

N° d'ordre: 00006/97

**THESE PRESENTEE POUR OBTENIR LE GRADE  
DE  
DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE NATIONALE DU BENIN**

Option: Physique Mathématique

**Par**

**Mathias HOUNKPE**



Sujet: **THEORIE DE LA DIFFUSION POUR  
LES INTERACTIONS  
 $\delta$ -SPHERIQUE**

Soutenue le 9 Juillet 1997 devant le JURY :

Président: **Jean-Pierre ANTOINE** ( Université Catholique de Louvain, Belgique )

Rapporteurs: **Sergio ALBEVERIO** ( Université de BOCHUM, Allemagne )

**Mahouton Norbert HOUNKONNOU** ( Université Nationale  
du Bénin )

**Juma SHABANI** ( Université de Bujumbura, Burundi )

Examineur: **Côme GOUDJO** ( Université Nationale du Bénin )

Co - Directeurs: **Juma SHABANI**

**Mahouton Norbert HOUNKONNOU**

# REMERCIEMENTS

A la fin de ce travail j'aimerais exprimer ma gratitude :

Au professeur J.SHABANI pour m'avoir proposé ce sujet et pour tous les sacrifices qu'il a dû consentir pour assurer l'encadrement de ce travail et pour les leçons de la vie qu'il m'a si spontanément et si généreusement données. Je remercie ici toute sa famille pour l'accueil chaleureux pendant mon séjour de recherche à Nairobi ( KENYA ).

Au professeur M.N.HOUNKONNOU pour avoir très spontanément, et surtout avec beaucoup de disponibilités et de sacrifices, assuré la codirection de ce travail.

Au professeur J.P.EZIN, Directeur de l'IMSP, pour toutes les facilités qu'il m'a accordées durant mon séjour à l'IMSP.

A J.TOSSA et J.Orou CHABI pour m'avoir aidé à tous les points de vues pendant la réalisation de ce travail.

A tous mes aînés, enseignants et membres de l'administration de l'IMSP, pour leurs aides de toutes natures tout le temps qu'a duré ce travail.

A tous les étudiants pour la bonne ambiance qui a toujours régné entre chacun d'eux et moi.

A ma famille , à ma femme et mes amis pour toutes leurs contributions surtout morales.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les interactions <math>\delta</math>-sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce</b>	<b>7</b>
1.1	Principales définitions et propriétés de l'interaction $\delta$ -sphérique de 1 <sup>ère</sup> espèce . . . . .	7
1.1.1	Interaction $\delta$ -sphérique de 1 <sup>ère</sup> espèce . . . . .	7
1.1.2	Interaction $\delta$ -sphérique plus une interaction coulombienne . . . . .	12
1.1.3	Interaction $\delta$ -sphérique à support sur $N$ sphères concentriques . . . . .	14
1.2	Théorie de la diffusion pour des potentiels $\delta$ -sphérique . . . . .	20
1.2.1	Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}; h_{l,o})$ . . . . .	21
1.2.2	Théorie de la diffusion pour la paire $(H_\epsilon, H_o)$ . . . . .	23
1.2.3	Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,U,\{R\}}; h_{l,o})$ . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Les interactions <math>\delta</math>-sphérique de 2<sup>ème</sup> espèce</b>	<b>30</b>
2.1	Principales définitions et propriétés de l'interaction $\delta$ -sphérique de 2 <sup>ème</sup> espèce . . . . .	30
2.1.1	Interaction $\delta$ -sphérique de 2 <sup>ème</sup> espèce . . . . .	31
2.1.2	Interaction $\delta$ -sphérique de 2 <sup>ème</sup> espèce plus une interaction coulombienne . . . . .	33
2.1.3	Interaction $\delta$ -sphérique de 2 <sup>ème</sup> espèce à support sur $N$ sphères concentriques . . . . .	34
2.2	Théorie de la diffusion . . . . .	38
2.2.1	Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\gamma,\beta_l}; h_{l,\gamma})$ . . . . .	38
2.2.2	Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\{\beta_l\},\{R\}}; h_{l,o})$ . . . . .	41
2.2.3	Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\hat{U},\{R\}}; h_{l,o})$ . . . . .	43

<b>3</b>	<b>LES INTERACTIONS <math>\delta'</math>-SPHERIQUE DE 1<sup>ere</sup> ESPECE</b>	<b>44</b>
3.1	Définition du modèle . . . . .	44
3.2	Propriétés principales de l'interaction $\delta'$ -sphérique . . . . .	47
3.2.1	Equation résolvante . . . . .	47
3.2.2	Propriétés Spectrales . . . . .	50
3.2.3	Résonnances de $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$ . . . . .	53
3.3	Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\tilde{\alpha}_l}, h_{l,0})$ . . . . .	55
3.4	Particule chargée dans une interaction $\delta'$ -sphérique . . . . .	58
3.4.1	Définition du modèle . . . . .	58
3.4.2	Equation résolvante . . . . .	59
3.4.3	Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}, h_{l,\gamma})$ . . . . .	60
3.5	Interactions $\delta'$ sphérique à support sur $N$ sphères concentriques	61
3.5.1	Définition de l'Hamiltonien . . . . .	61
3.6	Propriétés spectrales . . . . .	64
3.6.1	Théorème . . . . .	64
3.7	Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\{\tilde{\alpha}_l\},\{R\}}; h_{l,0})$ . . . . .	65
<b>4</b>	<b>LES INTERACTIONS <math>\delta'</math>-SPHERIQUE DE 2<sup>eme</sup> ESPECE</b>	<b>67</b>
4.1	Interactions $\delta'$ -sphérique de 2 <sup>eme</sup> espèce à support sur une sphère	67
4.1.1	Définition du modèle . . . . .	67
4.1.2	Equation résolvante . . . . .	68
4.1.3	Propriétés spectrales . . . . .	69
4.1.4	Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\tilde{\beta}_l}, h_{l,o})$ . . . . .	71
4.2	Particule chargée dans une interaction $\delta'$ -sphérique de 2 <sup>eme</sup> espèce . . . . .	72
4.2.1	Définition du modèle . . . . .	72
4.2.2	Equation résolvante . . . . .	73
4.2.3	Propriétés spectrales . . . . .	73
4.2.4	Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}, h_{l,o})$ . . . . .	74
4.3	Interactions $\delta'$ -sphérique de 2 <sup>eme</sup> espèce à support sur $N$ sphères concentriques:conditions frontières séparées . . . . .	75
4.3.1	Définition de l'Hamiltonien . . . . .	75
4.3.2	propriétés spectrales . . . . .	76
4.3.3	Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}; h_{l,o})$ . . . . .	76
<b>5</b>	<b>GENERALISATIONS ET PROBLEMES OUVERTS</b>	<b>78</b>

# INTRODUCTION

Notre intérêt pour l'étude de l'interaction  $\delta$ -sphérique et ses généralisations tient d'abord au fait que ces interactions sont exactement solubles en ce sens qu'on peut déterminer analytiquement explicitement leurs résolvants et par conséquent leurs spectres, leurs fonctions propres de même que leurs résonances et les éléments de la théorie de la diffusion par ses interactions.

Ensuite l'interaction  $\delta$ -sphérique a été beaucoup utilisée dans plusieurs domaines de la physique; notamment en physique nucléaire, en physique de l'état solide et en physique moléculaire [1].

Plus récemment, les interactions  $\delta$ -sphérique ont été utilisées pour construire un modèle mathématique des quarkonia lourds en physique des particules élémentaires [2].

Sur le plan mathématique, une définition rigoureuse de l'Hamiltonien correspondant à cette interaction a été donnée dans [3]. Cette définition est basée sur la théorie des extensions auto-adjointes d'opérateurs symétriques fermés dans un espace de Hilbert.

T.Ikebe et S.Shimada [4] ont défini, il n'y a pas longtemps, l'interaction  $\delta$ -sphérique en utilisant la théorie des formes symétriques fermées semi bornées inférieurement.

Les résultats obtenus pour l'interaction  $\delta$ -sphérique ont été généralisés aux cas de l'interaction  $\delta$ -sphérique de 2<sup>eme</sup> espèce et de l'interaction  $\delta$ -sphérique de 1<sup>ere</sup> et 2<sup>eme</sup> espèces à support sur  $N$  sphères concentriques avec des conditions frontières séparées et non séparées.

D'autre part, les Hamiltoniens correspondant aux interactions  $\delta$ -sphérique de 1<sup>ere</sup> espèce ont été obtenus comme limite, au sens de la convergence en norme des résolvants, d'une famille d'Hamiltoniens d'échelle de courte portée  $H_\epsilon$ .

Notre contribution à l'étude des interactions  $\delta$ -sphérique a consisté à :

1. Etudier la théorie de la diffusion pour les interactions  $\delta$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> espèces à support sur  $N$  sphères concentriques avec conditions frontières séparées et non séparées.
2. Etudier la théorie de la diffusion pour la paire  $(H_\varepsilon, H_0)$  et à montrer que les éléments de la théorie de la diffusion pour  $H_\varepsilon$  convergent vers ceux de  $H_{\{\alpha\},\{R\}}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0_+$  [Voir sections 1.1.3 B) et 1.2.2].
3. Etudier la théorie de la diffusion pour l'interaction  $\delta$ -sphérique de 2<sup>ème</sup> espèce plus une interaction coulombienne.

Tous ces résultats nouveaux ont fait l'objet de deux articles dont l'un est déjà accepté pour publication au Journal of Mathematical Physics.

Une autre interaction sphérique exactement soluble est l'interaction  $\delta'$ -sphérique dont nous présentons ici l'étude ainsi que celle de certaines de ses généralisations. A notre connaissance tous les résultats de cette étude sont nouveaux.

Ce travail est composé de cinq (5) chapitres et de deux (2) appendices.

Le chapitre I, composé de deux parties, est consacré dans sa première partie au rappel de la définition de l'Hamiltonien quantique décrivant une interaction  $\delta$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce à support sur une sphère et à la définition de certaines de ses généralisations.

La deuxième partie présente l'étude de la théorie de la diffusion pour certains des Hamiltoniens dont les définitions ont été rappelées dans la première partie.

Le chapitre II, aussi composé de deux parties, rappelle dans sa première partie d'abord la définition de l'interaction  $\delta$ -sphérique de 2<sup>ème</sup> espèce à support sur une sphère et celle de certaines de ses généralisations, puis montre la construction de l'interaction  $\delta$ -sphérique de 2<sup>ème</sup> espèce à support sur  $N$  sphères concentriques avec des conditions frontières non séparées. La deuxième partie contient la théorie de la diffusion pour chacun des modèles indiqués ci dessus.

Le chapitre III est consacré à l'étude d'une particule neutre dans une interaction  $\delta'$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce.

La section 3.1 donne, en dimension  $n = 3$ , la définition de l'Hamiltonien quantique décrivant une interaction  $\delta'$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce à support sur une sphère formellement donné par l'expression:

$$H = -\Delta + \tilde{\alpha}\delta'(|x| - R); x \in IR^3, \tilde{\alpha} \in IR, R > 0 \quad (0.1)$$

en termes d'extensions auto-adjointes d'opérateurs symétriques. Après avoir montré que les indices de défaut de l'Hamiltonien radial correspondant à (0.1) pour  $r \neq R$  ne peuvent être que (2,2), nous avons considéré dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  l'opérateur symétrique fermé et non négatif

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= -\Delta \\ \mathcal{D}(\tilde{H}) &= \left\{ f \in H^{2,2}(\mathbb{R}^3) / f \left( \overline{\partial K(O, R)} \right) = f' \left( \overline{\partial K(O, R)} \right) = 0 \right\} \quad (0.2) \end{aligned}$$

où  $\overline{\partial K(O, R)}$  représente la surface de la sphère de centre l'origine de  $\mathbb{R}^3$  et de rayon  $R$ . A l'aide de la décomposition (1.7) on montre que (0.1) correspond à la famille suivante d'extensions auto-adjointes de  $\tilde{H}$ :

$$H_{\tilde{\alpha}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l, \tilde{\alpha}_l} \tilde{U} \otimes 1 \quad ; \quad \tilde{\alpha} \equiv \{ \tilde{\alpha}_l \}_{l=0}^{\infty} \quad ; \quad l = 0, 1, \dots \quad \tilde{\alpha}_l \in \mathbb{R} \quad (0.3)$$

où l'Hamiltonien partielle  $h_{l, \tilde{\alpha}_l}$  est défini par (3.16).

La section 3.2 contient les propriétés principales de l'interaction  $\delta'$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce à support sur une sphère; notamment l'équation résolvante de  $H_{\tilde{\alpha}}$  et les propriétés spectrales de  $h_{l, \tilde{\alpha}_l}$ .

La section 3.3 est consacrée à la discussion sur l'existence des résonances de  $h_{l, \tilde{\alpha}_l}$ , définies comme étant les pôles du noyau du résolvant de  $h_{l, \tilde{\alpha}_l}$ , situés dans le demi plan  $\text{Im} k \leq 0$ .

La section 3.4 présente l'étude de la théorie de la diffusion pour l'interaction définies par (0.3). La section 3.5 porte sur l'étude de l'interaction  $\delta'$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce à support sur une sphère plus une interaction coulombienne et la section 3.6 sur celle de l'interaction  $\delta'$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce à support sur  $N$  sphères concentriques avec conditions frontières séparées.

Le chapitre IV présente dans l'ordre l'étude des interactions  $\delta'$ -sphérique de 2<sup>ème</sup> espèce à support sur une sphère, à support sur une sphère plus une interaction coulombienne et à support sur  $N$  sphères concentriques avec conditions frontières séparées.

Le chapitre V présente quelques problèmes ouverts sur l'étude des interactions  $\delta'$ -sphérique.

L'appendice A contient quelques éléments de la théorie générale des extensions auto-adjointes d'opérateurs symétriques et l'appendice B quelques éléments sur la convergence des opérateurs non bornés.

# Chapitre 1

## Les interactions $\delta$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce

Dans ce chapitre nous passons d'abord en revue les définitions et propriétés principales de l'interaction  $\delta$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce et de ses généralisations. Ensuite, nous présentons les résultats nouveaux obtenus [5] à partir d'une étude systématique de la théorie de la diffusion pour des interactions de type  $\delta$  à support sur  $N$  sphères concentriques avec des conditions frontières séparées et non séparées et pour des interactions décrites par l'Hamiltonien  $H_\epsilon$ .

### 1.1 Principales définitions et propriétés de l'interaction $\delta$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce

Dans cette section nous présentons successivement le modèle  $\delta$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce, le modèle  $\delta$ -sphérique couplé avec un potentiel de Coulomb [3] et le modèle  $\delta$ -sphérique à support sur  $N$  sphères avec conditions frontières séparées [6] et non séparées [7].

#### 1.1.1 Interaction $\delta$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce

L'interaction  $\delta$ -sphérique de 1<sup>ère</sup> espèce appelée aussi potentiel delta de surface [8], potentiel delta modifié [9] ou potentiel sphérique [3] se caractérise par deux conditions frontières obtenues de la façon suivante.

Considérons l'équation de Schrödinger radiale pour le potentiel  $\delta$ -sphérique:

$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \alpha_l \delta(r-R) \right] f_l(k, r) = k^2 f_l(k, r) \quad (1.1)$$

où la fonction d'onde  $f_l(k, r)$  est supposée continue au point  $r = R$ , c'est-à-dire

$$f_l(k, R_+) = f_l(k, R_-) \equiv f_l(k, R). \quad (1.2)$$

Si on "intègre" l'équation (1.1) de  $r = R - \varepsilon$  à  $r = R + \varepsilon$  puis on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro, on obtient la condition suivante

$$f'_l(k, R_+) - f'_l(k, R_-) = \alpha_l f_l(k, R). \quad (1.3)$$

En dimension physique  $n = 3$  l'Hamiltonien quantique décrivant cette interaction est formellement donné par

$$H_1 = -\Delta + \alpha \delta(r-R), \quad R > 0. \quad (1.4)$$

Un Hamiltonien quantique doit être représenté par un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert. Suivant [3], nous allons rappeler la définition mathématique de l'expression (1.4). Cette définition est basée sur la théorie des extensions auto-adjointes d'opérateurs symétriques fermés dans un espace de Hilbert.

Une autre définition basée sur la théorie des formes symétriques fermées, semi bornées inférieurement a été proposée récemment par Ikebe et Shimada [4].

Pour donner la définition mathématique de (1.4) nous procédons comme suit:

Considérons dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  l'opérateur symétrique et non négatif:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -\Delta \\ \mathcal{D}(\dot{H}) &= C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\partial K(O, R)}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Suivant par exemple [10] on montre que la fermeture de  $\dot{H}$ , notée  $\overline{\dot{H}}$ , est donnée par :

$$\begin{aligned} \overline{\dot{H}} &= -\Delta \\ \mathcal{D}(\overline{\dot{H}}) &= \left\{ f \in H^{2,2}(\mathbb{R}^3) / f|_{\overline{\partial K(O, R)}} = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

où  $H^{m,n}(\Omega)$  est l'espace de Sobolev local d'indices  $(m, n)$  et  $\overline{K(O, R)}$  la boule fermée de centre l'origine de  $IR^3$  et de rayon  $R$ . La symétrie sphérique du problème permet la décomposition suivante de  $L^2(IR^3)$  par rapport aux moments angulaires:

$$L^2(IR^3) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} L^2((0, \infty); dr) \otimes [Y_l^{-l}, \dots, Y_l^l] \quad (1.7)$$

où les harmoniques sphériques  $Y_l^m$ ,  $l \in IN$ ,  $-l \leq m \leq l$ , constituent une base de  $L^2(S^2)$  ( $S^2$  est la sphère unité de  $IR^3$ ) et [...] l'espace linéaire engendré par les vecteurs de  $L(S^2)$ . Dans la décomposition (1.7)  $\tilde{U}$  désigne l'opérateur unitaire:

$$\tilde{U} : L^2((0, \infty); r^2 dr) \longrightarrow L^2((0, \infty)); f \mapsto (\tilde{U}f)(r) = rf(r), r > 0. \quad (1.8)$$

La décomposition (1.7) permet d'écrire  $\overline{H}$  sous la forme

$$\overline{H} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \overline{h}_l \tilde{U} \otimes 1 \quad (1.9)$$

où les opérateurs  $\overline{h}_l$  définis dans  $L^2((0, \infty))$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \overline{h}_l &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \\ \mathcal{D}(\overline{h}_l) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty)); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f(R_{\pm}) = 0; -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\}, l \in IN \end{aligned} \quad (1.10)$$

où  $AC_{loc}(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions localement absolument continues sur  $\Omega \subset IR$ , et  $f(x_{\pm}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} f(x \pm \epsilon)$ . L'adjoint  $\overline{H}^{\rightarrow}$  de  $\overline{H}$  est défini par:

$$\overline{H}^{\rightarrow} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \overline{h}_l^{\rightarrow} \tilde{U} \otimes 1 \quad (1.11)$$

où

$$\begin{aligned} \overline{h}_l^{\rightarrow} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \\ \mathcal{D}(\overline{h}_l^{\rightarrow}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f(R_+) = f(R_-) \equiv f(R); -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\}, \\ &\quad l \in IN \end{aligned} \quad (1.12)$$

L'équation

$$\overline{h}_l^* \phi_l(k) = k^2 \phi_l(k), \phi_l(k) \in \mathcal{D}(\overline{h}_l^*), \text{Im}k > 0, l \in \mathbb{N} \quad (1.13)$$

admet la solution unique

$$\phi_l(k, r) = \begin{cases} G_l^{(o)}(k, R) F_l^{(o)}(k, r) & r \leq R \\ F_l^{(o)}(k, R) G_l^{(o)}(k, r) & r \geq R \end{cases} \quad (1.14)$$

où

$$F_l^{(o)}(k, r) = \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{k}{2}\right)^{-l-1/2} r^{1/2} J_{l+1/2}(kr) \quad (1.15)$$

$$G_l^{(o)}(k, r) = -\frac{\pi}{2} i \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)^{-1} \left(\frac{k}{2}\right)^{l+1/2} r^{1/2} H_{l+1/2}^{(2)}(kr) \quad (1.16)$$

et  $J_\nu(z)$ ;  $H_\nu^{(2)}(z)$  sont respectivement des fonctions de Bessel et de Hankel de 2<sup>ème</sup> espèce d'ordre  $\nu$  [11].

$F_l^{(o)}$  et  $G_l^{(o)}$  ont été choisies de sorte que  $W(G_l^{(o)}(k, r), F_l^{(o)}(k, r)) = 1$ .

On traduit cette propriété en disant que  $\overline{h}_l$  possède les indices de défaut (1,1).

Dès lors, selon la théorie générale d'extensions auto-adjointes d'opérateurs symétriques fermés [12], toutes les extensions auto-adjointes de  $\overline{h}_l$  sont données par une famille à un paramètre d'opérateurs auto-adjoints dans  $L^2((0, \infty))$ .

D'après [3], les extensions auto-adjointes de  $\overline{h}_l$  sont données par:

$$\begin{aligned} h_{l, \alpha_l} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \\ \mathcal{D}(h_{l, \alpha_l}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad f(R_+) = f(R_-) \equiv f(R); f'(R_+) - f'(R_-) = \alpha_l f(R); \\ &\quad \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\}, -\infty < \alpha_l \leq \infty, l \in \mathbb{N} \quad (1.17) \end{aligned}$$

Le domaine de  $h_{l, \alpha_l}$  contient les conditions frontières (1.2) et (1.3) qui caractérisent le potentiel  $\delta$ -sphérique.  $h_{l, \alpha_l}$  correspond donc à l'Hamiltonien quantique radial décrivant le potentiel  $V(r) = \alpha_l \delta(r - R)$ .

Le cas  $\alpha_l = 0$  conduit à l'Hamiltonien libre  $h_{l,o}$  pour un moment angulaire  $l$  fixé, tandis que  $\alpha_l = \infty$  décrit une condition frontière de Dirichlet au point  $r = R$ .

Posons  $\alpha = \{\alpha_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  et introduisons dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  l'opérateur

$$H_\alpha = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,\alpha_l} \tilde{U} \otimes 1 \quad (1.18)$$

Par définition  $H_\alpha$  représente l'interaction  $\delta$ -sphérique et fournit donc la définition mathématique de l'expression (1.4).

Le cas  $\alpha = 0$  donne l'Hamiltonien libre

$$H_o = -\Delta \quad ; \quad \mathcal{D}(H_o) = H^{2,2}(\mathbb{R}^3) \quad (1.19)$$

La formule de Krein [12] et un calcul direct (cfr [3]) donnent le résolvant de  $h_{l,\alpha_l}$

$$\begin{aligned} (h_{l,\alpha_l} - k^2)^{-1} &= (h_{l,o} - k^2)^{-1} + \mu_l(k) \left( \phi_l(-\bar{k}), \cdot \right) \phi_l(k) \\ k^2 &\in \rho(h_{l,\alpha_l}), \quad \text{Im} k > 0, \quad l \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.20)$$

où

$$\mu_l(k) = -\alpha_l [1 + \alpha_l g_{l,k}(R, R)]^{-1} \quad (1.21)$$

et

$$g_{l,k} = (h_{l,o} - k^2)^{-1} \quad \text{Im} k > 0 \quad (1.22)$$

est le résolvant libre de noyau intégral

$$g_{l,k}(r, r') = \begin{cases} G_l^{(o)}(k, r) F_l^{(o)}(k, r') & , r' \leq r \\ F_l^{(o)}(k, r) G_l^{(o)}(k, r') & , r' \geq r \end{cases} \quad (1.23)$$

Les relations (1.18) et (1.20) permettent d'écrire le résolvant de  $H_\alpha$ :

$$\begin{aligned} (H_\alpha - k^2)^{-1} &= (H_o - k^2)^{-1} + \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-l}^l \mu_l(k) \left( |\cdot|^{-1} \phi_l(-\bar{k}) Y_l^m, \cdot \right) \times \\ &\times |\cdot|^{-1} \phi_l(k) Y_l^m \quad ; \quad k^2 \in \rho(H_\alpha), \quad \text{Im} k > 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

### 1.1.2 Interaction $\delta$ -sphérique plus une interaction coulombienne

Nous présentons ici le modèle [3] correspondant au couplage de l'interaction  $\delta$ -sphérique et d'une interaction coulombienne. L'Hamiltonien quantique du système est formellement donné par

$$H_2 = -\Delta + \gamma|x|^{-1} + \alpha\delta(|x| - R), \gamma \in \mathbb{R}, R > 0 \quad (1.25)$$

L'étude de  $H_2$  peut se faire en suivant le développement de la section 1.1.1 après avoir remplacé  $H_o$  par l'Hamiltonien de Coulomb

$$H_\gamma = -\Delta + \gamma|x|^{-1}, \mathcal{D}(H_\gamma) = H^{2,2}(\mathbb{R}^3), \gamma \in \mathbb{R}. \quad (1.26)$$

Nous nous contenterons d'en donner les résultats essentiels. Soit l'opérateur symétrique, fermé et non négatif donné par

$$\mathcal{D}(\bar{H}_\gamma) = \left\{ f \in H^{2,2}(\mathbb{R}^3) / f \left( \overline{\partial K(O, R)} \right) = 0 \right\} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_\gamma &= -\Delta + \gamma|x|^{-1} \\ &= \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \bar{h}_{l,\gamma} \tilde{U} \otimes 1 \end{aligned} \quad (1.28)$$

où  $\bar{h}_{l,\gamma}$  est défini dans  $L^2((0, \infty))$  par

$$\begin{aligned} \bar{h}_{l,\gamma} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} \\ \mathcal{D}(\bar{h}_{l,\gamma}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty)); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f(R_\pm) = 0; -f'' + l(l+1)r^{-2}f + \gamma r^{-1}f \in L^2((0, \infty)) \right\} \\ &\quad l \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\bar{h}_{l,\gamma}^*) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f(R_+) = f(R_-) \equiv f(R); -f'' + l(l+1)r^{-2}f + \gamma r^{-1}f \in L^2((0, \infty)) \right\} \\ &\quad l \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.30)$$

l'équation

$$\overline{h}_{l,\gamma} \phi_{l,\gamma}(k) = k^2 \phi_{l,\gamma}(k), \phi_{l,\gamma}(k) \in \mathcal{D}(\overline{h}_{l,\gamma}), \text{Im}k^2 \neq 0, \text{Im}k > 0, l \in \mathbb{N} \quad (1.31)$$

admet l'unique solution

$$\phi_{l,\gamma}(k, r) = \begin{cases} G_{l,\gamma}^{(o)}(k, R) F_{l,\gamma}^{(o)}(k, r), & r \leq R \\ F_{l,\gamma}^{(o)}(k, R) G_{l,\gamma}^{(o)}(k, r), & r \geq R \end{cases} \quad (1.32)$$

où

$$F_{l,\gamma}^{(o)}(k, r) = r^{l+1} \exp(-ikr) {}_1F_1\left(l+1 - \frac{i\gamma}{2k}; 2l+2; 2ikr\right) \quad (1.33)$$

$$G_{l,\gamma}^{(o)}(k, r) = \Gamma(2l+2)^{-1} \Gamma\left(l+1 - \frac{i\gamma}{2k}\right) (2ik)^{2l+1} \exp(ikr) \times \\ \times U\left(l+1 - \frac{i\gamma}{2k}; 2l+2; 2ikr\right) \quad (1.34)$$

sont les fonctions régulière et irrégulière associées à  $\overline{h}_{l,\gamma}$  et  ${}_1F_1(a; b; z)$  (resp.  $U(a; b; z)$ ) est la fonction hypergéométrique confluyente régulière (resp. irrégulière) [11]. L'opérateur  $\overline{h}_{l,\gamma}$  a donc pour indices de défaut (1,1) et d'après [3] toutes ses extensions auto-adjointes sont données par:

$$h_{l,\gamma,\alpha_l} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} \\ \mathcal{D}(h_{l,\gamma,\alpha_l}) = \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ \left. f(R_+) = f(R_-) \equiv f(R); f'(R_+) - f'(R_-) = \alpha_l f(R); \right. \\ \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f + \gamma r^{-1}f \in L^2((0, \infty)) \right\}, \\ -\infty < \alpha_l \leq \infty, \gamma \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N} \quad (1.35)$$

Le cas  $\alpha_l = 0$  conduit à l'Hamiltonien de Coulomb  $h_{l,\gamma}$  pour un moment angulaire  $l$  fixé.

Le modèle (1.25) est donc représenté par l'Hamiltonien défini dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  par

$$H_{\gamma,\alpha} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,\gamma,\alpha_l} \tilde{U} \otimes 1 \quad (1.36)$$

Introduisons le résolvant de Coulomb

$$g_{l,\gamma,k} = (h_{l,\gamma} - k^2)^{-1}, k \neq -i\gamma/2n, n \in \mathbb{N}, \text{Im}k > 0, l \in \mathbb{N} \quad (1.37)$$

qui a pour noyau intégral

$$g_{l,\gamma,k}(r, r') = \begin{cases} G_{l,\gamma}^{(o)}(k, r) F_{l,\gamma}^{(o)}(k, r') & , r' \leq r \\ F_{l,\gamma}^{(o)}(k, r) G_{l,\gamma}^{(o)}(k, r') & , r' \geq r \end{cases} \quad (1.38)$$

La formule de Krein [12] nous donne le résolvant de  $h_{l,\gamma,\alpha_l}$

$$\begin{aligned} (h_{l,\gamma,\alpha_l} - k^2)^{-1} &= (h_{l,o} - k^2)^{-1} - \alpha_l [1 + \alpha_l g_{l,\gamma,k}(R, R)]^{-1} (\phi_{l,\gamma}(-\bar{k}), \cdot) \phi_{l,\gamma}(k) \\ & \quad k^2 \in \rho(h_{l,\gamma,\alpha_l}), \text{Im}k > 0, \gamma \in \mathbb{R} \\ & \quad -\infty < \alpha_l \leq \infty, l \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.39)$$

### 1.1.3 Interaction $\delta$ -sphérique à support sur $N$ sphères concentriques

#### A. Conditions frontières séparées

Toute cette section est basée sur le développement fait dans [6].

##### A.1 Définition du modèle

Considérons en dimension  $n = 3$  une particule neutre dans une interaction  $\delta$ -sphérique à support sur  $N$  sphères concentriques de rayons  $0 < R_1 < \dots < R_N$ . L'Hamiltonien quantique décrivant cette interaction est formellement donné par

$$H_3 = -\Delta + \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta(|x| - R_j). \quad (1.40)$$

Considérons dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  l'opérateur symétrique, fermé et non négatif

$$\overline{H}_{\{R\}} = -\Delta|_{C_o^\infty} \left( \overline{\mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \partial K(O, R_j)} \right), 1 \leq j \leq N \quad (1.41)$$

où  $\overline{K(O, R_j)}$  est la boule fermée de rayon  $R_j$  centrée à l'origine de  $\mathbb{R}^3$ . La décomposition (1.7) permet d'écrire  $\overline{H}_{\{R\}}$  sous la forme

$$\overline{H}_{\{R\}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \overline{h}_{l,\{R\}} \tilde{U} \otimes 1 \quad (1.42)$$

où

$$\begin{aligned}\bar{h}_{l,\{R\}} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \\ \mathcal{D}(\bar{h}_{l,\{R\}}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty)); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f(R_{j\pm}) = 0; -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\}; l \in IN \\ &\quad i \leq j \leq N, \{R\} = \{R_1, \dots, R_N\}\end{aligned}\quad (1.43)$$

L'adjoint  $\bar{H}_{\{R\}}^*$  de  $\bar{H}_{\{R\}}$  est donné par

$$\bar{H}_{\{R\}}^* = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \bar{h}_{l,\{R\}}^* \tilde{U} \otimes 1 \quad (1.44)$$

où

$$\begin{aligned}\bar{h}_{l,\{R\}}^* &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \\ \mathcal{D}(\bar{h}_{l,\{R\}}^*) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f(R_{j+}) = f(R_{j-}) \equiv f(R_j); -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\}, \\ &\quad l \in IN\end{aligned}\quad (1.45)$$

l'équation

$$\bar{h}_{l,\{R\}}^* \phi_l(k) = k^2 \phi_l(k), \phi_l(k) \in \mathcal{D}(\bar{h}_{l,\{R\}}^*), \text{Im} k > 0, l \in IN$$

admet  $N$  solutions linéairement indépendantes:

$$\begin{aligned}\phi_{l,j}(k, r) &= \begin{cases} G_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, r), & r \leq R_j \\ F_l^{(o)}(k, R_j) G_l^{(o)}(k, r), & r \geq R_j \end{cases} \\ &\quad \text{Im} k > 0, l \in IN, j = 1, \dots, N.\end{aligned}\quad (1.46)$$

L'opérateur  $\bar{h}_{l,\{R\}}^*$  a donc pour indices de défaut  $(N, N)$  et toutes ses extensions auto-adjointes sont données par une famille à  $N^2$  paramètres d'opérateurs auto-adjoints [12].

On présente ici une famille particulière à  $N$  paramètres d'extensions auto-adjointes de  $\bar{h}_{l,\{R\}}$  correspondant à (1.40) et définie par :

$$\begin{aligned} h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \\ \mathcal{D}(h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ & f(R_{j+}) = f(R_{j-}) \equiv f(R_j); f'(R_{j+}) - f'(R_{j-}) = \alpha_l f(R_j); \\ & \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\}, \{\alpha_l\} = \{\alpha_{1l} \cdots \alpha_{Nl}\} \\ & -\infty < \alpha_{jl} \leq \infty, 1 \leq j \leq N, l \in IN \end{aligned} \quad (1.47)$$

Par définition l'opérateur  $H_{\{\alpha_l\},\{R\}}$  donné dans  $L^2(IR^3)$  par

$$H_{\{\alpha_l\},\{R\}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}} \tilde{U} \otimes 1 \quad (1.48)$$

décrit l'interaction  $\delta$ -sphérique à support sur  $N$  sphères concentriques de rayons  $0 < R_1 < \cdots < R_N$  et représenté par (1.40).

Le théorème suivant donne le résolvant de  $h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}$ .

Théorème 1.1 Si  $\alpha_{jl} \neq 0, j = 1, \dots, N$ , alors le résolvant de  $h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}$  est donné par

$$\begin{aligned} (h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}} - k^2)^{-1} &= (h_{l,o} - k^2)^{-1} + \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(k) \left( \phi_{l,j'}(-\bar{k}), \cdot \right) \phi_{l,j}(k) \\ & k^2 \in \rho(h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}), \text{Im}k > 0, l \in IN \end{aligned} \quad (1.49)$$

où

$$[\mu(k)]_{jj'}^{-1} = -[\alpha_{jl}^{-1} \delta_{jj'} + g_{l,k}(R_j, R_{j'})]_{j,j'=1}^N \quad (1.50)$$

Le résolvant de  $H_{\{\alpha_l\},\{R\}}$  est donné par :

$$\begin{aligned} (H_{\{\alpha_l\},\{R\}} - k^2)^{-1} &= (H_o - k^2)^{-1} + \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-l}^l \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(k) \left( |\cdot|^{-1} \phi_{l,j'}(-\bar{k}) Y_l^m, \cdot \right) \times \\ & \times |\cdot|^{-1} \phi_{l,j}(k) Y_l^m \quad k^2 \in \rho(H_{\{\alpha_l\},\{R\}}), \text{Im}k > 0, l \in IN \end{aligned} \quad (1.51)$$

*A.2 Interaction  $\delta$ -sphérique à support sur  $N$  sphères concentriques comme limite d'interactions locales d'échelle de courte portée*

Dans cette section nous montrons comment  $h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}$  peut être obtenu comme limite d'une suite d'Hamiltoniens décrivant des interactions locales d'échelle de courte portée.

Considérons une fonction  $\lambda_{jl} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, l \in \mathbb{N}$ , analytique au voisinage de 0 avec  $\lambda_{jl}(0_+) = 0$  et le groupe unitaire des dilatations définies dans  $L^2((0, \infty))$  par:

$$(U_\varepsilon f)(r) = \varepsilon^{-1/2} f\left(\frac{r}{\varepsilon}\right), \varepsilon > 0, f \in L^2((0, \infty)). \quad (1.52)$$

Supposons que  $\forall j = 1, \dots, N$   $V_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction mesurable,  $V_j \equiv 0$  pour  $r < 0$ ,  $V_j \in L^1((R_j, \infty))$ , et définissons

$$v_j(r) = |V_j(r)|^{1/2}, \quad u_j(r) = |V_j(r)|^{1/2} \text{sgn}[V_j(r)] \quad (1.53)$$

Introduisons ensuite les opérateurs ci-après dans  $L^2((0, \infty))^N$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{l,\varepsilon}(k) : L^2((0, \infty))^N &\longrightarrow L^2((0, \infty))^N \\ [\tilde{B}_{l,\varepsilon}(k)(g_1, \dots, g_N)]_j &= \sum_{j'=1}^N \tilde{B}_{l,\varepsilon,jj'}(k)g_{j'}, \quad g_j \in L^2((0, \infty)) \end{aligned} \quad (1.54)$$

où

$$\tilde{B}_{l,\varepsilon,jj'}(k) = \lambda_{jl}(\varepsilon) \tilde{u}_j g_{l,k} \tilde{v}_{j'}, \varepsilon > 0, \text{Im}k > 0, j, j' = 1, \dots, N \quad (1.55)$$

$$\tilde{u}_j(r) = u_j\left(r - \frac{1}{\varepsilon}R_j\right), \quad \tilde{v}_{j'}(r) = v_{j'}\left(r - \frac{1}{\varepsilon}R_{j'}\right), \varepsilon > 0, j = 1, \dots, N \quad (1.56)$$

En suivant [10], nous pouvons montrer que les opérateurs  $\tilde{B}_{l,\varepsilon,jj'}(k), j, j' = 1, \dots, N$  se prolongent en des opérateurs de Hilbert-Schmidt pour  $\text{Im}k \geq 0, k \neq 0$ .

Définissons dans  $L^2((0, \infty))$  et au sens des formes quadratiques [13] l'opérateur:

$$h_l(\varepsilon) = h_{l,0} + \sum_{j=1}^N \lambda_{jl}(\varepsilon) V_j\left(r - \frac{1}{\varepsilon}R_j\right), \varepsilon > 0 \quad (1.57)$$

Le résolvant de  $h_l(\varepsilon)$  est donné par:

$$\begin{aligned} (h_l(\varepsilon) - k^2)^{-1} &= g_{l,k} - \sum_{j,j'=1}^N (g_{l,k} \tilde{v}_j) [1 + \tilde{B}_{l,\varepsilon}(k)]^{-1} (\tilde{u}_{j'} g_{l,k}) \\ &\varepsilon > 0, k^2 \in \rho(h_l(\varepsilon)), \text{Im}k > 0 \end{aligned} \quad (1.58)$$

Introduisons ensuite les Hamiltoniens  $h_{l,\varepsilon}$  et  $H_\varepsilon$  définis respectivement dans  $L^2((0, \infty))$  et  $L^2(\mathbb{R}^3)$  par:

$$h_{l,\varepsilon} = \varepsilon^{-2} U_\varepsilon h_l(\varepsilon) U_\varepsilon^{-1} = h_{l,0} + \varepsilon^{-2} \sum_{j=1}^N \lambda_{jl}(\varepsilon) V_j \left( \frac{r - R_j}{\varepsilon} \right) \quad (1.59)$$

$$H_\varepsilon = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,\varepsilon} \tilde{U} \otimes 1 \quad (1.60)$$

Le résolvant de  $h_{l,\varepsilon}$  est donné par:

$$(h_{l,\varepsilon} - k^2)^{-1} = g_{l,k} - \varepsilon^{-1} \sum_{j,j'=1}^N A_{l,\varepsilon,j}(k) [1 + B_{l,\varepsilon}(k)]_{jj'}^{-1} \lambda_{jl}(\varepsilon) C_{l,\varepsilon,j'}(k),$$

$$\varepsilon > 0, k^2 \in \rho(h_{l,\varepsilon}), \text{Im} k > 0 \quad (1.61)$$

où  $A_{l,\varepsilon,j}(k)$ ,  $B_{l,\varepsilon,jj'}(k)$  et  $C_{l,\varepsilon,j}(k)$  sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt définis ci après à l'aide de leurs noyaux intégraux

$$A_{l,\varepsilon,j}(k, r, r') = g_{l,k}(r, \varepsilon r' + R_j) v_j(r') \quad (1.62)$$

$$B_{l,\varepsilon,jj'}(k, r, r') = \varepsilon^{-1} \lambda_{jl}(\varepsilon) u_j(r) g_{l,k}(\varepsilon r + R_j, \varepsilon r' + R_{j'}) v_{j'}(r') \quad (1.63)$$

$$C_{l,\varepsilon,j}(k, r, r') = u_j(r) g_{l,k}(\varepsilon r + R_j, r'), \text{Im} k > 0. \quad (1.64)$$

Le théorème suivant est démontré.

**Théorème 1.2** Supposons que pour tout  $j = 1, \dots, N$ ,  $V_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , est mesurable,  $V_j \equiv 0$  pour  $r < 0$ , et  $V_j \in L^1((R_j, \infty))$ . Alors  $h_{l,\varepsilon}$  converge dans la topologie forte des résolvants vers  $h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ , c'est-à-dire, si  $k^2 \in \rho(h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}})$  alors  $k^2 \in \rho(h_{l,\varepsilon})$  pour  $\varepsilon$  assez petit et

$$n - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} (h_{l,\varepsilon} - k^2)^{-1} = (h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}} - k^2)^{-1} \quad (1.65)$$

où

$$\alpha_{jl} = \lambda'_{jl}(0) \int_{R_j}^{\infty} dr' V_j(r'), l \in \mathbb{N} \quad (1.66)$$

## B) Conditions frontières non séparées

L'opérateur  $\bar{h}_{l,\{R\}}$  défini par (1.43) a pour indices de défaut  $(N, N)$  et nous avons présenté dans A.1 l'étude d'une famille particulière à  $N$  paramètres d'extensions auto-adjointes correspondant à (1.41). Ici nous présentons l'étude

de la famille générale à  $N^2$  paramètres d'extensions auto-adjointes de  $\bar{h}_{l,\{R\}}$  faite dans [7].

Considérons dans  $L^2(IR^3)$  l'opérateur symétrique fermé et non négatif

$$\bar{H}_{\{R\}} = -\Delta|C_\infty^\infty \left( IR^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \overline{\partial K(O, R_j)} \right), \quad 1 \leq j \leq N \quad (1.67)$$

où  $\overline{K(O, R_j)}$  est la boule fermée de rayon  $R_j$  centrée à l'origine de  $IR^3$ . La décomposition (1.7) permet d'écrire  $\bar{H}_{\{R\}}$  sous la forme (1.42) et l'opérateur  $\bar{h}_{l,\{R\}}$  défini par (1.43) a pour indices de défaut  $(N, N)$ .

La théorie générale des extensions auto-adjointes d'opérateurs symétriques [12], permet de dire que les extensions auto-adjointes  $h_{l,U,\{R\}}$  de  $\bar{h}_{l,\{R\}}$  sont données par:

$$\mathcal{D}(h_{l,U,\{R\}}) = \left\{ g + \sum_{j=1}^N C_j [\phi_{l,j+} + \sum_{j'=1}^N U_{jj'} \phi_{l,j'-}] / g \in \mathcal{D}(\bar{h}_{l,\{R\}}), C_j \in C \right\}$$

$$h_{l,U,\{R\}} \left\{ g + \sum_{j=1}^N C_j [\phi_{l,j+} + \sum_{j'=1}^N U_{jj'} \phi_{l,j'-}] \right\} = \bar{h}_{l,\{R\}} g - i \sum_{j=1}^N C_j [\phi_{l,j+} - \sum_{j'=1}^N U_{jj'} \phi_{l,j'-}] \quad (1.68)$$

où  $\phi_{l,j}$  est définie par (1.46),  $U_{jj'}$ ,  $1 \leq j, j' \leq N$ , désignent une matrice de  $C^N$  et  $\phi_{l,j\pm} = \phi_{l,j}(\sqrt{\pm i}, r)$ ,  $Im \sqrt{\pm i} > 0$ , constituent respectivement une base de  $Ker[\bar{h}_{l,\{R\}} \mp i]$ .

L'opérateur  $H_{U,\{R\}}$  défini dans  $L^2(IR^3)$  par

$$H_{U,\{R\}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,U,\{R\}} \tilde{U} \otimes 1 \quad (1.69)$$

décrit l'interaction  $\delta$ -sphérique à support sur  $N$  sphères concentriques avec conditions frontières non séparées.

Le cas  $U = -1$  donne l'Hamiltonien libre:

$$H_{-1,\{R\}} = -\Delta, \quad \mathcal{D}(H_{-1,\{R\}}) = H^{2,2}(IR^3) \quad (1.70)$$

La formule de Krein [12] nous donne

$$(h_{l,U,\{R\}} - k^2)^{-1} = (h_{l,o} - k^2)^{-1} + \sum_{j,j'=1}^N [M_l(k)]_{jj'}(\phi_{l,j'}(-\bar{k}), \cdot)\phi_{l,j}(k) \\ k^2 \in \rho(h_{l,U,\{R\}}), \text{Im}k > 0, U \neq -1, l \in IN \quad (1.71)$$

où

$$[M_l(k)]^{-1} = (U^T + 1)^{-1}[g_l(\sqrt{i}) - g_l(\sqrt{-i})] + g_l(\sqrt{-i}) - g_l(k) \quad (1.72)$$

et

$$[g_l(k)]_{jj'} = \phi_{l,j}(k, R_{j'}) = g_{l,k}(R_j, R_{j'}) \quad (1.73)$$

Le résolvant de  $H_{U,\{R\}}$  est donné par

$$(H_{U,\{R\}} - k^2)^{-1} = (H_{-1,\{R\}} - k^2)^{-1} + \\ + \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-l}^l \sum_{j,j'=1}^N [M_l(k)]_{jj'}(|\cdot|^{-1}\phi_{l,j'}(-\bar{k})Y_l^m, \cdot)|\cdot|^{-1}\phi_{l,j}(k)Y_l^m \\ k^2 \in \rho(H_{U,\{R\}}), \text{Im}k > 0 \quad (1.74)$$

On note que les éléments de  $\mathcal{D}(h_{l,U,\{R\}})$  peuvent être caractérisés par les conditions frontières suivantes

$$\forall f_l \in \mathcal{D}(h_{l,U,\{R\}}), \quad \forall j \text{ tel que } 1 \leq j \leq N$$

$$f_l(R_{j+}) = f_l(R_{j-}) \equiv f_l(R_j) \quad (1.75)$$

$$f_l'(R_{j+}) - f_l'(R_{j-}) = \sum_{j'=1}^N [\Lambda_l(k)]_{jj'} f_l(R_{j'}) \quad (1.76)$$

où  $\Lambda_l$  est défini par

$$-[\Lambda_l(k)]^{-1} = [M_l(k)]^{-1} + g_l(k) \quad (1.77)$$

## 1.2 Théorie de la diffusion pour des potentiels $\delta$ -sphérique

Dans cette seconde partie, nous développons la théorie de la diffusion pour certains des modèles définis dans la section 1.1.

### 1.2.1 Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}; h_{l,o})$

Pour  $k \geq 0$ , définissons la fonction

$$\mathcal{F}_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, r) = F_l^{(o)}(k, r) + \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(k) F_l^{(o)}(k, R_{j'}) g_{l,k}(R_j, r) \quad (1.78)$$

où

$$g_{l,k}(r, r') = \begin{cases} F_l^{(o)}(k, r) G_l^{(o)}(k, r') & r \leq r' \\ F_l^{(o)}(k, r') G_l^{(o)}(k, r) & r \geq r' \end{cases} \quad (1.79)$$

$F_l^{(o)}$  et  $G_l^{(o)}$  étant données par (1.15) et (1.16).

Un calcul direct montre que pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , la fonction  $\mathcal{F}_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, r)$  vérifie les conditions suivantes:

$$\mathcal{F}_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, R_{j+}) = \mathcal{F}_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, R_{j-}) \equiv \mathcal{F}_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, R_j) \quad (1.80)$$

$$\mathcal{F}'_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, R_{j+}) - \mathcal{F}'_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, R_{j-}) = \alpha_{jl} \mathcal{F}_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, R_j) \quad (1.81)$$

$$-\mathcal{F}''_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, r) + l(l+1)r^{-2} \mathcal{F}_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, r) = k^2 \mathcal{F}_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, r) \quad k \geq 0 \quad (1.82)$$

Dès lors, les fonctions  $\mathcal{F}_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, r)$  constituent un ensemble de fonctions propres généralisées associées à  $h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}$ .

Les déphasages de  $h_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}$  s'obtiennent alors à partir de l'expression asymptotique de  $\mathcal{F}_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, r)$  quand  $r \rightarrow \infty$ . En effet, en suivant par exemple [14], on obtient le comportement asymptotique ci-après:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k, r) & \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{k > 0} A_l(k) \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(k) F_l^{(o)}(k, R_j) \times \\ & \times F_l^{(o)}(k, R_{j'}) B_l(k) \exp\left[-i\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)\right] \\ & = \left\{ A_l(k) - i B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(k) F_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'}) \right\} \times \\ & \times \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(k) F_l^{(o)}(k, R_j) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times F_l^{(o)}(k, R_{j'}) \cos \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right) \\
= & [C_{1,l}^2(k) + C_{2,l}^2(k)]^{1/2} \sin \left( kr - \frac{l\pi}{2} \delta_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k) \right) + o(1)
\end{aligned} \tag{1.83}$$

ce qui permet de définir les déphasages par

$$\begin{aligned}
\delta_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k) &= -\arctan \frac{C_{2,l}(k)}{C_{1,l}(k)} \\
&= -\arctan \frac{B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(k) F_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'})}{A_l(k) - i B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(k) F_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'})}
\end{aligned} \tag{1.84}$$

où [14]

$$A_l(k) = 2^{-l} k^{-l-1} \Gamma(2l+2) \Gamma(l+1)^{-1} \quad \text{et} \quad B_l(k) = \frac{1}{k A_l(k)} \tag{1.85}$$

Les éléments de la matrice de diffusion sont donnés par

$$\begin{aligned}
S_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k) &= \exp \left[ 2i \delta_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k) \right] \\
&= 1 - 2ik B_l^2(k) \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(k) F_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'})
\end{aligned} \tag{1.86}$$

Le développement de portée effective est donné par [15]

$$[(2l+1)!!!]^2 k^{2l+1} \cot \delta_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k) = -a_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}^{-1} + \frac{1}{2} r_{l,\{\alpha_l\},\{R\}} k^2 + o(k^4) \tag{1.87}$$

où les coefficients  $a_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}$  et  $r_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}$  sont appelés respectivement longueur de diffusion et portée effective correspondant à l'onde partielle  $l$ .

Un calcul direct montre que

$$a_{l,\{\alpha_l\},\{R\}} = - \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(0) (R_j R_{j'})^{l+1} \tag{1.88}$$

L'amplitude de diffusion  $f_{\{\alpha_l\},\{R\}}(k, \omega, \omega')$  associée à  $H_{\{\alpha_l\},\{R\}}$  est définie par:

$$\begin{aligned} f_{\{\alpha_l\},\{R\}}(k, \omega, \omega') &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{e^{2i\delta_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k)} - 1}{2ik} \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k) \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\ &k \geq 0 \quad ; \quad \omega, \omega' \in S^2 \end{aligned} \quad (1.89)$$

où l'amplitude de diffusion  $f_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k)$  correspondant à l'onde partielle  $l$  est donnée par:

$$f_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k) = -B_l^2(k) \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(k) F_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'}) \quad (1.90)$$

L'opérateur de diffusion dans  $L^2(S^2)$ , associé à  $H_{\{\alpha_l\},\{R\}}$ , est défini par

$$\begin{aligned} (S_{\{\alpha_l\},\{R\}}(k)\phi)(\omega) &= \phi(\omega) - \frac{k}{2\pi i} \int_{S^2} d\omega' f_{\{\alpha_l\},\{R\}}(k, \omega, \omega') \phi(\omega') \\ &k \geq 0 \quad ; \quad \omega, \omega' \in S^2 \end{aligned} \quad (1.91)$$

ce qui donne l'expression de  $S_{\{\alpha_l\},\{R\}}(k)$

$$S_{\{\alpha_l\},\{R\}}(k) = 1 + 2ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\{\alpha_l\},\{R\}}(k) (Y_l^m, \cdot) Y_l^m(\omega) \quad (1.92)$$

### 1.2.2 Théorie de la diffusion pour la paire $(H_\varepsilon, H_o)$

Dans cette partie, nous étudions la théorie de la diffusion indépendante du temps pour l'opérateur de Schrödinger  $H_\varepsilon$  défini par (1.60) et nous montrons que l'amplitude de diffusion et l'opérateur de diffusion associés à  $H_\varepsilon$  convergent respectivement vers  $f_{\{\alpha_l\},\{R\}}(k)$  et  $S_{\{\alpha_l\},\{R\}}(k)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ .

Nous supposons que  $\forall j = 1, \dots, N \quad V_j : IR \rightarrow IR$  est une fonction mesurable,  $V_j \equiv 0$  pour  $r < 0$ ,  $V_j \in L^1((0, \infty))$ , et nous suivons la stratégie utilisée dans [10] pour une étude analogue des interactions ponctuelles.

Notons  $U_\varepsilon$  le groupe unitaire des dilatations définies dans  $L^2((0, \infty))$  par

$$(U_\varepsilon f)(r) = \varepsilon^{-1/2} f(r/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad f \in L^2((0, \infty)) \quad (1.93)$$

et définissons

$$v_j(r) = |V_j(r)|^{1/2} \quad , \quad u_j(r) = |V_j(r)|^{1/2} \text{sgn}[V_j(r)]. \quad (1.94)$$

Nous introduisons ensuite dans  $L^2(IR^3)^N$  les quantités

$$\Phi_\varepsilon^\pm(k\omega, x) = \left( \phi_{\varepsilon,1}^\pm(k\omega, x), \dots, \phi_{\varepsilon,N}^\pm(k\omega, x) \right) \quad (1.95)$$

où pour  $\varepsilon, k > 0$  nous utilisons les définitions suivantes:

$$\begin{aligned} \phi_{l,\varepsilon,j}^+(k\omega, x) &= u_{\varepsilon,j}(r) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{F}_l^{(o)}(k, r) Y_l^m(\omega) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,\varepsilon,j}^+(k, r) Y_l^m(\omega) \end{aligned} \quad (1.96)$$

$$\begin{aligned} \phi_{l,\varepsilon,j}^-(k\omega, x) &= v_{\varepsilon,j}(r) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \tilde{F}_l^{(o)}(k, r) Y_l^m(\omega) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,\varepsilon,j}^-(k, r) Y_l^m(\omega) \end{aligned} \quad (1.97)$$

$$u_{\varepsilon,j}(r) = u_j((r - Rj)/\varepsilon) \quad (1.98)$$

$$v_{\varepsilon,j}(r) = v_j((r - Rj)/\varepsilon) \quad (1.99)$$

$$\tilde{F}_l^{(o)}(k, r) = B_l(k) F_l^{(o)}(k, r) \quad (1.100)$$

L'amplitude de diffusion correspondant à  $H_\varepsilon$  est définie par

$$f_\varepsilon(k, \omega, \omega') = 4\pi \left( \Phi_\varepsilon^+(k\omega), t_\varepsilon(k) \Phi_\varepsilon^-(k\omega') \right) \quad (1.101)$$

où  $t_\varepsilon(k)$  est l'opérateur de transition de  $H_\varepsilon$  dans  $L^2(IR^3)$ .

L'opérateur de diffusion  $S_\varepsilon(k)$  associé à  $H_\varepsilon$  est défini dans  $L^2(S^2)$  par:

$$(S_\varepsilon(k)\phi)(\omega) = \phi(\omega) - \frac{k}{2i\pi} \int_{S^2} d\omega' f_\varepsilon(k, \omega, \omega') \phi(\omega') \quad (1.102)$$

Décomposant  $L^2(IR^3)$  par rapport aux moments angulaires, on réécrit (1.101) sous la forme

$$f_\varepsilon(k, \omega, \omega') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\varepsilon}(k) \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \quad (1.103)$$

où l'amplitude de diffusion  $f_{l,\varepsilon}(k)$  correspondant à l'onde partielle  $l$  est donnée par

$$f_{l,\varepsilon}(k) = \sum_{j,j'=1}^N \left( \phi_{l,\varepsilon,j}^+(k,r), t_{l,\varepsilon,jj'}(k) \phi_{l,\varepsilon,j'}^-(k,r') \right) \quad (1.104)$$

$r$  et  $r'$  étant juste des variables d'intégration.

Les éléments  $t_{l,\varepsilon,jj'}(k)$  de l'opérateur de transition  $t_\varepsilon(k)$  intervenant dans (1.104) sont définis dans  $L^2((0, \infty))$  par :

$$t_{l,\varepsilon,jj'}(k) = \varepsilon^{-2} \lambda_{jl}(\varepsilon) [1 + \hat{B}_{l,\varepsilon}(k)]_{j,j'}^{-1} \\ \varepsilon > 0, \text{Im}k \geq 0, k \neq 0, k^2 \notin \mathcal{E}_\varepsilon \quad (1.105)$$

où les opérateurs  $\hat{B}_{l,\varepsilon}(k)$  sont donnés par

$$\hat{B}_{l,\varepsilon}(k) : L^2((0, \infty))^N \longrightarrow L^2((0, \infty))^N \\ [\hat{B}_{l,\varepsilon}(k)(g_1, \dots, g_N)]_j = \sum_{j'=1}^N \hat{B}_{l,\varepsilon,jj'}(k) g_{j'}, g_j \in L^2((0, \infty)) \quad (1.106)$$

$$\hat{B}_{l,\varepsilon,jj'}(k) = \varepsilon^{-2} \lambda_{jl}(\varepsilon) u_{\varepsilon,j} g_{l,k} v_{\varepsilon,j'} \quad (1.107)$$

et

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \{k^2 \in IC - \{0\} / B_{l,\varepsilon}(k)g = -g \text{ pour } g \in L^2((0, \infty))^N\} \quad (1.108)$$

L'opérateur  $B_{l,\varepsilon}(k)$  qui apparait dans (1.108) est défini par [6]

$$B_{l,\varepsilon}(k) : L^2((0, \infty))^N \longrightarrow L^2((0, \infty))^N \\ [B_{l,\varepsilon}(k)(g_1, \dots, g_N)]_j = \sum_{j'=1}^N B_{l,\varepsilon,jj'}(k) g_{j'}, g_j \in L^2((0, \infty)) \quad (1.109)$$

où  $B_{l,\varepsilon,jj'}(k)$  est défini à l'aide de son noyau intégral par

$$B_{l,\varepsilon,jj'}(k, r, r') = \varepsilon^{-1} \lambda_{jl}(\varepsilon) u_j(r) g_{l,k}(\varepsilon r + R_j, \varepsilon r' + R_{j'}) v_{j'}(r') \quad (1.110)$$

### Théorème 1.3

Supposons que  $\forall j = 1, \dots, N, V_j : IR \longrightarrow IR$  est mesurable,  $V_j \equiv 0$  pour  $r < 0$  et  $V_j \in L^1((R_j, \infty))$ .

Si  $\alpha_{jl} = \lambda'_{jl}(0) \int_{R_j}^{\infty} dr V_j(r)$ , alors l'opérateur  $S_\varepsilon(k)$ ,  $k > 0$  converge vers  $S_{\{\alpha_l\}, \{R\}}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ .

Si de plus  $V_j$  a un support compact, alors  $S_\varepsilon(k)$  est analytique en  $\varepsilon$  au voisinage de  $\varepsilon = 0$  et nous avons le développement

$$S_\varepsilon(k) = S_{\{\alpha_l\},\{R\}} + o(\varepsilon) \quad (1.111)$$

Démonstration De (1.102) et (1.103), on note que la dépendance de  $S_\varepsilon(k)$  en  $\varepsilon$  est due seulement à  $f_{l,\varepsilon}(k)$ . Il suffit donc de prouver que  $f_{l,\varepsilon}(k)$  tend vers  $f_{\{\alpha_l\},\{R\}}(k)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0_+$ .

Pour cela en utilisant (1.105), on peut réécrire (1.104) sous la forme

$$\begin{aligned} f_{l,\varepsilon}(k) &= \sum_{j,j'=1}^N \varepsilon^{-1} \lambda_{jl}(\varepsilon) \times \\ &\quad \times \left( v_j \tilde{F}_l^{(o)}(k, \varepsilon r + R_j), U_\varepsilon^{-1} [1 + \hat{B}_{l,\varepsilon}(k)]_{jj'}^{-1} U_\varepsilon u_{j'} \tilde{F}_l^{(o)}(k, \varepsilon r' + R_{j'}) \right) \end{aligned} \quad (1.112)$$

où  $r$  et  $r'$  sont des variables d'intégration.

A l'aide de la relation

$$U_\varepsilon^{-1} [1 + \hat{B}_{l,\varepsilon}(k)]^{-1} U_\varepsilon = [1 + \tilde{B}_{l,\varepsilon}(k)]^{-1} \quad (1.113)$$

où  $\tilde{B}_l(k) \equiv \tilde{B}_{l,0}$  est défini dans [6] par

$$\begin{aligned} \tilde{B}_l(k) &: L^2((0, \infty))^N \longrightarrow L^2((0, \infty))^N \\ [\tilde{B}_l(k)(g_1, \dots, g_N)]_j &= \sum_{j'=1}^N \tilde{B}_{l,jj'}(k) g_{j'}, \quad g_j \in L^2((0, \infty)) \end{aligned} \quad (1.114)$$

$$\tilde{B}_{l,jj'}(k) = \lambda'(0) g_{l,k}(R_j, R_{j'})(v_{j'}, \cdot) u_j \quad (1.115)$$

On peut finalement écrire

$$f_{l,\varepsilon}(k) = \sum_{j,j'=1}^N \varepsilon^{-1} \lambda_{jl}(\varepsilon) \left( v_j \tilde{F}_l^{(o)}(k, \varepsilon r + R_j), [1 + \tilde{B}_{l,\varepsilon}(k)]_{jj'}^{-1} u_{j'} \tilde{F}_l^{(o)}(k, \varepsilon r' + R_{j'}) \right) \quad (1.116)$$

A l'aide du théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{l,\varepsilon}(k) = \sum_{j,j'=1}^N \lambda'_{jl}(0) \tilde{F}_l^{(o)}(k, R_j) \left( v_j, [1 + \tilde{B}_l(k)]_{jj'}^{-1} u_{j'} \right) \tilde{F}_l^{(o)}(k, R_{j'}) \quad (1.117)$$

De plus (1.115) entraîne que:

$$[1 + \tilde{B}_l(k)]_{jj'}^{-1} = \delta_{jj'} - \lambda'_{jl}(0) \sum_{m=1}^N g_{l,k}(R_j, R_m) [\hat{\mu}(k)]_{j'm}^{-1} (v_{j'}, \cdot) u_j \quad (1.118)$$

où

$$[\hat{\mu}(k)]_{j'm} = \left[ \delta_{jj'} + \lambda'_{jl}(0) (v_j, u_j) g_{l,k}(R_j, R_{j'}) \right]_{j,j'=1}^N \quad (1.119)$$

Si  $\lambda'_{jl}(0)(v_j, u_j) \neq 0, \forall j = 1, \dots, N$ , alors une comparaison avec (1.50) montre que

$$[\hat{\mu}(k)]_{j'm}^{-1} \lambda'_{jl}(0)(v_j, u_j) = -[\mu(k)]_{jj'} \quad (1.120)$$

Introduisant (1.119)-(1.120) dans (1.118), on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{l,\varepsilon}(k) = - \sum_{j,j'=1}^N \mu_{jj'}(k) \tilde{F}_l^{(o)}(k, R_j) \tilde{F}_l^{(o)}(k, R_{j'}) = f_{l, \{\alpha_l\}, \{R\}}(k) \quad (1.121)$$

Si  $\lambda'_{j_o l}(0)(v_{j_o}, u_{j_o}) = 0$  pour  $j_o$ , alors tous les termes avec  $j = j_o$  dans (1.119)-(1.120) s'annulent et donc n'apparaissent pas dans (1.121).  $\mu(k)$  contient donc précisément les  $\alpha_{jl}$  non nuls.

Si  $V_j$  a un support compact, alors  $B_{l,\varepsilon}(k)$  est analytique en  $\varepsilon$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit et  $k$  fixé; ce qui entraîne que  $S_\varepsilon(k)$  est analytique en  $\varepsilon$  au voisinage de  $\varepsilon = 0$ .

### 1.2.3 Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,U,\{R\}}; h_{l,o})$

Pour  $k \geq 0$  considérons la fonction

$$\mathcal{F}_{l,U,\{R\}}(k, r) = F_l^{(o)}(k, r) + \sum_{j,j'=1}^N [\Lambda_l(k)]_{jj'} F_l^{(o)}(k, R_{j'}) g_{l,k}(R_j, r) \quad (1.122)$$

où  $\Lambda_l(k)$  et  $g_{l,k}(r, r')$  sont définis respectivement par (1.77) et (1.79).

En procédant comme dans la section 1.2.2, on montre que les  $\mathcal{F}_{l,U,\{R\}}(k, r)$  sont des fonctions propres généralisées de  $h_{l,U,\{R\}}(k, r)$ .

Le comportement asymptotique de  $\mathcal{F}_{l,U,\{R\}}(k, r)$  quand  $r \rightarrow \infty$  donne:

$$\mathcal{F}_{l,U,\{R\}}(k, r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{k > 0} A_l(k) \sin \left( kr - \frac{l\pi}{2} \right) + \sum_{j,j'=1}^N [\Lambda_l(k)]_{jj'} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times F_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'}) B_l(k) e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} \\
= & \left\{ A_l(k) - i B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N [\Lambda_l(k)]_{jj'} F_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'}) \right\} \times \\
& \times \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N [\Lambda_l(k)]_{jj'} F_l^{(o)}(k, R_j) \times \\
& \times F_l^{(o)}(k, R_{j'}) \cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\
= & [\tilde{D}_{1,l}^2(k) + \tilde{D}_{2,l}^2(k)]^{1/2} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{l,U,\{R\}}(k)\right) + o(1)
\end{aligned} \tag{1.123}$$

l'équation (1.123) définit les déphasages de  $h_{l,U,\{R\}}$  par

$$\begin{aligned}
\delta_{l,U,\{R\}}(k) &= -\arctan \frac{\tilde{D}_{1,l}(k)}{\tilde{D}_{2,l}(k)} \\
&= -\arctan \frac{B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N [\Lambda_l(k)]_{jj'} F_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'})}{A_l(k) - i B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N [\Lambda_l(k)]_{jj'} F_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'})}
\end{aligned} \tag{1.124}$$

Les éléments de la matrice de diffusion sont donnés par

$$\begin{aligned}
S_{l,U,\{R\}}(k) &= \exp\left[2i\delta_{l,U,\{R\}}(k)\right] \\
&= 1 - 2ik B_l^2(k) \sum_{j,j'=1}^N [\Lambda_l(k)]_{jj'} F_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'})
\end{aligned} \tag{1.125}$$

Le développement de portée effective correspondant à  $h_{l,U,\{R\}}$  s'écrit:

$$[(2l+1)!!]^2 k^{2l+1} \cot \delta_{l,U,\{R\}}(k) = -a_{l,U,\{R\}}^{-1} + \frac{1}{2} r_{l,U,\{R\}} k^2 + o(k^4) \tag{1.126}$$

où la longueur de diffusion est donnée par

$$a_{l,U,\{R\}} = - \sum_{j,j'=1}^N [\Lambda_l(0)]_{jj'} (R_j R_{j'})^{l+1} \tag{1.127}$$

L'amplitude de diffusion  $f_{U,\{R\}}(k, \omega, \omega')$  correspondant à  $H_{U,\{R\}}$  est définie par:

$$\begin{aligned}
f_{U,\{R\}}(k, \omega, \omega') &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{e^{2i\delta_{l,U,\{R\}}(k)} - 1}{2ik} \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\
&= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,U,\{R\}}(k) \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\
&k \geq 0 \quad ; \quad \omega, \omega' \in S^2
\end{aligned} \tag{1.128}$$

où l'amplitude de diffusion  $f_{l,U,\{R\}}(k)$  correspondant à l'onde partielle  $l$  est donnée par:

$$f_{l,U,\{R\}}(k) = -B_l^2(k) \sum_{j,j'=1}^N [\Lambda_l(k)]_{jj'} F_l^{(o)}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'}) \tag{1.129}$$

L'opérateur de diffusion  $S_{U,\{R\}}(k)$  associé à  $H_{U,\{R\}}$  est défini dans  $L^2(S^2)$  par

$$\begin{aligned}
(S_{U,\{R\}}(k)\phi)(\omega) &= \phi(\omega) - \frac{k}{2\pi i} \int_{S^2} d\omega' f_{U,\{R\}}(k, \omega, \omega') \phi(\omega') \\
&k \geq 0; \quad \omega, \omega' \in S^2
\end{aligned} \tag{1.130}$$

ce qui donne l'expression de  $S_{U,\{R\}}(k)$  sous la forme

$$S_{U,\{R\}}(k) = 1 + 2ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,U,\{R\}}(k) (Y_l^m, \cdot) Y_l^m(\omega) \tag{1.131}$$

# Chapitre 2

## Les interactions $\delta$ -sphérique de $2^{eme}$ espèce

Ce chapitre est composé de deux parties. La première partie est consacrée à la définition des modèles correspondant aux interactions  $\delta$ -sphériques de  $2^{eme}$  espèce,  $\delta$ -sphériques de  $2^{eme}$  espèce plus une interaction coulombienne et  $\delta$ -sphérique de  $2^{eme}$  espèce à support sur  $N$  sphères concentriques avec des conditions frontières séparées. Elle contient aussi la définition de l'interaction  $\delta$ -sphérique de  $2^{eme}$  espèce à support sur  $N$  sphères concentriques avec des conditions frontières non séparées. Ce résultat est nouveau. La  $2^{eme}$  partie de ce chapitre, contient tous les résultats que nous avons obtenus sur la théorie de la diffusion pour  $\delta$ -sphérique de  $2^{eme}$  espèce plus une interaction coulombienne,  $\delta$ -sphérique de  $2^{eme}$  espèce à support sur  $N$  sphères concentriques avec des conditions frontières séparées et non séparées.

### 2.1 Principales définitions et propriétés de l'interaction $\delta$ -sphérique de $2^{eme}$ espèce

Nous présentons successivement les modèles  $\delta$ -sphérique de  $2^{eme}$  espèce,  $\delta$ -sphérique de  $2^{eme}$  espèce plus une interaction coulombienne [3], l'interaction  $\delta$ -sphérique de  $2^{eme}$  espèce à support sur  $N$  sphères concentriques avec des conditions frontières séparées [16]. Les résultats nouveaux que nous avons obtenus [5] et [17] concernent:

- La définition de l'interaction de  $2^{eme}$  espèce à support sur  $N$  sphères con-

centriques correspondant aux conditions frontières non séparées.  
- la théorie de la diffusion pour les interactions  $\delta$ -sphériques de  $2^{eme}$  espèce à support sur  $N$  sphères concentriques.

### 2.1.1 Interaction $\delta$ -sphérique de $2^{eme}$ espèce

Nous présentons dans cette section le modèle correspondant à l'interaction  $\delta$ -sphérique de  $2^{eme}$  espèce [3].

Considérons la décomposition (1.7) et introduisons l'opérateur minimal fermé et non négatif dans  $L^2(IR^3)$

$$\bar{H} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \bar{h}_l \tilde{U} \otimes 1 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_l &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}; \quad r > 0, l \in IN \\ \mathcal{D}(\bar{h}_l) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)); f, f' \in AC_{loc}((0, \infty)); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f'(R_+) = f'(R_-) = 0; -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\}, \quad l \in IN. \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'adjoint  $\bar{H}^*$  de l'opérateur  $\bar{H}$  est défini par :

$$\bar{H}^* = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \bar{h}_l^* \tilde{U} \otimes 1. \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_l^* &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}; \quad r > 0, \\ \mathcal{D}(\bar{h}_l^*) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)); f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f'(R_+) = f'(R_-); -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2([0, \infty)) \right\}, \quad l \geq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'équation aux indices de défaut de  $\bar{h}_l$

$$\bar{h}_l^* \tilde{\phi}_l(k) = k^2 \tilde{\phi}_l(k); \quad \tilde{\phi}_l(k) \in \mathcal{D}(\bar{h}_l^*); \quad Imk > 0 \quad (2.5)$$

admet (à une constante multiplicative près) la solution unique:

$$\tilde{\phi}_l(k, r) = \begin{cases} \frac{d}{dr}[G_l^{(0)}(k, r)]_{r=R} F_l^{(0)}(k, r); & r < R \\ \frac{d}{dr}[F_l^{(0)}(k, r)]_{r=R} G_l^{(0)}(k, r); & r > R \end{cases} \quad (2.6)$$

Dès lors, def  $\bar{h}_l = (1, 1)$ , et il découle de la théorie générale d'extensions auto-adjointes d'opérateurs symétriques que toutes les extensions auto-adjointes de  $\bar{h}_l$  sont données par une famille  $h_{l, \beta_l}$  à un paramètre d'opérateurs auto-adjoints.

Toutes les extensions auto-adjointes de  $\bar{H}_l$  sont données par [3]:

$$H_\beta = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l, \beta_l} \tilde{U} \otimes 1 \quad ; \quad \beta = \{\beta_l\}_{l=0}^{\infty} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} h_{l, \beta_l} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}; \quad r > 0, r \neq R. \\ \mathcal{D}(h_{l, \beta_l}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)); f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}) \right. \\ &\quad \left. f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f'(R_+) = f'(R_-) \equiv f'(R); f(R_+) - f(R_-) = \beta_l f'(R); \right. \\ &\quad \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\}, \quad l \geq 0, -\infty < \beta_l \leq \infty. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le cas  $\beta_l = 0$  donne l'opérateur  $h_{l, 0}$  (cfr (1.19)), tandis que  $\beta_l = \infty$  conduit à une condition frontière de Neumann en  $r = R$ . La formule de Krein [12] et un calcul direct (cfr [3]) donnent le résolvant de  $h_{l, \beta_l}$ :

$$\begin{aligned} (h_{l, \beta_l} - k^2)^{-1} &= (h_{l, 0} - k^2)^{-1} + \frac{\beta_l}{1 - \beta_l \tilde{\phi}'_l(k, R)} \left( \tilde{\phi}_l(-\bar{k}), \cdot \right) \tilde{\phi}_l(k) \\ k^2 &\in \rho(h_{l, \beta_l}), \quad \text{Im} k > 0, \quad -\infty < \beta_l \leq \infty. \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $\tilde{\phi}_l(k, r)$  est défini par (2.6). Les relations (2.7) et (2.9) permettent d'écrire le résolvant de  $H_\beta$ :

$$\begin{aligned} (H_\beta - k^2)^{-1} &= (H_0 - k^2)^{-1} + \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-l}^l \beta_l [1 - \beta_l \tilde{\phi}'_l(k, R)]^{-1} \left( | \cdot |^{-1} \tilde{\phi}_l(-\bar{k}) Y_l^m, \cdot \right) \\ &\quad | \cdot | \tilde{\phi}_l(k) Y_l^m; k^2 \in \rho(H_\beta), \quad \text{Im} k > 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

## 2.1.2 Interaction $\delta$ -sphérique de 2<sup>ème</sup> espèce plus une interaction coulombienne

Ici nous suivons le développement fait dans [3] pour étudier l'expression formelle

$$-\Delta + \gamma |x|^{-1} + \beta \delta(|x| - R), \gamma \in IR, R > 0, -\infty < \beta_l \leq \infty. \quad (2.11)$$

Comme nous l'avons noté au début de ce chapitre, en pratique, il suffit d'interchanger  $f$  et  $f'$  dans les conditions frontières en  $\mathbb{R}$  dans (1.29), (1.30) et (1.35).

Nous commençons donc avec l'opérateur minimal fermé et non négatif dans  $L^2(IR^3)$

$$\bar{H}_\gamma = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \bar{h}_{l,\gamma} \tilde{U} \otimes 1 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_{l,\gamma} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r}; \quad r \geq 0, \quad r \neq R. \\ \mathcal{D}(\bar{h}_{l,\gamma}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)); f, f' \in AC_{loc}((0, \infty)); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f'(R_+) = f'(R_-) = 0; -f'' + l(l+1)r^{-2}f + \gamma r^{-1}f \in L^2((0, \infty)) \right\}, \\ &\quad \gamma \in IR, \quad l \in IN_0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'adjoint  $\bar{h}_{l,\gamma}^*$  de  $\bar{h}_{l,\gamma}$  est défini par:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{l,\gamma}^* &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r}; \quad r \geq 0, \quad r \neq R. \\ \mathcal{D}(\bar{h}_{l,\gamma}^*) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)); f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f'(R_+) = f'(R_-); -f'' + l(l+1)r^{-2}f + \gamma r^{-1}f \in L^2((0, \infty)) \right\}, \\ &\quad \gamma \in IR, \quad l \in IN_0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

L'équation aux indices de défaut

$$\bar{h}_{l,\gamma}^* \tilde{\phi}_{l,\gamma}(k) = k^2 \tilde{\phi}_{l,\gamma}(k); \quad \tilde{\phi}_{l,\gamma}(k) \in \mathcal{D}(\bar{h}_{l,\gamma}^*); \quad Imk > 0; \quad l \in IN_0 \quad (2.15)$$

admet l'unique solution (cfr (1.31))

$$\tilde{\phi}_{l,\gamma}(k,r) = \begin{cases} \frac{d}{dr}[G_{l,\gamma}^{(0)}(k,r)]_{r=R} F_{l,\gamma}^{(0)}(k,r); & r < R \\ \frac{d}{dr}[F_{l,\gamma}^{(0)}(k,r)]_{r=R} G_{l,\gamma}^{(0)}(k,r); & r > R \end{cases}$$

$$k \neq \frac{i\gamma}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{Im}k > 0 \quad (2.16)$$

où  $F_{l,\gamma}^{(0)}(k,r)$  et  $G_{l,\gamma}^{(0)}(k,r)$  sont définies par (1.33) et (1.34).

$\overline{\tilde{h}}_{l,\gamma}$  a donc pour indice de défaut (1.1) et toutes ses extensions auto-adjointes sont données dans [3].

$$h_{l,\gamma,\beta_l} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r}; \quad r > 0, r \neq R$$

$$\mathcal{D}(h_{l,\gamma,\beta_l}) = \left\{ f \in L^2((0, \infty)); f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}) \right. \\ \left. f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ \left. f'(R_+) = f'(R_-) \equiv f'(R); f(R_+) - f(R_-) = \beta_l f'(R); \right. \\ \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f + \gamma r^{-1}f \in L^2((0, \infty)) \right\};$$

$$l \in \mathbb{N}_0, -\infty < \beta_l \leq \infty; \gamma \in \mathbb{R}. \quad (2.17)$$

Ce modèle est donc représenté par l'Hamiltonien défini dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  par

$$H_{\gamma,\beta} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,\gamma,\beta_l} \tilde{U} \otimes 1 \quad (2.18)$$

Le résolvant de  $h_{l,\gamma,\beta_l}$  est donné par

$$(h_{l,\gamma,\beta_l} - k^2)^{-1} = g_{l,\gamma,k} + \beta_l [1 - \tilde{\phi}'_{l,\gamma}(k,R)]^{-1} (\tilde{\phi}_{l,\gamma}(-\bar{k}), \cdot) \tilde{\phi}_{l,\gamma}(k)$$

$$k^2 \in \rho(h_{l,\gamma,\beta_l}); \quad \text{Im}k > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad -\infty < \beta_l \leq \infty, \quad l \in \mathbb{N}_0. \quad (2.19)$$

où  $g_{l,\gamma,k}$  est défini par (1.36).

### 2.1.3 Interaction $\delta$ -sphérique de $2^{\text{eme}}$ espèce à support sur $\mathbb{N}$ sphères concentriques

A) Conditions frontières séparées [16]

Considérons dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  l'opérateur fermé, symétrique et non négatif

$$\overline{\overline{H}}_{\{R\}} = -\Delta$$

$$\mathcal{D}(\overline{\overline{H}}_{\{R\}}) = \left\{ f \in H^{2,2}(\mathbb{R}^3) / f'(\partial \overline{K(O, R_j)}) = 0; 1 \leq j \leq N \right\} \quad (2.20)$$

Utilisant les relations (1.7), (2.20) peut se réécrire:

$$\bar{H}_{\{R\}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \bar{h}_{l,\{R\}} \tilde{U} \otimes 1 \quad (2.21)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{h}_{l,\{R\}} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \\ \mathcal{D}(\bar{h}_{l,\{R\}}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)); f, f' \in AC_{loc}((0, \infty)); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f'(R_{j\pm}) = 0; -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\}, \\ l \in IN_0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad \{R\} &= \{R_1, \dots, R_N\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Comme indiqué dans [16],  $\bar{h}_{l,\{R\}}$  a pour indices de défaut  $(N, N)$  et le sous-espace de défaut  $\tilde{N}_{-\bar{k}}$  est engendré par les  $N$  fonctions linéairement indépendantes définies par:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{l,j}(k, r) &= \begin{cases} \frac{d}{dr}[G_l^{(0)}(k, r)]_{r=R_j}, F_l^{(0)}(k, r); & r < R_j \\ \frac{d}{dr}[F_l^{(0)}(k, r)]_{r=R_j}, G_l^{(0)}(k, r); & r > R_j \end{cases} \\ \text{Im } k > 0; \quad 1 \leq j \leq N \end{aligned} \quad (2.23)$$

Toutes les extensions auto-adjointes de  $\bar{h}_{l,\{R\}}$  sont données par une famille à  $N^2$  paramètres d'opérateurs auto-adjoints [12].

Ici nous considérons une famille particulière à  $N$  paramètres d'extensions auto-adjointes de  $\bar{h}_{l,\{R\}}$ :

$$\begin{aligned} h_{l,\{\beta_l\},\{R\}} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \\ \mathcal{D}(h_{l,\{\beta_l\},\{R\}}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)); f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f'(R_{j-}) = f'(R_{j+}) \equiv f'(R_j); f(R_{j+}) - f(R_{j-}) = \beta_{jl} f'(R_j); \right. \\ &\quad \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\} \\ l \in IN_0 \quad 1 \leq j \leq N, \quad -\infty < \beta_{jl} \leq \infty; \{\beta_l\} &= \{\beta_{1l}, \dots, \beta_{Nl}\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

L'Hamiltonien quantique décrivant l'interaction  $\delta$ -sphérique de 2<sup>eme</sup> espèce à support sur  $N$  sphères concentriques de rayons  $0 < R_1 < \dots < R_N$  correspondant aux conditions frontières séparées est l'opérateur  $H_{\{\beta_l\},\{R\}}$  défini

dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  par:

$$H_{\{\beta_l\},\{R\}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,\{\beta_l\},\{R\}} \tilde{U} \otimes 1 \quad (2.25)$$

Les résolvants de  $h_{l,\{\beta_l\},\{R\}}$  et  $H_{\{\beta_l\},\{R\}}$  sont donnés par le théorème suivant:

**Théorème 2.1** Si  $\beta_{jl} \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , alors:

(i) Le résolvant de  $h_{l,\{\beta_l\},\{R\}}$  est donné par:

$$(h_{l,\{\beta_l\},\{R\}} - k^2)^{-1} = (h_{l,0} - k^2)^{-1} + \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\mu}_{jj'}(k) (\tilde{\phi}_{l,j'}(-\bar{k}), \cdot) \tilde{\phi}_{l,j}(k) \\ k^2 \in \rho(h_{l,\{\beta_l\},\{R\}}); \quad \text{Im}k > 0, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (2.26)$$

où

$$[\tilde{\mu}(k)]_{jj'}^{-1} = [\beta_{jl}^{-1} \delta_{jj'} - \tilde{\phi}'_{l,j'}(k, R_{j'})]_{j,j'=1}^N \quad (2.27)$$

(ii) Le résolvant de  $H_{\{\beta_l\},\{R\}}$  est donné par:

$$(H_{\{\beta_l\},\{R\}} - k^2)^{-1} = (H_0 - k^2)^{-1} + \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-l}^l \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\mu}_{jj'}(k) \times \\ \times (|\cdot|^{-1} \tilde{\phi}_{l,j'}(-\bar{k}) Y_l^m, \cdot) |\cdot|^{-1} \tilde{\phi}_{l,j}(k) Y_l^m \\ k^2 \in \rho(H_{\{\beta_l\},\{R\}}); \quad \text{Im}k > 0. \quad (2.28)$$

### B) Conditions frontières non séparées

Dans cette section, nous nous proposons une définition mathématique de l'Hamiltonien quantique décrivant une interaction  $\delta$ -sphérique de  $2^{eme}$  espèce à support sur  $N$  sphères concentriques correspondant à des conditions frontières non séparées.

Considérons dans l'espace  $L^2(\mathbb{R}^3)$  l'opérateur

$$\bar{\bar{H}}_{\{R\}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bar{\bar{U}}^{-1} \bar{\bar{h}}_{l,\{R\}} \bar{\bar{U}} \otimes 1$$

défini au (2.20) où  $\bar{\bar{h}}_{l,\{R\}}$  défini par (2.22) a pour indices de défaut  $(N, N)$  et donc admet une famille à  $N^2$  paramètres d'extensions auto-adjointes de

$\overline{h}_{l,\{R\}}$

De la théorie générale des extensions auto-adjointes d'opérateurs symétriques dans un espace de Hilbert [12], il ressort que la famille d'extensions auto-adjointes de  $\overline{h}_{l,\{R\}}$  peut être donnée par:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(h_{l,\hat{U},\{R\}}) &= \{g + \sum_{j=1}^N dj[\tilde{\phi}_{l,j^+} + \sum_{j'=1}^N \hat{U}_{jj'}\tilde{\phi}_{l,j'^-}]/g \in \mathcal{D}(\overline{h}_{l,\{R\}}), dj \in C\} \\ h_{l,\hat{U},\{R\}}\{g + \sum_{j=1}^N dj[\tilde{\phi}_{l,j^+} + \sum_{j'=1}^N \hat{U}_{jj'}\tilde{\phi}_{l,j'^-}]\} &= \overline{h}_{l,\{R\}}g + \\ & i \sum_{j=1}^N dj[\tilde{\phi}_{l,j^+} - \sum_{j'=1}^N \hat{U}_{jj'}\tilde{\phi}_{l,j'^-}] \end{aligned} \quad (2.29)$$

où  $\hat{U}_{jj'}$ ,  $1 \leq j, j' \leq N$ , désigne une matrice unitaire de  $C^N$ , et  $\tilde{\phi}_{l,j^\pm} = \tilde{\phi}_{l,j}(\sqrt{\pm i}, r)$ ,  $Im\sqrt{\pm i} > 0$ , constituent respectivement une base de  $Ker[\overline{h}_{l,\{R\}} \mp i]$ .

La fonction  $\tilde{\phi}_{l,j}(k, r)$  ci-dessus est définie par (2.23) et  $\overline{h}_{l,\{R\}}$  est l'adjoint de  $\overline{h}_{l,\{R\}}$ .

L'Hamiltonien quantique qui décrit l'interaction  $\delta$ -sphérique de 2<sup>eme</sup> espèce à support sur N sphères concentriques correspondant aux conditions frontières non séparées est défini par:

$$H_{\hat{U},\{R\}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,\hat{U},\{R\}} \tilde{U} \otimes 1 \quad (2.30)$$

et, à l'aide de la formule de Krein [12], le résolvant de  $h_{l,\hat{U},\{R\}}$  est donné par

$$\begin{aligned} (h_{l,\hat{U},\{R\}} - k^2)^{-1} &= (h_{l,0} - k^2)^{-1} + \sum_{j,j'=1}^N [\tilde{M}_l(k)]_{jj'} (\tilde{\phi}_{l,j'}(-\bar{k}), \cdot) \tilde{\phi}_{l,j}(k) \\ & k^2 \in \rho(h_{l,\hat{U},\{R\}}); Imk > 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

où les éléments  $[\tilde{M}_l(k)]_{jj'}$  peuvent être obtenus par des techniques utilisées dans [7].

En plus, suivant [7], on devrait pouvoir montrer que le domaine  $\mathcal{D}(h_{l,\hat{U},\{R\}})$  contient exactement les fonctions  $f_l$  vérifiant les conditions suivantes en chaque point  $R_j$  fixé.

$$f_l'(R_{j+}) = f_l'(R_{j-}) \equiv f_l'(R_j) \quad (2.32)$$

$$f_l(R_{j+}) - f_l(R_{j-}) = \sum_{j=1}^N [\tilde{\Lambda}_l(k)]_{jj'} f_l'(R_{j'}) \quad (2.33)$$

où  $[\tilde{\Lambda}_l(k)]$  devrait être lié à  $[\tilde{M}_l(k)]$  par une relation analogue à (1.77).

## 2.2 Théorie de la diffusion

### 2.2.1 Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\gamma,\beta_l}; h_{l,\gamma})$

Pour  $k \geq 0$ , définissons la fonction

$$\mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}(k, r) = F_{l,\gamma}^{(0)}(k, r) + \mu_{l,\gamma}(k) F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R) \tilde{\phi}_{l,\gamma}(k, r); k > 0 \quad (2.34)$$

où

$$\mu_{l,\gamma}(k) = \beta_l [1 - \beta_l \tilde{\phi}_{l,\gamma}'(k, R)]^{-1} \quad (2.35)$$

et  $\tilde{\phi}_{l,\gamma}(k, r)$  est définie par (2.16)

Un calcul direct montre que  $\mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}(k, r)$  vérifie les conditions suivantes:

$$\mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}'(k, R_+) = \mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}'(k, R_-) \equiv \mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}'(k, R) \quad (2.36)$$

$$\mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}(k, R_+) - \mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}(k, R_-) = \beta_l \mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}'(k, R) \quad (2.37)$$

$$-\mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}''(k, r) + l(l+1)r^{-2} \mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}(k, r) + \gamma r^{-1} \mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}(k, r) = k^2 \mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}(k, r); \quad k \geq 0 \quad (2.38)$$

Ainsi les fonctions  $\mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}(k, r)$  sont les fonctions d'onde de  $h_{l,\gamma,\beta_l}$ .

Les déphasages de  $h_{l,\gamma,\beta_l}$  peuvent être obtenus à partir des expressions asymptotiques de  $F_{l,\gamma}^{(0)}$  et  $G_{l,\gamma}^{(0)}$  quand  $r \rightarrow \infty$ . Elles sont données par [14]:

$$F_{l,\gamma}^{(0)}(k, r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{k > 0} A_{l,\gamma}(k) \sin \left( kr - \frac{\gamma}{2k} \ln(2kr) - \frac{l\pi}{2} + \delta_l^{(0)}(k) \right) \quad (2.39)$$

$$G_{l,\gamma}^{(0)}(k, r) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{k > 0} B_{l,\gamma}(k) \exp\left(-i(kr - \frac{\gamma}{2k} \ln(2kr) - \frac{l\pi}{2} + \delta_l^{(0)}(k))\right)$$

$\gamma \in IR(2.40)$

où  $\delta_l^{(0)}(k)$  est le déphasage associé à  $h_{l,\gamma}$  et qui est donné par:

$$\delta_l^{(0)}(k) = \arg\left[\Gamma\left(l + 1 + \frac{i\gamma}{2k}\right)\right] \quad (2.41)$$

Introduisant (2.39) et (2.40) dans (2.34) et adoptant la notation

$$x = kr - \frac{\gamma}{2k} \ln(2kr) - \frac{l\pi}{2} + \delta_l^{(0)}(k) \quad (2.42)$$

On peut écrire l'expression asymptotique de  $\mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}(k, r)$  quand  $r \rightarrow \infty$  sous la forme:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{l,\gamma,\beta_l}(k, r) &\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{k > 0} A_{l,\gamma} l(k) \sin x + \mu_{l,\gamma}(k) [F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R)] B_{l,\gamma}(k) e^{-ix} \\ &= \left\{ A_{l,\gamma}(k) - i B_{l,\gamma}(k) \mu_{l,\gamma}(k) [F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R)]^2 \right\} \sin x + \\ &\quad + B_{l,\gamma}(k) \mu_{l,\gamma}(k) [F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R)]^2 \cos x \\ &= [C_{1,l}^2(k, \gamma) + C_{2,l}^2(k, \gamma)]^{\frac{1}{2}} \sin(x + \delta_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}(k)) + 0(1) \end{aligned} \quad (2.43)$$

où le déphasage de Coulomb modifié  $\delta_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}$  est donné par:

$$\begin{aligned} \delta_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}(k) &= -\arctan \frac{C_{2,l}(k, \gamma)}{C_{1,l}(k, \gamma)} \\ &= -\arctan \frac{B_{l,\gamma}(k) \mu_{l,\gamma}(k) [F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R)]^2}{A_{l,\gamma}(k) - i B_{l,\gamma}(k) \mu_{l,\gamma}(k) [F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R)]^2} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Le déphasage total  $\delta_{l,\gamma,\beta_l}(k)$  correspondant à  $h_{l,\gamma,\beta_l}$  est donné par:

$$\delta_{l,\gamma,\beta_l}(k) = \delta_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}(k) + \delta_l^{(0)}(k) \quad (2.45)$$

Les éléments de la matrice de diffusion correspondant à  $\delta_{l,\gamma,\beta_l}^{(0)}(k)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} S_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}(k) &= \exp[2i\delta_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}(k)] \\ &= 1 - 2ik B_{l,\gamma}^2(k) \mu_{l,\gamma}(k) [F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R)]^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

L'amplitude de diffusion correspondant à l'onde partielle  $l$  est donné par

$$\begin{aligned} f_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}(k) &= (2ik)^{-1}[\exp(2i\delta_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}(k)) - 1] \\ &= -B_{l,\gamma}^2(k)\mu_{l,\gamma}(k)[F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R)]^2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Le développement de portée effective correspondant à  $\delta_{l,\gamma,\beta_l}^{(0)}(k)$  s'écrit [18]

$$\begin{aligned} \Gamma(2l+2)^{-2}(2k)^{2l} \left| \Gamma(l+1 + \frac{i\gamma}{2k}) \right|^2 e^{\frac{-\pi\gamma}{2k}} [k \cot \delta_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}(k) - ik + e^{\frac{\pi\gamma}{2k}} h_l(k, \gamma)] \\ = -\frac{1}{a_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}} + o(k^2); \quad k > 0; \quad \gamma \in IR \end{aligned} \quad (2.48)$$

où  $a_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}$  est la longueur de la diffusion et la fonction  $h_l(k, \gamma)$  est définie par

$$h_l(k, \gamma) = \gamma \left| \Gamma(1 + \frac{i\gamma}{2k}) \right|^2 \left[ \frac{ik}{\gamma} + \ln\left(\frac{2k}{i|\gamma|}\right) + \psi\left(1 + \frac{i\gamma}{2k}\right) \right] \quad (2.49)$$

Dans (2.49)  $\psi(Z)$  représente une fonction digamma [11].

Dans le cas  $\gamma = 0$ , (2.48) devient

$$\Gamma(l + \frac{3}{2})^{-2} \left(\frac{k}{2}\right)^{2l+1} \frac{\pi}{2} \cot \delta_{l,\beta_l}(k) = -\frac{1}{a_{l,\beta_l}} + o(k^2); \quad k > 0 \quad (2.50)$$

Utilisant des propriétés des fonctions hypergéométriques, on peut obtenir explicitement  $a_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}$  sous la forme:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}} &= \frac{1 - 2\beta_l \frac{d}{dr} [r^{\frac{1}{2}} I_\nu(y)]_{r=R} \frac{d}{dr} [r^{\frac{1}{2}} K_\nu(y)]_{r=R}}{\beta_l \gamma^{-2l-1} \Gamma(2l+2)^2 \left\{ \frac{d}{dr} [r^{\frac{1}{2}} I_\nu(y)]_{r=R} \right\}^2}; \quad \gamma \geq 0 \\ -\frac{1}{a_{l,\gamma,\beta_l}^{(c)}} &= \frac{1 + i\pi\beta_l \frac{d}{dr} [r^{\frac{1}{2}} J_\nu(z)]_{r=R} \frac{d}{dr} [r^{\frac{1}{2}} H_\nu^{(2)}(z)]_{r=R}}{\beta_l |\gamma|^{-2l-1} \Gamma(2l+2)^2 \left\{ \frac{d}{dr} [r^{\frac{1}{2}} J_\nu(z)]_{r=R} \right\}^2}; \quad \gamma \leq 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

où nous avons utilisé les notations:  $\gamma = 2l + 1$ ,  $y = (4\gamma r)^{\frac{1}{2}}$  et  $z = (4|\gamma|r)^{\frac{1}{2}}$ .

Dans le cas  $\gamma = 0$ , on obtient le résultat suivant:

$$-a_{l,\beta_l}^{-1} = R^{-2l} \left[ \frac{1}{\beta_l(l+1)^2} + \frac{l}{(l+1)(2l+1)R} \right] \quad (2.52)$$

## 2.2.2 Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\{\beta_l\},\{R\}}; h_{l,0})$

Pour  $k \geq 0$ , considérons la fonction

$$\mathcal{F}_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k, r) = F_l^{(0)}(k, r) + \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\mu}_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) \tilde{\phi}_{l,j}(k, r) \quad (2.53)$$

où  $\tilde{\phi}_{l,j}(k, r)$  est définie par (2.23) et  $\tilde{\mu}_{jj'}(k)$  donné par (2.27).

Un calcul direct montre que  $\mathcal{F}_{l,\{\beta_l\},\{R\}}$  satisfait aux conditions

$$\mathcal{F}'_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k, R_{j+}) = \mathcal{F}'_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k, R_{j-}) \equiv \mathcal{F}'_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k, R_j) \quad (2.54)$$

$$\mathcal{F}_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k, R_{j+}) - \mathcal{F}_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k, R_{j-}) = \beta_j l \mathcal{F}'_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k, R_j) \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{F}''_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k, r) + l(l+1)r^{-2}\mathcal{F}_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k, r) &= k^2\mathcal{F}_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k, r); \\ k \geq 0; \quad \forall j = 1, \dots, N & \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ainsi  $\mathcal{F}_{l,\{\beta_l\},\{R\}}$  sont des fonctions d'onde de diffusion de  $h_{l,\{\beta_l\},\{R\}}$ .

En faisant tendre  $r$  vers  $\infty$ , on a l'expression asymptotique suivante de  $\mathcal{F}_{l,\{\beta_l\},\{R\}}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k, r) &\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{k > 0} A_l(k) \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) + \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\mu}_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) \times \\ &\quad \times F_l^{(0)'}(k, R_j) B_l(k) e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} \\ &= \{A_l(k) - iB_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\mu}_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) \times \\ &\quad \times F_l^{(0)'}(k, R_j)\} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) + \\ &\quad + B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\mu}_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)'}(k, R_j) \cos(kr - \frac{l\pi}{2}) \\ &= [\tilde{C}_{1,l}^2(k) + \tilde{C}_{2,l}^2(k)]^{\frac{1}{2}} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) + \delta_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k) + o(1) \end{aligned} \quad (2.57)$$

Ce qui donne les déphasages sous la forme:

$$\begin{aligned}
\delta_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k) &= -\arctan \frac{\tilde{C}_{2,l}(k)}{\tilde{C}_{1,l}(k)} \\
&= -\arctan \frac{B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\mu}_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)'}(k, R_j)}{A_l(k) - iB_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\mu}_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)'}(k, R_j)}
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Les éléments de la matrice de diffusion correspondant sont donnés par

$$\begin{aligned}
S_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k) &= \exp[2i\delta_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k)] \\
&= 1 - 2ikB_l^2(k) \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\mu}_{jj'} F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)'}(k, R_j)
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Le développement de portée effective correspondant à  $h_{l,\{\beta_l\},\{R\}}$  est donné par

$$[(2l+1)!!]^2 k^{2l+1} \cot \delta_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k) = -a_{l,\{\beta_l\},\{R\}}^{-1} + \frac{1}{2} r_{l,\{\beta_l\},\{R\}} k^2 + o(k^4) \tag{2.60}$$

où la longueur de la diffusion  $a_{l,\{\beta_l\},\{R\}}$  est donnée par

$$a_{l,\{\beta_l\},\{R\}} = -(l+1)^2 \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\mu}_{jj'}(0) (R_{j'} R_j)^l \tag{2.61}$$

L'amplitude de diffusion  $f_{\{\beta_l\},\{R\}}(k, \omega, \omega')$  associée à  $H_{\{\beta_l\},\{R\}}$  se définit comme

$$\begin{aligned}
f_{\{\beta_l\},\{R\}}(k, \omega, \omega') &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{e^{2i\delta_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k)} - 1}{2ik} \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\
&= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k) \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega)
\end{aligned} \tag{2.62}$$

où l'amplitude de diffusion  $f_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k)$  correspondant à l'onde partielle  $l$  est donnée par

$$f_{l,\{\beta_l\},\{R\}}(k) = -B_l^2(k) \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\mu}_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)'}(k, R_j) \tag{2.63}$$

### 2.2.3 Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\hat{U},\{R\}}; h_{l,0})$

De (2.32) et (2.33), on peut montrer que les fonctions d'onde correspondant à  $h_{l,\hat{U},\{R\}}$  sont données par:

$$\mathcal{F}_{l,\hat{U},\{R\}}(k, r) = F_l^{(0)}(k, r) + \sum_{j,j'=1}^N [\tilde{\Lambda}_l(k)]_{jj'} F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) \tilde{\phi}_{l,j}(k, r) \quad (2.64)$$

où  $\tilde{\phi}_{l,j}(k, r)$  est définie par (2.23). Utilisant des techniques standards on obtient les déphasages de  $h_{l,\hat{U},\{R\}}$  sous la forme

$$\delta_{l,\hat{U},\{R\}}(k) = -\arctan \frac{B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N [\tilde{\Lambda}_l(k)]_{jj'} F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)'}(k, R_j)}{A_l(k) - i B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N [\tilde{\Lambda}_l(k)]_{jj'} F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)'}(k, R_j)} \quad (2.65)$$

Les éléments de la matrice de diffusion sont donnés par

$$\begin{aligned} S_{l,\hat{U},\{R\}}(k) &= \exp[2i\delta_{l,\hat{U},\{R\}}(k)] \\ &= 1 - 2ik B_l^2(k) \sum_{j,j'=1}^N [\tilde{\Lambda}_l(k)]_{jj'} F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)'}(k, R_j) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Le développement de portée effective correspondant à  $h_{l,\hat{U},\{R\}}$  est donné par

$$[(2l+1)!!]^2 k^{2l+1} \cot \delta_{l,\hat{U},\{R\}}(k) = -a_{l,\hat{U},\{R\}}^{-1} + \frac{1}{2} r_{l,\hat{U},\{R\}} k^2 + 0(k^4) \quad (2.67)$$

où  $a_{l,\hat{U},\{R\}}$  est donné par

$$a_{l,\hat{U},\{R\}} = -(l+1)^2 \sum_{j,j'=1}^N [\tilde{\Lambda}_l(0)]_{jj'} (R_j R_{j'})^l \quad (2.68)$$

L'amplitude de diffusion  $f_{l,\hat{U},\{R\}}(k)$  correspondant à l'onde partielle  $l$  est donnée par

$$f_{l,\hat{U},\{R\}}(k) = -B_l^2(k) \sum_{j,j'=1}^N [\tilde{\Lambda}_l(k)]_{jj'} F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)'}(k, R_j) \quad (2.69)$$

# Chapitre 3

## LES INTERACTIONS $\delta'$ -SPHERIQUE DE 1<sup>ere</sup> ESPECE

### 3.1 Définition du modèle

Considérons l'équation de Schrödinger radiale pour le potentiel  $\delta'$ -sphérique :

$$h_{l, \tilde{\alpha}_l} f_l(k, r) \equiv \left[ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \tilde{\alpha}_l \delta'(r-R) \right] f_l(k, r) = k^2 f_l(k, r) \quad (3.1)$$

et supposons que la fonction  $f_l(k, r)$  est continue au point  $r = R$  c'est-à-dire

$$f_l(k, R_+) = f_l(k, R_-) \equiv f_l(k, R) \quad (3.2)$$

La dérivée  $f'_l(k, r)$  doit être nécessairement discontinue au point  $r = R$ , si non l'opérateur  $h_{l, \tilde{\alpha}_l}$  coïnciderait avec l'Hamiltonien libre  $h_l$  correspondant à l'onde partielle  $l$ .

Ainsi, au point  $r = R$ , la fonction  $f'_l(k, r)$  peut être définie par :

$$f'_l(k, R) = \frac{1}{2} [f'_l(k, R_+) + f'_l(k, R_-)] \quad (3.3)$$

Si on "intègre" l'équation (3.1) de  $r = R - \varepsilon$  à  $r = R + \varepsilon$  puis on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro, on obtient la condition aux limites suivantes :

$$\left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right) f'_l(k, R_+) - \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right) f'_l(k, R_-) = 0 \quad (3.4)$$

L'interaction  $\delta'$ -sphérique peut donc être caractérisée par les conditions frontières (3.2) et (3.4).

Une comparaison de ces conditions frontières avec les conditions (1.2) et (1.3) décrivant l'interaction  $\delta$ -sphérique suggère de définir l'hamiltonien quantique radial  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$  de l'interaction  $\delta'$ -sphérique de la façon suivante à partir de l'opérateur  $\overline{h}_l$  donné par (1.10) possédant les indices de défaut (1,1)

$$\begin{aligned} h_{l,\tilde{\alpha}_l} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \\ \mathcal{D}(h_{l,\tilde{\alpha}_l}) &= \left\{ f \in \mathcal{D}(\overline{h}_l) ; f(R_+) = f(R_-) \equiv f(R) \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right)f'(R_+) - \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right)f'(R_-) = 0 \right. \\ &\quad \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, +\infty)) \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $\mathcal{D}(\overline{h}_l)$  est défini par (1.12)

Comme  $\overline{h}_l$  est un opérateur symétrique, fermé non négatif et  $\text{def}(\overline{h}_l) = (1, 1)$  il découle de la formule de Krein [12] que le résolvant de  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$  doit satisfaire l'équation ci-après :

$$(h_{l,\tilde{\alpha}_l} - k^2)^{-1} - (h_{l,0} - k^2)^{-1} = \tilde{\mu}_l(k)(\phi_l(-\bar{k}), \cdot)\phi_l(k) \quad (3.6)$$

où  $\phi_l(k, r)$  est définie par (1.14)

Soit  $g_l \in L^2((0, \infty))$  et définissons la fonction

$$\begin{aligned} \chi_l(k, r) &= \left( (h_{l,\tilde{\alpha}_l} - k^2)^{-1} g_l \right) (r) \\ &= \int_0^\infty dr' g_{lk}(r, r') g_l(r') + \tilde{\mu}_l(k) \phi_l(k, r) \int_0^\infty dr' \phi_l(k, r') g_l(r') \end{aligned} \quad (3.7)$$

comme  $\chi_l(k, r) \in \mathcal{D}(h_{l,\tilde{\alpha}_l})$ , il découle de (3.5) que  $\chi_l(k, r)$  satisfait les conditions frontières :

$$\chi_l(k, R_+) = \chi_l(k, R_-) \text{ et } \left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right)\chi_l'(k, R_+) - \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right)\chi_l'(k, R_-) = 0$$

La vérification de ces conditions frontières montre qu'il n'existe pas de fonction  $\tilde{\mu}_l(k)$  satisfaisant l'équation (3.7) ceci signifie que  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$  ne peut pas être

défini à partir d'un opérateur minimal d'indices de défaut (1.1)  
D'après [21], l'opérateur minimal doit avoir comme indices de défaut (2, 2).  
Nous allons dès lors définir l'opérateur  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$  de la façon suivante :  
Considérons dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  l'opérateur fermé, symétrique et non négatif

$$\begin{aligned}\tilde{H} &= -\Delta \\ \mathcal{D}(\tilde{H}) &= \{f \in H^{2,2}(\mathbb{R}^3) / f(\overline{\partial K(0,R)}) = f'(\overline{\partial K(0,R)}) = 0\}\end{aligned}\quad (3.8)$$

En utilisant la décomposition obtenue au (1.7), on peut réécrire l'opérateur  $\tilde{H}$  sous la forme

$$\tilde{H} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \tilde{h}_l \tilde{U} \otimes 1 \quad (3.9)$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{h}_l &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad r > 0, \quad l \in N_0 \\ \mathcal{D}(\tilde{h}_l) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty)); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f(R) = f'(R) = 0; -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\}\end{aligned}\quad (3.10)$$

L'adjoint  $\tilde{H}^*$  de l'opérateur  $\tilde{H}$  est défini de la façon suivante :

$$\tilde{H}^* = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \tilde{h}_l^* \tilde{U} \otimes 1 \quad (3.11)$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{h}_l^* &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}; \quad r > 0, \\ \mathcal{D}(\tilde{h}_l^*) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}) \right. \\ &\quad \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\}; \quad l \in N\end{aligned}\quad (3.12)$$

On montre facilement que l'équation aux indices de défaut de  $\tilde{h}_l$

$$\tilde{h}_l^* \phi_l(k) = k^2 \phi_l(k); \quad \phi_l(k) \in \mathcal{D}(\tilde{h}_l^*), \quad \text{Im } k > 0 \quad (3.13)$$

admet les solutions linéairement indépendantes.

$$\psi_l^{(1)}(k, r) = \begin{cases} F_l^{(0)}(k, r) & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\psi_l^{(2)}(k, r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ G_l^{(0)}(k, r) & r > R \end{cases} \quad (3.15)$$

où  $F_l^{(0)}(k, r)$  et  $G_l^{(0)}(k, r)$  sont définies par (1.15) et (1.16). L'opérateur  $\tilde{h}_l$  a donc pour indices de défaut (2.2).  $\tilde{h}_l$  admet donc une famille à 4 paramètres d'extensions auto-adjointes. Nous nous intéressons ici à une famille particulière d'extensions auto-adjointes de  $\tilde{h}_l$  dépendant d'un paramètre définie par :

$$\begin{aligned} h_{l, \tilde{\alpha}_l} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}; \quad r > 0, \\ \mathcal{D}(h_{l, \tilde{\alpha}_l}) &= \left\{ f \in \mathcal{D}(\tilde{h}_l^*) / f(R_+) = f(R_-) \equiv f(R); \right. \\ &\quad \left. (1 + \frac{\tilde{\alpha}_l}{2})f'(R_+) - (1 - \frac{\tilde{\alpha}_l}{2})f'(R_-) = 0 \right\}; \quad \tilde{\alpha}_l \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Par définition  $h_{l, \tilde{\alpha}_l}$  décrit le potentiel  $V(r) = \tilde{\alpha}_l \delta(r - R)$ . Le cas  $\tilde{\alpha}_l = 0$  conduit à l'Hamiltonien libre  $h_{l,0}$  correspondant à l'onde partielle  $l$ .

L'opérateur  $H_{\tilde{\alpha}}$  défini dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  par :

$$\begin{aligned} H_{\tilde{\alpha}} &= \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l, \tilde{\alpha}_l} \tilde{U} \otimes 1 \\ \tilde{\alpha} &= \{\tilde{\alpha}_l\}_l \in N_0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

est par définition l'Hamiltonien quantique décrivant un potentiel  $\delta'$ -sphérique. Le cas  $\tilde{\alpha} = 0$  conduit à l'Hamiltonien libre.

$$H_0 = -\Delta \quad \mathcal{D}(H_0) = H^{2,2}(\mathbb{R}^3) \quad (3.18)$$

## 3.2 Propriétés principales de l'interaction $\delta'$ -sphérique

### 3.2.1 Equation résolvante

Théorème 3.1 (i) Le résolvant de  $h_{l, \tilde{\alpha}_l}$  est donné par

$$\begin{aligned} (h_{l, \tilde{\alpha}_l} - k^2)^{-1} &= (h_{l,0} - k^2)^{-1} + \Theta_l(k) (\tilde{\phi}_l(-k), \cdot) \phi_l(k) \\ &\quad k^2 \in \rho(h_{l, \tilde{\alpha}_l}), \quad \text{Im} k > 0, \quad l \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où

$$\Theta_l(k) = 2\tilde{\alpha}_l[2 - \tilde{\alpha}_l g'_{l,k}(R, R)]^{-1} \quad (3.20)$$

$$\phi_l(k, r) = \begin{cases} G_l^{(0)}(k, R)F_l^{(0)}(k, r) & r \leq R \\ F_l^{(0)}(k, R)G_l^{(0)}(k, r) & r \geq R \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\tilde{\phi}_l(k, r) = \begin{cases} G_l^{(0)'}(k, R)F_l^{(0)}(k, r) & r < R \\ F_l^{(0)'}(k, R)G_l^{(0)}(k, r) & r > R \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\text{et } g'_{l,k}(R, R) = F_l^{(0)'}(k, R)G_l^{(0)}(k, R) + F_l^{(0)}(k, R)G_l^{(0)'}(k, R) \quad (3.23)$$

(ii) le résolvant de  $H_{\tilde{\alpha}}$  est donné par :

$$\begin{aligned} (H_{\tilde{\alpha}} - k^2)^{-1} &= (H_0 - k^2)^{-1} + \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-l}^l \Theta_l(k) \left| |\cdot|^{-1} \phi_l(k) Y_l^m \right. > \\ &< \left. |\cdot|^{-1} \tilde{\phi}_l(-\bar{k}) Y_l^m(\omega) \right| ; k^2 \in \rho(H_{\tilde{\alpha}}), \text{Im}k > 0, \tilde{\alpha} \in IR \end{aligned} \quad (3.24)$$

### Démonstration

(i) Puisque  $\tilde{h}_l$  a pour indices de défaut (2,2), la formule de Krein [12] nous permet d'écrire le résolvant de  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$  sous la forme

$$\begin{aligned} (h_{l,\tilde{\alpha}_l} - k^2)^{-1} &= (h_{l,0} - k^2)^{-1} + \sum_{i,j=1}^2 \lambda_{ij}(k) (\psi_l^{(j)}(-\bar{k}), \cdot) \psi_l^{(i)}(k) \\ &k \in \rho(h_{l,\tilde{\alpha}}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Soit  $f \in L^2((0, \infty))$  et considérons l'élément suivant

$$\chi_l(r) = ((h_{l,\tilde{\alpha}_l} - k^2)^{-1} f)(r)$$

$$\chi_l(r) = \begin{cases} \int_0^\infty g_{l,k}(r, r') f(r') dr' + \lambda_{11}(k) F_l^{(0)}(k, r) \int_0^R F_l^{(0)}(k, r') f(r') dr' + \\ + \lambda_{12}(k) F_l^{(0)}(k, r) \int_R^\infty G_l^{(0)}(k, r') f(r') dr' & r < R \\ \int_0^\infty g_{l,k}(r, r') f(r') dr' + \lambda_{21}(k) G_l^{(0)}(k, r) \int_0^R F_l^{(0)}(k, r') f(r') dr' + \\ + \lambda_{22}(k) G_l^{(0)}(k, r) \int_R^\infty G_l^{(0)}(k, r') f(r') dr' & r < R \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\text{où } g_{l,k} = (h_{l,0} - k^2)^{-1} \quad (3.27)$$

$$\text{et } g_{l,k}(r, r') = \begin{cases} F_l^{(0)}(k, r)G_l^{(0)}(k, r'), & r \leq r' \\ F_l^{(0)}(k, r')G_l^{(0)}(k, r), & r \geq r' \end{cases} \quad (3.28)$$

En imposant à  $\chi_l(r)$  les conditions frontières

$$\chi_l(R_+) = \chi_l(R_-) \quad (3.29)$$

$$\left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right) \chi_l'(R_+) - \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right) \chi_l'(R_-) = 0 \quad (3.30)$$

On obtient

$$\lambda(k) = \frac{2\tilde{\alpha}_l}{2 - \tilde{\alpha}_l g_{l,k}'(R, R)} \begin{bmatrix} G_l^{(0)}(k, R)G_l^{(0)'}(k, R) & G_l^{(0)}(k, R)F_l^{(0)'}(k, R) \\ F_l^{(0)}(k, R)G_l^{(0)'}(k, R) & F_l^{(0)}(k, R)F_l^{(0)'}(k, R) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Remarque On note que  $\det[\lambda(k)] \equiv 0$ . Ceci veut dire [12] en fait que  $\tilde{h}_l$  n'est pas une partie commune maximale à  $h_{l, \tilde{\alpha}_l}$  et  $h_{l,0}$ .

Introduisant (3.31) dans (3.25), l'équation (3.35) se réduit à (3.19)

(ii) L'équation (3.24) s'obtient de (3.19) et de la décomposition en somme directe (3.17).

D'autres informations sur  $h_{l, \tilde{\alpha}_l}$  sont contenues dans théorème ci-après :

Théorème Le domaine  $\mathcal{D}(h_{l, \tilde{\alpha}_l})$ ,  $\alpha_l \in IR$ , est constitué de tous les éléments de la forme :

$$\begin{aligned} \psi_l(k, r) &= \varphi_{l,0}(k, r) + \Theta_l(k) < \bar{\phi}_l(-\bar{k}), (h_{l,0} - k^2)\varphi_{l,0} > \phi_l(k, r); \\ \varphi_{l,0} &\in \mathcal{D}(h_{l,0}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Cette décomposition est unique et on a la relation :

$$(h_{l, \tilde{\alpha}_l} - k^2)\psi_l(k) = (h_{l,0} - k)\varphi_{l,0}(k) \quad (3.33)$$

En plus, si  $\psi \in \mathcal{D}(h_{l,\bar{\alpha}_l})$  et  $\psi \equiv 0$  dans un ouvert de  $U$  de  $(0, \infty)$ , alors  $h_{l,\bar{\alpha}_l}\psi \equiv 0$  dans  $U$ , c'est-à-dire que  $h_{l,\bar{\alpha}_l}$  décrit une interaction locale.

Démonstration

par définition on a :

$$\mathcal{D}(h_{l,\bar{\alpha}_l}) = ((h_{l,\bar{\alpha}_l} - k^2)^{-1}(h_{l,0} - k^2)\mathcal{D}(h_{l,0})) \quad (3.34)$$

Alors si  $\psi_l \in \mathcal{D}(h_{l,\bar{\alpha}_l})$ , on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_l &= \{(h_{l,0} - k^2)^{-1} + \Theta_l(k)|\phi_l(k) \rangle \langle \tilde{\phi}_l(-\bar{k})|\} (h_{l,0} - k^2)\varphi_{l,0} \\ &= \varphi_{l,0} + \Theta_l(k) \langle \tilde{\phi}_l(-\bar{k}), (h_{l,0} - k^2)\varphi_{l,0} \rangle \phi_l(k). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ce qui prouve (3.32).

La relation (3.33) découle trivialement de (3.34).

Pour montrer l'unicité de (3.32) on suppose que  $\psi_l = 0$  alors

$$\begin{aligned} \varphi_{l,0}(k, r) &= -\Theta_l(k) \langle \tilde{\phi}_l(-\bar{k}), (h_{l,0} - k^2)\varphi_{l,0} \rangle \phi_l(k, r) \\ &= -\Theta_l(k) C_l \phi_l(k, r) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Comme  $\varphi_{l,0} \in \mathcal{D}(h_{l,0})$ , on a en particulier que  $\varphi_{l,0}, \varphi'_{l,0} \in AC_{loc}((0, \infty))$  tandis que  $\phi'_l(k, r)$  est discontinue en  $r = R$ . Dès lors, (3.36) n'est satisfait que si  $\varphi_{l,0} = 0$ .

Montrons maintenant que  $h_{l,\bar{\alpha}_l}$  est local.

★ Si  $R \notin U$ , alors  $(h_{l,0} - k^2)\phi_l(k, r) = 0$ , et les relations (3.33) et (3.36) donnent

$$\begin{aligned} h_{l,\bar{\alpha}_l}\varphi_l(k, r) &= k^2\varphi(k, r) + (h_{l,0} - k)\varphi_{l,0}(k, r) \\ &= -\Theta_l(k) C_l (h_{l,0} - k^2)\phi_l(k, r) = 0; \quad r \in U \text{ d'où le résultat.} \end{aligned}$$

★ Si  $R \in U$ , alors  $\varphi_{l,0}, \varphi'_{l,0} \in AC_{loc}((0, \infty))$  si et seulement si  $\varphi_{l,0} = 0$  ceci implique que :

$$h_{l,\bar{\alpha}_l}\psi_l(k, r) = k^2\psi_l(k, r) = 0, \quad r \in U$$

### 3.2.2 Propriétés Spectrales

Nous allons définir le spectre ponctuel dont la structure est déterminée par la position des états liés de  $h_{l,\bar{\alpha}_l}$ . Ces états liés s'obtiennent en cherchant les solutions  $\psi_l \in L^2((0, \infty))$  de l'équation

$$h_{l,\bar{\alpha}_l}\varphi_l = E\psi_l; E < 0, \psi_l(E, r) \in \mathcal{D}(h_{l,\bar{\alpha}_l}) \quad (3.37)$$



Les solutions régulières et irrégulières de (3.37) sont respectivement données par  $r^{\frac{1}{2}} I_{l+1/2}(\sqrt{-E}r)$  et  $r^{\frac{1}{2}} K_{l+1/2}(\sqrt{-E}r)$ , où  $I_\nu(z)$  et  $K_\nu(z)$  sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre  $\nu$  [11]. On normalise ces solutions de sorte que

$$A_l(E)r^{1/2}I_{l+1/2}(\sqrt{-E}r) \quad r \rightarrow 0 \quad r^{l+1} \quad (3.38)$$

$$B_l(E)r^{1/2}K_{l+1/2}(\sqrt{-E}r) \quad r \rightarrow 0 \quad \frac{r^{-l}}{2l+1} \quad (3.39)$$

où les coefficients de normalisation  $A_l(E)$  et  $B_l(E)$  sont donnés par

$$A_l(E) = \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{-E}}{2}\right)^{-l-\frac{1}{2}} \quad (3.40)$$

$$B_l(E) = 2\Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)^{-1} \left(\frac{\sqrt{-E}}{2}\right)^{l+\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

avec

$$W[B_l(E)r^{1/2}K_{l+1/2}(\sqrt{-E}r), A_l(E)r^{\frac{1}{2}}I_{l+1/2}(\sqrt{-E}r)] = 1 \quad (3.42)$$

On peut écrire la solution de (3.40) sous la forme

$$\varphi_l(E, r) = \begin{cases} C_1 A_l(E)r^{1/2}I_{l+1/2}(\sqrt{-E}r), & 0 < r \leq R \\ C_2 B_l(E)r^{1/2}K_{l+1/2}(\sqrt{-E}r), & r \geq R \end{cases} \quad (3.43)$$

Comme  $\varphi_l(k, r) \in \mathcal{D}(h_{l, \tilde{\alpha}_l})$ , On a :

$$\psi_l(E, R_-) = \psi_l(E, R_+) \quad (3.44)$$

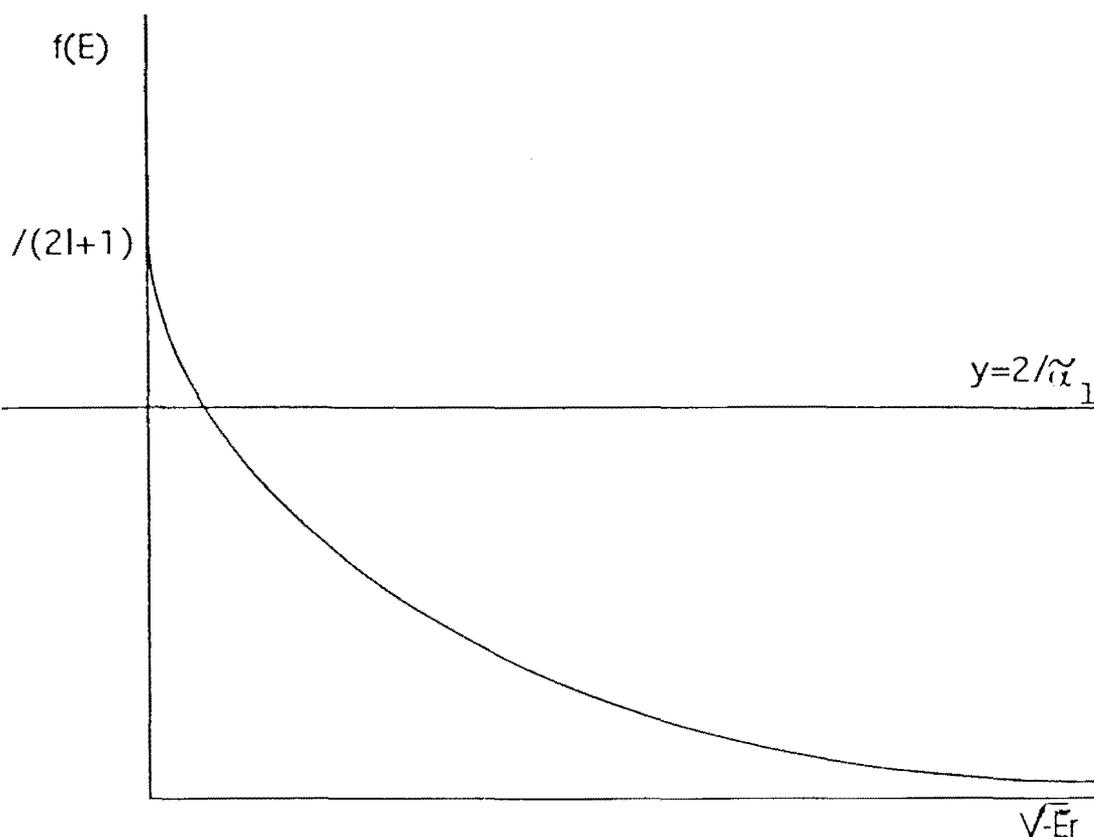
$$\left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right)\psi'_l(E, R_+) - \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right)\psi'_l(E, R_-) = 0 \quad (3.45)$$

La vérification de ces conditions frontières nous donne l'équation pour les états liés de  $h_{l, \tilde{\alpha}}$  :

$$2 - \tilde{\alpha}_l \frac{d}{dr} [r I_{l+1/2}(\sqrt{-E}r) K_{l+1/2}(\sqrt{-E}r)]_{r=R} = 0 \quad (3.46)$$

Nous allons résoudre (3.46) graphiquement en la mettant sous la forme

$$\frac{2}{\tilde{\alpha}_l} = \frac{d}{dr} [r I_{l+1/2}(\sqrt{-E}r) K_{l+1/2}(\sqrt{-E}r)]_{r=R} \equiv f(E) \quad (3.47)$$



Chaque onde partielle a exactement 1 état lié si  $\frac{2}{\tilde{\alpha}_l} < \frac{1}{2l+1}$

Théorème 3.3

Si  $\tilde{\alpha}_l \in R, l \in N$  alors le spectre essentiel  $\sigma_{ess}(h_{l,\tilde{\alpha}_l})$  est purement absolument continu et couvre la partie non négative de l'axe réel :

$$\sigma_{ess}(h_{l,\tilde{\alpha}_l}) = \sigma_{ac}(h_{l,\tilde{\alpha}_l}) = [0, \infty) \quad (3.48)$$

Le spectre singulièrement continu  $\sigma_{sc}(h_{l,\tilde{\alpha}_l})$  est vide, et pour tout  $l \in R, h_{l,\tilde{\alpha}_l}$  ne possède pas de valeurs propres non négatives. les valeurs propres négatives  $E < 0$  de  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$  sont obtenues de l'équation.

$$2 - \tilde{\alpha}_l \frac{d}{dr} [r I_{l+1/2}(\sqrt{-E}r) K_{l+1/2}(\sqrt{-E}r)]_{r=R} = 0; E < 0 \quad (3.49)$$

Ce qui entraîne que

$$\sigma_p(h_{l,\tilde{\alpha}_l}) = \begin{cases} \phi & \text{Si } \tilde{\alpha}_l \leq 2(2l+1) \\ \{E_0\} & \text{Si } \tilde{\alpha}_l > 2(2l+1) \end{cases} \quad \tilde{\alpha}_l \in R, l \in N_0 \quad (3.50)$$

où  $E_0$  est une solution de l'équation (3.49)

### Démonstration

Comme  $(h_{l,\tilde{\alpha}_l} - k^2)^{-1}$  est un opérateur de rang fini, il découle du théorème de Weyl [19; Pge112] que  $\sigma_{ess}(h_{l,\tilde{\alpha}_l}) = \sigma_{ess}(h_{l,0} = [0, \infty)$ .

L'absence de  $\sigma_{sc}(h_{l,\tilde{\alpha}_l})$  s'obtient en suivant [10] et de l'équation (3.28).

L'absence de valeurs propres non négatives s'obtient en considérant l'équation  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}\psi_l = k^2\psi_l$  et en montrant que les fonctions propres  $\psi_l \notin L^2((0, \infty))$  pour  $k \geq 0$

La structure de  $\sigma_p(h_{l,\tilde{\alpha}_l})$  est déterminée par l'équation (3.49)

### 3.2.3 Résonnances de $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$

Les résonnances de  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$  sont définies [20] comme étant les pôles du noyau du résolvant de  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$  situés dans le demi-plan non physique  $Imk \leq 0$

(i) Pôles situés sur l'axe imaginaire négatif

On cherche les solutions  $k = ix, x \geq 0$  de

$$2 - \tilde{\alpha}_l g'_{l,k}(R, R) = 0 \quad (3.51)$$

$$2 + i\frac{\pi}{2}\tilde{\alpha}_l \frac{d}{dr} [r J_{l+1/2}(-ixr) H_{l+1/2}^{(2)}(-ixr)]_{r=R} = 0 \quad (3.52)$$

On utilise les relations suivantes [11]

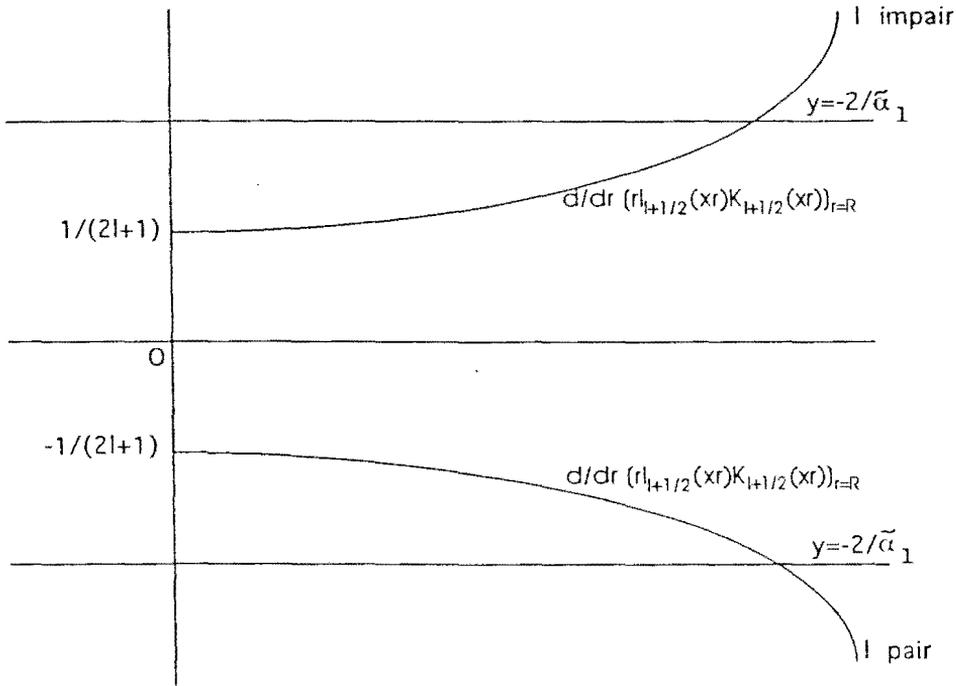
$$J_{l+1/2}(-ixr) = e^{\frac{3}{2}(l+1/2)\pi i} I_{l+1/2}(xr) \quad (3.53)$$

$$H_{l+1/2}^{(2)}(-ixr) = \frac{2i}{\pi} e^{\frac{1}{2}(l+1/2)\pi i} K_{l+1/2}(xr) \quad (3.54)$$

d'où (3.52) devient :

$$-\frac{2}{\tilde{\alpha}_l} = \frac{d}{dr} [r I_{l+\frac{1}{2}}(xr) K_{l+\frac{1}{2}}(xr)]_{r=0} \quad (3.55)$$

Cette résolution aussi se fera graphiquement.



(ii) Pôles situés dans  $Imk \leq 0$

On étudie ici seulement le cas  $l = 0$ . On cherche donc les solutions  $k = k_1 - ik_2$ ,  $k_2 \geq 0$ , de l'équation

$$\begin{aligned} 2 - \tilde{\alpha}_0 g'_{o,k}(R, R) &= 0 \text{ dans } Imk \leq 0 & (3.56) \\ \Leftrightarrow 2 - \tilde{\alpha}_0 e^{-2ikR} &= 0 \text{ dans } Imk \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \tilde{\alpha}_0 e^{-2ik_2 R} \cos 2k_1 R = 0 \\ \sin 2k_1 R = 0 \end{cases} \quad k_2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{n\pi}{2R}, & n \in Z \\ k_2 = \frac{1}{2R} \ln \frac{2(-1)^n}{\tilde{\alpha}} & k_2 \geq 0 \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{cases} k_1 = \frac{n\pi}{2R} \\ k_2 = \frac{1}{2R} \ln \frac{2}{\tilde{\alpha}}, n \text{ pair}, 0 < \tilde{\alpha} \leq 2 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} k_1 = \frac{n\pi}{2R} \\ k_2 = \frac{1}{2R} \ln \frac{-2}{\tilde{\alpha}}, n \text{ impair}, -2 \leq \tilde{\alpha} < 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

Il y a donc une infinité de solutions de (3.56) dans  $Imk \leq 0$

### 3.3 Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\tilde{\alpha}_l}, h_{l,0})$

Pour  $k \geq 0$ , considérons la fonction

$$\psi_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, r) = F_l^{(0)}(k, r) + \Theta_l(k) F_l^{(0)'}(k, R) \phi_l(k, r) \quad (3.58)$$

où  $F_l^{(0)}(k, r)$ ,  $\phi_l(k, r)$  et  $\Theta_l(k)$  sont respectivement définis par (3.15), (3.21) et (3.26). On vérifie que

$$\psi_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_-) = \psi_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_+) \quad (3.59)$$

on peut voir que

$$\psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_-) = F_l^{(0)'}(k, R) + \Theta_l(k) F_l^{(0)'}(k, R) F_l^{(0)'}(k, R) G_l^{(0)}(k, R)$$

$$\psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_+) = F_l^{(0)'}(k, R) + \Theta_l(k) F_l^{(0)'}(k, R) F_l^{(0)}(k, R) G_l^{(0)'}(k, R)$$

alors

$$\psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_-) - \psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_+) = \Theta_l(k) F_l^{(0)}(k, R)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_-) + \psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_+) &= 2F_l^{(0)'}(k, R) + \hat{\mu}_l(k) F_l^{(0)'}(k, R) g'_{l,k}(k, R) \\ &= \frac{2}{\tilde{\alpha}_l} \Theta_l(k) F_l^{(0)'}(k, R) \end{aligned}$$

d'où

$$\psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_-) - \psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_+) = \frac{\tilde{\alpha}_l}{2} [\psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_-) + \psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_+)]$$

Soit

$$\left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right)\psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_+) - \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right)\psi'_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, R_-) = 0 \quad (3.60)$$

On montre aussi

$$-\psi''_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, r) + l(l+1)r^{-2}\psi_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, r) = k^2\psi_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, r) \quad (3.61)$$

Alors  $\psi_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, r)$  est un ensemble de fonctions propres généralisées associées à  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$  ou en d'autres termes, les fonctions d'onde de  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$ .

Le déphasage de  $h_{l,\tilde{\alpha}_l}$  s'obtient alors à partir du comportement asymptotique de  $\psi_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, r)$  quand  $r \rightarrow \infty$ . En effet, on a [14]

$$\begin{aligned} \psi_{l,\tilde{\alpha}_l}(k, r) &\xrightarrow[r \rightarrow \infty]{k > 0} A_l(k)\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + \Theta_l(k)F_l^{(o)'}(k, R)F_l^{(o)}(k, R)e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} \\ &= \left\{A_l(k) - iB_l(k)\Theta_l(k)F_l^{(o)'}(k, R)F_l^{(o)}(k, R)\right\}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) + \\ &\quad + \Theta_l(k)B_l(k)F_l^{(o)'}(k, R)F_l^{(o)}(k, R)\cos\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\ &= \left[T_{1,l}^2(k) + T_{2,l}^2(k)\right]^{1/2}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{l,\tilde{\alpha}_l}\right) + o(1) \end{aligned} \quad (3.62)$$

d'où le déphasage

$$\begin{aligned} \delta_{l,\tilde{\alpha}_l}(k) &= -\arctan\frac{T_{2,l}(k)}{T_{1,l}(k)} \\ &= -\arctan\frac{\Theta_l(k)B_l(k)F_l^{(o)'}(k, R)F_l^{(o)}(k, R)}{A_l(k) - iB_l(k)\Theta_l(k)F_l^{(o)'}(k, R)F_l^{(o)}(k, R)} \end{aligned} \quad (3.63)$$

où on a utilisé les mêmes notations que celles de [14]:

$$A_l(k) = 2^{-l}k^{-l-1}\Gamma(2l+2)\Gamma(l+1)^{-1} \quad (3.64)$$

$$B_l(k) = \frac{1}{kA_l(k)} = (2l)^l\Gamma(l+1)\Gamma(2l+2)^{-1} \quad (3.65)$$

(3.63) peut se mettre sous la forme

$$\delta_{l,\tilde{\alpha}_l}(k) = \arctan\frac{\tilde{\alpha}_l\pi\left[R^{1/2}J_{l+1/2}(kR)\right]\frac{d}{dr}\left[r^{1/2}J_{l+1/2}(kr)\right]_{r=R}}{2 + \tilde{\alpha}_l\frac{\pi}{2}\frac{d}{dr}\left[rJ_{l+1/2}(kr)Y_{l+1/2}(kr)\right]_{r=R}} \quad (3.66)$$

où  $Y_\nu(z)$  est une fonction de Neumann d'ordre  $\nu$  [11].

Les éléments de la matrice de diffusion sont donnés par

$$\begin{aligned} S_{l,\bar{\alpha}_l}(k) &= \exp[2i\delta_{l,\bar{\alpha}_l}(k)] \\ &= 1 - 2ikB_l^2(k)\Theta_l(k)F_l^{(o)'}(k,R)F_l^{(o)}(k,R) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Le développement de portée effective correspondant à  $h_{l,\bar{\alpha}_l}$  est donné par

$$[(2l+1)!!]k^{2l+1} \cot \delta_{l,\bar{\alpha}_l}(k) = -a_{l,\bar{\alpha}_l}^{-1} + \frac{1}{2}r_{l,\bar{\alpha}_l}k^2 + o(k^4) \quad (3.68)$$

où les coefficients  $a_{l,\bar{\alpha}_l}$  et  $r_{l,\bar{\alpha}_l}$  sont appelés respectivement longueur de diffusion et portée effective.

Un calcul direct montre que

$$a_{l,\bar{\alpha}_l} = \Theta_l(0)(l+1)R^{2l+1} \quad (3.69)$$

L'amplitude de diffusion  $f_{\bar{\alpha}}(k,\omega,\omega')$  associée à  $H_{\bar{\alpha}}$  est définie par

$$\begin{aligned} f_{\bar{\alpha}}(k,\omega,\omega') &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{e^{2i\delta_{l,\bar{\alpha}_l}(k)} - 1}{2ik} \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\bar{\alpha}_l}(k) \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\ k &\geq 0, \quad \omega, \omega' \in S^2 \end{aligned} \quad (3.70)$$

où l'amplitude de diffusion  $f_{l,\bar{\alpha}_l}(k)$  correspondant à l'onde partielle  $l$  est donnée par

$$f_{l,\bar{\alpha}_l}(k) = -B_l^2(k)\Theta_l(k)F_l^{(o)'}(k,R)F_l^{(o)}(k,R) \quad (3.71)$$

L'opérateur de diffusion  $S_{\bar{\alpha}}(k)$ , associé à  $H_{\bar{\alpha}}$  est défini dans  $L^2(S^2)$  par

$$\begin{aligned} (S_{\bar{\alpha}}(k)\phi)(\omega) &= \phi(\omega) - \frac{k}{2i\pi} \int_{S^2} d\omega' f_{\bar{\alpha}}(k,\omega,\omega')\phi(\omega') \\ k &\geq 0; \quad \omega, \omega' \in S^2 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Ce qui nous donne

$$S_{\bar{\alpha}}(k) = 1 + 2ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\bar{\alpha}_l}(k) (Y_l^m, \cdot) Y_l^m(\omega) \quad (3.73)$$

## 3.4 Particule chargée dans une interaction $\delta'$ -sphérique

Dans cette section, nous étudions l'Hamiltonien d'une particule chargée soumise à une interaction  $\delta'$ -sphérique. Dans ce cas, l'Hamiltonien non perturbé est l'Hamiltonien de Coulomb:

$$H_c = -\Delta + \frac{\gamma}{|x|} \quad ; \quad \mathcal{D}(H_c) = H^{2,2}(\mathbb{R}^3) \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (3.74)$$

### 3.4.1 Définition du modèle

On considère la décomposition (1.7) et on introduit dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  l'opérateur fermé et non négatif

$$\tilde{H}_\gamma = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \tilde{h}_{l,\gamma} \tilde{U} \otimes 1 \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{l,\gamma} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} \quad r > 0 \quad l \in \mathbb{N} \quad \gamma \in \mathbb{R} \\ \mathcal{D}(\tilde{h}_{l,\gamma}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty)); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f(R_\pm) = f'(R_\pm) = 0 \quad -f'' + l(l+1)r^{-2}f + \gamma r^{-1}f \in L^2((0, \infty)) \right\} \\ &\quad l \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.76)$$

L'adjoint  $\tilde{H}_\gamma^*$  de l'opérateur  $\tilde{H}_\gamma$  est donné par

$$\tilde{H}_\gamma^* = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \tilde{h}_{l,\gamma}^* \tilde{U} \otimes 1 \quad (3.77)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{l,\gamma}^* &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} \quad r > 0, \quad l \in \mathbb{N} \quad \gamma \in \mathbb{R} \\ \mathcal{D}(\tilde{h}_{l,\gamma}^*) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}) \right. \\ &\quad \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f + \gamma r^{-1}f \in L^2((0, \infty)) \right\} \quad l \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.78)$$

L'équation aux indices de défaut de  $\tilde{h}_{l,\gamma}$

$$\tilde{h}_{l,\gamma}^* \phi_{l,\gamma}(k) = k^2 \phi_{l,\gamma}(k); \quad \phi_{l,\gamma}(k) \in \mathcal{D}(\tilde{h}_{l,\gamma}^*), \quad \text{Im } k > 0 \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad (3.79)$$

admet les solutions linéairement indépendantes.

$$\psi_{l,\gamma}^{(1)}(k,r) = \begin{cases} F_{l,\gamma}^{(0)}(k,r) & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (3.80)$$

$$\psi_{l,\gamma}^{(2)}(k,r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ G_{l,\gamma}^{(0)}(k,r) & r > R \end{cases} \quad (3.81)$$

où  $F_{l,\gamma}^{(0)}(k,r)$  et  $G_{l,\gamma}^{(0)}(k,r)$  sont définies par (1.33) et (1.34)

Par conséquent def  $\tilde{h}_{l,\gamma} = (2,2)$  et dès lors toutes les extensions auto-adjointes de  $\tilde{h}_{l,\gamma}$  sont données par une famille à 4 paramètres d'opérateurs auto-adjoints. Nous considérons ici le cas d'une famille à un paramètre d'extensions auto-adjointes  $h_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}$  définie par :

$$\begin{aligned} h_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r}; r > 0, r \neq R \\ \mathcal{D}(h_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}) &= \left\{ f \in \mathcal{D}(\tilde{h}_{l,\gamma}^*) / f(R_+) = f(R_-) \equiv f(R) \right. \\ &\quad \left. (1 + \frac{\tilde{\alpha}_l}{2})f'(R_+) - (1 - \frac{\tilde{\alpha}_l}{2})f'(R_-) = 0 \right\} \\ & l \in IN \quad ; \gamma, \tilde{\alpha}_l \in IR \end{aligned} \quad (3.82)$$

Le cas  $\tilde{\alpha}_l = 0$  conduit à l'Hamiltonien de Coulomb  $h_{l,\gamma}$  correspondant à l'onde partielle  $l$ . Par définition l'opérateur  $H_{\gamma,\tilde{\alpha}}$  défini dans  $L^2(R^3)$  par :

$$H_{\gamma,\tilde{\alpha}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l} \tilde{U} \otimes 1 \quad \tilde{\alpha} = \{\tilde{\alpha}_l\}_{l \in IN} \quad (3.83)$$

décrit une interaction  $\delta^l$ -sphérique plus une interaction coulombienne.

### 3.4.2 Equation résolvante

#### Théorème

Le résolvant de  $h_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}$  est donné par

$$\begin{aligned} (h_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l} - k^2)^{-1} &= (h_{l,\gamma} - k^2)^{-1} + \Theta_{l,\gamma}(k)(\tilde{\phi}_{l,\gamma}(-\bar{k}), \cdot)\phi_{l,\gamma}(k) \\ & k^2 \in \rho(h_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}), \quad Imk > 0, \quad l \in N_0 \quad \tilde{\alpha}_l \in IR \end{aligned} \quad (3.84)$$

où les fonctions  $\phi_{l,\gamma}(k, r)$ ,  $\tilde{\phi}_{l,\gamma}(k, r)$  et  $\Theta_{l,\gamma}(k)$  qui apparaissent dans (3.89) sont définies respectivement par (3.21), (3.22) et (3.20) où on a remplacé  $F_l^{(0)}(k, r)$  et  $G_l^{(0)}(k, r)$  respectivement par  $F_{l,\gamma}^{(0)}(k, r)$  et  $G_{l,\gamma}^{(0)}(k, r)$ .

### 3.4.3 Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}; h_{l,\gamma})$

Pour  $k \geq 0$  on considère la fonction

$$\mathcal{F}_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}(k, r) = F_{l,\gamma}^{(0)}(k, r) + \Theta_{l,\gamma}(k) F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R) \phi_{l,\gamma}(k, r) \quad (3.85)$$

On montre que  $\mathcal{F}_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}(k, r)$  est une fonction d'onde de  $h_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}$  et on obtient, en prenant son expression asymptotique, le déphasage de Coulomb modifié:

$$\delta_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}^{(c)}(k) = -\arctan \frac{\Theta_{l,\gamma}(k) B_{l,\gamma}(k) F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R) F_{l,\gamma}^{(0)}(k, R)}{A_{l,\gamma}(k) - i B_{l,\gamma}(k) \Theta_{l,\gamma}(k) F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R) F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R)} \quad (3.86)$$

avec

$$A_{l,\gamma}(k) = 2^{-l} \exp(\pi\gamma/4k) \Gamma(2l+2) \left| \Gamma\left(l+1 + \frac{i\gamma}{2k}\right) \right|^{-1} k^{-l-1} \quad (3.87)$$

$$B_{l,\gamma}(k) = \frac{1}{k A_{l,\gamma}(k)} = (2k)^l \exp(-\pi\gamma/4k) \Gamma(2l+2)^{-1} \left| \Gamma\left(l+1 + \frac{i\gamma}{2k}\right) \right| \quad (3.88)$$

Les éléments de la matrice de diffusion correspondant à  $\delta_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}^{(c)}(k)$  sont donnés par

$$\begin{aligned} S_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}^{(c)}(k) &= \exp[2i\delta_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}^{(c)}(k)] \\ &= 1 - 2ik B_{l,\gamma}^2(k) \Theta_{l,\gamma}(k) F_{l,\gamma}^{(0)'}(k, R) F_{l,\gamma}^{(0)}(k, R) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Le développement de portée effective correspondant est donné par [18]

$$\begin{aligned} (2k)^{2l} \Gamma(2l+2)^{-2} \left| \Gamma\left(l+1 + \frac{i\gamma}{2k}\right) \right|^2 \left[ k \cot \delta_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}^{(c)}(k) - ik + \exp(\pi\gamma/2k) h_l(k, \gamma) \right] = \\ - \frac{1}{a_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}^{(c)}} + o(k^2), \quad k > 0, \quad \gamma \in IR \end{aligned} \quad (3.90)$$

où  $a_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}^{(c)}$  est la longueur de diffusion et la fonction  $h_l(k, \gamma)$  est définie par

$$h_l(k, \gamma) = \gamma \left| \Gamma \left( 1 + \frac{i\gamma}{2k} \right) \right|^2 \left[ \frac{ik}{\gamma} + \text{Ln} \left( \frac{2k}{i|\gamma|} \right) + \psi \left( 1 + \frac{i\gamma}{2k} \right) \right] \quad (3.91)$$

Utilisant des propriétés des fonctions hypergéométriques, on obtient  $a_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}^{(c)}$  explicitement sous la forme:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}^{(c)}} &= \frac{1 - \tilde{\alpha}_l [r I_\nu(y) K_\nu(y)]'_{r=R}}{\tilde{\alpha}_l \gamma^{-\nu} \Gamma(2l+2)^2 [r^{1/2} I_\nu(y)]'_{r=R} [r^{1/2} I_\nu(y)]_{r=R}} \quad \gamma \geq 0 \\ -\frac{1}{a_{l,\gamma,\tilde{\alpha}_l}^{(c)}} &= \frac{2 + i\pi \tilde{\alpha}_l [r J_\nu(z) H_\nu^{(2)}(z)]'_{r=R}}{2\tilde{\alpha}_l |\gamma|^{-\nu} \Gamma(2l+2)^2 [r^{1/2} J_\nu(z)]'_{r=R} [r^{1/2} J_\nu(z)]_{r=R}} \quad \gamma \leq 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

où on a utilisé les notations  $\nu = 2l + 1$ ,  $y = (4\gamma r)^{1/2}$  et  $z = (4|\gamma|r)^{1/2}$ . Dans le cas  $\gamma = 0$ , on obtient le résultat suivant:

$$a_{l,\tilde{\alpha}_l}^{-1} = \frac{2 - \frac{\tilde{\alpha}_l}{2l+1}}{2\tilde{\alpha}_l(l+1)R^{2l+1}} \quad (3.93)$$

## 3.5 Interactions $\delta'$ sphérique à support sur $N$ sphères concentriques

### 3.5.1 Définition de l'Hamiltonien

Dans cette section, nous étudions l'Hamiltonien quantique décrivant un nombre fini d'interactions  $\delta'$  sphérique à support sur des sphères concentriques de rayons  $0 < R_1 < \dots < R_N$ . Nous définissons cet Hamiltonien comme étant une famille particulière à  $N$  paramètres d'extensions auto-adjointes de l'opérateur fermé, symétrique et non négatif

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\{R\}} &= -\Delta \\ \mathcal{D}(\tilde{H}_{\{R\}}) &= \{f \in H^{2,2}(R^3) / f(\overline{\partial K(0, R_j)}) = f'(\overline{\partial K(0, R_j)}) = 0\} \\ &\quad 1 \leq j \leq N \end{aligned} \quad (3.94)$$

A l'aide de la décomposition obtenue au (1.7), cet opérateur peut se réécrire sous la forme:

$$\tilde{H}_{\{R\}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \tilde{h}_{l,\{R\}} \tilde{U} \otimes 1 \quad (3.95)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{l,\{R\}} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad r > 0, \quad l \in N_0 \\ \mathcal{D}(\tilde{h}_{l,\{R\}}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty)); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\ &\quad \left. f(R_{j\pm}) = f'(R_{j\pm}) = 0; -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\} \\ &\quad l \in IN, \quad 1 \leq j \leq N \end{aligned} \quad (3.96)$$

L'adjoint  $\tilde{H}_{\{R\}}^*$  de  $\tilde{H}_{\{R\}}$  est défini de la façon suivante :

$$\tilde{H}_{\{R\}}^* = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \tilde{h}_{l,\{R\}}^* \tilde{U} \otimes 1 \quad (3.97)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{l,\{R\}}^* &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}; \quad r > 0, \quad l \in N_0 \\ \mathcal{D}(\tilde{h}_{l,\{R\}}^*) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}) \right. \\ &\quad \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\} \quad l \in IN \setminus \{R\} = \{R_1, \dots, R_N\} \end{aligned} \quad (3.98)$$

On peut montrer facilement que l'équation aux indices de défaut de  $h_{l,\{R\}}$ :

$$h_{l,\{R\}}^* \phi_l(k) = k^2 \phi_l(k); \quad \phi_l(k) \in \mathcal{D}(h_{l,\{R\}}^*), \quad Im k > 0 \quad (3.99)$$

admet les  $2N$  solutions linéairement indépendantes ci après

$$\psi_{l,j}^{(1)}(k, r) = \begin{cases} F_l^{(0)}(k, r) & r < R_j \\ 0 & r > R_j \end{cases} \quad (3.100)$$

$$\psi_{l,j}^{(2)}(k, r) = \begin{cases} 0 & r < R_j \\ G_l^{(0)}(k, r) & r > R_j \end{cases} \quad (3.101)$$

où  $F_l^{(0)}(k, r)$  et  $G_l^{(0)}(k, r)$  sont définies par (1.15) et (1.16). Ainsi  $\tilde{h}_{l, \{R\}}$  a pour indices de défaut  $(2N, 2N)$  et par conséquent toutes les extensions auto-adjointes de  $\tilde{h}_{l, \{R\}}$  sont données par une famille à  $4N^2$  paramètres d'opérateurs auto-adjoints. Nous nous intéressons ici à des conditions frontières séparées sur chaque sphère et nous introduisons la famille suivante à  $N$  paramètres d'extensions auto-adjointes de  $\tilde{H}_{\{R\}}$

$$\tilde{H}_{\{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} \tilde{h}_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}} \tilde{U} \otimes 1 \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}; \quad r > 0, \quad l \in \mathbb{N} \quad r \neq R_j \\ \mathcal{D}(h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}) \quad f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0 \right. \\ &\quad f(R_{j+}) = f(R_{j-}) \equiv f(R_j) \\ &\quad \left. \left( 1 + \frac{\tilde{\alpha}_{jl}}{2} \right) f'(R_+) - \left( 1 - \frac{\tilde{\alpha}_{jl}}{2} \right) f'(R_-) = 0 \right. \\ &\quad \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\} \\ &\quad l \in \mathbb{N}; 1 \leq j \leq N; \{\tilde{\alpha}_l\} = \{\tilde{\alpha}_{1l}, \dots, \tilde{\alpha}_{Nl}\}; \tilde{\alpha}_{jl} \in \mathbb{R} \quad (3.103) \end{aligned}$$

Le cas  $\tilde{\alpha}_{jl} = 0$  donne l'opérateur énergie cinétique. Par définition,  $H_{\tilde{\alpha}_l, \{R\}}$  décrit une interaction  $\delta'$ -sphérique à support sur  $N$  sphères concentriques.

### Théorème

Si  $\tilde{\alpha}_{jl} \neq 0, j = 1, \dots, N$ , le résolvant de  $h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}}$  est donné par

$$\begin{aligned} (h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}} - k^2)^{-1} &= (h_{l,0} - k^2)^{-1} + \sum_{j, j'=1}^N \Theta_{jj'}(k) (\tilde{\phi}_{l, j'}(-\bar{k}), \cdot) \tilde{\phi}_{l, j}(k) \\ &\quad k^2 \in \rho(h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}}), \quad \text{Im} k > 0, \quad \tilde{\alpha}_{jl} \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq N \end{aligned} \quad (3.104)$$

où

$$[\Theta(k)]_{jj'}^{-1} = \begin{cases} \tilde{\alpha}_l^{-1} - \frac{1}{2} g'_{l,k}(R_j, R_j) & j = j' \\ -\frac{1}{2} \phi'_{l,j}(k, R_{j'}) & j \neq j' \end{cases} \quad (3.105)$$

où  $\phi_{l,j}$  et  $\tilde{\phi}_{l,j}$  sont respectivement définies par (1.46) et (2.25).

Démonstration Considérons  $g \in L^2((0, \infty))$  et définissons

$$\begin{aligned}\chi_l(k, r) &= ((h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}} - k^2)^{-1}g)(r) \\ &= \int_0^\infty dr' g_{l,k}(r, r')g(r') + \sum_{j,j' \leq 1}^N \Theta_{jj'}(k)\phi_{l,j}(k, r) \int_0^\infty \phi'_{l,j'}(k, r')g(r')dr'\end{aligned}\quad (3.106)$$

où  $k$  est choisie de sorte que  $\det[\Theta(k)] \neq 0$ . Alors  $\chi_l(k, r)$  appartient évidemment à  $AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\})$  et on peut montrer que

$$\left(1 + \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right)\chi'_l(k, R_{j+}) - \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}_l}{2}\right)\chi'_l(k, R_{j-}) = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (3.107)$$

donc  $\chi_l \in \mathcal{D}(h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}})$  et

$$\begin{aligned}((h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}} - k^2)\chi_l)(k, r) &= -\chi''_l(k, r) + l(l+1)r^{-2}\chi_l(k, r) - k^2\chi_l(k, r) \\ &= g(r)\end{aligned}\quad (3.108)$$

d'où (3.104)

Remarque : La définition de  $h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}}$  peut être étendue au cas où certains  $\tilde{\alpha}_{jl}$  sont nuls. Par exemple, si  $\tilde{\alpha}_{j_0 l} = 0$ , on supprime la  $j_0^{eme}$  ligne et  $j_0^{eme}$  colonne de la matrice  $\Theta(k)$

## 3.6 Propriétés spectrales

Les propriétés spectrales de  $h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}}$  sont contenues dans le théorème ci-après :

### 3.6.1 Théorème

Si  $\tilde{\alpha}_{jl} \neq 0, j = 1, \dots, N$  alors  $h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}}$  possède au plus  $2N$  valeurs propres négatives comptant les multiplicités. Le reste du spectre est purement absolument continu et couvre la partie non négative de l'axe réel.

$$\begin{aligned}\sigma_{ess}(h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}}) &= \sigma_{ac}(h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}}) = (0, \infty) \\ \sigma_{sc}(h_{l, \{\tilde{\alpha}_l\}, \{R\}}) &= \emptyset\end{aligned}\quad (3.109)$$

Démonstration : Comme  $\tilde{h}_{l,\{R\}} \geq 0$  et  $def \tilde{h}_l = (2N, 2N)$ ,  $h_{l,\{\tilde{\alpha}_l\},\{R\}}$  admet au plus  $2N$  valeurs propres négatives en comptant les multiplicités ([22] pge 246). Les relations(3.109) découlent du théorème de Weyl [21] et par exemple de [10, lemme 2.4].

### 3.7 Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\{\tilde{\alpha}_l\},\{R\}}; h_{l,0})$

Pour  $k \geq 0$ , on considère la fonction

$$\psi_{l,\{\tilde{\alpha}_l\},\{R\}}(k, r) = F_l^{(0)}(k, r) + \sum_{j,j'=1}^N \Theta_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) \phi_{l,j}(k, r) \quad (3.110)$$

où  $F_l^{(0)}(k, r)$  et  $\Theta_{jj'}(k)$  sont respectivement définis par (3.15) et (3.105).

On montre comme au (1.21) que  $\psi_{l,\{\tilde{\alpha}_l\},\{R\}}(k, r)$  constituent une famille de fonctions d'onde de  $h_{l,\{\tilde{\alpha}_l\},\{R\}}$

Le déphasage de  $h_{l,\{\tilde{\alpha}_l\},\{R\}}$  s'obtient à partir de l'expression asymptotique de  $\psi_{l,\{\tilde{\alpha}_l\},\{R\}}(k, r)$  quand  $r \rightarrow \infty$ . En effet [14]

$$\begin{aligned} \psi_{l,\{\tilde{\alpha}_l\},\{R\}}(k, r) & \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{k > 0} A_l(k) \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) + \sum_{j,j'=1}^N \Theta_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) \times \\ & \times F_l^{(0)}(k, R_j) e^{-i(kr - l(\frac{\pi}{2}))} \\ & = \{A_l(k) - iB_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \Theta_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) \times \\ & \times F_l^{(0)'}(k, R_j)\} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) + \\ & B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \Theta_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)'}(k, R_j) \cos(kr - \frac{l\pi}{2}) \\ & = [\hat{T}_{1,l}^2(k) + \hat{T}_{2,l}^2(k)]^{\frac{1}{2}} \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_{l,\{\tilde{\alpha}_l\},\{R\}}(k)) + 0(1) \end{aligned} \quad (3.111)$$

Cette expression nous permet d'obtenir le déphasage sous la forme

$$\delta_{l,\{\tilde{\alpha}_l\},\{R\}}(k) = -\arctan \frac{\hat{T}_{2,l}(k)}{\hat{T}_{1,l}(k)}$$

$$= -\arctan \frac{B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \Theta_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)}(k, R_j)}{A_l(k) - i B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \Theta_{jj'}(k) F_l^{(0)}(k, R_{j'}) F_l^{(0)}(k, R_j)} \quad (3.112)$$

où  $A_l(k)$  et  $B_l(k)$  sont définis par (3.64) et (3.65).

Le développement de portée effective correspondant à  $h_{l,\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}$  est donné par :

$$[(2l+1)!!]^2 k^{2l+1} \cot \delta_{l,\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}(k) = -a_{l,\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}^{-1} + \frac{1}{2} r_{l,\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}} k^2 + o(k^4) \quad (3.113)$$

où dans ce cas un calcul direct donne

$$a_{l,\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}} = - \sum_{j,j'=1}^N \theta_{jj'}(0) (l+1) R_{j'}^l, R_j^{l+1} \quad (3.114)$$

L'amplitude de diffusion  $f_{\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}(k, \omega, \omega')$  associée à  $H_{\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}$  est définie par

$$\begin{aligned} f_{\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}(k, \omega, \omega') &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{e^{2i\delta_{l,\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}} - 1}{2ik} \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}(k) \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \quad k \geq 0, \omega, \omega' \in S^2 \end{aligned} \quad (3.115)$$

où l'amplitude de diffusion  $f_{l,\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}(k)$  correspondant à l'onde partielle est donnée par :

$$f_{l,\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}(k) = -B_l^2(k) \sum_{j,j'=1}^N \Theta_{jj'}(k) F_l^{(0)'}(k, R_{j'}) F_l^{(0)}(k, R_j) \quad (3.116)$$

L'opérateur de diffusion  $S_{\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}(k)$ , associé à  $H_{\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}$  est défini dans  $L^2(S^2)$  par :

$$S_{\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}(k) = 1 + 2ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\{\bar{\alpha}_l\},\{R\}}(k) (Y_l^m(\cdot), \cdot) Y_l^m(\omega) \quad (3.117)$$

# Chapitre 4

## LES INTERACTIONS $\delta'$ -SPHERIQUE DE 2<sup>eme</sup> ESPECE

### 4.1 Interactions $\delta'$ -sphérique de 2<sup>eme</sup> espèce à support sur une sphère

#### 4.1.1 Définition du modèle

Dans ce chapitre nous étudions un autre type d'interaction  $\delta'$ -sphérique qui s'obtient en interchangeant dans (1.16) les rôles de  $f$  et  $f'$ .

On obtient donc une famille à un paramètre d'extensions auto-adjointes de  $\tilde{h}_l$ , définie par

$$\begin{aligned} h_{l, \tilde{\beta}_l} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \quad r > 0 \\ \mathcal{D}(h_{l, \tilde{\beta}_l}) &= \left\{ f \in \mathcal{D}(\tilde{h}_l^*) / f'(R_+) = f'(R_-) \equiv f'(R); \right. \\ &\quad \left( 1 + \frac{\tilde{\beta}_l}{2} \right) f(R_+) - \left( 1 - \frac{\tilde{\beta}_l}{2} \right) f(R_-) = 0 \\ &\quad \left. ; f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right\} l \in \mathbb{N}; \quad \tilde{\beta}_l \in \mathbb{R} \quad (4.1) \end{aligned}$$

Par définition, l'opérateur

$$H_{\tilde{\beta}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l, \tilde{\beta}_l} \tilde{U} \otimes 1 \quad (4.2)$$

représente l'Hamiltonien quantique décrivant une interaction  $\delta'$ -sphérique de 2<sup>eme</sup> espèce.

Le cas  $\tilde{\beta}_l = 0$  conduit à l'Hamiltonien libre  $h_{l,o}$  correspondant à l'onde partielle  $l$ .

## 4.1.2 Equation résolvante

### Théorème 4.1

1. Le résolvant de  $h_{l, \tilde{\beta}_l}$  est donné par

$$\begin{aligned} (h_{l, \tilde{\beta}_l} - k^2)^{-1} &= (h_{l,o} - k^2)^{-1} + \tilde{\Theta}_l(k) \left( \phi_l(-\bar{k}), \cdot \right) \tilde{\phi}_l(k) \\ & \quad k^2 \in \rho(h_{l, \tilde{\beta}_l}), \operatorname{Im} k > 0, l \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.3)$$

où  $\phi_l(k)$ ,  $\tilde{\phi}_l(k)$  sont définies respectivement par (3.21) et (3.22) et

$$\tilde{\Theta}_l(k) = -2\tilde{\beta}_l [2 + \tilde{\beta}_l g'_{l,k}(R, R)] \quad (4.4)$$

$g'_{l,k}(R, R)$  étant défini par (3.23),

2. Le résolvant de  $H_{\tilde{\beta}}$  est donné par

$$\begin{aligned} (H_{\tilde{\beta}} - k^2)^{-1} &= (H_o - k^2)^{-1} + \bigoplus_{l=0}^{\infty} \bigoplus_{m=-l}^l \tilde{\Theta}_l(k) | \cdot |^{-1} \tilde{\phi}_l(k) Y_l^m > \\ & \quad < | \cdot |^{-1} \phi_l(-\bar{k}) Y_l^m | \\ & \quad k^2 \in \rho(H_{\tilde{\beta}}), \operatorname{Im} k > 0, \tilde{\beta}_l \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Démonstration Elle se fait exactement comme celle du théorème 3.1. On obtient dans ce cas

$$\tilde{\lambda}(k) = \frac{-2\tilde{\beta}_l}{2 + \tilde{\beta}_l g'_{l,k}(R, R)} \begin{bmatrix} G_l^{(o)}(k, R) G_l^{(o)'}(k, R) & F_l^{(o)}(k, R) G_l^{(o)'}(k, R) \\ G_l^{(o)}(k, R) F_l^{(o)'}(k, R) & F_l^{(o)}(k, R) F_l^{(o)'}(k, R) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Remarque 4.1 On note ici aussi que  $\det[\tilde{\lambda}(k)] \equiv 0$ . Ce qui veut dire que  $\tilde{h}_l$  n'est pas une partie maximale commune à  $h_{l,o}$  et  $h_{l,\tilde{\beta}_l}$ .

Théorème 4.2 Le domaine  $\mathcal{D}(h_{l,\tilde{\beta}_l})$ ,  $\tilde{\beta}_l \in IR$ ,  $R > 0$ , est constitué des éléments de la forme

$$\psi_l = \phi_o + \tilde{\Theta}_l(k) < \phi_l(-\bar{k}), (h_{l,o} - k^2)\phi_o > \tilde{\phi}_l(k) \quad \phi_o \in \mathcal{D}(h_{l,o}) \quad (4.7)$$

Cette décomposition est unique et on a la relation

$$(h_{l,\tilde{\beta}_l} - k^2)\psi_l = (h_{l,o} - k^2)\phi_o \quad (4.8)$$

En plus, si  $\psi_l \in \mathcal{D}(h_{l,\tilde{\beta}_l})$  et  $\psi_l \equiv 0$  dans un ouvert  $U$  de  $(0, \infty)$ , alors  $h_{l,\tilde{\beta}_l} \equiv 0$  dans  $U$ .

Démonstration Suivre exactement celle du théorème 3.2

### 4.1.3 Propriétés spectrales

La structure du spectre ponctuel de  $h_{l,\tilde{\beta}_l}$  est déterminée par la position des états liés de  $h_{l,\tilde{\beta}_l}$  qui sont obtenus en cherchant les solutions  $\psi_l \in L^2((0, \infty))$  de l'équation

$$h_{l,\tilde{\beta}_l}\psi_l = E\psi_l, \quad E < 0, \quad \psi_l \in \mathcal{D}(h_{l,\tilde{\beta}_l}). \quad (4.9)$$

Nous écrivons la solution de (4.9) sous la forme

$$\psi_l(E, r) = \begin{cases} \tilde{C}_1 A_l(k) r^{1/2} I_{l+1/2}(\sqrt{-E}r) & 0 < r < R \\ \tilde{C}_2 B_l(k) r^{1/2} K_{l+1/2}(\sqrt{-E}r) & r > R \end{cases} \quad (4.10)$$

où les coefficients de normalisation  $A_l(k)$  et  $B_l(k)$  sont donnés respectivement par (3.40) et (3.41).

Comme  $\psi_l(E, r) \in \mathcal{D}(h_{l,\tilde{\beta}_l})$ , alors on a

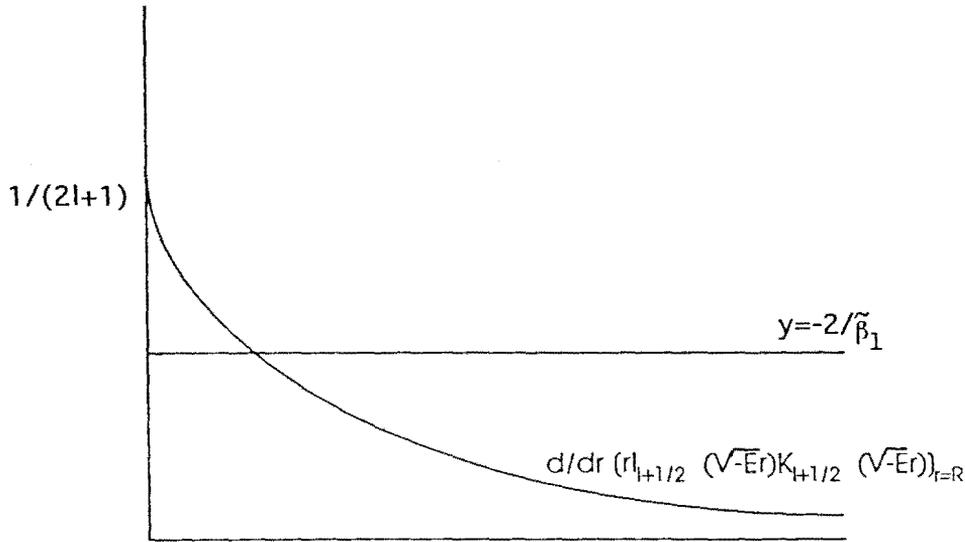
$$\psi_l'(E, R_-) = \psi_l'(E, R_+) \quad (4.11)$$

$$\left(1 + \frac{\tilde{\beta}_l}{2}\right) \psi_l(E, R_+) - \left(1 - \frac{\tilde{\beta}_l}{2}\right) \psi_l(E, R_-) = 0 \quad (4.12)$$

La vérification de ces conditions frontières nous donne l'équation pour les états liés de  $h_{l,\tilde{\beta}_l}$ :

$$2 + \tilde{\beta}_l \frac{d}{dr} \left[ r I_{l+1/2}(\sqrt{-E}r) K_{l+1/2}(\sqrt{-E}r) \right]_{r=R}^- = 0. \quad (4.13)$$

On résoudra graphiquement cette équation



Dans chaque onde partielle  $l \geq 0$  il y a exactement un état lié si et seulement si

$$0 < -\frac{2}{\beta_l} < \frac{1}{2l+1}$$

Théorème 4.3 Soit  $\tilde{\beta}_l \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N}$ . Le spectre essentiel  $\sigma_{ess}(h_{l,\tilde{\beta}_l})$  est purement absolument continu et couvre la partie non négative de l'axe réel:

$$\sigma_{ess}(h_{l,\tilde{\beta}_l}) = \sigma_{ac}(h_{l,\tilde{\beta}_l}) = [0, \infty). \quad (4.14)$$

Le spectre singulièrement continu  $\sigma_{sc}(h_{l,\tilde{\beta}_l})$  est vide, et pour tout  $\tilde{\beta}_l \in \mathbb{R}$ ,  $h_{l,\tilde{\beta}_l}$  n'admet pas de valeurs propres non négatives.

Si  $\tilde{\beta}_l < -2(2l+1)$ , alors  $\sigma_p(h_{l,\tilde{\beta}_l})$  contient exactement un point.

Si  $\tilde{\beta}_l \geq -2(2l+1)$ , alors  $\sigma_p(h_{l,\tilde{\beta}_l}) = \emptyset$ .

Démonstration La structure de  $\sigma_p(h_{l,\tilde{\beta}_l})$  est déterminée par (4.13). Le reste du théorème se démontre de la même façon que le théorème 3.3.

Remarque Les résonances de  $h_{l,\tilde{\beta}_l}$  peuvent être obtenues à partir de l'équation

$$2 + \tilde{\beta}_l g'_{l,k}(R, R) = 0 \quad \text{Im}k \leq 0 \quad (4.15)$$

On obtient pour  $l = 0$  les solutions

$$k = \frac{n\pi}{2R} - \frac{i}{2R} L n \frac{2(-1)^{n+1}}{\tilde{\beta}_l} \quad \text{avec} \quad L n \frac{2(-1)^{n+1}}{\tilde{\beta}_l} > 0$$

Tout le reste des résonances s'obtient comme à la section 3.2.3.

#### 4.1.4 Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\tilde{\beta}_l}, h_{l,o})$

Pour  $k \geq 0$ , considérons la fonction

$$\psi_{l,\tilde{\beta}_l}(k, r) = F_l^{(o)}(k, r) + \tilde{\Theta}_l(k) F_l^{(o)}(k, R) \tilde{\phi}_l(k, r) \quad (4.16)$$

où  $\tilde{\phi}_l(k, r)$  est définie par (3.22) et  $\tilde{\Theta}_l(k)$  par (4.4).

On vérifie comme dans la section 3.4 que les  $\psi_{l,\tilde{\beta}_l}(k, r)$  constituent bien un ensemble de fonctions d'onde de  $h_{l,\tilde{\beta}_l}$ .

Le déphasage de  $h_{l,\tilde{\beta}_l}$  s'obtient en déterminant le comportement asymptotique de  $\psi_{l,\tilde{\beta}_l}(k, r)$  quand  $r \rightarrow \infty$ .

En suivant exactement la section 3.4 on obtient:

$$\delta_{l,\tilde{\beta}_l}(k) = -\arctan \frac{\tilde{\Theta}_l(k) B_l(k) F_l^{(o)'}(k, R) F_l^{(o)}(k, R)}{A_l(k) - i B_l(k) \tilde{\Theta}_l(k) F_l^{(o)'}(k, R) F_l^{(o)}(k, R)} \quad (4.17)$$

où  $A_l(k)$  et  $B_l(k)$  sont définis respectivement par (3.64) et (3.65).

Les éléments de la matrice de diffusion sont donnés par

$$\begin{aligned} S_{l,\tilde{\beta}_l}(k) &= \exp[2i\delta_{l,\tilde{\beta}_l}(k)] \\ &= 1 - 2i B_l^2(k) \tilde{\Theta}_l(k) F_l^{(o)'}(k, R) F_l^{(o)}(k, R) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Le développement de portée effective correspondant à  $h_{l,\tilde{\beta}_l}$  est donné par

$$[(2l+1)!!]^2 k^{2l+1} \cot \delta_{l,\tilde{\beta}_l}(k) = -a_{l,\tilde{\beta}_l}^{-1} + \frac{1}{2} r_{l,\tilde{\beta}_l} k^2 + o(k^4) \quad (4.19)$$

où les coefficients  $a_{l,\tilde{\beta}_l}$  et  $r_{l,\tilde{\beta}_l}$  sont respectivement la longueur de diffusion et la portée effective.

Un calcul direct montre que

$$a_{l,\tilde{\beta}_l} = \tilde{\Theta}_l(0)(l+1)R^{2l+1} \quad (4.20)$$

L'amplitude de diffusion  $f_{\tilde{\beta}}(k, \omega, \omega')$  associée à  $H_{\tilde{\beta}}$  est définie par

$$\begin{aligned} f_{\tilde{\beta}}(k, \omega, \omega') &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{e^{2i\delta_{l,\tilde{\beta}_l}(k)} - 1}{2ik} \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\tilde{\beta}_l}(k) \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\ &k \geq 0; \omega, \omega' \in S^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

où l'amplitude de diffusion  $f_{l,\tilde{\beta}_l}(k)$  correspondant à l'onde partielle  $l$  est donnée par:

$$f_{l,\tilde{\beta}_l}(k) = -B_l^2(k) \tilde{\Theta}_l(k) F_l^{(o)'}(k, R) F_l^{(o)}(k, R) \quad (4.22)$$

L'opérateur de diffusion  $S_{\tilde{\beta}}$  associé à  $H_{\tilde{\beta}}$  est défini dans  $L^2(S^2)$  par

$$S_{\tilde{\beta}}(k) = 1 + 2ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\tilde{\beta}_l}(k) (Y_l^m, \cdot) Y_l^m \quad (4.23)$$

## 4.2 Particule chargée dans une interaction $\delta^l$ -sphérique de $2^{eme}$ espèce

### 4.2.1 Définition du modèle

Dans cette section nous étudions le modèle obtenu en interchangeant dans (3.82) les rôles de  $f$  et  $f'$ .

On obtient alors une famille à un paramètre,  $h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}$ , d'extensions auto-adjointes de  $\bar{h}_{l,\gamma}$  définie par

$$\begin{aligned} h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{\gamma}{r} \quad r > 0 \\ \mathcal{D}(h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}) &= \{f \in \mathcal{D}(\bar{h}_{l,\gamma}^*) / f'(R_+) = f'(R_-) \equiv f(R)\} \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{\tilde{\beta}_l}{2}\right) f(R_+) - \left(1 - \frac{\tilde{\beta}_l}{2}\right) f(R_-) = 0 ; f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0;$$

$$\left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\} \quad l \in \mathbb{N}, \tilde{\beta}_l \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$$
(4.24)

Le cas  $\tilde{\beta}_l = 0$  conduit à l'Hamiltonien de Coulomb  $h_{l,\gamma}$  correspondant à l'onde partielle  $l$ .

## 4.2.2 Equation résolvente

### Théorème 4.4

Le résolvant de  $h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}$  est donné par

$$(h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l} - k^2)^{-1} = (h_{l,\gamma} - k^2)^{-1} - 2\tilde{\beta}_l [2 + \tilde{\beta}_l g'_{l,\gamma,k}(R, R)]^{-1} (\phi_{l,\gamma}(-\bar{k}), \cdot) \tilde{\phi}_{l,\gamma}(k)$$

$$k^2 \in \rho(h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}), \operatorname{Im} k > 0, l \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{R}$$
(4.25)

où  $\phi_{l,\gamma}(k, r)$ ,  $\tilde{\phi}_{l,\gamma}(k, r)$  sont définies dans la section 3.5.2

$$g'_{l,\gamma,k}(R, R) = F_{l,\gamma}^{(o)'}(k, R) G_{l,\gamma}^{(o)}(k, R) + F_{l,\gamma}^{(o)}(k, R) G_{l,\gamma}^{(o)'}(k, R)$$
(4.26)

Remarque 4.3 Les états liés (resp. les résonances) de  $h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}$  peuvent être définis comme étant les pôles du noyau du résolvant de  $h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}$  (c'est-à-dire les solutions de l'équation  $2 + \tilde{\beta}_l g'_{l,\gamma,k}(R, R) = 0$  situées dans  $\operatorname{Im} k > 0$  (resp.  $\operatorname{Im} k \leq 0$ )).

## 4.2.3 Propriétés spectrales

En suivant la section 3.2.2 on obtient pour la détermination des états liés, l'équation

$$2 + \tilde{\beta}_l g'_{l,\gamma,\sqrt{-E}}(R, R) = 0 \quad ; \quad E < 0$$
(4.27)

Théorème 4.5 Soit  $\tilde{\beta}_l \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\gamma \in \mathbb{R}$ , on a

$$\sigma_{ess}(h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}) = \sigma_{ac}(h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}) = [0, \infty). \quad \sigma_{sc}(h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}) = \emptyset$$
(4.28)

Le spectre ponctuel  $\sigma_p(h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l})$  est déterminé par l'équation (4.27).

#### 4.2.4 Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}, h_{l,o})$

Pour  $k \geq 0$ , considérons la fonction

$$\mathcal{F}_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}(k, r) = F_{l,\gamma}^{(o)}(k, r) - 2\tilde{\beta}_l[2 + \tilde{\beta}_l g'_{l,\gamma,k}(R, R)]^{-1} F_{l,\gamma}^{(o)}(k, R) \tilde{\phi}_{l,\gamma}(k, r) \quad (4.29)$$

On montre que les  $\mathcal{F}_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}(k, r)$  constituent une famille de fonctions d'onde de  $h_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}$ . et en considérant son comportement asymptotique on obtient le déphasage [14]:

$$\delta_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}(k) = -\arctan \frac{\dot{\mu}_{l,\gamma}(k) B_{l,\gamma}(k) F_{l,\gamma}^{(o)'}(k, R) F_{l,\gamma}^{(o)}(k, R)}{A_{l,\gamma}(k) - ik B_{l,\gamma}(k) \dot{\mu}_{l,\gamma}(k) F_{l,\gamma}^{(o)'}(k, R) F_{l,\gamma}^{(o)}(k, R)} \quad (4.30)$$

où

$$\dot{\mu}_{l,\gamma} = -\frac{2\tilde{\beta}_l}{2 + \tilde{\beta}_l g'_{l,\gamma,k}(R, R)} \quad (4.31)$$

et  $A_{l,\gamma}(k)$  et  $B_{l,\gamma}(k)$  sont définis respectivement par (3.87) et (3.88).

Les éléments de la matrice de diffusion sont donnés par

$$\begin{aligned} S_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}(k) &= \exp[2i\delta_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}(k)] \\ &= 1 - 2i B_{l,\gamma}^2(k) \dot{\mu}_{l,\gamma}(k) F_{l,\gamma}^{(o)'}(k, R) F_{l,\gamma}^{(o)}(k, R) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Le développement de portée effective correspondant à  $h_{l,\tilde{\beta}_l}$  est donné par

$$[(2l+1)!!]^2 k^{2l+1} \cot \delta_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}(k) = -a_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}^{-1} + \frac{1}{2} r_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l} k^2 + o(k^4) \quad (4.33)$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} a_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}^{-1} &= \frac{1 + \tilde{\beta}_l \frac{d}{dr} [r I_\nu(y) K_\nu(y)]_{r=R}}{\tilde{\beta}_l \gamma^{-\nu} \Gamma(2l+2)^2 \frac{d}{dr} [r^{1/2} I_\nu(y)]_{r=R} [r^{1/2} I_\nu(y)]_{r=R}} & \gamma \geq 0 \\ a_{l,\gamma,\tilde{\beta}_l}^{-1} &= \frac{2 - i\pi \tilde{\beta}_l \frac{d}{dr} [r J_\nu(z) H_\nu^{(2)}(z)]_{r=R}}{2\tilde{\beta}_l |\gamma|^{-\nu} \Gamma(2l+2)^2 \frac{d}{dr} [r^{1/2} J_\nu(z)]_{r=R} [r^{1/2} J_\nu(z)]_{r=R}} & \gamma \leq 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

où on rappelle que  $\nu = 2l+1$ ,  $y = (4\gamma r)^{1/2}$  et  $z = (4|\gamma|r)^{1/2}$ .

Dans le cas où  $\gamma = 0$ , on obtient le résultat suivant

$$a_{l,\tilde{\beta}_l}^{-1} = \frac{2 + \frac{\tilde{\beta}_l}{2l+1}}{2\tilde{\beta}_l(l+1)R^{2l+1}} \quad (4.35)$$

## 4.3 Interactions $\delta'$ -sphérique de $2^{eme}$ espèce à support sur $N$ sphères concentriques: conditions frontières séparées

### 4.3.1 Définition de l'Hamiltonien

Comme dans la section précédente, ici aussi on définit ce modèle en interchangeant dans (3.103) les rôles de  $f$  et  $f'$ . Ceci conduit à la famille à  $N$  paramètres d'extensions auto-adjointes  $h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}$  de  $\tilde{h}_{l,\{R\}}$  suivante:

$$\begin{aligned}
 h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}} &= -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \quad r > 0 \\
 \mathcal{D}(h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}) &= \left\{ f \in L^2((0, \infty)) / f, f' \in AC_{loc}((0, \infty) \setminus \{R\}); f(0_+) = 0 \text{ si } l = 0; \right. \\
 &\quad f'(R_{j+}) = f'(R_{j-}) \equiv f(R_j); \\
 &\quad \left( 1 + \frac{\tilde{\beta}_{jl}}{2} \right) f(R_{j+}) - \left( 1 - \frac{\tilde{\beta}_{jl}}{2} \right) f(R_{j-}) = 0 \\
 &\quad \left. -f'' + l(l+1)r^{-2}f \in L^2((0, \infty)) \right\} \\
 &\quad l \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq N, \{R\} = \{R_1, \dots, R_N\}; \\
 &\quad \{\tilde{\beta}_l\} = \{\tilde{\beta}_{1l}, \dots, \tilde{\beta}_{Nl}\}; \tilde{\beta}_{jl} \in \mathbb{R}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Le cas  $\tilde{\beta}_{jl} = 0, 1 \leq j \leq N$ , donne l'Hamiltonien libre  $h_{l,o}$  correspondant à l'onde partielle  $l$ .

L'opérateur  $H_{\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}$ , défini dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  par

$$H_{\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \tilde{U}^{-1} h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}} \tilde{U} \otimes 1 \tag{4.37}$$

décrit, par définition, l'interaction  $\delta'$ -sphérique de  $2^{eme}$  espèce à support sur  $N$  sphères concentriques correspondant aux conditions frontières séparées.

#### Théorème 4.6

Si  $\tilde{\beta}_{jl} \neq 0, j = 1, \dots, N$ , alors le résolvant de  $h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}$  est donné par

$$\begin{aligned}
 (h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}} - k^2)^{-1} &= (h_{l,o} - k^2)^{-1} + \sum_{jj'=1}^N \tilde{\Theta}_{jj'}(k) \left( \phi_{l,j'}(-\bar{k}), \cdot \right) \tilde{\phi}_{l,j}(k) \\
 &\quad k^2 \in \rho(h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}), \text{Im}k > 0 \\
 &\quad \tilde{\beta}_{jl} \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq N
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

où

$$\tilde{\Theta}_{jj'}(k) = \begin{cases} -\tilde{\beta}_{jl}^{-1} - \frac{1}{2}g'_{l,k}(R_j, R_j); & j = j' \\ -\frac{1}{2}\tilde{\phi}_{l,j}(k, R_{j'}) & , \quad j \neq j' \end{cases} \quad (4.39)$$

avec  $\phi_{l,j}$  et  $\tilde{\phi}_{l,j}$  définies respectivement par (1.46) et (2.25).

Démonstration Suivre exactement la preuve du théorème 3.4

Remarque 4.4 Dans ce cas aussi la définition de  $h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}$  peut être étendue au cas où certains  $\tilde{\beta}_{jl}$  sont nuls. Par exemple si  $\tilde{\beta}_{j_0l} = 0$  on supprime la  $j_0^{eme}$  ligne et la  $j_0^{eme}$  colonne de la matrice  $\tilde{\Theta}_l(k)$ .

### 4.3.2 propriétés spectrales

Soit  $\tilde{\beta}_{jl} \neq 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , alors  $h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}$  possède au plus  $2N$  valeurs propres négatives en comptant les multiplicités.

le reste du spectre est purement absolument continu et couvre la partie non négative de l'axe réel:

$$\begin{aligned} \sigma_{ess}(h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}) &= \sigma_{ac}(h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}) = [0, \infty) \\ \sigma_{sc}(h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}) &= \phi \quad , \quad \tilde{\beta}_{jl} \in IR, j = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.40)$$

Démonstration Suivre la preuve du théorème 3.5

### 4.3.3 Théorie de la diffusion pour la paire $(h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}; h_{l,o})$

Pour  $k \geq 0$ , on considère la fonction

$$\mathcal{F}_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k, r) = F_l^{(o)}(k, r) + \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\Theta}_{jj'}(k) F_l^{(o)}(k, R_{j'}) \tilde{\phi}_{l,j}(k, r) \quad (4.41)$$

où  $F_l^{(o)}(k, r)$ ,  $\tilde{\phi}_{l,j}(k, r)$  et  $\tilde{\Theta}_{jj'}(k)$  sont respectivement définis par (1.15), (3.22) et (4.39). On montre que les  $\mathcal{F}_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k, r)$  sont des fonctions d'onde de  $h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}$ .

Le déphasage  $\delta_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k)$  de  $h_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}$  s'obtient de la même façon qu'au (3.112). On a:

$$\delta_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k) = -\arctan \frac{\sum_{j,j'=1}^N \tilde{\Theta}_{jj'}(k) B_l(k) F_l^{(o)'}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'})}{A_l(k) - i B_l(k) \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\Theta}_{jj'}(k) F_l^{(o)'}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'})} \quad (4.42)$$

où  $A_l(k)$  et  $B_l(k)$  sont respectivement définis par (3.64) et (3.65).  
Le développement de portée effective correspondant à  $\delta_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}$  est:

$$[(2l+1)!!]^2 k^{2l+1} \cot \delta_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k) = -a_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}^{-1} + \frac{1}{2} r_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}} k^2 + o(k^4) \quad (4.43)$$

où un calcul direct donne

$$a_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}} = - \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\Theta}_{jj'}(0) (l+1) R_j^l R_{j'}^{l+1} \quad (4.44)$$

L'amplitude de diffusion  $f_{\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k, \omega, \omega')$  associée à  $H_{\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}$  est définie par

$$\begin{aligned} f_{\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k, \omega, \omega') &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{e^{2i\delta_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k)} - 1}{2ik} \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k) \overline{Y_l^m(\omega')} Y_l^m(\omega) \\ &k \geq 0; \omega, \omega' \in S^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

où l'amplitude de diffusion  $f_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k)$  correspondant à l'onde partielle  $l$  est donnée par:

$$f_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k) = -B_l^2(k) \sum_{j,j'=1}^N \tilde{\Theta}_{jj'}(k) F_l^{(o)'}(k, R_j) F_l^{(o)}(k, R_{j'}) \quad (4.46)$$

L'opérateur de diffusion  $S_{\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}$  associé à  $H_{\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}$  est défini dans  $L^2(S^2)$  par

$$S_{\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}} = 1 + 2ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,\{\tilde{\beta}_l\},\{R\}}(k) (Y_l^m, \cdot) Y_l^m(\omega) \quad (4.47)$$

# Chapitre 5

## GENERALISATIONS ET PROBLEMES OUVERTS

Nous présentons dans ce chapitre quelques problèmes que nous jugeons très intéressants et qui pourraient faire l'objet d'études approfondies.

### 1. Interactions de type coulombien [14]

Les résultats obtenus dans les chapitres 1-4 peuvent être généralisés au cas des interactions  $\delta$  et  $\delta'$ -sphérique plus des interactions de type coulombien. Dans ce cas, l'Hamiltonien libre est remplacé par l'opérateur  $H$  défini dans  $L^2(\mathbb{R}^3)$  par

$$H = -\Delta + \frac{a^2 - 1/4}{|x|^2} + \frac{\gamma}{|x|}, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

### 2. Interactions $\delta'$ -ponctuelle

Dans [3, Lemme 2.3] on étudie la limite de l'Hamiltonien  $H_\alpha$  décrivant l'interaction  $\delta$ -sphérique lorsque le rayon de la sphère tend vers zéro et on a montré que si la constante de couplage  $\alpha$  est renormalisée d'une façon appropriée, alors  $H_\alpha$  converge vers l'Hamiltonien de l'interaction  $\delta$ -ponctuelle [10] lorsque  $R \rightarrow 0$  dans la topologie de la convergence forte des résolvants.

Il serait intéressant d'étudier cette limite pour l'Hamiltonien  $H_{\bar{\alpha}}$  de l'interaction  $\delta'$ -sphérique.

L'analyse menée dans [3] pour  $H_\alpha$  porte à croire que lorsque  $R \rightarrow 0$ ,  $H_{\bar{\alpha}}$  tend vers l'Hamiltonien de l'interaction  $\delta'$ -ponctuelle dans la topologie

forte des résolvants.

Le calcul de cette limite justifie l'intérêt d'une étude systématique de l'interaction  $\delta'$ -ponctuelle.

On note que cette interaction est différente de l'interaction étudiée dans [10] et "inadéquatement" appelée interaction  $\delta'$ -ponctuelle.

Dans [24] l'interaction ci dessus citée est appelée interaction  $\delta$ - ponctuelle de 2<sup>eme</sup> espèce.

3. Propriété de trace de  $(H_{\tilde{\alpha}} - k^2)^{-1} - (H_o - k^2)^{-1}$

En vue d'étudier la théorie de la diffusion de  $H_{\tilde{\alpha}}$  dépendant du temps, il est utile de vérifier le critère de Birman qui stipule que si la différence  $(H_{\tilde{\alpha}} - k^2)^{-1} - (H_o - k^2)^{-1}$  est un opérateur à trace, alors les opérateurs d'onde correspondant à  $H_{\tilde{\alpha}}$  existent et sont asymptotiquement complets.

Cette étude peut être effectuée suivant la méthode développée dans [3]. D'autre part, une étude de la théorie de la diffusion dépendant du temps correspondant à  $H_{\tilde{\alpha}}$  peut être réalisée suivant [25] en utilisant la théorie des formes symétriques fermées semi-bornées inférieurement.

4. Interactions  $\delta'$ -sphérique à support sur  $N$  sphères concentriques:conditions frontières non séparées

Suivant [7], il est possible de mener une étude systématique des interactions  $\delta'$ -sphérique de 1<sup>ere</sup> et 2<sup>eme</sup> espèces à support sur  $N$  sphères concentriques correspondant à des conditions frontières non séparées.

5. Cas relativiste

Dans [26] et [27], Dittrich et al ont étudié le cas d'une particule relativiste dans les interactions  $\delta$ -sphérique et  $\delta'$ -sphérique plus une interaction coulombienne. Nous avons continué cette étude par le cas  $\delta$ -sphérique à support sur  $N$  sphères concentriques. Il serait intéressant de voir le cas d'une interaction  $\delta'$ -sphérique.

# APPENDICES

## Appendice A : Extensions auto-adjointes d'opérateurs symétriques

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. Dans toute la suite les opérateurs qui seront considérés seront supposés à domaines denses dans  $\mathcal{H}$ .

### 1) Définitions

(1) Soient  $A_1$  et  $A$  deux opérateurs dans  $\mathcal{H}$ . On dit que  $A_1$  est une extension de  $A$ , on note  $A \subseteq A_1$ , si et seulement si  $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_1)$  et  $A_1\varphi = A\varphi$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ .

(2) Un opérateur  $A$  est dit fermable s'il admet une extension fermée. Toute opérateur fermable  $A$  admet une plus petite extension fermée appelée sa fermeture et notée  $\bar{A}$ .

(3) Soit  $\mathcal{D}(A^*)$  l'ensemble des  $\phi \in \mathcal{H}$  tels qu'il existe  $\eta \in \mathcal{H}$  avec

$$(A\psi, \phi) = (\psi, \eta) \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}(A)$$

Pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(A^*)$ , on peut définir  $A^*\phi = \eta$ .

$A^*$  est appelé l'adjoint de  $A$ . L'élément  $\eta$  est unique si  $\mathcal{D}(A)$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .

(4) Soit  $A$  un opérateur fermé dans  $\mathcal{H}$ . Un nombre complexe  $\lambda$  appartient à l'ensemble résolvant  $\rho(A)$ , si  $\lambda I - A$  est une bijection de  $\mathcal{D}(A)$  sur  $\mathcal{H}$ , et par conséquent ( par le théorème du graphe fermé ),  $(\lambda I - A)^{-1}$  est borné.

Si  $\lambda \in \rho(A)$ ,  $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$  est appelé le résolvant de  $A$ .

(5) L'opérateur  $A$  est dit symétrique si  $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ , pour tout  $\psi, \varphi \in \mathcal{D}(A)$ .

$A$  est dit auto-adjoint si  $A = A^*$ .

(6) Soit  $A$  un opérateur symétrique dans  $\mathcal{H}$  et considérons les espaces:

$$K_+ = \text{Ker}(i - A^*)$$

et

$$K_- = \text{Ker}(i + A^*)$$

Les nombres  $n_+ = \dim K_+$  et  $n_- = \dim K_-$  sont appelés indices de défaut de  $A$ . On écrit :  $\text{def } A = (n_+, n_-)$ .

(7) Une application antilinéaire  $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  [ $C(\alpha\varphi + \beta\psi) = \bar{\alpha}C(\varphi) + \bar{\beta}C(\psi)$ ] est appelée une conjugaison si elle préserve la norme et  $C^2 = I$ .

## II) Propriétés

Théorème A.1 Un opérateur symétrique fermé est auto-adjoint si et seulement si  $A^*$  est symétrique.

Théorème A.2 Soit  $A$  un opérateur symétrique de domaine  $\mathcal{D}(A)$ . Alors le domaine  $\mathcal{D}(A^*)$  de l'opérateur  $A^*$  peut s'écrire comme

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \oplus K_+ \oplus K_-$$

et si  $\tilde{A}$  est une extension symétrique quelconque de  $A$ , alors  $\mathcal{D}(\tilde{A}) \subset \mathcal{D}(A^*)$ . En plus  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{A}), \varphi = \varphi_0 + \psi_+ + V\psi_-$  où  $\varphi_0 \in \mathcal{H}(A), \psi_+ \in K_-$  et  $\psi_- \in K_+, V$  étant une isométrie de domaine contenu dans  $K_+$  et d'image contenu dans  $K_-$ .

Théorème A.3 Soit  $A$  un opérateur symétrique et fermé dans  $\mathcal{H}$ , tel que  $\text{def } A = (N, N), N \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $B$  et  $C$  deux extensions auto-adjointes distinctes de  $A$ . Alors

$$(B - z)^{-1} - (C - z)^{-1} = \sum_{m,n=1}^N (\phi_n(\bar{z}, \cdot) \phi_m(z))_{z \in \rho(B) \cap \rho(C)}$$

où  $\phi_m(z), m = 1, \dots, N$  sont des solutions indépendantes de l'équation

$$A^*\phi(z) = z\phi(z) \quad ; \quad \phi(z) \in \mathcal{D}(A^*)$$

En général, on a  $\det [\lambda(z)] \equiv 0$ . De plus  $\forall z, z' \in \rho(B) \cap \rho(C)$

$$\lambda^{-1}(z) = \lambda^{-1}(z') + (z - z') [(\phi_n(z'), \phi_m(\bar{z}))]_{n,m=1}^N$$

Théorème A.4 Soit  $A$  un opérateur symétrique et supposons qu'il existe une conjugaison  $C$  avec  $C : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{D}(A)$  et  $AC = CA$ . Alors,  $A$  a des indices de défaut égaux et donc admet des extensions auto-adjointes.

### Appendices B *Convergence des opérateurs non bornés*

Définitions Soient  $A_n, n = 1, 2, \dots$  et  $A$  des opérateurs auto-adjoints. On dit que  $A_n$  converge vers  $A$  au sens de la convergence en norme des résolvants si  $R_\lambda(A_n) \rightarrow R_\lambda(A)$  en norme pour tout  $\lambda$  tel que  $Im\lambda \neq 0$ .  $A_n$  converge vers  $A$  au sens de la convergence forte en norme des résolvants si  $R_\lambda(A_n) \rightarrow R_\lambda(A)$  fortement pour tout  $\lambda$  tel que  $Im\lambda \neq 0$ .

Théorème B.1 Soient  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , et  $A$  une famille d'opérateurs auto-adjoints uniformément bornés. Alors  $A_n \rightarrow A$  au sens de la convergence en norme des résolvants si et seulement si  $A_n \rightarrow A$  en norme.

Théorème B.2 Soient  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , et  $A$  des opérateurs auto-adjoints, et  $\lambda_0$  un point de  $IC$ .

(a) Si  $Im\lambda_0 \neq 0$  et  $\|R_{\lambda_0}(A_n) - R_{\lambda_0}(A)\| \rightarrow 0$ , alors  $A_n \rightarrow A$  au sens de la convergence en norme des résolvants.

(b) Si  $Im\lambda_0 \neq 0$  et si  $R_{\lambda_0}(A_n)\phi - R_{\lambda_0}(A)\phi \rightarrow 0$ , pour tout  $\phi \in \mathcal{H}$ , alors  $A_n \rightarrow A$  au sens de la convergence forte en norme des résolvants.

Théorème B.3 Soient  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , et  $A$  des opérateurs auto-adjoints. Alors  $A_n \rightarrow A$  au sens de la convergence forte en norme des résolvants si et seulement si  $e^{itA_n}$  converge fortement vers  $e^{itA}$  pour chaque  $t$ .

# Références

- [1] J.Shabani:Thèse Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences. *Modèles exactement solubles d'interactions de surface en Mécanique Quantique non relativiste* Louvain la Neuve, 1986
- [2] J.P.Antoine,P.Exner,P.Šeba and J.Shabani:Reprinted from Annals of Physics. vol.233, $N_2$ 1,1-16(1994)
- [3] J.P.Antoine, F.Gesztesy and J.Shabani: J.Phys A20 (1987), 3687-3712.
- [4] T.Ikebe and S.Shimada:J.Math.Kyoto Univ, 31-1 (1991), 219-258.
- [5] M.N.Hounkonnou, M.Hounkpe and J.Shabani:"Scattering theory for finitely many sphere interactions supported by concentric spheres". Accepted pour publication dans le J.Math.Phys.
- [6] J.Shabani: J.Math.Phys 29,660 (1988)
- [7] L.Dabrowski and J.Shabani:J.Math.Phys 29 (1988), 2241-2244
- [8] I.M.Green, S.A.Moszkowski:Phys.Rev vol 139  $N_2$  43, 790 (1965)
- [9] S.M.Blinder: Phys.Rev 18A, 853 (1978)
- [10] S.Albeverio, F.Gesztesy, R.Hoegh-Krohn and H.Holden: *Solvable Models in Quantum Mechanics*.Texts and Monographs in Physics (Springer Verlag, Berlin 1988).
- [11] M.Abramowitz and I.A.Stegun:*Handbook of Mathematical Functions*. (Dover Publications Inc, New York, N.Y 1972)

- [12] N.I.Akhiezer and I.M.Glazman: *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Vol2 (Pitman Publishing Inc. Boston, London, Melbourne, 1981)
- [13] B.Simon: *Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms* (Priceton Univ Press, Princeton-New York 1971)
- [14] F.Gesztesy, B.Thaller: *J.Phys A* 14 (1981) 639-657
- [15] R.G.Newton: *Scattering Theory of Waves and Particles* (Springer Verlag, New York-Heidelberg, Second Ed 1982)
- [16] : J.Shabani *Nuovo Cim* 101 B (1988), 429-439
- [17] M.Houkpe, P.C. Rutomera and J. Shabani : *Scattering Theory for a Coulomb plus a Sphere Interaction* soumis pour publication au Journal of Physics A.
- [18] D. Bolle and F. Gesytesy : *Phys. Rev. A.* 30 (1984) 1279-1293
- [19] N.Dunford, J.T.Schwartz: *Linear Operators-Part II.Spectral Theory*. Interscience Publ.New York-London 1963.
- [20] M.Reed, B.Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics.IV: Analysis of Operators*. Academic Press, New York, San Fransisco-London 1978.
- [21] S.Albeverio, Hoegh-Krohn: *J.Math anal appl* 101,491 (1984)
- [22] J.Weidmann: *Linear Operators in Hilbert Space*. Springer- Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1980
- [23] S.Albeverio, F.Gesztesy, Hoegh-Krohn and Kirsh: *J.Operators Theory* 12 (1984) 101-126
- [24] P.Šeba: *Reports Math.Phys* 24(1986) 111-120.
- [25] S.Shimada : *Low Energy Scattering with penetrable wall Interaction*. Kyoto Univ ;Preprint Kyoto Univ, 1991
- [26] J. Dittrich, P. Exner and P.Šeba: *J.Maths. Phys* 30,2275-2282 (1989)
- [27] J. Dittrich, P. Exner and P.Šeba: *J.Maths. Phys* 33,2207-2214 (1992)