

UNIVERSITÉ GASTON BERGER DE SAINT-LOUIS

U.F.R DES SCIENCES APPLIQUÉES ET TECHNOLOGIES



T H È S E

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
DE L'UNIVERSITÉ GASTON BERGER

Spécialité : Analyse Numérique

par

MOUHAMADOU SAMSIDY GOUDIABY

Contrôle de réseaux de canaux à ciel ouvert

soutenue publiquement le 11 Avril 2012, devant le jury ci-dessous :

M. Hamidou Touré	Professeur (UO, Burkina Faso)	Président
M. Abdoulaye Sene	Maître de Conférences (UCAD, Sénégal)	Examineur
M. Mohamed B. Maouia	Maître Assistant (UGB, Sénégal)	Examineur
M. Jesper Ooppelstrup	Professeur (KTH, Suède)	Rapporteur
M. Ouateni Diallo	Maître de Conférences (USTTB, Mali)	Rapporteur
M. Abdou Sene	Maître de Conférences (UGB, Sénégal)	Directeur de Thèse
M. Gunilla Kreiss	Professeur (UU, Suède)	Co-directrice de Thèse

Résumé & Abstract

Résumé

Dans ce document, on s'intéresse aux équations de Saint-Venant dans un contexte mathématique et numérique. Nous proposons une méthode algébrique pour construire des conditions aux bords rétroactives et retardées, pour réguler la hauteur et le débit de l'eau dans un canal unique et des réseaux de canaux à ciel ouvert. Un réseau étoilé constitué de n canaux avec une jonction où tous les canaux se rencontrent et un réseau de n biefs interconnectés en cascade. Les équations de Saint-Venant 1D sont considérées comme modèle de l'écoulement dans les réseaux. Elles sont ensuite linéarisées autour d'un état d'équilibre final désiré satisfaisant les conditions d'un régime d'écoulement fluvial. Nous utilisons la théorie concernant les systèmes hyperboliques linéaires et une estimation d'énergie pour construire des conditions au bord. Des conditions aux bords rétroactives qui dépendent de l'état du canal (ou réseaux) en un temps antérieur et qui assurent la convergence suivant la norme L^2 des solutions des systèmes linéaires vers zéro en temps. En d'autres termes, les conditions aux bords rétroactives se servent du passé pour agir sur le présent. Enfin, à travers la méthode des volumes finis, nous donnons des résultats numériques qui sont en adéquation avec les résultats théoriques obtenus sur les modèles linéaires. Aussi, des résultats numériques montrant la possibilité de contrôler les modèles non linéaires sont donnés.

Mots clés : Equations de Saint-Venant, réseaux de canaux à ciel ouvert, contrôlabilité asymptotique, systèmes hyperboliques, résolution numérique.

Abstract

In this document, we focus on Saint-Venant equations in both mathematical and numerical point of views. We propose an algebraic method to design delayed boundary feedback controllers to regulate the water flow and level in a single canal and networks of open canals. One network modeled as n canals with one junction where all canals come together and one network made up of n interconnected reaches in cascade. The St Venant equations are the models of the water flow in those networks. They are linearised around a prescribed steady state, under sub-critical flow condition. We use linear hyperbolic system theory and an energy estimate to build delayed boundary feedback control laws. These boundary feedback controllers depend on the state of the canal (or network) at earlier times and ensure the convergence in L^2 norm of the solutions of the linear systems to zero in time. Finally, using fine volumes methods, we give numerical results that show the theoretical results obtained from the linear systems. Also, numerical results showing that the controllers work for non-linear systems are given.

Keywords : Saint-Venant equations, networks of open canals, asymptotic controllability, hyperbolic systems, numerical resolution.

Table des matières

Résumé & Abstract	i
I Introduction générale	1
I.1 A propos des modèles utilisés	1
I.2 A propos des méthodes de contrôle du modèle de Saint-Venant	3
I.3 A propos de la nouvelle méthode de contrôle proposée	4
I.3.1 A propos du Chapitre II	5
I.3.2 A propos du Chapitre III	6
I.3.3 A propos du Chapitre IV	8
II Le contrôle du réseau étoilé de canaux à ciel ouvert	9
II.1 Le modèle du réseau et l'état d'équilibre	12
II.1.1 Le modèle du réseau	12
II.1.2 L'état d'équilibre	14
II.2 Le modèle linéaire et le résultat principal	15
II.2.1 Le modèle linéaire	15
II.2.2 Les variables caractéristiques	19
II.2.3 Le résultat principal	22
II.3 Construction des contrôles pour un canal	25
II.3.1 L'estimation a priori de l'énergie	26
II.3.2 Contrôler le canal par le biais des bouts amont et aval	27
II.3.3 Contrôler le canal par le biais du bout aval	32
II.4 Construction des contrôles pour le réseau	35
II.4.1 L'estimation à priori de l'énergie	35
II.4.2 Construction des contrôles	37
II.4.3 Le processus de stabilisation	39

II.5	Preuve du résultat principal	43
II.5.1	Un résultat de régularité pour un canal	43
II.5.2	Un résultat de régularité pour le réseau	46
III	Le contrôle d'un réseau de biefs en cascade	50
III.1	Le modèle du réseau et l'état d'équilibre	52
III.1.1	L'état d'équilibre	54
III.1.2	Le modèle linéaire	54
III.1.3	Les variables caractéristiques	55
III.1.4	Résultat principal	55
III.2	Construction du contrôle pour un bief	57
III.2.1	L'estimation d'énergie a priori	59
III.2.2	Construction des contrôles et processus de stabilisation	60
III.3	Construction des contrôles du réseau en cascade	63
III.3.1	L'estimation de l'énergie et la construction des contrôles	64
III.3.2	Preuve du résultat principal (Théorème III.1.1)	68
IV	Les résultats numériques concernant le contrôle du réseau étoilé et du réseau en cascade	71
IV.1	La méthode numérique et ses applications	73
IV.1.1	La méthode des volumes finis	73
IV.1.1.1	Lois de conservation et forme intégrale	73
IV.1.1.2	Méthode d'ordre 1	74
IV.1.1.3	Problème de Riemann	75
IV.1.1.4	Méthode de grande précision	76
IV.1.1.5	Traitement des conditions aux bouts	77
IV.1.2	Application sur un canal	78
IV.1.2.1	Le modèle linéaire	78
IV.1.2.2	Le modèle non linéaire	83
IV.1.3	Application sur le réseau étoilé	86
IV.1.3.1	Le modèle linéaire	86
IV.1.3.2	Le modèle non linéaire	89
IV.1.4	Application sur le réseau en cascade	91
IV.1.4.1	Le cas d'un bief	91
IV.1.4.2	Le cas du réseau en cascade	92
IV.2	Résultats numériques concernant le réseau étoilé	93
IV.2.1	Le cas d'un canal	93
IV.2.1.1	Entre le modèle linéaire et le non linéaire	94

IV.2.1.2	Application des contrôles	95
IV.2.2	Le cas du réseau étoilé	99
IV.2.2.1	Evolution de la hauteur d'eau au niveau de la jonction M	100
IV.2.2.2	Application des contrôles	100
IV.3	Résultats numériques concernant le réseau en cascade	102
IV.3.1	Le cas d'un seul bief	102
IV.3.2	Le cas du réseau en cascade	103
Conclusion		109
Références bibliographiques		110

Chapitre I

Introduction générale

I.1 A propos des modèles utilisés

Le modèle de Baré de Saint-Venant unidimensionnel est composé de deux équations aux dérivées partielles établies par *De Saint Venant*[40] : une loi de conservation de la masse et une loi de conservation de la quantité de mouvement. Il fait partie de la classe des systèmes d'équations hyperboliques homogènes appelée *lois de conservation*. Ce modèle peut être établi soit directement par écriture des bilans de masse et de quantité de mouvement entre deux sections droites de l'écoulement, soit par intégration des équations de Navier-Stokes sur une verticale. L'une des hypothèses utilisées pour établir les équations de Saint-Venant est que l'écoulement se fait essentiellement dans une direction. Autrement dit, la hauteur h , le débit q ou la vitesse v ne varient qu'en fonction du temps t et d'une seule variable d'espace notée x . Les forces d'inertie et les contraintes de viscosité dans les autres directions sont négligeables. Une autre hypothèse est que la pression dans l'écoulement est hydrostatique (i.e qu'il y a équilibre entre le gradient de pression et les forces gravitationnelles) comme dans un fluide au repos. De plus le fluide est incompressible.

Ces équations modélisent les écoulements capables de propager des ondes. La célérité de ces ondes (la vitesse avec laquelle l'onde se propage) permet de distinguer deux types de régimes d'écoulement. On parle de régime fluvial (appelé aussi régime sous-critique) si la vitesse de l'écoulement est inférieure à la célérité et de régime torentiel (super critique) si la vitesse de l'écoulement est supérieure à celle-ci. La plupart des écoulements rencontrés dans les fleuves, rivières et canaux sont de type fluvial. Le régime torentiel est rencontré dans les rivières à forte pente ou aux alentours d'une singularité (rupture de pente, rétrécissement brusque, etc) ou d'un ouvrage (seuil naturel, barrage, pont etc) dans les rivières fluviales.

Le modèle de Saint-Venant 1D représente l'écoulement en eaux peu profondes, par exemple dans un canal ou certains fleuves et marigots. Dans ce document, nous considérons un régime d'écoulement fluvial et des canaux à largeur constante, dont le fond est plat (i.e que la bathymétrie est une fonction constante en temps et en espace). Nous supposons que la viscosité de l'eau et les forces de friction sont négligeables et qu'aucun prélèvement n'est effectué le long

du canal. Généralement, les lois de conservation surviennent naturellement sous leur forme intégrale : pour deux points x_1 et x_2 , on a

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx = f(u(t, x_1)) - f(u(t, x_2)). \quad (\text{I.1.1})$$

où u mesure la densité d'une certaine variable conservée et f est le flux. L'équation (I.1.1) stipule que : la variation temporelle de la masse totale de la variable conservée entre deux points résulte uniquement des flux appliqués aux niveau de ces points. Elle peut être réécrite sous la forme :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(t, x)) \right) dx = 0, \quad (\text{I.1.2})$$

pour tout x_1 et x_2 . Ce qui donne la loi de conservation :

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(t, x)) = 0. \quad (\text{I.1.3})$$

Soit $\bar{\rho}$ la masse volumique du fluide qui est constante puisque le fluide est incompressible. La masse totale entre x_1 et x_2 est donnée par

$$\int_{x_1}^{x_2} l \bar{\rho} h(t, x), \quad (\text{I.1.4})$$

où l et $h(t, x)$ sont respectivement la largeur de la section du canal et la hauteur de la colonne d'eau. Pour la loi de conservation de la masse, u est donné par $l \bar{\rho} h(t, x)$ et le flux f par le produit de la quantité $l \bar{\rho} h(t, x)$ et de la vitesse du fluide $v(t, x)$: $f(l \bar{\rho} h(t, x)) = l \bar{\rho} v(t, x) h(t, x)$. Ainsi, grâce à (I.1.3), on a

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v(t, x) h(t, x)) = 0. \quad (\text{I.1.5})$$

La quantité $lv(t, x)h(t, x)$ est le débit du fluide et sera noté par $q(t, x)$. Dans ce cas, on a :

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial q(t, x)}{\partial x} = 0. \quad (\text{I.1.6})$$

Pour obtenir la conservation de la quantité de mouvement, on considère la densité de quantité de mouvement donnée par $\bar{\rho} v(t, x)$. La quantité totale sur une section de l'écoulement est :

$$\int_{x_1}^{x_2} l \bar{\rho} v(t, x) h(t, x) \quad (\text{I.1.7})$$

Dans ce cas, le flux f est composée du flux $l \bar{\rho} v(t, x) h(t, x) v(t, x)$ de la quantité $l \bar{\rho} v(t, x) h(t, x)$

I.2 A propos des méthodes de contrôle du modèle de Saint-Venant

et du flux p résultant de la pression du fluide : $f(l\bar{\rho}v(t, x)h(t, x)) = l\bar{\rho}v^2(t, x)h(t, x) + p$. La pression à une distance $h - y$ de la surface libre h est donnée par $\bar{\rho}g(h - y)$, puisqu'elle est hydrostatique. Ainsi, la pression totale p dans la section transversale délimitée par le fond et la surface libre est :

$$p = \int_0^{h(t, x)} \bar{\rho}gl(h - y)dy = \frac{1}{2}\bar{\rho}glh^2(t, x). \quad (\text{I.1.8})$$

La conservation de la quantité de mouvement est obtenue en remplaçant dans (I.1.3), u par $l\bar{\rho}v(t, x)h(t, x)$ et f par $l\bar{\rho}v^2(t, x)h(t, x) + \bar{\rho}glh^2(t, x)/2$, i.e :

$$\frac{\partial}{\partial t}(lv(t, x)h(t, x)) + \frac{\partial}{\partial x} \left(lv^2(t, x)h(t, x) + \frac{1}{2}glh^2(t, x) \right) = 0. \quad (\text{I.1.9})$$

En utilisant le débit q , on a

$$\frac{\partial q(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2(t, x)}{lh(t, x)} + \frac{1}{2}glh^2(t, x) \right) = 0. \quad (\text{I.1.10})$$

Si les données h and v sont continues, on peut appliquer la formule de la dérivation d'un produit à l'équation (I.1.9) et ensuite utiliser l'équation (I.1.5) pour finalement obtenir :

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2(t, x)}{\partial x} + g \frac{\partial h(t, x)}{\partial x} = 0. \quad (\text{I.1.11})$$

Les équations (I.1.6) et (I.1.10) constituent la forme conservative du modèle de Saint-Venant tandis que (I.1.5) et (I.1.11) sont la forme non conservative. En effet, les dernières équations ne peuvent pas être écrites sous la forme (I.1.3) où u est le vecteur $(h, v)^t$.

I.2 A propos des méthodes de contrôle du modèle de Saint-Venant

La contrôlabilité à pour objectif de conduire un système d'un état initial à un état final fixé. En théorie, si le temps permettant d'atteindre cet état final est fini, on parle de contrôlabilité exacte sinon le terme stabilisation est parfois utilisé. Le contrôle peut être interne ou frontière selon qu'on agit à l'intérieur du domaine ou à son bord. Pour les équations de Saint-Venant, plusieurs types de contrôles contruits à travers différentes méthodes ont été proposés. On peut mentionner par exemple :

- La méthode de contrôle linéaire quadratique (LQ) qui a été spécialement étudiée et développée par *Balogun et al.* [2], *Garcia et al.* [11], *Malaterre* [29], *Weyer* [46], *Chen et al* [7] et *Litrice et al.* [28]. Cette méthode est basée sur des systèmes linéaires et sur

la minimisation d'une fonction quadratique. Les contraintes du problème d'optimisation sont données par le système linéaire en question.

- La conception de contrôle H_∞ , par *Litrico* [24], [26] et [25]. Cette méthode est basée sur des modèles linéaires et sur une optimisation suivant la norme H_∞ pour construire les contrôles.
- L'utilisation de la théorie des semi-groupes par *Xu et Sallet* [47] pour construire des contrôles proportionnels et intégrales (PI). Ce type de contrôle à été considéré par *Litrico et al.* [27].
- Les méthodes qui sont basées sur les invariants de Riemann. Les invariants de Riemann sont utilisés pour réécrire les équations de Saint-Venant. Leur comportement au bord, permet d'élaborer des contrôles qui à travers une analyse de stabilité permettent d'obtenir un état d'équilibre (voir *Halleux et al.* [18], *Ndiaye et al.* [33], *Li* [22], *Li et al.* [23], *Leugering et al.* [19], *Gugat et al.* [16, 17]).
- Les méthodes basées sur l'analyse de Lyapunov. Elles consistent à considérer des fonctions de Lyapunov pondérées et associées au système de Saint-Venant. Ensuite, des contrôles et des poids particuliers sont choisis grâce à la variation en temps de ces fonctions, afin d'obtenir la stabilité asymptotique (voir *Dos Santos et al.* [41], *Cen et al.* [6], *Bastin et al.* [4] et *Prieur et al.* [35]).

I.3 A propos de la nouvelle méthode de contrôle proposée

Le travail dans ce document consiste à introduire de nouveaux types de contrôles frontières pour un canal, un réseau étoilé (Fig I.1) et un réseau en cascade (Fig I.2). Les débits au niveau des bouts libres du réseau sont les quantités à contrôler. Ces contrôles permettent d'amener la hauteur et le débit du fluide à un état d'équilibre lorsque le temps est suffisamment grand. Les équations de Saint-Venant sont linéarisées autour de cet état d'équilibre. L'approche consiste à exprimer le taux de variation de l'énergie de perturbation de l'état d'équilibre comme un polynôme de second degré en terme de débit au niveau des bouts du canal ou du réseaux. Ensuite, par l'utilisation de la théorie sur les variables caractéristiques et d'une propriété des polynômes du second degré, on construit des contrôles de la forme :

$$\hat{q}(t, \Gamma) = \begin{cases} f(\hat{q}(0, x), \hat{h}(0, x)), & x \in [0, L], \quad \text{si } t \leq \delta t, \\ f(\hat{q}(t - \delta t, \Gamma), \hat{h}(t - \delta t, \Gamma)), & \text{si } t \geq \delta t, \end{cases} \quad (\text{I.3.1})$$

où f est une fonction à préciser, (\hat{h}, \hat{q}) est la perturbation de l'état d'équilibre, Γ est une partie du bord du domaine et δt représente un délai.

L'un des avantages de ce contrôle, est l'existence du délai δt dans le second membre de (I.3.1). Il permet au contrôle d'agir sur le présent en se servant du passé. En pratique, la hauteur est mesurée en ligne pour permettre d'obtenir les valeurs des contrôles à imposer au niveau des bouts. Ainsi, il y a un temps minimum entre la mesure de ces données et leur utilisation dans la construction du contrôle. Il y a aussi un avantage relatif à la décroissance de l'énergie. En effet, aucune augmentation d'énergie n'est possible dans le processus d'obtention de l'état d'équilibre final.

I.3.1 A propos du Chapitre II

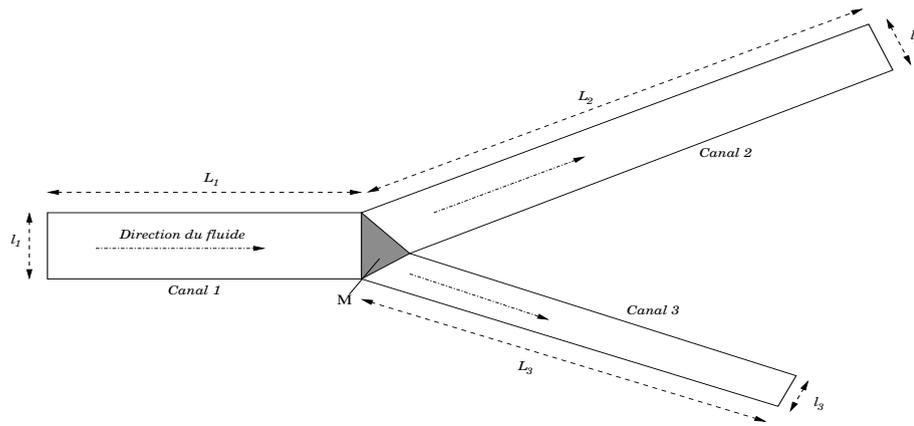


Figure I.1 – Représentation d'un réseau étoilé.

Dans le chapitre II, nous considérons d'une part un canal et d'autre part un réseau constitué de 3 canaux avec une jonction où tous les canaux se rencontrent. Les équations de Saint-Venant sont sous leur forme conservative (la formulation hauteur-débit) et dans les deux cas, nous contruisons les contrôles à travers les débits au niveau des bouts libres, qui permettent de stabiliser le débit et la hauteur autour d'un état choisi. Le modèle non linéaire considéré dans le cas d'un seul canal est :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, & \text{dans } [0, L], \\ \frac{\partial q}{\partial t} + glh \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = 0, & \text{dans } [0, L]. \end{cases} \quad (\text{I.3.2})$$

Le modèle linéaire correspondant, à travers lequel sont contruits les contrôle est :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0, & \text{dans } [0, L] \\ \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \sigma_i \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} + \rho \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0, & \sigma = 2 \frac{\bar{q}}{l\bar{h}}, \quad \rho = gl\bar{h} - \frac{\bar{q}^2}{l\bar{h}^2} \end{cases} \quad (\text{I.3.3})$$

où (\bar{h}, \bar{q}) est l'état d'équilibre désiré constant et L est la longueur du canal. En ce qui concerne le réseau étoilé, le modèle non linéaire est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} = 0, \quad \text{dans } [0, L_i], \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial q_i}{\partial t} + g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_i^2}{h_i} \right) = 0, \quad \text{dans } [0, L_i], \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \\ \sum_{i=1}^3 \epsilon_i q_i(t, x_i) = 0, \quad \text{sur } M \\ gh_1(t, x_1) + \frac{1}{2} \frac{q_1^2(t, x_1)}{l_1^2 h_1^2(t, x_1)} = gh_2(t, x_2) + \frac{1}{2} \frac{q_2^2(t, x_2)}{l_2^2 h_2^2(t, x_2)}, \quad \text{sur } M, \\ gh_1(t, x_1) + \frac{1}{2} \frac{q_1^2(t, x_1)}{l_1^2 h_1^2(t, x_1)} = gh_3(t, x_3) + \frac{1}{2} \frac{q_3^2(t, x_3)}{l_3^2 h_3^2(t, x_3)}, \quad \text{sur } M. \end{array} \right. \quad (\text{I.3.4})$$

où i , correspond au numéro d'un canal. Les variables x_1 , x_2 et x_3 correspondent respectivement aux bouts des canaux 1, 2 et 3 qui se rencontrent au niveau de la jonction M . Les trois dernières équations de (I.3.4) sont des conditions à satisfaire au niveau de la jonction. La condition sur la conservation du débit et celle sur la continuité de l'énergie sur la jonction. Le modèle linéaire à travers lequel les contrôles sont construits est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} + \sigma_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0, \quad \text{sur } M, \\ \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) + \beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) = \gamma_2 \hat{h}_2(t, x_2) + \beta_2 \hat{q}_2(t, x_2), \quad \text{sur } M, \\ \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) + \beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) = \gamma_3 \hat{h}_3(t, x_3) + \beta_3 \hat{q}_3(t, x_3), \quad \text{sur } M, \end{array} \right. \quad (\text{I.3.5})$$

où

$$\beta_i = \frac{\bar{q}_i}{l_i^2 \bar{h}_i^2}, \quad \gamma_i = g - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i^2 \bar{h}_i^3}. \quad (\text{I.3.6})$$

L'état d'équilibre (\bar{h}_i, \bar{q}_i) est constant dans chaque canal.

I.3.2 A propos du Chapitre III

Dans le chapitre III, nous considérons d'une part un bief et d'autre part un réseau constitué de 2 biefs mis en cascade, différemment du réseau du chapitre II. Pour ce cas bien précis, on

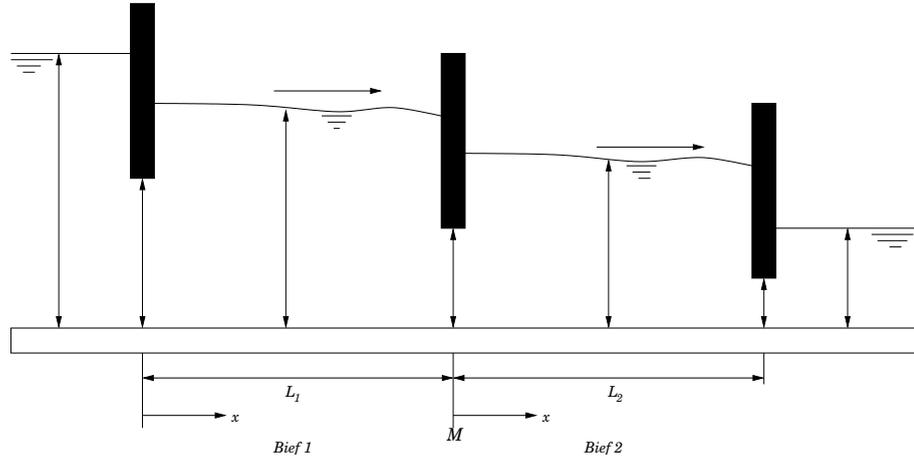


Figure I.2 – Représentation du réseau en cascade.

a une condition (conservation du débit) au niveau de la jonction où les biefs se rencontrent. En plus, les équations de Saint-Venant sont sous leur forme non conservative (la formulation hauteur-vitesse) et dans les deux cas, nous construisons les contrôles à travers les vitesses au niveau des points de contrôles que sont la jonction, le bout amont du bief 1 et le bout aval du bief 2. Le modèle non linéaire considéré dans le cas d'un seul bief est :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (\text{I.3.7})$$

Le modèle linéaire permettant la construction des contrôles est :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \bar{h} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + g \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (\text{I.3.8})$$

où (\bar{h}, \bar{v}) est l'état d'équilibre constant désiré. Pour le réseau en cascade, le modèle non linéaire est

$$\begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial(v_i h_i)}{\partial x} = 0, & \text{dans } [0, L_i] \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial x} + g \frac{\partial h_i}{\partial x} = 0, & \text{dans } [0, L_i], \\ h_1(t, L_1)v_1(t, L_1) = h_2(t, 0)v_2(t, 0), & \text{sur } M, \end{cases} \quad (\text{I.3.9})$$

où la dernière équation est la condition sur la conservation du débit au niveau de la jonction M.

Les contrôles sont construits à partir du modèle linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \bar{h} \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} + \bar{v}_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} + g \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \\ \bar{v}_1 \hat{h}_1(t, L_1) + \bar{h}_1 \hat{v}_1(t, L_1) = \bar{v}_2 \hat{h}_2(t, 0) + \bar{h}_2 \hat{v}_2(t, 0), \quad \text{sur } M. \end{array} \right. \quad (\text{I.3.10})$$

L'état d'équilibre est choisi de sorte que $\bar{h}_1 > \bar{h}_2$ et $\bar{h}_1 \bar{v}_1 = \bar{h}_2 \bar{v}_2$.

Ce chapitre fait partie du livre [1].

I.3.3 A propos du Chapitre IV

Dans le chapitre IV, nous mettons en évidence, à travers des simulations numériques, les résultats théoriques obtenus dans les chapitres II et III. Ces résultats concernent la convergence suivant la norme L^2 des solutions des systèmes linéaires (I.3.3), (I.3.5), (I.3.8) et (I.3.10) vers zéro en temps, à l'aide de contrôles construits à cet effet. Nous montrons aussi numériquement que les contrôles construits permettent de contrôler les systèmes non linéarisés. Ceci permet de montrer la robustesse des contrôles. La méthode des volumes finis ([21], [20], [44]) est utilisée pour résoudre numériquement les équations de Saint-Venant unidimensionnelles qui sont utilisées dans les chapitres II et III.

Chapitre II

Le contrôle du réseau étoilé de canaux à ciel ouvert

Sommaire

II.1 Le modèle du réseau et l'état d'équilibre	12
II.1.1 Le modèle du réseau	12
II.1.2 L'état d'équilibre	14
II.2 Le modèle linéaire et le résultat principal	15
II.2.1 Le modèle linéaire	15
II.2.2 Les variables caractéristiques	19
II.2.3 Le résultat principal	22
II.3 Construction des contrôles pour un canal	25
II.3.1 L'estimation a priori de l'énergie	26
II.3.2 Contrôler le canal par le biais des bouts amont et aval	27
II.3.3 Contrôler le canal par le biais du bout aval	32
II.4 Construction des contrôles pour le réseau	35
II.4.1 L'estimation à priori de l'énergie	35
II.4.2 Construction des contrôles	37
II.4.3 Le processus de stabilisation	39
II.5 Preuve du résultat principal	43
II.5.1 Un résultat de régularité pour un canal	43
II.5.2 Un résultat de régularité pour le réseau	46

Introduction

Le modèle de Barré de Saint-Venant unidimensionnel est composé de deux équations aux dérivées partielles établies par *De Saint Venant*[40] : une loi de conservation de la masse et une loi de conservation de la quantité de mouvement. Le modèle décrit le comportement de la hauteur et du débit de l'eau dans les rivières et les canaux à ciel ouvert. Ainsi, il constitue pour les hydrauliciens, un outil fondamental pour la résolution de problèmes en rapport avec la dynamique des rivières, fleuves et canaux à ciel ouvert.

Pendant plusieurs années, des chercheurs se sont penchés sur le domaine de la contrôlabilité, de l'observabilité et de la stabilisabilité [30, 39]. Dans [30], *Malaterre et al* ont donné une classification des algorithmes utilisés pour le contrôle des canaux et une bibliographie assez détaillée sur ce domaine. L'état de l'art et les perspectives concernant le contrôle des canaux d'irrigation ont été évoqués dans [31]. De plus, une récente synthèse a été faite dans [3], où *Bastin et al.* ont donné une contribution à travers une bibliographie intéressante à propos des problèmes ouverts et des défis mathématiques concernant les canaux d'irrigation.

Grâce à de nombreuses théories, différentes méthodes de contrôles ont été proposées (LQ, PI, H_∞ , etc). La méthode de contrôle linéaire quadratique (LQ), a été spécialement étudiée et développée par *Balogun et al.* dans [2] et *Malaterre* dans [29] (voir aussi *Weyer* dans [46] et *Chen et al* dans [7]). A travers la théorie des semi-groupes *Xu et Sallet* [47] ont proposé un contrôle proportionnel et intégral (PI), en utilisant un modèle d'équations aux dérivées partielles linéarisées autour d'un état d'équilibre. *Litrice et al.* [26] ont étudié un contrôle H_∞ qui réalise un compromis entre gestion de ressources hydriques et performances en termes de rejet de perturbations non mesurées. L'analyse de Lyapunov et l'approche des invariants de Riemann sont aussi des méthodes utilisées pour la construction de contrôles. Ces dernières méthodes ont été utilisées par *Leugering et al.* [19], *Gugat et al.* [17], *Halleux et al.* [18], *N'diaye et Bastin* [33] et récemment par *Cen et Xi* [6] et *Bastin et al.* [4].

Depuis longtemps, des réseaux complexes de canaux d'irrigation ont été étudiés par les ingénieurs hydrauliciens (voir [24, 32, 46] et la bibliographie de [3]). Ainsi, mathématiquement, la régulation du flux dans les réseaux d'irrigation devient un fondement théorique attractif, pour déterminer des contrôles au bord optimaux. Ces réseaux sont souvent modélisés comme des canaux et des jonctions où plusieurs canaux se rencontrent. D'ailleurs, une variété de types de réseaux a été étudiée dans la littérature, en utilisant les méthodes de contrôles citées plus haut et plusieurs conditions de jonction ont été proposées.

Nous considérons un régime d'écoulement fluvial ou sous-critique ; régime pour lequel la vitesse des ondes est plus grande que celle de l'écoulement. Et donc, nous utilisons les conditions de jonction comme celles données dans [19, 22, 32, 37]. Ces conditions sont la conservation du

débit et la continuité de l'énergie. D'autres types de conditions sont traitées dans [6, 17, 18, 36].

Des résultats importants concernant le flux dans les réseaux d'irrigation ont été montrés par beaucoup de chercheurs. Parmi lesquels *Halleux et al.* [18] qui ont utilisé l'approche des invariants de Riemann pour déduire un contrôle stabilisateur pour un réseau constitué de plusieurs canaux mis en cascade. L'action des contrôles est assurée par la présence de vannes aux bouts des canaux constituant le réseau. L'ouverture de ces vannes détermine le débit de l'eau au niveau de ces bouts. *Bastin et al.* [4] ont utilisé l'approche de Lyapunov sur un réseau des canaux en cascade ayant un fond incliné. *Leugering et al.* [19] ont étudié la stabilisation et la contrôlabilité à zéro des perturbations autour d'un état stationnaire pour un réseau d'irrigation en forme d'étoile. Des résultats concernant ce dernier type de réseau ont été montrés dans [22], où *Li* a étudié la contrôlabilité frontière exacte d'écoulements instationnaires. Des réseaux d'irrigation en forme d'arbres sont considérés dans [17, 36, 37].

L'objectif de ce travail est d'introduire de nouveaux types de contrôles rétroactifs frontières pour un réseau d'irrigation étoilé. Les débits au niveau des bouts du réseau sont les quantités à contrôler. Nous construisons des contrôles frontières qui permettent à la hauteur et le débit de l'eau d'atteindre un état d'équilibre lorsque le temps est suffisamment grand. Les équations de Saint-Venant unidimensionnelles sont linéarisées autour de cet état d'équilibre. L'approche sera montrée pour un réseau étoilé composé de trois canaux, mais elle peut être généralisée à un réseau étoilé de plusieurs canaux. Nous suivons, en l'approfondissant, l'approche de *Sene et al.*[42] concernant un seul canal. L'approche considérée dans ce présent travail est bénéfique par rapport à celles utilisées dans bien des travaux, en ce sens qu'elle

- permet de construire des contrôles qui dépendent de l'état du canal à un temps antérieur. Autrement dit, pour construire les contrôles, on se sert des données du canal mesurées en un temps antérieur (voir remarque II.3.1). Ce délai n'existe pas dans par exemple [4], [18], [33] et [42]. L'existence du délai est importante du point de vue pratique parce qu'elle offre un temps minimum entre la mesure en ligne des données et leur utilisation pour déterminer les valeurs des contrôles à imposer au niveau des bouts ;
- qu'elle assure la décroissance de l'énergie en tout temps. En effet, avec ces contrôles, aucune augmentation d'énergie n'est possible dans le processus d'obtention de l'état d'équilibre final, contrairement à d'autres types de contrôle (voir remarque II.3.2) ;
- qu'elle permet en plus des données initiales continues, le contrôle des données initiales moins régulières (données dans l'espace L^2) comme dans [4].

L'approche consiste à exprimer le taux de variation de l'énergie du système linéaire comme un polynôme du second degré en terme de débit au niveau des frontières (bouts libres des canaux constituant le réseau). Le polynôme du second degré est négatif pour un certain nombre de contrôles et le taux de stabilisation est borné. Ceci s'explique par le fait que la vitesse de

propagation des ondes des systèmes hyperboliques est finie. Le fait que le débit est stabilisé par des contrôles dans un intervalle donne la robustesse. Ceci est essentiel pour deux raisons. Premièrement, les contrôles seront appliqués à un problème réel qui est non linéaire. Deuxièmement, la hauteur d'eau au niveau des bouts influence les contrôles. Ces valeurs ne seront connues que par des mesures qui elles aussi sont approximativement correctes.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la première section, nous présentons le réseau, ensuite les équations de Saint-Venant unidimensionnelles et les conditions de jonction en considérant un régime d'écoulement fluvial. Nous déterminons aussi la solution de l'état d'équilibre final désiré. Dans la deuxième section, nous dérivons le modèle linéaire et les variables caractéristiques correspondantes. Nous formulons aussi le résultat principal en spécifiant les contrôles frontières et la décroissance de l'énergie. La troisième section est réservée à la présentation de l'approche dans le cas d'un seul canal tandis que le cas du réseau est considéré dans la quatrième section. Finalement, la cinquième section est consacrée à la preuve du résultat principal donné dans la deuxième section.

II.1 Le modèle du réseau et l'état d'équilibre

II.1.1 Le modèle du réseau

Considérons le réseau en forme d'étoile représenté par la figure II.1. Il est constitué de trois canaux et d'une jonction (notée M) où les canaux se rencontrent. Le modèle du réseau est composé d'équations de Saint-Venant 1D sur chaque canal et des conditions de jonction au niveau de M . Les variables concernant un canal sont indexées par le numéro du canal. Ainsi, pour le canal numéro i ($i = 1, 2, 3$) : h_i est la hauteur de la colonne d'eau (m), q_i est le débit ($m^3 s^{-1}$), L_i et l_i sont respectivement la longueur et la largeur du canal (m). Les équations de Saint-Venant conservatives sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) \quad \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} = 0, & \text{dans } [0, L_i], \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \\ (b) \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} + g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_i^2}{h_i} \right) = 0, & \text{dans } [0, L_i], \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \end{array} \right. \quad (\text{II.1.1})$$

avec les conditions initiales

$$h_i(0, x) = h_i^0(x), \quad q_i(0, x) = q_i^0(x), \quad (\text{II.1.2})$$

et les conditions au niveau des bouts libres des canaux constituant le réseau,

$$q_1(t, 0) = q_{1,0}(t), \quad q_2(t, L_2) = q_{2,L_2}(t), \quad q_3(t, L_3) = q_{3,L_3}(t). \quad (\text{II.1.3})$$

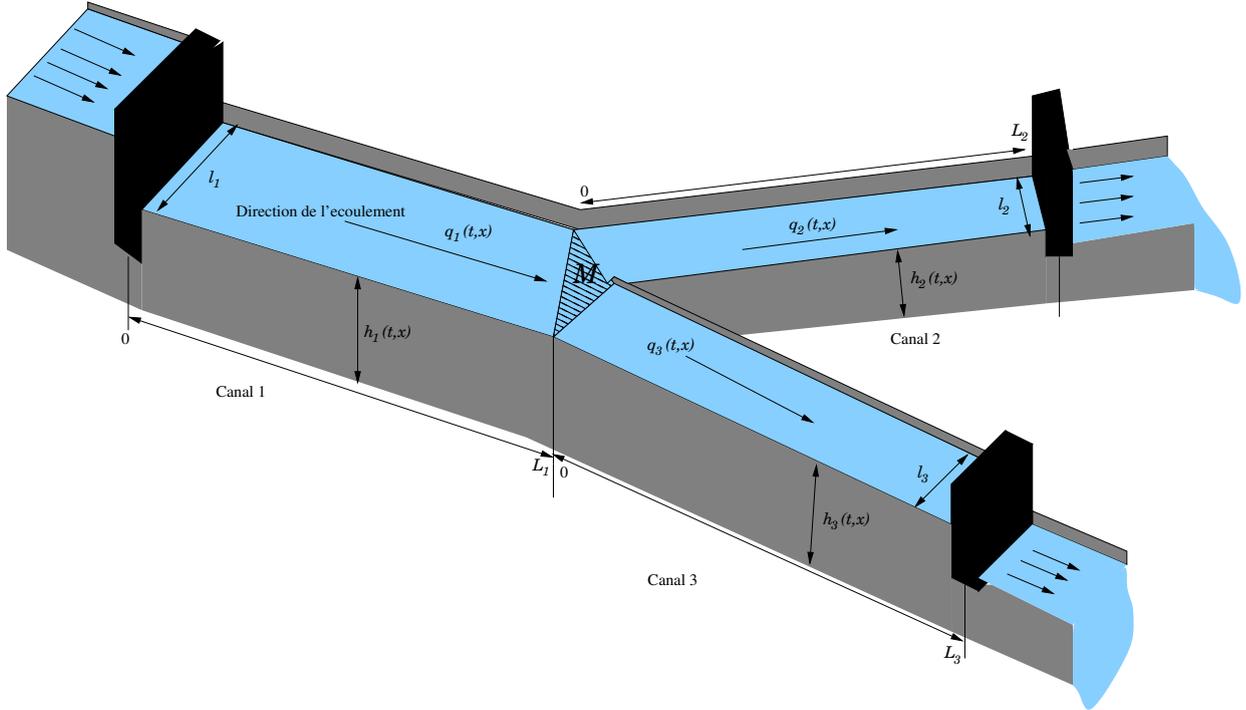


Figure II.1 – Le réseau en forme d'étoile

Le modèle du réseau est donné par les équations (II.1.1), les conditions (II.1.2)-(II.1.3) et des conditions de jonction au niveau de M . Ces conditions de jonction diffèrent selon qu'on est en régime d'écoulement torrentiel (régime supercritique) ou en régime d'écoulement fluvial (régime sous-critique). Nous considérons un régime d'écoulement fluvial ayant la direction donnée par la figure II.1 (d'amont en aval).

On note par x_i le bout du canal i qui rencontre les autres canaux au niveau de la jonction M (i.e $x_1 = L_1, x_2 = 0, x_3 = 0$). De plus, on fixe $\epsilon_i = 1$, si $x_i = L_i$ et $\epsilon_i = -1$, si $x_i = 0$ (i.e $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1, \epsilon_3 = -1$). Les conditions de jonction sont la conservation du débit et la continuité de l'énergie (cf [19, 22, 32, 37]). Elles sont données respectivement par

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i q_i(t, x_i) = 0, \quad \text{sur } M, \quad (\text{II.1.4})$$

$$gh_1(t, x_1) + \frac{1}{2} \frac{q_1^2(t, x_1)}{l_1^2 h_1^2(t, x_1)} = gh_2(t, x_2) + \frac{1}{2} \frac{q_2^2(t, x_2)}{l_2^2 h_2^2(t, x_2)}, \quad \text{sur } M, \quad (\text{II.1.5})$$

$$gh_1(t, x_1) + \frac{1}{2} \frac{q_1^2(t, x_1)}{l_1^2 h_1^2(t, x_1)} = gh_3(t, x_3) + \frac{1}{2} \frac{q_3^2(t, x_3)}{l_3^2 h_3^2(t, x_3)}, \quad \text{sur } M. \quad (\text{II.1.6})$$

La condition (II.1.4) exprime le fait que le débit provenant du canal 1 est partagé par les deux canaux restants, et que (II.1.5)-(II.1.6) traduisent la continuité de l'énergie à la jonction.

En somme, la conservation de la masse (II.1.1.a) et la conservation de la quantité de mouvement (II.1.1.b) sur chaque canal, les conditions de jonction (II.1.4)-(II.1.6), les conditions

initiales (II.1.2) et les conditions aux bords (II.1.3) constituent le modèle d'écoulement dans le réseau.

Les débits aux bouts du réseau sont les contrôles à construire. Cependant ils sont construits à partir d'un modèle linéaire et ensuite appliqués numériquement au modèle non linéaire ci-dessus, en vue de montrer la robustesse de la méthode de contrôle. Le modèle linéaire en question est obtenu à partir de la linéarisation du modèle non linéaire (II.1.1)-(II.1.6) autour d'un état d'équilibre désiré. Pour ce faire, on suppose que les perturbations par rapport à l'état d'équilibre, sont très faibles.

II.1.2 L'état d'équilibre

L'objectif de la stabilisation est d'atteindre un état d'équilibre désiré lorsque le temps est suffisamment grand, par le biais des contrôles appliqués aux niveaux des bouts du réseau. Cet état stationnaire est déduit du modèle non linéaire (II.1.1)-(II.1.6) sachant que les variables hydrodynamiques ne dépendent plus du temps. Ainsi, en annulant la dérivée par rapport au temps des variables dans les équations (II.1.1) et en prenant en compte les conditions de jonction (II.1.4)-(II.1.6), la solution (\bar{h}_i, \bar{q}_i) de l'état d'équilibre satisfait le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x} = 0, \quad \text{dans } [0, L_i], \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \\ (b) \quad \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x} = 0, \quad \text{dans } [0, L_i], \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, \\ (c) \quad \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \bar{q}_i(x_i) = 0, \quad \text{sur } M, \\ (d) \quad g\bar{h}_1(x_1) + \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_1^2(x_1)}{l_1^2 \bar{h}_1^2(x_1)} = g\bar{h}_2(x_2) + \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_2^2(x_2)}{l_2^2 \bar{h}_2^2(x_2)}, \quad \text{sur } M, \\ (e) \quad g\bar{h}_1(x_1) + \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_1^2(x_1)}{l_1^2 \bar{h}_1^2(x_1)} = g\bar{h}_3(x_3) + \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_3^2(x_3)}{l_3^2 \bar{h}_3^2(x_3)}, \quad \text{sur } M. \end{array} \right. \quad (\text{II.1.7})$$

L'état d'équilibre (II.1.7) est caractérisé par un débit et une hauteur constants dans chaque canal. Pour déterminer la solution de cet état, on donne deux valeurs de débit pour deux bouts du réseau et une valeur de hauteur pour le bout restant. Par exemple $(\bar{q}_1(0), \bar{q}_2(L_2), \bar{h}_3(L_3))$ ou $(\bar{q}_1(0), \bar{q}_3(L_3), \bar{h}_2(L_2))$ ou $(\bar{q}_2(L_2), \bar{q}_3(L_3), \bar{h}_1(0))$.

Considérons le cas $(\bar{q}_1(0), \bar{q}_2(L_2), \bar{h}_3(L_3))$. Grâce à $(\bar{q}_1(0), \bar{q}_2(L_2))$ et (II.1.7.a) on détermine les débits \bar{q}_1 et \bar{q}_2 correspondant respectivement aux canaux 1 et 2 et de surcroît les débits $(\bar{q}_1(L_1), \bar{q}_2(0))$ au niveau de la jonction. Ensuite, en utilisant la condition sur la conservation du débit (II.1.7.c), on obtient $\bar{q}_3(0)$ et l'équation (II.1.7.a) permet de déduire les débits du canal 3. D'autre part, par $\bar{h}_3(L_3)$ et (II.1.7.b) on obtient les hauteurs du canal 3 et par conséquent la hauteur $\bar{h}_3(0)$ au niveau de la jonction. L'utilisation respective des conditions (II.1.7.d) et

(II.1.7.e) sur la continuité de l'énergie, nous donne les hauteurs $\bar{h}_1(L_1)$ et $\bar{h}_2(0)$ au niveau de la jonction pour les canaux 1 et 2. Enfin, l'équation (II.1.7.b) donne les hauteurs dans les canaux 1 et 2.

Pour un réseau en forme d'étoile de n canaux ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$), on aura besoin de donner $n - 1$ valeurs de débit pour les $n - 1$ bouts du réseau et une valeur de hauteur pour le bout restant.

Considérant d'une part, la direction de l'écoulement choisie (cf Figure II.1) et d'autre part, un régime fluvial (sous-critique) c'est à dire un régime pour lequel la vitesse des ondes est plus grande que la vitesse de l'écoulement, on a respectivement

$$\bar{q}_i \geq 0 \quad \text{and} \quad \sqrt{g\bar{h}_i} > \frac{\bar{q}_i}{l_i\bar{h}_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{II.1.8})$$

II.2 Le modèle linéaire et le résultat principal

Dans cette partie, on donne le modèle linéaire et le résultat principal de ce chapitre.

II.2.1 Le modèle linéaire

On introduit l'état résiduel (i.e les perturbations) (\hat{h}_i, \hat{q}_i) comme étant la différence entre l'état du modèle non linéaire (h_i, q_i) et l'état stationnaire (\bar{h}_i, \bar{q}_i) : $\hat{h}_i(t, x) = h_i(t, x) - \bar{h}_i(x)$, $\hat{q}_i(t, x) = q_i(t, x) - \bar{q}_i(x)$. Ensuite, on suppose que l'état résiduel est très petit par rapport par à l'état stationnaire ($|\hat{h}_i| \ll \bar{h}_i$ et $|\hat{q}_i| \ll |\bar{q}_i|$) pour linéariser (II.1.1)-(II.1.6). Considérons les équations (II.1.1)-(II.1.6) une à une.

- Pour l'équation de conservation de la masse (II.1.1.a), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, par le biais de l'état constant du débit (II.1.7.a), on obtient l'équation linéaire de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} = 0. \quad (\text{II.2.1})$$

- Pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement (II.1.1.b), on a

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_i^2}{h_i} \right) = \frac{\partial q_i}{\partial t} + g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} + 2 \frac{q_i}{l_i h_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} - \frac{q_i^2}{l_i h_i^2} \frac{\partial h_i}{\partial x} = 0. \quad (\text{II.2.2})$$

Par souci de clarté, calculons le second membre de (II.2.2) terme par terme. Le premier terme devient

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} = \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t}. \quad (\text{II.2.3})$$

En ce qui concerne le second terme du second membre de (II.2.2), nous avons

$$\begin{aligned} g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} &= g l_i (\bar{h}_i + \hat{h}_i) \frac{\partial (\bar{h}_i + \hat{h}_i)}{\partial x} \\ &= g l_i \bar{h}_i \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x} + g l_i \bar{h}_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} + g l_i \hat{h}_i \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x} + g l_i \hat{h}_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x}. \end{aligned}$$

De ce fait, en utilisant l'état constant de la hauteur (II.1.7.b) et en négligeant le terme $\hat{h}_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x}$ en raison de sa petitesse, on obtient

$$g l_i h_i \frac{\partial h_i}{\partial x} \approx g l_i \bar{h}_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x}. \quad (\text{II.2.4})$$

Le troisième terme du second membre de (II.2.2) est calculé comme suit :

$$2 \frac{q_i}{l_i h_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} = 2 \frac{\bar{q}_i + \hat{q}_i}{l_i (\bar{h}_i + \hat{h}_i)} \frac{\partial (\bar{q}_i + \hat{q}_i)}{\partial x} = 2 \frac{\bar{q}_i + \hat{q}_i}{l_i \bar{h}_i \left(1 + \frac{\hat{h}_i}{\bar{h}_i}\right)} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x}. \quad (\text{II.2.5})$$

où l'état constant du débit (II.1.7.a) a été utilisé. D'autre part, nous avons

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\hat{h}_i}{\bar{h}_i}\right)^\alpha} = 1 - \alpha \frac{\hat{h}_i}{\bar{h}_i} + \dots, \quad \alpha \in \mathbb{N}. \quad (\text{II.2.6})$$

Donc, pour $\alpha = 1$, l'équation (II.2.5) devient

$$\begin{aligned} 2 \frac{q_i}{l_i h_i} \frac{\partial q_i}{\partial x} &= 2 \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} - 2 \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i^2} \hat{h}_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \frac{2}{l_i \bar{h}_i} \hat{q}_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} - \frac{2}{l_i \bar{h}_i^2} \hat{h}_i \hat{q}_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} \\ &= 2 \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x}, \end{aligned} \quad (\text{II.2.7})$$

où les termes non linéaires ont été négligés en raison de leur petitesse.

Pour le dernier terme du second membre de (II.2.2), on a

$$\frac{q_i^2}{l_i h_i^2} \frac{\partial h_i}{\partial x} = \frac{(\bar{q}_i + \hat{q}_i)^2}{l_i \bar{h}_i^2 \left(1 + \frac{\hat{h}_i}{\bar{h}_i}\right)^2} \frac{\partial \bar{h}_i + \hat{h}_i}{\partial x} = \frac{(\bar{q}_i^2 + 2\bar{q}_i \hat{q}_i + \hat{q}_i^2)}{l_i \bar{h}_i^2 \left(1 + \frac{\hat{h}_i}{\bar{h}_i}\right)^2} \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x}, \quad (\text{II.2.8})$$

où l'état constant de la hauteur (II.1.7.b) a été utilisé.

En utilisant le développement (II.2.6) avec $\alpha = 2$, l'équation (II.2.8) devient

$$\frac{q_i^2}{l_i \bar{h}_i^2} \frac{\partial h_i}{\partial x} = \frac{(\bar{q}_i^2 + 2\bar{q}_i \hat{q}_i + \hat{q}_i^2)}{l_i \bar{h}_i^2} \left(1 - 2\frac{\hat{h}_i}{\bar{h}_i} + \dots\right) \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = \frac{\bar{q}_i^2}{l_i \bar{h}_i^2} \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x}, \quad (\text{II.2.9})$$

où les termes non linéaires ont été négligés.

En prenant en compte (II.2.3), (II.2.4), (II.2.7) et (II.2.9), l'équation linéaire de la conservation de la quantité de mouvement est

$$\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} + \sigma_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \quad (\text{II.2.10})$$

où

$$\sigma_i = 2\frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} \geq 0, \quad \rho_i = gl_i \bar{h}_i - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i \bar{h}_i^2} > 0, \quad (\text{II.2.11})$$

grâce au fait que l'écoulement est fluvial et à la direction de celui-ci (II.1.8).

- Pour la condition sur la conservation du débit (II.1.4), on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \epsilon_i q_i(t, x_i) &= \sum_{i=1}^3 \epsilon_i (\bar{q}_i(x_i) + \hat{q}_i(t, x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.2.12})$$

où la conservation du débit est appliquée à l'état stationnaire.

- Pour la condition sur la continuité de l'énergie (II.1.5),

$$\begin{aligned} g(\bar{h}_1(x_1) + \hat{h}_1(t, x_1)) + \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_1^2(x_1) + 2\bar{q}_1(x_1)\hat{q}_1(t, x_1) + \hat{q}_1^2(t, x_1)}{l_1^2 \bar{h}_1^2(x_1) \left(1 + \frac{\hat{h}_1(t, x_1)}{\bar{h}_1(x_1)}\right)^2} \\ = g(\bar{h}_2(x_2) + \hat{h}_2(t, x_2)) + \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_2^2(x_2) + 2\bar{q}_2(x_2)\hat{q}_2(t, x_2) + \hat{q}_2^2(t, x_2)}{l_2^2 \bar{h}_2^2(x_2) \left(1 + \frac{\hat{h}_2(t, x_2)}{\bar{h}_2(x_2)}\right)^2}. \end{aligned}$$

Par le biais du développement (II.2.6) avec $\alpha = 2$ et du fait que les termes non linéaires sont négligés, on a

$$\begin{aligned} g\bar{h}_1(x_1) + \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_1^2(x_1)}{l_1^2 \bar{h}_1^2(x_1)} - g\bar{h}_2(x_2) - \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_2^2(x_2)}{l_2^2 \bar{h}_2^2(x_2)} = -\frac{\bar{q}_1(x_1)}{l_1 \bar{h}_1^2(x_1)} \hat{q}_1(t, x_1) \\ - \left(g - \frac{\bar{q}_1^2(x_1)}{l_1^2 \bar{h}_1^3(x_1)}\right) \hat{h}_1(t, x_1) + \frac{\bar{q}_2(x_2)}{l_2^2 \bar{h}_2^2(x_2)} \hat{q}_2(t, x_2) + \left(g - \frac{\bar{q}_2^2(x_2)}{l_2^2 \bar{h}_2^3(x_2)}\right) \hat{h}_2(t, x_2). \end{aligned}$$

En appliquant la continuité de l'énergie à l'état stationnaire, on obtient

$$\gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) + \beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) = \gamma_2 \hat{h}_2(t, x_2) + \beta_2 \hat{q}_2(t, x_2), \quad (\text{II.2.13})$$

où

$$\beta_i = \frac{\bar{q}_i}{l_i^2 \bar{h}_i^2} = \frac{1}{2} \delta_i \sigma_i \geq 0, \quad \gamma_i = g - \frac{\bar{q}_i^2}{l_i^2 \bar{h}_i^3} = \delta_i \rho_i > 0, \quad \delta_i = \frac{1}{l_i \bar{h}_i}, \quad (\text{II.2.14})$$

et (σ_i, ρ_i) est donné par (II.2.11).

Les mêmes arguments que ceux de (II.1.5), appliqués à la continuité de l'énergie (II.1.6), donnent

$$\gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) + \beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) = \gamma_3 \hat{h}_3(t, x_3) + \beta_3 \hat{q}_3(t, x_3). \quad (\text{II.2.15})$$

Donc, en combinant (II.2.1), (II.2.10), (II.2.12), (II.2.13) et (II.2.15), l'état résiduel (\hat{h}_i, \hat{q}_i) satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ (b) & \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} + \sigma_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ (c) & \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0, \quad \text{sur } M, \\ (d) & \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) + \beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) = \gamma_2 \hat{h}_2(t, x_2) + \beta_2 \hat{q}_2(t, x_2), \quad \text{sur } M, \\ (e) & \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) + \beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) = \gamma_3 \hat{h}_3(t, x_3) + \beta_3 \hat{q}_3(t, x_3), \quad \text{sur } M, \end{array} \right. \quad (\text{II.2.16})$$

avec les conditions aux bouts du réseau

$$\hat{q}_1(t, 0) = \hat{q}_{1,0}(t), \quad \hat{q}_2(t, L_2) = \hat{q}_{2,L_2}(t) \quad \text{et} \quad \hat{q}_3(t, L_3) = \hat{q}_{3,L_3}(t), \quad (\text{II.2.17})$$

et les conditions initiales

$$\hat{h}_i(0, x) = \hat{h}_i^0(x), \quad \hat{q}_i(0, x) = \hat{q}_i^0(x). \quad (\text{II.2.18})$$

Les fonctions $\hat{q}_{1,0}(t)$, $\hat{q}_{2,L_2}(t)$ et $\hat{q}_{3,L_3}(t)$ sont les contrôles rétroactifs et retardés à construire afin d'obtenir la convergence exponentielle de (\hat{h}_i, \hat{q}_i) vers zéro. Ces contrôles sont construits par le biais des variables caractéristiques. Ainsi, nous donnons les valeurs propres, les vecteurs propres et les variables caractéristiques correspondant au modèle linéaire ci-dessus.

II.2.2 Les variables caractéristiques

Soit

$$U_i = \begin{pmatrix} \hat{h}_i \\ \hat{q}_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1/l_i \\ \rho_i & \sigma_i \end{pmatrix}.$$

Le système (II.2.16.a)-(II.2.16.b) peut être réécrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + A_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = 0.$$

Les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A_i sont respectivement

$$\lambda_{i1} = \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} - \sqrt{g \bar{h}_i}, \quad \lambda_{i2} = \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} + \sqrt{g \bar{h}_i}, \quad (\text{II.2.19})$$

et

$$r_{i1} = \begin{pmatrix} 1/l_i \\ \lambda_{i1} \end{pmatrix}, \quad r_{i2} = \begin{pmatrix} 1/l_i \\ \lambda_{i2} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.2.20})$$

On remarque une relation entre (σ_i, ρ_i) donné par (II.2.11) et $(\lambda_{i1}, \lambda_{i2})$:

$$\sigma_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} = \lambda_{i2} - |\lambda_{i1}| \quad \text{et} \quad \rho_i = l_i |\lambda_{i1}| \lambda_{i2}. \quad (\text{II.2.21})$$

De plus, le régime d'écoulement fluvial et la direction de l'écoulement (II.1.8) donnent respectivement

$$\lambda_{i1} < 0 < \lambda_{i2} \quad \text{et} \quad \lambda_{i1} + \lambda_{i2} \geq 0. \quad (\text{II.2.22})$$

On utilise les variables caractéristiques suivantes ($w_i = [r_{i1}, r_{i2}]^{-1} U_i$)

$$w_{i1} = l_i \hat{h}_i - \frac{1}{\lambda_{i2}} \hat{q}_i \quad \text{et} \quad w_{i2} = l_i \hat{h}_i - \frac{1}{\lambda_{i1}} \hat{q}_i, \quad (\text{II.2.23})$$

pour réécrire le système (II.2.16.a)-(II.2.16.b) sous la forme de deux équations de transport :

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial t} + \lambda_{ij} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x} = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (\text{II.2.24})$$

La solution de (II.2.24) dans l'ensemble d'espace \mathbb{R} , est donnée par

$$w_{ij}(t, x) = w_{ij}(0, x - \lambda_{ij} t). \quad (\text{II.2.25})$$

Cette solution à n'importe quel temps, est une copie de la fonction initiale. Elle est translatée vers la droite, si la valeur propre λ_{ij} est positive, vers la gauche si la valeur propre est négative

([43]). En d'autres termes, la solution au temps t et au point x dépend uniquement de la valeur $\zeta = x - \lambda_{ij}t$. Les caractéristiques sont les lignes dans le plan (t, x) pour lesquelles la valeur $x - \lambda_{ij}t$ est constante. D'ailleurs, la solution au temps t et au point x est constante le long de la caractéristique. En effet

$$\begin{aligned} \frac{dw_{ij}(t, x)}{dt} &= \frac{dw_{ij}(t, \zeta + \lambda_{ij}t)}{dt} = \frac{\partial t}{\partial t} \frac{\partial w_{i1}}{\partial t} + \frac{\partial(\zeta + \lambda_{ij}t)}{\partial t} \frac{\partial w_{i1}}{\partial x} \\ &= \frac{\partial w_{i1}}{\partial t} + \lambda_{ij} \frac{\partial w_{i1}}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.2.26})$$

où, nous avons utilisé (II.2.24). La valeur propre λ_{ij} est aussi la vitesse de propagation suivant la caractéristique. Maintenant, considérons l'équation de transport (II.2.24) dans $[0, L_i]$. Si la valeur propre λ_{ij} est positive, les caractéristiques se propagent de gauche à droite (Fig II.2). Donc, en plus de la condition initiale, une condition doit être prescrite au bout $x = 0$ pour que la solution soit définie en tout temps. Etant donnée la condition au bord $w_{ij}(t, 0) = g(t)$, la solution est donnée par

$$w_{ij}(t, x) = \begin{cases} w_{ij}(0, x - \lambda_{ij}t), & x - \lambda_{ij}t > 0 \\ g(t - \lambda_{ij}^{-1}x), & x - \lambda_{ij}t < 0. \end{cases} \quad (\text{II.2.27})$$

Si la valeur propre λ_{ij} est négative, la condition au bord est à prescrire au bord $x = L_i$ puisque cette fois ci les caractéristiques se propagent de droite à gauche.

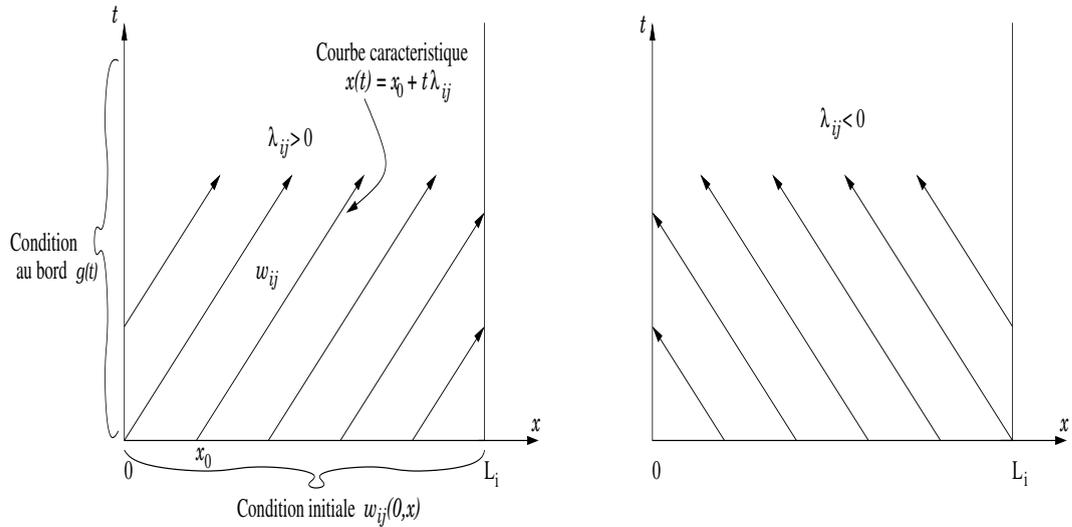


Figure II.2 – Les caractéristiques de l'équation du transport (II.2.24).

Les conditions de jonction (II.2.16.c)-(II.2.16.e) sont réécrites en terme de variables caractéristiques. En effet cette réécriture sera utile pour construire les contrôles du réseau dans la section II.4. En effet, les contrôles sont construits à l'aide des variables caractéristiques sor-

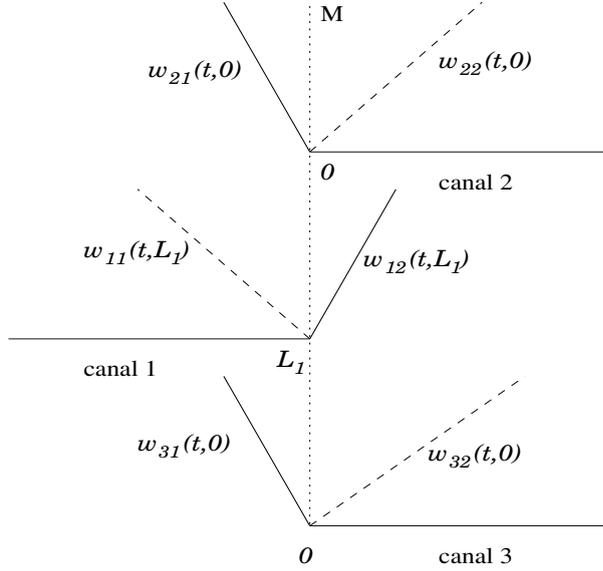


Figure II.3 – Les variables caractéristiques locales au niveau de la jonction M .

tantes au niveau des bouts libres des canaux constituant le réseau. De l'expression des variables caractéristiques (II.2.23), on déduit que :

$$\begin{aligned}\hat{h}_i &= \frac{\lambda_{i2}}{l_i(\lambda_{i2} - \lambda_{i1})} w_{i1} - \frac{\lambda_{i1}}{l_i(\lambda_{i2} - \lambda_{i1})} w_{i2}, \\ \hat{q}_i &= \frac{\lambda_{i1}\lambda_{i2}}{\lambda_{i2} - \lambda_{i1}} w_{i1} - \frac{\lambda_{i1}\lambda_{i2}}{\lambda_{i2} - \lambda_{i1}} w_{i2}.\end{aligned}\tag{II.2.28}$$

Nous réécrivons les conditions de jonction (II.2.16.c)-(II.2.16.e) en exprimant les variables caractéristiques sortant du réseau et exprimées au niveau de la jonction M (i.e $w_{11}(t, L_1)$, $w_{22}(t, 0)$ et $w_{32}(t, 0)$) en fonction des variables caractéristiques entrant et exprimées aussi au niveau de M (i.e $w_{12}(t, L_1)$, $w_{21}(t, 0)$ et $w_{31}(t, 0)$). On obtient

$$B \begin{pmatrix} w_{11}(t, L_1) \\ w_{22}(t, 0) \\ w_{32}(t, 0) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} w_{12}(t, L_1) \\ w_{21}(t, 0) \\ w_{31}(t, 0) \end{pmatrix},\tag{II.2.29}$$

où

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} & \frac{\lambda_{21}\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} & \frac{\lambda_{31}\lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \left(\frac{\gamma_1}{l_1} + \lambda_{11}\beta_1 \right) & \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} \left(\frac{\gamma_2}{l_2} + \lambda_{22}\beta_2 \right) & 0 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \left(\frac{\gamma_1}{l_1} + \lambda_{11}\beta_1 \right) & 0 & \frac{\lambda_{31}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} \left(\frac{\gamma_3}{l_3} + \lambda_{32}\beta_3 \right) \end{pmatrix}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} & \frac{\lambda_{21}\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} & \frac{\lambda_{31}\lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} \\ \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \left(\frac{\gamma_1}{l_1} + \lambda_{12}\beta_1 \right) & \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{22} - \lambda_{21}} \left(\frac{\gamma_2}{l_2} + \lambda_{21}\beta_2 \right) & 0 \\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \lambda_{11}} \left(\frac{\gamma_1}{l_1} + \lambda_{12}\beta_1 \right) & 0 & \frac{\lambda_{32}}{\lambda_{32} - \lambda_{31}} \left(\frac{\gamma_3}{l_3} + \lambda_{31}\beta_3 \right) \end{pmatrix}.$$

En vue d'exprimer le vecteur $(w_{11}(t, L_1), w_{22}(t, 0), w_{32}(t, 0))^t$ en fonction du vecteur $(w_{12}(t, L_1), w_{21}(t, 0), w_{31}(t, 0))^t$, on montre que la matrice B est inversible. En effet on a

Lemme II.2.1 *Les matrices B et C sont inversibles si les conditions données par (II.2.22) sont satisfaites.*

Preuve Les déterminants de B et C sont respectivement

$$\begin{aligned} \det(B) &= \frac{\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{31}}{(\lambda_{12} - \lambda_{11})(\lambda_{22} - \lambda_{21})(\lambda_{32} - \lambda_{31})} \left[\lambda_{11} \left(\frac{\gamma_2}{l_2} + \lambda_{22}\beta_2 \right) \left(\frac{\gamma_3}{l_3} + \lambda_{32}\beta_3 \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{32} \left(\frac{\gamma_2}{l_2} + \lambda_{22}\beta_2 \right) \left(\frac{\gamma_1}{l_1} + \lambda_{11}\beta_1 \right) - \lambda_{22} \left(\frac{\gamma_1}{l_1} + \lambda_{11}\beta_1 \right) \left(\frac{\gamma_3}{l_3} + \lambda_{32}\beta_3 \right) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \det(C) &= \frac{\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{32}}{(\lambda_{12} - \lambda_{11})(\lambda_{22} - \lambda_{21})(\lambda_{32} - \lambda_{31})} \left[\lambda_{12} \left(\frac{\gamma_2}{l_2} + \lambda_{21}\beta_2 \right) \left(\frac{\gamma_3}{l_3} + \lambda_{31}\beta_3 \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_{31} \left(\frac{\gamma_2}{l_2} + \lambda_{21}\beta_2 \right) \left(\frac{\gamma_1}{l_1} + \lambda_{12}\beta_1 \right) - \lambda_{21} \left(\frac{\gamma_1}{l_1} + \lambda_{12}\beta_1 \right) \left(\frac{\gamma_3}{l_3} + \lambda_{31}\beta_3 \right) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant les expressions (II.2.11) et (II.2.14), nous déduisons de (II.2.21) et (II.2.22) que

$$\lambda_{i1} < 0 < \lambda_{i2}, \quad \beta_i \geq 0, \quad \gamma_i > 0 \quad \text{and} \quad \frac{\gamma_i}{l_i} + \lambda_{i1}\beta_i = \frac{\delta_i}{2}\lambda_{i1}(\lambda_{i1} - \lambda_{i2}) > 0, \quad (\text{II.2.30})$$

Par conséquent $\det(B) < 0$ et $\det(C) < 0$ et la preuve du Lemme II.2.1 est complète. \square

L'inversibilité de la matrice C sera utilisée dans la section II.4.

II.2.3 Le résultat principal

Les contrôles rétroactifs reposent sur le fait qu'il est possible d'exprimer les variables caractéristiques sortantes au niveau des bouts du réseau $(w_{11}(t, 0), w_{22}(t, L_2), w_{32}(t, L_3))$ en fonction

des données initiales et de la solution au niveau des bouts en un temps antérieur. Ainsi, nous prouvons dans la section II.4.2, le Lemme suivant :

Lemme II.2.2 *Les variables caractéristiques sortantes au niveau des bouts du réseau, satisfont*

$$\begin{pmatrix} w_{11}(t, 0) \\ w_{22}(t, L_2) \\ w_{32}(t, L_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.2.31})$$

où $b_i, i = 1, 2, 3$, dépendent de la condition initiale et de la solution au niveau des bouts en un temps antérieur $\tau = t - \delta t$ avec $\delta t \geq \min \left(\frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, \frac{L_2}{\lambda_{22}}, \frac{L_3}{\lambda_{32}} \right)$.

Considérons trois fonctions arbitraires $\theta_1, \theta_2, \theta_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1]$. On choisit $\hat{q}_{1,0}, \hat{q}_{2,L_2}$ et \hat{q}_{3,L_3} comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{q}_{1,0}(t) &= \frac{\gamma_1}{2l_1a_1} \left(\sqrt{1 - \theta_1(t)} - 1 \right) b_1(t), \\ \hat{q}_{2,L_2}(t) &= -\frac{\gamma_2}{2l_2a_2} \left(\sqrt{1 - \theta_2(t)} - 1 \right) b_2(t), \\ \hat{q}_{3,L_3}(t) &= -\frac{\gamma_3}{2l_3a_3} \left(\sqrt{1 - \theta_3(t)} - 1 \right) b_3(t), \end{aligned} \quad (\text{II.2.32})$$

où $a_i = \frac{\delta_i}{2}(\lambda_{i2} - \lambda_{i1}) > 0$, δ_i, γ_i sont donnés par (II.2.14) et $b_i, i = 1, 2, 3$, sont mentionnés dans le Lemme II.2.2.

Dans la suite, les notations suivantes sont utilisées,

$$\begin{aligned} T_0 &= \max \left(\frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, \frac{L_2}{\lambda_{22}}, \frac{L_3}{\lambda_{32}} \right) + \max \left(\frac{L_1}{\lambda_{12}}, \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}, \frac{L_3}{|\lambda_{31}|} \right), \quad t_k = kT_0, \quad k \in \mathbb{N}, \\ Q_i &=]t_k, t_{k+1}[\times]0, L_i[, \quad \text{div} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right), \\ H(\text{div}, Q_i) &= \left\{ \mathcal{V} \in L^2(Q_i)^2; \text{div} \mathcal{V} \in L^2(Q_i) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.33})$$

L'énergie E du fluide dans le réseau, est définie par

$$E(t) = \sum_{i=1}^3 \int_{0_i}^{L_i} \left(l_i \gamma_i \hat{h}_i^2 + \delta_i \hat{q}_i^2 \right) dx, \quad (\text{II.2.34})$$

où γ_i et δ_i sont donnés par (II.2.14). Le principal résultat de ce chapitre qui concerne la stabilisation du réseau est le suivant :

Théorème II.2.1 *Supposons que les conditions données par (II.2.22) sont vérifiées, que les conditions initiales sont dans $L^2(]0, L_i])$ et que $(\hat{q}_{1,0}(t), \hat{q}_{2,L_2}(t), \hat{q}_{3,L_3}(t))$ satisfait (II.2.32). Alors le système linéaire (II.2.16)-(II.2.18) a une solution (\hat{h}_i, \hat{q}_i) satisfaisant la régularité suivante :*

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_i \\ \hat{q}_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{q}_i \\ \sigma_i \hat{q}_i + \rho_i \hat{h}_i \end{pmatrix} \in H(\text{div}, Q_i). \quad (\text{II.2.35})$$

De plus, l'énergie décroît dans l'intervalle $]t_k, t_{k+1}[$ et vérifie :

$$E(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k)E(t_k). \quad (\text{II.2.36})$$

Les notations t_k et $H(\text{div}, Q_i)$ sont données par (II.2.33), E est donné par (II.2.34) et $\Theta^k = \min(\Delta_1^k, \Delta_2^k, \Delta_3^k) \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} \Delta_1^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{11}|}{\lambda_{12} + |\lambda_{11}|} \inf_{x \in [0, L_1]} \theta_1 \left(t_k + \frac{x}{|\lambda_{11}|} \right), \frac{\gamma_1 \epsilon}{l_1} \right), \\ \Delta_2^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{21}|}{\lambda_{22} + |\lambda_{21}|} \inf_{x \in [0, L_2]} \theta_2 \left(t_k + \frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right), \frac{\gamma_2 \epsilon}{l_2} \right), \\ \Delta_3^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{31}|}{\lambda_{32} + |\lambda_{31}|} \inf_{x \in [0, L_3]} \theta_3 \left(t_k + \frac{L_3 - x}{\lambda_{32}} \right), \frac{\gamma_3 \epsilon}{l_3} \right), \end{aligned}$$

où $\epsilon > 0$ est un nombre réel positif.

Ce Théorème est prouvé dans la section II.5.

Remarque II.2.1

1. Grâce au Lemme II.2.2, les contrôles (II.2.32) sont construits à l'aide de la solution en un temps antérieur. Puisque γ_i et a_i sont constants, alors par le biais de l'estimation d'énergie (II.2.36), les contrôles tendent vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.
2. Soit $\nu^k = -\ln \left((1 - \Theta^k)^{\frac{1}{t_1}} \right)$, on a

$$E(t_{k+1}) \leq E(t_k) \exp(-\nu^k t_1).$$

Donc, si on note $\mu^k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \nu^j$, nous obtenons

$$E(t_k) \leq E(0) \exp(-\mu^k t_k). \quad (\text{II.2.37})$$

Ainsi, les fonctions θ peuvent être interpréter comme un taux de stabilisation pour la décroissance exponentielle. Plus la fonction θ est proche de 1, plus la décroissance exponentielle est rapide.

II.3 Construction des contrôles pour un canal

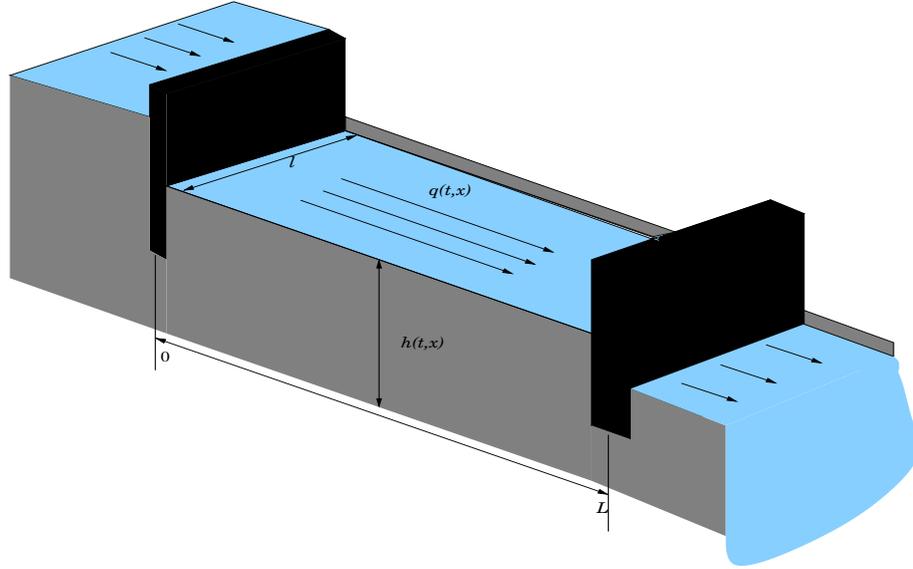


Figure II.4 – Un canal délimité par des portes immergées

Dans cette partie, nous supposons que les données initiales et les conditions aux bords sont continues. Des résultats pour les des données initiales dans l'espace L^2 sont donnés dans la section II.5. On construit un processus de stabilisation pour un canal. Ce processus permettra la convergence exponentielle en temps vers zéro des perturbations \hat{h} et \hat{q} . Nous considérons les équations de Saint-Venant unidimensionnelles (II.1.1) sans l'indice i représentant le numéro du canal (Fig II.4) :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial q}{\partial x} = 0, & \text{dans } [0, L], \\ \frac{\partial q}{\partial t} + g l h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) = 0, & \text{dans } [0, L], \end{cases} \quad (\text{II.3.1})$$

avec les conditions initiales

$$h(0, x) = h^0(x), \quad q(0, x) = q^0(x), \quad (\text{II.3.2})$$

et les conditions aux bouts

$$q(t, 0) = q_0(t), \quad q(t, L) = q_L(t). \quad (\text{II.3.3})$$

L'état d'équilibre à atteindre lorsque le temps est suffisamment grand est

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0. \quad (\text{II.3.4})$$

Le modèle linéaire obtenu à partir du non linéaire (à l'aide de la section II.2.1) est :

$$\begin{cases} (a) & \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0, \\ (b) & \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \sigma_i \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} + \rho \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (\text{II.3.5})$$

avec les conditions initiales

$$\hat{h}(0, x) = \hat{h}^0(x), \quad \hat{q}(0, x) = \hat{q}^0(x), \quad (\text{II.3.6})$$

et les conditions au bouts suivantes, qui sont les contrôles à contruire :

$$\hat{q}(t, 0) = \hat{q}_0(t), \quad \hat{q}(t, L) = \hat{q}_L(t). \quad (\text{II.3.7})$$

Les fonctions σ et ρ sont définies comme suit :

$$\sigma = 2 \frac{\bar{q}}{l\bar{h}}, \quad \rho = gl\bar{h} - \frac{\bar{q}^2}{l\bar{h}^2}. \quad (\text{II.3.8})$$

En se référant à la section II.2.2 concernant les variables caractéristiques, on a :

$$w_1 = l\hat{h} - \frac{1}{\lambda_2} \hat{q} \quad \text{et} \quad w_2 = l\hat{h} - \frac{1}{\lambda_1} \hat{q}, \quad (\text{II.3.9})$$

où, $\lambda_1 = \frac{\bar{q}}{l\bar{h}} - \sqrt{g\bar{h}}$ et $\lambda_2 = \frac{\bar{q}}{l\bar{h}} + \sqrt{g\bar{h}}$ sont les valeurs propres de la matrice du système linéaire (II.3.5).

Les variables caractéristiques satisfont

$$\frac{dw_j}{dt} = \frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (\text{II.3.10})$$

Le régime fluvial et la direction de l'écoulement donnent

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0. \quad (\text{II.3.11})$$

De plus, $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 - |\lambda_1|$ et $\rho = l|\lambda_1|\lambda_2$.

II.3.1 L'estimation a priori de l'énergie

Soit E l'énergie du système linéaire (II.3.5) définie par

$$E(t) = \int_0^L \left(l\rho \hat{h}^2(t) + \hat{q}^2(t) \right) dx, \quad (\text{II.3.12})$$

où, ρ est donné par (II.3.8). Considérons, la formulation variationnelle du système (II.3.5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (\psi, \phi) \in H^1(]0, L[), \\ \int_0^L l\rho\psi \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} dx - \int_0^L \hat{q} \frac{\partial(\psi\rho)}{\partial x} dx + \rho\psi(L)\hat{q}_L(t) - \rho\psi(0)\hat{q}_0(t) = 0, \\ \int_0^L \phi \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} dx - \int_0^L \hat{q} \frac{\partial(\sigma\phi)}{\partial x} dx - \int_0^L \hat{h} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial x} dx \\ \quad + \sigma\phi(L)\hat{q}_L(t) - \sigma\phi(0)\hat{q}_0(t) + \rho\phi(L)\hat{h}(t, L) - \rho\phi(0)\hat{h}(t, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{II.3.13})$$

avec les conditions initiales et les conditions aux bords. Cette formulation variationnelle est donnée en vue de montrer l'existence de solutions faibles pour le système linéaire (II.3.5) (voir Théorème II.5.1). Le résultat similaire pour le réseau est le Théorème II.2.1. Par le biais de la formulation variationnelle, on estime la variation de l'énergie E dans le canal en vue de définir les contrôles $\hat{q}_L(t)$ au bout $\{x = L\}$ et $\hat{q}_0(t)$ au bout $\{x = 0\}$. Pour ce faire, on pose $(\psi, \phi) = (\hat{h}, \hat{q})$ dans (II.3.13) pour avoir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) = -\frac{1}{2} \sigma \hat{q}_L^2(t) - \rho \hat{h}(t, L) \hat{q}_L(t) + \frac{1}{2} \sigma \hat{q}_0^2(t) + \rho \hat{h}(t, 0) \hat{q}_0(t). \quad (\text{II.3.14})$$

Une différence parmi les méthodes de contrôles provient de la façon dont l'énergie est définie et la façon dont sa variation en temps est exploitée pour obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie [4, 18, 41]. Dans ce travail, une relation entre la hauteur et le débit est utilisée pour exprimer le second membre de (II.3.14) comme un polynôme du second degré en terme du débit \hat{q} au niveau des bouts. Ensuite, la forme polynomiale du second membre de (II.3.14) est exploitée afin d'obtenir la décroissance exponentielle de l'énergie.

II.3.2 Contrôler le canal par le biais des bouts amont et aval

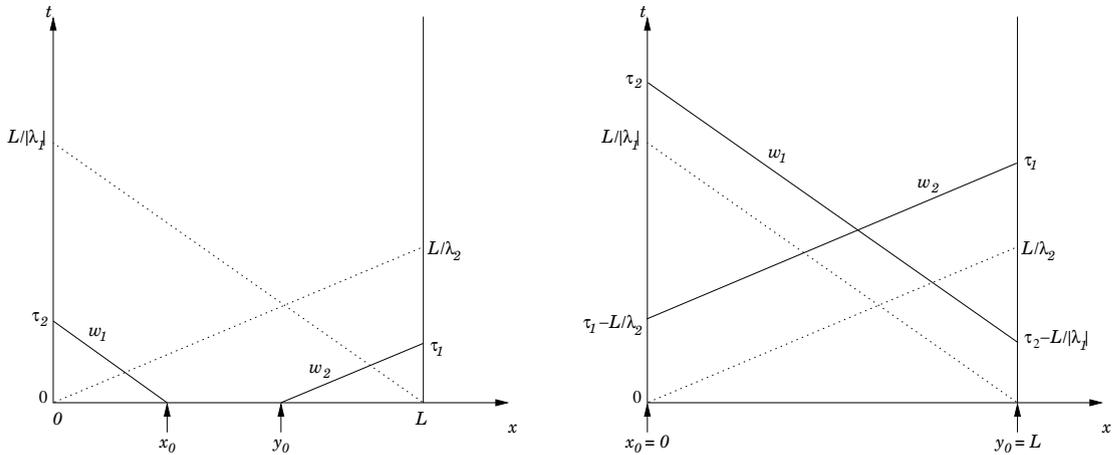
Pour construire les contrôles rétroactifs, on exprime la hauteur d'eau au niveau des bouts en fonction du débit au niveau des bouts et des variables caractéristiques sortantes.

En retraçant les caractéristiques en des temps antérieurs, comme indiquée par la figure II.5 et en utilisant le fait que la solution est constante le long de ces caractéristiques (voir (II.3.10) et la section II.2.2), on exprime les variables caractéristiques sortantes, comme suit :

$$\begin{pmatrix} w_1(\tau_2, 0) \\ w_2(\tau_1, L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(\tau_2) \\ c_2(\tau_1) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.3.15})$$

où,

$$c_1(\tau_2) = \begin{cases} w_1(0, y_0), & x_0 = |\lambda_1| \tau_2, \quad \text{si } \tau_2 \in]0, L/|\lambda_1|], \\ w_1(\tau_2 - L/|\lambda_1|, L), & \text{si } \tau_2 \geq L/|\lambda_1|, \end{cases} \quad (\text{II.3.16})$$



(a) Les points de départ (x_0 et y_0) des caractéristiques sont à l'intérieur du canal. Ceci se produit lorsque $\tau_2 \leq L/|\lambda_1|$ et $\tau_1 \leq L/\lambda_2$. Ainsi, la condition initiale est concernée puisque ces points correspondent au temps $t = 0$.

(b) Les points de départ (x_0 et y_0) des caractéristiques se trouvent au niveau des bouts du canal. Ceci se produit lorsque $\tau_2 \geq L/|\lambda_1|$ et $\tau_1 \geq L/\lambda_2$. Ainsi, l'état du canal au niveau des bouts et aux temps $\tau_2 - L/|\lambda_1|$ et $\tau_1 - L/\lambda_2$ est concerné.

Figure II.5 – Les caractéristiques sortantes au niveau des bouts du canal et leurs points de départ. Dans les deux cas, l'expression des variables caractéristiques aux niveaux des bouts est donnée par la valeur de ces variables en des temps antérieurs (voir (II.3.15)).

et

$$c_2(\tau_1) = \begin{cases} w_2(0, y_0), & y_0 = L - \lambda_2 \tau_1, \text{ si } \tau_1 \in]0, L/\lambda_2], \\ w_2(\tau_1 - L/\lambda_2, 0), & \text{si } \tau_1 \geq L/\lambda_2. \end{cases} \quad (\text{II.3.17})$$

De l'expression des variables caractéristiques (II.3.10), on déduit :

$$\hat{h}(\tau_1, L) = \frac{1}{l\lambda_1} \hat{q}_L(\tau_1) + \frac{1}{l} w_2(\tau_1, L), \quad (\text{II.3.18})$$

$$\hat{h}(\tau_2, 0) = \frac{1}{l\lambda_2} \hat{q}_0(\tau_2) + \frac{1}{l} w_1(\tau_2, 0). \quad (\text{II.3.19})$$

En considérant l'équation de l'énergie (II.3.14), on déduit de (II.3.16)-(II.3.19) que

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = a \hat{q}_0^2(t) + b_1(t) \hat{q}_0(t) + a \hat{q}_L^2(t) + b_2(t) \hat{q}_L(t), \quad (\text{II.3.20})$$

où

$$a = \frac{1}{2}(\lambda_2 + |\lambda_1|), \quad b_1(t) = \frac{\rho}{l} c_1(t), \quad b_2(t) = -\frac{\rho}{l} c_2(t), \quad (\text{II.3.21})$$

ρ est donné par (II.3.8), $c_1(t)$ et $c_2(t)$ sont donnés respectivement par (II.3.16) et (II.3.17).

Maintenant nous traitons le second membre de (II.3.20) afin de obtenir une décroissance ex-

ponentielle de l'énergie vers zéro en temps. A cette fin, nous formulons une remarque sur les polynômes du second degré comme un Lemme.

Lemme II.3.1 *Considérons un polynôme de second degré $P(q) = aq^2 + bq$, où $a > 0$. Pour tout $\theta \in]0, 1]$, on a*

$$P\left(\frac{b}{2a}(\sqrt{1-\theta}-1)\right) = -\frac{b^2}{4a}\theta. \quad (\text{II.3.22})$$

On choisit le débit au niveau des bouts comme suit :

$$\hat{q}_L(t) = \frac{b_2(t)}{2a} \left(\sqrt{1-\theta_2(t)} - 1 \right) \quad \text{and} \quad \hat{q}_0(t) = \frac{b_1(t)}{2a} \left(\sqrt{1-\theta_1(t)} - 1 \right), \quad (\text{II.3.23})$$

où $\theta_1, \theta_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1]$.

Remarque II.3.1 *Les contrôles définis dans [4], [18], [19], [33] et dans bien d'autres travaux, peuvent être réécrits sous la forme*

$$\hat{q}_L(t) = f_L(\hat{h}(t, L)), \quad \hat{q}_0(t) = f_0(\hat{h}(t, 0)). \quad (\text{II.3.24})$$

où f_0 et f_L sont des fonctions, $\hat{h}(t, 0)$ et $\hat{h}(t, L)$ sont des mesures respectives des hauteurs au niveau des bouts amont et aval du canal. Du point de vue pratique, ces contrôles posent un problème quant à leur implémentation puisque les données $\hat{h}(t, 0)$ et $\hat{h}(t, L)$ qui sont mesurées au temps t sont utilisées à travers (II.3.24) pour déduire les $\hat{q}_0(t)$ et $\hat{q}_L(t)$ en ce même temps. Ainsi, ce problème suggère l'existence d'un délai, entre la mesure des données en ligne et leur utilisation pour déterminer les contrôles. Dans ce travail, l'expression de $c_1(t)$ (resp. de $c_2(t)$), donnée par (II.3.16) (resp. (II.3.17)) et utilisée dans (II.3.23) à travers la variable $b_1(t)$ (resp. $b_2(t)$) fait apparaître ce délai. Il est égal à $L/|\lambda_1|$ pour le contrôle en amont et à L/λ_2 pour le contrôle en aval. Le délai $L/|\lambda_1|$ (resp. L/λ_2) est le temps nécessaire pour qu'une information passe du bout aval (resp. amont) au bout amont (resp. aval). Pour un temps inférieur à ces délais, la condition initiale est utilisée pour déterminer les contrôles.

On note aussi qu'on n'a pas besoin de mesurer les hauteurs et les débits tout le long du canal, mais uniquement les hauteurs au niveau des bouts, pour déterminer les contrôles, comme dans [33], [4] et [18]. Ceci est aussi valable pour le réseau.

Si les contrôles sont donnés par (II.3.23), alors en utilisant le Lemme II.3.1, l'équation d'énergie (II.3.20) devient

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = -\frac{b_1^2(t)}{4a} \theta_1(t) - \frac{b_2^2(t)}{4a} \theta_2(t). \quad (\text{II.3.25})$$

Ainsi, nous obtenons le résultat suivant concernant la stabilisation du canal.

Théorème II.3.1 Soit $t_k = kL/|\lambda_1|$, $k \in \mathbb{N}$. Supposons que les conditions données par (II.3.11) sont satisfaites, que la condition initiale (\hat{h}^0, \hat{q}^0) est continue dans $]0, L[$ et que \hat{q}_0 et \hat{q}_L satisfont (II.3.23). Alors le système linéaire (II.3.5)-(II.3.7) admet une solution unique (\hat{h}, \hat{q}) continue dans $[t_k, t_{k+1}] \times]0, L[$ telle que l'énergie décroît dans $[t_k, t_{k+1}]$ et vérifie :

$$E(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k)E(t_k), \quad (\text{II.3.26})$$

où E est donné par (II.3.12) et

$$\Theta^k = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 + |\lambda_1|} \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \theta_2(t_k + \frac{L-x}{\lambda_2}), \inf_{x \in]0, L[} \theta_1(t_k + \frac{x}{|\lambda_1|}) \right) \in]0, 1[.$$

Preuve L'existence et l'unicité de la solution sont données par l'expression des variables caractéristiques (II.3.9) et l'identité (II.3.15).

En intégrant l'équation d'énergie (II.3.25) de 0 à t_1 , on a

$$E(L/|\lambda_1|) = E(0) - \int_0^{L/|\lambda_1|} \frac{(b_2(t))^2}{2a} \theta_2(t) dt - \int_0^{L/|\lambda_1|} \frac{(b_1(t))^2}{2a} \theta_1(t) dt, \quad (\text{II.3.27})$$

$$\leq E(0) - \int_0^{L/\lambda_2} \frac{(b_2(t))^2}{2a} \theta_2(t) dt - \int_0^{L/|\lambda_1|} \frac{(b_1(t))^2}{2a} \theta_1(t) dt,$$

$$\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^{L/\lambda_2} \frac{w_2^2(0, L - \lambda_2 t) \theta_2(t)}{2a} dt - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^{L/|\lambda_1|} \frac{w_1^2(0, |\lambda_1| t) \theta_1(t)}{2a} dt,$$

$$\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_2^2(0, x) \theta_2(\frac{L-x}{\lambda_2})}{2a\lambda_2} dx - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_1^2(0, x) \theta_1(\frac{x}{|\lambda_1|})}{2a|\lambda_1|} dx,$$

$$\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_2^2(0, x) \theta_2(\frac{L-x}{\lambda_2})}{2a\lambda_2} dx - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_1^2(0, x) \theta_1(\frac{x}{|\lambda_1|})}{2a\lambda_2} dx,$$

$$\leq E(0) - \frac{\rho^2}{2l^2 a \lambda_2} \int_0^L [w_1^2(0, x) + w_2^2(0, x)] \min \left(\theta_2(\frac{L-x}{\lambda_2}), \theta_1(\frac{x}{|\lambda_1|}) \right) dx, \quad (\text{II.3.28})$$

D'autre part, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} w_1^2(0, x) + w_2^2(0, x) &= \left(l\hat{h}^0(x) - \frac{1}{\lambda_1} \hat{q}^0(x) \right)^2 + \left(l\hat{h}^0(x) - \frac{1}{\lambda_2} \hat{q}^0(x) \right)^2, \\ &= 2(l\hat{h}^0(x))^2 + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) (\hat{q}^0(x))^2 - 2 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) l\hat{h}^0(x) \hat{q}^0(x), \\ &\geq 2(l\hat{h}^0(x))^2 + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) (\hat{q}^0(x))^2 - (l\hat{h}^0(x))^2 - \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)^2 (\hat{q}^0(x))^2, \end{aligned}$$

où l'inégalité de Young a été utilisée. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
w_1^2(0, x) + w_2^2(0, x) &\geq (l\hat{h}^0(x))^2 - 2\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}(\hat{q}^0(x))^2, \\
&\geq (l\hat{h}^0(x))^2 + 2\frac{l^2}{\rho}(\hat{q}^0(x))^2, \quad \text{puisque } \frac{\rho}{l} = |\lambda_1|\lambda_2 \\
&\geq \frac{l}{\rho} \left(l\rho(\hat{h}^0(x))^2 + (\hat{q}^0(x))^2 \right).
\end{aligned} \tag{II.3.29}$$

Ainsi, nous déduisons de (II.3.28) et (II.3.29), que

$$\begin{aligned}
E(L/|\lambda_1|) &\leq E(0) - \Theta^0 \int_0^L \left(l\rho(\hat{h}^0)^2 + (\hat{q}^0)^2 \right) dx \\
&\leq (1 - \Theta^0)E(0).
\end{aligned} \tag{II.3.30}$$

où

$$\Theta^0 = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 + |\lambda_1|} \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \theta\left(\frac{L-x}{\lambda_2}\right), \inf_{x \in]0, L[} \theta\left(\frac{x}{|\lambda_1|}\right) \right).$$

Puisque le régime d'écoulement est fluvial, on a $|\lambda_1| < \lambda_2 + |\lambda_1|$ et donc $\Theta^0 < 1$.

Pour généraliser (II.3.30) par rapport au temps, on considère la condition initiale au temps $t_k = kL/|\lambda_1|$ et on pose

$$\begin{aligned}
b_1(t) &= \frac{\rho}{l} w_1(t_k, |\lambda_1|(t - t_k)), \quad \text{si } t \in]t_k, t_k + L/|\lambda_1|[, \\
b_2(t) &= -\frac{\rho}{l} w_2(t_k, L - \lambda_2(t - t_k)), \quad \text{si } t \in]t_k, t_k + L/\lambda_2[,
\end{aligned}$$

et

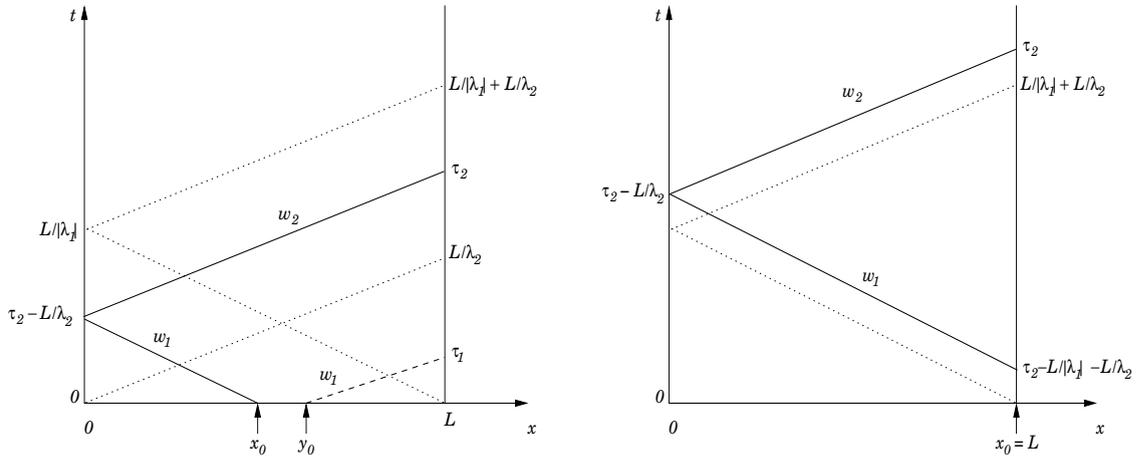
$$\Theta^k = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 - \lambda_1} \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \theta\left(t_k + \frac{L-x}{\lambda_2}\right), \inf_{x \in]0, L[} \theta\left(t_k + \frac{x}{|\lambda_1|}\right) \right).$$

Ainsi, en intégrant l'équation d'énergie de t_k à t_{k+1} et en utilisant les mêmes arguments que ceux de l'intervalle $[0, t_1]$, la preuve du Théorème II.3.1 est achevée. \square

Remarque II.3.2 *L'expression de convergence de l'énergie vers zéro dans [18], [19] et bien d'autres travaux, est donnée par*

$$E(t) \leq CE(0)\exp(-\mu t), \tag{II.3.31}$$

avec $C \geq 1$. On note ainsi, que théoriquement il peut y avoir une augmentation d'énergie durant le processus d'obtention de l'état d'équilibre final, du fait que $C \geq 1$. Dans ce travail, en plus d'éviter cette augmentation (puisque $C = 1$ dans l'expression (II.2.37)), on s'assure que l'énergie est décroissante entre t_k et t_{k+1} pour tous les choix de θ_1 et θ_2 dans $]0, 1]$ (voir (II.3.25)).



(a) Les points de départ (x_0 et y_0) des caractéristiques sont à l'intérieur du canal. Avant le temps L/λ_2 , le point y_0 est concerné. Après ce temps le point x_0 est considéré. Ceci se produit lorsque $\tau_1 \leq L/\lambda_2$ et $L/\lambda_2 \leq \tau_2 \leq L/|\lambda_1| + L/\lambda_2$. Ainsi, la condition initiale est concernée puisque ces points correspondent au temps $t = 0$.

(b) Après le temps $L/|\lambda_1| + L/\lambda_2$, seul le point de départ x_0 est concerné et il coïncide avec le bout aval du canal. Ainsi, l'état du canal au niveau du bout aval ($x = L$) et au temps $\tau_2 - L/|\lambda_1| - L/\lambda_2$ est concerné.

Figure II.6 – Stratégie de contrôle du canal par le bout $x = L$. On a les caractéristiques qui vont directement au bout $x = L$ (trait en tiret dans la figure de gauche) et celles qui passent d'abord par le bout $x = 0$ pour ensuite finir au bout $x = L$ (trait continu dans les deux figures).

Comme dans [4], il est aussi possible de contrôler des données initiales dans l'espace L^2 (voir Théorème II.5.1). Un résultat correspondant pour le réseau est le Théorème II.2.1.

II.3.3 Contrôler le canal par le biais du bout aval

Dans cette partie, nous montrons qu'il est possible de contrôler le canal en agissant seulement sur le bout situé en aval ($x = L$). En d'autres termes, il est possible d'obtenir la convergence exponentielle des perturbations \hat{h} et \hat{q} vers zéro en contrôlant seulement le bout aval. Comme dans la section précédente, nous exprimons la hauteur au niveau des bords en fonction du débit au niveau de ces bords et des variables caractéristiques sortantes. On utilise le fait que la solution est constante le long des caractéristiques (cf (II.3.10)) et la section II.3.2 ensuite, on se réfère à la figure II.6, pour obtenir

$$\begin{aligned} w_2(\tau_1, L) &= c_1(\tau_1) = w_2(0, y_0), \quad y_0 = L - \lambda_2 \tau_1, \quad \tau_1 \in]0, L/\lambda_2] \\ w_2(\tau_2, L) &= w_2(\tau_2 - L/\lambda_2, 0) = w_1(\tau_2 - L/\lambda_2, 0) + T\hat{q}_0(\tau_2 - L/\lambda_2), \quad \tau_2 \geq L/\lambda_2. \end{aligned} \tag{II.3.32}$$

où,

$$T = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{|\lambda_1|}$$

et

$$w_1(\tau_2 - L/\lambda_2, 0) = c_2(\tau_2) = \begin{cases} w_1(0, x_0), & x_0 = |\lambda_1|(\tau_2 - L/\lambda_2), \quad \tau_2 \in]L/\lambda_2, LT], \\ w_1(\tau_2 - LT, L), & \tau_2 \geq LT, \end{cases} \quad (\text{II.3.33})$$

En utilisant l'expression des variables caractéristiques (II.3.9), on a

$$\hat{h}_L(\tau_1) = \frac{1}{l\lambda_1} \hat{q}_L(\tau_1) + \frac{1}{l} w_2(\tau_1, L), \quad (\text{II.3.34})$$

$$\hat{h}_L(\tau_2) = \frac{1}{l\lambda_1} \hat{q}_L(\tau_2) + \frac{1}{l} w_1(\tau_2 - L/\lambda_2, 0) + \frac{T}{l} \hat{q}_0(\tau_2 - L/\lambda_2). \quad (\text{II.3.35})$$

Si on suppose que $\hat{q}_0(t) = 0$, alors à partir de la variation de l'énergie (II.3.14), nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = -\frac{1}{2} \sigma \hat{q}_L^2(t) - \rho \hat{h}_L(t) \hat{q}_L(t). \quad (\text{II.3.36})$$

D'une part, à partir de l'égalité (II.3.34) et de la variation de l'énergie (II.3.36), nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = a \hat{q}_L^2(t) + b_1(t) \hat{q}_L(t), \quad t \in [0, L/\lambda_2[\quad (\text{II.3.37})$$

où,

$$a = \frac{1}{2}(\lambda_2 + |\lambda_1|), \quad b_1(t) = -\frac{\rho}{l} c_1(t), \quad b_2(t) = -\frac{\rho}{l} c_2(t), \quad (\text{II.3.38})$$

ρ et $c_1(t)$ sont donnés respectivement par (II.3.8) et (II.3.32).

D'autre part, de l'égalité (II.3.35) et de la variation de l'énergie (II.3.36), nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = a \hat{q}_L^2(t) + b_2(t) \hat{q}_L(t), \quad t \geq L/\lambda_2, \quad (\text{II.3.39})$$

où, $b_2(t) = -\frac{\rho}{l} c_2(t)$, and $c_2(t)$ est donné par (II.3.33).

Ainsi par le biais de (II.3.37) et de (II.3.39), on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = a \hat{q}_L^2(t) + b(t) \hat{q}_L(t), \quad (\text{II.3.40})$$

avec,

$$b(t) = -\frac{\rho}{l} \begin{cases} w_2(0, L - \lambda_2 t), & \text{si } t \in]0, L/\lambda_2[, \\ w_1(0, -\lambda_1(t - L/\lambda_2)), & \text{si } t \in]L/\lambda_2, LT[, \\ w_1(t - LT, L), & \text{si } t \geq LT. \end{cases} \quad (\text{II.3.41})$$

Si le débit en aval est donné comme suit :

$$\hat{q}_L(t) = \frac{b(t)}{2a} \left(\sqrt{1 - \theta(t)} - 1 \right), \quad (\text{II.3.42})$$

où, $\theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1]$, alors grâce au Lemme II.3.1, l'équation d'énergie (II.3.40) devient

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = -\frac{b^2(t)}{4a} \theta(t). \quad (\text{II.3.43})$$

Ainsi, nous avons le résultat suivant sur la stabilisation du canal.

Théorème II.3.2 *Soit $t_k = kLT$, $k \in \mathbb{N}$ et T est donné par (II.3.32). Supposons que les conditions données par (II.3.11) sont satisfaites, que la condition initiale (\hat{h}^0, \hat{q}^0) est continue dans $]0, L[$, et que \hat{q}_L satisfait (II.3.42). Alors le système linéaire (II.3.5)-(II.3.7) admet une solution unique (\hat{h}, \hat{q}) continue dans $[t_k, t_{k+1}] \times]0, L[$ telle que l'énergie décroît dans $[t_k, t_{k+1}]$ et vérifie :*

$$E(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k)E(t_k), \quad (\text{II.3.44})$$

où E est donné par (II.3.12) et

$$\Theta^k = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 - \lambda_1} \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \theta(t_k + \frac{L-x}{\lambda_2}), \inf_{x \in]0, L[} \theta(t_k + \frac{L}{\lambda_2} - \frac{x}{\lambda_1}) \right) \in [0, 1].$$

Preuve L'existence et l'unicité de la solution sont données par l'expression des variables caractéristiques (II.3.9) et l'identité (II.3.32).

En intégrant la variation de l'énergie (II.3.43) de 0 à t_1 , on a

$$\begin{aligned} E(LT) &\leq E(0) - \int_0^{LT} \frac{b^2(t)}{2a} \theta(t) dt \\ &\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^{\frac{L}{\lambda_2}} \frac{w_2^2(0, L - \lambda_2 t) \theta(t)}{2a} dt - \frac{\rho^2}{l^2} \int_{\frac{L}{\lambda_2}}^{LT} \frac{w_1^2(0, -\lambda_1(t - L/\lambda_2)) \theta(t)}{2a} dt, \\ &\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_2^2(0, x) \theta(\frac{L-x}{\lambda_2})}{2a\lambda_2} dx + \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_1^2(0, x) \theta(\frac{L}{\lambda_2} - \frac{x}{\lambda_1})}{2a\lambda_1} dx. \end{aligned}$$

En tenant compte de la direction de l'écoulement on a $\frac{1}{\lambda_1} \leq -\frac{1}{\lambda_2}$ et donc

$$\begin{aligned} E(LT) &\leq E(0) - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_2^2(0, x) \theta(\frac{L-x}{\lambda_2})}{2a\lambda_2} dx - \frac{\rho^2}{l^2} \int_0^L \frac{w_1^2(0, x) \theta(\frac{L}{\lambda_2} - \frac{x}{\lambda_1})}{2a\lambda_2} dx, \\ &\leq E(0) - \frac{\rho^2}{2al^2\lambda_2} \int_0^L [w_1^2(0, x) + w_2^2(0, x)] \min \left(\theta\left(\frac{L-x}{\lambda_2}\right), \theta\left(\frac{L}{\lambda_2} - \frac{x}{\lambda_1}\right) \right) dx \quad (\text{II.3.45}) \end{aligned}$$

A partir de (II.3.29) et de (II.3.45) on obtient

$$\begin{aligned} E(LT) &\leq E(0) - \Theta^0 \int_0^L \left(l\rho(\hat{h}^0)^2 + (\hat{q}^0)^2 \right) dx, \\ &\leq (1 - \Theta^0)E(0), \end{aligned} \tag{II.3.46}$$

où, $\Theta^0 = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 - \lambda_1} \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \theta\left(\frac{L-x}{\lambda_2}\right), \inf_{x \in]0, L[} \theta\left(\frac{L}{\lambda_2} - \frac{x}{\lambda_1}\right) \right)$.

Pour généraliser (II.3.46) par rapport au temps, on considère la condition initiale au temps $t_k = kLT$, on pose

$$b(t) = -\frac{\rho}{l} \begin{cases} w_2(0, L - \lambda_2(t - t_k)), & \text{si } t \in]t_k, t_k + L/\lambda_2[, \\ w_1(0, -\lambda_1(t - t_k - L/\lambda_2)), & \text{si } t \in]t_k + L/\lambda_2, LT + t_k[, \end{cases}$$

et

$$\Theta^k = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 - \lambda_1} \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \theta\left(t_k + \frac{L-x}{\lambda_2}\right), \inf_{x \in]0, L[} \theta\left(t_k + \frac{L}{\lambda_2} - \frac{x}{\lambda_1}\right) \right).$$

Ainsi, en intégrant l'équation d'énergie de t_k à t_{k+1} et en utilisant les mêmes arguments que ceux de l'intervalle $[0, t_1]$, la preuve du Théorème II.3.2 est complète. \square

Remarque II.3.3 *Il est aussi possible de contrôler le canal en agissant uniquement sur le bout amont ($x = 0$). Dans ce cas, on pose $\hat{q}_L(t) = 0$ et*

$$\hat{q}_0(t) = \frac{b(t)}{2a} \left(\sqrt{1 - \theta(t)} - 1 \right), \quad \theta \in]0, 1] \tag{II.3.47}$$

où

$$b(t) = -\frac{\rho}{l} \begin{cases} w_1(0, |\lambda_1|t), & \text{si } t \in]0, L/|\lambda_1|[, \\ w_2(0, \lambda_2(t - L/|\lambda_1|)), & \text{si } t \in]L/|\lambda_1|, LT[, \\ w_2(t - LT, 0), & \text{si } t \geq LT, \end{cases}$$

II.4 Construction des contrôles pour le réseau

Nous montrons la stabilisation dans un réseau en nous servant des précédentes sections concernant la construction de contrôles.

II.4.1 L'estimation à priori de l'énergie

On définit l'énergie E du fluide dans le réseau par

$$E(t) = \sum_{i=1}^3 E_i(t), \quad E_i(t) = \int_0^{L_i} \left(l_i \gamma_i \hat{h}_i^2 + \delta_i \hat{q}_i^2 \right) dx,$$

où δ_i et γ_i sont données par (II.2.14). En vue d'estimer l'énergie E , nous considérons la formulation variationnelle du modèle linéaire (II.2.16.a)-(II.2.16.e) :

- l'équation de conservation de la masse : $\forall \psi_i \in H^1(]0, L_i[)$, on multiplie (II.2.16.a) par $l_i \gamma_i \psi_i$, ensuite on intègre par parties et puis on somme sur i , pour obtenir

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left[l_i \gamma_i \psi_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} - \hat{q}_i \frac{\partial (\psi_i \gamma_i)}{\partial x} \right] dx + \sum_{i=1}^2 \left(\gamma_i \psi_i(x_i) - \gamma_3 \psi_3(x_3) \right) \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) \\ & - \gamma_1 \psi_1(0) \hat{q}_{1,0}(t) + \gamma_2 \psi_2(L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) + \gamma_3 \psi_3(L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.4.1})$$

- l'équation de conservation de la quantité du mouvement : $\forall \phi_i \in H^1(]0, L_i[)$, on multiplie (II.2.16.b) par $\delta_i \phi_i$, ensuite on intègre par parties et puis on somme sur i :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left[\delta_i \phi_i \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} - 2 \hat{q}_i \frac{\partial (\beta_i \phi_i)}{\partial x} - \hat{h}_i \frac{\partial (\gamma_i \phi_i)}{\partial x} \right] dx - \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \phi_i(x_i) \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) \\ & + 2 \left(\beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) \right) \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \phi_i(x_i) - 2 \beta_1 \phi_1(0) \hat{q}_{1,0}(t) + 2 \beta_2 \phi_2(L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) \\ & + 2 \beta_3 \phi_3(L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) - \gamma_1 \phi_1(0) \hat{h}_1(t, 0) + \gamma_2 \phi_2(L_2) \hat{h}_2(t, L_2) + \gamma_3 \phi_3(L_3) \hat{h}_3(t, L_3) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.4.2})$$

En vue de définir les contrôles, on pose $(\psi_i, \phi_i) = (\hat{h}_i, \hat{q}_i)$ dans (II.4.1)-(II.4.2), pour avoir :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= -\beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - \gamma_2 \hat{h}_2(t, L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) - \beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) - \gamma_3 \hat{h}_3(t, L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) + \beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) \\ &+ \gamma_1 \hat{h}_1(t, 0) \hat{q}_{1,0}(t) - 2 \left(\beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) \right) \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) \\ &+ \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \gamma_i \hat{q}_i(t, x_i) \hat{h}_i(t, x_i) - \sum_{i=1}^2 \left(\gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) - \gamma_3 \hat{h}_3(t, x_3) \right) \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i). \end{aligned} \quad (\text{II.4.3})$$

Grâce à (II.2.16.c)-(II.2.16.e), on a

$$\begin{aligned} & 2 \left(\beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) \right) \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) \\ & + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \gamma_i \hat{q}_i(t, x_i) \hat{h}_i(t, x_i) - \sum_{i=1}^2 \left(\gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) - \gamma_3 \hat{h}_3(t, x_3) \right) \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.4.4})$$

où β_i et γ_i sont donnés par (II.2.14). Ainsi, seuls les termes au niveau des bouts interviennent dans la variation de l'énergie (II.4.3) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= -\beta_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - \gamma_2 \hat{h}_2(t, L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) - \beta_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) - \gamma_3 \hat{h}_3(t, L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) \\ &+ \beta_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, 0) \hat{q}_{1,0}(t). \end{aligned} \quad (\text{II.4.5})$$

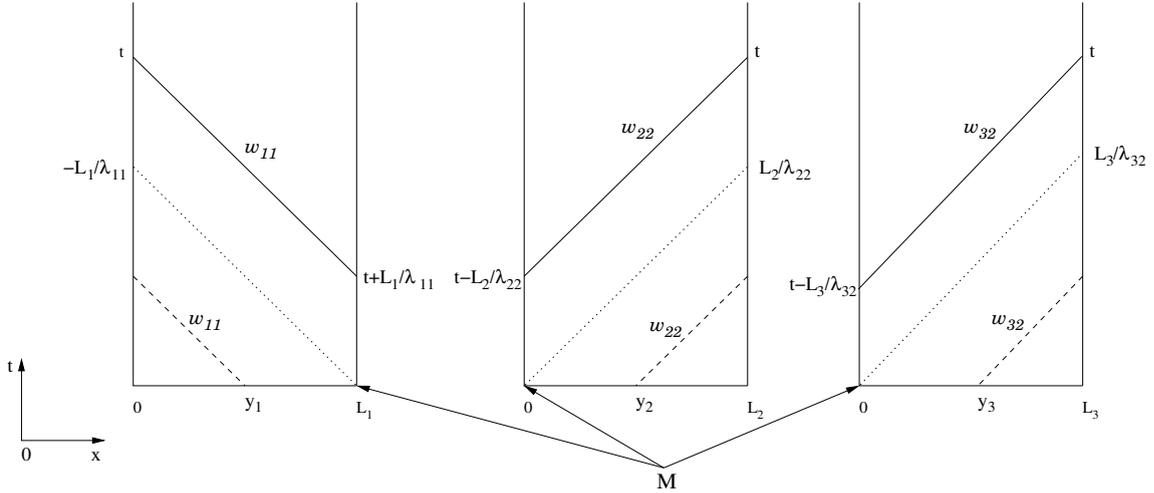


Figure II.7 – Les variables caractéristiques au niveau des bords du réseau et leurs points de départ. Pour un temps t tel que $t \leq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}$ pour le canal 1, $t \leq \frac{L_2}{\lambda_{22}}$ pour le canal 2 et $t \leq \frac{L_3}{\lambda_{32}}$ pour le canal 3, les points de départ sont à l'intérieur des canaux correspondants. Sinon, les conditions de jonction interviennent puisque les points de départ sont au niveau de la jonction M .

II.4.2 Construction des contrôles

Nous utiliserons, comme dans la section II.3, l'expression de la hauteur au niveau des bords du réseau en fonction du débit au niveau de ces bords et des variables caractéristiques sortantes. Cette expression permettra de réécrire le second membre de la variation de l'énergie (II.4.5) comme un polynôme du second degré en fonction du débit au niveau des bords. Tous les points référés dans cette section, sont donnés dans la figure II.7. Nous donnons maintenant la preuve du Lemme II.2.2

Preuve (du Lemme II.2.2). Nous distinguons deux cas :

Cas A : Lorsque les caractéristiques sortantes au niveau des bords ont leur point de départ à l'intérieur du domaine (traits en tiret dans la Figure II.7). Ce cas survient quand $t \leq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}$ pour le canal 1, $t \leq \frac{L_2}{\lambda_{22}}$ pour le canal 2 et $t \leq \frac{L_3}{\lambda_{32}}$ pour le canal 3. En utilisant le fait que la solution est constante le long des caractéristiques (voir (II.2.26)), les relations suivantes sont satisfaites :

$$w_{11}(t, 0) = w_{11}(0, y_1), \quad y_1 = |\lambda_{11}|t, \quad (\text{II.4.6})$$

$$w_{22}(t, L_2) = w_{22}(0, y_2), \quad y_2 = L_2 - \lambda_{22}t, \quad (\text{II.4.7})$$

$$w_{32}(t, L_3) = w_{32}(0, y_3), \quad y_3 = L_3 - \lambda_{32}t. \quad (\text{II.4.8})$$

Cas B : Lorsque les caractéristiques sortantes au niveau des bords ont leur point de départ au niveau de la jonction M (traits continus dans Figure II.7). Ce cas fait intervenir les conditions de jonction et survient quand $t \geq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}$ pour le canal 1, $t \geq \frac{L_2}{\lambda_{22}}$ pour

le canal 2 et $t \geq \frac{L_3}{\lambda_{32}}$ pour le canal 3. En utilisant encore le fait que la solution est constante le long des caractéristiques (voir (II.2.26)), les relations suivantes sont satisfaites :

$$w_{11}(t, 0) = w_{11}(t - L_1/|\lambda_{11}|, L_1), \quad (\text{II.4.9})$$

$$w_{22}(t, L_2) = w_{22}(t - L_2/\lambda_{22}, 0), \quad (\text{II.4.10})$$

$$w_{32}(t, L_3) = w_{32}(t - L_3/\lambda_{32}, 0). \quad (\text{II.4.11})$$

Par le biais du Lemme II.2.1, on déduit que

$$\begin{pmatrix} w_{11}(t, L_1) \\ w_{22}(t, 0) \\ w_{32}(t, 0) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} w_{12}(t, L_1) \\ w_{21}(t, 0) \\ w_{31}(t, 0) \end{pmatrix}, \quad (\text{II.4.12})$$

où $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = B^{-1}C$. D'où, les relations (II.4.9)-(II.4.11) donnent

$$\begin{pmatrix} w_{11}(t + L_1/|\lambda_{11}|, 0) \\ w_{22}(t + L_2/\lambda_{22}, L_2) \\ w_{32}(t + L_3/\lambda_{32}, L_3) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} w_{12}(t, L_1) \\ w_{21}(t, 0) \\ w_{31}(t, 0) \end{pmatrix}, \quad D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} = B^{-1}C. \quad (\text{II.4.13})$$

Les variables caractéristiques w_{12}, w_{21} et w_{31} sont données respectivement par :

$$w_{12}(t, L_1) = \begin{cases} w_{12}(0, L_1 - \lambda_{12}t), & t \leq L_1/\lambda_{12}, \\ w_{12}(t - L_1/\lambda_{12}, 0), & t \geq L_1/\lambda_{12}, \end{cases} \quad (\text{II.4.14})$$

$$w_{21}(t, 0) = \begin{cases} w_{21}(0, |\lambda_{21}|t), & t \leq L_2/|\lambda_{21}|, \\ w_{21}(t - L_2/|\lambda_{21}|, L_2), & t \geq L_2/|\lambda_{21}|, \end{cases} \quad (\text{II.4.15})$$

$$w_{31}(t, 0) = \begin{cases} w_{31}(0, |\lambda_{31}|t), & t \leq L_3/|\lambda_{31}|, \\ w_{31}(t - L_3/|\lambda_{31}|, L_3), & t \geq L_3/|\lambda_{31}|. \end{cases} \quad (\text{II.4.16})$$

Soient

$$b_1(t) = \begin{cases} w_{11}(0, |\lambda_{11}|t), & t \leq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, \\ d_{11}w_{12}(t - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, L_1) + d_{12}w_{21}(t - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, 0) + d_{13}w_{31}(t - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, 0), & t \geq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, \end{cases} \quad (\text{II.4.17})$$

$$b_2(t) = \begin{cases} w_{22}(0, L_2 - \lambda_{22}t), & t \leq \frac{L_2}{\lambda_{22}}, \\ d_{21}w_{12}(t - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, L_1) + d_{22}w_{21}(t - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, 0) + d_{23}w_{31}(t - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, 0), & t \geq \frac{L_2}{\lambda_{22}}, \end{cases} \quad (\text{II.4.18})$$

et

$$b_3(t) = \begin{cases} w_{32}(0, L_3 - \lambda_{32}t), & t \leq \frac{L_3}{\lambda_{32}}, \\ d_{31}w_{12}(t - \frac{L_3}{\lambda_{32}}, L_1) + d_{32}w_{21}(t - \frac{L_3}{\lambda_{32}}, 0) + d_{33}w_{31}(t - \frac{L_3}{\lambda_{32}}, 0), & t \geq \frac{L_3}{\lambda_{32}}. \end{cases} \quad (\text{II.4.19})$$

Ceci achève la preuve du Lemme II.2.2. \square De l'expression des variables caractéristiques (II.2.23), on déduit

$$\hat{h}_1(t, 0) = \frac{1}{l_1\lambda_{12}}\hat{q}_{1,0}(t) + \frac{1}{l_1}w_{11}(t, 0), \quad (\text{II.4.20})$$

$$\hat{h}_2(t, L_2) = \frac{1}{l_2\lambda_{21}}\hat{q}_{2,L_2}(t) + \frac{1}{l_2}w_{22}(t, L_2), \quad (\text{II.4.21})$$

$$\hat{h}_3(t, L_3) = \frac{1}{l_3\lambda_{31}}\hat{q}_{3,L_3}(t) + \frac{1}{l_3}w_{32}(t, L_3). \quad (\text{II.4.22})$$

Ainsi, grâce à la variation de l'énergie (II.4.5) et au Lemme II.2.2, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} E(t) &= a_1 \hat{q}_{1,0}^2(t) + \frac{\gamma_1}{l_1} b_1(t) \hat{q}_{1,0}(t) + a_2 \hat{q}_{2,L_2}^2(t) - \frac{\gamma_2}{l_2} b_2(t) \hat{q}_{2,L_2}(t) \\ &\quad + a_3 \hat{q}_{3,L_3}^2(t) - \frac{\gamma_3}{l_3} b_3(t) \hat{q}_{3,L_3}(t), \end{aligned} \quad (\text{II.4.23})$$

où $a_i = \frac{\delta_i}{2}(\lambda_{i2} + |\lambda_{i1}|) > 0$. Comme à la section II.3, on choisit les contrôles \hat{q}_{2,L_2} , \hat{q}_{3,L_3} et $\hat{q}_{1,0}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{q}_{1,0}(t) &= \frac{\gamma_1}{2l_1a_1} \left(\sqrt{1 - \theta_1(t)} - 1 \right) b_1(t), \\ \hat{q}_{2,L_2}(t) &= -\frac{\gamma_2}{2l_2a_2} \left(\sqrt{1 - \theta_2(t)} - 1 \right) b_2(t), \\ \hat{q}_{3,L_3}(t) &= -\frac{\gamma_3}{2l_3a_3} \left(\sqrt{1 - \theta_3(t)} - 1 \right) b_3(t), \end{aligned} \quad (\text{II.4.24})$$

où $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$ appartiennent à l'intervalle $]0, 1]$, pour tout $t \geq 0$. Par l'application du Lemme II.3.1 à (II.4.24), nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) = -\frac{(\gamma_1 b_1(t))^2}{4l_1^2 a_1} \theta_1(t) - \frac{(\gamma_2 b_2(t))^2}{4l_2^2 a_2} \theta_2(t) - \frac{(\gamma_3 b_3(t))^2}{4l_3^2 a_3} \theta_3(t). \quad (\text{II.4.25})$$

II.4.3 Le processus de stabilisation

Nous prouvons d'abord un résultat concernant des données continues. Ensuite par le biais de ce résultat, nous obtenons par densité, la preuve du Théorème II.2.1 concernant des données dans l'espace L^2 .

Théorème II.4.1 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $t_k = kT_0$ où T_0 est donné par (II.2.33). Supposons que les conditions données par (II.2.22) sont satisfaites, que la condition initiale $(\hat{h}_i^0, \hat{q}_i^0)$ est continue dans $]0, L_i[$ et que $(\hat{q}_{1,0}, \hat{q}_{2,L_2}, \hat{q}_{3,L_3})$ satisfait (II.4.24). Alors le système linéaire (II.2.16) admet une solution unique $(\hat{h}_i, \hat{q}_i)_{i=1,2,3}$ continue dans $[t_k, t_{k+1}] \times]0, L_i[$ telle que l'énergie est décroissante et vérifie :*

$$E(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k)E(t_k), \quad (\text{II.4.26})$$

où, $\Theta^k = \min(\Delta_1^k, \Delta_2^k, \Delta_3^k) \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} \Delta_1^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{11}|}{\lambda_{12} + |\lambda_{11}|} \inf_{x \in [0, L_1]} \theta_1 \left(t_k + \frac{x}{|\lambda_{11}|} \right), \frac{\gamma_1 \epsilon}{l_1} \right), \\ \Delta_2^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{21}|}{\lambda_{22} + |\lambda_{21}|} \inf_{x \in [0, L_2]} \theta_2 \left(t_k + \frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right), \frac{\gamma_2 \epsilon}{l_2} \right), \\ \Delta_3^k &= \min \left(\frac{|\lambda_{31}|}{\lambda_{32} + |\lambda_{31}|} \inf_{x \in [0, L_3]} \theta_3 \left(t_k + \frac{L_3 - x}{\lambda_{32}} \right), \frac{\gamma_3 \epsilon}{l_3} \right), \end{aligned}$$

et $\epsilon > 0$ est un nombre réel positif.

Preuve En intégrant l'équation d'énergie (II.4.25) de 0 à t_1 , on a

$$E(t_1) \leq E(0) - \int_0^{t_1} \frac{(\gamma_1 b_1(t))^2}{4l_1^2 a_1} \theta_1(t) dt - \int_0^{t_1} \frac{(\gamma_2 b_2(t))^2}{4l_2^2 a_2} \theta_2(t) dt - \int_0^{t_1} \frac{(\gamma_3 b_3(t))^2}{4l_3^2 a_3} \theta_3(t) dt.$$

Grâce aux valeurs de b_1 , b_2 et b_3 données respectivement par (II.4.17), (II.4.18) et (II.4.19), on obtient :

$$\begin{aligned} E(t_1) &\leq E(0) - \frac{\gamma_1^2}{2l_1^2 a_1} \int_0^{\frac{L_1}{|\lambda_{11}|}} w_{11}^2(0, |\lambda_{11}|t) \theta_1(t) dt - \frac{\gamma_2^2}{2l_2^2 a_2} \int_0^{\frac{L_2}{\lambda_{22}}} w_{22}^2(0, L_2 - \lambda_{22}t) \theta_2(t) dt \\ &\quad - \frac{\gamma_3^2}{2l_3^2 a_3} \int_0^{\frac{L_3}{\lambda_{32}}} w_{32}^2(0, L_3 - \lambda_{32}t) \theta_3(t) dt \\ &\quad - \frac{\gamma_1^2}{2l_1^2 a_1} \int_{\frac{L_1}{|\lambda_{11}|}}^{t_1} \left[d_{11} w_{12} \left(t - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, L_1 \right) + d_{12} w_{21} \left(t - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, 0 \right) + d_{13} w_{31} \left(t - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, 0 \right) \right]^2 \theta_1(t) dt \\ &\quad - \frac{\gamma_2^2}{2l_2^2 a_2} \int_{\frac{L_2}{\lambda_{22}}}^{t_1} \left[d_{21} w_{12} \left(t - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, L_1 \right) + d_{22} w_{21} \left(t - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, 0 \right) + d_{23} w_{31} \left(t - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, 0 \right) \right]^2 \theta_2(t) dt \\ &\quad - \frac{\gamma_3^2}{2l_3^2 a_3} \int_{\frac{L_3}{\lambda_{32}}}^{t_1} \left[d_{31} w_{12} \left(t - \frac{L_3}{\lambda_{32}}, L_1 \right) + d_{32} w_{21} \left(t - \frac{L_3}{\lambda_{32}}, 0 \right) + d_{33} w_{31} \left(t - \frac{L_3}{\lambda_{32}}, 0 \right) \right]^2 \theta_3(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi par des changements de variables, on obtient

$$\begin{aligned}
E(t_1) &\leq E(0) - \frac{\gamma_1^2}{2l_1^2 a_1 |\lambda_{11}|} \int_0^{L_1} w_{11}^2(0, x) \theta_1 \left(\frac{x}{|\lambda_{11}|} \right) dx \\
&- \frac{\gamma_2^2}{2l_2^2 a_2 \lambda_{22}} \int_0^{L_2} w_{22}^2(0, x) \theta_2 \left(\frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right) dx - \frac{\gamma_3^2}{2l_3^2 a_3 \lambda_{32}} \int_0^{L_3} w_{32}^2(0, x) \theta_3 \left(\frac{L_3 - x}{\lambda_{32}} \right) dx \\
&- \frac{\gamma_1^2}{2l_1^2 a_1} \int_0^{t_1 - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}} \left(d_{11} w_{12}(s, L_1) + d_{12} w_{21}(s, 0) + d_{13} w_{31}(s, 0) \right)^2 \theta_1 \left(s + \frac{L_1}{|\lambda_{11}|} \right) ds \quad (\text{II.4.27}) \\
&- \frac{\gamma_2^2}{2l_2^2 a_2} \int_0^{t_1 - \frac{L_2}{\lambda_{22}}} \left(d_{21} w_{12}(s, L_1) + d_{22} w_{21}(s, 0) + d_{23} w_{31}(s, 0) \right)^2 \theta_2 \left(s + \frac{L_2}{\lambda_{22}} \right) ds \\
&- \frac{\gamma_3^2}{2l_3^2 a_3} \int_0^{t_1 - \frac{L_3}{\lambda_{32}}} \left(d_{31} w_{12}(s, L_1) + d_{32} w_{21}(s, 0) + d_{33} w_{31}(s, 0) \right)^2 \theta_3 \left(s + \frac{L_3}{\lambda_{32}} \right) ds.
\end{aligned}$$

Soient Γ_i^j ($i = 1, \dots, 3, j = 0, 1$) définis comme suit :

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^0 &= \frac{\gamma_1^2}{2l_1^2 a_1 |\lambda_{11}|} \inf_{x \in [0, L_1]} \theta_1 \left(\frac{x}{|\lambda_{11}|} \right), & \Gamma_2^0 &= \frac{\gamma_2^2}{2l_2^2 a_2 \lambda_{22}} \inf_{x \in [0, L_2]} \theta_2 \left(\frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right), \\
\Gamma_3^0 &= \frac{\gamma_3^2}{2l_3^2 a_3 \lambda_{32}} \inf_{x \in [0, L_3]} \theta_3 \left(\frac{L_3 - x}{\lambda_{32}} \right), & \Gamma_1^1 &= \frac{\gamma_1^2}{2l_1^2 a_1} \inf_{s \in [0, t_1 - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}]} \theta_1 \left(s + \frac{L_1}{|\lambda_{11}|} \right), \\
\Gamma_2^1 &= \frac{\gamma_2^2}{2l_2^2 a_2} \inf_{s \in [0, t_1 - \frac{L_2}{\lambda_{22}}]} \theta_2 \left(s + \frac{L_2}{\lambda_{22}} \right), & \Gamma_3^1 &= \frac{\gamma_3^2}{2l_3^2 a_3} \inf_{s \in [0, t_1 - \frac{L_3}{\lambda_{32}}]} \theta_3 \left(s + \frac{L_3}{\lambda_{32}} \right).
\end{aligned}$$

Ensuite, de l'inégalité (II.4.27) on déduit l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
E(t_1) &\leq E(0) - \Gamma_1^0 \int_0^{L_1} w_{11}^2(0, x) dx - \Gamma_2^0 \int_0^{L_2} w_{22}^2(0, x) dx - \Gamma_3^0 \int_0^{L_3} w_{32}^2(0, x) dx \\
&- \Gamma_1^1 \int_0^{t_1 - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}} \left(d_{11} w_{12}(s, L_1) + d_{12} w_{21}(s, 0) + d_{13} w_{31}(s, 0) \right)^2 ds \\
&- \Gamma_2^1 \int_0^{t_1 - \frac{L_2}{\lambda_{22}}} \left(d_{21} w_{12}(s, L_1) + d_{22} w_{21}(s, 0) + d_{23} w_{31}(s, 0) \right)^2 ds \\
&- \Gamma_3^1 \int_0^{t_1 - \frac{L_3}{\lambda_{32}}} \left(d_{31} w_{12}(s, L_1) + d_{32} w_{21}(s, 0) + d_{33} w_{31}(s, 0) \right)^2 ds. \quad (\text{II.4.28})
\end{aligned}$$

Puisque $\min \left(t_1 - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, t_1 - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, t_1 - \frac{L_3}{\lambda_{32}} \right) \geq \max \left(\frac{L_1}{\lambda_{12}}, \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}, \frac{L_3}{|\lambda_{31}|} \right)$, on déduit que

$$\begin{aligned}
E(t_1) &\leq E(0) - \Gamma_1^0 \int_0^{L_1} w_{11}^2(0, x) dx - \Gamma_2^0 \int_0^{L_2} w_{22}^2(0, x) dx - \Gamma_3^0 \int_0^{L_3} w_{32}^2(0, x) dx \\
&- \int_0^{\max \left(\frac{L_1}{\lambda_{12}}, \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}, \frac{L_3}{|\lambda_{31}|} \right)} \|ADX\|^2 ds, \quad (\text{II.4.29})
\end{aligned}$$

où D est donné par (II.4.12) et

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3^1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} w_{12}(s, L_1) \\ w_{21}(s, 0) \\ w_{31}(s, 0) \end{pmatrix}.$$

La matrice AD étant inversible, il existe $\epsilon > 0$ tel que $-||ADX||^2 \leq -\epsilon||X||^2$ et donc l'estimation (II.4.29) donne

$$\begin{aligned} E(t_1) &\leq E(0) - \Gamma_1^0 \int_0^{L_1} w_{11}^2(0, x) dx - \Gamma_2^0 \int_0^{L_2} w_{22}^2(0, x) dx - \Gamma_3^0 \int_0^{L_3} w_{32}^2(0, x) dx \\ &\quad - \epsilon \int_0^{\max(\frac{L_1}{\lambda_{12}}, \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}, \frac{L_3}{|\lambda_{31}|})} (w_{12}^2(s, L_1) + w_{21}^2(s, 0) + w_{31}^2(s, 0)) ds. \end{aligned} \quad (\text{II.4.30})$$

En considérant les identités (II.4.14)-(II.4.16), on a

$$\begin{aligned} E(t_1) &\leq E(0) - \Gamma_1^0 \int_0^{L_1} w_{11}^2(0, x) dx - \Gamma_2^0 \int_0^{L_2} w_{22}^2(0, x) dx - \Gamma_3^0 \int_0^{L_3} w_{32}^2(0, x) dx \\ &\quad - \epsilon \left(\int_0^{\frac{L_1}{\lambda_{12}}} w_{12}^2(0, L_1 - \lambda_{12}s) ds + \int_0^{\frac{L_2}{|\lambda_{21}|}} w_{21}^2(0, |\lambda_{21}|s) ds + \int_0^{\frac{L_3}{|\lambda_{31}|}} w_{31}^2(0, |\lambda_{31}|s) ds \right). \end{aligned}$$

Ainsi, par des changements de variables, nous obtenons

$$\begin{aligned} E(t_1) &\leq E(0) - \Pi_1^0 \int_0^{L_1} [w_{11}^2(0, x) + w_{12}^2(0, x)] dx - \Pi_2^0 \int_0^{L_2} [w_{22}^2(0, x) + w_{21}^2(0, x)] dx \\ &\quad - \Pi_3^0 \int_0^{L_3} [w_{32}^2(0, x) + w_{31}^2(0, x)] dx, \end{aligned} \quad (\text{II.4.31})$$

où $\Pi_1^0 = \min\left(\Gamma_1^0, \frac{\epsilon}{\lambda_{12}}\right)$, $\Pi_2^0 = \min\left(\Gamma_2^0, \frac{\epsilon}{|\lambda_{21}|}\right)$ and $\Pi_3^0 = \min\left(\Gamma_3^0, \frac{\epsilon}{|\lambda_{31}|}\right)$. Rapellons que (II.3.29), donne l'estimation suivante :

$$w_{i2}^2(0, x) + w_{i1}^2(0, x) \geq \frac{l_i}{\gamma_i} \left(l_i \gamma_i (\hat{h}_i^0(x))^2 + \delta_i (\hat{q}_i^0(x))^2 \right). \quad (\text{II.4.32})$$

Soit $\Delta_i^0 = \frac{l_i \Pi_i^0}{\gamma_i}$. En combinant (II.4.31) et (II.4.32), on a

$$\begin{aligned} E(t_1) &\leq E(0) - (\Delta_1^0 E_1(0) + \Delta_2^0 E_2(0) + \Delta_3^0 E_3(0)) \\ &\leq (1 - \Theta^0) E(0), \end{aligned} \quad (\text{II.4.33})$$

où $\Theta^0 = \min(\Delta_1^0, \Delta_2^0, \Delta_3^0)$.

Notons que,

$$\Delta_2^0 = \min \left(\frac{|\lambda_{21}|}{\lambda_{22} + |\lambda_{21}|} \inf_{x \in [0, L_2]} \theta_2 \left(\frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right), \frac{\gamma_2 \epsilon}{l_2 \lambda_{22}} \right) < 1. \quad (\text{II.4.34})$$

Puisque $\gamma_2 > 0$ et $\lambda_{22} > 0$ à cause du régime d'écoulement fluvial, donc $\Theta^0 < 1$.

En vue d'avoir une généralisation en temps, nous considérons la condition initiale au temps t_k et nous utilisons les arguments du Théorème II.3.1. Ainsi, la preuve du Théorème II.4.1 est complète. \square

II.5 Preuve du résultat principal

Dans cette section, nous considérons des données initiales dans l'espace L^2 au lieu des données initiales continues comme dans le cas des Théorèmes II.3.1 et II.4.1.

Nous rappelons que $Q_i =]t_k, t_{k+1}[\times]0, L_i[=]t_k, t_{k+1}[\times \Omega_i$,

$$\text{div} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{et} \quad H(\text{div}, Q_i) = \left\{ \mathcal{V} \in L^2(Q_i)^2; \text{div} \mathcal{V} \in L^2(Q_i) \right\}.$$

II.5.1 Un résultat de régularité pour un canal

Nous réduisons la régularité des conditions initiales.

Théorème II.5.1 *Soit $t_k = kL/|\lambda_1|$, $k \in \mathbb{N}$. Supposons que les conditions données par (II.3.11) sont satisfaites, que la condition initiale (\hat{h}^0, \hat{q}^0) appartient à l'espace $(L^2(]0, L[))^2$ et que $\hat{q}_L(t)$ et $\hat{q}_0(t)$ satisfont (II.3.23). Alors le système linéaire (II.3.5)-(II.3.7) admet une solution (\hat{h}, \hat{q}) satisfaisant la régularité :*

$$\begin{pmatrix} l\hat{h} \\ \hat{q} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \sigma\hat{q} + \rho\hat{h} \end{pmatrix} \in H(\text{div}, Q), \quad (\text{II.5.1})$$

et l'estimation de l'énergie

$$E(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k)E(t_k), \quad (\text{II.5.2})$$

où $\Theta^k = \frac{|\lambda_1|}{\lambda_2 - \lambda_1} \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \theta_2 \left(t_k + \frac{L-x}{\lambda_2} \right), \inf_{x \in]0, L[} \theta_1 \left(t_k - \frac{x}{\lambda_1} \right) \right) \in]0, 1[$.

Preuve Puisque $(\hat{h}^0, \hat{q}^0) \in (L^2(]0, L[))^2$, il existe une sous suite $(\hat{h}_n^0, \hat{q}_n^0)_{n \geq 0} \subset C^0(]0, L[)^2$ telle que

$$\hat{h}_n^0 \longrightarrow \hat{h}^0 \quad \text{et} \quad \hat{q}_n^0 \longrightarrow \hat{q}^0 \quad \text{dans} \quad L^2(]0, L[), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Pour tout $n \geq 0$, nous considérons la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall(\psi, \phi) \in H^1(\Omega), \\ (a) \quad \int_0^L l\rho\psi \frac{\partial \hat{h}_n}{\partial t} dx - \int_0^L \hat{q}_n \frac{\partial(\psi\rho)}{\partial x} dx + \rho\psi(L)\hat{q}_{L,n}(t) - \rho\psi(0)\hat{q}_{0,n}(t) = 0, \\ (b) \quad \int_0^L \phi \frac{\partial \hat{q}_n}{\partial t} dx - \int_0^L \hat{q}_n \frac{\partial(\sigma\phi)}{\partial x} dx - \int_0^L \hat{h}_n \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial x} dx \\ \quad + \sigma\phi(L)\hat{q}_{L,n}(t) - \sigma\phi(0)\hat{q}_{0,n}(t) + \rho\phi(L)\hat{h}_{L,n}(t) - \rho\phi(0)\hat{h}_{0,n}(t) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{II.5.3})$$

et nous définissons $\hat{q}_{0,n}(t)$ et $\hat{q}_{L,n}(t)$ comme dans (II.3.23) où \hat{h}^0 et \hat{q}^0 sont remplacés respectivement par \hat{h}_n^0 et \hat{q}_n^0 . Ainsi on obtien l'estimation de l'énergie (II.3.44) pour (\hat{h}_n, \hat{q}_n) , qui peut être réécrite sous la forme :

$$E^n(t_{k+1}) \leq \prod_{i=0}^k (1 - \Theta^k) E^n(0), \quad (\text{II.5.4})$$

où

$$E^n(t) = \int_0^L (l\rho\hat{h}_n^2(t) + \hat{q}_n^2(t)) dx = \|\sqrt{l\rho}\hat{h}_n(t)\|_{2,\Omega}^2 + \|\hat{q}_n(t)\|_{2,\Omega}^2,$$

Θ^k et t_k sont définis dans le Théorème II.3.1.

Puisque l'espace $L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ est un espace de Banach reflexif pour tout $T > 0$, il existe une sous-suite encore notée par $((\hat{h}_n, \hat{q}_n))$ qui converge faiblement vers (\hat{h}, \hat{q}) dans l'espace $L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$. D'autre part, par le bais de (II.3.5) et (II.5.4) nous avons que

$$\begin{pmatrix} l\hat{h}_n \\ \hat{q}_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \hat{q}_n \\ \sigma\hat{q}_n + \rho\hat{h}_n \end{pmatrix} \quad (\text{II.5.5})$$

sont bornés dans $H(\text{div}, Q)$. Donc, nous déduisons de [12] que $\hat{q}_{0,n}(t)$, $\hat{q}_{L,n}(t)$, $\hat{h}_n(t, 0)$ et $\hat{h}_n(t, L)$ appartiennent à l'espace $H^{-\frac{1}{2}}[0, T]$. En utilisant la continuité de la fonction trace, nous obtenons que $\hat{q}_{0,n}(t)$, $\hat{q}_{L,n}(t)$, $\hat{h}_n(t, 0)$ et $\hat{h}_n(t, L)$ sont aussi bornés dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}[0, T]$. Ainsi, du fait que l'espace L^2 est faiblement compact, il existe des sous suites encore notées par $\hat{q}_{0,n}$, $\hat{q}_{L,n}$, $\hat{h}_n(t, 0)$ et $\hat{h}_n(t, L)$ convergeant faiblement respectivement vers \hat{q}_0 , \hat{q}_L , \hat{h}_0 et \hat{h}_L dans $H^{-\frac{1}{2}}[0, T]$. Pour passer à la limite dans l'équation (II.5.3-a), on pose

$$\psi(x, t) = g(t)v(x), \quad g \in H_T^1[0, T], \quad v \in H^1(\Omega). \quad (\text{II.5.6})$$

où

$$H_T^1(0, T) = \{\Phi \in H^1(0, T), \Phi(T) = 0\}.$$

En intégrant par parties par rapport au temps et en faisant tendre n vers ∞ , on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\hat{h}, l\rho v)_\Omega \partial_t g \, dt - g(0) \langle \hat{h}^0(x), l\rho v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} - \int_0^T (\hat{q}, \partial_x(\rho v))_\Omega g \, dt \\ & = -\rho v(L) \langle \hat{q}_L(t), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \rho v(0) \langle \hat{q}_0(t), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{II.5.7})$$

Ainsi, en choisissant (g, v) dans l'espace $\mathcal{D}(0, T) \times \mathcal{D}(\Omega)$, nous obtenons l'équation de conservation de la masse

$$l\partial_t \hat{h} + \partial_x \hat{q} = 0. \quad (\text{II.5.8})$$

Soit

$$V^T = \{gv, (g, v) \in H_T^1(0, T) \times H^1(\Omega)\}.$$

Ainsi, en multipliant (II.5.8) par $gv \in V^T$, on a

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\hat{h}, l\rho v)_\Omega \partial_t g \, dt - g(0) \langle \hat{h}(0, x), l\rho v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} - \int_0^T (\hat{q}, \partial_x(\rho v))_\Omega g \, dt \\ & = \rho v(0) \langle \hat{q}(t, 0), g \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} - \rho v(L) \langle \hat{q}(t, L), g \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)}. \end{aligned} \quad (\text{II.5.9})$$

En identifiant (II.5.7) et (II.5.9), on obtient

$$\hat{h}(0, x) = \hat{h}^0(x), \quad \hat{q}(t, 0) = q_0(t), \quad \hat{q}(t, L) = q_L(t).$$

La même méthode appliquée à l'équation de conservation de la quantité de mouvement (II.5.3-b) donne

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\hat{q}, v)_\Omega \partial_t g \, dt - g(0) \langle \hat{q}^0(x), v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} - \int_0^T (\hat{q}, \partial_x(\sigma\psi))_\Omega g \, dt - \int_0^T (\hat{h}, \partial_x(\rho\psi))_\Omega g \, dt \\ & = -\sigma v(L) \langle \hat{q}_L(t), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} + \sigma v(0) \langle \hat{q}_0(t), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} \\ & + \rho v(0) \langle \hat{h}_0(t), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} - \rho v(L) \langle \hat{h}_L(t), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)}. \end{aligned} \quad (\text{II.5.10})$$

Donc, en prenant (g, v) dans l'espace $\mathcal{D}(0, T) \times \mathcal{D}(\Omega)$, nous obtenons l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\partial_t \hat{q} + \sigma \partial_x \hat{q} + \rho \partial_x \hat{h} = 0. \quad (\text{II.5.11})$$

Les conditions initiales et celles des bouts sont obtenues par une identification comme celle de l'équation de conservation de la masse

$$\hat{q}(0, x) = \hat{q}^0, \quad \hat{h}(t, L) = \hat{h}_L(t), \quad \hat{h}(t, 0) = \hat{h}_0(t). \quad (\text{II.5.12})$$

Puisque $E(t) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E^n(t)$, alors l'inégalité (II.5.2) est obtenue à partir de l'inégalité (II.5.4). Ainsi la preuve du Théorème est complète. \square

II.5.2 Un résultat de régularité pour le réseau

Dans cette section, nous donnons la preuve du Théorème II.2.1. **Preuve** Puisque $(\hat{h}_i^0, \hat{q}_i^0) \in (L^2(]0, L_i])^2$, il existe une sous suite $(\hat{h}_{i,n}, \hat{q}_{i,n})_{n \geq 0} \subset C^0(]0, L_i])^2$ telle que

$$\hat{h}_{i,n}^0 \longrightarrow \hat{h}_i^0 \quad \text{et} \quad \hat{q}_{i,n}^0 \longrightarrow \hat{q}_i^0 \quad \text{in} \quad L^2(]0, L_i]), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

Pour tout $n \geq 0$, nous définissons $\hat{q}_{1,0,n}(t)$, $\hat{q}_{2,L_2,n}(t)$ et $\hat{q}_{3,L_3,n}(t)$ comme dans (II.2.32), où \hat{q}_i et \hat{h}_i sont remplacés respectivement par $\hat{q}_{i,n}$ et $\hat{h}_{i,n}$.

On considère la formulation variationnelle suivante : pour tout $(\psi_i, \phi_i) \in (H^1(\Omega_i))^2$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left[l_i \gamma_i \psi_i \frac{\partial \hat{h}_{i,n}}{\partial t} - \hat{q}_{i,n} \frac{\partial(\psi_i \gamma_i)}{\partial x} \right] dx + \sum_{i=1}^2 \left(\gamma_i \psi_i(x_i) - \gamma_3 \psi_3(x_3) \right) \epsilon_i \hat{q}_{i,n}(t, x_i) \\ & - \gamma_1 \psi_1(0) \hat{q}_{1,0,n}(t) + \gamma_2 \psi_2(L_2) \hat{q}_{2,L_2,n}(t) + \gamma_3 \psi_3(L_3) \hat{q}_{3,L_3,n}(t) = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.5.13})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left[\delta_i \phi_i \frac{\partial \hat{q}_{i,n}}{\partial t} - 2 \hat{q}_{i,n} \frac{\partial(\beta_i \phi_i)}{\partial x} - \hat{h}_{i,n} \frac{\partial(\gamma_i \phi_i)}{\partial x} \right] dx - \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \phi_i(x_i) \gamma_i \hat{h}_{i,n}(t, x_i) \\ & + 2 \left(\beta_1 \hat{q}_{1,n}(t, x_1) + \gamma_1 \hat{h}_{1,n}(t, x_1) \right) \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \phi_i(x_i) - 2 \beta_1 \phi_1(0) \hat{q}_{1,0,n}(t) + 2 \beta_2 \phi_2(L_2) \hat{q}_{2,L_2,n}(t) \\ & + 2 \beta_3 \phi_3(L_3) \hat{q}_{3,L_3,n}(t) - \gamma_1 \phi_1(0) \hat{h}_{1,0,n}(t) + \gamma_2 \phi_2(L_2) \hat{h}_{2,L_2,n}(t) + \gamma_3 \phi_3(L_3) \hat{h}_{3,L_3,n}(t) = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.5.14})$$

On obtient ainsi l'estimation de l'énergie (II.4.26) pour $(\hat{h}_{i,n}, \hat{q}_{i,n})$, qui peut être réécrite sous la forme :

$$E^n(t_{k+1}) \leq \prod_{i=0}^k (1 - \Theta^k) E^n(0), \quad (\text{II.5.15})$$

où $E^n(t) = \sum_{i=1}^3 \int_0^{L_i} \left(l_i \gamma_i \hat{h}_{i,n}^2 + \delta_i \hat{q}_{i,n}^2 \right) dx = \sum_{i=1}^3 \left(\|\sqrt{l_i \gamma_i} \hat{h}_{i,n}(t)\|_{2, \Omega_i}^2 + \|\sqrt{\delta_i} \hat{q}_{i,n}(t)\|_{2, \Omega_i}^2 \right)$, Θ^k et t_k sont définis dans le Théorème II.5.1. En utilisant (II.2.16) et (II.5.15), nous obtenons que

$$\begin{pmatrix} l_i \hat{h}_{i,n} \\ \hat{q}_{i,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \hat{q}_{i,n} \\ \sigma \hat{q}_{i,n} + \rho \hat{h}_{i,n} \end{pmatrix} \quad (\text{II.5.16})$$

sont bornés dans l'espace $H(\text{div}, Q_i)$. Nous déduisons de [12] que $\hat{q}_{i,0,n}(t)$, $\hat{q}_{i,L_i,n}(t)$, $\hat{h}_{i,n}(t, 0)$ et $\hat{h}_{i,n}(t, L_i)$ appartiennent à l'espace $H^{-\frac{1}{2}}[0, T]$. En utilisant la continuité de la fonction trace, on

déduit que $\hat{q}_{i,0,n}(t)$, $\hat{q}_{i,L_i,n}(t)$, $\hat{h}_{i,n}(t, 0)$ et $\hat{h}_{i,n}(t, L_i)$ sont aussi bornés dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}[0, T]$. Ainsi, du fait de la faible compacité des normes dans l'espace L^2 , il existe des sous suites encore notées $\hat{q}_{i,0,n}(t)$, $\hat{q}_{i,L_i,n}(t)$, $\hat{h}_{i,n}(t, 0)$ et $\hat{h}_{i,n}(t, L_i)$, qui convergent faiblement respectivement vers $\hat{q}_{i,0}$, \hat{q}_{i,L_i} , $\hat{h}_{i,0}$ et \hat{h}_{i,L_i} dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}[0, T]$.

Considérons l'équation de conservation de la masse (II.5.13). Pour passer à la limite dans (II.5.13), on pose

$$\psi_i(t, x) = g_i(t)v_i(x), \quad g_i \in H_T^1[0, T], \quad v_i \in H^1(\Omega_i), \quad (\text{II.5.17})$$

où $H_T^1(0, T) = \{\Phi \in H^1(0, T), \Phi(T) = 0\}$.

En intégrant par parties par rapport au temps et en faisant tendre n vers ∞ , on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \left[- \int_0^T (\hat{h}_i, l_i \gamma_i v_i)_{\Omega_i} \partial_t g \, dt - g(0) \langle \hat{h}_i^0(x), l_i \gamma_i \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} - \int_0^T (\hat{q}_i, \partial_x(\gamma_i v_i))_{\Omega_i} g \, dt \right] \\ &= - \sum_{i=1}^2 \left(\gamma_i v_i(x_i) - \gamma_3 v_3(x_3) \right) \epsilon_i \langle \hat{q}_i(t, x_i), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} \\ & \quad + \langle \gamma_1 v_1(0) \hat{q}_{1,0}(t) - \gamma_2 v_2(L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) - \gamma_3 v_3(L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)}. \end{aligned} \quad (\text{II.5.18})$$

D'où, en choisissant (g, v_i) dans l'espace $\mathcal{D}(0, T) \times \mathcal{D}(\Omega_i)$, nous obtenons l'équation de conservation de la masse

$$l_i \partial_t \hat{h}_i + \partial_x \hat{q}_i = 0. \quad (\text{II.5.19})$$

Soit $V_i^T = \{g v_i, (g, v_i) \in H_T^1(0, T) \times H^1(\Omega_i)\}$. Ainsi, en multipliant (II.5.19) par $\psi_i \in V_i^T$ puis en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\hat{h}_i, l_i \gamma_i v_i)_{\Omega} \partial_t g \, dt - g(0) \langle \hat{h}_i(0, x), \gamma_i v_i \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} - \int_0^T (\hat{q}_i, \partial_x(\gamma_i v_i))_{\Omega} g \, dt \\ & \quad - \gamma_i v_i(0) \langle \hat{q}_i(t, 0), g \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} + \gamma_i v_i(L_i) \langle \hat{q}_i(t, L_i), g \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} = 0, \end{aligned}$$

et pour le réseau,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \left[\int_0^T \left(- (\hat{h}_i, l_i \gamma_i v_i)_{\Omega} \partial_t g - (\hat{q}_i, \partial_x(\gamma_i v_i))_{\Omega} g \right) dt - g(0) \langle \hat{h}_i(0, x), \gamma_i v_i \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \right] \\ &= - \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \gamma_i v_i(x_i) \langle \hat{q}_i(t, x_i), g \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} + \gamma_1 v_1(0_1) \langle \hat{q}_1(t, 0), g \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} \\ & \quad - \gamma_2 v_2(L_2) \langle \hat{q}_2(t, L_2), g \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)} - \gamma_3 v_3(L_3) \langle \hat{q}_3(t, L_3), g \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0, T), H^{\frac{1}{2}}(0, T)}. \end{aligned} \quad (\text{II.5.20})$$

En identifiant (II.5.18) et (II.5.20), on obtient

$$\begin{aligned} \hat{h}_i(0, x) = \hat{h}_i^0(x), \quad \hat{q}_1(t, 0) = \hat{q}_{1,0}(t), \quad \hat{q}_2(t, L_2) = \hat{q}_{2,L_2}(t), \quad \hat{q}_3(t, L_3) = \hat{q}_{3,L_3}(t), \\ \sum_{i=1}^2 \epsilon_i \left(\gamma_i v_i(x_i) - \gamma_3 v_3(x_3) \right) \hat{q}_i(t, x_i) = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i \gamma_i v(x_i)_i \hat{q}_i(t, x_i). \end{aligned} \quad (\text{II.5.21})$$

Ainsi, de l'équation (II.5.21), on obtient la conservation du débit à la jonction,

$$\sum_{i=1}^3 \epsilon_i \hat{q}_i(t, x_i) = 0.$$

La méthode précédente appliquée à l'équation de conservation de la quantité de mouvement (II.5.14), donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left[- \int_0^T (\hat{q}_i, \delta_i v_i)_{\Omega_i} \partial_t g dt - g(0) \langle \hat{q}_i^0(x), \delta_i v_i \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0,T), H^{\frac{1}{2}}(0,T)} \right. \\ \left. - \int_0^T (\hat{q}_i, 2\partial_x(\beta_i v_i g))_{\Omega_i} dt - \int_0^T (\hat{h}_i, \partial_x(\gamma_i v_i g))_{\Omega_i} dt \right] \\ + 2 \sum_{i=1}^3 \epsilon_i v_i(x_i) \langle \beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0,T), H^{\frac{1}{2}}(0,T)} \\ - \sum_{i=1}^3 \epsilon_i v_i(x_i) \gamma_i \langle \hat{h}_i(t, x_i), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0,T), H^{\frac{1}{2}}(0,T)} \\ = \langle -2\beta_2 v_2(L_2) \hat{q}_{2,L_2}(t) - 2\beta_3 v_3(L_3) \hat{q}_{3,L_3}(t) + 2\beta_1 v_1(0) \hat{q}_{1,0}(t), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0,T), H^{\frac{1}{2}}(0,T)} \\ + \langle \gamma_1 v_1(0) \hat{h}_{1,0}(t) - \gamma_2 v_2(L_2) \hat{h}_{2,L_2}(t) - \gamma_3 v_3(L_3) \hat{h}_{3,L_3}(t), g(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(0,T), H^{\frac{1}{2}}(0,T)}. \end{aligned} \quad (\text{II.5.22})$$

D'où, on obtient l'équation de conservation de la quantité du mouvement :

$$\partial_t \hat{q}_i + \sigma_i \partial_x \hat{q}_i + \rho_i \partial_x \hat{h}_i = 0. \quad (\text{II.5.23})$$

Les conditions initiales et celles des bouts sont obtenues par une identification comme celle de l'équation de conservation de la masse

$$\begin{aligned} \hat{q}_i(0, x) = \hat{q}_i^0, \quad \hat{h}_3(t, L_3) = \hat{h}_{3,L_3}(t), \quad \hat{h}_2(t, L_2) = \hat{h}_{2,L_2}(t), \quad \hat{h}_1(t, 0) = \hat{h}_{1,0}(t), \\ 2 \left(\beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1) \right) \sum_{i=1}^3 \epsilon_i v_i(x_i) - \sum_{i=1}^3 \epsilon_i v_i(x_i) \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i) = 2 \sum_{i=1}^3 \epsilon_i v_i(x_i) \beta_i \hat{q}_i(t, x_i) \\ + \sum_{i=1}^3 \epsilon_i v_i(x_i) \gamma_i \hat{h}_i(t, x_i). \end{aligned} \quad (\text{II.5.24})$$

De l'équation (II.5.24),

- si $v_1(x_1) = v_2(x_2) = 0$, nous avons

$$\gamma_3 \hat{h}_3(t, x_3) + \beta_3 \hat{q}_3(t, x_3) = \beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1)$$

- si $v_1(x_1) = v_3(x_3) = 0$, nous avons

$$\gamma_2 \hat{h}_2(t, x_2) + \beta_2 \hat{q}_2(t, x_2) = \beta_1 \hat{q}_1(t, x_1) + \gamma_1 \hat{h}_1(t, x_1).$$

D'ou, nous obtenons la continuité de l'énergie à la jonction. Finalement, puisque $E(t) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E^n(t)$, l'estimation (II.2.36) provient de (II.5.15). Ainsi s'achève la preuve du Théorème II.2.1. □

Chapitre III

Le contrôle d'un réseau de biefs en cascade

Sommaire

III.1 Le modèle du réseau et l'état d'équilibre	52
III.1.1 L'état d'équilibre	54
III.1.2 Le modèle linéaire	54
III.1.3 Les variables caractéristiques	55
III.1.4 Résultat principal	55
III.2 Construction du contrôle pour un bief	57
III.2.1 L'estimation d'énergie a priori	59
III.2.2 Construction des contrôles et processus de stabilisation	60
III.3 Construction des contrôles du réseau en cascade	63
III.3.1 L'estimation de l'énergie et la construction des contrôles	64
III.3.2 Preuve du résultat principal (Théorème III.1.1)	68

Introduction

A cause de la rareté des ressources en eau, la gestion de l'eau et la limitation de ses pertes sont devenues des problèmes à grande attraction pour la communauté scientifique. Même si du point de vue théorique les chercheurs ont apporté des solutions à certains problèmes, l'application effective de ces solutions dans les situations réelles pose problème [27]. D'ailleurs dans [15], *Gowing* évoque les limitations quant aux technologies de contrôles des ressources en eau. Cependant, il y a des problèmes qui n'ont pas encore été résolus, comme indiqué par *Bastin et al* [3]. Ces problèmes concernent aussi bien les applications technologiques que les défis mathématiques. La résolution mathématique de la gestion de l'eau dans les rivières et canaux à ciel ouvert, se fait en général à l'aide des équations de Baré de Saint-Venant. En fait, elles décrivent la dynamique des rivières et canaux à ciel ouvert. Elles sont composées d'un système hyperbolique de deux équations aux dérivées partielles, une loi de conservation de la masse et une loi de conservation de la quantité de mouvement.

Pendant longtemps, la question du contrôle du niveau d'eau et de débit dans les canaux ouverts a été abordé dans la littérature. Diverses méthodes ont été utilisées pour la conception des contrôleurs frontières qui satisfont les agriculteurs ou les exigences de navigabilité. Parmi ces différentes méthodes, le contrôle linéaire et quadratique (LQ) qui a été particulièrement développé et étudié par *Balogun et al.* [2], *Malaterre et al.* [29], *Weyer* [46] et *Chen et al.* [7]. *Weyer* [46] a considéré un contrôle d'un canal d'irrigation dans lequel les niveaux d'eau sont contrôlés en utilisant les portes situées le long du canal. Un problème de contrôle LQ pour les systèmes linéaires symétriques en dimension finie a été étudié par *Chen et al.* [7]. La méthode de contrôle PI (proportionnel et intégral) a été utilisé par *Xu et Sallet* [47] pour proposer un contrôleur frontière, en utilisant un modèle d'équations aux dérivées partielles linéarisé autour d'un état stable. Une telle approche a été considérée dans [27], où *Litrico et al.* exposent et valident une méthodologie pour la conception efficace des contrôles automatiques de canaux d'irrigation. L'analyse de Lyapunov et l'approche des invariants de Riemann sont aussi utilisées pour la conception des contrôles (voir *Leugering et al.* [19], *Halleux et al.* [18], *Hui et Xi* [6] et *Bastin et al.* [4]).

Pour les réseaux de canaux à ciel ouvert, de nombreux résultats ont été démontrés par des chercheurs utilisant certaines des méthodes mentionnées ci-dessus. Par exemple, *Halleux et al.* [18] ont utilisé l'approche de Riemann pour en déduire un contrôle de stabilisation, pour un réseau constitué de biefs interconnectés en cascade (voir aussi *Hui et Xi* [6] et sa bibliographie). *Bastin et al.* [4] ont utilisé l'analyse de Lyapunov pour étudier la stabilité exponentielle (en norme L2) des solutions classiques des équations de Saint-Venant linéarisées pour le même type de réseau mais avec un fond incliné. *Leugering et al.* [19] ont étudié la stabilisation et la nulle contrôlabilité de perturbations autour d'un état d'équilibre pour un réseau étoilé. Ce

dernier type de réseau est aussi considéré par *Li* [22]

Concernant le réseau constitué de plusieurs biefs interconnectés en cascade, nous avons remarqué, du point de vue théorique, deux approches que sont : les invariants de Riemann [18] et l'analyse de Lyapunov [4, 6]. Le but de ce chapitre est d'appliquer l'approche donnée au chapitre II à ce réseau. L'approche est appliquée à un réseau de deux biefs, mais elle peut être généraliser. Le fait de choisir un autre type de réseau requiert un traitement différent des jonctions où les biefs se rencontrent. D'ailleurs ces jonctions sont en même temps considérées comme des bouts où il faut prescrire des conditions aux bords. D'autre part, les équations de Saint-Venant considérées dans ce chapitre sont sous la forme non-conservative et les vitesses au niveau des bouts sont les quantités à contrôler.

L'approche consiste à exprimer le taux de variation de l'énergie du problème linéarisé, comme un polynôme du second degré en termes des vitesses au niveau des bouts. Le polynôme est traité de manière à construire des contrôles frontières qui permettent au débit et au niveau de l'eau d'approcher un état stable donné. Après avoir construit les contrôles, ils sont appliqués numériquement à un problème réel, qui est non linéaire, afin d'étudier leur robustesse (voir Chapitre IV).

Le chapitre est organisé comme suit : Dans la section 1, le réseau est présenté. L'état d'équilibre et le modèle linéaire sont donnés. On y donne ensuite les variables caractéristiques sur lesquels les contrôles sont construits. Enfin nous formulons le résultat principal en spécifiant les contrôles rétroactifs frontières et la décroissance correspondante de l'énergie. La section 2 est consacrée à la présentation de l'approche en prouvant un résultat de stabilisation pour un bief, tandis que le cas du réseau est étudié à la section 3.

III.1 Le modèle du réseau et l'état d'équilibre

Le réseau peut être donné par la Figure III.1 ou par n'importe quel type de réseau où plusieurs biefs sont interconnectés en cascade (voir [4, 18]). Dans la Figure III.1, le point M est la jonction où les deux biefs se rencontrent. Le modèle du réseau est donné par les équations de Saint-Venant unidimensionnelles sur chaque bief ($i = 1, 2$) et une condition de jonction sur la conservation du débit au niveau de M . La donnée d'une seule condition de jonction se justifie par le fait qu'il y a un contrôle à prescrire au niveau de M . La jonction est en même temps un bout sur lequel il faut prescrire un contrôle. Les variables suivantes sont utilisées : h_i est la hauteur de la colonne d'eau (m), v_i est la vitesse du fluid (ms^{-1}) et L_i est la longueur du bief. Notons que la largeur est supposée être la même pour tous les biefs et que g est la constante

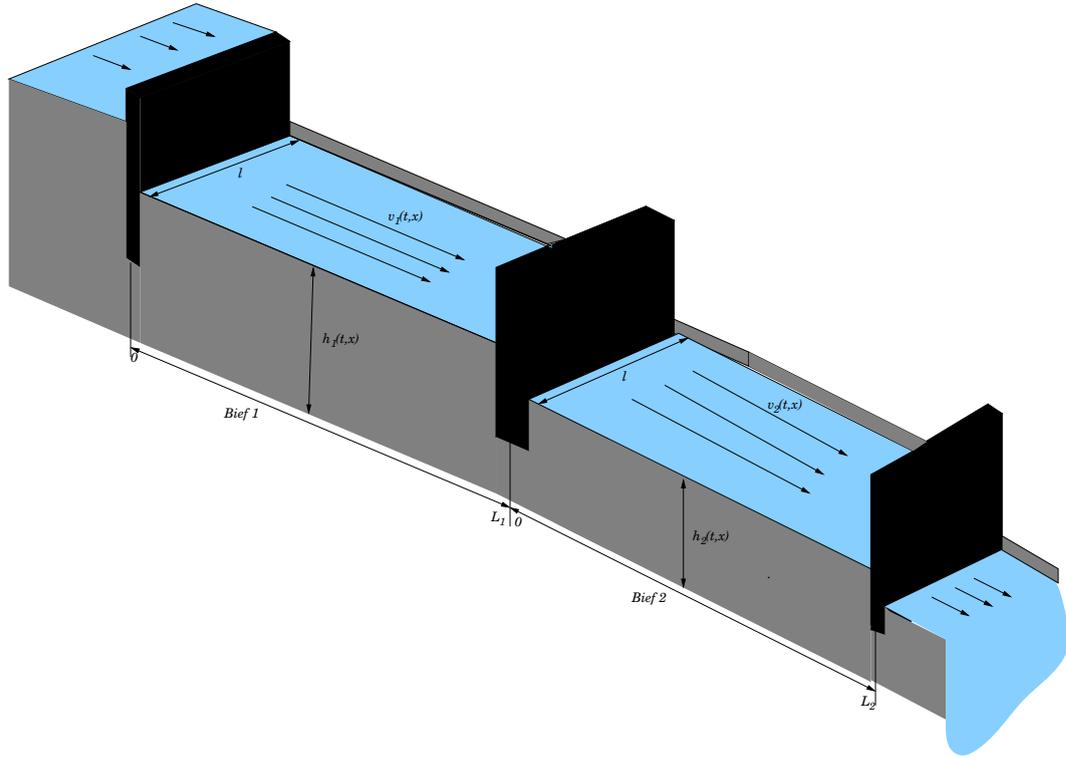


Figure III.1 – Le réseau en cascade

gravitationnelle. Les équations de Saint-Venant non conservatives sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial(v_i h_i)}{\partial x} = 0, & \text{dans } [0, L_i] \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial x} + g \frac{\partial h_i}{\partial x} = 0, & \text{dans } [0, L_i] \end{cases} \quad (\text{III.1.1})$$

avec une condition sur la conservation du débit au niveau de M

$$h_1(t, L_1) v_1(t, L_1) = h_2(t, 0) v_2(t, 0), \quad (\text{III.1.2})$$

des conditions initiales

$$h_i(0, x) = h_i^0(x), \quad v_i(0, x) = v_i^0(x), \quad (\text{III.1.3})$$

et des conditions aux bouts

$$v_1(t, 0) = v_{1,0}(t), \quad v_1(t, L_1) = v_{1,L_1}(t), \quad v_2(t, L_2) = v_{2,L_2}(t). \quad (\text{III.1.4})$$

Les vitesses aux bouts des biefs sont les quantités à contrôler. Cependant, comme dans le Chapitre II, les contrôles sont construits à partir d'un modèle linéaire et ensuite appliqués numériquement au modèle non linéaire ci-dessus (voir Chapitre IV). Le modèle linéaire est

obtenu à partir de la linéarisation du modèle non linéaire (III.1.1)-(III.1.4) autour d'un état d'équilibre désiré. On suppose que la perturbation est très faible devant l'état d'équilibre (\bar{h}_i, \bar{v}_i) .

III.1.1 L'état d'équilibre

Nous voulons atteindre l'état d'équilibre (\bar{h}_i, \bar{v}_i) , par le biais des contrôles lorsque le temps tend vers l'infini. On déduit cet état d'équilibre à partir du modèle (III.1.1)-(III.1.4) en raisonnant comme dans la section II.1.2. Ainsi, (\bar{h}_i, \bar{v}_i) est la solution :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x} = 0, \quad \text{dans } [0, L_i], \\ (b) & \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial x} = 0, \quad \text{dans } [0, L_i], \\ (c) & \bar{h}_1(L_1)\bar{v}_1(L_1) = \bar{h}_2(0)\bar{v}_2(0) \quad \text{sur } M. \end{array} \right. \quad (\text{III.1.5})$$

Quand le temps est suffisamment grand, nous voulons avoir des hauteurs d'eau différentes dans les biefs. Pour ce faire, grâce à la direction de l'écoulement donnée par la Figure III.1, l'état d'équilibre est choisi afin d'avoir

$$\bar{h}_2 < \bar{h}_1. \quad (\text{III.1.6})$$

Pour déterminer l'état d'équilibre (III.1.5), on donne \bar{h}_1 , \bar{v}_1 et \bar{h}_2 . Ensuite par l'utilisation de la condition sur la conservation du débit (III.1.5.c), on déduit \bar{v}_2 . D'autre part, en utilisant la direction de l'écoulement (Figure III.1) et le régime d'écoulement fluvial, on a respectivement

$$\bar{v}_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{g\bar{h}_i} > \bar{v}_i. \quad (\text{III.1.7})$$

III.1.2 Le modèle linéaire

Nous introduisons l'état résiduel (\hat{h}_i, \hat{v}_i) comme la différence entre l'état présent (h_i, v_i) et l'état stationnaire (\bar{h}_i, \bar{v}_i) : $\hat{h}_i(t, x) = h_i(t, x) - \bar{h}_i(x)$, $\hat{v}_i(t, x) = v_i(t, x) - \bar{v}_i(x)$. Ensuite nous supposons que $|\hat{h}_i| \ll \bar{h}_i$ et $|\hat{v}_i| \ll \bar{v}_i$ pour linéariser (III.1.1)-(III.1.4). En suivant les étapes de la section II.2.1, on déduit que la solution du système linéaire (\hat{h}_i, \hat{v}_i) satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \bar{h}_i \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} + \bar{v}_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \\ (b) & \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x} + g \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, \\ (c) & \bar{v}_1 \hat{h}_1(t, L_1) + \bar{h}_1 \hat{v}_1(t, L_1) = \bar{v}_2 \hat{h}_2(t, 0) + \bar{h}_2 \hat{v}_2(t, 0) \quad \text{sur } M, \end{array} \right. \quad (\text{III.1.8})$$

avec les conditions initiales

$$\hat{h}_i(0, x) = \hat{h}_i^0(x), \quad \hat{v}_i(0, x) = \hat{v}_i^0(x), \quad (\text{III.1.9})$$

et les conditions aux bouts

$$\hat{v}_1(t, 0) = \hat{v}_{1,0}(t), \quad \hat{v}_1(t, L_1) = \hat{v}_{1,L_1}(t), \quad \hat{v}_2(t, L_2) = \hat{v}_{2,L_2}(t). \quad (\text{III.1.10})$$

Les fonctions $\hat{v}_{1,0}(t)$, $\hat{v}_{1,L_1}(t)$ et $\hat{v}_{2,L_2}(t)$ sont les contrôles à construire afin d'obtenir la convergence exponentielle de (\hat{h}_i, \hat{v}_i) vers zéro. Ces contrôles sont construits par le biais des variables caractéristiques et d'une estimation d'énergie.

III.1.3 Les variables caractéristiques

En agissant comme à la section II.2.2 avec cette fois ci

$$U_i = \begin{pmatrix} \hat{h}_i \\ \hat{v}_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_i = \begin{pmatrix} \bar{v}_i & \bar{h}_i \\ g & \bar{v}_i \end{pmatrix},$$

on a les variables caractéristiques suivantes :

$$w_{i1} = \hat{v}_i - \hat{h}_i \sqrt{\frac{g}{\bar{h}_i}} \quad \text{et} \quad w_{i2} = \hat{v}_i + \hat{h}_i \sqrt{\frac{g}{\bar{h}_i}}. \quad (\text{III.1.11})$$

avec leur vitesse respective :

$$\lambda_{i1} = \bar{v}_i - \sqrt{g\bar{h}_i} \quad \text{et} \quad \lambda_{i2} = \bar{v}_i + \sqrt{g\bar{h}_i}.$$

D'autre part, le régime fluvial et la direction de l'écoulement donnent respectivement,

$$\lambda_{i1} < 0 < \lambda_{i2} \quad \text{et} \quad \lambda_{i1} + \lambda_{i2} \geq 0. \quad (\text{III.1.12})$$

Grâce aux variables caractéristiques (III.1.11), le système linéaire (III.1.8.a)-(III.1.8.b) est réécrit comme deux équations de transport :

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = \frac{\partial w_{ij}}{\partial t} + \lambda_{ij} \frac{\partial w_{ij}}{\partial x} = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (\text{III.1.13})$$

III.1.4 Résultat principal

Pour construire les contrôles rétroactifs, nous exprimons les variables caractéristiques sortantes au niveau des bouts en fonction de la condition initiale et de la solution au niveau des bouts en un temps antérieur. Pour les biefs 1 et 2, w_{11} et w_{22} sont respectivement les

variables caractéristiques sortantes au niveau des bouts amont $x = 0$ et aval $x = L_2$. En ce qui concerne la jonction M qui est en même temps un bout aussi, w_{12} et w_{21} sont les variables caractéristiques sortantes. Dans la section III.3, nous verrons que les variables caractéristiques sortantes au niveau des bouts du réseau satisfont :

$$\begin{pmatrix} w_{11}(t, 0) \\ w_{22}(t, L_2) \\ w_{12}(t, L_1) \\ w_{21}(t, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.1.14})$$

où les $b_i, i = 1, 2, 3, 4$ dépendent de la condition initiale et de la solution au niveau des bouts en un temps antérieur $\tau = t - \delta t$ avec $\delta t \geq \min\left(\frac{L_1}{\lambda_{12}}, \frac{L_2}{\lambda_{22}}\right)$.

Considérons $\theta_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1]$ une fonction satisfaisant :

$$\theta_1(t) \geq \frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{12}}, \quad (\text{III.1.15})$$

et $\theta_2, \theta_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1]$ deux fonctions arbitraires. On choisit les contrôles rétroactifs comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{v}_{1,0}(t) &= -\frac{b_1(t)}{2} \left(\sqrt{1 - \theta_1(t)} - 1 \right), \\ \hat{v}_{2,L_2}(t) &= -\frac{b_2(t)}{2} \left(\sqrt{1 - \theta_2(t)} - 1 \right), \\ \hat{v}_{1,L_1}(t) &= \frac{\gamma(t)}{2\sigma} \left(\sqrt{1 - \theta_3(t)} - 1 \right), \end{aligned} \quad (\text{III.1.16})$$

où,

$$\sigma = \bar{h}_1 |\lambda_{11}| \left(1 + \frac{|\lambda_{11}|}{\lambda_{22}} \right), \quad \gamma(t) = \bar{h}_1 |\lambda_{11}| \left(1 - \frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{22}} \right) b_3(t) + |\lambda_{11}| \sqrt{\bar{h}_1 \bar{h}_2} \left(1 - \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right) b_4(t),$$

et les $b_i, i = 1, 2, 3, 4$, interviennent dans (III.1.14). Ainsi, en posant

$$T = \max \left(\frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, \frac{L_2}{|\lambda_{21}|} \right), \quad (\text{III.1.17})$$

et en définissant l'énergie du fluide dans le réseau par

$$E = \sum_{i=1}^2 E_i, \quad E_i = \int_0^{L_i} \left(g \hat{h}_i^2(t) + \bar{h}_i \hat{v}_i^2(t) \right) dx, \quad (\text{III.1.18})$$

nous avons le résultat principal de ce chapitre :

Théorème III.1.1 Soit $t_k = kT$, $k \in \mathbb{N}$, où T est donné par (III.1.17). Supposons que les conditions données par (III.1.12) sont satisfaites, que la condition initiale $(\hat{h}_i^0, \hat{q}_i^0)$ est continue dans $]0, L_i[$, que $\hat{v}_{1,0}, \hat{v}_{1,L_1}$ et \hat{v}_{2,L_2} satisfont (III.1.16), et que θ_1 satisfait (III.1.15). Alors le système linéaire (III.1.8)-(III.1.10) admet une solution unique (\hat{h}_i, \hat{q}_i) continue dans $[t_k, t_{k+1}] \times]0, L_i[$ telle que l'énergie décroît dans $[t_k, t_{k+1}]$ et vérifie :

$$E(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k)E(t_k), \quad (\text{III.1.19})$$

où E est donné par (III.1.18) et

$$\begin{aligned} \Theta^k &= \min(\Gamma_1^k, \Gamma_2^k) \in [0, 1[, \\ \Gamma_1^k &= \min\left(\inf_{x \in]0, L_1[} \left(\theta_1\left(t_k + \frac{x}{|\lambda_{11}|}\right) - \frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{12}}\right), 4\bar{v}_1 \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\lambda_{22}\lambda_{12}}\right), \\ \Gamma_2^k &= \min\left(\inf_{x \in]0, L_2[} \left(\frac{|\lambda_{21}|}{\lambda_{22}}\theta_2\left(t_k + \frac{L_2 - x}{\lambda_{22}}\right) + \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}}\right), 2\frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\lambda_{22}} \left(1 - \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}}\right)\right). \end{aligned}$$

Ce Théorème est prouvé dans la section III.3.2.

Remarque III.1.1

1. Les contrôles (III.1.16) tendent vers zéro quand le temps tend vers l'infini. Ceci est dû à (III.1.19) et au fait que les contrôles sont construits par le biais de la solution en un temps antérieur.
2. L'estimation (III.1.19) peut être réécrite sous la forme :

$$E(t_k) \leq E(0) \exp(-\mu^k t_k),$$

où $\mu^k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \nu^j$ et $\nu^j = -\ln\left((1 - \Theta^j)^{\frac{1}{t_1}}\right)$. D'ou les fonctions θ peuvent être interpréter comme un taux de stabilisation pour la décroissance exponentielle.

III.2 Construction du contrôle pour un bief

Nous construisons le processus de stabilisation pour un bief, qui permettra d'obtenir la convergence exponentielle des perturbations \hat{h} et \hat{v} vers zéro. Nous considérons les équations de Saint-Venant unidimensionnelles (III.1.1) sans l'indice i représentant le numéro du bief :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(vh)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (\text{III.2.1})$$

avec les conditions initiales

$$h(0, x) = h^0(x), \quad v(0, x) = v^0(x) \quad (\text{III.2.2})$$

et les conditions aux bouts

$$v(t, 0) = v_0(t), \quad v(t, L) = v_L(t). \quad (\text{III.2.3})$$

L'état stationnaire (\bar{h}, \bar{v}) à atteindre, quand le temps est suffisamment grand satisfait

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = 0, \quad \text{in } [0, L], \quad (\text{III.2.4})$$

avec

$$\bar{v} \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{g\bar{h}} > \bar{v}. \quad (\text{III.2.5})$$

Le modèle linéaire obtenu à partir de (III.2.1) (voir la section II.2.1 sur la dérivation d'un modèle linéaire) est

$$\begin{cases} (a) & \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \bar{h} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0, \\ (b) & \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + g \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (\text{III.2.6})$$

avec les conditions initiales

$$\hat{h}(0, x) = \hat{h}^0(x), \quad \hat{v}(0, x) = \hat{v}^0(x), \quad (\text{III.2.7})$$

et les conditions aux bouts

$$\hat{v}(t, 0) = \hat{v}_0(t), \quad \text{et} \quad \hat{v}(t, L) = \hat{v}_L(t). \quad (\text{III.2.8})$$

Les fonctions $\hat{v}_L(t)$ et $\hat{v}_0(t)$ sont les contrôles rétroactifs à construire afin d'obtenir la convergence exponentielle de (\hat{h}, \hat{v}) vers zéro.

Les variables caractéristiques suivantes sont utilisées pour contruire les contrôles :

$$w_1 = \hat{v} - \hat{h} \sqrt{\frac{g}{\bar{h}}} \quad \text{et} \quad w_2 = \hat{v} + \hat{h} \sqrt{\frac{g}{\bar{h}}}, \quad (\text{III.2.9})$$

leur vitesses respectives

$$\lambda_1 = \bar{v} - \sqrt{g\bar{h}} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \bar{v} + \sqrt{g\bar{h}}. \quad (\text{III.2.10})$$

D'autre part le régime fluvial et la direction de l'écoulement donnent respectivement

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0. \quad (\text{III.2.11})$$

Les variables caractéristiques (III.2.9) sont constantes le long des caractéristiques :

$$\frac{dw_j}{dt} = \frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (\text{III.2.12})$$

III.2.1 L'estimation d'énergie a priori

Soit E l'énergie du système linéaire (III.2.6) définie par

$$E(t) = \int_0^L \left(g\hat{h}^2(t) + \bar{h}\hat{v}^2(t) \right) dx. \quad (\text{III.2.13})$$

La formulation variationnelle du système (III.2.6) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (\psi, \phi) \in H^1(]0, L[), \\ \int_0^L g\psi \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} dx - g\bar{h} \int_0^L \hat{v} \frac{\partial(\psi)}{\partial x} dx - g\bar{v} \int_0^L \hat{h} \frac{\partial(\psi)}{\partial x} dx + \\ \quad g\bar{h}\psi(L)\hat{v}_L(t) - g\bar{h}\psi(0)\hat{v}_0(t) + g\bar{v}\psi(L)\hat{h}_L(t) - g\bar{v}\psi(0)\hat{h}_0(t) = 0, \\ \int_0^L \bar{h}\phi \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} dx - \bar{h}\bar{v} \int_0^L \hat{v} \frac{\partial(\phi)}{\partial x} dx - g\bar{h} \int_0^L \hat{h} \frac{\partial(\phi)}{\partial x} dx \\ \quad + \bar{h}\bar{v}\phi(L)\hat{v}_L(t) - \bar{h}\bar{v}\phi(0)\hat{v}_0(t) + g\bar{h}\phi(L)\hat{h}_L(t) - g\bar{h}\phi(0)\hat{h}_0(t) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{III.2.14})$$

avec les conditions aux bords et initiales.

Nous estimons la variation de l'énergie E dans le bief en vue de définir les contrôles $\hat{v}_L(t)$ sur le bout en aval $\{x = L\}$ et $\hat{v}_0(t)$ sur le bout en amont $\{x = 0\}$. Pour cette raison, nous posons $(\psi, \phi) = (\hat{h}, \hat{v})$ dans la formulation variationnelle (III.2.14) pour avoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) &= -\frac{\bar{h}\bar{v}}{2} \hat{v}_L^2(t) - \frac{g\bar{v}}{2} \hat{h}^2(t, L) - g\bar{h}\hat{h}(t, L)\hat{v}_L(t) \\ &\quad + \frac{\bar{h}\bar{v}}{2} \hat{v}_0^2(t) + \frac{g\bar{v}}{2} \hat{h}^2(t, 0) + g\bar{h}\hat{h}(t, 0)\hat{v}_0(t). \end{aligned} \quad (\text{III.2.15})$$

Pour obtenir la convergence des perturbations \hat{h} et \hat{v} vers zéro en temps, nous exprimons le second membre de la variation de l'énergie (III.2.15) comme un polynôme de second degré en terme des vitesses aux bouts. Ensuite, une observation concernant les polynômes du second degré est utilisée pour déduire les contrôles qui assurent la décroissance de l'énergie. Pour

obtenir le polynôme du second degré, on utilise une relation entre le niveau d'eau aux bouts et la vitesse aux bouts.

III.2.2 Construction des contrôles et processus de stabilisation

Les contrôles rétroactifs reposent sur le fait qu'il est possible d'exprimer les niveaux d'eau aux bouts en fonction des vitesses aux bouts et des variables caractéristiques sortantes. Bien que l'expression des variables caractéristiques donnée par (III.2.9) n'est pas la même que celle donnée par (II.3.9), on peut tout de même se servir de la Figure II.5 puisque le principe est le même. Cependant, les valeurs propres sont celles données par (III.2.10). Ainsi, en utilisant le fait que la solution est constante le long des caractéristiques (i.e (III.2.12)) et en se referant à la Figure II.5, on a :

$$\begin{pmatrix} w_1(\tau_2, 0) \\ w_2(\tau_1, L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(\tau_2) \\ b_2(\tau_1) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.2.16})$$

où

$$b_1(\tau_2) = \begin{cases} w_1(0, |\lambda_1|\tau_2), & \tau_2 \leq \frac{L}{|\lambda_1|}, \\ w_1\left(\tau_2 - \frac{L}{|\lambda_1|}, L\right), & \tau_2 \geq \frac{L}{|\lambda_1|}, \end{cases} \quad b_2(\tau_1) = \begin{cases} w_2(0, L - \lambda_2\tau_1), & \tau_1 \leq \frac{L}{\lambda_2}, \\ w_2\left(\tau_1 - \frac{L}{\lambda_2}, 0\right), & \tau_1 \geq \frac{L}{\lambda_2}. \end{cases} \quad (\text{III.2.17})$$

De l'expression des variables caractéristiques (III.2.9), on déduit que :

$$\hat{h}(\tau_1, L) = \left(w_2(\tau_1, L) - \hat{v}_L(\tau_1) \right) \sqrt{\frac{\bar{h}}{g}}, \quad (\text{III.2.18})$$

$$\hat{h}(\tau_2, 0) = \left(-w_1(\tau_2, 0) + \hat{v}_0(\tau_2) \right) \sqrt{\frac{\bar{h}}{g}}. \quad (\text{III.2.19})$$

Grâce aux équations (III.2.18)-(III.2.19), la variation de l'énergie (III.2.15) devient

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = a_1 \hat{v}_0^2(t) - a_1 b_1(t) \hat{v}_0(t) + c_1(t) + a_2 \hat{v}_L^2(t) - a_2 b_2(t) \hat{v}_L(t) + c_2(t), \quad (\text{III.2.20})$$

où,

$$a_1 = \bar{h}\lambda_2, \quad a_2 = \bar{h}|\lambda_1|, \quad c_1(t) = \frac{\bar{h}\bar{v}}{2} b_1^2(t), \quad c_2(t) = -\frac{\bar{h}\bar{v}}{2} b_2^2(t), \quad (\text{III.2.21})$$

$b_1(t)$ et $b_2(t)$ sont donnés par (III.2.17).

Remarque III.2.1 *En considérant les équations de Saint-Venant dans leur forme conserva-*

tive (voir Chapitre II), la variation de l'énergie (II.3.20) ne contient pas les monômes de degré zéro. Dans la formulation non conservative (h, v) , la présence des monômes de degré zéro que sont $c_1(t)$ et $c_2(t)$ dans le second membre de (III.2.20), introduit la condition (III.2.24) sur le taux de stabilisation θ_1 .

Le second membre de (III.2.20) est traité de façon à avoir la décroissance exponentielle de l'énergie vers zéro. Pour ce faire l'observation des polynômes du second degré donnée par le Lemme II.3.1 est utilisée.

Si les vitesses au niveau des bouts sont choisies comme suit :

$$\hat{v}_L(t) = -\frac{b_2(t)}{2} \left(\sqrt{1 - \theta_2(t)} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \hat{v}_0(t) = -\frac{b_1(t)}{2} \left(\sqrt{1 - \theta_1(t)} - 1 \right), \quad (\text{III.2.22})$$

où $\theta_1, \theta_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, 1]$, alors par application du Lemme II.3.1 à (III.2.20), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) &= -\frac{b_1^2(t)}{4a_1} \theta_1(t) + c_1 - \frac{b_2^2(t)}{4a_2} \theta_2(t) + c_2, \\ &= -\frac{\bar{h}}{4} (\lambda_2 \theta_1(t) - 2\bar{v}) b_1^2(t) - \frac{\bar{h}}{4} (|\lambda_1| \theta_2(t) + 2\bar{v}) b_2^2(t). \end{aligned} \quad (\text{III.2.23})$$

On choisit les fonctions θ_1 et θ_2 afin de s'assurer de la négativité du second membre de (III.2.23). Puisque le second terme du second membre de (III.2.23) est négatif pour tout choix de $\theta_2(t)$ dans l'intervalle $]0, 1]$ alors la fonction θ_1 est choisie telle que $\lambda_2 \theta_1(t) - 2\bar{v}$ soit positif, c'est à dire

$$\theta_1(t) \geq \frac{2\bar{v}}{\lambda_2}. \quad (\text{III.2.24})$$

Ce choix de θ_1 est toujours possible, puisque $\frac{2\bar{v}}{\lambda_2} < 1$. En effet, $\frac{2\bar{v}}{\lambda_2} < 1$, parce que la condition (III.2.5) concernant le régime d'écoulement fluvial, implique que $\lambda_2 = \sqrt{g\bar{h}} + \bar{v} > 2\bar{v}$. Ainsi, nous avons le résultat concernant la stabilisation d'un bief :

Théorème III.2.1 *Soit $t_k = kL/|\lambda_1|$, $k \in \mathbb{N}$. Supposons les conditions données par (III.2.11) sont satisfaites, que la condition initiale (\hat{h}^0, \hat{v}^0) est continue dans $]0, L[$, que (\hat{v}_0, \hat{v}_L) satisfait (III.2.22) et que θ_1 satisfait (III.2.24). Alors, le système (III.2.6)-(III.2.8) admet une solution unique (\hat{h}, \hat{v}) continue dans $[t_k, t_{k+1}] \times]0, L[$ telle que l'énergie décroît dans $[t_k, t_{k+1}]$ et vérifie :*

$$E(t_{k+1}) \leq (1 - \Theta^k) E(t_k), \quad (\text{III.2.25})$$

où E est donné par (III.2.13) et

$$\Theta^k = \min \left[\inf_{x \in]0, L[} \left(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_2} \theta_2 \left(t_k + \frac{L-x}{\lambda_2} \right) + \frac{2\bar{v}}{\lambda_2} \right), \inf_{x \in]0, L[} \left(\theta_1 \left(t_k + \frac{x}{|\lambda_1|} \right) - \frac{2\bar{v}}{\lambda_2} \right) \right] \in [0, 1[.$$

Preuve L'existence et l'unicité de la solution sont données par (III.2.9) et (III.2.16). En intégrant (III.2.23) de 0 à t_1 , nous avons

$$\begin{aligned}
 E(L/|\lambda_1|) &= E(0) - \frac{\bar{h}}{2} \int_0^{L/|\lambda_1|} (\lambda_2 \theta_1(t) - 2\bar{v}) b_1^2(t) dt - \frac{\bar{h}}{2} \int_0^{L/|\lambda_1|} (|\lambda_1| \theta_2(t) + 2\bar{v}) b_2^2(t) dt, \\
 E(L/|\lambda_1|) &\leq E(0) - \frac{\bar{h}}{2} \int_0^{L/|\lambda_1|} (\lambda_2 \theta_1(t) - 2\bar{v}) w_1^2(0, |\lambda_1|t) dt \\
 &\quad - \frac{\bar{h}}{2} \int_0^{L/\lambda_2} (|\lambda_1| \theta_2(t) + 2\bar{v}) w_2^2(0, L - \lambda_2 t) dt, \\
 &\leq E(0) - \frac{\bar{h}}{2|\lambda_1|} \int_0^L \left(\lambda_2 \theta_1\left(\frac{x}{|\lambda_1|}\right) - 2\bar{v} \right) w_1^2(0, x) dt \\
 &\quad - \frac{\bar{h}}{2\lambda_2} \int_0^L \left(|\lambda_1| \theta_2\left(\frac{L-x}{\lambda_2}\right) + 2\bar{v} \right) w_2^2(0, x) dt, \\
 &\leq E(0) - \frac{\bar{h}}{2\lambda_2} \int_0^L \left(\lambda_2 \theta_1\left(\frac{x}{|\lambda_1|}\right) - 2\bar{v} \right) w_1^2(0, x) dt \\
 &\quad - \frac{\bar{h}}{2\lambda_2} \int_0^L \left(|\lambda_1| \theta_2\left(\frac{L-x}{\lambda_2}\right) + 2\bar{v} \right) w_2^2(0, x) dt, \\
 &\leq E(0) - \frac{\bar{h}}{2} \int_0^L \left(\theta_1\left(\frac{x}{|\lambda_1|}\right) - \frac{2\bar{v}}{\lambda_2} \right) w_1^2(0, x) dt \\
 &\quad - \frac{\bar{h}}{2} \int_0^L \left(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_2} \theta_2\left(\frac{L-x}{\lambda_2}\right) + \frac{2\bar{v}}{\lambda_2} \right) w_2^2(0, x) dt, \\
 &\leq E(0) - \frac{\bar{h}}{2} \int_0^L [w_2^2(0, x) + w_1^2(0, x)] \Theta^0 dx, \tag{III.2.26}
 \end{aligned}$$

où

$$\Theta^0 = \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \left(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_2} \theta_2\left(\frac{L-x}{\lambda_2}\right) + \frac{2\bar{v}}{\lambda_2} \right), \inf_{x \in]0, L[} \left(\theta_1\left(\frac{x}{|\lambda_1|}\right) - \frac{2\bar{v}}{\lambda_2} \right) \right).$$

Le taux de stabilisation Θ^0 appartient à l'intervalle $[0, 1[$ puisque nous avons $0 < \theta_1\left(\frac{x}{|\lambda_1|}\right) - \frac{2\bar{v}}{\lambda_2} < 1$, grâce à (III.2.24) et au fait que $\frac{2\bar{v}}{\lambda_2} < 1$. D'autre part, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
 w_1^2(0, x) + w_2^2(0, x) &= \left(\hat{v}^0(x) - \hat{h}^0(x) \sqrt{\frac{g}{h}} \right)^2 + \left(\hat{v}^0(x) + \hat{h}^0(x) \sqrt{\frac{g}{h}} \right)^2, \\
 &= 2(\hat{v}^0(x))^2 + \frac{2g}{h} (\hat{h}^0(x))^2, \\
 &= \frac{2}{h} \left(\bar{h} (\hat{v}^0(x))^2 + g (\hat{h}^0(x))^2 \right). \tag{III.2.27}
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous déduisons des inégalités (III.2.26)-(III.2.27) que

$$\begin{aligned} E(L/|\lambda_1|) &\leq E(0) - \Theta^0 \int_0^L \left(\bar{h}(\hat{v}^0(x))^2 + g(\hat{h}^0(x))^2 \right) dx \\ &\leq (1 - \Theta^0)E(0). \end{aligned} \tag{III.2.28}$$

La généralisation de (III.2.28) suivant le temps se fait en considérant la condition initiale au temps $t_k = kL/|\lambda_1|$, en posant

$$\begin{aligned} b_1(t) &= w_1(t_k, |\lambda_1|(t - t_k)), \quad \text{if } t \in]t_k, t_k + L/|\lambda_1|[, \\ b_2(t) &= w_2(t_k, L - \lambda_2(t - t_k)), \quad \text{if } t \in]t_k, t_k + L/\lambda_2[, \end{aligned}$$

$$\Theta^k = \min \left(\inf_{x \in]0, L[} \left(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_2} \theta_2 \left(t_k + \frac{L-x}{\lambda_2} \right) + \frac{2\bar{v}}{\lambda_2} \right), \inf_{x \in]0, L[} \left(\theta_1 \left(t_k + \frac{x}{|\lambda_1|} \right) - \frac{2\bar{v}}{\lambda_2} \right) \right) \in [0, 1],$$

et en intégrant de t_k à t_{k+1} puis, en utilisant les arguments concernant l'intervalle $[0, t_1]$. Ceci achève la preuve du Théorème III.2.1. \square

Remarque III.2.2

1. Comme dans le chapitre II, seule la connaissance des conditions initiales et la mesure des niveau d'eau aux bouts suffisent pour implémenter les contrôles rétroactifs (III.2.22). Les commentaires données dans la Remarque II.3.1 sont aussi valables.
2. En utilisant la formulation variationnelle (III.2.14) et le fait que l'espace $C^0(]0, L[)$ est dense dans l'espace $L^2(]0, L[)$, il est possible (en utilisant les arguments de la section II.5) de prouver que pour des données initiales \hat{h}^0 et \hat{v}^0 dans l'espace $(L^2(]0, L[))^2$, la solution (\hat{h}, \hat{v}) du système linéaire (III.2.6)-(III.2.8) satisfait (III.2.25) et la régularité suivante :

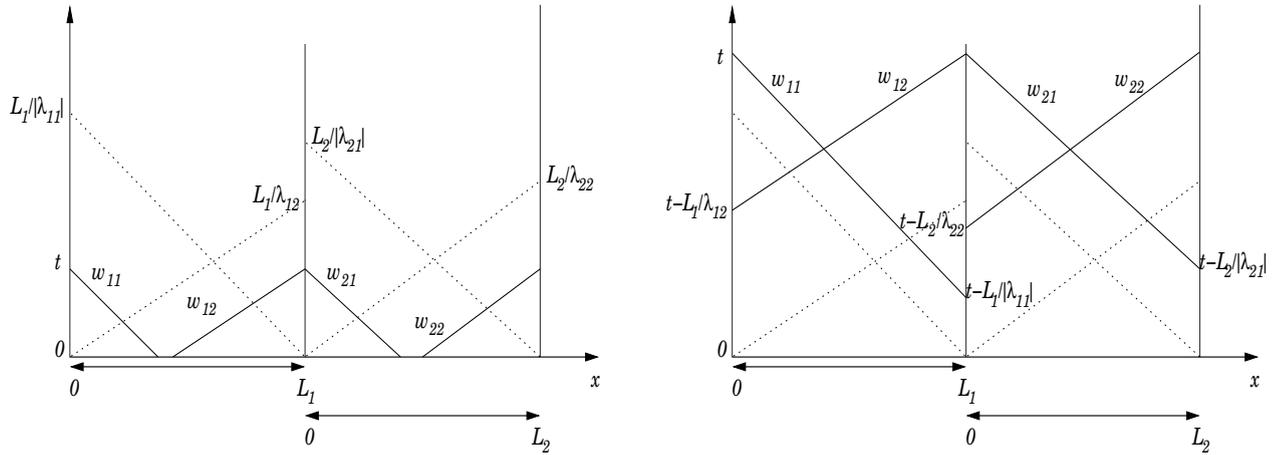
$$\left(\begin{array}{c} \hat{h} \\ \bar{h}\hat{v} + \bar{v}\hat{h} \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} \hat{v} \\ \bar{v}\hat{v} + g\hat{h} \end{array} \right) \in H(\text{div}, Q), \tag{III.2.29}$$

où $Q =]t_k, t_{k+1}[\times]0, L[$,

$$\text{div} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{et} \quad H(\text{div}, Q) = \left\{ \mathcal{V} \in L^2(Q)^2; \text{div} \mathcal{V} \in L^2(Q) \right\}.$$

III.3 Construction des contrôles du réseau en cascade

Dans cette section, nous utilisons les arguments de la section III.2.2 pour construire les contrôles du réseau en cascade. Un processus qui permettra de stabiliser la hauteur et le débit de l'eau dans le reseau autour d'un état d'équilibre final choisi.



(a) Les points de départ des caractéristiques (traits continus) sont à l'intérieur des biefs. Ainsi, la condition initiale est concernée puisque ces points correspondent au temps $t = 0$. La jonction constitue en même temps le bout aval ($x = L_1$) pour le bief 1 et le bout amont ($x = 0$) pour le bief 2.

(b) Les points de départ des caractéristiques (traits continus) se trouvent au niveau des bouts des biefs. Ainsi, l'état des biefs au niveau des bouts et en des temps antérieurs est concerné.

Figure III.2 – Les caractéristiques sortantes au niveau des bouts du réseau et leurs points de départ. Dans les deux cas, l'expression des variables caractéristiques aux niveau des bouts est donnée par la valeur de ces variables en des temps antérieurs.

III.3.1 L'estimation de l'énergie et la construction des contrôles

On définit, l'énergie E du fluide dans le réseau par

$$E = \sum_{i=1}^2 E_i, \quad E_i = \int_0^{L_i} \left(g \hat{h}_i^2(t) + \bar{h}_i \hat{v}_i^2(t) \right) dx. \quad (\text{III.3.1})$$

En utilisant la formulation variationnelle de (III.1.8) et en raisonnant comme dans la section III.2.1, on déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E(t) = & -\frac{\bar{h}_1 \bar{v}_1}{2} \hat{v}_{1,L_1}^2(t) - \frac{g \bar{v}_1}{2} \hat{h}_1^2(t, L_1) - g \bar{h}_1 \hat{h}_1(t, L_1) \hat{v}_{1,L_1}(t) \\ & + \frac{\bar{h}_1 \bar{v}_1}{2} \hat{v}_{1,0}^2(t) + \frac{g \bar{v}_1}{2} \hat{h}_1^2(t, 0) + g \bar{h}_1 \hat{h}_1(t, 0) \hat{v}_{1,0}(t) \\ & - \frac{\bar{h}_2 \bar{v}_2}{2} \hat{v}_{2,L_2}^2(t) - \frac{g \bar{v}_2}{2} \hat{h}_2^2(t, L_2) - g \bar{h}_2 \hat{h}_2(t, L_2) \hat{v}_{2,L_2}(t) \\ & + \frac{\bar{h}_2 \bar{v}_2}{2} \hat{v}_{2,0}^2(t) + \frac{g \bar{v}_2}{2} \hat{h}_2^2(t, 0) + g \bar{h}_2 \hat{h}_2(t, 0) \hat{v}_{2,0}(t). \end{aligned} \quad (\text{III.3.2})$$

Nous utilisons la relation entre le niveau d'eau et la vitesse aux bouts pour réécrire le second membre de (III.3.2). Par le biais de (III.1.13) et en se référant à la figure III.2, nous exprimons les variables caractéristiques sortantes en fonction des données initiales et de la solution au niveau des bouts en un temps antérieur.

En d'autres termes l'identité (III.1.14) est satisfaite :

$$\begin{pmatrix} w_{11}(t, 0) \\ w_{22}(t, L_2) \\ w_{12}(t, L_1) \\ w_{21}(t, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \end{pmatrix}, \quad (\text{III.3.3})$$

avec,

$$b_1(t) = \begin{cases} w_{11}(0, |\lambda_{11}|t), & t \leq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, \\ w_{11}\left(t - \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, L_1\right), & t \geq \frac{L_1}{|\lambda_{11}|}, \end{cases} \quad b_2(t) = \begin{cases} w_{22}(0, L_2 - \lambda_{22}t), & t \leq \frac{L_2}{\lambda_{22}}, \\ w_{22}\left(t - \frac{L_2}{\lambda_{22}}, 0\right), & t \geq \frac{L_2}{\lambda_{12}}, \end{cases} \quad (\text{III.3.4})$$

$$b_3(t) = \begin{cases} w_{12}(0, L_1 - \lambda_{12}t), & t \leq \frac{L_1}{\lambda_{12}}, \\ w_{12}\left(t - \frac{L_1}{\lambda_{12}}, 0\right), & t \geq \frac{L_1}{\lambda_{12}}, \end{cases} \quad b_4(t) = \begin{cases} w_{21}(0, |\lambda_{21}|t), & t \leq \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}, \\ w_{21}\left(t - \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}, L_2\right), & t \geq \frac{L_2}{|\lambda_{21}|}. \end{cases}$$

D'autre part, de (III.1.11) on déduit l'expression des niveaux d'eau aux bouts en fonction des vitesses et des variables caractéristiques sortantes :

$$\begin{aligned} \hat{h}_i(t, L_i) &= \left(w_{i2}(t, L_i) - \hat{v}_{i,L_i}(t) \right) \sqrt{\frac{\bar{h}_i}{g}}, \\ \hat{h}_i(t, 0) &= \left(-w_{i1}(t, 0) + \hat{v}_{i,0}(t) \right) \sqrt{\frac{\bar{h}_i}{g}}. \end{aligned} \quad (\text{III.3.5})$$

Prenant en compte les expressions (III.3.5) dans la variation de l'énergie (III.3.2), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) &= a_1 \hat{v}_{1,0}^2(t) - a_1 b_1(t) \hat{v}_{1,0}(t) + c_1(t) + a_2 \hat{v}_{2,L_2}^2(t) - a_2 b_2(t) \hat{v}_{2,L_2}(t) + c_2(t) \\ &\quad + a_3 \hat{v}_{1,L_1}^2(t) - a_3 b_3(t) \hat{v}_{1,L_1}(t) + c_3(t) + a_4 \hat{v}_{2,0}^2(t) - a_4 b_4(t) \hat{v}_{2,0}(t) + c_4(t) \end{aligned} \quad (\text{III.3.6})$$

où

$$\begin{aligned} a_1 &= \bar{h}_1 \lambda_{12}, & a_2 &= \bar{h}_2 |\lambda_{21}|, & a_3 &= \bar{h}_1 |\lambda_{11}|, & a_4 &= \bar{h}_2 \lambda_{22}, \\ c_1(t) &= \frac{\bar{h}_1 \bar{v}_1}{2} b_1^2(t), & c_2(t) &= -\frac{\bar{h}_2 \bar{v}_2}{2} b_2^2(t), & c_3(t) &= -\frac{\bar{h}_1 \bar{v}_1}{2} b_3^2(t), & c_4(t) &= \frac{\bar{h}_2 \bar{v}_2}{2} b_4^2(t), \end{aligned} \quad (\text{III.3.7})$$

les $b_i, i = 1, 2, 3, 4$ sont donnés par (III.3.4). Le second membre de (III.3.6) fait apparaître les quatre expressions des bouts concernant la vitesse. Ceci est normal vu que deux biefs sont concernés et donc pour chacun d'eux l'expression des deux bouts intervient. Mais, dans la

stratégie de contrôle du réseau, on ne construit que trois contrôles qui sont $\hat{v}_{1,0}(t)$ sur le bout $x = 0$, $\hat{v}_{2,L_2}(t)$ sur le bout $x = L_2$ et $\hat{v}_{1,L_1}(t)$ sur la jonction M (voir (III.1.10)). Ainsi, nous utilisons la condition sur la conservation du débit (III.1.8.c) pour exprimer $\hat{v}_{2,0}$ en fonction de \hat{v}_{1,L_1} et des variables caractéristiques sortantes. Des expressions (III.1.8.c) et (III.3.5), nous déduisons

$$\hat{v}_{2,0}(t) = \alpha \hat{v}_{1,L_1}(t) + \beta b_3(t) + \delta b_4(t), \quad (\text{III.3.8})$$

où

$$\alpha = \frac{|\lambda_{11}|}{\lambda_{22}} \sqrt{\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2}}, \quad \beta = \frac{\bar{v}_1}{\lambda_{22}} \sqrt{\frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2}}, \quad \delta = \frac{\bar{v}_2}{\lambda_{22}}. \quad (\text{III.3.9})$$

Ainsi, les six derniers termes du second membre de (III.3.6) peuvent être réécrits comme suit :

$$\begin{aligned} a_3 \hat{v}_{1,L_1}^2(t) - a_3 b_3(t) \hat{v}_{1,L_1}(t) + c_3(t) + a_4 \hat{v}_{2,0}^2(t) - a_4 b_4(t) \hat{v}_{2,0}(t) + c_4(t) \\ = \sigma \hat{v}_{1,L_1}^2(t) + \gamma(t) \hat{v}_{1,L_1}(t) + \rho(t), \end{aligned} \quad (\text{III.3.10})$$

où

$$\sigma = (a_3 + \alpha^2 a_4) = \bar{h}_1 |\lambda_{11}| \left(1 + \frac{|\lambda_{11}|}{\lambda_{22}} \right) \quad (\text{III.3.11})$$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (2a_4 \alpha \beta - \bar{h}_1 |\lambda_{11}|) b_3(t) + \alpha (2a_4 \delta - \bar{h}_2 \lambda_{22}) b_4(t), \\ &= \bar{h}_1 |\lambda_{11}| \left(\frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{22}} - 1 \right) b_3(t) + |\lambda_{11}| \sqrt{\bar{h}_1 \bar{h}_2} \left(\frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} - 1 \right) b_4(t), \end{aligned} \quad (\text{III.3.12})$$

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \left(a_4 \delta^2 - \bar{h}_2 \lambda_{22} \delta + \frac{\bar{h}_2 \bar{v}_2}{2} \right) b_4^2(t) + \left(a_4 \beta^2 - \frac{\bar{h}_1 \bar{v}_1}{2} \right) b_3^2(t) + \beta (2a_4 - \bar{h}_2 \lambda_{22}) b_3(t) b_4(t), \\ &= \frac{\bar{h}_2 \bar{v}_2}{2} \left(\frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} - 1 \right) b_4^2(t) + \frac{\bar{h}_1 \bar{v}_1}{2} \left(\frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{22}} - 1 \right) b_3^2(t) \\ &\quad + \bar{v}_1 \sqrt{\bar{h}_1 \bar{h}_2} \left(\frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{22}} - 1 \right) b_3(t) b_4(t). \end{aligned} \quad (\text{III.3.13})$$

En prenant en compte l'équation (III.3.10), la variation de l'énergie (III.3.6) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) &= a_1 \hat{v}_{1,0}^2(t) - a_1 b_1(t) \hat{v}_{1,0}(t) + c_1(t) + a_2 \hat{v}_{2,L_2}^2(t) - a_2 b_2(t) \hat{v}_{2,L_2}(t) + c_2(t) \\ &\quad + \sigma \hat{v}_{1,L_1}^2(t) + \gamma(t) \hat{v}_{1,L_1}(t) + \rho(t). \end{aligned} \quad (\text{III.3.14})$$

Ainsi nous avons trois polynômes du second degré en termes des contrôles à construire. Si nous choisissons les vitesses aux bords comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{v}_{1,0}(t) &= -\frac{b_1(t)}{2} \left(\sqrt{1 - \theta_1(t)} - 1 \right), \\ \hat{v}_{2,L_2}(t) &= -\frac{b_2(t)}{2} \left(\sqrt{1 - \theta_2(t)} - 1 \right), \\ \hat{v}_{1,L_1}(t) &= \frac{\gamma(t)}{2\sigma} \left(\sqrt{1 - \theta_3(t)} - 1 \right),\end{aligned}\tag{III.3.15}$$

où $\theta_1, \theta_2, \theta_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$, alors en appliquant la propriété des polynômes du second degré (Lemma II.3.1) à (III.3.14), nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) = -\frac{b_1^2(t)}{4a_1} \theta_1(t) + c_1(t) - \frac{b_2^2(t)}{4a_2} \theta_2(t) + c_2(t) - \frac{\gamma^2(t)}{4\sigma} \theta_3(t) + \rho(t).\tag{III.3.16}$$

Calculons explicitement le second membre de (III.3.16). D'une part, en utilisant (a_1, c_1) et (a_2, c_2) définis dans (III.3.7), nous avons

$$-\frac{b_1^2}{4a_1} \theta_1 + c_1 = -\frac{\bar{h}_1}{4} (\lambda_{12} \theta_1 - 2\bar{v}_1) b_1^2(t),\tag{III.3.17}$$

et

$$-\frac{b_2^2}{4a_2} \theta_2 + c_2 = -\frac{\bar{h}_2}{4} (|\lambda_{21}| \theta_2 + 2\bar{v}_2) b_2^2(t).\tag{III.3.18}$$

D'autre part, des expressions (III.3.11)-(III.3.13) et du fait que $\theta_3 \in]0, 1]$, on déduit

$$\begin{aligned}-\frac{\gamma^2}{4\sigma} \theta_3 + \rho &\leq \rho = \frac{\bar{h}_2 \bar{v}_2}{2} \left(\frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} - 1 \right) b_4^2(t) + \frac{\bar{h}_1 \bar{v}_1}{2} \left(\frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{22}} - 1 \right) b_3^2(t) \\ &\quad + \bar{v}_1 \sqrt{\bar{h}_1 \bar{h}_2} \left(\frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{22}} - 1 \right) b_3(t) b_4(t).\end{aligned}\tag{III.3.19}$$

Puisque $\frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} < 1$, donc en utilisant l'inégalité de Young, nous obtenons

$$\bar{v}_1 \sqrt{\bar{h}_1 \bar{h}_2} \left(\frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} - 1 \right) b_3(t) b_4(t) \leq \frac{\bar{h}_1 \bar{v}_1}{2} \left(1 - \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right) b_3^2(t) + \frac{\bar{h}_2 \bar{v}_1}{2} \left(1 - \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right) b_4^2(t).\tag{III.3.20}$$

Ainsi, en combinant (III.3.19) et (III.3.20), on a

$$-\frac{\gamma^2}{4\sigma} \theta_3 + \rho \leq \bar{h}_1 \bar{v}_1 \frac{(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)}{\lambda_{22}} b_3^2(t) + \frac{\bar{h}_2}{2} \left(\frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) - (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \right) b_4^2(t).\tag{III.3.21}$$

En prenant en compte (III.3.17), (III.3.18) et (III.3.21), la variation de l'énergie (III.3.16) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dE}{dt}(t) \leq & -\frac{\bar{h}_1}{4} \left((\lambda_{12}\theta_1 - 2\bar{v}_1)b_1^2(t) + 4\bar{v}_1 \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\lambda_{22}} b_3^2(t) \right) \\ & -\frac{\bar{h}_2}{4} \left(2(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \left(1 - \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right) b_4^2(t) + (|\lambda_{21}|\theta_2 + 2\bar{v}_2)b_2^2(t) \right). \end{aligned} \quad (\text{III.3.22})$$

La façon dont l'état stationnaire $(\bar{h}_1, \bar{v}_1, \bar{h}_2, \bar{v}_2)$ est choisie (voir (III.1.6)), implique que

$$\bar{v}_2 \geq \bar{v}_1. \quad (\text{III.3.23})$$

La fonction θ_1 satisfait une condition similaire à (III.2.24), i.e

$$\theta_1(t) \geq \frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{12}}. \quad (\text{III.3.24})$$

En utilisant le fait que $\frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} < 1$ et les inégalités (III.3.23)- (III.3.24), le second membre (III.3.22) est négatif. Ainsi, nous donnons la preuve du Théorème III.1.1.

III.3.2 Preuve du résultat principal (Théorème III.1.1)

L'existence et l'unicité de la solution sont obtenues grâce à (III.1.11) et (III.1.14).

En intégrant la variation de l'énergie (III.3.22) de 0 to t_1 , on a

$$\begin{aligned} E(t_1) \leq & E(0) - \frac{\bar{h}_1}{2} \int_0^{t_1} (\lambda_{12}\theta_1(t) - 2\bar{v}_1)b_1^2(t)dt - \frac{\bar{h}_1}{2} \int_0^{t_1} 4\bar{v}_1 \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\lambda_{22}} b_3^2(t)dt \\ & -\frac{\bar{h}_2}{2} \int_0^{t_1} 2(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \left(1 - \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right) b_4^2(t)dt - \frac{\bar{h}_2}{2} \int_0^{t_1} (|\lambda_{21}|\theta_2 + 2\bar{v}_2)b_2^2(t)dt. \end{aligned}$$

Par l'utilisation des expressions de $b_i, i = 1, 2, 3, 4$ données par la formule (III.3.4), on a

$$\begin{aligned} E(t_1) \leq & E(0) - \frac{\bar{h}_1}{2} \int_0^{\frac{L_1}{|\lambda_{11}|}} (\lambda_{12}\theta_1(t) - 2\bar{v}_1)w_{11}^2(0, |\lambda_{11}|t)dt \\ & -\frac{\bar{h}_1}{2} \int_0^{\frac{L_1}{\lambda_{12}}} 4\bar{v}_1 \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\lambda_{22}} w_{12}^2(t, L_1 - \lambda_{12}t)dt \\ & -\frac{\bar{h}_2}{2} \int_0^{\frac{L_1}{|\lambda_{21}|}} 2(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \left(1 - \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right) w_{21}^2(t, |\lambda_{21}|t)dt \\ & -\frac{\bar{h}_2}{2} \int_0^{\frac{L_2}{\lambda_{22}}} (|\lambda_{21}|\theta_2(t) + 2\bar{v}_2)w_{22}^2(0, L_2 - \lambda_{22}t)dt. \end{aligned}$$

Ainsi, par des changements de variables, on obtient

$$\begin{aligned}
 E(t_1) &\leq E(0) - \frac{\bar{h}_1}{2} \int_0^{L_1} \left(\theta_1 \left(\frac{x}{|\lambda_{11}|} \right) - \frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{12}} \right) w_{11}^2(0, x) dx - \frac{\bar{h}_1}{2} \int_0^{L_1} 4\bar{v}_1 \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\lambda_{22}\lambda_{12}} w_{12}^2(0, x) dx, \\
 &\quad - \frac{\bar{h}_2}{2} \int_0^{L_2} \left(\frac{|\lambda_{21}|}{\lambda_{22}} \theta_2 \left(\frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right) + \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right) w_{22}^2(0, x) dx \\
 &\quad - \frac{\bar{h}_2}{2} \int_0^{L_2} 2 \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\lambda_{22}} \left(1 - \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right) w_{21}^2(0, x) dx, \\
 &\leq E(0) - \frac{\bar{h}_1}{2} \int_0^{L_1} [w_{11}^2(0, x) + w_{12}^2(0, x)] \Gamma_1^0 dx - \frac{\bar{h}_2}{2} \int_0^{L_2} [w_{22}^2(0, x) + w_{21}^2(0, x)] \Gamma_2^0 dx,
 \end{aligned} \tag{III.3.25}$$

où

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1^0 &= \min \left(\inf_{x \in]0, L_1[} \left(\theta_1 \left(\frac{x}{|\lambda_{11}|} \right) - \frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{12}} \right), 4\bar{v}_1 \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\lambda_{22}\lambda_{12}} \right), \\
 \Gamma_2^0 &= \min \left(\inf_{x \in]0, L_2[} \left(\frac{|\lambda_{21}|}{\lambda_{22}} \theta_2 \left(\frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right) + \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right), 2 \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\lambda_{22}} \left(1 - \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right) \right).
 \end{aligned}$$

En se basant sur l'estimation (III.2.27), nous avons

$$w_{i1}^2(0, x) + w_{i2}^2(0, x) = \frac{2}{\bar{h}_i} \left(\bar{h}_i (\hat{v}_i^0(x))^2 + g(\hat{h}_i^0(x))^2 \right). \tag{III.3.26}$$

Ainsi, par l'utilisation de (III.3.26) dans (III.3.25), on a

$$E(t_1) \leq (1 - \Theta^0) E(0) \tag{III.3.27}$$

où

$$\Theta^0 = \min(\Gamma_1^0, \Gamma_2^0) \in [0, 1[, \quad \text{puisque} \quad 0 < \theta_1 \left(\frac{x}{|\lambda_{11}|} \right) - \frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{12}} < 1.$$

La généralisation de (III.3.27) suivant le temps se fait en considérant la condition initiale au temps $t_k = kT$ avec T défini par (III.1.17). Puis on pose

$$\begin{aligned}
 b_1(t) &= w_{11}(t_k, |\lambda_{11}|(t - t_k)), \quad t \in]t_k, t_k + L_1/|\lambda_{11}|[, \\
 b_2(t) &= w_{22}(t_k, L_2 - \lambda_{22}(t - t_k)), \quad t \in]t_k, t_k + L_2/\lambda_{22}[, \\
 b_3(t) &= w_{12}(t_k, L_1 - \lambda_{12}(t - t_k)), \quad t \in]t_k, t_k + L_1/\lambda_{12}[, \\
 b_4(t) &= w_{21}(t_k, |\lambda_{21}|(t - t_k)), \quad t \in]t_k, t_k + L_2/|\lambda_{21}|[,
 \end{aligned}$$

et

$$\Gamma_1^k = \min \left(\inf_{x \in]0, L_1[} \left(\theta_1 \left(t_k + \frac{x}{|\lambda_{11}|} \right) - \frac{2\bar{v}_1}{\lambda_{12}} \right), 4\bar{v}_1 \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\lambda_{22}\lambda_{12}} \right),$$

$$\Gamma_2^k = \min \left(\inf_{x \in]0, L_2[} \left(\frac{|\lambda_{21}|}{\lambda_{22}} \theta_2 \left(t_k + \frac{L_2 - x}{\lambda_{22}} \right) + \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right), 2 \frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\lambda_{22}} \left(1 - \frac{2\bar{v}_2}{\lambda_{22}} \right) \right),$$

$$\Theta^k = \min (\Gamma_1^k, \Gamma_2^k) \in [0, 1[.$$

On intègre de t_k à t_{k+1} , ensuite on utilise les arguments concernant l'intervalle $[0, t_1]$. Ainsi la preuve du Théorème III.1.1 est complète. □

Chapitre IV

Les résultats numériques concernant le contrôle du réseau étoilé et du réseau en cascade

Sommaire

IV.1 La méthode numérique et ses applications	73
IV.1.1 La méthode des volumes finis	73
IV.1.2 Application sur un canal	78
IV.1.3 Application sur le réseau étoilé	86
IV.1.4 Application sur le réseau en cascade	91
IV.2 Résultats numériques concernant le réseau étoilé	93
IV.2.1 Le cas d'un canal	93
IV.2.2 Le cas du réseau étoilé	99
IV.3 Résultats numériques concernant le réseau en cascade	102
IV.3.1 Le cas d'un seul bief	102
IV.3.2 Le cas du réseau en cascade	103

Introduction

Pour certains problèmes, la recherche de solutions explicites ou analytiques s'avère fastidieuse ou presque impossible. Ainsi, depuis l'apparition des ordinateurs, la recherche de solutions approchées ne cesse de se développer d'autant plus que ces ordinateurs permettent d'aborder des problèmes très complexes. Bien que ces solutions numériques soient une approximation de solutions de problèmes modélisant les phénomènes physiques, elles donnent tout de même des informations précises et détaillées permettant de développer des outils d'aide à la décision de plus en plus performants.

Plusieurs méthodes de recherche de solutions approchées ont été introduites, parmi lesquelles, les méthodes de différences finies [43], d'éléments finis [9] et de volumes finis [20, 21, 44]. L'un des avantages des deux dernières méthodes sur la première est la possibilité de pouvoir traiter des géométries complexes. Les méthodes de différences finies se basent sur la forme différentielle du problème concerné et du fait qu'elles sont souvent utilisées en présence de données régulières. Les méthodes de volumes finis s'intéressent à la forme intégrale de laquelle sont souvent obtenues les équations modélisant les phénomènes physiques. Ces méthodes sont adaptées au traitement des opérateurs hyperboliques et au calcul des solutions qui développent des discontinuités en temps finis. Quant aux méthodes d'éléments finis, elles utilisent la forme variationnelle des équations aux dérivées partielles. Ces dernières sont parfois utilisées conjointement avec les méthodes de volumes finis pour la résolution de certains problèmes faisant intervenir des termes de viscosité [45].

En réalité, les solutions à plusieurs problèmes intéressants ne sont pas continues mais comportent des ondes de choc. D'ailleurs, l'une des propriétés fondamentales des lois de conservation non linéaires est que ces ondes de choc surviennent même pour des conditions initiales continues. Ainsi, il est important de les traiter correctement du point de vue mathématique et informatique. La présence de ces discontinuités provoque des difficultés à l'analyse numérique pour leur trouver une approximation correcte et précise. Par exemple, les méthodes classiques de différences finies, qui sont basées sur une approximation des dérivées par une différence finie, ne marchent pas en général au niveau de ces discontinuités. C'est pour cela, que les méthodes de volumes finis sont mieux indiquées pour résoudre des problèmes comportant des discontinuités, puisqu'elles sont basées sur la forme intégrale et non sur la forme différentielle des équations.

Une méthode de volumes finis, principalement une extension de la méthode de Godunov [13], est utilisée pour résoudre les équations modélisant l'écoulement de l'eau dans les réseaux étoilés (chapitre II) et en cascade (chapitre III). *Godunov* avait proposé une méthode pour la résolution des équations d'Euler qui modélisent la dynamique des gaz et qui est basée sur la recherche de solution de problèmes de Riemann. Le problème de Riemann constitue un outil

fondamental pour les méthodes de volumes finis, il est la donnée d'une équation hyperbolique munie d'une condition initiale discontinue en certains points.

Après avoir résolu numériquement l'écoulement dans les réseaux donnés aux chapitres II et III à la section IV.1, nous mettons en évidence à travers des simulations, les résultats théoriques obtenus dans ces chapitres (voir, section IV.2). Notons que ces résultats sont obtenus à partir de modèles linéaires et concernent la construction de contrôles frontières qui stabilisent la hauteur et le débit de l'eau autour d'un état d'équilibre final désiré. Aussi, ces contrôles sont appliqués aux modèles non linéaires en vue de montrer la robustesse de la méthode de contrôle. Nous montrons le comportement de la hauteur et du débit de l'eau pour différents choix de contrôles.

IV.1 La méthode numérique et ses applications

IV.1.1 La méthode des volumes finis

En vue de faciliter la résolution numérique de l'écoulement dans le réseau étoilé (II.1.1)-(II.1.3) et du réseau en cascade (III.1.1)-(III.1.4) par la méthode des volumes finis, nous donnons un résumé de cette méthode lorsqu'elle est appliquée aux équations de Saint-Venant unidimensionnelles (II.3.1). Pour plus de détails, voir [21], [20] et [44].

IV.1.1.1 Lois de conservation et forme intégrale

Dans ce chapitre, la méthode des volumes finis est appliquée à une classe de systèmes d'équations hyperboliques appelée loi de conservation. Une loi de conservation exprime qu'une grandeur d'un système physique reste constante au cours de l'évolution de celui-ci. Elle peut être écrite sous la forme :

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1.1})$$

où chaque composante de u mesure la densité d'une certaine variable conservée et f est le vecteur des flux. Chaque fonction f_j est une composante des variables u_j . Comme énoncé dans le chapitre introductif, ces lois de conservation surviennent naturellement sous leur forme intégrale i.e

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(t, x) dx = f(u(t, x_1)) - f(u(t, x_2)). \quad (\text{IV.1.2})$$

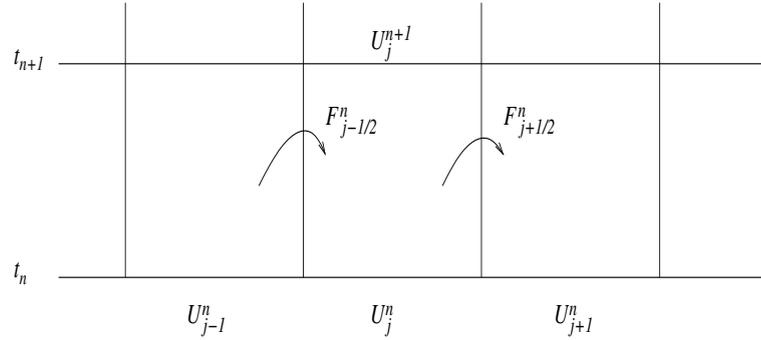


Figure IV.1 – Illustration d’un volume fini et principe d’actualisation de la moyenne U_j^n par les flux au bouts de la cellule \mathcal{C}_j .

pour deux points x_1 et x_2 .

IV.1.1.2 Méthode d’ordre 1

La méthode des volumes finis utilise la forme intégrale (IV.1.2) différemment de la méthode des différences finies qui utilise directement l’équation différentielle (IV.1.1). La méthode est basée sur la subdivision du domaine spatial en des cellules (ou volumes) et sur l’approximation de l’intégral de u dans ces cellules. Ces valeurs sont actualisées par le biais d’une approximation du flux à travers les bouts des cellules (Figure IV.1). Soit \mathcal{C}_j la $j^{\text{ième}}$ cellule définie par

$$\mathcal{C}_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (\text{IV.1.3})$$

où N est le nombre de cellules. La valeur U_j^n sera l’approximation de la valeur moyenne de u dans la cellule j au temps t_n

$$U_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(t_n, x) dx \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_j} u(t_n, x) dx \quad (\text{IV.1.4})$$

où $\Delta x = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ est la longueur de la cellule. Dans la suite, U_j^n est la moyenne de la cellule \mathcal{C}_j au temps t_n . La méthode numérique est conservative en ce sens qu’elle imite la vraie solution. Ce fait est important pour calculer les ondes de choc avec plus de précision. En effet, la somme discrete $\sum_{i=1}^N U_j^n \Delta x$ est l’approximation de l’intégrale de u sur l’intervalle $[a, b]$ et donc si une méthode conservative est utilisée, alors le changement de la somme discrete précédente résulte seulement des flux aux bouts $x = a$ et $x = b$. La masse totale à l’intérieur de l’intervalle sera préservée ou bien variera correctement en fonction des conditions aux bouts.

En utilisant la forme intégrale (IV.1.2), on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}_j} u(t, x) dx = f(u(t, x_{j-1/2})) - f(u(t, x_{j+1/2})). \quad (\text{IV.1.5})$$

Etant donné U_j^n la moyenne de la cellule \mathcal{C}_j au temps t_n , on veut avoir U_j^{n+1} la moyenne de celle-ci au temps t_{n+1} , après un intervalle de temps $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Pour ce faire, en intégrant (IV.1.5) de t_n à t_{n+1} et puis en divisant par Δx , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_j} u(t_{n+1}, x) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_j} u(t_n, x) dx \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t, x_{j+1/2})) dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t, x_{j-1/2})) dx \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.1.6})$$

Néanmoins, il est difficile d'évaluer avec exactitude le deuxième et le troisième termes du second membre de (IV.1.6) puisque $u(t, x_{j\pm 1/2})$ varie en fonction du temps au niveau de chaque bout de la cellule. Ce fait suggère l'étude des méthodes numériques (méthodes des volumes finis) de la forme

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n \right) \quad (\text{IV.1.7})$$

où $F_{j-1/2}^n$ est une approximation du flux moyen au niveau du bout $x = x_{j-1/2}$:

$$F_{j-1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t, x_{j-1/2})) dt. \quad (\text{IV.1.8})$$

La différence entre les méthodes de volumes finis provient de la façon dont l'approximation $F_{j-1/2}^n$ est choisie. La méthode de *Godunov* qui est d'ailleurs à la base de beaucoup de méthodes de volumes finis utilisées pour la résolution numérique de problèmes non linéaires, a pour approximation :

$$F_{j-1/2}^n = f(u^\downarrow(U_{j-1}^n, U_j^n)), \quad (\text{IV.1.9})$$

où $u^\downarrow(U_{j-1}^n, U_j^n)$ est la solution du problème de Riemann entre les états U_{j-1}^n et U_j^n au niveau de l'interface $x_{j-1/2}$. Dans la suite, ce problème sera noté $PR(U_{j-1}^n, U_j^n)$.

IV.1.1.3 Problème de Riemann

Le problème de Riemann est un outil fondamental pour le développement des méthodes de volumes finis. Il est constitué d'une équation hyperbolique munie d'une condition initiale spéciale. La donnée initiale est constante par morceaux et contient une discontinuité à un certain point. Par exemple si $x = 0$ est ce point où se produit la discontinuité alors la donnée initiale est

$$u(0, x) = \begin{cases} u_l & \text{si } x < 0 \\ u_r & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (\text{IV.1.10})$$

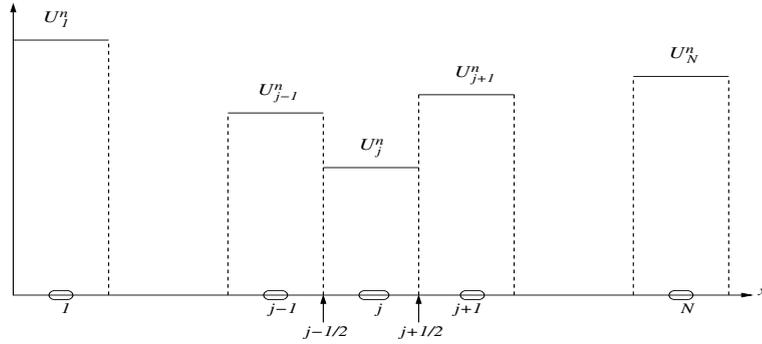


Figure IV.2 – Distribution des moyennes des cellules au temps t_n .

En considérant la donnée initiale au temps t_n , sa distribution est constante par morceaux et contient d'éventuelles discontinuités au niveau des interfaces $x_{j\pm 1/2}$ (voir Figure IV.2).

On détermine respectivement les solutions $u^\downarrow(U_{j-1}^n, U_j^n)$ et $u^\downarrow(U_j^n, U_{j+1}^n)$ des problèmes de Riemann $PR(U_{j-1}^n, U_j^n)$ et $PR(U_j^n, U_{j+1}^n)$ pour ensuite calculer les approximations $F_{j-1/2}^n$ et $F_{j+1/2}^n$ à partir de (IV.1.9). Ces approximations sont utilisées pour actualiser la moyenne de la cellule grâce à (IV.1.7). Les solutions des problèmes de Riemann seront données de façon explicite ou approximative suivant les problèmes concernés (voir section IV.1.2.1 et section IV.1.2.2).

IV.1.1.4 Méthode de grande précision

La méthode de Godunov a un ordre de précision qui est égale à un et donc elle introduit une grande diffusion numérique entraînant des résultats altérés et de mauvaise précision, mais elle ne génère pas d'oscillations. Les méthodes d'ordre de précision égale à deux comme celles Lax-Wendroff ou Beam-Warming donnent une meilleure précision pour les solutions régulières que la méthode de Godunov. Mais au niveau d'une discontinuité ces méthodes engendrent des oscillations et que, même avec une solution régulière, ces méthodes peuvent engendrer des oscillations à cause de leur nature dispersive.

L'idée des méthodes de grande précision est de combiner les propriétés de toutes ces méthodes (Godunov et Lax-Wendroff ou Godunov et Beam-Warming). Conserver un ordre de précision égale à deux pour des régions où la solution est régulière et utiliser la précision de la méthode de Godunov pour des régions où la solution se comporte de façon irrégulière. D'où l'utilisation de limiteurs (limiteur de pente ou de flux) qui font de sorte que la partie discontinue de la solution reste sans oscillations et que la partie régulière de celle-ci reste précise. À travers ces limiteurs, différentes méthodes ont été introduites (minmod, superbee, MC).

La méthode de *Godunov* est améliorée pour obtenir une méthode de grande précision de la forme :

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{A}^+ \Delta U_{j-1/2}^n + \mathcal{A}^- \Delta U_{j+1/2}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\tilde{F}_{j+1/2}^n - \tilde{F}_{j-1/2}^n \right) \quad (\text{IV.1.11})$$

où

$$\mathcal{A}^- \Delta U_{j-1/2}^n = f(u^\downarrow(U_{j-1}^n, U_j^n)) - f(U_{j-1}^n), \quad (\text{IV.1.12})$$

$$\mathcal{A}^+ \Delta U_{j-1/2}^n = f(U_j^n) - f(u^\uparrow(U_{j-1}^n, U_j^n)). \quad (\text{IV.1.13})$$

La fluctuation $\mathcal{A}^+ \Delta U_{j-1/2}^n$ peut être interpréter comme une entité qui mesure l'effet de toutes les ondes partant du côté droit de l'interface $x_{j-1/2}$, tandis que $\mathcal{A}^- \Delta U_{j-1/2}^n$ mesure l'effet de toutes les ondes partant du côté gauche de cette même interface. Les flux $\tilde{F}_{j-1/2}^n$ sont basés sur les ondes provenant de la solution du problème de Riemann :

$$\tilde{F}_{j-1/2}^n = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^m |\lambda_p| \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} |\lambda_p| \right) \hat{\alpha}_{j-1/2}^p r_p \quad (\text{IV.1.14})$$

où λ_p et r_p sont respectivement les valeurs et vecteurs propres de la matrice jacobienne exacte ou approchée du flux f et $\hat{\alpha}_{j-1/2}^p$ est une version limitée de $\alpha_{j-1/2}^p$ donnée par

$$\hat{\alpha}_{j-1/2}^p = \alpha_{j-1/2}^p \phi(\vartheta_{j-1/2}^p). \quad (\text{IV.1.15})$$

Les coefficients $\alpha_{j-1/2}^p$ sont issus de la décomposition de $U_j^n - U_{j-1}^n$ en fonction des vecteurs propres r_p de la matrice jacobienne exacte ou approchée du flux f :

$$U_j^n - U_{j-1}^n = \sum_{p=1}^m \alpha_{j-1/2}^p r_p. \quad (\text{IV.1.16})$$

Le paramètre $\vartheta_{j-1/2}^p$ est donné par

$$\vartheta_{j-1/2}^p = \frac{\alpha_{J-1/2}^p}{\alpha_{j-1/2}^p}, \quad \text{avec } J = \begin{cases} j-1 & \text{si } \lambda_p > 0, \\ j+1 & \text{si } \lambda_p < 0, \end{cases} \quad (\text{IV.1.17})$$

et ϕ est une fonction de limiteur de flux. Nous avons considéré celle de van Leer appelée MC :

$$\phi(\vartheta) = \max(0, \min((1 + \vartheta)/2, 2, 2\vartheta)). \quad (\text{IV.1.18})$$

IV.1.1.5 Traitement des conditions aux bouts

Les méthodes de volumes finis permettent d'actualiser U_j^n en admettant que nous avons les valeurs U_{j-1}^n et U_{j+1}^n et peut être que d'autres cellules plus lointaine seront concernées dans le calcul des flux $F_{j-1/2}^n$ et $F_{j+1/2}^n$. En pratique, puisque le domaine est borné, la première et la dernière cellule n'ont pas d'informations provenant de toutes les cellules voisines. A la place, des conditions aux bouts physiques sont imposées. La technique utilisée consiste à étendre

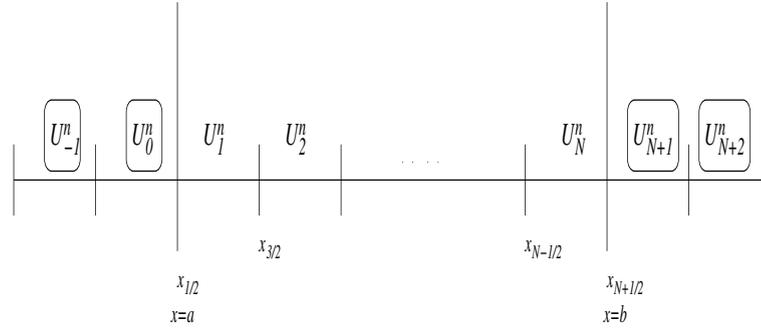


Figure IV.3 – Cellules fantômes aux bouts $x = a$ et $x = b$.

le domaine en ajoutant des cellules supplémentaires (cellules fantômes) aux bouts du celui-ci (Figure IV.3). Les valeurs de ces cellules dépendent des conditions aux bouts et éventuellement de la solution à l'intérieur du domaine. Au cas où les bouts a et b sont artificiels, on peut avoir recourt à des conditions aux bouts *absorbantes* ou *non réfléchissantes*. Ces conditions aux bouts sont supposées absorber entièrement les ondes qui les heurtent. Dans ce cas, on donne

$$U_0^n = U_1^n, \quad U_{-1}^n = U_1^n, \quad U_{N+1}^n = U_N^n \quad \text{et} \quad U_{N+2}^n = U_N^n. \quad (\text{IV.1.19})$$

Avec ce choix, on s'assure que la solution du problème de Riemann au niveau des interfaces $x_{1/2}$ et $x_{N+1/2}$ ne contient pas d'ondes. En d'autres termes, aucune onde n'est générée au niveau des bouts, contrairement à ce qui se passe avec les cellules à l'intérieur du domaine.

Le traitement spécifique de cellules fantômes pour des conditions aux bouts physiques se fera dans les sections IV.1.2.1 et IV.1.2.2.

IV.1.2 Application sur un canal

Dans cette partie, on résout numériquement les équations de Saint-Venant linéaires (II.3.5)-(II.3.7) et non linéaires (II.3.1)-(II.3.3) par la méthode des volumes finis.

IV.1.2.1 Le modèle linéaire

Considérons les équations de Saint-Venant linéaires (II.3.5)-(II.3.7) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \frac{1}{l} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \sigma \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} + \rho \frac{\partial \hat{h}}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.1.20})$$

avec les conditions initiales

$$\hat{h}(0, x) = \hat{h}^0(x), \quad \hat{q}(0, x) = \hat{q}^0(x), \quad (\text{IV.1.21})$$

et les conditions aux bouts suivantes :

$$\hat{q}(t, 0) = \hat{q}_0(t), \quad \hat{q}(t, L) = \hat{q}_L(t). \quad (\text{IV.1.22})$$

Les fonctions σ et ρ sont définies comme suit :

$$\sigma = 2\frac{\bar{q}}{l\bar{h}}, \quad \rho = g\bar{h} - \frac{\bar{q}^2}{l\bar{h}^2}, \quad (\text{IV.1.23})$$

et (\bar{h}, \bar{q}) est donné par (II.3.4).

Le système (IV.1.20) peut être réécrit sous la forme (IV.1.1) :

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (\text{IV.1.24})$$

avec

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{h} \\ \hat{q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(u) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q}/l \\ \sigma\hat{q} + \rho\hat{h} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.1.25})$$

La matrice jacobienne de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/l \\ \rho & \sigma \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.1.26})$$

Pour utiliser la méthode numérique donnée par la formule (IV.1.11), on doit déterminer les solutions $u^\downarrow(U_{j-1}^n, U_j^n)$ et $u^\downarrow(U_j^n, U_{j+1}^n)$ des problèmes de Riemann respectifs $PR(U_{j-1}^n, U_j^n)$ et $PR(U_j^n, U_{j+1}^n)$, en plus des coefficients $\alpha_{j-1/2}^p$ à travers la décomposition (IV.1.16). Les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A sont respectivement

$$\lambda_1 = \frac{\bar{q}}{l\bar{h}} - \sqrt{g\bar{h}}, \quad \lambda_2 = \frac{\bar{q}}{l\bar{h}} + \sqrt{g\bar{h}}, \quad (\text{IV.1.27})$$

et

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1/l \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1/l \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.1.28})$$

Les variables caractéristiques sont données par

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = R^{-1}u,$$

où $R = [r_1, r_2]$. Ainsi, on a

$$u(t, x) = \sum_{p=1}^2 w_p(t, x) r_p. \quad (\text{IV.1.29})$$

A travers les variables caractéristiques, nous obtenons deux équations de transport que sont :

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (\text{IV.1.30})$$

La solution de l'équation de transport j dans \mathbb{R} est donnée par (voir (II.2.25))

$$w_j(t, x) = w_j(0, x - \lambda_j t), \quad (\text{IV.1.31})$$

où $w_j(0, \cdot)$ est la condition initiale.

Avant de chercher les solutions des problèmes de Riemann concernant la méthode numérique, nous donnons la solution du problème de Riemann obtenu grâce à l'équation hyperbolique (IV.1.24) munie de la condition initiale (IV.1.10).

Solution du problème de Riemann

On décompose la condition initiale (u_l, u_r) à l'aide des vecteurs propres de la matrice A :

$$u_l = \sum_{p=1}^2 w_l^p r_p \quad \text{et} \quad u_r = \sum_{p=1}^2 w_r^p r_p. \quad (\text{IV.1.32})$$

Ainsi, l'équation de transport p a une donnée de Riemann

$$w_p(0, x) = \begin{cases} w_l^p & \text{si } x < 0 \\ w_r^p & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (\text{IV.1.33})$$

et la discontinuité $w_r^p - w_l^p$ se propage avec une vitesse λ_p , donc de par la relation (IV.1.31) on a

$$w_p(t, x) = \begin{cases} w_l^p & \text{si } x - \lambda_p t < 0 \\ w_r^p & \text{si } x - \lambda_p t > 0. \end{cases} \quad (\text{IV.1.34})$$

D'où, en utilisant (IV.1.29), on obtient

$$u(t, x) = \sum_{p: \lambda_p < x/t}^2 w_r^p r_p + \sum_{p: \lambda_p > x/t}^2 w_l^p r_p. \quad (\text{IV.1.35})$$

Lorsque la valeur $x - \lambda_p t$ traverse 0, la variable caractéristique w_p saute de w_l^p à w_r^p , donc la solution u saute d'un saut égal à

$$(w_r^p - w_l^p)r_p \equiv \alpha^p r_p. \quad (\text{IV.1.36})$$

Ce saut est un vecteur propre de la matrice A . Ce fait est important et sa généralisation permettra de résoudre le problème de Riemann pour les systèmes non linéaires (voir section IV.1.2.2). L'expression (IV.1.36) est appelée *condition de saut de Rankine-Hugoniot*. La résolution d'un problème de Riemann pour un système linéaire consiste à prendre la condition initiale (u_l, u_r) et de décomposer le saut $u_r - u_l$ en fonction des vecteurs propres de la matrice A :

$$u_r - u_l = \sum_{p=1}^2 \alpha^p r_p. \quad (\text{IV.1.37})$$

Donc, il revient à résoudre le système linéaire

$$\alpha = R^{-1}(u_r - u_l). \quad (\text{IV.1.38})$$

D'où, on déduit que $\alpha^p = w_r^p - w_l^p$. La valeur $\alpha^p r_p$ est le saut en u à travers l'onde p dans la solution du problème de Riemann. Pour ces ondes, on introduit la notation

$$\mathcal{W}^p = \alpha^p r_p. \quad (\text{IV.1.39})$$

Ainsi, en utilisant (IV.1.32), la solution $u(t, x)$ donnée par (IV.1.35) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= u_l + \sum_{p: \lambda_p < x/t}^2 \mathcal{W}^p \\ &= u_r - \sum_{p: \lambda_p \geq x/t}^2 \mathcal{W}^p. \end{aligned} \quad (\text{IV.1.40})$$

La solution $u^1(U_{j-1}^n, U_j^n)$ du problème de Riemann $PR(U_{j-1}^n, U_j^n)$

Dans ce cas précis le point d'origine dans le plan (t, x) est $(t_n, x_{j-1/2})$ au lieu de $(0, 0)$, $u_l = U_{j-1}^n$, $u_r = U_j^n$ et le saut a lieu au point $x = x_{j-1/2}$. La solution concernant la variable caractéristique w_p devient alors (voir (IV.1.34))

$$w_p(t, x) = \begin{cases} w_l^p & \text{si } x - x_{j-1/2} - \lambda_p(t - t_n) < 0, \\ w_r^p & \text{si } x - x_{j-1/2} - \lambda_p(t - t_n) > 0, \end{cases} \quad (\text{IV.1.41})$$

et donc (IV.1.40) et devient

$$u(t, x) = U_{j-1}^n + \sum_{p: \lambda_p < (x-x_{j-1/2})/(t-t_n)}^2 \mathcal{W}^p \quad (\text{IV.1.42})$$

$$= U_j^n - \sum_{p: \lambda_p \geq (x-x_{j-1/2})/(t-t_n)}^2 \mathcal{W}^p. \quad (\text{IV.1.43})$$

On décompose la discontinuité $U_j^n - U_{j-1}^n$ en fonction des vecteurs propres de la matrice A :

$$U_j^n - U_{j-1}^n = \sum_{p=1}^2 \alpha_{j-1/2}^p r_p = \sum_{p=1}^2 \mathcal{W}^p. \quad (\text{IV.1.44})$$

En utilisant les expressions de r_1 et r_2 données par (IV.1.28), on a

$$\alpha_{j-1/2}^1 = \frac{\lambda_2 l(\hat{h}_j^n - \hat{h}_{j-1}^n) - (\hat{q}_j^n - \hat{q}_{j-1}^n)}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{et} \quad \alpha_{j-1/2}^2 = \frac{(\hat{q}_j^n - \hat{q}_{j-1}^n) - \lambda_1 l(\hat{h}_j^n - \hat{h}_{j-1}^n)}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (\text{IV.1.45})$$

où les valeurs propres λ_1 et λ_2 satisfont (II.3.11). En remplaçant x par $x_{j-1/2}$ dans l'expression (IV.1.42) ou (IV.1.43) on obtient la solution $u^\downarrow(U_{j-1}^n, U_j^n)$ du problème de Riemann $PR(U_{j-1}^n, U_j^n)$:

$$u^\downarrow(U_{j-1}^n, U_j^n) = U_{j-1}^n + \mathcal{W}^1 \quad (\text{IV.1.46})$$

$$= U_j^n - \mathcal{W}^2. \quad (\text{IV.1.47})$$

Traitement des conditions aux bouts

De façon générale, l'absence de réflexions d'ondes au niveau d'un bout est due à la donnée de conditions aux bouts absorbantes et parfaitement adaptée. Dans le cas linéaire, cette absence peut parfois s'expliquer par le fait que les conditions aux bouts sont données en terme de variables caractéristiques. Par exemple si $w_2(t, a) = g(t)$ au bout $x = a$, cela veut dire qu'on ne prescrit que la variable entrante et par conséquent, la variable caractéristique sortante w_1 ne sera pas réfléchiée. Mais, en général les conditions aux bouts sont données en terme de variables physiques (q ou h) et donc les ondes qui quittent le domaine ont souvent une partie qui est réfléchiée à l'intérieur de celui ci. Par exemple, si $\hat{q}(t, a) = g(t)$ alors, à l'aide de (IV.1.29), on a $w_2(t, a) = \beta w_1(t, a) + g(t)$ avec $\beta \neq 0$ et donc la valeur au bout, pour la variable caractéristique entrante dépendra de la variable caractéristique sortante. Cette situation se produit lorsqu'on est en présence d'un mur en mouvement ou non au niveau des bouts. Dans le cadre de ce document, des contrôles sont prescrits au niveau des bouts $x = 0$ et $x = L$ et sont donnés par (II.3.23). Les cellules fantômes sont données par extrapolation des cellules internes et des

conditions aux bouts (voir [8] concernant les équations d'Euler) :

$$\begin{aligned}
 \text{pour } U_0^n : \quad & \hat{h}_0^n = \hat{h}_1^n, & \hat{q}_0^n &= 2\hat{q}_0(t_n) - \hat{q}_1^n, \\
 \text{pour } U_{-1}^n : \quad & \hat{h}_{-1}^n = \hat{h}_2^n, & \hat{q}_{-1}^n &= 2\hat{q}_0(t_n) - \hat{q}_2^n, \\
 \text{pour } U_{N+1}^n : \quad & \hat{h}_{N+1}^n = \hat{h}_N^n, & \hat{q}_{N+1}^n &= 2\hat{q}_L(t_n) - \hat{q}_N^n, \\
 \text{pour } U_{N+2}^n : \quad & \hat{h}_{N+2}^n = \hat{h}_{N-1}^n, & \hat{q}_{N+2}^n &= 2\hat{q}_0(t_n) - \hat{q}_{N-1}^n.
 \end{aligned} \tag{IV.1.48}$$

où $\hat{q}_0(t)$ et $\hat{q}_L(t)$ sont les contrôles donnés par (II.3.23) :

$$\hat{q}_L(t) = \frac{b_2(t)}{\lambda_2 + |\lambda_1|} \left(\sqrt{1 - \theta_2(t)} - 1 \right), \quad \hat{q}_0(t) = \frac{b_1(t)}{\lambda_2 + |\lambda_1|} \left(\sqrt{1 - \theta_1(t)} - 1 \right), \tag{IV.1.49}$$

où $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ appartiennent à $]0, 1]$,

$$b_1(t) = |\lambda_1|\lambda_2 \begin{cases} l\hat{h}(0, |\lambda_1|t) - \frac{1}{\lambda_2}\hat{q}(0, |\lambda_1|t), & \text{si } t \in]0, L/|\lambda_1|], \\ l\hat{h}(t - L/|\lambda_1|, L) - \frac{1}{\lambda_2}\hat{q}(t - L/|\lambda_1|, L), & \text{si } t \geq L/|\lambda_1|, \end{cases} \tag{IV.1.50}$$

$$b_2(t) = -|\lambda_1|\lambda_2 \begin{cases} l\hat{h}(0, L - \lambda_2 t) - \frac{1}{\lambda_1}\hat{q}(0, L - \lambda_2 t), & \text{si } t \in]0, L/\lambda_2], \\ l\hat{h}(t - L/\lambda_2, 0) - \frac{1}{\lambda_1}\hat{q}(t - L/\lambda_2, 0), & \text{si } t \geq L/\lambda_2. \end{cases} \tag{IV.1.51}$$

Il y a une condition nécessaire que la méthode doit satisfaire si on veut qu'elle soit stable et qu'elle converge vers la solution de l'équation différentielle quand Δt et Δx tendent vers 0. La condition stipule que la méthode doit être utilisée de sorte que l'information puisse se propager avec la vitesse physique correcte déterminée par les valeurs propres de la matrice jacobienne du flux f . Cette condition appelée CFL est :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_p |\lambda_p| \leq 1. \tag{IV.1.52}$$

IV.1.2.2 Le modèle non linéaire

On se sert des outils de la section IV.1.2.1 pour résoudre numériquement les équations de Saint-Venant non linéaires (II.3.1)-(II.3.3). Ces équations peuvent être réécrites sous la forme (IV.1.24) avec

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(u) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q/l \\ \frac{q^2}{lh} + \frac{1}{2}glh^2 \end{pmatrix}. \tag{IV.1.53}$$

Les condition aux bouts sont :

$$q(t, 0) = \bar{q} + \hat{q}_0(t) \quad \text{et} \quad q(t, L) = \bar{q} + \hat{q}_L(t), \quad (\text{IV.1.54})$$

où \bar{q} est l'état stationnaire donné par (II.3.4), $\hat{q}_0(t_n)$ et $\hat{q}_L(t_n)$ sont les contrôles donnés par (IV.1.49).

La matrice jacobienne de f est égale à :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/l \\ -\frac{q^2}{lh^2} + glh & 2\frac{q}{lh} \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.1.55})$$

Les valeurs propres et vecteurs propres de A sont :

$$\lambda_1 = \frac{q}{lh} - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = \frac{q}{lh} + \sqrt{gh}, \quad (\text{IV.1.56})$$

et

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1/l \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1/l \\ \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.1.57})$$

Il faut rappeler que dans le cas linéaire, les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont constantes et donc la solution ne contient pas de distorsions. En effet, par l'utilisation des équations d'advection (IV.1.30), on voit que la solution est une translation sans distorsion de la condition initiale (voir (IV.1.31)). Dans le cas non linéaire les valeurs propres dépendent de la solution, provoquant ainsi la formation de choc et de rarefaction. Les chocs se produisent quand les caractéristiques se croisent au niveau d'une discontinuité et pour les raréfactions, quand elles divergent à partir de celle-ci. Concernant les problèmes non linéaires, la recherche de la solution exacte du problème de Riemann est souvent très chère et qu'à la fin une petite information de cette solution est utilisée pour déterminer le flux. De plus, il n'est pas nécessaire de chercher la solution exacte pour avoir de bon résultats. Ainsi des méthodes de recherche de solutions approchées ont été proposées ([38]). Ces méthodes sont moins chères et donnent des résultats qui sont dans beaucoup de cas aussi bon que ceux obtenus avec la solution exacte.

Le solveur de Roe pour les équations de Saint-Venant

De façon générale, la recherche de solution approchée consiste à remplacer le problème non linéaire $u_t + f(u)_x = 0$ par un problème linéarisé défini localement sur chaque interface,

$$\tilde{u}_t + \tilde{A}_{j-1/2}^n \tilde{u}_x = 0. \quad (\text{IV.1.58})$$

La matrice $\tilde{A}_{j-1/2}^n$ est une approximation de la matrice jacobienne de f qui est valide dans un voisinage de U_{j-1}^n et U_j^n . Elle doit être diagonalisable avec des valeurs propres réels et satisfaire

$$\tilde{A}_{j-1/2}^n \rightarrow f'(\bar{u}^n), \quad \text{quand } U_{j-1}^n, U_j^n \rightarrow \bar{u}^n \quad (\text{IV.1.59})$$

En particulier, la linéarisation de Roe utilise l'approximation

$$\tilde{A}_{j-1/2}^n = f'(\tilde{U}_{j-1/2}^n), \quad (\text{IV.1.60})$$

où $\tilde{U}_{j-1/2}^n$ est une certaine moyenne de U_{j-1}^n et U_j^n . Pour les équations de Saint-Venant, $\tilde{U}_{j-1/2}^n$ est donné par

$$\tilde{U}_{j-1/2}^n = \begin{pmatrix} \tilde{h}_{j-1/2}^n \\ \tilde{q}_{j-1/2}^n \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.1.61})$$

où

$$\tilde{q}_{j-1/2}^n = \frac{q_{j-1}^n \sqrt{h_{j-1}^n} + q_j^n \sqrt{h_j^n}}{lh_{j-1}^n + lh_j^n}, \quad h_{j-1/2}^n = \frac{1}{2}(h_{j-1}^n + h_j^n). \quad (\text{IV.1.62})$$

On considère les valeurs propres et vecteurs propres locaux qui ont respectivement les formes (IV.1.56) et (IV.1.57) à la différence que h est remplacé par $\tilde{h}_{j-1/2}^n$ et q par $\tilde{q}_{j-1/2}^n$:

$$\tilde{\lambda}_{1,j}^n = \frac{\tilde{q}_{j-1/2}^n}{l\tilde{h}_{j-1/2}^n} - \sqrt{g\tilde{h}_{j-1/2}^n}, \quad \tilde{\lambda}_{2,j}^n = \frac{\tilde{q}_{j-1/2}^n}{l\tilde{h}_{j-1/2}^n} + \sqrt{g\tilde{h}_{j-1/2}^n}, \quad (\text{IV.1.63})$$

et

$$\tilde{r}_{1,j}^n = \begin{pmatrix} 1/l \\ \tilde{\lambda}_1^n \end{pmatrix}, \quad \tilde{r}_{2,j}^n = \begin{pmatrix} 1/l \\ \tilde{\lambda}_2^n \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.1.64})$$

Pour l'obtention de la solution $u^\downarrow(U_{j-1}^n, U_j^n)$ du problème de Riemann $PR(U_{j-1}^n, U_j^n)$, on suit les étapes données dans la section IV.1.2.1 en remplaçant respectivement \hat{h} et \hat{q} par h et q . De plus, les valeurs et vecteurs propres à considérer sont respectivement (IV.1.63) et (IV.1.64). D'autre part, les conditions aux bouts (IV.1.54) sont à considérer au temps t_n . La mise en oeuvre des cellules fantômes se fait comme en (IV.1.48) où (\hat{h}, \hat{q}) est remplacé par (h, q) . De plus la condition CFL concernant la stabilité de la méthode numérique, est :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |\tilde{\lambda}^n| \leq 1, \quad (\text{IV.1.65})$$

où $\tilde{\lambda}^n = \max_j(\tilde{\lambda}_{1,j}^n, \tilde{\lambda}_{2,j}^n)$.

IV.1.3 Application sur le réseau étoilé

IV.1.3.1 Le modèle linéaire

Nous considérons le modèle linéaire du réseau donné au Chapitre II :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (a) & \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial t} + \frac{1}{l_i} \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial x} = 0, & i = 1, 2, 3, \\ (b) & \frac{\partial \hat{q}_i}{\partial t} + \sigma_i \frac{\partial \hat{q}^i}{\partial x} + \rho_i \frac{\partial \hat{h}_i}{\partial x} = 0, & i = 1, 2, 3, \\ (c) & \hat{q}_1(t, L_1) - \hat{q}_2(t, 0) - \hat{q}_3(t, 0) = 0, & \text{sur } M, \\ (d) & \gamma_1 \hat{h}_1(t, L_1) + \beta_1 \hat{q}_1(t, L_1) = \gamma_2 \hat{h}_2(t, 0) + \beta_2 \hat{q}_2(t, 0), & \text{sur } M, \\ (e) & \gamma_1 \hat{h}_1(t, L_1) + \beta_1 \hat{q}_1(t, L_1) = \gamma_3 \hat{h}_3(t, 0) + \beta_3 \hat{q}_3(t, 0), & \text{sur } M, \end{array} \right. \quad (\text{IV.1.66})$$

avec les conditions aux bouts

$$\hat{q}_1(t, 0) = \hat{q}_{1,0}(t), \quad \hat{q}_2(t, L_2) = \hat{q}_{2,L_2}(t) \quad \text{and} \quad \hat{q}_3(t, L_3) = \hat{q}_{3,L_3}(t), \quad (\text{IV.1.67})$$

et les conditions initiales

$$\hat{h}_i(0, x) = \hat{h}_i^0(x), \quad \hat{q}_i(0, x) = \hat{q}_i^0(x). \quad (\text{IV.1.68})$$

On utilise la réécriture de (IV.1.66.a)-(IV.1.66.b) sous forme de variables caractéristiques, pour résoudre numériquement le modèle linéaire du réseau :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial w_{i1}}{\partial t} + \lambda_{i1} \frac{\partial w_{i1}}{\partial x} = 0, & i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial w_{i2}}{\partial t} + \lambda_{i2} \frac{\partial w_{i2}}{\partial x} = 0, & i = 1, 2, 3, \end{array} \right. \quad (\text{IV.1.69})$$

où

$$w_{i1} = l_i \hat{h}_i - \frac{1}{\lambda_{i2}} \hat{q}_i \quad \text{et} \quad w_{i2} = l_i \hat{h}_i - \frac{1}{\lambda_{i1}} \hat{q}_i, \quad (\text{IV.1.70})$$

avec

$$\lambda_{i1} = \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} - \sqrt{g \bar{h}_i}, \quad \lambda_{i2} = \frac{\bar{q}_i}{l_i \bar{h}_i} + \sqrt{g \bar{h}_i}, \quad (\text{IV.1.71})$$

et (\bar{h}_i, \bar{q}_i) satisfaisant l'état stationnaire (II.1.7).

La méthode Godunov pour les équations d'advection de la forme (IV.1.69) est similaire à la méthode Upwind. En utilisant l'expression (II.2.27) et la figure II.2, on remarque que l'information de la variable caractéristique, provient de la gauche ou de la droite suivant que la valeur propre est positive ou négative. Donc l'idée de la méthode *Upwind* est que l'information d'une variable caractéristique donnée, est obtenue en regardant la direction dans laquelle cette information est supposée provenir. On utilise cette idée de la méthode *Upwind* pour résoudre numériquement le modèle linéaire du réseau étoilé.

L'obtention de la solution en tout temps nécessite la donnée d'une condition initiale et d'une condition au bout pour chaque variable caractéristique (voir (II.2.27)). Pour les variables caractéristiques qui entrent dans le réseau (w_{12}, w_{21} et w_{31} , voir Figure II.3) en plus des conditions initiales, les conditions aux bouts sont disponibles grâce aux différents contrôles prescrits. Mais, pour les variables caractéristiques qui sortent du réseau (w_{21}, w_{22} et w_{32}), leur bout se situe à la jonction M et donc la disponibilité de leur condition au bout nécessite d'abord la résolution du système (II.2.29). Ce système met en relation $(w_{12}(t, L_1), w_{21}(t, 0), w_{31}(t, 0))$ et $(w_{21}(t, L_1), w_{22}(t, 0)$ et $w_{32}(t, 0))$ au niveau de la jonction M . Ainsi, il faut déterminer d'abord $(w_{12}(t, L_1), w_{21}(t, 0), w_{31}(t, 0))$ avant de déduire $(w_{21}(t, L_1), w_{22}(t, 0), w_{32}(t, 0))$ correspondant aux conditions aux bouts respectives aux variables caractéristiques quittant le réseau. La donnée de $w_{21}(t, L_1), w_{22}(t, 0)$ et $w_{32}(t, 0)$ au niveau de la jonction permettra d'avoir les solutions en tout temps des variables caractéristiques w_{21}, w_{22} et w_{32} , puisque la donnée initiale est disponible.

Soit $W_{ik,j}^n$ l'approximation de la moyenne de la variable caractéristique w_{ik} dans la $j^{\text{ième}}$ cellule, au temps t_n :

$$W_{ik,j}^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} w_{ik}(t_n, x) dx \quad (\text{IV.1.72})$$

Posons, $\mu = \lambda_{ik} \Delta t / \Delta x$, la formule correspondant à (IV.1.11) pour les variables caractéristiques dont la vitesse λ_{ik} est positive est donnée par

$$\begin{aligned} W_{ik,j}^{n+1} &= W_{ik,j}^n - \mu(W_{ik,j}^n - W_{ik,j-1}^n) \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) \left[\phi(\vartheta_{j+1/2}^n)(W_{ik,j+1}^n - W_{ik,j}^n) - \phi(\vartheta_{j-1/2}^n)(W_{ik,j}^n - W_{ik,j-1}^n) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.1.73})$$

ou par

$$\begin{aligned} W_{ik,j}^{n+1} &= W_{ik,j}^n - \mu(W_{ik,j+1}^n - W_{ik,j}^n) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mu(1 + \mu) \left[\phi(\vartheta_{j+1/2}^n)(W_{ik,j+1}^n - W_{ik,j}^n) - \phi(\vartheta_{j-1/2}^n)(W_{ik,j}^n - W_{ik,j-1}^n) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.1.74})$$

si la vitesse λ_{ik} est négative. Dans ces formules,

$$\vartheta_{j-1/2}^n = \frac{\Delta W_{ik,J-1/2}^n}{\Delta W_{ik,j-1/2}^n}, \quad J = \begin{cases} j-1 & \text{si } \lambda_{ik} > 0, \\ j+1 & \text{si } \lambda_{ik} < 0 \end{cases}, \quad \Delta W_{ik,j-1/2}^n = W_{ik,j}^n - W_{ik,j-1}^n,$$

et ϕ est donné par (IV.1.18).

La résolution numérique du réseau se fait comme suit :

Algorithme 1 Résolution numérique du modèle (IV.1.66)-(IV.1.68).

1. On détermine les valeurs internes des variables caractéristiques entrant dans le réseau. Autrement dit, $W_{12,j}^{n+1}$, $j = 2, \dots, N_1$ grâce à (IV.1.73), $W_{21,j}^{n+1}$, $j = 1, \dots, N_2 - 1$ grâce à (IV.1.74) et enfin $W_{31,j}^{n+1}$, $j = 1, \dots, N_3 - 1$ grâce à (IV.1.74). La valeur N_i , $i = 1, 2, 3$, est le nombre de cellule du canal i .
2. De l'étape 1, on a les valeurs au niveau de la jonction des variables caractéristiques W_{12} , W_{21} et W_{31} , i.e W_{12,N_1}^{n+1} , $W_{21,1}^{n+1}$ et $W_{31,1}^{n+1}$. Ainsi nous résolvons le système (II.2.29) pour obtenir les valeurs au niveau de la jonction des variables caractéristiques W_{11} , W_{22} et W_{32} , i.e W_{11,N_1}^{n+1} , $W_{22,1}^{n+1}$ et $W_{32,1}^{n+1}$.
3. On peut obtenir maintenant toutes les valeurs des variables caractéristiques qui quittent le réseau. Autrement dit, $W_{11,j}^{n+1}$, $j = 1, \dots, N_2$, grâce à (IV.1.74), $W_{22,j}^{n+1}$, $j = 1, \dots, N_2$, grâce à (IV.1.73) et $W_{32,j}^{n+1}$, $j = 1, \dots, N_3$, grâce à (IV.1.73).
4. De l'étape 3, on déduit pour chaque canal, la valeur au bout de la variable caractéristique sortante, i.e $W_{11,1}^{n+1}$, W_{22,N_2}^{n+1} et W_{32,N_3}^{n+1} . Donc, on utilise les relations suivantes pour déterminer l'expression des variables caractéristiques entrantes au niveau des bouts du réseau :

$$\begin{aligned} W_{12,1}^{n+1} &= W_{11,1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\lambda_{12}} - \frac{1}{\lambda_{12}} \right) \hat{q}_{1,0}(t_{n+1}), \\ W_{21,N_2}^{n+1} &= W_{21,N_2}^{n+1} - \left(\frac{1}{\lambda_{22}} - \frac{1}{\lambda_{21}} \right) \hat{q}_{2,L_2}(t_{n+1}), \\ W_{31,N_3}^{n+1} &= W_{31,N_3}^{n+1} - \left(\frac{1}{\lambda_{32}} - \frac{1}{\lambda_{31}} \right) \hat{q}_{3,L_3}(t_{n+1}), \end{aligned} \tag{IV.1.75}$$

où $\hat{q}_{1,0}(t)$, $\hat{q}_{2,L_2}(t)$ et $\hat{q}_{3,L_3}(t)$ sont les contrôles construits au chapitre (II) et qui sont donnés par (II.2.32).

5. Finalement, on déduit les valeurs de $(\hat{h}_{i,j}^{n+1}, \hat{q}_{i,j}^{n+1})$ en utilisant l'expression de \hat{h}_i et de \hat{q}_i en fonction de w_{1i} et de w_{2i} . Cette expression est obtenue à l'aide de la formule (IV.1.70). D'autre part, les cellules fantômes sont traitées comme dans la section IV.1.2.1.

L'algorithme 1 est répété à chaque pas de temps.

IV.1.3.2 Le modèle non linéaire

Pour le modèle non linéaire (II.1.1)-(II.1.6) du réseau étoilé, la formulation suivant les variables caractéristiques comme dans la section IV.1.3.1 n'est pas valable. Tout de même au niveau de la jonction on va utiliser une partie des arguments utilisées pour résoudre le modèle linéaire (section IV.1.3.1). Mais, en ce qui concerne les points à l'intérieur des différents canaux constituant le réseau, on se sert de la section IV.1.2.2 concernant la résolution du modèle non linéaire pour un canal. Ainsi, nous allons juste montrer comment la résolution numérique au niveau de la jonction a été faite et ensuite donner l'algorithme de la résolution du réseau tout entier.

Le modèle non linéaire du réseau est donné par

$$u_{it} + f_i(u_i)_x = 0, \quad (\text{IV.1.76})$$

où

$$u_i = \begin{pmatrix} h_i \\ q_i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_i(u_i) = \begin{pmatrix} q_i/l_i \\ \frac{q_i^2}{l_i h_i} + \frac{1}{2} g l_i h_i^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.1.77})$$

les conditions de jonction (voir (II.1.4)-(II.1.6)),

$$q_1(t, L_1) - q_2(t, 0) - q_3(t, 0) = 0, \quad \text{sur } M, \quad (\text{IV.1.78})$$

$$g h_1(t, L_1) + \frac{1}{2} \frac{q_1^2(t, L_1)}{l_1^2 h_1^2(t, L_1)} = g h_2(t, 0) + \frac{1}{2} \frac{q_2^2(t, 0)}{l_2^2 h_2^2(t, 0)}, \quad \text{sur } M, \quad (\text{IV.1.79})$$

$$g h_1(t, L_1) + \frac{1}{2} \frac{q_1^2(t, L_1)}{l_1^2 h_1^2(t, L_1)} = g h_3(t, 0) + \frac{1}{2} \frac{q_3^2(t, 0)}{l_3^2 h_3^2(t, 0)}, \quad \text{sur } M, \quad (\text{IV.1.80})$$

les conditions initiales (II.1.2) et conditions aux bouts :

$$q_1(t, 0) = \bar{q}_1 + \hat{q}_{1,0}(t), \quad q_2(t, L_2) = \bar{q}_2 + \hat{q}_{2,L_2}(t), \quad q_3(t, L_3) = \bar{q}_3 + \hat{q}_{3,L_3}(t), \quad (\text{IV.1.81})$$

où $\hat{q}_{1,0}(t)$, $\hat{q}_{2,L_2}(t)$ et $\hat{q}_{3,L_3}(t)$ sont les contrôles définis dans (II.2.32) et $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3)$ est l'état d'équilibre donné par (II.1.7).

On considère $U_{i,j}^n$ l'approximation de u_i dans la cellule j au temps t_n

$$U_{i,j}^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u_i(t_n, x) dx. \quad (\text{IV.1.82})$$

Pour résoudre les conditions de jonction (IV.1.78)-(IV.1.80), on se sert de la linéarisation locale

de Roe au niveau de la jonction M . Puisque, avec cette linéarisation on obtient un problème local linéaire, donc on peut définir les variables caractéristiques de ce dernier. Le problème local est

$$(\tilde{u}_i)_t + \tilde{A}_{i,j-1/2}^n (\tilde{u}_i)_x = 0, \quad (\text{IV.1.83})$$

avec

$$\tilde{A}_{i,j-1/2}^n = f'_i(\tilde{U}_{i,j-1/2}^n), \quad \tilde{U}_{i,j-1/2}^n = \begin{pmatrix} \tilde{h}_{i,j-1/2}^n \\ \tilde{q}_{i,j-1/2}^n \end{pmatrix} \quad (\text{IV.1.84})$$

et $(\tilde{h}_{i,j-1/2}^n, \tilde{q}_{i,j-1/2}^n)$ est donné par (IV.1.62) où on remplace (h_j^n, q_j^n) par $(h_{i,j}^n, q_{i,j}^n)$. Les valeurs propres $\tilde{\lambda}_{i1}^n$ et $\tilde{\lambda}_{i2}^n$ sont similaires à (IV.1.63) avec $(\tilde{h}_{j-1/2}^n, \tilde{q}_{j-1/2}^n) = (\tilde{h}_{i,j-1/2}^n, \tilde{q}_{i,j-1/2}^n)$. Ainsi puisque la forme (IV.1.83) est linéaire, on définit les variables caractéristiques par :

$$W_{i1,j}^n = l_i h_{i,j}^n - \frac{1}{\tilde{\lambda}_{i2}^n} q_{i,j}^n \quad \text{et} \quad W_{i2,j}^n = l_i h_{i,j}^n - \frac{1}{\tilde{\lambda}_{i1}^n} q_{i,j}^n, \quad (\text{IV.1.85})$$

Au temps t_{n+1} , on réécrit les conditions (IV.1.78)-(IV.1.80) sous forme de variables caractéristiques exprimées au niveau de la jonction M :

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_1 W_{11,N_1}^{n+1} - a_2 W_{22,1}^{n+1} - a_3 W_{32,1}^{n+1} + a_1 W_{12,N_1}^{n+1} + a_2 W_{21,1}^{n+1} + a_3 W_{31,1}^{n+1} = 0, \\ gb_1 W_{11,N_1}^{n+1} - gb_2 W_{21,1}^{n+1} - gc_1 W_{12,N_1}^{n+1} + gc_2 W_{22,1}^{n+1} \\ \quad + \frac{(a_1 W_{12,N_1}^{n+1} - a_1 W_{11,N_1}^{n+1})^2}{2l_1^2 (b_1 W_{11,N_1}^{n+1} - c_1 W_{12,N_1}^{n+1})^2} - \frac{(a_2 W_{22,1}^{n+1} - a_2 W_{21,1}^{n+1})^2}{2l_1^2 (b_2 W_{21,1}^{n+1} - c_2 W_{22,1}^{n+1})^2} = 0, \\ gb_1 W_{11,N_1}^{n+1} - gb_3 W_{31,1}^{n+1} - gc_1 W_{12,N_1}^{n+1} + gc_3 W_{32,1}^{n+1} \\ \quad + \frac{(a_1 W_{12,N_1}^{n+1} - a_1 W_{11,N_1}^{n+1})^2}{2l_1^2 (b_1 W_{11,N_1}^{n+1} - c_1 W_{12,N_1}^{n+1})^2} - \frac{(a_3 W_{32,1}^{n+1} - a_3 W_{31,1}^{n+1})^2}{2l_1^2 (b_3 W_{31,1}^{n+1} - c_3 W_{32,1}^{n+1})^2} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{IV.1.86})$$

où

$$a_i = \frac{1}{\tilde{\lambda}_{i2}^n} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_{i1}^n}, \quad b_i = \frac{\tilde{\lambda}_{i2}^n}{l_i (\tilde{\lambda}_{i2}^n - \tilde{\lambda}_{i1}^n)}, \quad c_i = \frac{\tilde{\lambda}_{i1}^n}{l_i (\tilde{\lambda}_{i2}^n - \tilde{\lambda}_{i1}^n)}. \quad (\text{IV.1.87})$$

Pour les variables caractéristiques entrant dans le réseau et exprimées au niveau de M (i.e, W_{12,N_1}^{n+1} , $W_{21,1}^{n+1}$ et $W_{31,1}^{n+1}$), on utilise l'idée de la méthode *Upwind* décrite dans la section IV.1.3.1,

pour leur donner des valeurs approximatives. Pour ce faire on utilise les extrapolations suivantes :

$$\begin{aligned} W_{12,N_1}^{n+1} &= W_{12,N_1-1}^n, \\ W_{21,1}^{n+1} &= W_{21,2}^n, \\ W_{31,1}^{n+1} &= W_{31,2}^n. \end{aligned} \tag{IV.1.88}$$

D'après (IV.1.88), les variables caractéristiques W_{12,N_1}^{n+1} , $W_{21,1}^{n+1}$ et $W_{31,1}^{n+1}$ sont connues, et donc le système (IV.1.86) devient un système non linéaire de trois équations à trois inconnus que sont W_{11,N_1}^{n+1} , $W_{22,1}^{n+1}$ et $W_{32,1}^{n+1}$,

$$G(W^{n+1}) = 0, \quad W^{n+1} = \begin{pmatrix} W_{11,N_1}^{n+1} \\ W_{22,1}^{n+1} \\ W_{32,1}^{n+1} \end{pmatrix}. \tag{IV.1.89}$$

La résolution numérique du réseau se fait comme suit :

Algorithme 2 Résolution numérique du modèle (II.1.1)-(II.1.6).

1. Ayant déjà $(h_{1,N_1-1}^n, q_{1,N_1-1}^n)$, $(h_{2,2}^n, q_{2,2}^n)$ et $(h_{3,2}^n, q_{3,2}^n)$, on obtient respectivement W_{12,N_1-1}^n , $W_{21,2}^n$ et $W_{31,2}^n$ à partir de (IV.1.85) et ensuite, on déduit $W_{12,N}^{n+1}$, $W_{21,1}^{n+1}$ et $W_{31,1}^{n+1}$ grâce à (IV.1.88).
2. L'obtention de W_{12,N_1}^{n+1} , $W_{21,1}^{n+1}$ et $W_{31,1}^{n+1}$ nous permet de déterminer W_{11,N_1}^{n+1} , $W_{22,1}^{n+1}$ et $W_{32,1}^{n+1}$ en résolvant le système non linéaire (IV.1.89).
3. Les étapes 1 et 2 permettent d'avoir les valeurs de h et q au niveau de la jonction en utilisant (IV.1.85), i.e $(h_{1,N_1}^{n+1}, q_{1,N_1}^{n+1})$, $(h_{2,1}^{n+1}, q_{2,1}^{n+1})$ et $(h_{3,1}^{n+1}, q_{3,1}^{n+1})$.
4. Enfin, on détermine les valeurs des variables h et q au sein des différents canaux en se servant de la section IV.1.2.2. C'est à dire, $(h_{1,j}^{n+1}, q_{1,j}^{n+1})$, $j = 1, \dots, N_1 - 1$, $(h_{2,j}^{n+1}, q_{2,j}^{n+1})$, $j = 2, \dots, N_2$ et $(h_{3,j}^{n+1}, q_{3,j}^{n+1})$, $j = 2, \dots, N_3$.
5. Les conditions aux bords (IV.1.81) sont à considérer au temps t_n et la mise en oeuvre des cellules fantômes se fait comme en (IV.1.48) où (\hat{h}, \hat{q}) est remplacé par (h_i, q_i) , $i = 1, 2, 3$.

L'algorithme 2 est répété à chaque pas de temps.

IV.1.4 Application sur le réseau en cascade

IV.1.4.1 Le cas d'un bief

La résolution du problème linéaire (III.2.6)-(III.2.8) se fait comme celle de (IV.1.20)-(IV.1.22) (voir section IV.1.2.1). Pour le modèle non linéaire (III.2.1)-(III.2.3), le système

(III.2.1) n'est équivalent à (II.3.1) que pour des données continues. Pour des problèmes comportant des chocs, il est important d'utiliser la forme conservative (II.3.1) afin de les calculer correctement. D'ailleurs, puisque la forme conservative de la méthode des volumes finis est basée sur la forme intégrale de la loi de conservation, il est plus adéquate d'utiliser les équations (II.3.1) qui surviennent naturellement sous leur forme intégrale. Donc, on utilise la résolution numérique de (II.3.1) donnée à la section IV.1.2.2, en prenant la précaution suivante pour les conditions aux bouts :

$$q(t, 0) = lh(t, 0)(\bar{v} + \hat{v}_0(t)) \quad \text{et} \quad q(t, L) = lh(t, L)(\bar{v} + \hat{v}_L(t)). \quad (\text{IV.1.90})$$

où

$$\hat{v}_L(t) = -\frac{b_2(t)}{2} \left(\sqrt{1 - \theta_2(t)} - 1 \right), \quad \hat{v}_0(t) = -\frac{b_1(t)}{2} \left(\sqrt{1 - \theta_1(t)} - 1 \right), \quad (\text{IV.1.91})$$

$$b_1(t) = \begin{cases} \hat{v}(0, |\lambda_1|t) - \sqrt{\frac{g}{h}} \hat{h}(0, |\lambda_1|t), & \text{si } t \leq L/|\lambda_1|, \\ \hat{v}(t - L/|\lambda_1|, L) - \sqrt{\frac{g}{h}} \hat{h}(t - L/|\lambda_1|, L), & \text{si } t \geq L/|\lambda_1|, \end{cases} \quad (\text{IV.1.92})$$

$$b_2(t) = \begin{cases} \hat{v}(0, L - \lambda_2 t) + \sqrt{\frac{g}{h}} \hat{h}(0, L - \lambda_2 t), & \text{si } t \leq L/\lambda_2, \\ \hat{v}(t - L/\lambda_2, 0) + \sqrt{\frac{g}{h}} \hat{h}(t - L/\lambda_2, 0), & \text{si } t \geq L/\lambda_2, \end{cases} \quad (\text{IV.1.93})$$

$\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ sont dans $]0, 1]$ et (\bar{h}, \bar{v}) est l'état d'équilibre (III.2.4). La mise en oeuvre des cellules fantômes se fait comme en (IV.1.48) où (\hat{h}, \hat{q}) est remplacé par (h, q) . Il faut noter qu'il existe des méthodes numériques pour les système d'équations hyperboliques non conservatives (voir [5] et [34]).

IV.1.4.2 Le cas du réseau en cascade

La résolution numérique du modèle linéaire du réseau en cascade se fait comme suit :

Algorithme 3 *Résolution du modèle linéaire du réseau en cascade*

1. Pour le bief 1, les contrôles $\hat{v}_{1,0}(t)$ et $\hat{v}_{1,L_1}(t)$ donnés par (III.1.16) sont les conditions aux bouts $x = 0$ et $x = L_1$. Ainsi, on considère les équations (III.1.8.a)-(III.1.8.b) et on agit comme à la section (IV.1.2.1) pour déduire $\hat{h}_{1,j}^n$ and $\hat{v}_{1,j}^n$ sur tout le bief.
2. La valeur $\hat{v}_{2,0}(t)$ correspondant au bout $x = 0$ du bief 2 est déterminée à partir de la relation (III.3.8) qui est issue de la condition (III.1.8.c) sur la conservation du débit au niveau de la jonction.

3. Pour le bief 2, la valeur $\hat{v}_{2,0}(t)$ obtenu à l'étape 2 et le contrôle $\hat{v}_{2,L_2}(t)$ donné par (III.1.16) sont respectivement les conditions aux bords $x = 0$ et $x = L_2$. Ainsi, on procède comme à l'étape 1 pour déterminer $\hat{h}_{2,j}^n$ and $\hat{v}_{2,j}^n$ sur tout le bief.

Pour le modèle non linéaire, les équations à considérer sont (II.1.1) sur chaque bief en plus de la condition sur la conservation du débit ($q_1 = q_2$), les conditions initiales (II.1.2) et les conditions aux bords

$$\begin{aligned} q_{1,0}(t) &= lh_1(t, 0)(\bar{v}_1 + \hat{v}_{1,0}(t)), \\ q_{1,L_1}(t) &= lh_1(t, L_1)(\bar{v}_1 + \hat{v}_{1,L_1}(t)), \\ q_{2,L_2}(t) &= lh_2(t, L_2)(\bar{v}_2 + \hat{v}_{2,L_2}(t)). \end{aligned} \tag{IV.1.94}$$

où $\hat{v}_{1,0}(t)$, $\hat{v}_{1,L_1}(t)$ et $\hat{v}_{2,L_2}(t)$ sont les contrôles donnés par (III.1.16). Ainsi, la résolution numérique du modèle non linéaire du réseau en cascade se fait comme suit :

Algorithme 4 Résolution du modèle non linéaire du réseau en cascade

1. Pour le bief 1, les contrôles $q_{1,0}(t)$ et $q_{1,L_1}(t)$ donnés par (IV.1.94) sont les conditions aux bords $x = 0$ et $x = L_1$. Ainsi, on considère les équations (II.1.1) et on agit comme à la section (IV.1.2.2) pour déduire $(h_{1,j}^n, q_{1,j}^n), j = 1, \dots, N_1$ sur tout le bief.
2. A travers la condition sur la conservation du débit au niveau de la jonction ($q_{1,L_1}(t) = q_{2,0}(t)$), on a $q_{2,0}(t)$ qui correspond au bord $x = 0$ du bief 2.
3. Pour le bief 2, la valeur $q_{2,0}(t)$ obtenue à l'étape 2 et le contrôle $q_{2,L_2}(t)$ donné par (IV.1.94) sont respectivement les conditions aux bords $x = 0$ et $x = L_2$. Ainsi, on procède comme à l'étape 1 pour déterminer $(h_{2,j}^n, q_{2,j}^n), j = 1, \dots, N_2$ sur tout le bief.
4. Les conditions aux bords (IV.1.94) sont à considérer au temps t_n en remplaçant $(h_1(t, 0), h_1(t, L_1), h_2(t, L_2))$ par $(h_{1,1}^n, h_{1,N_1}^n, h_{2,N_2}^n)$.

IV.2 Résultats numériques concernant le réseau étoilé

IV.2.1 Le cas d'un canal

Les débits au niveau des bords sont les contrôles. Du point de vue pratique, il y a une variété d'outils (portes, pompes etc) utilisés pour mettre en oeuvre les contrôles construits. Pour ce document, les contrôles sont matérialisés à travers l'ouverture de portes immergées, localisées au niveau des bords ($x = 0$) et ($x = L$) du canal (voir Fig IV.4). Soient p_0 et p_L les ouvertures respectives de la porte amont et aval, il existe une relation entre l'ouverture de la porte et le débit au bout du canal (voir [33], [18]). La relation est donnée par

$$q(t, 0) = p_0(t)k_1\sqrt{2g(H_{amont} - h(t, 0))} \tag{IV.2.1}$$

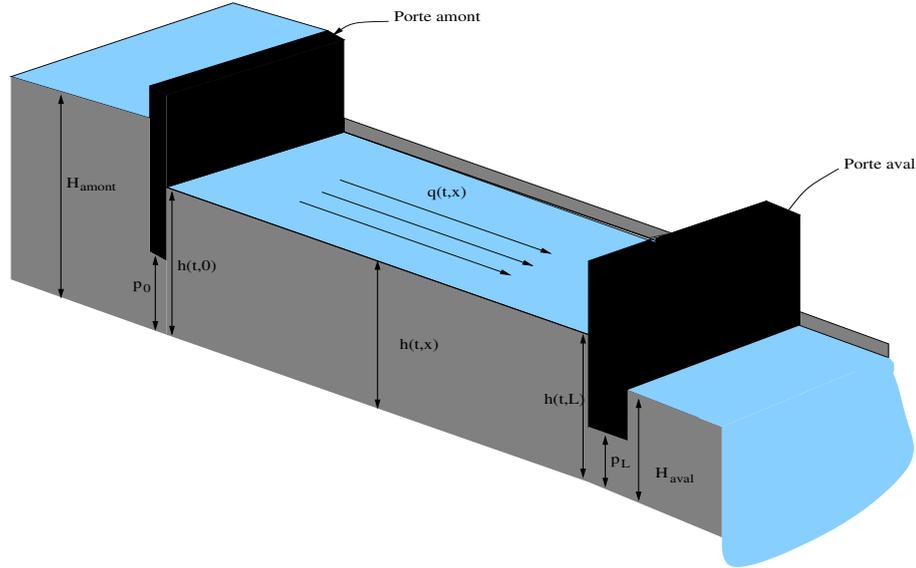


Figure IV.4 – Un canal délimité par des portes immergées

pour la porte située en amont du canal et

$$q(t, L) = p_L(t)k_2\sqrt{2g(h(t, L) - H_{aval})}, \quad (\text{IV.2.2})$$

pour la porte située en aval du canal. Ici, k_1 et k_2 sont des caractéristiques des portes (on considère le cas $k_1 = k_2 = 1$), $q(t, 0)$ et $q(t, L)$ sont donnés par (IV.1.54), H_{amont} et H_{aval} sont respectivement les hauteurs d'eau en amont et en aval du canal. Les grandeurs H_{amont} et H_{aval} sont supposées être constantes et satisfont $H_{amont} > h(t, 0)$ et $h(t, L) > H_{aval}$.

Voir par exemple les documents [10] et [32] pour plus de détails sur les outils de contrôle.

IV.2.1.1 Entre le modèle linéaire et le non linéaire

Dans cette partie, nous faisons la comparaison entre le modèle linéaire (II.3.5)-(II.3.7) et le non linéaire (II.3.1)-(II.3.3) en supposant que les bouts $x = 0$ et $x = L$ sont bouchés (i.e $q(t, 0) = 0$ et $q(t, L) = 0$). Nous considérons un canal de longueur $L = 1m$, et de largeur $l = 1m$. L'état d'équilibre est $(\bar{h}(x), \bar{q}(x)) = (1m, 0m^3s^{-1})$ et la condition initial est une gaussienne pour la hauteur et zéro pour le débit :

$$h(0, x) = 1.5 + \exp(-1000(x - L/2)^2), \quad q(0, x) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (\text{IV.2.3})$$

Les résultats sur la comparaison entre le modèle linéaire et non linéaire sont montrés par la figure IV.5 pour la hauteur et par la figure IV.6 pour le débit.

Commentaire IV.2.1 *Dans les deux cas, la condition initiale se divise en deux ondes allant chacune dans une direction opposée à l'autre et ceci est dû au fait que les deux valeurs propres*

sont de signes opposés. La vitesse de l'onde est donnée par la valeur absolue de la valeur propre et sa direction par le signe de celle-ci. Pour le modèle linéaire, les deux ondes se propagent avec la même vitesse constante, puisque $|\lambda_1| = \lambda_2 = \sqrt{9.81\bar{h}(x)}$, mais elles gardent leur forme inchangée (voir Fig IV.5 et IV.6). Pour le modèle non linéaire, tout en se propageant avec la même vitesse qui dépend du temps parce que $|\lambda_1| = \lambda_2 = \sqrt{9.81h(t,x)}$, l'avant de l'onde (par rapport à la direction) se transforme en un choc et que l'arrière de celle-ci, en une rarefaction (voir Fig IV.5 et IV.6). En effet, la distorsion non-linéaire d'une onde conduit à une accentuation de celle-ci dans la région où la crête en mouvement rattrape une cuvette située devant et beaucoup plus lente qu'elle (l'onde se comprime et devient alors un choc) et d'un aplatissement de celle-ci dans la région où la crête s'éloigne de la cuvette située derrière elle (l'onde s'étend et devient une raréfaction).

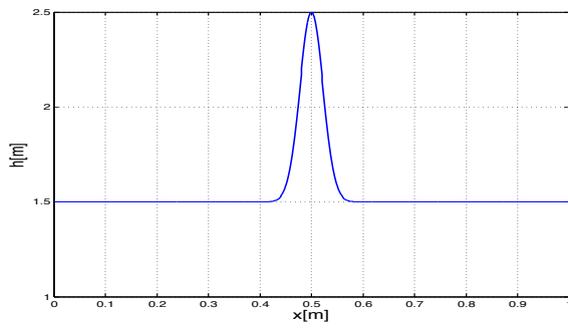
IV.2.1.2 Application des contrôles

Dans cette partie, nous appliquons premièrement les contrôles construits dans le chapitre II au modèle non linéaire (II.3.1)-(II.3.3) en considérant un état résiduel (\hat{h}, \hat{q}) très petit par rapport à l'état d'équilibre (\bar{h}, \bar{q}) . En le faisant, nous montrons effectivement les résultats concernant la décroissance de l'état résiduel (\hat{h}, \hat{q}) vers zéro en temps (voir Théorèmes II.3.1 et II.5.1) pour le modèle linéaire (II.3.5)-(II.3.7). Puisque, ce modèle linéaire est obtenu à partir du non linéaire en utilisant l'hypothèse sur la petitesse de l'état résiduel par rapport à l'état d'équilibre (voir section II.2.1). Deuxièmement, on considère le modèle non linéaire avec un état résiduel qui n'est pas très petit par rapport à l'état d'équilibre. L'objectif de ceci, est de montrer la robustesse et la flexibilité de la méthode de contrôle. En d'autres termes, c'est de montrer qu'on a les résultats de décroissance de l'état résiduel (\hat{h}, \hat{q}) vers zéro en temps pour des contrôles construits à partir d'un modèle linéaire très différent du non linéaire. Ceci est d'un grand intérêt puisque les contrôles sont destinés à être appliqués dans la réalité et que les modèles représentant cette réalité (du moins dans le cas des écoulements) sont non seulement non linéaires mais peuvent ne pas tenir en compte certains paramètres du milieu lors de leur établissement.

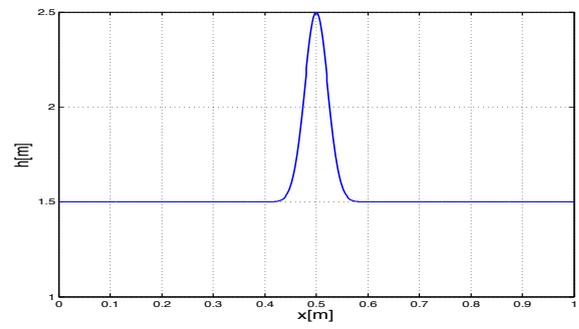
Exemple IV.2.1 Nous considérons un canal de longueur $L = 50m$, de largeur $l = 1m$. L'état d'équilibre est $(\bar{h}(x), \bar{q}(x)) = (1m, 1.5m^3s^{-1})$. Le pas d'espace est $\Delta x = 0.5m$ et celui du temps est $\Delta t = 1s$. Pour l'ouverture des portes, nous choisissons $H_{up} = 2.5m$ et $H_{down} = 0.5m$ respectivement dans les relations (IV.2.1) et (IV.2.2). Pour la condition initiale on a :

1. $(h(0, x), q(0, x)) = (1.1m, 1.65m^3s^{-1})$ et donc $(\hat{h}(0, x), \hat{q}(0, x)) = (0.1m, 0.15m^3s^{-1})$;
2. $(h(0, x), q(0, x)) = (2m, 2.5m^3s^{-1})$ et donc $(\hat{h}(0, x), \hat{q}(0, x)) = (1m, 1m^3s^{-1})$.

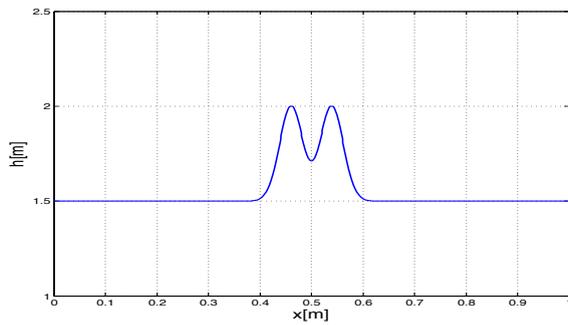
Les résultats de l'exemple IV.2.1 sont montrés par la figure IV.7.



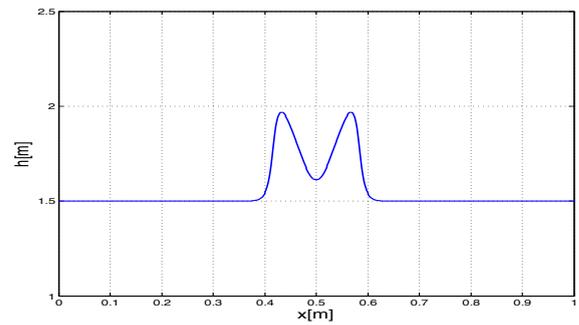
(a) h à $t = 0$



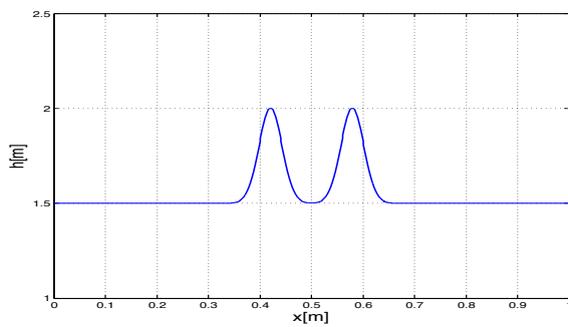
(b) h à $t = 0$



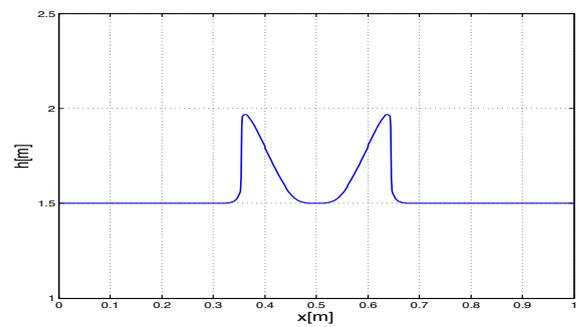
(a) h à $t = 0.0125$



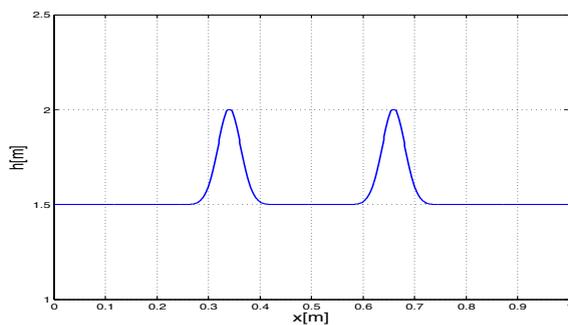
(b) h à $t = 0.0125$



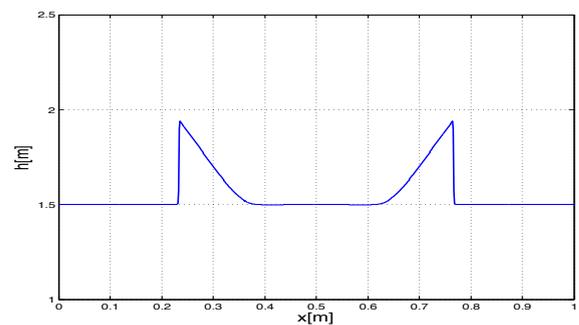
(a) h à $t = 0.025$



(b) h à $t = 0.025$

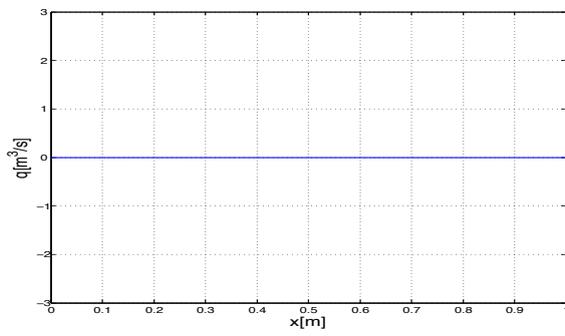


(a) h à $t = 0.05$

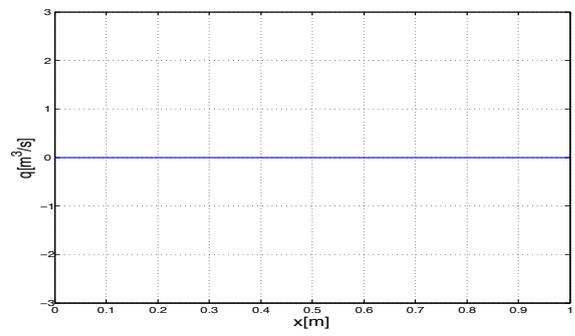


(b) h à $t = 0.05$

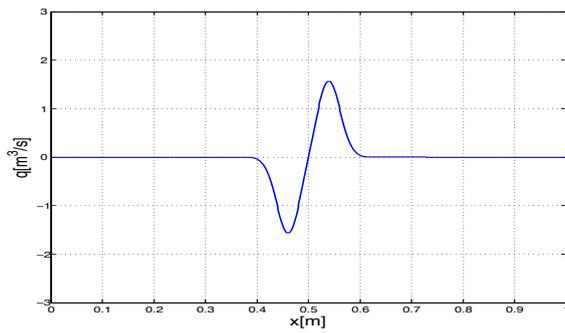
Figure IV.5 – Représentation de la hauteur d'eau à différents temps à partir du modèle linéaire (a) et du modèle non linéaire (b). La gaussienne initiale se divise en deux ondes, l'une allant à gauche et l'autre à droite.



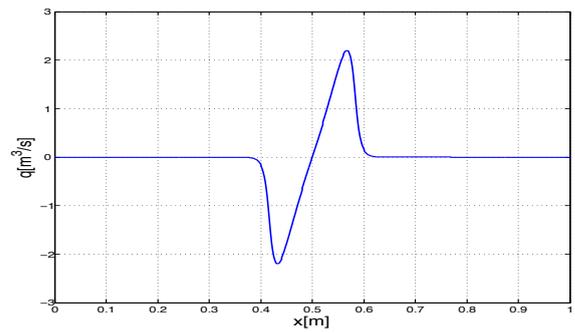
(a) q à $t = 0$



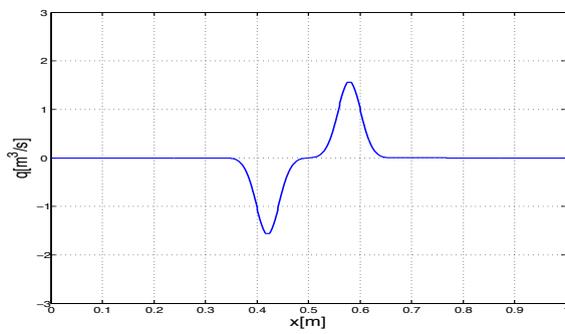
(b) q à $t = 0$



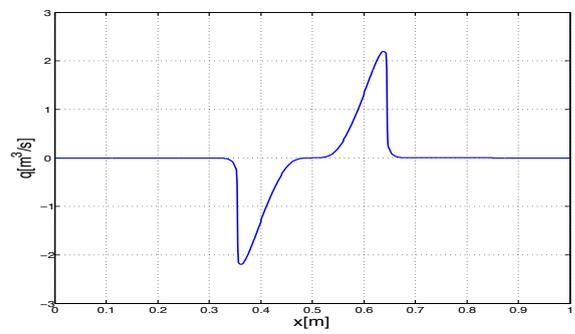
(a) q à $t = 0.0125$



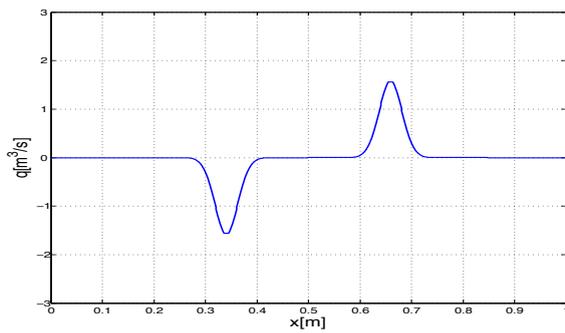
(b) q à $t = 0.0125$



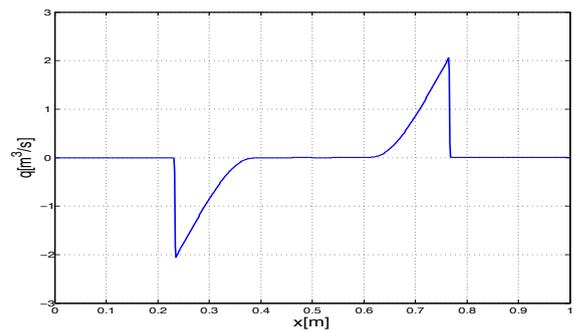
(a) q à $t = 0.025$



(b) q à $t = 0.025$



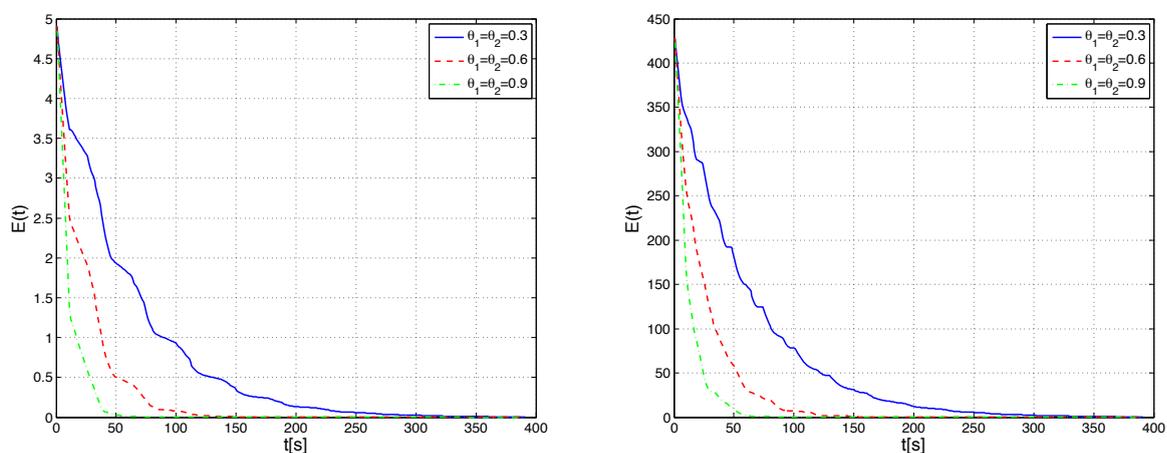
(a) q à $t = 0.05$



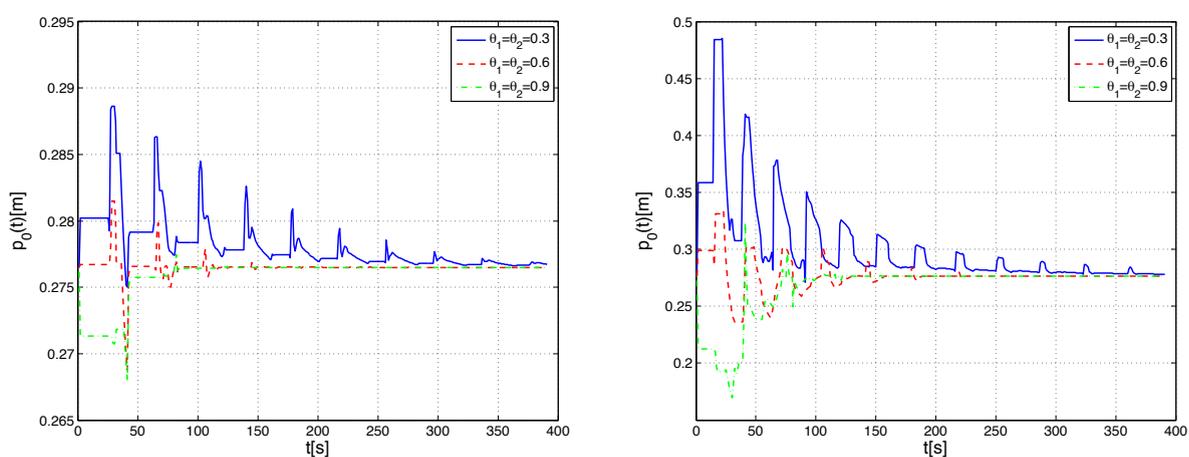
(b) q à $t = 0.05$

Figure IV.6 – Représentation du débit de l'eau à différents temps à partir du modèle linéaire (a) et du modèle non linéaire (b).

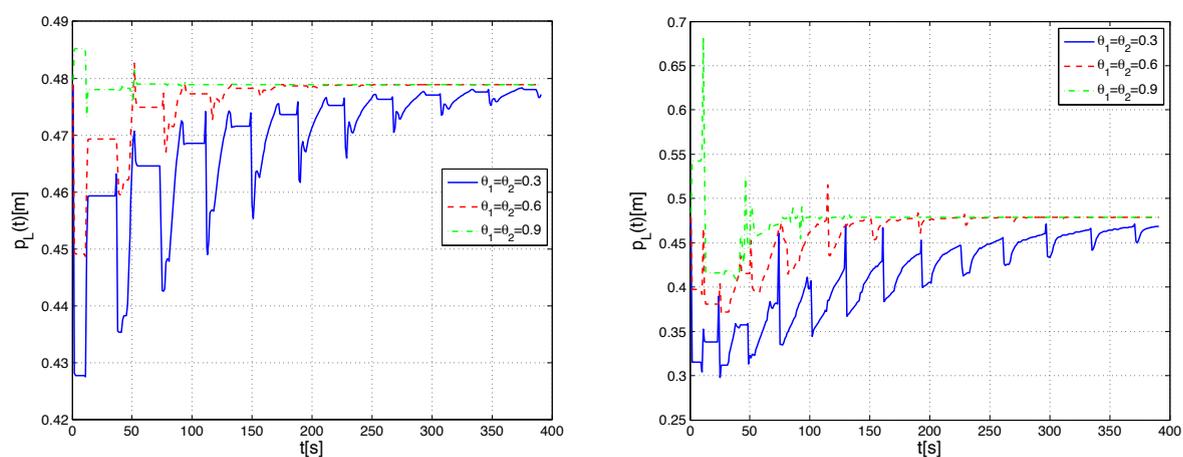
IV.2 Résultats numériques concernant le réseau étoilé



(a) Evolution de l'énergie



(b) Ouverture de la porte en amont



(c) Ouverture de la porte en aval

Figure IV.7 – Evolution de l'énergie et l'ouverture des portes suivant différentes valeurs de θ_1 , θ_2 et les données de l'exemple IV.2.1. La partie gauche concerne la petite perturbation (condition initiale 1) et la partie de droite, la grande perturbation (condition initiale 2).

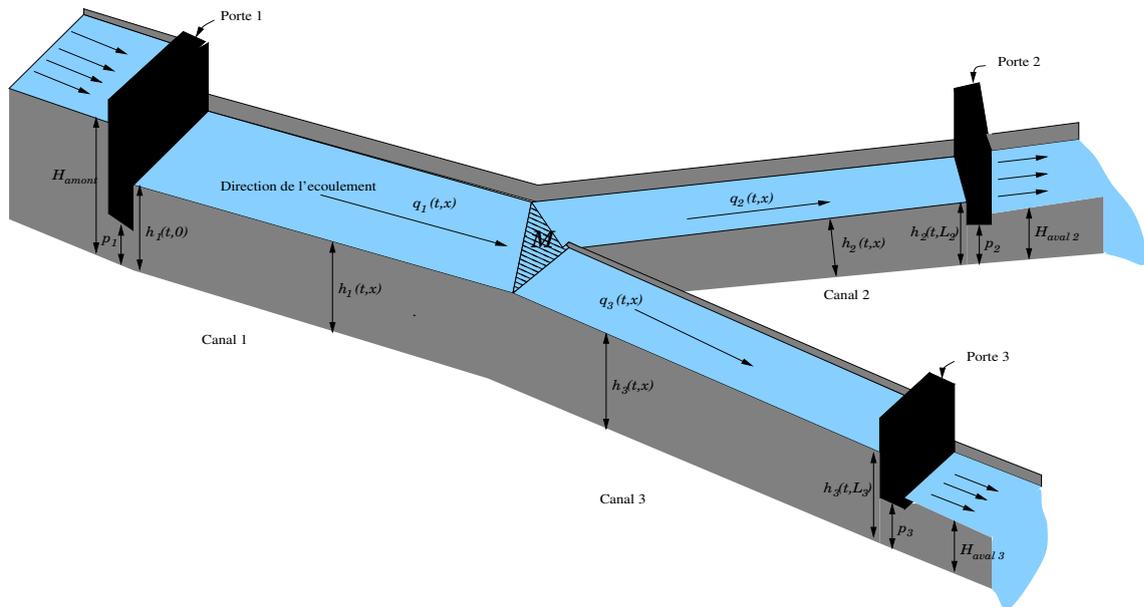


Figure IV.8 – Le réseau étoilé délimité par des portes immergées

Commentaire IV.2.2 En considérant une petite perturbation d'une part, une grosse d'autre part et les mêmes valeurs pour θ_1 et θ_2 , on remarque qu'on a presque la même forme de décroissance de l'énergie (Fig IV.7.(a)). Ceci est dû au fait que l'amplitude du contrôle dépend de la perturbation et du choix des fonctions θ constituant le taux de décroissance de l'énergie (voir (IV.1.49)). Par ailleurs, on voit que plus les fonctions θ s'approchent de 1, plus la décroissance de l'énergie est rapide, ceci est d'ailleurs montré dans le Théorème II.3.1. Aussi, plus les fonctions θ s'approchent de 1, plus petit (resp. plus grand) est l'ouverture de la porte située en amont (resp. aval) du canal (voir Fig IV.7.(b)-(c)). D'autre part, l'amplitude des oscillations des portes diminue avec l'augmentation des valeurs des fonctions θ . Ces oscillations sont dues aux réflexions au niveau des bouts et donc leur amplitude dépend de l'ampleur de ces réflexions. D'ailleurs ces oscillations sont perceptibles sur la forme de décroissance de l'énergie (Fig IV.7.(a)).

On peut noter aussi la présence de parties qui semblent être des discontinuités sur l'ouverture des portes, surtout pour la porte située en aval. Cependant, on peut agir sur les fonctions θ afin d'avoir une ouverture de porte assez acceptable. En effet, puisque ces fonctions appartiennent à l'intervalle $]0, 1]$ et peuvent dépendre du temps, on peut avoir une large possibilité de choix. D'autre part, ces fonctions peuvent être choisies en fonction du type d'outil de contrôle utilisé.

IV.2.2 Le cas du réseau étoilé

Comme dans le cas d'un seul canal, les portes sont situées au niveau des bouts libres du réseau (Fig IV.8). Les variables p_1 , p_2 et p_3 sont respectivement les ouvertures des portes dans

les canaux 1, 2 et 3. Ces ouvertures sont liées avec les débits par les relations

$$\begin{aligned}
 q_1(t, 0) &= p_1(t) \sqrt{2g(H_{amont} - h_1(t, 0))}, \\
 q_2(t, L_2) &= p_2(t) \sqrt{2g(h_2(t, L_2) - H_{aval2})}, \\
 q_3(t, L_3) &= p_3(t) \sqrt{2g(h_3(t, L_3) - H_{aval3})},
 \end{aligned}
 \tag{IV.2.4}$$

où $q_1(t, 0)$, $q_2(t, L_2)$ et $q_3(t, L_3)$ sont donnés par (IV.1.81). Les grandeurs H_{amont} , H_{aval2} et H_{aval3} sont les hauteurs d'eau à l'extérieur du réseau et sont supposées être constantes (voir Fig IV.8).

IV.2.2.1 Evolution de la hauteur d'eau au niveau de la jonction M

Exemple IV.2.2 *Nous montrons le comportement de la hauteur et du débit au niveau de la jonction M en utilisant le modèle non linéaire (II.1.1)-(II.1.6). Pour ce faire, on considère des canaux de même longueur $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ et de même largeur $l_1 = l_2 = l_3 = 1$. Les bouts du réseau sont bouchés ($q_{1,0}(t) = q_{2,L_2}(t) = q_{3,L_3}(t) = 0$) et la condition initiale est :*

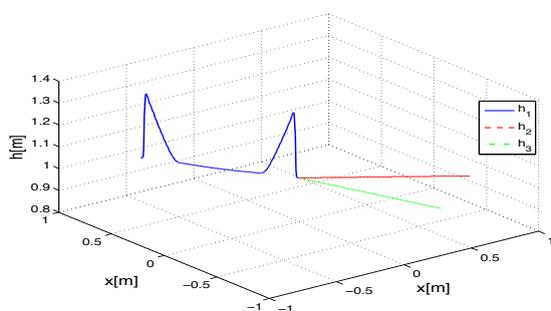
$$\begin{aligned}
 \text{canal 1 : } h_1(0, x) &= 1.5 + \exp(-1000(x - L_1/2)^2), & q_1(0, x) &= 0, & x &\in [0, L_1], \\
 \text{canal 2 : } h_2(0, x) &= 1.5, & q_2(0, x) &= 0, & x &\in [0, L_2], \\
 \text{canal 3 : } h_3(0, x) &= 1.5, & q_3(0, x) &= 0, & x &\in [0, L_3].
 \end{aligned}
 \tag{IV.2.5}$$

Les résultats de l'exemple IV.2.2, sont montrés par la figure IV.9.

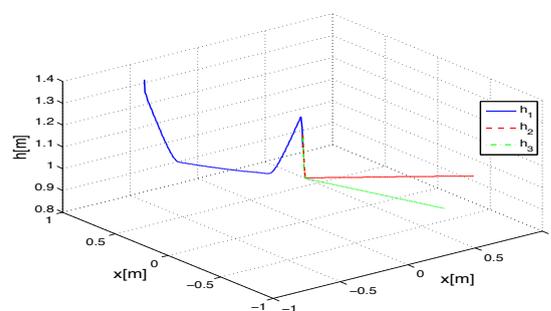
Commentaire IV.2.3 *La condition initiale se divise en deux ondes comportant chacune une raréfaction et un choc (voir commentaire à la section IV.2.1.1). Une partie du choc arrivant au niveau de la jonction est transmis aux deux canaux (Fig IV.9) et l'autre partie est réfléchié progressivement sous des formes diverses. Ces formes vont d'une raréfaction et d'un choc (Fig IV.9.(c)-(d)) à deux raréfactions (Fig IV.9.(d)-(h)). En effet la jonction se comporte comme un bord physique, c'est pour cela qu'une partie des ondes qui la heurte est réfléchié à l'intérieur des différents canaux. Le comportement d'un bord physique est expliqué dans la partie traitement des conditions aux bouts de la section IV.1.2.1.*

IV.2.2.2 Application des contrôles

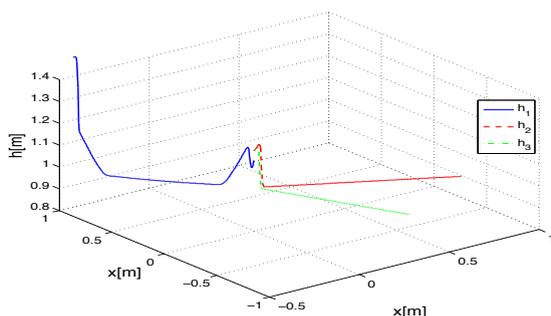
On procède comme à la section IV.2.1.2 en considérant d'abord une petite perturbation et ensuite une grande perturbation. Le modèle non linéaire (II.1.1)-(II.1.6) est utilisé avec la petite perturbation pour montrer les résultats sur la décroissance de l'énergie du modèle linéaire (II.2.16)-(II.2.18) (voir Théorèmes II.2.1 et II.4.1). L'objectif de la grande perturbation est de montrer la robustesse de la méthode de contrôle.



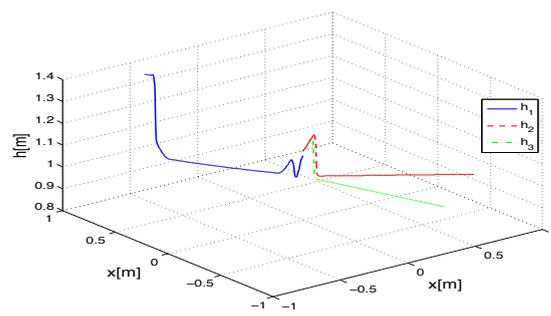
(a) La hauteur à $t = 0.1107s$



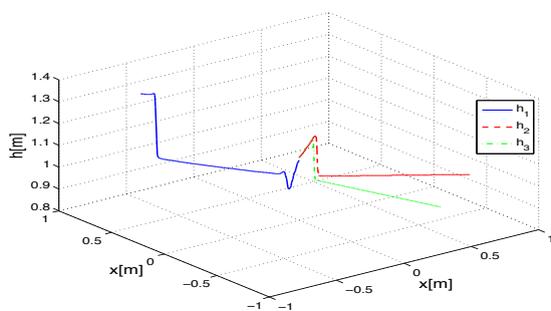
(b) La hauteur à $t = 0.1185s$



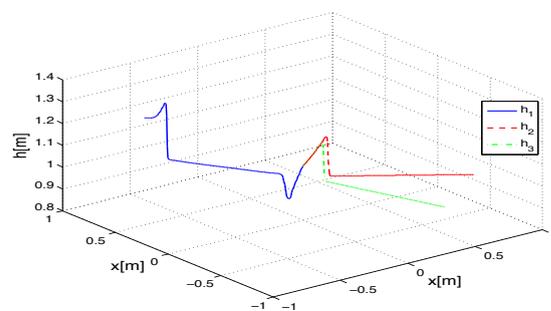
(c) La hauteur à $t = 0.1265s$



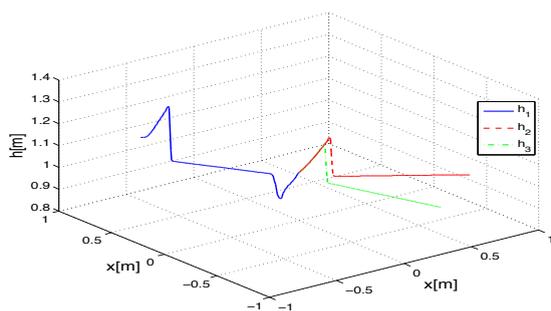
(d) La hauteur à $t = 0.1383s$



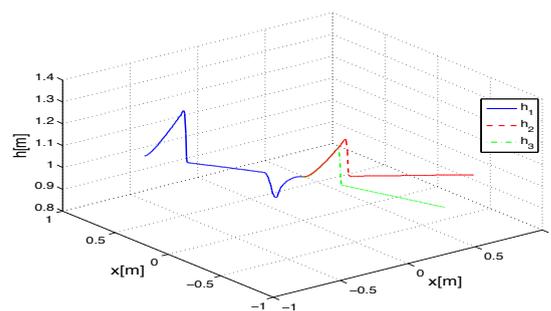
(e) La hauteur à $t = 0.1462s$



(f) La hauteur à $t = 0.1581s$



(g) La hauteur à $t = 0.17s$



(h) La hauteur à $t = 0.1897s$

Figure IV.9 – Représentation de la hauteur d'eau à différents temps à partir du modèle non linéaire suivant les données de l'exemple IV.2.2 : focus sur la jonction

Exemple IV.2.3 *Nous effectuons les simulations sur un réseau dont $L_1 = 30m$, $L_2 = 40m$, $L_3 = 50m$ et ayant une largeur de $1m$ pour les trois canaux. Pour l'état d'équilibre on donne $\bar{q}_{1,0} = 1.5m^3s^{-1}$, $\bar{q}_{2,L_2} = 0.7m^3s^{-1}$, $\bar{h}_{3,L_3} = 1m$ pour ensuite obtenir les valeurs $(\bar{h}_i(x), \bar{q}_i(x))$, $i = 1, 2, 3$ dans les canaux respectifs à partir du système (II.1.7). En ce qui concerne la condition initiale on a :*

1. *Petite perturbation*

Canal 1 : $h_1^0(x) = 2m$ et $q_1^0(x) = 2.5m^3s^{-1}$.

Canal 2 : $q_2^0(x) = 1.5m^3s^{-1}$ et $h_2^0(x) = h_2^0(0)$ où $h_2^0(0)$ est déduit de (II.1.5).

Canal 3 : $q_3^0(x) = q_3^0(0)$ et $h_3^0(x) = h_3^0(0)$ où $q_3^0(0)$ et $h_3^0(0)$ sont respectivement déduits de (II.1.4) et (II.1.6).

2. *Grande perturbation*

Canal 1 : $h_1^0(x) = 2m$ et $q_1^0(x) = 2.5m^3s^{-1}$.

Canal 2 : $q_2^0(x) = 1.5m^3s^{-1}$ et $h_2^0(x) = h_2^0(0)$ où $h_2^0(0)$ est déduit de (II.1.5).

Canal 3 : $q_3^0(x) = q_3^0(0)$ et $h_3^0(x) = h_3^0(0)$ où $q_3^0(0)$ et $h_3^0(0)$ sont respectivement déduits de (II.1.4) et (II.1.6).

Nous choisissons $H_{amont} = 2.5m$ et $H_{aval1} = H_{aval2} = 0.5m$ dans les relations (IV.2.4).

Les résultats de l'exemple IV.2.3 sont montrés par les figures IV.10 et IV.11.

Commentaire IV.2.4 *Pour le cas du réseau on a aussi les mêmes résultats que celui d'un seul canal concernant la rapidité de la décroissance de l'énergie suivant la proximité des valeurs des fonctions θ de 1. Pour les portes, bien que leur ouverture augmente ou diminue suivant la porte considérée, leur comportement est beaucoup plus compliqué que celui d'un canal unique, à cause de la présence de la jonction. L'ouverture des portes est beaucoup plus structurée dans le cas d'un seul canal que celui du réseau. La présence de la jonction qui fait en même temps intervenir ce qui se passe dans les trois canaux peut être à l'origine de cette complexité (voir l'expression des contrôles donnée par (II.4.24)).*

IV.3 Résultats numériques concernant le réseau en cascade

IV.3.1 Le cas d'un seul bief

Nous agissons comme dans la section IV.2.1 à la différence qu'ici les contrôles sont exprimés à travers les vitesses et non à travers les débits aux bouts du canal. Pour les besoins d'une première simulation numérique, nous considérons les données de l'exemple IV.2.1 avec uniquement la première condition initiale. Les résultats sont montrés par les figures IV.12 et IV.13. Les relations (IV.2.1) et (IV.2.2) sont utilisées pour les ouvertures de portes.

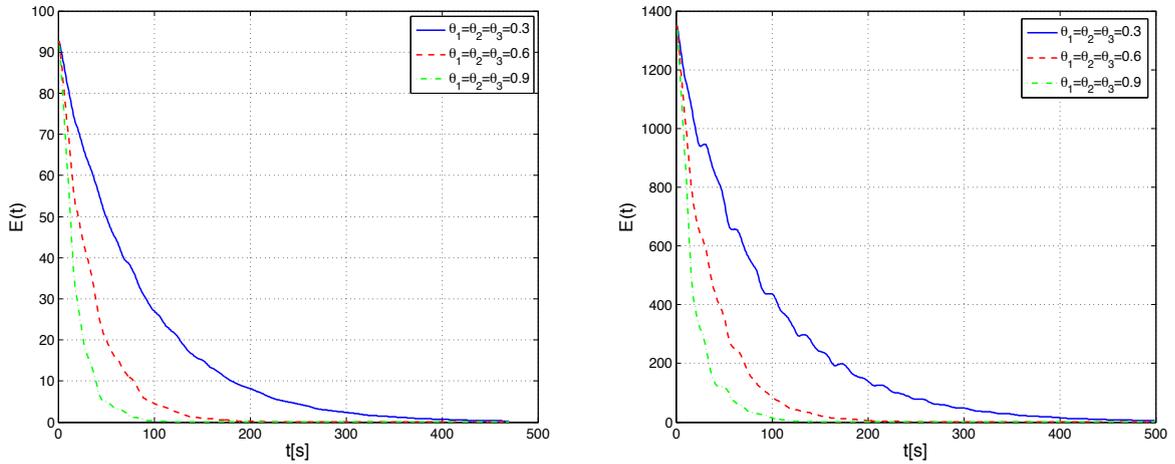


Figure IV.10 – Evolution de l'énergie du réseau suivant différentes valeurs de θ_1 , θ_2 et θ_3 et les données de l'exemple IV.2.3. La partie gauche concerne la petite perturbation et la partie de droite, la grande perturbation.

La deuxième simulation numérique est effectuée avec les données de l'exemple suivant :

Exemple IV.3.1 Nous considérons un canal de longueur $L = 1000m$, de largeur $l = 1m$. La condition initiale est $(h(0, x), q(0, x)) = (2m, 2.5m^3s^{-1})$ et l'état d'équilibre est $(\bar{h}(x), \bar{q}(x)) = (1m, 0.5m^3s^{-1})$. Le pas d'espace est $\Delta x = 5m$ et celui du temps est $\Delta t = 1s$. On choisit $\theta_1 = 0.62$ et $\theta_2 = 0.4$.

Les résultats de l'exemple IV.3.1 sont montrés par la figure IV.14

IV.3.2 Le cas du réseau en cascade

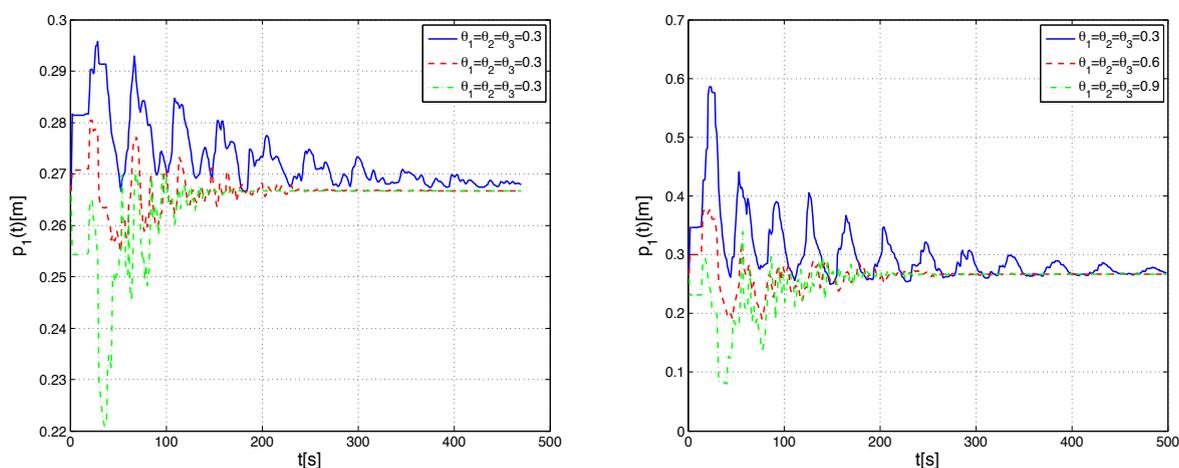
Dans ce cas, on a une porte située en amont du réseau, une autre entre les deux biefs et une dernière en aval du réseau (Fig IV.15). Les variables p_1 , p_2 et p_3 sont respectivement les ouvertures des portes situées en amont, entre les biefs et en aval du réseau. Ces ouvertures sont liées avec les débits par les relations

$$\begin{aligned}
 q_1(t, 0) &= p_1(t) \sqrt{2g(H_{amont} - h_1(t, 0))}, \\
 q_1(t, L_1) &= p_2(t) \sqrt{2g(h_2(t, 0) - h_1(t, L_1))}, \\
 q_2(t, L_2) &= p_3(t) \sqrt{2g(h_2(t, L_2) - H_{aval})},
 \end{aligned} \tag{IV.3.1}$$

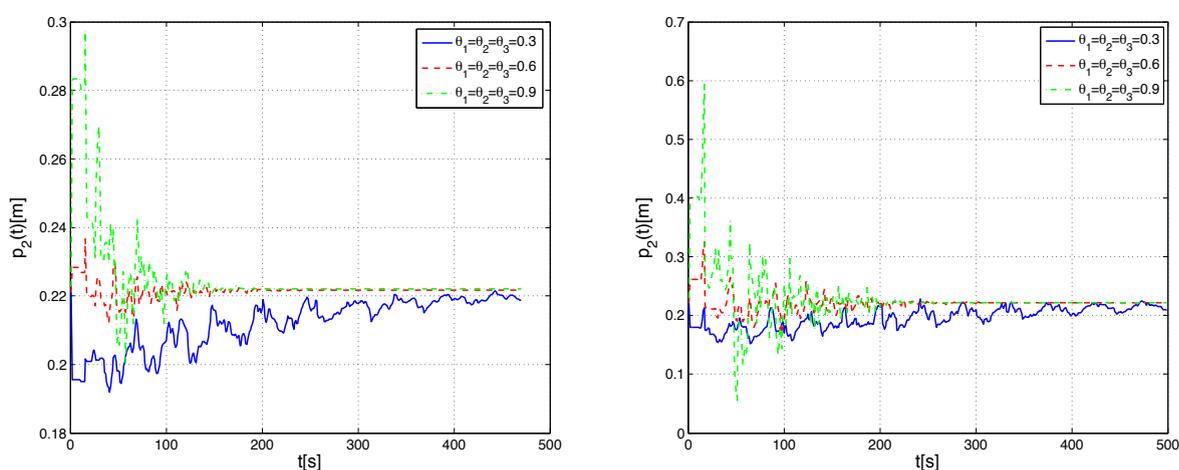
où $q_1(t, 0)$, $q_1(t, L_1)$ et $q_2(t, L_2)$ sont donnés par (IV.1.94).

Exemple IV.3.2 Nous considérons deux biefs de longueur $L_1 = L_2 = 1000m$, de largeur $l = 1m$. L'état d'équilibre est $\bar{q}_1(x) = 1.5m^3s^{-1}$, $\bar{h}_1(x) = 1.5m$ et $\bar{h}_2(x) = 1m$ et la condition initiale est $h_1(0, x) = 2m$, $q_1(0, x) = 3m^3s^{-1}$, $h_2(0, x) = 1.5m$, $q_2(0, x) = 3m^3s^{-1}$. Le pas d'espace est $\Delta x = 10m$ et celui du temps est $\Delta t = 1s$.

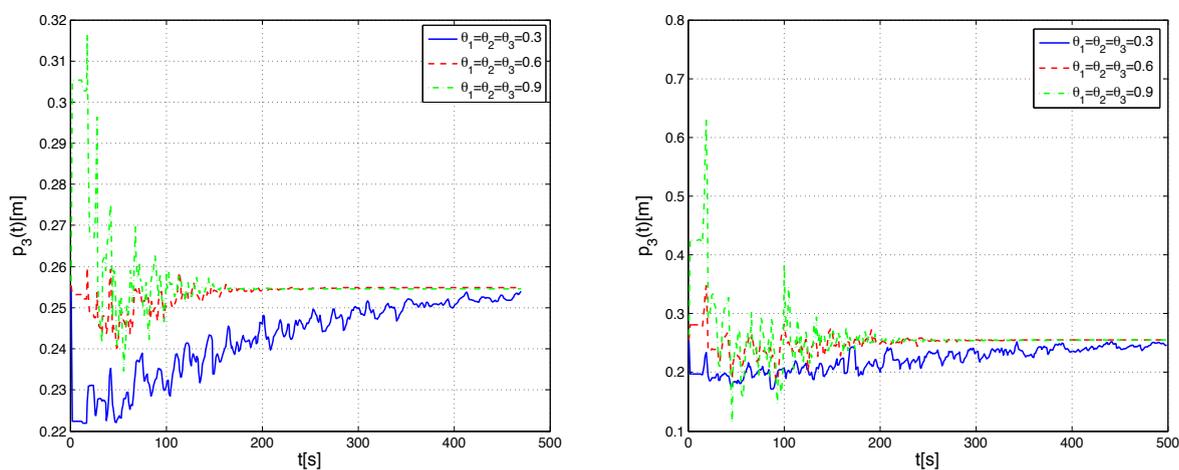
IV.3 Résultats numériques concernant le réseau en cascade



Ouverture de la porte du canal 1



Ouverture de la porte du canal 2



Ouverture de la porte du canal 3

Figure IV.11 – L'ouverture des portes suivant différentes valeurs de θ_1, θ_2 et les données de l'exemple IV.2.3. La partie gauche concerne la petite perturbation et la partie de droite, la grande perturbation.

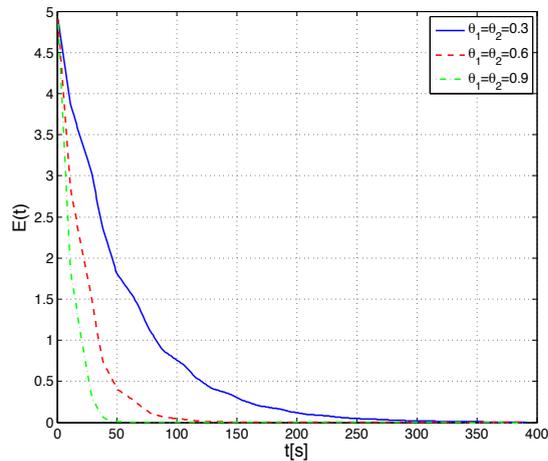


Figure IV.12 – Evolution de l'énergie du bief suivant différentes valeurs de θ_1 , θ_2 et θ_3 .

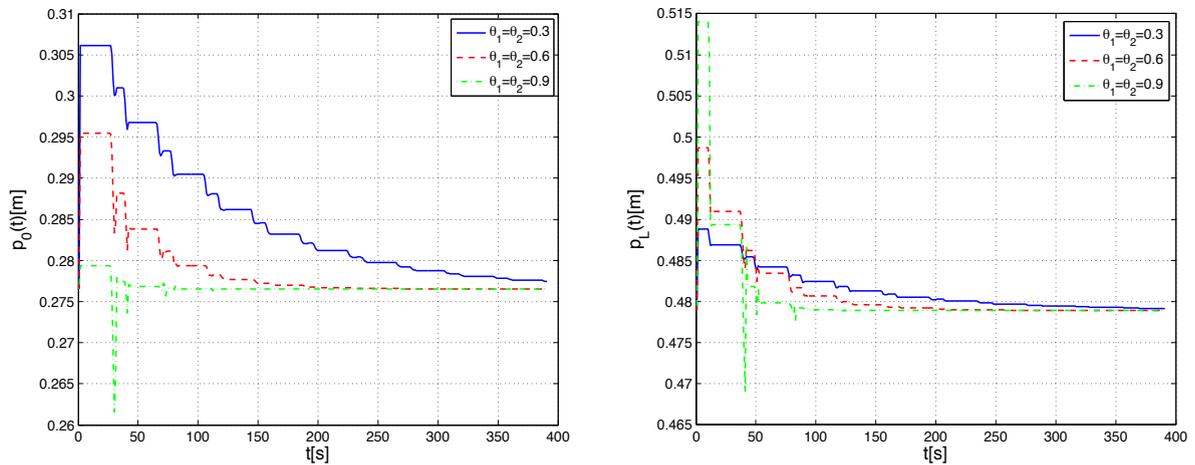


Figure IV.13 – L'évolution de l'énergie et l'ouverture des portes amont et aval du bief, suivant différentes valeurs de θ_1 , θ_2 et θ_3 .

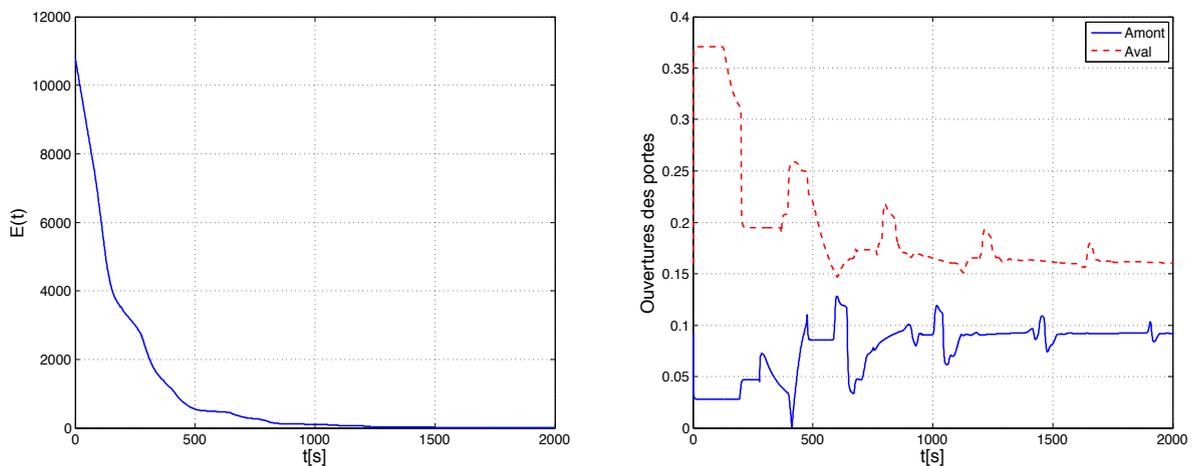


Figure IV.14 – L'évolution de l'énergie et l'ouverture des portes amont et aval du bief, suivant les données de l'exemple IV.3.1.

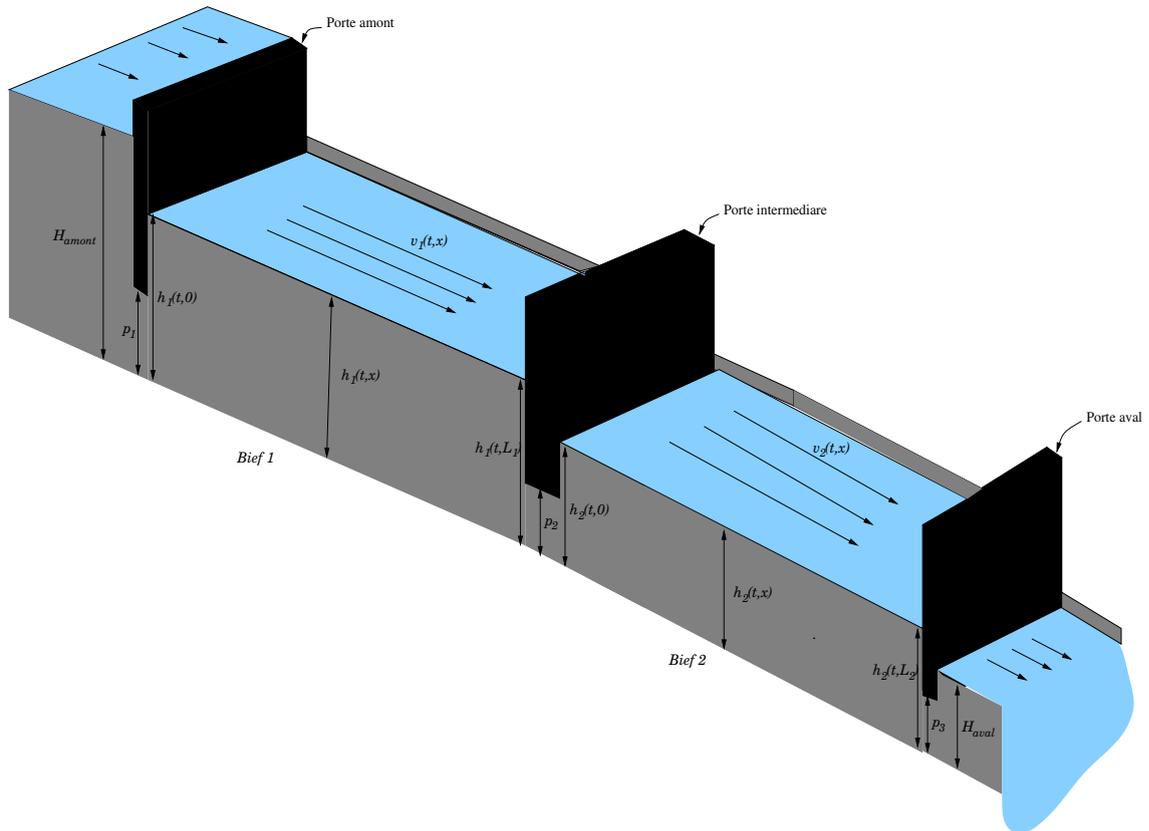


Figure IV.15 – Le réseau en cascade avec des portes immergées

Les résultats de l'exemple IV.3.2 sont montrés par les figures IV.16, IV.17 et IV.18.

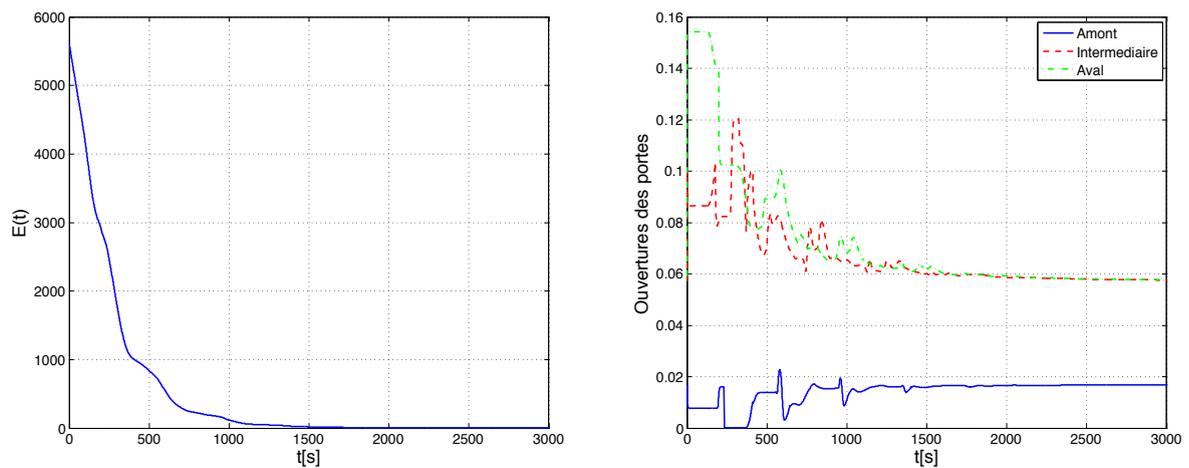
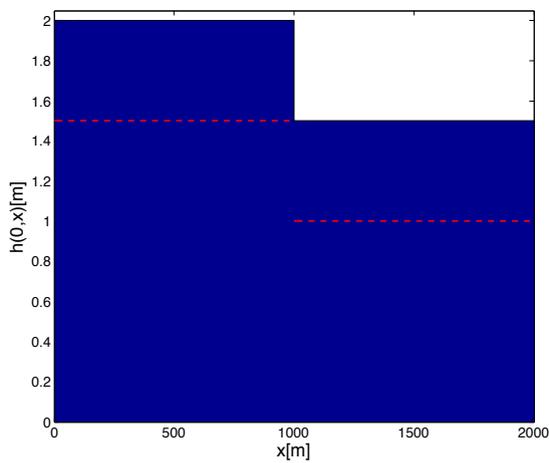
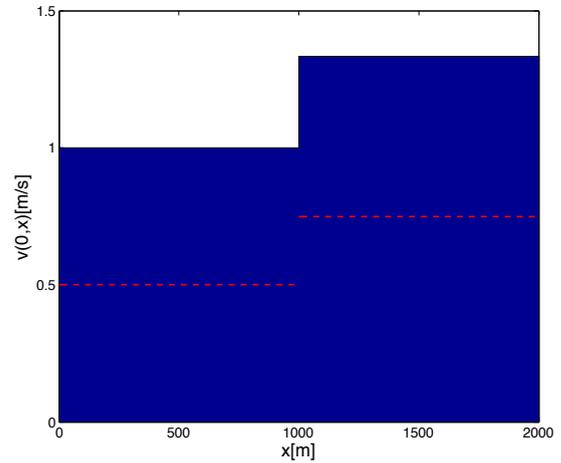


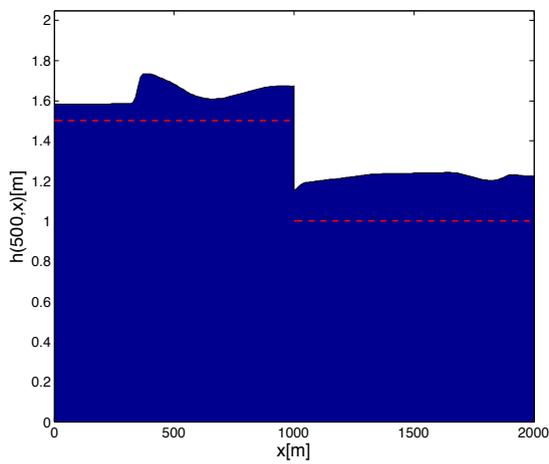
Figure IV.16 – Evolution de l'énergie et ouverture des portes suivant les données de l'exemple IV.3.2.



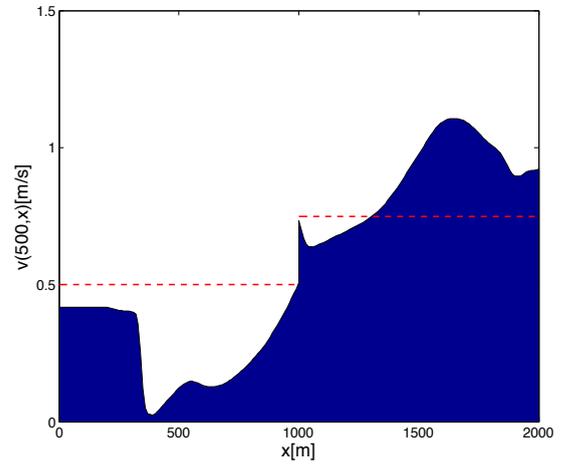
(a) Hauteur initiale



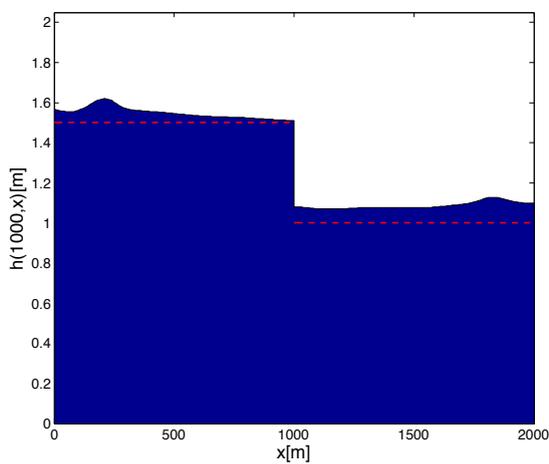
(b) Vitesse initiale



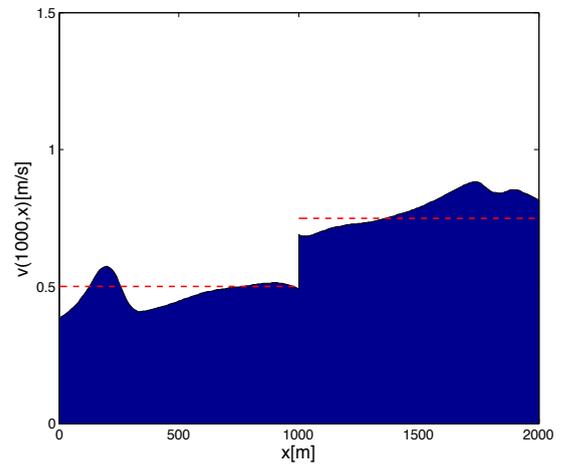
(c) Hauteur à $t = 500s$



(d) Vitesse à $t = 500s$

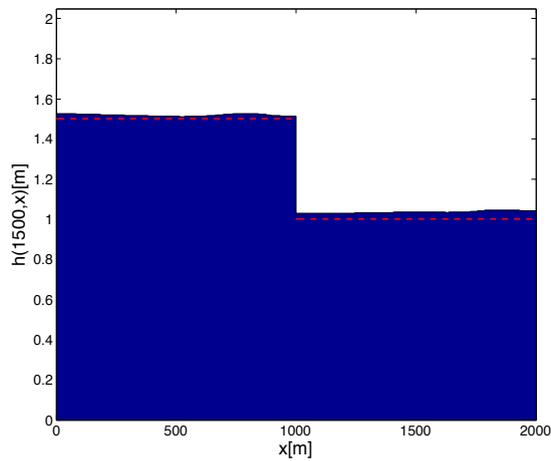


(e) Hauteur à $t = 1000s$

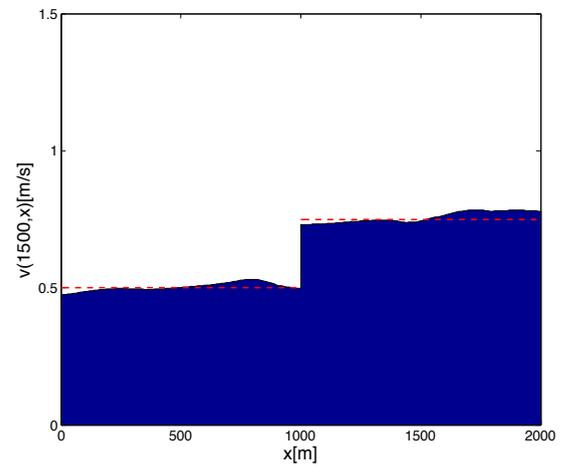


(f) Vitesse à $t = 1000s$

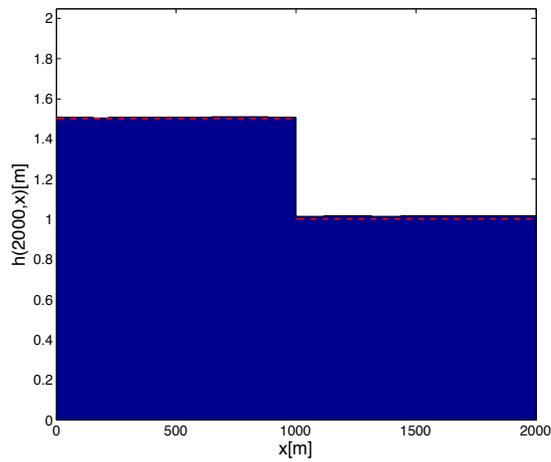
Figure IV.17 – Evolution de la hauteur et de la vitesse de l'eau. L'état d'équilibre est représenté par les tirets. Les données concernées sont celles de l'exemple IV.3.2



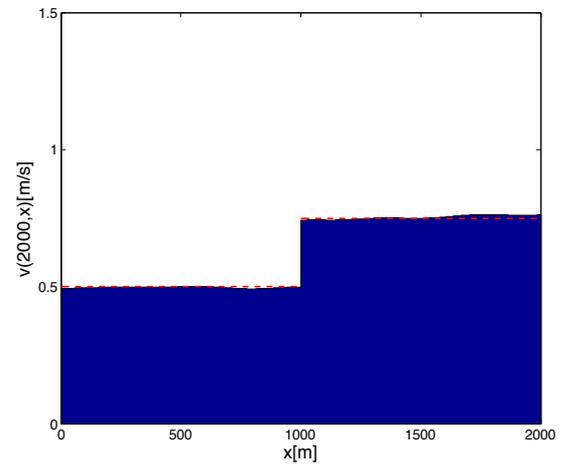
(a) Hauteur à $t = 1500s$



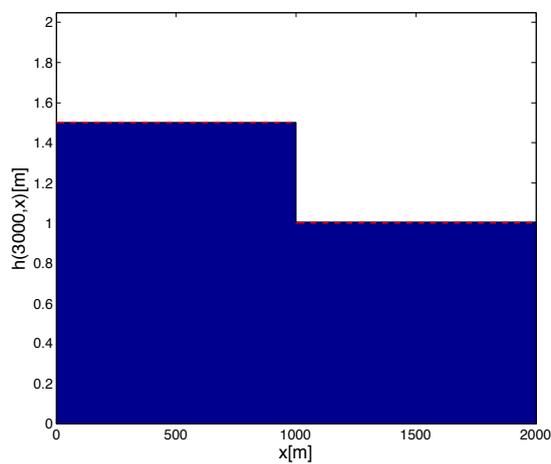
(b) Vitesse à $t = 1500s$



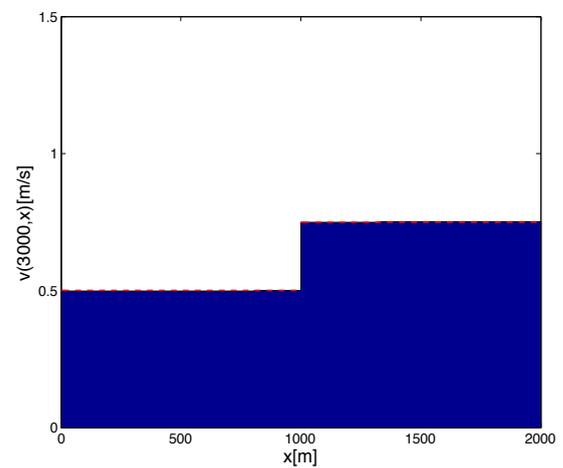
(c) Hauteur à $t = 2000s$



(d) Vitesse à $t = 2000s$



(e) Hauteur à $t = 3000s$



(f) Vitesse à $t = 3000s$

Figure IV.18 – Evolution de la hauteur et de la vitesse de l'eau. L'état d'équilibre est représenté par les tirets. Les données concernées sont celles de l'exemple IV.3.2

Conclusion et perspectives

Dans ce document, nous avons utilisé une approche pour contruire des contrôles ayant pour but de stabiliser la hauteur et le débit de l'eau autour d'un état d'équilibre final désiré. L'approche permet de contruire un type de contrôle qui présente des avantages par rapport à d'autres types de contrôles existants. Les contrôles en un temps t utilisent des données déjà mesurées au temps $t - \delta t$. Ainsi, nos résultats théoriques sont en adéquation avec ce qui se passe dans la pratique, en ce sens que l'existence d'un délai aussi petit soit il entre la mesure des données en ligne et leur utilisation pour déterminer la valeur des contrôles est indispensable. Ce délai n'existe pas dans les résultats théoriques de beaucoup de travaux. (voir remarque [II.3.1](#)).

En plus de contruire des contrôles pour un seul canal, nous avons contruit des contrôles qui permettent de stabiliser les écoulement dans un réseau de canaux en forme d'étoile et un réseau de biefs mis en cascade. Nous avons montré qu'en plus des données initiales continues, il est possible aussi de contrôler des données initiales dans l'espace L^2 . En effet, on a montré l'existence de solutions faibles des modèles linéaires à travers lesquels les contrôles sont élaborés. D'autre part des résultats numériques confortant les résultats théoriques obtenus dans les chapitres [II](#) et [III](#) ont été donnés dans le chapitre [IV](#). Dans ce dernier chapitre, on a montré aussi (grâce à des simulations numériques) que les contrôles qui sont contruits à l'aide des modèles linéaires permettent de stabiliser les modèles réels qui sont non linéaires.

Ces travaux concernent des modèles de Saint-Venant simplifiés qui ne tiennent pas en compte les forces de friction, les prélèvements aux seins des canaux et une bathymétrie variable en fonction de l'espace. Premièrement, il serait intéressant de montrer théoriquement que les contôles contruits marchent aussi pour les modèles non linéaires comme cela a été fait numériquement dans le dernier chapitre ; Deuxièmement, de voir dans quelle mesure l'approche donnée dans ce document pourrait être étendue à un modèle physique beaucoup plus complet et à d'autres type de réseau d'irrigation.

Références bibliographiques

- [1] *Irrigation : Types, Sources and Problems / Book 3*. ISBN979-953-307-706-1.
- [2] O. Balogun, M. Hubbard, and J. J. De Vries. Automatic control of canal flow using linear quadratic regulator theory. *Journal of hydraulic engineering*, 114(1) :75–102, 1988.
- [3] G. Bastin, A. M. Bayen, C. D’apice, X. Litrico, and B. Piccoli. Open problems and research perspectives for irrigation channels. *Networks and Heterogenous Media*, 4(2) :1–4, 2009.
- [4] G. Bastin, J. M. Coron, and B. D’Andréa-Novel. On lyapunov stability of linearised saint-venant equations for a sloping channel. *Networks and Heterogenous Media*, 4(2) :177–187, 2009.
- [5] M. J. Castro, P. G. LeFloch, M. L. Munoz-Ruiz, and C. Parés. Why many theories of shock waves are necessary : Convergence error in formally path consistent schemes. *Journal of Computational Physics*, 227 :8107–8129, 2008.
- [6] L.H. Cen and Y. G. Xi. Stability of boundary feedback control based on weighted lyapunov function in networks of open channels. *Acta Automatica Sinica*, 35(1) :97–102, January 2009.
- [7] M. Chen, D. Georges, and L. Lefevre. Infinite dimensional LQ control of an open-channel hydraulic system. In *ASCC*, Singapoure, 2002.
- [8] A. Chertock and A. Kurganov. A simple eulerian finite volume method for compressible fluids in domain with moving boundaries. *Commun. Math. Sci.*, 6(3) :531–556, 2008.
- [9] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [10] H. T. Falvey and P. C. Luning. *Gate stroking*. United States Department of the interior, Bureau of Reclamation, paper REC-ERC-79-7, July 1979.
- [11] A. Garcia, M. Hubbard, and J. J. De Vries. Open channel transients flow control algorithms by discrete time LQR methods. *Automatica*, 28(2) :255–264, 1992.

- [12] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite Elements Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [13] S. K. Godunov. Finite difference method for numerical method for numerical computations of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat. Sbornik*, 47 :271–306, 1959.
- [14] M. S. Goudiaby, A. Sene, and G. Kreiss. Control of network of open canals with a time delay. *submitted*.
- [15] J. Gowing. Limitations of water-control technology. *Agriculture Water Management*, 79 :95–99, 1999.
- [16] M. Gugat and G. Leugering. Global boundary controllability of the st-venant equations between steady states. *Ann. I. H. Poincaré - AN* 20, 1 :1–11, 2003.
- [17] M. Gugat, G. Leugering, and E. J. P. Georg Schmidt. Global controllability between steady supercritical flows in channel networks. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 27 :781–802, 2004.
- [18] J. De Halleux, C. Prieur, J. M. Coron, B. d’Andréa Novel, and G. Bastin. Boundary feedback control in networks of open channels. *Automatica*, 39(8) :1365–1376, August 2003.
- [19] G. Leugering and E. J. P. Georg Schmidt. On the modelling and stabilization of flows in networks of open canal. *SIAM J. Control Optim.*, 41(1) :164–180, 2002.
- [20] R. J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Birkhauser-Verlag, Basel, 1990.
- [21] R. J. Leveque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, USA, 2002.
- [22] T. Li. Exact boundary controlability of unsteady flows in a network of open canals. *Math. Nachr.*, 278(3) :278–289, 2005.
- [23] T. Li and B. Rao. Exact boundary controlability of unsteady flows in a tree-like network of open canals. *Methods and Applications of Analysis*, 11(3) :353–366, 2004.
- [24] X. Litrico. Robust flow control of single input multiple outputs regulated rivers. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 127(5) :281–286, 2001.
- [25] X. Litrico and V. Fromion. Real-time management of multi-reservoir hydraulic systems using H_∞ optimization. In *the 15th Triennial World Congress IFAC*, Barcelona, Spain, 2002.
- [26] X. Litrico and V. Fromion. H_∞ control of an irrigation canal pool with a mixed control politics. *IEEE Transactions on Automatic Control System Technology*, 14(1) :99–111, 2006.
- [27] X. Litrico, V. Fromion, J. P. Baume, and M. Rijo. Modeling and PI control of an irrigation canal. In *European Control Conference ECC*, 2003.

- [28] X. Litrico and D. Georges. Robust LQG contrôle of single input multiple output dam-river systems. *International Journal of Systems Science*, 32(6) :798–805, 2001.
- [29] P. O. Malaterre. PILOTE linear quadratic optimal controller for irrigation canals. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 124(4) :187–193, 1998.
- [30] P. O. Malaterre, D. C. Roger, and J. Schuurmans. Classification of canal control algorithms. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 124(1) :3–10, 1998.
- [31] P. O. Malaterre. Le contrôle automatique des canaux d’irrigation : état et l’art perspectives. In *Colloque Automatique et Agronomie*, Janvier 2003.
- [32] R. Misra, M. S. Mohan Kumar, and K. Sridharan. Analysis of transients in a canal network. *Sādhanā*, 16(1) :85–89, 1991.
- [33] M. Ndiaye and G. Bastin. Commande frontiere adaptative d’un bief de canal avec prélèvements inconnus. *RS-JESA*, 38 :374–371, 2004.
- [34] C. Parés. Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems : A theoretical framework. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(1) :300–312, 2006.
- [35] C. Prieur and J. De Halleux. Stabilization of a 1-D tank containing a fluid modeled by the shallow water equations. *Systems & Control Letters*, 52 :167–178, 2004.
- [36] G. Qilong. Exact boundary controllability of unsteady supercritical flows in a tree-like network of open canals. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 31 :1497–1508, 2008.
- [37] G. Qilong and T. Li. Exact boundary observability of unsteady flows in a tree-like network of open canals. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 32 :395–418, 2008.
- [38] P. L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43 :357–372, 1981.
- [39] D. L. Russel. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : Recent progress and open questions. *SIAM Review*, 20(4) :639–739, October 1978.
- [40] B. De Saint-Venant. Théorie du mouvement non-permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leur lit. *Comptes Rendus Academie des Sciences*, 73 :148 – 154, 237 – 240, 1871.
- [41] V. Dos Santos, G. Bastin, J. M. Coron, and B. D’Andréa-Novel. Boundary control with integral action for hyperbolic systems of conservation laws : Stability and experiments. *Automatica*, 44 :1310–1318, 2003.
- [42] A. Sene, B. A. Wane, and D. Y. Le Roux. Control of irrigation channels with variable bathymetry and time dependent stabilization rate. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 346 :1119–1122, 2008.
- [43] J. C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, 2004.

- [44] E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : A Practical Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [45] J. W. Wang and R. X. Liu. Combined finite volume and finite element method for shallow water equations. *Computers and Fluids*, 34 :1199–1222, 2005.
- [46] E. Weyer. LQ control of irrigation channel. *Decision and Control*, 1 :750–755, 2003.
- [47] C. Z. Xu and G. Sallet. Proportional and integral regulation of irrigation canal systems governed by the saint-venant equation. In *Proceedings of the 14th world congress IFAC*, pages 147–152, Beijing, July 1999. Elsevier.