UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

THESE DE DOCTORAT DE 3ème CYCLE
SPECIALITE : GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Contribution à l'Etude des sous-variétés de l'espace de Minkowski de dimension 3

Présententée et soutenue publiquement
le 15 juillet à 10 heures 2000 à l'Amphi 7.

par
Athoumane NIANG

Sous la direction des professeurs
Chérif Badji et Jacques Lafontaine

Devant le jury composé de

Président : Chérif BADJI	Professeur UCAD
Membres : Jacques LAFONTAINE	Professeur Université Montpellier II
El Hadji Cheikh MB. DIOP	Maître-assistant UCAD
Juma SHABANI	Professeur Université du Burundi
Mamadou SANGHARE	Maître de Conférencxe UCAD
Magatte THIAM	Maître-assistant UCAD

Je dédie ce travail mon fils Mouhamadou Lamine Niang

Remerciements

Je tiens à remercier mon Maître Jacques Lafontaine et à travers lui tous mes enseignants.

Je tiens à remercier mon Maître Chérif Badji qui m'a ouvert la voie.

Je tiens à remercier l'équipe de Géométrie Différentielle de Dakar et à travers elle toute la grande famille universitaire.

Je remercie également les secrétaires du Département de Mathématiques et Informatiques Mesdames Marième Soda Diouf Ndiaye et Seynabou Ndiaye Mbaye ainsi que Mademoiselle Yacine Cissé qui ont bien voulu faire l'ingrate tâche de taper un texte mathématique.

INTODUCTION

Ce travail comporte deux chapitres qu'on peut lire indépendamment.

1) - Au chapitre I on étudie la géométrie des courbes nulles (ou isotropes) d'un espace de Minkowsi . Pour cela nous avons d'abord présenté des préliminaires algébriques utiles pour étudier les espaces semi-Euclidien et leurs sous-espaces. En particulier,nous présentons les bases quasi-orthonormales adaptées aux sous-espaces dégénérés. Elles constituent l'outil de base qui permet définir les trièdes de Frenet et les équations de Frénet. Avec ces équations nous donnerons un théorème d'existence et d'unicité pour les courbes nulles d'un espace de Minkowski de dimension $m+2$; $(m \geq 1)$ (voir théorème 1.3.3).

2) - Au chapitre II nous exposons le principal résultat de notre thése. C'est le théoréme (2.1.1) : nous classiffions les surfaces réglées non-dégénérées minimales de l'espace de Minkowski ou Euclidien de dimension 3 orienté. On trouve des analogues proprement riemanniennes et lorentziennes de l'hélicoide. Mais aussi des exemples qui n'ont pas d'analogues euclidiens. Il s'agit de cylindres qui ne sont pas planes et à génératrices isotropes (alors que dans l'espace Euclidien tout cylindre minimale est un morceau de plan), et d'autres surfaces réglées sans points plats ne possédant pas de ligne de striction, affinement congruent à la surface de Cayley.
Pour établir ce résultat nous rappelons dans le chapitre II la théorie locale des surfaces (non-dégénérées) dans la l'espace de Minkowski de dimension 3.

Chapitre 1

SUR LA GEOMETRIE DES COURBES NULLES

1.1 Préliminaires

1.1.1 Espace Vectoriel Semi-euclidien

Généralités

Nous désignons par V est un espace vectoriel réel de dimension m. Soit $g : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symmétrique sur V. Alors on a les notions suivantes.

- g est dit non-dégénérée si :

$$g(X, v) = 0, \forall v \in V \ \Rightarrow X = 0.$$

- g est dite dégénérée s'il existe un vecteur $v \in V,\ v \neq 0$ tel que $g(v, w) = 0\ \forall w$.

Il faut noter qu'un sous-espace de V peut etre dégénéré ou non.

- Le sous-espace de V qu'on note $RadV$ ([1])est défini par :

$$RadV = \{v \in V :\ g(v, w) = 0\ \forall\ w \in V\}.$$

La dimension de $RadV$ est appelé de degré de nullité de V ou de g , on la note $nullV$. En particulier on a

$$\begin{cases} \text{g est dégénérée} \Leftrightarrow nullV > 0. \\ \text{g est non-dégénérée} \Leftrightarrow nullV = 0. \end{cases}$$

- g est définie positive (négative) sur V si $g(v, v) > 0$ $(g(v, v) < 0)$ pour $v \neq 0$. Si $g(v, v) \geq 0$ $(g(v, v) \leq 0)$ et qu'il existe $u \in (V - \{0\}), g(u, u) = 0$, alors on dit que g est semi-définie positive (négative).

- Si W est un sous-espace vectoriel de V alors g restreint à $W, g : W \times W \to \mathbb{R}$ est encore une forme bilinéaire symmétrique. On définit l'indexe de g note $indV$ le plus grand entier dimension d'un sous-espace de V sur lequel g est définie négative.

- Désignons par h la forme quadratique associée à g : $h(v) = g(v, v),\ \forall v \in V$. Alors on a

$$g(v, w) = \frac{1}{2}\{h(v + w) - h(v) - h(w)\}\ \forall\ v, w \in V.$$

D'après un résultat d'algèbre linéaire bien connu, il existe une base $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m\}$ de V dans laquelle h prend la forme suivante :

$$h(v) = \sum_{i}^{m} a_i (v^i)^2 \text{ pour } v = \sum_{i}^{m} v^i e_i \in V \tag{1.1}$$

où $a_i \in \mathbb{R}$.

De plus dans la forme donnée par 1.1 on a :
p coefficients a_i qui sont positifs, q coefficients a_i qui sont négatifs, et r coefficients a_i qui sont nuls. En particulier, on a $q = indV,\ r = nullV$. On dira que h est de type (p, q, r). En fait,il n'y a l'unicité de la base $\mathcal{B}$ dans laquelle h prend la forme 1.1, mais le type (p, q, r) de h est indépendant du choix la base.

Nous avons la proposition suivante

Proposition 1.1.1.

Soit h la forme quadratique de g qui est de type (p, q, r) sur V. Alors
(i) g est dégénérée (non-dégénérée) si et seulement si $r > 0 (r = 0)$.
(ii) g est définie positive (négative) si et seulement si $p = m (q = m)$.
(iii) g est semi-définie positive (semi-définie négative) si et seulement si $q = 0, p > 0, r > 0 (p = 0, q > 0, r > 0)$.

Soit $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e_1}, ..., \bar{e_m}\}$ une base quelconque de V, alors g est déterminée par une matrice $m \times m$, G, dans la base $\bar{\mathcal{B}}$:

$$G = [g_{ij}],\ g_{ij} = g(\bar{e_i}, \bar{e_j}),\ 1 \le i, j \le m.$$

G est la matrice associée à g dans la base $\bar{\mathcal{B}}$. Les bases $\bar{\mathcal{B}}$ dans lesquelles h prend la forme 1.1 peuvent se construire en cherchant les vecteurs propres de G correspondants et les a_i sont les valeurs propres de G. En particulier g est non-dégénérée (dégénérée) si $rangG = m, (rangG < m)$.

- Une forme biliaire symmétrique g non-dégénérée sur l'espace vectoriel réel V est appelé une métrique semi-Euclidienne, et (V, g) ou simplement V sera dit espace semi-Euclidien. V sera dit espace semi-Euclidien propre si $p.q \neq 0\ et\ r = 0$.

Considérons V un espace semi-Euclidien de métrique semi-Euclidienne g. On définit la norme d'un vecteur v par $||v|| = |g(v,v)|^{\frac{1}{2}}$. Un vecteur $v \in V$ est unitaire si sa norme vaut 1, c'est à dire si $g(v,v) = \pm 1$.
On définit le caractére causal d'un vecteur $v \in V$ de la manière suivante :
- v est de type espace si $g(v,v) > 0$ ou $v = 0$.
- v est de type temps ou temporel si $g(v,v) < 0$.
- v est nul ou isotrope si $g(v,v) = 0$et $v \neq 0$.

Le cone nul de V est défini par :

$$\bigwedge = \{v \in (V - 0), g(v,v) = 0\}.$$

Deux vecteurs v et w sont orthogonaux (notons $u \perp w$) si, $g(v,w) = 0$. De meme deux sous-espaces U et W de V sont orthogonaux (notons $U \perp W$) si $v \perp w, \ \forall (u,w) \in U \times W$.

- Une base $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m\}$ est dite orthonormée s'il les e_i sont unitaires et 2 à 2 orthogonaux.

Nous avons (voir dans [7])la proposition suivante.

Proposition 1.1.2. *Il existe une base orthonormée dans un espace vectoriel semi-Euclidien V.*

En particuleir, dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m\}$ d'un espace semi-Euclidien V de dimension m on a :

$$g(X,Y) = -\sum_{i=1}^{q} x^i y^i + \sum_{a=q+1}^{m} x^a y^a, \tag{1.2}$$

où (x^i) et (y^i) sont respectivement les coordonnées de X et Y dans la base $\mathcal{B}, q$ étant l'indexe de V.

Sous-espaces Dégénérés, non-Dégénérées

Nous allons maintenant énoncer la proposition **??** qui sera utilisée plusieurs fois dans la suite, en particulier pour construire des bases quasi-orthonormales adaptées aux sous-espaces dégénérés d'un espace semi-Euclidien.

Désignons par (W, g) un espace vectoriel réel de dimension n qui est dégénéré relativement à la forme bilinéaire symmétrique g. Alors nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.1.3. *Si* $nullW = r > 0$, *alors tout sous-espace supplémentaire de* $RadW$ *est non-dégénéré.*

■ Preuve
Notons SW un sous-espace supplémentaire à $RadW$ dans W. Puisque tout $v \in V$ est orthogonal à $RadW$, alors on écrira la décomposition suivante :

$$W = RadW \perp SW. \tag{1.3}$$

Supposons qu'il existe un vecteur $u \in SW$, avec $g(u, v) = 0, \quad \forall\, v \in SW$. D'après la décomposition 1.3 on a

$$g(u, X) = 0\, \forall\, X \in RadW;$$

et donc $u \in RadW$. Ce qui entaine que $u = 0$. Donc SW est non-dégénéré. ■
Nous sommes en mesure de donner la définition suivante.

Définition 1.1.4. *Un sous-espace* SW *supplémentaire à* $RadW$ *dans l'epace vectoriel dégénéré* (W, g) *sera appélé sous-espace écran ([1]).*

Remarque 1.1.5. *Comme* SW *est non-dégénéré relativement à* g, *alors* SW *est un espace vectoriel semi-Euclidien; et donc* SW *admet une base orthonormée* $\{u_{r+1}, ..., u_n\}$.. *Alors on construit la base* $\mathcal{B} = \{f_1, ..., f_r, u_{r+1}, ..., u_n\}$ *de* W *tel que* $RadW = Span\{f_1, ..., f_r\}$. *En particulier, dans la base* $\mathcal{B}$ *la matrice noté* $[g]$ *de* g *est :*

$$[g] = \begin{bmatrix} O_{r,r} & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & \varepsilon_i \delta_{ij} \end{bmatrix},$$

$i, j \in \{r + 1, ..., n\}$ $\varepsilon_i = g(u_i, u_i)$.

Nous allons énoncer une propositon (??) et son corrollaire (1.1.7) qui, en plus de la proposition 1.1.3, vont etre les principaux outils pour construire les bases quasi-orthonormales adaptées aux sous-espaces dégénérés des espaces vectoriels semi-Euclidiens ([1] et aussi [7]).

Proposition 1.1.6. *Soit* (V, g) *est espace vectoriel semi-Euclidien de dimension* m, *et soit* W *un sous-espace vectoriel de* V. *Alors on a*

$$dimW + dimW^{\perp} = m \;; \quad (W^{\perp})^{\perp} = W \;;$$
$$RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}.$$

Corollaire 1.1.7. *Soit* W *un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel semi-Euclidien* V, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(i) W *est non-dégénéré.*

(ii) $W^{\perp}$ est non-dégénéré.
(iii) W et $W^{\perp}$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonales dans V.

(iIV) V est une somme directe de W et $W^{\perp}$.

Nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.1.8. *Soit g une métrique semi-Euclidienne d'index q sur un espace vectoriel V de dimension m. Alors il existe un sous-espace W de V de dimension $min\{q, m-q\}$ au plus sur lequel g s'annule.*

■ Considérons une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, ...e_q, e_{q+1}, ..., e_{q+p}\}$ de V, $q + p = m$, et telle que les q vecteurs $e_1, ...e_q$ sont de type temps, et les $m - q = p$ vecteurs $e_{q+1}, ..., e_{q+p}$ de type espace. Alors on a

$$g(X,Y) = -\sum_{i=1}^{q} x^i y^i + \sum_{a=q+1}^{m} x^a y^a.$$

Supposons $q < m - q = p$. C'est à dire $2q < m$.
Définissons $W = Span\{u_1 = e_1 + e_{q+1}, ..., u_q = e_q + e_{2q}\}$. On vérifie que $g_{|W} = 0$ et on a $dimW = q$.
Maintenant supposons qu'il existe un vecteur isotrope $X = \sum_1^m x_i e_i$ tel que $g(X, u_i) = 0$, $\forall \ \in \{1, ..., q\}$. On a déduit que $x^1 = x^{q+1}, ..., x^q = x^{2q}$.
Ainsi, $g(X, X) = 0 \Rightarrow x^{2q+1} = ... = x^m = 0$. Finalement on a $X = x^1(e_1 + e_{q+1}) + ... + x^q(e_q + e_{2q})$. Ce qui veut dire que $X \in W$.
Donc il n'existe pas un sous-espace contenant W sur lequel g s'annule lorsque $2q < m$.
De manière analogue, en supposant $2q \geq m$, c'est à dire $q \geq m - q$, on prend

$$W = Span\{u_1 = e_1 + e_{q+1}, ..., u_{m-q} = e_{m-q} + e_m\}.\blacksquare$$

Bases Quasi-Othonormales

Désignons par (V, g) un espace semi-euclidien propre de dimension m et d'indexe q.
Nous allons commencer par contruire dans les trois cas typiques suivants des bases de V qui sont formées de vecteurs unitaires orthogonaux et de vecteurs isotropes orthogonaux aux premiers. Considérons pour cela une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_q, e_{q+1}, ..., e_{q+p}\}$ de V, $q + p = m$, et telle que les q vecteurs $e_1, ...e_q$ sont de type temps, et les $m - q = p$ vecteurs $e_{q+1}, ..., e_{q+p}$ de type espace. On distingue les trois cas suivants.

Cas I : (q < p = m - q)

On contruit les vecteurs suivants :

$$\begin{cases} f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{q+i} + e_i) \ ; \ f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{q+i} - e_i) \\ i \ \in \{1, ..., q\}; \end{cases} \tag{1.4}$$

ils vérifient

$$\begin{cases} g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, \\ g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, \\ i, j \in \ \{1, ..., q\}. \end{cases} \tag{1.5}$$

Alors on construit la base suivante de V, $\{f_1, ..., f_q, f_1^*, ..., f_q^*, e_{2q+1}, ..., e_{q+p}\}$ contenant $2q$ veceurs isotropes et $p - q$ vecteurs de type espace.

Cas II : (p < q = m - p)

On contruit les vecteurs suivants :

$$\begin{cases} f_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{p+a} + e_a) \ ; \ f_a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{p+a} - e_a) \\ a \ \in \{1, ..., p\}; \end{cases} \tag{1.6}$$

ils vérifient

$$\begin{cases} g(f_a, f_b^*) = \delta_{ab}, \\ g(f_a, f_b) = g(f_a^*, f_b^*) = 0, \\ a, b \in \ \{1, ..., p\}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Alors on construit la base suivante de V, $\{f_1, ..., f_p, f_1^*, ..., f_p^*, e_{p+1}, ..., e_q\}$ contenant $2p$ veceurs isotropes et $q - p$ vecteurs de type temps.

Cas III : $(p = q = \frac{1}{2}m)$

On contruit la base $\{f_1, ..., f_q, f_1^*, ..., f_q^*\}$ de V, où

$$\begin{cases} f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{q+i} + e_i) \ ; \ f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{q+i} - e_i) \\ i \ \in \{1, ..., q\}; \\ \text{avec } g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, \ g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Définition 1.1.9. *(i) Une base $\mathcal{B} = \{f_1, ..., f_r, f_1^*, ..., f_r^*, u_1, ..., u_l\}$ d'un espace semi-Euclidien V est dite quasi-orthonormale si*

$$\begin{cases} g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0 g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, \\ g(f_i, u_a) = g(u_a, f_j^*) = 0, \ g(u_a, u_b) = \varepsilon_a \delta_{ab} \\ \textit{pour } i, j \ \in \{1, ..., r\}, \ a, b \ \in \{1, ..., l\} \textit{ où } \varepsilon_a = g(u_a, u_a) \end{cases} \tag{1.9}$$

(ii) Soit $\mathcal{B} = \{f_1, ..., f_r, f_1^*, ..., f_r^*, u_1, ..., u_l\}$ une base quasi-orthonormale d'un espace semi-Euclidien V. On dira que $\mathcal{B}$ est adaptée à un sous-espace W de dimension n de V si on a :

$$W = Span\{f_1, ..., f_r, u_1, ..., u_s\} \; si \; n = r+s, \; 1 \leq s \leq l \; ou \; W = Span\{f_1, ..., f_n\} \; si \; n \leq r.$$

Maintenant nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Proposition 1.1.10. *Il existe une base quasi-orthonormale adaptée à un sous-espace dégénéré W de dimension n d'un espace vectoriel semi-Euclidien V de dimension m.*

■ Preuve.
On distingue quatre cas possibles.

Cas I : $(nullW = r < min(n, m-n)$

En utilisant la proposition 1.1.3 on peut écrire W et $W^\perp$ sous la forme :

$$(1) : W = RadW \perp W', \quad W^\perp = RadW \perp W'',$$

où W' et W'' sont des sous-espaces écran non-dégénérés de dimensions respectives $n-r$ et $(m-n)-r$.
Ainsi on a

$$(2) : V = W' \perp (W')^\perp.$$

On en déduit que $W'' \subset (W')^\perp$.

Mais comme $(W')^\perp$ est non-dégénéré on a

$$(3) : (W')^\perp = W'' \perp (W'')^\perp_\star,$$

où $(W'')^\perp_\star$ est l'orthogonal de W'' dans $(W')^\perp$.
On en déduit que

$$(4) : V = W' \perp (W'' \perp (W'')^\perp_\star).$$

Les relations (4) et (1) permettent de conclure que $RadW \subset (W'')^\perp_\star$; de plus on a :

$$\begin{aligned} dim((W'')^\perp_\star) &= dim((W')^\perp) - dimW'' \\ &= (m-(n-r)) - ((m-r)-r) = 2r0. \end{aligned}$$

Mais comme $dim(RadW) = r$, en considérant un supplémentaire U de $RadW$ dans $(W'')^\perp_\star$, on peut contruire une base $\{f_1, ..., f_r\}$ de $RadW$ et une base $\{v_1, ..., v_r\}$

de U. Alors par le fait que $(W'')^{\perp}_{\star}$ est non-dégénéré, on vérifie par le calcul qu'on peut trouver

$$\{f_1^*, ..., f_r^*\} \subset (U \perp RadW) = (W'')^{\perp}_{\star},$$

avec $f_i^* = a_i^j f_j + b_i^j v_j$ vérifiant

$$g(f_i, f_i^*) = \delta_{ij} \ , \ g(f_i^*, f_j^*) = g(f_i, f_j) = 0.$$

On en déduit la décomposition suivante de V

$$(5) : V = W' \perp W'' \perp (RadW \oplus Span\{f_1^*, ..., f_r^*\}).$$

La décomposition (5) permet de construire la quasi-orthonormale

$$\mathcal{B} = \{f_1, ..., f_r, f_1^*, ..., f_r^*, u_1, ..., u_{n-r}, w_1, ..., w_{m-n-r}\}$$

adaptée à W où $\{u_1, ..., u_{n-r}\}$ est une base orthonormée de W' et $\{w_1, ..., w_{m-n-r}\}$ une base orthonormée de W''. On a

$$W = Span\{f_1, ..., f_r, u_1, ..., u_{n-r}, w_1\}.$$

Cas II : $(r = n < m - n)$

Dans ce cas on a $RadW = W \subset W^{\perp}$. Alors on pose

$$(6) : \perp W^{\perp} = W \perp W'',$$

où W'' est sous-espace écran de dimension $(m - n) - n$. On déduit que

$$(7) : V = W'' \perp (W'')^{\perp} \supset W^{\perp} = W' \perp W.$$

On en déduit que $(W'')^{\perp}$ contient W et a pour dimension $2n$. Alors on peut construire un sous-espace U supplémentaire à W et de meme dimension n que W. On a donc la décomposition

$$V = W'' \perp (W \perp U).$$

On construit la base quasi-orthonormale $\mathcal{B} = \{f_1, ..., f_n, f_1^*, ..., f_n^*, w_1, ..., w_{m-2n}\}$ adaptée à W où $W = Span\{f_1, ..., f_n\}$ et où $\{w_1, ..., w_{m-2n}\}$ est une base orthonormale de W''.

Cas III : $(r = m - n < n)$

On a donc $W = W^{\perp} \perp W'$ où W' est un sous-espace écran de dimension $n - (m - n) = 2n - m$.

De plus on a

$$(8) : V = W' \perp W'^{\perp} \supset W = W^{\perp} \perp W'.$$

On en déduit que $W'^{\perp}$ contient $W^{\perp}$ et sa dimension vaut $m-(n-(m-n)) = 2(m-n)$.
Ainsi $V = W' \perp (W^{\perp} \perp U)$ où U est un supplémentaire de $W^{\perp}$ dans $W'^{\perp}$ qui a meme dimension $(m-n)$ que $W^{\perp}$. On construit une base quasi-orthonormale $\{f_1, ..., f_{m-n}, f_1^*, ..., f_{m-n}^*, w_1, ..., w_{2n-m}\}$ adaptée à W où

$$W = Span\{f_1, ..., f_{m-n}, w_1, ..., w_{2n-m}\}.$$

Cas I IV : $(r = n = \frac{1}{2}m)$

On a $RadW = W = W^{\perp}$. On en déduit la décomposition

$$V = W \oplus Span\{f_1^*, ..., f_n^*;$$

d'où l'on déduit la base quasi-orthonormale $\{f_1, ..., f_n, f_1^*, ..., f_n^*\}$ de V adaptée à

$$W = Span\{f_1, ..., f_n\}.\blacksquare$$

1.2 Geometrie d'une courbe nulle d'un espace de Minkowski

De manière plus générale,désignons par (M, g) une variété semi-Riemannienne d'indexe $q > 0$ et dimension $m+2$ $(m \geq 1)$. C'est à dire pour chaque $x \in M, g_x$ est une forme bilinéaire symmétrique sur T_xM d'indexe constant q. De plus $x \to g_x$ est application lisse.

Désignons par C une courbe nulle de M. C est une sous-variété de dimension 1 de M. On note $i : C \to M$ l'injection canonique. Dans une carte locale $(\mathcal{U}, t), C$ est définie par une courbe $x : t \in I \to x(t) \in M$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppera que $x(I)$ est inclus dans un domaine de carte locale M nuni de coordonnées locales $(x^0, ..., x^{m+1})$. Dans ce cas (c'est à dire localement) C est définie par les coordonnées $x^0(t), ..., x^{m+1}(t)$ du point $x(t) \in C$. Comme C est isotrope, on a le vecteur tangent à C, $x_*(\partial_t)$ qu'on notera par T vérifie :

$$g(T, T) = 0, \ T \neq 0.$$

Nous noterons par $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections lisses d'un fibré vectoriel.

Désignons par TC le fibré tangent à C, $TC = \bigsqcup_{x \in C} T_xC$. Chaque T_xC est sous-espace dégénéré de rang 1 de T_xM. Désignons par $TC^\perp = \bigsqcup_{x \in C} T_xC^\perp$le fibré orthoganal à C. Chaque $T_xC^\perp$ est sous-espace dégénéré de rang $m+1$ de T_xM. On a :

$$TC \subset TC^\perp.$$

Pour appliquer la méthode de construction des bases quasi-orthonormales exposée dans ($2^{ieme} cas$) dans la preuve de la proposition 1.1.8, on considére un fibré écran $S(TC^\perp)_x$ sur C (ou le long de C) dont les fibres $S(TC^\perp)$ sont des sous-espaces écran de $(T_xC)^\perp$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} TC^\perp &= \quad TC \perp S(TC^\perp) \\ TM &= S(TC^\perp) \perp (S(TC^\perp))^\perp. \end{aligned}$$

En particulier, le fibré $(S(TC^\perp))^\perp$ est non-dégénéré comme le fibré $S(TC^\perp)$, et son rang est égale à 2.
Nous avons la proposition suivante.

Proposition 1.2.1. *Soit C une courbe nulle d'une variété semi-Riemannienne (propre), et soit $S(TC^\perp)$ un fibré écran le long de C. Alors il existe un unique fibré vectoriel $\mathcal{N}$ le long de C de rang 1, tel que il existe une unique section $N \in \Gamma(\mathcal{N}_{|\mathcal{U}})$ vérifiant :*

$$\begin{cases} g(T,N) = 1 \\ g(N,N) = g(N,X) = 0, \forall X \in \Gamma(S(TC^\perp)). \end{cases} \tag{1.10}$$

■ Puisque $(S(TC^\perp))^\perp$ est un sous-espace non-dégénéré de rang 2 et qu'il contient TC, alors on peut choisir un vecteur V qui engendre un supplémentaire de TC dans $(S(TC^\perp))^\perp$, en posant :

$$(S(TC^\perp))^\perp = TC \oplus Span\{V\}, \text{ avec } g(T,V) \neq 0.$$

Cherchant N sous la forme $N = aT + bV$ avec la deux conditions du 1.10, on trouve :

$$N = \frac{1}{g(T,V)}\{V - \frac{g(V,V)}{2g(T,V)}T\}. \blacksquare \tag{1.11}$$

Nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.2.

(i) Nous avons la décomposition suivante

$$TM_{|C} = (TC \oplus Span\{N\}) \perp S(TC^{\perp}). \tag{1.12}$$

(ii) Si M est variété de Minkowski (ie Lorentzienne) alors tout fibré écran $S(TC^{\perp})$ le long de C est Riemannienne, c'est à dire pour tout $x \in C$, $(S(TC^{\perp})_x, g_x)$ est un espace vectoriel Euclidien.

$\star$ Désormais on supposera que (M, g) est variété Minkowskienne c'est à dire que (M, g) est d'indexe $q = 1$. De plus on suppera que sa dimension est égale à $m + 2, (m > 0)$.$\star$

Appliquons la décomposition 1.12 pour obtenir ce qu'on va appeler les équations de Frenet relativement à un fibré écran donné $S(TC^{\perp})$.
Désignons par ∇ la connexion de Levi-Civita de tenseur métrique g. Rappellons que ∇ est derterminée (voir dans [7]) par :

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

pour $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Exemple 1 : $(m = 1)$

Le fibré écran $S(TC^{\perp})$ est de rang 1. Alors considérons W_1 un champ unitaire qui est une séction de $\Gamma(S(TC^{\perp})_{|\mathcal{U}})$.

Alors (T, N, W_1) est une base quasi-orthonormale adapté à $TC^{\perp}$. Nous pouvons poser :

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= a_1 T + a_2 N + a_3 W_1 \\ \nabla_T N &= b_1 T + b_2 N + b_3 W_1 \\ \nabla_T W_1 &= c_1 T + c_2 N + c_3 W_1. \end{aligned}$$

On a.

(1) :

$$g(T,T)=0 \Rightarrow g(\nabla_T T,T)=0 \Rightarrow \qquad \underline{a_2=0}.$$

(2) :

$$g(T,N)=1 \;\Rightarrow g(\nabla_T T,N)+g(T,\nabla_T N)=0 \Rightarrow \quad \underline{a_1+b_1=0}.$$

(3) :

$$g(T,W_1)=0 \;\Rightarrow g(\nabla_T T,W_1)+g(T,\nabla_T W_1)=0 \Rightarrow \underline{a_3+c_2=0}.$$

(4) :

$$g(N,N)=0 \;\Rightarrow g(\nabla_T N,N)=0 \Rightarrow \qquad \underline{b_1=0}.$$

(5) :

$$g(N,W_1)=0 \;\Rightarrow g(\nabla_T N,W_1)+g(N,\nabla_T W_1)=0 \Rightarrow \underline{b_3+c_1=0}.$$

(6) :

$$g(W_1,W_1)=0 \;\Rightarrow g(\nabla_T W_1,W_1)=0 \Rightarrow \qquad \underline{c_3=0}.$$

Cela prouve qu'on a :

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= hT + k_1 W_1 \\ \nabla_T N &= -hT + k_2 W_1 \\ \nabla_T W_1 &= -k_1 T + -k_2 W_1, \end{aligned} \tag{1.13}$$

où h, k_1, k_2 sont des fonction du paramètre t.

Exemple 2 : $(m=2)$

Le fibré écran $S(TC^{\perp})$ est de rang 2.
Au vu de ce qui précède on a :

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= hT + V_1, \quad V_1 \in S(TC^{\perp}) \\ \nabla_T N &= -hT + V_2, \quad V_{\in} S(TC^{\perp}). \end{aligned}$$

On définit le vecteur unitaire W_1 en posant $V_1 = k_1 W_1$; et on choisit W_2 tel que $\{W_1, W_2\}$ soit un base orthormée de $S(TC^{\perp})$. Puis on pose $V_2 = c_3 W_1 + c_3 W_2$. En suivant la méthode précédente dans le cas $m=1$, on voit que $\{T, N, W_1, W_2\}$ est une base quasi-orthonormale adaptée à $TC^{\perp}$ qui vérifie les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla_T T &= hT + k_1 W_1 \\ \nabla_T N &= -hT + k_2 W_1 + k_3 W_2 \\ \nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 \\ \nabla_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Exemple 3 : $(m = 3)$

Dans ce cas on obtient de manière analogue les équations suivantes

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= hT + k_1 W_1 \\
\nabla_T N &= -hT + k_2 W_1 + k_3 W_2 \\
\nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3 \\
\nabla_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 \\
\nabla_T W_3 &= -k_5 W_1 - k_6 W_2,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

où les systéme $\{T, N, W_1, W_2, W_3\}$ est base quasi-orthonormale adaptée à $TC^{\perp}$; le systéme $\{W_1, W_2, W_3\}$ est une base orthonormée du fibré écran $TC^{\perp}$ choisie comme précèdamment.

Exemple 4 : $(m = 4)$
On a les équations

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= hT + k_1 W_1 \\
\nabla_T N &= -hT + k_2 W_1 + k_3 W_2 \\
\nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3 \\
\nabla_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 + k_7 W4 \\
\nabla_T W_3 &= -k_5 W_1 - k_6 W_2 + k_8 W_4 \\
\nabla_T W_4 &= -k_7 W_2 - k_8 W_3.
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Exemple 5 : $(m \geq 5)$
On a les équations suivantes

$$\begin{aligned}
\nabla_T T &= hT + k_1 W_1 \\
\nabla_T N &= -hT + k_2 W_1 + k_3 W_2 \\
\nabla_T W_1 &= -k_2 T - k_1 N + k_4 W_2 + k_5 W_3 \\
\nabla_T W_2 &= -k_3 T - k_4 W_1 + k_6 W_3 + k_7 W4 \\
\nabla_T W_3 &= -k_5 W_1 - k_6 W_2 + k_8 W_4 + k_9 W_5 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\nabla_T W_{m-2} &= -k_{2m-5} W_{m-4} - k_{2m-4} W_{m-3} + k_{2m-2} W_{m-1} + k_{2m-1} W_m \\
\nabla_T W_{m-1} &= -k_{2m-3} W_{m-3} - k_{2m-2} W_{m-2} + k_{2m} W_m \\
\nabla_T W_m &= -k_{2m-1} W_{m-2} - k_{2m} W_{m-1},
\end{aligned} \tag{1.17}$$

où $\{W_1, ..., W_m\}$ est une base orthonormale de $\Gamma(S(TC^{\perp})$.

Dans le cas général, c'est à dire pour $m > 0$, nous appellerons le base quasi-orthonormale $F = \{T, N, W_1, ..., W_m\}$ adaptée à $TC^{\perp}$ un **repére de Frenet** de la courbe C . Les fonctions $\{k_1, ..., k_{2m}\}$ sont appelées courbures du repére F.

Remarque 1.2.3. *Il faut noter que le repére de Frenet $F = \{T, N, W_1, ..., W_m\}$ ainsi que ces courbures $\{k_1, ..., k_{2m}\}$ dépendent du choix du fibré écran $S(TC^{\perp})$ et de la carte $(\mathcal{U}, t)$ (c'est à dire du paramétrage en t.)*

Nous allons à présent étudier cette dépendance.
Commençons par étudier la dépendance par rapport au paramétre t. Considérons $(\mathcal{U}, t), (\mathcal{U}^\star, t^\star)$ deux systémes de coordonnées de C telles que $\mathcal{U} \bigcap \mathcal{U}^\star \neq \varnothing$. Considérons relativement à un fibré écran $S(TC^{\perp})$ donné,les repéres de Frenet F et $F^\star$ sur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}^\star$, respectivement. Sur

$$\mathcal{U} \bigcap \mathcal{U}^\star$$

on pose :

$$F = \{T, N, W_1, ..., W_m\}$$
$$F^\star = \{T^\star, N^\star, W_1^\star, ..., W_m^\star\},$$

où

$$W_m^\star = A_\alpha^\beta W_\beta, \ \alpha, \beta \ \in \{1, ..., m\},$$

la matrice carré $[A_\alpha^\beta]$ d'ordre m est un élément du groupe orthogonal $O(m)$.

De la formule $\partial_{t^\star} = \frac{dt}{dt^\star}\partial_t$
on déduit que

$$T^\star = x_\star(\partial_{t^\star}) = \frac{dt}{dt^\star} x_\star(\partial_t) = \frac{dt}{dt^\star} T.$$

Avec la formule 1.11 on trouve que $N^\star = \frac{dt^\star}{dt} N$.

La première équation des équations de Frenet 1.17 pour F et $F^\star$ donne :

$$\nabla_T T = hT + k_1 W_1$$
$$\nabla_{T^\star} T^\star = h^\star T^\star + k_1^\star W_1^\star.$$

En tenant compte des expressions de $T^\star$ et des $W_\alpha^\star$ données ci-dessus, nous avons d'une part :

$$\nabla_{T^\star} T^\star = h^\star \frac{dt}{dt^\star} T + k_1^\star A_1^\beta W_\beta.$$

D'autre part on a :

$$\nabla_{T^\star} T^\star = \tfrac{dt}{dt^\star}\nabla_T(\tfrac{dt}{dt^\star}T)$$

$$= \tfrac{dt}{dt^\star}(\tfrac{d^2t}{d^2t^\star}.\tfrac{dt^\star}{dt})T + \tfrac{dt}{dt^\star}(hT + k_1W_1)$$

$$= \tfrac{dt}{dt^\star}(\tfrac{d^2t}{d^2t^\star}.\tfrac{dt^\star}{dt} + \tfrac{dt}{dt^\star}h)T + k_1(\tfrac{dt}{dt^\star})^2 W_1.$$

Finalement on obtient les relations suivantes

$$\frac{d^2t}{d^2t^\star} + h(\frac{dt}{dt^\star})^2 = h^\star \frac{dt}{dt^\star}, \tag{1.18}$$

$$k_1^\star A_1^2 = k_1(\frac{dt}{dt^\star})^2, \tag{1.19}$$

$$k_1^\star A_1^2 = ... = k_1^\star A_1^m = 0. \tag{1.20}$$

En suivant une démarche analogue, en utilisant les autres équations des équations de Frenet du 1.17 pour les deux repéres de Frenet $F, F^\star$, et en tenant compte de ce la matrice $[A_\alpha^\beta]$ est orthogonale, on obtient la proposition suivante (voir dans [1]).

Proposition 1.2.4. *Considérons C une courbe nulle d'une variété de Minkowski M. Soient$F, F^\star$ deux repéres de Frenet sur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}^\star$, respectivement, avec $\mathcal{U}\bigcap\mathcal{U}^\star \neq \varnothing$. Désignons par*

$\{k_1, ..., k_{2m}\}, \{k_1^\star, ..., k_{2m}^\star\}$

respectivement, les courbures de des repéres F et $F^\star$ induites par le choix d'un fibré écran $S(TC^\perp)$ sur $\mathcal{U}\bigcap\mathcal{U}^\star$. Supposons de plus sur $\mathcal{U}\bigcap\mathcal{U}^\star$ que $\prod_{A=1}^{2m-1} k_A \neq 0$. Alors on a

$$k_1^\star = k_1 A_1(\frac{dt}{dt^\star})^2, \tag{1.21}$$

$$k_2^\star = k_2 A_1, \tag{1.22}$$

$$k_3^\star = k_3 A_2, \tag{1.23}$$

et

$$k_\alpha^\star = k_\alpha A_2,\ \alpha \in \{4, ..., 2m\},\ \textit{où}\ A_i = \pm 1. \tag{1.24}$$

En particulier les fonctions k_2 et k_3, au signe près, sont des invariants relativement au paramétrage.

Suivant la remarque 1.2.3, nous allons maintenant considérer les transformations générales qui relient deux repéres de Frenet F et $F^\star$ sur $\mathcal{U} \bigcap \mathcal{U}^\star$ qui sont relatifs, respectivement, à deux fibrés écrans $S(TC^\perp)$ et $\bar{S}(TC^\perp)$.

Posons

$$F = \{T, N, W_1, ..., W_m\}$$
$$\bar{F} = \{\bar{T}, \bar{N}, \bar{W}_1, ..., \bar{W}_m\},$$

Nous pouvons chercher $\bar{N}$ sous la forme

$$(1)\ \bar{N} = aT + bN + \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha W_\alpha,$$

et $\bar{W}_\alpha$, en vertue de la décomposition 1.12, sous la forme

$$W_\alpha = a_\alpha T + B_\alpha^\beta W_\beta,$$

avec la condition $g(\bar{W}_\alpha, \bar{W}_\alpha) = \delta_{\alpha\beta}$. C'est à dire la matrice $[B_\alpha^\beta] \in O(m)$.

Rappellons que $\bar{N}$ est définie par les conditions

$$g(\bar{T}, \bar{N}) = 1$$
$$g(\bar{N}, \bar{N}) = g(\bar{N}, \bar{W}_\alpha) = 0 \ \forall \alpha \in \{1, ..., m\}.$$

On a $g(\bar{T}, \bar{N}) = 1 \quad \Rightarrow \ \frac{dt}{d\bar{t}}\ g(T, \bar{N}) = 1$. Ce qui entraine que

$$\frac{dt}{d\bar{t}}\ b_\alpha = 1, \quad \text{d'où} \quad b_\alpha = \frac{d\bar{t}}{dt}.$$

D'autre part,

$$g(\bar{N}, \bar{N}) = 1 \ \Rightarrow \ 2a_\alpha\ b_\beta + \Sigma_{\gamma=1}^{m} c^2{}_\gamma = 0.$$

Ce qui permet d'écrire $\bar{N}$ sous la forme

$$\bar{N} = -\frac{1}{2}\frac{dt}{d\bar{t}}(\Sigma_{\gamma=1}^{m} c^2{}_\gamma)T + \frac{d\bar{t}}{dt}N + \Sigma_{\gamma=1}^{m} c_\gamma W_\gamma. \qquad (1.25)$$

La condition $g(\bar{N}, \bar{W}_\alpha) = 0$ donne :

$$a_\alpha\ \frac{d\bar{t}}{dt} + \Sigma_{\gamma=1}^{m} c_\gamma B_\alpha^\gamma = 0.$$

On a déduit que

$$\bar{W}_\alpha = B_\alpha^\beta (W_\alpha - \frac{dt}{d\bar{t}}\, c_\beta T). \qquad (1.26)$$

Finalement, en utilisant l'équation 1.26 ci-dessus et la première équation du systéme 1.17 on obtient les formules de transformation suivante :

$$\bar{h} = \frac{d^2 t}{d^2 \bar{t}} \cdot \frac{d\bar{t}}{dt} + h\frac{dt}{d\bar{t}} + k_1 c_1 (\frac{dt}{d\bar{t}})^2, \qquad (1.27)$$

$$\bar{k}_1 B_1^1 = k_1 (\frac{dt}{d\bar{t}})^2, \qquad (1.28)$$

$$\bar{k}_1 B_1^2 = ... = \bar{k}_1 B_1^m = 0. \qquad (1.29)$$

Nous pouvons à présent faire la remarque qui suit.

Remarque 1.2.5. *La nullité de la première courbure k_1 est indépendant du paramétrage.*

Maintenant nous voulons signaler un fait important. Il s'agit de remarquer que, relativement au choix d'un fibré écran $S(TC^\perp)$, on peut trouver un papamétrage tel que $h = 0$. Pour cela, en vertue de la relation 1.18, on condider l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 t}{d^2 t^\star} - h^\star \frac{dt}{dt^\star} = 0.$$

Les solutions de cette équation sont données par :

$$t = a \int_{t_0^\star}^{t^\star} \exp(\int_{s_0}^{s} h^\star(t^\star) dt^\star) ds + b, \;\; a, b \in \mathbb{R}.$$

On voit grace à la formule 1.18, pour $a \neq 0$, toute solution ainsi choisie donne un paramétrage sur la courbe C telle que $h = 0$. Nous pouvons donc définir de tel paramétrage sous la forme suivante.

Définition 1.2.6. *Soit t un paramétrage arbitraire sur la courbe nulle C. Et soit $S(TC^\perp)$ un fibré écran sur C. Alors le pamétrage noté p défini par*

$$p = \int_{t_0^\star}^{t^\star} \exp(\int_{s_0}^{s} g(\nabla_T T, N) dt^\star) ds, \qquad (1.30)$$

est appelé paramétre distingué (voir dans [1]).

Faisons une serie de remarques.

Remarque 1.2.7. *(i) Lorsqu'on remplace le paramétre t par le paramétre distngué p, alors la première et la seconde équation du systeme 1.17 des équations de Frenet sont*

$$\nabla_T T = k_1 W_1$$
$$\nabla_T N = k_2 W_1 + k_3 W_2;$$

les autres équations restant inchangées.

(ii) Soient p et $p^\star$ deux paramétres distingués induits par t et $t^\star$ respectivement, et relativement au choix d'une distribution écran $S(TC^\perp)$. Alors (à partir de la première équation ci-dessus) on a $p^\star = ap + b$; $(a, b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$.

(iii) Supposons k_1 identiquement nulle, alors la première équation ci-dessus devient

$$\frac{d^2x^i}{d^2p} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dp}\frac{dx^i}{dp},$$

où les Γ^i_{jk} sont les symboles de Christoffel de ∇.

Ainsi nous avons le théorème suivant.

Théeorème 1.2.8. *Soit C une courbe nulle d'une variété de Minkowski M. Alors C est une géodésique si et seulement si la première courbure k_1 est nulle.*

1.3 Courbes Nulles dans $\mathbb{R}^{m+1}_1$

Désignons par $\mathbb{R}^{m+1}_1$ l'espace de Minkowski standard avec sa métrique de Minkowski canonique g d'indexe 1 définie par

$$g(X, Y) = -x^0y^0 + \sum_{a=1}^{m} x^a y^a.$$

Supposons donnée comme précédamment une courbe nulle C de $\mathbb{R}^{m+1}_1$ définie par

$$(1): \; x^i = x^i(t), t \in I \subset \mathbb{R}, \; i \in \{0, ..., m+1\}.$$

Théeorème 1.3.1. *Supposons qu'il existe un fibré écran $S(TC^\perp)$ qui induit sur chaque systéme de coordonnées $\mathcal{U} \subset C$ un repére de Frenet $F = \{T, N, W_1, ..., W_m\}$ tel que les courbures $\{k_\alpha; \alpha \in \{1, ..., 2n-4\}\}, n \in \{3, ...m\}$*

ne s'annulent pas et que les courbures $k_{2n-3}, k_{2n-2}, k_{2n-1}$ sont partout nulles sur $\mathcal{U}$. Alors C est incluse dans un plan affine de Minkowski (ie Lorentzien) de dimension n. Dans le cas où k_{2m-1} et k_{2m} sont nulles sur $\mathcal{U}$, alors C est incluse dans un hyperplan de Minkowskide $\mathbb{R}_1^{m+1}$.

■ Preuve. Considérons le plan minkowskien de dimension n ,

$$\Delta(t) = \{T(t), N(t), W_1(t), ..., W_{n-2}(t)\}.$$

Notons que pour un champ $X : t \to X(t) \in \mathbb{R}_1^{m+1}$ on a :

$$\nabla_T X(t) = X'(t).$$

A partir des équations de Frenet 1.17, et en considérant l'hypothése $k_{2n-3} = k_{2n-2} = k_{2n-1} = 0$ sur $\mathcal{U}$, on obtient le systéme d'équations différentielles suivant

$$\begin{array}{l} W_i' = \sum_{j=1}^n A_{ij} W_j(t);\ i \in \{1, ..., n\}, \\ W_{n-1} = N,\ W_n = T. \end{array}$$

Il est claire que $\Delta(t)$ est un plan Minkowskien qui est non-dégénéré dont l'orthogonal $\Delta(t)^\perp \subset T_{x(t)}\mathbb{R}_1^{m+1}$ est un sous-espace de type espace. Alors, soit t_0 fixé et considérons les vecteurs contants $V_\alpha, \alpha \in \{1, ..., m+2-n\}$ qui engendrent $\Delta(t_0)$.

D'une part on a

$$(1): \quad g(W_i(t_0), V_\alpha) = 0, \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

D'autre part,on a le systéme d'équations différentilles suivant

$$(2): \ \frac{d}{dt} g(W_i(t), V_\alpha) = g(W_i'(t), V_\alpha) = \Sigma_{j=1}^n A_{ij} g(W_i(t), V_\alpha),$$

avec les conditions initiales données par (1) ci-dessus. On déduit de (1) et (2), d'après le thérème d'existence et d'unicité des solutions d'un syteme d'équations différentilles que

$$g(W_i(t), V_\alpha) = 0, \forall t \in I.$$

Ainsi, les plans dimension n, $\Delta(t)$ sont tous paralléles au plan fixe $\Delta(t_0)$.

Pour achever la preuve, nous rappellons le lemme suivant (voir dans [1] et mais aussi dans [9])

Lemme 1.3.2. *Soit C une courbe de $\mathbb{R}^{m+2}$ dont le vecteur tangent $T \in \Delta(t)$, où les $\Delta(t)$ sont une fammille de plans paralléles de $\mathbb{R}^{m+2}$ de dimension n. Alors C est une courbe d'un sous-espace affine V de $\mathbb{R}^{m+2}$ de dimension n.*

Puisque $\mathcal{U}\bigcap\mathcal{U}^\star \subset V$, on en déduit que la courbe C est dans V.■

Nous allons présenter le théorème fondamentale pour les courbes nulles de l'espace de Minkowski (voir dans [1] , dans [2]).

Nous considérons dans $\mathbb{R}_1^{m+1}$ la base quasi-orthonormale suivante :

$$\begin{array}{l}\bar{W}_0 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, ..., 0)\\ \bar{W}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, ..., 0)\\ \bar{W}_2 = (0, 0, 1, 0, ..., 0); ...; \bar{W}_{m+1} = (0, 0, 0, .., 0, 1),\end{array}$$

où $\bar{W}_0$ et $\bar{W}$ sont des vecteurs isotropes avec $g(\bar{W}_0, \bar{W}_1) = 1$, et $\bar{W}_2, ..., \bar{W}_{m+1}$ sont des vecteurs de type espace.
Notons la relation $(\star)$ suivante :

$$(\star) : \bar{W}_0^i\bar{W}_1^j + \bar{W}_0^j\bar{W}_1^i + \sum_{\alpha=2}^{m+1} \bar{W}_\alpha^i\bar{W}_\alpha^j = h^{ij},$$

où

$$h^{ij} = \begin{cases} -1 \\ 1 \\ 0 \end{cases}.$$

Nous avons le théorème d'existence et d'unicité qui suit.

Théeorème 1.3.3. *Soient $k_1, ..., k_{2m} : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues,$x_0 = (x_0^i)$ un point fixé dans $\mathbb{R}_1^{m+1}$, et soient $\{\bar{W}_0, ..., \bar{W}_{m+1}\}$ la base quasi-orthonormale donnée ci-dessus. Alors il existe une unique courbe nulle C de $\mathbb{R}_1^{m+1}$, donnée par ses coordonnées*

$$x^i = x^i(p),\ p \in [-\varepsilon, \varepsilon],$$

où p est un paramétre distingué de C, telle que $x_0^i = x^i(o)$ et $k_1, ..., k_{2m}$ sont les courbures de C relativement à un repére de Frenet $F = \{T, N, W_2, ..., W_{m+1}\}$ tel que

$$\begin{array}{l}T(0) = \bar{W}_0^0\\ N(0) = \bar{W}_0^1\\ W_\alpha(0) = \bar{W}_\alpha,\ \alpha \in \{2, ..., m+1\}.\end{array}$$

■ Preuve. Considérons le systéme d'équations différentilles suivant :

$$
\begin{aligned}
&W_0'(p) = k_1 W_2\\
&W_1'(p) = k_2 W_2 + k_3 W3\\
&W_2'(p) = -k_2 W_0 - k_1 W_1 + k_4 W_3 + k_5 W_4\\
&W_3'(p) = -k_3 W_0 - k_4 W_2 + k_6 W_4 + k_7 W_5\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&W_{m-1}'(p) = -k_{2m-5} W_{m-3} - k_{2m-4} W_{m-2} + k_{2m-3} W_m + k_{2m-1} W_{m+1}\\
&W_{m-1}'(p) = -k_{2m-5} W_{m-3} - k_{2m-4} W_{m-2} + k_{2m-3} W_m + k_{2m-1} W_{m+1}\\
&W_m'(p) = -k_{2m-4} W_{m-2} - k_{2m-2} W_{m-1} + k_{2m} W_{m+1}\\
&W_{m+1}'(p) = -k_{2m-1} W_{m-1} - k_{2m} W_m.
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

Alors, il existe une unique solution $\{W_0, ..., W_{m+1}\}$ qui vérifie les conditions initiales :

$$W_i(0) = \bar{W}_1, \ i \in \{0, ..., m+1\}.$$

On montre dans ces conditions que pour tout $p \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ le systéme $\{W_0(p), ..., W_{m+1}(p)\}$ est une base quasi-orthonormale de $\mathbb{R}_1^{m+1}$, avec $W_0(p)$ et $W_1(p)$ des vecteurs isotropes, $W_2(p), ..., W_{m+1}(p)$ des vecteurs de type espace.

Par un calcul directe en utilisant les équations de Frenet du 1.31 ci-dessus, on obtient :

$$\frac{d}{dp}\{W_0^i(p)W_1^j(p) + W_0^j(p)W_1^i(p) + \Sigma_{\alpha=2}^{m+1} W_\alpha^i(p)W_\alpha^j(p)\} = 0. \tag{1.32}$$

Et lorsque $p = 0$ on a l'équation $(\star)$ ci-dessus; il s'en suit l'equation :

$$W_0^i(p)W_1^j(p) + W_0^j(p)W_1^i(p) + \Sigma_{\alpha=2}^{m+1} W_\alpha^i(p)W_\alpha^j(p) = 0. \tag{1.33}$$

Cette équation permet de construire le repére suivant

$$
\begin{aligned}
&V_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(W_1 - W_0)\\
&V_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(W_1 + W_0)\\
&V_\alpha = W_\alpha, \ \alpha \in \{2, ..., m+1\}.
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

Alors 1.33 devient

$$\sum_{a=1}^{m+1} V_a^i V_a^j - V_0^i V_0^j = h^{ij}. \tag{1.35}$$

En se servant de 1.35 on définit la matrice $D(p) = [d^{ij}]$ suivante

$$
\begin{aligned}
&d^{00} = V_0^0; d^{0a} = \sqrt{-1}\ V_a^0; d^{a0} = -\sqrt{-1}\ V_0^a;\\
&d^{ab}\ V_b^a, \ a, b \in \{1, ..., m+1\},
\end{aligned}
$$

et on peut vérifier que

$$D(p) \times D(p)^t) = I_{m+r}.$$

D'où l'on peut déduire que les $\{V_i(p);\ i = 0, ..., m+1\}$ est une base orthonormale pour tout $p \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. On en conclut que les $\{W_i(p);\ i = 0, ..., m+1\}$ forment une bas quasi-orthonormale sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$..

On trouve la courbe C en intégrant

$$\frac{dx^i}{dp} = W_0^i(p), \quad x^i(0) = x_0^i.$$

A partir de 1.31 on voit que $F = \{T = W_0(p), N = W_1(p), W_2(p), ..., W_{m+1}(p)\}$ est un repére de Frenet de C et $k_1, ..., k_{2m}$ ses courbures relativement à F, p un paramétre distingué sur C.$\blacksquare$.

Chapitre 2

Surfaces Minimales Réglées dans l'espace de Minkowski ou Euclidien de dimension 3 orienté

2.1 introduction

Par surface S dans l'espace affine Euclidien $\mathbb{R}^3_0$, nous entendrons la donnée d'une variété connexe M de dimension 2 orientée et d'une immersion

$$f : M \to \mathbb{R}^3_0.$$

Les propriétés topologique la surface S sont alors celles de M.
On définit sur M (voir [10]) la première forme fondamentale I, la seconde forme fondamentale II, la coubure de Gauss K_G, la courbure moyenne H, et un champ normal n le long de l'immersion f. Les objets I,II,K_G,H et n sont indépendants des coordonnées compatibles avec l'orientation de M.
On a une théorie analogue lorsqu'on muni l'espace affine $\mathbb{R}^3$ d'une métrique de Minkowski et qu'on regarde S comme surface dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$

$$f : M \to \mathbb{R}^3_1.$$

A la différence du cas Euclidien, il faudra supposer dans le cas où S est une surface dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$ que sa première forme fondamentale I est nondégénérée. C'est à dire, si

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

dans un domaine $\mathcal{U} \subset M$ muni de coordonnées locales (u, v), alors $detI = EG-F^2$ qu'on notera Δ ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$. En particulier, la surface S sera riemannienne (respectivement lorentzienne) si $detI > 0$ (respectivement $detI < 0$), dans tout système de coordonnées $(\mathcal{U}, u, v)$ de M.

Une surface S dans l'espace de Minkowski ou bien dans l'espace Euclidien est minimale si sa coubure moyenne H est nulle sur M.

Dans l'espace affine Euclidien $\mathbb{R}^3_0$, les hélicoïdes définies par les immersions isométriques suivantes

$$f_a(s,u) = (u\cos(s); u\sin(s); as), \ \ (s,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^\star \tag{2.1}$$

sont les seules surfaces minimales réglées en dehors des morceaux de plan.
Dans la plupart des preuves de ce résultat classique on utilise une propriété classique des courbes, à savoir qu'une courbe dont le rapport de courbure et de la torsion est constante est une hélice; (voire dans[8] ou dans [3]). A voir aussi dans [4], où ce résultat de caractérisation de l'hélicoïde est établi avec l'hypothése que la surface minimale réglée est sans points plats.
Ici nous n'utiliserons pas explicitement la théorie des courbes. En section 2.2.1 nous adoptons la notation $\mathbb{R}^3_j$ ($j = 0$ ou bien $j = 1$) pour désigner en même temps les surfaces réglées minimales dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$ et celles réglées minimales dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3_0$.

Dans l'espace de Minkoski $\mathbb{R}^3_1$ les immersions isométriques suivantes

$$\begin{cases} f_a(s,u) = (u\cos(s); u\sin(s); as), \ \ a \in \mathbb{R}^\star \text{ avec} \\ \\ (s,u) \in \mathbb{R}\times]-|a|,|a|[\text{ ou } (s,u) \in \mathbb{R}\times]-\infty,-|a|[\text{ ou } (s,u) \in \mathbb{R}\times]|a|,+\infty[, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$f_a(s,u) = (u\sinh(s); as; u\cosh(s)), \ \ a \in \mathbb{R}^\star \text{ avec} (s,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} f_a(s,u) = (u\cosh(s); as; u\sinh(s)), \ \ a \in \mathbb{R}^\star \text{ avec} \\ \\ (s,u) \in \mathbb{R}\times]-|a|,|a|[\text{ ou } (s,u) \in \mathbb{R}\times]-\infty,-|a|[\text{ ou } (s,u) \in \mathbb{R}\times]|a|,+\infty[, \end{cases} \tag{2.4}$$

définissent des surfaces dont on peut voir qu'elles sont engendrées par l'orbite d'une droite par un sous-groupe à un paramètre d'isométries de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$. Ce sont donc des hélicoïdes dans l'espace de Minkowski. Nous montrerons que ce sont des surfaces réglées minimales dans l'espace de Minkowski qui, comme les hélicoïdes euclidiennes, possèdent toutes une ligne de striction qui est une droite.

Considérons dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$ la famille $\mathcal{S}(c,d,\epsilon)$ à 3 paramètres $(c,d,\epsilon) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} \times \{-1,1\}$ de surfaces réglées dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$ définies par les immersions isométriques suivantes

$$f(s,u) = (-\frac{1}{6}cs^3 + ds; -\frac{1}{2}\epsilon cs^2; -\frac{1}{6}cs^3 + (d-c)s) + u(s;\epsilon;s), \tag{2.5}$$

avec $(s,u) \in \mathbb{R}\times]-\infty;\frac{c-2d}{2}[$ ou bien $(s,u) \in \mathbb{R}\times]\frac{c-2d}{2};+\infty[$.

Nous montrerons que les surfaces réglées de la famille $\mathcal{S}(c,d,\epsilon)$ sont minimales dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$ et sont sans points plats ; et qu' aucune d' elles n'a une ligne de striction.
Remarque. Dans ces exemples, les restrictions sur le domaine de définition de u servent à éviter les dégénérescences de la métrique induite.

Le principal résultat de ce travail est le théorème suivant.

Théeorème 2.1.1. *Soit S une surface pseudo-riemannienne dans $\mathbb{R}^3_j$ ($j=0$ ou bien $j=1$) qui est réglée, connexe et minimale dans $\mathbb{R}^3_j$. Alors, on a la classification suivante :*

1) Si $j=0$, alors S est un ouvert d'un plan ou bien d'une surface de la famille des hélicoïdes donnés par 2.1.

2) Si $j=1$, alors S est un ouvert d'une des surfaces suivantes :
- un plan nondégénéré de $\mathbb{R}^3_1$,
- un cylindre à génératrices isotropes,
- une surface de la famille $\mathcal{S}(c,d,\epsilon)$ à 3 paramètre réels $(c,d,\epsilon) \in \mathbb{R}^\star\times\mathbb{R}^3\times\{-1,1\}$ donnée par 2.5,
- une hélicoïde de $\mathbb{R}^3_1$ donnée par 2.2 ou par 2.3 ou par2.4.

En section 2.2, nous rappelons en préliminaires les notions et formules de base sur la théorie locale des surfaces dans $\mathbb{R}^3_j$ nécessaires pour la suite. En section 2.3 nous appliquons ces formules au cas des surfaces réglées pour la section 2.4.
Dans la section 2.4, on commence par classifier les surfaces réglées en quatre tpypes (1),(2),(3) et (4) ; nous donnons ensuite la preuve du théorème 2.1.1.

2.2 Préliminaires

2.2.1 Notations et formules vectorielles

Nous considérons l'espace affine réel $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z); x,y,z \in \mathbb{R}\}$ muni des coordonnées x,y,z associées à la base $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$. On identifiera l'espace tangent $T_p\mathbb{R}^3$ en tout point p de $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^3$.
Nous désignerons par $\mathbb{R}^3_j$ ($j=0$ ou bien $j=1$), pour j fixé, l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du tenseur métrique $\langle,\rangle$ défini par :

$$\langle,\rangle = dx^2 + dy^2 + (-1)^j dz^2. \tag{2.6}$$

Lorsque $j=0$, $\mathbb{R}^3_0$ est l'espace Euclidien de dimension 3 ; et pour $j=1$, $\mathbb{R}^3_1$ est l'espace de Minkowski de dimension 3.

Pour j fixé, on définit le produit vectoriel $\times$ dans $\mathbb{R}^3_j$ de deux vecteurs tangents U et V par : $\langle U \times V, W\rangle = det(U, V, W)$ où $det(U, V, W)$ est la fonction déterminant, c'est à dire la forme volume qui vaut $+1$ sur la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On notera aussi $\det(U, V, W)$ par (U, V, W). Dans toute la suite on supposera que $\mathbb{R}^3_j$ est positivement orienté par la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Le produit vectoriel $\times$ est antisymétrique, et il est nul pour deux vecteurs U et V si et seulement si ces deux vecteurs sont linéairement dépendants. En particulier on a la formule vectorielle suivante. Dans $\mathbb{R}^3_j$, pour U, V, U', V' vecteurs tangents on a

$$\langle U \times V, U' \times V'\rangle = (-1)^j det \begin{pmatrix} \langle U, U'\rangle & \langle V, U'\rangle \\ \langle U, V'\rangle & \langle V, V'\rangle \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

On vérifie 2.7 en utilisant la formule suivante. Pour $U = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$; $V = a'\overrightarrow{i} + b'\overrightarrow{j} + c'\overrightarrow{k}$ on a

$$U \times V = \begin{pmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & (-1)^j\overrightarrow{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Notions de base pour les surfaces dans $\mathbb{R}^3_j$ ($j = 0$ ou bien $j = 1$)

Pour toutes les notions et formules de cette sous section nous renvoyons à [10]. Considérons une surface S pseudo-riemannienne dans $\mathbb{R}^3_j$ ($j = 0$ ou bien $j = 1$) connexe, définie par une immersion isométrique

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3_j \\ (t, v) & \to & f(t, v) \end{array}$$

d'un ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ muni de coordonnées globales (t, v), dans $\mathbb{R}^3_j$. Alors, sa première forme fondamentale I et sa seconde forme fondamentale II sont données sur $\mathcal{U}$ avec leurs coefficients respectifs (E, F, G) et (L,M,N) par :

$$\begin{cases} I = & Edt^2 + 2Fdtdv + Gdv^2 \\ II = & Ldt^2 + 2Mdtdv + Ndv^2, \end{cases} \tag{2.8}$$

où

$$\begin{cases} E = \langle f_t, f_t\rangle; F = \langle f_t, fv\rangle; G = \langle f_v, f_v\rangle \\ L = \langle f_{tt}, n\rangle; M = \langle f_{tv}, n\rangle; N = \langle f_{vv}, n\rangle, \end{cases} \tag{2.9}$$

n étant la normale semi-euclidienne (ie $j = 0$ ou bien $j = 1$) de la surface donnée sur $\mathcal{U}$ par la formule

$$n = \frac{f_t \times f_v}{|f_t \times f_v|}. \tag{2.10}$$

Le tenseur I est nondégénéré, par conséquent la quantité $\Delta = EG - F^2$ ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$; et on a $|f_t \times f_v| = |\Delta|^{\frac{1}{2}}$.
La courbure de Gauss K_G et la courbure moyenne H de la surface sont données sur $\mathcal{U}$ par

$$\begin{cases} \Delta K_G = LN - M^2 \\ 2\Delta H = GL - 2FM + EN. \end{cases} \tag{2.11}$$

On notera $K(I)$ la coubure intrinsèque. En appliquant la formule suivante donnée dans [10], $K(I)$ s'exprime en fontion des coefficients E, F, G et de leurs dérivées partielles par

$$\begin{aligned} 4\Delta^2 K(I) = E(E_v G_v - 2F_t G_v + {G_t}^2) + G(E_t G_t - 2F_v E_t + {E_v}^2) \\ +F(E_t G_v - E_v G_t - 2E_v F_v + 4F_t F_v - 2F_t G_t) - 2\Delta(E_{vv} - 2F_{tv} + G_{tt}). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Rappelons l'importante formule de Gauss pour les surfaces dans $\mathbb{R}^3_j$:

$$\begin{cases} \text{dans } \mathbb{R}^3_0,\ K_G = K(I); \\ \text{dans } \mathbb{R}^3_1,\ K_G = \pm K(I), \end{cases} \tag{2.13}$$

où, $\pm$ est le signe de $\langle n, n \rangle$.

2.3 Cas des surfaces réglées dans $\mathbb{R}^3_j$

On garde les notations de la section 2.2.2 .
Considérons maintenant une surface réglée S, connexe, pseudo-riemannienne dans $\mathbb{R}^3_j$ définie par une immersion isométrique :

$$f(t, v) = \alpha(t) + v\omega(t), (t, v) \in \mathcal{U}, \tag{2.14}$$

où $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe $\mathbb{R}^2$ muni de coordonnées globales (t, v) avec, $\omega(t) \neq 0$ pour tout t.

La courbe $t \to \alpha(t)$ est une indicatrice de la surface réglée S, et la courbe $t \to \omega(t)$ est une directrice de S.
On appelle, lorsqu'elle existe, ligne de striction de la surface réglée S l'unique indicatrice β de la surface définie par

$$\beta = \alpha - \frac{\langle \alpha' \times \omega, \omega' \times \omega \rangle}{\langle \omega' \times \omega, \omega' \times \omega \rangle} \omega. \tag{2.15}$$

En effet, l'on peut montrer comme dans [4] que la courbe β définie par la formule 2.15 est indépendante de l'indicatrice α et est indépendante de la directrice ω et du paramètrage t. De plus, elle l'unique indicatrice de la surface réglée vérifiant la condition $\langle \beta', \omega' \rangle = 0$.

Deux génératrices voisines ont "en général" une unique droite orthogonale commune, et la ligne de striction est donnée par la limite de cette droite orthogonale commune.
Dans l'espace Euclidien, on vérifie que cette limite existe si et seulement si $\omega'(t) \neq 0$.
Dans l'espace de Minkowski par contre, on a des exemples plus nombreux de surfaces sans ligne de striction, qui n'ont pas d'analogue euclidien, celles où $\langle \omega(t) \times \omega'(t), \omega(t) \times \omega'(t) \rangle = 0$.

A partir de 2.14 on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} f_t = \alpha' + v\omega'; f_v = \omega; \\ f_{tt} = \alpha'' + v\omega''; f_{tv} = \omega'; f_{vv} = 0; \\ f_t \times f_v = \alpha' \times \omega + v\omega' \times \omega. \end{cases} \tag{2.16}$$

A la surface réglée S nous associons les fonctions suivantes du paramètre t.

$$A_1 = \langle \omega', \omega' \rangle; A_2 = \langle \alpha', \omega \rangle; A_3 = \langle \alpha', \alpha' \rangle; A_4 = \langle \alpha', \omega \rangle; A_5 = \langle \omega, \omega \rangle. \tag{2.17}$$

En appliquant les formules 2.8 et 2.9 en tenant compte de (2.16) on prouve que la première forme fondamentale I de la surface réglée S est :

$$I = (A_1 v^2 + 2vA_2 + A_3)dt^2 + (2A_4 + \frac{1}{2}vA'_5)dtdv + A_5 dv^2. \tag{2.18}$$

Remarque 2.3.1. *(i) Dans $\mathbb{R}^3_0$, on a $A_5(t) \neq 0$ pour tout t.*
(ii) Dans $\mathbb{R}^3_1$ A_5 peut s'annuler. Si dans un intervalle $\mathcal{I} \ni t$, la fonction A_5 ne s'annule pas alors, on définit les coordonnées locales (t, u) en posant $v = g(t)u, \forall\, t \in \mathcal{I}$, où g vérifie $A_5 g^2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ étant le signe de A_5 sur l'intervalle $\mathcal{I}$. Ainsi l'on pourra ramener 2.18 à la forme : $I = (\bar{A}_1 u^2 + 2u\bar{A}_2 + \bar{A}_3)dt^2 + (2\bar{A}_4)dtdu + \varepsilon_2 du^2$; où les $\bar{A}_i, i = 1, 2, 3, 4$ sont des fonctions de t.
Dans la suite on supposera sans perte de généralité que I est donnée par :

$$I = (A_1 v^2 + 2vA_2 + A_3)dt^2 + (2A_4)dtdv + \varepsilon_2 dv^2 \tag{2.19}$$

avec $\varepsilon_2 = 0$ ou bien $\varepsilon_2 = \pm 1$.

Alors Δ s'écrit $\Delta = \varepsilon_2(A_1 v^2 + 2vA_2 + A_3) - {A_4}^2$. On obtient, à partir de 2.16 en appliquant les formules 2.9 et 2.10, les coefficients L, M, N de la seconde forme II :

$$\begin{cases} N = 0, \\ |\Delta|^{\frac{1}{2}} L = \langle \alpha'' + v\omega'', \alpha' \times \omega + v\omega' \times \omega \rangle, \\ |\Delta|^{\frac{1}{2}} M = (\alpha', \omega, \omega'). \end{cases} \tag{2.20}$$

La courbure de Gauss K_G et la courbure moyenne H de la surface réglée S s'obtiennent, en appliquant 2.11 et en tenant compte de 2.19 et de 2.20, par :

$$\begin{cases} K_G = -\frac{(\alpha',\omega,\omega')^2}{\Delta|\Delta|} \\ 2\Delta|\Delta|^{\frac{1}{2}} H = \varepsilon_2\langle\alpha'' + v\omega'', \alpha' \times \omega + v\omega' \times \omega\rangle - 2A_4(\alpha',\omega,\omega'). \end{cases} \tag{2.21}$$

Une conséquence immédiate de 2.21 est que la surface réglée S est minimale dans $\mathbb{R}^3_j$ si et seulement si on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} (r_1)\ \varepsilon_2(\alpha'',\alpha',\omega) - 2A_4(\alpha',\omega,\omega') = 0, \\ (r_2)\ \varepsilon_2\{(\omega'',\alpha',\omega) + (\alpha'',\omega',\omega)\} = 0 \\ (r_3)\ \varepsilon_2(\omega'',\omega',\omega) = 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

En appliquant la formule 2.12 et en tenant compte de 2.19 on obtient

$$K(I) = \frac{A_1A_4 + \varepsilon_2{A_2}^2 - \varepsilon_2A_1A_3}{[\varepsilon_2(A_1v^2 + 2vA_2 + A_3) - {A_4}^2)]^2}. \tag{2.23}$$

2.4 Surfaces minimales réglées dans l'espace de Minkowski ou dans l'espace Euclidien orienté de dimension 3

2.4.1 Les types (1),(2),(3) et (4)

Au vu de la remarque 2.3.1 nous considérons la première forme fondamentale I en 2.19 de la surface réglée S donnée en 2.14 :
$I = (A_1v^2 + 2vA_2 + A_3)dt^2 + (2A_4)dtdv + \varepsilon_2 dv^2$ avec $\varepsilon_2 = 0$ ou bien $\varepsilon_2 = \pm 1$.
Dans le cas où $\varepsilon_2 = 0$ nous avons les deux premiers types de surfaces réglées : le type(1) qui correspond au cas où A_1 est identiquement nulle; le type(2) correspondant au cas où A_1 n'est pas identiquement nulle.

Dans le cas où $\varepsilon_2 = \pm 1$ nous avons les deux autres types de surfaces réglées : le type(3) qui correspond au cas où A_1 est identiquement nul; le type(4) correspondant au cas où A_1 n'est pas identiquement nulle.
Signalons qu'avec la formule vectorielle 2.7 et la définition donnée avec 2.15, une surface aura une ligne de striction si et seulement si on a $\varepsilon_2 A_1 \neq 0$. Donc, une surface réglée de type(1), (2) ou (3) n'a pas de ligne striction et qu'une surface de type(4) a une ligne de striction.

2.4.2 Preuve du théorème2.1.1

Nous suivrons le schéma suivant. On déterminera dans chacun des quatres types (1),(2),(3),(4) les surfaces qui sont minimales. Ensuite nous montrerons que celles obtenues sont les seules.

Cas du type(1) :

$I = (2vA_2 + A_3)dt^2 + (2A_4)dtdv$, $(t, v) \in \mathcal{U}$; avec $A_4 = \langle \alpha', \omega \rangle$ différente de zéro partout.
Alors on vérifie avec 2.12 que $K(I)$ est identiquement nulle. Avec les conditions (2.22), on voit qu'une surface de type(1) est minimale si et seulement si $(\alpha', \omega, \omega') = 0$. Cette condition implique que $\omega' = X(t)\alpha' + Y(t)\omega$. Mais comme $\langle \omega', \omega \rangle = 0$ et que A_4 qui est encore égale à $\langle \alpha', \omega \rangle$ est différent de zéro, alors on a $X(t) = 0$. Par suite, on a :

$$\omega = \exp \int^t Y dt.\omega_0,$$

où ω_0 est un vecteur isotrope constant. Donc dans le type(1) il n'y a que les cylindres à génératrices isotropes dans $\mathbb{R}^3_1$ qui sont minimales.

Cas du type(2) :

$I = (A_1 v^2 + 2vA_2 + A_3)dt^2 + (2A_4)dtdv$, $(t, v) \in \mathcal{U}$; avec $A_4 = \langle \alpha', \omega \rangle$ différent de zéro partout et $A_1 = \langle \omega', \omega' \rangle$ non identiquement nulle.
Alors on vérifie avec 2.12 que $K(I) = \frac{A_1}{{A_4}^2}$.
Si une surface dans ce type est minimale alors on a : $(\alpha', \omega, \omega') = 0$. Mais en utilisant (2.21) on en déduit que sa courbure de Gauss K_G est identiquement nulle; et en tenant compte de l'equation de Gauss 2.13, on voit que $K(I)$ est identiquement nulle . Il en résulte que A_1 est identiquement nulle. Ce qui est absurde. Donc il n'y a pas de surfaces minimales dans le type(2).

Cas du type(3) :

$I = (2vA_2 + A_3)dt^2 + (2A_4)dtdv + \varepsilon_2 dv^2$, $(t, v) \in \mathcal{U}$; avec $\varepsilon_2 = \pm 1$.
En posant $u = v + \varepsilon_2 \int^t A_4 dt$, on définit sur $\mathcal{U}$ de nouvelles coordonnées globales (t, u). Dans ces coordonnées I s'écrit

$$I = (2vA_2 + C)dt^2 + \varepsilon_2 du^2,$$

où C est une fonction de t. Dans les coordonnées (t, u) les courbes $(u = u_0)$, sont les trajectoires ou indicatrices orthogonales aux génératrices qui elles, sont les courbes $(t = t_1)$. Soit alors $\gamma = \gamma(t)$ une courbe dans $\mathbb{R}^3_j$ orthogonale aux génératrices.

Considérons d'abord le cas particulier où ω' est identiquement zéro. Le vecteur ω est constant et non-isotrope. Comme γ est une indicatrice orthogonale aux génératrices alors, la condition (2.22) donne $(\gamma'', \gamma', \omega) = 0$. Mais comme γ' et ω sont linéairement indépendants, on en déduit que $\gamma'' = X(t)\gamma' + Y(t)\omega$. Par suite, on a $\gamma'' = X(t)\gamma'$ car $\langle\gamma'', \omega\rangle = (\langle\gamma', \omega\rangle)' = 0$. Donc γ est un segment de droite. Il s'en suit que les surfaces minimales qu'on obtient dans ce cas sont planes.

Maintenant nous supposons ω' non identiquement nul, et cherchons les surfaces minimales.
Considérons un intervalle $\mathcal{I}$ sur lequel ω' ne s'annule pas (sauf éventuellement aux extrémités de $\mathcal{I}$ où il peut prendre la valeur zéro). Mais $\forall\ t \in \mathcal{I}$ on a $\langle\omega'(t), \omega'(t)\rangle = A_1(t) = 0$.
Dans ce cas on voit que pour chaque $t \in \mathcal{I}$, les vecteurs $\omega(t)$ et $\omega'(t)$ engendrent un plan Π_t dégénéré dans $\mathbb{R}^3_1$ du fait qu'on a $\langle\omega' \times \omega, \omega' \times \omega\rangle = 0$. En utilisant la condition (r_3) de (2.22) $\forall\ t \in \mathcal{I}$ $(\omega'', \omega', \omega) = 0$, on en déduit que les plans $\Pi_t, t \in \mathcal{I}$, coincident avec un plan dégénéré Π_1 de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^3_1$. Car ω'' vérifie dans $\mathcal{I}$ une équation différentielle de la forme :

$$\omega'' = a_1(t)\omega + a_2(t)\omega'.$$

D'après [7], un plan dégénéré dans $\mathbb{R}^3_1$ ne contient qu'une direction isotrope. On peut donc supposer que ω' est parallèle au vecteur $(1,0,1)$. On en déduit, en tenant compte de la relation $\langle\omega, \omega\rangle = \pm 1$ que :
$\omega' = (\sigma', 0, \sigma'); \omega = (\sigma + b, \pm 1, \sigma + b)$, avec $\sigma'(t) \neq 0\ \forall\ t \in \mathcal{I}$, et b une constante.

Vu que $\sigma'(t) \neq 0\ \forall\ t \in \mathcal{I}$, on choisit $s = \sigma + b$ comme paramètrage ; et on a $\omega = (s; \epsilon; s), \epsilon = \pm 1$. Par suite, on définit dans $\mathcal{U}$ les nouvelles coordonnées (s, u) dans lesquelles nous allons chercher maintenant une indicatrice orthogonale aux génératrices $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ dans $\mathbb{R}^3_1$, c'est dire satisfaisant la relation (r_4) : $\langle\dot\gamma, \omega\rangle = 0$ où $\dot\gamma = \frac{d\gamma}{ds}$. Désignons par $\mathcal{J}$ l'intervalle décrit par le paramètre s lorsque le paramètre t décrit $\mathcal{I}$.
Comme $\ddot\omega = 0$, (2.22) entraine que :

$$\begin{cases} (r_1)\ (\dot\gamma, \omega, \ddot\gamma) = 0, \\ (r_2)\ (\ddot\gamma, \dot\omega, \omega) = 0, \\ (r_4)\ \langle\dot\gamma, \omega\rangle = 0, \end{cases}$$

Un calcul simple montre que

$$\begin{cases} (r_1) & \Rightarrow & s(\dot z - \dot x)\ddot y + s(\ddot x - \ddot z)\dot y + \epsilon(\dot x\ddot z - \dot z\ddot x) = 0, \\ (r_2) & \Rightarrow & \ddot x - \ddot z = 0, \\ (r_4) & \Rightarrow & s(\dot x - \dot z) + \epsilon\dot y = 0. \end{cases}$$

Après une translation éventuelle, on obtient le paramètrage suivant de γ :

$$s \in \mathcal{J} \to \gamma(s) = (-\frac{1}{6}cs^3 + ds; -\frac{1}{2}\epsilon cs^2; -\frac{1}{6}cs^3 + (d-c)s),$$

où , c et d sont des constantes ;
En effet, l'équation (r_2) entraine que la fonction $\dot x - \dot z$ est une contante ; et soit c sa valeur. En insérant c dans l'équation (r_4) on trouve $y(s)$. L'équation (r_1)

donnera : $c^2 s + c\ddot{x} = 0$. Lorsque $c = 0$ on vérifie facilement que les surfaces solutions sont des plans dégénérés dans $\mathbb{R}^3_1$. Donc la constante c est non nulle et on trouve comme solutions une famille à 3 paramètres $(c, d, \epsilon) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$, de surfaces minimales dans $\mathbb{R}^3_1$ décrites par :

$$f(s,u) = (-\frac{1}{6}cs^3 + ds; -\frac{1}{2}\epsilon cs^2; -\frac{1}{6}cs^3 + (d-c)s) + u(s;\epsilon;s). \tag{2.24}$$

En particulier, en appliquant 2.9, 2.11 et 2.24 on trouve que la courbure de Gauss K_G d'une surface de cette famille est :

$$K_G = \frac{\epsilon c^2}{(2uc + 2dc - c^2)|2uc + 2dc - c^2|}. \tag{2.25}$$

Vérifions que $\omega'(t)$ est différent de zéro pour tout t. En effet, considérons toujours l'intervalle $\mathcal{I}$ défini ci-dessus. Soit t_0 une extrémité de $\mathcal{I}$; et supposons $\omega'(t_0) = 0$. Alors le long de la génératrice $\mathcal{D}_{t_0}$ de parmètre $t = t_0$ qui contient les points (t_0, v) la courbure de Gauss s'annule d'après la formule 2.11 ; mais ceci est incompatible avec la formule 2.25. Car, en les points de $\mathcal{U}$ de coordonnées (s,u) avec $s \in \mathcal{J}, u = u_o$ une constante, qui sont sur une indicatrice qui va couper la génératrice $\mathcal{D}_{t_0}$, la courbure de Gauss est une constante non nulle, d'après 2.25 . Donc $\omega'(t_0) \neq 0$.
Nous avons dans le type(3) les surfaces minimales réglées de la famille $\mathcal{S}(c, d, \epsilon)$ dans $\mathbb{R}^3_1$ définies par :

$$f(s,u) = (-\frac{1}{6}cs^3 + ds; -\frac{1}{2}\epsilon cs^2; -\frac{1}{6}cs^3 + (d-c)s) + u(s;\epsilon;s), \tag{2.26}$$

avec $(s,u) \in \mathbb{R}\times] - \infty; \frac{c-2d}{2}[$ ou bien $(s,u) \in \mathbb{R}\times]\frac{c-2d}{2}; +\infty[$.
Si l'intervalle $\mathcal{J}$ défini ci-dessus n'est pas $\mathbb{R}$, alors la surface réglée S est un ouvert d'une surface de la famille $\mathcal{S}(c, d, \epsilon)$.

Cas du type(4) :

$I = (A_1 v^2 + 2vA_2 + A_3)dt^2 + (2A_4)dtdv + \varepsilon_2 dv^2$, $(t,v) \in \mathcal{U}$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, et $A_1 = \langle \omega', \omega' \rangle$ est non identiquement nulle.
En posant $v_1 = v + \varepsilon_2 \int^t A_1 dt$, on définit comme précédemment sur $\mathcal{U}$ de nouvelles coordonnées globales (t, v_1) telles que les courbes de coordonnées $v_1 = v_1^0, v_1^0$ une constante, soient orthogonales aux génératrices.
Considérons un intervalle $\mathcal{I}$ sur lequel A_1 ne s'annule pas, et définissons le paramètre s tel que $s(t) = \int^t \sqrt{\varepsilon_1 A_1} dt$, où $\varepsilon_1 = \pm 1$ est le signe de A_1 sur l'intervalle $\mathcal{I}$. Définissons dans $\mathcal{U}$ les coordonnées (s, v_1) en posant $s(t) = \int^t \sqrt{\varepsilon_1 A_1} dt$. Soit $\mathcal{J}$ l'intervalle décrite par s lorsque t décrit $\mathcal{I}$. On a (i) : $\langle \omega, \omega \rangle = \varepsilon_2$; $\langle \dot{\omega}, \dot{\omega} \rangle = \varepsilon_1$; $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2$.
Il faut se rappeler qu'une surface du type(4) a une ligne striction β qui vérifie la relation $\langle \dot{\beta}, \dot{\omega} \rangle = 0$.
Comme précédemment on déduit de la condition (2.22) (r_3) que les vecteurs ω

et $\dot{\omega}$ engendrent un plan Π qui est parallèle et nondégénéré dans $\mathbb{R}^3_j$. En fait, la condition (r_3) entraine que $\ddot{\omega}$ vérifie une relation de la forme :

$$\ddot{\omega} = a_1(s)\omega + a_2(s)\dot{\omega}.$$

En utilisant les relations (i) ci-dessus on obtient : $a_2(s) = 0$; $a_1(s) = -\varepsilon_1\varepsilon_2$.
Car d'une part, on a $0 = \langle \ddot{\omega}, \dot{\omega} \rangle = a_2\varepsilon_2$; et d'autre part on a $0 = \frac{d(\langle \omega, \dot{\omega} \rangle)}{ds} = \varepsilon_2 + \langle \omega, \ddot{\omega} \rangle$.
Par conséquent ω est solution de l'equation différentielle

$$\ddot{\omega} = -\varepsilon_1\varepsilon_2\omega. \tag{2.27}$$

Nous allons maintenant chercher comme précèdemment, dans les coordonnées (s, v_1), une indicatrice $\gamma = \gamma(s)$ dans $\mathbb{R}^3_j$ orthogonale aux génératrices; c'est à dire satisfaisant la relation $\langle \dot{\gamma}(s), \omega(s) \rangle = 0$.
Considérons dans $\mathbb{R}^3_j$ le repère orthonormé positif $\{e_1, e_2, e_3\}$ défini par

$$(ii) : e_1 = \omega; \; e_2 = \dot{\omega}; \; e_3 = \mu e_1 \times e_2, \text{ où}$$

- μ est égale à $+1$ dans le cas $j = 0$,
- dans le cas $j = 1, \mu$ sera choisie de telle sorte que $(e_1, e_2, e_3) = +1$.

On a : $\dot{e_3} = \mu[(e_2 \times e_2) + (e_1 \times ((-\varepsilon_1\varepsilon_2 e_1))] = 0$; c'est à dire que e_3 est un vecteur constant normal à Π.
Posons $\gamma(s) = x(s)e_1 + y(s)e_2 + z(s)e_3$; on a : $\dot{\gamma} = X(s)e_1 + Y(s)e_2 + \dot{z}e_3$ où $X = (\dot{x} - \varepsilon_1\varepsilon_2 y); Y = (x + \dot{y})$.

La condition $\langle \dot{\gamma}, \omega \rangle = 0$ entraine que $X(s) = 0$. Par suite on a :

$$(iii) : \begin{cases} \dot{\gamma} = Ye_2 + \dot{z}e_3 \\ \ddot{\gamma} = -\varepsilon_1\varepsilon_2 Y e_1 + \dot{Y}e_2 + \ddot{z}e_3. \end{cases}$$

En utilisant (ii), (iii), et 2.27, on voit que (2.22) implique :

$$\begin{cases} (r_1) \; (\ddot{\gamma}, \dot{\gamma}, \omega) = 0 \\ (r_2) \; (\ddot{\gamma}, \dot{\omega}, \omega) = 0. \end{cases}$$

Un cacul simple donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} (r_1) \Rightarrow & \ddot{z}Y - \dot{z}\dot{Y} = 0 \\ (r_2) \Rightarrow & \ddot{z} = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \dot{z} = a \\ a\dot{Y} = 0; \text{ a une constante.} \end{cases}$$

Si $a = 0$, alors les trajectoires orthogonales aux génératrices sont dans un plan $z = constante$; et par suite les surfaces minimales solutions sont planes.

Si maintenant $a \neq 0, Y$ est une fonction constante. En notant Y_0 cette constante, on obtient : $\dot{\gamma} = Y_0\dot{\omega} + ae_3$. On en déduit que

$$\gamma = Y_0\omega + (as + b)e_3; \ b \in \mathbb{R}.$$

Il en résulte que la ligne de striction β est le segment de droite $\beta(s) = (as + b)e_3; \ s \in \mathcal{J}$.
Ainsi dans les coordonnées (s, v_1) on a :

$$f(s, v_1) = Y_0\omega + (as + b)e_3 + v_1\omega(s).$$

En considérant les coordonnées (s, u) avec $u = v_1 + Y_0$, on peut chercher les solutions sous la forme :

$$\begin{cases} f(s, u) = (as + b)e_3 + u\omega(s) \\ \ddot{\omega} = -\varepsilon_1\varepsilon_2\omega. \end{cases} \tag{2.28}$$

Pour résoudre 2.28 on peut composer f avec des isométries positives de l'espace $\mathbb{R}^3_j$.
En particulier, notons qu'en composant une isométrie linéairement positive A avec f, on transforme f en une surface réglée équivalente de directrice $\bar{\omega} = A\omega$ qui vérifie $\ddot{\bar{\omega}} = -\varepsilon_1\varepsilon_2\bar{\omega}$, et de ligne de striction $A\beta(s) = (as + b)Ae_3$. Quitte à faire une translation du paramètre s, on va supposer que $0 \in \mathcal{J}$.
On distinguera deux cas.
Le premier cas est le cas suivant.

a) Le cas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, dans $\mathbb{R}^3_j$.

En considérant l'isomètrie linéaire positive A de $\mathbb{R}^3_j$ définie à $s = 0$ par

$$Ae_{1|s=0} = \overrightarrow{i}, \ Ae_{2|s=0} = \overrightarrow{j}, \ Ae_3 = \overrightarrow{k},$$

on obtient :

$$\bar{\omega}(s) = (\cos(s), \sin(s), 0).$$

Alors, à isomètries de $\mathbb{R}^3_j$ près, on a les solutions suivantes qui dépendent du paramètre $a \in \mathbb{R}^\star$:

$$f(s, u) = (0, 0, as) + u(\cos(s), \sin(s), 0). \tag{2.29}$$

b) Le cas $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$ dans $\mathbb{R}^3_1$.

Si $\varepsilon_1 = 1; \varepsilon_2 = -1$, on choisit l'isomètrie linéaire A telle que :

$$Ae_{1|s=0} = \overrightarrow{k}, \ Ae_{2|s=0} = \overrightarrow{i}, \ Ae_3 = \overrightarrow{j}.$$

Alors, on obtient :

$$\bar{\omega}(s) = (\cos(s), \sin(s), 0).$$

Par suite, à isométries de $\mathbb{R}^3_1$ près, on a les solutions suivantes qui dépendent du paramètre $a \in \mathbb{R}^\star$:

$$f(s,u) = (0, as, o) + u(\sinh(s), 0, \cosh(s)). \tag{2.30}$$

Et si $\varepsilon_1 = -1; \varepsilon_2 = 1$, on trouve par un raisonnement analogue les solutions dépendantes du paramètre $a \in \mathbb{R}^\star$

$$f(s,u) = (0, as, o) + u(\cosh(s), 0, \sinh(s)). \tag{2.31}$$

On retrouve facilement avec 2.29, 2.30, et 2.31 en prenant l'intervalle $\mathcal{J} = \mathbb{R}$, les solutions dans $\mathbb{R}^3_j$ données dans le théorème 2.1.1 par 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4.

Un calcul simple montre qu'un hélicoïde euclidien donnés en 2.29 a pour courbure de Gauss

$$K_G = -\frac{a^2}{(u^2 + a^2)^2}; \tag{2.32}$$

et que les hélicoïdes dans l'espace de Minkowski donnés en 2.29 ,2.30 et 2.31 ont pour courbure de Gauss respectivement

$$-\frac{a^2}{(u^2 - a^2)|u^2 - a^2|}, \; -\frac{a^2}{(u^2 + a^2)^2}, \; -\frac{a^2}{(a^2 - u^2)|a^2 - u^2|}. \tag{2.33}$$

Maintenant montrons que $\langle \omega'(t), \omega'(t) \rangle$ est différent de zéro pour tout t.
En effet, supposons qu'a l'extrémité t_0 de l'intervalle $\mathcal{I}$ ci-dessus, $A_1(t_0)$ qui est encore égale à $\langle \omega'(t_0), \omega'(t_0) \rangle$ soit nulle. Alors, il faut en conclure que $\omega'(t_0) = 0$. Car si $\omega'(t_0) \neq 0$ alors, les vecteurs $\omega'(t_0)$ et $\omega(t_0)$ vont être linéairement indépendants et vérifierons la relation : $\langle \omega'(t_0) \times \omega(t_0), \omega'(t_0) \times \omega(t_0) = 0$; ce qui est impossible dans le plan nondégénéré Π qui contient ces deux vecteurs. Ainsi la courbure de Gauss s'annule le long de la génératrice de paramètre t_0 ; et l'on peut montrer comme précèdemment que ceci est incompatible avec les formules 2.32 et 2.33. Il en résulte que $\langle \omega'(t), \omega'(t) \rangle \neq 0$ pour tout t.

Maintenant revenons sur la remarque 2.3.1. En particulier, sur la première forme fondamentale I donnée par 2.18 pour la surface réglée S la plus générale :

$$I = (A_1 v^2 + 2vA_2 + A_3)dt^2 + (2A_4 + \frac{1}{2}vA'_5)dtdv + A_5 dv^2, \; (t,v) \in \mathcal{U}.$$

Supposons S minimale et que A_5 qui est encore égale à $\langle \omega, \omega \rangle$, soit différent de zéro partout dans un intervalle $\mathcal{I}$.
Alors, au vu de ce qui précède, on voit que les points (t,v) de la surface tels que $t \in \mathcal{I}$ et $A_5(t) \neq 0$, appartiennent à une surface S_0 de type(3) ou de type(4) ; lorsque S_0 est type (3) ou (4) alors, sur S_0, la diectrice ω n'est jamais isotrope. Donc A_5 est partout différent de zéro. Ceci achève la preuve du théorème 2.1.1.

2.5 Remarque finale.

Ces exemples s'interprètent dans le cadre de la géomètrie différentielle affine. Sans entrer dans les détails (voir [5]) rappelons les faits suivants.
Si $f : M \to \mathbb{R}^3$ est une immersion d'une variété M de dimension 2 dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni de sa connexion canonique, et si n est un champ de vecteur transverse le long de cette immersion, la décomposition

$$\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^T + h(X,Y)n \quad X \text{ et } Y \text{ champs tangents à } M$$

définit un tenseur symétrique h sur M.
Ce tenseur dépend bien sur de n, mais sa classe conforme, et en particulier son rang n'en dépendent pas.

Une immersion est dite *affinement non dégénérée* si h est de rang maximum. Il est facile de vérifier que les immersions 2.2 2.3 2.4 et 2.5 sont affinement non dégénéré sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. De plus 2.5 définit une surface remarquable en géomètrie différentielle affine, appelée surface de Cayley (voir dans [5] ou dans [6]). Nous reviendrons sur ces points dans un travail ultérieur.

Bibliographie

[1] K.L.Duggal and A.Bejancu, Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifoldsand Applications, Kluwer Academic Publishers.

[2] A.Bejancu, Lightlike curves in Lorentz manifolds,Publi.Math.Debrecen,44(1994),no.f.1-2, pp145-155

[3] G.Darboux,Lecons sur la thórie générale des surfaces,Chelsea (Livre III)

[4] Manfredo P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces(pp 190-191).

[5] K.Nomizu and T.Sasaki, Affine differential geometry, Cambrige tracts in mathematics 111.

[6] K.Nomizu and U.Pinkall, Cayley surfaces in affine Differential Geometry, Tohoku Math.J.41(1989),589-596.

[7] Barret Oneil, Semi-Riemannian geometry with application to relativity, Academic Press,Inc.

[8] M.Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, Vol III deuxième edition, Publish or Perish,Inc(pp 79-80;pp 213-215;pp 244-247; pp 266).

[9] M.Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, Vol IV deuxième edition, Publish or Perish,Inc(p.39)

[10] Tilla Weinstein, An introduction to lorentz surfaces, Walter de Gruyer, Berlin. New York 1996,(pp 150;pp 162-163; pp 153-156).