UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR (UCAD)
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE DE DOCTORAT DE 3 ème CYCLE
Spécialité : Mathématiques

SUR L'EXISTENCE DES FEUILLETAGES DE LIE

PRESENTE PAR

Hamidou DATHE

Le 20 Février 1999

Sous la direction de
Monsieur Edmond FEDIDA

JURY

Président :	Souleymane	NIANG	Professeur	U.C.A.D
Membres :	Edmond	FEDIDA	Professeur	Université d'Abidjan (Directeur)
	Chérif	BADJI	Professeur	U.C.A.D
	Gaël	MEIGNEIZ	Professeur	UBS (France) (Rapporteur)
	Mamadou	SANGHARE	Chargé d'Enseignement	UCAD

SUR L'EXISTENCE DES FEUILLETAGES DE LIE

Hamidou Dathe

Département de Mathématiques et Informatique -

Université Cheikh Anta DIOP de DAKAR

REMERCIEMENTS

Le professeur Edmond FEDIDA a dirigé ce travail. Il m'a initié à la recherche avec disponibilité, patience et gentillesse. Ses questions, remarques et conseils m'ont guidé tout au long de cette thèse. Je l'en remercie chaleureusement.

Ces recherches ont aussi bénéficié de la codirection du professeur Gaël MEIGNEIZ. Je suis heureux de pouvoir lui exprimer ici ma gratitude pour l'intérêt et le temps qu'il leur a accordés et l'occasion qu'il m'a donnée de les exposer dans le séminaire de Géométrie différentielle du Laboratoire de mathématiques et applications des mathématiques de l'Université de Bretagne-Sud en France.

Je remercie également :

Le professeur Souleymane NIANG, d'avoir bien voulu me faire l'honneur et le plaisir de présider le Jury.

Les professeurs Chérif BADJI et Mamadou SANGHARE d'avoir cautionné cette thèse.

Farba FAYE et Cheikh Mbacké DIOP, de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail de leurs nombreux remarques, conseils et indications.

Le Laboratoire de Mathématiques et Applications des Mathématiques de l'Université de Bretagne – Sud en France, de la chaleur de son accueil.

Souleymane NDIAYE du soutien matériel et moral.

Madame MBAYE pour la bonne impression de ce document.

RESUME

Soit $\mathfrak{I}$ un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte V^n. On démontre les résultats suivants :

1) $H^3(\widetilde{V}^n, \mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ $(p \neq 0)$ où $\widetilde{V}^n$ est le revêtement universel de V^n.

2) V^n ne fibre pas nécessairement sur le tore maximal de G même si $\mathfrak{I}$ est minimal.

3) Dans le cas où G est nilpotent, simplement connexe avec une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ ayant une base dans laquelle les constantes de structure sont rationnelles,

On peut "déformer" le groupe d'holonomie $\widetilde{\Gamma}$ de $\mathfrak{I}$ en un réseau Γ de G ; la $\mathbb{Q}$-variété $G/_{\widetilde{\Gamma}}$ est alors une variété ; V^n fibre sur $G/_{\Gamma}$ et $\mathfrak{I}$ est "proche" d'un feuilletage à feuilles fermées.

TABLE DES MATIERES

Introduction

Ce travail est une contribution à la caractérisation des variétés compactes admettant un G-feuilletage de Lie $\Im$. On sait que lorsque le groupe de Lie G est isomorphe à un tore T^q, les variétés compactes admettant un G-feuilletage de Lie sont les fibrées sur T^q **[T]**. Ce texte examine une généralisation de ce théorème sous les deux formes suivantes :

i) Lorsque la structure transverse G d'un feuilletage de Lie $\Im$ sur une variété compacte V^n est-elle même compacte, V^n ne fibre t-elle pas sur le tore maximal de G ?

ii) Supposons G non compact mais possède un réseau cocompact Γ ; dans ce cas, les variétés compactes munies d'un G-feuilletage de Lie ne fibrent-elles pas sur l'espace homogène compact G/Γ ?

La réponse à la première question est négative même dans le cas où le feuilletage $\Im$ est minimal. En effet, on démontre que la fibration au dessus du tore maximal de G n'est pas nécessaire à ce qu'une variété compacte V^n porte un G-feuilletage.

Quant à la deuxième question, on donne une réponse affirmative dans certains cas.

L'ordre dans lequel l'étude a été menée est le suivant : dans le chapitre 1, on donne quelques rappels relatifs aux feuilletages de Lie : définitions, propriétés, théorème de structure, feuilletages de Lie modèles. On y explique également le théorème de Tischler pour les S^1- feuilletages de Lie des variétés compactes.

Le chapitre 2 examine quelques obstructions cohomologiques à l'existence de G-feuilletages de Lie : on exprime en termes de cohomologie singulière un théorème d'obstruction dû à **E. Fédida** ; En effet on montre que si V^n est une variété connexe compacte et simplement connexe munie d'un G-feuilletage de Lie, alors

$H^3(V^n, \mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ $(p \neq 0)$.

Dans le chapitre 3, on répond négativement à la question i) de **E. Fédida**, en construisant pour tout groupe de Lie G connexe compact simplement connexe et semi-simple, un G-feuilletage de Lie minimal porté par une variété compacte qui ne fibre pas sur le tore maximal de G. On applique cette construction au groupe de Lie S^3 pour obtenir des S^3-feuilletages de Lie à feuilles denses sur des variétés compactes non fibrées sur le cercle S^1. On donne toutefois d'autres conditions nécessaires d'existence d'un G-feuilletage de Lie plus ou moins liées aux tores maximaux du groupe G.

Dans le chapitre 4, on démontre en s'appuyant sur des travaux de **Gaël Meigneiz** [M_4] que certains G-feuilletages de Lie nilpotents des variétés compactes sont approchables par des feuilletages à feuilles fermées et que les variétés-support fibrent sur $G/_\Gamma$, Γ étant un réseau de G, c'est précisément le cas lorsque G est un groupe de Lie nilpotent, simplement connexe dont l'algèbre de Lie possède une base dans laquelle les constantes de structures sont rationnelles. Un exemple où G est le groupe N de **Heisenberg** de dimension 3 est étudié ; on obtient que les feuilletages de **Heisenberg** sont "proches" des N-feuilletages à feuilles fermées et les variétés compactes qui les portent sont fibrées sur $N/_\Gamma$ où Γ est un réseau de N. Comme les seuls groupes de Lie nilpotents, simplement connexes de dimension 3 sont d'une part $\mathbb{R}^3$ et d'autre part N, on obtient ainsi une caractérisation des variétés compactes munies de feuilletages de Lie nilpotents de codimension 3.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES FEUILLETAGES DE LIE

Ce chapitre regroupe quelques rappels sur les feuilletages de Lie.On y reprend pour l'essentiel des résultats contenus dans la thèse de **E. Fédida [F$_2$]** et dans celle de **Gaël Meigniez [G$_1$].**

1 - Feuilletages de Lie : définitions ; propriétés [F$_1$]

1.1- Définitions

Soient V^n une variété différentiable de dimension n, G un groupe de Lie connexe de dimension q ; ($q \leq n$). Une structure de G-feuilletage de Lie sur V^n est définie par la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de V^n et d'une famille de submersions

$f_i : U_i \longrightarrow G$ telles que sur chaque composante connexe U_{ij} de $U_i \cap U_j$ nous ayons le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & G \\ & G \arrow[u, "\nu_{ij}"'] \end{tikzcd}$$

Où ν_{ij} est un élément du groupoïde des germes de translations à gauche de G.

La famille $(U_i, f_i, \nu_{ij})_{\substack{i\in I \\ j\in I}}$ est appelée G-cocycle localement constant sur V^n.

On dit que le feuilletage $\Im$ défini par ce G-cocycle est un G-feuilletage de Lie de V^n.

Le couple (U_i, f_i) est une carte de $\Im$.

__**Remarque :**__

Si $\widetilde{G}$ est le revêtement universel de G, alors tout G-feuilletage est aussi un $\widetilde{G}$-feuilletage de Lie (cette notion ne dépend que de l'algèbre de Lie de G) ; dans la suite nous supposerons donc que le groupe de Lie G est simplement connexe.

Un G-feuilletage de Lie sur V^n peut également être défini à l'aide d'une 1-forme ω à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G vérifiant une condition de **Maurer – Cartan** $(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0)$ et en tout point surjective.

Dans $[F_2]$, **E. Fédida** a montré que l'étude d'un G-feuilletage de Lie sur une variété compacte V^n, se ramène (à une fibration près) à l'étude d'un feuilletage de Lie sur une sous-variété fermée de V^n, pour lequel toutes les feuilles sont denses ; de façon plus précise, on a le théorème suivant :

1.2 - __Théorème__ $[F_2]$

Soient V^n une variété compacte de dimension n, G un groupe de Lie simplement connexe de dimension $q \leq n$, et $\mathfrak{I}$ un G-feuilletage de Lie sur V^n. Il existe un revêtement W^n de V^n et une fibration localement triviale $D : W^n \longrightarrow G$ tels que :

si $\tilde{\mathfrak{I}}$ est le feuilletage relevé de $\mathfrak{I}$ dans W^n, alors $\tilde{\mathfrak{I}}$ est défini par D.

il existe une représentation $\rho : \pi_1 V^n \longrightarrow G$ équivariante par rapport à ρ ; c'est à dire que pour tout $\tilde{x} \in W^n$ et pour tout $\gamma \in \pi_1 V^n$; on a : $D(\gamma . \tilde{x}) = \rho(\gamma) . D(\tilde{x})$

Si on note Γ le sous-groupe de G défini par $\Gamma = \rho(\pi_1 Vn)$ et K l'adhérence de Γ dans G ; alors les adhérences des feuilles de $\mathfrak{I}$ sont les fibres d'une fibration $\overline{D} : V^n \longrightarrow G/_K$.

Dans chaque fibre de la fibration $\overline{D}$, le feuilletage induit par $\mathfrak{I}$ est un K_e-feuilletage de Lie, où K_e est la composante connexe de l'élément neutre dans K.

Les feuilles de ce K_e-feuilletages de Lie sont denses.

Notations :

L'homomorphisme ρ est appelé représentation d'holonomie du feuilletage $\mathfrak{I}$; le sous-groupe Γ est le groupe d'holonomie de $\mathfrak{I}$ et l'application D est l'application développante ; on appelle par ailleurs diagramme développant de $\mathfrak{I}$; le diagramme commutatif ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} W^n & \xrightarrow{D} & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ V^n & \xrightarrow{\overline{D}} & G/_K \end{array}$$

Remarques

Réciproquement, si $\mathfrak{I}$ est un feuilletage sur une variété compacte différentiable V^n pour lequel les propriétés i) et ii) sont vérifiées alors le feuilletage $\mathfrak{I}$ est un G-feuilletage de Lie sur V^n.

Si la variété V^n n'est pas compacte, alors le feuilletage relevé $\tilde{\mathfrak{I}}$ est défini par une submersion.

Si $p : \tilde{V}^n \longrightarrow V^n$ est le revêtement universel de V^n ; il existe une fibration localement triviale $D_1 : \tilde{V}^n \longrightarrow G$ telle que les propriétés i) ; ii) ; iii) ; iv du ***théorème 1.2*** *soient vérifiées.*

L'application développante D et la représentation d'holonomie ρ ne sont définies qu'à l'action de G près. Pour tout $g \in G$; on peut les remplacer par $g.D : \hat{x} \longrightarrow g.D(\hat{x})$ et $\rho^g : \gamma \longrightarrow g\rho(\gamma)g^{-1}$. L'application qui à chaque feuilletage fait correspondre sa représentation d'holonomie n'est pas en général bijective.

C'est une question souvent difficile que de savoir si une représentation $\rho : \pi_1 V^n \longrightarrow G$ est représentation d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie de V^n. Une condition suffisante est donnée dans le chapitre 4.

1.3 – Proposition [F_4]

Soient V^n une variété compacte et $\mathfrak{F}$ un G-feuilletage de Lie sur V^n ; on a les propriétés suivantes :

a) Les feuilles de $\mathfrak{F}$ sont difféomorphes

b) Les feuilles de $\mathfrak{F}$ sont simplement connexes si et seulement si la représentation d'holonomie ρ est injective

c) Les feuilles de $\mathfrak{F}$ sont denses dans V^n, si et seulement si, le groupe d'holonomie Γ de $\mathfrak{F}$, est dense dans G.

d) Les feuilles de $\mathfrak{F}$ sont compactes si et seulement si Γ est un sous-groupe discret cocompact de G.

On va à présent s'intéresser à des cas particuliers de feuilletages de Lie ; en fait tous les exemples connus de feuilletages de Lie.

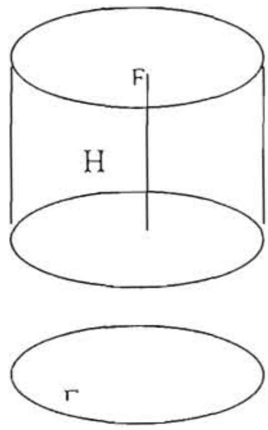
2 - Feuilletages de Lie modèles

2.1 – Feuilletage homogène [M_4]

Etant donnée une suite exacte courte de groupes de Lie :

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow H \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1$$

et un réseau cocompact Γ_H dans H ; les images dans $H/_{\Gamma_H}$ des classes à gauche modulo F sont les feuilles d'un G-feuilletage de Lie qualifié d'homogène - **[Fig. 1]**. L'homomorphisme φ est l'application développante du feuilletage et son groupe d'holonomie est l'image de Γ_H dans G par φ.



G **Fig. 1**

__Exemple 1__

La suite exacte courte $1 \longrightarrow \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow 1$ induit un feuilletage homogène sur le tore $T^n = \mathbb{R}^n / _{\mathbb{Z}^n}$; ce sont les feuilletages linéaires du tore ; leurs groupes d'holonomie sont isomorphes à $\mathbb{Z}^{n-p}$.

__Exemple 2__

Si G contient un réseau cocompact Γ, l'homomorphisme identique $1 \longrightarrow G \longrightarrow G \longrightarrow 1$ définit un G-feuilletage de Lie homogène sur la variété $G/_\Gamma$ dont le groupe d'holonomie est Γ.

__Exemple 3__

Soit $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ et a une valeur propre réelle de A différente de 1 et positive ainsi que tous ses conjugués.

Au moyen de A, on forme le produit semi-direct $H_A = \mathbb{R} \times_A \mathbb{R}^n$ avec la loi : $(t, v) . (t',v') = (t + t', A^t v' + v)$. Le groupe de Lie H_A contient le réseau cocompact $\Gamma_A = \mathbb{Z} \times_A \mathbb{Z}^n$.

Soit φ un covecteur propre de A associé à a (φ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ non nulle telle que $\varphi \circ A = a\varphi$).

On définit un homomorphisme $f_A : H_A \longrightarrow GA$

$$(t,v) \longrightarrow (a^t, \varphi v)$$

GA est le groupe des transformations affines croissantes de $\mathbb{R}$.

f_A est surjectif et induit un GA-feuilletage homogène sur la variété compacte

$V_A = H_A/_{\Gamma_A}$ dont le groupe d'holonomie est le sous-groupe de GA engendré par les éléments

$$(a,0) ; (1, \varphi(1,0,\ldots,0)) ; \ldots\ldots\ldots ; (1, \varphi(0, 0,\ldots,1)).$$

2.2 – Feuilletage image inverse

Etant donnée une application différentiable entre variétés ; $f : M \longrightarrow N$ et un G-feuilletage $\mathfrak{I}$ sur N, f est transverse au G-feuilletage $\mathfrak{I}$ de N si en chaque point f(x), l'espace tangent à N est somme de l'image de la différentielle de f en x et de l'espace tangent à $\mathfrak{I}$ en f(x) ; ces deux sous-espaces vectoriels pouvant avoir une intersection non vide. Si f est transverse à $\mathfrak{I}$; l'image inverse de $\mathfrak{I}$ par f est le G-feuilletage de M noté $f^*\mathfrak{I}$ qui admet pour cartes $(f^{-1}(u_i) ; f_i o f)$ où (u_i, f_i) est une carte de $\mathfrak{I}$.

2.3 - Feuilletage suspension

Soit B une variété différentiable et $f : \pi_1 B \longrightarrow G$ un homomorphisme de groupes. Si $\widetilde{B}$ est le revêtement universel de B ; $\pi_1 B$ opère sur le produit $\widetilde{B} \times G$. En effet, $\pi_1 B$ opère canoniquement sur $\widetilde{B}$ et opère également sur G au moyen de la représentation ρ.

Soit V la variété quotient obtenue $V = \dfrac{\widetilde{B} \times G}{\sim}$. Le feuilletage $\mathfrak{I}_\rho$ de $\widetilde{B} \times G$ par les $\widetilde{B} \times \{g\}$ est invariant par l'opération donc induit un G-feuilletage de Lie $\widetilde{\mathfrak{I}}_p$ transverse à la fibration de V sur B de fibre G.

Lorsque G et B sont compactes, la variété V est compacte et $\widetilde{\mathfrak{I}}_\rho$ est un G-feuilletage de Lie (porté par une variété compacte) dont ρ est la représentation d'holonomie.

Lorsque $\pi_1 B$ est un groupe libre ou bien abélien libre et la cohomologie de G sans torsion , on obtient [F_4] un G-feuilletage sur $B \times G$ qui induit sur B un feuilletage de Lie avec "singularités".

2.4 – Feuilletages classifiants

Un feuilletage $\mathfrak{I}$ (non nécessairement de Lie) est classifiant si le revêtement d'holonomie de chaque feuille est contractile.

Dans le cadre des feuilletages de Lie, cela signifie que les feuilles elles-mêmes sont contractiles puisqu'elles sont sans holonomie [F_1]. Ce qualificatif exprime la propriété universelle suivante :

Propriété [H]

Si $\mathfrak{I}$ est un feuilletage classifiant, alors tout autre G-feuilletage ayant le même groupe d'holonomie que $\mathfrak{I}$ (ou plus généralement ayant pour groupe d'holonomie un sous-groupe de celui de $\mathfrak{I}$) est image inverse de $\mathfrak{I}$.

Exemple.

Une suite exacte courte de groupes de Lie $1 \longrightarrow F \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 1$ où H contient un réseau cocompact Γ_H ; G et H résolubles et simplement connexes, définit un G-feuilletage de Lie homogène et classification sur la variété $H/_{\Gamma_H}$.

En effet, G et H sont contractiles [R_1] ; il en est alors de même pour F et donc pour les feuilles du G-feuilletage de $H/_{\Gamma_H}$.

2.5 – Sur la classification des feuilletages de Lie

Ce paragraphe est une mise au point des principaux résultats connus sur l'épineux problème de classification des feuilletages de Lie des variétés compactes.

Dans le cas où les groupes transverses des feuilletages sont nilpotents, la classification (à image réciproque près) est connue grâce aux travaux de **A.I. Malcev** **[M_8]** ; **A. Haefliger** **[H]** ; plus précisément on a le théorème suivant :

<u>Théorème</u> [H]

Tout feuilletage de Lie nilpotent sur une variété compacte est image inverse d'un feuilletage homogène.

<u>Preuve</u> [M_4]

En effet, le groupe d'holonomie Γ d'un tel feuilletage $\Im$ est un sous-groupe uniforme de type fini du groupe de Lie nilpotent, simplement connexe G définissant la structure transverse du feuilletage. On sait d'après les résultats de **Malcev** **[M_8]** que Γ est un réseau cocompact dans un groupe de Lie nilpotent simplement connexe H ; l'injection canonique i : $\Gamma \longrightarrow G$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme surjectif de manière que le diagramme suivant soit commutatif ; **[M_4]**

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & G \\ H \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad i = h \circ j$$

On obtient ainsi une suite exacte courte $1 \longrightarrow F \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 1$ qui définit un G-feuilletage $\Im'$ homogène et classifiant sur la variété $H/_\Gamma$ dont le groupe d'holonomie est Γ. $\Im$ est alors image inverse de . $\Im'$ **[paragraphe 2.4].**

Par contre dans le cas où le groupe transverse G est résoluble ; **Gaël Meigniez** a démontré le résultat suivant :

<u>Théorème</u> : [M_2]

Il existe des feuilletages de Lie résolubles sur des variétés compactes qui ne sont images inverse d'aucun feuilletage homogène.

Voici en résumé cette construction : On considère dans le groupe GA le sous-groupe Γ engendré par les éléments $(a, 0)$; $(0,1)$; $(a',0)$ où a est une unité algébrique (nombre complexe non nul qui est un entier algébrique sur $\mathbb{Z}$ ainsi que son inverse) et a' un réel strictement positif quelconque.

Soit V_B la variété de dimension 5 obtenue par suspension du difféomorphisme du tore T^4 induit par $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Considérons l'homomorphisme : $\mathbb{R} \ltimes_B \mathbb{R}^4 \longrightarrow GA$

$$(t,v) \longrightarrow (a^t, \Psi v)$$

où $\Psi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(v_1, v_2) \longrightarrow \varphi v_1 + a'\varphi v_2$; où φ est un covecteur propre associé à a.

ψ défini un feuilletage homogène sur V_B ; noté $\mathfrak{I}_B$. $\mathfrak{I}_B$ est affine et induit un nouveau GA-feuilletage sur $V = V_B \times S^1$. A partir de V, on construit une variété compacte de dimension 6 qui porte un GA-feuilletage de Lie dont le groupe d'holonomie est Γ.

Γ est polycyclique quand exactement a' est une unité algébrique **[M_2]**. En choisissant un a' transcendant on obtient un GA-feuilletage de Lie qui ne peut s'obtenir comme image inverse de feuilletage homogène.

Cette construction de G. Meigniez réactualise la question de **A. Haefliger**, celle de caractériser pour un groupe de Lie G, les sous-groupes Γ qui apparaissent comme groupe d'holonomie d'un G-feuilletage porté par une variété compacte. Des conditions nécessaires apparaissent immédiatement i) Γ est de type fini ; ii) $G/\overline{\Gamma}$ est compact.

Comme on peut le remarquer avec **Haefliger**, la condition i) est suffisante lorsque G est compact (des détails de cette construction sont donnés au **chapitre 2**).

Les conditions i) et ii) sont suffisantes dans le cas où G est nilpotent **[chapitre 4]**. Il existe une autre condition nécessaire moins évidente ; celle de la génération compacte dont nous avons parlé dans le chapitre 2. On peut se demander avec **Haefliger [H]** si les sous-groupes de génération compacte des groupes de Lie résolubles sont groupes d'holonomie de feuilletages de Lie sur des variétés compactes. Une condition suffisante est donnée dans **[M_2]**.

3 – <u>Sur le théorème de Tischler</u>

<u>Théorème</u> [T]

S'il existe sur une variété compacte V^n une forme différentielle fermée sans singularités, alors V^n est fibrée sur le cercle.

La donnée d'une 1-forme ω fermée sans singularités sur V^n définit un $\mathbb{R}$-feuilletage sur V^n. Ainsi il existe un revêtememnt W de V^n, une application $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ et une représentation $h : \pi_1 V^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dont l'image (le groupe des périodes de ω) soit un sous-groupe Γ tel que le diagramme de $\mathbb{Q}$-variétés.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d] \\ V^n \arrow[r] & \mathbb{R}/_\Gamma \end{tikzcd} \quad \text{commute}$$

Ce que fait **Tischler** dans **[T]** consiste à remplacer ω par une autre forme ω' fermée, sans singularités suffisamment proche de ω et telle que Γ devienne fermée dans $\mathbb{R}$. La $\mathbb{Q}$-variété $\mathbb{R}/_\Gamma$ est alors une variété, compacte de dimension 1 donc difféomorphe à S^1.

Nous considérons q formes différentielles fermées sans singularités et linéairement indépendantes alors l'existence de telles formes sur V^n compacte entraîne nécessairement celle d'une fibration de V^n sur le tore T^q ($q \leq n$).

Cette dernière situation est équivalente à un T^q-feuilletage de Lie sur V^n. si on se donne un G-feuilletage de Lie sur V^n où G est un grouupe de Lie connexe compact non nécessairement commutatif ; un des buts de ce travail est de montrer que cela ne nécessite pas une fibration de V^n sur le tore maximal de G.

On sait **[F₁]** que l'espace quotient des G-feuilletages de Lie des variétés compactes sont des $\mathbb{Q}$-variétés au sens de **[B₁]** , on a le diagramme de $\mathbb{Q}$-variétés.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ V^n \arrow[r, "\bar{f}"] & G/_{\Gamma} \end{tikzcd} \quad \text{commutatif.}$$

Dans le cas où les feuilles sont fermées, $G/_\Gamma$ est une variété. On donne dans ce travail des conditions suffisantes pour qu'un G-feuilletage de Lie soit proche en un sens naturel d'un G-feuilletage à feuilles fermées et que les variétés supports fibrent sur des espaces homogènes compactes qui sont quotients du groupe G par des réseaux.

Plus précisément, dans le cas où le groupe de Lie G est nilpotent et simplement connexe avec une algèbre de Lie ayant une base dans laquelle les constantes de structure sont rationnelle, on montre que les groupes d'holonomie des G-feuilletages sont "déformables" en des sous-groupes discrets uniformes de G. Puisqu'il existe des feuilletages de Lie nilpotents (portés par des variétés compactes) dont les groupes d'holonomie ne contiennent aucun sous-groupe discret uniforme (la construction d'un exemple dû à **P. Caron** est rappelée dans le chapitre 4), nous supposerons que les groupes transverses de nos feuilletages en contiennent.

On aboutit ainsi à un théorème "d'approximation" pour les N-feuilletages où N est le groupe de **Heisenberg** de dimension 3.

Les seuls groupes de Lie nilpotents simplement connexes de dimension 3, étant d'une part $\mathbb{R}^3$ et d'autre part N, on obtient le théorème suivant qu'on démontre dans le chapitre 4 :

Théorème

Si V^n est une variété compacte de dimension $n \geq 3$ munie d'un G-feuilletage de Lie nilpotent de codimension 3, alors V^n est fibrée sur $G/_\Gamma$ où Γ est un réseau de G.

Cette condition est évidemment suffisante à ce que V^n porte un G-feuilletage de Lie.

On obtient ainsi une caractérisation des variétés compactes qui portent des feuilletages de Lie nilpotents de codimension 3.

CHAPITRE 2

QUELQUES OBSTRUCTIONS COHOMOLOGIQUES A L'EXISTENCE DE FEUILLETAGES DE LIE

Dans ce chapitre on met en évidence une formule reliant la cohomologie de **De Rham** et la cohomologie singulière. A l'aide de cette formule, on interprête un résultat de **E. Fédida** sur l'existence des feuilletages de Lie en termes de cohomologie singulière.

1 – Rappels de cohomologies [D_3]

1.1 – Cohomologie simpliciale

Définition 1 :

i) Un simplexe de dimension n est l'enveloppe convexe de (n+1) points de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$; on le note σ^n.

ii) Un simplexe de dimension k d'une variété différentielle V^n, $n \geq k$ est un plongement différentiable du simplexe σ^k de $\mathbb{R}^k$ dans V^n.

iii) Si Δ est un simplexe de dimension n sous-tendu par les sommets $(\alpha_0, \alpha_1,.., \alpha_n)$, les faces de Δ sont les simplexes de dimension n-1 sous-tendus par les sommets $(\alpha_0, \alpha_1, \dots,\alpha_{n-1})$; $(\alpha_0, \alpha_1, \dots,\alpha_{n-2}, \alpha_n)$;..........; $(\alpha_1, \alpha_2,\dots \alpha_n)$.

Définition 2

Un complexe simplicial est une réunion de simplexes de dimension quelconque qui possède les propriétés suivantes :

1) Si un simplexe appartient à la réunion, toutes ses faces de dimension quelconque appartiennent à la réunion.

2) Deux simplexes ne peuvent se rencontrer que suivant une face entière et une seule, de dimension donnée.

Définitions 3

i) Une chaîne entière est une combinaison linéaire formelle finie de simplexes ; on note

$$C_k = \sum_{i=i}^{k} \lambda_i \sigma_i \ ; \ \lambda_i \in \mathbb{Z} \ ; \ \sigma_i \text{ sont des simplexes.}$$

ii) Une cochaîne de dimension k est une fonction linéaire sur des chaînes entières de dimension k du complexe à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

iii) Le bord d'une chaîne C_k est une chaîne de dimension k-1 définie par

$$\partial C_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \partial \sigma_i \quad \text{où si } \sigma^n = [\alpha_o, \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n] \text{ est un n-simplexe ;}$$

$$\partial \sigma^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \ \sigma^{n-1}_{(i)} \ ; \ \sigma^{n-1}_{(i)} \text{ est la ième face de } \sigma^n.$$

iv) Le cobord d'une cohaîne C^k est une cochaîne C^{k-1} définie par :

$$\delta C^k(\sigma_i) = C^k(\partial \sigma_i)$$

On a les égalités suivantes : $\partial \circ \partial = 0$ et $\delta \circ \delta = 0$.

Les cochaînes (resp. chaînes) vérifiant $\delta C^k = 0$ (resp $\partial C_k = 0$) sont appelées les cocycles (resp. cycles).

Les cocycles (resp. cycles) de la forme $C^k = \delta C^{k-1}$ (resp. $C_k = \partial C_{k-1}$) sont dits équivalents à 0.

Définition 4

Le k-ième groupe de cohomologie d'un complexe simplicial M est le groupe quotient $H^k(M, \mathbb{Z})$ du groupe de cocycles par le sous-groupe de cocycles équivalents à 0.

1.2 – Cohomologie cellulaire

Pour un espace cellulaire $X = \cup e_\alpha$, dont les e_α sont les cellules ; on note $X^p = \bigcup_{\dim e_\alpha \leq p} e_\alpha$. X^p est la squelette de dimension p. On définit le complexe

de chaînes cellulaires en posant : $C_p(X, \mathbb{Z}) = H_p(X^{p-1}, X^p, \mathbb{Z})$ où

$H_p(X^{p-1}, X^p, \mathbb{Z})$ est l'homologie singulière de la paire (X^p, X^{p-1}) à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui est défini par le complexe

$$C_p(X^p, X^{p-1}, \mathbb{Z}) = C_p(X^p, \mathbb{Z})_{/C_p(X^{p-1}, Z)}.$$

La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C_\bullet(X^{p-1}, X^{p-2}, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_\bullet(X^p, X^{p-2}, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_\bullet(X^p, X^{p-1}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

donne lieu à une application bord.

$\partial : H_p(X^p, X^{p-1}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}, \mathbb{Z})$ et on a $\partial \circ \partial = 0$.

On obtient ainsi un module différentiel gradué $(C_\bullet(X, \mathbb{Z}), \partial)$. En considérant le complexe dual défini par : $C^n(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(C_n(X, \mathbb{Z}), \mathbb{R})$ qui sont l'ensemble des homomorphismes de $C_n(X, \mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R}$ et δ l'application duale de ∂. La cohomologie du complexe $(C^*(X, \mathbb{R}), \delta)$ est appelée la cohomologie cellulaire de X.

Définition

Un complexe cellulaire K est un espace cellulaire dont chaque cellule est attachée à une cellule de dimension plus petite.

1.3 - Homologie singulière des complexes cellulaires [D₃]

On considère B^n le disque unité dans $\mathbb{R}^n$ et $f : S^{n-1} \longrightarrow \{*\}$ une application. C'est une application constante de S^{n-1} sur un point. On obtient ainsi un complexe cellulaire $B_n \bigcup_f \{*\}$ homéomorphe à la sphère S^n ; l'homologie singulière de ce complexe est celle de S^n.

Si $K = \sigma^n \cup_f \sigma^{n-1} \cup .... \cup \{*\}$ est un complexe cellulaire quelconque où les σ^k sont les celllules de dimension k. f induit une application du bord de la cellule σ^n dans le bouquet de sphère de la squelette K^{n-1}. On définit une application ∂ de ce complexe par:

$\partial\sigma^n = \sum_i \deg f_i \, \sigma_i^{n-1}$ où f_i est la restriction de f à la i-ième sphère du bouquet.

deg f_i est le degré de f_i.

∂ définit une homologie de K appelée l'homologie singulière du complexe cellulaire K.

2 – Une formule reliant la cohomologie de De Rrham et la cohomologie singulière

Dans ce paragraphe, V^n est supposée être une variété différentiable de dimension n qui est réunion de simplexes simpliciaux qui en font un complexe simplicial.

2.1 - Proposition

$H^k_{DR}(V^n, \mathbb{R})$ est isomorphe à $H^k(V^n, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ où $H^k_{DR}(V^n, \mathbb{R})$ est k-ième groupe de cohomologie de De Rham de V^n et $H^k(V^n, \mathbb{Z})$ le k-ième groupe de cohomologie singulière.

Pour prouver cette proposition nous aurons besoin des lemmes suivants :

Lemme 1

$H^k_{DR}(V^n, \mathbb{R})$ est isomorphe à $H^k_{sp}(V^n, \mathbb{R})$ où $H^k_{sp}(V^n, \mathbb{R})$ est le k-ième groupe de cohomologie simpliciale de V^n.

Preuve : On sait que $H^k_{sp}(V^n, \mathbb{R})$ est isomorphe à Hom ($H_k(V^n, \mathbb{R}), \mathbb{R}$).

$$\text{Soit } \varphi \quad H^k_{D.R}(V^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(H_k(V^n, \mathbb{R}), \mathbb{R})$$

$$[\omega_k] \longrightarrow \varphi_{[\omega_k]} : H_k(V^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$[C_k] \longrightarrow \int_{C_k} \omega_k$$

où si $C_k = \sum_i \lambda_i \sigma_i$, $\int_{Ck} \omega_k = \sum_i \int_{\sigma_i} \omega_k$

- φ est un homomorphisme de groupes : En effet, pour toute classe $[C_k]$ de chaînes

$$\varphi\left([\omega_k + \alpha_k]\right)[C_k] = \sum_i \int_{\sigma_i} (\omega_i + \alpha_i) = \sum_i \int_{\sigma_i} \omega_i + \sum_i \int_{\sigma_i} \alpha_i = \left(\varphi_{[\omega_k]} + \varphi_{[\alpha_k]}\right)[C_k]$$

donc $\varphi[\omega_k + \alpha_k] = \varphi[\omega_k] + \varphi[\alpha_k]$.

- $\varphi_{[\omega_k]}$ ne dépend pas du choix de C_k dans $[C_k]$ ni de ω_k dans $[\omega_k]$. en effet si

$\alpha_k = \omega_k + d\beta_k$;

$$\int_{\sigma_i} \alpha_i = \int_{\sigma_i} \omega_i + \int_{\sigma_i} d\beta_i = \int_{\sigma_i} \omega_i + \int_{\partial\sigma_i} \beta_i = \int_{\sigma_i} \omega_i \quad \text{donc } \varphi_{[\omega_k]} = \varphi_{[\alpha_k]}$$

Si $C'_k = C_k + \partial Z_{k+1}$; $\int_{C'_k} \omega = \int_{C_k} \omega + \int_{\partial Z_{k+1}} \omega = \int_{C_k} \omega + \int_{Z_{k+1}} d\omega = \int_{C_k} \omega$;

donc $\varphi_{[\omega_k]}$ est bien défini.

- φ est injectif : En effet, $\mathrm{Ker}\,\varphi = \left\{\omega_k / \varphi_{[\omega_k]} = 0\right\}$.

$\varphi_{[\omega_k]} = 0$; entraîne que $\forall C_k$: $\int_{C_k} \omega = 0$, donc $\omega_k = d\beta_k$ ce qui entraîne que $[\omega_k]=0$

- $\varphi_{[\omega_k]}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et est surjectif.

Lemme 2

Tout complexe simplicial est un complexe cellulaire.

Preuve

En effet si V^n est un complexe simplicial, la squelette de dimension k est

$X^k = \bigcup_{i\leq k} \sigma_i$ où la réunion est prise sur tous les simplexes de dimension inférieure ou

égale à k.

Conséquence

$H^k_{cel}(V^n, \mathbb{R})$ est isomorphe à $H^k_{sp}(V^n, \mathbb{R})$ où $H^k_{cel}(V^n, \mathbb{R})$ est le k-ième

groupe de cohomologie cellulaire de V^n.

Lemme 3

$H^k_{cel}(V^n, \mathbb{R})$ *est isomorphe à* $H^k_{sg}(V^n, \mathbb{R})$ *où* $H^k_{sg}(V^n, \mathbb{R})$ *est le k-ième*

groupe de cohomologie singulière à coefficients dans $\mathbb{R}$.

La preuve du **Lemme 3** est classique et peut-être regardée dans **[D_1].**

Preuve de la proposition 2.1

C'est un résumé des lemmes précédents :

$$H^k_{D.R}(V^n, \mathbb{R}) \simeq H^k_{sp}(V^n, \mathbb{R}) \simeq H^k_{cel}(V^n, \mathbb{R}) \simeq H^k_{sg}(V^n, \mathbb{R}) \simeq H^k(V^n, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

3 – Feuilletages de Lie et Cohomologie singulière

3.1 – Proposition

Si une variété V^n de dimension n, compacte, simplement connexe admet un G-feuilletage de Lie de codimension $q \leq n$; alors $H^3(V^n, \mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ $(p \neq 0)$.

Pour prouver cette proposition nous utilisons le théorème suivant dû à **E. Fédida [F_3]**.

3.2 – Théorème [F_3]

Si une variété compacte simplement connexe V^n admet un G-feuilletage de Lie, alors $H^3_{D.R}(V^n, \mathbb{R}) \neq 0$.

La preuve de ce théorème utilise le lemme suivant qu'on trouve dans **[F_3].**

Lemme

Si un espace fibré E a pour base B un groupe de Lie compact connexe et simplement de dimension > 0 et si la cohomologie des fibres F est nulle en dimension assez grande, alors le 3 ième nombre de Betti de E est non nul.

Preuve du Lemme [F_3]

Soit ℓ le rang de B, on sait [S] qu'il existe un produit de sphère $P = S^{n_1} \times \ldots\ldots \times S^{n_\ell}$ et une application continue $\lambda : P \longrightarrow B$ qui induit un isomorphisme sur la cohomologie réelle. De plus les n_i sont les degrés des primitifs de la cohomologie de B et que l'un deux est égal à 3. On peut donc écrire $P = S^3 \times S$ où S est un produit de sphères. Soit E_λ l'espace fibré de base P et de même fibre F, image réciproque de $E \longrightarrow B$ par $\lambda : P \longrightarrow B$. Soit $\bar{\lambda} : E_\lambda \longrightarrow E$ l'homomorphisme de fibrés correspondant. P et B sont simplement connexes, la restriction de $\bar{\lambda}$ à F est un homéomorphise et $\lambda^* : H^*(B, \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(P, \mathbb{R})$.est un isomorphisme.

On sait dans ces conditions que $\bar{\lambda}^* : H^*(E, \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(E_\lambda, \mathbb{R})$ est un isomorphisme. Quitte donc à remplacer E par E_λ on peut supposer que E est fibré de base $S^3 \times S$ et donc de base S^3.

La base étant à présent S^3 on applique la suite exacte de **Wang .**

$$\ldots\ldots\ H^i(F) \xrightarrow{\theta} H^{i-2}(F) \longrightarrow H^{i+1}(E) \longrightarrow H^{i+1}(F) \longrightarrow \ldots\ldots$$

où θ est l'opérateur de dérivation.

Si $H^3(E, \mathbb{R}) = 0$, il existerait $u \in H^2(F)$ tel que $\theta u = 1 \in H^0(F)$. Mais la cohomologie de F s'arrête ; on peut donc trouver un n tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. En dérivant la relation $u^n = 0$ on trouve $n\,.u^{n-1}\,\theta(u) = 0$, d'où $u^{n-1} = 0$, contradiction ; donc $H^3(E, \mathbb{R}) \neq 0$.

<u>Preuve de la proposition 3.1</u>

L'existence d'un G-feuilletage de Lie sur V^n compacte simplement connexe, entraîne que V^n est un fibré de base G, un groupe de Lie compact et simplement connexe. D'où $H^3(V^n, \mathbb{R}) \neq 0$. D'après la **proposition 2.1,** on a

$H^3(V^n, \mathbb{Z}) \neq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $(p \neq 0)$

puisque $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = 0 \ \ \forall\, p \neq 0$.

3.3 – <u>Applications</u> :

On construit dans ce paragraphe une variété compacte et simplement connexe M telle que $H^3(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $p \neq 0$.

Soit K le complexe cellulaire obtenu en attachant une cellule de dimension 4 à la sphère S^3 au moyen d'une application f de degré 3 [Fig.2]. On note $K = B^4 \bigcup_f S^3$; B^4 est le disque unité de $\mathbb{R}^4$. K est un complexe cellulaire de dimension 4. K est un espace topologique connexe compacte et simplement connexe $H^3(K) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

D'après un théorème de Morse, il existe un voisinage tubulaire W de K dans $\mathbb{R}^9$ qui est une variété différentiable à bord de dimension 9 ; W se retracte par déformation sur K.

La variété différentiable $V = \partial W$, bord de W est connexe compacte simplement connexe de dimension 8 ; on a :

$$H^3(V) = H^3(W) = H^3(K) = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}.$$

Remarques

1) La variété V est un fibré en cercles S^1 qui ne possède pas de feuilletages de Lie.
2) Pour tout entier $p > 0$; on peut construire de la même façon une variété connexe compacte et simplement connexe M vérifiant $H^p(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p_{\mathbb{Z}}$. Il suffit de considérer le complexe cellulaire obtenu en attachant la boule unité B^{p+1} de $\mathbb{R}^{p+1}$ à la sphère S^p au moyen d'une application f de degré p.

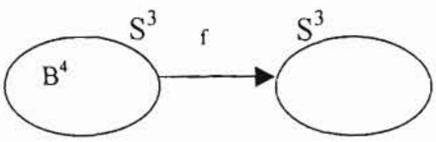


Fig. 2

Toujours à propos de l'existence des feuilletages de Lie, mentionnons la propriété de génération compacte qui a été étudiée de manière approfondie par **G. Meigniez .**

4 – Génération compacte

4.1 – Définitions

i) Soit $\mathcal{G}$ une partie génératrice finie d'un groupe K de type fini. On appelle trace d'un mot $v_1, \ldots\ldots, v_n \in \mathcal{G} \cup \mathcal{G}^{-1}$, l'ensemble des n + 1 produits partiels

$1, v_1 ; v_1 v_2 , \ldots\ldots, v_1 v_2 \ldots\ldots v_n$.

ii) Soit K un sous-groupe d'un groupe de Lie G ; K est dit de génération compacte dans G si pour toute partie compacte K' de G ; il existe un compact K" de G tel que tout élément de $K \cap K'$ puisse être écrit comme un mot dont la trace est contenue dans K".

4.2 - Théorème [M_5]

Soit $\mathfrak{I}$ un G-feuilletage de Lie de groupe d'holonomie Γ sur une variété compacte V^n. Alors

1) Γ est un sous-groupe uniforme de type fini de G.

2) Γ est de génération compacte.

La preuve de la partie 2) de ce théorème est dûe à **Y. Carrière** :

Preuve

V^n étant compacte, $\pi_1 V^n$ et par suite Γ sont de type fini et puisque V^n fibre sur $G/_{\overline{\Gamma}}$, Γ est uniforme ; ce qui prouve 1).

Pour 2) ; Choisissons dans $\widetilde{V}^n$ revêtement universel de V^n, un compact P rencontrant $D^{-1}\{1\}$; où $D : \widetilde{V}^n \longrightarrow G$ est l'application développante de $\mathfrak{I}$. On suppose que P est un domaine fondamental c'est-à-dire $\widetilde{V}^n = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} \gamma(P)$. L'ensemble

$\mathcal{G}$ - $\{\gamma \in \Gamma \,/\, \gamma(P) \cap P \neq \varnothing\}$est une partie génératrice finie de Γ. Soit K un compact de G, on peut supposer K connexe par arcs et contenant 1. Soit $\gamma \in \Gamma \cap K$. Comme D est équivariante ,$\gamma(P) \cap D^{-1}(\gamma) \neq \varnothing$. Donc $P \cap D^{-1}(K) \neq \varnothing$ et $\gamma(P) \cap D^{-1}(K) \neq \varnothing$.

Nous pouvons supposer G simplement connexe, si bien que les fibres de D sont connexes et finalement $D^{-1}(K)$ est connexe par arcs.

Donc P et $\gamma(P)$ peuvent être joints par un chemin dans $D^{-1}(K)$. Les translatés de P rencontrés successivement par ce chemin forment précisément une suite du type

P ; $\gamma_1(P)$; $\gamma_1\gamma_2(P)$, ..., $\gamma_1\gamma_2 \ldots\ldots\ldots \gamma_n(P)$ où les $\gamma_i \in \mathcal{G}$ et $\gamma_1.\gamma_2 \ldots\ldots .\gamma_n = \gamma$.

Pour chaque $i \in \{0, 1,\ldots,n\}$ le translaté $\gamma_1\gamma_2\ldots\ldots\gamma_i(P)$ rencontre $D^{-1}(K)$. En d'autres termes, $\gamma_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \gamma_i D(P)$ rencontre K . Donc $\gamma_1,\ldots,\gamma_i \in K\,D(P)^{-1}$. Ainsi on a

$\Gamma \cap K \subset \langle \mathcal{G} \rangle\, K\, D(P)^{-1}$. □

Dans **[M$_5$]** , **G. Meigniez** a établi une caractérisation très explicite pour reconnaître les sous-groupes de génération compacte dans les groupes de Lie résolubles.

Quant à la question (ouverte) de **Haefliger** de savoir si les sous-groupes Γ d'un groupe de Lie G qui sont de génération compacte, sont groupe d'holonomie de G-feuilletages de Lie portés par une variété compacte, on trouve des éléments dans **[M$_2$]** , **[M$_4$]**.

Comme le fait remarquer **G. Meigniez**, toute la difficulté de la question de **Haefliger,** restreinte aux feuilletages de Lie résolubles, se trouve déjà dans cette très simple famille à un paramètre : Soit GA le groupe des transformations affines croissantes de $\mathbb{R}$. Fixons $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ et Γ le sous-groupe de GA engendré par les éléments (a, 0) ; (1-a, 0) ; (0,1).

Γ est de génération compacte **[M$_2$].** Si a ou 1-a est une unité algébrique Γ peut-être réalisé comme groupe d'holonomie d'un GA-feuilletage de Lie porté par une variété compacte **[M$_4$].** On ne sait pas si c'est toujours le cas lorsque a est irrationnel.

Nous déduisons du **Théorème 4.2,** la caractérisation suivante des sous-groupes de génération compacte des groupes de Lie compacts :

4.3 -Proposition

Dans un groupe de Lie compact, tout sous-groupe Γ de type fini est réalisable comme groupe d'holonomie d'un feuilletage de Lie porté par une variété compacte ; en particulier Γ est de génération compacte.

Preuve

Soit V^n une variété compacte dont le groupe fondamental se surjecte sur Γ et $\rho : \pi_1 V^n \longrightarrow G$ la représentation correspondante. On suspend la représentation ρ ; on obtient un feuilletage $\mathfrak{I}_\rho$ sur le G-fibré principal E de base V^n ; $\mathfrak{I}_\rho$ est transverse à la fibration et est un G-feuilletage de Lie sur la variété compacte E, dont ρ est une représentation d'holonomie.

CHAPITRE 3

FEUILLETAGES DE LIE ET TORES MAXIMAUX DES GROUPES DE LIE

Ce chapitre examine la question de **E. Fédida** de généraliser le **théorème de Tischler** aux feuilletages de Lie de la façon suivante :

Soit V^n une variété compacte admettant un G-feuilletage de Lie $\mathfrak{I}$ non trivial, alors V^n est fibrée sur T^p où T^p est un tore maximal de G.

Le groupe de Lie G sera supposé compact de sorte que ses tores maximaux ne soient pas triviaux.

La réponse à cette question est négative, on construit à cet effet des exemples non banals même dans le cas où le feuilletage $\mathfrak{I}$ est supposé minimal.

Nous donnons toutefois une condition nécessaire d'existence deG-feuilletage de Lie portant sur les tores maximaux de G.

1 – Rappels

On pourra trouver les démonstrations des résultats de ce paragraphe dans le livre de **J. Dieudonné** : Eléments d'analyse, tome V. **[D_2 p. 44 – 51]**.

1.1 – Proposition

Soit G un groupe de Lie connexe, compact d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$; notons $C(\mathcal{G})$ le centre de $\mathcal{G}$ et $D\mathcal{G}$ sont idéal dérivée. On a :

i) $\mathcal{G}$ est isomorphe à $C(\mathcal{G}) \oplus D\mathcal{G}$.

ii) Lorsqu'une algèbre de Lie réelle vérifie la condition i) alors elle est isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie connexe compact.

Remarque

Dans ii) le groupe de Lie compact en question est isomorphe au produit $T^n x K$ où K est un groupe de Lie connexe compact simplement connexe et semi-simple.

1.2 – Définition

On appelle tore maximal d'un groupe de Lie connexe G, le plus grand (au sens de l'inclusion) sous-groupe de Lie connexe compact et commutatif de G.

On sait que tout groupe de Lie connexe compact et commutatif est isomorphe à un tore **[D_2]**. Nous en déduisons que si H est un tore maximal de dimension p d'un groupe de Lie connexe G de dimension $n \geq p$, alors H est isomorphe à T^p.

1.3 – Propriétés

Soit G un groupe de Lie connexe, compact de dimension n, on a les propriétés

i) Les tores maximaux de G sont isomorphes et deux à deux conjugués

ii) Tout sous-groupe fermé connexe et abélien de G est contenu dans un tore maximal de G.

iii) Le groupe de Lie est réunion de ses tores maximaux.

Il découle de ces propriétés que le tore maximal d'un groupe de Lie connexe compact est unique à isomorphisme près.

Puisque les conjugués du tore maximal recouvre G, le tore maximal d'un groupe de Lie connexe compact est non trivial.

Dans le cas où G n'est pas compact, le tore maximal de G peut être trivial, c'est par exemple le cas des groupes de Lie nilpotents et simplement connexes.

Remarques

1) Le tore maximal d'un groupe de Lie connexe compact ne peut-être distingué à moins que le groupe ne soit lui-même isomorphe à un tore.

2) Le tore maximal d'un groupe de Lie G connexe compact et simplement connexe ne peut pas être un facteur direct de G.

La propriété "d'être un tore maximal" se lit dans les algèbres de Lie de façon suivante :

1.3 - Proposition

Pour qu'un groupe de Lie connexe H immergé dans un groupe de Lie G compact soit un tore maximal de G, il faut et il suffit que son algèbre de Lie h soit une sous-algèbre de Lie commutative maximale de l'algèbre de Lie g de G.

2 – Feuilletages de Lie et tores maximaux des groupes de Lie

Nous donnons dans la première partie de ce paragraphe des exemples de feuilletages de Lie qui illustrent la pertinence de la question de **E. Fédida** et des conditions nécessaires d'existence en rapport avec le tore maximal.

Dans une deuxième partie on répond négativement à la question en construisant des contre exemples.

A. Exemples

A-a : Proposition

Soit V^n une variété compacte de dimension n, munie d'un G-feuilletage de Lie $\mathcal{F}$ de codimension $q \leq n$. On suppose que le groupe de Lie G est connexe et commutatif. Alors la variété V^n est fibré sur le tore maximal de G.

Preuve

G étant connexe et commutatif, il existe un entier p, $0 \leq p \leq q$ tel que G soit isomorphe au produit $T^p \times \mathbb{R}^{q-p}$, T^p est à un isomorphisme près, le tore maximal de G. Le feuilletage $\mathfrak{I}$ peut être défini par q formes de pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_q$ fermées et linéairement indépendantes en chaque point. Donc V^n est fibrée sur T^q [T].En composant cette fibration avec celle de T^q sur T^p, on obtient une fibration de V^n sur T^p.

Il existe bien de telles variétés V^n ; on peut les construire de la façon suivante :

Soit m un entier > q − p et $\mathfrak{I}_1$ le feuilletage homogène définie par la suite exacte canonique $1 \longrightarrow F \longrightarrow \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{q-p} \longrightarrow 1$.

La variété $T^p \times T^m$ possède un G-feuilletage de Lie.

Cette proposition généralise le **théorème de Tischler** au sens de la question de **E. Fédida** pour les groupes de Lie connexes et commutatifs non nécessairement compacts.

Supposons dans la proposition précédente que le groupe de Lie G soit connexe et nilpotent. On sait que dans ces conditions G possède un unique sous-groupe K-compact maximal qui est en plus central **[R₁]** ; K est alors commutatif et donc isomorphe au tore maximal T^p de G.

G est difféomorphe à $T^p \times \mathbb{R}^m$ **[R₁]** ; Et il existe une submersion du revêtement universel $\widetilde{V}^n$ sur T^p. Cette submersion est obtenue en composant la fibration localement triviale de $\widetilde{V}^n$ sur G induite par la structure de G-feuilletage de Lie avec celle de G sur T^p donnée par la projection de G sur T^p. □

A-b - Proposition

Soit V^n une variété compacte et simplement connexe munie d'un G-feuilletage de Lie $\mathfrak{I}$ où G est un groupe de Lie connexe de tore maximal T^p. On suppose que le

T^p fibré principal $G/_{T^p}$ possède une section, alors V^n est fibrée sur T^p.

Preuve

L'existence d'un tel feuilletage de Lie $\mathfrak{I}$ entraîne celle d'une fibration de V^n sur G ; donc G est compact et possède un tore maximal T^p non trivial **[proposition 1.3]**. Puisque le T^p – fibré principal $G/_{T^p}$ possède une section, G est difféomorphe à $T^p \times G/_{T^p}$. Par composition on obtient une fibration localement triviale de V^n sur T^p.

□

Remarque

Lorsque V^n est non simplement connexe, G n'est pas nécessairement compact et on peut seulement affirmer dans la proposition précédente l'existence d'une submersion de $\widetilde{V}^n$ sur le tore maximal T^p de G.

Voici un exemple de cette situation : On pose $G = SL_2(\mathbb{R})$ le groupe des matrices 2 x 2 de déterminant égal à 1. Le tore maximal de G est isomorphe au cercle S^1. La projection $p : SL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{R})/_{S^1}$ possède une section donnée par la décomposition : $SL_2(\mathbb{R}) \simeq S^1 . GA$ où GA est le groupe des transformations affines croissantes de $\mathbb{R}$.

On en déduit que si une variété compacte V^n admet un $SL_2(\mathbb{R})$ –feuilletage de Lie, $\widetilde{V}^n$ submerge le cercle S^1.

Nous verrons dans les exemples suivants qu'une variété compacte admettant un S^3-feuilletage de Lie ne fibre pas nécessairement sur le cercle S^1.

La proposition suivante donne une condition nécessaire pour qu'une variété compacte admette un G-feuilletage de Lie.

A-c - **Proposition**

Soit V^n une variété compacte munie d'un G-feuilletage de Lie où G est un groupe de Lie connexe compact. Alors V^n est fibrée sur la composante neutre de l'intersection des tores maximaux de G.

Preuve

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G se décompose : $C(\mathcal{G}) \oplus D\,\mathcal{G}$ **[proposition 1]** $C(\mathcal{G})$ et $D\mathcal{G}$ désignent respectivement le centre et l'idéal dérivé de $\mathcal{G}$. Posons r = dim $C(\mathcal{G})$

V^n admet un T^r x K-feuilletage de Lie où K est un groupe de Lie connexe compact simplement connexe et semi-simple. T^r est la composante neutre du centre C(G) de G. En effet ; Lie C(G) = $C(\mathcal{G})$ donc : Lie C(G) = $C(\mathcal{G})$ = Lie (T^r) ; Puisque K est semi-simple C(K) est discret et donc T^r est la composante neutre de C(G).

Or $C(G) = \bigcap_{g \in G} g\, T^p g^{-1}$ **[D₂].**

On en déduit que V^n est fibrée sur T^r ; qui est la composante neutre de l'intersection des tores maximaux de G. □

Remarques

Si on suppose dans la proposition précédente G non semi-simple.

Alors : 1) V^n fibre sur un tore non trivial de G

2) $H^1(V^n) \neq 0$.

En effet si G est non semi-simple $C(\mathcal{G}) \neq 0$ et $r > 0$; on applique la **proposition A-c**.

Corollaire :

Les feuilletages de Lie semi-simples sont les seuls feuilletages de Lie des variétés compactes et simplement connexes.

Ce corollaire justifie l'importance d'étudier les feuilletages de Lie semi-simples et leur classification. Nous donnons quelques exemples à ce sujet.

B – <u>Contre – exemples</u>

B-4 – <u>Proposition</u>

Pour tout groupe de Lie connexe compact semi-simple et simplement connexe G il existe un G-feuilletage de Lie $\mathfrak{F}$ à feuilles denses porté par une variété compacte qui ne fibre pas sur le tore maximal de G.

La démonstration utilise le lemme suivant dont nous donnons une preuve géométrique:

<u>Lemme</u>

Soit Σ la surface compacte orientable de genre 2 ; il n'existe pas une suite exacte

$1 \longrightarrow N \longrightarrow \pi_1\Sigma. \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 1$ où N est un sous-groupe normal de type fini de $\pi_1\Sigma$.

<u>Preuve du lemme</u>

L'existence d'une telle suite entraîne celle d'un revêtement Σ de Σ de groupe $\mathbb{Z}$ avec $\pi_1\Sigma = N$.

$\pi_1\Sigma$ est non commutatif sinon $\pi_1\Sigma$ serait résoluble. Comme le groupe du revêtement $p : \tilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ est isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}$, nous en déduisons que Σ est une surface non compacte à deux bouts de genre fini **[M3] (fig.3).**

Σ est alors difféomorphe à une surface compacte Σ' sur lequel on enlève deux points [M3].

Comme $\mathbb{Z}$ opère sur Σ; qui est de genre fini, Σest de genre nul et Σ' est difféomorphe à la sphère S^2, par suite, Σ est difféomorphe à un cylindre.

On obtiendrait que $\pi_1\Sigma$ est une extension de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}$; ce qui est absurde. □

Preuve de la proposition

On sait que tout groupe de Lie connexe et semi-simple contient un sous-groupe libre H à deux générateurs α, β dense dans G **[R_1].**

Soit Σ la surface compacte orientable de genre 2 **(fig. 4)** ; $\pi_1\Sigma$ a quatre générateurs a, b, c, d soumis à la relation $[a,b]\,[c,d] = e$ où [ ] est le crochet de commutateur ; e est l'élément neutre du groupe $\pi_1\Sigma$.

On considère ρ la représentation de $\pi_1\Sigma$. dans G définie par :

$$\rho : \pi_1\Sigma \longrightarrow G$$

$$a \longrightarrow \alpha$$

$$b \longrightarrow e$$

$$c \longrightarrow \beta$$

$$d \longrightarrow e$$

Puisque $[\alpha,e]\,[\beta,e] = e$, ρ est bien un homomorphisme de groupes **[M_3]**

Si $\widetilde{\Sigma}$ est le revêtement simplement connexe de Σ ; $\pi_1\Sigma$ opère de façon canonique sur Σ et opère également sur G à travers la représentation ρ.

$\pi_1\Sigma$ opère sur $\Sigma \times G$ par : $\forall\, \gamma \in \pi_1\Sigma$; $\gamma.(\widetilde{x}, g) = (\gamma.\widetilde{x}\,,\, \rho(\gamma).g)$.

Posons V la variété quotient obtenue ; V est un G-fibré principal sur Σ. Le feuilletage de $\Sigma \times G$ par les $\Sigma \times \{g\}$ est invariant par l'action et passe au quotient en un G-feuilletage de Lie sur V dont le groupe d'holonomie est H. Comme H est dense, le G-feuilletage de Lie ainsi obtenu sur V est à feuilles denses **[Chap1.-prop1.3].**

La variété V ne fibre pas sur le tore maximal de G ; en effet si V fibre sur le tore maximal T^p de G, en composant cette fibration avec celle de T^p sur S^1, on obtiendrait une fibration de V sur S^1.

Comme $H^1(\Sigma, \pi_o G) = 0$; $H^2(\Sigma, \pi_1 G) = 0$, le G-fibré principal V possède une section **[D₃]** et est donc difféomorphe à $\Sigma \times G$. On obtient alors une suite exacte.

$$\ldots\ldots \longrightarrow \pi_2(S^1) \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(\Sigma \times G) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_o(F) \longrightarrow \ldots$$

c'est à dire : $0 \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1\Sigma \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$.

Comme la fibre F est compacte ; $\pi_1(F)$ est de type fini ; on obtient une contradiction d'après le lemme précédent.

Σ

Fig. 4

B-b – <u>Corollaire</u>

Il existe un S^3-feuilletage de Lie à feuilles denses porté par une variété compacte qui ne fibre pas sur le cercle S^1.

<u>Preuve</u>

S^3 est un groupe de Lie connexe compact semi-simple et simplement connexe dont le tore maximal est isomorphe à S^1 ; on applique la **proposition B-a**. □

B-c – <u>Sur les feuilletages deLie semi-simples</u>

On construit des exemples de feuilletages de Lie semi-simples et on montre qu'un feuilletage de Lie semi-simple n'est pas nécessairement conjugué à un feuilletage homogène.

- **Un exemple de feuilletage de Lie semi-simple homogène**

Soit $G = SL_2(\mathbb{R})$ le groupe de Lie des matrices carrées d'ordre 2 de déterminant égal à 1.

$\mathbb{Q}_2$: le corps des rationnels di-adiques.

$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] = \{m\, 2^n, m, n \in \mathbb{Z}\}$ est un réseau cocompact de $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_2$.

La suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow SL_2(\mathbb{Q}_2) \longrightarrow SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{Q}_2) \longrightarrow SL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow 1$$

définit un G-feuilletage sur la variété compacte $V = SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{Q}_2) \;/\; SL_2(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right])$.

Ce feuilletage est homogène.

- **Un feuilletage de Lie semi-simple non homogène:**

Soit $\mathfrak{I}_0$ le GA-feuilletage porté par une variété compacte V_0 et qui ne peut s'obtenir par image inverse d'un feuilletage homogène. **[$G_2 - G_3$]**

La projection $p : SL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow S^1$ possède une section σ donnée par la décomposition $SL_2(\mathbb{R}) \simeq GA \times S^1$. Soit $D_0 : \tilde{V}_0 \longrightarrow GA$ l'application développante de $\mathfrak{I}_0$.

L'application $D : \tilde{V}_0 \times S_1 \longrightarrow SL_2(\mathbb{R})$

$$(\tilde{x}, y) \longrightarrow D_0\, \tilde{x} . \sigma(y)$$

est une fibration localement triviale, ses fibres définissent un $SL_2(\mathbb{R})$-feuilletage de Lie sur $\tilde{V}_0 \times S^1$ invariant par l'action de $\pi_1 Vo$ sur $\tilde{V}_0 \times S^1$ (agissant sur le premier facteur) et induit donc un $SL_2(\mathbb{R})$-feuilletage de Lie $\mathfrak{I}$ sur la variété $V = V_0 \times S^1$ qui n'est conjugué à aucun feuilletage homogène.

Remarque

V est fibrée sur S^1.

D'une manière générale nous pouvons énoncer la proposition suivante :

B.d – Proposition

Une variété compacte V^n munie d'un $SL_2(\mathbb{R})$-feuilletage de Lie fibre sur S^1

Preuve

On sait $SL_2(\mathbb{R}) \simeq S^1 \times GA$ si bien qu'un $SL_2(\mathbb{R})$-feuilletage de Lie sur V^n induit un GA-feuilletage de Lie sur V^n. comme les équations de structure d'un GA-feuilletage de Lie sont : $d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_2$ et $d\omega_2 = 0$ où les ω_i sont des formes linéairement indépendantes sur V^n. On obtient en particulier une fibration de V^n sur S^1 **[T]**. □

Lorsque le feuilletage est un flot, le résultat suivant précise la structure des variétés.

Corollaire

Les variétés compactes admettant des $SL_2(\mathbb{R})$-flots de Lie sont des fibrés en tores sur S^1.

Preuve

Soit $N^3 \longrightarrow V \longrightarrow S^1$ la fibration donnée par la **proposition B-d.**

Les fibres N^3 sont alors des variétés compactes de dimension 3 munies de GA-feuilletage de Lie, donc difféomorphes à des tores **[M_6].** □

Nos exemples précédents de feuilletages de Lie semi-simples renouvellent le programme de classification faible des feuilletages de Lie proposé dans le cas résoluble par **Meigniez** dans **[M_2]** : Pour chaque groupe de Lie semi-simple G, on ne peut plus guère espérer qu'exhiber une famille de G-feuilletage telle que tout G-feuilletage soit une image inverse de l'un d'eux . □

CHAPITRE 4

SUR LES FEUILLETAGES DE LIE NILPOTENTS

Soient V^n une variété compacte de dimension n, G un groupe de Lie simplement connexe de dimension $q \leq n$ et $\mathfrak{I}$ un G-feuilletage de Lie sur V^n ; on dira que $\mathfrak{I}$ est un G-feuilletage de Lie nilpotent si le groupe de Lie G est nilpotent.

Ce chapitre comporte trois parties :

1) Dans la première partie, on rappelle les propriétés essentielles des groupes de Lie nilpotents simplement connexes.
2) Un théorème de fibration des variétés support de certains feuilletages nilpotents est donné dans la deuxième partie : On montre que si l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ d'un groupe nilpotent possède une base à constantes de structures rationnelles, le G-feuilletage qu'il définit sur une variété compacte est proche en un sens naturel d'un G-feuilletage à feuilles fermées et la variété support fibre sur un espace homogène compact qui est un quotient de G par un réseau.
3) Dans la dernière partie, on applique les résultats au groupe de Heisenberg de dimension 3.

1 – Groupes de Lie nilpotents : Rappels

Les résultats donnés dans ce paragraphe sont dûs essentiellement à **A.I. Malcev** **[M_8]** ; on pourra trouver les démonstrations des propositions dans le livre de **M.S. Raghunathan :** "Discrète subgroups of Lie groups" **[R_1 p. 29 - 43].**

1.1 – Définition

Soit G un groupe, si H et K sont deux parties de G, on note [H, K] le sous-groupe de G, engendré par les commutateurs d'éléments de H et d'éléments de K.

On définit par récurrence une suite de sous-groupes de G en posant :

$G^0 = G$; $G^n = [G, G^{n-1}]$

On dit que le groupe G est nilpotent, s'il existe k tel que pour $n \geq k$, on a :

$G^n = e$.

1.2 – Définition

Soit G un groupe nilpotent de type fini ; il existe une filtration

$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_k = e$ telle que : G_i est un sous-groupe distingué de G_{i-1} et

${G_{i-1}}/{G_i}$ est abélien. On appelle rang de G, le nombre :

$$\text{Rang}(G) = \sum_{1 \leq i \leq k} \text{rang}\left(G_{i-1} / G_i \right).$$

(on montre que cette notion est indépendante de la filtration choisie).

Définition

Un sous-groupe discret Γ d'un groupe de Lie connexe (non nécessairement nilpotent) est un réseau si l'espace homogène G/Γ possède une mesure invariante finie.

Il existe dans le cadre des groupes de Lie nilpotents simplement connexes une caractérisation très pratique des réseaux.

Ainsi, les réseaux des groupes de Lie nilpotents simplement connexes sont les sous-groupes discrets et cocompacts **[R₁]**.

1.3 - Propriété

Soient G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, et K un sous-groupe fermé uniforme de G.

Alors la composante connexe Ke de l'élément neutre dans K, est un sous-groupe distingué de G..

1.4 - Propriété

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe.

i) *si Γ est un sous-groupe discret uniforme de G, alors on a l'égalité :*

$$\dim G = \operatorname{rang}(\Gamma)$$

ii) *si K est un sous-groupe fermé uniforme de G, alors on a :*

$$\dim G = \dim K + \operatorname{rang}\left(K/_{Ke}\right)$$

Les réseaux des groupes de Lie nilpotents simplement connexes ont de fortes propriétés de rigidité ; de façon précise on a :

1.5 – Propriété

Soient G_1 et G_2 deux groupes de Lie nilpotents simplement connexes, et K_1 un sous-groupe uniforme de G_1 ; alors tout homomorphisme continu $h : K_1 \longrightarrow G_2$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme continu $\tilde{h} : G_1 \longrightarrow G_2$.

1.6 – Propriété

Soit Γ un groupe de Lie nilpotent, de type fini, et sans torsion. Alors il existe un groupe de Lie nilpotent simplement connexe $\tilde{G}$ et un homomorphisme injectif $J : \Gamma \longrightarrow \tilde{G}$ tel que $J(\Gamma)$ est un sous-groupe discret uniforme de $\tilde{G}$.

Remarque

Il existe des groupes de Lie nilpotents simplement connexes, qui ne contiennent aucun sous-groupe discret uniforme. Un exemple est construit dans ce chapitre.

L'existence de sous-groupes discrets uniformes " se lit" dans l'algèbre de Lie de la manière suivante :

1.7 - Propriété

Soient G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, et, $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G.

Alors, G contient un sous-groupe discret uniforme si et seulement si l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ possède une base dans laquelle les constantes de structure sont rationnelles.

1.8– Remarque

Plus précisément, soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie nilpotente avec une base à constantes de structures rationnelles et G le groupe de Lie nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{G}_0$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par cette base. Alors si $\mathcal{L}$ est un réseau de rang maximum dans $\mathcal{G}$ contenu dans $\mathcal{G}_0$ et exp : $\mathcal{G} \longrightarrow G$ l'application exponentielle, le groupe engendré par exp $\mathcal{L}$ est un réseau dans G. Réciproquement, si Γ est un réseau dans G, $\exp^{-1}(\Gamma)$ engendre un réseau $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{G}$ tel que les constantes de structure de $\mathcal{G}$ dans n'importe quelle base contenue dans $\mathcal{L}$ sont rationnelles.

1.9 - Proposition

Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $G^k = [G, G^{k-1}]$, $G^0 = G$.

Si Γ est un réseau de G, $\Gamma \cap G^k$ est un réseau de G^k.

2 – Feuilletages de Lie nilpotents

Les feuilletages de Lie nilpotents ont été classifiés à image inverse près par **Haefliger [H]**. Le théorème suivant caractérise les groupes d'holonomie de tels feuilletages.

2.1 – Théorème

Dans un groupe de Lie nilpotent G tout sous-groupe uniforme de type fini est réalisable comme groupe d'holonomie d'un G-feuilletage porté par une variété compacte.

La preuve simplifiée suivante est dûe à **A. Haefliger [H].**

Preuve

Soit Γ un sous-groupe uniforme de type fini de G ; G nilpotent et simplement connexe.

Γ est un sous-groupe uniforme et de type fini de G. On sait **[Proposition 1.6]** Γ est un réseau cocompact dans un groupe de Lie nilpotent H et **[Proposition 1.5]** l'injection canonique $\Gamma \xrightarrow{i} G$ se prolonge de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & G \\ H \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd} \qquad i = hoj$$

H est surjectif **[M_4]**

On obtient ainsi une suite exacte $1 \longrightarrow F \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow 1$ qui définit un G-feuilletage homogène sur la variété H/Γ. Notons $\mathcal{G}$ ce feuilletage. Son groupe d'holonomie est $h(\Gamma) = hoj\,(\Gamma) \simeq \Gamma$. Donc Γ est groupe d'holonomie du G-feuilletage $\mathcal{G}$ de la variété compacte H/Γ. $\mathcal{G}$ est homogène et classifiant à la fois. □

Il est démontré qu'un feuilletage de Lie défini par le groupe de Lie $\mathbb{R}^n$ est proche d'un feuilletage à feuilles fermées **[T]** et la variété support fibre sur $\mathbb{R}^n/\Gamma$ où Γ est un réseau de $\mathbb{R}^n$: Pour cela, on déforme le groupe d'holonomie Γ' du feuilletage de manière à en faire un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$.

Ce procédé n'est pas possible en général en ce qui concerne les groupes de Lie nilpotents simplement connexes ; pour obtenir dans le cas d'un G-feuilletage nilpotent des théorèmes analogues obtenus pour les $\mathbb{R}^n$-feuilletages de Lie, on suppose que le groupe de Lie G contient un sous-groupe discret uniforme.

Pour les groupes métabéliens, on démontre :

2.2 – Théorème

Soient V^n une variété compacte de dimension n, G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, de dimension $q \leq n$ et $\mathfrak{I}$ un G-feuilletage sur V^n.

Si $[G, [G,G]] = e$ et que l'algèbre de Lie de G possède une base à constantes de structure rationnelle, alors $\mathfrak{I}$ est approchable par un feuilletage à feuilles fermées et la variété V^n est fibrée sur un espace homogène compact de dimension q qui est quotient de G par un réseau. (e étant l'élément neutre de G).

Preuve

On désigne par $\mathfrak{I}(V^n, G)$ l'ensemble des G-feuilletages de Lie de V^n. On peut munir $\mathfrak{I}(V^n, G)$ d'une topologie de la façon suivante : On considère $\mathfrak{D}(V^n, G)$ l'ensemble de toutes les submersions $D : \widetilde{V}^n \rightarrow G$ telles qu'il existe au moins un h appartenant à l'ensemble $\mathrm{Hom}(\pi_1 V^n, G)$ des représentations de $\pi_1 V^n$ dans G pour lequel D est équivariante. Munissons $\mathfrak{D}(V^n, G)$ de la topologie C^1. $\mathfrak{I}(V^n, G)$ est le quotient de $\mathfrak{D}(V^n, G)$ par l'action à gauche de G. Munissons le de la topologie quotient.

Soit $\mathfrak{R}$ l'ensemble des représentations de $\pi_1 V^n \longrightarrow G$. On plonge $\mathfrak{R}$ dans un $G^p = (G \times G \times \ldots \times G)$ en considérant les images d'une partie génératrice finie de $\pi_1 V^n$. Munissons $\mathfrak{R}$ de la topologie induite.

La preuve du théorème s'effectue en deux étapes :

1) dans un premier temps, on associe à $\mathfrak{I}$ un G-feuilletage homogène $\widetilde{\mathfrak{I}}$, c'est à dire un groupe de Lie simplement connexe $\widetilde{G}$ de dimension n ; un sous-groupe discret $\widetilde{\Gamma}$ de $\widetilde{G}$, et une suite exacte $1 \longrightarrow F \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1$.

2) dans un deuxième temps, on déforme la représentation d'holonomie de $\mathfrak{I}$ de sorte que le groupe d'holonomie soit un réseau de G.

1°) <u>Feuilletage homogène associé à $\mathfrak{I}$</u>

Soit $\widetilde{\Gamma}$ le groupe d'holonomie de $\mathfrak{I}$; $\widetilde{\Gamma}$ est de type fini, comme $\widetilde{\Gamma}$ est un sous-groupe du groupe de Lie nilpotent simplement connexe G, $\widetilde{\Gamma}$ est nilpotent et sans torsion, il existe donc un unique groupe de Lie nilpotent simplement connexe $\widetilde{G}$, et un homomorphisme injectif $J : \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \widetilde{G}$ tels que le sous-groupe $J(\widetilde{\Gamma})$ est un sous-groupe discret uniforme de $\widetilde{G}$ **(Proposition 1.6).** Soit $i : \widetilde{\Gamma} \longrightarrow G$ l'inclusion canonique ; puisque $J(\widetilde{\Gamma})$ est un sous-groupe discret uniforme de $\widetilde{G}$, il existe un unique homomorphisme de groupes de Lie $\varphi : \widetilde{G} \longrightarrow G$ tel que $\varphi o J = i$ **(Proposition 1.5).** φ est surjectif **[H]** on obtient ainsi un G-feuilletage homogène sur la variété $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$. On note $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ce feuilletage.

Soit $\rho : \pi_1 V^n \longrightarrow G$ la représentation d'holonomie de $\mathfrak{I}$ et $h : \pi_1 V^n \longrightarrow \widetilde{G}$ l'unique représentation qui rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{G} \arrow[d, "\varphi"] \\
\pi_1 V^n \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\rho"'] & G
\end{tikzcd} \qquad \rho = \varphi o h$$

Nous allons déformer ρ en une représentation $\widetilde{\rho}$ assez proche de ρ, dont l'image dans G donne un réseau.

2°) <u>Déformation de ρ</u>

Pour cela, on déforme φ. Considérons $d\varphi : \widetilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{G}$ la différentielle de φ. $\widetilde{\mathcal{G}}$ et $\mathcal{G}$ désigne respectivement les algèbres de Lie des groupes $\widetilde{G}$ et G.

Soit $\mathcal{L}$ le réseau de $\widetilde{\mathcal{G}}$ engendré par $\exp^{-1}\widetilde{\Gamma}$. $\mathcal{L}$ est de rang maximum et les constantes de structures de $\widetilde{\mathcal{G}}$ dans n'importe quelle base contenue dans $\mathcal{L}$ sont rationnelles **[Remarque 1.8]**.

$\mathcal{L} \cap [\widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{G}}]$ est un réseau de $[\widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{G}}]$ (**Remarque 1.9**), il existe une base $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ de $[\widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{G}}]$ contenue dans $\mathcal{L}$. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ tel que le $r + s$-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_s, b_1, b_2, \ldots, b_r)$ soit une base de $\mathcal{L}$ et F l'espace vectoriel engendré par $(a_1, \ldots, a_s)$. On a alors $\widetilde{\mathcal{G}} = [\widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{G}}] \oplus F$ et les relations suivantes :

$$\begin{cases} [a_i, a_j] = \sum_k C_{ij}^k\, b_k \\ [a_i, b_k] = \sum_k C_{ik}^r\, b_r \quad \text{où les constantes } C_{ij}^k \text{ sont toutes rationnelles} \\ [b_k, b_\ell] = \sum_k C_{k\ell}^s\, b_s \end{cases}$$

Posons $\alpha_i = d\varphi(a_i)$; $\beta_i = d\varphi(b_i)$.

<u>Lemme 1</u>

Le $r + s$-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ vérifie les relations :

$$(S)\quad \begin{cases} \left[\alpha_i,\alpha_j\right]=\sum_k C_{ij}^k\beta_k & \text{(I)} \\ \left[\alpha_i,\beta_j\right]=0 & \text{(II)} \\ \left[\beta_i,\beta_j\right]=0 & \text{(III)} \end{cases}$$

<u>Preuve du Lemme</u>

φ étant un homomorphisme surjectif de groupes on a

$d\varphi\,[\mathcal{G},\mathcal{G}] = [\mathcal{G},\mathcal{G}]$ donc les $\beta_i \in [\mathcal{G},\mathcal{G}]$. La relation $[\mathcal{G},[\mathcal{G},\mathcal{G}]] = 0$ entraîne le système (S).

$[\mathcal{G},\mathcal{G}]$ est une sous-algèbre commutative dans laquelle les β_i engendrent un réseau.

Les égalités (I) de (S) donnent :

$$\begin{cases} \left[\alpha_1,\alpha_j\right]=\sum_k C_{1j}^k\,\beta_k \quad j\geq 2 & (1) \\ \left[\alpha_2,\alpha_j\right]=\sum_k C_{2j}^k\,\beta_k \quad j\geq 3 & (2) \\ \vdots & \\ \left[\alpha_{q-2},\alpha_{q-1}\right]=\sum_k C_{q-2,q-1}^k\,\beta_k & (q-2) \\ \left[\alpha_{q-1},\alpha_q\right]=\sum_k C_{q-1,q}^k\,\beta_k & (q-1) \end{cases}$$

Posons $\alpha_q = 1$ dans la dernière équation, on peut trouver un vecteur α'_{q-1} à composantes rationnelles suffisamment proche de α_{q-1} qui vérifie l'égalité.

En remplaçant α_{q-1} par α'_{q-1} dans l'équation précédente, on peut trouver un vecteur à composantes rationnelles α'_{q-2} assez proche de α_{q-2} qui vérifie l'égalité (q-2), de proche en proche on obtient des vecteurs $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{q-1}, 1)$ assez proches des $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{q-1}, \alpha_q)$ tel que $(\alpha'_1, \ldots \alpha'_s, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ engendrent un réseau de $\mathcal{G}$.

Soit $\varphi' : \widetilde{G} \longrightarrow G$ l'homomorphisme de groupes dont la différentielle envoie $(a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_r)$ sur $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_s, \beta_1, \ldots, \beta_r)$ et $\rho' : \pi_1 Vn \longrightarrow G$ la représentation définie par $\rho' = \varphi' o h$.

Lemme 2

ρ' est la représentation d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie $\mathfrak{I}'$ sur V^n.

*Ce lemme est une conséquence du "lemme de déformation" dû à **Thurston** et dont la démonstration est écrite par **G. Meigniez [M₃]**.*

Lemme 3 "Lemme de déformation"

Soit $\rho_o : \pi_1 Vn \longrightarrow G$ une représentation d'holonomie d'un G-feuilletage de Lie $\mathfrak{I}_o$ sur une variété compacte V^n. Toute représentation $\rho_1 : \pi_1 Vn \longrightarrow G$ assez proche de ρ_o est réalisable par un G-feuilletage de Lie $\mathfrak{I}_1$ sur V^n., proche de $\mathfrak{I}_o$.

Preuve du lemme 3

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les submersions $\widetilde{D} : \widetilde{V}^n \longrightarrow G$ telles qu'il existe au moins une représentation $h\ \pi_1 Vn : \longrightarrow G$ pour laquelle $\widetilde{D}$ est équivariante. On munit $\mathcal{A}$ de la topologie C^1. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des représentations de $\pi_1 Vn \longrightarrow G$. $\mathcal{B}$ est localement contractile. En effet, une représentation de $\pi_1 V^n \longrightarrow G$ est défini par générateurs et relations $\mathcal{B}$ est dans l'espace de toutes les applications de l'ensemble des générateurs de $\pi_1 V^n$ dans G, le sous-ensemble des zéros communs à une famille de polynômes correspondant aux relations, donc $\mathcal{A}$ est une variété algébrique réelle.

Par ailleurs on suspend simultanément tous les éléments de $\Re$ comme suit : $\pi_1 V^n$ opère sur $\mathcal{A} \times \widetilde{V}^n \times G$ de la façon suivante :

$$\gamma.(H, p, g) = (H, \gamma.p, H(\gamma).g)$$

L'espace quotient E est un fibré de fibre G, de base $\mathcal{A} \times V^n$. Pour tout $H \in \mathcal{B}$ la restriction E_H de E au dessus de $\{H\} \times V^n$ est la suspension de H.

Le feuilletage trivial de $\{H\} \times \tilde{V}^n \times G$ par les $\{H\} \times \tilde{V}^n \times \{g\}$ est invariant par l'action donc munit E_H d'un feuilletage $\mathfrak{I}_H$ de codimension d, transverse aux fibres.

La donnée d'un élément $\tilde{D}$ de $\mathcal{A}$ ayant H comme représentation d'holonomie est équivalente à la donnée d'une section de E_H qui soit transverse à $\mathfrak{I}_H$.

En effet, soit $\tilde{D}$ donnée, l'application $\tilde{V}^n \longrightarrow \tilde{V}^n \times G$ passe au

$$p \longrightarrow (p, \tilde{D}(p))$$

quotient et c'est la section.

Inversement, comme $\tilde{V}^n \times G$ est un revêtement de E_H, une telle section se relève en une application de $\tilde{V}^n$ dans $\tilde{V}^n \times G$ et un et un seul des relèvements est de la forme $P \longrightarrow (p, \tilde{D}(p))$.

Soit τ un voisinage contractile de ρ_0 dans $\mathcal{A}$. Par hypothèse E_{ρ_0} adme.

une section transverse à $\mathfrak{I}_{\rho_0}$.

Par propriété universelle des fibrés, cette section s'étend en une section globale de E au dessus de $\tau \times V^n$.

Pour ρ assez proche de ρ_0, sa restriction s_ρ à E_ρ est encore transverse à $\mathfrak{I}_\rho$. Le feuilletage obtenu est d'ailleurs image inverse de $\mathfrak{I}_\rho$ par s_ρ.

Preuve du lemme 2 ρ' étant assez proche de ρ, d'après le **lemme 3**, ρ' est réalisable par un G-feuilletage de Lie $\mathfrak{I}'$ sur V^n.

Suite de la preuve du Théorème 2.2

Puisque le groupe d'holonomie du G feuilletage $\mathfrak{I}'$ est un réseau de G, les feuilles de $\mathfrak{I}'$ sont fermées **(Théorème 1.2 chap.1)**.

$\mathfrak{I}'$ est proche de $\mathfrak{I}$ et la variété V^n est fibrée sur l'espace homogène compact G/Γ

où Γ est le groupe d'holonomie de $\mathfrak{I}'$.

Nous pouvons généraliser le théorème précédent à une famille plus large de groupes de Lie nilpotents simplement connexes, en fait, à tous les groupes de Lie nilpotents et simplement connexes qui possèdent un réseau.

2.3 - Théorème

Soient V^n une variété compacte de dimension n, munie d'un G-feuilletage de Lie $\mathfrak{I}$ de codimension q ($q \leq n$) où G est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe dont l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ possède une base à constantes de structure rationnelles. Alors

$\mathfrak{I}$ est proche d'un feuilletage à feuilles fermées et la variété V^n fibre sur un espace homogène compact qui est quotient de G par un réseau.

La preuve est analogue à celle du **Théorème 2.2** :

Preuve

Soit $\tilde{\Gamma}$ le groupe d'holonomie de $\mathfrak{I}$ et $\rho : \pi_1 V^n \longrightarrow G$ sa représentation d'holonomie. $\tilde{\Gamma}$ est nilpotent de type fini et sans torsion ; soit alors $\tilde{G}$ l'unique groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe dans lequel $\tilde{\Gamma}$ est un réseau. (**Proposition 1.6**). Soit $\varphi : \tilde{G} \longrightarrow G$ l'unique homomorphisme de groupes de Lie qui prolonge l'injection canonique $i : \tilde{\Gamma} \longrightarrow G$; On sait que φ est surjectif et donne l'identité sur $\tilde{\Gamma}$ [H]. φ définit alors un G-feuilletage homogène sur la variété compacte $\tilde{G}/\tilde{\Gamma}$. On note

$\widetilde{\Im}$ ce feuilletage ; il est classifiant et son groupe d'holonomie est isomorphe à $\widetilde{\Gamma}$. On désigne par $h : \pi_1 V^n \longrightarrow \widetilde{G}$ l'unique homomorphisme qui relève ρ dans $\widetilde{G}$. On a ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G} \arrow[d, "\varphi"] \\ \pi_1 V^n \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "\rho"'] & G \end{tikzcd} \qquad \rho = \varphi \circ h$$

On suppose que l'ordre de nilpotence de G est k ; si $\mathcal{G}$ et $\widetilde{\mathcal{G}}$ sont les algèbres de Lie des groupes G et $\widetilde{G}$; on a les suites de Jordan –Holder suivantes

$$e = \widetilde{G}^{k} \subset \widetilde{G}^{k-1} \subset \widetilde{G}^{k-2} \subset \ldots\ldots \subset [\widetilde{G}, \widetilde{G}] \subset \widetilde{G}$$

$$0 = \widetilde{\mathcal{G}}^{k} \subset \mathcal{G}^{k-1} \subset \mathcal{G}^{k-2} \subset \ldots\ldots \subset [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{G}.$$

D'autre part, $\exp^{-1} \widetilde{\Gamma}$ engendre un réseau $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{G}$; $\mathcal{L}$ est de rang maximum et les consstantes de sructures de $\mathcal{G}$ dans toute base de $\mathcal{L}$ sont rationnelles (**Remarque 1.8**) $\exp^{-1} \widetilde{\Gamma} \cap \mathcal{G}^{k-1}$ est un réseau de $\mathcal{G}^{k-1}$ (**Proposition 1.8**), il existe une base $(b_1, \ldots, b_r)$ de $\mathcal{G}^{k-1}$ contenue dans $\exp^{-1} \widetilde{\Gamma}$. Soit $(a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_p)$ tel que le p-uplet $(b_1 \ldots, b_r, a_{r+1}, \ldots, a_p)$ soit une base de $\mathcal{G}^{k-2}$ contenue dans $\mathcal{L}$. Posons $\alpha_i = d\varphi(a_i)$; $\beta_i = d\varphi(b_i)$, on a les équations

$$(S) \begin{cases} \left[\alpha_i, \alpha_j\right] = \sum_{k=1}^{r} C_{ij}^{k} \beta_k & \text{(I)} \\ \left[\alpha_i, \beta_j\right] = 0 \\ \left[\beta_i, \beta_j\right] = 0 \end{cases}$$

avec C_{ij}^{k} des constantes toutes rationnelles.

Les égalités (I) de (S) donnent :

$$\begin{cases} \left[\alpha_{r+1}, \alpha_j\right] = \sum_{k=1}^{r} C_{r+1j}^{k} \beta_k \quad \forall j \geq r+2 \\ \left[\alpha_{r+2}, \alpha_j\right] = \sum_{k} C_{r+2j}^{k} \beta_k \quad \forall j \geq r+3 \\ \vdots \\ \left[\alpha_{p-2}, \alpha_{p-1}\right] = \sum_{k} C_{p-2,p-1}^{k} \beta_k \\ \left[\alpha_{p-1}, \alpha_p\right] = \sum_{k} C_{p-1,p}^{k} \beta_k \end{cases}$$

Posons $\alpha_p = 1$, dans la dernière équation, on peut trouver un vecteur α'_{p-1} à composantes rationnelles assez proche de α_{p-1} qui vérifie l'égalité. En remplaçant α_{p-1} par α'_{p-1} dans l'équation précédente, on trouve un α'_{p-2} à composantes rationnelles, proche de α_{p-2} qui vérifie l'égalité. De proche en proche, on obtient des vecteurs $(\alpha'_{r+1}, \alpha'_{r+2}, \ldots, \alpha'_{p-1}, 1)$ assez proches des $(\alpha_{r+1}, , \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_p)$.

Soit $(a_{p+1}, a_{p+2}, \ldots, a_\ell)$ des éléments de $\mathcal{G}$ tels que le système

$(b_1, \ldots, b_r ; a_{r+1}, \ldots, a_p ; a_{p+1}, \ldots, a_\ell)$ soit une base de $\mathcal{G}^{k-3}$ contenue dans $\mathcal{L}$.

Si on pose $\alpha_i = d\varphi(a_i)$ $i = p+1, \ldots, \ell$ on a les équations suivantes :

$$[\alpha_i, \alpha_j] = \sum_{k=r+1}^{p} C_{ij}^{k} \alpha'_k \quad \text{(II)} \quad C_{ij}^{k} \in \mathbb{Q}.$$

Soit $(\alpha'_{r+1}, \ldots, \alpha'_\ell)$ des vecteurs à composantes assez proches des $(\alpha'_{r+1}, \ldots, \alpha'_\ell)$ vérifiant (II).

En itérant ce processus, on obtient une base $(\beta_1, \ldots, \beta_r, \alpha'_{r+1}, \ldots\ldots, \alpha'_q)$ de $\mathcal{G}$ formée de vecteurs à composantes rationnelles proches de la base

$(b_1,\ldots,b_r;\, a_{r+1},\ldots,a_p,\, a_{p+1},\ldots,\, a_\ell,\ldots\ldots,\, a_q)$. Soit $\mathcal{L}'$ le réseau engendré par cette base.

L'homomorphisme d'algèbre qui associe à $(b_1,\ldots,b_r;\, a_{r+1},\ldots,a_p,\, a_{p+1},\ldots,\, a_\ell,\ldots\ldots,\, a_q)$ les vecteurs $(\beta_1,\ldots,\beta_r,\alpha'_{r+1},\ldots\ldots,\alpha'_q)$ s'intègre en un homomorphisme de groupe $\varphi' : \widetilde{G} \longrightarrow G$ proche de φ et $\Gamma = \varphi'(\widetilde{\Gamma})$ est le réseau de G engendré par $\exp \mathcal{L}'$.

La représentation $\rho' = \varphi' \circ h$ est réalisable par un G-feuilletage à feuilles fermées sur V^n, proche de $\mathfrak{F}$ (lemme de déformation). Ainsi V^n est fibrée sur G/Γ.

3 - Feuilletages de Heisenberg

3.1 - Le groupe de Heisenberg de dimension trois

On désigne par N le groupe de Lie réel des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & u & w \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad u, v, w \in \mathbb{R}.$$

Le groupe N est isomorphe au groupe obtenu en considérant sur $\mathbb{R}^3$ la loi de composition suivante :

$$(u, v, w) . (u', v', w') = (u + u', v + v', w + w' + uv')$$

N est appelé groupe de **Heisenberg** de dimension 3.

3.2 – Proposition

Le groupe de Lie N est connexe, contractile et nilpotent.

Preuve

Les deux premières propriétés sont évidentes, puisque N est homéomorphe à $\mathbb{R}^3$; pour vérifier que N est nilpotent, il suffit de calculer les sous-groupes $[N,N]$ et $[N,[N,N]$, on obtient $[N,N] = \{ (0, 0, w) \in N \; ; \; w \in \mathbb{R}\}$; $[N,[N,N] = e$.

En raison de la trivialité du 2^e crochet, on dit que N est métabélien.

3.3 - Définition

Un N-feuilletage de Lie est appelé feuilletage de **Heisenberg.**

3.4 - Proposition

Soit V^n une variété compacte munie d'un feuilletage de Heisenberg $\mathfrak{F}$; alors

1) V^n est fibrée sur le tore T^2

2) Si $\mathfrak{F}$ est un flot, il est conjugué à un N-feuilletage homogène.

Preuve

Un N-feuilletage sur V^n, entraîne un $N/[N,N]$-feuilletage sur V^n. En effet, en composant la submersion canonique de $\widetilde{V}^n$ sur N avec celle de N sur $N/[N,N]$, on obtient une submersion de $\widetilde{V}^n$ sur $N/[N,N]$ qui définit un $N/[N,N]$-feuilletage de Lie sur V^n.

Or $N/[N,N]$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$; donc V^n. est fibré sur T^2 **[T]**.

La partie 2) est la classification des N-flots sur une variété compacte ; elle est dûe à **P-Caron [C]**.

Nous allons montrer que les hypothèses du **Théorème 2.2** sont toujours vérifiées pour ce qui concerne les feuilletages de **Heisenberg**.

3.5 – Théorème

Soient V^n une variété compacte de dimension n et $\mathfrak{F}$ un N-feuilletage de Lie sur V^n. Alors $\mathfrak{F}$ est proche d'un feuilletage à feuilles fermées et V^n fibre sur une variété compacte de dimension 3 qui est quotient de N par un réseau.

Preuve

L'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ de N est l'algèbre des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & u & w \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad u, v, w \in \mathbb{R}.$$

Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La base naturelle de $\mathcal{N}$. $\mathcal{N}$ est une algèbre de Lie réelle de dimension 3, où les crochets sont : $[A,B] = C$; $[A,C] = [B,C] = 0$. Ainsi les constantes de structure de $\mathcal{N}$ dans la base $\{A, B, C\}$ sont rationnelles. Il suffit alors d'appliquer le **Théorème 2.2.**

Remarque

Il existe des G-feuilletages de Lie (portés par des variétés compactes) où G est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe ne contenant aucun réseau.

Nous présentons un exemple dû en substance à **P. Caron [C].**

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie nilpotente non "rationnelle" définie par la base $\{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, U_1, V_1\}$ avec les relations

$$\begin{cases} [A_1, B_1] = [C_1, D_1] = U_1 \\ [C_1, E_1] = 0 \quad [D_1, F_1] = V_1 \\ \\ [E_1, F_1] = \pi U_1 \\ \text{les autres crochets sont nuls} \end{cases}$$

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est nilpotent ($[\mathcal{G},[\mathcal{G},\mathcal{G}] \Rightarrow 0$) et elle ne possède aucune base à constantes de structure rationnelles **[C].**

Soit G le groupe de Lie nilpotent simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$. G ne contient aucun sous-groupes discrets uniforme (**Chap. 4.1.7**).

On considère $\mathcal{G}$, l'extension nilpotente et rationnelle de $\mathcal{G}$ par $\mathbb{R}$ dont une base est $\{A, B, C, D, E, F, U, V, W\}$ avec les crochets

$$\begin{cases} [A, B] = [C, D] = U + W \\ [C, E] = -[D, F] = V \\ \\ [E, F] = U \\ \text{les autres crochets sont nuls} \end{cases}$$

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est rationnelle, puisque les constantes de structure de la base

$\{A, B, C, D, E, F, U, V, W\}$ sont rationnelles. $\mathcal{G}$ est nilpotente car $[\mathcal{G}, [\mathcal{G}, \mathcal{G}]] = 0$.

Soit $\widetilde{G}$ le groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie . $\mathcal{G}$.

$\widetilde{G}$ est nilpotent et contient des réseaux cocompacts **(Proposition 1.7).**

Soit f l'application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ définie par :

$$\begin{cases} f(A) = A_1 \ ; \ f(B) = B_1, f(C) = C_1 \ , \ f(D) = D_1 \\ f(E) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} E_1 \ ; \ f(F) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} F_1 \\ \\ f(U) = U_1 \quad f(V) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} V_1 \quad f(W) = W_1 \end{cases}$$

f est un homomorphisme surjectif d'algèbre de Lie ; En passant aux groupes de Lie associés, on obtient une suite exacte :

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow \widetilde{G} \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

Soit $\widetilde{\Gamma}$ un groupe discret uniforme de $\widetilde{G}$; on obtient un G-feuilletage homogène sur la variété compacte $\widetilde{G}/\widetilde{\Gamma}$ qui ne fibre sur aucun espace homogène G/Γ

où Γ est un réseau de G.

Que dire des variétés compactes qui portent un tel feuilletage ?

On déduit de l'étude précédente le théorème suivant quicaractérise les variétés compactes qui admettent des feuilletages de Lie nilpotents de codimension 3.

3.6 – Théorème :

Si V^n est une variété compacte munie d'un G-feuilletage de Lie nilpotent de codimension 3, alors V^n est fibrée sur un espace homogène compacte G/Γ où Γ est un réseau de G.

Preuve : On a deux possibilités :

- G est isomorphe au groupe de Lie abélien $\mathbb{R}^3$, au quel cas le feuilletage est défini par trois formes de Pfaff ω_1 , ω_2 et ω_3 qui sont fermées linéairement indépendantes. Ainsi V^n est fibrée sur $T^3 = \mathbb{R}^3 / Z^3$ [T].
- G est isomorphe à N et on conclut par le **Théorème 2.2.**

BIBLIOGRAPHIE

[B_1] : **BARRE R** : $\mathbb{Q}$-variétés : "Structure transverse des feuilletages" Toulouse, 17 – 19 Février, 1982. S.M.F, Astérisque n° 116, 1984

[B_2] : **BENSON D.J** : Représentations and cohomology tome II, Cohomology of groups and modules cambridge, studies in advanced mathematics 3.1.

[C] : **CARON P et Y. CARRIERE** : flots transversalement de Lie. Pub. IRMA – Lille 2.2 - 1980.

[D_1] : **DOLD,** A, Lectures Algebraic topology

[D_2] : **DIEUDONNE, J** : Eléments d'Analyse V

[D_3] : **DOUBROVINE B, S. NOVIKOV, A. FOMENKO** ; méthodes de la théorie de l'homologie..

[D_4] : **DIEUDONNE, J** : Eléments d'Analyse IV.

[F_1] : **FEDIDA E**. : Sur les feuilletages de Lie : C.R. Acad sci. Paris 272 (1971) 999 – 1002.

[F_2] : **FEDIDA, E** : Feuilletages du plan, feuilletage de Lie, thèse université Louis Pasteur, Strasbourg (1973).

[F_3] : **FEDIDA E** : Sur l'existence des feuilletages de Lie C.R. Acad sci. Paris **278 (1974) 835** – 837.

[F_4] : **FEDIDA E** : Sur la théorie des feuilletages associés au repère mobile. Cas des feuilletages de Lie, Springer, lectures, Notes in Mah. 652 (1978).

[G] : **GODBILLON, C** ; Feuilletages de Lie. Lectures notes in mathematics 1974 – Vol. 392.

[H] : **HAEFLIGER, A** ; Groupoïdes d'holonomie et classifiant, SMF, Astérisque n° 116, 1984.

[M_1] : **MEIGNIEZ, G** : Holonomiy groups of Lie foliations. Prepub. de l'institut Gérard Desargues – URA C.N.R.S.

[M_2] : **MEIGNIEZ, G** : feuilletages de Lie résolubles, Ann. De la Faculté des Sciences de Toulouse.

[M_3] **MEIGNIEZ, G** : Actions de groupes sur la droite et feuilletages de codimension 1. Thèse, Univ. Claude Bernard Lyon I (1988)

[M_4] : **MEIGNIEZ, G** : Feuilletages et fibrations Habilitation à diriger des recherches, Univ. Lyon 1.

[M_5] : Sous-groupes de génération compacte des groupes de Lie résolubles. Pre-publication Math n° 33 (1992), Univ. Paris 7.

[M_6] : **MATSOMOTO, S and NOBURO TSUCHIYA** : The Lie affine foliations on 4 –manifolds. Inventions mathematicae 109, 1 -16 (1992).

[M_7] : **MEYER, J** : e-foliations of codimension two J-différential Geometry 12 (1977) - 583 - 594.

[M_8] : **MALCEV, A.I** : On a class of homogenous spaces of nilpotent Lie groups, Izv, Akad. Nouk. ssr. , ser. Mat. 13 p. 9 ams trans 1 – 39.

[N] : **NICOLAU, M, A.E.K. ALAOUI** : Strutures géométriques invariantes et feuilletages de Lie. In dg Mathem, N.S 1(3) – 323 – 334.

[R_1] : **RAGHUNATAN, M.S** : Discrete subgroups of Lie groups. Engebnisse der Mathematik in dihrer Greens gebrek (68) Sp. Verlag – Berlin

[R_2] : **REVENTOS, A and M. ILABRES** : Unimodular Lie foliations : annales Faculté des Sciences Toulouse – Vol. IX n° 2 – 1988

[S] : **SERRE, J.P** : Groupe d'homotopie et classes de groupes abéliens, Ann. Of Math (2) 58, 1953

[T] : **TISCHLER, D** : On fibering certain foliated manifolds over S^1, topology 9 (1970) - 153 – 154.

[Z] : **ZISMAN, M** : Topology algébrique élémentaire