UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Thèse de doctorat 3^e cycle

option mathématiques appliquées

présentée par

Abdoulaye SENE

Sujet : Sur le calcul du coefficient de singularité pour l'équation de la chaleur et la contrôlabilité exacte de l'équation des plaques vibrantes

soutenue le 28-07-2001

Membres du jury :

CHERIF BADJI	...	Professeur UCAD Président
MARY TEUW NIANE	...	Professeur UGB Directeur de thèse
MAMADOU SANGHARE	...	Maitre de conférence UCAD Examinateur
DJARAF SECK	...	Maitre assistant UCAD Examinateur
ABDOU SENE	...	maitre assistant UGB Examinateur

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE

Dans ce travail, on calcul des coéfficients de singularités dans un problème de contrôle de l'équation de la chaleur et on établit des résultats de contrôlabilité exacte pour l'équation des plaques vibrantes avec des conditions initiales dans des espaces de Sobolev à puissances fractionnaires.

Il est connu que la solution de l'équation de la chaleur dans un ouvert polygonal plan présente des singularités .
La détermination de ces singularités résulte essentiellement de celle du Laplacien.Certaines expressions ont été présentées, notament par P.Grisvard [1], utilisant les coefficients de singularité du Laplacien obtenues avec les solutions singulières duales.
Dans le chapitre 1, on établit une formule donnant le coéfficient de singularité en utilisant une base Hilbertienne de $L^2(0,T)$ et une expression des singularités du Laplacien donnée par M.T.Niane et A.Séne [6] et utilisant la méthode des multiplicateurs.

Dans le chapitre 2, on suppose que Ω est constitué d'un matériau chauffé. On veut apporter un surplus de chaleur u^* pour que la température y du matériau ait une configuration y^* proche (dans un sens à préciser) de y_d fixée.
Un exemple simple de modélisation de ce phénomène consiste à minimiser la fonction

$$J(u) = \frac{1}{2}\,\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega\times]0,T[)} + \frac{\varepsilon}{2}\,\|u\|^2_{L^2(\Omega\times]0,T[)}$$

où y est solution du problème d'évolution

$$\begin{cases} y' - \Delta y & = & f + u \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[\\ y_{|\partial\Omega\times]0,T[} & = & 0 \\ y(0) & = & y_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Ω étant polygonal, la solution (u^*, y^*) de ce problème de contrôle présentera des singularités. Après avoir caractérisé la solution optimale, on étudie ses singularités et la régularité maximale.

Le chapitre 3 est consacré à la contrôlabilité exacte de l'équation des plaques

vibrantes. On rappelle que la contrôlabilité exacte des systèmes linéaires gouvernés par des équations aux dérivèes partielles, qui consiste à amener un système d'un état initial connu à un état final voulu, par une action sur ses conditions au bord (on peut considérer d'autres types d'actions) a connu un grand développement avec la mise en oeuvre de la méthode H.U.M(Hilbert Uniqueness Méthod) de J.-L.Lions [2].
On considère ici le problème de contrôlabilité exacte de l'équation des plaques vibrantes suivant :
Pour tout $T > 0$ fixé, pour tout (y_0, y_1) appartenant à un espace F' (dual de F) à déterminer, pour tout $(z_0, z_1) \in F'$, trouver $u, v \in L^2(\Sigma)$ telle que, si y est solution de

$$(p) \begin{cases} y" + \Delta^2 y = 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ y(0) = y_0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) = y_1 & \text{dans } \Omega \\ \gamma y = u & \text{dans } \partial\Omega\times]0,T[\\ \gamma \frac{\partial y}{\partial \nu} = v & \text{dans } \partial\Omega\times]0,T[\end{cases}$$

Alors $y(T) = z_0$ et $y'(T) = z_1$.
Lorsque Ω est régulier, J.-L.Lions [3] a établit la contrôlabilité exacte dans le cas où $u = 0$ (c'est à dire avec un seul contrôle sur $\gamma\frac{\partial y}{\partial \nu}$) pour des données initiales (y_0, y_1) dans $F' = L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$.

Dans un cadre plus général où les données initiales sont dans $F'_\theta = H_0^{2\theta}(\Omega) \times H^{2\theta-2}(\Omega)$,$\theta \in [0,1]$, on établit dans la première partie du chapitre 3 les mêmes types de résultats de contrôlabilité exacte avec la méthode H.U.M.
La mise en oeuvre de cette méthode repose, pour $(\phi_0, \phi_1) \in F_\theta$ et ϕ la solution de

$$(p')\begin{cases}\phi" + \Delta^2\phi & = & 0 \\ \phi(0) & = & \phi_0 \\ \phi'(0) & = & \phi_1 \\ \gamma\phi = \gamma\frac{\partial\phi}{\partial\nu} & = & 0,\end{cases}$$

à l'établissement de l'equivalence de la norme de (ϕ_0, ϕ_1) dans F_θ avec

$$\left(\int_{\partial\Omega\times]0,T[} \|\gamma\Delta\phi\|^2_{H^{-\frac{3\theta}{2}}(\Omega)} d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De même dans le cas d'un contrôle sur la position γy, I.Lasiecka et R.Triggiani [10] ont établit des résultats de contrôlabilté exacte avec des données initiales dans (y_0, y_1) appartenant à $F' = H^{-1}(\Omega)\times[H^3(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)]'$ et Ω strictement étoilé, avec un temps $T > T_0$, où T_0 ne dépend que de la géométrie de Ω. Dans la deuxième partie du chapitre 3, on généralise ces résultats à des données initiales dans $F'_\theta = D'_{A^{\frac{3}{4}-\frac{\theta}{2}}} \times D'_{A^{\frac{1}{4}-\frac{\theta}{2}}}$ en établissant des équivalences de normes, toujours avec la solution ϕ de (p') et

$$\left(\int_{\partial\Omega\times]0,T[} \|\gamma\frac{\partial\Delta\phi}{\partial\nu}\|^2_{H^{-\frac{\theta}{2}}(\Omega)} d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chapitre 1

Calcul du coefficient de singularité pour l'équation de la chaleur

Introduction

La solution de l'équation de la chaleur dans les ouverts polygonaux plans présente des singularités.On donne dans ce chapitre une expression de ces singularités pouvant être utilisée numériquement.

1.1 Notations et position du problème

1.1.1 notations

Soit Ω un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$ d'arêtes $(\Gamma_i)_{0\leq i\leq N}$, on note par :

-$(s_i)_{0\leq i\leq N}$ les sommets de Ω où s_{i+1} (resp. s_0) pour $0 \leq i \leq N-1$ est le sommet compris entre Γ_i et Γ_{i+1}(resp. le sommet compris entre Γ_N et Γ_0);

-τ_i (resp τ_N) pour $1 \leq i \leq N-1$, le vecteur unitaire tangent à Ω, porté par Γ_i (resp Γ_N) orienté vers Γ_{i+1}(resp. Γ_0) ;

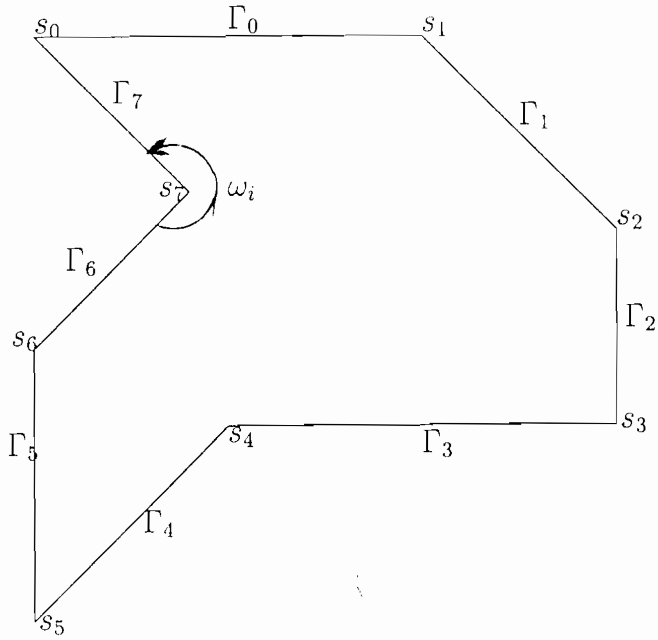
-$(\nu_i)_{0\leq i\leq N}$ les vecteurs unitaires normaux extérieurs à Ω tels que ν_i orthogonal à Γ_i pour $0 \leq i \leq N$ et que (τ_i, ν_i) est une base orthonormée directe ;

-$(\omega_i)_{0\leq i\leq N}$ la mesure de l'angle intérieur à Ω mesuré par rapport à Γ_{i+1} au sommet s_i ;

-$(r_i, \theta_i)_{0\leq i\leq N}$ les coordonnées polaires locales en s_i, où l'angle θ_i est mesuré par rapport à Γ_{i+1} ;

-η_i une fonction de troncature égale à 1 sur un voisinage de s_i et vérifiant $supp(\eta_i) \cap \Gamma_j = \phi$ pour $j \in \{0, ..., N\} \setminus \{i, i+1\}$
-" ' " désigne la dèrivé par rapport au temps.

figure



1.1.2 position du problème

On considère dans $Q =]0;T[\times \Omega$ le problème

$$(p)\begin{cases} u' - \Delta u &= f \quad \text{dans} \quad Q \\ u(0) &= u_0 \\ u_{|\Sigma} &= 0. \end{cases}$$

où $\Sigma =]0,T[\times\partial\Omega$ et f, u_0 sont des données dont on précisera la régularité. On définit l'opérateur non borné A de $L^2(\Omega)$ par :

$$D(A) = \left\{u \in H_0^1(\Omega)\,;\ -\Delta u \in L^2(\Omega)\right\} \textit{ et } \forall u \in D(A), A(u) = -\Delta u.$$

On munit $D(A)$ de la norme du graphe et on a :

proposition 1.1.1. *Pour f et u_0 données respectivement dans $L^2(]0,T[\times\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, le problème (p) admet une solution unique dans* $L^2(0,T;D(A)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$.

On sait que, lorsque Ω est régulier, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Dans notre cas, $D(A)$ n'est pas en général contenu dans $H^2(\Omega)$. Précisément, comme la solution u de (p), vérifie

$$-\Delta u = f - u' \in L^2(\Omega)$$

alors u s'écrit sous la forme

$$u(t,x) = u_R(t,x) + \sum_{i=1}^{i=N} c_i(t) S_i(x)$$

où

$$u_R(t,x) \text{ est dans } L^2(0,T;H^2(\Omega)) \text{ et } S_i(r_i,\theta_i) = \eta_i r_i^{\frac{\pi}{\omega_i}} \sin\frac{\pi}{\omega_i}\theta_i.$$

Les réels $c_i(t)$ sont les coéfficients de singularités associés aux fonctions singulières S_i.

On a, dans Grisvard [1], une caractérisation en produit de convolution de ces coefficients de singularités par l'utilisation de l'équation de Laplace et de la transformée de Fourrier. Moussaoui[5] a aussi donné une formule obtenue par les fonctions de Bessel. On donne dans ce chapitre une autre représentation permettant d'avoir une bonne approximation numérique de ces coëfficients.

1.2 Représentation du coefficient de singularité

1.2.1 Représentation

proposition 1.2.1. *La solution u de (p) vérifie les estimations suivantes :*

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq c_1(\|f\|_{L^2(Q)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}) \tag{1.2.1}$$

$$\|\Delta u\|_{L^2(Q)} \leq c_2(\|f\|_{L^2(Q)} + \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}) \tag{1.2.2}$$

$$\|u'\|_{L^2(Q)} \leq c_3(\|f\|_{L^2(Q)} + \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}) \tag{1.2.3}$$

Où c_1 c_2 et c_3 sont des constantes qui ne dépendent que de Ω

Preuve

On a

$$u' - \Delta u = f \tag{1.2.4}$$

En multipliant (1.2.4) par u et en intégrant sur Q il vient

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \frac{d}{dt}|u(t,x)|^2 dxdt + \int_0^T\int_\Omega \|\nabla u(t,x)\|_{\mathbb{R}^2}^2 dxdt = \int_0^T\int_\Omega f(t,x)u(t,x)dxdt$$

Or

$$\int_\Omega\int_0^T \frac{d}{dt}|u(t,x)|^2 dxdt = \int_\Omega |u(T)|^2 dx - \int_\Omega |u_0|^2 dx = \|u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega -\Delta u(t,x).u(t,x)dxdt &= \int_0^T\int_\Omega \nabla u(t,x)\nabla u(t,x)dxdt \\ &= \|\nabla u\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega)))^2}^2\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega)))^2}^2 + \frac{1}{2}\|u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2}^2 &= \int_0^T\int_\Omega f(t,x)u(t,x)dxdt \\ &\leq \|f\|_{L^2(Q)}\|u\|_{L^2(Q)}\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2} \leq \|f\|_{L^2(Q)}\|u\|_{L^2(Q)} + \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|f\|^2_{L^2(Q)}\|u\|_{L^2(Q)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Mais, $u(t)$ est dans $H^1_0(\Omega)$ donc par l'inégalité de Poincaré

$$\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)} \geq c\|u\|^2_{L^2 0,T;H^1(\Omega))}$$

où c est une constante positive qui ne dépend que de Ω. D'où

$$c\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \|f\|^2_{L^2(Q)}\|u\|_{L^2(Q)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

D'après l'inégalité de Young

$$\|f\|_{L^2(Q)}\|u\|_{L^2(Q)} \leq \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{2\alpha}\|f\|^2_{L^2(Q)}$$

öù α est choisi de facon à avoir $c - \alpha > 0$.
On obtient

$$c\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega)} \leq \alpha\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{1}{2\alpha}\|f\|^2_{L^2(Q)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Soit

$$(c-\alpha)\|u\|^2_{L^2 0,T;H^1(\Omega))} \leq \frac{1}{2\alpha}\|f\|^2_{L^2(Q)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

En posant

$$c_1 = \frac{1}{c-\alpha} max(1, \frac{1}{2\alpha})$$

On a l'estimation (1.2.1)

La preuve de (1.2.2) est identique à celle de (1.2.1), il suffit de multiplier par
$-\Delta u(t)$ à la place de $u(t)$ et d'intégrer sur Q

En regroupant (1.2.1) (1.2.1) et(1.2.4), on a (1.2.3).

proposition 1.2.2. *(M.T.Niane A Sène)[6] On a pour presque tout t dans* $]0,T[$ $c(t)$ *s'écrit*

$$c(t) = \int_{\Omega}(F_0(x)u(t,x) + (f(t,x) - u'(t,x))F_1(x))dx \qquad (1.2.5)$$

où F_0 *et* F_1 *sont données par*

$F_0(x) = \frac{\omega}{\pi^2}\Delta(\frac{x}{r^2\frac{\pi}{\omega}}\Delta S)$

$F_1(x) = \frac{\omega}{\pi^2}(\frac{x}{r^2\frac{\pi}{\omega}}\Delta S)$

lorsque Ω *n'est pas fissuré et par*

$F_0(x) = \frac{2}{\pi(x_0-s)\tau}(2div(\nabla\eta(x-x_0)\nabla S + (x-x_0)\Delta S) - \Delta\eta(x-x_0)\nabla S)$

$F_1(x) = \frac{2}{\pi(x_0-s)\tau}(\eta(x-x_0)\nabla S)$

dans le cas où Ω *est fissuré, s étant le sommet de la fissure et* x_0 *un point sur le segment portant la fissure.*

Soit $(\psi_k(t))_{k\geq 1}$ la base Hilbertienne de $L^2(0,T)$ définie par

$$\psi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{k\pi}{T}t$$

qui est un vecteur propre de l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet

$$(p)\begin{cases} -\dfrac{d^2\psi_k(t)}{dt^2} & = & (\frac{k\pi}{T})^2\psi_k(t) \\ \psi_k(0) & = & 0 \\ \psi_k(T) & = & 0 \end{cases}$$

On a le résultat suivant

proposition 1.2.3. *Pour tout $t \in]0,T[$ on a :*

i)

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_\Omega (F_1(x)f(t,x) + F_0(x)u(t,x))dx \\ &\qquad + \int_\Omega \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(t) \int_0^T \psi_k'(t)F_1(x)u(t,x)dt \right\} dx. \end{aligned}$$

ii) $c(t) \in H^{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\omega}}(]0,T[)$.

iii) en outre, si $f \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *et* $u_0 \in D(A)$ *on a l'estimation*

$$|c(t)| \leq K \left\{ \|u_0\|_{D(A)} + \|f\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \right\}.$$

Preuve

i) On a $c(t) \in L^2(0;T)$, donc $c(t)$ se décompose dans la base Hilbertienne $(\psi_k)_{k\geq 1}$

$$c(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \psi_k(t)$$

où

$$c_k = \int_0^T c(t)\psi_k(t)dt$$

Quand on multiplie membre à membre (1.2.5) par $\psi_k(t)$ et en intégrant de 0 à T, on obtient

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^T \psi_k(t) \left\{ \int_\Omega F_0(x)u(t,x)dx \right\} dt + \int_0^T \psi_k(t)(\int_\Omega f(t,x)F_1(x)dx)dt \\ &- \int_0^T \psi_k(t)(\int_\Omega u'(t,x)F_1(x)dx)dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \psi_k(t)F_0(x)u(t,x)dxdt + \int_0^T \int_\Omega \psi_k(t)f(t,x)F_1(x)dxdt \\ &+ \int_\Omega -F_1(x)[\psi_k(t)u(t,x)]_0^T dx + \int_0^T \int_\Omega \psi_k'(t)u(t,x)F_1(x)dxdt, \end{aligned}$$

Comme $\psi_k(0) = \psi_k(T) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^T \int_\Omega \{\psi_k(t) F_1(x) f(t,x) \\ &+ (\psi_k(t) F_0(x) + \psi_k'(t) F_1(x)) u(t,x)\} \, dxdt \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} c(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(t) \int_0^T \int_\Omega \Big((\psi_k(t) F_1(x) f(t,x) \\ &\qquad + (\psi_k(t) F_0(x) + \psi_k'(t) F_1(x)) u(t,x) \Big) \, dxdt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(t) \int_0^T \int_\Omega \psi_k(t) F_1(x) f(t,x) + (\psi_k(t) F_0(x) + \psi_k'(t) F_1(x)) u(t,x) dxdt \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (\int_\Omega \psi_k' \int_0^T \psi_k(t) F_1(x) f(t,x) dt) dx \psi_k(t) \\ &+ \int_\Omega \left\{ \int_0^T \psi_k(t) F_0(x) u(t,x) dt \right\} dx \psi_k(t) \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(t) \int_\Omega \int_0^T (t) F_0(x) u(t) dt dx \end{aligned}$$

ce qui donne i).

Preuve de iii)

On suppose maintenant que $f \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ et $u_0 \in D(A)$,
$-\Delta u = f - u' \in L^2(\Omega)$ pour presque tout $t \in]0,T[$, donc d'après Grisvard[1]

$$|c(t)| \leq K \left\| f - u' \right\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.2.6}$$

Où K est une constante qui ne dépend que de Ω. Soit $(w_k)_{k\geq 1}$ la base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$ associée à l'opérateur A, où :

- w_k vecteur propre de A,
- λ_k les valeurs propres correspondantes ($\lambda_k > 0$),

La solution $u(t)$ est donnée par

$$u(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ e^{-t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle + \int_0^T e^{-(t-s)\lambda_k} \langle f(s), w_k \rangle \, ds \right\} w_k$$

Soient

$$u_{0k} = \int_\Omega u_0 w_k dx \text{ et } f_k = \int_\Omega f w_k dx$$

On a

$$f - u' = \sum_{k=1}^{+\infty} (-\lambda_k e^{-\lambda_k t} u_{0k} w_k) + (-\lambda_k e^{-\lambda_k t} \int_0^T e^{\lambda_k s} f_k(s) ds) w_k$$

et

$$\|f - u'\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 e^{-2\lambda_k t} u_{0k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 e^{-2\lambda_k t} (\int_0^T e^{\lambda_k s} f_k(s) ds)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 e^{-2\lambda_k t} u_{0k}^2 \leq \alpha \|u_0\|_{D(A)}^2$$

L'autre membre vérifie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 e^{-2\lambda_k t} (\int_0^T e^{\lambda_k s} f_k(s) ds)^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 e^{-2\lambda_k t} \left\| e^{\lambda_k s} \right\|_{L^2(0,t)}^2 \|f_k(s)\|_{L^2(0,T)}^2$$

Or

$$\left\| e^{\lambda_k s} \right\|_{L^2(0,t)} \leq \frac{1}{2\lambda_k} e^{2\lambda_k t}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2 e^{-2\lambda_k t} \left(\int_0^t e^{\lambda_k s} f_k(s) ds \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \|f_k(s)\|_{L^2(0,T)}^2$$

Finalement

$$|c(t)| \leq \alpha \|u_0\|_{D(A)} + \|f\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

D'où iii).

On prouve ii) en utilisant le lemme suivant

lemme 1.2.1. *Grivard[1]*

Pour tout $\omega > \pi$ *et* $\theta \geq (1 + \frac{\pi}{\omega})/2$ *on a :*

$D(A^\theta) \subset Vect\{H^s(\Omega);S\}$ *pour* $s \leq 2\theta$

On a vu, à la proposition 1.1.1 que

$$u \in L^2(0,T;D(A)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{et } u_R \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$$

Pour tout $\sigma \in [0,1]$ on a, par interpolation

$$u \in H^\sigma(0,T;D(A^{1-\sigma}))\ ;\ u(t) \in D(A^{1-\sigma})$$

En posant $\theta = 1-\sigma$ et en applicant le lemme 1.2.1, on a u appartient à la somme $H^s(\Omega) + Vect(S)$.

Mais $H^2(\Omega) \subset H^s(\Omega)$, donc les composantes de u dans les sommes directés de $H^2 \oplus Lin(S)$ et $H^s \oplus Lin(S)$ sont les mêmes .

Ce qui donne $u_R \in H^\sigma(0,T;H^s(\Omega))$ et $c(t) \in H^\sigma(0,T)$, la condition sur σ étant $1-\sigma \geq \left(1+\frac{\pi}{\omega}\right)/2$ (lemme 1.2.1) ; c'est à dire $\sigma \leq \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\omega}$.

D'où ii)

1.2.2 approximation du coefficient de singularité

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$c_n(t) = \int_\Omega F_1 f dx + \int_\Omega F_0 u dx + \sum_{k=1}^{k=n} \psi_k(t) \int_\Omega \int_0^T \psi_k'(t) F_1 u dt dx$$

Alors on a le résultat suivant

proposition 1.2.4. *Pour tout réel ε vérifiant $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\omega}$, $c_n(t)$ converge vers c(t) dans $H^{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\omega}-\varepsilon}(]0;T[)$ et on a l'estimation*

$$\|c_n - c\|_{H^{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\omega}-\varepsilon}(]0;T[)} \leq \frac{K}{n^\varepsilon} \qquad (1.2.7)$$

où K est une constante qui ne dépend que de Ω, f et u_0

Preuve Soit (α_k) les valeurs propres correspondantes aux vecteurs propres (φ_k).On rappelle que $(\frac{\psi_k}{\sqrt{\alpha_k}})_k$ est une base orthonormée de $H_0^1(\Omega)$ et que, si $0 \leq s < \frac{1}{2}$ on a

$$H^s(0,T;L^2(\Omega)) = H_0^s(0,T;L^2(\Omega)) \qquad (1.2.8)$$

$$\|c_n - c\|^2_{H^{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\omega}-\varepsilon}(0,T;L^2(\Omega))} = \sum_{k>n} \alpha_k^{1-\frac{\pi}{\omega}-2\varepsilon} \left(\int_\Omega \int_0^T \psi_k'(t) F_1(x) u(t,x) dt dx\right)^2$$

$$\leq \|F_1\|^2_{L^2(\Omega)} \sum_{k>n} \alpha_k^{2-\frac{\pi}{\omega}-2\varepsilon} \int_\Omega \left(\int_0^T \frac{\psi_k'(t)}{\sqrt{\alpha_k}} u(t,x) dt \right)^2 dx \qquad (1.2.9)$$

la suite (α_k) étant positive croissante, (1.2.9) peut être reécrit

$$\|c_n - c\|^2_{H^{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\omega}-\varepsilon}(0,T;L^2(\Omega))} \leq \|F_1\|^2_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\alpha_n^{2\varepsilon}} \sum_{k>n} \alpha_k^{2-\frac{\pi}{\omega}} \int_\Omega \left(\int_0^T \frac{\psi_k'(t)}{\sqrt{\alpha_k}} u(t,x) dt \right)^2 dx$$

avec (1.2.8) l'estimation (1.2.1) de la proposition (1.2.1), on a

$$\begin{aligned} \|c_n - c\|^2_{H^{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\omega}-\varepsilon}(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \frac{1}{\alpha_n^{2\varepsilon}} \|F_1\|^2_{L^2(\Omega)} \|u\|^2_{H^{1-\frac{\pi}{2\omega}}(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq \frac{c_1}{\alpha_n^{2\varepsilon}} \|F_1\|^2_{L^2(\Omega)} (\|f\|^2_{L^2(Q)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)})^2 \end{aligned}$$

Où c_1 est une constante qui dépend de Ω.
En remplaçant α_n par sa valeur, on a l'estimation (1.2.7) en prenant

$$K = \frac{c_1^{\frac{1}{2}} T^\varepsilon}{\pi^\varepsilon} \|F_1\|_{L^2(\Omega)} (\|f\|^2_{L^2(Q)} + \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}).$$

Chapitre 2

Calcul de coefficient de singularité dans un problème de contrôle de l'équation de la chaleur

2.1 Position du problème

On conserve les notations du chapitre 1.
Pour $T > 0$ on considère le problème d'évolution suivant :

$$(p_1)\begin{cases} y' - \Delta y &= f + u \quad \text{dans} \quad Q \\ y_{|\Sigma} &= 0 \\ y(0) &= y_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

où f est dans $L^2(Q)$ et y_0 dans $H_0^1(\Omega)$.

Pour u donnée dans $L^2(Q)$, le problème (p_1) admet une et un seule solution $y(u)$ qui appartient à $L^2(0,T;D(A)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ $(prop.1.1.1)$.

Soit $y_d \in L^2(Q)$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$J(u) = \frac{1}{2}\left\|y - y_d\right\|^2_{L^2(Q)} + \frac{\varepsilon}{2}\left\|u\right\|^2_{L^2(Q)}$$

J est encore appelée fonction coût .

On consière ici le problème de contrôle optimal

$$\inf_{u \in L^2(Q)} J(u)$$

On désigne par contrôle les fonctions u; si u^* réalise le minimum de $J(u)$ sur $L^2(Q)$, on l'appele contrôle optimal.
La fonction $y(u)$ est appelée état du système correspondant au contrôle u, en particulier $y^* = y(u^*)$ est appelé état optimal.
On veut donner le système d'optimalité caractérisant y^*, puis en déduire, en fonction des données initiales f, y_0 et y_d les singularités de y^* et sa régularité maximale.

2.2 Existence et caractérisation du contrôle optimale.

On donne dans ce paragraphe le système d'optimalité associé au problème de contrôle optimal en utilisant essentiellement le théorème de Stamppacchia.

2.2.1 Théorème de Stamppacchia

Soit H un espace de Hilbert réel, muni de son produit scalaire $< . >_H$; la norme associée étant $\|.\|_H$. On considère une application linéaire

$$l : H \to \mathbb{R}$$

et une forme biliéaire

$$b : H \times H \to \mathbb{R}$$

On fait les hypothès suivantes :

H(1) : l est continue sur H i.e $\exists L > 0, \forall x \in H, \; |l(x)| \leq L\|x\|_H$

H(2) : b est continue sur $H \times H$:
$\exists M > 0 / , \forall (x, y) \in H \times H, |b(x, y| \leq M\|x\|_H\|y\|_H$

H(3) : b est coercive :$\exists\alpha > 0$ $b(x,x) \geq \alpha\|x\|_H^2$ pour tout $x \in H$

Théorème 2.2.1. *(Stampacchia)*
Soit K un convexe fermé de H, si l et b vérifient les hypothèses H(1), H(2) et H(3) ; la fonction

$$J(u) = \frac{1}{2}b(u,u) - l(u)$$

admet un et un seul minimun u^* sur K et ce minimun vérifie

$$b(u^* \ , \ v - u^*) \geq l(v - u^*) \quad \forall v \in K \tag{2.2.1}$$

2.2.2 Existence du contrôle optimal

Existence et unicité

Théorème 2.2.2. *Il existe un unique $u^* \in L^2(Q)$ tel que*

$$J(u^*) = \inf_{u \in L^2(Q)} J(u)$$

Preuve
On démontre d'abord le lemme suivant

lemme 2.2.1. *Soit l'opérateur B de $L^2(Q)$ dans $L^2(Q)$qui à tout w associe $B(w) = z$ solution de l'équation*

$$\begin{cases} z' - \Delta z &= w \quad dans\ Q \\ z(0) &= 0 \\ \gamma z &= 0 \end{cases}$$

Alors B est linéaire et continu

preuve du lemme
La linéarité est evidente.
Pour montrer la continuité, il suffit d'utiliser l'estimation (1.2.1)chap 1 page 3 dans le cas particulier où $f = w$ et $y_0 = 0$. En effet, pour tout w dans $L^2(Q)$ on a

$$\|B(w)\|_{L^2(Q)} \leq \|B(w)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq c_1\|w\|_{L^2(Q)}.$$

De la même manière, on définit l'application affine

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : L^2(Q) &\to L^2(Q) \\ u &\to \mathcal{B}(u) = y(u) \end{aligned}$$

Où $y(u)$ est la solution de (p_1). On a

$$\mathcal{B}(u) = B(u) + \mathcal{B}(0)$$

La fonction coût

$$J(u) = \frac{1}{2}\|y(u) - y_d\|^2_{L^2(Q)} + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_{L^2(Q)}$$

peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} < y(u) - y_d \ , \ y(u) - y_d >_{L^2(Q)} + \frac{\varepsilon}{2} < u, u >_{L^2(Q)} \\ &= \frac{1}{2} < y(u) - \mathcal{B}(0) + \mathcal{B}(0) - y_d \ , \ y(u) - \mathcal{B}(0) + \mathcal{B}(0) - y_d >_{L^2(Q)} \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} < u, u >_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

Or

$$y(u) - \mathcal{B}(0) = \mathcal{B}(u) - \mathcal{B}(0) = B(u)$$

Donc

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} < B(u) + \mathcal{B}(0) - y_d \ , \ B(u) + \mathcal{B}(0) - y_d >_{L^2(Q)} + \frac{\varepsilon}{2} < u \ , \ u >_{L^2(Q)} \\ &= \frac{1}{2} < B(u) \ , \ B(u) >_{L^2(Q)} + < B(u) \ , \ \mathcal{B}(0) - y_d >_{L^2(Q)} \\ &\quad + \frac{1}{2} < \mathcal{B}(0) - y_d \ , \ \mathcal{B}(0) - y_d >_{L^2(Q)} + \frac{\varepsilon}{2} < u \ , \ u >_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned} b(u \ , \ v) &= < B(u) \ , \ B(u) >_{L^2(Q)} + \varepsilon < u \ , \ v >_{L^2(Q)} \\ l(u) &= - < B(u) \ , \ \mathcal{B}(0) - y_d >_{L^2(Q)} \\ C &= \frac{1}{2} < \mathcal{B}(0) - y_d \ , \ \mathcal{B}(0) - y_d >_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

On a

$$J(u) = \frac{1}{2} b(u\ ,\ u) - l(u) + C$$

C étant une constante pour y_0, y_d et f fixés, chercher le minimun de J revient à chercher le minimun de

$$J_1(u) = \frac{1}{2} b(u\ ,\ u) - l(u)$$

Il reste maintenant à vérifier les hypothšes du théorème de Stampacchia.

On a

$$|b(u,v)| \leq \|B(u)\|_{L^2(Q)} \|B(v)\|_{L^2(Q)} + \varepsilon \|u\|_{L^2(Q)} \|v\|_{L^2(Q)}$$

et d'aprés (?), il existe une constante positive k telle que

$$|b(u,v)| \leq (k+\varepsilon) \|u\|_{L^2(Q)} \|v\|_{L^2(Q)}.$$

Aussi,

$$\begin{aligned} |b(u\ ,\ u)| &= < B(u)\ ,\ B(u) >_{L^2(Q)} + \varepsilon < u\ ,\ v >_{L^2(Q)} \\ &= \|B(u)\|^2_{L^2(Q)} + \varepsilon \|u\|^2_{L^2(Q)} \\ &\geq \varepsilon \|u\|^2_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

Donc b est continue est coercive.

De même, l est continue. En effet,

$$\begin{aligned} |l(u)| &= | < B(u)\ ,\ \mathcal{B}(0) - y_d >_{L^2(Q)} | \\ &\leq \|\mathcal{B}(0) - y_d\|_{L^2(Q)} \|B(u)\|_{L^2(Q)} \\ &\leq k \|\mathcal{B}(0) - y_d\|_{L^2(Q)} \|u\|_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Stampacchia, on a l'existence et l'unicité du contrôle optimal u^* en considérant le cas particulier $K = L^2(Q)$

2.2.3 Caractérisation du contrôle optimal

Théorème 2.2.3. *Le contrôle optimal u^* est caractérisé par l'ensemble des équations et inéquations suivantes*

$$
(S1) : \begin{cases} y'(u^*) - \Delta y(u^*) &= f + u^* \\ y(u^*)_{\Sigma} &= 0 \\ y(u^*)_{|t=0} &= y_0 \end{cases}
$$

$$
(S2) : \begin{cases} -p'(u^*) - \Delta p(u^*) &= y(u^*) - y_d \\ p(u^*)_{|\Sigma} &= 0 \\ p(x,T;u^*) &= 0 \end{cases}
$$

$$
(S3) : \int_0^T \int_{\Omega} (p(u^*) + \varepsilon u^*)(v - u^*) dx dt \geq 0
$$

Pour tout $v \in L^2(Q)$ *où* $p(u^*)$ *est l'état adjoint*

preuve

D'après (2.2.1), le contrôle optimal est caractérisé par

$$
(b(u^*)\ ,\ v - u^*) \geq l(v - u^*) \quad \forall v \in L^2(Q).
$$

C'est à dire

$$
\begin{aligned} < B(u^*)\ , B(v-u^*) >_{L^2(Q)} + \varepsilon < u^*\ ,\ v - u^* >_{L^2(Q)} \geq \\ - < B(v-u^*)\ , \mathcal{B}(0) - y_d >_{L^2(Q)} \end{aligned} \tag{2.2.2}
$$

Or,

$$
B(v - u^*) = \mathcal{B}(v) - \mathcal{B}(u^*)
$$

et

$$
B(u^*) + \mathcal{B}(0) = y(v) - y(u^*)
$$

Donc (2.2.2) peut être reécrit

$$
< y(u^*) - y_d\ ,\ y(v) - y(u^*) >_{L^2(Q)} + \varepsilon < u^*\ ,\ v - u^* >_{L^2(Q)} \geq 0.
$$

c'est à dire

$$\int_Q (y(u^*) - y_d)\,(y(v) - y(u^*))\,dxdt + \int_Q \varepsilon \bar{u}(v - u^*)dxdt \geq 0 \qquad (2.2.3)$$

Soit $z = y(v) - y(u^*)$; alors z vérifie

$$\begin{cases} z' - \Delta z = v - u^* \\ z_{|\Sigma} = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

et (2.2.4) devient

$$\int_Q (y(u^*) - y_d)\, z.dxdt + \varepsilon \int_Q \bar{u}(v - u^*)dxdt \geq 0 \qquad (2.2.5)$$

On introduit l'état adjoint $p(u)$ définit par :

$$\begin{cases} -p'(u) - \Delta p(u) = y - y_d \\ p(u)_{|\Sigma} = 0 \\ p(x, T; u) = 0 \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

En multipliant (2.2.6) par z et en intégrant sur Q, on obtient

$$-\int_Q p'(u)zdxdt - \int_Q z\Delta p(u)dxdt = \int_Q z(y - y_d)dxdt$$

et avec (2.2.4) et (2.2.5) on obtient

$$\int_Q p(u^*)(v - u^*)dxdt + \varepsilon \int_Q u^*(v - u^*)dxdt \geq 0 \quad \forall v \in L^2(Q)$$

c'est à dire

$$\int_Q (p(u^*) + \varepsilon u^*)) (v - u^*) \, dxdt \geq 0 \,; \forall v \in L^2(Q)$$

Ce qui démontre le théorème.

2.3 Etude des singularités du contrôle optimal et de l'état optimal

On fait l'hypothèse que Ω a un seul coin rentrant et que $f' - \Delta f$ est dans $L^2(Q)$

2.3.1 Etude d'un cas stationnaire

On considère l'équation

$$(E) \quad \begin{cases} \Delta^2 u + \lambda^4 u = g & \text{dans } \Omega \\ \gamma u = \gamma \Delta u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\text{où} \quad u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ et } g \in L^2(\Omega)$$

Les solutions singulières de (E) sont celles de

$$(E') \begin{cases} \Delta^2 u = g & \text{dans } \Omega \\ \gamma u = \gamma \Delta u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

proposition 2.3.1. *L'équation (E') admet une unique solution variationnelle u dans*

$$V = \{u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) / \gamma \Delta u = 0\}$$

Preuve

Formulation variationnelle

En multipliant dans E' par $-\Delta v$ où v est dans V et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega (\Delta^2 u + t^4 u)(-\Delta v)dx = \int_\Omega g(-\Delta v)dx$$

Or

$$\int_\Omega (-\Delta v)(\Delta^2 u)dx = \int_\Omega \nabla\Delta u \nabla\Delta v dx - \int_{\partial\Omega} \Upsilon \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \Upsilon \Delta v d\sigma$$

et

$$t^4 \int_\Omega u(-\Delta v)dx = t^4 \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - t^4 \int_{\partial\Omega} \Upsilon \frac{\partial v}{\partial \nu} \Upsilon u d\sigma$$

Finalement

$$\int_\Omega \nabla\Delta u \nabla\Delta v dx + t^4 \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega g \Delta v dx \quad \forall v \in V$$

On définit

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla\Delta u \nabla\Delta v dx + t^4 \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \quad \text{et} \quad l_1(v) = -\int_\Omega f \Delta v dx$$

remarque 2.3.2. On prenda pour norme dans V la norme

$$\|v\|_V = (\|v\|^2_{H^3(\Omega)} + t^4 \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$$

La forme bilinéaire a et l'application linéaire l_1 vérifient :

i)

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$$

v est dans V entraine Δv est dans $H^1_0(\Omega)$ et donc

$$\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta v\|_{H^1_0(\Omega)}$$

d'où l'éxistence de constantes c_0 et c'_0 telles que

$$\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \leq c_0 \|\nabla \Delta v\|_{L^2(\Omega)} \leq c'_0 \|v\|_{H^3(\Omega)}$$

Finalement, il existe une constante k telle que

$$|l_1(v)| \leq k\|v\|_V$$

D'où la continuité de l_1.
ii)

$$\begin{aligned}
\|a(u,v)\| &\leq \|\nabla\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\Delta v\|_{L^2(\Omega)} + t^4 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{H^3(\Omega)} \|v\|_{H^3(\Omega)} + t^4 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq \left(\|u\|^2_{H^3(\Omega)} + t^4 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} + t^4 \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u\|_V \|v\|_V
\end{aligned}$$

Donc a est continue de $V \times V \mapsto \mathbb{R}$
iii)

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \|\nabla\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + t^4 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\geq \beta \|u\|^2_{H^3(\Omega)} + \beta' t^4 \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \beta \text{ et } \beta' \text{ constantes}
\end{aligned}$$

D'où l'existence d'une constante α telle que

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_V$$

Donc a est coercive

i) ii) et *iii)* donnent, par application du théorème de Lax-Milgram, l'existence et l'unicité de la solution variationnelle u de (E')

proposition 2.3.3. *La solution u de (E') peut être décomposée en une partie régulière*

$$u_R \in \{H^4(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)/\gamma\Delta v = 0\}$$

et en une partie singulière

$$S(r,\theta) = \eta r^{2+\frac{\pi}{\omega}} \sin\frac{\pi}{\omega}\theta$$

au voisinage du coin

preuve

Si u est une solution de (E'), alors $\Delta u = v$ est dans $H_0^1(\Omega)$ et est solution de

$$\begin{cases} \Delta u = g \ \text{ dans } \ \Omega \\ \\ \gamma v = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega \end{cases}$$

Donc v s'écrit $v = v_R + c\eta r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega}\theta$ où v_R est dans $H^2(\Omega)$.

On a $u = u_1 + u_2$ où u_1 et u_2 sont telles que

$$\begin{cases} \Delta u_1 &= v_R \ \text{ dans } \ \Omega \\ \\ \gamma u_1 &= 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3.1}$$

et

$$\begin{cases} \Delta u_2 &= c\eta r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega}\theta \quad \text{dans } \ \Omega \\ \\ \gamma u_2 &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Soit u_2^* la solution de l'équation

$$\begin{cases} \Delta z &= r^{\frac{\pi}{\omega}} \sin \frac{\pi}{\omega}\theta \quad \text{dans } \ \Omega \\ \\ \gamma z &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors, il existe une constante $k(\omega)$ telle que

$$u_2^* = k(\omega) r^{\frac{\pi}{\omega}+2} \sin \frac{\pi}{\omega}\theta$$

On vérifie que $u_2^* \in H^3(\Omega)$ et $\gamma u_2^* = \gamma \Delta u_2^* = 0$

D'où

$$u_2^* \in V = \left\{ u \in H^3 \cap H_0^1(\Omega) \ / \ \gamma \Delta u = 0 \right\}$$

On a

$$\Delta(u_2 - u_2^*) = r^{\frac{\pi}{\omega}} (\eta - 1) \sin \frac{\pi}{\omega}\theta$$

qui a son support dans la partie régulière de Ω.

Soient $(S_i)_i$ les parties singulières de la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta\varphi = h & \text{dans } \Omega \\ \gamma\varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où h, φ sont dans V et $H^3(\Omega)$ respectivement.
Alors u_1 et $u_2 - u_2^*$ vont s'écrire

$$u_1 = u_{1R} + \sum_{i=1}^{i=N} c_1^i S_i \quad \text{et} \quad u_2 - u_2^* = u_{2R} + \sum_{i=1}^{i=N} c_2^i S_i$$

Où u_{1R}, u_{2R} sont dans $H^4(\Omega) \cap V$

Donc les parties singulières de u solution de (E') vont être u_2^* et S_i.

Cherchons S_i sous la forme $r^\alpha \Psi(\theta)$, $\theta \in]0, \omega[$ et S_i solution de

$$\begin{cases} \Delta^2 S_i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \gamma S_i = \gamma\Delta S_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On trouve $S_i = u_2^*$
En définitive, les solutions singulières de (E) se résument à u_2^* et donc

$$u = u_R + cr^{2+\frac{\pi}{\omega}} \sin \tfrac{\pi}{\omega}\theta\eta \;\; ; \;\; u_R \in H^4(\Omega) \cap V$$

On suppose maintenant que $\omega = 2\pi$ (Ω fissuré). Alors on à la proposition suivante

proposition 2.3.4. *K-Fall : Si l'ouvert Ω est fissuré, le coefficient de singularité de la solution u du problème (E) peut être représenté sous la forme*

$$c = -\frac{3}{4x_0\pi}\left(\int_\Omega gG_1 dx + \int_\Omega G_0 u dx\right)$$

où G_0 et G_1 sont, à l'image de la proposition 1.2.2, fonction de x, s et x_0.

2.3.2 Représentation du coefficient de singularité

On fait l'hypothèse $\omega = 2\pi$ (domaine fissuré).

On rappelle que le système d'optimalité est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} (y^*)' - \Delta y^* = f + u^* \\ (p^*)' + \Delta p^* = y_d - y^* \\ u^* = -\dfrac{p^*}{\varepsilon} \\ y^*_\Sigma = p^*_\Sigma = 0 \\ p^*(x, T; u^*) = 0 \ ; \quad y^*(0) = y_0 \end{array} \right. \tag{2.3.3}$$

En remplaçant u^* par $-\dfrac{p^*}{\varepsilon}$ dans la première équation, on constate que y^* vérifie

$$(y^*)'' - \Delta^2 y^* - \frac{y^*}{\varepsilon} = y_d - f' - \Delta f$$

L'équation stationnaire correspondante est du type (E), donc la solution y^* s'écrit

$$y^*(t) = y^*_R(t) + c(t)\eta r^{\frac{5}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$$

où

$$y^*_R \in L^2(0, T; H^4(\Omega) \cap V)$$

Soit $(\psi_k(t))_k$ la base Hilbertienne de $L^2(0, T)$ définie au chapitre 1 page 11 . Alors on a le résultat suivant

proposition 2.3.5. *Si l'ouvert Ω est fissuré, le coéfficient de singularité $c(t)$ de y^* s'écrit, pour tout $t \in]0, T[$*

$$c(t) = -\frac{3}{4x_0\pi}\left\{ \int_\Omega (G_0(y_d - f' - \Delta f) + G_1 y^*)dx + \right.$$

$$\left. -\frac{2}{T}\sum_{k\geq 1} \frac{k\pi}{T} sin\frac{k\pi}{T} \int_\Omega \int_0^T G_1(f + u^* + \Delta(y^*)) cos\frac{k\pi}{T} dtdx \right\}$$

Preuve

D'aprés la proposition (2.3.4),

$$c(t) = -\frac{3}{4x_0\pi}\left[\int_\Omega (g-y'')G_1dx + \int_\Omega G_0ydx\right]$$

En utilisant la base Hilbertienne $(\psi_k(t))_{k\geq 1}$ définie au chapitre 1 page on a :

$$c(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\psi_k(t) \quad \text{où} \quad c_k = \int_0^T c(t)\psi_k(t)dt$$

$$\begin{aligned} c_k &= -\tfrac{3}{4x_0\pi}\left[\int_0^T(\int_\Omega(g-y'')G_1dx + \int_\Omega G_0ydx)dt\right] \\ &= -\tfrac{3}{4x_0\pi}\left[\int_0^T\int_\Omega \psi_k gG_1dxdt + \int_0^T\int_\Omega \psi_k G_0ydxdt\right. \\ &- \left.\int_\Omega\int_0^T \psi_k G_1y"dtdx\right]. \end{aligned}$$

Or

$$\int_\Omega\int_0^T \psi_kG_1(y^*)"dxdt = \int_\Omega\int_0^T \psi_k'G_1(y^*)'dxdt$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} c(t) &= -\frac{3}{4x_0\pi}\left[\int_\Omega(G_0g+G_1y^*)dx\right. \\ &\left.-\int_\Omega\left(G_0\sum_{k=1}^{+\infty}\psi_k(t)\int_0^T\psi_k'(t)(y^*)'dt\right)dx\right] \end{aligned}$$

d'où la proposition en remplaçant $\psi_k(t)$ par $\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{k\pi}{T}t$ et $y^{*\prime}$ par $f+u^*+\Delta y^*$

2.3.3 Approximation du coefficient de singularité

On donne, comme dans le cas du chapitre précèdent une majoration de l'erreur d'approximation du coéfficient de singularité par des sommes partielles.Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit

$$\begin{aligned} c_n(t) &= -\frac{3}{4x_0\pi}\left[\int_\Omega(G_0(y_d-f'-\Delta f)+G_1y^*)dx+\right. \\ &\left.-\frac{2}{T}\sum_{k\geq n}\frac{k\pi}{T}sin\frac{k\pi}{T}\int_\Omega\int_0^T G_1(f+u^*+\Delta y^*)cos\frac{k\pi}{T}dtdx\right]; \end{aligned}$$

Alors on a le résultat de convergence suivant

proposition 2.3.6. *Pour tout réel $s > 0$, $c_n(t)$ converge vers $c(t)$ dans $H^{-\frac{\pi}{2\omega}-s}(]0,T[)$ pour presque tout $t \in [0,T]$ et on a l'estimation*

$$\|c_n(t) - c(t)\|_{H^{-\frac{\pi}{2\omega}-s}(]0,T[)} \leq \frac{K + \|u^*\|}{n^s}$$

où K est une constante positive qui dépend de G_1, y_0 et f.

preuve

La preuve est identique a celle de la proposition (1.2.5) du chapitre 1

$$\begin{aligned}\|c_n(t) - c(t)\|^2_{H^{-\frac{\pi}{2\omega}-s}(]0,T[)} &= \textstyle\sum_{k\geq n} \alpha_k^{-2s-\frac{\pi}{\omega}} \left\{\int_\Omega \int_0^T G_1(f + u^* + \Delta y^*)\right\}^2 dtdx. \\ &\leq \|G_1\|^2_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\alpha_k^{2s}} \textstyle\sum_{k>n} \alpha_k^{1-\frac{\pi}{\omega}} \int_\Omega \left(\int_0^T \frac{\psi_k'(t)}{\sqrt{\alpha_k}}(f + u^* + \Delta y^*)dt\right)^2 dx\end{aligned}$$

Avec les estimations de la proposition(1.2.1) on trouve

$$K = c(T,s)\|G_1\|(\|f\| + \|y_0\|)$$

remarque 2.3.7. 1) y^* a la régularité $H^{\frac{7}{2}+\alpha}(\Omega)$

2) On a des singularités et une régularité du même type pour l'état adjoint p^* et donc, avec $u^* = -\frac{1}{\varepsilon}p^*$, on trouve un contrôle optimal dans $H^{\frac{7}{2}+\alpha}(\Omega)$.

Chapitre 3

Contrôlabilité exacte de l'équation des plaques vibrantes

Introduction

On considère Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$ et T un réel strictement positif. La contrôlabilité exacte de l'équation des plaques vibrantes consiste pour tous couples (y_0, y_1) et (z_0, z_1) appartenant à un espace à determiner, à trouver des contrôles u et v telles que si y est solution du problème

$$(P)\begin{cases} y" + \Delta^2 y & = & 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[\\ \gamma y & = & u \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\times]0,T[\\ \gamma\,\dfrac{\partial y}{\partial\nu} & = & v \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\times]0,T[\\ y(0) & = & y_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ y'(0) & = & y_1 \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases}$$

Alors à l'instant T, on a

$$(E)\begin{cases} y(T) & = & z_0 \\ y'(T) & = & z_1. \end{cases}$$

Etant donné la linéarité des problèmes (P) et (E), il suffit de prendre $z_0 = z_1 = 0$.

Dans ce chapitre, on considère deux variantes du problème (P) ; le cas $u = 0$ et le cas $v = 0$.
Pour ces deux cas, J.-L.Lions [2] a établit, pour certains types de données initiales des équivalences de normes (qui sont à la base de sa méthode H.U.M) donnant la contrôlabilité éxacte à partir d'un temps T supérieur à une valeur T_0 fixée.
E Zuazua [9] a aussi établit les mêmes résultats de contrôlabilité éxacte à partir d'un temps arbitrairement petit.
Dans ce chapitre, on définit les mêmes types d'équivalences de normes avec des conditions initiales dans des espaces peu réguliers. On donne ensuite, par interpolation les mêmes estimations dans les espaces intermédiares et les résultats de contrôlabilité exactes correspondants.

3.1 Notations et rappels

3.1.1 Notations

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et $T > 0$. Pour $x^0 \in \mathbb{R}^2$ avec $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$ on définit la fonction $m(x) = x - x^0$ et une partition de la frontière $\Sigma = \partial\Omega\times]0,T[$ de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \{x \in \Gamma / m(x).\nu(x) > 0\}, \\
\Gamma_0^* &= \{x \in \Gamma / m(x).\nu(x) < 0\}, \\
\Sigma_0 &= \Gamma_0\times]0,T[, \\
\Sigma_0^* &= \Gamma_0^*\times]0,T[.
\end{aligned}
$$

On introduit aussi les constantes

$$
R(x^0) = \max_{u\in\overline{\Omega}}\left(\sum_{k=1}^{k=2}(x_k - x_k^0)^2\right)^{\frac{1}{2}}
$$

et

$$
T_0 = \frac{R(x^0)}{\lambda_0},
$$

où λ_0^2 est la première valeur propre du problème

$$\begin{cases} \Delta^2 w = \lambda^2 \, w \quad \text{dans } \Omega \\ \\ \qquad w \in H_0^2(\Omega) \end{cases}$$

En fin on note par $\nu(x)$ la normale extérieure à Γ au point x.

3.1.2 Rappels

Soit u la solution de l'équation

$$(E') \begin{cases} u" + \Delta^2 u &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[\\ \gamma u &= 0 \\ \gamma \, \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \\ u(0) &= u_0 \\ u'(0) &= u_1 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

avec u_0 et u_1 appartenant à des espaces à préciser.
Si $u_0 \in H_0^2(\Omega)$ et $u_1 \in L^2(\Omega)$, On définit l'énergie associée à (3.1) par

$$E_0 = \frac{1}{2}(||\Delta u_0||^2_{L^2(\Omega)} + ||u_1||^2_{L^2(\Omega)})$$

J.-L. Lions[2] a établi l'inégalité directe

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\Delta u)^2 \, d\sigma dt \leq c_0 E_0 \tag{3.1.2}$$

et l'inégalité inverse

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\Delta u)^2 d\sigma dt \geq c(T) E_0 \tag{3.1.3}$$

pour $T \geq T_0$, où

$$c(T) = \frac{4}{R(x^0)}(T - T_0)$$

Soit l'opérateur non borné A de $L^2(\Omega)$ définie par :
$D(A) = \{u \in H_0^2(\Omega)/\Delta^2 u \in L^2(\Omega)\}$ et $Au = \Delta^2 u$ pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$.
Soit u La solution de (3.1.1) correspondante aux données initiales $u_0 \in D(A^{\frac{3}{4}})$ et $u_1 \in D(A^{\frac{1}{4}})$. Si en plus l'ouvert Ω est étoilé on a, dans R-Triggiani-I.Lasiecka[10], pour tout $T > T_0$ les inégalités suivantes :

$$c_0(T - T_0)E_{\frac{3}{4}} \leq \int_\Sigma |\gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}|^2 d\sigma dt \tag{3.1.4}$$

et

$$\int_\Sigma |\gamma \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu}|^2 d\sigma dt \leq c_1(T + 1)E_{\frac{3}{4}}. \tag{3.1.5}$$

où $E_{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left\{\|A^{\frac{3}{4}}u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A^{\frac{1}{4}}u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}^{\frac{1}{2}}$ est l'énergie associée, c_0 et c_1 sont des constantes qui ne dépendent que de Ω.
De ces inégalités, découle le théorème d'unicité suivant :

Théorème 3.1.1. *La solution u du problème*

$$\begin{cases} u" + \Delta^2 u &= 0 \quad dans \quad \Omega\times]0,T[\\ \gamma u &= 0 \quad sur \quad \Sigma \\ \gamma \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad sur \quad \Sigma \\ \gamma \Delta u &= 0 \quad sur \quad \Sigma_0 \end{cases}$$

vérifie $\Delta u = 0$ sur Σ.

On rappelle le théorème de régularité du bilaplacien suivant :

Théorème 3.1.2. *Soit $u \in H^4(\Omega)$ la solution du probléme*

$$\begin{cases} \Delta^2 u &= f \quad dans \quad \Omega, \\ \gamma u &= g \quad sur \quad \Gamma \\ \gamma \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= h \quad sur \quad \Gamma, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{7}{2}}(\Gamma)$ *et* $h \in H^{\frac{5}{2}}(\Gamma)$.
Alors, on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{H^4(\Omega)} \leq c(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{7}{2}}(\Gamma)} + \|h\|_{H^{\frac{5}{2}}(\Gamma)})$$

où c est une constante positive.

3.2 Contrôle portant sur la dérivée normale

3.2.1 Définition de normes

proposition 3.2.1. *Pour tout* $\theta \in [0,1]$, *la solution* φ *de l'équation homogène* (E'), *correspondant aux données initiales* $(\varphi_0, \varphi_1) \in \left(H_0^{2-2\theta}(\Omega) \times H^{-2\theta}(\Omega)\right)$ *vérifie, pour tout* $T > T_0$ *l'inégalité*

$$\int_0^T \|\gamma\Delta\varphi\|^2_{H^{-\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0)} \geq K\left\{\|\varphi_0\|^2_{H_0^{2-2\theta}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2\theta}(\Omega)}\right\} \tag{3.2.1}$$

Preuve
Soit $(\varphi_0, \varphi_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$. On considère le problème

$$\varphi'' + A\varphi = 0, \; \varphi(0) = \varphi_0, \; \varphi'(0) = \varphi_1.$$

Ce problème admet une solution unique donnée par $(\varphi(t), \varphi'(t)) = S_1(t)(\varphi_0, \varphi_1)$ où $\{S_1(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est le $\mathcal{C}_0$ goupe unitaire sur $L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ généré par A.
Posons

$$\psi = A^{-1}\varphi', \;\; \psi_0 := A^{-1}\varphi_1 \in H_0^2(\Omega), \;\; \psi_1 := -\varphi_0 \in L^2(\Omega).$$

alors ψ vérifie

$$\psi'' + A\psi = 0 \;\;, \; \psi(0) = \psi_0, \; \psi'(0) = \psi_1$$

Aussi ce problème a une unique solution donnée par $(\psi(t), \psi'(t)) = S_2(t)(\psi_0, \psi_1)$ où $\{S_2(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathcal{C}_0$ groupe unitaire sur $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ généré par A.
Pour $T > T_0$, on applique l'inégalité (3.1.2) à ψ, ce qui donne l'estimation

$$(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2}(\Omega)} \leq C_T \int_{\Sigma_0} |\gamma\Delta A^{-1}\varphi'|^2 d\Sigma. \tag{3.2.2}$$

Pour $\varepsilon \geq 0$ suffisamment petit (tel que $T - 2\varepsilon - T_0 > 0$) , on définit la fonction $\varphi_\varepsilon \in D(R)$ vérifiant :
i) $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$,
ii) $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset]0, T[$
iii) $\varphi_{\varepsilon|[\varepsilon, T-\varepsilon]} = 1$.
En multipliant par φ_ε et en intégrant par partie on obtient :

$$\begin{aligned}(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2}(\Omega)}) &\leq -C_T \int_{\Sigma_0} [\varphi_\varepsilon'(\gamma\Delta A^{-1}\varphi'(\gamma\Delta A^{-1}\varphi) + \varphi_\varepsilon(\gamma\Delta A^{-1}\varphi")(\gamma\Delta A^{-1}\varphi)]d\Sigma \\ &\leq C_T \int_{\Sigma_0} [(\frac{1}{2})\varphi"|\gamma\Delta A^{-1}\varphi|^2 + \varphi_\varepsilon(\gamma\Delta\varphi)(\gamma\Delta A^{-1}\varphi)]d\Sigma.\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (3.1.1) on obtient

$$\int_{\Sigma_0} \varphi_\varepsilon"|\gamma\Delta A^{-1}\varphi|^2 d\Sigma \leq C_T(\|A^{-1}\varphi_0\|^2_{H_0^2(\Omega)} + \|A^{-1}\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}) \leq C_T(\|\varphi_0\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_A})$$

où D'_A est le dual de D_A dans $L^2(\Omega)$.
En appliquant l'inégalité de Young, on a, pour δ positif quelconque

$$\int_{\Sigma_0} \varphi_\varepsilon(\gamma\Delta\varphi)(\gamma\Delta A^{-1}\varphi)d\Sigma \leq C(\frac{1}{\delta}\|\gamma\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0))} + \delta\|\gamma\Delta A^{-1}\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0))}).$$

Or

$$\gamma A^{-1}\varphi = \gamma\frac{\partial}{\partial\nu}A^{-1}\varphi = 0$$

. Donc par le théorème (3.1.2) donnant la régularité du bilaplacien, on a

$$\begin{aligned}\|\gamma\Delta(A^{-1}\varphi)\|^2_{L^2(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0))} &\leq C_T\|\Delta^2(A^{-1}\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq C_T\|\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)} \leq C_T(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2}(\Omega)}).\end{aligned}$$

En choisissant $\delta = \delta_T$ suffisamment petit, on obtient

$$(\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2}(\Omega)}) \leq C_T[(\|\varphi_0\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_A}) + \|\gamma\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0))}] \quad (3.2.3)$$

Il reste maintenant à montrer que

$$(\|\varphi_0\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_A}) \leq C_T\|\gamma\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0))} \quad (3.2.4)$$

En effet, supposons qu'il éxiste une suite$(\varphi_n)_n$ solution de

$$\varphi_n^" + A\varphi_n = 0,\ \varphi_n(0) = \varphi_{0,n},\ \varphi_n^{'} = \varphi_{1,n}$$

où $(\varphi_{0,n}, \varphi_{1,n}) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ et vérifiant

$$(\|\varphi_{0,n}\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + \|\varphi_{1,n}\|^2_{D'_A}) = 1 \text{ et } \|\gamma\Delta\varphi_n\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0))} \longrightarrow 0$$

Alors avec(6), $(\varphi_{0,n}(t), \varphi_{1,n}(t))$ est bornée dans $L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$.
Quitte à extraire une sous suite, on a

$$(\varphi_{0,n}, \varphi_{1,n}) \longrightarrow (\varphi_0, \varphi_1) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$$

comme l'injection de $L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ dans $H^{-2}(\Omega) \times D'_A$ étant compacte,

$$(\varphi_{0,n}, \varphi_{1,n}) \longrightarrow (\varphi, \varphi^{'}) \text{ fortement dans } H^{-2}(\Omega) \times D'_A$$

Donc

$$\|\varphi_0\|^2_{H^{-2}(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_A} = 1 \tag{3.2.5}$$

Soit φ la solution correspondante à φ_0 et φ_1. On a

$$\|\gamma\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0))} = 0$$

et φ est solution de

$$\varphi^" + \Delta^2\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Sigma,\quad \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \Sigma_0$$

alors, par un théorème d'unicité classique $\varphi \equiv 0$ sur Σ. Ce qui contredit (3.2.5).
Ainsi il existe une constante C_T telle que

$$\int_0^T \|\gamma\Delta\varphi\|^2_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_0)}\, dt \geq C_T \left\{\|\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2}(\Omega)}\right\}. \tag{3.2.6}$$

Les inégalités (3.1.2) et (3.2.6) donne par interpolation, pour tout $\theta \in [0, 1]$ et des données initiales $(\varphi_0, \varphi_1) \in \left(H_0^{2-2\theta} \times H^{-2\theta}(\Omega)\right)$

$$\int_0^T \|\gamma\Delta\varphi\|^2_{H^{-\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0)} \geq K\left\{\|\varphi_0\|^2_{H_0^{2-2\theta}} + \|\varphi_1\|^2_{H^{-2\theta}}\right\}. \tag{3.2.7}$$

3.2.2 Contrôlabilité exacte

On note par Δ_Γ l'opérateur de Laplace Beltrami.
Une conséquence de l'inégalité (3.2.7) est le théorème de contrôlabilité exacte suivant :

Théorème 3.2.2. *Il existe un temps T_0 tel que, si $T > T_0$, alors , pour tout $\theta \in [0,1]$ et tout couple de données initiales $(y_0, y_1) \in \left(H_0^{2\theta} \times H^{2\theta-2}(\Omega)\right)$, il existe $v \in L^2(0,T; H^{-\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0)$ tel que, si y est la solution de*

$$\begin{cases} y" + \Delta^2 y &= 0 \quad dans \quad \Omega\times]0,T[\\ \gamma y &= 0 \quad sur \quad \Gamma_0^* \\ \gamma\,\dfrac{\partial y}{\partial \nu} &= (-\Delta_\Gamma)^{-\frac{3}{2}\theta} v \ sur\ \Gamma_0 \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1 \end{cases}$$

vérifit y(T)=y'(T)=0

Preuve

On applique la méthode HUM de J.-L.LIONS [1]
On part de $\varphi_0 \in H_0^{2-2\theta}(\Omega)$, $\varphi_1 \in H^{-2\theta}(\Omega)$.
Soit $\varphi \in C\left(0,T; H_0^{2-2\theta}(\Omega)\right) \cap C^1\left(0,T; H^{-2\theta}(\Omega)\right)$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \varphi'' + \Delta^2\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \varphi'(0) = \varphi_1 \\ \gamma\varphi = \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \end{cases}$$

Soit ξ l'unique solution par transposition de l'équation

$$\begin{cases} \xi'' + \Delta^2\xi &= 0 \ \text{ dans }]0,T[\times\Omega, \\ \xi(T) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \xi'(T) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \gamma\xi &= 0 \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ \gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\xi &= z \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \end{cases}$$

où $z \in L^2(0,T;H_0^{\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0))$.

En posant $v = \gamma\Delta\varphi$ et en prenant $z = (-\Delta_\Gamma)^{-\frac{3}{2}\theta} v$, on a

$$\xi \in C(0, H_0^{2\theta}(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^{2\theta-2}(\Omega)) \quad \text{et} \quad \xi(0) \in H^{2\theta}(\Omega),\ \xi'(0) \in H^{2\theta-2}(\Omega).$$

Soit F_θ le complété de $\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\|(\varphi_0,\varphi_1)\|_{F_\theta}^2 = \int_0^T \|\gamma\Delta\varphi\|_{H^{-\frac{3\theta}{2}}(\Gamma_0)}^2 dt$ on définit l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} \wedge : F_\theta & \longmapsto & F_\theta' \\ (\varphi_0,\varphi_1) & \longmapsto & (\xi'(0); -\xi(0)). \end{array}$$

On vérifie que

$$\langle \wedge(\varphi_0,\varphi_1), (\varphi_0,\varphi_1)\rangle_{F_\theta,F_\theta'} = \int_\Sigma \langle (-\Delta_\Gamma)^{-\frac{3}{2}\theta} v, v\rangle_{H_0^{\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0), H^{-\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0)} d\sigma dt = \|v\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{3}{2}\theta}(\Gamma_0))}$$

et que $\wedge$ est un isomorphisme.Donc pour tout $T > T_0$ et pour tout $(y_0,y_1) \in F_\theta'$, il existe un $(\varphi_0,\varphi_1) \in F_\theta$ tel que $\wedge(\varphi_0,\varphi_1) = (y_1,-y_0)$.
Soient φ et ξ les fonctions définies précédemment avec $\xi_0 = y_0$ et $\xi_1 = y_1$.
Grace à l'unicité de la solution, on a $y = \xi$. Donc $y(T) = y'(T) = 0$, ce qui prouve le théorème.

3.3 Contrôle de position

3.3.1 équivalence de normes

Dans ce paragraphe, on fait l'hypothèse géométrique Ω étoilé

proposition 3.3.1. *Pour tout $\theta \in [0,1]$ et des données initiales $(\varphi_0,\varphi_1) \in \left(D_{A^{\frac{3}{4}-\frac{\theta}{2}}} \times D_{A^{\frac{1}{4}-\frac{\theta}{2}}}\right)$ on a, pour tout $T > T_0$ l'inégalité*

$$\int_0^T \left\|\gamma\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu}\right\|^2_{H^{-\frac{\theta}{2}}(\Gamma_0)} \geq \alpha(T-T_0)\left\{\left\|A^{\frac{3}{4}-\frac{\theta}{2}}\varphi_0\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|A^{\frac{1}{4}-\frac{\theta}{2}}\varphi_1\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right\} \tag{3.3.1}$$

où α est une constante positive.

Preuve

La preuve est identique à celle de la proposition (3.2.1). Soit les données initiales $(\varphi_0,\varphi_1)\in D_{A^{\frac14}}\times D_{A^{\frac{-1}{4}}}$ et le problème

$$\varphi'' + A\varphi = 0,\ \varphi(0)=\varphi_0,\ \varphi'(0)=\varphi_1.$$

Ce problème admet une solution unique donnée par

$$(\varphi(t),\varphi'(t)) = S_1(t)(\varphi_0,\varphi_1)$$

où $\{S_1(t) : t\in\mathbb{R}\}$ est le $\mathcal{C}_0$ goupe unitaire sur $D_{A^{\frac14}}\times D_{A^{\frac{-1}{4}}}$ généré par A.
Posons $\psi = A^{-1}\varphi'$, $\psi_0 := A^{-1}\varphi_1$, $\psi'(0)=\psi_1 := -\varphi_0$ .Alors ψ vérifie

$$\psi'' + A\psi = 0,\ \psi(0)=\psi_0\in D_{A^{\frac34}},\ \psi'(0)=\psi_1\in D_{A^{\frac14}}.$$

Ce problème a une unique solution donnée par

$$(\psi(t),\psi'(t)) = S_2(t)(\psi_0,\psi_1)$$

où $\{S_2(t) : t\in\mathbb{R}\}$ est un $\mathcal{C}_0$ groupe unitaire sur $D_{A^{\frac34}}\times D_{A^{\frac14}}$.
Pour $T>T_0$, on a en utilisant l'estimation (3.1.3)

$$(\|A^{\frac14}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A^{\frac{-1}{4}}\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_T\int_{\Sigma_0}|\gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta A^{-1}\varphi'|^2 d\Sigma. \qquad (3.3.2)$$

En multipliant par φ_ε et en intégrant par partie on obtient :

$$(\|A^{\frac14}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A^{\frac{-1}{4}}\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_T\int_{\Sigma_0}[(\frac12)\varphi''|\gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta A^{-1}\varphi|^2 + \varphi_\varepsilon(\gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta\varphi)(\gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta A^{-1}\varphi)]d\Sigma.$$

En utilisant l'estimation (3.1.3) on obtient

$$\int_{\Sigma_0}\varphi_\varepsilon''|\ \gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta A^{-1}\varphi\|^2 d\Sigma \le C_T(\|A^{-\frac14}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_{A^{\frac33}}}$$

où $D'_{A^{\frac34}}$ est le dual de $D_{A^{\frac34}}$ dans $L^2(\Omega)$.
En appliquant l'inégalité de Young et en utilisant l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\|\gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{\frac12}(\Gamma_0))} &\le C\|\Delta A^{-1}\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Gamma_0))}\\ &\le \|\varphi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C_T(\|A^{\frac14}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A^{-\frac14}\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

on a

$$(\|A^{\frac{1}{4}}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A^{-\frac{1}{4}}\varphi_1\|^2_{L^2(\Omega)}) \leq C_T[(\|A^{-\frac{1}{4}}\varphi_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{D'_{A^{\frac{3}{4}}}}) + \quad (3.3.3)$$

$$+\|\gamma\frac{\partial}{\partial\nu}\Delta\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0))}] \quad (3.3.4)$$

Par un raisonnement par compacité ($D_{A^{\frac{1}{4}}} \times D_{A^{-\frac{1}{4}}} \subset D_{A^{-\frac{1}{4}}} \times D'_{A^{\frac{3}{4}}}$ avec injection compacte), on a pour des données initiales $\varphi_0 \in D_{A^{\frac{1}{4}}}$
et $\varphi_1 \in D_{A^{-\frac{1}{4}}}$.La solution φ du problème de (E) correspondant à ces données vérifie

$$\int_0^T \left\|\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu}\right\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \geq C_T\left\{\left\|A^{\frac{1}{4}}\varphi_0\right\|^2 + \left\|A^{-\frac{1}{4}}\varphi_1\right\|^2\right\} \quad (3.3.5)$$

et on obtient , par interpolation, pour tout $\theta \in [0,1]$ et des données initiales $(\varphi_0,\varphi_1) \in \left(D_{A^{\frac{3}{4}-\frac{\theta}{2}}} \times D_{A^{\frac{1}{4}-\frac{\theta}{2}}}\right)$ l'inégalité

$$\int_0^T \left\|\gamma\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\nu}\right\|^2_{H^{-\frac{\theta}{2}}(\Gamma_0)} \geq C_T\left\{\left\|A^{\frac{3}{4}-\frac{\theta}{2}}\varphi_0\right\|^2 + \left\|A^{\frac{1}{4}-\frac{\theta}{2}}\varphi_1\right\|^2\right\}. \quad (3.3.6)$$

3.3.2 Contrôlabilité exacte

Une conséquence de la proposition 3.3.1 est le théorème suivant :
Théorème 3.3.2. *Soit $T > T_0$, soient $y_0 \in D_{A^{-\frac{1}{4}+\frac{\theta}{2}}}$ et $y_1 \in D_{A^{-\frac{3}{4}+\frac{\theta}{2}}}$. Il existe $v \in L^2(0,T;H^{-\frac{\theta}{2}}(\Gamma_0))$ tel que , si y est l'unique solution de l'équation*

$$\begin{cases} y'' + \Delta^2 y &= 0 \quad dans \quad]0,T[\times\Omega \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1 \\ \gamma y &= (-\Delta_\Gamma)^{-\frac{\theta}{2}} v \ sur \ \Sigma_0 \\ \gamma\frac{\partial}{\partial\nu}y &= 0 \ sur \ \Sigma_0^* \end{cases}$$

Alors , $y(T) = y'T) = 0$.

Preuve
On applique HUM [2].

Bibliographie

[1] P.Grisvard : Singularities in boundery values problems, RMA Masson 1988.

[2] J L Lions : Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation de systèmes distribués, Tome 1 RMA Masson 1988

[3] J L Lions : Contrôles optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivès particlles; Dunod, Paris 1968,

[4] J L Lions : Contrôles des systèmes distribués singuliers,BORDAS, Paris, 1983.

[5] M.A.Moussaoui et B.K.Saddalah : Régularitédes coefficients de propagation de singularité pour l'équation de la chaleur dans un ouvert polygonal plan; C.R.Acad.sc.Paris, t.293(12 oct 1981)

[6] M.T.Niane et Abdou Sène : Nouvelle méthode de calcul du coefficient de singularité pour l'équation de Laplace; à paraitre,

[7] M.T.Niane : Contrôlabilité exacte de l'équation des ondes pour des données initiales dans des espaces de Sobolev à puissance fractionnaire; à paraitre.

[8] M.T.Niane : Contrôlabilité exacte de l'équation des plaques vibrantes dans un polygone CRAS Paris, t.307, serie 1,p.517-521, 1988.

[9] E Zuazua : Contrôlabilité exacte de quelques modèles de plaques vibrantes en un temps arbitrairement petit; annexe 1 de [2].

[10] R.Triggiani-I.Lasiecka : Exact contrôllabillity of the Euler-Bernouilli equation with L_2 control in the Dirichlet boundary condition; Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei,Roma, Italy; Classe Sci. Fis. Matem. LXXX (1988).

[11] K Fall; Thèse doctorat troisième cycle; en préparation.