Université Gaston Berger de Saint-Louis

UFR de Sciences Appliquées et Technologie
ex UFR de Mathématiques Appliquées et d'Informatique

Thèse de Doctorat de Troisième Cycle

Présentée pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université Gaston Berger de Saint-Louis
Spécialité : Analyse Numérique
par
Idrissa LY

Résultats d'existence en optimisation de forme et étude d' un problème extérieur à frontière libre : cas du p-laplacien

Soutenue le 20 juin 2002 devant le jury composé de :

Galaye	*DIA*	*Professeur,* *UFR SAT, UGB*	**Président**
Mary Teuw	*NIANE*	*Professeur,* *UFR SAT, UGB*	**Directeur de Thèse**
Ould Ahmed-Izid-Bih	*ISSELKOU*	*Maître de Conférences* *FST, Nouakchoot*	**Examinateur**
Gane Samba	*LO*	*Maître de Conférences* *UFR SAT, UGB*	**Examinateur**
Samuel	*OUYA*	*ESP Dakar, UCAD*	**Examinateur**
Diaraf	*SECK*	*FASEG, UCAD*	**Co-Directeur de Thèse**
Abdou	*SENE*	*UFR SAT, UGB*	**Examinateur**

Dédicace

A mes parents

qui m'ont donné le goût

de l'effort et du travail.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe du Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique de l'Université Gaston Berger de Saint-Louis sous la direction de Monsieur Mary Teuw Niane.

Je commence par remercier Monsieur Galaye Dia pour avoir accepté de présider ce jury.

Je remercie vivement Messieurs Gérard Philippin de l'Université de Laval, Antoine Henrot de l'Université Henri Poincaré de Nancy I et Hamidou Touré de l'Université de Ouagadougou d'avoir bien voulu être les rapporteurs de cette thèse. Grâce à leurs critiques, la version que vous tenez entre les mains est meilleure.

Je remercie chaleureusement Messieurs Isselkou Ould Ahmed Ibidzih, Gane Samba Lo et Abdou Séne d'avoir accepté de faire partie du jury, et qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Last, but not least, un grand merci à Mary Teuw Niane et Diaraf Seck pour leur indéfectible disponibilité et pour leurs encouragements au long de toutes ces années de travail.

Je ne peux pas conclure ces remerciements sans rappeler ceux aux cotés desquels j'ai fait un bout de chemin : Racky et Baidallaye Kane, la famille Ly, Mouhamed Fadel Dia, la famille Kane, le personnel administratif et le personnel enseignant de l'UFR de Mathématiques Appliquées et d'Informatique qui ont su être des amis, des fréres et des soeurs autant au travail qu'en dehors, et tous les autres, trop nombreux pour être cités ici.

Table des matières

Notations

Notations générales

- $\mathbb{R}$ l'espace des nombres réels
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{C}$ l'espace des nombres complexes
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert
- $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ le disque de centre zéro et de rayon un
- $\Gamma_1 = \partial D_1$ frontière de D_1
- $\Gamma = \partial\Omega$ frontière de Ω
- $B(O, R) = B_R$ la boule centrée à l'origine et de rayon R
- E' espace dual de E
- $<,>$ crochet de dualité E', E
- $(,)$ produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^N$
- $|| \ ||$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$
- $|| \ ||_p$ la norme dans $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$
- Soit Ω est partie mesurable de $\mathbb{R}^N$, on pose $|\Omega|$ la mesure de Lebesgue de Ω

- $\delta_{\partial\Omega}$ masse de Dirac sur le bord de Ω
- $D(A)$ domaine de l'opérateur A
- $p.p$ presque partout
- p' exposant conjugué de p, c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
- $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ dérivée (au sens des distributions) par rapport à la variable x_i
- $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}) = gradu$ gradient de la fonction u
- $\Delta_p u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(||\nabla u||^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i})$ le p-laplacien de la fonction u
- $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} .... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$
- ν normale extérieure
- $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ dérivée normale extérieure
- $dist$ désigne la distance

Espaces fonctionnels

- $L^\infty(\Omega) = \{u$ mesurable sur Ω / il existe $c > 0$ tel que $|u(x)| \leq c$ $p.p$ sur $\Omega\}$
- $C^k(\Omega) = \{$fonctions k fois continûment différentiables sur Ω $(k \geq 0)$ $\}$
- $L^p(\Omega) = \left\{ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ tel que } \int_\Omega |u|^p dx < +\infty \right\}$ $1 \leq p < +\infty$
- $W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \ (i = 1, ..., N) \right\}$
- $H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in \ L^2(\Omega), \ (i = 1, ..., N) \right\}$
- $H^2(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in \ L^2(\Omega), \ (i, j = 1, ..., N) \right\}$
- $\mathcal{D}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega)$ à support compact contenu dans $\Omega\}$
- $\mathcal{D}'(\Omega) =$ l'espace des distributions sur Ω
- $W_0^{1,p}(\Omega) =$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$
- $H_0^1(\Omega) =$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$
- $H_0^2(\Omega) =$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^2(\Omega)$
- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions holdériennes

  sur $\bar{\Omega}$, c'est à dire l'espace des fonctions f continues sur Ω telles que $\sup\limits_{x,y \in \Omega} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty$
- $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ telles que

$$D^j f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \ \forall j \ |j| \leq k$$

- $\mathcal{M}(\Omega)$ l'espace des mesures de Radon sur Ω
- $\dfrac{du}{dt}$ dérivée (au sens des distributions) par rapport à t.

Introduction

Ce travail est une contribution à l'étude de l'existence de solutions, d'un problème d'optimisation de forme et d'un problème extérieur à frontière libre pour le p-Laplacien. Il contient trois parties :

Première partie

Cette partie est essentiellement destinée à présenter un résultat d'existence de solutions d'un problème d'optimisation de forme.

On considère D une boule de $\mathbb{R}^N$, soient $\epsilon > 0$ et $m > 0$.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^2$ contenu dans D.

On considère la classe d'ouverts sur laquelle nous allons travailler

$\mathcal{O}_\epsilon = \{\Omega \subset D \,/\, K \subset \Omega$ et, Ω ouvert vérifie la propriété du $\epsilon -$ cône, $|\Omega| = m\}$.

Le problème d'optimisation de forme consiste à chercher Ω appartenant à $\mathcal{O}_\epsilon$ tel que

$$J(\Omega) = \min\{J(w), \quad w \in \mathcal{O}_\epsilon\} \tag{1}$$

où J est une fonctionnelle définie sur $\mathcal{O}_\epsilon$ par

$$J(w) = \frac{1}{p}\int_w ||\nabla u_w||^p dx, \quad 1 < p < \infty \tag{2}$$

où u_w étant la solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u_w &= 0 \quad \text{dans} \quad w\backslash K \\ u_w &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial w \\ u_w &= 1 \quad \text{sur} \quad \partial K \end{cases} \tag{3}$$

La méthode directe qui permet de montrer l'existence de solutions pour le problème d'optimisation de forme (2), pour une fonctionnelle J, est celle utilisée en calcul des variations.

Cette méthode consiste à considérer une suite minimisante de domaines $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis d'en extraire, par compacité, une sous suite qui converge vers une limite Ω appartenant à $\mathcal{O}_\epsilon$ qui réalise le minimum.

Il sera utile d'introduire une notion de convergence de domaines de telle sorte que la famille $\mathcal{O}_\epsilon$ soit compacte pour cette notion de convergence et les fonctions d'états $\Omega \longrightarrow u_\Omega$ soient continues par rapport à cette notion de convergence, c'est à dire la notion de convergence en question implique la convergence au sens de l'équation (3).

Deuxième partie

On s'intéresse à l' étude de l'existence de solutions du problème extérieur à frontière libre pour le p-laplacien.

Plus précisément, on cherche Ω un domaine de forme annulaire dans $\mathbb{R}^N$

sur lequel existe une solution u_Ω pour une certaine équation aux dérivées partielles surdéterminée.

Le problème extérieur à frontière libre consiste à se donner un compact K de classe C^2, une constante c strictement positive et chercher u_Ω et un ouvert Ω contenant K tels que le problème

$$\begin{cases} -\triangle_p u_\Omega & = \ 0 \ \text{dans } \Omega \backslash K, \ \ 1 < p < \infty \\ u_\Omega & = \ 0 \ \ \text{sur } \partial\Omega \\ u_\Omega & = \ 1 \ \ \text{sur } \partial K \\ -\dfrac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} & = \ c \ \ \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

admette une solution.

Ce problème a été étudié par **A.Henrot et H.Shahgholian** [11] en montrant l'existence d'un domaine convexe solution du problème (4) par la technique des sous-solutions et sur-solutions de **A.Beurling** [3].

A.Acker et A.Meyer [2] ont montré pour $p = 2$, l'existence de solutions et pour $1 < p < \infty$, ils ont obtenu des résultats d'unicité.

Ces types de problèmes ont plusieurs interprétations physiques telles que la loi de Darcy pour un écoulement d'un fluide dans un milieu poreux, la loi d'Ohm pour le courant électrique et la loi de Fourrier pour le transfert de la chaleur.

Dans chaque problème, un modèle basé sur une loi d'écoulement linéaire est fondementale. Par exemple pour le courant électrique à travers une résistance, la loi d'Ohm établit que $J = -C\nabla u$, où C est la conductivité. On retrouve la même relation pour la loi de Fourier, appliquée au problème de minimisation d'écoulement de la chaleur, où u représente la température d'état stable et J est le flux de la chaleur.

Les lois d'Ohm et de Fourier sont des lois approchées et empiriques. Pour l'étude des lois d'écoulement nonlinéaire, il est naturel de considèrer les écoulements de loi-puissance. On définit un écoulement de loi-puissance comme étant celui dont le vecteur d' écoulement est donné par $J = -C||\nabla u||^{p-2}\nabla u$, où p est une constante, $p > 1$. Cela signifie que la magnitude d'un vecteur d'écoulement est donnée par $||J|| = C||\nabla u||^{p-1}$. Les écoulements de loi-puissance ont été précédemment étudiés dans le contexte des p-diffusions pour une bibliographie complète voir [17]. Pour les écoulements de loi-puissance, le potentiel de l'écoulement est p-harmonique et l'écoulement à travers un domaine de forme annulaire est donné par l'intégrale p-Dirichlet.

Notre approche consiste à choisir deux boules centrées à l'origine de $\mathbb{R}^N$, $B(O,R)$ contenant K et $B(O,r)$, $0 < r < R$ avec $B(O,r)$ contenue dans K.

On cherche une solution u_0 du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 = 0 & \text{dans} \quad B(O,R)\backslash B(O,r) \\ u_0 = 0 & \text{sur} \quad \partial B(O,R) \\ u_0 = 1 & \text{sur} \quad \partial B(O,r) \end{cases} \tag{5}$$

En utilisant le principe de comparaison de **P. Tolksdorff** [20], on compare $||\nabla u_0||$ et $||\nabla u_R||$ sur $\partial B(O,R)$ où u_R est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_R = 0 & \text{dans} \quad B(O,R)\backslash K \\ u_R = 0 & \text{sur} \quad \partial B(O,R) \\ u_R = 1 & \text{sur} \quad \partial K. \end{cases} \tag{6}$$

Par un résultat de monotonie, on montre que l'application qui à tout R associe $||\nabla u_0||$ sur $\partial B(O,R)$ est monotone selon $p = N$ ou $p \neq N$.
Ainsi on construit une suite de domaines $(\Omega_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui approxime mieux Ω solution du problème à frontière libre (4).

Troisième partie

Cette partie est destinée aux simulations numériques. On suppose dans ce chapitre que $p = 2$. L'existence de solutions du problème à frontière libre a été prouvée par **D.Seck** [18]. L'approche qu'il a utilisée est la méthode des sous-solutions et sur-solutions de **A.Beurling** [3] avec des ouverts de type Carathéodory.
Il a donné un algorithme numérique en dimension deux permettant de déterminer la forme approchée de l'anneau $\Omega\backslash K$.
Nous complétons ce travail en montrant qu 'il est possible de faire des simulations numériques en dimension deux et pour $p = 2$.

Chapitre 1

Etude de l'existence du problème d'optimisation de forme

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, pour montrer le résultat d'existence de solutions du problème d'optimisation de forme $\min\{J(w), \quad w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$, nous allons définir la distance de Hausdorff pour les compacts de D, ensuite la convergence de domaines au sens Hausdorff.

On obtient des résultats de compacité pour cette topologie et de continuité par rapport au domaine solution du problème d'optimisation de forme .

Autrement dit, si $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts dans $\mathcal{O}_\epsilon$ qui converge au sens de Hausdorff vers Ω quand n tend vers l'infini, est- ce que la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ solutions de (3) sur Ω_n tend vers u_Ω solution de (3) sur Ω ?

1.1.1 Propriètés et Définitions

Nous allons donner quelques résultats et définitions connus en optimisation de forme pour la clarté de la rédaction.

1.2 Définitions

Définition 1.2.1

On appelle cône de sommet x appartenant à $\mathbb{R}^N$, de direction ζ appartenant à $\mathbb{R}^N$, de demi angle α appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}]$ et de hauteur h l'ensemble défini par :

$$C(x, \zeta, \alpha, h) = \left\{u \in \mathbb{R}^N, ||u - x|| < h \text{ et } (u - x, \zeta) > ||u - x|| \cos \alpha\right\}.$$

On fixe une boule D de $\mathbb{R}^N$ et tous les ouverts Ω avec lesquels on travaille seront contenus dans D.

Définition 1.2.2

On dit qu' un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ possède la propriètè de ϵ- cône si pour tout x appartenant à $\partial\Omega$, il existe une direction ζ appartenant à $\mathbb{R}^N$ telle que $C(y, \zeta, \epsilon, \epsilon) \subset \Omega$, pour tout y appartenant à $B(x, \epsilon) \cap \bar{\Omega}$.

Soient $\epsilon > 0$ et $m > 0$ et K un compact contenu dans D, on note par $\mathcal{O}_\epsilon$ l'ensemble :

$$\mathcal{O}_\epsilon = \{\Omega \subset D \,/\, K \subset \Omega \text{ et, } \Omega \text{ ouvert vérifie la propriètè du } \epsilon - \text{cône, } |\Omega| = m\}.$$

Soit Ω appartenant à $\mathcal{O}_\epsilon$, on définit l'ensemble fonctionnel noté V par :

$$V = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega), \ / \ u = 1 \ \ sur \ \partial K\right\}$$

Nous commençons par définir la distance de Hausdorff pour les compacts contenus dans D.

Définition 1.2.3

Soient K_1 et K_2 deux compacts inclus dans D .

On pose :

$$\begin{aligned} d(x, K_1) &= \inf_{y \in K_1} d(x,y) \\ d(x, K_2) &= \inf_{y \in K_2} d(x,y). \end{aligned}$$

On note :

$$\begin{aligned} \rho(K_1, K_2) &= \sup_{x \in K_2} d(x, K_1) \\ \rho(K_2, K_1) &= \sup_{x \in K_1} d(x, K_2) \end{aligned}$$

On pose : $d_H(K_1, K_2) = \max[\rho(K_1, K_2), \rho(K_2, K_1)]$.

On appelle distance de Hausdorff, la distance d_H définie sur l'ensemble des compacts de D.

Remarque 1.2.1 *La distance de Hausdorff ne dépend pas de D.*

Nous allons donc définir la convergence au sens de Hausdorff pour les ouverts de D.

Définition 1.2.4 *Soient $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et Ω des ouverts inclus dans D. On dit que la suite d'ouverts $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Hausdorff vers Ω si*

$$\lim_{n \to \infty} d_H(\bar{D} \backslash \Omega_n, \bar{D} \backslash \Omega) = 0.$$

On notera $\Omega_n \xrightarrow{H} \Omega$.

Définition 1.2.5

Soient $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'ouverts,* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$.

On dit que $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* Ω *au sens de* L^p, $1 \leq p < \infty$ *si* χ_{Ω_n} *converge vers* χ_Ω *dans* L^p.

1.3 Etude de l'existence de solutions sous la contrainte de la propriètè du ϵ-cône

On suppose que K est de classe C^2.

Soit J la fonctionnelle définie sur $\mathcal{O}_\epsilon$ par

$$J(w) := \frac{1}{p}\int_w ||\nabla u_w||^p dx, \; 1 < p < \infty.$$

J est une fonctionnelle qui dépend de w et de u_w où u_w est la solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u_w = 0 & \text{dans } w\backslash K \\ u_w = 0 & \text{sur } \partial w \\ u_w = 1 & \text{sur } \partial K \end{cases} \tag{1.1}$$

$\Delta_p : W_0^{1,p}(D) \longmapsto W^{-1,p'}(D)$ avec $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$ est appelé l' opérateur p-laplacien.

La première partie est essentiellement destinée d'abord sous la contrainte de la propriètè du ϵ-cône à l'étude de l'existence de solutions du problème d'optimisation de forme suivant :

$$\min\{J(w),\ \ w \in \mathcal{O}_\epsilon\} \tag{1.2}$$

Comme on veut prouver un résultat d'existence de solution du problème d'optimisation de forme (1.2), la méthode que nous allons utiliser est celle classique en calcul de variations : elle consiste à considérer une suite minimisante $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis à en extraire , par compacité une sous suite qui converge vers une limite $\Omega \in \mathcal{O}_\epsilon$. Pour utiliser cette méthode , il est utile d'introduire une notion de convergence de sorte que la famille $\mathcal{O}_\epsilon$ soit compacte pour cette notion de convergence.

Dans notre problème nous allons utiliser la topologie de Hausdorff et on définit la notion de convergence de domaines au sens de Hausdorff. Nous allons énoncer certaines propriètés pour montrer que la famille $\mathcal{O}_\epsilon$ est compacte pour la topologie de Hausdorff.

1.3.1 Résultats de compacité

Proposition 1.3.1

Soient $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts et Ω inclus dans D tels que Ω_n converge au sens de Hausdorff vers Ω alors :

Pour tout compact Q inclus dans Ω il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a Q inclus dans Ω_n.

En particulier si ϕ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a ϕ appartient à $\mathcal{D}(\Omega_n)$.

Preuve de la proposition 1.3.1

Posons : $G_n = \bar{D}\backslash\Omega_n$, $G = \bar{D}\backslash\Omega$ comme $Q \subset \Omega$ donc $Q \cap G = \emptyset$, Ω_n converge au sens de Hausdorff vers Ω donc $d_H(G_n, G)$ tend vers 0, cela veut dire que pour tout $\eta > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $d_H(G_n, G) < \eta$ donc $\rho(G_n, G) < \eta$ ceci entraine que $Q \cap G_n = \emptyset$ or $G_n = \bar{D}\backslash\Omega_n$ donc $Q \subset \Omega_n$. ■

On a la proprièté de compacité suivante.

Théorème 1.3.1

Soit $(\Omega_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ *une suite d'ouverts inclus dans un compact* F *de* $\mathbb{R}^N$ *alors il existe une sous suite* $(\Omega_{n_k})_{k\,\in\,\mathbb{N}}$ *et* Ω *inclus dans* F *tels que* $(\Omega_{n_k})_{k\,\in\,\mathbb{N}}$ *converge au sens de Hausdorff vers* Ω.

Avant de faire la preuve du théorème énonçons d'abord le corollaire suivant.
On pose $d_A(x) = d(x, A) = \inf\limits_{y\,\in\,A} d(x, y)$.

Corollaire 1.3.1

La suite G_n *converge au sens de Hausdorff vers* G *si et seulement si* d_{G_n} *converge uniformément vers* d_G *sur* F.

Preuve du théorème 1.3.1

On a : $G_n = F\backslash\Omega_n$, $G = F\backslash\Omega$, $d_{K_n}(x) = d(x, G_n)$, $d_G(x) = d(x, G)$, $G_n \cup G \subset F \subset \mathbb{R}^N$, (d_{G_n}) est une suite appartenant à $\mathcal{C}^0(F)$ et est bornée, équicontinue car pour tout x appartenant à F on a
$d_{G_n}(x) \leq diam(F)$ et $|d_{G_n}(x) - d_{G_n}(y)| \leq ||x - y||$.
On applique le théorème d'Ascoli, il existe une sous suite $(d_{G_{n_k}})_{k\,\in\,\mathbb{N}^r}$, $f \in$

$\mathcal{C}^0(F)$ tels que

$(d_{G_{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et on a $f \geq 0$.

Posons : $G = \{x \in F \ / \ f(x) = 0\}$ qui est un compact .

Pour montrer le théorème il suffit de montrer que $f = d_G$ et c'est terminé d'après le corollaire (1.3.1).

$|d_{G_{n_k}}(x) - d_{G_{n_k}}(y)| \leq ||x - y||$ et à la limite on aura

$|f(x) - f(y)| \leq ||x - y||$.

Pour $y \in G$, on a $|f(x)| = f(x) \leq ||x - y||$ donc

$f(x) \leq \inf\limits_{y \in G} d(x, y) = d_G(x)$.

x étant fixé, $d(x, G_n) = \inf\limits_{y_n \in G_n} d(x, y_n)$ donc il existe une suite $(x_n) \subset G_n$ donc $(x_n) \subset F$,F compact il existe une sous suite $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ telle que x_{n_j} converge vers y dans F.

On a $f(x) = \lim\limits_{j \to \infty} d_{G_{n_j}}(x) = \lim\limits_{j \to \infty} ||x - x_{n_j}|| = ||x - y||$

$f(y) = \lim\limits_{j \to \infty} d_{G_{n_j}}(y) = \lim\limits_{j \to \infty} ||y - x_{n_j}|| = 0$ donc $f(y) = 0$ i.e $y \in G$, ceci entraine que $f(x) - f(y) = ||x - y|| \geq d_G(x)$ d'où $f(x) = d_G(x)$, donc il existe une sous suite $(d_{G_{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $d_{G_{n_k}}$ converge uniformément vers d_G sur F d'où le théorème. ∎

Après les résultats de compacité, on a un résultat de régularité lipschitzienne uniforme si Ω possède la propriète du $\epsilon-$cône. Et on a le théorème suivant.

Théorème 1.3.2

Ω a la propriète du $\epsilon-$cône si et seulement si Ω est à bord lipschitzien avec une constante de Lipschitz uniforme.

Preuve du théorème 1.3.2

Supposons que $\partial\Omega$ est lipschitzien, $x \in \partial\Omega$, V un voisinage de x.

Soit $\phi : \mathbb{R}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de rapport k.

$V \cap \Omega = \{(x', x_N) \ / \ x_N > \phi(x')\}$.

Posons : $\eta = \min\{\frac{a}{4}, arctg\frac{1}{k}\}$.

Montrons que pour tout $y \in B(x,\eta) \cap \bar{\Omega}$, le cône $C(y, \zeta_N, \eta, \eta) \subset \Omega$.

$z \in C(y, \zeta_N, \eta, \eta)$ si et seulement si $||z - y|| < \eta$

et $(z - y, \zeta_N) > ||z - y|| \cos\eta$

avec $\zeta_N = (0, 0, ..., 1)$ donc ceci est équivalent à dire que $z \in C(y, \zeta_N, \eta, \eta)$

si et seulement si $||z - y|| < \eta$ et

$|z_N - y_N| > ||z - y|| \cos\eta$, c'est à dire que $||x - y|| < \eta$ et

$(z_N - y_N)^2 > (||z' - y'||^2_{\mathbb{R}^{N-1}} + (z_N - y_N)^2)\cos^2\eta$ et $z_N > y_N$ si et seulement si $||z - y|| < \eta$ et $\sin^2\eta(z_N - y_N)^2 > ||z' - y'||^2_{\mathbb{R}^{N-1}} \cos^2\eta$

et $z_N > y_N$.

Comme $z \in C(y, \zeta_N, \eta, \eta)$, calculons $z_N - \phi(z')$

$z \in V$ car $||z - x|| \leq ||z - y|| + ||y - x|| < \eta + \eta < \frac{a}{2}$. On a

$z_N - \phi(z') = z_N - y_N + y_N - \phi(y') + \phi(y') - \phi(z')$ si et seulement si

$z_N - \phi(z') > \frac{1}{tg\eta}||z' - y'||_{\mathbb{R}^{N-1}} + 0 - k||z' - y'||_{\mathbb{R}^{N-1}}$,

c'est à dire que $z_N - \phi(z') > (\frac{1}{tg\eta} - k)||z' - y'||_{\mathbb{R}^{N-1}} \geq 0$ donc $z \in \Omega$.

Par compacité, on se ramène à un nombre fini de tels voisinages V et choisir l'infinimum de tous les η ainsi définis.

Réciproquement, on suppose que Ω a la propriète du ϵ_0 - cône et fixons ϵ tel que $0 < \epsilon < \epsilon_0/2$.

Soit $x \in \partial\Omega, \forall\, y \in B(x,\epsilon)\cap\bar{\Omega},\ C(x,\zeta,\epsilon,\epsilon) \subset \Omega$ où ζ est la direction du cône.

Posons $Q = \{x' : ||x'||_{\mathbb{R}^{N-1}} < \epsilon\sin\epsilon\}\times] -\epsilon\cos\epsilon, \epsilon\cos\epsilon[$.

Montrons que $\partial\Omega$ ne rencontre Q que sur les cotés ou que la base inférieure de Q est incluse dans Ω^c.

En fait il faut montrer que $C(x,-\zeta,2\epsilon,2\epsilon) \subset \bar{\Omega}^c$.

En effet : soit $z \in C(x,-\zeta,2\epsilon,2\epsilon)$, Ω vérifie la proprièté du 2ϵ -cône car on a par hypothèse $0 < \epsilon < \dfrac{\epsilon_0}{2}$.

Si on avait $z \in \Omega$ puisque $||x-z|| < 2\epsilon$, on devait avoir

$C(x,\zeta,2\epsilon,2\epsilon) \subset \Omega$ mais $x \in C(x,\zeta,2\epsilon,2\epsilon)$ et $x \notin \Omega$ contradiction.

Soit maintenant x' tel que $||x'|| \leq \epsilon\sin\epsilon$.

Posons $\Phi(x') = \inf\{t \in \mathbb{R} \ / \ (x',t) \in \Omega; |t| < \epsilon\cos\epsilon\}$.

On vérifie $\Phi(x')$ existe car l'ensemble est non vide et minoré.

Montrons que $(x',\phi(x')) \in \bar{\Omega}\cap\Omega^c$.

Si $(x',x_N) \in \Omega\cap Q$ alors $x_N > \phi(x')$ par définition, si $(x',x_N) \in Q$ alors $(x',x_N) \in \Omega$ grâce à la proprièté du ϵ -cône appliquée à $(x',\phi(x'))$ de même $\partial\Omega\cap Q = \{(x',x_N) \ / \ x_N = \phi(x')\}$.

Il reste à montrer que ϕ est lipschitzienne .

Soient y' et z' deux points distincts.

$(y',\phi(y') \in \partial\Omega$ ceci entraine que

$C(y',\phi(y'),\eta,\epsilon) \subset \Omega$ comme $(z',\phi(z')) \notin \Omega$ car il est sur le bord de Ω il n'est pas dans le cône en question donc $z \notin C(y,\zeta,\epsilon,\epsilon)$ où $\zeta = (0,0,...,1)$

et

$$C(y,\zeta,\epsilon,\epsilon) = \{u \in \mathbb{R}^N, ||u-y|| < \epsilon \text{ , et } (u-y,\zeta) > ||u-y|| \cos\epsilon\}$$

or z est choisi tel que $||z-y|| < \epsilon$ donc $z_N - y_N \leq ||z-y|| \cos\epsilon$

si et seulement si $(z_N - y_N)^2 \leq (||z' - y'||^2_{\mathbb{R}^{N-1}} + |y_N - z_N|^2)\cos^2\epsilon$

si et seulement si $|z_N - y_N| = |\phi(z') - \phi(y')| \leq \dfrac{1}{tg\epsilon}||z' - y'||_{\mathbb{R}^{N-1}}$. ∎

Remarque 1.3.1

La constante de lipschitz et le ϵ de la définition de ϵ- cône sont liés.

Une conséquence du théorème (1.3.2) est le lemme suivant.

Lemme 1.3.1

Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de $\mathbb{R}^N$ possèdant la propriètè du ϵ- cône, avec $\bar{\Omega}_n \subset F \subset D$, F un compact. Alors il existe Ω vérifiant la propriètè du $\frac{\epsilon}{2}$-cône et une suite extraite $(\Omega_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tels que

$$\chi\Omega_{n_k} \xrightarrow{L^1} \chi\Omega, \quad \Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega$$
$$\partial\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \partial\Omega, \quad \bar{\Omega}_{n_k} \xrightarrow{H} \bar{\Omega}.$$

Preuve du lemme 1.3.1

D'après la compacité de la topologie de Hausdorff, il existe une suite extraite $(\Omega_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, Ω ouvert tels que $\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega$, donc
$\chi\Omega_{n_k} \overset{(L^\infty,L^1)}{\longrightarrow} f$ avec $0 \leq f \leq 1$.

On sait que $\chi_\Omega \leq f$ p.p, pour qu' on ait $\chi_\Omega = f$ p.p, il suffit de montrer que f est identiquement nulle sur $D\backslash\Omega$.

Soit $x \in \partial\Omega$ comme $\bar{D}\backslash\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \bar{D}\backslash\Omega$ en posant $n_k = n$, on peut dire qu'il existe $x_n \in \bar{D}\backslash\Omega_n$ telle que x_n converge vers x.

Soit $\hat{x}_n \in \partial\Omega_n$ tel que $||x_n - \hat{x}_n|| = d(x_n, \partial\Omega_n)$ alors $\hat{x}_n$ converge vers x sinon il existe n_i et $\eta > 0$ tels que $d(x_{n_i}, \partial\Omega_{n_i}) \geq \eta$, c'est à dire que $B(x_{n_i}, \eta) \subset \bar{D}\backslash\Omega_{n_i}$, d' après la continuité de l'inclusion pour la convergence de Hausdorff on a $\bar{B}(x,\eta) \subset \bar{D}\backslash\Omega$, ce qui est impossible car $x \in \partial\Omega$.

D'après la propriètè du ϵ-cône pour Ω_n, on a $C(\hat{x}_n, \zeta(\hat{x}_n), \epsilon, \epsilon) \subset \bar{D}\backslash\Omega_n$, quitte à en extraire une sous suite , on peut supposer que $\zeta(\hat{x}_n)$ converge vers $\zeta = \zeta(x)$.

Par continuité de l'inclusion on a $C(x, \zeta(x), \epsilon, \epsilon) \subset \bar{D}\backslash\Omega$, donc $C(x, \zeta(x), \frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}) \subset \bar{D}\backslash\Omega$.

Soit $y \in B(x,\epsilon) \cap \bar{D}\backslash\Omega$ donc il existe $y_n \in \bar{D}\backslash\Omega_n$ telle que y_n converge vers y et on a $||y_n - x_n||$ converge vers $||y - x|| < \epsilon$. Par ailleurs $||x_n - \hat{x}_n||$ converge et pour n assez grand on a $||y_n - \hat{x}_n|| < \epsilon$.

La propriètè du ϵ-cône entraîne $C(y_n, \zeta(\hat{x}_n), \epsilon, \epsilon) \subset D\backslash\bar{\Omega}_n$ et que ,à la limite $C(y, \zeta(\bar{x}), \epsilon, \epsilon) \subset \bar{D}\backslash\Omega$ donc $C(y, \zeta(x), \frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}) \subset \bar{D}\backslash\Omega$ d'où la propriètè du $\frac{\epsilon}{2}$-cône pour $\bar{D}\backslash\Omega$ et donc pour Ω.

Soit $\phi \in L^1(D)$

$$\begin{aligned}
\int_{C(y,\zeta(x),\epsilon,\epsilon)} \phi \, dx &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{C(y_n,\zeta(\hat{x}_n),\epsilon,\epsilon)} \phi \, dx \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{C(y_n,\zeta(\hat{x}_n),\epsilon,\epsilon)} \chi_{D\backslash\Omega_n}\phi \, dx \\
&= \int_{C(y,\zeta(x),\epsilon,\epsilon)} \phi(\chi_D - f) \, dx \\
&= \int_{C(y,\zeta(x),\epsilon,\epsilon)} \phi \, dx - \int_{C(y,\zeta(x),\epsilon,\epsilon)} \phi f \, dx
\end{aligned}$$

donc $\int_{C(y,\zeta(x),\epsilon,\epsilon)} \phi f \, dx = 0$, pour tout $\phi \in L^1(D)$ donc $f = 0$ sur $C(y, \zeta(x), \epsilon, \epsilon)$ p.p ou sur $\bar{C}(y, \zeta(x), \epsilon, \epsilon)$ p.p .

En faisant varier $y \in B(x, \epsilon) \cap \bar{D} \backslash \Omega$ puis $x \in \partial\Omega$ on obtient $f = 0$ sur $\{x \in D\backslash\Omega; d(x, \partial\Omega) < \epsilon\}$.

Par un raisonnement analogue à partir des $y \in D\backslash\Omega$ tels que $d(y, \partial\Omega) \geq \epsilon$, on montre que $f = 0$ sur $\{y \in D\backslash\Omega; d(y, \partial\Omega) \geq \epsilon\}$.

On montre par conséquent $\chi_{\Omega_{n_k}}$ converge dans $L^1(D)$ vers χ_Ω p.p .

Montrons que $\bar{\Omega}_{n_k} \xrightarrow{H} \bar{\Omega}$ pour une suite extraite Ω_{n_k} telle que $\bar{\Omega}_{n_k} \xrightarrow{H} G$.

C' est à dire il faut montrer que $G = \bar{\Omega}$.

Soit $\bar{B}(x, \eta) \subset \Omega$ donc $\bar{B}(x, \eta) \subset \Omega_{n_k}$ pour n assez grand on a $\bar{B}(x, \eta) \subset \bar{\Omega}_{n_k}$ à la limite au sens de Hausdorff on a $\bar{B}(x, \eta) \subset G$ pour toute boule dans Ω donc $\Omega \subset G$ donc $\bar{\Omega} \subset G$.

Posons $F = \bar{D}\backslash\Omega$. Soit $x \in G \cap F$, montrons que $x \in \bar{\Omega}$.

Il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in \bar{\Omega}_{nk}$ telle que x_{n_k} converge vers x et $y_{n_k} \in \bar{D}\backslash \Omega_{n_k}$ telle que y_{n_k} converge vers x. La suite $\hat{x}_{n_k}$ est dans $[x_{n_k}, y_{n_k}] \cap \partial\Omega_{n_k}$, on a $\hat{x}_{n_k}$ qui converge vers x.

$$\begin{aligned} C(\hat{x_{n_k}}, \zeta(\hat{x}_{n_k}), \epsilon, \epsilon) &\subset \Omega_{n_k} \\ \Omega_{n_k} &\subset \bar{\Omega}_{n_k} \\ C(\hat{x}_{n_k}, -\zeta(\hat{x}_{n_k}), \epsilon, \epsilon) &\subset D\backslash\bar{\Omega}_{n_k} \\ D\backslash\bar{\Omega}_{n_k} &\subset \bar{D}\backslash\Omega_{n_k} \end{aligned}$$

On peut supposer que $\zeta(\hat{x}_{n_k})$ converge vers $\zeta(x)$ donc

$$\begin{aligned} C(x,\zeta(x),\epsilon,\epsilon) &\subset G \\ C(x,-\zeta(x),\epsilon,\epsilon) &\subset \bar{D}\backslash\Omega \end{aligned}$$

Soit $\eta > 0$ arbitraire , posons :

$$C_{n_k}(\eta) = \{z \in C(\hat{x}_{n_k},\zeta(\hat{x}_{n_k}),\epsilon,\epsilon), \ \ d(z,\partial C(\hat{x}_{n_k},\zeta(\hat{x}_{n_k}),\epsilon,\epsilon) \geq \eta\}.$$

On a $\rho(C_{n_k}(\eta),F_{n_k}) \geq \eta$ à la limite $\rho(C(\eta),F) \geq \eta$ donc $C(\eta) \subset \Omega$ ce qui entraine que $\bar{C}(x,\zeta(x),\epsilon,\epsilon) \subset \bar{\Omega}$ donc $G \cap F \subset \bar{\Omega}$ d'où $G \cap F \subset \partial\Omega$ donc $G\backslash\bar{\Omega} = \emptyset$, c'est à dire que $G \subset \bar{\Omega}$ d'où le résultat. ∎

Nous allons énoncer un lemme qui nous sera utile par la suite.

Lemme 1.3.2

Soit Ω un domaine lipschitzien avec u appartenant à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, si $u = 0$ p.p sur Ω^c alors u appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve du lemme 1.3.2

Soit $(V_i)_{1 \leq i \leq N)}$ un recouvrement de $\partial\Omega$ associé à la propriètè de Lipschitz, T_i une application lipschitzienne.

Soit $(\zeta_i)_{1 \leq i \leq N}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement .

$\zeta_i \in \mathcal{D}(V_i)$ et on pose $u_i = \zeta_i u$. Nous allons montrer que $u_i \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Supposons que $suppu_i \subset \overline{V_i \cap \Omega}$, on transporte la situation sur $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$.

Notons que

$$\bar{u} = \begin{cases} u_i(T_i)(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Montrons que $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Nous savons que $\bar{u} \in L^2(\mathbb{R}^N), T_i$ étant lipschitzienne donc elle est dérivable p.p avec une dérivée bornée. On a $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\dfrac{\partial T_i^k}{\partial x_j}$, pour $x > 0$.

$\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} \in L^2(R^N)$, $\dfrac{\partial T_i^k}{\partial x_j} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ donc $\nabla\bar{u} \in (L^2(\mathbb{R}^N))^N$ d'où $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Soit $\phi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\phi_0 \geq 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \phi_0 dx = 1$

Supposons que $supp(\phi_0) \subset [-1,1]^{N-1}\times[\frac{1}{2},1]$ et posons que $\phi_n(x) = n^N\phi_0(nx)$. On aura donc $supp\phi_n \subset [-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]^{N-1} \times [\frac{1}{2n},\frac{1}{n}]$ et on démontre dans [4] que $\phi_n * \bar{u} \longrightarrow \bar{u}$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Or $\phi_n * \bar{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ car $\bar{u}$ et ϕ_n sont à support compact donc on a

$$supp(\phi_n * \bar{u}) \subset supp(\phi_n) + supp(\bar{u}) \quad \text{donc on a}$$

$$supp(\phi_n) + supp(\bar{u}) \subset [x_N \geq \frac{1}{2n}] + [x_N \geq 0]$$

Et par conséquent on a $[x_N \geq \frac{1}{2n}] + [x_N \geq 0]$ inclus dans $[x_N \geq \frac{1}{2n}]$ donc on a $\phi_n * \bar{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N_+)$ ceci entraine que $\bar{u} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.

La trace de $\bar{u}$ sur $x_N = 0$ est nulle donc la trace de u_i sur $\partial\Omega$ est aussi nulle.■

L'objectif de cette partie est d'exploiter les résultats obtenus précédamment pour montrer l'existence de solutions du problème d'optimisation de forme (1.2) sous la contrainte de la propriété du ϵ-cône.

On note $\tilde{u}$(resp $\tilde{\phi}$) la fonction u (resp ϕ) prolongée par 0 dans D.

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in D\backslash\Omega \end{cases}$$

$$\nabla\tilde{u} = \begin{cases} \nabla u & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in D\backslash\Omega \end{cases}$$

$$\tilde{\phi} = \begin{cases} \phi & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in D\backslash\Omega \end{cases}$$

Soit la fonctionnelle E définie sur $W_0^{1,p}(D)$ par

$$E(\tilde{u}_w) = \frac{1}{p}\int_D ||\nabla\tilde{u}_w||^p dx, \ 1 < p < \infty$$

où $\tilde{u}_w$ étant le prolongement à D par 0 de la solution u_w du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u_w = 0 & \text{dans } w\backslash K \\ u_w = 0 & \text{sur } \partial w \\ u_w = 1 & \text{sur } \partial K \end{cases}$$

Proposition 1.3.2

Le problème consistant à trouver Ω appartenant à $\mathcal{O}_\epsilon$ tel que

$$J(\Omega) = \min\{J(w), \ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$$

possède une solution.

Preuve de la proposition 1.3.2

Posons : $J(w) := E(\tilde{u}_w)$

$E(\tilde{u}_w)$ est bien définie car si on applique l'inégalité de Poincaré, $E(\tilde{u}_w)$ est une norme dans $W_0^{1,p}(D)$, donc $J(w) \geq 0$ ce qui entraine que

$\inf\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_\epsilon\} > -\infty$ donc il existe une suite minimisante $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}_\epsilon$ telle que $J(\Omega_n)$ converge vers $\inf\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$.
$(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{O}_\epsilon$, donc bornée, il existe un compact F tel que $\bar{\Omega}_n \subset F \subset D$, d'après le lemme (1.3.1), il existe une suite extraite $(\Omega_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, et Ω vérifiant l'hypothèse du ϵ - cône tels que $\Omega_{n_k} \xrightarrow{H} \Omega$ et $\chi_{\Omega_{n_k}} \xrightarrow{p.p} \chi_\Omega$.
Posons : $u_{\Omega_n} = u_n$
Montrons que $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(D)$.
C'est à dire qu'il existe $c > 0$ tel que $\int_D ||\nabla \tilde{u}_n||^p dx \leq c$ pour tout n.
Sinon pour tout s, il existe une suite extraite de $\tilde{u}_n$ appartenant à $W_0^{1,p}(D)$ quitte à la noter $\tilde{u}_n$ telle que $\int_D ||\nabla \tilde{u}_n||^p dx > s$

$$\begin{aligned}
\int_D ||\nabla \tilde{u}_n||^p dx &= \int_{\Omega_n} ||\nabla \tilde{u}_n||^p dx + \int_{D\setminus\Omega_n} ||\nabla \tilde{u}_n||^p dx \\
\int_D ||\nabla \tilde{u}_n||^p dx &= \int_{\Omega_n} ||\nabla \tilde{u}_n||^p dx \quad \text{car } \nabla \tilde{u}_n = 0 \text{ sur } D\setminus\Omega_n \\
\int_{\Omega_n} ||\nabla \tilde{u}_n||^p dx &> s
\end{aligned}$$

C'est à dire que $J(\Omega_n)$ convergerait vers $+\infty$ donc $\inf\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_\epsilon\} = +\infty$ ce qui est absurde.
$W_0^{1,p}(D)$ réflexif donc il existe une suite extraite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ et u^* tels que u_{n_k} converge faiblement vers u^* dans $W_0^{1,p}(D)$.
Montrons que u^* appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Comme u_{n_k} converge faiblement vers u^* dans $W_0^{1,p}(D)$ donc il existe une sous suite de u_{n_k} quitte à la noter encore u_{n_k} telle que u_{n_k} converge fortement vers u^* dans $L^p(D)$ [4] page 169 et u_{n_k} converge p.p vers u^* .

Or on sait que

$$\begin{aligned}
\chi_{\Omega_{n_k}} &\xrightarrow{p.p} \chi_\Omega \quad \text{donc} \\
\chi_{D\setminus K} - \chi_{\Omega_{n_k}\setminus K} &\xrightarrow{p.p} \chi_{D\setminus K} - \chi_{\Omega\setminus K} \quad \text{or} \\
u_{n_k} &\xrightarrow{p.p} u^* \text{ donc} \\
(\chi_{D\setminus K} - \chi_{\Omega_{n_k}\setminus K})u_{n_k} &\xrightarrow{p.p} (\chi_{D\setminus K} - \chi_{\Omega\setminus K})u^* \ p.p.
\end{aligned}$$

Si $x \in D$ alors $x \in \Omega$ ou $x \in \Omega^c$ donc

si $x \in \Omega$ alors $(\chi_{D\setminus K} - \chi_{\Omega\setminus K})u^* = 0$ $p.p.$ et si $x \in \Omega^c$ on a

$u^*(x) = 0$ dans tout les cas $(\chi_{D\setminus K} - \chi_{\Omega\setminus K})u^* = 0$ $p.p.$

C'est à dire que

$$\begin{aligned}
u^* &= 0 \text{ sur } D\setminus K\setminus(\Omega\setminus K) \\
u^* &= 0 \text{ sur } D \cap K^c \cap (\Omega^c \cup K^c) \\
u^* &= 0 \text{ sur } D \cap K^c \cap \Omega^c \cup D \cap K^c \cap K \\
u^* &= 0 \text{ sur } D \cap K^c \cap \Omega^c,
\end{aligned}$$

Or $K \subset \Omega$ donc $K^c \cap \Omega^c = \Omega^c$. d'où

$$\begin{aligned}
u^* &= 0 \text{ sur } D\setminus\Omega \\
u^* &= 0 \text{ sur } \Omega^c \ p.p.
\end{aligned}$$

Puisque Ω possède la proprièté du ϵ - cône et d'après le lemme(1.3.2), on a $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega)$. La suite u_{n_k} converge faiblement vers u^* dans $W_0^{1,p}(D)$. On sait que u^* appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$, comme la norme est semi- continue inférieurement pour la convergence faible dans $W_0^{1,p}(D)$, on a

$$\int_\Omega ||\nabla u^*||^p \, dx \leq \liminf \int_{\Omega_{n_k}} ||\nabla u_{n_k}||^p \, dx,$$

soit $J(\Omega) \leq J(\Omega_{n_k})$ donc $J(\Omega) \leq \inf\{J(w), \ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ d'où $J(\Omega) = \min\{J(w), \ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$. ∎

La famille $\mathcal{O}_\epsilon$ étant compacte pour la convergence de domaines au sens de Hausdorff, donc il serait intéréssant d'étudier la continuité de la suite de solutions du problème (1.1). C'est à dire si on a une suite de domaines $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ solution du problème (1.2) et qui converge au sens de Hausdorff vers Ω, peut-on se prononcer sur la convergence de la suite u_n solution du problème (1.1) vers u solution du problème (1.1) ?
Pour cela nous allons énoncer le résultat suivant. Mais pour faciliter la lecture, nous avons besoin des résultats suivants.

Lemme 1.3.3

Soient $1 \leq p < \infty$, f appartient à $L^p(\Omega)$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$.On suppose que :

$$f_n \text{ converge vers } f \text{ p.p et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} ||f_n||_p = ||f||_p$$

alors on a $\lim_{n \longrightarrow +\infty} ||f_n - f||_p = 0.$

Remarque 1.3.2 *Le lemme 1.3.3 peut être trouvé dans [12].*

Lemme 1.3.4 (Brézis-Lieb)

Soient $1 \leq p < \infty$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de fonctions de $L^p(\Omega)$ qui convergent p.p vers f. Alors f appartient à $L^p(\Omega)$ et

$$||f||_p^p = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (||f_n - f||_p^p + ||f_n||_p^p).$$

Preuve du lemmme 1.3.4

Le lemme peut être trouvé dans [12]. ∎

Nous nous intéressons à la continuité de l'application

$$\Omega \longrightarrow u_\Omega,$$

qui associe à chaque élément de la famille $\mathcal{O}_\epsilon$ l'unique solution u_Ω du problème (1.1). Cette question est motivée, par exemple, par l'existence de solutions du problème d'optimisation de forme $\min\{J(w),\ w \in \mathcal{O}\epsilon\}$.

Théorème 1.3.3

Soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de domaines convergente au sens de Hausdorff vers Ω. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de solutions du problème de Dirichlet(1.1) sur Ω_n. Alors il existe une suite extraite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ vers une solution u_Ω du problème de Dirichlet (1.1) .

Preuve du théorème 1.3.3

D'après la proposition (1.3.2) il existe une suite extraite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que u_{n_k} converge faiblement vers u^* dans $W_0^{1,p}(D)$.

Dans la preuve de la proposition (1.3.2) ∇u_{n_k} est borné dans $(L^p(D))^N$ d'après le lemme (1.3.4), on a

$$\nabla u^* \in L^p(D) \text{ et } ||\nabla u^*||_p^p = \lim_{n \longrightarrow \infty}(||\nabla u_{n_k}||_p^p + ||\nabla u^* - \nabla u_{n_k}||_p^p).$$

$||\nabla u^*||_p^p = \int_D ||\nabla u^*||^p dx = pJ(\Omega)$ et $||\nabla u_{n_k}||_p^p = \int_D ||\nabla u_{n_k}||^p dx = pJ(\Omega_{nk})$.
D'après la proposition (1.3.2), on a $J(\Omega_{n_k})$ converge $J(\Omega)$ donc $||\nabla u_{n_k}||_p^p$ converge vers $||\nabla u^*||_p^p$ nous sommes dans les conditions d'appliquer le lemme (1.3.3), on a donc $||\nabla u^* - \nabla u_{n_k}||_p^p$ converge vers 0 donc ∇u_{n_k} converge fortement vers ∇u^* dans $(L^p(D))^N$ or $(\int_D ||\nabla u_{n_k}||^p dx)^p$ est une norme qui est

équivalente à celle de $W^{1,p}(D)$, on peut le vérifier grâce à l'inégalité de Poincaré donc u_{n_k} converge vers u^* dans $W_0^{1,p}(D)$.

Maintenant il reste à vérifier est ce que u^* est solution du problème (1.1) .

Pour cela montrons d'abord que $u^* = 1$ sur ∂K.

On sait que u_{n_k} converge vers u^* *p.p*, comme la convergence p.p n'est pas suffisante pour passer à la limite car le bord ∂K est de mesure nulle , on va prendre un ouvert Ω' de classe $\mathcal{C}^2$ contenant K dont le bord $\partial\Omega'$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

On a u_{n_k} est une suite appartenant à $W_0^{1,p}(\Omega')$ donc il existe $\beta > 0$ tel que u_{n_k} appartient à $\mathcal{C}^{1,\beta}(\bar{\Omega'})$ cf [15].

On applique le théorème d'Ascoli, on obtient u_{nk} converge uniformément vers u^* sur ∂K, or $u_{n_k} = 1$ sur ∂K donc $u^* = 1$ sur ∂K.

Montrons ensuite que pour tout x appartenant à $D\backslash\Omega$, $u^* = 0$, c'est à dire que $u^*(x) = 0$ sur Ω^c

On sait que

$$\begin{aligned} \nabla u_n &\longrightarrow \nabla u^* \ p.p \\ \chi_{\Omega_n} &\longrightarrow \chi_\Omega \ p.p \end{aligned}$$

donc $(\chi_{D\backslash K} - \chi_{\Omega_{n_k}\backslash K})u_{n_k} \longrightarrow (\chi_{D\backslash K} - \chi_{\Omega\backslash K})u^* = 0$ p.p donc

$$\begin{aligned} u^* &= 0 \text{ sur } D\backslash\Omega \\ u^* &= 0 \text{ sur } \Omega^c \ p.p \end{aligned}$$

donc u^* appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$ d'après le lemme(1.3.2).

Enfin montrons que $\triangle_p u^* = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega\backslash K)$.

Si u_n est solution du problème de Dirichlet (1.1) sur Ω_n alors on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n\setminus K} \operatorname{div}(||\nabla u_n||^{p-2}\nabla u_n)\phi\, dx &= 0, \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{D}(\Omega\setminus K) \\
\int_{\Omega_n\setminus K} ||\nabla u_n||^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi\, dx - \int_{\partial K} ||\nabla u_n||^{p-2}\nabla u_n.\nu\phi\, ds &= 0, \text{ donc on a} \\
\int_{\Omega_n\setminus K} ||\nabla u_n||^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi\, dx &= \int_{\partial K} ||\nabla u_n||^{p-2}\nabla u_n.\nu\phi\, ds \text{ or} \\
\int_{\partial K} ||\nabla u_n||^{p-2}\nabla u_n.\nu\phi\, ds &= 0 \text{ car } \phi \in \mathcal{D}(\Omega\setminus K)
\end{aligned}$$

donc d'après l'équation précèdente, on a $\int_{\Omega_n\setminus K} ||\nabla u_n||^{p-2}\nabla u_n \nabla\phi\, dx = 0$,
pour tout ϕ appartenant á $\mathcal{D}(\Omega\setminus K)$ or on sait que

$$\begin{aligned}
\nabla u_n &\longrightarrow \nabla u^* p.p \\
\chi_{\Omega_n} &\longrightarrow \chi_\Omega
\end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned}
\int_D \chi_{\Omega\setminus K} ||\nabla u^*||^{p-2}\nabla u^* \nabla\phi\, dx &= 0 \ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega\setminus K) \\
-\int_D \chi_{\Omega\setminus K} \operatorname{div}(||\nabla u^*||^{p-2}\nabla u^*)\phi\, dx &= 0 \ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega\setminus K) \\
-\operatorname{div}(||\nabla u^*||^{p-2}\nabla u^*) &= 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega\setminus K) \quad \text{donc} \\
-\Delta_p u^* &= 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega\setminus K).
\end{aligned}$$

■

Nous avons montré que u^* est solution de

$$\begin{cases}
-\Delta_p u^* = 0 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega\setminus K) \\
u^* = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\
u^* = 1 & \text{sur } \partial K
\end{cases}$$

Ω vérifie $J(\Omega) = \min\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ donc il existe u_Ω solution du problème (1.1).

La question qui se pose est : peut -on affirmer que $u_\Omega = u^*$?

Comme J est strictement convexe pour Ω fixé, elle atteint son minimum en un point unique, donc $J(u_\Omega) = J(u^*) = \min\{J(v),\ v \in V\}$.

Chapitre 2

Etude de l'existence d'une solution du problème à frontière libre

2.1 Introduction

Dans cette partie nous nous intéressons à l étude de l'existence de solutions du problème extérieur à frontière libre et sauf indication contraire nous admettons que Ω est de classe $\mathcal{C}^2$.
Nous commençons par introduire quelques techniques de dérivation par rapport au domaine developées par **J.P. Zolésio et J. Sokolowski** [19] en vue d'obtenir un résultat de conditions d'optimalité sous la forme d'une équation aux dérivées partielles dans laquelle apparaît un multiplicateur de Lagrange λ_Ω où Ω est solution du problème d'optimisation de forme

$\min\{J(w),\ w\ \in\ \mathcal{O}_\epsilon\}$.

En s'appuyant sur un résultat de monotonie, nous établissons un résultat d'existence de domaine non nécessairement convexe solution du problème extérieur à frontière libre en combinant une approche variationnelle et séquentielle. On obtient également un résultat d'unicité et un résultat de nature géométrique, c'est à dire si K est étoilé par rapport à l'origine entraine que le domaine Ω contenant K est étoilé par rapport à l'origine.

La question qu'on se pose est la suivante : est ce que (u_Ω, Ω) trouvé pour le problème d'optimisation de forme (1.2) peut être solution du problème à frontière libre ?

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\Omega &= 0 \text{ dans } \Omega\backslash K,\ \ 1 < p < \infty \\ u_\Omega &= 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \\ u_\Omega &= 1 \ \text{ sur } \partial K \\ -\dfrac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} &= c \ \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où c est une constante strictement positive. Pour cela nous avons besoin de chercher la dérivée de la fonctionnelle $J(\Omega)$ par rapport au domaine Ω pour voir si (u_Ω, Ω) vérifie : $-\dfrac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} = c \ \text{ sur } \partial\Omega$?

Nous allons utiliser la méthode des vitesses qui est un des principes pour la dérivation par rapport au domaine en vue d'obtenir une condition d'optimalité liant le domaine Ω et u_Ω. Pour faciliter la lecture nous présentons un certain nombre de résultats developpés dans [19].

2.2 Dérivation par rapport au domaine

Pour calculer la dérivée de la fonctionnelle de forme $J(\Omega)$, nous avons besoin d'introduire une famille de perturbations $\{\Omega_t\}$ pour $t \in [0,\epsilon[$ du domaine Ω. On pose $\Omega = \Omega_0$. On suppose que les $\{\Omega_t\}$ pour $t \in [0,\epsilon[$ sont contenus dans D, ont la même propriètè topologique et sont simplement connexes de classe $\mathcal{C}^k$.

Ainsi on construit une famille de transformations dépendant de vecteurs champs de vitesse V que l'on définit dans la suite.

Pour $t \in [0,\epsilon[$, on définit T_t :

$$
\begin{aligned}
T_t : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\
\Omega &\longmapsto \Omega_t
\end{aligned}
$$

où T_t vérifie

i- T_t est bijective.

ii- T_t et T_t^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ pour $0 \leq t < \epsilon$.

iii- L'application $t \longmapsto T_t(x)$ et $t \longmapsto T_t^{-1}(x)$ appartient à $\mathcal{C}^1([0,\epsilon[)$ pour tout x à $\mathbb{R}^N$.

Considérons D un domaine de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Soit $T_t : \bar{D} \longrightarrow \bar{D}$ telle que T_t, T_t^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k(\bar{D}, \mathbb{R}^N)$ et l'application $t \longmapsto T_t(x)$, $t \longmapsto T_t^{-1}(x)$ appartient à $\mathcal{C}([0,\epsilon[)$ pour tout $x \in \bar{D}$ alors l'application $(t,x) \longmapsto T_t(x)$ appartient à $\mathcal{C}([0,\epsilon[; \mathcal{C}^k(\bar{D}, \mathbb{R}^N))$.

Pour tout $\bar{X} \in D$, $t > 0$, le point $x(t) = T_t(X)$ suit la trajectoire $x(.)$

avec la vitesse

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial T_t(X)}{\partial t}.$$

On pose que $V = V(t) = V(t)(x) = V(t,x)$.

Le vecteur champ de vitesse $V(t, x(t))$ au point $x(t)$ est définie par

$$V(t,x) = \frac{\partial T_t}{\partial t} o T_t^{-1}(x).$$

Les applications T_t, T_t^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k(\bar{D}, \mathbb{R}^N)$ alors V appartient à $\mathcal{C}((0,\epsilon); \mathcal{C}^k(\bar{D}, \mathbb{R}^N))$.

Comme on veut avoir de petites perturbations dans le souci de conserver les propriètés topologiques et la régularité sur les ouverts sur lesquels on travaille, nous allons définir un ensemble admissible de vecteurs champ.

Définition 2.2.1

Soit D un domaine de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$ par morceaux.

Supposons que la normale unitaire extérieure existe p.p sur ∂D sauf aux points singuliers $\bar{x}$ appartenant à ∂D et $V(t, \bar{x}) = 0$ pour tout point singulier $\bar{x}$ appartenant à ∂D, c'est à dire en tout point où la normale unitaire extérieure n'est pas définie.

Posons

$V^k(D) = \{V \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \ / \ V.\nu = 0$ *p.p sur* ∂D *sauf aux points singuliers* $\bar{x} \in \partial D$, $V(t, \bar{x}) = 0$ *pour tout point singulier* $\bar{x} \in \partial D\}$.

$V^k(D)$ est muni de la topologie induite par $\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

Si $V \in \mathcal{C}(0, \epsilon; V^k(D))$ alors il existe un compact G dans $\mathbb{R}^N$ tel que *supp* $V(t) \subset G$, pour tout t, $0 \leq t \leq \epsilon$.

Et si les conditions suivantes sont satisfaites

$V.\nu = 0$ $p.p$ sur ∂D et $V(t,\bar{x}) = 0$, $\bar{x}$ point singulier alors l'application

$T_t(V) : G \cap \bar{D} \longrightarrow G \cap \bar{D}$

est bien définie donc la restriction de $T_t(V)$ sur $\bar{D}$ est une transformation sur $\bar{D}$ possèdant toutes les propriètés requises pour l'application $T_t(V)$.

2.2.1 Propriètés des transformations T_t

Etant donnés un vecteur champ $V \in \mathcal{C}(0,\epsilon; D^k(D,\mathbb{R}^N))$ où D est de classe $\mathcal{C}^k$. On considère les transformations $T_t = T_t(V)$ appartenant à $\mathcal{C}^k(\bar{D},,\mathbb{R}^N)$ pour t fixé.

On suppose que $V.\nu = 0$ $p.p$ sur ∂D et $V(t,\bar{x}) = 0$ pour tout point singulier $\bar{x} \in \partial D$, c'est à dire en tout point où la normale extérieure n'est pas définie. L'application T_t est une transformation de $\bar{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ telle que $T_t(\partial D) = \partial D$.

On note par $DT_t(X)$ la matrice jacobienne de T_t en X, $^*DT_t$ la transposée de la matrice jacobienne et $\gamma(t) = det(DT_t)$ est le déterminant de la matrice jacobienne.

Les applications $t \longmapsto DT_t$ et $t \longmapsto \gamma(t)$ sont différentiables dans $\mathcal{C}^{k-1}(\bar{D},\mathbb{R}^N)$ et dans $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R})$ respectivement voir [19]. Les dérivées en $t = 0$ sont données par

$$(\frac{\partial}{\partial t}DT_t)_{|t=0} = DV(0) \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = divV(0).$$

2.2.2 Dérivée Euleriennne d'une fonctionnelle de forme

Etant donnés un ouvert Ω inclus dans D qui est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, un vecteur champ $V \in \mathcal{C}(0,\epsilon; V^k(D))$ et la transformation $T_t(V)$ associée.

Définition 2.2.2

Pour tout champ V appartenant à $\mathcal{C}(0,\epsilon; V^k(D))$, on appelle dérivée Eulerienne de la fonctionnelle $J(\Omega)$ en Ω dans la direction V la limite

$$dJ(\Omega, V) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t}, \quad où \ \Omega_t = T_t(V)(\Omega)$$

Définition 2.2.3

La fonctionnelle $J(\Omega)$ est differentiable en Ω si

i- La dérivée Eulerienne $dJ(\Omega, V)$ existe pour tout champ de vitesse V.

ii- L'application $V \longrightarrow dJ(\Omega, V)$ est linéaire et continue de $\mathcal{C}(0,\epsilon; V^k(D))$ dans $\mathbb{R}^N$.

2.2.3 Dérivée matérielle d'une fonctionnelle de forme

Considérons un ouvert Ω de classe $\mathcal{C}^k$ inclus dans D un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, un vecteur champ V dans $\mathcal{C}(0,\epsilon; V^k(D))$ et la transformation $T_t(V)$ associée.

Supposons que $u(\Omega)$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ alors on a $u(\Omega_t)oT_t(V)$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$.

Définition 2.2.4

On appelle dérivée matérielle de $u(\Omega, V)$ appartenant à $W^{1,p}(\Omega)$ dans la di-

rection V, l'élément $u^{\cdot}(\Omega, V)$ appartenant à $W^{1,p}(\Omega)$ tel que

$$\dot{u}(\Omega, V) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{u(\Omega_t) o T_t(V) - u(\Omega, V)}{t}, \quad où \ \Omega_t = T_t(V)(\Omega).$$

Remarque 2.2.1

$\dot{u} = \dot{u}(\Omega, V)$ est appelée dérivée materielle faible si la convergence est faible et forte si la convergence est forte.

2.2.4 Dérivée matérielle au bord Γ

Soient Ω un domaine de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$ et $u(\Gamma)$ un élément de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Gamma)$.

Posons $\Gamma_t = T_t(V)(\Gamma))$ avec $V \in \mathcal{C}((0, \epsilon); \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et $u(\Gamma_t)$ un élément de $W^{1,p}(\Gamma_t)$.

Définition 2.2.5

On appelle dérivée matérielle de $u(\Gamma, V)$, l'élément $\dot{u}(\Gamma, V)$ de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Gamma)$ défini par

$$\dot{u}(\Gamma, V) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{u(\Gamma_t) o T_t(V) - u(\Gamma, V)}{t}$$

pour tout champ V.

Remarque 2.2.2

$\dot{u} = \dot{u}(\Gamma, V)$ est appelée dérivée matérielle faible si la convergence est faible et forte si la convergence est forte.

2.2.5 Dérivée de forme d'une fonctionnelle de forme

Considérons un ouvert Ω de classe $\mathcal{C}^2$ inclus dans D, un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $u(\Omega)$ appartenant à $W^{1,p}(\Omega)$.
On suppose que la dérivée matérielle faible existe dans $W^{1,p}(\Omega)$ et que $\nabla u(\Omega).V(0)$ appartient à $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout champ de vecteur V appartenant à $\mathcal{C}(0,\epsilon;V^k(D))$, $k \geq 1$.

Définition 2.2.6

On appelle dérivée de forme dans la direction V, l'élément $u'(\Omega,V)$ appartenant à $W^{1,p}(\Omega)$ défini par

$$u'(\Omega) = \dot{u}(\Omega,V) - \nabla u(\Omega).V(0).$$

2.2.6 Dérivée de forme au bord Γ

Soient D un domaine de $\mathbb{R}^N$, Ω un domaine de D de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$.
Soit $u(\Gamma)$ un élément de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Gamma)$.
On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites

i- la dérivée matérielle faible $\dot{y}$ existe dans $W^{1,p}(\Gamma)$.

ii- $\nabla_\Gamma u(\Gamma).V(0)$ appartient à $W^{1,p}(\Gamma)$ pour tout champ de vecteur V appartenant à $\mathcal{C}((0,\epsilon);\mathcal{D}^k(D,\mathbb{R}^N))$ où $k \geq 3$.

Définition 2.2.7

On appelle dérivée de forme de $u(\Gamma,V)$ au bord Γ dans la direction V l'élément de $W^{1,p}(\Gamma)$ défini par

$$u'(\Gamma,V) = \dot{u}(\Gamma,V) - \nabla_\Gamma u(\Gamma).V(0).$$

2.2.7 Notation

Soit la fonctionnelle définie par : $J(\Omega, V) = \int_\Omega y_\Omega(x)dx$.

$\dot{y} = \dot{y}(\Omega, V)$ est la dérivée matérielle de $y(\Omega)$ en Ω dans la direction du champ V

$y' = y'(\Omega, V)$ est la dérivée de forme de $y(\Omega)$ en Ω dans la direction du champ V.

Et on a $\dot{y}(\Omega, V) = y'(\Omega, V) + \nabla y_\Omega . V(0)$ avec $V(0) = V(0, x)$

$dJ(\Omega, V)$ est la dérivée Eulerienne et on a :

$$\begin{aligned}
dJ(\Omega, V) &= \int_\Omega \dot{y}(\Omega, V)\, dx + \int_\Omega y(\Omega, V)\mathrm{div}(V(0))\, dx \\
dJ(\Omega, V) &= \int_\Omega y'(\Omega, V)\, dx + \int_\Omega \nabla y(\Omega, V).V(0)dx + \int_\Omega y(\Omega, V)\mathrm{div}(V(0))\, dx \\
dJ(\Omega, V) &= \int_\Omega y'(\Omega, V)\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}(y(\Omega, V)V(0))\, dx.
\end{aligned}$$

Si $J(\Omega, V) = \int_\Gamma y_\Omega(x)\, dx$, on définit de la même manière la dérivée Eulerienne

$$dJ(\Omega, V) = \int_\Gamma y'(\Gamma, V)\, d\Gamma + \int_\Gamma \mathrm{div}_\Gamma(y(\Gamma, V)V(0))\, d\Gamma.$$

2.3 Conditions d'optimalité

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'étude de conditions d' optimalité que doit vérifier la solution Ω du problème d'optimisation de forme. Il s'agit de déterminer une condition liant u_Ω et Ω sur le bord $\partial\Omega$;

u_Ω est solution de

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\Omega &= 0 \quad \text{dans } \Omega\backslash K \\ u_\Omega &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ u_\Omega &= 1 \quad \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

Autrement dit le domaine Ω solution de $\min\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ et u_Ω solution (1.1) sont ils liés par une condition surdéterminée sur $\partial\Omega$?

On pose $u = u_\Omega$.

Proposition 2.3.1

Si Ω est solution du problème d'optimisation de forme

$\min\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ *alors*

$$dJ(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} ||\nabla u||^{p-2}\nabla u.\nu u'\ ds + \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} ||\nabla u||^p V(0).\nu\ ds.$$

Preuve de la proposition 2.3.1

Soit

$$J(\Omega) = \frac{1}{p}\int_{\Omega\backslash K} ||\nabla u||^p\ dx$$

En appliquant les définitions introduites au paragraphe précèdant, on a

$$\begin{aligned} dJ(\Omega, V) &= \frac{1}{p}\int_{\Omega\backslash K} (||\dot{\nabla u}||^p\ dx + \frac{1}{p}\int_{\Omega\backslash K} ||\nabla u||^p \mathrm{div}(V(0))\ dx \\ dJ(\Omega, V) &= \frac{1}{p}\int_{\Omega\backslash K} (||\nabla u||^p)'\ dx + \frac{1}{p}\int_{\Omega\backslash K} ||\nabla u||^p \mathrm{div}(V(0))\ dx \\ &+ \frac{1}{p}\int_{\Omega\backslash K} \nabla||\nabla u||^p.V(0))\ dx \\ dJ(\Omega, V) &= \frac{1}{p}\int_{\Omega\backslash K} (||\nabla u||^p)'\ dx + \frac{1}{p}\int_{\Omega\backslash K} \mathrm{div}(||\nabla u||^p.V(0))\ dx \end{aligned}$$

Par la formule de Green on a :

$$dJ(\Omega, V) = \frac{1}{p}\int_{\Omega\setminus K} (||\nabla u||^p)'\,dx + \frac{1}{p}\int_{\partial(\Omega\setminus K)} ||\nabla u||^p V(0).\nu\,ds.$$

Calculons $\displaystyle \frac{1}{p}\int_{\Omega\setminus K} (||\nabla u||^p)'\,dx$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_{\Omega\setminus K} (||\nabla u||^p)'\,dx &= \frac{1}{p}\int_{\Omega\setminus K} ((||\nabla u||^2)^{\frac{p}{2}})'\,dx \\
&= \frac{1}{p}\int_{\Omega\setminus K} \frac{p}{2}(||\nabla u||^2)'(||\nabla u||^2)^{\frac{p}{2}-1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus K} (||\nabla u||^2)'||\nabla u||^{p-2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus K} 2(\nabla u)'\nabla u||\nabla u||^{p-2}\,dx \\
&= \int_{\Omega\setminus K} \nabla u'\nabla u||\nabla u||^{p-2}\,dx
\end{aligned}$$

Finalement on a une expression de $dJ(\Omega, V)$

$$dJ(\Omega, V) = \int_{\Omega\setminus K} \nabla u'\nabla u||\nabla u||^{p-2}\,dx + \frac{1}{p}\int_{\partial(\Omega\setminus K)} ||\nabla u||^p V(0).\nu\,ds$$

$\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$ donc

$$\int_{\Omega\setminus K} (\nabla u)'\nabla u||\nabla u||^{p-2}\,dx = \int_{\Omega\setminus K} \mathrm{div}(\nabla u||\nabla u||^{p-2})u'\,dx + \int_{\partial(\Omega\setminus K)} ||\nabla u||^{p-2}\nabla u.\nu.u'\,ds.$$

Or $u = 1$ sur ∂K le bord intérieur étant fixe, indépendant de Ω

donc $u' = 0$ sur ∂K et on a $-\mathrm{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u) = 0$ $p.p$ dans $\Omega\setminus K$

et en plus on suppose que $V = 0$ sur ∂K puisque le bord intérieur est fixe

donc on a

$$dJ(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} ||\nabla u||^{p-2}\nabla u.\nu u'\,ds + \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} ||\nabla u||^p V(0).\nu\,ds.$$

■

Avant de continuer nous allons énoncer un lemme qui nous sera utile par la suite.

Lemme 2.3.1

Soit $\delta > 0$. *Si l'application définie par*

$$\begin{aligned} w_0 : [0,\delta) &\longrightarrow \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}^N),\ k \geq 1 \\ t &\longmapsto w_0(t) = \gamma(t)||^*(DT_t)^{-1}.\nu|| \end{aligned}$$

est différentiable alors la dérivée $w_0'(t)$ *en* 0 *est égale*

$$w_0'(0) = divV(0) - (DV(0).\nu, \nu)$$

pour tout champ V *appartient à* $C((0,\epsilon);\mathcal{D}^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$.

En plus pour tout compact $\overline{G} \subset \Omega$ *et pour tout multi-indices* $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N \leq 1$, *alors*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \max_{x \in \overline{G}} \left|\left| (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{w_0(t)-1}{t} - w_0'(0)) \right|\right| = 0.$$

Preuve du lemme 2.3.1

Le lemme et la preuve peuvent être retrouvés dans [19]. ∎

Comme on veut déterminer $dJ(\Omega, V)$ il suffit de connaître u'. Pour cela nous allons montrer que u' vérifie une certaine équation aux dérivées partielles.

Proposition 2.3.2

Si u *est solution du problème (1.1) alors la dérivée de forme* u' *vérifie*

$$\begin{cases} -div(||\nabla u||^{p-2}\nabla u') = 0 & dans \quad \mathcal{D}'(\Omega\backslash K) \\ u' = -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} V(0).\nu & sur \quad \partial\Omega \\ u' = 0 & sur \quad \partial K. \end{cases}$$

De plus il existe un multiplicateur de Lagrange λ_Ω *tel que*
$-\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = (\dfrac{-p}{p-1}\lambda_\Omega)^{\frac{1}{p}}$ *sur* $\partial\Omega$, $1 < p < \infty$.

Preuve de la proposition 2.3.2

On pose $T_t(u) = u_t$. Pour une petite perturbation considèrons u_t solution faible du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_t &= 0 \text{ dans } \Omega_t\backslash K \\ u_t &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_t \\ u_t &= 1 \text{ sur } \partial K. \end{cases} \tag{2.1}$$

Donnons l'expression de $u'(\Omega, V)$ sur Γ.

Nous savons que $u_t = 0$ sur Γ_t donc pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, considèrons la fonctionnelle définie par

$E(\Omega_t) = \displaystyle\int_{\Gamma_t} u\phi \, d\Gamma_t$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Par la formule de changement de variables on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= T_t(V)(X) \\ \Gamma_t &= T_t(V)(\Gamma) \\ d\Gamma_t &= dT_t(V)(\Gamma) \\ d\Gamma_t &= \big||det(DT_t)((DT_t)^*)^{-1}.\nu|\,\big|\, d\Gamma. \end{aligned}$$

DT_t est la matrice jacobienne de T_t, $det(DT_t)((DT_t)^*)^{-1}$ est la matrice des cofacteurs de la matrice jacobienne, et $\big||det(DT_t)((DT_t)^*)^{-1}.\nu|\,\big|$ est le jacobien de la matrice de T_t.

On pose $w_0(t) = det(DT_t)\,\big||((DT_t)^*)^{-1}.\nu|\,\big|$ et on supposera que l'application qui à t associe $w_0(t)$ est différentiable pour la norme $L^\infty(\Gamma)$.

On obtient $E(\Omega_t) = \int_\Gamma uoT_t w_0(t)\phi \, d\Gamma$ et on a en plus

$$\begin{aligned}
dE(\Omega, V) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \int_\Gamma \frac{J(\Omega_t) - J(\Omega)}{t} \, d\Gamma \\
dE(\Omega, V) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \int_\Gamma \frac{(u(\Gamma_t)oT_t w_0(t) - u(\Gamma))}{t} \phi \, d\Gamma \\
dE(\Omega, V) &= \lim_{t \longrightarrow 0} \int_\Gamma \frac{(u(\Gamma_t)oT_t w(t) - u(\Gamma) w_0(t))}{t} \phi \, d\Gamma + \lim_{t \longrightarrow 0} \int_\Gamma (\frac{w(t) - 1}{t}) u(\Gamma)\phi \, d\Gamma.
\end{aligned}$$

Or on sait que

$$\begin{aligned}
\dot{u}(\Gamma, V)\phi &= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{(u(\Gamma_t)oT_t(V) - u(\Gamma))\phi}{t} \quad \text{et} \\
1 &= \lim_{t \longrightarrow 0} w_0(t) \quad \text{donc} \\
\int_\Gamma \dot{u}\phi \, d\Gamma &= \lim_{t \longrightarrow 0} \int_\Gamma \frac{(u(\Gamma_t)oT_t w_0(t) - u(\Gamma) w_0(t))\phi}{t} d\Gamma \text{ or} \\
\dot{u}(\Gamma, V) &= u'(\Gamma, V) + \nabla_\Gamma u(\Gamma).V(0) \quad \text{donc} \\
\int_\Gamma \dot{u}\phi \, d\Gamma &= \int_\Gamma (u'(\Gamma, V)\phi + \nabla_\Gamma u(\Gamma).V(0)\phi) \, d\Gamma.
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\int_\Gamma w_0'(0) u(\Gamma)\phi \, d\Gamma = \lim_{t \longrightarrow 0} \int_\Gamma (\frac{w_0(t) - 1}{t}) u(\Gamma)\phi \, d\Gamma \quad \text{d'après le lemme(2.3.1)}$$

$$\begin{aligned}
w_0'(0) &= \operatorname{div}V(0) - (DV(0).\nu, \nu) \quad \text{donc} \\
\int_\Gamma \operatorname{div}V(0) u(\Gamma)\phi - (DV(0).\nu, \nu)\phi \, d\Gamma &= \lim_{t \longrightarrow 0} \int_\Gamma (\frac{w_0(t) - 1}{t}) u(\Gamma)\phi \, d\Gamma
\end{aligned}$$

On sait que $u = 0$ sur $\partial\Omega$ donc

$\int_\Gamma \operatorname{div}V(0) u(\Gamma)\phi \, d\Gamma = 0.$

Maintenant déterminons l'expression de

$$\int_\Gamma (DV(0).\nu, \nu) u\phi \, d\Gamma$$

$$
\begin{aligned}
DV(0).\nu &= (\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}.\nu_i)_{1 \leq j \leq N} \\
(DV(0).\nu, \nu) &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}.\nu_i.\nu_j \quad \text{donc} \\
\int_\Gamma (DV(0).\nu,\nu)u\phi \, d\Gamma &= \int_\Gamma \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V_i}{\partial x_j}.\nu_i.\nu_j u\phi \, d\Gamma \\
&= \int_\Gamma \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} u\nu_i.\nu_j\phi \, d\Gamma \\
&= \int_\Gamma \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} (-\frac{\partial u}{\partial x_j}V_i + \frac{\partial (V_i u)}{\partial x_j}) u\nu_i.\nu_j\phi \, d\Gamma \\
&= \int_\Gamma \sum_{j=1}^{N} -\frac{\partial u}{\partial x_j}.\nu_j \sum_{i=1}^{N} V_i.\nu_i\phi \, d\Gamma + \int_\Gamma \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial (V_i u)}{\partial x_j})\nu_i.\nu_j\phi \, d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Or $u = 0$ sur le bord donc

$$\int_\Gamma \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial (V_i u)}{\partial x_j})\nu_i.\nu_j\phi \, d\Gamma = 0 \qquad \text{donc}$$

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma (DV(0).\nu,\nu)u\phi \, d\Gamma &= \int_\Gamma \sum_{j=1}^{N} -\frac{\partial u}{\partial x_j}.\nu_j \sum_{i=1}^{N} V_i.\nu_i\phi \, d\Gamma \\
&= -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} V(0).\nu \, \phi \, d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Or $\int_\Gamma \nabla_\Gamma u(\Gamma).V(0)\phi \, d\Gamma = 0$ donc

$$dE(\Omega, V) = \int_\Gamma (u'(\Gamma, V) + \frac{\partial u}{\partial \nu} V(0).\nu)\phi \, d\Gamma.$$

$\int_\Gamma (u'(\Gamma,V)\phi + \frac{\partial u}{\partial \nu}V(0).\nu\phi) \, d\Gamma = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ d'où
$u'(\Gamma, V) = -\frac{\partial u}{\partial \nu}V(0).\nu$ sur Γ, c'est à dire que $u' = -\frac{\partial u}{\partial \nu}V(0).\nu$ sur $\partial\Omega$.

Maintenant on montre que u' vérifie une équation aux dérivées partielles. u_t solution du problème (2.1) alors on a

$$\int_{\Omega_t\backslash K} -\mathrm{div}(||\nabla u_t||^{p-2}\nabla u_t)\phi\ dx = \int_{\Omega_t\backslash K} ||\nabla u_t||^{p-2}\nabla u_t\nabla\phi\ dx - \int_{\partial(\Omega_t\backslash K)} ||\nabla u_t||^{p-2}\nabla u_t.\nu_t\phi\ ds$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_t\backslash K)$. Or $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_t\backslash K)$ donc $\phi = 0$ sur $\partial(\Omega_t\backslash K)$ donc

$$\int_{\Omega_t\backslash K} -\mathrm{div}(||\nabla u_t||^{p-2}\nabla u_t)\phi\ dx = \int_{\Omega_t\backslash K} ||\nabla u_t||^{p-2}\nabla u_t\nabla\phi\ dx.$$

Considérons la fonctionnelle

$$E(\Omega_t) = \int_{\Omega_t\backslash K} ||\nabla u_t||^{p-2}\nabla u_t\nabla\phi\ dx.$$

En faisant un changement de variable $x = T_t(X)$ on obtient

$$E(\Omega_t) = \int_{\Omega\backslash K} ||\nabla u_t o T_t||^{p-2}\nabla u_t o T_t\gamma(t)\nabla\phi\ dx$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega\backslash K)$ où $\gamma(t)$ est le determinant de la matrice jacobienne de T_t. On suppose que l'application qui à t associe $\gamma(t)$ est différentiable pour la norme L^∞. Alors la dérivée Eulerienne est de cette forme

$$dE(\Omega, V) = \int_{\Omega\backslash K} (||\nabla u||^{p-2}\nabla u\nabla\phi)'\ dx + \int_{\Omega\backslash K} \mathrm{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u\nabla\phi V(0))\ dx.$$

Calculons l'expression de $\int_{\Omega\backslash K} \mathrm{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u\nabla\phi V(0))\ dx.$

$$\int_{\Omega\backslash K} \operatorname{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u\nabla\phi.V(0))\,dx = \int_{\partial(\Omega\backslash K)} ||\nabla u||^{p-2}\nabla u\nabla\phi.V(0).\nu\,ds$$

or $\phi = 0$ sur $\partial(\Omega\backslash K)$ donc

$\int_{\partial(\Omega\backslash K)} ||\nabla u||^{p-2}\nabla u\nabla\phi.V(0).\nu\,ds = 0$ d'où

$$\begin{aligned} dE(\Omega,V) &= \int_{\Omega\backslash K} (||\nabla u||^{p-2}\nabla u\nabla\phi)'\,dx \\ dE(\Omega,V) &= \int_{\Omega\backslash K} (||\nabla u||^{p-2})'\nabla u\nabla\phi\,dx + \int_{\Omega\backslash K} ||\nabla u||^{p-2}(\nabla u\nabla\phi)'\,dx. \end{aligned}$$

Déterminons l'expression de $\int_{\Omega\backslash K} (||\nabla u||^{p-2})'\nabla u\nabla\phi\,dx$.

$$\begin{aligned} (||\nabla u||^{p-2})' &= (((||\nabla u||^2))^{\frac{p-2}{2}})' \\ (||\nabla u||^{p-2})' &= \frac{p-2}{2}2\nabla u\nabla u'(||\nabla u||^2)^{\frac{p-4}{2}} \\ (||\nabla u||^{p-2})' &= (p-2)\nabla u\nabla u'||\nabla u||^{p-4} \quad \text{donc} \\ \int_{\Omega\backslash K}(||\nabla u||^{p-2})'\nabla u\nabla\phi\,dx &= (p-2)\int_{\Omega\backslash K}(||\nabla u||^{p-4}||\nabla u||^2\nabla u'\nabla\phi\,dx \\ \int_{\Omega\backslash K}(||\nabla u||^{p-2})'\nabla u\nabla\phi\,dx &= (p-2)\int_{\Omega\backslash K}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u'\nabla\phi\,dx. \end{aligned}$$

Déterminons l'expression de $\int_{\Omega\backslash K} ||\nabla u||^{p-2}(\nabla u\nabla\phi)'\,dx$.

$$\int_{\Omega\backslash K} ||\nabla u||^{p-2}(\nabla u\nabla\phi)'\,dx = \int_{\Omega\backslash K} ||\nabla u||^{p-2}\nabla u'\nabla\phi\,dx + \int_{\Omega\backslash K} ||\nabla u||^{p-2}\nabla u\nabla(\phi)'\,dx$$

or $\phi \in \mathcal{D}(\Omega\backslash K)$ donc $\phi' \in \mathcal{D}(\Omega\backslash K)$ mais aussi

$$\int_{\Omega\backslash K} ||\nabla u||^{p-2}\nabla u\nabla\phi'\,dx = \int_{\Omega\backslash K} -\operatorname{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u)\phi'\,dx + \int_{\partial(\Omega\backslash K)} ||\nabla u||^{p-2}\nabla u.\nu\phi'\,ds$$

$\phi' \in \mathcal{D}(\Omega\backslash K)$ donc $\phi' = 0$ sur $\partial(\Omega\backslash K)$ et $-\mathrm{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u) = 0$ $p.p$ dans $\Omega\backslash K$ donc $\int_{\Omega\backslash K} ||\nabla u||^{p-2}\nabla u \nabla\phi'\, dx = 0$ d'où

$$\begin{aligned} dE(\Omega, V) &= \int_{\Omega\backslash K}(p-2)||\nabla u||^{p-2}\nabla u'\nabla\phi\, dx + \int_{\Omega\backslash K}||\nabla u||^{p-2}\nabla u'\nabla\phi\, dx \\ dE(\Omega, V) &= (p-1)\int_{\Omega\backslash K}||\nabla u||^{p-2}\nabla u'\nabla\phi\, dx. \end{aligned}$$

On sait que $-\mathrm{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u) = 0$ donc on a
$(p-1)\int_{\Omega\backslash K}||\nabla u||^{p-2}\nabla u'\nabla\phi\, dx = 0$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega\backslash K)$ mais

$$\begin{aligned} (p-1)\int_{\Omega\backslash K}||\nabla u||^{p-2}\nabla u'\nabla\phi\, dx &= (p-1)\Big(\int_{\Omega\backslash K} -\mathrm{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u')\phi\, dx \\ &+ \int_{\partial(\Omega\backslash K)}||\nabla u||^{p-2}\nabla u'\nu\phi\, ds\Big). \end{aligned}$$

On a $\phi \in \mathcal{D}(\Omega\backslash K)$ donc $\phi = 0$ sur $\partial(\Omega\backslash K)$ d'où

$$(p-1)\int_{\Omega\backslash K} -\mathrm{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u')\phi\, dx = 0, \ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega\backslash K)$$

d'où $-\mathrm{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u') = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega\backslash K)$
donc u' vérifie

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u') = 0 & \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega\backslash K) \\ u' = -\dfrac{\partial u}{\partial \nu}V(0).\nu & \text{sur} \quad \partial\Omega \\ u' = 0 & \text{sur} \quad \partial K. \end{cases}$$

On a :

$$dJ(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u.\nu u'\, ds + \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega}||\nabla u||^{p}V(0).\nu\, dx.$$

On pose $J_2(\Omega) = \int_\Omega dx - m$, $dJ_2(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} V(0).\nu\, ds.$
On remplace u' par sa valeur sur $\partial\Omega$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} (||\nabla u||^{p-2}\nabla u.\nu u'\, ds &= \int_{\partial\Omega} (||\nabla u||^{p-2}\nabla u.\nu(-\frac{\partial u}{\partial \nu}V(0).\nu)\, ds \\
\int_{\partial\Omega} (||\nabla u||^{p-2}\nabla u.\nu(-\frac{\partial u}{\partial \nu}V(0).\nu)\, ds &= \int_{\partial\Omega} (||\nabla u||^{p-2}(-||\nabla u||^2)V(0).\nu\, ds
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
dJ(\Omega, V) &= \int_{\partial\Omega} (||\nabla u||^{p-2}(-||\nabla u||^2 V(0).\nu) + \frac{1}{p}||\nabla u||^p V(0).\nu)\, ds \\
dJ(\Omega, V) &= \int_{\partial\Omega} \frac{1-p}{p}||\nabla u||^p V(0).\nu\, ds, \text{ pour tout champ } V
\end{aligned}$$

donc il existe un multiplicateur de Lagrange λ_Ω tel que
$dJ(\Omega, V) = \lambda_\Omega dJ_2(\Omega, V)$
et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \frac{1-p}{p}||\nabla u||^p V(0).\nu\, ds &= \lambda_\Omega \int_{\partial\Omega} V(0).\nu\, ds \\
\int_{\partial\Omega} (\frac{1-p}{p}||\nabla u||^p - \lambda_\Omega)V(0).\nu\, ds &= 0, \quad \text{pour tout champ } V
\end{aligned}$$

alors $\dfrac{1-p}{p}||\nabla u||^p - \lambda_\Omega = 0$ sur $\partial\Omega$ car $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
On a

$$\begin{cases}
||\nabla u||^p = \dfrac{p}{1-p}\lambda_\Omega & \text{sur } \partial\Omega \\
||\nabla u|| = (\dfrac{p}{1-p}\lambda_\Omega)^{\frac{1}{p}} & \text{sur } \partial\Omega.
\end{cases}$$

Comme $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ alors on a

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\nu \qquad \text{ceci entraine}$$

$$\begin{aligned}
||\nabla u|| &= ||\frac{\partial u}{\partial \nu}\nu|| \\
||\nabla u|| &= -\frac{\partial u}{\partial \nu} \qquad \text{donc} \\
-\frac{\partial u}{\partial \nu} &= (\frac{-p}{p-1}\lambda_\Omega)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{sur } \partial\Omega.
\end{aligned}$$

■

A l'équilibre le domaine Ω solution du problème d'optimisation de forme $\min\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_\epsilon\}$ vérifie le problème à frontière libre .

$$\begin{cases}
-\triangle_p u = 0 & \text{dans} \quad \Omega\backslash K \\
u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \\
u = 1 & \text{sur} \quad \partial K \\
-\frac{\partial u}{\partial \nu} = (\frac{-p}{p-1}\lambda_\Omega)^{\frac{1}{p}} & \text{sur} \quad \partial\Omega.
\end{cases} \tag{2.2}$$

2.4 Résultats de monotonie et d'existence

La question qu'il faut examiner est de voir si l'application qui à Ω associe λ_Ω est monotone ? Ensuite nous utilisons cette monotonie pour donner un résultat d'existence du problème à frontière libre posé initialement. Nous allons énoncer un lemme et une proposition qui seront utiles pour la recherche d'existence et d'unicité de solutions.

Lemme 2.4.1

L'intérieur de K est étoilé par rapport à un point origine O si et seulement si pour tout t appartenant à $[0,1]$, $tK \subset K$.

Preuve du lemme 2.4.1

Supposons que l'intérieur de K est étoilé par rapport à un point origine, O ; c'est à dire $\forall\ x\ \in\ K^\circ,\ [0,x]\ \subset\ K^\circ$.

Pour t appartenant à $[0,1]$ on a : $tx\ \in\ [0,x]$ donc $tx\ \in\ K$.

Par conséquent $tK\ \subset\ K,\ \forall\ t\ \in\ [0,1]$.

Montrons que la condition $tK\ \subset\ K,\ \forall\ t\ \in\ [0,1]$ est suffisante pour que K° soit étoilé par rapport à O.

Si ce n' est pas le cas, alors il existe $p\ \in\ K$ tel que $[0,p]$ n'est pas inclus dans K.

Donc il existe $p_0\ \in\ [0,p[$ tel que p_0 n'appartient pas à K donc il existe $t_0\ \in\ [0,1[$ tel que $p_0 = (1-t_0)0 + t_0 p = t_0 p$ comme $tK\ \subset\ K$, pour tout t appartenant à $[0,1]$, on a alors : $t_0 p\ \in\ K$ c'est à dire que $p_0\ \in\ K$, ce qui est impossible. ∎

Avant de montrer le résultat de monotonie énonçons d'abord la proposition et le lemme suivants.

Proposition 2.4.1

Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines étoilés par rapport à l'origine, bornés et distincts si $\bar{\Omega}_1\ \subset\ \bar{\Omega}_2$ alors il existe $t_0\ <\ 1$ tel que $t_0\Omega_2\ \subset\ \Omega_1$ et $t_0\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_1\ \neq\ \emptyset$.

Preuve de la proposition 2.4.1

On prendra une homothétie de rapport t tel que $0\ <\ t\ <\ 1$.

Posons $\Omega_{t_0} = t_0\Omega_2$ et $A_t = \{t\ \in\ [0,1[,\ t\Omega_2\ \subset\ \Omega_1\}$.

A_t est non vide car pour $t = 0$ on a $O\ \in\ \Omega_1$, A_t est majoré par 1 et A_t

atteint sa borne supérieure. Soit $t^* = \sup A_t$. Notons que $t^* < 1$.
Si $\partial\Omega_{t_0} \cap \partial\Omega_1 = \emptyset$ alors $t^*\Omega_2 \subset \Omega_1$ donc $t^*\Omega_2$ est contenu strictement dans Ω_1. Par suite $\overline{t^*\Omega_2} \subset \Omega_1$ donc $d(t^*\Omega_2, \partial\Omega_1) = \alpha > 0$.
Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite majorante ; $t_n > t^*$ et la limite de t_n est égale à t^*. Une telle suite existe par définition de la borne supérieure donc $t_n\Omega_2$ n'est pas inclus dans Ω_1.
$d(t_n\Omega_2, \partial\Omega_1)$ converge vers $d(t^*\Omega_2, \partial\Omega_1)$ dans le sens suivant :
$\forall\ x_2,\ x_1 \in \Omega_2 \times \partial\Omega_1,\ \forall\ \epsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ alors $|d(t_n x_2, x_1) - d(t^* x_2, x_1)| < \epsilon$.
Pour $\epsilon = \frac{\alpha}{2}$ on a $\forall\ x_2,\ x_1 \in \Omega_2 \times \partial\Omega_1,\ d(t_n x_2, x_1) > d(t^* x_2, x_1) - \frac{\alpha}{2}$ pour tout $n \geq n_0$.
Comme $d(t_n\Omega_2, \partial\Omega_1) = 0$, on a $0 \geq d(t^*\Omega_2, \partial\Omega_1) - \frac{\alpha}{2}$ dès que $n \geq n_0$ donc $0 \geq \frac{\alpha}{2}$ ce qui est absurde donc $\partial\Omega_{t_0} \cap \partial\Omega_1 \neq \emptyset$. ■

Considèrons l'équation quasi-linéaire suivante :

$$-\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_j(\nabla u) = f \quad \text{dans} \quad \Omega$$

où Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$.
Les fonctions a_j satisfont les conditions d'éllipticité et de croissance suivantes

$$\begin{aligned} a_j(0) &= 0 \\ \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_j(x).\zeta_i\zeta_j &\geq \gamma(t + ||x||)^{p-2}.||\zeta||^2 \\ \sum_{i,j=1}^{N} |\frac{\partial}{\partial x_i} a_j(x)| &\leq w_1(t + ||x||)^{p-2} \end{aligned}$$

où γ et w_1 sont des constantes strictement positives et t appartient à $[0,\ 1]$.

L' opérateur p-laplace vérifie ces conditions voir [20]. On a le lemme suivant :

Lemme 2.4.2

Supposons que $\dfrac{\partial f}{\partial u} \leq 0$ *dans* Ω. *Soient* $u_1,\ u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ *satisfaisant*

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{N} a_j(\nabla u_1)\phi_{x_j}dx \leq \int_\Omega f(u_1)\phi dx$$
$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{N} a_j(\nabla u_2)\phi_{x_j}dx \geq \int_\Omega f(u_2)\phi dx$$

Pour toute fonction non négative $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *alors l'inégalité* $u_2 \leq u_1$ *sur* $\partial\Omega$ *entraine* $u_2 \leq u_1$ *dans* Ω.

Preuve du lemme 2.4.2

le lemme et la preuve peuvent être retrouvés dans [20]. ■

On a le résultat de monotonie suivant.

Proposition 2.4.2

Supposons que nous avons deux domaines Ω_1 *et* Ω_2, *étoilés par rapport à l'origine solutions du problème d'optimisation de forme (1.2) tels que* $\bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}_2$. *Le compact K étant étoilé par rapport à l'origine alors l'application qui à* Ω *associe* λ_Ω *est strictement croissante, c'est à dire que* $\lambda_{\Omega_2} > \lambda_{\Omega_1}$.

Preuve de la proposition 2.4.2

$\bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}_2$ donc par la proposition (2.4.1) il existe $t_0 < 1$ tel que $x_0 \in t_0\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_1$.

On pose $u_{t_0}(x) = u_2(\frac{x}{t_0})$, $\frac{x}{t_0} \in \Omega_2 \backslash K$ et $\Omega_{t_0} = t_0\Omega_2$.

u_{t_0} vérifie

$$\begin{cases} -\triangle_p u_{t_0} &= 0 \quad \text{dans} \quad t_0(\Omega_2 \backslash K) \\ u_{t_0} &= 0 \quad \text{sur} \quad t_0\partial\Omega_2 \\ u_{t_0} &= 1 \quad \text{sur} \quad t_0\partial K. \end{cases} \tag{2.3}$$

Or on a $t_0\Omega_2 \subset \Omega_1$, on pose $w_2 = u_{1|t_0\Omega_2}$ donc w_2 vérifie

$$\begin{cases} -\triangle_p w_2 &= 0 \quad \text{dans} \quad t_0\Omega_2 \backslash K \\ w_2 &= u_{1|t_0\partial\Omega_2} \quad \text{sur} \quad t_0\partial\Omega_2 \\ w_2 &= 1 \quad \text{sur} \quad \partial K. \end{cases} \tag{2.4}$$

Considérons le problème

$$\begin{cases} -\triangle_p v &= 0 \quad \text{dans} \quad t_0\Omega_2 \backslash K \\ v &= 0 \quad \text{sur} \quad t_0\partial\Omega_2 \\ v &= u_{t_0} \quad \text{sur} \quad \partial K. \end{cases} \tag{2.5}$$

On voit que u_{t_0} est solution du problème (2.5). Par le principe de comparaison le lemme (2.4.2), on a $0 \leq u_1 \leq 1$ et $0 \leq u_{t_0} \leq 1$ donc on a $u_1 \geq u_{t_0}$ sur $t_0\partial\Omega_2 \backslash K$.

On applique le lemme (2.4.2) à u_1 et u_{t_0} donc $u_1 \geq u_{t_0}$ dans $\Omega_{t_0} \backslash K$.

$x_0 \in \partial\Omega_{t_0} \cap \partial\Omega_1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{u_1(x_0 - \nu h) - u_1(x_0)}{h} &\geq \frac{u_{t_0}(x_0 - \nu h) - u_{t_0}(x_0)}{h}, \quad \text{donc on a} \\ \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{u_1(x_0 - \nu h) - u_1(x_0)}{h} &\geq \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{u_{t_0}(x_0 - \nu h) - u_{t_0}(x_0)}{h}, \quad \text{ceci donne} \\ -\frac{\partial u_1}{\partial \nu} &\geq -\frac{\partial u_{t_0}}{\partial \nu} \end{aligned}$$

Or u_1 et u_2 sont solutions de (2.2) donc il existent λ_1 et λ_2 tels que

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{\partial u_1}{\partial \nu} \text{ sur } \partial\Omega_1\\ \lambda_2 &= -\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \text{ sur } \partial\Omega_2\end{aligned}$$

d'après ce qui précède on a

$$\begin{aligned}-\frac{\partial u_{t_0}(x_0)}{\partial \nu} &= -\frac{\partial u_2(\frac{x_0}{t_0})}{\partial \nu}\\ &= -\frac{1}{t_0}\frac{\partial u_2(x_0)}{\partial \nu}\\ &= \frac{1}{t_0}\lambda_2.\end{aligned}$$

donc $\lambda_1 \geq \dfrac{\lambda_2}{t_0}$ ce qui entraine $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sinon $t_0 \geq 1$ ce qui est impossible .

Finalement on obtient

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_1})^{\frac{1}{p}} \text{ sur } \partial\Omega_1\\ \lambda_2 &= (\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_2})^{\frac{1}{p}} \text{ sur } \partial\Omega_2\\ \lambda_1 &> \frac{\lambda_2}{t_0}\\ \frac{\lambda_2}{t_0} &> \lambda_2 \quad \text{car } t_0 < 1\end{aligned}$$

donc $\lambda_1 > \lambda_2$, c'est à dire que

$$\begin{aligned}(\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_1})^{\frac{1}{p}} &> (\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_2})^{\frac{1}{p}} \quad \text{donc}\\ \lambda_{\Omega_2} &> \lambda_{\Omega_1}\end{aligned}$$

donc l'application qui à Ω associe λ_Ω est strictement croissante. ∎

C'est cette partie qui nous permet de nous prononcer sur l' existence de solutions du problème à frontière libre.

La question qu'on se pose est de savoir s'il existe (u_Ω, Ω) tel que Ω appartienne à un ensemble admissible que l'on définira, solution de

$$\left\{\begin{array}{llll} -\triangle_p u_\Omega & = 0 & \text{dans} & \Omega\backslash K \\ u_\Omega & = 0 & \text{sur} & \partial\Omega \\ u_\Omega & = 1 & \text{sur} & \partial K \\ -\dfrac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} & = c & \text{sur} & \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

où c est une constante strictement positive.

Avant d'énoncer le théorème d'existence, on a besoin d'une définition qu'on peut retrouver dans [2].

Définition 2.4.1

Un ouvert Ω est une solution classique du problème (2.6) si u_Ω appartient à $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ et vérifie la condition surdéterminée du problème (2.6).

Théorème 2.4.1 (condition suffisante d'existence)

Si Ω solution du problème d'optimisation de forme (1.2) est de classe C^2 alors le problème à frontière libre (2.6) admet une solution classique Ω contenant K où K est un compact de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2, étoilé par rapport à l'origine.

Preuve du théorème 2.4.1

On choisit $B(0, R)$ contenant K et $B(0, r)$ où R est assez grand, $r < R$, avec K, contenant $B(0, r)$.

On cherche une solution u_0 tel que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_0 &= 0 \quad \text{dans} \quad B_R \backslash B_r \\ u_0 &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial B_R \\ u_0 &= 1 \quad \text{sur} \quad \partial B_r \end{cases}$$

u_0 est déterminé explicitement par

$$u_0(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln \|x\| - \ln R}{\ln r - \ln R} & \text{si } p = N \\[2ex] \dfrac{\|x\|^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}}{r^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}} & \text{si } p \neq N. \end{cases}$$

On a

$$\nabla u_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\|x\|^2(\ln r - \ln R)} & \text{si } p = N \\[2ex] \dfrac{\frac{p-N}{p-1}\|x\|^{\frac{-N-p+2}{p-1}}}{r^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}}\, x & \text{si } p \neq N. \end{cases}$$

On a

$$\|\nabla u_0(x)\| = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x\| |\ln r - \ln R|} & \text{si } p = N \\[2ex] \dfrac{|\frac{p-N}{p-1}| \|x\|^{\frac{-N+1}{p-1}}}{|r^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}|} & \text{si } p \neq N. \end{cases}$$

En particulier on a $\|\nabla u_0\| < c$ sur ∂B_R pour R suffisamment grand.

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= 0 \quad \text{dans} \quad B_R \backslash K \\ u &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial B_R \\ u &= 1 \quad \text{sur} \quad \partial K. \end{cases} \tag{2.7}$$

L'existence de solution du problème (2.7) s'obtient en minimisant la fonctionnelle J : $\min\{J(v),\ v \in V'\}$ où $V' = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega),\ v = 1 \text{ sur } \partial K\}$, $J(v) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega ||\nabla v||^p\, dx.$
D'après la première partie, il existe u_R solution du problème (2.7).
Considérons le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= 0 \quad \text{dans } B_R\backslash K \\ v &= 0 \quad \text{sur } \partial B_R \\ v &= u_0 \quad \text{sur } \partial K. \end{cases} \tag{2.8}$$

On voit que pour $v = u_0$ est solution du problème (2.8). Par le principe de comparaison le lemme (2.4.2), on a $0 \leq u_0 \leq 1$ et $0 \leq u_R \leq 1$ donc sur $\partial(B_R\backslash K)$ on a $u_R \geq u_0$ et d'après le lemme (2.4.2), on a $u_R \geq u_0$ dans $B_R\backslash K$, d'où $||\nabla u_R|| \geq ||\nabla u_0||$ sur ∂B_R.

cas où p = N

Si $R_1 < R_0$, on a $||\nabla u_0||_{|\partial B_{R_0}} \geq ||\nabla u_0||_{|\partial B_{R_1}}$ donc l'application qui à tout R associe $||\nabla u_0||_{|\partial B_R}$ est croissante.
Pour initialiser on prend un rayon très grand R_0 ensuite on calcule $||\nabla u_0||_{|\partial B_{R_0}}$ et si $|c - ||\nabla u_0||_{|\partial B_{R_0}}| > \delta$, $\delta > 0$ fixé et très petit, on continue en prenant $R_1 < R_0$ jusqu'à ce qu' il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|||\nabla u_0||_{|\partial B_{R_N}} - c| < \delta,\ \delta \text{ fixé, très petit.}$$

Posons

$$\mathcal{O}_N = \{w,\ w \in \mathcal{O}_\epsilon,\ w \subset B_{R_N},\ vol(w) = V_0\}.$$

On cherche $\Omega \in \mathcal{O}_N$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\Omega = 0 & \text{dans } \Omega\backslash K \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\Omega = 1 & \text{sur } \partial K \\ c_\Omega = (\frac{-p}{p-1}\lambda_\Omega)^{\frac{1}{p}} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème d'optimisation $\min\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_N\}$ admet une solution Ω et vérifie la condition surdéterminée $-\dfrac{\partial u_\Omega}{\partial \nu} = c_\Omega$.

On pose $u = u_\Omega$.

$\Omega \in \mathcal{O}_N$ donc $\Omega \subset B_{R_N}$, d' après la proposition (2.4.1), il existe $t_0 < 1$ tel que $t_0 B_{R_N} \subset \Omega$ alors on a $\partial\Omega \cap t_0\partial B_{R_N} \neq \emptyset$.

Soit $x_0 \in \partial\Omega \cap t_0\partial B_{R_N}$, on pose

$u_{t_0}(x) = u_{R_N}(\frac{x}{t_0}),\ \frac{x}{t_0} \in B_{R_N}\backslash K$.

u_{t_0} vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{t_0} = 0 & \text{dans } t_0(B_{R_N}\backslash K) \\ u_{t_0} = 0 & \text{sur } t_0\partial B_{R_N} \\ u_{t_0} = 1 & \text{sur } t_0\partial K. \end{cases}$$

Or on a $t_0 B_{R_N} \subset \Omega$, on pose $w_3 = u_{|t_0 B_{R_N}}$ donc w_3 vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p w_3 = 0 & \text{dans } t_0 B_{R_N}\backslash K \\ w_3 = u_{|t_0\partial B_{R_N}} & \text{sur } t_0\partial B_{R_N} \\ w_3 = 1 & \text{sur } \partial K. \end{cases}$$

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p z &= 0 \quad \text{dans} \quad t_0 B_{R_N} \backslash K \\ z &= 0 \quad \text{sur} \quad t_0 \partial B_{R_N} \\ z &= u_{t_0|\partial K} \quad \text{sur} \quad \partial K. \end{cases} \tag{2.9}$$

On voit que u_{t_0} est solution du problème (2.9).

Par le principe de comparaison le lemme (2.4.2), on a

$0 \leq u_{t_0} \leq 1$ et $0 \leq u \leq 1$ donc sur $\partial(t_0 B_{R_N} \backslash K)$ on a

$u \geq u_{t_0}$ et d'après le lemme (2.4.2), on a $u_1 \geq u_{t_0}$ dans $t_0 B_{R_N} \backslash K$.

$x_0 \in \partial\Omega \cap t_0 \partial B_{R_N}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{u(x_0 - \nu h) - u(x_0)}{h} &\geq \frac{u_{t_0}(x_0 - \nu h) - u_{t_0}(x_0)}{h} \quad \text{donc} \\ \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{u(x_0 - \nu h) - u(x_0)}{h} &\geq \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{u_{t_0}(x_0 - \nu h) - u_{t_0}(x_0)}{h} \quad \text{donc} \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} &\geq -\frac{\partial u_{t_0}}{\partial \nu} \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} &\geq ||\nabla u_{R_N}||. \end{aligned}$$

Donc on a $-\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \geq ||\nabla u_{R_N}||$ sur ∂B_{R_N}.

Posons $\Omega = \Omega_0$. Soit V_1 un nombre réel strictement positif, nous allons itérer avec $\Omega_1 \in \mathcal{O}_N^1$ où

$$\mathcal{O}_N^1 = \{w,\ w \in \mathcal{O}_\epsilon,\ w \subset \Omega_0 \subset B_{R_N},\ vol(w) = V_1\}.$$

On cherche $\Omega_1 \in \mathcal{O}_N^1$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{\Omega_1} &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_1\backslash K \\ u_{\Omega_1} &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_1 \\ u_{\Omega_1} &= 1 \quad \text{sur} \quad \partial K \\ c_{\Omega_1} &= (\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_1})^{\frac{1}{p}} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_1. \end{cases}$$

On pose $u_1 = u_{\Omega_1}$.

Le problème d'optimisation $\min\{J(w),\ w \in \mathcal{O}_N^1\}$ admet une solution Ω_1 et vérifie la condition surdéterminée $-\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = c_{\Omega_1}$.

$\Omega_1 \in \mathcal{O}_N^1$ donc $\Omega_1 \subset B_{R_N}$, d' après la proposition (2.4.1), il existe $t_1 < 1$ tel que $t_1 B_{R_N} \subset \Omega_1$ alors on a $\partial\Omega_1 \cap t_1\partial B_{R_N} \neq \emptyset$.

Soit $x_1 \in \partial\Omega_1 \cap t_1\partial B_{R_N}$.

On pose $u_{t_1}(x) = u_{R_N}(\frac{x}{t_1})$, $\frac{x}{t_1} \in B_{R_N}\backslash K$, u_{t_1} vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p u_{t_1} &= 0 \quad \text{dans} \quad t_1(B_{R_N}\backslash K) \\ u_{t_1} &= 0 \quad \text{sur} \quad t_1\partial B_{R_N} \\ u_{t_1} &= 1 \quad \text{sur} \quad t_1\partial K. \end{cases}$$

Or on a $t_1 B_{R_N} \subset \Omega$, on pose $w = u_{1|t_1 B_{R_N}}$ donc w vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= 0 \quad \text{dans} \quad t_1 B_{R_N}\backslash K \\ w &= u_{1|t_1\partial B_{R_N}} \quad \text{sur} \quad t_1\partial B_{R_N} \\ w &= 1 \quad \text{sur} \quad \partial K. \end{cases}$$

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p z &= 0 \quad \text{dans} \quad t_1 B_{R_N}\backslash K \\ z &= 0 \quad \text{sur} \quad t_1\partial B_{R_N} \\ z &= u_{t_1|\partial K} \quad \text{sur} \quad \partial K. \end{cases} \tag{2.10}$$

On voit que u_{t_1} est solution du problème (2.10).

Par le principe de comparaison le lemme (2.4.2), on a $0 \leq u_{t_1} \leq 1$ et $0 \leq u_1 \leq 1$ donc sur $\partial(t_1 B_{R_N} \backslash K)$, on a $u_1 \geq u_{t_1}$ et d'après le lemme (2.4.2), on a $u_1 \geq u_{t_1}$ dans $t_1 B_{R_N} \backslash K$.

$x_1 \in \partial\Omega \cap t_1 \partial B_{R_N}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{u_1(x_1 - \nu h) - u_1(x_1)}{h} &\geq \frac{u_{t_1}(x_1 - \nu h) - u_{t_1}(x_1)}{h} \quad \text{donc} \\
\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{u_1(x_1 - \nu h) - u_1(x_1)}{h} &\geq \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{u_{t_1}(x_1 - \nu h) - u_{t_1}(x_1)}{h} \quad \text{donc} \\
-\frac{\partial u_1}{\partial \nu} &\geq -\frac{\partial u_{t_0}}{\partial \nu} \\
-\frac{\partial u_1}{\partial \nu} &\geq ||\nabla u_{R_N}(\frac{x_1}{t_1})||.
\end{aligned}$$

Donc on a $-\frac{\partial u_1}{\partial \nu} \geq ||\nabla u_{R_N}(\frac{x_1}{t_1})||$ sur ∂B_{R_N}.

On continue le même principe jusqu' au rang k tel que $c_{\Omega_k} < ||\nabla u_{R_N}(\frac{x_k}{t_k})||$ avec $\frac{x_k}{t_k} \in \partial B_{R_N}$.

Or pour tout s appartenant à ∂B_{R_N}, on a $||\nabla u_0(s)||_{|\partial B_{R_N}} \leq ||\nabla u_{R_N}(s)||_{|\partial B_{R_N}}$ donc, soit il existe s_0 appartenant à ∂B_{R_N} tel que $c_{\Omega_k} < ||\nabla u_0(s_0)||$,

soit $c_{\Omega_k} \geq ||\nabla u_0(s)||$, pour tout s appartenant à ∂B_{R_N}.

La suite $(c_{\Omega_j})_{0 \leq j \leq k}$ est strictement décroissante car $c_{\Omega_j} = (\frac{-p}{p-1}\lambda_{\Omega_j})^{\frac{1}{p}}$ et que la suite $(\lambda_{\Omega_j})_{0 \leq j \leq k}$ est strictement croissante. La suite $(c_{\Omega_j})_{0 \leq j \leq k}$ est minorée et strictement décroissante donc converge vers l.

a - Si $c_{\Omega_k} < ||\nabla u_0(s_0)||$ donc, on a $c_{\Omega_k} - c < ||\nabla u_0(s_0)|| - c \leq c_{\Omega_{k-1}} - c$ car la monotonie de la suite est stricte.

On a donc à la limite $l - c \leq ||\nabla u_0(s_0)|| - c \leq l - c$ donc $l = ||\nabla u_0(s_0)||$ d'où $l \approx c$.

b - Si $c_{\Omega_k} \geq ||\nabla u_0(s)||$ pour tout s appartenant à ∂B_{R_N}, donc on a

$c_{\Omega_{k-1}} - c \leq ||\nabla u_0(s_0)|| - c \leq c_{\Omega_k} - c.$

On a donc à la limite $l - c \leq ||\nabla u_0(s)|| - c \leq l - c$ donc

$l = ||\nabla u_0(s)||$ d'où $l \approx c$.

Donc la suite $(\Omega_k)_{0 \leq k \leq N}$ approxime Ω solution classique du problème à frontière libre (2.6).

cas où $p \neq N$

Si $R_1 < R_0$, on a $||\nabla u_0||_{|\partial B_{R_0}} \leq ||\nabla u_0||_{|\partial B_{R_1}}$ donc l'application qui à tout R associe $||\nabla u_0||_{|\partial B_R}$ est décroissante.

Pour initialiser, on prend un rayon très grand R_0 ensuite, on calcule $||\nabla u_0||_{|\partial B_{R_0}}$ et si $|c - ||\nabla u_0||_{|\partial B_{R_0}}| > \delta$, $\delta > 0$ fixé et très petit, on continue en prenant $R_1 < R_0$ jusqu'à ce qu' il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|||\nabla u_0||_{|\partial B_{R_N}} - c| < \delta, \ \delta \text{ fixé, très petit.}$$

On reprend la même chose que précédamment. ■

Nous pouvons énoncer un autre résultat d'existence du problème extérieur à frontière libre (2.2) mais seulement la condition surdéterminée est à comprendre au sens presque partout. Et nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.4.2 (condition suffisante d'existence)

Si Ω solution du problème d'optimisation de forme (1.2) est de classe C^2 presque partout alors le problème à frontière libre (2.6) admet une solution classique Ω contenant K où K est un compact de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2, étoilé par rapport à l'origine.

Preuve du théorème 2.4.2 On applique la preuve du théorème 2.4.1.

■

2.5 Résultats d'unicité

Nous savons que le problème à frontière libre (2.2) admet une solution au sens faible (u_Ω, Ω).

Nous allons montrer que le domaine solution Ω solution de (2.2) est unique sous l'hypothèse : l'intérieur de K est étoilé par rapport à l'origine .

Notons que l'unicité de la solution a été prouvée par **A.Acker et R.A Meyer** [2], en dimension N sous cette même hypothèse.

En nous appuyant sur l'article de **A.Acker et de R.A Meyer** [2] nous présentons le résultat d'unicité suivant.

Proposition 2.5.1

S' il existe Ω solution classique du problème (2.2) alors Ω est unique et il est étoilé par rapport à l'origine.

La preuve de la proposition (2.5.1) repose essentiellement sur le principe de comparaison faible de Lavrent'ev pour les fonctions p-harmoniques. Pour plus de clarté , il serait intéressant d'énoncer le lemme suivant mais donnons quelques définitions qui peuvent être retrouvées dans [2].

Définition 2.5.1

Soient un sous ensemble E de $\mathbb{R}^N$ et $\lambda > 0$. On note :

$$\lambda E = \{\lambda x, \ x \in E\}.$$

Pour $i \in \{1,2\}$, *soit* Γ_i *le bord de* D_i, *un domaine simplement connexe borné de* $\mathbb{R}^N$ *qui contient l'origine.*

Dans la famille de telles surfaces, on définit la métrique Δ *où*

$$\Delta(\Gamma_1, \Gamma_2) = \sup\{|\ln \lambda| : \lambda\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset\}.$$

On dit que $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ *si* $D_1 \subset D_2$ *et* $\Gamma_1 < \Gamma_2$ *si* $\bar{D}_1 \subset D_2$.

Si Γ *est de cette famille, on note* $D(\Gamma)$ *le complément de l'intérieur de* Γ.

Si Γ_1 *et* Γ *sont de cette famille tels que* $\Gamma_1 < \Gamma_2$, *on note*

$\Omega(\Gamma_1, \Gamma_2) = D(\Gamma_2) \backslash \bar{D}(\Gamma_1)$.

Lemme 2.5.1 (Principe de Lavrent'ev)

Soient $\Gamma_0,\ \Gamma,\ \tilde{\Gamma}_0,\ \tilde{\Gamma}$ *sont des* $(N-1)$ *hypersurfaces dimentionnelles de domaines de* $\mathbb{R}^N$ *bornés, simplement connexes tels que* $\Gamma_0 < \Gamma$ *et* $\tilde{\Gamma}_0 < \tilde{\Gamma}$.

Soient Ω*(resp.*$\tilde{\Omega}$*) des domaines de forme annulaire dont les bords intérieurs et extérieurs sont respectivement* Γ_0, *et* Γ

(resp.$\tilde{\Gamma}_0$ *et* $\tilde{\Gamma}$*). Et soient* u*(resp.*$\tilde{u}$*) des solutions dans* Ω*(resp.*$\tilde{\Omega}$*).*

Soit $\lambda \geq 1$ *une valeur telle que* $\Gamma_0 \leq \lambda\tilde{\Gamma}_0$ *et* $\Gamma \leq \lambda\tilde{\Gamma}$ *où* $\lambda\tilde{\Gamma}_0 \cap \Gamma$ *peut être non vide.*

Si $\lambda x \in \Gamma \cap \lambda\tilde{\Gamma}$*(resp.*$\lambda x_0 \in \Gamma_0 \cap \lambda\tilde{\Gamma}_0$*) et si*

$||\nabla\tilde{u}(x)||,\ ||\nabla u(x)||$*(resp.*$||\nabla\tilde{u}(x^*)||,\ ||\nabla u(x^*)||$*) existent, alors*

$$||\nabla\tilde{u}(x)|| \geq \lambda||\nabla u(\lambda x)||(resp.||\nabla\tilde{u}(x_0)|| \geq \lambda||\nabla u(\lambda x_0)||).$$

Preuve du lemme 2.5.1

Le lemme peut être retrouvé dans [2] et la preuve voir [16]. ∎

Preuve de la proposition 2.5.1

Supposons qu'il existe deux solutions distinctes du problème (2.2), Ω_1 et Ω_2.

On note :

$\Gamma = \Gamma_1$ (resp.$\tilde{\Gamma} = \Gamma_2$) les bords extérieurs de Ω_1(resp.Ω_2).

$\Gamma_0 = \partial K_1$ (resp.$\tilde{\Gamma}_0 = \partial K_2$) les bords intérieurs de Ω_1(resp.Ω_2).

$K_1,\ K_2$ sont des compacts de $\mathbb{R}^N$ suffisamment réguliers et étoilés par rapport à l'origine.

Soit $\ln(\lambda_0) = \Delta(\Gamma_1, \Gamma_2)$, avec $\lambda > 1$ où Δ est la diffèrence symétrique alors $\Gamma_1 \leq \lambda_0\Gamma_2,\ \Gamma_2 \leq \lambda_0\Gamma_1$.

Soit $\lambda_0 x_0 \in \Gamma_1 \cap \lambda_0\Gamma_2$ or K_1 est étoilé donc $\partial K_1 \subset \lambda_0\partial K_1$, d'après le lemme (2.5.1), on a $c = ||\nabla u_2(x_0)|| \geq \lambda_0||\nabla u_1(\lambda_0 x_0)|| = \lambda_0 c$ donc $\lambda_0 \leq 1$, ce qui est impossible.

On applique le lemme (2.5.1) et en posant que $\Omega_1 = \Omega_2$, on obtient Ω est étoilé par rapport à l'origine. ∎

Chapitre 3

Quelques simulations numériques du problème à frontière libre

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous cherchons à donner une approximation de la forme du domaine par une approche des transformations conformes.
On définit respectivement Γ_1, Γ_R les cercles unité, de rayon R et la couronne l'ensemble noté par :

$$C_R = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 < ||x||_2 < R\}.$$

L'objectif principal est de déterminer la transformation conforme Φ qui envoie une couronne C_R sur $\Omega\backslash K$, c'est à dire on cherche Φ telle que

$$\begin{cases} \Phi(\Gamma_1) & = & \partial K \\ \Phi(\Gamma_R) & = & \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour trouver la transformation conforme Φ satisfaisant l'équation (3.1), on utilise les résultats de **D. Seck** voir [18].

3.2 Approximation de la forme du domaine $\Omega\backslash K$

On considère le problème à frontière libre

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = & 0 & \text{dans} & \Omega\backslash K, \; 1 < p < \infty \\ u & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega \\ u & = & 1 & \text{sur} & \partial K \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = & c & \text{sur} & \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

où c est une constante strictement positive et K un compact contenu dans Ω.

On s'intéressera au cas $p = 2$ et on a le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u & = & 0 & \text{dans} & \Omega\backslash K \\ u & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega \\ u & = & 1 & \text{sur} & \partial K \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} & = & c & \text{sur} & \partial\Omega \end{cases} \tag{3.3}$$

Nous nous proposons de donner quelques simulations d'un algorithme numérique [18] en dimension deux permettant de déterminer la forme approchée de l'anneau $\Omega\backslash K$ en se donnant un compact K et une constante c tels que le problème (3.3) soit satisfait.
Nous présenterons ici les idées de bases et les résultats essentiels de cet algorithme. Pour plus de détails voir [18].
Notre approche sera basée sur l'utilisation des transformations conformes.
Soit $F(x,y) = 0$, l' équation cartésienne du bord de K qui est une courbe fermée. On suppose que

i - F est continue.

ii - Il existe $\alpha_0, \ \rho_0 \ > \ 0$ tels que pour tout $x, \ y$ appartenant à $\mathbb{R}^2$, $||(x,y)||_2 \ \geq \ \rho_0$, on ait : $F(x,y) \ \geq \ \alpha_0||(x,y)||_2$ avec $||.||_2$ désignant la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

L'objectif principal est de déterminer la transformation conforme Φ injective telle que

$$\begin{cases} \Phi(\Gamma_1) & = & \partial K \\ \Phi(\Gamma_R) & = & \partial\Omega \end{cases} \tag{3.4}$$

Du moment que le bord de K et c sont donnés, trouver $\Omega\backslash K$, c'est déterminer la frontière de Ω. Pour cela, il suffit de déterminer une transformation conforme injective Φ et le réel R, $R \ > \ 1$ tels que $\Phi(\Gamma_R) = \partial\Omega$. Donc la forme $\Omega\backslash K$ est entièrement déterminée par le problème (3.4), pour plus de détails voir [18]. Une telle transformation existe et on a $\hat{u} = uo\Phi$ solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta\hat{u} & = & 0 \text{ dans } C_R \\ \hat{u} & = & 0 \text{ sur } \Gamma_R \\ \hat{u} & = & 1 \text{ sur } \Gamma_1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Le problème (3.5) admet une unique solution qui est radiale
$\hat{u}(r) = \frac{1}{R}\ln(\frac{R}{r})$, voir [18] et on a

$$|\Phi'(Re^{i\theta})| \quad = \quad \frac{1}{cRlnR}, \quad \text{pour tout } \theta \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Donc déterminer u et $\Omega\backslash K$ revient à résoudre le problème suivant :

Chercher une transformation conforme Φ sur C_R injective et $R > 1$ tels que

$$\begin{cases} \Phi(\Gamma_1) & = & \partial K \\ |\Phi'(Re^{i\theta})| & = & \frac{1}{cRlnR}, \quad \text{pour tout } \theta \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Comme l'application Φ n'est pas unique notons par
S l'ensemble des Φ holomorphe sur $\bar{C_R}$ bijection conforme telle que le problème (3.6) soit satisfait .

$\Phi(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ en posant $x = rcos\theta$ et $y = rsin\theta$ on a $\Phi(z) = P(r,\theta) + iQ(r,\theta)$, P et Q sont respectivement les parties réelles et imaginaires de Φ. Le complexe z appartient à Γ_1 si et seulement si $\Phi(e^{i\theta})$ appartient à ∂K donc z appartient à Γ_1 si et seulement si $F(P(1,\theta), Q(1,\theta) = 0$.

L'équation (3.6) est équivalente à chercher Φ transformation conforme sur C_R injective et $R > 1$ tels que

$$\begin{cases} F(P(1,\theta), Q(1,\theta) & = & 0 \\ |\Phi'(Re^{i\theta})| & = & \dfrac{1}{cRlnR}, \quad \text{pour tout } \theta \text{ dans } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Comme il n'est pas simple, numériquement de résoudre le problème (3.7), nous l'aborderons par la minimisation d'une fontionnelle J sur $\mathcal{H}$ qui est une méthode des moindres carrés où J est donnée par :

$$J(\Phi) = \int_0^{2\pi} (F(\Re(\Phi(e^{i\theta})), \Im(\Phi(e^{i\theta})))^2 d\theta + \int_0^{2\pi} (|\Phi'(Re^{i\theta})|^2 - \frac{1}{(cRlnR)^2})^2 d\theta.$$

3.3 Minimisation de la fonctionnelle approchée

Comme on veut mettre en place un algorithme numérique il faut se ramener en dimension finie. On se contente de minimiser la fonctionnelle J sur $\mathcal{H}_N$ où

$$\mathcal{H}_N = \{\Phi_N \text{ définie sur } \bar{C_R} : \; \Phi_N(z) = \sum_{n=-N}^{n=N} a_n^N z^n, \; a_n^N = \alpha_n + i\beta_n\}$$

Les Φ_N sont des polynômes trigonométriques, $N \in \mathbb{N}$. $\mathcal{H}_N$ un sous ensemble de $\mathcal{H}$ est même un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie. Minimiser sur $\mathcal{H}_N$ revient à minimiser J sur $\mathbb{R}^{4N} \times]1, +\infty[$. En effet on définit J par

$$\begin{aligned} J : \mathbb{R}^{4N} \times]1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ X & \longmapsto J(X) \end{aligned}$$

où les expressions de $J(X)$ et de X sont

$$J(X) = \int_0^{2\pi} (F(\Re(\Phi_N(e^{i\theta})), \Im(\Phi_N(e^{i\theta})))^2 d\theta + \int_0^{2\pi} (|\Phi_N'(Re^{i\theta})|^2 - \frac{1}{(cRlnR)^2})^2 d\theta.$$

$$X = (\alpha_{-N}, ..., \alpha_{-1}, \alpha_1, ..., \alpha_N, \beta_{-N}, ..., \beta_{-1}, \alpha_1, ..., \beta_N, R).$$

Proposition 3.3.1

La fonctionnelle $J(X)$ admet au moins un minimum local dans $\mathbb{R}^{4N} \times]1, +\infty[$. De plus $J'(X) = 0$.

Preuve de la proposition (3.3.1) voir [18]

3.4 Résultat principal pour la convergence

Théorème 3.4.1

i- Il existe une suite extraite Φ_{N_k} de Φ_N et Φ_0 telles que Φ_{N_k} converge unifomément vers Φ_0 sur tout compact de C_R.

ii- Il existe $\Phi_1 \in L^2(\Gamma_1)$, Φ_{N_k} converge faiblement vers Φ_1 dans $L^2(\Gamma_1)$.

iii- Il existe $\Phi_2 \in L^2(\Gamma_R)$, Φ_{N_k} converge faiblement vers Φ_2 dans $H^1(\Gamma_R)$.

iv- $\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{\Phi_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ pour tout $z \in C_R$.

Φ_0 est développable en série de Laurent sur C_R

$$\begin{aligned}
\Phi_0(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad avec \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} \frac{\Phi_2(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad si\, n \geq 0 \\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1} \frac{\Phi_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad si\ n < 0
\end{aligned}$$

Preuve du théorème (3.4.1) voir [18].

Remarque 3.4.1
Nous rappelons un résultat sur la symétrie du domaine qui permet de contrôler dans un certain sens les simulations numériques. En d'autres termes les hypothèses de symétrie mises sur le compact K doivent être vérifiées sur la frontière libre. On a le théorème suivant :

Théorème 3.4.2 *Soient*

i- Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *contenant* K *avec la frontière de* Ω *de classe* C^2.

ii- K *ayant comme hyperplan de symétrie* T_0.

iii- *On suppose qu'il existe une solution* $u \in C^2(\bar{\Omega}\backslash K)$ *qui vérifie*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & dans \quad \Omega\backslash K \\ u = 0 & sur \quad \partial\Omega \\ u = 1 & sur \quad \partial K \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = c & sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

iv- *On suppose de plus que* K *est convexe dans la direction de* x_N. *Alors* Ω *est symetrique par rapport à* T_0, *de plus* u *est symetrique par rapport à* T_0.

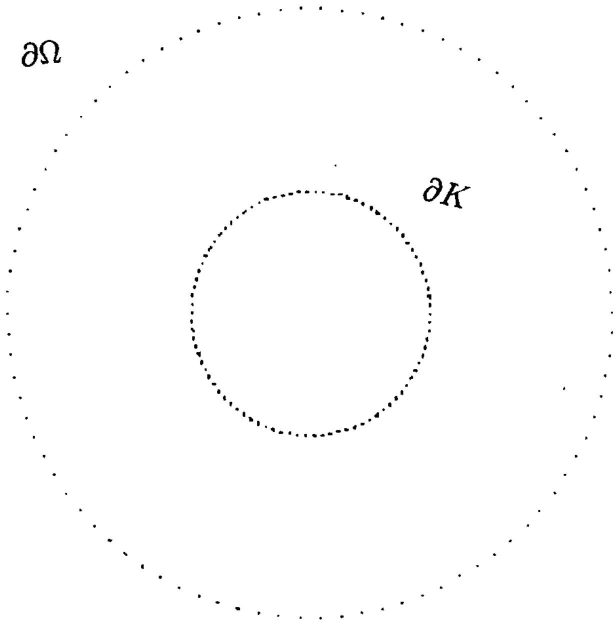
Preuve du théorème (3.4.2) cf [18] .

3.5 Simulation numérique

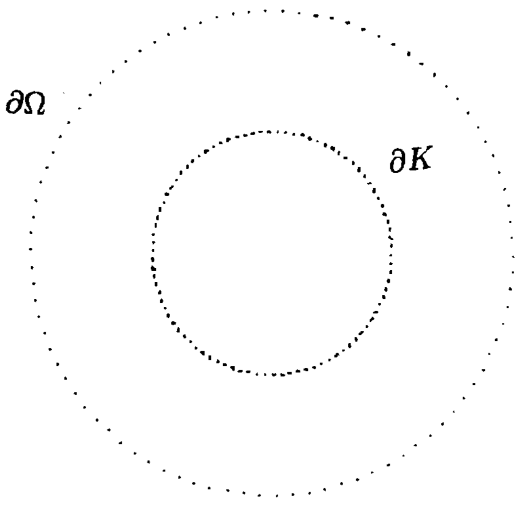
L' algorithme consiste à minimiser la fonctionnelle J définie ci-haut sur $\mathbb{R}^{4N+1}$ car pour connaître Φ_N il suffit de connaître X, où

$X = (\alpha_{-N}, ..., \alpha_{-1}, \alpha_1, ..., \alpha_N, \beta_{-N}, ..., \beta_{-1}, \alpha_1, ..., \beta_N, R)$. La connaissance de X solution de J permet de connaître Φ_N car les composantes de X sont les coefficients du polynôme trigonométrique Φ_N. La méthode utilisée pour la minimisation de la fonctionnelle J est celle du gradient conjugué pour la convergence de l'algorithme. Le langage utilisé est celui de C. Nous allons choisir le bord de K comme étant un cercle d' équation $x^2 + y^2 = 1$ et ensuite une ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

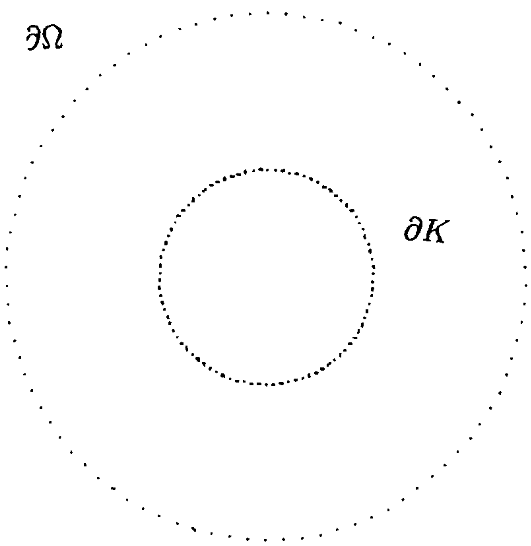
Cas du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$. On prend $N = 4$, le rayon du vecteur initial est $R_i = 6$, et $\epsilon = 0.0001$. On obtient le vecteur solution après 3 itérations dont le rayon est $R_f = 5$. (figure 1)



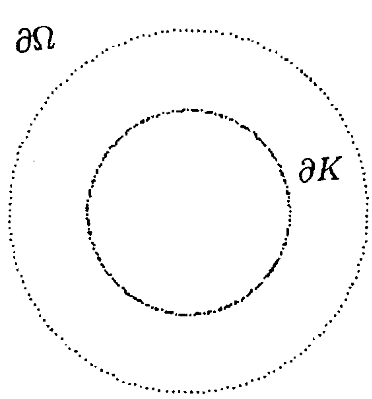
Cas de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. On prend $N = 4$, le rayon du vecteur initial est $R_i = 6$ et $\epsilon = 0.0001$. On obtient le vecteur solution après 3 itérations dont le rayon est $R_f = 5$. (figure 2)



Cas de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. On prend $N=4$, le rayon du vecteur initial est $R_i=5$, et $\epsilon=0.0001$. On obtient le vecteur solution après 3 itérations dont le rayon est $R_f=3.8$. (figure 3)



Cas de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. On prend $N=2$, le rayon du vecteur initial est $R_i=6$ et $\epsilon=0.0001$. On obtient le vecteur solution après 1 itérations dont le rayon est $R_f=5.66$. (figure 4)



Bibliographie

[1] Acker, A.,*Heat flow inequalities with applications to heat flow optimization problem,* SIAM J.Math. Anal., **8**(1977), 604-618.

[2] Acker , A, et Meyer, R.A.,*A free boundary problem for the p-Laplacian : uniqueness,convexity, and successive approximations of solutions,* Electronic Journal of Differential Equations, **1995**(1995), 1-20.

[3] Beurling, A.,*On free boundary problems for Laplace equation,* Seminars on Analytic Fonctions I, Institute Advance Studies Seminars(1957), Princeton, 248-263.

[4] Brézis, H.,*Analyse fonctionnelle : Théorie et Applications,* Masson, Paris, 1993.

[5] Boccardo, L et Murat, F.,*Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations,* Nonlinear Analysis,Theory, Methods and Applications , (6),**19**(1992), 581-597.

[6] Chenais, D.,*On the existence of a solution in a domain identification problem,* J.Math.Anal.Appl., **52**(1975), 189-289.

[7] Dibenedetto, E.,$C^{1+\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations,* Nonlinear Analysis, **7**(1983), 827-850.

[8] Grisvard, P., *Elliptic Problems in non smooth domains,* Pitman Publishing Inc., 1985.

[9] Gilbarg , D et Trudinger, N,S., *Elliptic partial differential equations of second order,* Springer-Verlag ,New York, 1983.

[10] Hayouni, M.,*Existence et régularité pour les problèmes d'optimisation de forme,* Thèse de l'Université de Henri Poincaré Nancy I (France), 1997.

[11] Henrot, A et Shahgholian, H.,*Existence of classical solutions to a free boundary problem for the p-Laplace operator : the exterior convex case,* J. Reine Angew.Math, **521** (2000), 85 - 97.

[12] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques,* Springer-Verlag, France ,Paris, 1993.

[13] Lavrent'ev, M.A., *Variational methods for boundary value problems for systems of elliptic equations,* Noordhoff, 1963.

[14] Lewis, J. L., *Regularity of the derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations,* Indiana Univ . Math. J., **32**(1983), 849-858.

[15] Lieberman, G. M., *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations,* Nonlinear Analysis, **12**(1988), 1203-1219.

[16] Meyer, R. A., *Approximation of the solutions of free boundary problems for p-Laplace equations,* Ph.D. Dissertation, Wichita State University, 1993.

[17] Philip, J. R.,*n-Diffusion,* Aust. J. Physics, **14**(1961), 1-13.

[18] Seck ,D.,*Etude d'un problème à frontière libre de type Bernoulli,* Thèse de l'Université de Franche-Comté(France), numéro d'ordre 505, 1996.

[19] Sokolowski, J. et Zolesio, J. P., *Introduction to Shape Optimization,* Springer-Verlag, Paris, 1992.

[20] Tolksdorf, P., *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points,* Comm. Partial Differential Equations, **8**(1983), 773-817.

[21] Tolksdorf, P., *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations,* J.Differential Equations, **51**(1984), 126-150.

[22] Vogel, A. L., *Symmetry and regularity for general regions having a solution to certain overdeterminated boundary value problems,*
Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. XL, 443-484, 1992.

Résumé :
La première partie est consacrée à l'étude de l'existence de solutions d'un problème d'optimisation de forme sous la contrainte de la propriètè du $\epsilon-$ cône.
Et on prouve un résultat de continuité, par rapport aux variations (sens de Hausdorff) du domaine, des solutions du problème p-harmonique avec des conditions aux limites type Dirichlet.
La deuxième partie est consacrée à l'étude de l'existence de solutions d'un problème à frontière libre pour le p-laplacien. Ce problème a été étudié par **A. Henrot et H.Shahgolian** *en montrant l'existence d'un domaine convexe par la technique des sur-solutions et sous-solutions de* **A. Beurling**. *Nous étudions, l'existence de domaine non nécessairement convexe en combinant une approche variationnelle et une méthode séquentielle.*
La troisième partie est destinée aux simulations numériques pour déterminer la forme approchée du domaine en utilisant les transformations conformes.
Mots clés : *Optimisation de forme, problème à frontière libre, p-laplacien, continuité par rapport au domaine, transformations conformes.*

abstract :
The first part of this work is devoted to the study of the existence of solutions to a shape optimization problem under constraint $\epsilon-$ cône property. And we prove continuity result with respect to the variation of a bounded domain (in Hausdorff sense), of the solutions to the p-harmonic problem with homogenous Dirichlet boundary conditions.
The second part is devoted to the study of the existence of solutions to a free boundary problem with p-laplacian operator. This work is studied by **A.Henrot and H. Shahgolian** *where they prove the existence of classical convex solutions, using* **A. Beurling** *'s notion of sub and super-solutions. We study the existence of non necessary convex solutions by using a variationnal approach and sequential method.*
In the last part, we present some numerical simulations to determine the approximated domain by using conformal mappings.
Keywords : *Shape optimization, free boundary problem, p-laplacian, shape continuity, conformal mappings.*