UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR (UCAD)
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE DE DOCTORAT DE 3[ème] CYCLE
DE MATHEMATIQUES
OPTION : GEOMETRIE ALGEBRIQUE

QUELQUES PROBLEMES DE RECOLLEMENT DE FAISCEAUX ET FAISCEAUX A-COHERENTS ET POINTS ALGEBRIQUES DE PETIT DEGRE SUR LES COURBES DE FERMAT

Présentée et soutenue publiquement
le 28 Octobre 1999 à 16 Heures à l'Amphi 7

Par

OUMAR SALL

Sous la direction du Professeur
HAMET SEYDI

Devant le Jury composé de

Président :	Chérif	BADJI	Professeur	UCAD
Membres :	Hamet	SEYDI	Professeur UCAD – Univ. de Howard	
	Mamadou	SANGHARE	Maître de Conférences	UCAD
	Mamadou Maktar	DIOP	Maître-Assistant	UCAD

ANNEE UNIVERSITAIRE 1998 –1999 (Octobre 99)

À LA MÉMOIRE DE MON PÈRE ET DE MA PREMIÈRE ÉPOUSE

À MA MÈRE

À MES ENFANTS

À MES FRÈRES ET SOEURS

À MON ÉPOUSE

À MES TANTES

À MES AMIS.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur Chérif BADJI, pour m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de ma thèse.

Ma reconnaissance et mon respect vont à Monsieur le Professeur Hamet SEYDI qui a dirigé cette thèse. Son esprit critique et sa rigueur scientifique ont été essentiels dans l'accomplissement de ce travail de recherche.

J'assure de ma profonde gratitude et de mon amitié Messieurs Mamadou SANGHARE, M. Makhtar DIOP qui m'ont beaucoup soutenu dans la progression de mes recherches. Leurs suggestions et encouragements au cours de ce travail sont pour moi d'une valeur inestimable. Je leur exprime mes vifs remerciements d'avoir accepté de participer au jury.

Je remercie chaleureusement Messieurs les Professeurs C.S. DIATTA, Galaye DIA de m'avoir fait la faveur de participer à mon jury ; qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance.

Je garderai toujours en mémoire les encouragements que mes frères et mon ancien Professeur Massiré SANGARE n'ont cessé de me prodiguer tout au long de ce travail.

Je remercie vivement tous mes collègues qui m'ont exprimé leur profonde sympathie.

Je remercie Mme MBAYE née Seynabou NDIAYE, Mme NDIAYE née Marième Soda DIOUF et Melle CISSE née Yacine CISSE pour le soin qu'elles ont apporté à la frappe, et pour la grande patience et la disponibilité constante qu'elles ont su montrer au cours des corrections et du traitement informatique de ce texte.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE IV

Faisceaux A-cohérents - Construction de faisceau.

CHAPITRE V

Courbes algébriques

INTRODUCTION

Pendant qu'il était prisonnier de guerre à l'Oflag XVII en Autriche en 1945, Jean LERAY a fait un cours de topologie algébrique à l'Université de Captivité qu'il avait contribué à organiser.

Le cours de Leray a été publié à la fin de la guerre en 1945 dans le Journal de Liouville [9].
La topologie algébrique, topologie différentielle et théories des espaces analytiques, dus à l'introduction des notions de faisceaux de cohomologie à coefficients dans un faisceau, et de suite spectrale (toutes trois inventées par J. LERAY) ont complètement renouvelé les concepts et les méthodes de la géométrie algébrique.

Dans [10] qui reproduit les cours de J. LERAY au collège de France des années 1947 - 48 et 1949 - 50, il appelle faisceau sur un espace topologique localement compact X la donnée, pour tout fermé F de X, d'un anneau $\mathcal{B}(F)$, et, pour toute inclusion $F_1 \subset F$ de fermés de X, d'un homomorphisme de "section" $b \longmapsto F_1 b$ de $\mathcal{B}(F)$ dans $\mathcal{B}(F_1)$. Il impose que $\mathcal{B}(\emptyset) = 0$ et la transitivité de l'opération de section : $F_2(F_1 b) = F_2 b$ si $F_2 \subset F_1 \subset F$.

Lors de son séminaire de 1950 - 1951 à l'Ecole Normale Supérieure consacré à la topologie algébrique, H.CARTAN a remplacé la première version de la théorie des faisceaux par une nouvelle présentation (dûe à M. LAZARD). La forme adopté e est la suivante :

Un faisceau de k-modules F sur un

espace topologique (régulier) $\mathcal{X}$ est un espace étalé (terme dû à Godement) $p : F \Longrightarrow \mathcal{X}$ dont chaque fibré $p^{-1}(x) = F(x)$ une structure de k-module, de manière que l'addition et la multiplication par les éléments de k (discret) soient continues pour la topologie de F.

A chaque ouvert X de $\mathcal{X}$ on associe le module $\Gamma(F,X)$ des sections $s : X \longrightarrow F$ (caractérisées par $pos = id_X$), et chaque fibre F_x est la limite inductive des $\Gamma(F,X)$ pour X voisinage de x.

H.CARTAN et J.P. SERRE ont découvert que la notion de faisceau introduite en 1945 par J.LERAY permet d'exprimer de façon remarquablement simple et suggestive les résultats fondamentaux de la théorie des variétés holomorphes.

Les fonctions holomorphes, définies chacune dans un ouvert (dépendant de la fonction) d'une variété holomorphe M, satisfaisant aux axiomes des faisceaux, sous la forme donnée par H. CARTAN : si $\mathcal{O}(u)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes définies dans l'ouvert u de M, alors, pour tout recouvrement ouvert (V_α) de u:

1) une fonction $f \in \mathcal{O}(u)$ est entièrement déterminée par ses restrictions $f/_{V_\alpha} \in \mathcal{O}(V_\alpha)$, et inversement:

2) si pour chaque α on se donne une fonction $f_\alpha \in \mathcal{O}(V_\alpha)$, de sorte que pour tous les couples (α,β), f_α et f_β aient la même restriction à $u_\alpha \cap u_\beta$, alors il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(u)$ telle que $f/_{V_\alpha} = f_\alpha$ pour tout α.

Le faisceau ainsi défini est appelé le faisceau structural de M et noté $\mathcal{O}_M$.

On remarque que dans les axiomes des faisceaux sous la forme donnée par H. CARTAN, la seule propriété qui intervient est le fait qu'un élément de $\mathcal{O}(u)$ a une restriction bien déterminée à un ouvert $v \subset u$, autrement dit qu'il y a une application linéaire $\mathcal{O}(u) \longrightarrow \mathcal{O}(v)$ telle que si w est un ouvert tel que $w \subset v \subset u$, l'application $\mathcal{O}(u) \longrightarrow \mathcal{O}(w)$ est composée de $\mathcal{O}(v) \longrightarrow \mathcal{O}(w)$ et de $\mathcal{O}(u) \longrightarrow \mathcal{O}(v)$. Il ya alors, bien d'autres types de faisceaux que ceux provenant des fibres vectoriels, et c'est cette variété et la souplesse d'utilisation qui en résulte qui font le grand intérêt des faisceaux.

On peut par exemple remplacer dans les axiomes $\mathcal{O}(u)$ par un groupe $F(u)$ (qui, généralement, sera un $\mathcal{O}(u)$-module), ces groupes ayant des "restrictions" (homomorphismes $F(u) \longrightarrow F(v)$) analogues à celles des $\mathcal{O}(u)$; on obtient ainsi la définition d'un faisceau de groupe.

Des articles de K. Oka [11] et [12] de 1950 et 1951 introduisaient une notion très proche de celle de faisceau dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables : celle d'idéal de domaine indéterminé (on dirait maintenant faisceau d'idéaux). La réflexion sur ces travaux d'Oka a sans doute éclairé H. Cartan dans sa formulation de la théorie de faisceaux, et elle lui a permis de reformuler les résultats d'Oka comme des théorèmes de cohomologie des faisceaux (les fameux théorèmes A et B) ; le séminaire Cartan de 1951 - 1952 est consacré à ces questions, dans le cadre des faisceaux analytiques cohérents.

La finitude de la cohomologie d'un espace analytique compact à coefficients dans un faisceau cohérent est établie par H. Cartan et J. P. Serre en 1953 [16] ; la dualité pour les faisceaux analytiques localement libres sur une variété complexe compacte est dûe à J.P. Serre en 1953 [13]. Sur le modèle de la théorie des espaces analytiques, Serre [2] a repris en 1954 les bases de la géométrie algébrique à l'aide de la cohomologie des faisceaux algébriques cohérents. En 1956 J. P. Serre trouve une correspondance biunivoque entre les faisceaux algébriques cohérents et les faisceaux analytiques cohérents, et donne un isomorphisme de groupes de cohomologie, ce qui permet d'utiliser indifféremment les méthodes algébriques ou les méthodes analytiques de Hodge-Kodaira.

Dès 1954, J.P. Serre eut l'idée de généraliser la notion de faisceau aux variétés "abstraites" en remplaçant dans sa définition la topologie usuelle par la topologie de Zariski. L'avantage de cette conception est que ce type de structure se prête fort bien au "recollement" le long d'ensembles ouverts, la vérification des "conditions de recollement" étant d'ordinaire triviale. J.P. Serre fixe une fois pour toutes un corps de base <u>algébriquement clos k</u> (de caractéristique quelconque). Les "morceaux" qu'il "recolle" pour obtenir la définition de ses variétés sont ce qu'on appelle des variétés affines sur k ; une telle variété X est une partie d'un espace k^n définie par des équations polynomiales, et le faisceau $\mathcal{O}_X$ est défini par la condition que, pour tout ouvert $u \subset X$, $H^0(u, \mathcal{O}_X)$ (i.e les sections de $\mathcal{O}_X$ au-dessus de u) est formé des restrictions à u des fonctions rationelles $x \longmapsto P(x)/Q(x)$ sur k^n qui sont définies en tout point $x \in u$.

Jusque vers 1950 personne ne semble avoir essayé de donner une définition intrinsèque d'une variété algébrique affine sur une corps algébriquement clos k, indépendante de tout plongement de la variété dans un espace affine k^n.

Dans le langage des catégories, dont l'usage commença à se répandre vers 1955, la catégorie des variétés affines sur k est équivalente à la catégorie duale de la catégorie des k-algèbres commutatives réduites (i.e qui n'ont pas d'éléments nilpotents) de type fini.

En 1955, D. Buchsbaum [14] a proposé un cadre abstrait plus général pour l'algèbre homologique : celui des catégories exactes, que Grothendieck a introduites de son côté sous le nom de catégories abéliennes qu'il définit comme étant des catégories additives dont tout morphisme a un noyau et un conoyau, le morphisme naturel de la coïmage dans l'image étant un isomorphisme.

Le travail de Grothendieck dont le but est de trouver un cadre commun à la cohomologie d'un espace topologique à coefficients dans un faisceau et à la théorie des foncteurs dérivés de foncteurs de modules, a été exposé au printemps 1955 à l'Université de Kansas.

Suivant une suggestion de P. Cartier, A. Grothendieck entreprit, vers 1957, un programme gigantesque dont le but était une vaste généralisation de la goémétrie algébrique, absorbant tous les développements antérieurs, et partant de la catégorie de tous les anneaux comutatifs au lieu de la sous-catégorie des algèbres réduites de type fini sur un corps algébriquement clos.

Toutefois, il a fallu dès le départ modifier sensiblement le processus pour définir comme ci-dessus une catégorie qui soit équivalente à la duale de la catégorie de tous les anneaux commutatifs. Grothendieck adopta alors le processus suivant : si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme d'anneaux, l'image réciproque d'un idéal maximal I de B n'est pas en général un idéal maximal de A ; par contre, pour tout idéal premier p de B, $\varphi^{-1}(p)$ est toujours un idéal premier de A. Il faut donc, pour remplacer la "variété affine", considérer le <u>spectre</u> de A, i.e l'ensemble Spec(A) de tous les idéaux premiers de A ; on définit sur cet ensemble une "topologie de Zariski" en prenant pour ensembles fermés les ensembles $V(a)$, où $V(a)$ est l'ensemble des idéaux premiers contenant un idéal (arbitraire) a . On peut définir le faisceau structural $\mathcal{O}_X$, sur X = Spec(A), de la même manière que pour les variétés affines. Les espaces annelés ainsi obtenus sont appelés <u>schémas affines</u> et forment une catégorie équivalente à la duale de la catégorie de tous les anneaux commutatifs.

De là on passe à la catégorie des schémas par le procédé de "recollement" semblable à celui qui définit les variétés de Serre, mais en partant des schémas affines au lieu de variétés affines, et en imposant aucune restriction aux ouverts affines du schéma, ni aucune "condition de séparation".

La plus grande des idées nouvelles de la théorie des schémas dérive du changement de base. Dans la théorie des variétés algébriques sur un corps algébriquement clos k, Weil avait défini en 1949, non seulement la notion de fibré vectoriel, mais aussi celle de fibré principal sur une telle variété V ; le groupe G opérant sur un tel fibré P étant supposé algébrique (et opérant de sorte que l'application G x P ———> P soit un morphisme), et le fibré étant supposé "localement trivial" pour la topologie de Zariski.

En 1958, Serre s'aperçut que cette définition ne possédait pas les propriétés escomptées, par exemple dans la théorie des groupes algébriques sur k, on peut, pour un groupe algébrique G et un sous-groupe fermé H, définir G/H comme variété algébrique, mais pour l'opération naturelle de H sur G, G n'est plus en général fibré principal sur G/H au sens de la définition de Weil.

Toutefois, Serre observa que dans ce cas la "trivialité" locale se trouvait rétablie si l'on remplaçait les ouverts de Zariski de la base, intervenant dans la définition de la trivialité locale, par des revêtements étales finis convenanbles de ces ouverts, le fibré étant remplacé par son "image réciproque" au-dessus de ce revêtement.

Partant de cette remarque, Grothendieck conçut l'idée de remplacer sur un schéma X la topologie de Zariski par une nouvelle structure, <u>dite topologie étale</u> : on remplace les injections canoniques u ⟼ –

des morphismes étales finis $v \longmapsto u$ (u étant un ouvert de X).

Cependant, les constructions de schémas "représentant" des foncteurs n'est pas toujours possible ; par exemple Nagata a construit une variété complète non projective X sur un corps k, pour laquelle le foncteur de Hilbert n'est pas représentable. Pour pallier ces inconvénients, M. Artin a introduit des objets plus généraux que les schémas, qu'il appelle espaces algébriques, et qu'on peut concevoir comme des "espaces quotients" de schémas. La plupart des propriétés des schémas s'étendent à ces espaces, et en outre. La plupart des constructions se font sans restriction gênante dans cette théorie.

Le premier livre exposant d'une manière systématique la théorie des faisceaux, a été publié par R. Godement en 1958 [1]. Le point de vue adopté est voisin de celui de Grothendieck ; la principale innovation consiste en l'introduction de certaines classes de faisceaux extrêmement utiles : les faisceaux flasques et les faisceaux mous qui sont très pratiques pour la construction des résolutions. Un faisceau F est dit flasque si toute section de F dans un ouvert se prolonge à l'espace entier ; un faisceau F sur l'espace X est dit mou si toute section de F au-dessus d'un fermé de X se prolonge à X entier.

Pour les besoins de la géométrie algébrique, Grothendieck a considérablement développé l'algèbre homologique et la théorie des faisceaux dans les années 1957-1965, en introduisant le concept de catégorie dérivée et le formalisme des opérations sur les faisceaux dans le cadre des catégories dérivées. Il a été conduit à élargir la notion d'espace topologique (pour définir une bonne cohomologie des schémas à coefficients constants) en la remplaçant par celles de site et de topos. Le séminaire de Géométrie Algébrique de l'IHES, animé de 1960 à 1968 par Grothendieck porte la marque de ces rénovations de la théorie. L'année 1961-62 traite de la théorie de la dualité locale pour les faisceaux algébriques cohérents. Pour obtenir le théorème de dualité sous une forme satisfaisante, il fallait disposer du langage des catégories dérivées, que J.L. Verdier a mis en forme dans sa thèse en 1963, d'après les idées de Grothendieck [15].

Cette historique montre qu'il existe de différentes approches permettant de définir un faisceau.

Dans ce travail, l'approche adoptée pour définir un faisceau, consiste à utiliser le langage des catégories et celui des foncteurs.

Le Chapitre O regroupe les notions les plus générales concernant les catégories et foncteurs.

Le Chapitre I sera surtout consacré à la définition des faisceaux, et nous montrerons comment retrouver les variétés de faisceaux d'ensembles : Faisceaux de groupes, d'anneaux, de A-modules etc. Nous montrerons aussi qu'à toutes les opérations usuelles sur les groupes ou les modules correspondent des opérations sur des faisceaux : sous-faisceaux, faisceaux-quotients etc.

Le Chapitre II traitera certains éléments fondamentaux des faisceaux cohérents de modules. Nous partirons de l'article de J.P. Serre [2] en apportant une légère modification permettant de reformuler certains résultats dans le but de trouver un cadre plus adapté à ce travail. Par exemple, nous définirons un faisceau de type fini d'une autre manière ; la définition donnée par J.P. Serre sera énoncée sous forme de Lemme (Lemme II.1.3).

Le Chapitre III sera consacré aux propriétés de recollement de faisceaux. Nous partirons des propriétés étudiées par A. Grothendieck et J.A. Dieudonné [3] en essayant d'apporter notre contributon sous deux formes :

1) Faire une étude détaillée des esquisses de démonstrations dans certains cas ;

2) et dans d'autres cas, proposer de nouvelles démonstrations (plus simples) ; c'est le cas par exemple de la proposition III.3.1.

Le Chapitre IV comportera deux parties. Dans la première partie nous étudierons les faisceaux A-cohérents ; suivant une suggestion du Professeur H. Seydi qui a dirigé ce travail, nous partirons de son article [4] pour caractériser les faisceaux A-cohérents.

Dans la seconde partie nous donnerons une méthode de construction de faisceau associé à un préfaisceau. Cette méthode est en fait une étude détaillée d'une construction esquissée dans un cours de D.E.A. du Professeur P. Schapira de l'Université Pierre et Marie Curie de PARIS en France (en 1996).

Dans le chapitre V, nous déterminons les points algébriques de degré 4 sur la courbe de Fermat

$$F_5 = \left\{(X,Y,Z) \in \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{Q}}) : X^5 + Y^5 + Z^5 = 0\right\}$$

CHAPITRE 0 :

CATEGORIES ET FONCTEURS

1) NOTION DE CATEGORIE

Définition 0.1.1.

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'une classe notée ob($\mathcal{C}$) appelée la classe des objets de $\mathcal{C}$, à laquelle est obligatoirement adjoint un ensemble noté FL($\mathcal{C}$) dit ensemble des morphismes (ou des flèches) de $\mathcal{C}$, avec les axiomes suivants :

$\underline{AX_1}$: A deux objets quelconques X, Y de $\mathcal{C}$ est associée une partie de FL($\mathcal{C}$) notée $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ (ou simplement $Hom(X,Y)$) et appelée ensemble des morphismes de X dans Y (ou de source X et de but Y), de sorte que si $(X',Y') \neq (X,Y)$ alors $Hom(X',Y')$ et $Hom(X,Y)$ sont disjoints.

$\underline{AX_2}$: Pour trois objets quelconques X, Y, Z de $\mathcal{C}$, on se donne une application $(u,v) \longmapsto vu$ de $Hom(X,Y) \times Hom(Y,Z)$ dans $Hom(X,Z)$ appelée morphisme composé du morphisme u, suivi du morphisme v tel que :

$$w(vu) = (wv)u$$

pour $u \in Hom(X,Y)$, $v \in Hom(Y,Z)$ et $w \in Hom(Z,T)$.

$\underline{AX_3}$: Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, il existe $1_X \in Hom(X,X)$ tel que, pour tout objet Y de $\mathcal{C}$ et tout $u \in Hom(X,Y)$ (resp. tout $v \in Hom(Y,X)$), on ait $u = u\,1_X$ (resp. $v = 1_X v$).

Définition 0.1.2

Une catégorie $\mathscr{C}'$ est dite sous-catégorie d'une catégorie $\mathscr{C}$ et l'on note $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$, si : $Ob(\mathscr{C}') \subset Ob(\mathscr{C})$ et pour tous X', Y', Z' objets de $\mathscr{C}'$ on a :

- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X',Y') \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',Y')$
- $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X',Y') \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(Y',Z') \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X',Z')$ est la restriction de

  $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',Y') \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y',Z') \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',Z')$.

Les identités $1_{X'}$ étant les mêmes relativement à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ pour tout $X' \in Ob(\mathscr{C}')$.

Définition 0.1.3.

On dit qu'une sous-catégorie $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ est pleine si

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X',Y') = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',Y')$ pour tous X', $Y' \in Ob(\mathscr{C}')$

Définition 0.1.4

A toute catégorie $\mathscr{C}$, est associée de façon canonique une autre catégorie notée $\mathscr{C}^{\circ}$, appelée opposée à $\mathscr{C}$ (ou duale de $\mathscr{C}$) définie de la manière suivante :

$Ob(\mathscr{C}^{\circ}) = Ob(\mathscr{C})$ et $FL(\mathscr{C}^{\circ}) = FL(\mathscr{C})$; pour X, $Y \in Ob(\mathscr{C})$.

On pose $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\circ}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)$ et si $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\circ}}(X,Y)$, $v \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\circ}}(Y,Z)$, la composition $v * u$ dans $\mathscr{C}^{\circ}$ est $uv \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\circ}}(X,Z) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z,X)$; les éléments 1_X sont les mêmes pour $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^{\circ}$. On dit qu'on passe de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}^{\circ}$ en renversant les flèches ; on a $(\mathscr{C}^{\circ})^{\circ} = \mathscr{C}$.

Notation 0.1.5

Les éléments de Hom(X,Y) s'écrivent souvent comme des applications "ensemblistes" $u : X \longmapsto Y$ ou $X \overset{u}{\longmapsto} Y$, et vu s'écrit $X \overset{u}{\longmapsto} Y \overset{v}{\longmapsto} Z$.

Cela permet en théorie des ensembles de parler de "diagramme commutatif" de morphismes.

On écrit souvent

$X \in \mathcal{C}$ au lieu de $X \in Ob(\mathcal{C})$.

Définition 0.1.6

Un morphisme $u : X \longmapsto Y$ est dit isomorphisme s'il existe $v : X \longleftarrow Y$ tel que $uv = 1_Y$ et $vu = 1_X$;

On écrit souvent

$u : X \overset{\sim}{\longmapsto} Y$ ou simplement $X \overset{\sim}{\longmapsto} Y$

Exemple 0.1.7 : La catégorie notée Ens des ensembles.

Les objets de Ens sont tous les ensembles et pour tous X,Y objets de Ens Hom(X,Y) est l'ensemble de toutes les applications de X dans Y. La composition des morphismes est la composition usuelle des fonctions. Pour tout ensemble X, 1_X est la fonction identité de X dans X.

Exemple 0.1.8. La catégorie Gr des groupes.

Les objets de Gr sont les groupes, les morphismes sont les homomorphismes de groupes et la composition des morphismes est la composition habituelle des homomorphismes.

Exemple 0.1.9 : La catégorie Grab des groupes abéliens.

Elle est définie comme la catégorie Gr en remplaçant le mot "groupe" par le mot "groupe abélien".

Grad est une sous-catégorie pleine de la catégorie Gr.

Exemple 0.1.10 . La catégorie notée Rel, définie par :

$Ob(Rel) = Ob(Ens)$ et $\underset{Rel}{Hom}(X,Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$, l'ensemble des sous-ensembles de $X \times Y$.

La loi de composition est définie par :

si $u : X \longmapsto Y$ et $v : Y \longmapsto Z$, vu est l'ensemble $\{(x,z) \in X \times Z \,;\, \exists y : (x,y) \in u \,,\, (y,z) \in v\}$.

Il est évident que 1_x est la diagonale de $X \times X$.

On montre que Ens est une sous-catégorie non pleine de Rel.

Exemple 0.1.11 :

La catégorie notée Top des espaces topologiques.

Les objets de Top sont tous les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues.

C'est une sous-catégorie non pleine de Ens.

Exemple 0.1.12 : La catégorie Mod(A).

Soit A un anneau commutatif unitaire fixé. On définit Mod(A) comme suit : $Ob(Mod_A)$ est la classe de tous les A-modules ; $\underset{Mod(A)}{Hom}(M,N)$ est l'ensemble de toutes les applications A-linéaires de M dans N ;

La composition des morphismes est celle des applications A-linéaires.

N.B : $\underset{Mod(A)}{Hom}(M,N)$ est souvent noté $Hom_A(M,N)$.

2) MORPHISMES REMARQUABLES DANS UNE CATEGORIE

Soit $u : X \longmapsto Y$ un morphisme d'une catégorie $\mathscr{C}$.

Définition 0.2.1 :

On dit que u est un $\mathscr{C}$-monomorphisme si pour tout objet Z de $\mathscr{C}$ et pour tout couple $(v,w) \in Hom(Z,X) \times Hom(Z,X)$ tel que

$uv = uw$ on a $v = w$.

On exprime cela en disant que u est simplifiable quand il est écrit à gauche.

Définition 0.2.2:

On dit que u est un $\mathscr{C}$-épimorphisme si pour tout objet Z de $\mathscr{C}$ et pour tout couple

$(v,w) \in Hom(Y,Z) \times Hom(Y,Z)$ tel que $vu = wu$ on a $v = w$.

On exprime cela en disant que u est simplifiable quand il est écrit à droite.

Définition 0.2.3

On dit que u est un $\mathscr{C}$-bimorphisme s'il est à la fois un $\mathscr{C}$-monomorphisme et un $\mathscr{C}$-épimorphisme.

Définition 0.2.4

On dit que u est sectionnable (resp. rétractable) s'il existe un morphisme $v \in Hom(Y,X)$ (resp. $w \in Hom(Y,X)$ tel que $uv = 1_Y$ (resp. $wu = 1_X$).

S'il en est ainsi on dit que v (resp. w) est une section de u (resp. une rétraction de u).

3) OBJETS REMARQUABLES DANS UNE CATEGORIE

Définition 0.3.1 :

On dit qu'un objet I d'une catégorie $\mathscr{C}$ est un $\mathscr{C}$-objet initial (ou simplement un objet initial) si pour tout $X \in Ob(\mathscr{C})$, $Hom(I,X)$ est un singleton.

Définition 0.3.2 :

Un dit qu'un objet J d'une catégorie $\mathscr{C}$ est un $\mathscr{C}$-objet final (ou simplement un objet final) si pour tout $X \in Ob(\mathscr{C})$, $Hom(X,J)$ est un singleton.

Définition 0.3.3.

Un dit qu'un objet O d'une catégorie $\mathscr{C}$ est un $\mathscr{C}$-objet nul (ou simplement un objet nul) si O est à la fois un objet initial est un objet final.

Exemples 0.3.4 :

Dans la catégorie Ens, l'ensemble vide est un objet initial et c'est le seul objet initial.

Dans Ens tout ensemble réduit à un élément est un objet final.

La catégorie Ens n'admet pas d'objet nul ; par contre, les catégories Gr, Grad (resp. Mod(A)) admettent des objets nuls en l'occurence tout groupe (resp. tout A-module) réduit à un seul élément est un objet nul.

4) FONCTEURS

Définition 0.4.1 :

Un foncteur (ou foncteur covariant) $F : \mathscr{C} \longmapsto \mathscr{C}'$ d'une catégorie $\mathscr{C}$ dans une catégorie $\mathscr{C}'$ est constitué par deux applications $Ob(\mathscr{C}) \longmapsto Ob(\mathscr{C}')$ et $FL(\mathscr{C}) \longmapsto FL(\mathscr{C}')$, toutes deux notées F, et telles que les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(C.1) $\forall X, Y \in Ob(\mathscr{C})$, $F(Hom_{\mathscr{C}}(X,Y)) \subset Hom_{\mathscr{C}'}(F(X), F(Y))$

(C.2) $\forall X \in Ob(\mathscr{C})$, $F(1_X) = 1_{F(X)}$

(C.3) pour deux morphismes $X \xmapsto{u} Y \xmapsto{v} Z$ de $\mathscr{C}$,

$$F(vu) = F(v)\, F(u)$$

Définition 0.4.2.

Un définit un foncteur contravariant d'une catégorie $\mathscr{C}$ dans une catégorie $\mathscr{C}'$ en remplaçant les conditions (C.1) et (C.3) par

$$F(\underset{\mathscr{C}}{Hom}(X,Y)) \subset \underset{\mathscr{C}'}{Hom}(F(Y), F(X)) \quad \text{et} \quad F(vu) = F(u)\, F(v).$$

Un foncteur contravariant de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ est un foncteur de $\mathscr{C}^{\circ}$ dans $\mathscr{C}'$ (ou de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'^{\circ}$).

On définit la notion de multifoncteur de plusieurs catégories $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$,... dans une catégorie $\mathscr{C}'$; par exemple un bifoncteur des catégories Ens $\times$ Ens dans Ens est défini de la manière suivante : à deux ensembles X, Y on associe leur produit $X \times Y$, et à deux applications $X \xmapsto{f} X'$, $Y \xmapsto{g} Y'$, l'application $X \times Y \xmapsto{fg} X' \times Y'$

Définition 0.4.3 :

Soit $F : \mathscr{C} \longmapsto \mathscr{C}'$ un foncteur. $F(Ob(\mathscr{C}))$ et $F(FL(\mathscr{C}))$ sont respectivement l'ensemble des objets et l'ensemble des morphismes de la sous-catégorie $F(\mathscr{C})$ de $\mathscr{C}'$.

On dit que F est fidèle (resp. plein, resp. pleinement fidèle) si pour tous X, Y objets de $\mathscr{C}$ l'application

$$\underset{\mathscr{C}}{Hom}(X,Y) \longmapsto \underset{\mathscr{C}'}{Hom}(F(X),F(Y))$$

est injective (resp. surjective, resp. bijective).

Remarque 0.4.4 :

Un foncteur (resp. foncteur contravariant) $F : \mathcal{C} \longmapsto \mathcal{C}'$ est souvent noté

$F : \mathcal{C} \longmapsto \mathcal{C}'$ (resp. $F : \mathcal{C} \longmapsto \mathcal{C}'$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & F(X) \arrow[d, "F(u)"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & F(Y) \end{tikzcd} \qquad u \longmapsto F(u) \qquad\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & F(X) \\ Y \arrow[r, mapsto] & F(Y) \arrow[u, "F(u)"'] \end{tikzcd} \qquad u \longmapsto F(u)$$

Exemple 0.4.5 :

$1_F : F \longmapsto F$ qui est par définition l'identité sur les objets et l'identité sur les morphismes est un foncteur à la fois covariant et contravariant, appelé le foncteur identité de F.

Exemple 0.4.6 : Foncteur oubli de structure

$$F : Gr \longmapsto Ens$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & F(G) \arrow[d, "F(u)"] \\ G' \arrow[r, mapsto] & F(G') \end{tikzcd} \qquad u \longmapsto F(u)$$

où $F(G)$ est par définition l'ensemble sous-jacent au groupe G et où $F(u)$ est l'application de l'ensemble $F(G)$ dans l'ensemble $F(G')$.

On a "oublié" les structures de groupes et le fait que u est un homomorphisme de groupes.

Exemples 0.4.7 :

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On définit de nouvelles catégories par :

$\mathcal{C}^\wedge$: La catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ dans Ens

$\mathscr{C}^{\vee}$: La catégorie des foncteurs de ...

et on définit les foncteurs

$$\hat{h} : \mathscr{C} \longmapsto \hat{\mathscr{C}} \quad , \quad X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,.)$$

$$h^{\vee} : \mathscr{C} \longmapsto \mathscr{C}^{\vee} \quad , \quad X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(.,X)$$

Définitions 0.4.8 :

Un foncteur $F : \mathscr{C} \longmapsto \mathscr{C}'$ est une équivalence de catégories s'il existe un foncteur $G : \mathscr{C}' \longmapsto \mathscr{C}$ tel que $G \circ F$ isomorphe à $1_{\mathscr{C}}$ et $F \circ G$ isomorphe à $1_{\mathscr{C}'}$. On montre que F est une équivalence de catégories si F est pleinement fidèle et pour tout $Y \in Ob(\mathscr{C}')$ il existe $X \in Ob(\mathscr{C})$ et un isomorphisme $F(X) \overset{\sim}{\longmapsto} Y$.

On dit que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont des catégories équivalentes ; on se permet dans le langage de ne pas les distinguer.

Exemples 0.4.9 :

Soit $\mathscr{C}$ la catégorie définie par $Ob(\mathscr{C}) = \mathbb{N}$ et $\mathrm{Hom}(n,m) = M_{m,n}(K)$, l'espace des matrices de type (m,n) à coefficients dans un corps K. On définit le foncteur $F : \mathscr{C} \longmapsto \mathrm{Mod}(K^{f})$ par $n \longmapsto K^{n}$, (et à toute matrice de type (m,n), F associe naturellement l'application linéaire de K^{n} dans K^{m}). On montre que F est une équivalence de catégories et non un isomorphisme.

NB. $\mathrm{Mod}(K^{f})$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(K)$ constituée d'un nombre fini de générateurs de K-modules.

Définition 0.4.10 :

Soient deux foncteurs

$F : \mathscr{C} \longmapsto \mathscr{C}'$ et $G : \mathscr{C}' \longmapsto \mathscr{C}$. On dit que F est adjoint à gauche de G (ou G est adjoint à droite de

F), s'il existe un isomorphisme de bifoncteurs :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(.),.) \overset{\sim}{\longmapsto} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(.,G(.))$$

Exemple 0.4.11 :

Soit $\varphi : B \longmapsto A$ un morphisme d'anneaux avec B commutatif et $\varphi(B)$ contenu dans le centre de A.

Soit K dans Mod(B) et M,N dans Mod(A) ; par la formule

$$\mathrm{Hom}_A(K \otimes_B M,N) \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(M,\mathrm{Hom}_B(K,N))$$

On voit que les foncteurs $K \otimes_B .$ et $\mathrm{Hom}_B(K,.)$ de Mod(A) dans Mod(A) sont adjoints.

5) MORPHISMES FONCTORIELS

Soient deux catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. On peut définir une nouvelle catégorie $\mathrm{Fonct}(\mathscr{C},\mathscr{C}')$ des foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ de la manière suivante : l'ensemble $\mathrm{Ob}(\mathrm{Fonct}(\mathscr{C},\mathscr{C}'))$ est l'ensemble des foncteurs $\mathscr{C} \longmapsto \mathscr{C}'$, l'ensemble $\mathrm{FL}(\mathrm{Funct}(\mathscr{C},\mathscr{C}'))$ est l'ensemble des morphismes $\theta : F \longmapsto G$ lorsque F et G sont deux foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ (qu'on appelle **morphismes fonctoriels** ou **transformations naturelles**) ; chaque morphisme fonctoriel $\theta : F \longmapsto G$ est la donnée d'une application (avec la même notation)
$\theta : \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \longmapsto \mathrm{FL}(\mathscr{C}')$ telle que, pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$,
$\theta(X) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(X), G(X))$ et que pour tout morphisme $u : X \longmapsto Y$

de $\mathscr{C}$, le diagramme de morphismes de $\mathscr{C}'$

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(u)} & F(Y) \\ {\scriptstyle\theta(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta(Y)} \\ G(X) & \xrightarrow[G(u)]{} & G(Y) \end{array}$$

soit commutatif.

Deux morphismes fonctoriels $\theta_1 : F \longmapsto G$, $\theta_2 : G \longmapsto H$ se composent par la loi

$$\theta_1\theta_2(X) = \theta_1(X)\theta_2(X)$$

pour tout $X \in Ob(\mathscr{C})$;

et le morphisme 1_F est tel que $1_F(X) = 1_X$.

6) FONCTEURS REPRESENTABLES

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie ; pour deux objets X, Y de $\mathscr{C}$ on pose $h_X(Y) = h^{\vee}(X)(Y)$ (cf Exemples 0.4.7), c'est à dire $h_X(Y) = Hom(Y,X)$; pour tout morphisme $f : Y \longmapsto Y'$ dans $\mathscr{C}$, on désigne par $h_X(f)$ l'application $g \longmapsto gf$ de $Hom(Y',X)$ dans $Hom(Y,X)$.

$$Y \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X$$

$$gf$$

$$h_X(f) : Hom(Y',X) \longmapsto Hom(Y,X)$$
$$g \longmapsto gf$$

Ces définitions montrent que $h_X : \mathscr{C} \longmapsto Ens$ est un foncteur contravariant.

Soit maintenant un morphisme $t : X \longmapsto X'$ dans $\mathscr{C}$; quels que soient $Y \in \mathscr{C}$ et $g \in Hom(Y,X) = h_X(Y)$ on a

$$tg \in Hom(Y,X') = h_{X'}(Y) ;$$

$h_X(Y)$ dans $h_X(Y)$:

$$h_t(Y) : h_X(Y) \longmapsto h_{X'}(Y)$$
$$g \longmapsto tg$$

On définit ainsi un morphisme fonctoriel $h_t : h_X \longmapsto h_{X'}$, car pour tout morphisme $f : Y \longmapsto Y'$ dans $\mathcal{C}$ on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
h_X(Y') \arrow[r, "h_X(f)"] \arrow[d, "h_t(Y')"'] & h_X(Y) \arrow[d, "h_t(Y)"] \\
h_{X'}(Y') \arrow[r] & h_{X'}(Y)
\end{tikzcd}$$

<u>Définition 0.6.1</u> :

> Soit $F : \mathcal{C} \longmapsto \mathrm{Ens}$ un foncteur contravariant.
>
> On dit que F est représentable s'il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que F soit isomorphe à h_X ; on dit qu'un tel objet X représente F.

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories, $F : \mathcal{C} \longmapsto \mathcal{C}'$ un foncteur covariant. Alors, pour un objet donné X' de $\mathcal{C}'$

$$T \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(T),X')$$

est un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans Ens ; s'il est représentable, on dit qu'un objet Y de $\mathcal{C}$ qui le représente est associé à X'. Par définition, pour tout $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, on a donc un isomorphisme fonctoriel en T :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(t,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(T),X')$$

Cet isomorphisme est noté $f \longmapsto f^{\#}$, et l'isomorphisme réciproque est noté $f' \longmapsto f'^{b}$.

CHAPITRE I

NOTION DE FAISCEAUX

1) PREFAISCEAUX

Soit X un espace topologique. On note Ouv_X la catégorie dont les objets sont les ouverts de X, et où, pour deux ouverts u et v de X, on a :

$$\mathrm{Hom}(u,v) = \begin{cases} \{i\} & \text{si } u \leq v \quad \text{et } i : u \longmapsto v \text{ est l'injection canonique} \\ \emptyset & \text{si } u \leq v \end{cases}$$

La composition des morphismes étant la composition des injections canoniques.

Alors on peut donner les définitions suivantes :

Définition I.1.1 :

Un appelle préfaisceau sur l'espace topologique X à valeurs dans une catégorie $\mathscr{C}$, un foncteur contravariant

$$F : Ouv_X \longmapsto \mathscr{C}$$

ie $u \longmapsto F(u)$

un ouvert de X un objet de $\mathscr{C}$

$u \leq v \longmapsto F(v) \xrightarrow{F(i)} F(u)$

deux ouverts de X

N.B : $F(i) : F(v) \longmapsto F(u)$ est notée $\rho_{uv} : F(v) \longmapsto F(u)$ et est appelée restriction.

Un préfaisceau $F : Ouv_X \longmapsto \mathscr{C}$ est dit préfaisceau d'ensembles si :

- $\mathscr{C}$ = Ens la catégorie des ensembles
- $\rho_{uv} : F(v) \longmapsto F(u)$ est une application.

Exemple 1.1.2 :

Soit X un espace topologique

F(u) = l'ensemble des fonctions continues sur u

$u \subseteq v$ deux ouverts de X

$$\rho_{uv} : F(v) \longmapsto F(u)$$
$$f \longmapsto f|_u \text{ la restriction de } f \text{ à } u.$$

F est un préfaisceau d'ensembles sur X.

Exemple I.1.3 :

$X = K^n$ muni de la topologie de Zariski, où K est un corps.

Posons $A = K[X_1,\dots,X_n]$, et pour tout ouvert u de X

S_u = l'ensemble des éléments de A qui ne s'annulent pas sur u.

Ainsi : $u \subseteq v \Longrightarrow S_v \subseteq S_u$

On peut définir alors un préfaisceau d'ensembles en posant :

$\forall u \in Ouv_X$, $B_u = S_u^{-1}$; et pour tout couple (u,v) d'ouverts de X tel que $u \subseteq v$

$$\rho_{uv} : B_v \longmapsto B_u$$
$$\frac{Q}{P} \longmapsto \frac{Q}{P} \qquad (P \in S_v \Longrightarrow P \in S_u)$$

Le préfaisceau ainsi défini est noté $\underline{O}_X$; ainsi B_u peut se noter aussi $\underline{O}_X(u)$.

Définition I.1.4 :

On dira que le préfaisceau d'ensembles $F : Ouv_X \longmapsto Ens$ est un préfaisceau de groupes (resp. de groupes abéliens) si :

- $\forall u \in Ouv_X$, $F(u)$ est un groupe (resp. un groupe abélien)
- si $u \subseteq v$, $F(i) = \rho_{uv}$ est un homomorphisme de groupes.

Plus généralement si $F : Ouv_X \longmapsto Ens$ est un préfaisceau d'ensembles et si les $F(u)$ sont des groupes, des anneaux, des A-modules... et les applications ρ_{uv} sont des homomorphismes, alors le préfaisceau F est appelé respectivement préfaisceau de groupes, d'anneaux, de A-modules...

Remarque I.1.5 :

On a vu qu'un préfaisceau sur X à valeurs dans $\mathscr{C}$ est un foncteur contravariant

$$F : Ouv_X \longmapsto \mathscr{C}.$$

En d'autres termes, un préfaisceau F sur X à valeurs dans $\mathscr{C}$, est la donnée pour tout $u \in Ouv_X$ d'un objet $F(u)$ de $\mathscr{C}$, et pour tout couple (u,v) d'ouverts de X tel que $u \subseteq v$ d'un morphisme de restriction $\rho_{uv} : F(v) \longmapsto F(u)$ de sorte que pour tous ouverts $u \subseteq v \subseteq w$ de X on ait :

$$\rho_{uu} = 1_{F(u)} \quad , \quad \rho_{uv} \circ \rho_{vw} = \rho_{uw}.$$

Définition I.1.6 :

Soient F et G deux préfaisceaux sur X. Un morphisme $\varphi : F \longmapsto G$ est un morphisme de tels foncteurs.

En d'autres termes un morphisme $\varphi : F \longmapsto G$ est la donnée d'une famille $(\varphi_u)_{u \in ouv_X}$ de morphismes $\varphi_u : F(u) \longmapsto G(u)$, tel que pour tout couple (u,v) d'ouverts de X tel que $u \subseteq v$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(v) & \xrightarrow{\varphi_v} & G(v) \\ {\scriptstyle \rho_{uv}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho'_{uv}} \\ F(u) & \xrightarrow[\varphi_u]{} & G(u) \end{array}$$

soit commutatif.

Dans toute la suite les préfaisceaux considérés seront des préfaisceaux d'ensembles.

2) AXIOMES DE FAISCEAUX D'ENSEMBLES

Soit $F : \mathrm{Ouv}_X \longmapsto \mathrm{Ens}$ un préfaisceau d'ensembles sur X (on dit aussi de base X).

Définition I.2.1 :

On dit que F est séparé si pour tout ouvert u de X et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i\in I}$ de u, l'application

$$F(u) \longmapsto \prod_{i\in I} F(u_i)$$

$$s \longmapsto (s|_{u_i})_{i\in I}$$

est injective.

ie si $s,t \in F(u)$ et si $s|_{u_i} = t|_{u_i}$ $\forall i \in I$ alors $s = t$.

Définition I.2.2 :

On dit que F est "recollable" ou possède la propriété de recollement si quel que soit l'ouvert u de X et le recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i\in I}$ de u, pour toute famille $(S_i)_{i\in I}$, $S_i \in F(u_i)$, qui vérifie les relations

$$S_i|_{u_i \cap u_j} = S_j|_{u_i \cap u_j} \quad \forall i,\ j \in I$$

il existe $S \in F(u)$ tel que $S|_{u_i} = S_i \quad \forall i \in I$.

Définition I.2.3

On appelle faisceau sur X tout préfaisceau F sur X qui est séparé et qui possède la propriété de recollement.

Exemple I.2.4 :

Soit X un espace topologique.

Soit $F : Ouv_X \longmapsto Ens$ le préfaisceau d'ensembles qui à tout ouvert u de X associe

F(u) = l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles définies sur u ; et pour deux ouverts $u \subseteq v$ de X on considère

$$\rho_{uv} : F(v) \longmapsto F(u)$$
$$f \longmapsto \rho_{uv}(f) = f|_u \text{ restriction de f à u.}$$

Montrons que F est un faisceau.

Posons $u = \bigcup_{i \in I} u_i$, $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de u.

a) Montrons que F est séparé.

Soient $f, g \in F(u)$ tel que $f|_{u_i} = g|_{u_i} \quad \forall i \in I$.

Alors on a :

$$f|_{u_i} = g|_{u_i} \ \forall i \in I \Longrightarrow f = g \text{ sur } \bigcup_{i \in I} u_i$$
$$\Longrightarrow f = g \quad (\text{car } u = \bigcup_{i \in I} u_i)$$

b) Montrons que F est recollable.

Soit $(f_i)_{i \in I}$ tel que $f_i : u_i \longmapsto \mathbb{R}$ continue

Supposons que $f_{i|u_i\cap u_j} = f_{j|u_i\cap u_j}$ $\forall$ i, j $\in$ I

La fonction $f : u \longmapsto \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f_i(x)$ si $x \in u_i$ est continue, et par construction $f_{|u_i} = f_i$ $\forall i \in I$.

Exemple I.2.5 :

Soit K un corps infini, $X = K^n$ muni de la topologie de Zariski ; alors le préfaisceau $\underline{O}_X$ (exemple I.1.3) est un faisceau.

En effet :

a) Montrons que $\underline{O}_X$ est séparé.

Soit $u \in Ouv_X$ et $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de u.

s et $t \in \underline{O}_X(u) = S_u^{-1}A = B_u$ (cf exemple I.1.3), avec

$A = K[T_1,\ldots,T_n]$ et S_u = l'ensemble des $P \in A$ qui ne s'annulent pas sur u.

$s_i = \rho_{u_iu}(s)$ et $t_i = \rho_{u_iu}(s)$, $s_i = t_i$ $\forall i \in I$.

$s = \dfrac{P}{Q}$, $t = \dfrac{H}{R}$; P, Q, H et R $\in$ A

Or $\rho_{u_iu} : B_u \longmapsto B_{u_i}$ ie $\rho_{u_iu} : S_u^{-1}A \longmapsto S_{u_i}^{-1}A$

ainsi

$s_i = \dfrac{P}{Q}$ dans $S_{u_i}^{-1}A$ et $t_i = \dfrac{H}{R}$ dans $S_{u_i}^{-1}A$.

Soit $i \in I$ tel que $u_i \neq \emptyset \Longrightarrow 0 \notin S_{u_i}$

$u_i \subseteq u \Longrightarrow S_u \subseteq S_{u_i}$

$$\begin{array}{ccc} S_u^{-1}A & \longrightarrow & S_{u_i}^{-1}A \\ \text{\rotatebox{90}{$\subseteq$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\supseteq$}} \\ & A = K[T_1,\ldots\ldots\ldots,T_n] & \end{array}$$

Puisque $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{H}{R}$ sont égales dans $S_{u_i}^{-1}A$, alors elles sont égales dans $S_u^{-1}A$, donc $s = t$.

b) Montrons que $\underline{O}_X$ possède la propriété de recollement.

Soit $u \in \mathrm{Ouv}_X$, $u \neq \emptyset$ et soit $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de u.

$s_i \in \underline{O}_X(u_i) = S_{u_i}^{-1}A$, $\forall i \in I$; on suppose que $\forall i, j \in I$

$\rho_{u_i\cap u_j u_i}(s_i) = \rho_{u_i\cap u_j u_i}(s_j)$ et que $u_i \neq \emptyset$ $\forall i \in I$.

$i_o \in I$, $S_{i_o} = \dfrac{P_{i_o}}{Q_{i_o}}$ avec P_{i_o} et Q_{i_o} sans diviseur premier commun.

Soit $i \in I$, $s_i = \dfrac{P_i}{Q_i}$; $u_i \cap u_j \neq \emptyset$ (K est infini)

$S^{-1}_{u_i\cap u_{i_o}} \supseteq S^{-1}_{u_{i_o}}A$ et $S^{-1}_{u_i\cap u_{i_o}} \supseteq S^{-1}_{u_i}A$

$$\rho_{u_i\cap u_{i_o} u_i}(s_i) = \rho_{u_i\cap u_{i_o} u_{i_o}}(s_{i_o}) \Longrightarrow \frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_{i_o}}{Q_{i_o}}$$

$$\Longrightarrow Q_iP_{i_o} = P_iQ_{i_o}$$

$$\Longrightarrow Q_i = B_iQ_{i_o} \text{ et } P_i = A_iP_{i_o}$$

donc Q_{i_o} ne s'annule pas sur u (car $u = \bigcup_{i\in I} u_i$) ; En effet Q_i ne s'annule pas sur u_i $\forall i \in I$, donc $Q_i = B_iQ_{i_o}$ montre que Q_{i_o} ne doit pas s'annuler sur u_i $\forall i \in I$, d'où Q_{i_o} ne s'annule pas sur $u = \bigcup_{i\in I} u_i$.

$s_{i_o} = \dfrac{P_{i_o}}{Q_{i_o}} \in S^{-1}_{u_i}A$; Ainsi

$$\frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_{i_o}}{Q_{i_o}} \Longrightarrow \frac{A_iP_{i_o}}{B_iQ_{i_o}} = \frac{P_{i_o}}{Q_{i_o}}$$

$$\Longrightarrow A_i = B_i$$

donc dans $S_u^{-1}A$ on a $\frac{o}{Q_{i_o}} = \frac{\iota}{Q_i}$

on a trouvé $s = \frac{P_{i_o}}{Q_{i_o}} \in S_u^{-1}A$ tel que $\rho_{u_i u}(s) = s_i \quad \forall i \in I.$

Définition I.2.6 :

Le faisceau $\underline{O}_X$ (défini à l'exemple I.2.5) est appelé faisceau des fonctions régulières sur X.

Proposition I.2.7 :

Dire qu'un préfaisceau $F : Ouv_X \longmapsto Ens$ est séparé et possède la propriété de recollement (en d'autres termes que F est un faisceau) est équivalent à dire que pour tout ouvert u de X et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{u_i\}$ de u on a la suite suivante qui est exacte :

$$0 \longmapsto F(u) \overset{f}{\longmapsto} \prod_i F(u_i) \overset{g}{\longmapsto} \prod_{\langle i,j\rangle} F(u_{ij})$$

où $u_{ij} = u_i \cap u_j$,

$f(s) = \prod_i (s_{|u_i})$ et $g(\prod_i (s_i)) = \prod_{\langle i,j\rangle} (s_{i}{}_{|u_{ij}} - s_{j}{}_{|u_{ij}})$

$\langle i,j\rangle$ désigne un couple ordonné.

Preuve :

1) Supposons que F soit un faisceau et montrons que la suite est exacte.

a) f injective ? soient $s, t \in F(u)$

$$\begin{aligned} f(s) = f(t) &\Longrightarrow \prod_i (s_{|u_i}) = \prod_i (t_{|u_i}) \\ &\Longrightarrow s_{|u_i} = t_{|u_i} \ , \forall i \\ &\Longrightarrow s = t \quad \text{(car F est séparé).} \end{aligned}$$

b) Imf = Kerg ?

$$g(f(s)) = g\left[\prod_i (s_{|u_i})\right] = \prod_{\langle i,j\rangle} \left[(s_{|u_i})_{|u_{ij}} - (s_{|u_j})_{|u_{ij}}\right] =$$

$$\prod_{\langle i,j\rangle} \left[s_{|u_{ij}} - s_{|u_{ij}}\right] = 0$$

donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

$$g\left[\prod_i (s_i)\right] = 0 \Longrightarrow s_i|_{u_{ij}} - s_j|_{u_{ij}} = 0 \quad \forall i,\ j.$$

$$\Longrightarrow s_i|_{u_{ij}} = s_j|_{u_{ij}} \quad \forall i, j.$$

$$\Longrightarrow \exists\ s \in F(u) : s_{|u_i} = s_i \quad \forall i$$ (car F est "recollable").

D'où $\prod_i (s_i) = \prod_i (s_{|u_i}) \in \operatorname{Im} f$

donc $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f$.

2) Supposons que la suite soit exacte et montrons que F est un faisceau.

a) F est séparé ?

Soient $s,\ t \in F(u)$

$s_{|u_i} = t_{|u_i}\ \forall i \Longrightarrow \prod_i (s_{|u_i}) = \prod_i (t_{|u_i}) \Longrightarrow f(s) = f(t) \Longrightarrow s = t$ (car f est injective).

b) F est "recollable" ?

Soit $(s_i)_i$, $s_i \in F(u_i)$ tel que $s_i|_{u_{ij}} = s_j|_{u_{ij}}\ \forall i,j$; on a :

$$s_i|_{u_{ij}} = s_j|_{u_{ij}}\ \forall i,j \Longrightarrow s_i|_{u_{ij}} - s_j|_{u_{ij}} = 0 \quad \forall i,\ j$$

$$\Longrightarrow \prod_{\langle i,j\rangle} \left[s_i|_{u_{ij}} - s_j|_{u_{ij}}\right] = 0$$

$$\Longrightarrow g\left[\prod_i (s_i)\right] = 0$$

$$\Longrightarrow \prod_i (s_i) \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$$

$$\Longrightarrow \exists s \in F(u) : f(s) = \prod_i (s_i)$$

$$\Longrightarrow \exists s \in F(u) : \prod_i (s_{|u_i}) = \prod_i (s_i)$$

$$\Longrightarrow \exists s \in F : s_{|u} = s_i \quad \forall i.$$

C.Q.F.D

Enoncé des axiomes :

Soit X un espace topologique.

Un faisceau de groupes abéliens sur X est la donnée

a) d'une fonction $x \longmapsto F_x$ qui fait correspondre à tout $x \in X$ un groupe abélien F_x.

b) d'une topologie sur $F = \bigcup_{x \in X} F_x$.

On définit une application dite projection de F sur X en posant $\pi(f) = x$ pour tout $f \in F_x$. On notera F + F l'ensemble

$$\left\{(f,g) \in F \times F \ / \ \pi(f) = \pi(g)\right\}.$$

On a alors les axiomes suivants :

AX_1 : Pour tout $f \in F$, il existe un voisinage v de f et un voisinage u de $\pi(f)$ tel que la restriction de π à v soit un homéomorphisme de v sur u ; En d'autres termes, π est un homéomorphisme local.

AX_2 : L'application $f \longmapsto -f$ est une application continue de F dans F et l'application $(f,g) \longmapsto f + g$ est une application continue de F + F dans F.

3) Sections d'un faisceau

a) Généralités

Soient F un faisceau sur X, et u un ouvert non vide de X. Une section de F au-dessus de u est toute application continue $s : u \longmapsto F$ tel que $\pi o s = 1_u$.

L'ensemble des sections de F au-dessus de u sera noté $\Gamma(u,F)$.

Soient $u, v \in Ouv_X$; si $u \subset v$ et si s est une section au-dessus de u, la restriction de s à u est une section au-dessus de v, d'où un homomorphisme

$$\rho_{uv} : \Gamma(v,F) \longmapsto \Gamma(u,F).$$

Soit $u \in Ouv_X$, $s(u)$ est un ouvert dans F, car π est un homéomorphisme local ; de plus, pour tout $f \in F_x$, il existe une section s au-dessus d'un voisinage de $x = \pi(f)$, et telle que $s(x) = f$; les ouverts de F sont donc les réunions d'ensembles de la forme $s(u)$.

Si deux sections de F définies dans des voisinages ouverts u et v d'un point x de X sont égales en x, alors elles sont égales dans tout voisinage $w \subset u \cap v$ du point x. L'ensemble $F_x = \pi^{-1}(x)$ s'identie alors à la limite inductive des $\Gamma(u,F)$ lorsque u décrit l'ensemble filtrant décroissant des voisinages ouverts de x dans X.

Ainsi si $\Phi(x)$ désigne l'ensemble filtrant décroissant des voisinages ouverts de x dans X on a :

$$F_x = \varinjlim_{u \in \Phi(x)} \Gamma(u,F)$$

Soient $u, v \in Ouv_X$, $s \in \Gamma(u,F)$ et $t \in \Gamma(v,F)$; on définit la relation " $\sim$ " par :

$s \sim t \Longleftrightarrow \exists$ un voisinage ouvert w de x contenu dans

$$u \cap v \quad \text{tel que} \quad s_{|w} = t_{|w}.$$

La relation " $\sim$ " est une relation d'équivalence.

Posons $E_x = \bigcup\limits_{u \in \mathcal{V}_x} \Gamma(u,F)$ où $\mathcal{V}_x$ est l'ensemble des voisinages ouverts de x.

E_x est appelé ensemble des sections de F définies au voisinage de x.

On rappelle que $F_x = \varinjlim\limits_{u \in \Phi(x)} \Gamma(u,F) = E_{x/\sim}$.

F_x s'appele la fibre de F au point x. On a donc :

$$\alpha \in F_x \Longleftrightarrow \alpha = s_x \ , \ s \in \Gamma(u,F) \ , \ u \in \mathcal{V}_x.$$

b) <u>Cas particulier</u> : <u>espaces</u> <u>(localement)</u> <u>annelés</u>.

<u>Définition I.3.1</u>

On appelle espace annelé, un couple $(X,\mathcal{A})$ formé d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ sur X ie les conditions suivantes sont vérifiées :

α) Pour tout ouvert u de X, $\mathcal{A}(u)$ est un anneau.

β) $u \subseteq v$ sont deux ouverts de X, alors l'application

$$\rho_{uv} : \mathcal{A}(v) \longmapsto \mathcal{A}(u)$$

est un homomorphisme d'anneaux.

On dit que X est l'espace topologique sous-jacent à l'espace annelé $(X,\mathcal{A})$, et $\mathcal{A}$ le faisceau structural.

$\mathcal{A}$ se note O_X et sa fibre au point $x \in X$ se note $O_{X,x}$ ou simplement O_x lorsqu'il n'en résulte pas de confusion.

<u>N.B</u> : Lorsque O_X est un faisceau d'anneaux commutatifs, on dit souvent que (X,O_X) est un espace commutativement annelé.

Nous étudierons des faisceaux d'anneaux commutatifs, et il sera sous-entendu, lorsque nous parlerons d'un espace annelé (X,O_X) sans préciser qu'il s'agit d'un espace commutativement annelé.

<u>Définition I.3.2</u> :

L'espace annelé (X,O_X) est dit annelé en anneaux locaux (ou encore espace localement annelé) si, pour tout $x \in X$, la fibre $O_{X,x}$ est un anneau local.

<u>N.B</u> : $\alpha \in O_{X,x} \Longleftrightarrow \exists u \in v_x$ et $s \in \Gamma(u,\theta_X) : \alpha = s_x$.

<u>Définition I.3.3</u>

Un faisceau F sur X tel que F(u) est un $O_X(u)$-module, s'appelle un faisceau de modules sur l'espace annelé (X,O_X) ou un O_X-module. En d'autres termes, F est un O_X-module, signifie F(u) est un $O_X(u)$-module.

Si F et G sont des O_X-modules et $\Phi : F \longmapsto G$ un morphisme de O_X-modules, alors

$$\Phi(u) : F(u) \longmapsto G(u)$$

est une application $O_X(u)$-linéaire.

<u>Exemple I.3.4</u> :

Soient X un espace topologique, $\underline{O}_X(u)$ l'ensemble des fonctions continues définies sur u. $(X, \underline{O}_X)$ est un espace localement annelé.

4) <u>Extension et restriction d'un faisceau.</u>

Soit F un faisceau sur X.

<u>Définition I.4.1</u> :

Soit u une partie de X ; l'ensemble $\pi^{-1}(u) \subset F$ muni de la topologie induite par celle de F, forme un faisceau sur u, appelé faisceau induit par F sur u et noté $F/_u$.

Définition I.4.2 :

Soit Y un sous-espace fermé de X. On dit que F est concentré sur Y, ou est nul en dehors de Y si l'on a $F_x = 0$ pour tout $x \in X - Y$.

Proposition I.4.3 :

Si le faisceau F est concentré sur Y, l 'homomorphisme

$$\rho_{YX} : \Gamma(X,F) \longmapsto \Gamma(Y,F/Y)$$

est bijectif.

Preuve :

Si une section de F au-dessus de X est nulle au-dessus de Y, elle est nulle partout puisque $F_x = 0$ si $x \notin Y$, ce qui prouve que ρ_{YX} est injectif. En effet :

$$\begin{aligned} s \in \operatorname{Ker} \rho_{YX} &\Longrightarrow \rho_{YX}(s) = 0 \\ &\Longrightarrow s/_Y = 0 \quad \text{(restriction de } s \text{ à } Y) \\ &\Longrightarrow \forall x \in X,\ s(x) = 0 \quad (F \text{ concentré sur } Y) \\ &\Longrightarrow s = 0. \end{aligned}$$

d'où $\operatorname{Ker} \rho_{YX} = \{0\}$, donc ρ_{YX} est injectif.

Inversement, soit $s \in \Gamma(Y, F/Y)$, prolongeons s à X en posant $s(x) = 0$ si $x \notin Y$; l'application $x \longmapsto s(x)$ est continue sur X − Y ; d'autre part, si $x \in Y$, il existe une section s' de F au-dessus d'un voisinage u de x tel que $s'(x) = s(x)$. Comme s est continue par hypothèse sur Y, il existe un voisinage v de x, contenu dans u, et tel que $s'(y) = s(y)$ pour tout $y \in v \cap Y$; puisque $F_y = 0$ $\forall y \notin Y$, alors $s'(y) = s(y)$ pour tout $y \in (v - v \cap Y)$; donc s et s' coïncident sur v ce qui prouve que s est continue au voisinage de y, par conséquent continue partout. Le prolongement de s à X est élément de $\Gamma(X,F)$, ce prolongement est l'antécédent de s ; ρ_{YX} est alors injectif.

<u>Proposition I.4.4</u> :

Soit Y un sous-espace fermé de X, et soit g un faisceau sur Y. Posons $F_x = G_x$ si $x \in Y$, $F_x = 0$ si $x \notin Y$ et soit F l'ensemble somme des F_x. On peut munir F d'une structure de faisceau sur X, et d'une seule, telle que $F/_Y = G$.

<u>Preuve</u> :

Soit u un ouvert de X ; si s est une section de G sur $u \cap Y$, prolongeons s par 0 sur $u - u \cap Y$; lorsque s parcourt $\Gamma(u \cap Y, G)$ on obtient un groupe F_u d'applications de u dans F. La **proposition I.4.3** montre que si F est muni d'une structure de faisceau telle que $F/_Y = G$, on a $F_u = \Gamma(u,F)$, d'où l'unicité de la structure en question. Son existence se montre comme suit :

- On pose $F_x = \varinjlim_{u \in \Phi(x)} F_u$ (cf 3)

  Si x appartient à l'ouvert u, on a un homomorphisme canonique $\Phi_x^u : F_u \longmapsto F_x$

- Soit $t \in F_u$, et désignons par $[t,u]$ l'ensemble des $\Phi_x^u(t)$ pour x parcourant u ; on a $[t,u] \subset F$, et on munit F de la topologie engendrée par les $[t,u]$. Ainsi, un élément $f \in F_x$ admet pour base de voisinages dans F les ensembles $[t,u]$ où $x \in u$ et $\Phi_x^u(t) = f$.

C.Q.F.D.

On dit que le faisceau F est obtenu en prolongeant le faisceau G par 0 en dehors de Y ; on le note G^Y.

5) Sous-faisceau et faisceau-quotient

Définition I.5.1 :

Soient A un faisceau d'anneaux, F un faisceau de A-modules. Pour tout $x \in X$, soit G_x un sous-ensemble de F_x. On dit que $G = \bigcup_{x \in X} G_x$ est un sous-faisceau de F si :

a) G_x est un sous-A_x-module de F_x pour tout $x \in X$,

b) G est un sous-ensemble ouvert de F ; ie si $x \in X$ et si s est une section de F au-dessus d'un voisinage de x telle que $s(x) \in G_x$, on a $s(y) \in G_y$ pour tout y assez voisin de x.

G est évidemment un faisceau de A-modules dès que les conditions a) et b) sont vérifiées.

Définition I.5.2 :

Soit G un sous-faisceau d'un faisceau de A-modules F, et posons

$$K_x = F_x/G_x$$

pour tout $x \in X$.

Munissons $K = \bigcup_{x \in X} K_x$ de la topologie quotient de la topologie de F ; on obtient ainsi un faisceau de A-modules, appelé faisceau quotient de F par G, et noté $F/_G$.

6) Images directes et images réciproques de faisceaux.

Soient X, Y deux espaces topologiques, $\psi : X \longmapsto Y$ une application continue. Soit F un préfaisceau sur X à valeurs dans une catégorie $\mathscr{C}$; pour tout ouvert $u \subset Y$, posons

$G(u) = F(\psi^{-1}(u))$, et si u, v sont deux parties ouvertes de Y telles que $u \subset v$, soit

$$\rho_{uv} : F(\psi^{-1}(v)) \longmapsto F(\psi^{-1}(u))$$

Le morsphisme de restriction.

Les $G(u)$ et ρ_{uv} définissent un préfaisceau sur Y à valeurs dans $\mathcal{C}$, qu'on appelle image directe de F par ψ et qu'on note $\psi_*(F)$. Si F est un faisceau, il en est de même de $\psi_*(F)$.

Soit maintenant G un préfaisceau sur Y à valeurs dans $\mathcal{C}$; alors $F \longmapsto \underset{\psi}{\mathrm{Hom}}(G,F) = \underset{Y}{\mathrm{Hom}}(G,\psi_*(F))$ (morphismes de préfaisceaux) est un foncteur covariant de la catégorie des faisceaux sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$ dans la catégorie Ens ; si ce foncteur est représentable par un faisceau sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$, ondit que ce faisceau est l'image réciproque de G par ψ et on le note $\psi^{-1}(G)$.

L'image réciproque d'un faisceau G sur Y à valeurs dans une catégorie $\mathcal{C}$ est donc le faisceau sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$ défini par

$$\psi^{-1}(G) = \Big\{(x,g) \in X \times G \ / \ \psi(x) = \pi(g)\Big\}$$

où $\pi : G \longmapsto Y$ est la projection canonique.

La projection $\psi^{-1}(G) \longmapsto X$ est donnée par $(x,g) \longmapsto x$.

On notera $v \longmapsto v^b$ l'isomorphisme fonctoriel en F

$$\underset{X}{\mathrm{Hom}}(\psi^{-1}(G),F) \longmapsto \underset{Y}{\mathrm{Hom}}(G,\psi_*(F))$$

et $u \longmapsto u^{\#}$ l'isomorphisme réciproque. Pour tout morphisme $w : F_1 \longmapsto F_2$ de faisceau sur X à valeurs dans $\mathcal{C}$, on a :

$$(w \circ v)^b = \psi_*(w) \circ v^b$$

En particulier, pour $v = 1_{\psi^{-1}(G)}$ on a un morphisme canonique

$$\rho_G = (1_{\psi^{-1}(G)})^b : G \longmapsto \psi_*(\psi^{-1}(G))$$

et on a la factorisation canonique

$$v^b : G \xmapsto{\rho_G} \psi_*(\psi^{-1}(G)) \xmapsto{\psi_*(v)} \psi_*(F)$$

7) <u>Morphismes d'espaces annelés</u>

Soient (X,O_X) , (Y,O_Y) deux espaces annelés.

On appelle morphisme de (X,O_X) dans (Y,O_Y) tout couple (ψ,θ) formé d'une application $\psi : X \longmapsto Y$ et d'un homomorphisme (en sens inverse !)

$$\theta : O_Y \longmapsto \psi_*(O_X)$$

est faisceaux d'anneaux.

On appelle morphisme d'espaces localement annelés, un morphisme $f = (\psi,\theta) : (X,O_X) \longmapsto (Y,O_Y)$ où (X,O_X) et (Y,O_Y) sont localement annelés et où, de plus, pour tout $x \in X$, l'homomorphisme

$$O_x^{\#} : O_{Y,\psi(x)} \longmapsto O_{X,x}$$

est local.

CHAPITRE II

FAISCEAUX COHERENTS DE MODULES

Soient X un espace topologique et A un faisceau d'anneaux sur X. Dans ce Chapitre, les faisceaux considérés sont des faisceaux de A-modules, et les morphismes sont des A-homomorphismes.

2) NOTIONS DE BASE

Définition II.1.1 :

Soit F un faisceau de A-modules, et soient $s_1,\dots,s_p$ des sections de F au-dessus d'un ouvert $u \subset X$. Si l'on fait correspondre à toute famille $f_1,\dots,f_p$ d'éléments de A_x l'élément $\sum_{i=1}^{p} f_i s_i(x)$ de F_x, on obtient un homomorphisme

$$\varphi : A^p \longmapsto F$$

défini au-dessus de l'ouvert u ie $\varphi : A^p/_u \longmapsto F/_u$.
Le noyau de φ est noté $\mathcal{R}(s_1,\dots,s_p)$, c'est un sous-faisceau de $A^p/_u$ appelé faisceau des relations entre les s_i, l'image de φ est le sous-faisceau de F engendré par les s_i.
Inversement, tout homomorphisme

$$\varphi : A^p \longmapsto F$$

définit des sections $s_1,\dots, s_p$ de F par les formules :
$s_1(x) = \varphi_x(1,0,\dots,0),\dots\dots\dots,\ s_p(x) = \varphi_x(0,\dots,0,1)$.

Définition II.1.2 :

Un faisceau de A-modules F est dit de type fini, si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert u de x et une suite exacte

$$A^p/_u \longmapsto F/_u \longmapsto 0 \qquad (1)$$

où $A^p/_u = \underbrace{A/_u \oplus \ldots\ldots\ldots\ldots \oplus A/_u}_{p \text{ termes}}$

Lemme II.1.3 :

Un faisceau de A-modules F est de type fini si et seulement s'il est engendré par un nombre fini de ses sections.

Autrement dit, pour tout $x \in X$, il existe un ouvert u de x et un nombre fini de sections $s_1,\ldots,s_p$ de F au -dessus de u tels que tout germe μ_y de F_y , $y \in u$, il existe $\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in A_y$ tel que

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, s_i(y)$$

(ie tout élément de F_y , $y \in u$, est combinaison linéaire, à coefficients dans A_y des $s_i(y)$).

Preuve :

Supposons F localement engendré par un nombre fini de ses sections. Notons φ l'homomorphisme défini par :

$\varphi : A^p/_u \longmapsto F/_u$

$(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \longmapsto \varphi(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) = \sum\limits_{i=1} \alpha_i s_i(y) \in F_y \ (y \in u)$

φ est surjectif puisque par hypothèse tout élément de F_y est de la forme $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i s_i(y)$ avec $s_i \in \Gamma(u,F)$ et $\alpha_i \in A_y$.

La suite $A^p/_u \longmapsto F/_u \longmapsto 0$ est alors exacte, donc F est de type fini.

Inversement, supposons (1) vérifié. Posons

$$t_1 = (1,0,\ldots,0),\ldots\ldots, \; t_p = (0,\ldots,0,1)$$

Soit $\mu_y \in F_y$, $y \in u$.

$$\varphi \text{ surjectif} \Longrightarrow \mu_y = \varphi_y(\alpha_1,\dots,\alpha_p),\ \alpha_i \in A_y$$
$$\Longrightarrow \mu_y = \varphi_y(\alpha_1 t_1+\dots+\alpha_p t_p)$$
$$\Longrightarrow \mu_y = \alpha_1\varphi_y(t_1) + \dots + \alpha_p\varphi_y(t_p)$$
$$\Longrightarrow \mu_y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\varphi_y(t_i)$$

Si on écrit $s_i(y) = \varphi_y(t_i)$, on voit que φ permet de définir un nombre fini de sections s_i de F ; et que F est localement engendré par les s_i, ce qui satisfait la condition du Lemme.

<u>Définition II.1.4</u> :

Un faisceau de A-modules F est dit cohérent si :

a) F est de type fini

b) Si $s_1,\dots,s_p$ sont des sections de F au-dessus d'un couvert $u \subset X$, le faisceau des relations entre les s_i est un faisceau de type fini (sur l'ouvert u).

<u>Remarques II.1.5</u> :

- On notera le caractère local des définitions II.1.2 et II.1.4.

- La condition b) de la définition II.1.4 est équivalente à ce qui suit :

Pour tout homomorphisme (on exige pas que φ soit surjectif).

$$\varphi : A^p/_u \longmapsto F$$

où $u \subset X$ est ouvert, le faisceau $\mathrm{Ker}\varphi$ est de type fini. $\mathrm{Ker}\varphi$ est appelé faisceau des relations entre les sections $s_i = \varphi(0,\dots,1,\dots,0)$, $i = 1,\dots,p$.

– F est cohérent si et seulement si, localement il est cohérent ; en d'autres termes tout $x \in X$ admet un voisinage u tel que $F/_u$ soit cohérent.

Lemme II.1.6 :

Soit F un faisceau de type fini. Si $s_1,\dots,s_p$ sont des sections de F, définies au-dessus d'un voisinage d'un point $x \in X$, et qui engendrent F_x, elles engendrent F_y pour tout y assez voisin de x.

Preuve :

Puisque F est de type fini, il y a un nombre fini de sections de F au voisinage de x, soient $t_1,\dots,t_p$ qui engendrent F_y pour y assez voisin de x (cf Lemme II.1.3).
Puisque par hypothèse les $s_j(x)$ engendrent F_x, il existe des sections f_{ij} de A au voisinage de x telles que

$$t_i = \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x)s_j(x).$$

Il existe un ensemble ouvert $w \ni x$ tel que : les f_{ij} sont définies au-dessus de w et la relation

$t_i(x) = \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x)s_j(x)$ vraie en tout point de w. Il s'en suit alors que, pour y assez voisin de x, on a :

$$t_i(y) = \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(y)\, s_j(y) \,, \qquad (1)$$

Soit $\mu_y \in F_y$, $y \in w$, puisque les t_i engendrent F_y on a :

$$\mu_y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(y)t_i(y) \quad , \quad \alpha_i(y) \in A_y$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \left[\alpha_i(y) \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(y)\ s_j(y)\right] \qquad \text{cf (1)}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \left[\sum_{i=1}^{p} \alpha_i(y) f_{ij}(y)\right] s_j(y)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij}(y)\ s_j(y)$$

avec $\beta_{ij}(y) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i(y)\ f_{ij}(y) \in A_y$.

Les $s_j(y)$ engendrent alors F_y.

Lemme II.1.7 :

Tout sous-faisceau de type fini d'un faisceau cohérent est un faisceau cohérent.

Preuve :

Si un faisceau F vérifie la condition b) de la définition 11.1.4, il est évident que tout sous-faisceau de F la vérifie aussi.

2) PRINCIPALES PROPRIETES DES FAISCEAUX COHERENTS

Théorème II.2.1 :

Soit $0 \longmapsto F \overset{\alpha}{\longmapsto} G \overset{\beta}{\longmapsto} H \longmapsto 0$ une suite exacte d'homomorphismes, si deux des trois faisceaux F, G, H sont cohérents, le troisième l'est aussi.

Preuve :

Supposons G et H cohérents. Il existe localement un homomorphisme surjectif $\gamma : A^p \longmapsto G$, car G est de type fini ; soit $\mathcal{G}$ le noyau de $\beta o \gamma$, puisque H est cohérent, $\mathcal{G}$ est un faisceau de type fini (d'après la condition b) de la définition [I.1.4). Donc $\gamma(\mathcal{G})$ est un faisceau de type fini, donc cohérent d'après le lemme II.1.7. Montrons que α est un isomorphisme de F sur $\gamma(\mathcal{G})$ ce qui nous permettra de conclure que F est cohérent.

- α injectif car la suite est exacte.
- α surjection de F sur $\gamma(\mathcal{G})$?

$\mathcal{G} = \mathrm{Ker}(\beta o \gamma) \Longrightarrow \gamma(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Ker}\beta$

$$\boxed{\gamma(\mathcal{G}) \subset \mathrm{Ker}\beta} \qquad \text{(i)}$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\beta \Longrightarrow \beta(x) = 0$, puisque $\gamma : A^p \longmapsto G$ est surjectif et $x \in G$, il existe $t \in A^p$ tel que $x = \gamma(t)$;

Ainsi :

$$\begin{aligned} \beta(x) = 0 &\Longrightarrow \beta[\gamma(t)] = 0 \\ &\Longrightarrow \beta o \gamma(t) = 0 \\ &\Longrightarrow t \in \mathcal{G} \\ &\Longrightarrow x = \gamma(t) \in \gamma(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}\beta \quad \gamma(\mathcal{G})}$ (ii)

(i) et (ii) $\Longrightarrow \mathrm{Ker}\beta = \gamma(\mathcal{G})$.
La suite étant exacte on a $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}\beta$, donc $\mathrm{Im}(\alpha) = \gamma(\mathcal{G})$.
$\alpha : F \longmapsto \gamma(\mathcal{G})$ est donc un isomorphisme, et puisque $\gamma(\mathcal{G})$ est un faisceau cohérent, il en résulte alors que F est un faisceau cohérent.

Supposons F et G cohérents. Puisque G est de type fini, H est aussi de type fini car $H = \beta(G)$; il reste à montrer que H vérifie la condition b) de la définition II.1.4.

Soient $s_i,\ldots,s_p$ un nombre fini de sections de H au voisinage d'un point $x \in X$. La question étant locale, on peut supposer qu'il existe des sections $s'_1,\ldots,s'_p$ de G telles que $s_i = \beta(s'_i)$.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "s_i"] \arrow[dr, "s'_i"'] & H \\ & G \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Soit d'autre part $n_1,\ldots,n_q$ un nombre fini de sections de F au voisinage de x, engendrant F_y pour y assez voisin de x. Pour qu'une famille $f_1,\ldots,f_p$ d'éléments de A_y appartiennent à $\mathcal{R}(s_1,\ldots,s_p)_y$, il faut et il suffit qu'il existe $g_1,\ldots,g_q \in A_y$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} f_i s'_i = \sum_{j=1}^{p} g_j\, \alpha(n_j) \quad \text{en } y$$

En effet :

$\varphi : A^p \longrightarrow F$; $\mathcal{R}(s_i,\ldots, s_p) = \operatorname{Ker}\varphi$

$$\begin{aligned} f_1,\ldots, f_p \in \mathcal{R}(s_1,\ldots, s_p) &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} f_i s_i(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} f_i\, \beta(s'_i)(x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \beta\left[\sum_{i=1}^{p} f_i s'_i(x)\right] = 0 \\ &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} f_i s'_i \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}(\alpha) \\ &\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} f_i s'_i = \sum_{j=1}^{q} g_j\, \alpha(n_j) \text{ en } y \end{aligned}$$

Or le faisceau des relations entre les s_i' et les $\alpha(n_j)$ est de type fini, puisque G est cohérent. Le faisceau $\mathcal{R}(s_i,\ldots,s_p)$ image du précédent par la projection canonique de A^{p+q} sur A^p est donc de type fini, ce qui montre que H est un faisceau cohérent.

Supposons F et H cohérents. La question étant locale, on peut supposer F (resp. H) engendré par un nombre fini de sections $n_1,\ldots, n_p$ (resp. $s_1,\ldots, s_p$) ; en outre on peut supposer qu'il existe des sections s_i' de G telles que $s_i = \beta(s_i')$ car la suite est exacte, ce qui montre que β est surjectif. Il est clair que les sections s_i' et $\alpha(n_j)$ engendrent G ; en effet :

Puisque F est engendré par les n_j, on a $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}\beta$ est engendrée par les $\alpha(n_j)$; d'autre part $(G - \mathrm{Ker}\beta)$ est engendré par les s_i', car pour tout $h \in (H - 0_H)$ on a :

$$h = \sum_i \alpha_i \; s_i(x) = \sum_i \alpha_i \; \beta(s_i')(x) = \beta\Big[\sum_i \alpha_i \; s_i'(x)\Big] \in \mathrm{Im}\beta$$

ce qui montre que les s_i' engendrent $(G - \mathrm{Ker}\beta)$.

Les assertions $\mathrm{Ker}\beta$ engendré par les $\alpha(n_j)$ et $(G - \mathrm{Ker}\beta)$ engendré par les s_i' prouvent que G est engendré par les sections s_i' et $\alpha(n_j)$. G est donc un faisceau de type fini.

Soient maintenant $t_1,\ldots, t_r$ un nombre fini de sections de G au voisinage d'un point x ; puisque H est cohérent, il existe des sections f_{ji} de A^r $(1 \leq i \leq r,\; 1 \leq j \leq s)$, définies au voisinage de x, et qui engendrent le faisceau des relations entre les $\beta(t_i)$. Posons $u_j = \sum_{i=1}^{r} f_{ji} \; t_i$, puisque $\sum_{i=1}^{r} f_{ji} \beta(t_i) = 0$, les u_j sont contenus dans $\alpha(F)$ car

$Im(\alpha) = Ker\beta$; et comme F est cohérent, le faisceau des relations entre les u_j est engendré, au voisinage de x, par un nombre fini de sections, soient $g_{kj}(1 \leq j \leq s,\ 1 \leq k \leq t)$.

On a les $\sum_{j=1}^{s} g_{kj} f_{ji}$ qui engendrent $\mathcal{R}(t_1, \ldots, t_r)$ au voisinage de x ; en effet :

si $\sum_{i=1}^{r} f_i \ t_i = 0$ en y, avec $f_i \in A_y$, on a $\sum_{i=1}^{r} f_i \beta(t_i) = 0$,

et il existe $g_j \in A_y$ avec $f_i = \sum_{j=1}^{s} g_j \ f_{ji}$; on a :

$$\sum_{i=1}^{r} f_i \ t_i = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{s} g_j f_{ji}\right) t_i$$

$$= \sum_{j=1}^{s} g_j \left(\sum_{i=1}^{r} f_{ji} t_i\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} g_j u_j$$

En écrivant $\sum_{j=1}^{r} f_i t_i = 0$, on obtient $\sum_{j=1}^{s} g_j u_j = 0$, d'où le fait que le système des g_j est combinaison linéaire des systèmes g_{kj} , ce qui démontre notre assertion.

G vérifie donc la condition b).

Théorème II.2.2 :

Soit φ un homomorphisme d'un faisceau cohérent F dans un faisceau cohérent G. Le noyau, le conoyau et l'image de φ sont alors des faisceaux cohérents.

Preuve :

Puisque G est cohérent, $\mathrm{Im}\varphi$ est de type fini, donc cohérent d'après le Lemme II.1.7. En appliquant le théorème II.2.1 aux suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\varphi \longrightarrow F \longrightarrow \mathrm{Im}\varphi \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}\varphi \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{Coker}\varphi \longrightarrow 0$$

on voit que $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathrm{coker}\varphi$ sont cohérents.

Corollaire II.2.3 :

Soient F et G deux sous-faisceaux cohérents d'un faisceau cohérent H. Les faisceaux $F + G$ et $F \cap G$ sont cohérents.

Preuve :

Pour $F + G$ cela résulte du Lemme II.1.7, car $F + G$ est un sous-faisceau de type fini de H.

$\varphi : F \longmapsto H/_G$; $\ker\varphi = \{y \in F \ / \ \varphi(y) = 0\} = G$

on a $G \supset F \cap G$ (i)

$y \in G \Longrightarrow y \in \mathrm{Ker}\varphi$

$\Longrightarrow y \in F$ et $\varphi(y) = 0$

$\Longrightarrow y \in G \cap F$

d'où $G \subset F \cap G$ (ii)

(i) et (ii) $\Longrightarrow \mathrm{Ker}\varphi = F \cap G$.

Donc $F \cap G$ est le noyau de $F \longmapsto H/_G$, il est alors cohérent d'après le théorème II.2.2.

PROPRIETES DE RECOLLEMENT DE FAISCEAUX

1) FAISCEAU OBTENU PAR RECOLLEMENT

Soit $X = \bigcup_{i \in I} u_i$ un recouvrement ouvert de X. Pour tout $i \in I$, soit F_i un faisceau sur u_i et pour tout couple (i,j) soit ϕ_{ij} un isomorphisme $F_j|_{u_i \cap u_j} \xrightarrow{\sim} F_i|_{u_i \cap u_j}$.

Supposons que $\phi_{ii} = 1_{F_i}$ et $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$ sur $u_i \cap u_j \cap u_k$.

Proposition III.1.1

Il existe sur X un faisceau F unique à un isomorphisme près ; et si $\phi_i : F|_{u_i} \xrightarrow{\sim} F_i$ on a :

$\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sur $u_i \cap u_j$ pour tout couple $(i,j)_{i,j \in I}$.

Preuve

Existence de F

Notons par $\mathcal{U}$ la base d'ouverts telle que $\forall u \in \mathcal{U}$, $\exists i \in I : u \subset u_i$; Pour tout $u \in \mathcal{U}$, choisissons un des $F_i(u)$ pour un des i tel que $u \subset u_i$ (Axiome de choix) et posons $G(u) = F_i(u)$ (qui est celui choisi).

Soient u,v éléments de $\mathcal{U}$ tels que $v \subset u \subset u_i \cap u_j$. ϕ_{ij} étant un morphisme de faisceaux, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_j(u) & \xrightarrow{(\phi_{ij})_u} & F_i(u) \\ \rho^j_{vu} \downarrow & & \downarrow \rho^i_{vu} \\ F_j(v) & \xrightarrow[(\phi_{ij})_v]{} & F_i(v) \end{array}$$

est commutatif.

Posons $\rho_{vu} = \rho^{i}_{vu} : F_i(u) \longrightarrow F_i(v)$ pour $F_i(u) = G(u)$ et $F_i(v) = G(v)$. On a alors :

a) Pour tout $u \in \mathcal{U}$

$$\rho_{uu} = \rho^{i}_{uu} = 1_{F_i(u)} = 1_{G(u)}$$

b) Soient $w \subset v \subset u$ tel que w, v, u éléments de $\mathcal{U}$;

$$\rho_{wv} \circ \rho_{vu} = \rho^{i}_{wv} \circ \rho^{i}_{vu} = \rho_{wu}.$$

G est donc un préfaisceau sur $\mathcal{U}$.

Soit u un ouvert de X, la famille $(G(v), \rho_{wv})_{w\subset v\subset u}$ (avec u, v, w éléments de $\mathcal{U}$) forme un système projectif.

Posons pour tout ouvert u de X $F(u) = \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u}} G(v)$; le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(u') \arrow[r] & G(v) \\
F(u') \arrow[u, "1_{F(u')}"] \arrow[r, "\rho'_{uu'}"] & F(u) \arrow[u, "(u \subset u')"']
\end{tikzcd}$$

est alors commutatif.

La restriction $\rho'_{uu'}$ ($u \subset u'$ deux ouverts de X) est alors définie comme limite projective des morphismes $F(u') \longrightarrow G(v)$ pour $v \subset u$.

$(F(u) \longrightarrow G(v)) \circ \rho'_{uu'} = (F(u') \longrightarrow G(v))$.

Montrons que F est un préfaisceau.

- Le diagramme précédent montre que $\rho'_{uu} = 1_{F(u)}$ pour tout ouvert u de X.

- Soient u, u', u" trois ouverts de X tels que $u \subset u' \subset u"$, on a : $\rho'_{uu'} \circ \rho'_{u'u"} = \rho'_{uu"}$ par transitivité des limites projectives.

F est donc un préfaisceau.

Soient maintenant u un ouvert de X et $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de u ; la suite

$$0 \longrightarrow F(u) \xrightarrow{\ f\ } \prod_i F(u_i) \xrightarrow{\ g\ } \prod_{\langle i,j\rangle} F(u_{ij})$$

donnée à la proposition I.2.7 est exacte en vertu de la définition de la limite projective. F est donc un faisceau sur X d'après la proposition I.2.7.

Unicité de F

Soit $\mathcal{U}'$ une seconde base de la topologie de X, contenue dans $\mathcal{U}$. Pour tout ouvert u de X, posons

$$F'(u) = \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u}} G(v).$$

Montrons que F' est isomorphe à F.

Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(u) \arrow[r] \arrow[d, "i_{F(u)}"'] & G(v) \arrow[d] \\
F(u) \arrow[r] & F'(u)
\end{tikzcd}$$

est commutatif ; ce qui montre que $\forall$ u un ouvert de X on a :

$$\left[F(u) \longrightarrow F(u')\right] = \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}'\\ v\in u}} \left[F(u) \longrightarrow G(v)\right]$$

D'autre part on a : $F(u) = \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u}} G(v)$, d'où le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
F'(u) \arrow[r] & G(v) \\
F'(u) \arrow[r] \arrow[u, "1_{F'(u)}"] & F(u) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Considérons d'abord le cas particulier où $u \in \mathcal{U}$ (donc $F(u) = G(u)$) ; le diagramme précédent devient

$$\begin{tikzcd} F'(u) \arrow[r] & G(v) \\ F'(u) \arrow[u, "1_{F'(u)}"] \arrow[r] & G(u) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ce qui montre que les morphismes $F'(u) \longrightarrow G(v)$ pour $v \in \mathcal{U}'$, $v \subset u$ se factorisent en

$$F'(u) \longrightarrow G(u) \longrightarrow G(v).$$

Montrons que les composés des morphismes $G(u) \longrightarrow F'(u)$ et $F'(u) \longrightarrow G(u)$ ainsi définis sont des identités.

$$F(u) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ v \in \mathcal{U} \\ v \subset u}} G(v) \qquad\qquad F'(u) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ v \in \mathcal{U}' \\ v \subset u}} G(v)$$

$$\begin{tikzcd} F'(u) \arrow[r] & G(v) \\ F'(u) \arrow[u, "1_{F'(u)}"] \arrow[r] & G(u) \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(u) \arrow[r] & G(v) \\ G(u) \arrow[u, "1_{G(u)}"] \arrow[r] & F'(u) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

sont des diagrammes commutatifs ; d'où :

$$\left(F'(u) \longrightarrow G(u)\right) \circ \left(G(u) \longrightarrow F'(u)\right) = 1_{G(u)}$$

$$\text{et } \left(G(u) \longrightarrow F'(u)\right) \circ \left(F'(u) \longrightarrow G(u)\right) = 1_{F'(u)}.$$

Donc le morphisme $F(u) \longrightarrow F'(u)$ est un isomorphisme si $u \in \mathcal{U}$.

Considérons maintenant le cas où u est un ouvert quelconque de X.

Le diagramme ($v \in \mathcal{U}$, $v \subset u$)

$$\begin{tikzcd} F'(u) \arrow[r] & G(v) \\ F'(u) \arrow[u, "1_{F'(u)}"] \arrow[r] & F'(u) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

est commutatif. On a alors $F'(u) = \varprojlim_{\substack{v \in \mathcal{U} \\ v \subset u}} G(v)$

or $F(u) = \varprojlim_{\substack{v \in \mathcal{U} \\ v \subset u}} G(v)$. F' est donc isomorphe à F, compte tenu de l'unicité d'une limite projective à un isomorphisme près.

<u>Relation</u> : $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$.

Les relations $\phi_{ii} = 1_{F_i}$ et $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$ montrent que la famille $(F_i(v), \phi_{ij})_{i,j \in I}$, pour $v \subset u_i \cap u_j \cap u_k$, forme un système projectif :

- $\phi_{ii} = 1_{F_i}$

- $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$ montre que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F_{k|v} \arrow[r, "\phi_{jk}"] \arrow[dr, "\phi_{ik}"'] & F_{j|v} \arrow[d, "\phi_{ij}"] \\
& F_{i|v}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

$(F(v), \phi_i)_{i \in I}$ est la limite projective du système projectif $(F_i(v), \phi_{ij})_{i,j \in I}$, on a donc (pour $v \subset u_i \cap u_j$) le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
F_{|v} \arrow[r, "\phi_j"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & F_{j|v} \arrow[d, "\phi_{ij}"] \\
& F_{i|v}
\end{tikzcd}$$

$\phi_i = \phi_{ij} \circ \phi_j$, d'où $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$.

<u>Définition III.1.2</u>

On dit que le faisceau F est obtenu par recollement des F_i au moyen des ϕ_{ij}.

2) CONSTRUCTION D'UN MORPHISME ENTRE DEUX FAISCEAUX OBTENUS PAR RECOLLEMENT

Dans ce paragraphe on reprend les notations du paragraphe précédent.

Proposition III.2.1.

Soient $X = \bigcup_{i\in I} u_i$ un recouvrement ouvert de X, F le faisceau obtenu par recollement des F_i au moyen des ϕ_{ij} ; et soit F'_i un autre faisceau sur u_i, supposons donnés pour tout couple (i,j) un isomorphisme $\phi'_{ij} : F'_j|_{u_i\cap u_j} \xrightarrow{\sim} F'_i|_{u_i\cap u_j}$ et $\forall i \in I$ un morphisme $\theta_i : F_i \longrightarrow F'_i$.

Si F' désigne le faisceau sur X obtenu par recollement des F'_i au moyen des ϕ'_{ij}, alors il existe un morphisme $\theta : F \longrightarrow F'$.

Preuve

Soient u et u' deux ouverts de X tels que $u \subset u' \subset u_i$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
F_i|_{u'} \arrow[r, "\theta_i|_{u'}"] \arrow[d] & F'_i|_{u'} \arrow[d] \\
F_i|_u \arrow[r, "\theta_i|_u"'] & F'_i|_u
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

est commutatif.

Pour tout ouvert u de X posons : $\theta/_u = \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U} \\ v\subset u}} (\theta_i|_v)$ et pour $u \subset u'$ deux ouverts de X, on note $\delta'_{uu'}$ la restriction $F'(u') \longrightarrow F'(u)$.

On sait déjà que $\rho'_{uu'} = \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u}} (F(u')) \longrightarrow G(v))$ de la même façon on a :

$$\delta'_{uu'} = \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u}} (F'(u')) \longrightarrow G'(v)).$$

G' étant le préfaisceau sur $\mathcal{U}$ déduit des F'_i par la même méthode utilisée pour la déduction de G des F_i. On a donc $F'(u) = \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u}} G'(v)$ pour tout ouvert u de X.

Par définition de $\theta_{|u'}$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F_{i|v} \arrow[r, "\theta_{i|v}"] & F'_{i|v} \\
F_{|u'} \arrow[u] \arrow[r, "\theta_{|u'}"'] & F'_{|u'} \arrow[u]
\end{tikzcd} \qquad (2) \qquad \theta_{|u'} = \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u'}} (\theta_{i|v})$$

est commutatif.

Soient maintenant $u \subset u'$ deux ouverts de X, montrons l'existence d'un morphisme $\theta : F \longrightarrow F'$ i.e d'une famille $(\theta_{|v})$ de morphismes $\theta_{|v} : F_{|v} \longrightarrow F'_{|v}$ rendant commutatif les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
F_{|u'} \arrow[r, "\theta_{|u'}"] \arrow[d, "\rho'_{uu'}"'] & F'_{|u'} \arrow[d, "\delta'_{uu'}"] \\
F_{|u} \arrow[r] & F'_{|u}
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

On a :

$$\theta_{|u} \circ \rho'_{uu'} = \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u}} (\theta_{i\,|v}) \circ \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u}} (F(u') \longrightarrow G(v))$$

$$= \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u}} \left[\theta_{i\,|v} \circ \left(F(u') \longrightarrow F_i(v)\right)\right]$$

$(v\in\mathcal{U} \Longrightarrow G(v) = F_i(v)$ pour un des i tel que $v\subset v_i$).

$$= \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u}} \left[\left[F'(u') \longrightarrow F'_i(v)\right] \circ \theta_{|u'}\right] \text{ (cf diagramme (2))}$$

$$= \varprojlim_{\substack{v\in\mathcal{U}\\ v\subset u}} \left(F'(u') \longrightarrow G'(v)\right) \circ \theta_{|u'}$$

$$= \delta'_{uu'} \circ \theta_{|u'}.$$

Les diagrammes (3) sont donc commutatifs ; d'où l'existence d'un morphisme $\theta : F \longrightarrow F'$.

3) AUTRE CONSTRUCTION DE MORPHISME

Proposition III.3.1

Soient $X = \bigcup_{i\in I} u_i$ un recouvrement ouvert de X et $\forall i\in I$ F_i et G_i des faisceaux sur u_i, et pour tout couple (i,j) des isomorphismes $\phi_{ij} : F_{j\,|u_i\cap u_j} \xrightarrow{\sim} F_{i\,|u_i\cap u_j}$ et $\psi_{ij} : G_{j\,|u_i\cap u_j} \xrightarrow{\sim} G_{i\,|u_i\cap u_j}$ tel que $\phi_{ii} = 1_{F_i}$ et $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$ et $\psi_{ii} = 1_{G_i}$ et $\psi_{ij} \circ \psi_{jk} = \psi_{ik}$ sur $u_i\cap u_j\cap u_k$.

Supposons donné pour tout $i \in I$ un morphisme $\theta_i : F_i \longrightarrow G_i$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F_j|_{u_i\cap u_j} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{ij}"', "\wr"] & G_j|_{u_i\cap u_j} \arrow[d, "\psi_{ij}", "\wr"'] \\
F_i|_{u_i\cap u_j} \arrow[r, "\theta_i"'] & G_i|_{u_i\cap u_j}
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

soit commutatif.

Si F (resp. G) désigne le faisceau obtenu par recollement des F_i (resp. G_i) au moyen des ϕ_{ij} (resp. ψ_{ij}), alors il existe un morphisme $\theta : F \longrightarrow G$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F|_{u_i} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\phi_i"'] & G|_{u_i} \arrow[d, "\psi_i"] \\
F_i \arrow[r, "\theta_i"'] & G_i
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

soit commutatif.

<u>Preuve</u> : Hom(F, G) est un faisceau et on a

$$\Gamma(u_i, \mathrm{Hom}(F, G)) = \mathrm{Hom}(F_{|u_i}, G_{|u_i}).$$

Désignons par $\tilde{\theta}_i$ le morphisme $F_{|u_i} \longrightarrow G_{|u_i}$ défini par

$$\tilde{\theta}_i = \psi_i^{-1} \circ \theta_i \circ \phi_i$$

$$\begin{tikzcd}
F_{|u_i} \arrow[r, "\phi_i"'] \arrow[rrr, bend right, "\tilde{\theta}_i"'] & F_i \arrow[r, "\theta_i"'] & G_i \arrow[r, "\psi_i^{-1}"'] & G_{|u_i}
\end{tikzcd}$$

Montrons que $\forall (i, j)$ $\tilde{\theta}_{i}|_{u_i\cap u_j} = \tilde{\theta}_{j}|_{u_i\cap u_j}$

sur $u_i \cap u_j$ on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_i = \psi_i^{-1} \circ \theta_i \circ \phi_i &= \psi_i^{-1} \circ \theta_i \circ (\phi_{ij} \circ \phi_j) && \text{(cf III.1)} \\
&= \psi_i^{-1} \circ (\theta_i \circ \phi_{ij}) \circ \phi_j \\
&= \psi_i^{-1} \circ (\psi_{ij} \circ \theta_j) \circ \phi_j && \text{(cf diagramme (1))} \\
&= \psi_i^{-1} \circ \psi_{ij} \circ \theta_j \circ \phi_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\psi_j^{-1} \circ \psi_{ij}^{-1}) \circ \psi_{ij} \circ \theta_j \circ \phi_j \\ &= \psi_j^{-1} \circ \theta_j \circ \phi_j \\ &= \tilde{\theta}_j . \end{aligned}$$

Ainsi $\forall\ (i,j)\ \tilde{\theta}_i{}_{|u_i \cap u_j} = \tilde{\theta}_j{}_{|u_i \cap u_j}$.

Il existe donc un morphisme $\tilde{\theta} : F \longrightarrow G$ tel que

$\forall i \quad \tilde{\theta}_{|u_i} = \tilde{\theta}_i$ en vertu de la propriété de recollement du faisceau Hom(F ,G).

$$\begin{tikzcd} F_{|u_i} \arrow[r, "\phi_i"'] \arrow[rrr, bend right, "\tilde{\theta}"'] & F_i \arrow[r, "\theta_i"'] & G_i \arrow[r, "\psi_i^{-1}"'] & G_{|u_i} \end{tikzcd}$$

et on a :

$$\psi_i \circ \tilde{\theta} \circ \phi_i^{-1} = \psi_i \circ (\psi_i^{-1} \circ \theta_i \circ \phi_i) \circ \phi_i^{-1} = \theta_i$$

$\Longrightarrow \quad \psi_i \circ \tilde{\theta} = \theta_i \circ \phi_i$.

On voit donc que le morphisme $\tilde{\theta}$ répond à la question car si on prend $\theta = \tilde{\theta}$ le diagramme (2) est commutatif.

CHAPITRE IV

FAISCEAUX A - COHERENTS.

CONSTRUCTION DE FAISCEAU.

Dans tout ce chapitre, K désignera un corps commutatif infini, $A = K[X_1, \dots, X_n]$ l'anneau des polynômes à n variables sur K, $X = K^n$ muni de la topologie de Zariski (i.e la topologie induite sur X = l'ensemble des points k - rationnels de Y = Spec(A) par la topologie de Zariski de Y), S = l'ensemble des polynômes $Q \in A$ qui ne s'annulent pas dans k^n, $B = S^{-1}A$ et pour tout ouvert u de X par S_u l'ensemble des polynômes $P \in A$ qui ne s'annulent pas sur u.

1) <u>Généralités</u>

<u>**Définition IV.1.1**</u>

Soit $\underline{\theta}_x$ le faisceau des fonctions régulières sur X. Pour tout ouvert u de X, $\underline{\theta}_{x/u}$ s'appelle le faisceau des fonctions régulières sur u et on le note souvent $\underline{\theta}_u$.

<u>**Définition IV.1.2**</u>

Soient (X, θ_x) un espace annelé, et F un $\underline{\theta}_x$-module.
On dira que F est A-cohérent s'il existe une suite exacte

$$\underline{O}_x^m \longrightarrow \underline{O}_x^n \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

où m et n sont deux entiers ≥ 1.

<u>**Théorème IV.1.3**</u>

Soient (X, θ_x) un espace localement annelé,
$Y = \mathrm{Spec}(\Gamma(X, \underline{\theta}_x))$ et F un $\underline{\theta}_x$-module A-cohérent.
Alors il existe un $\underline{\theta}_y$-module de présentation finie G tel que
$F = \varphi^{-1}(G)$
où $\varphi : X \longrightarrow Y$ est le morphisme canonique.

Réciproquement si G est un $\underline{\theta}_Y$-module de présentation finie, $F=\varphi^{-1}(G)$ est un $\underline{\theta}_X$-module A-cohérent.

Preuve :

Soit F un θ_X-module A-cohérent ; on a alors une suite exacte

$$\theta_X^{(I_1)} \xrightarrow{\ u\ } \theta_X^{(I_2)} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$ où I_1 et I_2 sont finis.

Posons $M = \operatorname{coker}\left[\Gamma(X,\theta_X)^{(I_1)} \longrightarrow \Gamma(X,\theta_X)^{(I_2)}\right]$ et $G = \tilde{M}$ le θ_Y-module associé à M.

G est un θ_Y-module de présentation finie (cf(O) 5.2.5) (et 1,1.4.3). Alors on a une suite exacte (car G est quasi-cohérent cf(O) 5.2.5)

$$\theta_Y^{(I_1)} \longrightarrow \theta_Y^{(I_2)} \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

où $v = \Gamma(X,u)^{\sim}$, qui donne la suite exacte

$$\theta_X^{(I_1)} = \varphi^{-1}\left[\theta_Y^{(I_1)}\right] \xrightarrow{\varphi^{-1}(v)} \theta_X^{(I_2)} = \varphi^{-1}\left[\theta_Y^{(I_2)}\right] \longrightarrow \varphi^{-1}(G) \longrightarrow 0$$

or $\varphi^{-1}(v)$ s'identifie à u, donc le morphisme canonique $\varphi^{-1}(G) \longrightarrow F$ est un isomorphisme. On peut alors confondre F et $\varphi^{-1}(G)$.

Réciproquement : Soit G un $\underline{\theta}_Y$-module de présentation finie. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de $\varphi(x)$ dans Y tel que $G/_V$ soit le conoyau d'un homomorphisme

$$\theta_Y^{(I_1)}/_V \longrightarrow \theta_Y^{(I_2)}/_V.$$

Si $u = \varphi^{-1}(V)$ et si φ_u est la restriction de φ à u, on a $\varphi^{-1}(G)/_u = \varphi_u^{-1}(G/_V)$; comme φ_u^{-1} est exact à droite et commute aux sommes directes, $\varphi_u^{-1}(G/_V)$ est conoyau d'un homomorphisme $\theta_X^{(I_1)}/_u \longrightarrow \theta_X^{(I_2)}/_u$ donc $\varphi^{-1}(G)/_u$ est conoyau de cet homomorphisme ; et par suite $\varphi^{-1}(G)$ est A-cohérent.

Théorème IV.1.4

Soient (X,θ_X) un espace localement annelé, $B = \Gamma(X, \underline{\theta}_X)$, Y = Spec (B)et $\varphi : X \longrightarrow Y$ le morphisme canonique.

On suppose vérifier les conditions suivantes:

i) Le morphisme φ est plat.

ii) L'anneau B est produit fini d'anneaux intègres.

iii) φ (X) contient Max (A).

Alors le foncteur $G \longrightarrow \varphi^{-1}(G)$ de la catégorie des $\underline{\theta}_Y$-modules de présentation finie et sans torsion (ie G_y est un $\underline{\theta}_{Y,y}$-module sans torsion quelque soit $y \in Y$) et celle des $\underline{\theta}_X$-modules A-cohérents et sans torsion est une équivalence de catégories.

Preuve:

On peut supposer que B est intègre. Pour établir le théorème, il suffit de prouver que si F est un $\underline{\theta}_X$-module A-cohérent et sans torsion, $F \simeq \varphi^{-1}(G)$ où $G = \Gamma(X,F)^{\sim}$.

D'après Th.IV.1.3, il existe un $\underline{\theta}_Y$-module de présentation finie G' tel que $F = \varphi^{-1}(G')$. Comme F est un $\underline{\theta}_X$-module sans torsion, on en déduit que G' est un $\underline{\theta}_Y$-module sans torsion. Il existe donc un entier $n > 0$ et un monomorphisme $i : G' \longrightarrow \underline{\theta}_Y^n$.

On en déduit donc un monomorphisme $\varphi^{-1}(i) : F \longrightarrow \underline{\theta}_X^n$.

D'autre part, comme F est engendré par ses sections globales, il existe un épimorphisme $t : \underline{\theta}_X^{(I)} \longrightarrow F$ tel qu'en plus l'application

$\Gamma(X,t): \Gamma(X,\underline{\theta}_X)^{(I)} \longrightarrow \Gamma(X,F)$ soit surjective. On en déduit donc des morphismes

$$\underline{\theta}_X^{(I)} \longrightarrow \varphi^{-1}(\Gamma(X,F)^{\sim}) \xrightarrow{\ u\ } F \xrightarrow{\ \varphi^{-1}i\ } \underline{\theta}_X^{n} \quad \text{où}$$

$\varphi^{-1}i \circ u = \varphi^{-1}(\Gamma(X,\varphi^{-1}i)^{\sim})$ donc est un monomorphisme et aussi un épimorphisme puisque F est engendré par ses sections globales. Donc u est un isomorphisme de faisceaux.

<u>Lemme IV.1.5</u>

Soit K un corps non algébriquement clos infini ou non. Alors pour tout idéal I de A, il existe $f \in I$ tel que $V(I) = V(f)$. De plus si $I = (f_1, \ldots, f_s)$, on peut prendre $f = P(f_1, \ldots, f_s)$ où P est un polynôme homogène à coefficients dans K.

<u>Preuve</u>

K étant non algébriquement clos, il existe une extension finie K' de K telle que $m = [K':K] \geq 2$. Soit $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ une base de K'sur K. Il existe donc un polynôme homogène en m^2 variables P_1 à coefficients dans K tel que pour tout $x \in K'$, $x = \sum_{1\leq i\leq m} \lambda_i x_i$, si f_x désigne la multiplication par x dans K on ait $\det(f_x) = P_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Par conséquent P_1 est un polynôme homogène qui ne s'annule qu'à l'origine.

a) Montrons par récurrence sur $K \geq 1$, qu'il existe un polynôme homogéne P_k en m^k variables à coefficients dans K qui ne s'annule qu'à l'origine.

Supposons que P_k existe. Considérons les m^{k+1} variables Y_{ij}, $1\leq i\leq m$ et $1\leq j\leq m^k$. Posons $Q_i = P_k\left(Y_{i1}, \ldots, Y_{im^k}\right)$, $1\leq i\leq m$. Il est clair que $P_{k+1} = P_1(Q_1, \ldots, Q_m)$ est un polynôme homogène en m^{k+1} variables à coefficients dans k qui ne s'annule qu'à l'origine . On en conclut donc que l'assertion a) est vraie quel que soit k.

b)Cela étant soit $(f_1, \ldots, f_s)$ une partie génératrice finie de I. Soit k un entier tel que $m^k \geq s$.

Il est clair que $f = P_k(f_1, \ldots, f_s, o, o, o)$ qui est un élément de I,(puisque P_k est sans terme constant) ne s'annule que sur V(I), autrement dit V(f) = V(I).

Théorème IV.1.6

Soient K un corps non algébriquement clos infini ou non, I un idéal de $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ et u un ouvert de K^n.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

1) Tout élément de I possède un zéro dans u.

2) L'idéal I possède un zéro dans u.

Autrement dit, soient $B_u = S_u^{-1}A$ et I_u un idéal de B_u. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1') L'idéal I_u possède un zéro dans u.

2') L'idéal I_u est différent de B_u.

Preuve

a) D'après lemme IV.1.5, il existe $f \in I$ tel que V(I) = V(f)

Par conséquent 1) et 2) sont équivalentes.

b) Soit I l'image réciproque de I_u dans A. Alors on a $I_u = S_u^{-1}I$. Dire que I_u admet un zéro dans u équivaut d'après l'équivalence de 1) et 2) à la relation $S_u \cap I = \emptyset$, ie $I_u = S_u^{-1} I \neq B_u$.

Corollaire IV.1.7

Les notations et les hypothèses étant celles de (IV.1.6), l'application

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \longrightarrow \sum_{1\leq i\leq n} (X_i - \omega_i) B_u$$

est une application bijective de u sur l'ensemble des idéaux maximaux de B_u.

<u>Preuve</u> :

Pour tout $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in u$, $\mathcal{M}_\omega = \sum_{1\leq i\leq n} (X_i - \omega_i) B_u$ est un idéal de B_u qui admet ω comme zéro, donc $\mathcal{M}_\omega \neq B_u$ et il est clair que $\mathcal{M}_\omega$ est maximal.

Réciproquement si $\mathcal{M}_u$ est un idéal maximal de B_u, d'après (IV.1.6), $\mathcal{M}_u$ admet un zéro $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ dans u. Il est clair que $\mathcal{M}_u = \mathcal{M}_\omega$.

2) <u>Construction et Exemples de faisceaux A-cohérents</u>

<u>Théorème IV.2.1</u>

Soient U un ouvert de K^n et $\underline{\theta}_u$ le faisceau des fonctions régulières sur u. Alors tout sous-$\underline{\theta}_u$-module cohérent d'un $\underline{\theta}_u$-module A-cohérent et sans torsion est un $\underline{\theta}_u$-module A-cohérent.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

<u>Lemme IV.2.2</u>

Soit $P \in A$, un polynôme non nul. Alors il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ tel que $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$.

<u>Preuve</u>

Si n = 1, l'assertion est triviale puisque P n'a qu'un nombre fini de racines dans K et que par hypothèse K est infini. Nous supposerons que l'assertion est vraie pour tout polynôme non nul à n-1 variables au plus sur K et que P dépend effectivement de n variables. On peut donc écrire $P = \sum\limits_{0 \leq m \leq s} a_m X^m$ où $a_m \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ et $a_s \neq 0$. Par conséquent il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in K^n$ tel que $a_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq 0$. On en conclut que le polynôme $\bar{P} = P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, X_n) \in K[X_n]$ n'est pas nul. Il existe donc un $\alpha_n \in K$ tel que $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = \bar{P}(\alpha_n) \neq 0$.

Corollaire IV.2.3

L'intersection de deux ouverts non vides de X est un ouvert non vide de X. En particulier X est connexe.

Preuve

Soient u_1 et u_2 deux ouverts non vides de X, alors il existe P_1 et P_2 éléments de A-{0} tels que $D(P_1) \subseteq u_1$ et $D(P_2) \subseteq u_2$. Par conséquent $D(P_1P_2) \subseteq u_1 \cap u_2$ et comme $P = P_1P_2 \neq 0$, $D(P_1P_2) \neq \emptyset$ d'après (IV.2.2), d'où la conclusion.

Démonstration du théorème IV.2.1

Supposons K infini et non algébriquement clos. Soit G un sous-$\underline{\theta}_u$-module cohérent d'un $\underline{\theta}_u$-module A-cohérent et sans torsion F. Il existe donc un $\Gamma(u, \underline{\theta}_u)$-module sans torsion de type fini M tel que F soit le faisceau

$$V \longrightarrow S_V^{-1} M.$$

Montrons d'abord que G est engendré par ses sections globales. Nous supposerons que pour tout ouvert v de u, et tout sous-$\underline{\theta}_v$-module cohérent H d'un $\underline{\theta}_v$-module A-cohérent et sans torsion tel qu'il existe un recouvrement de v par m ouverts au plus $(v_i)_{1 \leq i \leq p \leq m}$, tels que H/v_i soit engendré par ses sections globales, alors H est engendré par ses sections globales. Nous supposerons alors qu'il existe un recouvrement ouvert $(u_i)_{1\leq i\leq m+1}$ de u tel que $u_i \neq \emptyset$ et G/u_i soit engendré par ses sections globales.

Soit x une section globale de G/v où $v = \bigcup_{i\in I} u_i$ où $I = \{1, \ldots, m\}$ ou $I = \{m+1\}$. On suppose qu'il existe $f \in A$ tel que fx se prolonge en une section globale y de F.

Nous allons montrer que $y \in \Gamma(u, G)$.

Soit H le sous-$\underline{\theta}_u$-module de F engendré par y et soit H_0 le noyau de l'homomorphisme canonique $H \longrightarrow F/G$. Alors comme $y/v = fx \in G$, $H_0/v = H/v$.

Donc l'ensemble des points u de u où $(H_0)_u \neq (H)_u$ est un ouvert w de u contenu dans le fermé $z = u - v$ de u. Mais d'après (IV.2.3) l'intersection de deux ouverts non vides de K^n est non vide et comme $v \cap w = \emptyset$ et $v \neq \emptyset$, on en conclut que $w = \emptyset$. On a alors $H_0 = H$, autrement dit $y \in \Gamma(u, G)$.

Cela étant posons $v = \bigcup_{1\leq i\leq m} u_i$. Comme par hypothèse G/v est engendré par un nombre fini de sections globales $x_1, \ldots, x_s$; de même G/u_{m+1} est engendré par un nombre fini de sections globales $x_{s+1}, \ldots, x_p$ et que pour tout ouvert w de u, on a $\Gamma(w, F) = S_w^{-1} M$; on en conclut qu'il existe $f_1 \in S_v$ et $f_2 \in S_{u_{m+1}}$ tels que $f_1x_1, \ldots, f_1x_s$, $f_2x_{s+1}, \ldots, f_2x_p$ se prolongent en des sections globales $y_1, \ldots, y_s$, $y_{s+1}, \ldots, y_p$ de F respectivement. D'après ce qu'on a prouvé plus haut les y_i, $1 \leq i \leq p$ appartiennent à $\Gamma(u, G)$. Il est clair que ces éléments engendrent G.

On en conclut donc, que tout sous-$\underline{\theta}_u$-module cohérent d'un $\underline{\theta}_u$-module A-cohérent est engendré par ses sections globales.

Par conséquent il existe un homomorphisme $\underline{\theta}_u^p \xrightarrow{\pi} F$ tel que $G = \mathrm{Im}(\pi)$. Comme π provient d'un homomorphisme $\tau : B_u^n = (S_u^{-1}A)^n \longrightarrow M$ d'après (IV.1.4) et (IV.1.7) on en conclut donc que G provient de $\mathrm{Im}(\tau)$, donc G est A-cohérent.

<u>Corollaire IV.2.4</u>

Les notations étant celles de (IV.2.1), soit m un entier ≥ 0. Alors tout sous-$\underline{\theta}_u$-module cohérent de $\underline{\theta}_u^m$ est A-cohérent.

<u>Corollaire IV.2.5</u>

Les notations et les hypothèses étant celles de (IV.2.1), tout quotient d'un $\underline{\theta}_u$-module A-cohérent par un sous-$\underline{\theta}_u$-module cohérent est un $\underline{\theta}_u$-module A-cohérent.

<u>Preuve</u>

Soient F un $\underline{\theta}_u$-module A-cohérent, G un sous-$\underline{\theta}_u$-module cohérent et $H = F/G$.

Il existe un entier $m \geq 1$ et un homomorphisme surjectif $\underline{\theta}_u^m \xrightarrow{\varphi} F$. On en déduit un homomorphisme surjectif $\underline{\theta}_u^m \xrightarrow{\pi} H$

Alors $N = \mathrm{Ker}(\pi)$ est un $\underline{\theta}_u$-module A-cohérent d'après (IV.2.4). Il existe donc un homomorphisme surjectif $\underline{\theta}_u^p \xrightarrow{\theta} N$ pour un entier $p \geq 1$. On en déduit donc un suite exacte $\underline{\theta}_u^p \longrightarrow \underline{\theta}_u^m \longrightarrow H \longrightarrow 0$.

3) <u>Caractérisation d'un faisceau A-cohérent</u>

<u>Théorème IV.3.1</u>

Soient u un ouvert de K^n et $\underline{\theta}_u$ le faisceau des fonctions régulières sur u.

Un $\underline{\theta}_u$-module F est A-cohérent si et seulement si F est un $\underline{\theta}_u$-module cohérent engendré par ses sections globales.

Preuve

CN $\Longrightarrow$). Supposons F A-cohérent ie il existe une suite exacte $\underline{\theta}_u^m \longrightarrow \underline{\theta}_u^n \longrightarrow F \longrightarrow 0$ (1)

où m et n sont deux entiers ≥ 1.

a) Montrons que F est de type fini ie $\forall x \in X$, $\exists v \in V_x$ et une suite exacte $\underline{O}_u^p|_v \longrightarrow F|_v \longrightarrow 0$; ce qui est évident d'après (1).

b) Soit $x \in X$ et $v \in V_x$; posons

$$\varphi : \underline{O}_u^p|_v \longrightarrow F|_v$$

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} \alpha_i s_i(x) \in \underline{F}_x \qquad (\alpha_i \in \underline{O}_{u,x}).$$

Montrons que ker φ est de type fini, ie $\forall x \in X$, $\exists v \in V_x$ et une suite exacte $\underline{O}_u^p|_v \xrightarrow{i} \ker \varphi|_v \longrightarrow 0$ $(p \geq 1)$ ce qui est évident (car on peut prendre i l'injection canonique).

a) et b) entraînent que F est cohérent.

Montrons maintenant que F est engendré par ses sections globales.

a) et b) $\Longrightarrow$ F cohérent

$\Longrightarrow$ F est de type fini

$\Longleftrightarrow$ F engendré par un nombre fini de ses sections

$\Longleftrightarrow$ F engendré par ses sections globales.

C.S $\Longleftarrow$) Il faut remaquer qu'un $\underline{\theta}_u$-module cohérent F engendré par ses sections globales est nécessairement engendré par un nombre fini de ses sections globales ; donc il existe nécessairement un entier $m \geq 1$ et un homomorphisme surjectif $\underline{\theta}_u^m \longrightarrow F$, d'où la conclusion d'après (IV.2.5).

4) Construction de faisceau associé à un préfaisceau

Théorème IV.4.1

Soient X un espace topologique, F un préfaisceau sur X.

Alors il existe un faisceau F^+ et un morphisme de préfaisceau $\theta : F \longrightarrow F^+$ tel que pour tout morphisme $\varphi : F \longrightarrow G$ où G est un faisceau, il existe un morphisme et un seul $h : F^+ \longrightarrow G$ vérifiant la relation $\varphi = h \circ \theta$.

On a besoin d'abord du lemme suivant :

Lemme IV.4.2

Soient X un espace topologique, F et G deux faisceaux sur X, $g : F \longrightarrow G$ un morphisme de faisceaux.

i) g est un monomorphisme si et seulement si, pour tout $x \in X$, $g_x : F_x \longrightarrow G_x$ est injectif.

ii) g est un isomorphisme si et seulement si pour tout $x \in X$, $g_x : F_x \longrightarrow G_x$ est un isomorphisme.

Preuve :

i) Il est clair que la condition est nécessaire.

Supposons maintenant que pour tout $x \in X$, g_x est injectif et montrons que $g : F(u) \longrightarrow G(u)$ est injectif.

Soit $s \in F(u)$ avec $g(s) = 0$. Alors $(g(s))_x = 0 = g_x(s_x)$, et g_x étant injectif, on a donc $s_x = 0$ pour tout $x \in u$. Ceci implique qu'il existe un recouvrement ouvert $u = \bigcup_i u_i$, avec $s/_{u_i} = 0$, et par suite $s = 0$ car F est séparé.

ii) Il est clair que la condition est nécessaire.

Supposons maintenant que g_x est un isomorphisme quel que soit $x \in X$, et montrons que $g : F(u) \longrightarrow G(u)$ est surjectif

Soit $t \in G(u)$. Il existe un recouvrement ouvert $u = \bigcup_i u_i$ et $s_i \in F(u_i)$ tel que $t/_{u_i} = g(s_i)$.

$s_{i/u_i\cap u_j} = s_{j/u_i\cap u_j}$ et par suite il existe $s \in F(u)$ tel que $s/_{u_i} = s_i$ car F possède la propriété de recollement.

Puisque $g(s)_{/u_i} = t_{/u_i}$, on a $g(s) = t$ car G est séparé.

<u>Démonstration du théorème IV.4.1</u>

Posons $\bar{F}(u) = \prod_{x\in u} F_x$ où F_x désigne la fibre de F au point x, et $\mathscr{V}_x$ l'ensemble des voisinages ouverts de x.

Soit Ψ le morphisme de préfaisceaux défini par:

$\Psi : F \longrightarrow \bar{F}$

$$\Psi(u) : F(u) \longrightarrow \bar{F}(u)$$
$$s \longrightarrow (s_x)_{x \in u}$$

où s_x est la classe de s dans F_x ; et posons

$$F^+(u)=\left\{\alpha\in\bar{F}(u)/\forall\ x\in u,\ \exists\ v\in\mathscr{V}_x\ ,\ v\subseteq u \text{ et } s\in F(v) \text{ tq } \alpha/_v = \Psi(v)(s)\right\}$$

Considèrons le morphisme de préfaisceaux suivant:

$\theta : F \longrightarrow F^+$

$$\theta(u): F(u) \longrightarrow F^+(u)$$
$$s \longmapsto \Psi(u)(s)$$

1) Montrons que F^+ est un faisceau.

a) Soient un recouvrement ouvert $u = \bigcup_i u_i$, s et $t\in F^+(u)$ avec $s/_{u_i} = t/_{u_i}$ $\forall\ i \in I$.

Soit $x \in u$, il existe i tq $x \in u_i$; comme $s/_{u_i} = t_{/u_i}$ on a $s_x = t_x$ et par la suite $s = t$ dans $\bar{F}(u)$ ce qui montre que $s = t$ dans $F^+(u)$. Le préfaisceau F^+est donc séparé.

b)Soient un recouvrement ouvert $u=\bigcup_i u_i$, $(s_i)_i$, $s_i\in F^+(u_i)$ vérifiant $s_{i/u_i\cap u_j} = s_{j/u_i\cap u_j}$.

$x\in u_i$, $\alpha_x^{(i)} = (s_i)_x$ et $x\in u_j$, $\alpha_x^{(j)} = (s_j)_x$. Donc si $x\in u_i\cap u_j$

alors $\alpha_x^i = \alpha_x^j$ avec $\alpha_x^i = s_x$.

Il est clair que $s = (s_x)_{x\in u} \in \bar{F}(u)$ et que $s/u_i = s_i$.

Il reste à montrer que $s \in F^+(u)$.

Soit $x \in u$, il existe i tq $x \in u_i$.

$s/_{u_i} = s_i \in F^+(u_i) \Longrightarrow \exists v_i \in \mathcal{V}_x, v_i \subseteq u_i$ et $s_i' \in F(v_i)$ tq $s_{i/v_i} = \Psi(v_i)(s_i')$

or $\Psi(v_i)(s_i') = s_{i/v_i} = s/v_i$; donc $s \in F^+(u)$.

Le préfaisceau F^+ possède la propriété de recollement.

a) et b) montrent que F^+ est un faisceau.

2) Montrons que pour tout $x \in X$ $\theta_x : F_x \longrightarrow F_x^+$ est un isomorphisme.

a) Soient $\alpha, \beta, \in F_x$, on sait alors que

$\alpha = s_x$, $s \in F(u)$, $u \in \mathcal{V}_x$ et $\beta = t_x$, $t \in F(v)$, $v \in \mathcal{V}_x$.

On a :

$$\theta_x(\alpha) = \theta_x(s_x) = \left[\theta(u)(s)\right]_x = s_x$$

$$\theta_x(\beta) = \theta_x(t_x) = \left[\theta(v)(t)\right]_x = t_x$$

D'où

$$\theta_x(\alpha) = \theta_x(\beta) \Longrightarrow s_x = t_x$$
$$\Longrightarrow \alpha = \beta$$

θ_x est alors injectif.

b) Soit $\gamma \in F_x^+$, il existe $t \in F^+(u)$, $u \in \mathcal{V}_x$ tq $\gamma = t_x$;

il existe $v \in \mathcal{V}_x$, $v \subseteq u$ et $s \in F(v)$ tq $t/_v = \Psi(v)(s)$.

On en déduit que $\gamma = t_x = (\Psi(v)(s))_x = s_x = \theta_x(s_x)$.

θ_x est donc surjectif.

a) et b) montrent que θ_x est un isomorphisme, donc $\theta : F \longrightarrow F^+$ est un isomorphisme d'après le lemme IV.4.2.

3) Soit $\varphi : F \longrightarrow G$ un morphisme où G est un faisceau.

Montrons qu'il existe un morphisme et un seul h: $F^+ \longrightarrow G$ tq $h \circ \theta = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & F^+ \arrow[d, phantom, "h"] \\
G & {}
\end{tikzcd}$$

a) Existence

Soit $s \in F^+(u)$, il existe alors un recouvrement ouvert $u = \bigcup_i u_i$ tq $s/_{u_i} = \theta(u_i)(s_i)$, $s_i \in F(u_i)$. Posons $t_i = \varphi(u_i)(s_i)$, on a alors :

$$t_{i/u_i \cap u_j} = \varphi\left[u_i \cap u_j\right]\left[s_{i/u_i \cap u_j}\right] \text{ et } t_{j/u_i \cap u_j} = \varphi(u_i \cap u_j)\left[s_{j/u_i \cap u_j}\right]$$

Soit $x \in u_i \cap u_j$; $(t_i)_x = \varphi_x\left[(s_i)_x\right]$ et $(t_j)_x = \varphi_x\left[(s_j)_x\right]$.

Comme θ_x est injectif, on a:

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ s_x}}{\theta_x\left[(s_i)_x\right]} = \theta_x\left[(s_j)_x\right] \Longrightarrow (s_i)_x = (s_j)_x$$
$$\Longrightarrow \varphi_x\left[(s_i)_x\right] = \varphi_x\left[(s_j)_x\right]$$
$$\Longrightarrow (t_i)_x = (t_j)x$$

G étant séparé, la relation $t_{i/u_i \cap u_j} = t_{j/u_i \cap u_j}$ entraine qu'il existe $t \in G(u)$ tq $t/_{u_i} = t_i$.

$$x \in u_i \Longrightarrow t_x = (t_i)_x = \varphi_x\left[(s_i)_x\right] = \varphi_x\left[\theta_x^{-1}(s_x)\right].$$

Posons $h(u)(s) = t$, $s \in F(u)$; il est clair que l'on a: $(h\circ\theta)(u)(s) = \varphi(u)(s)$, donc $h\circ\theta = \varphi$.

b) Unicité

$$h'\circ\theta = h\circ\theta = \varphi \Longrightarrow h'_x\circ\theta_x = h_x\circ\theta_x = \varphi_x$$
$$\Longrightarrow h'_x = h_x \text{ car } \theta_x \text{ est injectif.}$$

$h'_x(s_x) = h_x(s_x)$, d'où $\left[h'(u)(s)\right]_x = \left[h(u)(s)\right]_x$

Donc

$h'(u)(s) = h(u)(s)$ car G est faisceau.

Ceci achève la démonstration.

CHAPITRE V

COURBES ALGEBRIQUES

I - NOTIONS DE BASE

1) Généralités

Dans cette section, nous appellerons k un corps quelconque de caractéristique 0 (non nécessairement algébriquement clos). On supposera que la clôture séparable de k se plonge dans $\mathbb{C}$.

Définition V.1.1 :

Un ensemble algébrique projectif est l'ensemble des zéros d'un idéal homogène de $\overline{k}[x_o,\dots,x_n]$. Une variété projective est un ensemble algébrique projectif irréductible. Elle est dite définie sur k si son idéal peut être engendré par des polynômes de $k[x_o,\dots,x_n]$.

Définition V.1.2

Le groupe de Galois absolu de k, $G_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/_k)$ agit sur $\mathbb{P}_n(\overline{k})$ en agissant sur les coordonnées : pour $\sigma \in G_k$ et $P = [x_o,\dots,x_n] \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$, on a $P^\sigma = [\sigma(x_o),\dots,\sigma(x_n)]$. On peut alors définir

$$\mathbb{P}^n(k) = \left\{P \in \mathbb{P}^n(\overline{k}),\ P^\sigma = P \quad \text{pour tout} \quad \sigma \in G_k\right\}.$$

Définition V.1.3

Le corps de définition d'un point $P = [x_o,\dots,x_n] \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$ est la plsu petite extension de k sur laquelle P est rationnel, c'est-à-dire $k(P) = k\,(x_o/x_j,\dots,x_n/x_j)$, pour tout j tel que $x_j \neq 0$.

$k(P)$ est aussi déterminé de manière unique par la propriété

$$\mathrm{Gal}\ (\bar{k}/\ k(P)) = \left\{\sigma \in G_k\ ,\ P^{\sigma} = P\right\}.$$

Le point P est alors dit de degré d si $[k(P) : k] = d$.

Définition V.1.4

Une courbe projective C est une variétété algébrique projective de dimension 1. Etant donnée une extension K de k, on note $C(K)$ l'ensemble des points de C définis sur K.

2) Diviseurs et systèmes linéaires

On suppose connues les définitions du groupe des classes de diviseurs de Weil sur une variété quelconque X noté $Cl(X)$ et du groupe de Picard (ie des classes de diviseurs de Cartier) noté $Pic(X)$.

On sait que dans le cas d'une variété lisse, ces deux groupes sont isomorphes. On les identifiera donc par la suite.

On rappelle la définition et les propriétés élémentaires de l'ordre d'une fonction rationnelle $f \in k(X)^*$ selon une sous-variété Y de X de codimension 1. Puisque X est supposée régulière, l'anneau $\mathcal{O}_{Y,X}$ est noethérien, local, de dimension 1 et régulier ; autrement dit, c'est un anneau de valuation discrète.

On note $\mathrm{ord}_Y : \mathcal{O}_{Y,X} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la valuation normalisée de cet anneau, que l'on étend à $k(X)^*$. On a alors

$$\mathrm{div}(f) = \sum_Y \mathrm{ord}_Y\ (f) Y \in \mathrm{Div}(X).$$

Deux diviseurs D et D' sont linéairement équivalents (noté $D \sim D'$) si leur différence est un diviseur principal.

Définition V.2.1

Soit D un diviseur sur une variété X ; on note $\mathcal{L}(D)$ l'espace vectoriel défini par

$$\mathcal{L}(D) = \left\{ f \in \bar{k}^*(X),\ D + \operatorname{div}(f) \geq 0 \right\} \cup \left\{ 0 \right\}.$$

Sa dimension est notée $\ell(D)$. L'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D, noté $|D|$ est alors naturellement paramètre par $\mathbb{P}L\ (D) \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1}$.

Définition V.2.2

Soit X une variété définie sur k. Un diviseur D est dit défini sur k s'il est invariant sous l'action du groupe de Galois G_k. On pose alors

$$\mathcal{L}_k(D) = \left\{ f \in k(X)\ ,\ D + \operatorname{div}(f) \geq 0 \right\}.$$

On a alors évidemment $\mathcal{L}_{\bar{k}}(D) = \mathcal{L}(D)$.

3) Jacobiennes

On rappelle qu'une variété abélienne est un ensemble possédant une structure de groupe et une structure de variété algébrique projective, ces deux structures étant compatibles.

On sait qu'un morphisme $\phi : X \longrightarrow Y$ induit une application au niveau des fonctions régulières

$$\phi^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X) \ ;$$

On peut étendre "naturellement" cette action au groupe des diviseurs. En effet, si $D = \left\{ (u_i, f_i),\ i \in I \right\}$ est un diviseur sur Y tel que $\phi(X) \subset \operatorname{supp}(D)$, on peut définir le diviseur $\phi^*(D)$ sur X par $\phi^*(\operatorname{div}(f)) = \operatorname{div}(f \circ \phi)$.

Définition V.3.1

Soient A une variété abélienne, et t_a l'application de translation $(t_a(x) = a + x)$. On définit

$$\mathrm{Pic}^0(A) = \left\{ c \in \mathrm{Pic}(A),\ t_a^*(c) = c\ ,\quad \forall\, a \in A \right\}$$

Lemme V.3.2

Un produit de variétés projectives peut être caniquement muni d'une structure de variété projective à l'aide du plongement de Segré.

Donnons-nous alors une courbe lisse projective C et prenons sa $r^{\text{ième}}$ puissance (au sens du produit cartésien). Le lemme précédent nous dit que c'est une variété projective. Le $r^{\text{ième}}$ groupe symétrique S_r agit naturellement sur cette variété, et comme il est fini, le théorème de Hilbert nous dit que son quotient géométrique par S_r existe. On note alors

$$\mathrm{Sym}^r(C) = (C \times \ldots\ldots \times C)/S_r .$$

Cette variété appelée $r^{\text{ième}}$ produit symétrique de C se note parfois aussi $C^{(r)}$.

Théorème V.3.3

Soit C une courbe lisse projective de genre $g \geq 1$. Il existe une variété abélienne $\mathrm{Jac}(C)$, appelée la jacobienne de C, et une injection $j : C \hookrightarrow \mathrm{Jac}(C)$ ayant les propriétés suivantes :

a) Si l'on étend j linéairement au groupe des diviseurs sur C, on obtient un isomorphisme $\mathrm{Pic}^0(C) \cong \mathrm{Jac}(C)$.

b) Pour tout $r \geq 0$, on définit une sous-variété $W_r \subset \mathrm{Jac}(C)$ par

$$W_r = j(C) + \ldots\ldots + j(C) \qquad \text{(r copies)}.$$

Alors $\dim(W_r) = \min(r,g)$, $W_g = \mathrm{Jac}(C)$ et $\dim(\mathrm{Jac}(C)) = g$.

Preuve

a) On suppose que C a un point rationnel $P_o \in C(k)$. Ensuite, on choisit un entier $n \geq 2g - 1$, de sorte que pour tout diviseur D mde degré n, on ait $\ell(D) = \deg D - g + 1$. Sur la variété $Sym^n(C)$, dont on identifie les points avec les diviseurs effectifs de degré n sur C, on pose $D_o = n(P_o)$, que l'on utilisera comme point base sur $Sym^n(C)$.

Soit J l'ensemble de tous les systèmes linéaires de degré n sur C, et π l'application

$$\pi : Sym^n(C) \longrightarrow J, \quad D \longmapsto |D|.$$

On utilise le pont base D_o pour définir une addition sur l'ensemble J.

$$m : J \times J \longrightarrow J, \quad (|D_1|, |D_2|) |D_1+D_2 - D_o|.$$

Alors on peut munir J d'une structure d'ensemble algébrique pour laquelle π est un morphisme, et dans ce cas m est aussi un morphisme.

Puisque $Sym^n(C)$ est une variété projective et π est surjective, J est aussi une variété projective.
D'autre part, les fibres de π sont isomorphes à $\mathbb{P}^{n-g}$, donc on a :

$$\dim(J) = \dim(Sym^n(C)) - \dim(\mathbb{P}^{n-g}) = g.$$

Montrons maintenant que m définit une loi de groupe sur J. On a clairement
$m(|D|, |D_o|) = m(|D_o|, |D|) = |D|$ et $m(|D|, |2D_o - D|) = |D_o|$
d'où l'existence d'un élément neutre et d'un inverse.
Vérifions l'associativité :
$m(m(|D_1|, |D_2|), |D_3|) = |D_1+D_2+D_3 - 2D_o| = m(|D_1|, m(|D_2|, |D_3|))$.

Finalement, J est bien une variété abélienne. On peut maintenant définir une application

$$j : C \longrightarrow J, \qquad P \longmapsto |(P) + (n-1)(P_o)|$$

et l'étendre linéairement pour obtenir

$$j : \mathrm{Pic}^0(C) \longrightarrow J, \qquad \mathrm{classe}(D) \longmapsto |D+D_o|$$

Montrons que $j : \mathrm{Pic}^0(C) \longrightarrow J$ est un isomorphisme.

Soit D un diviseur de degré n. Alors $j(D-D_o) = |D|$ donc j est surjective. Supposons maintenant que $j(D) = D_o$; cela signifie que $|D+D_o| = |D_o|$, donc D est un diviseur principal et j est injective.

b) L'ensemble $W_r = j(C) +....+ j(C)$ est l'image dans J de la variété projective $C \times ..... \times C$, donc est de dimension au plus r. Cependant, $W_r \subseteq W_r + j(C) = W_{r+1}$, donc soit $W_{r+1} = W_r$, soit $\dim(W_{r+1}) = \dim(W_r) + 1$. Mais s'il existe un r tel que $W_{r+1} = W_r$, il s'en suit par récurrence que $W_s = W_r$ pour tout $s \geq r$. Or la surjectivité de $j : \mathrm{Pic}^0(C) \longrightarrow J$ dit que la réunion des W_r est égale à J, qui est de dimension g. Il s'en suit que $\dim(W_r) = r$ pour tout $r \leq g$, et que $\dim(W_r) = g$ pour tout $r \geq g$. □

II - POINTS ALGEBRIQUES DE DEGRE 4 SUR LA COURBE DE FERMAT DE DEGRE 5

Soit ε une racine primitive 10^e de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Les "pointes" sur F_5 sont les points

$$a_j = \left(0, \varepsilon^{2j+1}, i\right), \quad b_j = \left(\varepsilon^{2j+1}, 0, 1\right) \text{ et } C_j = \left(\varepsilon^{2j+1}, 1, 0\right) \quad 0 \leq j \leq 4.$$

On pose $a = a_2 = (0,-1,i)$; $b = b_2 = (-1,0,1)$ et $\infty = C_2 = (-1,1,0)$.

Soit η une racine primitive 6^e de l'unité. Dans [19], Gross et Rohrlich ont montré que les points

$P = (\eta, \bar{\eta}, -1)$ et $\bar{P} = (\bar{\eta}, \eta, -1)$ sont éléments de

$$F_5 = \left\{ (X,Y,Z) \in \mathbb{P}^2(\bar{\mathbb{Q}}) \; : \; X^5 + Y^5 + Z^5 = 0 \right\}.$$

Soient x et y les fonctions rationnelles sur F_5 données par $x(X,Y,Z) = X/Z$ et $y(X,Y,Z) = Y/Z$.

Dans [19] on montre le lemme suivant :

Lemme V.4.1

$$\mathrm{div}(x) = (a_0 + \ldots + a_4) - (c_0 + \ldots + c_4).$$

$$\mathrm{div}(x+y) = 4\infty - (c_0 + c_1 + c_3 + c_4).$$

Lemme V.4.2

Une $\bar{\mathbb{Q}}$-base de $\mathscr{L}(15\infty)$ est donnée par les fonctions

$$f_{rs}(x,y) = \frac{x^r}{(x+y)^s} \qquad \text{avec} \quad 0 \leq r \leq s \leq 3.$$

C'est aussi une $\mathbb{Q}$-base.

Preuve

Le théorème de Riemann-Roch montre que $\ell(15\infty) = 10$.

D'après le lemme V.4.1 on a :

$$\mathrm{div}(f_{rs}) = \mathrm{div}\,\frac{x^r}{(x+y)^s} = r\,\mathrm{div}(x) - s\,\mathrm{div}(x+y)$$

$$= r(a_0 + \ldots + a_4) + (s-r)(c_0 + c_1 + c_3 + c_4) - (4s+r)\infty.$$

$$4x + r \leq 15 \Longrightarrow \mathrm{div}(f_{rs}) \geq -15\infty$$

$$\Longrightarrow f_{rs} \in \mathscr{L}(15\infty).$$

Montrons que les f_{rs} sont linéairement indépendants :

f_{rs}	f_{00}	f_{01}	f_{02}	f_{03}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{22}	f_{23}	f_{33}
$-\mathrm{ord}_\infty(f_{rs})$	0	4	8	12	5	9	13	10	14	15

Lemme V.4.3

La droite $D = \{X + Y + Z = 0\}$ est telle que

$$D.F_5 = a + b + P + \overline{P} + \infty$$

Preuve

Evident car d'après [19] les seuls points d'intersection de F_5 avec D sont a, b, P, $\overline{P}$ et ∞.

Lemme V.4.4

Soient L_a, L_b et L_∞ les droites tangentes à F_5 en a, b et ∞ respectivement. Alors ces droites ont un point de contact d'ordre 5 avec F_5 en a, b et ∞ respectivement. Aussi, si une courbe M de degré ≤ 4 a un point de contact d'ordre $>$ degM avec F_5 en a, b ou ∞, alors M contient L_a, L_b ou L_∞ respectivement.

Preuve

Soit C une courbe plane lisse de degré d (dans $\mathbb{P}^2$), et soit $p \in C$. On suppose que la tangente L en p à C a un point de contact d'ordre d.

Après changement de coordonnées on peut dire que $p = (1,0,0)$.

$C = \left\{F = 0\right\} \subset \mathbb{P}^2$; $L = \left\{Z = 0\right\} \subset \mathbb{P}^2$,

$F(X,Y,Z) = ZF'(X,Y,Z) + F''(X,Y)$.

D'où

$$C \cap L = \begin{cases} Z = 0 \\ F''(X,Y) = 0 \end{cases} = d(1,0,0)$$

$F'' = \Pi(\alpha_i X - \beta_i Y) = C^{te} Y^d$

$$\boxed{F(X,Y,Z) = Y^d + ZF'(X,Y,Z)}$$

Soit $M = \left\{G = 0\right\} \subset \mathbb{P}^2$ une courbe non nécessairement irréductible de degré $h < d$. Alors ou bien $G(X,Y,Z) = ZG'(X,Y,Z)$ et alors $M = L + M'$

avec $\deg M' = h-1$ et $\mathrm{mult}_p(M,C) \geq \mathrm{mult}_p(L,C) = d$.

ou bien $G(X,Y,Z) = Y^{\ell}(X-\alpha_1 Y)\dots(X-\alpha_m Y) + ZG'(X,Y,Z)$

avec donc $\ell + m = \deg G = h$, en particulier $\ell \leq h$

et dans ce cas $\mathrm{mult}_p(M,C) = \ell$.

Conclusion

ou bien $\mathrm{mult}_p(M,C) \leq h$

ou bien $M = L + M'$ avec $\deg M' = h-1$ (M' effectif) et

donc $\mathrm{mult}_p(M,C) \geq d$, ce qui entraîne

$\mathrm{mult}_p(M,C) > h$. □

Théorème V.4.5

Les points algébriques de degré 4 sur F_5 sont obtenus en coupant F_5 par une droite définie sur $\mathbb{Q}$ passant par a,b ou ∞.

Preuve

Soient $R_1,\dots,R_4$ les conjugués de Galois d'un point x sur F_5 de degré 4, au-dessus de $\mathbb{Q}$. On pose

$$x = [R_1 + \dots + R_4 - 4\infty] \in J_5(\mathbb{Q}).$$

De la même façon que P. Tzermias dans [21], on montre que

$$J_5(\mathbb{Q}) = \{d(a-\infty) + e(b-\infty) \;/\; 0 \leq d,\ e \leq 4\}.$$

Il existe alors des entiers d, e avec $0 \leq d,\ e \leq 4$ tels que $[R_1 + \dots + R_4 - 4\infty] = [d(\infty-a) + e(\infty-b)]$ i.e

$$[R_1 + \dots + R_4 + da + eb - (4+d+e)\infty] = 0$$

$$4 + d + e \leq 12 \Longrightarrow -(4+d+e)\infty \geq -15\infty$$

$$\Longrightarrow R_1 + \dots + R_4 + da + eb - (4+d+e)\infty \geq -15\infty$$

$\exists h \in \mathcal{L}(15\infty)$: $\mathrm{div}(h(x,y)) = R_1 + \dots + R_4 + da + eb - (4+d+e)\infty$.

D'après le lemme V.4.2, on a

$$h(x,y) := \sum_{0\le r\le s\le 3} a_{rs}\frac{x^r}{(x+y)^s} = \frac{\sum_{0\le r\le s\le 3} a_{rs}\, x^r(x+y)^{3-s}}{(x+y)^3} = \frac{f(x,y)}{(x+y)^3}$$

d'où $\operatorname{div}\left[f(x,y)/(x+y)^3\right] = R_1+\dots+R_4 + da + eb - (4+d+e)\infty$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left[f(x,y)\right] &= R_1+\dots+R_4 + da + eb - (4+d+e)\infty + 3\operatorname{div}(x+y)\\ &= R_1+\dots+R_4+da + eb-(4+d+e)\infty + 12\infty-3(c_0+c_1+c_3+c_4)\\ &= R_1+\dots+R_4 + da + eb + (11-d-e)\infty - 3(c_0+\dots+c_4)\end{aligned}$$

Il existe alors une cubique M dans $\mathbb{P}^2$ telle que

$\operatorname{div}\left[f(x,y)\right] = M.F_5 - 3(c_0 + \dots + c_4)$. Ainsi

$$M.F_5 = R_1 +\dots+ R_4 + da + eb + (11 - d - e)\infty.$$

Si $d = 4$ ou $e = 4$, d'après le lemme V.4.4, M contient L_a ou L_b ; et comme $d,e \le 5$, un des R_i est égal à a ou b, ce qui est absurde. Donc $0 \le d, e \le 3$, et par suite M contient L_∞. Il existe alors une conique C telle que

$$C.F_5 = R_1 +\dots+ R_4 + da + eb + (6 -d -e)\infty.$$

Si $d = 3$ ou $e = 3$, d'après le lemme V.4.4, C contient L_a ou L_b, et comme $d,e \le 5$, un des R_i est égal à a ou b, ce qui est absurde. Donc $0 \le d, e \le 2$, et par suite $2 \le 6-d-e \le 6$.

- Si $6 - d - e \ge 3$ alors, d'après le lemme V.4.4, C contient L_∞, donc il existe une droite D_1 telle que $C = D_1+L_\infty$. D'où $D_1.F_5 = R_1 +\dots+ R_4 + da + eb + (1-d-e)\infty$.

On doit avoir $1 - d -e \ge 0$ ie $d + e \le 1$. Donc on a

ou bien $D_1.F_5 = R_1 +\dots+ R_4 +b$, ou bien $D_1.F_5 = R_1+\dots+R_4+a$, ou bien $D_1.F_5 = R_1 +\dots+ R_4 + \infty$.

- Si $6 - d - e = 2$, alors $d + e = 4$ ie $d = e = 2$. D'où $C.F_5 = R_1 +\dots+ R_4 + 2a + 2b + 2\infty$.

Donc C contient D d'après le lemme V.4.3, ill existe alors une droite D_2 telle que $C = D + D_2$, d'où

$$D_2.F_5 = R_1 + \ldots + R_4 + a + b + \infty - P - \overline{P},$$

donc il existe un R_i égal à P, ce qui est absurde. □

[1] - Godement,R. : Théorie des faisceaux. Hermann, Paris (1958)

[2] - Serre, J-P : Faisceaux algébriques cohérents. Ann Math. 61, 197 - 278 (1955).

[3] - Grothendieck, A. et Dieudonné, J.A. : Eléments de géométrie algébrique, chap.0 et chap.1 (2ème éd.), Berlin - Heidelberg-New York, Spiringer, 1971.

[4] - Seydi, H. : Géométrie Algébrique sur un corps non algébriquement clos, I, à paraître dans :

RENDI CONTI DEI ACADEMIA PELORITANI DEI PERICOLANTI.

[5] - Kashiwara, M. and Schapira, P. : Sheaves on manifolds, Grundlehren der Math. Wiss. no.292, Springer-Verlag (1990).

[6] - Mumford, D. : Introduction to Algébraic Géométry, Harvand Univ., mimeogr., s.d.

[7] - Dieudonné, J-A : Panorama des Mathématiques Pures, le choix bourbachique.

[8] - Dieudonné, J-A. : Cours de Géométrie Algébrique, Tomes I et II, Puf (1974).

[9] - Leray, J. : Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations. J. Math. Pures et Appl. 9ème série 24, 95 -167 (1945); sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique, ibid. 169 - 199 ; sur les équations et les transformations, ibid.201-248.

[10] - LERAY, J. L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue.
J. Math. Pures et Appl., 9ème Série 29, 1-139(1950).

[11] - OKA, K. : Sur quelques notions arithmétiques. Bull. Soc Math. France 78, 1-27(1950).

[12] - OKA, K. : Lemme fondamental. Journ. Math. Soc. Japan 3, 204 - 214 et 259 - 278 (1951).

[13] - SERRE, J.P. : Un théorème de dualité. Comm. Math. Helv. 29, 9 - 26 (1955).

[14] - BUCHSBAUM, D.A. : Exact Catégories and Duality Trans. A.M.S. 80, 1 - 34 (1955).

[15] - VERDIER, J.L. : Catégories dérivées (Etat 0). Lect. Notes Math. 569, 262 - 312.
Springer, Berlin Heidelberg New York (1977).

[16] - CARTAN, H et SERRE, J.P. : Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes.
C.R. Acad. Sc. PARIS 237, 128 - 130 (1955).

[17] - BOURBAKI, N. : Eléments de Mathématiques : Algèbre Commutative, PARIS, Hermann, (1961 - 1965).

[18] - D. FADDEEV : On the divisor class groups of some algebraic curves, Dokl. Akad. Nauk SSSR 136 (1966), 296-298 (= Soviet Math. Dokl. 2(1961), n°1, 67-69).

[19] - D. ROHRLICH : Points at infinity on the Fermat curves, Invent. Math. 39 (1977), 95 - 127.

[20] - B. GROSS and D. ROHRLICH : Some results on Mordell-Weil group of the jacobien of the Fermat Curve, Invent. Math. 44., 1978, 201 - 224.

[21] - P. TZERMIAS : Algebraic points of low degree on the Fermat curve of degree seven,
Manuscripta Mathematica. Vol 97, Fasc. 4(1998),
483 - 488.