann_{A_m}(x) = 0$ implique $A_m x$ est libre donc il est FP - injectif et la suite exacte courte
$0 \longrightarrow A_m x \longrightarrow A_m \longrightarrow A_m/A_m x \longrightarrow 0$ est scindée c'est une contradiction avec $0 \neq x \in mA_m$. Ainsi l'injection canonique $Ann_{A_m}(x) \longrightarrow A_m$ est une enveloppe plate. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset mA_m$ alors $\oplus Ann_{A_m}(x_n)$ admet une enveloppe plate.

Comme $Ann_{A_m}(x) \xrightarrow{i} A_m$ est une enveloppe plate pour tout
$0 \neq x \in m_m$. Donc soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de m_m.

Soient $f_n : \begin{array}{c} A_m \longrightarrow A_m \\ x \longmapsto x_n\ x \end{array}$ et $1 < k_1 < k_2 < ...$ une suite d'entier positif, posons $M_{k_i} = A_m$ et $F_{k_i} = Ann_{A_m}(x_{k_i})$, on a $f_i(F_{k_i}) = 0$. Alors d'après le lemme précédent il existe un entier $m \geq 1$ tel que $f_m \circ f_{m-1} \circ ... \circ f_1(1) = 0$ donc il existe m tel que $x_m\ x_{m-1}...x_1 = 0$ ce qui prouve que m_m est T-nilpotent à droite.

Corollaire 3.3.9. *Soient A un IF-duo-anneau pour lequel tout A-module à gauche admet une enveloppe plate et m un idéal maximal de A. Alors $J(A_m)$ est T-nilpotent.*

<u>Preuve</u> Il suffit de remarquer que $J(A_m)$ est inclus dans m_m, car m_m est un idéal maximal.

Théorème 3.3.10. *Soit A un IF - duo - anneau tels que m est un idéal maximal et tout A - module admet une enveloppe plate alors $J(A)$ est T - nilpotent.*

<u>**Preuve**</u>

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $J(A)$. Alors pour tout idéal maximal m de A et si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de m, la suite $\left\{\dfrac{x_n}{1}\right\}$ est une suite d'éléments de m_m, ainsi comme (d'après ce qui prècède) m_m est T - nilpotent donc il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{x_{n_o}}{1} \times \frac{x_{n_o-1}}{1} \times ... \times \frac{x_1}{1} \times \frac{x_o}{1} = \frac{0}{1},$$

alors il existe $x \in S$ tel que $x \times x_{n_o} \times x_{n_o-1} \times ... \times x_o = 0$, x est régulier donc il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_o} \times x_{n_o-1} \times ... \times x_o = 0$ et ce qui prouve que $J(A)$ est T - nilpotent à droite.

3.4 Enveloppes plates dans les QF - duo - anneaux

<u>**Notation**</u>

Soit A un anneau et $X \subset A$.
On note par $L(X) =$ annulateur à gauche de X et $r(X) =$ annulateur à droite de X.

Définition 3.4.1. *Soit A un anneau artinien à gauche et à droite alors A est dit quasi - Frobéniusien noté par QF s'il vérifie :*

1) $L(r(I)) = I$ *pour tout idéal à gauche*

2) $r(L(I)) = I$ *pour tout idéal à droite.*

Proposition 3.4.2. *Soit A un duo - anneau artinien alors A est quasi - frobéniusien (QF) si : $Ann_A(I)) = I$ pour tout idéal I.*

<u>**Preuve**</u>

Comme A est un duo - anneau pour tout I de A donc I est bilatère donc $L(r(I)) = r(L(I)) = Ann_A(Ann_A(I) = I$.

Définition 3.4.3. *Soit A un anneau. A est dit anneau parfait si tout A - module admet une couverture projective c'est à dire.*

Lemme 3.4.4. *Soit A un IF - anneau alors A est QF si et seulement si A est parfait. En effet :*

Corollaire 3.4.5. *Soit A un IF - duo - anneau semi - local tel que tout A - module admet une enveloppe plate alors A est QF.*

Proposition 3.4.6. *Soit A un IF - duo - anneau tel que tout A - module admet une enveloppe plate. Si $f : M \longrightarrow F$ une enveloppe plate, alors pour tout idéal maximal m, F_m est l'enveloppe injective de M_m.*

<u>**Preuve**</u>

Soit $f : M \longrightarrow F$ une enveloppe plate ; $m \in MAX(A)$ alors $f_m : M_m \longrightarrow F_m$ est une enveloppe plate, alors A_m est QF et $E(M_m)$ l'enveloppe injective de M_m est un sous - module de F_m. Donc $E(M_m)$ est un facteur direct de F_m. Soient $g : F \longrightarrow E(M_m)$ vérifiant $g \circ f = j_m \circ i_M$ où $j_m : M_m \longrightarrow E(M_m)$ est l'enveloppe injective de M_m ; $v : F_m \longrightarrow E(M_m)$ vérifiant $v \circ f_m = j_m$ et $u : E(M_m) \longrightarrow F_m$ tel que $u \circ j_m = f_m$. alors $v = g_m : F_m \longrightarrow E(M_m)$ et on a :
$v \circ u \circ j_m = v \circ f_m = (g \circ f)_m = (j \circ i_M)_m = j_m$ et $v \circ u$ est un isomorphisme car j_m est une enveloppe plate.
D'autre part on a $v \circ f_m = j_m$ ce qui implique $u \circ v \circ f_m = u \circ j_m = f_m$, donc $u \circ v$ est un isomorphisme (car f_m est une enveloppe plate). Ainsi $v \circ u$ et $u \circ v$ sont deux isomorphismes. donc u et v sont deux isomorphismes d'où le résultat.

Corollaire 3.4.7. *Soit A un IF - duo - anneau tel que tout A - module admet une enveloppe plate. Alors l'enveloppe plate de tout A - module est une extension plate essentiel.*

<u>**Preuve**</u>

D'après la proposition 3.4.6 précédente, si $f : M \longrightarrow F$ est une enveloppe plate alors F_m est l' enveloppe injective de M_m. Alors f_m est une extension plate essentielle donc f est une extension plate essentielle.

Théorème 3.4.8. *Soit A un duo - anneau cohérent tels que pour tout idéal maximal m. A_m est QF alors tout A - module de présentation finie admet une enveloppe plate monomorphique.*

Preuve

Soit X un A - module de présentation finie, on a le monomorphisme canonique $i : A \longrightarrow \prod_{m \in MA(A)} A_m$, i est un monomorphisme pur. Alors A est un sous - module pur d'un module injectif. Donc A est self - F P - injectif et d'après [2, théorème 11] A est un IF - anneau.

D'autre part A est semi - régulier. Comme A est cohérent donc d'après ce qui précède tout A - module de présentation finie admet une enveloppe plate et d'après le corollaire précédent toute enveloppe plate d'un IF-duo-anneau est un monomorphisme.

Théorème 3.4.9. *Soit A un IF-duo - anneau, alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

i) A est cohérent et self - injectif

ii) Tout A - module de présentation finie admet une enveloppe plate qui coïncide avec l'enveloppe injective.

iii) A est self - injectif et l'enveloppe injective de tout A - module de présentation finie est un module projectif de type fini

iv) A est self - injectif et tout A - module de présentation finie admet une pré - enveloppe plate.

Preuve

$i) \Longrightarrow ii)$ A est cohérent et self - injectif alors d'après [3, théorème 12], A est cohérent semi - régulier et d'après ce qui précède tout module de présentation finie admet une enveloppe plate.

Soit $f : M \longrightarrow F$ une enveloppe plate de M avec M de présentation finie et d'après ce qui précède f est un monomorphisme essentiel et comme $E(M)$ est plat alors il existe $h : F \longrightarrow E(M)$ tel que $h \circ f = i$ où i est l'enveloppe injective de $F \cong E(M)$.

$ii) \Longrightarrow iii)$ $E(A)$ l'enveloppe injective de A donc $E(A) \cong A$ donc A est self-injectif. D'autre part $E(M)$ est une enveloppe plate alors $E(M)$ est un module projectif de type fini pour tout module de présentation finie M.

$iii) \Longrightarrow iv)$ Si pour tout module de présentation finie admet une enveloppe plate injective alors tout module de présentation finie est un sous - module essentiel d'un module projectif de type fini et comme A est un IF-duo-anneau alors d'après une proposition précédente tout module de présentation finie admet une enveloppe plate donc une pré-enveloppe plate.

$iv) \Longrightarrow i)$ évident d'après ce qui précède.

Théorème 3.4.10. *Soit* A *un duo - anneau, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) Tout A *- module admet une enveloppe plate monomorphique.*

ii) Pour tout idéal maximal m *de* A *,* A_m *est un corps ou bien* A_m *est un anneau qui est un* A *- module projectif.*

Preuve du théorème précédent (Théorème 3.4.10)

$i) \Longrightarrow ii)$ A_m est un QF pour tout $m \in MAX(A)$. Soit $F(m)$ une enveloppe plate de m alors $F(m)$ est un idéal de A contenant m. D'après ce qui précède $(F(m)$ est une extension essentielle de m donc $F(m) = m$ où $F(m) = A$ alors l'injection $i : m \longrightarrow A$ est une enveloppe plate de m. Comme A_m est artinien alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(J(A_m))^n = (m\ A_m)^n = (m^n)_m = 0$ et d'autre part si
$m' \in MAX(A),\ m' \neq (m^n)_m = A_{m'}$ donc m^n est plat et m^n est de type fini, si X est un A - module FP - injectif alors on a la suite longue exacte :

$$0 \longrightarrow Hom_A(A/m, X) \longrightarrow Hom(A, X) \longrightarrow Hom(m, X) \longrightarrow$$

$$EXTt^1_A(A/m, X) \longrightarrow EXTt^1_A(A, X) \longrightarrow ...$$

et comme X est FP-injectif et A est de type fini, donc $EXTt^1_A(A, X) = 0$, ainsi la suite

$$0 \longrightarrow Hom_A(A/m, X) \longrightarrow Hom_A(A, X) \longrightarrow Hom_A(m, X) \longrightarrow$$

$$EXTt^1_A(A/m, X) \longrightarrow 0$$

comme $i : m \longrightarrow A$ est une pré-enveloppe plate et X est plat car tout module FP - injectif est un sous - module pur de $E(X)$, donc tout module injectif est plat donc $EXT^1_A(A/m,\ x) = 0$ pour tout module FP - injectif. Ainsi A/m est de présentation finie donc m est de type fini donc m^n est de type fini et A/m^n est un A - module projectif de type fini et comme $A/m^n \cong A_m$ donc A_m est un A - module projectif de type fini.

ii) $\Longrightarrow$ i) Soit A^I le A-module où I est un ensemble et soit $m \in MAX(A)$. Si A_m est un corps alors $(A^I)_m$ est plat si A_m n'est pas un corps alors A_m est un module projectif de type fini et on a $(A^I)_m \cong A^I \otimes A_m \cong (A \otimes A_m)^I$ donc $(A^I)_m$ est plat et on en déduit que A^I est plat et A est cohérent.

D'autre part, A est un sous-module pur de $\Pi\ A_m$ pour tout
$m \in MAX(A)$. Et A_m est injectif, donc A est self - FP - injectif. Ainsi tout

A-module injectif est plat donc A est un $I\ F$ -anneau et tout A-module à gauche admet une pré-enveloppe plate monomorphisque.

Soit $f : M \longrightarrow F$ une pré-enveloppe plate monomorphique, alors pour tout $m \in MAX(A)$ il existe $\varphi_F : E(M_m) \longrightarrow F_m$ tel que $\varphi_F \circ j_m = f_m$ où $j_m : M_m \longrightarrow E(M_m)$ est l'enveloppe injective de M_m.

Supposons que $F^m = \varphi_F^{-1}\ E(M_m)$ alors $(F^m)_m \cong E(M_m)$ et comme A est un $I\ F$ - anneau donc $(F^m)_m$ est plat car $E(M_m)$ est plat donc F^m est plat. Il existe $f^m : M \longrightarrow F^m$ et $j^m : F^m \longrightarrow F$ tels que $j^m \circ f^m = f$.

Posons $F' = \bigcap\limits_{m \in MAX(A)} F^m$ et $f : M \longrightarrow F'$ l'homomorphisme induit par $\{f^m\}$, alors f' est une enveloppe plate de M. Et comme $\forall m \in MAX(A)$ $(F')_m$ est plat donc $(F')_m$ est une enveloppe injective de M_m. Donc $f' : M \longrightarrow F'$ est une enveloppe plate monomorphique.

Si A_m n'est pas un corps. Donc A_m est un module projectif de type fini donc le foncteur $\otimes\ A_m$ commute avec l'intersection :

$$(F')_m = (\cap F^m)_m \cong (\cap F^m) \otimes A_m \cong \cap(F^m \otimes A_m) \cong \cap((F^m)_m) = (F^m)_m \cong E(M_m)$$

et comme A est QF donc $E(M_m)$ est plat.

Comme $f : M \longrightarrow F$ est factorisable à travers f' alors $f' : M \longrightarrow F'$ est une pré-enveloppe plate de M. Et comme $(F')_m = E(M_m)$ alors $\forall h : F' \longrightarrow F'$ tel que $h \circ f' = f'$ est un isomorphisme car $h_m \circ f'_m = f'_m$ et $f'_m : M_m \longrightarrow (F')_m$ est une enveloppe injective donc h_m est un isomorphisme.

Donc $f' : M \longrightarrow F'$ est une enveloppe plate monomorphique.

Chapitre 4

COUVERTURE PLATE DANS LES DUO-ANNEAUX INTEGRES (NON NECESSAIREMENT COMMUTATIFS)

Introduction

Dans la 1ère section de ce chapitre, nous étudions les couvertures dans la classe des A-modules sans torsion (ST-couverture), nous montrons que tout A-module sous torsion admet une ST-couverture. Nous montrons que si A-est un duo-anneau intègre semi-hériditaire (duo-anneau de Prufer) la classe des A-modules sans torsion coïncide avec la classe des A-modules plats. Et nous déduisons que si A est un duo-anneau semi hériditaire tout A-module admet une couverture plate de même si A est duo-anneau de Dedekind et si A est un anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif.

Dans la section 2 de ce chapitre, nous définissons de la même manière que dans le cas commutatif les notions de complété (I-complété) et séparable (I-séparable) d'un A-module à gauche voir [12, chapitre 10 (complétions)]. Nous utilisons le fait que si A est un duo-anneau intègre alors pour tout idéal premier P, on a A_p est local d'idéal maximal P_p et que A_p/P_p est isomorphe à $K(p)$ qui est l'anneau de division de A/P. Nous utilisons et nous généralisons les notions de complété d'un A_p-module libre noté par T_p.

Nous rappelons la définition d'un module de cotorsion : un A-module C est dit de cotorsion si $Ext^1_A(F, C) = 0$, pour tout A-module à gauche plat F. Nous montrons que si A est un duo-anneau intègre, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) F est une couverture plate d'un A-module de cotorsion.

ii) F est un A-module plat et de cotorsion.

iii) F est isomorphe à $\prod_{p\in X} T_p$, où $X \subset Spec(A)$. (voir théorème 4.2.23).

Dans la section 3 de ce chapitre, nous étudions la résolution pure injective d'un module plat et nous prouvons les résultats suivants (qui sont vrais si l'anneau est commutatif) :

1) Si F est un A-module plat alors pour tout $n \geq 0$
$PE^n(F) = \prod_{p\in X} T_p,\ X \subset Spec(A).$
(voir proposition 4.3.9).

2) Si A est un duo-anneau intègre noethérien avec $K\ dim(A)$ finie. Alors $PE^n(F) = 0,\quad \forall n > K\ dimA$, où F est un A-module à gauche plat (voir corollaire 4.3.12).

3) Si A est un duo-anneau intègre noethérien tel que $k\ dim(A) = d$. Alors pour tout A-module à gauche plat F, on a la dimension projective de F $Proj\ dim(F) \leq d$.
(voir théorème 4.2.13).

4.1 Couverture plate dans les A-modules sans-torsion

Définition 4.1.1. *Soient $f : F \longrightarrow M$ un morphisme de A-modules à gauche avec F plat. Alors f est dit précouverture plate si pour tout morphisme de A-modules à gauche : $f' : F \longrightarrow M$ avec F' plat alors il existe un morphisme de A-modules à gauche $h : F' \longrightarrow F$ tel que $f' = f \circ h$. Et si de plus pour tout $h : F \longrightarrow F$ vérifiant $f = f \circ h$, implique h est un automorphisme alors f est dite couverture plate.*

Proposition 4.1.2. *Soit $f : F \longrightarrow M$ un morphisme de A-modules à gauche où F est plat. Alors f est une couverture plate si et seulement si*

$$\begin{array}{rcl} Hom_A(F',F) & \xrightarrow{f^*} & Hom(F',M) \\ h & \longmapsto & f \circ h \end{array}$$

est un épimorphisme, pour tout A-modules à gauche plat F'.

<u>Preuve</u> :

D'après la définition d'une couverture plate si $f' \in Hom_A(F', M)$ alors il existe $h : F' \longrightarrow F$ tel que $f' = f \circ h$ ce qui implique $f^*(h) = f'$ d'où f^* est un épimorphisme. Et d'autre part, supposons f^* est un épimorphisme alors pour tout $f \in Hom_A(F', M)$ il existe $h : F' \longrightarrow F$ tel que $f^*(h) = f'$ donc $f \circ h = f'$ ce qui implique que f est une pré-couverture.

Proposition 4.1.3. *Soit $f : F \longrightarrow M$ une pré-couverture plate de A-modules à gauche. Alors f est un épimorphisme.*

<u>Preuve</u> :

Soit $F' = A^{(M)}$ le A-module libre engendré par $M(A^{(M)}$ est plat) et soit $f' : A^{(M)} \longrightarrow M$ l'épimorphisme canonique. Soit $h : A^{(M)} \longrightarrow F$ tel que $f' = f \circ h$. Donc $f \circ h$ est un épimorphisme d'où f est un épimorphisme.

Définition 4.1.4. *Soit M un A-module à gauche. Alors M est dit sans torsion (libre de torsion) si $a . x = 0$ pour tout $a \in A$ et $x \in M$ alors $a = 0$ ou $x = 0$.*

<u>Notation</u>

La classe des A-modules à gauche sans torsion (libre de Torsion) est notée par ST.

Définition 4.1.5. *Soient M un A-module à gauche, F un A-module libre de torsion ($F \in ST$) et $f : F \longrightarrow M$ un morphisme de A-modules à gauche.Alors f est dit :*

i) ST pré-couverture si pour tout $F' \in ST$ et pour tout $f' : F' \longrightarrow M$ il existe un morphisme $h : F' \longrightarrow F$ tel que $f' = f \circ h$

ii) ST-couverture s'il est une pré-couverture et de plus si pour tout $h : F \longrightarrow F$ tel que $f = f \circ h$ alors h est un auto-morphisme.

Proposition 4.1.6. *Soient $f : F \longrightarrow M$ une ST-précouverture et N un sous-module de M. Alors la restriction $f/f^{-1}(N) : f^{-1}(N) \longrightarrow N$ est une ST-pré-couverture de N.*

Preuve :

On a $f^{-1}(N)$ est un sous-module de F donc il est libre de torsion ($f^{-1}(N) \in ST$). Soit $g : G \longrightarrow N$ un morphisme avec $G \in ST$. Montrons qu'il existe $h : G \longrightarrow f^{-1}(N)$ tel que $g = (f/f^{-1}(N)) \circ h$.

Soit $\begin{array}{rccl} g' : & G & \longrightarrow & M \\ & x & \longmapsto & g'(x) = g'x) \end{array}$ donc $g'(G) \subset N$. Comme $f : F \longrightarrow M$ est une ST-pré-couverture donc il existe $h' : G \longrightarrow F$ tel que $g' = f \circ h'$. On a $g'(G) \subset N$ donc $f \circ h'(G) \subset N$ ce qui implique $f(h'(G)) \subset N$ ce qui implique que $h'(G) \subset f^{-1}(N)$ donc soit $h : G \longrightarrow f^{-1}(N)$ défini par $h(x) = h'(x)$ pour tout $x \in G$. Doù $g = (f/f^{-1}(N)) \circ h$; ainsi $f/f^{-1}(N)$ est une ST-pré-couverture de N.

Théorème 4.1.7. *Soient E un A-module injectif à gauche, F un A-module à gauche libre de torsion ($F \in ST$). Alors un morphisme $f : F \longrightarrow E$ est une ST-pré-couverture si et seulement si pour tout $f' : F' \longrightarrow E$ tel que $F' \in ST$ et F' injectif, alors f' se factorise à travers f.*

Preuve :

Supposons que $f : F \longrightarrow E$ est une ST-pré-couverture alors pour tout $f' : F' \longrightarrow E$ avec $F' \in ST$ f' est factorisable à travers f par définition d'une ST-pré-couverture d'où en particulier si F' est injectif f' est factorisable à travers f.

Supposons maintenant que pour tout $f' : F' \longrightarrow E$ avec $F' \in ST$ et F' est injectif f' est factorisable à travers f et montrons que $f : F \longrightarrow E$ est une ST-pré-couverture.

Soit $\varphi_1 : F_1 \longrightarrow E$ un morphisme avec $F_1 \in ST$ alors l'enveloppe injective $E(F_1) \in ST$ soit $\alpha : F_1 \longrightarrow E(F_1)$ un monomorphisme alors il existe φ' : $E(F_1) \longrightarrow E$ tel que $\varphi_1 = \varphi' \circ \alpha$ et comme $E(F_1)$ est injectif alors d'après l'hypothèse il existe $g : E(F_1) \longrightarrow F$ tel que :

$$\begin{aligned} \varphi' = \varphi \circ g \quad &\Longrightarrow \varphi' \circ \alpha = \varphi \circ g \circ \alpha \\ &\Longrightarrow \varphi_1 = \varphi \circ (g \circ \alpha) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Lemme 4.1.8. *Soit $\psi : G \longrightarrow M$ une ST-pré-couverture. Alors un sous-module S de G non trivial vérifiant $S \subset Ker\ \psi$ et tel que $\varphi : G/S \longrightarrow M$ soit une ST-pré-couverture avec $\psi = \psi \circ \pi$ où π est l'épimorphisme canonique de G dans G/S.*

Preuve :

Posons $\sum$ l'ensemble des sous-modules $S \subset Ker\ \psi$ tel que $G/S \in ST$ d'après le lemme de Zorn $\sum$ admet un élément maximal S d'où le résultat.

Théorème 4.1.9. *Soit $\varphi : F \longrightarrow M$ une ST-pré-couverture de M vérifiant $S \subset Ker\ \varphi$ avec S non trivial et $F/S \in ST$. Alors φ est une ST-couverture de M.*

Preuve : Voir [34] (Flat cover of Modules).

Définition 4.1.10. *Soit A un duo-anneau intègre. Alors A est dit anneau de Prufer (Prufer ring) s'il est semi-héridita ire .*

Théorème 4.1.11. *Soit A un duo-anneau intègre. Alors tout A-module à gauche M sans torsion de type fini s'injecte dans un A-module libre de type fini.*

Preuve :

Posons $S^{-1}(A)$ le corps des fractions de A alors si M est sans torsion $S^{-1}(M)$ est un $S^{-1}(A)$ espace vectoriel. Et comme M est de type fini. Alors si $\dfrac{m}{s} \in S^{-1}(M)$ et si $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est un système générateur de M donc il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in A$ tels que $m = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n$ c'es-à-dire que
$\dfrac{m}{s} = \dfrac{\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n}{s} = \dfrac{\alpha_1 a_1}{s} + ... + \dfrac{\alpha_n a_n}{s} =$
$\dfrac{\alpha_1}{s} \cdot \dfrac{a_1}{1} + ... + \dfrac{\alpha_n}{s} \cdot \dfrac{a_n}{1}$ c'est-à-dire que le système $\left\{ \dfrac{a_1}{1}, ..., \dfrac{a_n}{1} \right\}$ est générateur de $S^{-1}(M)$ donc $dim\ \ S^{-1}(M)$ est finie.

D'où on peut extraire une famille $\{b_1, ..., b_m\}$ de $\left\{ \dfrac{a_1}{1}, ..., \dfrac{a_n}{1} \right\}$ libre et génératrice du $S^{-1}(A)$-module $S^{-1}(M)$. Quitte à changer la numérotation des indices du système $(a_1, ..., a_n)$ on peut supposer que $b_1 = \dfrac{a_1}{1}$, $b_2 = \dfrac{a_2}{1}, ..., b_m = \dfrac{a_m}{1}$.

Posons M' le A-sous-module de $S^{-1}(M)$ engendré par $\{b_1, ..., b_m\}$ donc M' est un A-module libre de type fini car $\{b_1, ..., b_m\}$ est une famille libre du A-module $S^{-1}(M)$. Et c'est clair que M s'injecte dans M'.

Proposition 4.1.12. *Soit A un duo-anneau intègre. Soit M un A-module à gauche sans torsion.*

Alors M est injectif si et seulement si M est divisible.

Preuve :

Si M est injectif alors M est divisible. Montrons que si M est divisible alors M est injectif. Supposons que M est sans torsion et divisible. Soit I un idéal propre de A et soit f un morphisme non nul de A-modules à gauche de I dans M. Soit $b \in I$ tel que $f(b) \neq 0$. Comme M est divisible il existe $y \in M$ tel que $f(b) = by$. Soit $a \in I$ alors $bf(a) = f(ba) = f(a'b)$ avec $a \in I$ alors $bf(a) = f(ba) = f(a'b)$ avec a' vérifiant $ba = a'b$ donc $bf(a) = a'f(b) \Longrightarrow bf(a) = a'by = bay$. Et comme M est sans torsion alors $f(a) = ay$. Ainsi la condition de Baer est vérifiée, d'où E est injectif.

Corollaire 4.1.13. *Soient A un duo-anneau intègre. Alors tout $S^{-1}(A)$-module libre est un A-module injectif ($S^1(A)$ est le corps des fractions de A). En particulier $S^{-1}(A)$ est un A - module injectif.*

Preuve :

Soit M un $S^{-1}(A)$-module libre (M est $S^{-1}(A)$-espace vectoriel).

Alors M est un A-module sans torsion. Soient $x \in M$ et a un élément non nul de A donc $\frac{1}{a} \in S^{-1}(A)$ ce qui implique que $\frac{1}{a} \centerdot x \in M$; posons donc $y = \frac{1}{a} \centerdot x$ on a alors $a \centerdot y = a \centerdot (\frac{1}{a} \centerdot x) = (a \times \frac{1}{a}) \centerdot x = x$ $\big(a \in A$ mais $a = \frac{a}{1} \in S^{-1}(A)\big)$. Donc M est un A-module sans torsion divisible. Et d'après la proposition précédente M est un A-module injectif.

Lemme 4.1.14. *Soit A un anneau. Alors A est semi-héréditaire à gauche si et seulement si tout sous-module de type fini d'un A-module à gauche projectif est projectif.*

Théorème 4.1.15. *Soit A un duo-anneau intègre. Alors A est semi-héréditaire à gauche (anneau de Prufer) si et seulement si tout A-module à gauche sans torsion de type fini est projectif.*

Preuve :

Supposons que A est un duo-anneau intègre semi-héréditaire à gauche (anneau de Prufer). Soit M un A-module à gauche sans-torsion de type fini. Alors d'après ce qui précède M s'injecte dans un A-module libre de type fini et d'après le lemme précédent M est projectif.

Pour la réciproque, il suffit de remarquer que tout idéal I de A est un A-module sans torsion de A et donc si I est de type fin alors d'après le lemme I est projectif donc A est semi-héréditaire c'est-à-dire un anneau de Prufer.

Théorème 4.1.16. *Soit A un duo-anneau intègre. Alors tout A-module à gauche (respectivement à droite) admet une ST-pré-couverture.*

<u>**Preuve**</u> :

D'après ce qui précède on peut supposer que si M est injectif et que si $\varphi : F \longrightarrow M$ est une ST-pré-couverture avec $F \in ST$ et F est injectif alors tout morphisme $\varphi' : F' \longrightarrow M$ où $F' \in ST$ et F' est injectif est factorisable à travers φ.

Posons $H = Hom_A(K, M)$ ou $K = S^{-1}(A)$ (K est anneau de division).

Soit $F = K^{(H)}$ (le K-module libre engendré par H). Soit $\varphi : F \longrightarrow M$ défini pour tout $(ka) \in F$, $\varphi(k_k) = \sum h(k_k)$.

Alors pour tout $F' \in ST$ avec F' injectif on a F' est de la forme $F' = \bigoplus K_\mu$, $\mu \in I$ (I est un ensemble d'indice) les K_μ sont isomorphes à K pour tout $\mu \in I$. D'après la construction de F tout morphisme $\varphi' : F' \longrightarrow M$ est factorisable à travers φ donc $\varphi : F \longrightarrow M$ est une ST-pré-couverture.

Proposition 4.1.17. *Soit A un duo-anneau intègre. Alors l'anneau de division $S^{-1}(A)$ ($s^{-1}(A)$ le corps des fractions) de A est l'enveloppe injective de A.*

<u>**Preuve**</u>

Soit

$$\begin{aligned} i : \ & A \longrightarrow S^{-1}(A) \\ & a \longmapsto \tfrac{a}{1} \end{aligned}$$

le morphisme canonique qui est un monomorphisme. Donc il suffit de montrer que i est essentiel car d'après le corollaire précédent $S^{-1}(A)$ est un A-module injectif. Montrons alors que i est essentiel c'est-à-dire que $Im\ i$ est essentiel.

Or $Im\ i = A$. Soit I un A-sous-module de $S^{-1}(A)$, montrons que si $I \neq 0$ alors $A \cap I \neq 0$. Soit $x \neq 0$ et $x \in I$ alors il existe $a \in A$ et $b \in A \backslash \{0\}$ tels que $x = \dfrac{a}{b}$ et comme $x \neq 0$ donc $a \neq 0$ et on a $bx = a \in A \cap I$. A est essentiel ainsi $S^{-1}(A)$ est l'enveloppe injective de A.

Corollaire 4.1.18. *Soient A un duo - anneau et P un idéal premier. Alors l'enveloppe injective de A/P est A_P/P_P c'est - à - dire $E(A/P) = (A/P)_P$ qui est le corps résiduel noté $K(P)$.*

<u>**Preuve**</u> :

D'après la proposition précédente comme A/P est intègre alors $E(A/P) = S^{-1}(A/P)$ (où S est l'ensemble des éléments réguliers de A/P) qui est l'anneau de division de A/P qui est isomorphe à $(A/P)_P \cong A_P/P_P$.

Lemme 4.1.19. *Soit* $O \longrightarrow K \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} B \longrightarrow O$ *une suite exacte courte de* A*-modules à gauche avec* F *est un* A*-module plat.*

Alors :

i) Si B *est plat alors* $K \cap IF = IK$ *pour tout idéal à droite* I *de* A *;*

ii) Si $K \cap IF = IK$*, pour tout idéal à droite de type fini* I *de* A *alors* B *est plat.*

Preuve

Théorème 4.1.20. *Soit* A *un duo-anneau intègre semi-hériditaire (duo-anneau de Prufer). Alors un* A*-module à gauche* M *est plat si et seulement si* M *est sans-torsion.*

Preuve :

Soit M un A-module à gauche plat et soit L un A-module à gauche libre tel que $O \longrightarrow K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow$ une suite exacte courte ($K = Ker\ \beta$ et i le monomorphisme canonique).

Alors d'après le lemme précédent pour tout idéal I de A on a :
$K \cap IF = IK$ donc en particulier, pour tout idéal principal I de A. Soit $a \in A$ avec $a \neq 0$ et $m \in M$ tel que $a . m = 0$. Soit $m' \in L$ tel que $\beta(m') = m$ alors $am' \in K \cap aL = aK$ donc il existe $k \in K$ tel que
$am' = ak \Longrightarrow a(m' - k)$ et comme L sans torsion alors donc $m' = k$. Ce qui implique $\beta(m') = \beta(k) = m = 0$. D'où M est sans torsion. Supposons maintenant que M est sans torsion, alors montrons que M est plat il suffit de montrer que que tout sous-module M' de type fini de M est plat, or M' est sans torsion car M est sans torsion d'où d'après ce qui précède M' est projectif donc M' est plat d'où le résultat.

Théorème 4.1.21. *Soit* A *un duo - anneau intègre semi - héréditaire (duo-anneau de Prufer), alors tout* A *- module à gauche plat admet une couverture plate.*

Preuve :

D'après le théorème précédent comme A est un duo - anneau intègre héréditaire alors tout A - module est sans torsion donc d'après ce qui précède tout A - module admet une ST - précouverture qui est une couverture plate d'après [34].

Corollaire 4.1.22. *Soit* A *un duo - anneau de Dedekind, alors tout* A *- module admet une couverture plate.*

Preuve :

Il suffit de remarquer que tout duo - anneau de Dedekind est semi - héréditaire (duo-anneau de Prufer). Et donc d'après le théorème précédent, tout A - module admet une couverture plate.

Corollaire 4.1.23. *Soit A un anneau de valuation discrète non nécessairement commutatif, alors tout A - module admet une couverture plate.*

Preuve :

Si A est un anneau de valuation discrète (non nécessairement commutatif), alors A est un duo - anneau de Dedekind, donc A est semi - héréditaire ainsi d'après le théorème précédent tout A - module admet une couverture plate.

4.2 Couverture plate dans les complétés des A-modules

Définition 4.2.1. *Soient A un duo-anneau, I un idéal de A et M un A-module à gauche. Alors M est dit I-séparable si $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n M = 0$.*

Définition 4.2.2. *Soient A un duo-anneau I un idéal de A et M un A-module à gauche. On appelle I-complété de M la limite inverse noté*
$\widehat{M} = \lim\limits_{\rightarrow} M/I^n M$

Théorème 4.2.3. *Soit (A, m) un duo-anneau noethérien local. Alors*
$\hat{A} \simeq Hom_A(E(A/m), E(A/m))$ *où $\hat{A}$ est le m-complété de A.*

Notation

On note par $T = \widehat{A^{(X)}}$ le m- complété du A-module libre $A^{(X)}$, où X est un ensemble d'indice, avec A duo-anneau local d'idéal maximal m.

Remarque 4.2.4. $*$ *T/mT est un A/m module libre sans torsion où m est l'idéal maximal de A (A un duo - anneau intègre local).*

$*$ *On note par T_p le P_P-complété du A_p-module libre engendré par X (c'est-à-dire $T_p = \widehat{A_p^{(X)}}$), où A est duo - anneau intègre et P un idéal premier de A.*

Dans la suite, si A est un duo - anneau local d'idéal maximal m, alors le m-complété $\widehat{M}$ d'un A - module à gauche est dit le complété de M.

Lemme 4.2.5. *(Théorème de Matlis)*
Soient A un duo-anneau intègre et P un idéal premier. Alors

$$\hat{A}_p \cong Hom_A(E(A/p), E(A/p)).$$

Définition 4.2.6. *Soit M un $\hat{A}_p$-module. M est dit Matlis réflexif, si le morphisme canonique :*

$$M \longrightarrow M^{\vee\vee} = Hom(Hom(M, E(A/p), E(A/p))$$

est un isomorphisme. Avec A est duo - anneau intègre et P un idéal premier de A.

Théorème 4.2.7. *Tout $\hat{A}_p$-module Matlis réflexif admet une couverture plate en tant que A_p-module où A est duo - anneau intègre et P un idéal premier de A.*

<u>Preuve</u> : même preuve que [34, Lemme 3.1.5]

Proposition 4.2.8. *Soient M un $\hat{A}_p$-module Matlis réflexif, alors M admet une couverture plate en tant que A-module où A est un duo - anneau intègre et P un idéal premier de A.*

<u>Preuve</u> On a $M \cong M^{\vee\vee}$, M est pure injectif en tant que $\hat{A}_p$-module, donc il admet une couverture plate $f : F \longrightarrow M$ en tant que $\hat{A}_p$-module d'après [34, lemme 3.1.5]. Alors f est une précouverture plate de M en tant que A-morphisme. Soit $g : G \longrightarrow M$ un A-morphisme, avec G plat, alors on a la factorisation $G \longrightarrow G \otimes \hat{A}_p \longrightarrow M$ car $G \otimes \hat{A}_p$ est $\hat{A}_p$ plat, ainsi $G \otimes \hat{A}_p \longrightarrow M$ est un A morphisme donc $F \longrightarrow M$ est une pré-couverture plate d'où F est un A-module plat.

Lemme 4.2.9. *Soit A un duo-anneau intègre noethérien et P un idéal premier de A. Alors :*

i) Pour tout $s \in A \backslash P$ (où $A \backslash P$ est le complémentaire de P), la multiplication par s est un automorphisme ;

ii) $E(A/P) = \bigcup A_n$, où $A_n = \{x \in E(A/P) / P^n x = 0\}$.

Remarque 4.2.10. *A_n est de type fini en tant que A_p-module d'après [34, proposition 1.4.10].*

Lemme 4.2.11. *Soit A un duo-anneau intègre noethérien, $p \in Spec(A)$. Alors pour tout ensemble X non vide, on a $Hom_A(E(A/p),\ E(A/p)^{(X)})$ est isomorphe avec le complété du A_p-module libre $T_p = \widehat{A_p^X}$. Et T_p est une pré-couverture plate.*

__Preuve__ Soit le morphisme

$$\alpha : Hom_A(E(A/p),\ E(A/p)^{(X)}) \longrightarrow \widehat{A_p^X}$$

définie par $\alpha(f) = q_x f$ pour tout

$$f \in Hom_A(E(A/p)),\ E(A/p)^{(X)}) \text{ ou } q_x : E(A/p)^{(X)} \longrightarrow E(A/p)$$

la projection canonique. Alors $q_x o f \in Hom_A(E(A/p),\ E(A/p)) = \hat{A}_p$. On la suite $(r_x) = (q_x f)$ vérifiant $r_x = 0$ sauf pour un nombre fini de x et $\lim\limits_{\rightarrow} rx_i = 0$.
Pour toute suite (x_i) d'éléments distincts de X. Ainsi
$E(A/p) = \bigcup A_n,\ f(\bigcup A_n) = \bigcup f(A_n)$. On a $r_x = q_x o f = 0$ sauf un nombre fini. Soit (x_i) une suite d'éléments distincts de X. On remarque que
$q_{x_i} o f(A_n) = 0$, pour i très grand ce qui implique que $r_{x_i} \in P^n \hat{A}_p$ pour i très grand et $\lim\limits_{\rightarrow} r_{x_i} = 0$. Il est clair que α est injective. Car pour tout $(r_x) \in \widehat{A_p^{(X)}}$, on définit $f(y) = (r_x(y)) \in (A/p)^{(X)}$.

Comme $\lim\limits_{\rightarrow} r_{x_i} = 0$ pour toute suite (x_i) d'éléments distincts de X on a pour tout $y \in A_n$ $r_x(y) = 0$ sauf pour un nombre de $x \in X$ donc
$f \in Hom_A(E(A/p),\ E(A/p)^{(X)})$ et que $\alpha(f) = (r_x)$. D'où α est un isomorphisme.

Pour tout idéal premier p de A et pour tout A_p-module $\widehat{A^{(X)}}$, on a

$$T_p = Hom_A(E(A/p),\ E(A/p)^{(X)}) \cong \widehat{A_p^{(X)}}.$$

Soit $K(p) = (A/p)_p,\ K(p) \bigotimes_{A_p} T_p \cong T_p/p\ T_p \cong K(p)^{(X)}$ on a pT_p est pure injectif car il est cotorsion car $p\ \pi\ \hat{A}_p^{(X)} = \pi\ (p\hat{A}_p)^(X)$ et pour tout
$p \in Spec(A)$. T_p est plat d'après [34, Lemme 3.1.4] d'autre part le morphisme canonique
$\varphi : T_p \longrightarrow k(p)^{(X)}$ est une pré-couverture plate d'après ce qui précède.

Proposition 4.2.12. *Sous les mêmes hypothèses du lemme précédent, le morphisme canonique $\varphi : T_p \longrightarrow (k(p))^{(X)}$ est une couverture plate.*

<u>Preuve</u>

Soit la suite exacte

$$0 \longrightarrow pT_p \longrightarrow T_p \longrightarrow (k(p))^{(X)} \longrightarrow 0$$

φ est une pré-couverture plate. Supposons qu'elle n'est pas une couverture plate d'après [34, théorème 1.2.7] il existe une décomposition $T_p = G \bigoplus K$ telle que $G \longrightarrow k(p)^{(X)}$ comme morphisme de A_p-modules est une couverture plate et $K \subset Ker\ \varphi = PT_p$. En déduire que $P.K = K$ et alors $K = 0$ car T_p et K sont p-séparables. D'où le résultat.

Lemme 4.2.13. *Supposons que $\varphi : F \longrightarrow M$ est une couverture plate. Avec $F = F_1 \bigoplus F_2$ est $M = M_1 \bigoplus M_2$, tels que $\varphi(F_i) \subset M_i$, $i = 1, 2$.*

Alors $\varphi/F_i : F_i \longrightarrow M_i$ sont des couvertures plates.

<u>Preuve</u> Voir [34, proposition 4.1.7]

Les lemmes suivants sont nécessaires pour la caractérisation des modules cotorsion plats.

Lemme 4.2.14. *$Hom\left(\prod\limits_{p \not\subset q} T_q,\ T_p\right) = 0$, où q et p sont deux idéaux premiers.*

<u>Preuve</u>

On a $T_p = Hom(E(A/p),\ E(A/p)^{(X)})$,

et $Hom\left(\prod\limits_{p \not\subset q} T_q,\ T_p\right) \cong Hom\left(\prod\limits_{p \not\subset q} T_q \otimes E(A/p),\ E(A/p)^{(X)}\right)$.

Il suffit de montrer que

$$\prod T_q \otimes E(A/p) = 0,$$

or

$$E(A/p) = \bigcup A_n = \lim_{\rightarrow}\ A_n$$

avc A_n est de type fini tel que $P^n\ A_n = 0$ comme pour tout s $(\prod\ T_q) \otimes A_n \cong$, si $P \not\subseteq q$ alors il existe $s \in p$ et $s \notin q$ donc $s^n \notin q$ donc $s^n T_q \cong T_q$, ainsi on a $T_q \otimes A_n \cong s^n T_q \otimes A_n \cong T_q \otimes s^n A_n = 0$ d'où le résultat.

Corollaire 4.2.15. *$Hom(\hat{A}_q, \hat{A}_p) \neq 0$ si et seulement si $p \subset q$*

Preuve

Si $p \not\subset q$ d'après ce qui précède $Hom(\hat{A}_q, \hat{A}_p) = 0$. Si $p \subset q$ on a $\hat{A}_p = Hom(E(A/p),\ E(A/p))$ et $\hat{A}_q \otimes E(A/p) = \bigoplus E(A/q')^{Y_{q'}}$ avec $q' \in Spec(A)$ est c'est un $\hat{A}_q$-module injectif. Or comme $A_q \longrightarrow \hat{A}_q$ est une pure injection alors $A_q \otimes E(A/p) \longrightarrow \hat{A} \otimes E(A/p)$ est une pure injection, alors $A_q \otimes E(A/p) = E(A/p)^{(Y)}$, où Y est un ensemble quelconque, ainsi on a $\hat{A}_q \otimes E(A/p)$ est isomorphe avec $E(A/p)^{(Y)}$. D'où $Hom(\hat{A}_q, \hat{A}_p)$ contient une copie de $\hat{A}_p$.

Corollaire 4.2.16. *Soit F un A-module plat, alors pour tout $q \in Spec(A)$, $F \otimes E(k(q)) = \oplus E(k(q))$ et on a $Hom(F, \hat{A}_q) \cong Hom(F \otimes E(A/q),$ $E(A/q)) \cong \hat{A}_q^X$ si $X = \emptyset$ alors $Hom(F, \hat{A}_q) = 0$ en particulier si $F = \hat{A}_p$, on a $Hom(\hat{A}_p, \hat{A}_p) = \hat{A}_q^X$.*

Corollaire 4.2.17. *a) Soit X un ensemble quelconque. Alors $\hat{A}_q^X$ est le complété d'un A_q-module libre.*

b) Tout complété d'un A_q-module libre est somme directe de $\hat{A}_q^X$.

Preuve

On a $\hat{A}_q^X \cong Hom(E(A/q),\ E(A/q)^X)$ est un module injectif $E(A/q)^X = \bigoplus E(A/p)^{Y_p}$ ou $p \subset q$. Or si $p \nsubseteq q$ $Hom(E(A/q),\ E(A/p)) = 0$ donc $Hom(E(A/q),\ E(A/q)^X) = Hom(E(A/q),\ E(A/q)^{(Y)}) = T_q$.

Supposons que T_q est le complété d'un A_q-module libre, alors $T_q \cong Hom(E(A/q),\ E(A/q)^{(X)}$. Or $E(A/q)^{(X)})$ et somme directe de $E(A/q)^{(X)}$ d'où le résultat.

Lemme 4.2.18. *Soit $s \geq 0$ et $H = \prod\limits_{ht(p)=s} T_p$. Alors si $H = H_1 \bigoplus H_2$. Alors pour tout p on a : $T_p = U_p \bigoplus V_p$ telle que $H_1 = \prod U_p$ et $H_2 = \prod V_p$.*

Preuve

Soit $f : \prod\limits_{ht(p)=s} T_p \longrightarrow \prod\limits_{ht(p)=s} T_p$ alors $f = \prod f_p : (x_p) \longmapsto (f_p(x_p))$, avec $f_p = \beta \circ f \circ \alpha$ où $\beta : \prod\limits_{ht(p)=s} T_p \longrightarrow T_p$ est la projection canonique et $\alpha : T_p \longrightarrow \prod\limits_{h(t)(p)=s} T_p$ est l'injection canonique, et comme d'après ce qui précède $Hom(\prod\limits_{q \neq p} T_q, T_p) = 0$ pour tout p, alors pour tout p_o on a et pour

tout $h : \prod_{ht(p)=s} T_p \longrightarrow T_{p_o}$ on a $hog_o = 0$
ou $g_o : \prod_{q \neq p_o} T_q \longrightarrow \prod_{ht(p)=s} T_p$ est la surjection canonique.
Alors pour tout $(x_p) \in \prod_{ht(p)=s} T_p$ si $f(x_p) = (Y_p)$ alors $Y_p = f_p(x_p)$ d'où $f = \prod f_p$.
Soit maintenant $r : H \longrightarrow H$ la restriction vérifiant $Ker\ r = H_2$ d'après ce qui précède $r = (r_p) = \prod r_p$, alos pour tout $p, r_p : T_p \longrightarrow T_p$, on a $r_p = Im(r_p) \oplus Ker(r_p)$. Posons $U_p = Im(r_p)$ est le complété d'un $\hat{A}_p$-module libre. De même pour $V_p = Ker(r_p)$, d'où le résultat car $Im(r) = \prod Im(r_p)$ et $Ker(r) = \prod Ker(r_p)$.

Lemme 4.2.19. *Soit $X \subset Spec(A)$, et soit q un élément maximal de X. Alors* $q\left(\dfrac{\prod_{p\in X} T_p}{\bigoplus_{p\in X} T_p}\right) = \dfrac{\prod_{p\in X} T_p}{\bigoplus_{p\in X} T_p}$

<u>Preuve</u>

Comme q est maximal, $q\ T_p = T_p$ donc pour $p \in X$, $p \neq q$. Alors $q\left(\prod_{p\in X} T_p\right) = \left(q\ T_q\right) \bigoplus \left(\prod_{p\neq q} T_p\right)$. D'où

$$\left(q \prod_{p\in X} T_p\right) + \left(\bigoplus_{p\in X} T_p\right) = \prod_{p\in X} T_p.$$

Lemme 4.2.20. $\oplus\ T_p \subset \prod\ T_p$ *est une enveloppe pure injective, avec $p \in Y \subset Spec(A)$.*

<u>Preuve</u>

On remarque que $\prod\ T_p$ est pure injective et est un pur sous-module de $\prod\ T_p$. Soit D_1 l'enveloppe pure injective de $\bigoplus\ T_p \subset D_1 \subset \prod\ T_p$. Soit D_2 un sous-module de $\prod\ T_p$ tel que $\prod\ t_p = D_1 \bigoplus D_2$. Soit X l'ensemble des $q \in Y$ tel que la projection $\prod\ T_p \longrightarrow T_q$ qui est la restriction sur D_2 est non nulle. Alors $D_2 \subset \prod_{p\in X} T_p$. Supposons que $X \neq \emptyset$ et soit $q \in X$ qui est maximal dans X. Considérons la projection $\prod T_p \longrightarrow D_2$ la restriction $\prod\limits_{p\in X} T_p \longrightarrow D_2$ est une surjection qui contient $\bigoplus\limits_{p\in X} T_p$ dans son noyau, d'où on a la surjection

$$\frac{\prod\limits_{p\in X} T_p}{\bigoplus\limits_{p\in X} T_p} \longrightarrow D_2$$

car d'après ce qui précède $qD_2 = D_2$ puisque $D_2 \subset \prod\limits_{p\in X}$, on a :

$$D_2 \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} (q^n \prod_{p\in X} T_p) \subset \prod \bigcap_{n=1}^{+\infty} (q^n \; T_p)$$

comme $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} q^n T_q = 0$, donc le morphisme $D_2 \longrightarrow q$ est nul ce qui contredit l'hypothèse sur X donc $X = \emptyset$, $D_2 = 0$ et d'où $\bigoplus \; T_p \subset \prod \; T_p$ est une enveloppe pure injective.

Théorème 4.2.21. *Soit $F = \prod\limits_{p\in Y} T_p$, avc $Y \subset Spec(A)$. Supposons $F = D \bigoplus H$. Alors $D \cong \prod\limits_{p\in Y} U_p$ avec U_p le complété d'un A_p-module libre.*

<u>**Preuve**</u>

Soit $F_n = \prod\limits_{ht(p)\leq n} T_p$, $F_{-1} = 0$ alors

$$\bigcup F_n = \Big(\prod_{ht(p)=0} T_p\Big) \bigoplus \Big(\prod_{ht(p)=1} T_p\Big) \bigoplus \ldots \bigoplus \prod_{ht(p)=n} T_p \bigoplus \ldots$$

d'après le lemme précédent $\bigcup \; F_n \subset F = \prod \; T_p$ est une envelopppe pure injective. Et d'après ce qui précède $f(F_n) \subset F_n$. Donc si $F = D \bigoplus H$ alors $F_n = D_n \bigoplus F_n$. Alors $\bigcup F_n = \bigcup D_n \bigoplus H_n \subset D \bigoplus H = F$ est une enveloppe pure injective d'où $\bigcup D_n \subset D$ est une enveloppe pure injective or $F_n/F_{n-1} \cong$

$D_n/_{D_{n-1}} \bigoplus H_n/H_{n-1} \quad F_n/F_{n-1} \cong \prod_{ht(p)=n} T_p$, donc d'après ce qui précède pour tout $p \in V$, il existe U_p et V_p tels que
$T_p = \bigcup_p \bigoplus V_p$ avec $ht(p) = n$ tel que $D_n/D_{n-1} \cong \prod_{ht(p)=n} U_p$. On a
$\bigcup_{ht(p)=0}^{+\infty} D_p \cong \left(\prod_{ht(p)=0} U_p \right) \bigoplus \prod_{ht(p)=1} U_p \bigoplus \ldots$ car l'enveloppe pure injective de
$\left(\prod_{ht(p)=0} U_p \right) \bigoplus \prod_{ht(p)=1} U_p \bigoplus \ldots$ est $\prod_{p\in Y} U_p$ et ainsi $D \cong \prod_{p\in Y} U_p$.

Définition 4.2.22. *Soit C un A-module. Alors C est dit module de cotorsion si $Ext_A^1(F, C) = 0$, pour tout A-module plat F.*

Théorème 4.2.23. *Soient A un duo-anneau intègre noethérien et F un A-module. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) F est une couverture plate d'un A-module de cotorsion.
2) F est plat et de cotorsion.
3) $F \cong \prod T_p,\ P \in Spec(A)$, où T_p est le complété d 'un A_p-module libre.

<u>Preuve</u>

(1) $\Longrightarrow$(2) soit $\varphi : F \longrightarrow M$ une couverture plate avec M et un A-module de torsion. Alors $Ker\varphi$ est de cotorsion est ainsi F est de cotorsion.

(2) $\Longrightarrow$ (3) F est somme directe de $Hom(E_1, E_2)$ avec E_1 et E_2 sont deux A-modules injectifs. Donc d'après le théorème de Matlis $E_1 \cong \bigoplus_{p\in Spec(A)} E(A/p)^{X_p}$ donc $Hom(E_1, E_2) \cong \prod\ Hom(E(A/p)),\ E_2)$ or on a

$$Hom(E(A/p),\ Hom(A_p,\ E_2)) \cong Hom(E(A/p),\ E_2).$$

Comme $Hom(A_p,\ E_2)$ est un A_p-module injectif d'où $Hom(A_p,\ E_2) \cong \bigoplus E(A/q)$, $q \in Spec(A)$ et $q \subset p$. Donc $Hom(E(A/p),\ E_2) \cong Hom(E(A/p),\ E(A/p)^{(X)}) = T_p$ où X est un ensemble d'indice donc F est somme direct de $\prod\ T_p$.
D'après la preuve du théorème précédent on a $F \cong \prod\ T_p$.

Montrons que ce produit est unique a isomorphisme près. Soit $G = \prod\ T_p$. Si $q \in Spec(A)$ et $q \nsubseteq p$, alors soit $s \in q$ et $s \notin p$ donc le morphisme $\begin{array}{rccc} s: & E(A/p) & \longrightarrow & E(A/p) \\ & e & \longmapsto & se \end{array}$ est un isomorphisme et $qT_p = T_p$. Si $q \subset p$, alors $\bigcap q^n\ \widehat{A^{(X)}}_p = 0$ car $\bigcap p^n \widehat{A^{(X)}}_p = 0$ donc $\bigcap q^n\ T_p = 0$.

Soit $q \in Spec(A)$ fixé. Posons $G' = \bigcap q^n G = \prod(\bigcap q^n\ T_p) = \prod T_p$. Posons $H = \prod T_p$, pour $q \subseteq p$. Alors $G = G' \bigoplus H$, $G/G' = H$, or $H = T_q \bigoplus \prod_{q \subsetneq p} T_p$. On a donc $\prod_{q \subsetneq p}(\bigcap p^n H) = T_q$, pour tout idéal premier p. Donc pour $q \in Spec(A)$ fixé T_q est isomorphe à $\prod_{q \subsetneq p}(\bigcap p^n(G/\bigcap q^n G))$ donc T_p est unique à isomorphisme près.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Soit $m(\hat{A}_p)$ l'unique idéal maximal de $\hat{A}_p$. Pour tout T_p on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow m(\hat{A}_p\ T_p \longrightarrow T_p \longrightarrow k(p)^{(X)} \longrightarrow 0$$

or le morphisme canonique $T_p \longrightarrow k(p)^{(X)}$ est une couverture plate. Donc on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow \prod(m\ \hat{A}_p)\ T_p \longrightarrow \prod\ T_p \longrightarrow \prod\ k(p)^{(X)} \longrightarrow 0$$

et le morphisme $\prod T_p \longrightarrow \prod k(p)^{(X)}$ est une pré-couverture plate c'est-à-dire $F = \prod T_p$ est une pré-couverture plate de $\prod k(p)^{(X)}$ et c'est une couverture plate d'après [34, proposition 4.2.12].

4.3 Résolution pure injective minimale d'un A-module plat

Proposition 4.3.1. *(Définition)*
Soient A un duo-anneau intègre, $p \in Spec(A)$ et M un A-module à gauche. Alors on appelle p-complété de M_p ou complété de M_p noté $\hat{M}_p = \varprojlim M_p/p^n\ M_p$.

<u>**Preuve**</u> : Voir [24]

Lemme 4.3.2. *Soient A un duo-anneau intègre noethérien et $p \in Spec(A)$. Alors pour tout A-module plat $F, \hat{F}_p$ est le complété d'un A_p-module libre.*

<u>**Preuve**</u>

Il suffit de montrer dans le cas où A est local. Soit m l'idéal maximal de A, alors pour tout $n \in N$ A/m^n est artinien. Donc $F/m^n\ F$ est un A/m^n-module projectif d'où il est libre. Or $A/m^n \bigotimes F/m^{n+1}F \cong F/m^n F$ donc toute base du $A/m^{n+1}A$-module $F/m^{n+1}F$ est injectée dans base du A/m^n

A-module F/m^nF et on a le morphisme canonique $F/m^{n+1}F \longrightarrow F/m^nF$. Soit G un A-module libre qui a une base de même cardinal qu'une base de F/m^nF, alors $\forall n \geq 1$ on a les isomorphismes suivants :

$$G \longrightarrow F/m^nF \;\; et \;\; G/m^nG \longrightarrow F/m^nF$$

tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl] \arrow[d] \\ F/m^{m+1}F \arrow[r] & F/m^nF \end{tikzcd}$$

donc on a l'isomorphisme de systèmes projectifs :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & G/m^3G & \longrightarrow & G/m^2G & \longrightarrow & G/mG \\ \\ \cdots & \longrightarrow & F/m^3F & \longrightarrow & F/m^2F & \longrightarrow & F/mF \end{array}$$

ainsi $\hat{F} \cong \hat{G}$ et donc $\hat{F}_p \cong \hat{G}_p$.

Proposition 4.3.3. *(lemme)*

Soient A un duo-anneau intègre et F un A-module plat, alors le morphisme canonique $F \longrightarrow \Pi\widehat{F}_p$ est une pure injection, pour tout idéal premier p.

<u>Preuve</u>

Pour tout idéal premier p on peut compléter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr] \arrow[dr] & & \widehat{F}_p \arrow[dl] \\ & T_p & \end{tikzcd}$$

donc on peut compléter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi\widehat{F}_p \arrow[dl] \\ & \pi T_p & \end{tikzcd}$$

Comme $F \longrightarrow \Pi\widehat{A}_p$ est une pure injection. Alors $F \longrightarrow \Pi T_p$ est une pure injection et ainsi $F \longrightarrow \Pi\widehat{F}_p$ est une pure injection.

Proposition 4.3.4. *$PE(A) = \Pi\widehat{A}_m,\ m \in MAX(A)$ où A est un duo - anneau intègre.*

__Preuve__

Posons $E = \bigoplus E(R/m)$, ou $m \in MAX(A)$. Alors on a la pure injection

$$A \longrightarrow Hom(Hom(A,E),E) = Hom(E,E)$$

qui est une pure injective pré - enveloppe de A. Or

$$Hom(E,E) = \Pi\ Hom(E(A/m),E(A/m))^{(X_m)} = \Pi T_m$$

donc $PE(A) = \Pi\ T_m$. alors pour tout $m \in MAX(A), T_m = \widehat{A}_m$ et d'après le lemme précédent, $A \longrightarrow \Pi\widehat{A}_p$ est une pure injection. Donc $PE(A) = \Pi T_m$ est une somme directe de $\Pi\widehat{A}_p$ et comme $T_m = \widehat{A}_m$ on a le résultat.

Théorème 4.3.5. *Soient A un duo - anneau intègre et F un A - module plat et $PE(F) = \prod_{p \in Spec(A)} T_p$. Alors pour tout idéal premier P, on a T_p est isomorphe avec une somme directe de $\widehat{F}_p$.*

__Preuve__

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & \pi\widehat{F}_p \\ & \pi T_p \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

Soit $f = \Pi f_p$ avec $f_p : \widehat{F}_p \longrightarrow T_p$, vérifiant $\beta = f \circ \alpha$, (f existe car β) est pur), or $\Pi\widehat{F}_p$ est pur injectif alors il existe $s : \Pi T_p \longrightarrow \Pi\widehat{F}_p$ tel que $f \circ s = 1_{\Pi T_p}$, donc posons $s_p : T_p \longrightarrow \widehat{F}_p$ tel que $\Pi s_p = s$, on a alors $f_p \circ s_p = 1T_p$. Donc T_p est isomorphe à une somme directe de $\widehat{F}_p$.

Remarque 4.3.6. *$f_p : \widehat{F}_p \longrightarrow T_p$ est un épimorphisme.*

Théorème 4.3.7. *Avec les mêmes hypothèses du théorème précédent si* p *est idéal premier maximal vérifiant* $F \otimes K(p) \neq 0$ *alors le morphisme* $\psi : \widehat{F}_p \longrightarrow T_p$ *rendent le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & \widehat{F}_p \arrow[dl, "\psi"] \\ & T_p & \end{tikzcd}$$

est un isomorphisme.

<u>Preuve</u>

On a f_p est un épimorphisme. D'où si $F_p \otimes k(p) = 0$, alors $\widehat{F}_p = 0$, d'où $T_p = 0$

Supposons que p est maximal tel que

$$F \bigotimes_A k(p) \cong F_p \bigotimes_{A_p} k(p) \neq 0.$$

Alors $\widehat{F}_p \neq 0$. Car pour $q \in Spec(A)$ vérifiant $p \subsetneq q$, $\widehat{F}_q = 0$.
donc d'après ce qui précède

$$Hom\left(\prod_{p \neq q} \widehat{F}_q, T_p\right) \cong Hom\left(\prod_{p \subseteq q} \widehat{F}_q, T_p\right) \oplus Hom\left(\prod_{p \subsetneq q} \widehat{F}_p,\ T_p\right) = 0$$

De même on a $Hom(\Pi_{p \neq q}\, T_q, \widehat{F}_q) = 0$.

donc $s_p \circ f_p$ est l'identité donc f_p est un monomorphisme (voir flat cover of Modules).

Lemme 4.3.8. *Soient* F *un* A *- module plat et* $PE(F) = PE^o(F)$ *la pure enveloppe injective de* F. *Alors le quotient* $PE^o(F)/F$ *est plat où* A *est un anneau quelconque.*

<u>Notation et Définition</u>

On note par $PE^1(F)$ la pure enveloppe injective de $PE^o(F)/F$ et donc on note par $PE^n(F)$ la pure enveloppe injective de :

$$PE^{n-1}(F)/PE^{n-2}(F)$$

avec pour tout n $PE^n(F)$ est plat et pure injectif.

Proposition et Définition

Soient F un A - module avec A un anneau quelconque. Alors on a la résolution injective suivante :

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow PE^o(F) \longrightarrow PE^1(F) \longrightarrow \cdots PE^n(F) \longrightarrow \cdots$$

Cette résolution est dite résolution pure injective minimale de F.

Proposition 4.3.9. *Si A est un duo - anneau intègre, alors pour tout $n \geq 0$*
$PE^n(F) = \Pi T_p$. Pour un certain nombre d'idéal premier de A.

Preuve : même preuve que si A est commutatif (voir [34, chapitre 4].

Définition 4.3.10. *(Notation)*

On note par $\mathcal{V}_n(q, F)$ le cardinal de la base du A_q - module libre dont le complèté est T_q qui figure dans le produit $PE^n(F) = \Pi T_p$ (défini dans la remarque précédente).

Théorème 4.3.11. *Soient A un duo - anneau intègre, F un A - module plat et p un idéal premier tel que $\mathcal{V}_n(q, F) = 0$, pour tout $q \supsetneq p$. Alors $v_{n+1}(q, F) = 0$ pour tout $q \supset p$.*

Preuve

Pour $n = 0$ on a $PE^o(F) = PE(F) = \Pi T_q$. Alors $T_q = 0$, $\forall q \not\supseteq p$, donc $T_p \neq 0$ dans le produit ΠT_q. Alors p est maximal il respecte $F \otimes K(p) \neq 0$. Et d'après [34, proposition 4.2.5] $\widehat{F}_p = T_p$.
Montrons que $\Pi_{q \neq p} T_q \otimes K(p) = 0$.

Soit S un sous module de type fini avec $S \subset K(p)$ alors $T_q \otimes S = 0 \Longrightarrow T_q = 0$ si
$q \not\supseteq p$; $rS = 0$, $\forall r \in p$ avec $r \notin q$. Donc on a

$$\left(\prod_{q \neq p} T_q\right) \otimes S \cong \prod_{q \neq p} T_q \otimes S = 0$$

et alors $\displaystyle\prod_{q \neq p} (T_q \otimes K_p) = 0$.
Maintenant soit $0 \longrightarrow F \longrightarrow PE(F) \longrightarrow C \longrightarrow 0$ une suite exacte courte. Alors $\widehat{F}_p \otimes K(p) \longrightarrow PE(F) \otimes K(p)$ est un isomorphisme, alors

$C \otimes K(q) = 0.$ et $\widehat{C}_p = 0$
Choisissons $T_p = 0$ dans $PE(C)$, si $q \not\supseteq p$, alors $PE(F) \otimes K(q) = 0$ car $T_q = 0$ car $C \otimes K(q) = 0$ ce qui implique $T_q = 0$ dans $PE(C)$.

Corollaire 4.3.12. *Soit A un duo - anneau intègre. Alors si $K\ dim(A) < \infty$, alors $PF^n(F) = 0, \quad \forall n > K\ dim(A)$.*

Théorème 4.3.13. *Soit A un duo - anneau intègre nothérien.*
Supposons que $K\ dim(A) = d < \infty$. Alors pour tout module à gauche plat F,
$Proj\ dim(F) \leq d$ (ou $Proj\ dim(F)$ est la dimension projective de F).

Preuve : Même preuve que le cas où A set commutatif voir [22, théorème 4.2.8]. En effet on considère la suite

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{d-1} \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

où les P_i sont projectifs.
Soit la suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

avec P projectif. Alors d'après (Note on holomological alebra) on a

$$Ext^1(K, L) \cong Ext^{d+1}(F, L)$$

$PE^{d+1}(L) = 0$ d'où pour tout $i \geq 0$ et pour tout
$j > 1\ Ext^j(F, PE^i(L)) = 0$ donc

$$Ext^{d+1}(F, L) \cong Ext^1(F, PE^d(L)) = 0$$

ce qui implique que la suite

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

est scindé donc K est projectif d'où le résultat.

Chapitre 5

CONCLUSION

Dans le chapitre 1 de cette thèse, on va étudier les propriétés fonctorielles du foncteur $S^{-1}(\ )$, en particulier on a montrer que $S^{-1}(\ )$ est un foncteur exact. Donc on peut comparer les objets et les classes HOPFIAN et CO-HOPFIAN de la catégorie $A - Mod$ à celle de $S^{-1}(A) - Mod$ et inversement.

On va montrer que toute partie multiplicative saturée S de non diviseurs de zéro d'un duo-anneau vérifie les conditions de Ore. Mais on n'avait pas donné une réponse définitive si S est une partie multiplicative saturée d'un duo-anneau non commutatif et non intègre. En particulier si S est le complémentaire d'un idéal premier contenant des diviseurs de zéro d'un duo-anneau non commutatif et non intègre. Donc reste à trouver un exemple d'un duo-anneau non commutatif et non intègre et qui admet une partie multiplicative saturée S contenant des diviseurs de zéro et qui vérifie les conditions de Ore.

En plus de trouver un exemple d'idéal premier P d'un duo-anneau non commutatif et non intègre tel que son complémentaire vérifie les conditions de Ore. On peut poser le problème suivant : chercher une classe de duo-anneaux non commutatif et non intègre dans laquelle toute partie multiplicative saturée vérifie les conditions de Ore et en particulier le complémentaire d'un idéal premier qui est une partie mulplicative saturée.

Dans la 4ème section du chapitre 2, on a introduit les duo-anneaux de Dedekind qui sont des duo-anneaux intègres héridities. On peut donner une définition plus générale de la manière suivante : Soit A un sous-anneau d'un anneau de division D. Alors A est dit de Dedekind s'il est hériditaire, on reprend la même étude en définissant de la même manière les idéaux fractionnaires et inversibles.

Dans la classe des duo-anneaux, l'ensemble des éléments réguliers est une partie multiplicative saturée qui vérifie les conditions de Ore, ce qui n'est pas vraie en général. Donc on se peut poser la question suivante : existe-il une classe d'anneaux contenant strictement la classe des duo-anneaux et dans laquelle l'ensemble des éléments réguliers vérifie les conditions de Ore.

Dans le chapitre 3, on a utilisé la localisation définie dans [7]et le chapitre 2 de cette thèse d'un duo-anneau quelconque. On a étudié les enveloppes dans les QF duo-anneaux et nous pensons qu'on peut introduire la notion de duo-anneau de Gorenstein définie par : un duo-anneau noethérien est dit de Gorenstein si $inj\ dim_{A_m}\ A_m$ est finie pour tout idéal maximal m. Dans le cas commutatif un QF-anneau est un anneau de Gorenstein de dimension de Krull égal à zéro ($K\text{.}dim\ A = 0$) d'où la continuité de l'étude des enveloppes plates dans les duo-anneaux de Gorenstein non nécessairement commutatifs.

Dans le chapitre 4, l'étude a été faite sur les convertures plates dans les duo-anneaux intègres. On peut revoir sur un duo-anneau quelconque les deux sections 4.2 et 4.3, on a vu que si A est un anneau et P un idéal premier de A alors A_P/P_P et isomorphe à $(A/P)_{(\bar{0})}$ qui est l'anneau total de fractions de A/P qui est intègre donc $K(P) = A_P/P_P = (A/P)_P$ est un anneau de division (corps gauche) et il est l'enveloppe injective de A/P. C'est pourquoi on peut revoir l'étude des résultats obtenus si l'anneau n'est pas intègre dans les sections 2 et 3 du chapitre 4. De même on peut étendre l'étude des couvertures plates sur les duo-anneaux de Gorenstein vu les résultats intéressants dans le cas commutatif et vu le rôle de $K(P)$ dans les construction des couvertures plates/

Bibliographie

[1] **ANDERSON, F. W. and FULLER, K. R.** : Rings and categories of modules. New York, Springer - Verlag (1973).

[2] **ASENSION MAYOR and J. MARTINEZ HERNANDEZ** : Flat enveloppes in commutative rings. Israel Journal of Mathematics, Vol. 62. 1. 1988.

[3] **ASENSION MAYOR and J. MARTINEZ HERNANDEZ** : Monomorphic flat enveloppes in commutative rings. Arch. Math, Vol. 54, 430 - 435 (1990).

[4] **ASENSION MAYOR and J. MARTINEZ HERNANDEZ** : On flat and projective enveloppes. Journal of algebra 160, 434 - 440 (1993).

[5] **ATIYAH M. F., FRS I. G. MACDONALD** (University of OXFORD : Introduction to commutative algebra, Addison - Wesley Publishing Company.

[6] **AUGUST ERNEST BEHRENS** : Rings theory, Academic Press New York and London (1972).

[7] **BEN MAAOUIA MOHAMED FRAJ et MAMADOU SANGHARE** : Localisation dans les duo - anneaux Afrika Mathematika 2009.

[8] **BEN MAAOUIA MOHAMED FRAJ** : Doctorat 3ème Cycle, Faculté des Sciences et Techniques, UCAD, Dakar, Juillet 2003.

[9] **BEN MAAOUIA MOHAMED FRAJ et MAMADOU SANGHARE** : Enveloppes plates dans les duo - anneaux. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences (à paraître).

[10] **BRIGNS H. H. :** Three questions on duo - Rings, Pacific Journal of Mathematics Vol. 58, N° 2, 1975.

[11] **BOURBAKI N.** : Eléments de Mathématiques (algèbre chapitre 1 à 3), Hermann, Paris (1970).

[12] **BOURBAKI N.** : Eléments de Mathématiques (algèbre chapitre à 7) Masson Paris, New York, Barcelone, Milan Mexico et Rio de Janeiro 1981

[13] **BOURBAKI N.** : Eléments de Mathématiques (algèbre chapitre 10) Masson, Paris New York, Barcelone, Milan Mexico et Rio de Janeiro 1980.

[14] **BOURBAKI N.** : Eléments de Mathématiques (Théorie deqs ensembles chapitre 1 à 4) Paris, Milan, Barcelone et Mexico 1990.

[15] **COLBY, R. R.** : Rings which have flat injective modules. Journal of algebra 35, 239 - 252 (1975).

[16] **DAMIANO, ROBERT F.** Coflat rings and modules. PACIFIC Journal of Mathematics Vol. 81, N° 2, 1979.

[17] **DIANKHA O., SOW D., SANGHARE M.** : On FGR - Ring. JP J. Algera Numb er Theory Appl. 10 (2008), n° 1, 97 - 111.

[18] **ENOCHS EDGARE** : Injective and flat covers, enveloppes and resolvents. Israel Journal of Mathematics, Vol. 39, N° 3 1981.

[19] **JACOBSON NATHAN** (Yal University) : Basic Algebra II, W.H. Freeman ans Company (San Francisco).

[20] **JIANLONG CHEN** : P. projective modules. Communication in algebra. 24(3), 821 - 831 (1996).

[21] **MARTINEZ J. HERNANDEZ** : Relatively flat enveloppes. Commutations in algebra, 14(5), 867 - 884 (1986).

[22] **MATLIS E.** : Injective modules over noethérian rings. Pacific J. Math, 8 : 511 - 528, 1958.

[23] **NASTASESCLU CONSTANTIN** (University of Bucharest, Romania) : Dimensions of Ring theory.

[24] **NGUYEN VIET DUNG, DINH VAN HUYNH, PATRICK F. SMITH and ROBERT WISBAUER** : Extending modules

[25] **NORTHCOTT D. G., R.S** : Town Trust Professeur of Pure Mathematics university of Sheffield) : Cambridge University Press.

[26] **PIRTLE ELBERT M.(Kansas Ciry, Missouri) :** Localisation in duo - Ring.

[27] **PIRTLE ELBERT M.** : Non commutative valuation Ring.

[28] **RADO F. (CLUJ, ROMANIA)** : Non - injective collinéation on some sets in Desarguesian projective planes and Extension of non - commutative valution, AEQ. MATH.

[29] **RENAULT G.** : Algèbre non commutative, Gauthier-Villars, Paris - Bruxelles - Montréal (1975).

[30] **ROTMAN JOSEPH J.** : Notes on homological algebra, University of Illinois, Uraba (1968).

[31] **STENSTIOM BO** : (Lectures Notes in Mathematics) Rings and Module of quotients Spring - Verlag : Berlin, Heidelberg New York.

[32] **THIERRIN G. :** On Duo - Rings.

[33] **THOMAS S., S. SHORES** : Injective Modules over Duo - Rings.

[34] **XU JINZ HONG** : Flat covers of modules. Lectures note in Mathematics (1934).