

UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES



DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



THESE

Présentée pour obtenir le Grade de Docteur de 3^e Cycle

Spécialité : Mathématiques Pures

Option : Algèbre

**CARACTERISATION DES ANNEAUX COMMUTATIFS
POUR LESQUELS LES MODULES VERIFIANT(S) SONT
DE TYPES FINIS.**

Présenté par :

Cheikh Thiécoumba GUEYE

Soutenue le 21 Mars 1998 devant la commission d'Examen

Président : Hamet SEYDI : Professeur à l'U.C.A.D

Membres : Chérif BADJI : Professeur à l'U.C.A.D.

Mamadou Makhtar DIOP : Maître-Assistant à l'U.C.A.D.

Mamadou SANGHARE : Charge d'Enseignement à l'U.C.A.D.

Année Académique 1997 - 1998

SOMMAIRE

INTRODUCTION	01
Chapitre I	03
Introduction	03
1°) – Modules simples et Modules semi-simples	03
2°) – Modules artiniens et Modules noëttériens	05
3°) – Modules injectifs – Modules projectifs	13
4°) – Les anneaux à identités polynomiales	19
Chapitre II	20
Introduction	20
1°) – Un anneau sur lequel tout A-module de type fini vérifie la propriété (S).....	20
2°) - Exemple d'un module qui vérifie la propriété (S) et qui n'est pas de type fini	23
3°) – Exemple de A-module de type fini qui ne vérifie pas la propriété (S).....	29
Chapitre III	30
Introduction	30
1°) – F.G.S – Anneaux Commutatifs	31
BIBLIOGRAPHIE :	39

REMERCIEMENTS

☼ *A* mon Directeur de recherches Monsieur Mamadou SANGHARE qui est à l'origine de cette thèse. C'est une grande joie pour moi que de pouvoir lui exprimer ma sincère reconnaissance et ma profonde gratitude pour la bienveillance avec laquelle il m'a guidé et pour les conseils et les encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail. J'ai apprécié tout particulièrement sa patience et sa grande disponibilité à mon égard.

☼ *A* toute l'équipe du 3^e Cycle d'Algèbre

☼ *A* tous les enseignants de la faculté des Sciences qui ont participé à ma formation.

INTRODUCTION

L'origine de ce travail est la proposition suivante :

"Soit A un anneau commutatif, M un A -module de type fini, alors tout endomorphisme surjectif de M est un isomorphisme".

Soit A un anneau non nécessairement commutatif, M un A -module ; on dit que M vérifie la propriété (S) si tout A -endomorphisme de M surjectif est un isomorphisme.

Soit A un anneau, \mathfrak{T} la classe des A -modules de type fini, \mathfrak{S} la classe de A -modules vérifiant la propriété (S), en 1969 **W. V. Vasconcelos** a démontré que si A est commutatif $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}$. En général cette inclusion est stricte : dans [12] **Kaïdi A.M** et **SANGHARE** ont donné l'exemple d'un module sur un anneau commutatif qui vérifie (S) et qui n'est pas de type fini.

Notre travail est de caractériser les anneaux commutatifs pour lesquels \mathfrak{T} et \mathfrak{S} sont identiques.

Pour aborder cette étude nous avons divisé cette thèse en trois chapitres.

Le **Chapitre I** est un rappel de certains résultats classiques, des définitions, des notations que nous utiliserons tout au long ce travail.

Dans le **Chapitre II** nous faisons une synthèse de différents résultats que nous avons pu recueillir d'articles étudiant les modules qui vérifient la **propriété (S)**. Notamment « on finitely generated flat modules » de **W. V. Vasconcelos** : « on injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules » de **E.P. Armendariz**, **Joe W. Fisher**, **Robert L. Snider** et « une caractérisation des anneaux à idéaux principaux » de **Kaïdi El Amin Mobhtar** et **Sangharé Mamadou**.

Le **Chapitre III** est consacré à la caractérisation des **FGS**-anneaux commutatifs, en montrant d'abord que tout idéal premier d'un tel anneau est maximal et que les idéaux maximaux sont en nombre fini. En suite qu'un tel anneau est semi-parfait. Et enfin sous certaines conditions on montre qu'un **FGS**-anneau commutatif est artinien.

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Ce chapitre contient essentiellement des rappels et des résultats que nous utiliserons dans toute la suite de cette thèse. Il est divisé en quatre paragraphes : le premier traite des modules simples et semi-simples et on donne quelques résultats généraux ; le second des modules artiniens et noethériens ; le troisième étudie quelques propriétés des modules injectifs, projectifs, semi-parfaits et le quatrième un bref aperçu des P.I. anneaux

Dans tout ce travail, et sauf mention expresse du contraire, le mot anneau désignera un anneau associatif non (nécessairement) commutatif possédant un élément unité noté 1 ; le mot module, un module à gauche unitaire. Un anneau A muni de sa structure de A -module sera noté ${}_A A$. Soit A un anneau. On dit que l'anneau A est local s'il admet un seul idéal à gauche maximal m . Alors m est l'idéal bilatère ensemble des éléments non inversibles de A et l'anneau quotient A/m est un corps non nécessairement commutatif. Quand nous parlons de radical de A , il s'agira du radical de Jacobson de A .

Soit M un A -module on appelle série de composition de M , une suite de sous-modules de M tels que $(0) = M_n \subset M_{n-1} \subset \dots \subset M_0 = M$ et M/M_{i-1} soit un A -module simple pour $1 \leq i \leq n-1$ l'entier $n = \ell(M)$ est appelé longueur du A -module M .

§1 – MODULES SIMPLES ET MODULES SEMI-SIMPLES

Soit A un anneau. On rappelle qu'un A -module M est simple (resp. semi-simple) s'il n'est pas réduit à $\{0\}$ et s'il ne contient pas d'autres sous-modules que M et $\{0\}$ (resp s'il est somme directe de sous-modules simples). Un anneau A est dit simple (resp. semi-simple) si le A -module ${}_A A$ est simple (resp semi-simple).

Proposition I-1 ([6] proposition 1 P. 46)

Soit A un anneau ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) Tout A -module est semi-simple
- b) Le module ${}_A A$ est semi-simple.

Démonstration :

a) \Rightarrow b) est évident

b) \Rightarrow a) . En effet tout A -module est isomorphe au quotient d'un module $A^{(X)}$ or tout quotient d'un module semi-simple est semi-simple.

Définition I-2 :

On appelle **radical** d'un A -module M (resp. de l'anneau A) le sous-module intersection des sous-modules maximaux de M , ou, ce qui revient au même, l'ensemble des éléments de M annulés par tout homomorphisme de M dans un A -module simple (resp. intersection des idéaux à gauche maximaux de A). On dit que M est sans radical si son radical est nul.

Proposition I-3 ([6] proposition 5 P. 65)

Pour qu'un A -module M soit sans radical, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un sous-module d'un produit de A -modules simples.

Démonstration :

Si M est sans radical, alors il existe une famille $(S_i)_{i \in I}$ de A -modules simples et une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'homomorphismes de M dans S_i , telles que les noyaux des f_i aient $\{0\}$ pour intersection. On a donc le diagramme de A -modules commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \prod S_i, i \in I \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & & S_i \\
 \swarrow & & \searrow \\
 f_i & & P_i
 \end{array}$$

En effet si \mathbf{M} est sans radical, alors il existe une famille (\mathbf{N}_i) de sous-modules à gauche maximum de \mathbf{M} . Pour tout i $\mathbf{M}/\mathbf{N}_i = \mathbf{S}_i$ est un \mathbf{A} -module simple et la surjection canonique

$M \xrightarrow{\mu} \mathbf{M}/\mathbf{N}_i = \mathbf{S}_i$, $x \mapsto \mathbf{f}_i(x) = \bar{x}$ est un homomorphisme de \mathbf{A} -modules et

$$\bigcap_{i \in I} \mathbf{Ker} \mathbf{f}_i = \bigcap_{i \in I} \mathbf{N}_i = \{\mathbf{0}\}.$$

$\mathbf{f}_i = \mathbf{P}_i \circ \mathbf{f}$ et $\mathbf{Ker} \mathbf{f} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{Ker} \mathbf{f}_i$ or $\bigcap_{i \in I} \mathbf{Ker} \mathbf{f}_i = \{\mathbf{0}\}$ donc $\mathbf{Ker} \mathbf{f} = \{\mathbf{0}\}$, d'où \mathbf{f} est une injection de \mathbf{M} dans $\prod_{i \in I} \mathbf{S}_i$. Par conséquent $\mathbf{M} \simeq \mathbf{Im} \mathbf{f}$, $\mathbf{Im} \mathbf{f}$ étant un sous-module du produit de \mathbf{A} -modules simples $\prod_{i \in I} \mathbf{S}_i$.

Réciproquement si \mathbf{M} est un sous-module d'un produit de modules simples $\prod_{i \in I} \mathbf{S}_i$, pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ dans \mathbf{M} , il existe un indice $i \in I$ tel que $\mathbf{P}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$. Soit \mathbf{g} la restriction de \mathbf{P}_i à \mathbf{M} , \mathbf{g} est un homomorphisme de \mathbf{M} dans \mathbf{S}_i tel que $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ donc d'après la définition I-2, \mathbf{M} est sans radical.

Corollaire I-4 :

Tout module semi-simple est sans radical.

2) Modules artiniens et modules noethériens

Soit \mathbf{A} un anneau et \mathbf{M} un \mathbf{A} -module nous dirons que le module \mathbf{M} est **artinien** (resp. **noethérien**) si toute suite décroissante (resp. croissante) de sous-modules de \mathbf{M} est stationnaire. Le \mathbf{A} -module \mathbf{M} est dit de longueur finie si elle est à la fois artinien et noethérien. L'anneau \mathbf{A} est dit artinien (resp. noethérien) si ${}_A \mathbf{A}$ est artinien (resp. noethérien).

Proposition I-5 : ([25] proposition 1.17 p. 17)

Soit A un anneau et soit $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$

une suite exacte de A -modules et d'homomorphismes de A -modules. M est artinien (resp. noethérien) si et seulement si N et K sont artiniens (resp. noethériens).

Démonstration :

On peut supposer que N est un sous-module de M et que $K \simeq M/N$.

Si M est artinien il en est de même que N car les sous-modules de N sont des sous-modules de M . Et M/N est artinien car la famille des sous-modules de M/N est en bijection avec celle des sous-modules de M qui contiennent N . Cette bijection conserve le sens de l'inclusion.

Réciproquement si N et M/N sont artiniens, soit $(I) M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_i \supseteq M_{i+1} \supseteq \dots$ une suite de sous-modules de M décroissante. Alors il existe un entier n_0 à partir duquel la suite $N = M_0 \cap N \supseteq N \cap M_1 \supseteq \dots \supseteq N \cap M_i \supseteq \dots$ est stationnaire et il existe un entier m_0 à partir duquel

$M/N = M_0/N \supseteq M_1/N \supseteq \dots \supseteq M_i/N \supseteq \dots$ est stationnaire.

Posons $q = \sup(m_0, n_0)$ alors $N \cap M_n = N \cap M_q$ et $N + M_n/N = N + M_q/N \quad \forall n \geq q$.

Soit $x \in M_n$; si $x \in N$ alors $x \in M_q$ donc la suite est stationnaire.

Soit $x \in M_n$ et $x \notin N$ alors la classe de x modulo N est un élément de

$N + M_q/N = N + M_q/N$ donc il existe $y \in M_q$ tel que la classe de x modulo N est égale à la classe de y modulo N .

Donc $x - y = 0$ d'où $x - y \in N$, puisque il appartient déjà à M_q alors $x - y \in N \cap M_q = N \cap M_q$ et par conséquent $x \in M_q$. La démonstration est identique pour le cas noethérien.

Corollaire I-6 : *Toute somme directe finie de modules artiniens est artinien.*

Démonstration :

La démonstration se fait par récurrence sur n . Soit $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{M}_n$ où les \mathbf{M}_i sont artiniens. Pour $n = 2$ on a alors une suite exacte :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{M}_1 \longrightarrow \mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2 \longrightarrow \mathbf{M}_2 \longrightarrow \mathbf{0}$$

Il suffit d'appliquer la **proposition I.5**.

Proposition I.7 : ([6] Théorème 4 P. 69)

Pour qu'un module soit semi-simple et de longueur fini, il faut et suffit qu'il soit artinien et sans radical.

Démonstration :

On sait déjà qu'un module semi-simple est sans radical (**corollaire I-4**) s'il est de longueur fini il est alors artinien.

Réciproquement, soit \mathbf{M} un module artinien sans radical. Soit \mathbf{R} un élément maximal de l'ensemble des intersections finies de sous-modules maximaux de \mathbf{M} . Pour tout sous-module maximal \mathbf{N} de \mathbf{M} , on a : $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} \subset \mathbf{R}$, d'où par définition de \mathbf{R} , $\mathbf{N} \cap \mathbf{R} = \mathbf{R}$ et par suite $\mathbf{R} \subset \mathbf{N}$. Comme le radical de \mathbf{M} est nul, il en résulte que $\mathbf{R} = \{0\}$. Il existe donc une famille finie de sous-modules maximaux \mathbf{M}_i ($1 \leq i \leq n$) d'intersection nulle. Soit alors le diagramme d'homomorphisme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \xrightarrow{f} & \prod_{i=1}^n (\mathbf{M}/\mathbf{M}_i) \\ & \searrow f_i & \uparrow P_i \\ & & \mathbf{M}/\mathbf{M}_i \end{array}$$

$$f_i = P_i \circ f \text{ et } \text{Ker} f = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} f_i$$

Or $\forall i, 1 \leq i \leq n$, $\text{Ker}f_i = M_i$, donc $\text{Ker}f = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}f_i = \bigcap_{i=1}^n M_i = \{0\}$ d'où f est injectif.

Posons $P = \prod_{i=1}^n \left(M/M_i \right)$ P est semi-simple, en tant que produit fini (somme directe externe) de module simple. P est de longueur finie en tant que produit fini de modules simples (un module simple est de longueur finie). Comme P est semi-simple et de longueur finie il en est de même que M .

Proposition I-8 : (*[6] proposition 12 p. 71*)

Soit A un anneau possédant un idéal bilatère nilpotent J tel que A/J soit artinien de radical nul (par exemple un anneau artinien). Pour tout A -module M les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) M est de longueur finie
- b) M est artinien
- c) M est noethérien.

Démonstration :

On sait d'après la définition d'un module de longueur finie que a) \Rightarrow b) et a) \Rightarrow c).

Supposons que M soit artinien (resp. noethérien).

Soit P un entier non nul tel que $J^P = \{0\}$. Soit le A -module M/JM , on sait que M est de longueur finie si et seulement si JM et M/JM sont de longueur finie (**Proposition 1-5**) et que $\ell(M) = \ell(JM) + \ell(M/JM)$ (**[15] proposition 4-6**)

De même JM est de longueur finie si et seulement si J^2M et JM/J^2M sont de longueur finie, on poursuit ce raisonnement jusqu'à $J^{P-1}M$ et il sera de longueur finie si et seulement si J^PM et $J^{P-1}M/J^PM$ sont de longueur finie. Par conséquent pour montrer que M est de longueur finie, il suffit de démontrer que $M/JM, JM/J^2M, \dots, J^{P-1}M/J^PM$ sont de longueur finie. Or ces A -modules sont annihilés par J , donc peuvent être considéré comme des A/J -modules. Puisque A/J est semi-simple (**Proposition 1-7**) alors les

A/J -modules $J^{P-k}M/J^{P-k+1}M$ $1 \leq k \leq P$ sont semi-simples donc sont sans radical (**corollaire I-4**). Donc les A/J -modules $J^{P-k}M/J^{P-k+1}M$ sont de longueur finie (**proposition I-7**). D'où M est de longueur finie.

Corollaire I-9 :

Soit A un anneau artinien. Pour tout A -module M , les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) M est de longueur finie
- b) M est artinien et noethérien.

Démonstration :

Puisque A est artinien, le radical de **Jacobson** noté $J(A)$ est un idéal bilatère nilpotent. $A/J(A)$ est artinien puisque A est artinien (**proposition I-5**). $A/J(A)$ est semi-simple donc il est de radical nul. Donc d'après **proposition I-8** les équivalences sont établies. En particulier tout anneau artinien est noethérien.

Proposition I-10 ([3] proposition 8-7 p. 90)

Tout anneau commutatif artinien A est produit direct fini d'anneaux artiniens locaux

Démonstration :

Soit m_i ($1 \leq i \leq n$) les idéaux maximaux de A . On sait que

$$\prod_{i=1}^n m_i^k = \left(\prod_{i=1}^n m_i \right)^k = \left(\bigcap_{i=1}^n m_i \right)^k.$$

Posons $J = \bigcap_{i=1}^n m_i$ le radical de **Jacobson** de A , puisque A est artinien il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$

tel que $J^{n_0} = \{0\}$. Soit $n_0 = k$ donc $\left(\bigcap_{i=1}^n m_i \right)^k = \{0\}$. Or les m_i sont étrangers deux à deux

car un idéal maximal qui contiendrait $m_i^k \cdot m_j^k$ ($i \neq j$) contiendrait m_i et m_j ce qui

contredit le fait que \mathfrak{m}_i et \mathfrak{m}_j sont distincts si $i \neq j$) donc $\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^k = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^k = \{0\}$. Puisque

$\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i^k = \{0\}$, alors l'homomorphisme $\varphi : \mathbf{A} \longrightarrow \prod_{i=1}^n \left(\mathbf{A} / \mathfrak{m}_i^k \right)$ est injectif. De même φ

est surjectif car les \mathfrak{m}_i^k sont étrangers ([3] proposition 1.10 P. 7). Donc φ est un

isomorphisme. Puisque \mathbf{A} est artinien alors $\mathbf{A} / \mathfrak{m}_i^k$ est artinien (Corollaire I-6), en plus

les $\mathbf{A} / \mathfrak{m}_i^k$ sont des anneaux locaux. Donc \mathbf{A} est un produit direct d'anneaux artiniens

locaux.

Proposition I-11 ([15] proposition 4-12 P. 128)

Un anneau \mathbf{A} est artinien si et seulement si $\ell(\mathbf{A})$ est finie ($\ell(\mathbf{A})$ est la longueur du \mathbf{A} -module ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{A}$. Dans ce cas tout \mathbf{A} -module de type fini est de longueur finie.

Démonstration :

Si \mathbf{A} est artinien d'après corollaire I-9, \mathbf{A} est de longueur finie.

Supposons que $\ell(\mathbf{A})$ est finie donc \mathbf{A} est à la fois artinien et noethérien. Soit \mathbf{M} un \mathbf{A} -module de type fini alors \mathbf{M} admet un système de n générateurs. donc \mathbf{M} est isomorphe à un module quotient du module ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{A}^n$. Puisque ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{A}$ est artinien alors ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{A}^n$ est aussi artinien (Proposition I-5). Par conséquent \mathbf{M} est artinien et d'après le corollaire I-9. \mathbf{M} est de longueur finie.

Proposition I-12 ([3] proposition 8.8 P. 81)

Soit \mathbf{A} un anneau local, \mathfrak{m} son idéal maximal et $\mathbf{k} = \mathbf{A} / \mathfrak{m}$ son corps résiduel. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) Tout idéal de \mathbf{A} est principal
- ii) L'idéal maximal \mathfrak{m} est principal

En combinant les théorèmes de Köthe [9] et de Cohen et Kaplansky [7] on obtient le théorème suivant :

Théorème I-13 :

Soit A un anneau commutatif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) A est artinien et tout idéal de A est principal
- 2) Tout A -module est somme directe de A -modules cycliques.

Proposition I-14 :

Soit A un anneau local artinien à idéaux principaux. L'ensemble des classes d'isomorphismes des A -modules cycliques est fini.

Démonstration :

Soit M un A -module cyclique alors $M \simeq A/I$, I est un idéal de A . Il suffit pour prouver la proposition de montrer que les idéaux de A sont en nombre fini. Soit J l'idéal maximal de A . on a $J = aA = \langle a \rangle$, $a \in J$, car A est principal. J est aussi nilpotent. De plus on a : $0 = \langle a^n \rangle \subset \langle a^{n-1} \rangle \subset \dots \subset \langle a \rangle \subset A$ pour un certain n . Montrons que tout idéal de A est de la forme $\langle a^k \rangle$ $1 \leq k \leq n$.

Soit I un idéal de A , $I = \langle c \rangle = cA$ or $I \subset J$, donc il existe $\lambda \in A$ tel que $c = \lambda a$.

Si λ est inversible alors $a = \lambda^{-1}c$ ce qui implique que $J = I = \langle a \rangle$.

Si λ est non inversible alors $\lambda \in J$ et $\lambda = a\beta$ avec $\beta \in A$. ce qui implique $c = a^2\beta$.

On reprend le même raisonnement : soit β est inversible dans ce cas $I = \langle a^2 \rangle$ ou β est non inversible et on aura $c = a^3\beta$. Ainsi il existe $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$ tel que $c = \beta a^k$ et β est inversible d'où $I = \langle a^k \rangle$. Ce qui prouve que tout idéal de A est de la forme $\langle a^k \rangle$ $1 \leq k \leq n$ et comme $\langle a^k \rangle$ sont en nombre fini. Donc les idéaux de A sont en nombre fini.

Proposition I-15 :

Soit A un anneau tel que $A = \prod_{i=1}^n A_i$ où les A_i sont des anneaux. Si M est un A -module alors M est un A_i -module tel que tout A -endomorphisme f de M est un produit à A_i -endomorphismes f_i de M_i .

Démonstration

Soit $A = \prod_{i=1}^n A_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$ posons :

$$e_i = \left(\delta_j^i \right)_{j=1}^n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

↑

ième place

Soit $\varphi : A_i \longrightarrow A e_i$

$$a_i \longmapsto (0, 0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0)$$

φ est un isomorphisme d'anneaux.

Soit M un A -module, posons $M_i = e_i M$ avec $e_i \in A$. M_i est un sous-ensemble de M ,

c'est même un sous A -module de M car si $a \in A$ et $e_i m \in M_i$ alors

$$a(e_i m) = e_i(am) \text{ or } e_i(am) \in e_i M = M_i.$$

M_i est un $e_i A$ -module c'est à dire un A_i -module par le produit suivant :

$$a_i(e_i m) = \varphi(a_i)e_i m = e_i(0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0)m. \text{ Or } e_i(0, 0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0)m \in e_i M.$$

Si $i \neq j$ $e_i e_j = (0, \dots, 0)$ (1). De plus $(1, \dots, 1) = e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1$

Donc $m = 1.m = e_1 m + \dots + e_n m$. Et d'après (1) $M_j \cap \bigoplus_{i \neq j} M_i = \{0\}$, avec $i \neq j$. D'où

$M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow P_i & & \downarrow P_i \\ \vdots & & \vdots \\ e_i M & \xrightarrow{f_i} & e_i M \end{array} \quad \text{tel que } f \circ P = P_i \circ f \text{ et } f = \prod_{i=1}^n f_i$$

f est un produit de A_i -endomorphisme f_i de $M_i = e_i M$

3) Modules injectifs – Modules projectifs :

On rappelle qu'un A -module M est dit **injectif** (resp. **projectif**) si tout diagramme de

$$\begin{array}{ccccc} & & & & M \\ & & g \nearrow & & \downarrow \\ \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (\text{resp. } L \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0)$$

où f est injectif (resp. surjectif), se prolonge dans un diagramme commutatif de la forme :

A -modules

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & M & & \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & h & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{f} & N & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (\text{resp. } L \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0)$$

Proposition I.16 ([20] P. 21-23)

Soit M un A -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- M est injectif
- M est facteur direct de tout module le contenant
- Pour tout idéal à gauche I de A et tout homomorphisme f de I dans M , il existe $x \in M$ tel que $f(a) = ax$ pour tout $a \in I$. (Condition de Baer)

Un A -module M est dit **indécomposable** s'il n'existe pas deux sous-modules non nuls M_1 et M_2 de M tels que $M = M_1 \oplus M_2$.

On dit qu'une extension E d'un module M est une **extension essentielle** de M si pour tout sous-module N de E , la relation $N \cap M = \{0\}$ implique $N = \{0\}$. On dira aussi que

M est un sous-module essentiel de E . On appelle **enveloppe injective** d'un module M toute extension essentielle injective de M . On sait que tout module admet une enveloppe

injective unique à un isomorphisme pres. Si M est un A -module nous noterons $E(M)$ ou

\hat{M} l'enveloppe injective de M . Soit A un anneau. Un élément e de A est dit idempotent si $e^2 = e$.

Deux idempotents e_1 et e_2 de A sont dits orthogonaux si $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$.

Un idempotent e d'un anneau A est dit primitif si $e \neq 0$ et si pour tout couple d'idempotents orthogonaux (e_1, e_2) de A tels que $e = e_1 + e_2$ alors $e = e_1$ ou $e = e_2$.

Proposition I-17 :

Soit M un A -module non réduit à zéro alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) M est indécomposable
- 2) 0 et 1_M sont les seuls idempotents de $\text{End}_A(M)$.
- 3) 1_M est un idempotent primitif de $\text{End}_A(M)$.

Démonstration :

$1 \Rightarrow 2$) Soit K un facteur direct de M alors il existe un idempotent de $\text{End}_A(M)$ tel que $K = eM$. Puisque M est indécomposable alors $K = \{0\}$ ou $K = M$.

Si $K = \{0\} \Rightarrow e = 0$; si $K = M \Rightarrow e = 1_M$ car $e|_K = 1_K$.

$2) \Rightarrow 3)$ évident

$3) \Rightarrow 1)$ Soit K un facteur direct de M . Soit K' un supplémentaire de K dans M et e la projection de M sur K suivant K' , e est un idempotent de $\text{End}_A(M)$, e et $1_M - e$ sont orthogonaux et $1_M = e + (1_M - e)$ donc $e = 0$ ou $e = 1_M$.

Si $e = 0$ alors $K = Me = \{0\}$; si $e = 1_M$ alors $K = Me = M$.

Proposition I-18 ([28] Lemme P. 205)

Soit A un anneau local. Alors les seuls idempotents de A sont 0 et 1 .

Démonstration :

Soit e un idempotent de A . Supposons $e \neq 0$ et $e \neq 1$. Alors la relation $e^2 = e$ qui est équivalente à $e(1-e) = 0$, entraîne que e et $1-e$ ne sont pas inversibles dans A . Donc les idéaux Ae et $A(1-e)$ sont différents de A : Comme A est local, A admet un seul idéal maximal I , et cet idéal contient Ae et $A(1-e)$. D'où $e \in I$ et $1-e \in I$. Donc $1 = e + (1-e) \in I$.

Ce qui est absurde car \mathbf{I} est un idéal maximal.

Corollaire I-19 :

Si $\text{End}_A(\mathbf{M})$ est local alors \mathbf{M} est indécomposable.

Soit \mathbf{M} un module, \mathbf{N} un sous-module de \mathbf{M} est dit irréductible s'il n'existe pas de sous-modules \mathbf{K} et \mathbf{L} de \mathbf{M} distincts qui contiennent strictement \mathbf{N} tels que $\mathbf{N} = \mathbf{K} \cap \mathbf{L}$.

Proposition I-20 ([25] proposition 2.8 P. 48)

Soit A un anneau et \mathbf{M} un A -module injectif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) \mathbf{M} est indécomposable
- 2) \mathbf{M} est non nul et \mathbf{M} est l'enveloppe injective de chacun de ses sous-modules non nuls
- 3) Le sous-module nul est irréductible.

Démonstration :

1) \Rightarrow 2)

Supposons $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$. Soit \mathbf{N} un sous-module non nul de \mathbf{M} , alors \mathbf{M} admet un sous-module \mathbf{N}' qui est l'enveloppe injective de \mathbf{N} . D'après la **proposition I-16** puisque \mathbf{N}' est injectif, il est facteur direct de \mathbf{M} . Puisque \mathbf{M} est indécomposable donc $\mathbf{N}' = \mathbf{M}$.

2) \Rightarrow 3)

Soit \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 des sous-modules de \mathbf{M} tels que $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Supposons que $\mathbf{M}_1 \neq \{\mathbf{0}\}$ donc $E(\mathbf{M}_1) = \mathbf{M}$ et ainsi \mathbf{M} est une extension essentielle de \mathbf{M}_1 , par conséquent $\mathbf{M}_2 = \{\mathbf{0}\}$.

3) \Rightarrow 1) Supposons qu'il existe deux sous-modules non nuls \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 tels que

$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2$. Par conséquent $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Ce qui est contraire avec l'hypothèse.

Soit A un anneau, \mathbf{M} un A -module, \mathbf{x} un élément de \mathbf{M} . On appelle annulateur de \mathbf{x} dans A et on note $\text{Ann}(\mathbf{x}) = \{a \in A / a\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$.

Proposition I-21 ([16] Proposition 2.4 P. 515)

Soit M un A -module. M est injectif et indécomposable si et seulement si $M \simeq E(A/J)$, où J est un idéal irréductible. Dans ce cas, pour tout x non nul de M , $\text{Ann}(x)$ est un idéal à gauche irréductible et $M \simeq E(A/\text{Ann}(x))$.

On rappelle qu'un sous-module N d'un module M est dit **superflu** dans M si, pour tout sous-module L de M , la relation $N + L = M$ implique $L = M$.

Soit M un module et soit P un module projectif. On dit que P est une **enveloppe projective** de M s'il existe un homomorphisme surjectif f de P sur M tel que $\text{Ker} f$ soit superflu dans P .

On montre que si un module admet une enveloppe projective, alors cette enveloppe projective est unique à un isomorphisme près. Les enveloppes projectives n'existent pas toujours. On dit qu'un anneau A est **semi-parfait** à gauche (**resp. parfait**) à gauche si tout A -module à gauche de **type fini** possède une enveloppe projective (resp. tout A -module à gauche admet une enveloppe projective). Les propositions suivantes donnent une caractérisation des anneaux semi-parfaits et parfaits.

Proposition I-22 ([20] Théorème 2-1 P.134)

Soit A un anneau, J son radical de **Jacobson**. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) A est semi-parfait à gauche

b) A est semi-parfait à droite

c) A/J est semi-simple et pour tout idempotent x de A/J il existe un idempotent e de A tel que $e \equiv x$

Proposition I-23 ([20] P. 130 th. 5)

Soit A un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) A est parfait
- b) Les idéaux à droite monogènes de A vérifient la condition de chaîne descendante.
- c)
 - i) Le radical de Jacobson J de A est T -nilpotent à gauche.
 - ii) L'anneau A/J est semi-simple.
- d) A ne contient pas une infinité d'idempotents orthogonaux.

Un sous-ensemble non vide X d'un anneau A est dit T -nilpotent à gauche si pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_0 a_1 \dots a_{n_0} = 0$.

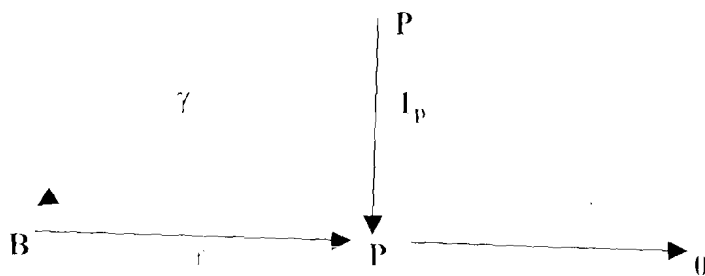
Un anneau A est parfait si A est semi-parfait et vérifie la **propriété c) -i)** de la **proposition I-23**.

Proposition I-24 : ([22] Théorème 3.9 P. 40)

Soit P un module projectif et $f: B \longrightarrow P$ un épimorphisme alors $B = \text{Ker}f \oplus P'$ où $P' \simeq P$.

Démonstration :

Soit le diagramme suivant :



Puisque P est projectif il existe $\gamma: P \longrightarrow B$ tel que $f \circ \gamma = I_p$ donc γ est injectif. Soit

$b \in B$ on a : $b = (\gamma \circ f)(b) + (b - (\gamma \circ f)(b))$. Or $(\gamma \circ f)(b) \in \text{Im} \gamma$ et $\text{Im} \gamma \simeq P$ et

$f\{b - (\gamma \circ f)b\} = f(b) - \{f \circ \gamma\}(f(b)) = 0$ d'où $b - (\gamma \circ f)(b) \in \text{Ker}f$. De plus $\text{Im} \gamma \cap \text{Ker}f = \{0\}$,

car si $x \in \text{Im} \gamma \cap \text{Ker}f$ on a : $x \in \text{Im} \gamma$ et $x \in \text{Ker}f$; $x \in \text{Im} \gamma$

entraîne qu'il existe $y \in P$ tel que $\gamma(y) = x$; $x \in \text{Ker}f$ entraîne que $f(x) = 0$.

Donc $f[\gamma(y)] = f(x) = 0$ d'où $y = 0$ ce qui entraîne que $x=0$.

Proposition I-25 :

Tout module projectif indécomposable vérifie la propriété (S).

Démonstration :

Soit P un A -module projectif indécomposable et f un endomorphisme surjectif de P .

$f: P \rightarrow P$; d'après la proposition I-25 $P = \text{Ker}f \oplus P'$ ou $P' \simeq P$ or P est indécomposable donc $\text{Ker}f=0$ d'où f est injectif.

Proposition I-26 ([26] proposition I-26 P. 16)

Sur un anneau semi-parfait tout module projectif vérifie la propriété (S).

Proposition I-27 ([1] Proposition 17- 10 P. 196)

Soit A un anneau de radical $J(A) = J$. Si P est un A -module projectif
alors $\text{Rad } P = JP$. ($\text{Rad } P = \text{radical de } P$).

Corollaire I-25 ([1] Corollaire 17- 12 P. 192)

Soit $J = J(A)$, P un A -module à gauche projectif tel que JP est superflu dans P
ex : ple si P est de type fini alors $J(\text{End}_A(P)) = \text{Hom}(P, JP)$ et

$$J(\text{End}_A(P)) \simeq \text{End}_A(P, JP)$$

Proposition I-28 :

M un A -module, produit direct de modules H_j ($j \in J$).

Si on a $(H_i, H_j) = 0, j \neq i$ on a $(i, j) \in \mathcal{B}$ ou $i = j$ dans M vérifie la propriété (S) si et

seulement si $i = j, H_i$ vérifie la propriété (S).

Démonstration :

Résulte de l'égalité $\text{End}_A M = \prod_{I \in J} \text{End}_A H_I$

§4 – LES ANNEAUX A IDENTITES POLYNOMIALES**Définition I.21 :**

Soit A un anneau. On dit que A vérifie une identité polynomiale, s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un polynôme $P \neq 0$ en les variables non commutatives x_1, x_2, \dots, x_n à coefficients dans le centre C de A tels que, pour tout a_1, a_2, \dots, a_n de A , l'on ait $P(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$.

Si de plus l'un au moins des coefficients de P est inversible dans A , on dira que A est à identité polynomiale ou tout simplement que A est un **P.I.** anneau.

CHAPITRE II

INTRODUCTION

Ce chapitre est divisé en trois parties : une première partie consacrée à la démonstration de la **proposition 1.2** de **W.V. Vasconcelos** dans [26] : « Dans un anneau commutatif **A** tout **A-module** de type fini vérifie la propriété **(S)** ». Cette démonstration est basée essentiellement sur le théorème de **Cayley Hamilton**. Dans la deuxième partie nous donnerons un exemple de module qui n'est pas de type fini et qui vérifie la propriété **(S)**. Cet exemple est tiré de [12], **théorème 8** de **Kaïdi El Amin** et **Sangharé Mamadou**. Enfin un exemple de module de type fini qui ne vérifie pas la **propriété (S)** [2].

1) Un anneau sur lequel tout A-module M de type fini vérifie la propriété (S)

Théorème II-1 : (De Cayley Hamilton)

Soient **A** un anneau commutatif, **M** un **A-module** de type fini, **B** = $\text{end}_A(\mathbf{M})$ et **f** ∈ **B**. Soient $\{x_1, \dots, x_n\}$ un système générateurs de **M** et a_{ij} ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) des éléments de **A** tels que $f(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$. Si **P(T)** est le polynôme caractéristique de la matrice $\alpha = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ alors $P(f) = 0$.

Démonstration :

Soit $\mathbf{A}' = \mathbf{A}[f] \subset \mathbf{B}$ (car un élément de $\mathbf{A}[f]$ est de la forme $a_n f^n + \dots + a_1 f + a_0 1_M, n \in \mathbb{N}$).

\mathbf{A}' est un anneau commutatif unitaire et l'application

$$\phi : \mathbf{A}' \times \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$$

$$(u, x) \longmapsto u(x) = u \cdot x$$

définit une structure de \mathbf{A}' -module sur **M**.

Soit x un élément de M alors $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i I_M(x_i) = \sum_{i=1}^n u_i x_i$ avec $u_i = \lambda_i \mathbf{1}_M$

donc $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un système générateurs du A' -module M .

Posons $L' = A'^n$ et soit $\Pi : A'^n \longrightarrow M$

$$e_i \longmapsto x_i$$

$$e_1 = (\mathbf{1}_M, 0, \dots, 0); \dots; e_n = (0, \dots, 0, 0, \dots, \mathbf{1}_M).$$

Π est A' -linéaire et surjectif.

Remarque :

$L' = A'^n$ est un A' -module libre dont une base est $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad 1 \leq i \leq n.$$

Soit $\varphi : L' \longrightarrow L'$ l'endomorphisme du A' -module L' défini par :

$$\varphi(e_i) = \left[f \cdot e_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \right], \quad f \in A' \text{ et } e_i \in A'^n.$$

$\Pi \circ \varphi : L' \longrightarrow M$ est A' -linéaire ,

et On a : $\Pi[\varphi(e_i)] = \Pi \left[f \cdot e_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \right]$, Π est A' -linéaire implique que

$$\Pi[\varphi(e_i)] = f \cdot x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = f(x_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \text{ ce qui implique que } \Pi \circ \varphi = \mathbf{0}_B.$$

$\varphi : L' \longrightarrow L'$ A' -linéaire, il existe $\varphi' : L' \longrightarrow L'$ tel que $\varphi \circ \varphi' = \varphi' \circ \varphi = \det \varphi \cdot \mathbf{1}_B$.

$$\varphi(e_i) = f \cdot e_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \text{ donc la matrice associée à } \varphi \text{ est } (\delta_i^j f - a_{ij} \mathbf{1}_M)_{i,j} \text{ et } \det \varphi = P(f).$$

Soit $x \in M$, il existe $y \in L'$ tel que $\Pi(y) = x$,

$$\text{on a } P(f) \varphi(x) = \det \varphi \cdot \Pi(y) = \Pi(\det \varphi y) = \Pi(\det \varphi' y) = \Pi(\det \varphi' y) = \Pi(\det \varphi' y) = 0$$

ce qui implique $P(f) = \mathbf{0}_B$.

Corollaire II.1 :

Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A et M un A -module de type fini. On suppose $M = IM$, alors il existe $\alpha \in I$ tel que $(1 + \alpha)x = 0 \quad \forall x \in M$.

Démonstration :

Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un système générateur de M . Soit $f = I_M$, $f(x_i) = x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $a_{ij} \in I$.

$P(T) = \det(TI_n - X) = T^n + \alpha_1 T^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}T + \alpha_n$ où $X = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$

$$P(f) = f^n + \alpha_1 f^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}f + \alpha_n = 1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$$

$$= 1 + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n \in I$$

Or $P(f) = 0$ donc la multiplication par $1 + \alpha$ est l'endomorphisme nul d'où

$$(1 + \alpha)x = 0 \quad \forall x \in M.$$

Corollaire II.2 : (Lemme de Nakayama)

Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A contenu dans le radical de Jacobson de A . alors si M est un A -module de type fini tel que $M = IM$, on a nécessairement $M = 0$.

Démonstration :

D'après le corollaire II.1, il existe $\alpha \in I$ tel que $(1 + \alpha)x = 0 \quad \forall x \in M$. Or $1 + \alpha$ est inversible dans A . Soit $\mathfrak{a} = (1 + \alpha)A$: si $\mathfrak{a} \neq A$ alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ un idéal maximal de A , or $1 = (1 + \alpha)^{-1} \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ ce qui est absurde. Donc $\mathfrak{a} = A$, donc $x = 0 \quad \forall x \in M$, c'est à dire $M = 0$.

Corollaire II.3 :

Soit A un anneau commutatif et M un A -module. Si M est un A -module de type fini et f un endomorphisme injectif du A -module M tel qu'il existe $h = (a_{ij}) \in M_n(A)$ tel que $(1 - hf)(m) = 0 \quad \forall m \in M$.

Démonstration :

\mathbf{M} est un \mathbf{A} -module de type fini donc \mathbf{M} est un $\mathbf{A}[f]$ module de type fini par le produit suivant : $\left(\begin{array}{l} \mathbf{A}[f] \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M} \\ (u, m) \mapsto u(m) = u.m \end{array} \right)$.

Posons $\mathbf{I} = (\mathbf{f})$ un idéal de l'anneau $\mathbf{A}[f]$, $\mathbf{I} = (\mathbf{f}) = \mathbf{A}[f].\mathbf{f}$, on a donc : $\mathbf{I.M} = \mathbf{M}$ car $\mathbf{f.M} = \mathbf{f(M)} = \mathbf{M}$. Alors il existe d'après le corollaire II.2) $\alpha \in \mathbf{I}$ tel que $(1+\alpha)(\mathbf{m}) = \mathbf{0} \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}$

$\alpha \in \mathbf{I} \Rightarrow \exists \mathbf{h} \in \mathbf{A}[f] : \alpha = \mathbf{hf}$ donc $(1 + \mathbf{hf})(\mathbf{m}) = \mathbf{0} \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}$.

Proposition II.4 :

Soit \mathbf{A} un anneau commutatif et \mathbf{M} un \mathbf{A} -module de type fini. Soit \mathbf{f} un endomorphisme de \mathbf{M} surjectif alors \mathbf{f} est un isomorphisme.

Démonstration :

D'après le corollaire II.3, il existe $\mathbf{h} \in \mathbf{A}[f]$ tel que $(1 + \mathbf{hf})(\mathbf{m}) = \mathbf{0} \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}$.

Soit $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ tel que $\mathbf{f(m)} = \mathbf{0}$ alors $(1 + \mathbf{hf})(\mathbf{m}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{m} + \mathbf{hf(m)} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{m} = \mathbf{0}$.

2) Exemple d'un module qui vérifie la propriété (S) et qui n'est pas de type fini.

Soit \mathbf{A} un anneau commutatif artinien possédant un idéal non principal. On se propose de montrer qu'il existe un \mathbf{A} -module qui n'est pas de type fini et qui vérifie la propriété (S). Cette construction est due à Kaïdi El Amin Mokhtar et Sangharé Mamadou (voir [12]).

Puisque \mathbf{A} est artinien donc \mathbf{A} est un produit fini d'anneaux artiniens locaux. Or on sait que si $\mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \mathbf{A}_i$ alors \mathbf{A} est un FGS-anneau si et seulement si les \mathbf{A}_i sont des FGS-anneaux (Chapitre III, proposition III.8), donc on peut supposer \mathbf{A} artinien local. Nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme II.5 :

Soit A un anneau artinien local possédant au moins un idéal non principal. Alors A admet un anneau-quotient B qui est local d'idéal maximal J tel que $J^2 = \{0\}$ et tel que J/J^2 soit un B/J -espace vectoriel de dimension deux.

Démonstration :

Soit N l'idéal maximal de A , posons $D = A/N^2$ et $S = N/N^2$ l'idéal maximal de D . Puisque A est non principal alors N n'est pas principal (**proposition I.12**) dans A . Donc S est non principal dans D ce qui implique que $\dim_{D/S}(S/S^2)$ est supérieure ou égale à deux.

Donc $S/S^2 = D/S a \oplus D/S b \oplus K$, d'autre part $S^2 = (N/N^2)^2 = N^2/N^2 = (0)$ d'où

$S/S^2 \cong S \cong D/S a \oplus D/S b \oplus K$, c'est-à-dire $S = Da \oplus Db \oplus K$. Comme K est un idéal de

D alors $B = D/K$ est bien défini. Soit J un idéal maximal de B alors $J = S/K$ et

$J^2 = S^2/K = (0)$, J/J^2 est un B/J -espace vectoriel, d'autre part $J = S/K \cong Da \oplus Db$.

puisque $J^2 = (0)$ alors J/J^2 qui est un B/J -espace vectoriel est de dimension deux

($J/J^2 = J = Da \oplus Db$). Donc l'anneau $B = D/K$ répond à la question.

Lemme II.6 :

Soit A un anneau artinien local possédant un idéal non principal. Alors A admet un anneau quotient $B = C \oplus \mathfrak{b}C$ où C est un sous-anneau de B local d'idéal maximal $\mathfrak{a}C \neq 0$ où $\mathfrak{b} \neq 0$ avec $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2 = 0$.

Démonstration :

D'après le **lemme II.5**, \mathbf{A} admet un anneau quotient \mathbf{B} local d'idéal maximal $\mathbf{J} = \mathbf{x}\mathbf{B} \oplus \mathbf{b}\mathbf{B}$ où $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ avec $\mathbf{J}^2 = \mathbf{0}$. Comme \mathbf{B} est artinien et local d'après les deux théorèmes de **Cohen** [5] il existe un sous-anneau \mathbf{C} de \mathbf{B} , local d'idéal maximal $\mathbf{a}\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$, tel que $\mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{J} = \mathbf{C} + \mathbf{x}\mathbf{B} \oplus \mathbf{b}\mathbf{B}$. On peut prendre $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ car $\mathbf{a} \in \mathbf{C}$ et $\mathbf{x} \in \mathbf{J}$. En remarquant que $\mathbf{C} = \mathbf{C} + \mathbf{a}\mathbf{B}$, $\mathbf{b}\mathbf{C} = \mathbf{b}\mathbf{B}$ et que $\mathbf{C} \cap \mathbf{b}\mathbf{C} = \{\mathbf{0}\}$, on obtient $\mathbf{B} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{b}\mathbf{C}$.

D'où le **lemme II.6**.

Lemme II.7 :

Soit \mathbf{C} un anneau local d'idéal maximal $\mathbf{a}\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ avec $\mathbf{a}^2 = \mathbf{0}$. Posons \mathbf{M} l'anneau total des fractions de l'anneau des polynômes $\mathbf{C}[x]$ et σ le \mathbf{C} -endomorphisme de \mathbf{M} défini pour tout élément \mathbf{m} de \mathbf{M} par $\sigma(\mathbf{m}) = \mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{m}$. Alors :

a) $\mathbf{a}\sigma = \sigma^2 = \mathbf{0}$

b) Si f est un \mathbf{C} -endomorphisme de \mathbf{M} commutant avec σ , alors pour tout $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$,

$$f(\mathbf{a}\mathbf{m}) = \mathbf{a}\mathbf{m}f(\mathbf{1}) \quad (1)$$

c) Tout \mathbf{C} -endomorphisme surjectif de \mathbf{M} commutant avec σ est un automorphisme de \mathbf{M} .

Démonstration :

Remarquons d'abord qu'un élément \mathbf{m} de \mathbf{M} est inversible dans \mathbf{M} si et seulement si $\mathbf{m} \notin \mathbf{a}\mathbf{M}$: En effet soit $\mathbf{m} \in \mathbf{a}\mathbf{M}$ et supposons que \mathbf{m} est inversible dans \mathbf{M} c'est-à-dire qu'il existe $\mathbf{m}' \in \mathbf{M}$ tel que $\mathbf{m}\mathbf{m}' = \mathbf{m}'\mathbf{m} = \mathbf{1}$. Puisque $\mathbf{m} = \mathbf{a}\mathbf{m}_1$, où $\mathbf{m}_1 \in \mathbf{M}$, on a $\mathbf{a}\mathbf{m}_1\mathbf{m}' = \mathbf{1}$ d'où $\mathbf{a}^2\mathbf{m}_1\mathbf{m}' = \mathbf{a} = \mathbf{0}$. C'est une contradiction car $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Inversement si $\mathbf{m} \notin \mathbf{a}\mathbf{M}$ alors $\mathbf{m} \notin \mathbf{a}\mathbf{C}$ (idéal maximal) donc \mathbf{m} est inversible dans \mathbf{C} donc dans \mathbf{M} .

a) $\mathbf{a}\sigma(\mathbf{m}) = \mathbf{a}^2\mathbf{x}\mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}$, et $\sigma(\sigma(\mathbf{m})) = \mathbf{a}\mathbf{x}\sigma(\mathbf{m}) = \mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{m} = \mathbf{a}^2\mathbf{x}^2\mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}$

donc $\mathbf{a}\sigma = \sigma^2 = \mathbf{0}$.

b) Soit f un C -endomorphisme de M commutant avec σ , soit m un élément quelconque de M alors on a : $\sigma(f(m)) = ax f(m) = f(\sigma(m)) = f(axm)$ donc quelque soit m dans M $f(axm) = axf(m)$ (2).

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^* f(ax^n m) = ax^n f(m)$.

D'après (2) $f(axm) = ax f(m)$, supposons que $f(ax^{n-1} m) = ax^{n-1} f(m)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : (3) $f(ax^n m) = f(ax x^{n-1} m) = ax f(x^{n-1} m)$ d'après (2).

D'autre part $ax^n f(m) = x(ax^{n-1} f(m)) = x f(ax^{n-1} m) = xa f(x^{n-1} m) = ax f(x^{n-1} m)$ (4).

En combinant (3) et (4) on a : $f(ax^n m) = ax^n f(m)$ quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte, compte tenu du fait que f est C -linéaire que pour tout $m' \in C[x]$ et pour tout $m \in M$ $f(am' m) = am' f(m)$.

Soit $m \in M$ et $m' \in C[x] \setminus aC[x]$ tel que $m \cdot m' \in C[x]$ on a : $f(am' \cdot m \cdot 1) = am' m f(1)$.

D'autre part $f(am' m) = am' f(m)$, donc $am' f(m) = am' m f(1)$. Puisque $m' \in C[x] \setminus aC[x]$ alors m' est inversible d'où $af(m) = am f(1)$.

c) Soit g un C -endomorphisme surjectif de M commutant avec σ on a :

$g(am) = am g(1)$ d'après b), $g(1)$ est nécessairement inversible car sinon $g(1) \in aM$, c'est-à-dire il existe $m' \in M$ tel que $g(1) = am'$ d'où $g(am) = amam' = a^2 mm' = 0 \forall m \in M$ donc $g(aM) = ag(M) = aM = \{0\}$ (g est surjectif) ce qui est absurde. Donc $g(1)$ est inversible.

Soit m un élément de M :

1) Si $m \in aM$ alors il existe $m' \in M$ tel que $m = am'$, supposons $g(m) = 0$,

$g(m) = g(am') = am' g(1) = 0$. Puisque $g(1)$ est inversible, alors $am' = 0$ c'est-à-dire $m = 0$.

2) Si $m \notin aM$, alors $m \neq am' \forall m' \in M$ donc $am \neq 0$ d'où $am \in aM \setminus \{0\}$.

$g(am) = ag(m) = amg(1)$ donc $g(am) \neq 0$ d'où $g(m) \neq 0$. g est donc un automorphisme.

Proposition II-8 :

Si A est un anneau artinien local admettant un idéal non principal, alors il existe un A -module qui n'est pas de type fini et dont l'anneau des endomorphismes E est un anneau local dont l'idéal maximal J est de carré nul.

Démonstration :

D'après le **lemme II-6** on peut supposer que A est de la forme $A = C \oplus \mathbf{b}C$ où C est un sous-module de A et $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}^2 = \mathbf{0}$.

Considérons l'anneau total des fractions \mathbf{M} de l'anneau des polynômes $C[\mathbf{x}]$ et soit φ l'application de A dans $\text{End}(\mathbf{M})$ définie pour tout élément $\lambda = \alpha + \beta\mathbf{b}$ de A où $\alpha, \beta \in C$ par $\varphi(\lambda) = \alpha\mathbf{1}_{\mathbf{M}} + \beta\sigma$, $\mathbf{1}_{\mathbf{M}}$ étant l'application identité de \mathbf{M} et σ le

C -endomorphisme de \mathbf{M} défini dans le **lemme II-7**, φ est un homomorphisme d'anneaux qui confère à \mathbf{M} une structure de A -module. Soit \mathbf{f} un A -endomorphisme du A -module \mathbf{M} alors \mathbf{f} est un C -endomorphisme qui commute avec σ : En effet puisque \mathbf{f} est un A -endomorphisme, alors \mathbf{f} est un C -endomorphisme ($A = C \oplus \mathbf{b}C$),

$$\mathbf{f}(\sigma(\mathbf{m})) = \mathbf{f}(\mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{m}) = \mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{f}(\mathbf{m}) = \sigma(\mathbf{f}(\mathbf{m})).$$

Soit E l'anneau des A -endomorphismes du A -module \mathbf{M} et J l'ensemble des éléments non inversibles de E . Si $\mathbf{f} \in J$ alors $\mathbf{f}(\mathbf{1})$ est un élément de $\mathbf{a}\mathbf{M}$ (car $\mathbf{f}(\mathbf{1})$ est non inversible).

Or d'après l'égalité (1) du **lemme II-7**, pour tout $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$, $\mathbf{a}\mathbf{f}(\mathbf{m}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}\mathbf{m}) = \mathbf{a}\mathbf{m}\mathbf{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$ (car $\mathbf{f}(\mathbf{1}) \in \mathbf{a}\mathbf{M}$ et $\mathbf{a}^2 = \mathbf{0}$) donc $\mathbf{f}(\mathbf{m}) \in \mathbf{a}\mathbf{M}$.

Montrons que J est un idéal de E bilatère :

Soient \mathbf{f} et \mathbf{g} deux éléments de J et \mathbf{h} un élément de E . Comme $\mathbf{f}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{a}\mathbf{M}$ et

$\mathbf{h}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{a}\mathbf{M}$ pour tout élément \mathbf{m} dans \mathbf{M} on a :

- i) $(\mathbf{a}\mathbf{h}\mathbf{f})(\mathbf{m}) = \mathbf{a}\mathbf{h}[\mathbf{f}(\mathbf{m})] = \mathbf{h}[\mathbf{a}\mathbf{f}(\mathbf{m})] = \mathbf{a}\mathbf{f}(\mathbf{m})\mathbf{h}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$
- ii) $(\mathbf{a}\mathbf{f}\mathbf{h})(\mathbf{m}) = \mathbf{a}\mathbf{f}[\mathbf{h}(\mathbf{m})] = \mathbf{f}[\mathbf{a}\mathbf{h}(\mathbf{m})] = \mathbf{a}\mathbf{h}(\mathbf{m})\mathbf{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$

$$\text{iii) } [a(f+g)(m)] = a f(m) + ag(m) = 0$$

$$\text{iv) } (fg)(m) = f[g(m)] = g(m) f(1) = 0$$

Donc d'après i), ii) et iii) $hf, fh, f+g$ sont des éléments de J , $hf = fh$ et d'après iv)

$J^2 = (0)$. D'où J est un idéal bilatère et E est un anneau local d'idéal maximal J et $J^2 = (0)$.

Soit $H = \bigoplus A ax^n$, on sait que $ax^n \in C[x] \forall n \in \mathbb{N}$. Puisque M est l'anneau total des fractions de l'anneau total des polynômes $C[x]$, alors $ax^n \in M$. Or M est un A -module donc $A ax^n \in M$. Considérons l'injection canonique

$f_n : A ax^n \longrightarrow M$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{f} & M \\ \nearrow j_n & & \nearrow f_n \\ Aax^n & & \end{array}$$

tel que $f_n = f j_n$ (j_n est l'injection canonique).

f est injectif car $\text{Kerf} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \text{Kerf}_n, \text{Kerf}_n = \{0\}$ donc $\bigoplus A ax^n \subseteq M$ ce qui implique que

M n'est pas de type fini

Proposition II.9 :

Soit A un anneau artinien possédant un idéal non principal. Alors il existe un A -module indécomposable, qui vérifie la propriété (S) et qui n'est pas de type fini

Démonstration :

D'après la proposition II-8, il existe un A -module qui n'est pas de type fini dont l'anneau des A -endomorphismes E est un anneau local alors M est indécomposable (proposition I-17 et I-18). Soit f un A -endomorphisme de M surjectif, comme $M \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f^n \neq 0$. On en déduit que $f \notin J$ donc f est inversible. Soit $f(m) = 0$ et soit g l'inverse de f alors $g[f(m)] = m = 0$. Donc f est un automorphisme.

3) Exemple de A-module de type fini qui ne vérifie pas la propriété (S).

Dans un anneau commutatif tout module de type fini vérifie la propriété (S). Dans l'exemple ci-dessous on a remplacé la propriété de commutativité par la propriété d'identités polynomiales. Ainsi on peut trouver un A-module de type fini qui ne vérifie pas la propriété (S) sur un anneau A identités polynomiales. ([2] Exemple 3.1)

Soit \mathbb{Q} le groupe des nombres rationnels, c'est un \mathbb{Z} -module.

Soit \mathbb{Z}_{p^∞} le groupe commutatif engendré par les éléments non nuls $C_0, C_1, \dots, C_n, \dots$

vérifiant $pC_0 = 0$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ $pC_i = C_{i-1}$ où p est un entier naturel premier.

\mathbb{Z}_{p^∞} est donc un \mathbb{Z} -module. Soit $\mathbf{M} = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$, soit $\mathbf{S} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_{p^\infty})$ et

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ s & z \end{bmatrix} \text{ avec } q \in \mathbb{Q}, s \in \mathbf{S} \text{ et } z \in \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

\mathbf{A} est un anneau à identités polynomiales, \mathbf{M} comme \mathbf{A} -module est cyclique et engendré par $(1, 0)$.

$$\text{Soit } \mathbf{f}: \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M} \quad \text{tel que : } \mathbf{m} \longmapsto \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \mathbf{m}$$

\mathbf{f} est un homomorphisme surjectif et \mathbf{f} n'est pas injectif, car

$$\mathbf{f}(0, C_0) = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ pC_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

CHAPITRE III

FGS – ANNEAUX COMMUTATIFS

INTRODUCTION

Il est de tradition que des chercheurs s'intéressent à l'étude de certaines classes d'anneaux caractérisés par une propriété (**P**).

Dans [7] **I.S. COHEN** et **I. KAPLANSKY** étudient les anneaux commutatifs sur lesquels tout module est somme directe de modules cycliques.

Dans [8] **D. Z. DJOZOVIC** étudie les anneaux sur lesquels tout épimorphisme est un isomorphisme.

KAIDI El Amin Mokhtar et **SANGHARE Mamadou** dans [12] donnent une caractérisation des anneaux artiniens à idéaux principaux. Dans [24] **M. SANGHARE** étudie quelques classes d'anneaux liées au lemme de **FITTING**.

FISHER et **SNIDER** étudient les anneaux A qui sont tels que tout A -module de type fini vérifie la propriété (**S**) (resp. (**I**)) et en donnent plusieurs résultats. On rappelle qu'un module M sur un anneau A est dit vérifier la propriété (**S**) (resp. (**I**)) si tout A -endomorphisme surjectif (resp. injectif) de M est un automorphisme de M .

Dans le même ordre d'idées dans [4] **M. BARRY**, **C.T. GUEYE** et **M. SANGHARE** étudient les **FGI**-anneaux commutatifs. Un **FGI**-anneau est un anneau A commutatif sur lesquels tout A -module qui vérifie la propriété (**I**) est de type fini.

Partant du résultat bien connu de **W. VASCONCELOS** : Dans un anneau commutatif A , tout endomorphisme surjectif d'un A -module M de type fini est un automorphisme, nous étudions dans ce chapitre les anneaux commutatifs sur lesquels tout module qui vérifie (**S**) est de type fini.

§1 – FGS – ANNEAUX COMMUTATIFS

Tous les anneaux considérés dans ce paragraphe sont des anneaux commutatifs.

Définition III.1 :

Soit A un anneau commutatif. On dit que A est un **FGS**-anneau commutatif si tout A -module M qui vérifie (S) est de type fini.

Exemple :

Tout anneau semi-simple est un **FGS**-anneau.. Les anneaux artiniens sur lesquels tout idéal est principal sont des **FGS**-anneaux (**Proposition III-12**).

Proposition III.2

*L'image homomorphe d'un **FGS**-anneau commutatif est un **FGS**-anneau commutatif.*

Démonstration

Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme surjectif d'anneaux, tels que A est un **FGS**-anneau commutatif, B est un anneau commutatif. Soit M un B -module alors φ induit une structure de A -module sur la structure du groupe additif M par :

$$\begin{aligned} A \times M &\longrightarrow M \\ (a, m) &\longmapsto \varphi(a)m \end{aligned}$$

et l'application de $A \times M \longrightarrow M$ tel que $(a, m) \longmapsto \varphi(a)m$ vérifie les axiomes définissant un A -module. Donc si M est un B -module alors M est un A -module et tout B -endomorphisme est un A -endomorphisme et inversement. De ce fait on ne peut pas avoir un B -module qui vérifie la propriété (S) et ne soit pas de type fini si A est un **FGS**-anneau. Donc si A est un **FGS**-anneau alors B est aussi un **FGS**-anneau.

Proposition III.3

*Tout **FGS**-anneau intègre est un corps.*

Démonstration

Soit \mathbf{K} le corps des fractions de \mathbf{A} , donc $\mathbf{K} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}$ (\mathbf{A} est un FGS-anneau intègre, $\mathbf{S} = \mathbf{A} - \{0\}$ la partie mutiplicative). Considérons le \mathbf{A} -module \mathbf{K} ; \mathbf{K} est un groupe abélien, l'application $\mathbf{A} \times \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$ vérifie les axiomes d'un \mathbf{A} -module

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto \mathbf{a}\mathbf{k}.$$

Montrons que le \mathbf{A} -module \mathbf{K} vérifie la propriété (S). Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{K})$ tel que \mathbf{f} soit

surjective. Démontrons que \mathbf{f} est injective c'est-à-dire si $\mathbf{f}(\mathbf{s}^{-1}\mathbf{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{s}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{0}$;

$\mathbf{f}(\mathbf{s}^{-1}\mathbf{a}) = \mathbf{s}^{-1}\mathbf{s} \mathbf{f}(\mathbf{s}^{-1}\mathbf{a}) = \mathbf{s}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{s}\mathbf{s}^{-1}\mathbf{a}) = \mathbf{s}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{s}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{f}(\mathbf{1})$ donc si $\mathbf{f}(\mathbf{s}^{-1}\mathbf{a}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{s}^{-1}\mathbf{a} \mathbf{f}(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$ puisque $\mathbf{f}(\mathbf{1}) \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{f}(\mathbf{1}) \in \mathbf{K}$ donc $\mathbf{s}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ d'où \mathbf{f} est injective.

Donc ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{K}$ vérifie la propriété (S) il en résulte que ${}_{\mathbf{A}}\mathbf{K}$ est de type fini, et par conséquent $\mathbf{K}=\mathbf{A}$.

Proposition III.4

Tout idéal premier d'un FGS-anneau commutatif est un idéal maximal.

Démonstration :

Soit \mathbf{P} un idéal premier, d'après **proposition III.2** l'anneau quotient intègre \mathbf{A}/\mathbf{P} est un FGS-anneau commutatif donc, d'après la **proposition III.3**, \mathbf{A}/\mathbf{P} est un corps.

Définition :

Un anneau est dit semi-local si \mathbf{A}/\mathbf{J} est semi-simple (\mathbf{J} le radical de Jacobson de \mathbf{A})

Proposition III.5

Un FGS-anneau commutatif \mathbf{A} possède seulement un nombre fini d'idéaux maximaux

Démonstration

Soit \mathbf{L} l'ensemble des idéaux premiers de \mathbf{A} .

Montrons que $\mathbf{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}/\mathbf{p}, \mathbf{A}/\mathbf{p}') = \{0\}$ si \mathbf{P} et \mathbf{P}' sont deux idéaux premiers distincts.

Soit $\mathbf{f} : \mathbf{A}/\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{A}/\mathbf{p}'$ avec $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}'$, $\mathbf{P}' \neq \mathbf{0}$, $x_{\mathbf{p}} = x \cdot \mathbf{p} \longmapsto x_{\mathbf{p}'}$.

f est une application A -linéaire, montrons que f est identiquement nul. A/\mathfrak{p} est un corps donc A/\mathfrak{p} est simple soit $f \in \text{Hom}_A(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{p})$ soit f est identiquement nul soit f est un isomorphisme d'après le **lemme SCHUR**.

Supposons que f est un isomorphisme, et soit $x \in \mathfrak{P}' - \mathfrak{P}$, $\bar{x}_{\mathfrak{p}} =$ classe de x module \mathfrak{P} .

On a : $\bar{0}_{\mathfrak{p}'} \neq f(\bar{x}_{\mathfrak{p}}) = f(x \cdot \bar{1}_{\mathfrak{p}}) = x f(\bar{1}_{\mathfrak{p}}) = \bar{0}_{\mathfrak{p}'}$, contradiction. Donc $f \equiv 0$.

Soit $M = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in L} A/\mathfrak{p}$. Montrons que M vérifie la propriété (S).

Soit $f \in \text{End}_A(M)$ tel que f est surjective.

Comme A/\mathfrak{p} vérifie (S) pour tout $\mathfrak{p} \in L$ et que $\text{Hom}_A(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{p}') = (0)$ si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, alors

d'après la **proposition I.28**, $M = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in L} A/\mathfrak{p}$ vérifie la **propriété (S)**. Donc M est de type fini

et par conséquent L est fini.

Soit x un élément d'un anneau A , x est dit nilpotent lorsqu'il existe un entier $n > 0$ tel que $x^n = 0$. On appelle **nil-idéal** un idéal dont tous les éléments sont nilpotents.

Proposition III-6 :

Soit A un FGS anneau commutatif ; J son radical de Jacobson. Alors pour tout idempotent \bar{x} de A/J il existe un idempotent e de A tel que $\bar{e} = \bar{x}$.

Démonstration :

Soit \bar{x} un idempotent de A/J , alors $x^2 - x \in J$. Puisque A est un FGS anneau commutatif alors J est un nil-idéal (Tout idéal premier est maximal). Donc il existe $n > 0$ tel que $(x^2 - x)^n = 0$; en développant par la formule du binôme on obtient la relation

$x^n = x^{n+1} p(x)$ où $p(x)$ est un polynôme en x à coefficients entiers. On en déduit les égalités :

$$x^n = x^{n+2} p(x)^2 = x^{n+3} p(x)^3 = \dots = x^{2n} p(x)^n.$$

L'élément $e = x^n p(x)^n$ est un idempotent de A :

$$e^2 = x^{2n} p(x)^{2n} = [x^{2n} p(x)^n] p(x)^n = x^n p(x)^n = e$$

Dans l'anneau A/J on a les relations :

$$\bar{x} = \bar{x}^n = \bar{x} p(\bar{x}) = \bar{x}^n p(\bar{x})^n = \bar{e}$$

Proposition III-7 :

Soit A un FGS anneau commutatif ; J son radical de Jacobson. Alors A/J est semi-simple.

Démonstration de prop. III-7 :

D'après la **proposition III-5** A possède un nombre fini d'idéaux maximaux c'est à dire $J = I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ où les I_i sont les idéaux maximaux de A

pour $1 \leq i \leq n$. D'où l'isomorphisme d'anneaux $\bigoplus_{i=1}^n A/A_i \simeq A/J$.

Proposition III-8 :

Un FGS anneau commutatif est semi-local.

Démonstration :

C'est une conséquence de la définition d'un anneau semi-local et de la **proposition III-7**.

Proposition III-9 :

Un FGS-anneau commutatif est semi-parfait.

Démonstration :

La démonstration résulte des **propositions I-22 ; III-6 et III-7**.

Proposition III-10 :

Un FGS anneau commutatif A est somme directe de modules projectifs locaux et

$A = \bigoplus_{i=1}^n Ae_i$ où $\{e_i\}_1^n$ est un système orthogonal et complet d'idempotents de A

Démonstration :

Voir [20] proposition 6.3.4 et [10] proposition 18.23.

Proposition III.11 :

Un produit d'anneau A_i ($1 \leq i \leq n$) est un FGS-anneau si et seulement si chaque A_i est un FGS-anneau.

Démonstration :

Soit $A = \prod_{i=1}^n A_i$. Supposons que A est un FGS-anneau, comme A_i ($1 \leq i \leq n$) est

l'image homomorphe de A par la i ème projection $A \xrightarrow{P_i} A_i$, d'après proposition III.2

A_i est un FGS-anneau en tant que image homomorphe de A . Inversement supposons que

A_i est un FGS-anneau pour tout i ($1 \leq i \leq n$). Soit M un A -module d'après propriété (I.15),

Chapitre 1, M est un A_i -module pour tout i , ($1 \leq i \leq n$).

Donc si M vérifie la propriété (S) alors M en tant que A_i -module est de type fini pour tout i ,

($1 \leq i \leq n$). Puisque $A = \prod_{i=1}^n A_i$ donc M est de type fini en tant que A -module.

Proposition III.12 :

Tout anneau commutatif artinien dont tout idéal A est principal est un FGS-anneau.

Démonstration :

Soit A un anneau commutatif artinien à idéaux principaux. A est donc un produit directe d'un nombre fini d'anneau local artinien à idéaux principaux (**prop. I.10**). On peut supposer donc A lui-même local artinien et à idéaux principaux puisque d'après proposition III.13 A est un FGS-anneau si et seulement si A_i ($1 \leq i \leq n$) est un FGS-anneau. Soit M un A -module d'après proposition I.13, M est somme directe de modules cycliques ($M = \bigoplus_{i=1}^r M_i$ où les M_i sont cycliques).

Supposons que \mathbf{M} vérifie la propriété (S) et que \mathbf{M} n'est pas de type fini.

Si \mathbf{M} n'est de type fini, il existe une infinité dénombrable de facteurs cycliques isomorphes deux à deux (car l'ensemble des classes d'isomorphismes des \mathbf{A} -modules cycliques est fini

proposition I-14). $\mathbf{M} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{M}_i$ où I est infini, I s'écrit donc $I = K \cup L$ avec $K \cap L = \emptyset$ et

K dénombrable. D'où $\mathbf{M} = \left(\bigoplus_{i \in K} \mathbf{M}_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in L} \mathbf{M}_i \right)$, c'est à dire $\mathbf{M} = \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}c_n \right) \oplus \mathbf{L}$ et

$\mathbf{A}c_i \simeq \mathbf{A}c_j$. Considérons $\varphi : \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}c_n \right) \longrightarrow \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}c_n \right)$

$$c_1 \longmapsto 0$$

$$c_n \longmapsto c_{n-1} \text{ si } n > 1$$

L'homomorphisme φ est surjectif, mais il n'est pas injectif.

Soit $h : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{M}$, $c + x \longmapsto \varphi(c) + x$

h est surjectif mais il n'est pas injectif, donc \mathbf{M} ne vérifie pas la **propriété (S)**.

On aboutit à une contradiction. Donc \mathbf{M} est de type fini.

Proposition III-13 :

Sur un FGS-anneau commutatif \mathbf{A} tout \mathbf{A} -module indécomposable projectif est de type fini

Démonstration :

Soit \mathbf{P} un \mathbf{A} -module indécomposable projectif. Alors \mathbf{P} vérifie la propriété (S). Donc puisque \mathbf{A} est un FGS-anneau commutatif, \mathbf{P} est de type fini.

Proposition III-14 :

Soit \mathbf{A} un FGS-anneau commutatif artimien. Alors tout idéal de \mathbf{A} est principal

Démonstration :

Il résulte de la **proposition II-9**.

Définition III-15 :

Soit (E, \subseteq) un ensemble ordonné par l'inclusion. On dit que les sous-ensembles de E vérifient la condition de chaîne ascendante si toute suite $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ de E est stationnaire, c'est à dire il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = I_{n+1}$.

Proposition III-16 :

Soit A un FGS anneau commutatif tel que les anneaux des sous-ensembles de A vérifient la condition de chaîne ascendante. Alors $J(A)$ est nilpotent.

Démonstration :

Montrons que $J(A)$ est T-nilpotent.

Puisque $J(A)$ est un nil-idéal d'après [20] proposition 2-1-6 $J(A)$ est T-nilpotent. D'autre part : $\text{Ann}_A(J) \subset \text{Ann}_A(J^2) \subset \dots$

Soit n le plus petit entier tel que $\text{Ann}_A(J^n) = \text{Ann}_A(J^{n+1})$. Supposons que J n'est pas nilpotent ; il existe alors un élément x_1 de J tel que $J^n x_1 \neq \{0\}$, ce qui implique que $J^{n+1} x_1 \neq \{0\}$ etc...

On met ainsi en évidence une suite (x_n) d'éléments de J telle que $x_n \times x_{n-1} \times \dots \times x_1$ ne soit pas nul pour tout entier $n \geq 1$. Ce qui contredit la T-nilpotence de J . Donc J est nilpotent.

Proposition III-17 :

Soit A un FGS-anneau commutatif tel que les anneaux des sous-ensembles de A vérifiant la condition de chaîne ascendante. Alors A est artinien.

Démonstration :

On peut supposer A local et $J^2 = (0)$. Alors J/J^2 est un A/J -espace vectoriel.

Montrons que $\dim A/J (J/J^2) = 1$.

Supposons $\dim A/J (J/J^2) \geq 2$. Il en résulte d'après [12] il existe un A -module M qui n'est

de type fini et qui vérifie (S). Ce qui est absurde donc $\dim A/J (J/J^2) = 1$

D'où J est principal. A est artinien de plus il est à idéaux principaux.

Proposition III-18 :

Soit A un anneau commutatif tel que les anneaux des sous-ensembles de A vérifient la condition de chaîne ascendante. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- 1) A est un FGS-anneau
- 2) A est artinien à idéaux principaux

Démonstration :

- 1) \Rightarrow 2) résulte de la **proposition III-17** et de la **proposition III-9**.
 - 2) \Rightarrow 1) résulte de la **proposition III-12**.
-

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **ANDERSON, F. W. and FULLER K.R.** : Rings and categories of modules. 1974.
 - [2] **Armendariz, E.P., Fisher, J.W. And Snider, R.L.** : On injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules. Comm. In Algebra 6(7), (1978).
 - [3] **ATIYAH, Frs and MACDONALD I. G.** : Introduction to commutative Algebra. Addison – Wesley Publishing company (1969).
 - [4] **BARRY M., GUEYE C.T., SANGHARE M.** : On commutative FGI-Rings (à paraître dans Extracta mathematicae).
 - [5] **BOURBAKI, N** : Algèbre commutative Chap 8 et 9 Masson 1983.
 - [6] **BOURBAKI, N** : Algèbre II Chap.8 Herman 1958.
 - [7] **COHEN, I. S. and KAPLANSKY, I.** : Ring for which every module is a direct sum of cyclic modules Maths. 2 – 54 (1951) 97-101.
 - [8] **DJOKOVIC, D. Z.** : épimorphism of modules which must be isomorphisms. Can. Maths Bull, 16 (4), (1973), 513 – 515.
 - [9] **FAITH, C** : On Köth rings. Math. Ann. 164 (1966), 207 – 212.
 - [10] **FAITH, C** : Ring theory. Algebra II. Springer – Verlag (1976).
 - [11] **HIRANS, Y** : On fitting's lemma. Hiroshima math. J. (1979).
 - [12] **KAIDI, A.M. et SANGHARE, M.** : Une caractérisation des anneaux artiniens à idéaux principaux. Lec. Notes in Math. N° 1328 Springer-Verlag 245-254 (1988)
 - [13] **LAFON J. P.** : Algèbre commutative. Langages géométrique et Algébrique. Hermann. (1977).
 - [14] **LAFON J. P.** : Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative. Hermann.
 - [15] **MALLIAVIN M. P.** : Algèbre Commutative. Application en géométrie et théorie des nombres. Masson (1985).
-

- [16] **MALTIS E.** : Injective module over noetherian rings Pacific J.Math volume 8 (1958) 511- 528.
- [17] **MEGIBBEN Chasles** : Countable injective module are sigma injective. Proceed of the amer. Math. J. Vol. 84 N° 1 (Janvier 1982).
- [18] **ORZEH, M.** : Onto endomorphisms are isomorphisms. Amer. Maths. Monthly 78(1971) 357-362.
- [19] **POSNER E. C.** : Prime rings satisfying a polynomial identity. Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 180-183.
- [20] **RENAULT G.** : Algèbre non commutative. Gauthier Villars (1975).
- [21] **ROBERT B. and WARFIELD, Jr** : Rings whose modules have nice decomposition maths. 2. 125 (1972) 187 – 192.
- [22] **ROTMAN J. J.** : Notes on Homological Algebras. University of Illinois, Urbana. Van Nostrand Reinhold Company – New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne.
- [23] **SANGHARE Mamadou** : Sur une classe de modules et d'anneaux liés aux conditions de chaine. Thèse de Doctorat 3^{ème} Cycle (1985). Rabat.
- [24] **SANGHARE Mamadou** : Sur quelques classes d'anneaux liées au lemme de Fitting.
Thèse d'Etat 1993 - Dakar
- [25] **SHARPE D. W. and VAMOS P.** : injective module Camb. Un. Press. 1972.
- [26] **VASCONCELOS W. V.** : On endomorphisms of finitely generated modules Proc. Amer. Maths. Soc 25 (1970) 900 – 901.
- [27] **VASCONCELOS W. V.** : On finitely generated flat modules. Trans. Amer. Math. Soc. 138 (1969). 505 – 512.
- [28] **ZARISKI and SAMUEL** : Commutative Algebra. D. Van Nostrand company, Inc 9 (1958).