

N° d'enregistrement : UNB / DSM / PM / 98 / 05 / 02

UNIVERSITE NATIONALE DU BENIN
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

THESE DE DOCTORAT

Présentée par
MONSIA MARC DELPHIN
Maître ès – Sciences Physiques
Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN PHYSIQUE THEORIQUE

SPECIALITE : SCIENCES DES MATERIAUX

***TITRE : MODELE MATHEMATIQUE DES
PROPRIETES RHEOLOGIQUES DES
ARTERES***

Soutenu le 23 Novembre 1998 devant la commission d'examen

| | | |
|-------------|-------------|---|
| Président : | O. AJAYI | Professeur, Université de Lagos |
| Membres : | A. WAGUE | Professeur, Université de Dakar |
| | T. AMINOU | Professeur, Université Nationale du Bénin |
| | C. GNANVO | Professeur, Université Nationale du Bénin |
| | L. OLATUNJI | Professeur, Université Nationale du Bénin |

AVANT PROPOS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique Théorique de la Faculté des Sciences et Techniques à l'Université Nationale du Bénin, sous la direction du Professeur **OLATUNJI L. O.**

Je lui exprime ma profonde reconnaissance pour tout ce qu'il m'a appris et pour l'aide très significative qu'il m'a apportée au cours de cette étude.

J'exprime ma plus profonde gratitude à Monsieur **AJAYI, O.**, Professeur de Mathématiques Appliquées à l'Université de Lagos, pour l'intérêt qu'il a toujours porté à mes activités de recherche, et pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider mon jury de thèse.

Monsieur **WAGUE,A.**, Professeur de Physique Théorique à l'Université de Dakar, m'a fait un grand honneur en acceptant de participer au jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma respectueuse gratitude.

Monsieur **GNANVO, C.**, Professeur de Mathématiques et Informatique à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université Nationale du Bénin, m'a fait l'honneur de bien vouloir juger ce travail. Je lui adresse mes remerciements respectueux.

Toute ma reconnaissance va à Monsieur **AMINOU,T.**, Professeur de Chimie Macromoléculaire à la Faculté des Sciences et Techniques de l'Université Nationale du Bénin, de s'être intéressé à cette thèse et d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Enfin, que tous ceux qui m'ont aidé par leur travail et parfois réconforté de leur amitié, trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

***MODELE MATHEMATIQUE DES PROPRIETES
RHEOLOGIQUES DES ARTERES***

SOMMAIRE

MODELE MATHEMATIQUE DES PROPRIETES RHEOLOGIQUES DES ARTERES

- I- INTRODUCTION
- II- COURBES DE COMPLAISANCE ELASTIQUE
- III- COURBES LONGUEUR- PRESSION
- IV- COURBES VOLUME- PRESSION
- V- PROPRIETES RHEOLOGIQUES DE LA PAROI DES ARTERES
RELAXEES OU CONTRACTEES

CONCLUSION

ANNEXE A

ANNEXE B

BIBLIOGRAPHIE

I – INTRODUCTION

Un problème important en hémodynamique est la description des propriétés rhéologiques des artères. Jusqu'à présent, une équation qui décrit correctement la connexion entre les contraintes et les déformations n'est pas disponible. A titre d'exemple, pas moins de sept méthodes distinctes ont été utilisées pour caractériser les propriétés viscoélastiques (en cisaillement) des artères. Par la suite, Alfrey et Doty [1] ont montré que toutes ces méthodes sont mathématiquement équivalentes et qu'il existe entre elles des relations d'interconnexion bien définies. L'exposé de ces résultats sort du cadre de notre étude. Pour plus de détail, consulter les travaux remarquables de Alfrey et Doty [1].

De la même manière, ils existent plusieurs approches de complexités différentes pour caractériser les propriétés mécaniques de la paroi artérielle. En effet, la dépendance par rapport au temps des contraintes et des déformations, la non linéarité de la relation contrainte - déformation, et l'activité du muscle lisse vasculaire, compliquent la description mathématique complète du comportement mécanique de la paroi artérielle.

Cependant, pour décrire les propriétés rhéologiques des artères dans le cas d'une très grande déformation pour laquelle la loi de Hooke n'est plus valable, l'utilisation de la théorie des déformations finies est à l'heure actuelle acceptée par tous [2- 4]. Dans ce cadre, Bauer [5] a proposé une méthode appropriée pour déterminer la contrainte totale qui s'exerce sur la paroi de l'artère. La procédure consiste à décomposer cette contrainte en trois composantes principales : la première, est la contrainte élastique ; la seconde, est la contrainte de viscosité ; et la troisième, est la contrainte d'inertie.

Dans ce travail, nous avons élaboré des modèles mathématiques pour décrire les propriétés rhéologiques des artères contractées ou relaxées. Nous avons utilisé la procédure proposée par Bauer [5], et des hypothèses physiques [4,5] et mathématiques précises [6].

Les résultats théoriques obtenus sont d'une part, en excellent accord avec les données expérimentales de Fukushima et al [7] en ce qui concerne les courbes de complaisance élastique.

II – COURBES DE COMPLAISANCE ELASTIQUE

2-1 - Modèle Dynamique : Variation du diamètre de l'artère en fonction du temps

D'après Bauer [5] , on peut toujours décomposer la contrainte totale σ qui s'exerce sur la paroi de l'artère en trois composantes principales. La première, est la contrainte élastique $\sigma_{\text{élast}}$,qui dépend de la déformation $\varepsilon(t)$; la seconde, est la contrainte de viscosité σ_{visc} , qui dépend de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}(t)$, et la troisième, la contrainte d'inertie σ_{inert} , qui dépend de la dérivée seconde $\ddot{\varepsilon}(t)$ de la déformation. On a donc :

$$\sigma = \varphi_1(\varepsilon) + \varphi_2(\dot{\varepsilon}) + \varphi_3(\ddot{\varepsilon}) \quad (1)$$

soit :

$$\sigma = \sigma_{\text{élast}} + \sigma_{\text{visc}} + \sigma_{\text{inert}} \quad (2)$$

Dans l'équation (1), les φ_i ($i=1,2,3$) sont des symboles de fonctions. Nous utilisons comme Bauer [5] ,une procédure générale en choisissant les expressions analytiques des contraintes sous les formes polynomiales suivantes :

$$\sigma_{\text{elast}} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} \quad (3)$$

$$\sigma_{\text{visc}} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} b_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} \quad (4)$$

$$\sigma_{\text{inert}} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{\alpha} c_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} \quad (5)$$

Les équations (4) et (5) donnent après dérivation les expressions équivalentes suivantes :

$$\sigma_{\text{visc}} = \sum_{\alpha} \alpha b_{\alpha} \dot{\varepsilon} \varepsilon^{\alpha-1} \quad (6)$$

$$\sigma_{\text{inert}} = \sum_{\alpha} \alpha \varepsilon^{\alpha-1} \left[c_{\alpha} \ddot{\varepsilon} + c_{\alpha} (\alpha - 1) \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\varepsilon} \right] \quad (7)$$

En substituant ces expressions dans l'équation (2) on obtient:

$$\sigma = \sum_{\alpha} \alpha \varepsilon^{\alpha-1} \left[c_{\alpha} \ddot{\varepsilon} + c_{\alpha} (\alpha - 1) \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\varepsilon} + \frac{a_{\alpha}}{\alpha} \varepsilon \right] \quad (8)$$

En supposant que $\sigma = 0$ (relaxation de la contrainte totale), la déformation $\varepsilon(t)$ étant non nulle, et le paramètre α étant différent de zéro, on obtient l'équation d'évolution de la réponse non-linéaire du système soit:

$$\rho \ddot{\varepsilon} + \rho(\alpha - 1) \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\varepsilon} + \eta \dot{\varepsilon} + \frac{G}{\alpha} \varepsilon = 0 \quad (9)$$

A ce stade de la modélisation mathématique, nous avons introduit comme il se doit les grandeurs rhéologiques :

$$\rho = c_\alpha ; \eta = b_\alpha ; G = a_\alpha \quad (10)$$

En effet, si \mathbf{M} , \mathbf{L} , et \mathbf{T} sont les dimensions de la masse, de la longueur et du temps, chaque terme de l'équation (9) étant homogène à une contrainte σ telle que $[\sigma] = \mathbf{M} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{T}^{-2}$

on obtient les caractéristiques suivantes :

ρ est une densité linéique de masse (masse par unité de longueur) avec $[\rho] = \mathbf{M} \mathbf{L}^{-1}$

η est le coefficient de viscosité avec $[\eta] = \mathbf{M} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{T}^{-1}$

G est le coefficient d'élasticité avec $[G] = \mathbf{M} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{T}^{-2}$

Notons que dans l'équation (9), la non-linéarité est due essentiellement au second terme qui est la contrainte d'inertie de rotation, de sorte que si $\alpha = 1$, on retrouve un modèle linéaire

Maintenant, pour progresser dans notre étude, nous allons introduire dans l'équation (9), une nouvelle variable $\lambda(t)$ dont le choix dépendra de deux considérations : l'une rhéologique, et l'autre mathématique.

a) – Considération rhéologique

Compte tenu de la géométrie cylindrique généralement adoptée pour une artère, nous prendrons pour $\lambda(t)$ la variable sans dimension caractérisant le coefficient d'extension radiale, soit [4,5]:

$$\lambda(t) = \frac{D(t)}{D_0} \quad (11)$$

où $D(t)$ et $D_0 = D(0)$ sont respectivement le diamètre de l'artère à un instant t quelconque, et à l'instant $t = 0$ correspondant à une pression artérielle nulle.

b) – Considération mathématique

Nous partons du fait que par un choix convenable d'une nouvelle variable $\lambda(t)$, nous pouvons ramener l'équation (9) à une équation différentielle du premier ordre, connue sous le nom d'équation de Riccati [6].

Etant donné que par définition les variables $\lambda(t)$ et $\varepsilon(t)$ sont sans dimension, le changement de variable s'écrit d'après Bateman [6]:

$$\varepsilon(t) = \exp\left[\frac{1}{t_c} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right] \quad (12)$$

où t_c est un temps caractéristique

En utilisant les équations (11) et (12) dans l'équation (9), on obtient, après quelques manipulations algébriques, l'équation de Riccati donnant l'évolution du diamètre $D(t)$ en fonction du temps t , soit :

$$t_c D_0 \frac{dD}{dt} = -\left[\alpha D^2 + \Lambda D + \frac{\Omega}{\alpha}\right] \quad (13)$$

en posant :

$$\Lambda = \frac{t_c D_0 \eta}{\rho} \quad ; \quad \Omega = \frac{t_c^2 D_0^2 G}{\rho}$$

On observe que dans l'équation (13), $[\Lambda] = L$ et $[\Omega] = L^2$, de sorte que α demeure un paramètre sans dimension

2-2- Modèle Statique : Variation du diamètre de l'artère en fonction de la pression artérielle

L'équation (13) est une équation de type Riccati qui peut être résolue analytiquement. Cependant, pour introduire les données expérimentales, de Fukushima et al [7] , nous considérons les variations du diamètre de l'artère en fonction de la pression artérielle

(Problème Statique). Pour cela, nous écrivons formellement la relation fonctionnelle suivante:

$$D(t) = D[P(t)] \quad (14)$$

L'équation (14) indique de toute évidence, en accord avec la procédure expérimentale, que la variation avec le temps du diamètre de l'artère (Problème Dynamique) dépend essentiellement de la dépendance par rapport au temps de la pression $P(t)$.

Ainsi , en utilisant la relation (14) on obtient pour $D=D(P)$ l'équation d'évolution sous la forme :

$$\mu \frac{dD}{dP} = - \left[\alpha D^2 + \Lambda D + \frac{\Omega}{\alpha} \right] \quad (15)$$

en posant :

$$\mu = t_c D_0 \frac{dP}{dt}$$

En utilisant la condition suivante :

$$\frac{dP}{dt} = v = C^{ste} \quad (16)$$

on peut écrire la solution $D(P)$ de l'équation (15) sous la forme obtenue par Fukushima et al [7], par une approche phénoménologique soit :

$$D(P) = D_{\min} + \frac{(D_{\max} - D_{\min})}{[1 + M(0)\exp(-P/E)]} \quad (17)$$

En effet l'équation (15) avec la condition (16) est une équation différentielle de type Riccati que nous résolvons de la manière suivante :

1°) – Solutions stationnaires D_1 et D_2

A partir de (15) , nous obtenons les solutions stationnaires D_1 et D_2 caractéristiques de l'équilibre dynamique en posant $dD/dP = 0$, ce qui donne une équation du second degré en D soit :

$$\alpha D^2 + \Lambda D + \frac{\Omega}{\alpha} = 0 \quad (18)$$

La racine du discriminant de l'équation du second degré en D s'écrit :

$$\sqrt{\Delta} = [\Lambda^2 - 4\Omega]^{1/2} = \pm \Lambda \delta \quad (19)$$

en posant :

$$\delta = \left[1 - 4\frac{\Omega}{\Lambda^2}\right]^{1/2} \quad (20)$$

avec la condition nécessaire et suffisante $\delta \geq 0$ ce qui implique :

$$\frac{4\Omega}{\Lambda^2} \leq 1 \quad (21)$$

Le coefficient δ ainsi défini est le **coefficient de visco-élasticité stationnaire**

Les deux solutions D_1 et D_2 de l'équation (18) s'écrivent donc sous la forme :

$$D_1 = -\frac{\Lambda[1-\delta]}{2\alpha} \quad (22)$$

$$D_2 = -\frac{\Lambda[1+\delta]}{2\alpha} \quad (23)$$

En conséquence, en terme d'équilibre dynamique, il est d'ores et déjà très intéressant de noter que les deux solutions stationnaires D_1 et D_2 sont couplées par le coefficient de visco-élasticité stationnaire δ : L'importance de ce couplage sera mise en évidence dans la suite lorsque nous allons comparer les résultats de notre modèle mathématique à l'équation phénoménologique utilisée par Fukushima et al [7] pour ajuster les données expérimentales.

2°) – Solution dynamique $D(P)$

L'équation de Riccati (15) est une équation à variables séparables :

$$\frac{dD}{\left[\alpha D^2 + \Lambda D + \frac{\Omega}{\alpha} \right]} = \frac{dD}{Q(D)} = -\frac{dP}{\mu} \quad (24)$$

La décomposition en éléments simples de la fraction $[1/Q(D)]$ donne :

$$\frac{1}{Q(D)} = \frac{A_1}{(D - D_1)} + \frac{A_2}{(D - D_2)} \quad (25)$$

avec

$$A_1 = \frac{1}{Q'(D_1)} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{1}{Q'(D_2)} \quad (26)$$

on a

$$Q'(D_1) = 2\alpha D_1 + \Lambda = \Lambda \delta \quad (27)$$

$$Q'(D_2) = 2\alpha D_2 + \Lambda = -\Lambda \delta \quad (28)$$

On obtient donc la séparation des variables sous la forme :

$$\left[\frac{1}{(D - D_1)} - \frac{1}{(D - D_2)} \right] dD = -\frac{dP}{E} \quad (29)$$

en posant :

$$\frac{1}{E} = \frac{\Lambda \delta}{\mu} \quad (30)$$

L'intégration de l'équation à variables séparables est immédiate, soit :

$$\frac{(D - D_1)}{(D - D_2)} = C \exp(-P/E) \quad (31)$$

où **C** est une **constante arbitraire** déterminée par la condition initiale $D(0) = D_0$

ce qui donne :

$$C = \frac{(D_0 - D_1)}{(D_0 - D_2)} \quad (32)$$

En résolvant l'équation (31) par rapport à D et en tenant compte de l'expression de C donnée par l'équation (32), on obtient la solution $D(P)$ sous la forme utile suivante:

$$D(P) = D_2 + \frac{(D_1 - D_2)}{1 + M(0)\exp(-P/E)} \quad (33)$$

avec

$$M(0) = \frac{(D_1 - D_0)}{(D_0 - D_2)} \quad (34)$$

Nous venons donc d'effectuer la résolution mathématique complète de l'équation de Riccati (15) obtenue pour l'évolution du diamètre $D(P)$ en fonction de la pression artérielle.

Nous allons maintenant montrer que l'équation (33) peut se mettre sous la forme de l'équation phénoménologique écrite par Fukushima et al [7] en se référant à la courbe de complaisance élastique $\psi(D) = dD/dP$.

Comme indiqué, le paramètre δ de visco-élasticité stationnaire assure le couplage entre les deux solutions stationnaires D_1 et D_2 de l'équation (18). De l'équation (22), on tire l'expression de δ en fonction de D_1 soit :

$$\delta = 1 + \frac{2\alpha D_1}{\Lambda} \quad (35)$$

En conséquence, si l'on pose formellement $D_1 = D_{\max}$, les équations (22) et (23) donnent, en éliminant le paramètre δ , les équations équivalentes suivantes:

$$\begin{cases} D_1 = D_{\max} \\ D_2 = -\left[\frac{\Lambda}{\alpha} + D_{\max}\right] = D_{\min} \end{cases} \quad (36)$$

En utilisant les équations (36) on peut donc écrire formellement la solution dynamique $D(P)$ sous la forme recherchée, soit :

$$D(P) = D_{\min} + \frac{(D_{\max} - D_{\min})}{1 + M(0)\exp(-P/E)} \quad (37)$$

Introduisons les nouvelles variables suivantes :

$$\begin{cases} a(P) = D(P) - D_{\min} \\ K = D_{\max} - D_{\min} \end{cases} \quad (38)$$

On obtient après quelques manipulations algébriques une équation différentielle déterministe de type Verhulst [8,9] pour l'évolution de $a(P)$, soit :

$$\frac{da(P)}{dP} = \frac{a(P)}{E} \left[1 - \frac{a(P)}{K} \right] \quad (39)$$

ce qui donne en utilisant la relation (16), une équation différentielle déterministe pour $a(t)$ que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\frac{da}{dt} = \gamma a - \beta a^2 \quad (40)$$

En posant :

$$\gamma = \frac{\nu}{E} \quad ; \quad \beta = \frac{\gamma}{K} \quad (41)$$

En utilisant la relation (16), les relation (17 et (38)) donnent la solution dynamique $a(t)$, soit:

$$a(t) = \frac{K}{[1 + M(0)\exp(-\gamma t)]} \quad (42)$$

En conséquence, on obtient :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\gamma M a(t) \exp(-\gamma t)}{[1 + M(0)\exp(-\gamma t)]} \quad (43)$$

Introduisons la fonction $f(t)$ définie comme suit :

$$f(t) = \frac{da/dt}{a} \quad (44)$$

En utilisant les relations (42), (43), et (44) on obtient une équation différentielle du premier ordre pour $f(t)$ soit :

$$\dot{f} = -f(\gamma - f) \quad (45)$$

En revenant à la variable $a(t)$, on obtient à partir de (45) une équation différentielle du second ordre, soit :

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\gamma \frac{da}{dt} + \frac{2}{a} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \quad (46)$$

L'équation (46) peut se mettre sous la forme d'un flot déterministe de \mathbb{R}^2 qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = b \\ \frac{db}{dt} = -\gamma b + \frac{2b^2}{a} \end{cases} \quad (47)$$

De toute évidence, le flot (47) est parfaitement défini car $a(0) = D(0) - D_{\min}$ est toujours différent de zéro.

Cependant, on peut introduire dans l'équation (47) une nouvelle variable indépendante définie comme suit :

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{a} \quad (48)$$

On obtient :

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{d\tau} \times \frac{d\tau}{dt} = \frac{da}{d\tau} \times \frac{1}{a} \quad (49)$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{db}{d\tau} \times \frac{d\tau}{dt} = \frac{db}{d\tau} \times \frac{1}{a} \quad (50)$$

d'où l'on tire le flot de \mathbb{R}^2 en variable τ soit :

$$\begin{cases} \frac{da}{d\tau} = ab \\ \frac{db}{d\tau} = -\gamma ab + 2b^2 \end{cases} \quad (51)$$

Notons que les flots déterministes (47) et (51) sont bien adaptés pour la prise en compte des fluctuations dans la dynamique non linéaire des artères contractées ou relaxées.

Par exemple, soit $\xi(t)$ un bruit blanc ayant les propriétés suivantes:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2) \quad (52)$$

Ainsi, à partir du flot déterministe (47), on peut construire par exemple un flot stochastique de \mathbb{R}^2 tel que :

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = b + \xi(t) \\ \frac{db}{dt} = -\gamma b + \frac{2b^2}{a} \end{cases} \quad (53)$$

L'étude des flots stochastiques est très importante, mais cette considération sort du cadre de ce travail.

Comme exemples numériques, les figures (1- 4) indiquent l'évolution des fonctions $D(t)$ et $dD(t)/dt$ pour les artères N° 1 et N° 5 dans l'état contracté et relaxé.

En ce qui concerne les valeurs numériques des paramètres (D_{\max} , D_{\min} , M , E) nous avons utilisé les valeurs publiées par Fukushima et al [7] et reportées dans le Tableau I.

2.3- VALIDITE DU MODELE DETERMINISTE

1° - Courbes de complaisance élastique

Il est d'ores et déjà très intéressant de noter que l'équation (15) donne directement le comportement parabolique des courbes de complaisance élastique caractérisée par la relation fondamentale suivante :

$$\varphi(D) = \frac{dD}{dP} \quad (54)$$

Voir figures (5) et (6) pour deux exemples.

2° - Validité de la loi linéaire pour $P(t)$

Les résultats expérimentaux donnés par Fukushima et al [7], et par Van Loon et al [10], ont été obtenus par une charge et une décharge de la pression $P(t)$ effectuées de manière cyclique à une vitesse $v = dP/dt = 0.5 \text{ mmHg/s}$ dans l'intervalle de $[5 - 180] \text{ mmHg}$.

En d'autres termes, cette procédure correspond tout simplement à la solution de notre équation (16) avec la condition initiale $P(0) = 0$, soit :

$$P(t) = vt \quad (55)$$

3° - Caractéristiques des courbes diamètre(D) – pression(P)

Un avantage essentiel du modèle mathématique, réside également dans le fait que chaque paramètre de l'équation (15) possède une expression analytique exacte à savoir [9] :

$$D_{\min} = -\frac{\Lambda}{2\alpha}(1 + \delta) \quad (56)$$

$$D_{\max} = -\frac{\Lambda}{2\alpha}(1 - \delta) \quad (57)$$

$$M(0) = \frac{(D_{\max} - D_0)}{(D_0 - D_{\min})} \quad (58)$$

$$E = \frac{vD_0}{\Lambda\delta} \quad (59)$$

où δ est le coefficient de viscoélasticité stationnaire défini par la relation suivante :

$$\delta = \left[1 - \frac{4\Omega}{\Lambda^2} \right]^{1/2} > 0 \quad (60)$$

Les équations (56-58) contiennent le paramètre d'état α , ce qui permet de caractériser les courbes diamètre(D) – pression(P) pour les artères relaxées ou contractées.

a) – Artères relaxées

Dans ce cas, on a $\alpha = p+2$, $D_{\max} > D_0$ alors les équations (56-58) deviennent :

$$D_{\min} = -\frac{\Lambda(1+\delta)}{2(p+2)} < 0 \quad (61)$$

$$M(0) = \frac{(D_{\max} - D_0)}{D_0 + \Lambda(1+\delta)/2(p+2)} < 1 \quad (62)$$

$$E = \frac{vD_0}{\Lambda\delta} \quad (63)$$

En conséquence, comme on peut le voir à partir des équations (61) et (62), pour les artères relaxées, le modèle théorique prédit des valeurs négatives pour D_{\min} , tandis que les valeurs de M doivent être positives et inférieures à l'unité.

Il est très intéressant d'observer que ces résultats sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Fukushima et al [7] et reportés dans le tableau I.

b) – Artères contractées

Dans ce cas, $\alpha = -p$ et $D_{\max} > D_0$ alors les équations (56-58) deviennent :

$$D_{\min} = \frac{\Lambda(\alpha + \delta)}{2p} > 0 \quad (64)$$

$$M(0) = \frac{D_{\max} - D_0}{D_0 - \Lambda(1 + \delta)/2p} > 1 \quad (65)$$

$$E = \frac{vD_0}{\Lambda\delta} \quad (66)$$

Comme on peut le voir également à partir des équations (64) et (65), le modèle théorique indique cette fois des valeurs positives pour D_{\min} , tandis que les valeurs de M doivent être supérieures à l'unité. De plus, de très fortes valeurs de M peuvent être induites en particulier si la valeur numérique de D_0 approche celle de D_{\min} ,

Il est également très intéressant d'observer que ces résultats sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Fukushima et al [7] et reportés dans le tableau I

Les résultats expérimentaux indiquent que les valeurs du paramètre E ne présentent aucune différence significative pour les artères relaxées ou contractées. Sur ce point, et comme une prime, le

modèle mathématique indique Eq.(63) et Eq.(66) que $E = \nu D_0 / \Lambda \delta$ a exactement la même valeur dans les deux états rhéologiques.

c) -Indice de contraction $M(0)$

D'après l'équation (17) on obtient :

$$D(0) = D_{\min} + \frac{D_{\max} - D_{\min}}{1 + M(0)} \quad (67)$$

Nous pouvons donc dire que les valeurs de $M(0)$ indiquent également la différence entre les artères relaxées et contractées. En d'autres termes, le paramètre $M(0)$ représente le degré de contraction du vaisseau pour $P = 0$, parce que une forte contraction, c'est à dire une valeur très élevée de $M(0)$ induit automatiquement une valeur de $D(0)$ approchant la valeur espérée pour le diamètre soit D_{\min} .

En effet, en résolvant l'équation (58) par rapport à $D(0)$ on obtient de manière équivalente:

$$D(0) = \frac{D_{\max} + D_{\min} M(0)}{1 + M(0)} \quad (68)$$

Ainsi, si $M(0) \rightarrow \infty$, $D(0) \rightarrow D_{\min}$

Considérons également l'analyse de Fukushima et al [7] pour le paramètre $M(P)$ comme une fonction de la pression P par l'intermédiaire de diamètre $D(P)$. A partir de la relation (58) on peut écrire formellement $M(P)$ sous la forme :

$$M(P) = \frac{D_{\max} - D(P)}{D(P) - D_{\min}} \quad (69)$$

Soit :

$$M(P) = M(0)\exp(-P/E) \quad (70)$$

La relation (70) montre que la valeur de $M(P)$ décroît d'une manière exponentielle vers zéro à partir de $M(0)$ à $P = 0$.

PRESSURE-DIAMETER FOR ARTERIES

TABLE I

The magnitude of parameters estimated from the measurements of 7 renal artery segments in contracted © and relaxed ® states
Fukushima et al [6]

| No | State | D _{min} (mm) | D _{max} (mm) | M | log(M) | E (mmHg) | Pn (mmHg) | r |
|----|-------|--------------------------|--------------------------|---------|--------|-------------|--------------|--------|
| 1 | C | 2.43 | 4.35 | 110.82 | 4.71 | 30.39 | 143.1 | 0.9989 |
| | R | -0.29 | 4.36 | 0.29 | -1.24 | 27.98 | -34.9 | 0.9945 |
| 2 | C | 3.57 | 4.59 | 3603.40 | 8.19 | 14.04 | 115.0 | 0.9939 |
| | R | -0.09 | 4.75 | 0.32 | -1.14 | 19.27 | -22.1 | 0.9878 |
| 3 | C | 2.09 | 2.97 | 8.24 | 2.11 | 36.36 | 76.7 | 0.9994 |
| | R | -0.31 | 3.00 | 0.14 | -1.97 | 32.99 | -65.6 | 0.9901 |
| 4 | C | 2.01 | 3.17 | 164.00 | 5.10 | 23.90 | 121.9 | 0.9962 |
| | R | -1.49 | 3.37 | 0.75 | -0.29 | 15.63 | -4.4 | 0.9893 |
| 5 | C | 1.92 | 2.97 | 34.54 | 3.54 | 36.44 | 129.1 | 0.9981 |
| | R | -0.64 | 2.88 | 0.37 | -0.99 | 22.42 | -22.0 | 0.9976 |
| 6 | C | 2.35 | 3.53 | 1163.50 | 7.06 | 14.36 | 101.4 | 0.9978 |
| | R | -4.97 | 4.15 | 0.18 | -1.71 | 49.41 | -83.6 | 0.9989 |
| 7 | C | 1.44 | 2.62 | 410.57 | 6.02 | 28.77 | 173.1 | 0.9987 |
| | R | -0.24 | 2.60 | 0.49 | -0.72 | 23.69 | -17.0 | 0.9985 |

FIG.1 - EVOLUTION DE D(t) POUR L'ARTERE N°1
CONTRACTEE O RELAXEE ●

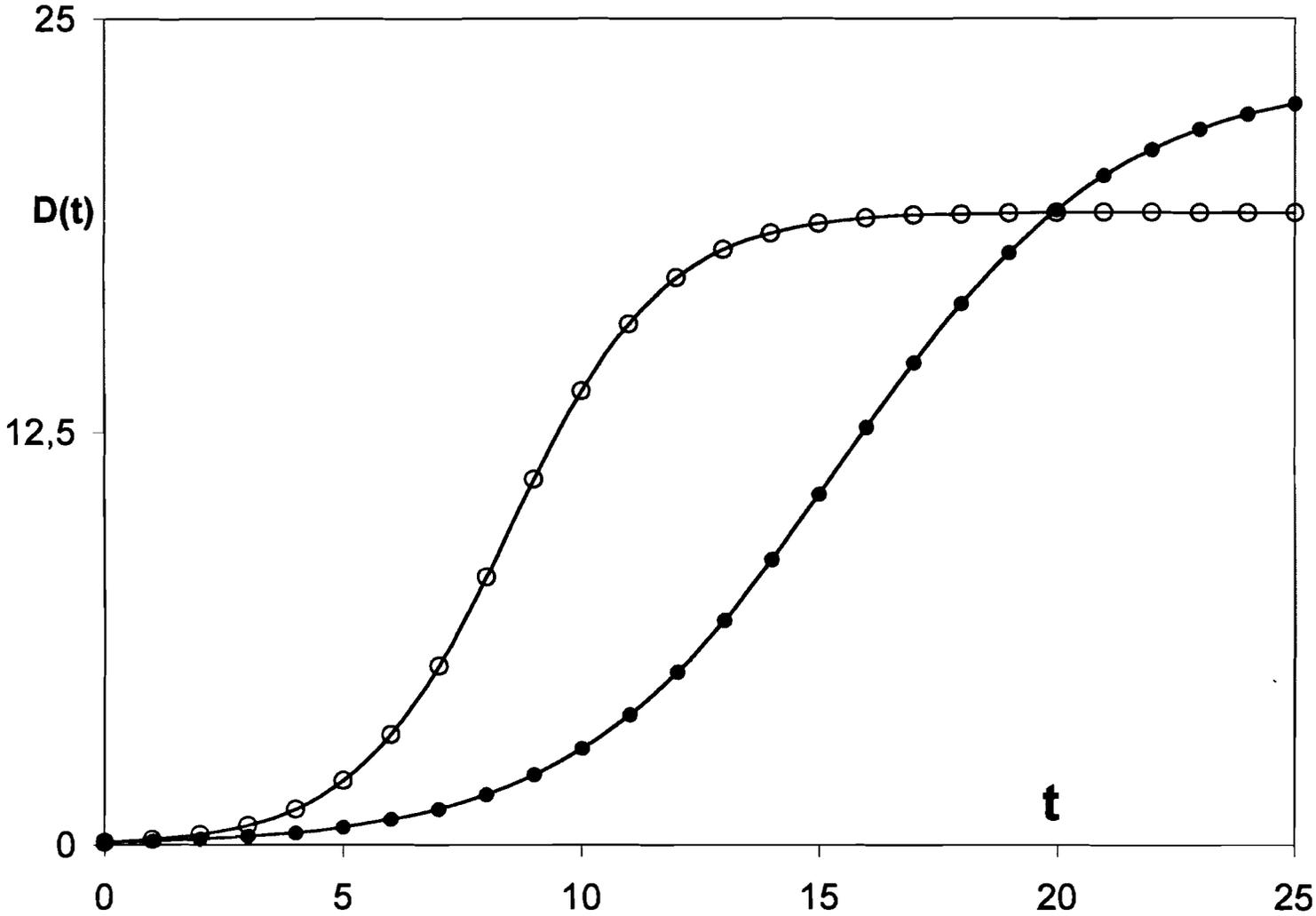


FIG.2 - EVOLUTION DE dD/dt POUR L'ARTERE N°1
CONTRACTEE ○ RELAXEE ●

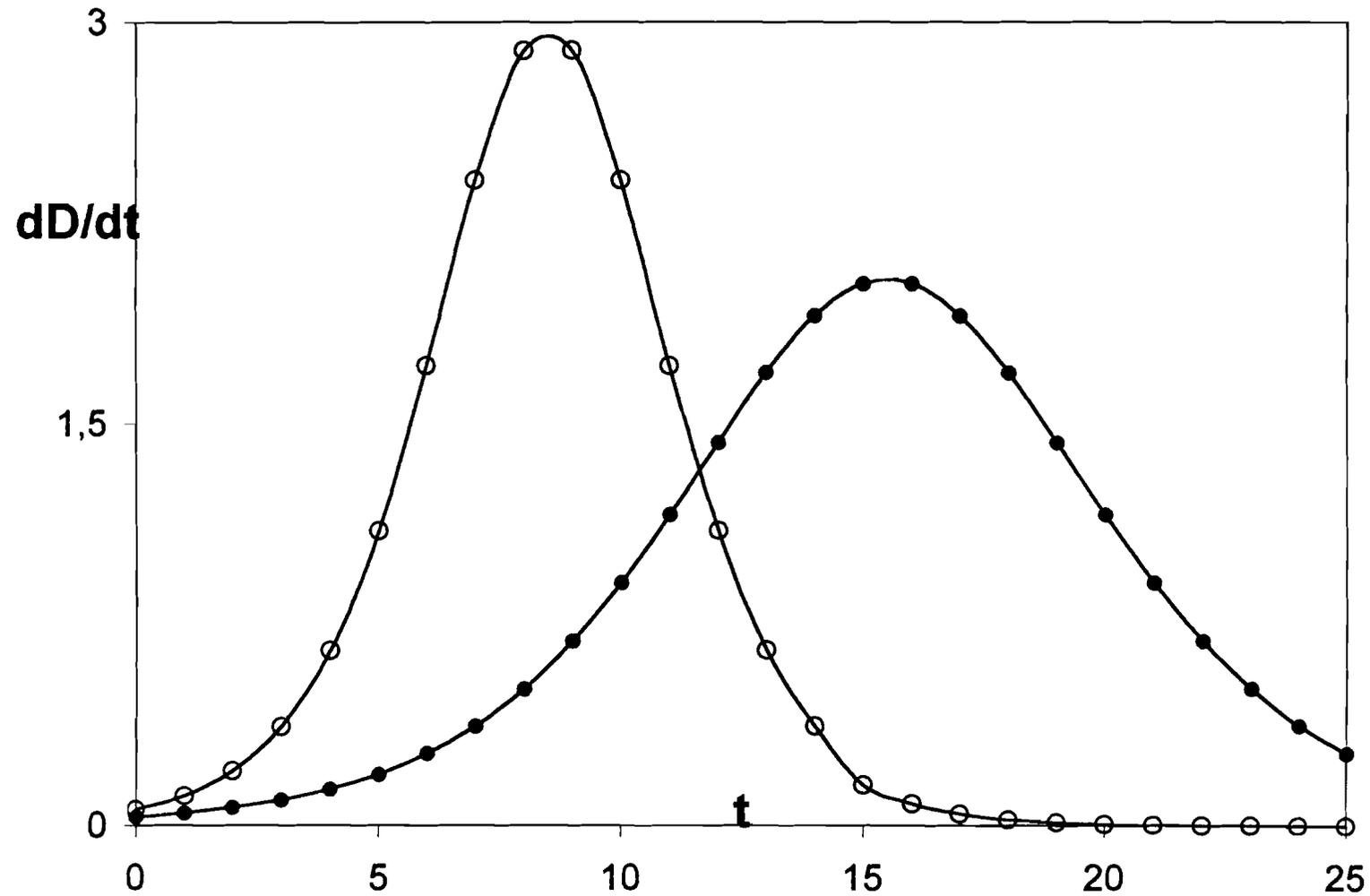


FIG.3 - EVOLUTION DE D(t) POUR L'ARTERE N°5
CONTRACTEE O RELAXEE ●

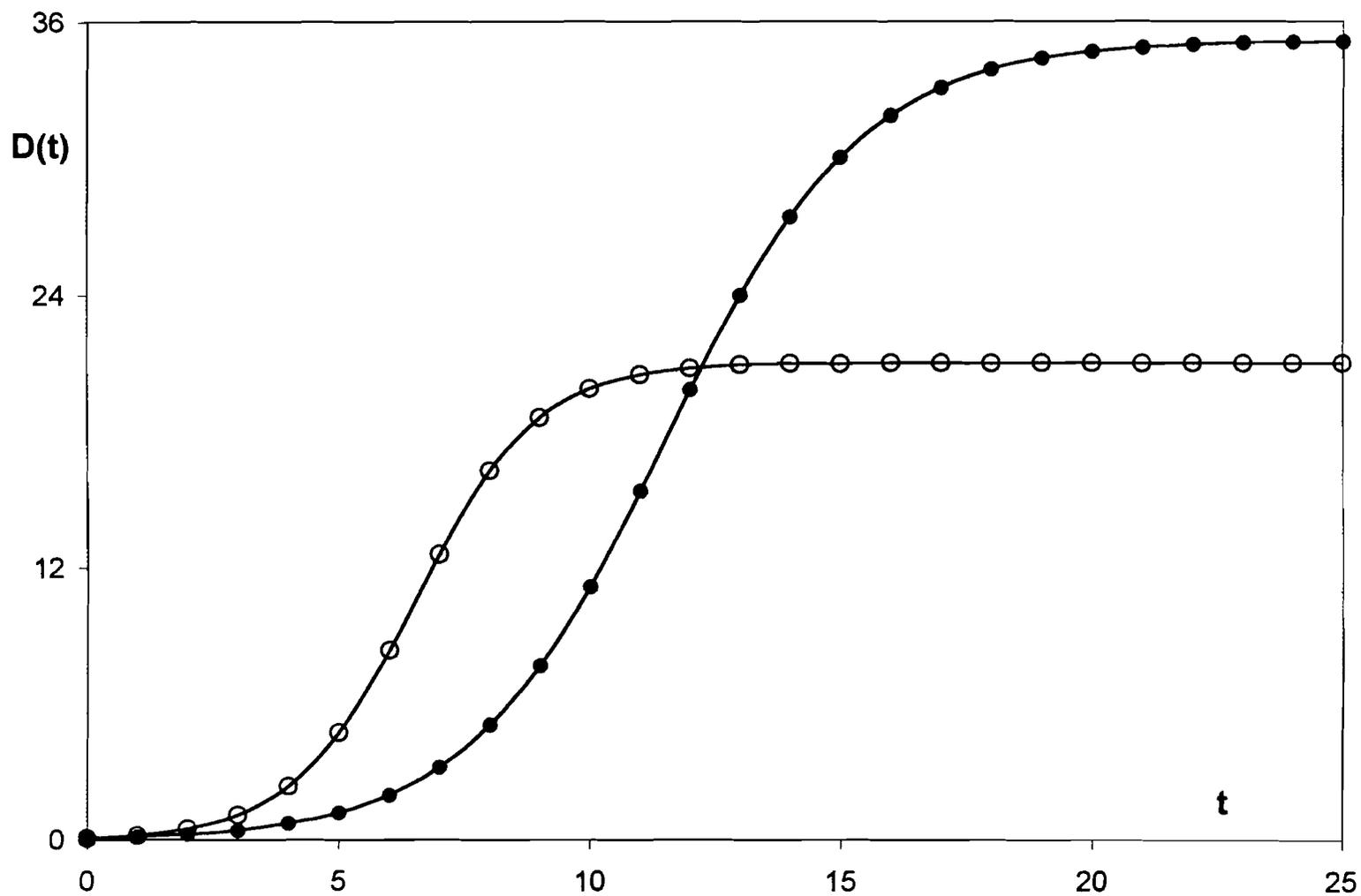


FIG.4 - EVOLUTION DE dD/dt POUR L'ARTERE N°5
CONTRACTEE O RELAXEE ●

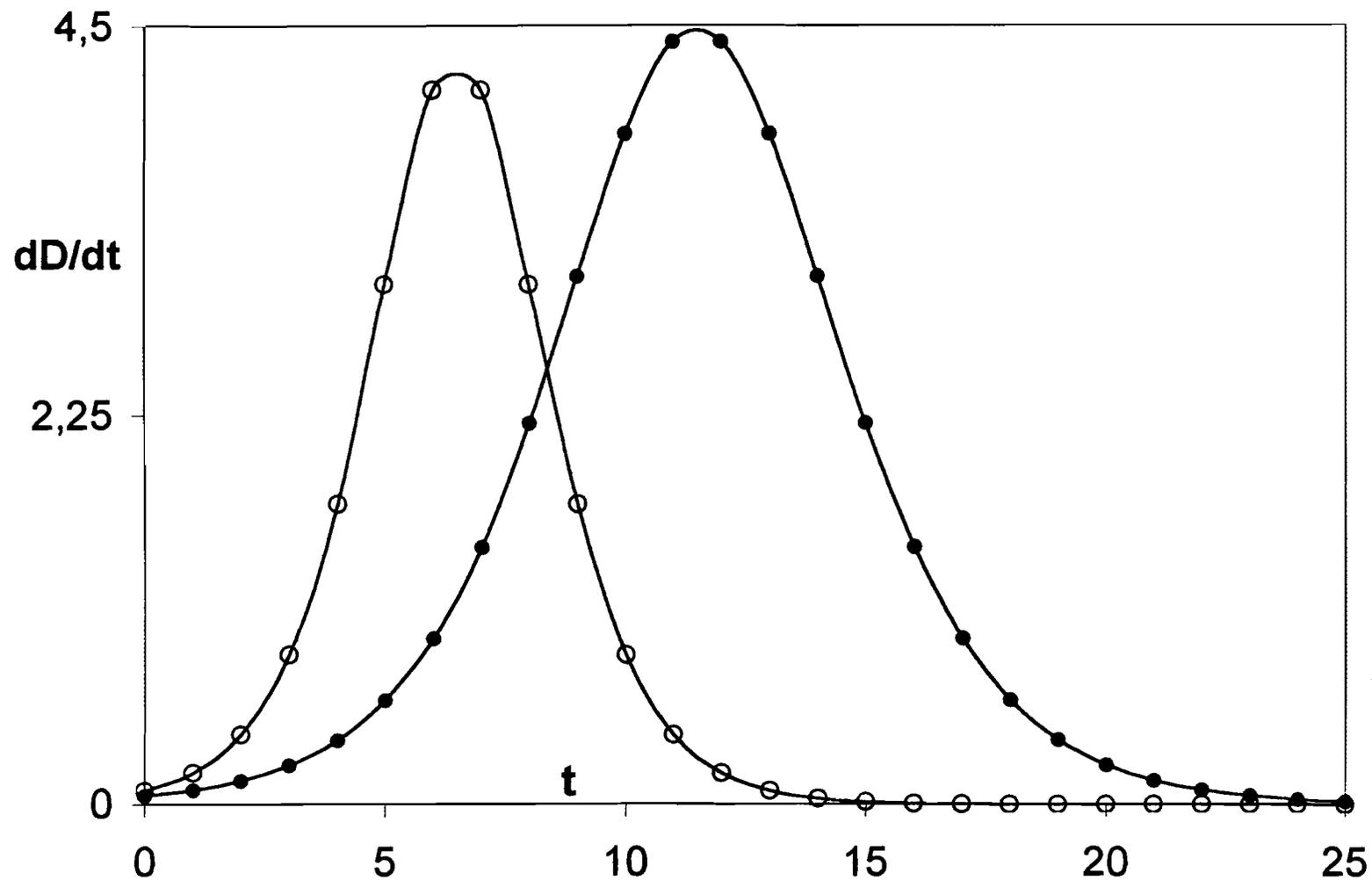


FIG.5 COMPLAISANCE ELASTIQUE dD/dP - ARTERE N°1

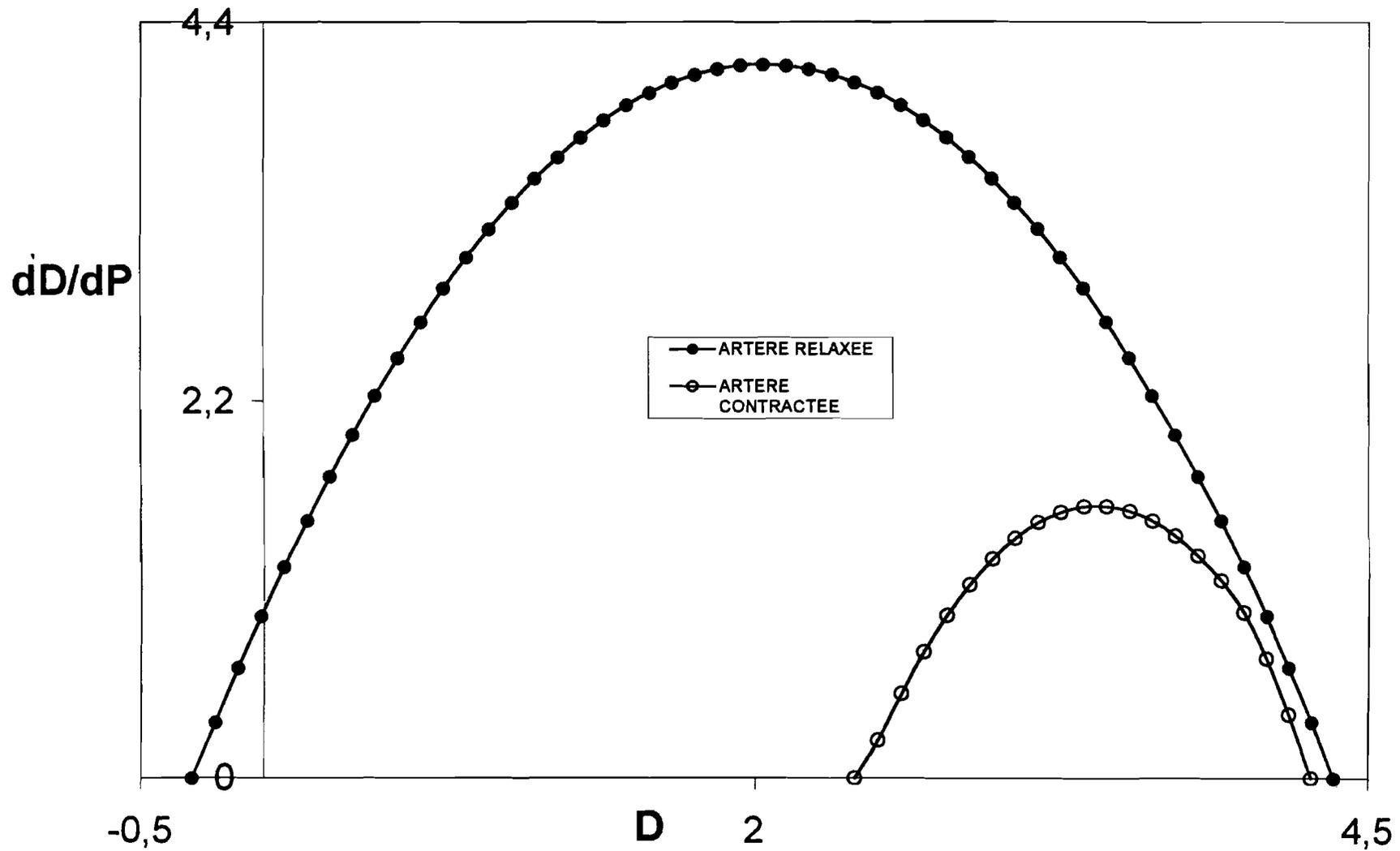
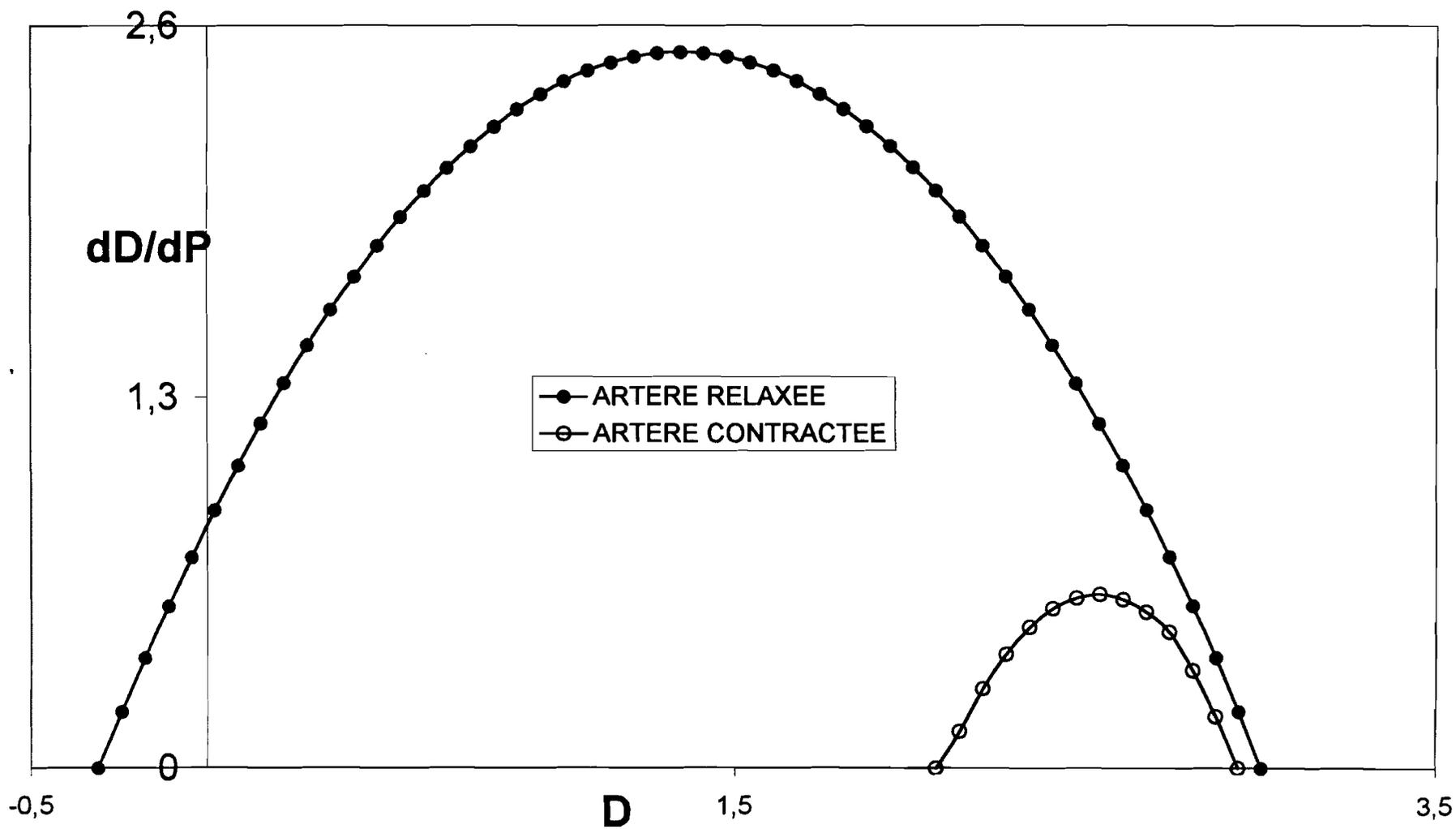


FIG.6 COMPLAISANCE ELASTIQUE dD/dP - ARTERE N°3



III – COURBES LONGEUR-PRESSION POUR LES ARTERES

Les données expérimentales de Van-Loon et al [10] serviront également de texte de validité pour notre modèle mathématique .

Cependant ,certaines remarques s'imposent en ce qui concerne les formules utilisées par Van-Loon et al [10] pour les ajustements aux données expérimentales .

1°) La première remarque est, comme le soulignent les auteurs eux –mêmes , le caractère purement empirique des formules utilisées , qui comme nous allons le voir , ne répondent à aucun critère d'un modèle de connaissance [11]

2°) La seconde remarque réside dans le fait que si pour un modèle non-linéaire , le nombre minimal de paramètres est égal à 3 , chaque paramètre doit avoir une signification biologique bien précise [9].

Dans ce travail, nous proposons donc un modèle unifié , dégagé de tout empirisme , et résultant du modèle mathématique de type Verhulst [8] présenté dans la première partie .

Ainsi, toutes les propriétés caractéristiques de la longueur et du volume intérieur des artères étudiées par Van-Loon et al [10] seront réévaluées .

Donc si $X(P)$ représente maintenant une propriété caractéristique de l'artère en fonction de la pression transmurale , nous généralisons l'équation (17) sous la forme :

$$X(P) = X_{\min} + (X_{\max} - X_{\min}) \left(1 + e^{-\frac{P}{E}}\right)^{-\nu} \quad (71)$$

En conséquence, il est alors intuitif qu'un modèle possédant un plus grand nombre de paramètres, s'ajuste mieux à n'importe quel ensemble de donnée en forme de S .

Cependant cette souplesse peut paraître artificielle si ces paramètres n'ont pas une signification biologique précise [9].

Heureusement, le modèle mathématique de Verhulst généralisé [9] fournit un modèle de connaissance avec un meilleur critère de choix des paramètres facile à interpréter.

A l'aide de la relation (71), nous sommes maintenant en mesure d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle, après ajustement aux données expérimentales de Van-Loon et al [10]

Si $X(P) = L_s(P)$ représente maintenant la variation de la longueur du segment de l'artère relaxée en fonction de la pression P , nous utilisons la relation (71) sous la forme :

$$L_S(P) = L_{\min} + (L_{\max} - L_{\min})(1 + l e^{-\beta P})^{-1} \quad (72)$$

Nous observons de toute évidence que la formule utilisée par Van-Loon et al [10] est empirique, soit :

$$L_S(P) = L_0 + (L_m - L_0)(1 - l e^{-\beta P})^2 \quad (73)$$

avec

$$L_m = \lim_{P \rightarrow \infty} L_S(P) ; L_0 = L_S(0) \quad (73)$$

Comparé à la relation mathématique (71) la relation utilisée par Van-Loon et al [10] fixe arbitrairement les valeurs de deux paramètres caractéristiques à savoir $l = -1$ et l'exposant $\nu = -2$, au lieu de $\nu=1$, pour le modèle de Verhulst [8].

Les résultats numériques de Van-Loon et al [10] sont reportés dans le tableau (II)

Les valeurs des paramètres du modèle (71) sont obtenues après ajustements aux données expérimentales de Van-Loon et al [10]

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau (III) et représentés sur la figure (7).

LENGTH-PRESSURE FOR ARTERIES

THE EMPIRICAL MODEL OF VAN-LOON FOR DATA FITTING

$$L_s(P) = L_o + (L_{MAX} - L_o) (1 - e^{-\beta P})^2$$

TABLE II

The magnitude of the model parameters estimated by Van-Loon et al [17]

| L_{MAX} | L_o | β | Coefficient of Determination R^2 |
|-----------------|-----------------|-----------------|------------------------------------|
| 4.36 ± 0.01 | 2.82 ± 0.02 | 1.49 ± 0.02 | 0.999 |

LENGTH-PRESSURE FOR ARTERIES

THE MODEL OF VERHULST FOR DATA FITTING

$$L_s(P) = L_{\text{MIN}} + (L_{\text{MAX}} - L_{\text{MIN}}) (1 + l e^{-\beta P})^{-1}$$

TABLE III

The magnitude of the model parameters estimated by the fitting procedure

| L_{MAX} | L_{MIN} | l | β | ROOT MEAN SQUARE ERROR |
|------------------|------------------|-----------|----------|---------------------------|
| 4.360256 | 2.78016 | 11.838080 | 0.031341 | 0.053098 |

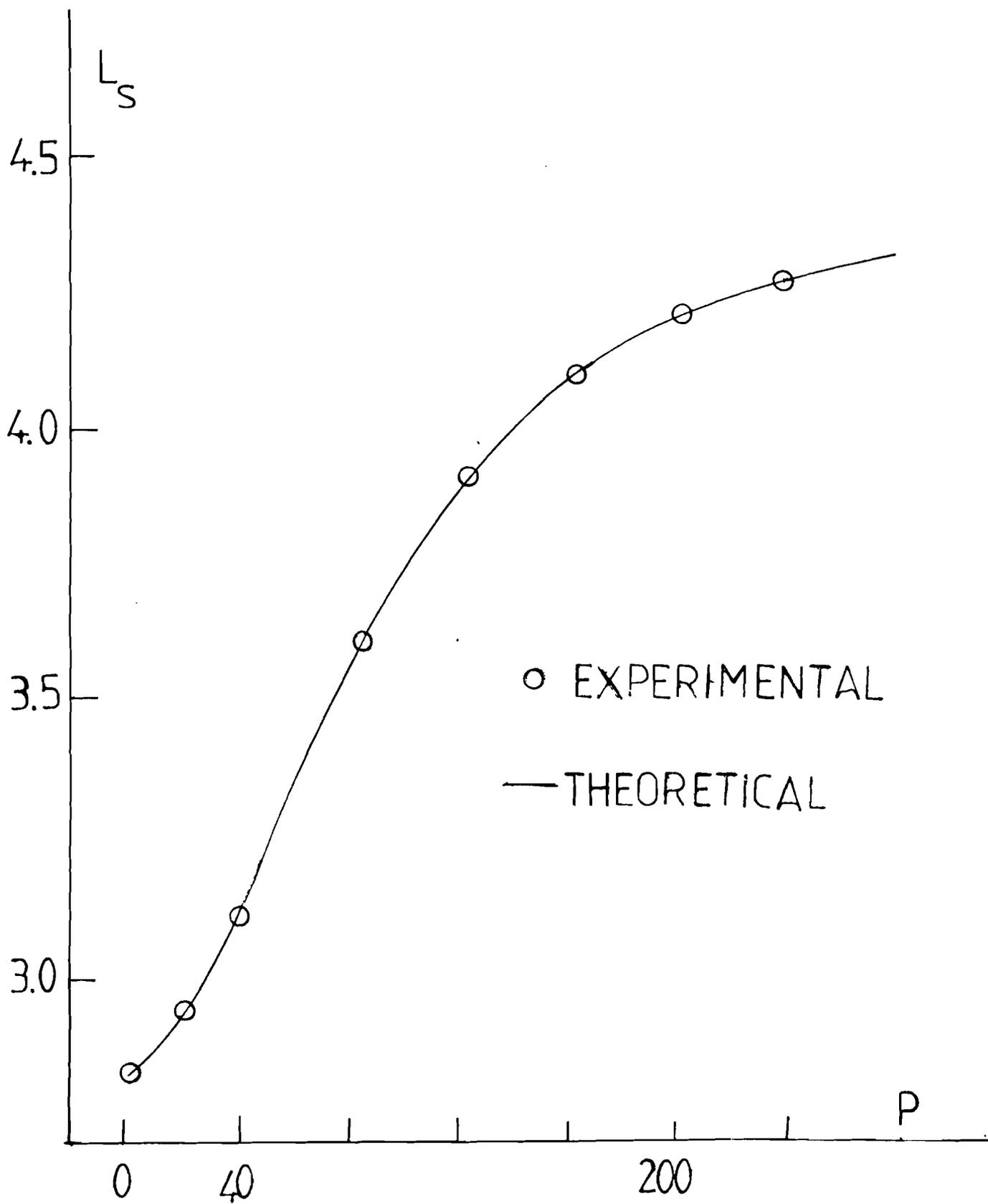


Fig. 7

IV – COURBES VOLUME – PRESSION POUR LES ARTERES

Nous allons proposer dans ce paragraphe , une modélisation mathématique pour la variation du volume intérieur $V_i (P)$ en fonction de la pression artérielle et ***pour une longueur de segment d'artère fixée*** .

En utilisant le concept selon lequel une artère est comme un trou cylindrique dans un milieu élastique infini [10] , la relation mathématique exacte entre le volume intérieur $V_i (P)$ et le diamètre $D_i (P)$ s'écrit :

$$V_i(P) = \frac{\pi L}{4} D_i^2(P) \quad (75)$$

Dans les expériences de Van-Loon et al [10] la longueur $L < L_0$ qui représente la distance entre les points de fixation est ***maintenue constante*** .

Le problème de la modélisation mathématique du volume intérieur V_i revient donc à exprimer le diamètre D_i en fonction de la pression P .

Cette étude théorique a été effectuée dans la première partie de ce travail .Le résultat essentiel obtenu est une fonction $D(P)$ bien adaptée pour l'étude des propriétés rhéologiques des artères relaxées ou contractées .

Ecrivons donc la relation $D(P)$ donnée par l'équation (70) sous la forme :

$$D_i(P) = D_{\min} + (D_{\max} - D_{\min})(1 + M e^{-\alpha P})^{-1} \quad (76)$$

En substituant cette relation (76) dans l'équation (75) on obtient la relation mathématique exacte pour le volume intérieur V_i en fonction de la pression :

$$V_i(P) = \frac{\pi L}{4} \left[D_{\min} + (D_{\max} - D_{\min})(1 + Me^{-\alpha P})^{-1} \right]^2 \quad (77)$$

L'équation (77) mérite une attention particulière à cause de son importance dans notre modèle. En effet, cette équation relie directement les paramètres caractéristiques du diamètre $D(P)$ au volume intérieur V_i . En particulier, nous avons obtenu la relation suivante pour **l'indice de contraction $M(0)$** :

$$M(0) = \frac{D_{\max} - D_0}{D_0 - D_{\min}}$$

Comme nous l'avons indiqué, ce paramètre marque la différence essentielle entre les artères contractées et les artères relaxées. En conséquence, l'influence sélective de ce paramètre sur le volume intérieur sera clairement mise en évidence par notre approche théorique.

Les conditions aux limites utilisées par Van-Loon et al [10] donnent :

$$P = 0 \quad V_0 = \frac{\pi L D_0^2}{4} \quad (78)$$

$$P = \infty \quad V_{\max} = \frac{\pi L D_{\max}^2}{4} \quad (79)$$

En conséquence, en utilisant les équations (78) et (79) on obtient une relation mieux adaptée pour les ajustements aux données expérimentales.

$$V_i(P) = V_{\max} \left[K + (1 - K)(1 + Me^{-\alpha P})^{-1} \right]^2 \quad (80)$$

En posant :

$$K = \frac{D_{\min}}{D_{\max}}$$

Il est intéressant d'observer que l'équation (80) possède deux avantages essentiels :

1°) Cette équation est indépendante de la longueur L du segment d'artère utilisé. En conséquence, la comparaison des paramètres obtenus pour différentes artères est grandement facilitée .

2°) La valeur limite V_{\max} peut être directement estimée sur la courbe expérimentale.

VOLUME-PRESSURE FOR ARTERIES

THE EMPIRICAL MODEL OF VAN-LOON FOR DATA FITTING

$$V_i(P) = V_o + [B + C(L - L_o)](1 - e^{-\alpha P})$$

TABLE IV

The magnitude of the model parameters estimated for a dog femoral artery by Van-Loon et al [17]. L = 2.8 cm

| V_o | B | C | L_o | α | Coefficient of Determination R ² |
|-------------------|-------------------|--------------------|-----------------|----------------------------------|---|
| 0.168 ± 0.005 | 0.163 ± 0.001 | 0.088 ± 0.0003 | 1.92 ± 0.01 | $(1.91 \pm 0.07) \times 10^{-2}$ | 0.998 |

VOLUME-PRESSURE FOR ARTERIES

THE MATHEMATICAL MODEL FOR DATA FITTING

$$V_i(P) = V_{\text{Max}} [K + (1 - K) (1 + Me^{-\alpha P})^{-1}]^2$$

TABLE V

The magnitude of the model parameters estimated for a dog femoral artery

| V_{Max} | K | M | α | ROOT MEAN SQUARE ERROR |
|------------------|----------|----------|---------------------------|---------------------------|
| 0.471541 | 0.215754 | 0.662529 | 1.038184×10^{-2} | 0.01 |

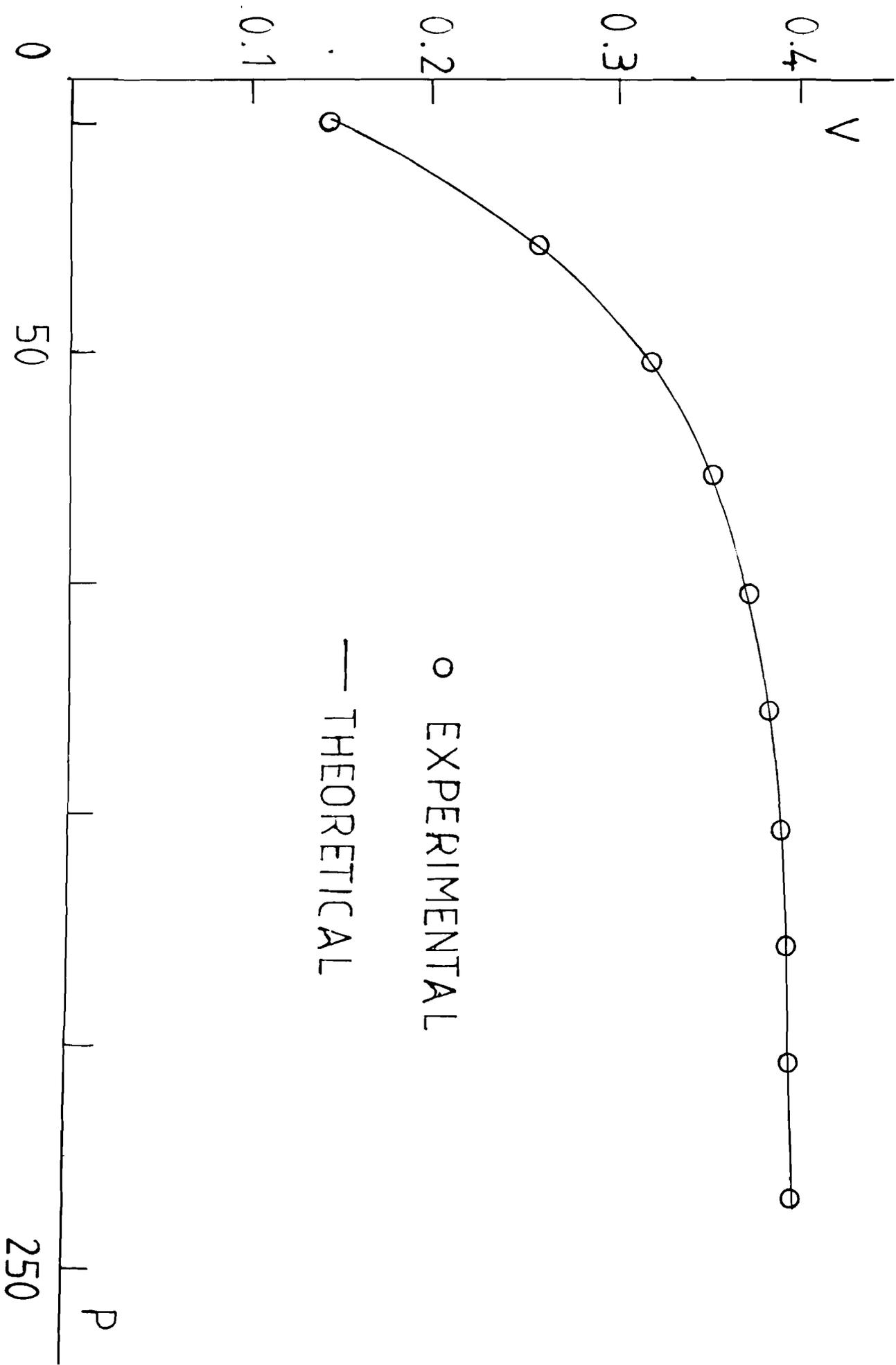


Fig. 8

JUSTIFICATION DES EQUATONS EMPIRIQUES UTILISEES PAR VAN – LOON ET AL [10]

Comme précédemment indiqué, nous allons maintenant montrer comment à l'aide d'approximations adéquates, les équations utilisées par Van-Loon et al [10] pour le volume intérieur V_i découlent directement de notre modèle mathématique.

Pour cela, écrivons l'équation (80) sous la forme développée :

$$V_i(P) = V_{\max} \left[K^2 + 2K(1-K)(1+Me^{-\alpha P})^{-1} + (1-K)^2(1+Me^{-\alpha P})^{-2} \right] \quad (81)$$

Progressons dans cette étude spéciale en faisant l'hypothèse fondamentale suivante :

$$\varepsilon = Me^{-\alpha P} \ll 1 \quad (82)$$

On observe de toute évidence, que la condition (82) est satisfaite seulement si $M=1$, et pour toute valeur de P non nulle.

En prenant en compte ces considérations, nous utilisons dans l'équation (81) un développement en série de Taylor limité au terme du premier ordre pour la quantité ε et nous obtenons :

$$V_i(P) = V_{\max} \left[K^2 + 2K(1-K)(1-e^{-\alpha P}) + (1-K)^2(1-2e^{-\alpha P}) \right] \quad (82)$$

Nous avons l'identité suivante :

$$(1-2e^{-\alpha P}) = 2(1-e^{-\alpha P}) - 1$$

En utilisant cette identité nous écrivons la relation approchée pour le volume spécifique $V_i(p)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} V_i(P) &= V_{\max} \left[K^2 + 2K(1-K)(1-e^{-\alpha P}) + 2(1-K)^2(1-e^{-\alpha P}) - (1-K)^2 \right] \\ &= V_{\max} \left[K^2 - (1-K)^2 + [2K(1-K) + 2(1-K)^2](1-e^{-\alpha P}) \right] \end{aligned}$$

Ce que nous écrivons finalement sous la forme recherchée, soit :

$$V_i(P) = C_1 + (C_2 + C_3)(1-e^{-\alpha P}) \quad (83)$$

avec les définitions suivantes pour les coefficients C_i :

$$\begin{cases} C_1 = (2K^2 - 1)V_{\max} \\ C_2 = 2K(1-K)V_{\max} \\ C_3 = 2(1-K)^2 V_{\max} \end{cases} \quad (84)$$

Pour le problème considéré, il est plus utile de réévaluer directement les coefficients C_i en fonction des valeurs limites de $V_i(P)$. D'une manière précise on obtient :

$$P = 0 \quad ; \quad C_1 = V_0 \quad (85)$$

$$P = \infty \quad ; \quad (C_2 + C_3) = V_{\max} - V_0 \quad (86)$$

L'équation (83) s'écrit finalement :

$$V_i(P) = V_0 + (V_{\max} - V_0)(1 - e^{-\alpha P}) \quad (87)$$

Il est intéressant de noter que l'équation (87) est exactement la formule empirique choisie par Van-Loon et al [10] pour un segment d'artère de longueur L constante avec $L > L_0$.

Cependant, les restrictions pour l'application de la formule (87) ont été soulignées par ces auteurs [10].

En effet, le segment d'artère doit être étiré $L > L_s$. Cependant, la longueur L_s augmente avec la pression, tandis que la longueur L est maintenue constante, lorsqu'on décrit les courbes expérimentales. Il arrive un instant au cours de l'inflation du segment d'artère où $L_s = L$. Après cet instant, on ne peut plus étirer le segment d'artère : une déviation apparaît sur les courbes expérimentales et la formule (87) n'est plus applicable.

Ainsi, pour toutes les familles de courbes obtenues avec un segment d'artère tordue $L > L_0$, la formule suivante a été choisie par Van-Loon et al [10].

$$V_{\max} - V_0 = B + C(L - L_0) \quad (88)$$

Cette relation contient deux nouveaux paramètres B et C et elle est substituée dans l'équation (87) qui s'écrit maintenant sous la nouvelle forme :

$$V_1 = V_0 + [B + C(L - L_0)](1 - e^{-\alpha P}) \quad (89)$$

La relation (89) est celle qui est finalement utilisée pour ajuster toutes les familles de courbes expérimentales. Il est très intéressant de noter que

permet également de justifier l'équation empirique (89) choisie par Van-Loon et al [10]

En effet, il suffit de remarquer que l'équation (88) correspond tout simplement à un choix particulier des constantes C_2 et C_3 , par exemple :

$$\begin{cases} C_2 = B \\ C_3 = C(L - L_0) \end{cases} \quad (90)$$

Nous venons donc de montrer comment à l'aide d'approximations adéquates, nous avons retrouvé très exactement les formules empiriques utilisées par Van-Loon et al [10].

Il est à noter que les calculs effectués pour cette étude spéciale permettent également de comprendre pourquoi la formule (87) utilisée par ces auteurs n'est plus applicable lorsque $L = L_s$, on ne peut plus étirer le segment d'artère.

En effet, cette situation s'explique simplement par l'absence du paramètre $\mathbf{M(0)}$, c'est à dire l'indice de contraction comme coefficient de modulation du terme $\exp(-\alpha\mathbf{P})$ dans la formule (87).

De plus, en utilisant la formule (88) contenant deux paramètres A et B , on prend en compte indirectement l'effet de la constante

$K = D_{\min}/D_{\max}$ qui peut prendre une valeur positive (artère relaxée) ou une valeur négative (artère contractée), suivant les données expérimentales de Fukushima et al [7] que nous avons reportées dans le tableau I

En d'autres termes, notre développement théorique contient des paramètres permettant d'analyser correctement les propriétés rhéologiques des artères.

Finalement, nous avons appliqué les considérations théoriques précédentes à l'étude des données expérimentales de Van-Loon et al [10].

Les valeurs des paramètres de notre modèle mathématique sont obtenues après ajustement aux données expérimentales de Van-Loon et al [10].

Les résultats sont reportés dans le tableau (V) et la courbe de variation du volume intérieur est représentée sur la figure (8)

On observe un excellent accord entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales.

V - PROPRIETES RHEOLOGIQUES DE LA PAROI DES ARTERES RELAXEES OU CONTRACTEES

Jusqu'à présent, nous avons supposé que la viscosité intrinsèque η et le module élastique G dans l'équation (15) sont des constantes du modèle mathématique.

Maintenant supposons que ces paramètres rhéologiques dépendent d'une variable de contrôle x , soit $\eta = \eta(x)$ et $G = G(x)$.

Nous admettons l'hypothèse fondamentale utilisée par Easton [12] dans un autre problème de Biologie mathématique, à savoir que les fonctions $\eta(x)$ et $G(x)$ admettent comme équation d'évolution une équation différentielle non-linéaire de type (15).

Il est intéressant de noter sur ce point que cette hypothèse s'est avérée également être d'une grande utilité pour la recherche des expressions analytiques pour les coefficients de transport en dynamique moléculaire [13,14].

Dans le cas présent, si x représente le diamètre D , les fonctions $\eta(D)$ et $G(D)$ sont immédiatement données par des équations du type (17). Par exemple on peut écrire pour $\eta(D)$ l'équation suivante :

$$\eta(D) = \eta_{\min} + \frac{(\eta_{\max} - \eta_{\min})}{1 + a \exp(-D/\xi)} \quad (91)$$

où $(\eta_{\min}, \eta_{\max}, \xi, a)$ sont des paramètres caractéristiques indépendants de la variable D .

Comme l'a souligné Gow [14] et démontré numériquement par Bauer [5] le coefficient de viscosité de la paroi artérielle en état de relaxation augmente avec la contrainte exercée sur la paroi. En d'autres termes, l'augmentation très marquée des contraintes de viscosité avec l'augmentation du diamètre est en excellent accord avec les résultats expérimentaux. Comme on peut le voir à partir de l'équation (91) il est intéressant de constater que notre modèle mathématique donne une équation d'évolution pour $\eta(D)$ en excellent accord avec les données expérimentales.

D'une manière précise les courbes de $\eta(D)$ pour les artères relaxées ou contractées auront exactement les mêmes comportements que la courbe sigmoïde représentée sur la figure (1).

En conséquence les comportements viscoélastiques de la paroi artérielle respectivement en relaxation et en contraction sont ainsi clairement mis en évidence par notre approche théorique. De plus, nous pouvons également écrire l'évolution du module élastique $G(D)$ une relation du type (17) sous la forme suivante :

$$G(D) = G_{\min} + \frac{(G_{\max} - G_{\min})}{1 + b \exp(-D/\xi)} \quad (92)$$

où $(G_{\min}, G_{\max}, \xi, b)$ sont également des paramètres caractéristiques indépendants de la variable D .

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons élaboré une approche théorique pour la dynamique non – linéaire des artères relaxées ou contractées.

Nous avons utilisé la méthode proposée par Bauer [5] qui consiste à décomposer la contrainte totale σ qui s'exerce sur la paroi de l'artère en trois composantes principales. La première, est la contrainte élastique σ_{elast} , qui dépend de la déformation $\varepsilon(t)$; la seconde, est la contrainte de viscosité σ_{visc} , qui dépend de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}(t)$, et la troisième, la contrainte d'inertie σ_{inert} , qui dépend de la dérivée seconde $\ddot{\varepsilon}(t)$ de la déformation.

En utilisant des hypothèses Physiques et Mathématiques précises, nous avons obtenu une relation diamètre (D) – Pression (P) comme solution d'une équation différentielle de type Riccati. Cette relation analytique D(P) ajuste très bien les données expérimentales publiées par Fukushima et al [7].

De plus, la loi de variation linéaire de la pression en fonction du temps soit $P(t) = vt$ prévue par notre modèle dynamique, est en excellent accord avec la procédure expérimentale utilisée, [10] et qui consiste à soumettre l'artère à une charge et à une décharge de pression effectuées de manière cyclique à une vitesse constante v .

Les résultats encourageants obtenus avec notre modèle mathématique dégagé de tout empirisme , nous ont conduits à reprendre les études effectuées par Van-Loon et al [10] sur les variations de la longueur du segment d'artère et de son volume intérieur en fonction de la pression artérielle .

Comme nous l'avons vu notre approche théorique est un modèle de connaissance [11] (modèle de Verhulst) par opposition au modèle empirique de description utilisé par Van-Loon et al [10] .

Les valeurs des paramètres de notre modèle théorique ,ayant chacun une signification biologique précise , sont donc calculées en utilisant les données expérimentales .

Les travaux numériques indiquent clairement un excellent accord avec les données expérimentales.

ANNEXE A

Synthèse des méthodes classiques pour l'étude des propriétés viscoélastiques des matériaux

Pour mieux situer le centre d'intérêt de nos travaux sur les propriétés rhéologiques des artères , il est important de faire la synthèse des principales méthodes utilisées pour caractériser les propriétés viscoélastiques des matériaux et de montrer comment la méthode de l'équation opératorielle est à la base du formalisme de Bauer [5] utilisant une décomposition des contraintes .

Durant ces dernières années , l'étude des comportements des matériaux viscoélastiques s'est considérablement développée .Pour accompagner ce développement pas moins de sept méthodes ont été utilisées pour caractériser les propriétés (en cisaillement) des matériaux viscoélastiques .

Par la suite Alfrey et Doty [1] ont montré que toutes ces méthodes sont mathématiquement équivalentes et qu'il existe entre elles des relations d'interconnexion bien définies . On considère dans ces études, le cas d'un matériau incompressible, isotrope et viscoélastique.

Les méthodes indiquées peuvent être divisées en deux classes : Dans la classe I, on peut énumérer les quatre méthodes qui sont par nature plus générales et fondamentales .

- A- le modèle de Voigt
- B- le modèle de Maxwell
- C- L'équation opératorielle

$$P\sigma = Q\varepsilon \quad (A1)$$

où P et Q sont des opérateurs différentiels linéaires .

D – La fonction d'impédance mécanique $Z(\omega)$

Dans la classe II, on peut énumérer les courbes expérimentales qui servent à identifier les caractères viscoélastiques des matériaux.

- E – la courbe de fluage
- F- la courbe de relaxation
- G- la courbe du module dynamique

Les méthodes de la classe I sont plus satisfaisantes pour l'étude des propriétés, étant donné qu'elles sont formulées en termes d'équations différentielles qui peuvent être résolues pour une grande variété de conditions transitoires .

Les méthodes de la classe II au contraire , représentent des solutions particulières des équations différentielles fondamentales pour des cas très spéciaux .En conséquence ,ces dernières fonctions ne sont pas toujours bien adaptées pour l'étude d'une grande variété de conditions transitoires .

Notons également que pour ces méthodes on utilise des modèles analogiques,c'est-à-dire qu'on a l'habitude de comparer le comportement de la matière, à celui d'assemblage plus ou moins compliqué d'éléments mécaniques simples .Ainsi le ressort à boudin ,supposé

parfait et sans masse ,est le symbole de la loi de Hooke de module élastique G .L'inverse de G est désigné par la lettre J . Les Anglo-américains notent cette grandeur Θ :la complaisance élastique (elastic compliance).

De même, l'amortisseur représenté par un piston perforé, mobile sans frottement solide dans un cylindre contenant une huile newtonienne de viscosité η , le tout sans inertie , est le symbole de la loi de Newton .

Nous sommes maintenant en mesure de donner de brèves indications sur les sept méthodes énumérées.

A- Modèle de Voigt

Le modèle de Voigt comprend un ressort de module élastique G et un amortisseur de viscosité η en parallèle .L'équation différentielle du système s'écrit :

$$\sigma = G\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (\text{A2})$$

où σ représente la contrainte et ε la déformation .Une grandeur importante du modèle de Voigt est le temps de retardation $\tau = \frac{\eta}{G}$; c'est le temps au bout duquel l'écart entre la déformation et sa valeur définitive est divisée par le nombre e .

Plus généralement, le comportement d'un matériau représenté par n éléments élastiques retardés est régi par une suite de n équations différentielles de la forme :

$$\sigma = G_i\varepsilon_i + \eta_i\dot{\varepsilon}_i ; \quad i = 1,2,\dots, n \quad (\text{A3})$$

avec la condition :

$$\varepsilon = \sum \varepsilon_i \quad (\text{A4})$$

A la limite la suite des éléments discrets du modèle de Voigt peut être remplacée par une distribution continue de complaisance élastique $J(\tau)$, définie comme une fonction du temps de retardation. Dans ce cas la déformation totale est donnée par l'intégrale :

$$\varepsilon(t) = \int \varepsilon^*(t, \tau) d\tau \quad (\text{A5})$$

où la fonction ε^* est gouvernée par l'équation différentielle :

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon^*(t, \tau)}{J(\tau)} + \frac{\tau}{J(\tau)} \frac{\partial \varepsilon^*(t, \varepsilon^*)}{\partial t} \quad (\text{A6})$$

Le modèle de Voigt constitue l'image simple d'un solide viscoélastique. Il s'agit bien d'un solide déformable car par l'intermédiaire du ressort de dureté G les déformations sont nécessairement limitées.

B- Le modèle de Maxwell

Le modèle de maxwell comprend un ressort de dureté G et un amortisseur de viscosité η en série. L'équation différentielle du système s'écrit :

$$\frac{\dot{\sigma}}{G} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\varepsilon} \quad (\text{A7})$$

Comme dans la première méthode , le comportement d'un matériau est gouverné par une suite d'équation différentielle de premier ordre .

$$\frac{\dot{\sigma}_i}{G_i} + \frac{\sigma_i}{\eta_i} = \dot{\varepsilon} \quad (\text{A8})$$

A la limite la suite des éléments discrets du modèle de Maxwell , peut être remplacée par une distribution continue dont le module élastique est défini comme une fonction du temps de retardation $G(\tau)$. La contrainte totale est donnée par l'intégrale :

$$\sigma(t) = \int \sigma^*(t, \tau) d\tau \quad (\text{A9})$$

où la contrainte $\sigma^*(t, \tau)$ est gouvernée par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{G(\tau)} \frac{\partial \sigma^*(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\sigma^*(t, \tau)}{\tau G(\tau)} = \dot{\varepsilon}(t) \quad (\text{A10})$$

Le modèle de Maxwell constitue l'image simple d'un fluide viscoélastique ; puisque la moindre contrainte σ permet au milieu de s'écouler indéfiniment.

En conséquence, on observe que la méthode précédente A met en jeu une suite de n équation différentielle de premier ordre , chacune reliant une fraction de la contrainte avec la déformation totale .

La méthode B met également en jeu une suite de n équations différentielles de premier ordre , chacune reliant une fraction de la contrainte avec la déformation totale .

C - L'équation opératorielle.

Cette méthode , met en jeu une seule équation différentielle d'ordre n , reliant la contrainte totale à la déformation totale , soit :

$$P\sigma = Q\varepsilon$$

où

$$P = \frac{p_n \partial^n}{\partial t^n} + \frac{p_{n-1} \partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \dots + p_0 \quad (\text{A11})$$

$$Q = \frac{q_n \partial^n}{\partial t^n} + \frac{q_{n-1} \partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \dots + q_0 \quad (\text{A12})$$

Les paramètres p_i et q_i fixent les propriétés du matériau viscoélastique. On démontre que le même nombre de paramètres indépendants est nécessaire pour caractériser le matériau, indifféremment de l'usage de la méthode A, B ou C [1]

Pour un matériau caractérisé par une distribution continue de complaisance élastique $J(\tau)$ au lieu d'un modèle avec un nombre fini d'éléments discrets, les opérateurs P et Q doivent prendre également des formes intégrales ou des sommes :

$$P = \int \frac{p(x) \partial^x}{\partial t^x} dx \quad (\text{A13})$$

$$Q = \int \frac{q(x) \partial^x}{\partial t^x} dx \quad (\text{A14})$$

Les propriétés seront maintenant fixées par des fonctions continues au lieu d'une suite de constantes p_i et q_i .

D - La fonction impédance mécanique

L'analogie entre les réseaux électriques et les modèles mécaniques conçus pour décrire le comportement viscoélastique est devenue évidente après avoir été reconnue. La tension correspond à la contrainte, la résistance à la viscosité, et le courant à la dérivée par rapport au temps de la déformation.

En conséquence la réponse stationnaire d'un matériau viscoélastique à une contrainte sinusoïdale $\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t)$ peut être reliée à une impédance mécanique (complexe) fixe $Z = a + ib$ où a est la « résistance visqueuse » η et b la résistance élastique $(-\frac{G}{\omega})$. Ces deux grandeurs dépendent comme il se doit de la fréquence ω .

L'impédance mécanique complexe $Z(\omega)$ fixe les propriétés du matériau viscoélastique d'une manière complètement équivalente à celle des méthodes A, B et C.

De plus, malgré le fait que l'utilisation la plus évidente de la fonction impédance $Z(\omega)$ est en relation avec la réponse stationnaire du système à une contrainte sinusoïdale les transformations de Fourier et de Laplace la rendent aussi générale comme les méthodes A, B et C dans la définition des propriétés viscoélastiques.

E - La courbe de fluage

Dans une expérience de fluage, la contrainte nulle depuis un temps pratiquement indéfini est portée brusquement à une valeur constante σ_0

L'expérimentateur suit les variations de la déformation $\varepsilon(t)$ en fonction du temps . Il détermine la fonction de fluage .

$$\phi(\sigma_0, t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (\text{A15})$$

Une fonction de fluage donnée est consistante seulement avec un modèle de l'un ou l'autre type et avec seulement une seule spécification opératoirelle . Malgré le fait que la fonction de fluage peut être considérée comme une caractéristique des propriétés viscoélastiques des matériaux elle est cependant moins satisfaisante que A, B et D pour cette caractérisation.

F - La courbe de relaxation

La relaxation est presque symétrique du fluage. La déformation nulle depuis longtemps ,est brusquement amenée à une valeur constante ε_0 ; on connaît alors les variations de la contrainte $\sigma(t)$ en fonction du temps et l'on en déduit la fonction de relaxation

$$\Psi(\varepsilon_0, t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (\text{A16})$$

La fonction de relaxation d'un matériau caractérise ses propriétés viscoélastiques de la même manière que la fonction de fluage .

G – La courbe du module dynamique

Lorsque soumis à une contrainte qui varie de manière sinusoïdale $\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t)$, un matériau viscoélastique donnera une réponse avec une déformation $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t - \alpha)$ dans l'état stationnaire. Le rapport $\frac{\alpha}{\varepsilon_0}$ peut être appelé : module dynamique $G(\omega)$ et sera en général une fonction de la fréquence ω .

La fonction module dynamique donnée est constante seulement avec un modèle de l'un ou l'autre type, et avec une seule spécification opératoire. Ainsi la fonction $G(\omega)$ peut être considérée comme une caractéristique des propriétés viscoélastiques des matériaux .

Fondement théorique de la méthode de décomposition de Bauer [5]

Les relations mathématiques précises qui existent entre les sept méthodes de description des propriétés viscoélastiques des matériaux présentent un intérêt certain pour la suite de nos travaux. Cependant, l'exposé de ces résultats sort du cadre de cette annexe. Pour plus de détail consulter les travaux remarquables de Alfrey et Doty [1]

Par contre, comme nous l'avons indiqué il est très utile de montrer d'après la méthode de Bauer comment la décomposition de la contrainte totale σ_{tot} en contrainte élastique $\sigma_{élast}$, en contrainte visqueuse σ_{visc} et en contrainte d'inertie σ_{inert} , résulte de l'équation opératoire C.

En effet, prenons $n = 2$; les relations (A11) et (A12) donnent immédiatement

$$\frac{p_2 \partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \frac{p_1 \partial \sigma}{\partial t} + p_0 \sigma = \frac{q_2 \partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{q_1 \partial \varepsilon}{\partial t} + q_0 \varepsilon \quad (\text{A17})$$

Pour un ressort linéaire tel que $\sigma_{\text{élast}} = G\varepsilon$ et un amortissement linéaire tel que $\sigma_{\text{visc}} = \eta\dot{\varepsilon}$ nous qualifierons de linéaire, le modèle qui satisfait à l'équation opératorielle (A17) lorsqu'il est dépourvu d'inertie.

Le modèle de Bauer [5] est déduit du modèle de Voigt **modifié et non généralisé**. La modification consiste en une association en parallèle d'un ressort non linéaire tel que $\sigma_{\text{élast}} = \varphi_1(\varepsilon)$ où φ_1 est une fonction univoque non linéaire de la déformation ε [15] et d'un amortisseur non linéaire tel que $\sigma_{\text{visc}} = \varphi_2(\dot{\varepsilon})$ où φ_2 est une fonction univoque non linéaire de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ [15]. Comme le système non linéaire possède une inertie, il existe un troisième terme $\sigma_{\text{inert}} = \varphi_3(\ddot{\varepsilon})$. où φ_3 est également une fonction univoque non linéaire de la dérivée seconde de ε [15].

Nous qualifierons donc de non linéaire le modèle qui satisfait à l'équation opératorielle (A17) avec une fonction univoque non linéaire $\varphi(\varepsilon)$ de la déformation ε .

a) Pour obtenir le résultat de Bauer [5] nous écrivons en conformité avec le modèle de Voigt que le premier membre de l'équation (A17) est égal à la contrainte totale imposée soit σ_{tot} , ce qui donne immédiatement pour

$$p_1 = p_2 = 0 \text{ et } p_0 = 1$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{q_2 \partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{q_1 \partial \varphi}{\partial t} + q_0 \varphi \quad (\text{A18})$$

Soit formellement de manière équivalente :

$$\sigma_{tot} = \varphi_1(\varepsilon) + \varphi_2(\dot{\varepsilon}) + \varphi_3(\ddot{\varepsilon}) \quad (\text{A19})$$

Donc

$$\sigma_{tot} = \sigma_{\text{élast}} + \sigma_{\text{visc}} + \sigma_{\text{inert}} \quad (\text{A20})$$

La décomposition de σ_{tot} en trois éléments principaux est donc bien justifiée.

b) Dans ce travail, en utilisant la théorie des déformations finies nous avons obtenu les résultats spécifiques suivants :

$$\varepsilon(t) = \exp\left[\frac{1}{t_c} \int_0^t \lambda(\tau) d\tau\right] \quad (\text{A21})$$

$$\varphi(\varepsilon) = \sum c_\alpha \varepsilon^\alpha \quad (\text{A22})$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_\alpha \alpha c_\alpha \dot{\varepsilon} \varepsilon^{\alpha-1} \quad (\text{A23})$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sum_\alpha \alpha c_\alpha \varepsilon^{\alpha-1} \left[\ddot{\varepsilon} + (\alpha - 1) \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\varepsilon} \right] \quad (\text{A24})$$

En substituant dans l'équation (A18) ces expressions, on obtient :

ANNEXE B

CORRESPONDANCE ENTRE UN MODELE DE VOIGT A QUATRE ELEMENTS ET LE MODELE MATHEMATIQUE

Fukushima et al [7] ont discuté de la correspondance entre le modèle mathématique et un modèle de type Maxwell à trois éléments initialement proposé par Hill pour l'étude du comportement mécanique des muscles squelettiques .Après une analyse du modèle ,Fukushima et al [7] ont conclu que le modèle de Hill est inadapté pour l'étude des muscles lisses .

Nous présentons dans cette annexe un modèle de Voigt à quatre éléments ,deux ressorts de modules G_1 et G_2 ,et deux amortisseurs de viscosité η_1 et η_2 fig (9).

Comme ce modèle de Voigt ne contient qu'un petit nombre d'éléments , on peut aisément établir une équation opératorielle .

Les équations gouvernantes pour ce matériau viscoélastique s'écrivent :

$$\sigma = G_1 \varepsilon_1 + \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 \quad (\text{B1})$$

$$\sigma = G_2 \varepsilon_2 + \eta_2 \dot{\varepsilon}_2 \quad (\text{B2})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (\text{B3})$$

L'équation (B2) peut être écrite en utilisant (B3) sous la forme :

$$\sigma = G_2 \varepsilon + \eta_2 \dot{\varepsilon} - G_2 \varepsilon_1 - \eta_2 \dot{\varepsilon}_1 \quad (\text{B4})$$

En multipliant l'équations (B1) par η_2 , et l'équation (B4) par η_1 , on obtient, en faisant la somme des termes obtenus :

$$\varepsilon_1 = \frac{(\eta_1 + \eta_2)\sigma - \eta_1 G_2 \varepsilon - \eta_1 \eta_2 \dot{\varepsilon}}{K} \quad (\text{B5})$$

en posant :

$$K = \eta_2 G_1 - \eta_1 G_2 \quad (\text{B6})$$

En dérivant cette équation , on obtient directement :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{(\eta_1 + \eta_2)\dot{\sigma} - \eta_1 G_2 \dot{\varepsilon} - \eta_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon}}{K} \quad (\text{B7})$$

En remplaçant dans (B4) ε_1 et $\dot{\varepsilon}_1$ par leurs expressions on obtient :

$$K\sigma = K(G_2\varepsilon + \eta_2\dot{\varepsilon}) - G_2[(\eta_1 + \eta_2)\sigma - \eta_1 G_2\varepsilon - \eta_1 \eta_2 \dot{\varepsilon}] - \eta_2[(\eta_1 + \eta_2)\dot{\sigma} - \eta_1 G_2\dot{\varepsilon} - \eta_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon}] \quad (\text{B8})$$

En regroupant les termes correspondants à la contrainte σ , à la déformation totale ε et ainsi que leurs dérivées, on obtient l'équation opératorielle suivante :

$$[\eta_2(\eta_1 + \eta_2)]\dot{\sigma} + [K + G_2(\eta_1 + \eta_2)]\sigma = [\eta_2(\eta_1 \eta_2)]\ddot{\varepsilon} + [K\eta_2 + 2\eta_1 \eta_2 G_2]\dot{\varepsilon} + [KG_2 + \eta_1 G_2^2]\varepsilon \quad (\text{B9})$$

En remplaçant K par son expression (B6) on obtient l'équation opératorielle recherchée sous la forme :

$$(\eta_1 + \eta_2)\dot{\sigma} + (G_1 + G_2)\sigma = \eta_1 \eta_2 \ddot{\varepsilon} + [\eta_1 G_2 + \eta_2 G_1]\dot{\varepsilon} + G_1 G_2 \varepsilon \quad (\text{B10})$$

En écrivant cette équation sous la forme canonique, on obtient :

$$p_1 \dot{\sigma} + p_0 \sigma = q_2 \ddot{\varepsilon} + q_1 \dot{\varepsilon} + q_0 \varepsilon \quad (\text{B11})$$

en posant :

$$p_2 = 0$$

$$p_1 = \eta_1 + \eta_2 \quad (\text{B12})$$

$$p_0 = G_1 + G_2$$

$$q_2 = \eta_1 + \eta_2$$

$$q_1 = \eta_1 G_2 + \eta_2 G_1 \quad (\text{B13})$$

$$q_0 = G_1 G_2$$

L'équation (B10) mérite une attention particulière à cause de son importance pour notre modèle mathématique.

En effet, cette équation montre que l'on peut toujours choisir les modules élastiques G_1 et G_2 pour satisfaire la condition $p_0 = 1$. Il est également très intéressant de noter que ce modèle de Voigt satisfait directement la condition $p_2 = 0$.

Exemple : $G_1 = \alpha$ $G_2 = 1 - \alpha$

Par contre d'après (B12) l'hypothèse $p_1 = 0$ est **strictement interdite**. En conséquence, la condition nécessaire et suffisante pour obtenir une décomposition de la contrainte totale imposée au système s'écrit :

$$\sigma_{tot} = \sigma = c^{te} \quad (\text{B14})$$

Dans ces conditions, l'équation (B11) s'écrit

$$\sigma_{tot} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon} \quad (\text{B15})$$

De plus ,il est important de noter que la condition (B14) est également compatible avec l'analyse mathématique effectuée précédemment (Annexe A).

En conséquence , si les éléments associés sont des éléments non linéaires , le modèle de Voigt modifié selon le concept de Bauer [5] permet d'écrire comme précédemment :

$$\sigma_{tot} = \varphi_1(\varepsilon) + \varphi_2(\dot{\varepsilon}) + \varphi_3(\ddot{\varepsilon}) \quad (\text{B16})$$

où les φ_i sont des fonctions univoques non linéaires .

En conclusion la correspondance établie entre le modèle de Voigt à quatre éléments , et le modèle mathématique élaboré est acceptable pour décrire les propriétés rhéologiques des artères contractées ou relaxées .

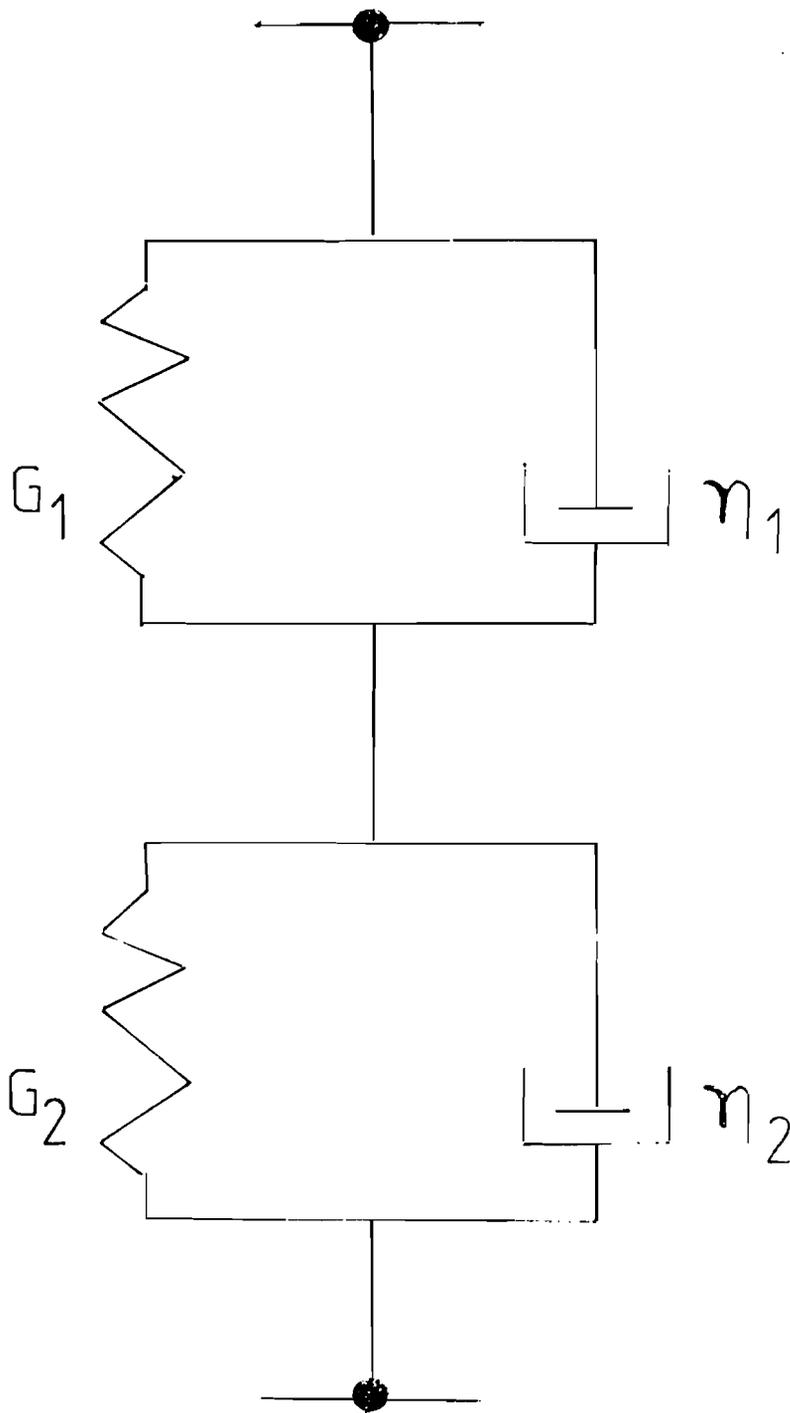


FIG. 9

BILIOGRAPHIE

- 1 - ALFREY, T. and DOTY, T.
J. App. Phys. 16 (1947) 700

- 2- TRUSDELL, C. and NOLL, W.
The non-linear field theories of mechanics. Vol. III
Springer – Verlag (1965)

- 3- GREEN, A. E. and ADKINS, J. F.
Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuous Mechanics.
Oxford, (1960)

- 4 - LOVE, A. E.
The Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge (1927)

- 5- BAUER, R. D.
Biorheology, 21 (1984) 159

- 6- BATEMAN, H. *Partial Differential Equation of Mathematical Physics,*
Cambridge University Press, 1959

- 7 - FUKUSHIMA, T. and HOMA, T. A.
Biorheology. 25 (1988) 37

- 8 - VERHULST, P. F.
Corr. Math et Phys. 10 (1938) 113

- 9 - JOLIVET, E.
Introduction aux Modèles Mathématiques en Biologie, Masson-
Paris (1983)

- 10 – Van LOON, P, WILLEM, K., and BRADLEY
Biorheology. 14 (1977) 181

- 11 - QUEMADA , D.
Standardization in clinical hemorheology.
Société Française de biorhéologie (1987)

- 12 - EASTON, D. M.
Biophys. J. 22 (1978) 15

- 13 - OLATUNJI , L. O.
Biorheology ; 26 (1989) 245

- 14 - GOW, B. S. The influence of vascular smooth muscle on the visco elastic behaviour of blood vessels. In Cardiovascular Fluid Dynamics BERGEL,D.,H. ed. Acad.Press , New-York ,1972, Vol 2, 65-110

- 15 - PERSOZ, B.
Introduction à l'Etude de la Rhéologie, Dunod, Paris (1960

