RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
************
Paix-Travail-Patrie
************
UNIVERSITÉ DE YAOUNDE 1
************
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
*****************
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
*******************

REPUBLIC OF CAMEROON
**********
Peace-Work-Fatherland
************
UNIVERSITY OF YAOUNDE 1
**************
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
****************
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****************

# GÉNÉRALISATION EXISTENTIELLE DANS UN CONTEXTE

**Mémoire rédigé et soutenu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade (DIPES II) en Mathématiques.**

Par

**TCHOMTE – FONKOUA Serge**

PCEG, Licence en Mathématiques

Matricule : 04Y485

**Sous la direction du**

**Pr TEMGOUA ALOMO Etienne Romuald**

Maître de Conférences

**École Normale Supérieure, Université de Yaoundé I**

*Année académique: 2018 - 2019*

# ♣ Dédicace ♣

Je dédie ce mémoire à **mon tuteur le Docteur FEUKOU MAURICE Dickson** pour m'avoir amené à comprendre que la meilleure des satisfactions que l'on devrait avoir est celle du travail bien fait.

# ♣ Remerciements ♣

J'adresse mes remerciements tout d'abord au Seigneur Tout Puissant qui, en m'accordant la vie et la santé a permis que je puisse produire ce mémoire.

Je remercie :

- le **Directeur de l'École Normale Supérieure de l'Université Yaoundé I**, **le Professeur MBALA ZE Barnabé**, pour avoir pris en compte nos doléances en nous accordant un peu plus de temps pour achever nos travaux ;
- le **Personnel Administratif**, nos **Encadreurs** ainsi que nos **Enseignants** et en particulier ceux du **Département de Mathématiques** qui ont porté nos doléances auprès du Directeur de l'ENS de l'Université de Yaoundé I pour le report de la date des soutenances ;
- mon **Directeur de mémoire le Professeur TEMGOUA ALOMO Étienne Romuald** , **Maitre de Conférences** pour sa disponibilité et ses suggestions qui m'ont aidé durant l'élaboration de ce mémoire ;
- Monsieur **KUITCHE Rostand**, pour sa disponibilité et tous les sacrifices consentis pour me permettre de mieux comprendre la notion de généralisation existentielle ;
- les **Auteurs des logiciels libres** (**Lattice minner et TeXstudio**) qui mettent à disposition du public et de manière gratuite une panoplie d'outils indispensables à l'activité de recherche en général et de rédaction en particulier ;
- mes **amis TENKEU JEUFACK Yannick Lea**, **MATCHINDA Deliota Christelle**, **TAZO Fleur Carole**, ainsi que mes **camarades de promotion** pour leur soutien multiforme ;
- mon **épouse PROBO KANG Elise Germaine**, mes enfants **Hannielle, Wilfried, Arthur et Jason** ainsi que ma mère **IBANDE ABAKOR** pour le soutien moral et les soins particuliers pris à mon endroit pour que la production de ce mémoire soit effective, **mes frères et sœurs** et les **autres membres de la famille** pour leur soutien multiforme.

# ♣ Déclaration sur l'honneur ♣

**Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées en bibliographie.**

***Signature du candidat***

***TCHOMTE-FONKOUA Serge***

# ♣ Résumé ♣

L'analyse des Concepts formels joue un rôle très important dans plusieurs domaines de recherche et particulièrement dans l'analyse qualitative et quantitative des bases de données. Ici, des connaissances sont extraites d'un système d'informations ou d'attributs (propriétés). Les connaissances extraites sont appelées concepts formels. Leur nombre a tendance à croître très rapidement rendant ainsi leur analyse difficile. Ainsi la difficulté est de trouver comment réduire le nombre d'informations afin de faciliter leur analyse. Une stratégie consiste à regrouper certains attributs pour en créer d'autres afin de réduire la taille du contexte et espérer une réduction du nombre de concepts. Cette façon de procéder s'appelle **la généralisation sur les attributs**. Généraliser est certes une stratégie, mais dans **[[7], [8]], KWUIDA, TEMGOUA et al** montrent que dans le cas particulier de **la généralisation existentielle**, le nombre de concepts peut croitre de manière exponentielle après une généralisation sur deux attributs au lieu de diminuer comme souhaité. Cela a permis la mise en œuvre d'une mesure de similarité afin de mesurer le rapprochement entre les attributs. La manière de regrouper les attributs serait à l'origine de ce problème. L'objectif de notre travail est d'expliquer de manière détaillée la notion de généralisation existentielle et certains résultats obtenus sur cette notion, d'exposer des exemples et les domaines d'application de ce type de généralisation.

**Mots clés** : Analyse des concepts formels, Concept, Treillis des Concepts et Généralisation existentielle sur les attributs.

# ♣ Abstract ♣

Analysis of formal concepts plays a very role in many domains, particularly into qualitative and quantitative analysis of data bases. Here knowledges are extracted from information system or attributes (properties). Those extracted knowledges are known as formal concepts. Their number happens to quickly grow and therefore makes their analysis difficult. Subsequently, difficulty is to find out how to reduce number of informationin order to case their analysis. A strategy consists in grouping some attributes in order to create others and then reduce context size and hope retrenchment of concepts. This manner of proceeding is known as generalization on attributes. Generalize is certainly a strtegy, but into [8] and [7] it is demontrated in particular case of existential generalization, as number of concepts could exponentially grow through generalization on two attributes instead of diminishing as expected. This as given rise to a measure of similarity in order to measure linking between attributes. Manner of grouping attributes could be to origin of the said problem. Subject our job is explaining in detail notion of existential generalization with obtained results, exposing examples and domains of implementation of that type of generalization.

**Key words** : Formal Concept Analysis, Concept, Concept Lattices ; Existential Generalization on attributs.

# ♣ Table des matières ♣

**Dédicace** **i**

**Remerciements** **ii**

**Déclaration sur l'honneur** **iii**

**Résumé** **iv**

**Abstract** **v**

**Introduction** **1**

**1 PRÉLIMINAIRES** **2**

1.1 Quelques rappels sur la théorie des ensembles . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

1.2 Notion de treillis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.2.1 Définitions et exemples . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

1.2.2 Représentation graphique d'un treillis fini . . . . . . . . . . . . . . . . 6

1.3 Eléments de l'analyse des concepts formels . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

**2 LA GÉNÉRALISATION EXISTENTIELLE** **11**

2.1 Notion de généralisation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

2.2 Problématique de la généralisation existentielle dans un contexte . . . . . . . . 13

2.3 Principe de construction d'une généralisation existentielle . . . . . . . . . . . . 15

2.4 Impact de la généralisation existentielle sur la taille du treillis des concepts . . 17

2.4.1 Nombre de concepts générés après ajout d'un nouvel attribut à un contexte 17

2.4.2 Cas des contextes dont la taille du treillis des concepts augmente après généralisation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

2.4.3 Variation maximale de la taille du treillis des concepts d'un contexte quelconque après une généralisation existentielle . . . . . . . . . . . . 24

**3 MESURE DE SIMILARITÉ ET APPLICATIONS DE LA GÉNÉRALISATION EXISTENTIELLE 30**

3.1 Notion de Mesure de similarité . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

3.1.1 Quelques exemples de mesure de similarité . . . . . . . . . . . . . . . . 31

3.1.2 Mesure de similarité compatible avec la généralisation existentielle . . 33

3.2 Construction des treillis des concepts de quelques contextes généralisés particuliers . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37

3.3 Applications de la généralisation existentielle . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42

**Implication pédagogique 44**

**Conclusion et perspectives 46**

**Bibliographie 47**

# ♣ Introduction ♣

Dans beaucoup d'applications de gestion des bases de données, il devient primordial d'aider les utilisateurs à accéder efficacement aux informations recherchées. Un des procédés consiste à regrouper les instances en classes, elles-mêmes organisées en une hiérarchie, et décrites à un niveau d'abstraction adéquat. La représentation que nous utilisons ici est celle d'un **treillis des concepts** d'un contexte donné. Dans un tel treillis, chaque nœud correspond à une classe représentée par son **extension** (les instances de la classe) et son **intention** (les propriétés communes à la classe exprimées comme un terme d'un langage de classes). Le treillis de concepts constitue une représentation exhaustive des concepts sous-jacents à l'ensemble des instances par rapport au langage de classes (tout sous-ensemble des instances constituant l'extension d'un terme du langage est associé à un et un seul nœud du treillis). La difficulté que présente ce treillis repose sur sa taille qui peut être très grande dans le cas d'applications réelles. Plusieurs techniques ont été proposées pour réduire la taille du treillis en éliminant une partie de ses nœuds. L'approche que nous proposons ici pour contrôler le nombre de nœuds ou concepts est celle de **la généralisation existentielle**. En fait, qu'est ce qu'une généralisation existentielle ? Quel est son problème ? Quel est son principe de construction ? Quels sont les principaux résultats de la généralisation existentielle ? Quels sont les domaines d'application d'une généralisation existentielle ? L'objectif de notre travail est donc de présenter de manière détaillée la généralisation existentielle, son problème, son principe de construction, ces principaux résultats et quelques domaines d'application de cette notion. Pour y parvenir, nous présentons au Chapitre Zéro les notions préliminaires sur la théorie des ensembles, les treillis et l'analyse des concepts formels. Ensuite, au Chapitre un, nous expliquons la notion de généralisation existentielle ainsi que son problème, son principe de construction et son impact sur la taille du treillis des concepts. La notion de mesure de similarité et les applications de ce type de généralisation sont présentés au Chapitre deux.

⋆ ⋆ CHAPITRE ZERO ⋆ ⋆

# PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, pour définir et mieux comprendre la notion de généralisation existentielle, nous donnons quelques résultats importants sur la notion d'ensemble ; sur les notions de treillis, leur représentation et les éléments de l'analyse des concepts formels.

## 1.1 Quelques rappels sur la théorie des ensembles

Dans cette section, nous présentons certaines définitions sur la théorie des ensembles prises dans [5] et [4].
Soient $A$, $B$ et $E$ trois ensembles, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in\{1,2,\dots,n\}}$ une famille d'ensembles.

**Définition 1.1.1.** *(Egalité de deux ensembles)*
*$A$ et $B$ sont dits égaux s'ils possèdent les mêmes éléments. En langage symbolique on écrit :*

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall\, x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

**Définition 1.1.2.** *(L'ensemble vide)*
*On appelle ensemble vide tout ensemble qui ne possède aucun élément ; on le note $\emptyset$.*

**Définition 1.1.3.** *(Sous-ensemble d'un ensemble)*
*$A$ est appelé sous-ensemble de $B$ lorsque tout élément de $A$ est aussi un élément de $B$ ; dans ce cas, on dira que $A$ est inclu dans $B$ ou que $A$ est une partie de $B$ et on écrira : $A \subseteq B$. En langage symbolique on écrit :*

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

*Si $A \subseteq B$ et $A \neq B$, l'on dit que $A$ est un sous ensemble propre ou une partie propre de $B$ et l'on note $A \subset B$.*

**Définition 1.1.4.** *(Ensemble des parties d'un ensemble ou ensemble puissance)*
*L'ensemble des parties de $A$ est l'ensemble constitué de tous les sous-ensembles de $A$. Cet ensemble est noté $\mathcal{P}(A)$. En langage symbolique on écrit :*

$$\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$$

**Définition 1.1.5.** *On note $A \setminus B$ et on lit $A$ moins $B$ l'ensemble des éléments de $A$ qui ne sont pas dans $B$ ; en langage symbolique on écrit :*

$$A \setminus B = \{x | (x \in A) \ \wedge \ (x \notin B)\}$$

***Cas particulier*** *: Lorsque $A \subseteq B$, l'ensemble $B \setminus A$ est appelé complémentaire de $A$ dans $B$.*

**Définition 1.1.6.** *(Intersection de deux ensembles)*
*On appelle intersection de $A$ et de $B$, l'ensemble noté $A \cap B$ constitué des éléments qui appartiennent à la fois à $A$ et à $B$ ; en langage symbolique on écrit :*

$$A \cap B = \{x | \ (x \in A) \ \wedge \ (x \in B)\}.$$

*Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles $A$ et $B$ sont disjoints.*

**Définition 1.1.7.** *(Réunion de deux ensembles)*
*On appelle réunion de $A$ et $B$ l'ensemble noté $A \cup B$ constitué de tous les éléments de $A$ et de tous les éléments de $B$ ; en langage symbolique on écrit :*

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \ \vee \ (x \in B)\}.$$

*On définit également l'intersection et l'union d'une famille d'ensembles. Pour une famille d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, l'intersection de ces ensembles est l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à tous ces ensembles et l'union de ces ensembles est l'ensemble des éléments qui appartiennent au moins à l'un de ces ensembles. L'intersection et l'union de ces ensembles sont respectivement notés $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ et $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ .*

**Définition 1.1.8.** *(Partition d'un ensemble)*
*$\{A_i : i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ est appelée partition de $E$ si les $A_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ satisfont simultanément les propriétés ci-dessous :*

*(i)* $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, A_i \neq \emptyset$

*(ii)* $E = \bigcup\limits_{i \in \{1,2,...,n\}} A_i$

*(iii) Les $A_i$ sont disjoints deux à deux.*

**Définition 1.1.9.** *(couple et n-uplet)*
*Un couple est une paire ordonnée ; c'est également un objet formel $(x, y)$ ou $x$ est le premier élément du couple et $y$ le second élément du couple. De ce fait, il en découle que si $x \neq y$, alors $(x, y) \neq (y, x)$ et $((x, y) = (x', y')) \Leftrightarrow ((x = x') \ \wedge \ (y = y'))$.*
*L'on définit ainsi la notion de n-uplet avec $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ comme une liste ordonnée de $n$ éléments ou encore comme un objet formel $(x_1, x_2, ..., x_n)$ où, $x_i$ est l'élément de la liste ordonnée occupant la i-ième position.*

**Définition 1.1.10.** *(Produit cartésien d'ensembles)*
*L'ensemble noté $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ est appelé produit cartésien des ensembles $A_1, A_2, ..., A_n$ et dont les éléments sont les n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ où chaque $x_i \in A_i$ avec $1 \leq \ i \leq \ n$.*
*Si les $A_i$ sont tous égaux à un ensemble $E$, alors $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \underbrace{E \times E \times ... \times E}_{nfois} = E^n$.*

**Définition 1.1.11.** *(Ensemble fini et cardinal d'un ensemble)*
*$E$ est dit fini si l'on peut compter ses éléments et le nombre d'éléments de $E$ est appelé cardinal de $E$ et noté $Card(E)$ ou tout simplement $|E|$.*

**Définition 1.1.12.** *Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.*

**Proposition 1.1.1.** *[5] Si $A$ et $B$ sont deux ensembles finis et $n \in \mathbb{N}^*$, alors les ensembles $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ , $A \times B, A^n$ et $\mathcal{P}(A)$ sont finis. De plus on a les résultats suivants :*

- $Card(\emptyset) = 0$
- $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$
- $Card(A \smallsetminus B) = Card(A) - Card(A \cap B)$
- $Card(A \cap B) = Card(A) + card(B) - Card(A \cup B)$
- $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$
- $Card(A^n) = (Card(A))^n$
- $Card(\mathcal{P}(A)) = 2^{Card(A)}$
- *Si $A \subseteq B$ alors $Card(A \cup B) = Card(B)$ , $Card(A \cap B) = Card(A)$ , $Card(A \smallsetminus B) = 0$ et $Card(B \smallsetminus A) = Card(B) - Card(A)$.*

**Définition 1.1.13.** *(relation )*
*Tout sous-ensemble $R$ de $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ est appelé relation n-aire. Dans le cas où $n = 2$, $R$ est appelé une relation binaire et l'on note $x \, R \, y$ pour dire que $(x, y) \in R$.*

**Définition 1.1.14.** *(Relation sur un ensemble)*
*Soient $E$ un ensemble non vide et $n \in \mathbb{N}$ , $n \geqslant 2$. On appelle relation n-aire sur $E$ tout sous-ensemble de $E^n$.*

*Soient $R$ une relation binaire sur un ensemble non vide $E$, $x$, $y$ et $z$ trois éléments de $E$. La relation binaire $R$ est dite :*

*(i) Réflexive si : $\forall x \in E$ , $xRx$ .*

*(ii) Antisymétrique si : $\forall x$, $\forall y$, $(((xRy) \wedge (yRx)) \Longrightarrow x = y)$.*

*(iii) Transitive si : $\forall x$, $\forall y$, $\forall z$, $(((xRy) \wedge (yRz)) \Longrightarrow (xRz))$.*

*(iv) Totale à gauche si : $\forall x$, $\exists y$, $xRy$.*

*(v) Totale à droite si : $\forall y$, $\exists x$, $yRx$.*

*(vi) Totale si $R$ est totale à gauche et à droite ou encore si : $\forall x,\ \forall y,\ ((x\,R\,y)\ \vee (y\,R\,x))$.*

*Il existe des relations particulières qui satisfont simultanément certaines de ces propriétés. On peut citer entre autres :*
***La relation d'ordre** qui est une relation à la fois réflexive, antisymétrique et transitive ;*
***La relation d'ordre totale** qui est une relation à la fois d'ordre et une relation totale.*

# 1.2 Notion de treillis

*Dans cette section, nous donnons quelques définitions de la notion de treillis ainsi que la représentation de leur diagramme de HASSE.*

## 1.2.1 Définitions et exemples

**Définition 1.2.1.** *[2] (Borne supérieure)*
*Soient $E$ un ensemble non vide, $X$ un sous-ensemble de $E$ et $R$ une relation d'ordre sur $E$. On appelle borne supérieure de $X$ lorsqu'elle existe, l'unique élément $x_0$ de $E$ noté $Sup(X)$ ou encore $\bigvee X$ tel que $(\forall a \in X,\ a\,R\,x_0)$ et si $(\exists y \in E)$ tel que $(\forall t \in X,\ t \leq y)$ alors $(x_0 \leq y)$. $Sup(X)$ est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de X et lorsque $Sup(X) \in X$, il est appelé maximum de X.*

**Définition 1.2.2.** *[2] (Borne inférieure)*
*Soient $E$ un ensemble non vide, $X$ un sous-ensemble de $E$ et $R$ une relation d'ordre sur $E$. On appelle borne inférieure de $X$ lorsqu'elle existe, l'unique élément $y_0$ de $E$ encore noté $Inf(X)$*

*ou* $\bigwedge X$ *tel que* $(\forall a \in X,\ y_0Ra)$ *et si* $(\exists y \in E)$ *tel que* $(\forall t \in X,\ yRt)$ *alors* $(yRy_0)$. $Inf(X)$ *est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de* $X$ *et lorsque* $Inf(X) \in X$*, il est appelé minimum de* $X$.

**Définition 1.2.3.** *[2] (Définition algébrique d'un treillis)*
*Un treillis est un triplet* $(S; \wedge; \vee)$ *où* $\wedge$ *et* $\vee$ *sont deux opérations binaires de* $S$ *qui vérifient les propriétés suivantes :*

*(i) Associativité :*$\forall x, y, z \in S, (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ *et* $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.

*(ii) Commutativité :* $\forall x, y \in S, x \wedge y = y \wedge x$ *et* $x \vee y = y \vee x$.

*(iii) Idempotente :* $\forall x \in S, x \vee x = x$ *et* $x \wedge x = x$.

*(iv) Loi d'absorption :* $\forall x, y \in S, x \vee (x \wedge y) = x$ *et* $x \wedge (x \vee z) = x$.

**Définition 1.2.4.** *[2] (Définition relationnelle d'un treillis)*
*Un treillis est une paire* $(E, R)$ *où* $E$ *est un ensemble non vide et* $R$ *une relation d'ordre sur* $E$ *telle que pour tout* $(x, y) \in E \times E$, $Inf(\{x, y\})$ *et* $Sup(\{x, y\})$ *existent.*

**Définition 1.2.5.** *[3] (Treillis fini)*
*Un treillis est dit fini lorsque l'ensemble sur lequel on le définit est fini.*

**Exemple 1.2.1.** *Quelques exemples de treillis*

*1)* $(\mathbb{R}, \leq)$ *est un treillis infini .*

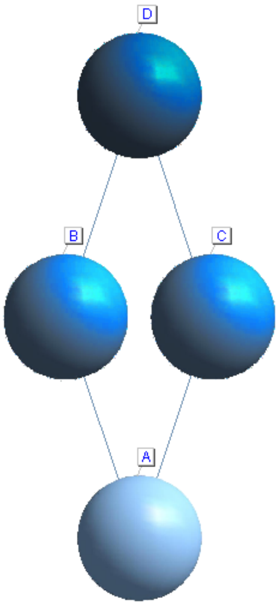
*2) Soient* $A$ *un anneau commutatif et unitaire. Le triplet* $(I(A), \wedge, \vee)$ *est un treillis où* $I(A)$ *est l'ensemble des idéaux de* $A$*,* $\wedge$ *et* $\vee$ *deux opérations binaires définies sur* $I(A)$ *telles que pour tous* $I_1, I_2 \in I(A), I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2$ *et* $I_1 \vee I_2 = I_1 + I_2$.

### 1.2.2 Représentation graphique d'un treillis fini

**Définition 1.2.6.** *La représentation graphique d'un treillis fini* $(E, R)$ *est appelé diagramme de HASSE.*

*La représentation du diagramme de HASSE pour un treillis consiste en la représentation de tous les éléments qui sont en relation par des points ou nœuds reliés par des segments de droite de telle sorte que pour tous* $a, b \in E$, $Inf\{a, b\}$ *et* $Sup\{a, b\}$ *soient situés respectivement en-dessous et au-dessus de* $a$ *et de* $b$*. De plus, s'il existe* $c \in E$ *tel que* $(aRb)$ *et* $(bRc)$ *alors les points* $a$ *et* $c$ *ne sont pas joints.*

**Exemple 1.2.2.** *Considérons les ensembles* $A = \emptyset, B = \{1\}, C = \{2\}, D = \{1, 2\}$ *et* $E = \{A, B, C, D\}$. $(E, \subseteq)$ *est un treillis et* $A \subseteq B$ *;* $B \subseteq D$ *et* $C \subseteq D$*,* $Inf\{A, B\} = A, Sup\{A, B\} = B$*,* $inf\{A, C\} = A, Sup\{A, C\} = C$*,* $inf\{A, D\} = A$ *,* $Sup\{A, D\} = D$*,* $inf\{C, B\} = A, Sup\{C, B\} = D$*,* $inf\{C, D\} = C, Sup\{C, D\} = D$ *et* $inf\{B, D\} = B, Sup\{B, D\} = D$*, le diagramme de HASSE de ce treillis est la figure ci-dessous où l'on peut constater que le segment* $[AD]$ *n'a pas été représenté bien qu'on ait* $A \subseteq D$ *parce que* $A \subseteq B$ *et* $B \subseteq C$*.*




## 1.3 Eléments de l'analyse des concepts formels

*Dans cette section, nous définissons les notions de contexte et concept. Nous présentons également un exemple de contexte et quelques concepts de ce contexte.*

**Définition 1.3.1.** *[3] (Contexte formel)*
*Un contexte formel est un triplet* $(G, M, I)$ *où* $G$ *est un ensemble non vide d'objets,* $M$ *un ensemble non vide d'attributs et* $I$ *une relation binaire entre les éléments de* $G$ *et ceux de* $M$*.*
*Dans le contexte défini ci-dessus l'ensemble vide des objets sera noté* $\emptyset_G$ *et celui des attributs* $\emptyset_M$*.*

**Définition 1.3.2.** *[3] (concept)*
*Soient* $\mathbb{K} := (G, M, I)$ *un contexte formel, A et B deux sous ensembles de G et M respectivement. Le couple* $(A, B)$ *est appelé concept formel de* $\mathbb{K}$ *si* $A' = B$ *et* $B' = A$ *. Dans ce cas,* $A$ *et* $B$ *sont appelés respectivement extension et intention du concept* $(A, B)$

**Définition 1.3.3.** *[3] Soient $(G, M, I)$ un contexte, $g \in G$, $m \in M$, $A \subseteq G$ et $B \subseteq M$. On a les définitions suivantes :*

*i) $g$ est en relation avec $m$ ou $m$ est en relation avec $g$ si $(g, m) \in I$ et on note $gIm$ ;*

*ii) $g$ est en relation avec $B$ si pour tout $m \in B$, $gIm$ et on note $gIB$ ;*

*iii) $m$ est en relation avec $A$ si pour tout $g \in A$, $gIm$ et on note $AIm$ ;*

*(iv) L'ensemble noté $A'$ et défini par $A' = \{m \in M/gIm, \forall g \in A\}$ est l'ensemble des éléments de $M$ qui sont en relation avec tous les objets de $A$ ;*

*(v) L'ensemble noté $B'$ et défini par $B' = \{g \in G/gIm, \forall m \in B\}$ est l'ensemble des objets qui sont en relation avec tous les attributs de $B$.*

**Définition 1.3.4.** *(Contexte réduit)*
*Soit $\mathbb{K} := (G, M, I)$ un contexte. $\mathbb{K} := (G, M, I)$ est dit réduit si pour tout $(x, y) \in M \times M$ avec $x \neq y$ on a $x' \neq y'$ et pour tout $(a, b) \in G \times G$ avec $a \neq b$ on a : $a' \neq b'$.*

**Exemple 1.3.1.** *Considérons le contexte $\mathbb{K}_R$ observé dans un restaurant de la ville de Yaoundé au quartier Tsinga Elobi et décrit par quatre clients 1, 2, 3 et 4 d'un restaurant de la place qui voulaient des plats à emporter. Au menu du jour on avait du Ndolè $(N)$, Haricot $(H)$, sauce tomate $(St)$, sauce d'arachide $(Sa)$, Manioc $(Man)$, Plantain $(P)$ et Macabo $(Mac)$. En désignant par $G$ l'ensemble des clients, $M$ l'ensemble des mets au menu du jour que nous assimilons à l'ensemble des attributs et $I$ la relation qui à chaque client associe les différents mets à emporter par ce client. Ce contexte observé dans ce restaurant est résumé par le tableau ci-dessous :*

| $\mathbb{K}_R$ | $N$ | $H$ | $Mac$ | $Man$ | $P$ | $St$ | $Sa$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | | × | | × | | |
| 2 | × | × | × | × | × | × | × |
| 3 | | × | × | × | × | × | × |
| 4 | × | | × | × | × | | × |

***Interprétation du tableau traduisant ce contexte***

*Les croix observées dans les différentes cases illustrent que l'objet et l'attribut considérés sont en relation. On a : le client 1 a emporté du Ndolè, du Macabo et du Plantain, qui se traduit par $1' = \{N, Mac, P\}$ ; d'une manière analogue, on obtient $2' = M$, $3' = \{H, Mac, Man, P, St, Sa\}$ et $4' = \{N, Mac, Man, P, Sa\}$. L'ensemble $\{H, P\}' = \{2, 3\}$ indique les clients qui ont dans leur commande à la fois le Haricot et le Plantain ; on a également $\emptyset'_G = M$, $\emptyset'_M = G$,*

*$\{P\}' = G$, $G' = \{Mac, P\}$, $\{N, Mac, P\}' = \{1, 2\}$ et $\{1, 2\}' = \{N, Mac, P\}$. Nous pouvons constater que $(\{1, 2\}, \{N, Mac, P\})$ et $(\{3, 4\}, \{H, Mac, Man, P, St, Sa\})$ sont des concepts de ce contexte et que $(\{1\}, \{N, Mac, P\})$ et $(G, \{P\})$ ne sont pas des concepts de ce contexte car $\{N, Mac, P\}' \neq \{1\}$ et $G' \neq \{P\}$. Ce contexte n'est pas un contexte réduit car $H' = St'$ et $H \neq St$.*

**Remarque 1.3.1.** *Soient $(G, M, I)$ un contexte, $A \subseteq G$ et $B \subseteq M$. On a :*

*(i) $A' \subseteq M$ et $B' \subseteq G$ .*

*(ii) $A'' = (A')' = A$ et $B'' = (B')' = B$ si $(A, B)$ est un concept.*

*(iii) $(A, B)$ n'est pas toujours un concept ce qui se justifie dans le cas où l'on a $A' \neq B$ ou $B' \neq A$.*

*(iv) $\emptyset'_G = M$ et $\emptyset'_M = G$ mais on peut avoir $M' \neq \emptyset_G$ ou $G' \neq \emptyset_M$.*

***Autres notations*** *: L'ensemble des concepts du contexte $\mathbb{K}$ sera noté $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$, les ensembles des extensions et des intentions des concepts du contexte $\mathbb{K}$ seront notés respectivement Ext($\mathbb{K}$) et Int($\mathbb{K}$).*

**Proposition 1.3.1.** *[1] Soient $(G, M, I)$ un contexte donné, $A, A_1$ et $A_2$ trois sous-ensembles de $G$ et $B, D$ deux sous-ensembles de $M$. Alors on a :*

$P_1)$ $(A_1 \subseteq A_2) \Longrightarrow A'_2 \subseteq A'_1$.

$P_2)$ *(i)* $A'_1 \cap A'_2 = (A_1 \cup A_2)'$

*(ii)* $A'_1 \cup A'_2 \subseteq (A_1 \cap A_2)'$

$P_3)$ *(i)* $(B', B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow B'' = B$.

*(ii)* $(A, A') \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \Longleftrightarrow A'' = A$.

$P_4)$ *La relation $R$ définie dans $\mathcal{B}(\mathbb{K})$ par :*

$(A_1, B)\ R\ (A_2, D) \Leftrightarrow (A_1 \subseteq A_2)$ *est une relation d'ordre partielle dans $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ et $(\mathfrak{B}(\mathbb{K}), \subseteq)$ est un treillis appelé treillis des concepts.*

$P_5)$ $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| = |Ext(\mathbb{K})| = |Int(\mathbb{K})|$ *si $\mathbb{K}$ est fini.*

***Preuve :***

*$P_1)$ Supposons que $A_1 \subseteq A_2$ et soit $x \in A'_2$ . Alors pour $y \in A_2$ nous avons $yRx$. En particulier pour tout $y \in A_1$, nous avons $yRx$ puisque $A_1 \subseteq A_2$ ; donc $x \in A'_1$ .*

*D'où $A'_2 \subseteq A'_1$ .* ■

*$P_2)$ **(i) :** Soit $x \in A'_1 \cap A'_2$, alors $x \in A'_1$ et $x \in A'_2$. Ceci entraine que pour tout $a \in A_1$ et pour tout $b \in A_2$, nous avons $aRx$ et $bRx$ ; donc pour tout $c \in A_1 \cup A_2$ nous avons $cRx$*

*c'est-à-dire* $x \in (A_1 \cup A_2)'$. *Ceci prouve que* $A_1' \cap A_2' \subseteq (A_1 \cup A_2)'$. *Réciproquement, comme* $A_1 \subseteq (A_1 \cup A_2)$ *et* $A_2 \subseteq (A_1 \cup A_2)$*, nous avons d'après la propriété* $P_1$ $(A_1 \cup A_2)' \subseteq A_1'$ *et* $(A_1 \cup A_2)' \subseteq A_2'$ *; donc* $(A_1 \cup A_2)' \subseteq A_1' \cap A_2'$. $\blacksquare$

***(ii) :*** *Comme* $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ *et* $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$*,* $A_1' \subseteq (A_1 \cap A_2)'$ *et* $A_2' \subseteq (A_1 \cap A_2)'$ *; donc* $A_1' \cup A_2' \subseteq (A_1 \cap A_2)'$. $\blacksquare$

$P_3)$ ***:*** *Cette proposition découle de la définition de* $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ *qui est l'ensemble des concepts du contexte* $\mathbb{K}$. $\blacksquare$

$P_4)$ ***:*** *Soit R la relation définie sur* $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ *telle que pour tout* $(A_1, B), (A_2, C) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$*,*
$(A_1, B)\ R\ (A_2, D) \Leftrightarrow (A_1 \subseteq A_2)$. *Montrons que* $\subseteq$ *est une relation d'ordre partielle.*

*Réflexivité :*

*Comme* $A_1 \subseteq A_1$*,* $(A_1, B)\ R\ (A_1, B)$. *D'où R est réflexive.*

*Antisymétrie :*

*Supposons que* $(A_1, B)\ R\ (A_2, D)$ *et* $(A_2, D)\ R\ (A_1, B)$. *Alors* $A_1 \subseteq A_2$ *et* $A_2 \subseteq A_1$ *ce qui implique que* $A_1 = A_2$. *Ainsi,* $A_1' = A_2'$ *c'est-à-dire* $B = D$ *puisque* $A_1' = B$ *et* $A_2' = D$.
*D'où* $(A_1, B) = (A_2, D)$ *.*

*Transitivité*

*Soit* $(A_3, C) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ *tel que* $(A_1, B)\ R\ (A_2, D)$ *et* $(A_2, D)\ R\ (A_3, C)$ *. Alors,* $A_1 \subseteq A_2$ *et* $A_2 \subseteq A_3$ *ce qui entraine que* $A_1 \subseteq A_3$ *c'est-à-dire* $(A_1, B)\ R\ (A_3, C)$ *.*
*D'où R est transitive. Ce qui achève la preuve que* $\subseteq$ *est un ordre partiel sur* $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ *.*

*Montrons que* $(\mathfrak{B}(\mathbb{K}), \subseteq)$ *est un treillis.*
$\mathfrak{B}(\mathbb{K}) \neq \emptyset$ *puisque* $(G, G') \in (\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ *où* $G$ *est l'ensemble d'objets du contexte* $\mathbb{K}$.
*Soient* $(A_1, B), (A_2, C) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$. *Montrons que* $Inf\{(A_1, B), (A_2, C)\}$ *et* $Sup\{(A_1, B), (A_2, C)\}$ *existent dans* $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ *.*
$((B \cap C)', B \cap C), (A_1 \cap A_2, (A_1 \cap A_2)') \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$. $\blacksquare$

$P_5)$ ***:*** *Pour tout concept* $(A, B)$*, on a* $(A, B) = (A, A') = (B', B)$ *car* $A' = B$ *et* $A = B'$ *; donc on a autant de concepts que d'intentions ou d'extensions.*
*D'où* $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| = |Ext(\mathbb{K})| = |Int(\mathbb{K})|$ *si* $\mathbb{K}$ *est fini.* $\blacksquare$

*Nous venons ainsi de donner quelques définitions et propriétés qui faciliteront la compréhension de la notion de généralisation existentielle dans un contexte.*

CHAPITRE UN

# LA GÉNÉRALISATION EXISTENTIELLE

*Dans ce chapitre, nous définissons la notion de généralisation dans le contexte de notre thème en faisant remarquer que la généralisation existentielle n'est qu'un cas particulier de généralisation. Ensuite, nous présentons le problème que pose ce type de généralisation ainsi que le principe de construction du contexte généralisé par une généralisation existentielle avec exemples à l'appui. Enfin, nous présentons quelques résultats de la généralisation existentielle.*

## 2.1 Notion de généralisation

**Définition 2.1.1.** *(Généralisation)*
*La notion de généralisation dans un contexte consiste à regrouper les objets ou les attributs d'un contexte par blocs et de définir de nouvelle relation qui existe entre* ***les objets et les blocs d'attributs*** *ou* ***les attributs et les blocs d'objets*** *ou entre* ***les blocs d'objets et les blocs d'attributs****.*

*Le cas pratique ci-dessous permet d'illustrer quelques exemples de définitions de cette relation.*

**Exemple 2.1.1.** *Dans le contexte défini à l'exemple 1.3.1, nous pouvons décider de constituer un* ***plat spécial*** *(Pr) en regroupant du* ***Ndolè****, du* ***Macabo*** *et du* ***plantain*** $Pr = (N, Mac, P)$*. La relation qui lie un client à ce plat spécial peut dépendre du nombre d'éléments du plat spécial que ce dernier a commandé. Ainsi, un client peut être en relation avec le plat spécial s'il a par exemple commandé au moins un élément de ce plat ou au moins deux éléments de ce plat ou le plat spécial. Chaque cas de figure cité ci-dessus donne naissance à un contexte nouveau dit contexte généralisé et nous permet de différencier les généralisations.*

*Il existe trois types de généralisation :*

– *la **généralisation universelle** encore notée* $\forall$ *- Généralisation,*

– *la* $\alpha$ *- **Généralisation**,*

– *la **généralisation existentielle** encore notée* $\exists$ *- Généralisation.*

*Une généralisation peut se faire sur les objets ou sur les attributs.*

**Définition 2.1.2.** *[7] Soient $\mathbb{K} := (G, M, I)$ un contexte formel, $\alpha \in ]0; 1]$ et $X \subsetneq M$ tel que $|X| > 1$. Désignons par $s = \bigcup_{x \in X} x$ le nouvel attribut obtenu par regroupement des attributs de X. La généralisation des éléments de $X$ permet d'obtenir un nouveau contexte $\mathbb{K}_{gen} := (G, M_X^s, J)$ avec $M_X^s = (M \setminus X) \cup \{s\}$ et dont la relation $J$ reste à définir.*

*(i) Si la relation $J$ vérifie la condition :*

$$(\forall g \in G, g\ J\ s) \Longleftrightarrow \frac{|\{m \in X/g\ I\ m\}|}{|X|} \geq \alpha$$

*on parle de* $\alpha$ ***- Généralisation**.*

*(ii) Si la relation $J$ vérifie la condition : :*

$$(\forall g \in G, g\ J\ s) \Longleftrightarrow \forall m \in X, g\ I\ m$$

*on parle de **Généralisation universelle** ;*

*(iii) Si la relation $J$ vérifie la condition :*

$$(\forall g \in G, g\ J\ s) \Longleftrightarrow \exists m \in X, g\ I\ m$$

*on parle de **Généralisation existentielle***

**Exemple 2.1.2.** *Considérons $\mathbb{K}_{Rgen}^{Pr} := (\{1, 2, 3, 4\}, \{H, Man, St, Sa, Pr\}, J)$ dont le contexte initial est le contexte $\mathbb{K}_R$ décrit à l'exemple 1.3.1. Rappelons que $Pr = N \cup Mac \cup P$. Nous obtenons les modélisations ci-dessous correspondant à chaque type de généralisation :*

| $\mathbb{K}_R$ | $N$ | $H$ | $Mac$ | $Man$ | $P$ | $St$ | $Sa$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | | $\times$ | | $\times$ | | |
| 2 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 3 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 4 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | | $\times$ |

*Contexte initial*

| $\mathbb{K}_{Rgen}^{Pr}$ | $Pr$ | $H$ | $Man$ | $St$ | $Sa$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | | | | |
| 2 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 4 | $\times$ | | $\times$ | | $\times$ |

$0,5$ *- Généralisation*

| $\mathbb{K}_{Rgen}^{Pr}$ | $Pr$ | $H$ | $Man$ | $St$ | $Sa$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | | | | |
| 2 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 3 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 4 | $\times$ | | $\times$ | | $\times$ |

$\forall$ - *Généralisation*

| $\mathbb{K}_{Rgen}^{Pr}$ | $Pr$ | $H$ | $Man$ | $St$ | $Sa$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | | | | |
| 2 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 4 | $\times$ | | $\times$ | | $\times$ |

$\exists$ - *Généralisation*

*Dans le paragraphe suivant, nous nous intéressons particulièrement à la généralisation existentielle en présentant le problème que pose cette généralisation.*

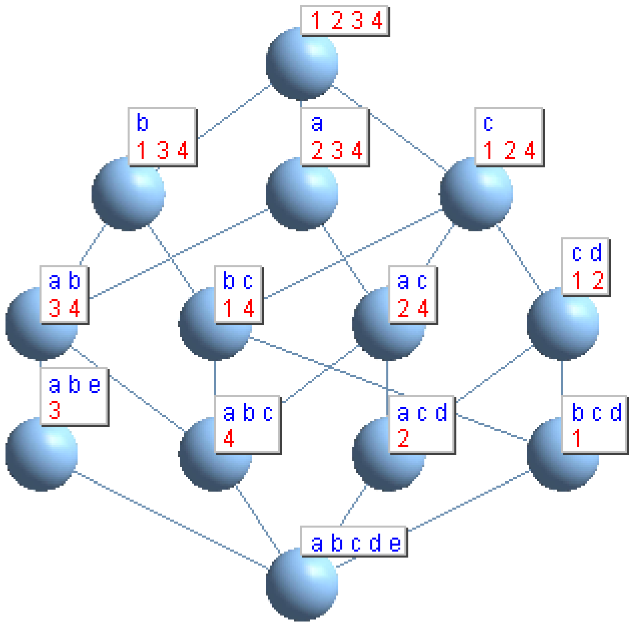
## 2.2 Problématique de la généralisation existentielle dans un contexte

*De nos jours, les entreprises possèdent de grandes bases de données où l'on peut extraire des informations. Lorsque ces informations sont en grande quantité, leur exploitation devient difficile. Pour palier à ce problème, et dans le but de mieux exploiter les informations (concepts) contenues dans ces bases de données, l'une des solutions est de regrouper certains éléments de la base de données en fonction de certaines caractéristiques : c'est* ***la généralisation****. En procédant ainsi, on diminue le nombre d'objets ou d'attributs du contexte initial et par conséquent la taille du contexte. En réduisant la taille du contexte, on espère aussi diminuer la quantité d'informations du contexte afin de mieux les étudier. Mais contrairement à ce qu'on se serait attendu, dans le cas de* ***la généralisation existentielle****, cette quantité d'informations peut augmenter et parfois de manière exponentielle.*

*L'exemple du contexte ci-dessous illustre le problème d'augmentation de la taille du treillis des concepts après une généralisation sur les attributs $d$ et $e$.*

| $\mathbb{K}$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | |
| 2 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | |
| 3 | $\times$ | $\times$ | | | $\times$ |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | | |

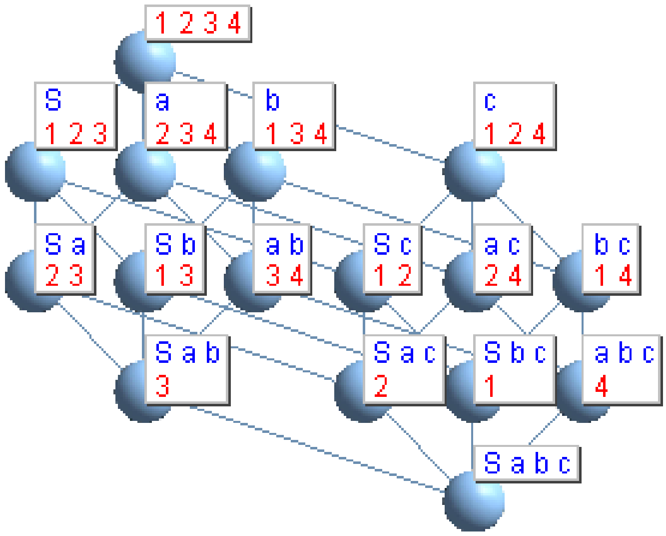
*Contexte initial* $\mathbb{K}$




*Treillis des concepts de* $\mathbb{K}$

| $\mathbb{K}_{gen}$ | $a$ | $b$ | $c$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | | $\times$ |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | |

*Contexte généralisé* $\mathbb{K}_{gen}$




*Treillis des concepts de* $\mathbb{K}_{gen}$

*Nous pouvons remarquer que le treillis des concepts de* $\mathbb{K}_{gen}$ *a trois concepts de plus que le treillis de* $\mathbb{K}$*. Ceci exhibe bien l'existence de tels contextes. Notons également qu'à partir du treillis des concepts d'un contexte, nous pouvons reconstituer le contexte dont celui-ci est issu. Il suffit d'identifier les concepts où chaque objet ou attribut apparait pour le faire.*

*A travers cet exemple, nous pouvons constater que ce problème est bien justifié. Ceci nous amène à nous interroger sur les causes de cette augmentation, sur une caractérisation de tels contextes et ainsi que sur le principe de construction de cette généralisation afin d'atteindre l'objectif visé.*

## 2.3 Principe de construction d'une généralisation existentielle

*Dans cette section, nous présentons le principe de construction d'une généralisation existentielle tout en considérant que cette généralisation s'effectue sur les attributs.*

*Soit* $\mathbb{K} := (G, M, I)$ *un contexte formel,* $X \subsetneq M$*,* $s = \bigcup_{x \in X} x$ *l'attribut généralisé des élément de* $X$ *et* $\mathbb{K}_{gen} := (G, M_X^s, J)$ *avec* $M_X^s = (M \setminus X) \cup \{s\}$ *le contexte obtenu après généralisation existentielle de tous les éléments de* $X$*. Le principe de construction de* $\mathbb{K}_{gen}$ *consiste à ajouter au contexte* $\mathbb{K}$ *l'attribut généralisé* $s$ *par la généralisation existentielle pour obtenir un nouveau contexte* $\mathbb{K}^s := (G, M \cup \{s\}, I^s)$ *avec* $I^s = I \cup \{(g, x), x \in X\}$ *et ensuite enlever à* $\mathbb{K}^s$ *tous les éléments de* $X$ *pour obtenir* $\mathbb{K}_{gen}$*.*

**Exemple 2.3.1.** *Considérons le contexte* $\mathbb{K}$ *défini ci-dessous :*

| $\mathbb{K}$ | $e$ | $f$ | $g$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | | | $\times$ |
| 2 | | $\times$ | | $\times$ | |
| 3 | $\times$ | | $\times$ | | |
| 4 | | | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

*Pour $s = a \cup b$, nous avons :*

| $\mathbb{K}^s$ | $e$ | $f$ | $g$ | $a$ | $b$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | | | $\times$ | $\times$ |
| 2 | | $\times$ | | $\times$ | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | | $\times$ | | | |
| 4 | | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

| $\mathbb{K}_{gen}$ | $e$ | $f$ | $g$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | | $\times$ |
| 2 | | $\times$ | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | | $\times$ | |
| 4 | | | $\times$ | $\times$ |

*Nous pouvons également avoir des cas où nous avons plus d'un attribut généralisé. En considérant les attributs généralisés $u = b \cup e$ et $v = a \cup f$, nous obtenons :*

| $\mathbb{K}^s$ | $e$ | $f$ | $g$ | $a$ | $b$ | $u$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | | | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 2 | | $\times$ | | $\times$ | | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | | $\times$ | | | $\times$ | |
| 4 | | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

| $\mathbb{K}_{gen}$ | $g$ | $u$ | $v$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ |
| 2 | | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

*Nous venons de présenter le principe de construction d'une généralisation existentielle avec quelques exemples illustratifs. Nous avons pu constater que dans ce principe, il est question d'ajouter un nouvel attribut (l'attribut généralisé) dans un premier temps et de retirer les attributs ayant fait l'objet de la généralisation existentielle. Ceci nous amène à nous interroger sur l'impact que pourrait avoir cet ajout sur la taille du treillis des concepts après généralisation. Le paragraphe ci-dessous répond à cette préoccupation.*

## 2.4 Impact de la généralisation existentielle sur la taille du treillis des concepts

*Dans le domaine de recherche de la généralisation existentielle dans un contexte, plusieurs résultats ont été obtenus notamment sur la variation du nombre de concepts du contexte après généralisation. Dans cette section, nous présentons les résultats qui permettent de déterminer la variation du nombre de concepts après généralisation ; ensuite, nous présentons une famille de contextes dans lesquels la généralisation existentielle sur deux attributs précis aboutit à une augmentation de la taille du treillis des concepts. Enfin, nous présentons la variation maximale du nombre de concepts après généralisation sur une paire d'attributs.*

### 2.4.1 Nombre de concepts générés après ajout d'un nouvel attribut à un contexte

*Considérons un contexte $\mathbb{K} := (G, M, I)$ et $a \notin M$ un attribut qui est en relation avec certains éléments de $G$. Nous désignons par $M_a := M \cup \{a\}$ le nouvel ensemble d'attributs et par $\mathbb{K}_a := (G, M_a, I_a)$ le contexte obtenu en ajoutant l'attribut $a$ et la relation $I_a := I \cup J$ avec $J$ l'ensemble des couples $(g, a)$ avec $g \in G$ vérifiant la propriété $a$. Ainsi, on a :*

$$\forall A \subseteq G,\ A^{I_a} = \{m \in M \cup \{a\} |\ g\ I_a\ m,\ \forall g \in A\}.$$

**Proposition 2.4.1.** *[7] Si $\mathbb{K} := (G, M, I)$ et $\mathbb{K}_a := (G, M_a, I_a)$ sont des contextes définis comme ci-dessus, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

*(i) si $A^{I_a} \subseteq M$ alors $A^{I_a} = A^I$ ;*

*(ii) si $a' = G$ alors $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)|$.*

***Preuve :***

*(i).* Soit $A \subseteq G$ tel que $A^{I_a} \subseteq M$. Montrons que $A^{I_a} = A^I$.
On a $A^I \subseteq A^{I_a}$ car $I \subseteq I_a = I \cup J$. Il reste à montrer que $A^{I_a} \subseteq A^I$. Supposons qu'il existe $m_0 \in A^{I_a}$ tel que $m_0 \notin A^I$, alors $m_0 = a$. Comme $A^{I_a} \subseteq M$, $a \in M$ ce qui serait absurde puisque $a \notin M$ par définition de $a$ ; donc $A^{I_a} \subseteq A^I$.
D'où $A^{I_a} = A^I$. $\square$

*(ii).* Supposons que $a' = G$ et montrons que $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)|$.

Soit $x \in Int(\mathbb{K}_a)$ alors, il existe $B \in Int(\mathbb{K})$ tel que $x = B \cup \{a\}$. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} x' &= (B \cup \{a\})' \\ &= B^{I_a} \cap a' \\ &= B^I \cap G \\ &= B^I \end{aligned}$$

Comme $B^I \in Ext(\mathbb{K})$, $x' \in Ext(\mathbb{K})$. Nous venons ainsi de montrer que si $a' = G$, alors on a l'implication $x \in Int(\mathbb{K}_a)$ entraine $x' \in Ext(\mathbb{K})$ par conséquent, $|Int(\mathbb{K}_a)| \leq |Ext(\mathbb{K})|$ c'est-à-dire que $|\mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)| \leq |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|$ (1) puisque $|Int(\mathbb{K})| = |Ext(\mathbb{K})| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|$ pour tout contexte $\mathbb{K}$. De plus comme $I \subseteq I_a$, $Ext(\mathbb{K}) \subseteq Ext(\mathbb{K}_a)$ ce qui entraine que $|Ext(\mathbb{K})| \leq |Ext(\mathbb{K}_a)|$ c'est-à-dire $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| \leq |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)|$ (2). De (1) et (2) on déduit que $|\mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|$. □

■

**Proposition 2.4.2.** *[7] Soit $\mathbb{K}$ un contexte formel et $\mathbb{K}_a$ le contexte obtenu de $\mathbb{K}$ en ajoutant un attribut $a$. L'application $\phi_a$ définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \phi_a: & \mathfrak{B}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{B}(\mathbb{K}_a) \\ & (A,B) & \longmapsto & \begin{cases} (A, B \cup \{a\}) & si \quad A \subseteq a' \\ (A,B) & sinon \end{cases} \end{array}$$

*est une application injective.*

***Preuve :***

*(i) **Montrons que $\phi_a$ est bien définie**.*

*Par définition de $\phi_a$, si $(A_1, B_1)$ et $(A_2, B_2)$ sont deux éléments de $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ tels $(A_1, B_1) = (A_2, B_2)$ alors, $\phi_a((A_1, B_1)) = \phi_a((A_2, B_2))$. Soit $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$.*

*Si $A \subseteq a'$, alors $\phi_a((A, B)) = (A, B \cup \{a\})$ et $(B \cup \{a\})^{I_a} = B' \cap a' = A \cap a' = A$ car $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ et $A \subseteq a'$. De plus, $A^{I_a} = A' \cup \{a\} = B \cup \{a\}$ car $A' = B$. Ce qui prouve bien que $(A, B \cup \{a\}) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)$ .*

*Si $A \nsubseteq a'$, alors $B^{I_a} = A$ et $A^{I_a} = A' = B$ ; donc $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)$. D'où $\phi_a$ est bien définie.*

*(ii) **Montrons que $\phi_a$ est injective.***

*Soient $(A_1, B_1)$ et $(A_2, B_2)$ deux concepts de $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ tels que $\phi_a((A_1, B_1)) = \phi_a((A_2, B_2))$. Montrons que $(A_1, B_1) = (A_2, B_2)$. La définition de $\phi_a$ montre que $A_1 = A_2$. Il reste à montrer que $B_1 = B_2$. Ainsi, comme $A_1 = A_2$ on a les cas $A_1 \subseteq a'$ ou ($A_1 \nsubseteq a'$). Si $A_1 \subseteq a'$, alors $(A_1, B_1 \cup \{a\}) = (A_1, B_2 \cup \{a\})$ c'est-à-dire $(A_1, B_1) = (A_2, B_2)$. Sinon si $A_1 \nsubseteq a'$ et par* *définition de $\phi_a$ on a $(A_1, B_1) = (A_2, B_2)$ .*

*D'où $\phi_a$ est injective.* ■

**Proposition 2.4.3.** *[7] Soit $\mathbb{K}$ un contexte formel et $\mathbb{K}_a$ le contexte obtenu de $\mathbb{K}$ en ajoutant l'attribut $a$, on a $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| \leq |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)|$.*

***Preuve :***

*D'après la Proposition 2.1.1 l'application $\phi_a$ étant injective, on a $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| \leq |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)|$.* ■

*Ce résultat nous permet de conclure que la différence $|\mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|$ détermine exactement le nombre de concepts de $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)$ qui ne figurent pas dans $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$.*

**Conséquence 2.4.1.** *Soient $\mathbb{K}$ un contexte formel, $\mathbb{K}_a$ le contexte obtenu de $\mathbb{K}$ en ajoutant l'attribut $a$ et $(A, B) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$.*

*(i)* $A \cap a' \in Ext(\mathbb{K}_a)$

*(ii) Si $A \cap a' \in Ext(\mathbb{K})$, alors $(A \cap a', (A \cap a')^{I_a}) = (A \cap a', (A \cap a')^{I})$ puisque $(A \cap a') \subseteq A$ implique $(A \cap a')^{I_a} \in Int(\mathfrak{B}(\mathbb{K}))$ c'est-à dire $(A \cap a')^{I_a} \subseteq M$ et d'après (i) de la proposition 2.4.1 nous avons $(A \cap a')^{I_a} = (A \cap a')^{I}$ .*

*(iii) Si $(A \cap a') \in Ext(\mathbb{K})$, alors $(A \cap a', (A \cap a')^{I_a}) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ puisque d'après la remarque (ii) ci-dessus, $(A \cap a', (A \cap a')^{I_a}) = (A \cap a', (A \cap a')^{I})$ et comme $A \cap a' \in Ext(\mathbb{K})$, nous avons $(A \cap a', (A \cap a')^{I}) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ ; d'où le résultat.*

*(iv)* $Si\ (A \cap a') \notin Ext(\mathbb{K})\ alors \begin{cases} (A \cap a', (A \cap a')^{I_a}) \notin \mathfrak{B}(\mathbb{K}) \\ (A \cap a', (A \cap a')^{I_a}) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_a) \end{cases}$

*(v) L'ensemble $\{A \cap a' |\ A \in Ext(\mathbb{K})\ et\ (A \cap a') \notin Ext(\mathbb{K})\}$ est l'ensemble des extensions de $\mathbb{K}_a$ qui ne sont pas dans $\mathbb{K}$.*

**Définition 2.4.1.** *Soient $\mathbb{K}$ un contexte formel, $a$ un attribut de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_a$ le contexte obtenu par ajout de l'attribut $a$ au contexte $\mathbb{K}$. S'il existe $A_1, A_2 \in Ext(\mathbb{K})$ tels que $A_1 \cap a' = A_2 \cap a'$, alors on dit que $A_1$ et $A_2$ coïncident en $a'$.*

**Proposition 2.4.4.** *[7] Soient $\mathbb{K}$ un contexte formel et $\mathbb{K}_a$ le contexte obtenu de $\mathbb{K}$ en ajoutant l'attribut $a$. Soit $\mathbb{H}(a) := \{A \cap a' |\ A \in Ext(\mathbb{K})\ et\ (A \cap a') \notin Ext(\mathbb{K})\}$ et $h(a) = |\mathbb{H}(a)|$. Alors on a les propriétés suivantes :*

*(i) Le nombre de concepts qui s'ajoutent après l'ajout de l'attribut a au contexte $\mathbb{K}$ est :*

$$h(a) = |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|$$

*(ii) Pour tous $A_1, A_2 \in Ext(\mathbb{K})$ tels que $A_1 \neq A_2$. Nous avons :*

*Si $(A_1 \cap a') \notin Ext(\mathbb{K})$ et $(A_1 \cap a') \neq (A_2 \cap a')$ , alors $h(a) = |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|$.*

***Preuve :***

*(i).* Par définition de $\mathbb{H}(a)$ et d'après le (v) de la remarque 2.1.2. , $\mathbb{H}(a)$ est l'ensemble des extensions de $\mathbb{K}_a$ qui ne sont pas dans $Ext(\mathbb{K})$.
Comme $Ext(\mathbb{K}) \subseteq Ext(\mathbb{K}_a)$, $|Ext(\mathbb{K})| + h(a) = |Ext(\mathbb{K}_a)|$. De plus, pour tout contexte $\mathbb{K}$ on a $|Ext(\mathbb{K})| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|$ ceci entraine que $h(a) = |Ext(\mathbb{K}_a)| - |Ext(\mathbb{K})| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_a)| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|$. □

*(ii).* Supposons que pour tout $A_1, A_2 \in Ext(\mathbb{K})$ tels que $A_1 \neq A_2$, $A_1 \cap a' \notin Ext(\mathbb{K})$ et $A_1 \cap a' \neq A_2 \cap a'$. Comme $A_1 \cap a' \notin Ext(\mathbb{K})$, $(A_1, A_1')$ et $(A_1 \cap a', (A_1 \cap a')^{I_a})$ sont deux concepts de $\mathbb{K}_a$ dont seul $(A_1, A_1') \in \mathfrak{B}(\mathbb{K})$, chaque extension de $\mathbb{K}$ génère deux extensions dans $\mathbb{K}_a$. De plus, comme pour tout $A_1,\ A_2 \in Ext(\mathbb{K})$, $A_1 \cap a' \neq A_2 \cap a'$, $|Ext(\mathbb{K}_a)| = 2|Ext(\mathbb{K})|$.
D'où $h(a) = 2|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K})| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|$. □

■

### 2.4.2 Cas des contextes dont la taille du treillis des concepts augmente après généralisation

*Le but de cette sous-section est de montrer qu'il existe des contextes formels dans lesquels la généralisation existentielle de certains attributs augmente de façon exponentielle la taille du treillis des concepts.*
*Soit $n$ un entier naturel non nul et $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, $m_1, m_2 \notin S_n$ . On considère le contexte $\mathbb{K}_n^k := (S_n \cup \{g_1\}, S_n \cup \{m_1, m_2\}, I)$ avec :*

$$g\ I\ m \iff \begin{cases} g,\ m \in S_n & et\ g \neq m \quad ou \\ g = g_1 & et\ m \in S_n \quad ou \\ g \in \{1, 2, ..., k\} & et\ m = m_1 \quad ou \\ g \in S_n \setminus \{1, 2, ..., k\} & et\ m = m_2 \end{cases} (\bigstar)$$

***Etude du cas k = 1***

*Pour $k = 1$, on a le contexte $\mathbb{K}_n^1 := (S_n \cup \{g_1\}, S_n \cup \{m_1, m_2\}, I)$ avec*

$$g\ I\ m \iff \begin{cases} g,\ m \in S_n & et\ g \neq m \quad ou \\ g = g_1 & et\ m \in S_n \quad ou \\ g = 1 & et\ m = m_1 \quad ou \\ g \in S_n \setminus \{1\} & et\ m = m_2 \end{cases} (\bigstar\bigstar)$$

*Le contexte* $\mathbb{K}_n^1$ *est obtenu successivement par ajout de l'attribut* $m_1$ *au contexte* $\mathbb{K}_{n0} := (S_n \cup \{g_1\}, S_n, I_{n0})$ *pour obtenir le contexte* $\mathbb{K}_{n1} := (S_n \cup \{g_1\}, S_n \cup \{m_1\}, I_{n1})$ *et de* $\mathbb{K}_{n1}$ *par ajout de l'attribut* $m_2$ *pour obtenir* $\mathbb{K}_n^1$ *avec :*

$$g\ I_{n0}\ m \iff \begin{cases} g,\ m \in S_n & \text{et } g \neq m \quad \text{ou} \\ g = g_1 & \text{et } m \in S_n \end{cases}$$

$$g\ I_{n1}\ m \iff \begin{cases} g,\ m \in S_n & \text{et } g \neq m \quad \text{ou} \\ g = g_1 & \text{et } m \in S_n \quad \text{ou} \\ g = 1 & \text{et } m = m_1 \end{cases}$$

*Déterminons le nombre de concepts de* $\mathbb{K}_n^1$*.*

*Par définition de* $\mathbb{K}_{n0}$*, nous constatons que* $g_1' = S_n$*, donc* $\mathbb{K}_{n0}$ *a le même nombre de concepts que le contexte* $\mathbb{K}_0 := (S_n, S_n, I_0)$ *avec :*

$$(g\ I_0\ m) \iff (g \neq m).$$

*Comme* $\mathbb{K}_0$ *a exactement* $2^n$ *concepts, il en est de même que* $\mathbb{K}_{n0}$ *. Le contexte* $\mathbb{K}_{n1}$ *a exactement* $2^n + 1$ *concepts car* $\mathbb{H}(m_1) \subseteq \{A_1 \cap m_1' |\ A_1 \in Ext(\mathbb{K}_{n0})\} = \{\emptyset,\ m_1'\}$ *et* $m_1' = \{1\} \notin Ext(\mathbb{K}_{n0})$ *et* $\emptyset \in Ext(\mathbb{K}_{n0})$ *; donc* $\mathbb{H}(m_1) = \{m_1'\}$ *c'est-à-dire que le contexte* $\mathbb{K}_{n1}$ *possède un seul concept de plus que* $\mathbb{K}_{n0}$*. Toute extension* $A = A_1 \cup \{g_1\} \in Ext(\mathbb{K}_{n1})$ *avec* $A_1 \subseteq S_n$ *et* $A \cap m_2' \notin Ext(\mathbb{K}_{n1})$ *génère deux concepts dans* $\mathbb{K}_n^1$ *.*

*Les extensions* $A = A_1 \cup \{g_1\}$ $tels\ que$ $A_1 \subseteq m_2' = \{2, 3, ..., n\}$ *ne coïncident pas sur* $m_2'$ *donc les* $A \in Ext(\mathbb{K}_{n1})$ *tel que* $A_1 \subseteq m_2'$ *génèrent exactement* $2^{n-1}$ *concepts dans* $\mathbb{K}_n^1$ *qui ne sont pas dans* $\mathbb{K}_{n1}$ *ce qui entraine que* $\mathbb{K}_n^1$ *a exactement* $2^n + 1 + 2^{n-1}$ *concepts.*

*Désignons par* $\mathbb{K}_{ngen}^1 := (S_n \cup \{g_1\}, S_n \cup \{s\}, I_s)$ *le contexte généralisé avec une généralisation existentielle sur les attributs* $m_1$ *et* $m_2$ *avec* $s = m_1 \cup m_2$ *et*

$$g\ I_s\ m \iff \begin{cases} g,\ m \in S_n & \text{et } g \neq m \quad \text{ou} \\ g = g_1 & \text{et } m \in S_n \quad \text{ou} \\ g \in S_n & \text{et } m = s \end{cases}.$$

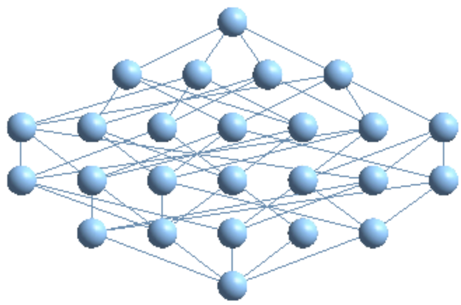
*Le contexte généralisé* $\mathbb{K}_{ngen}^1$ *ainsi défini est isomorphe au contexte* $\mathbb{K} := (S_{n+1}; S_{n+1}, J)$ *avec* $(g\ J\ m) \iff (g \neq m)$ *et donc possède exactement* $2^{n+1}$ *concepts. Ceci nous permet de déduire que la variation du nombre de concepts après généralisation est :*

$$|\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{ngen}^1)| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_n^1)| = 2^{n+1} - (2^n + 2^{n-1} + 1) = 2^{n-1} - 1.$$

*Comme $n \geq 2$ , il y a toujours augmentation du nombre de concepts après généralisation et pour $n$ suffisamment grand, cette augmentation tend vers l'infini. Ceci nous conduit au constat ci-après :* ***il existe des contextes formels dont la taille du treillis augmente de manière exponentielle après une généralisation existentielle****.*

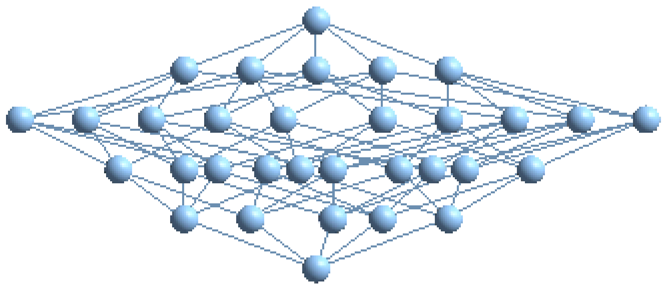
**Exemple 2.4.1.** *Pour $n = 4$, nous avons :*

| $\mathbb{K}_4^1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $m_1$ | $m_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | |
| 2 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | | $\times$ | | $\times$ |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | | | $\times$ |
| $g_1$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | | |



*Nous avons 25 concepts pour $\mathbb{K}_4^1$.*

| $\mathbb{K}_{4gen}^1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | | $\times$ | $\times$ |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | | $\times$ |
| $g_1$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | |



*Nous avons $32$ concepts pour $\mathbb{K}_{4gen}^1$. La variation du nombre de concepts est donc de $7$ concepts et l'on n'a bien : $2^{4-1} - 1 = 7 = 32 - 25$.*

**Proposition 2.4.5.** *[7] Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $\mathbb{K}_n^1 := (S_n \cup \{g_1\}, S_n \cup \{m_1, m_2\}, I)$ défini en $(\bigstar\bigstar)$. La généralisation existentielle sur les attributs $m_1$ et $m_2$ augmente la taille du treillis des concepts de $2^{n-1} - 1$ concepts.*

***Preuve :***

*La preuve de ce résultat est l'étude faite ci-dessus sur les contextes $\mathbb{K}_n^k$ dans le cas où $k = 1$.* ■

***Etude du cas général*** *:*

*Dans le cas générale, nous avons le résultat suivant :*

**Proposition 2.4.6.** *[7] Soient $n \geq 2$, $1 \leq k < n$ et $\mathbb{K}_n^k$ le contexte défini par $(\bigstar)$.*

*(i) Le contexte $\mathbb{K}_n^k$ a exactement $2^n + 2^{n-k} + 2^k - 1$ concepts.*

*(ii) Le nombre de concepts qui s'ajoutent après la généralisation existentielle sur les attributs $m_1$ et $m_2$ est :* $2^n - 2^{n-k} - 2^k + 1$.

***Preuve :***

*(i).* Pour obtenir le contexte $\mathbb{K}_n^k$, l'on ajoute $m_1$ au contexte $\mathbb{K}_{n0} := (S_n \cup \{g_1\}, S_n, I_0)$ pour obtenir le contexte $\mathbb{K}_{n1}^k := (S_n \cup \{g_1\}, S_n, I_{1k})$ et de $\mathbb{K}_{n1}^k$ on ajoute $m_2$ pour enfin avoir $\mathbb{K}_n^k$ où

$$g \; I_{1k} \; m \iff \begin{cases} g,\ m \in S_n & et\ g \neq m \quad ou \\ g = g_1 & et\ m \in S_n \quad ou \\ g \in \{1; 2; ...; k\} & et\ m = m_1 \end{cases}$$

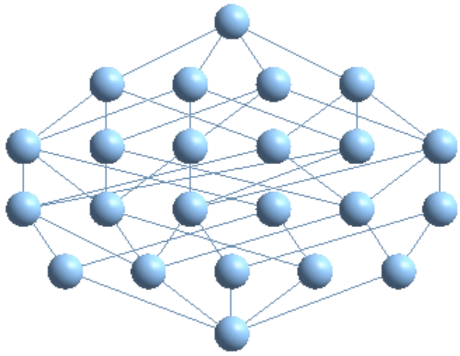
Les extensions de $\mathbb{K}_{n0}$ sont sous la forme $A \cup \{g_1\}$ avec $A \subseteq S_n$ c'est-à-dire que à chaque partie de $S_n$ est associé une extension de $\mathbb{K}_{n0}$ ; donc $\mathbb{K}_{n0}$ a exactement $2^n$ extensions ; donc $2^n$ concepts. Les concepts de $\mathbb{K}_{n1}^k$ sont sous la forme $(A \cup \{g_1\}, S_n \setminus A)$ avec $A \subseteq S_n$ ou sous la forme $(A \cup \{g_1\}, (S_n \setminus A) \cup \{m_1\})$ avec $A \subseteq \{1; 2; ...; k\}$. Lorsque $A \subseteq S_n$, tous ces concepts sont des concepts de $\mathbb{K}_{n0}$. Ainsi, les concepts qui s'ajoutent au contexte $\mathbb{K}_{n0}$ pour obtenir le contexte $\mathbb{K}_{n1}^k$ sont de la forme $(A \cup \{g_1\}, (S_n \setminus A) \cup \{m_1\})$ avec $A \subseteq \{1; 2; ...; k\}$ soit exactement $2^k$ concepts correspondant au nombre total de parties de l'ensemble $\{1; 2; ...; k\}$. De ce fait le contexte $\mathbb{K}_{n1}^k$ possède exactement $2^n + 2^k$ concepts. Comme le contexte $\mathbb{K}_n^k$ s'obtient finalement à partir du contexte $\mathbb{K}_{n1}^k$, les concepts qui s'ajoutent à ce contexte sont tous de la forme $(A \cup \{g_1\}, ((S_n \setminus A) \cup \{m_1\}) \cup \{m_2\})$ avec $A \subseteq S_n \setminus \{1; 2; ...; k\}$ et $A \neq \emptyset$ car si $A = \emptyset$, $(A \cup \{g_1\})' = g_1' = S_n \setminus \{1; 2; ...; k\} \neq (S_n \cup \{m_1\}) \cup \{m_2\}$. Ainsi, le nombre de concepts qui s'ajoutent au contexte $\mathbb{K}_{n1}^k$ est $2^{n-k} - 1$.
D'où le nombre de concepts du contexte $\mathbb{K}_n^k$ est $2^n + 2^{n-k} + 2^k - 1$. □

*(ii).* Le contexte $\mathbb{K}_n^k$ est défini exactement comme le contexte $\mathbb{K}_{(n+1)0}$ donc possède exactement $2^{n+1}$ concepts. Ainsi, le nombre de concepts qui s'ajoutent après généralisation est égal à : $2^{n+1} - (2^n + 2^{n-k} + 2^k - 1) = 2 \times 2^n - 2^n - 2^{n-k} - 2^k + 1 = 2^n - 2^{n-k} - 2^k + 1$. □

■

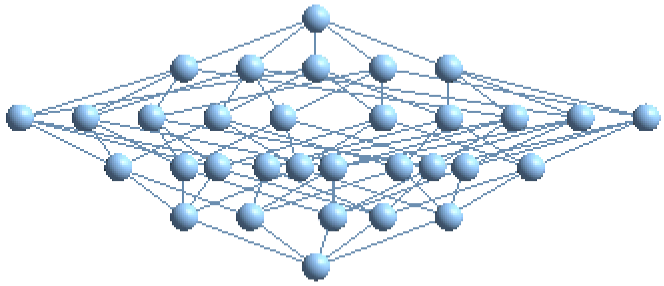
**Exemple 2.4.2.** *Pour $n = 4$ et $k = 2$ nous avons :*

| $\mathbb{K}_4^2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $m_1$ | $m_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | |
| 2 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | |
| 3 | $\times$ | $\times$ | | $\times$ | | $\times$ |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | | | $\times$ |
| $g_1$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | | |



*Nous avons* $23$ *concepts et* $2^4 + 2^2 + 2^2 - 1 = 23$ *pour* $\mathbb{K}_4^2$.

| $\mathbb{K}_{4gen}^2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | | $\times$ | $\times$ |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | | $\times$ |
| $g_1$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | |



*Nous avons* $32$ *concepts pour* $\mathbb{K}_{4gen}^2$*, soit* $9$ *concepts qui s'ajoutent après généralisation et* $2^4 - 2^2 - 2^2 + 1 = 9$.

### 2.4.3 Variation maximale de la taille du treillis des concepts d'un contexte quelconque après une généralisation existentielle

*Dans cette sous-section nous nous intéressons au maximum de concepts qui s'ajoutent après une généralisation existentielle de deux attributs pour un contexte quelconque.*
*Considérons un contexte* $\mathbb{K} := (G, M, I)$ *et* $a,\ b \in M$ *les attributs à généraliser. Le contexte* $\mathbb{K} := (G, M, I)$ *s'obtient de* $\mathbb{K}_{00}$ *par ajout de l'attribut* $a$ *à* $\mathbb{K}_{00}$ *pour obtenir le contexte* $\mathbb{K}^a$ *et par la suite par ajout de l'attribut* $b$ *à* $\mathbb{K}^a$ *; où* $\mathbb{K}_{00} := (G, M_0, I_{00})$ *et* $\mathbb{K}^a := (G, M_0 \cup \{a\}, I_a)$ *avec* $M_0 = M \setminus \{a, b\}$*. Désignons par* $s$ *l'attribut obtenu par généralisation des attributs* $a$ *et* $b$ *et posons* $s = a \cup b$ *et* $m = a \cap b$*, alors on a :* $s' = a' \cup b'$ *et* $m' = a' \cap b'$*.*

**Définition 2.4.2.** *Soit* $\mathbb{K} := (G, M, I)$ *un contexte.* $\mathbb{K}$ *est un contexte réduit si :*

$$\forall a, b \in G / a \neq b, a' \neq b' \text{ et } \forall c, d \in M / c \neq d, c' \neq d'$$

**Théorème 2.4.1.** *[7] Soient* $\mathbb{K} := (G, M, I)$ *un contexte réduit avec* $|G| \geq 3$ *et* $|M| \geq 3$*,* $a$ *et* $b$ *deux attributs à généraliser. Alors nous avons :*

*(i)* $|\mathfrak{B}(G, M, I)| = |\mathfrak{B}(G, M_0, I)| + |\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b) \cup \mathbb{H}(a \cap b)|$.

*(ii) Après généralisation, on a :* $|\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{gen})| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K})| \leq 2^{|a'|+|b'|} - 2^{|a'|} - 2^{|b'|} + 1$.

***Preuve :***

*(i).* Soient $a$ et $b$ deux attributs. Le contexte $\mathbb{K}$ est obtenu du contexte $\mathbb{K}_{00}$ par ajout de l'attribut $a$ au contexte $\mathbb{K}_{00}$ pour donner le contexte $\mathbb{K}_{01}$ ensuite par ajout de l'attribut $b$ au contexte $\mathbb{K}_{01}$. Posons :

- $\mathbb{H}(a) = \{A \cap a' \mid A \in Ext(\mathbb{K}_{00}) \ et \ A \cap a' \notin Ext(\mathbb{K}_{00})\}$
- $\mathbb{H}(b) = \{A \cap b' \mid A \in Ext(\mathbb{K}_{00}) \ et \ A \cap b' \notin Ext(\mathbb{K}_{00})\}$
- $\mathbb{H}(m) = \mathbb{H}(a \cap b) = \{A \cap a' \cap b' \mid A \in Ext(\mathbb{K}_{00}) \ et \ A \cap a' \cap b' \notin Ext(\mathbb{K}_{00})\}$
- $\mathbb{H}(s) = \mathbb{H}(a \cup b) = \{A \cap (a' \cup b') \mid A \in Ext(\mathbb{K}_{00}) \ et \ A \cap (a' \cup b') \notin Ext(\mathbb{K}_{00})\}$

Les ensembles $\mathbb{H}(a)$, $\mathbb{H}(b)$, $\mathbb{H}(m)$ et $\mathbb{H}(s)$ représentent respectivement les ensembles d'extensions qui s'ajoutent à l'ensemble des extensions du contexte $\mathbb{K}_{00}$ après ajout des attributs $a$, $b$, $m$ et $s$ respectivement au contexte $\mathbb{K}_{00}$. Ainsi, comme le nombre d'extensions d'un contexte est égale au nombre de concepts de ce contexte ; $|\mathbb{H}(a)|$, $|\mathbb{H}(b)|$, $|\mathbb{H}(m)|$ et $|\mathbb{H}(s)|$ représentent les nombres de concepts qui s'ajoutent au contexte $\mathbb{K}_{00}$ par ajout des attributs $a$, $b$, $m$ et $s$ respectivement à ce contexte. Désignons par $h(x) = |\mathbb{H}(x)|$ pour tout $x \in \{a, \ b, \ s, \ m\}$ et par $h^*(b) = |\{A \cap b' \mid A \in Ext(\mathbb{K}^a) \ et \ (A \cap b') \notin Ext(\mathbb{K}^a)\}|$ le nombre de concepts qui s'ajoutent au contexte $\mathbb{K}_{01}$ par ajout de l'attribut $b$ au contexte $\mathbb{K}^a$. Comme le contexte $\mathbb{K}$ est obtenu par ajout de l'attribut $b$ au contexte $\mathbb{K}^a$, d'après la proposition 2.4.4, nous avons : $h^*(b) = |\mathfrak{B}(\mathbb{K})| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K}^a)|$ c'est-à-dire $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| = h^*(b) + |\mathfrak{B}(\mathbb{K}^a)| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{00})| + h(a) + h^*(b)$ car $|\mathfrak{B}(\mathbb{K}^a)| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{00})| + h(a)$.

Déterminons $h^*(b)$ en fonction de $h(b)$ et $h(a \cap b)$.

$Ext(\mathbb{K}^a) = Ext(\mathbb{K}_{00}) \cup \mathbb{H}(a)$. Alors nous avons :

$\mathbb{H}^*(b) = \{B \cap b' \mid B \in Ext(\mathbb{K}^a), (B \cap b') \notin Ext(\mathbb{K}^a)\}$. En remplaçant $Ext(\mathbb{K}^a)$, nous obtenons $\mathbb{H}^*(b) = \{B \cap b' \mid B \in Ext(\mathbb{K}_{00}) \cup \mathbb{H}(a), (B \cap b') \notin Ext(\mathbb{K}^a)\} = \{B \cap b' \mid B \in Ext(\mathbb{K}_{00}), (B \cap b') \notin Ext(\mathbb{K}^a)\} \cup \{B \cap b' \mid B \in \mathbb{H}(a), (B \cap b') \notin Ext(\mathbb{K}^a)\}$. En remplaçant à nouveau $Ext(\mathbb{K}^a)$, on obtient $\{B \cap b' \mid B \in Ext(\mathbb{K}_{00}), (B \cap b') \notin Ext(\mathbb{K}^a)\} = \{B \cap b' \mid B \in Ext(\mathbb{K}_{00}), (B \cap b') \notin Ext(\mathbb{K}_{00}) \ et \ (B \cap b') \notin \mathbb{H}(a)\} = \mathbb{H}(b) \setminus \mathbb{H}(a)$ et $\{B \cap b' \mid B \in \mathbb{H}(a), (B \cap b') \notin Ext(\mathbb{K}^a)\} = \{B \cap b' \mid B \in \mathbb{H}(a), (B \cap b') \notin Ext(\mathbb{K}_{00}) \ et \ (B \cap b') \notin \mathbb{H}(a)\} = \{A \cap a' \cap b' \mid A \in Ext(\mathbb{K}_{00}), (A \cap a') \notin Ext(\mathbb{K}_{00}), (A \cap a' \cap b') \notin Ext(\mathbb{K}_{00}) \ et \ (A \cap a' \cap b') \notin \mathbb{H}(a)\}$ car $B \in \mathbb{H}(a)$ s'il existe $A \in Ext(\mathbb{K}_{00})$ tel que $(A \cap a') \notin Ext(\mathbb{K}_{00})$ et $B = A \cap a'$ ; donc $\mathbb{H}^*(b) = (\mathbb{H}(a \cap b) \setminus (\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b))) \cup (\mathbb{H}(b) \setminus \mathbb{H}(a))$. Posons $E = \mathbb{H}(a \cap b) \setminus (\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b))$

et $F = \mathbb{H}(b) \setminus \mathbb{H}(a)$. Nous pouvons remarquer que $E \cap F = \emptyset$ et $\mathbb{H}^*(b) = E \cup F$. Il s'en suit que $h^*(b) = |E| + |F| = h(a \cap b) - |\mathbb{H}(a \cap b) \cap (\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b))| + h(b) - |\mathbb{H}(b) \cap \mathbb{H}(a)| = h(a \cap b) - h(a \cap b) - h(a) - h(b) + |\mathbb{H}(b) \cap \mathbb{H}(a)| + |\mathbb{H}(b) \cup \mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(a \cap b)| + h(b) - |\mathbb{H}(b) \cap \mathbb{H}(a)| = |\mathbb{H}(b) \cup \mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(a \cap b)| - h(a)$ ; ceci entraine que $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{00})| + h(a) + h^*(b) = |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{00})| + h(a) - h(a) + |\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b) \cup \mathbb{H}(a \cap b)|$.
D'où $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{00})| + |\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b) \cup \mathbb{H}(a \cap b)|$. □

*(ii).* Montrons que $|\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{gen})| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K})| \leq 2^{|a'|+|b'|} - 2^{|a'|} - 2^{|b'|} + 1$.
$|\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{gen})| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{00})| + h(s)$; donc $|\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{gen})| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K})| = h(a \cup b) - |\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b) \cup \mathbb{H}(a \cap b)|$.
Posons $h(a,b) = |\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b) \cup \mathbb{H}(a \cap b)|$. Comme pour tout attribut $e$, $\mathbb{H}(e)$ est contenu dans l'ensemble des parties de $e'$, nous avons :

$$\begin{cases} h(a) \leq 2^{|a'|} \\ h(b) \leq 2^{|b'|} \\ h(s) \leq 2^{|s'|} \end{cases}.$$

Ainsi il existe $d_0,\ d_1\ et\ d_2 \in \mathbb{N}$ tels que : $\begin{cases} h(a) = 2^{|a'|} - d_1 \\ h(b) = 2^{|b'|} - d_2 \\ h(a \cup b) = 2^{|a' \cup b'|} - d_0 \end{cases}$

.

En réalité, $\begin{cases} d_1 = |\{A \subseteq a' \mid A \in Ext(\mathbb{K}_{00})\}| \\ d_2 = |\{A \subseteq b' \mid A \in Ext(\mathbb{K}_{00})\}| \\ d_0 = |\{A \subseteq (a' \cup b') \mid A \in Ext(\mathbb{K}_{00})\}| \end{cases}$

Par définition de $d_0,\ d_1\ et\ d_2$, on a : $d_1 + d_2 \leq d_0$ et

$$\begin{array}{rcl} |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{gen})| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K})| & = & h(s) - h(a,b) \\ & = & h(a \cup b) - |\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b) \cup \mathbb{H}(a \cap b)| \\ & = & h(a \cup b) - (|\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b)| + |\mathbb{H}(a \cap b)| - |(\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b)) \cap \mathbb{H}(a \cap b)|) \\ & = & h(a \cup b) - |\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b)| - |\mathbb{H}(a \cap b)| + |(\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b)) \cap \mathbb{H}(a \cap b)| \\ & \leq & h(a \cup b) - |\mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b)| \\ & \leq & h(a \cup b) - |\mathbb{H}(a)| - |\mathbb{H}(b)| + |\mathbb{H}(a) \cap \mathbb{H}(b)| \\ & \leq & h(a \cup b) - h(a) - h(b) + |\mathbb{H}(a) \cap \mathbb{H}(b)| \\ & \leq & (2^{|a' \cup b'|} - d_0) - (2^{|a'|} - d_1) - (2^{|b'|} - d_2) + |\mathbb{H}(a) \cap \mathbb{H}(b)| \\ & \leq & 2^{|a' \cup b'|} + |\mathbb{H}(a) \cap \mathbb{H}(b)| - 2^{|a'|} - 2^{|b'|} + (d_1 + d_2 - d_0) \\ & \leq & 2^{|a'|+|b'|} - 2^{|a'|} - 2^{|b'|} + |\mathbb{H}(a) \cap \mathbb{H}(b)| \quad car\ (d_1 + d_2 - d_0) \leq 0 \\ & \leq & 2^{|a'|+|b'|} - 2^{|a'|} - 2^{|b'|} + 1 \end{array}$$

car le gain maximum est atteint lorsque $a' \cap b' = \emptyset$ et dans ce cas, nous avons $|\mathbb{H}(a) \cap \mathbb{H}(b)| \leq 1$. Supposons que $a' \cap b' = \emptyset$. Si $\mathbb{H}(a) \cap \mathbb{H}(b) = \emptyset$ alors, le résultat est immédiat puisque dans ce cas $|\mathbb{H}(a) \cap \mathbb{H}(b)| = 0$. Sinon pour $x \in \mathbb{H}(a) \cap \mathbb{H}(b)$, il existe $A,\ B \in Ext(\mathbb{K}_{00})$ tel que $x = A \cap a' = B \cap b'$ ; ainsi $x = (x \cap x) = (A \cap a') \cap (B \cap b') = (A \cap B) \cap (a' \cap b') = \emptyset$ ; donc $\mathbb{H}(a) \cap \mathbb{H}(b) = \{\emptyset\}$ et nous avons le résultat. □

■

**Remarque 2.4.1.** *Soient $\mathbb{K}$ un contexte formel réduit tel que $|G| \geq 3$ et $|M| \geq 3$ et $\mathbb{K}_{gen}$ le contexte obtenu après généralisation de deux attributs $a$ et $b$. Nous remarquons qu'après généralisation, nous avons :*

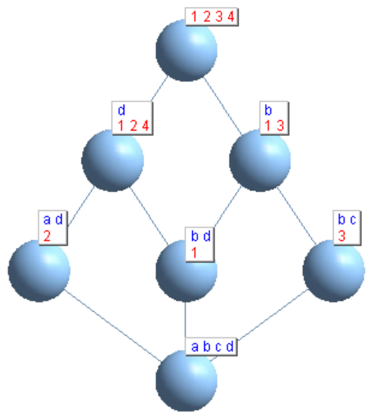
- *La taille du treillis des concepts qui diminue si et seulement si $h(a \cup b) - h(a, b) \lneq 0$ ;*
- *La taille du treillis des concepts qui augmente si et seulement si $h(a \cup b) - h(a, b) \gneq 0$ ;*
- *La taille du treillis des concepts qui reste stable si et seulement si $h(a \cup b) - h(a, b) = 0$.*

**Exemple 2.4.3.** *Considérons les contextes $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ et désignons par $\mathbb{K}_{1gen}$ et $\mathbb{K}_{2gen}$ les contextes généralisés respectifs de ces contextes sur deux attributs et appelons à chaque fois $s$ le nouvel attribut issu de cette généralisation sur deux attributs de ces contextes. Alors nous avons les treillis suivants :*

*<u>Cas du contexte $\mathbb{K}_1$</u> :*

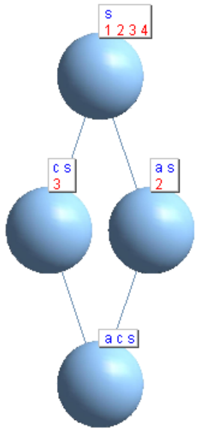
| $\mathbb{K}_1$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | × | | × |
| 2 | × | | | × |
| 3 | | × | × | |
| 4 | | | | × |

*contexte initial $\mathbb{K}_1$*




*<u>Cas 1</u> : $s = \{b, d\}$*

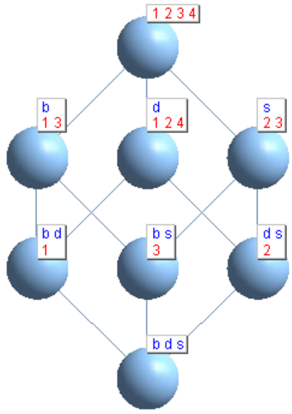
| $\mathbb{K}_{1gen}$ | $a$ | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | | $\times$ |
| 2 | $\times$ | | $\times$ |
| 3 | | $\times$ | $\times$ |
| 4 | | | $\times$ |




*Dans ce cas nous pouvons observer que la taille du treillis du contexte initial diminue de trois concepts après une généralisation existentielle sur les attributs $b$ et $d$.*

*Cas 2* : $s = \{a, c\}$

| $\mathbb{K}_{1gen}$ | $b$ | $d$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | |
| 2 | | $\times$ | $\times$ |
| 3 | $\times$ | | $\times$ |
| 4 | | $\times$ | |

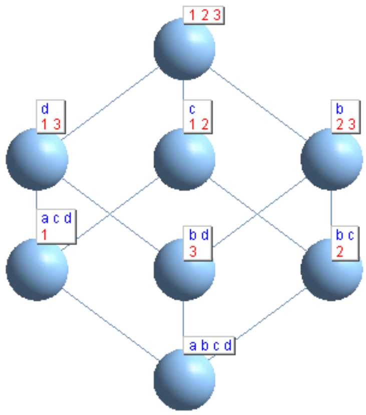



*Dans ce cas nous pouvons observer que la taille du treillis du contexte initial augmente d'un concept après une généralisation existentielle sur les attributs $a$ et $c$.*

*Cas du contexte $\mathbb{K}_2$ :*

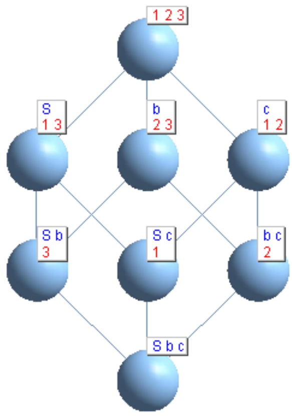
| $\mathbb{K}_2$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ |
| 2 | | $\times$ | $\times$ | |
| 3 | | $\times$ | | $\times$ |

*contexte initial $\mathbb{K}_2$*




*Cas où $s = \{a, d\}$ :*

| $\mathbb{K}_{2gen}$ | $b$ | $c$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | $\times$ | |
| 3 | $\times$ | | $\times$ |




*Ici la taille du treillis des concepts du contexte* $\mathbb{K}_2$ *ne change pas après une généralisation existentielle sur les attributs* $a$ *et* $d$*.*

*Nous venons ainsi d'établir qu'une condition nécessaire pour que le treillis des concepts augmente de taille après généralisation est qu'il contienne une copie du treillis des concepts du contexte* $\mathbb{K}_n^k$ *défini par la relation* $(\bigstar)$ *et que la variation de la taille du treillis des concepts d'un contexte formel après une généralisation existentielle sur deux attributs dépend du signe du nombre entier relatif :* $h(a \cup b) - h(a, b)$ *et par conséquent, il y a réduction de la taille du treillis des concepts si ce réel est négatif. Étant donné que la variation de la taille du treillis des concepts est fonction du choix des attributs à généraliser, nous nous demandons s'il n'existe pas une corrélation entre* ***la similarité entre les attributs à généraliser*** *et* ***la variation de la taille du treillis des concepts après généralisation*** *? Nous répondons à cette préoccupation au Chapitre deux ci-dessous.*

⋆ ⋆ CHAPITRE DEUX ⋆ ⋆

# MESURE DE SIMILARITÉ ET APPLICATIONS DE LA GÉNÉRALISATION EXISTENTIELLE

*Dans ce chapitre, nous présentons la notion de similarité entre les attributs d'un contexte. A partir de quelques exemples de mesures de similarité existantes, nous montrons que certaines d'entre elles ne sont pas compatible avec la généralisation existentielle et présentons une mesure de similarité compatible avec la généralisation existentielle ainsi que quelques applications de ce type de généralisation.*

## 3.1 Notion de Mesure de similarité

*Dans la plupart des situations auxquelles nous faisons face, et qu'il faille réduire un ensemble de choses tout en conservant un certain nombre de propriétés, nous procédons en générale soit par une étude comparative des objets à manipuler. Généralement notre attention se focalise sur les critères de ressemblance ou de dissemblance et les regroupements que nous effectuons s'opèrent en générale sur les objets ou les attributs qui présentent trop de traits de similarité. L'outil mathématique qui nous permet d'effectuer cette comparaison est* ***la mesure de similarité****. Dans cette section, nous définissons la notion de mesure de similarité et à travers quelques exemples de mesures de similarité, nous montrons que la majorité d'entre elles ne sont pas compatibles avec la généralisation existentielle avant d'exhiber une qui l'est.*

**Définition 3.1.1.** *[6](Mesure de similarité) Soit $M$ un ensemble non vide. On appelle mesure* *de similarité sur $M$ toute application*

$$S: \quad M \times M \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$

*telle que pour tout $(a,b) \in M \times M$ ,*

*(i)* $S(a,b) \geq 0$

*(ii)* $S(a,b) = S(b,a)$

*(iii)* $S(a,a) \geq S(a,b)$

**Remarque 3.1.1.** *Toute mesure de similarité est positive et symétrique.*
*Une mesure de similarité permet de quantifier la ressemblance qui existe entre deux éléments de l'ensemble sur lequel elle est définie. Étant donné $S$ une mesure de similarité sur un ensemble non vide $M$ ; $a$, $b$ et $c$ trois éléments de $M$, nous diront que $a$ est plus similaire à $b$ qu'à $c$ si $S(a,b) \geq S(a,c)$.*

## 3.1.1 Quelques exemples de mesure de similarité

*Comme exemples de mesures de similarité nous pouvons citer celles relatives aux coefficients d'association qui dépendent des entiers $\beta$, $\lambda$, $\mu$ et $\theta$ définis ci-dessous en fonction des éléments $a$ et $b$ dont on mesure la similarité :*

– *$\beta$ : le nombre d'objets qui sont en relation à la fois avec $a$ et $b$ .*
– *$\lambda$ : le nombre d'objets qui sont en relation uniquement avec $a$ .*
– *$\mu$ : le nombre d'objets qui sont en relation uniquement avec $b$ .*
– *$\theta$ : le nombre d'objets qui ne sont en relation ni avec $a$ ni avec $b$ .*

*Nous pouvons citer entre autres :*

*(i)* ***La mesure de Jaccard** définie par : $S(a,b) = \dfrac{\beta}{\beta + \lambda + \mu}$ et proposée pour classifier les espèces écologiques*

*(ii)* ***La mesure de Dice** définie par : $S(a,b) = \dfrac{2\beta}{2\beta + \lambda + \mu}$ et proposée pour deux espèces différentes qui sont associées dans un biotope*

*(iii)* ***La mesure de Sokal et Michener** définie par : $S(a,b) = \dfrac{\beta + \theta}{\beta + \lambda + \mu + \theta}$ et proposée pour observer la ressemblance entre deux espèces d'abeilles*

*(iv)* ***La mesure de Yule et Kendall** définie par : $S(a,b) = \dfrac{\beta\theta}{\beta\theta + \lambda\mu}$ et utilisée en statistique.*

*Nous pouvons remarquer que ces mesures sont toutes à valeur dans $[0;1]$. Nous dirons donc que $a$ et $b$ ont beaucoup de traits de similarité si et seulement si $S(a,b) \geq \frac{1}{2}$ .*

**Exemple 3.1.1.** *Considérons le contexte $\mathbb{K}_1$ défini par :*

| $\mathbb{K}_1$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | | $\times$ |
| 2 | $\times$ | | | $\times$ |
| 3 | | $\times$ | $\times$ | |
| 4 | | | | $\times$ |

*et calculons les différentes mesures de similarité entre deux attributs quelconques de ce contexte. Nous obtenons les résultats confinés dans le tableau ci-dessous :*

| | $a$ et $b$ | $a$ et $c$ | $a$ et $d$ | $b$ et $c$ | $b$ et $d$ | $c$ et $d$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\lambda$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $\mu$ | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 3 |
| $\theta$ | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $Mesure\ de\ Jaccard$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| $Mesure\ de\ Dice$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | 0 |
| $Mesure\ de\ Sokal\ et\ Michener$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| $Mesure\ de\ Yule\ et\ Kendall$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

*A partir de ces résultats nous remarquons que les attributs $a$ et $d$ sont similaires avec les autres mesures alors qu'ils ne le sont pas avec la mesure de Jaccard. Ce qui montre que la similarité entre deux attributs dépend de la mesure de similarité choisie. Nous pouvons également constater qu'une généralisation sur les attributs $a$ et $c$ et sur les attributs $b$ et $d$ augmente et diminue respectivement la taille du treillis des concepts après généralisation alors qu'ils ne sont pas similaires avec ces mesures. Ceci nous amène à constater que ces mesures de similarité ne sont pas compatibles avec la généralisation existentielle. Il est démontré dans [6] qu'aucune de ces mesures et bien d'autres mesures encore ne permettent pas d'envisager une augmentation ou une réduction de la taille du treillis des concepts d'un contexte donné après une généralisation existentielle sur les attributs dont on a mesuré la similarité. L'existence d'une telle mesure de similarité nous permettrait d'effectuer un choix judicieux sur les attributs à généraliser. Existe-t-il une telle mesure de similarité ?*

### 3.1.2 Mesure de similarité compatible avec la généralisation existentielle

**Définition 3.1.2.** *[6](Mesure de similarité compatible avec la généralisation existentielle)* *Soit $S$ une mesure de similarité. $S$ est une mesure de similarité compatible avec la généralisation existentielle si la variation de la taille du treillis des concepts après généralisation existentielle entre deux attributs est inversement proportionnelle à la ressemblance de ces attributs à travers cette mesure.*

**Exemple 3.1.2.** *Soient $\mathbb{K} := (G, M, I)$ un contexte fini, $a, b \in M$ deux attributs à généraliser par une généralisation existentielle.*
*L'application*

$$\begin{array}{rccc} S_{gen}: & M \times M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & S_{gen}(a,b) = \dfrac{1+\delta(a,b)}{2} - \dfrac{|\psi(a,b)|}{2n_0} \end{array}$$

*est une mesure de similarité compatible avec la généralisation existentielle avec :*
$n_0 = 2^{|a_0'|+|b_0'|} - 2^{|a_0'|} - 2^{|b_0'|} + 1$ *et* $|a_0'| + |b_0'| = \max\{|a'| + |b'| : (a,b) \in M \times M \text{ et } a \neq b\}$,
*les applications $\psi$ et $\delta$ définies par :*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & M \times M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & \psi(a,b) = h(a \cup b) - h(a,b) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \delta: & M \times M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & \begin{cases} 1 & Si\ \psi(a,b) \leq 0 \\ 0 & Sinon \end{cases} \end{array}$$

***Preuve :***

***Montrons que $S_{gen}$ est une mesure de similarité compatible avec la généralisation existentielle.***

*Pour le faire, nous avons besoin de démontrer le résultat suivant :*

**Proposition 3.1.1.** *[6] La taille du treillis des concepts de $\mathbb{K}$ augmente après une généralisation existentielle sur les attributs $a$ et $b$ si et seulement si $\psi(a,b) > 0$ ; diminue si et seulement si $\psi(a,b) < 0$ et est stable si et seulement si $\psi(a,b) = 0$.*

***Preuve :*** *soient $a$ et $b$ deux attributs d'un contexte $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_{gen}$ le contexte généralisé des attributs $a$ et $b$.*

$$\begin{aligned} \psi(a,b) > 0 &\iff h(a \cup b) - h(a,b) > 0 \\ &\iff |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{gen})| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K})| > 0 \\ &\iff |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{gen})| > |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|. \end{aligned}$$

*Ceci montre que le nombre de concepts du contexte généralisé est supérieur au nombre de concepts du contexte initial. D'où l'augmentation de la taille du treillis des concepts du contexte* $\mathbb{K}$ *après généralisation. De meme, nous avons :*

$$\begin{aligned}\psi(a,b) < 0 &\iff h(a \cup b) - h(a,b) < 0\\ &\iff |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{gen})| - |\mathfrak{B}(\mathbb{K})| < 0\\ &\iff |\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{gen})| < |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|.\end{aligned}$$

*Donc il y a diminution du nombre de concepts après généralisation. D'où la taille du treillis des concepts diminue après généralisation existentielle sur les attributs* $a$ *et* $b$. *Dans le cas où* $\phi(a,b) = 0$, *nous avons* $|\mathfrak{B}(\mathbb{K}_{gen})| = |\mathfrak{B}(\mathbb{K})|$ *c'est-à-dire que le nombre de concepts ne varie pas après une généralisation existentielle sur les attributs* $a$ *et* $b$. ■

*(i)* ***Montrons que*** $S_{gen}$ ***est une mesure de similarité.***

*(a)* ***Montrons que*** $S_{gen} \geq 0$

*Pour tout* $(a,b) \in M \times M$ *on a :* $|\psi(a,b)| \leq 2^{|a'|+|b'|} - 2^{|a'|} - 2^{|b'|} + 1 \leq n_0$ *; donc* $\frac{|\psi(a,b)|}{2n_0} \leq \frac{1}{2}$. *De plus, pour tout* $(a,b) \in M \times M$, $\dfrac{1+\delta(a,b)}{2} \geq \dfrac{1}{2}$.

*D'où* $S_{gen} \geq 0$.

*(b)* ***Montrons que*** $S_{gen}$ ***est symétrique.***

*Comme* $\psi$ *et* $\delta$ *sont symétriques, il en résulte que* $S_{gen}$ *l'est aussi.*

*(c)* ***Montrons que*** $S_{gen}(a,a) \geq S_{gen}(a,b)$.

$S_{gen}(a,a) = 1 = \max\{S_{gen}(a,b) : (a,b) \in M \times M\}$ *. D'où pour tout* $(a,b) \in M \times M$, $S_{gen}(a,a) \geq S_{gen}(a,b)$.

*(a), (b) et (c) montrent que* $S_{gen}$ *est une mesure. Il reste à montrer la compatibilité avec la généralisation existentielle.*

*(ii)* ***Montrons que*** $S_{gen}$ ***est compatible avec la généralisation existentielle***

*Il suffit de montrer que la variation de la taille du treillis des concepts après généralisation existentielle entre deux attributs est inversement proportionnelle à la ressemblance de ces attributs. Pour le faire, nous avons besoin de prouver le résultat ci-dessous :*

**Proposition 3.1.2.** *[6] Soient* $\mathbb{K} := (G, M, I)$ *un contexte réduit tel que* $|G| \geq 3$ *et* $|M| \geq 3$, $a$ *et* $b \in M$, *alors :*

$$(S_{gen}(a,b) \geq \frac{1}{2}) \iff (\psi(a,b) \leq 0)$$

***Preuve :*** $(\Longleftarrow)$ *Supposons que* $\psi(a,b) \leq 0$ *alors* $\delta(a,b) = 1$ *et*

$$S_{gen}(a,b) = \frac{1+\delta(a,b)}{2} - \frac{|\psi(a,b)|}{2n_0} = \frac{1}{2}(2 + \frac{\psi(a,b)}{n_0})$$

*Comme* $|\psi(a,b)| \leq n_0$, $\dfrac{|\psi(a,b)|}{n_0} \leq 1$. *Ceci entraine que* $2 + \frac{\psi(a,b)}{n_0} \geq 1$ *;*
*donc* $\dfrac{1}{2}(2 + \frac{\psi(a,b)}{n_0}) \geq \dfrac{1}{2}$.
*D'où* $S_{gen}(a,b) \geq \dfrac{1}{2}$. $(\Longrightarrow)$ *Supposons que* $S_{gen}(a,a) \geq \dfrac{1}{2}$ *alors*

$$(\frac{1+\delta(a,b)}{2} - \frac{|\psi(a,b)|}{2n_0} \geq \frac{1}{2}) \Longrightarrow (|\psi(a,b)| \leq n_0\delta(a,b))$$

*Si* $\delta(a,b) = 0$ *alors* $|\psi(a,b)| = 0$ *; donc* $\psi(a,b) \leq 0$. *Si* $\delta(a,b) = 1$ *alors par définition de* $\delta$, $\psi(a,b) \leq 0$. ■ *Ce qui conduit au corollaire ci-dessous :*

**Corollaire 3.1.1.** *Soient* $\mathbb{K}$ *un contexte réduit,* $a$ *et* $b$ *deux attributs. La taille du treillis des concepts du contexte* $\mathbb{K}$ *diminue après généralisation existentielle sur les attributs* $a$ *et* $b$ *(respectivement augmente) si et seulement si* $S_{gen}(a,b) \geq \dfrac{1}{2}$ *(respectivement* $S_{gen}(a,b) \lneq \dfrac{1}{2}$ *).*
*Ce corollaire montre effectivement que la taille du treillis des concepts après généralisation varie inversement avec la ressemblance entre les attributs.*
*D'où (i) et (ii) montrent que* $S_{gen}$ *est une mesure de similarité compatible avec la généralisation existentielle.* ■

**Définition 3.1.3.** *[6]* $\psi$ *est appelée fonction gain de concepts après généralisation de* $a$ *et* $b$.

**Exemple 3.1.3.** *Considérons le contexte* $\mathbb{K}$ *défini par le tableau ci-dessous :*

| $\mathbb{K}$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ | |
| 2 | $\times$ | | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | | |

*Déterminons* $S_{gen}(a,b)$ *et* $S_{gen}(c,d)$

$a' = \{2,3\}$, $b' = \{1,3\}$, $c' = \{1\}$ , $d' = \{2\}$ *et* $n_0 = 2^{2+2} - 2^2 - 2^2 + 1 = 9$
*Le contexte* $\mathbb{K}_{ab}$ *défini ci-dessous est celui à partir duquel nous obtenons* $\mathbb{K}$ *pour une généralisation existentielle sur les attributs* $a$ *et* $b$. *Alors nous avons :*

| $\mathbb{K}_{ab}$ | $c$ | $d$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | | $\times$ |
| 2 | | $\times$ | $\times$ |
| 3 | | | $\times$ |

*et,* $Ext(\mathbb{K}_{ab}) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2,3\}\}$ $\mathbb{H}_{ab}(a) = \{\{2,3\}\}$, $\mathbb{H}_{ab}(b) = \{\{1,3\}\}$, $\mathbb{H}_{ab}(a \cap b) = \{\{3\}\}$, $\mathbb{H}_{ab}(a \cup b) = \emptyset$, $\mathbb{H}_{ab}(a,b) = \{\{1,3\},\{2,3\},\{3\}\}$, $h_{ab}(a) = 1$, $h_{ab}(b) = 2$, $h_{ab}(a \cap b) = 1$, $h_{ab}(a \cup b) = 0$, $h_{ab}(a,b) = 3$, $\psi_{ab}(a,b) = -3$, $\delta_{ab}(a,b) = 1$ *et* $S_{gen}(a,b) = \frac{15}{18}$ *avec :*

- $\mathbb{H}_{xy}(x) = \{A \cap x' :\ A \in Ext(\mathbb{K}_{xy})\ et\ A \cap x' \notin Ext(\mathbb{K}_{xy})\}$
- $\mathbb{H}_{xy}(y) = \{A \cap y' :\ A \in Ext(\mathbb{K}_{xy})\ et\ A \cap y' \notin Ext(\mathbb{K}_{xy})\}$
- $\mathbb{H}_{xy}(x \cap y) = \{A \cap (x' \cap y') :\ A \in Ext(\mathbb{K}_{xy})\ et\ A \cap (x' \cap y') \notin Ext(\mathbb{K}_{xy})\}$
- $\mathbb{H}_{xy}(x \cup y) = \{A \cap (x' \cup y') :\ A \in Ext(\mathbb{K}_{xy})\ et\ A \cap (x' \cup y') \notin Ext(\mathbb{K}_{xy})\}$
- $\mathbb{H}_{xy}(x,y) = \mathbb{H}_{xy}(x) \cup \mathbb{H}_{xy}(y) \cup \mathbb{H}_{xy}(x \cap y)$
- $h_{xy}(x) = |\mathbb{H}_{xy}(x)|$, $h_{xy}(y) = |\mathbb{H}_{xy}(y)|$, $h_{xy}(x \cap y) = |\mathbb{H}_{xy}(x \cap y)|$, $h_{xy}(x \cup y) = |\mathbb{H}_{xy}(x \cup y)|$ *et* $h_{xy}(x,y) = |\mathbb{H}_{xy}(x,y)|$
- $\psi_{xy}(x,y) = h_{xy}(x \cup y) - h_{xy}(x,y)$
- $S_{gen}(x,y) = \frac{1+\delta_{xy}(x,y)}{2} - \frac{|\psi_{xy}(x,y)|}{2n_0}$.

*D'une manière analogue, nous obtenons les résultats contenus dans le tableau ci-dessous :*

| $(x,y)$ | $(a,b)$ | $(a,c)$ | $(a,d)$ | $(b,c)$ | $(b,d)$ | $(c,d)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_{gen}(x,y)$ | $0,83$ | $0,83$ | $0,94$ | $0,94$ | $0,83$ | $0,44$ |

*Ces résultats nous montrent que seuls les attributs $c$ et $d$ ne sont pas similaires. Ceci implique que toute généralisation existentielle sur deux attributs différents des attributs $c$ et $d$ diminue la taille du treillis des concepts de ce contexte.*

**Remarque 3.1.2.** *La mesure de similarité $S_{gen}$ augmente lorque la variation la taille du treillis des concepts après généralisation diminue.*

**Proposition 3.1.3.** *Soient $\mathbb{K}$ un contexte, $a$ et $b$ deux attributs du contexte $\mathbb{K}$. Si $a' = b'$, alors la taille du treillis des concepts de $\mathbb{K}$ ne varie pas après une généralisation existentielle sur les attributs $a$ et $b$. Mais il existe des contextes dans lesquels l'on peut trouver des attributs $a$ et $b$ à généraliser avec $a' \neq b'$ qui ne font pas varier la taille du treillis des concepts après généralisation.*

***Preuve :*** *Soient $a$ et $b$ tels que $a' = b'$ alors ceci entraine que $a' \cup b' = a' \cap b' = a' = b'$. Ainsi, nous avons $\mathbb{H}(a,b) = \mathbb{H}(a) \cup \mathbb{H}(b) \cup \mathbb{H}(a \cap b) = \mathbb{H}(a \cup b)$ ; donc $h(a \cup b) - h(a,b) = 0$ ce qui traduit qu'il n'y a pas variation du nombre de concepts après généralisation existentielle sur les attributs $a$ et $b$.*

*D'où la taille du treillis des concepts de $\mathbb{K}$ ne varie pas après généralisation.*

*Le cas du contexte $\mathbb{K}_2$ du chapitre précédant avec une généralisation des attributs $a$ et $d$ est un contre exemple pour justifier que la réciproque n'est pas vraie.* ■

## 3.2 Construction des treillis des concepts de quelques contextes généralisés particuliers

**Exemple 3.2.1.** *Désignons par $\mathbb{K}$ ce contexte, $\mathbb{K}_{ab}$, $\mathbb{K}_{ac}$, $\mathbb{K}_{ad}$, $\mathbb{K}_{bc}$, $\mathbb{K}_{bd}$ , $\mathbb{K}_{cd}$ et $\mathbb{K}_{ae}$ les différents contextes à partir desquels nous construisons $\mathbb{K}$ pour une généralisation respectivement des attributs $a$ et $b$, $a$ et $c$, $a$ et $d$, $b$ et $c$, $b$ et $d$ , $c$ et $d$ et, $a$ et $e$. Nous avons :*

| $\mathbb{K}$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ | | |
| 2 | $\times$ | | | $\times$ | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | | | $\times$ |

| $\mathbb{K}_{ab}$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | | |
| 2 | | $\times$ | $\times$ |
| 3 | | | $\times$ |

| $\mathbb{K}_{ac}$ | $b$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | | |
| 2 | | $\times$ | $\times$ |
| 3 | $\times$ | | $\times$ |

| $\mathbb{K}_{ad}$ | $b$ | $c$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | |
| 2 | | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | | $\times$ |

| $\mathbb{K}_{bc}$ | $a$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 3 | $\times$ | | $\times$ |

| $\mathbb{K}_{bd}$ | $a$ | $c$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | |
| 2 | $\times$ | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | | $\times$ |

| $\mathbb{K}_{cd}$ | $a$ | $b$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | |
| 2 | $\times$ | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

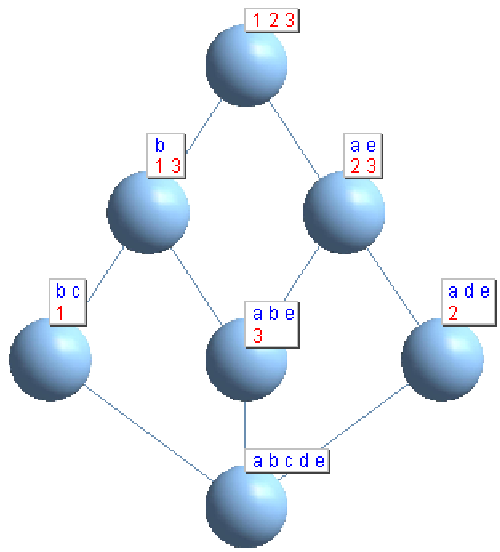
| $\mathbb{K}_{ae}$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | |
| 2 | | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | | |

*En utilisant la mesure de similarité $S_{gen}$ compatible avec la généralisation existentielle, nous obtenons les résultats ci-dessous :*

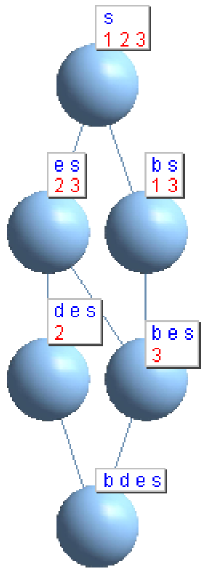
| $xy$ | $ab$ | $ac$ | $ad$ | $bc$ | $bd$ | $cd$ | $ae$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\psi_{xy}(x,y)$ | $-2$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-3$ | $1$ | $0$ |
| $\delta_{xy}(x,y)$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ | $1$ | $0$ | $1$ |
| $S_{gen}(x,y)$ | $\frac{16}{18}$ | $\frac{17}{18}$ | $\frac{17}{18}$ | $\frac{17}{18}$ | $\frac{15}{18}$ | $\frac{8}{18}$ | $1$ |

*Ces résultats montrent que seul la généralisation existentielle sur les attributs c et d augmente la taille du treillis de concepts ; et que seul la généralisation existentielle sur les attributs a et e stabilise la taille du treillis. En dehors de ces couples, la généralisation existentielle de tous les autres couples diminue la taille du treillis. Représentons le treillis des concepts du contexte* $\mathbb{K}$ *ainsi que les treillis des concepts des contextes généralisés* $\mathbb{K}_{gen}^{ac}$ , $\mathbb{K}_{gen}^{cd}$ *et* $\mathbb{K}_{gen}^{ae}$ *où* $\mathbb{K}_{gen}^{xy}$ *désigne le contexte généralisé des attributs* $x$ *et* $y$ *pour vérifier la conformité des résultats obtenus dans ces tableaux. Nous avons :*

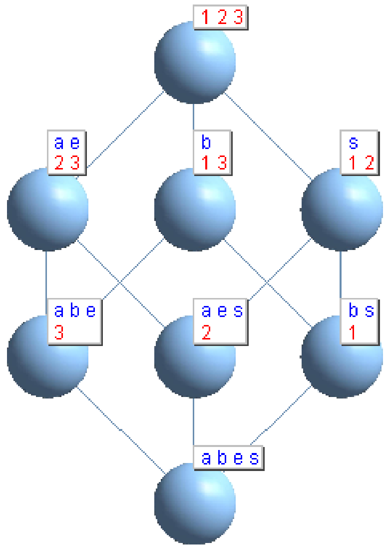
| $\mathbb{K}$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ | | |
| 2 | $\times$ | | | $\times$ | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | | | $\times$ |



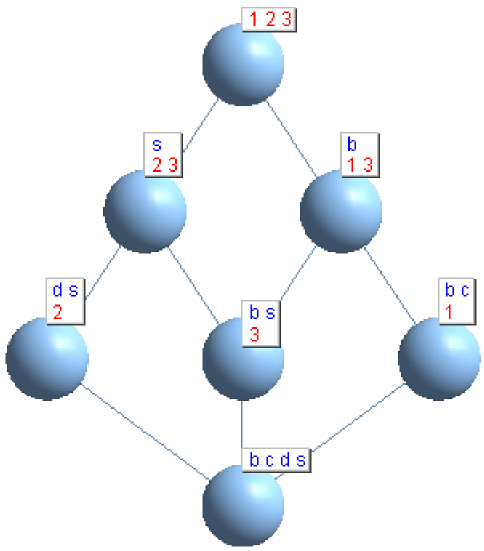
| $\mathbb{K}^{ac}_{gen}$ | $b$ | $d$ | $e$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | × | | | × |
| 2 | | × | × | × |
| 3 | × | | × | × |




| $\mathbb{K}^{cd}_{gen}$ | $a$ | $b$ | $e$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | × | | × |
| 2 | × | | × | × |
| 3 | × | × | × | |




| $\mathbb{K}^{ae}_{gen}$ | $b$ | $c$ | $d$ | $s$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | | |
| 2 | | | × | × |
| 3× | × | | | × |



*Ces treillis sont en conformité avec les résultats obtenus théoriquement dans le tableau ci-dessus.*

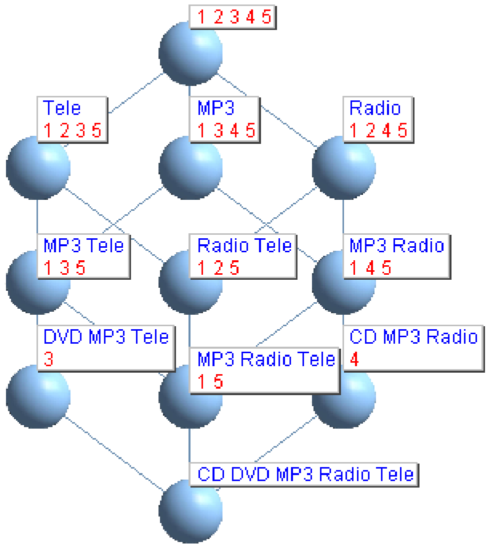
**Exemple 3.2.2.** *Une entreprise produit les appareils électroniques suivants : téléviseurs, lecteurs CD, lecteurs MP3, lecteurs DVD, et radio qu'elle propose dans des supermarchés. Dans l'un des supermarchés, nous observons l'attitude de cinq clients où sont entreposés ces appareils. Ces clients souhaitent effectuer les achats suivants :*
*client 1 : téléviseur, lecteur DVD et radio*
*client 2 : téléviseur et radio*
*client 3 : téléviseur, lecteur MP3 et lecteur DVD*
*client 4 : lecteur CD, radio et lecteur MP3*
*client 5 : téléviseur, lecteur MP3 et radio.*
*Avec l'arrivée sur le marché des lecteurs pouvant lire à la fois CD, MP3 et DVD, le responsable du supermarché décide pour satisfaire sa clientèle et évacuer son stock de lecteurs, de constituer des paquets dits 3 en 1 constitués des trois différents types de lecteurs à un prix promotionnel et informe sa clientèle. Les 5 clients sont informés. Les clients 4 et 5 à court de moyens financiers et également affiliés à une même banque, souhaitent que celle-ci préfinance leurs achats. La politique bancaire de la banque prévoit que dans de telles situations, au moins l'un des clients doit être satisfait et c'est elle qui effectue les achats à l'endroit indiqué par les clients.*
*Modélisons ces différentes situations. Considérons les clients comme étant nos objets et les différents appareils comme nos attributs. Trois situations sont décrites dans ce texte et peuvent faire l'objet d'une analyse sous forme de concepts formels à modéliser. Nous avons :*

***Situation 1*** *: (Les clients disposent tous les moyens pour effectuer leurs achats)*
*Contexte initial* $\mathbb{K} := (G, M, I)$ *où*

$$G = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ et } M = \{Tl, CD, MP3, DVD, Radio\}$$

*où CD, MP3 et DVD renvoient aux lecteurs associés et la relation binaire* $I$ *traduite par le tableau ci-dessous et à côté, le treillis des concepts de* $\mathbb{K}$.

| $\mathbb{K}$ | $Tele$ | $CD$ | $MP3$ | $DVD$ | $Radio$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | | $\times$ | | $\times$ |
| 2 | $\times$ | | | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | |
| 4 | | $\times$ | $\times$ | | $\times$ |
| 5 | $\times$ | | $\times$ | | $\times$ |

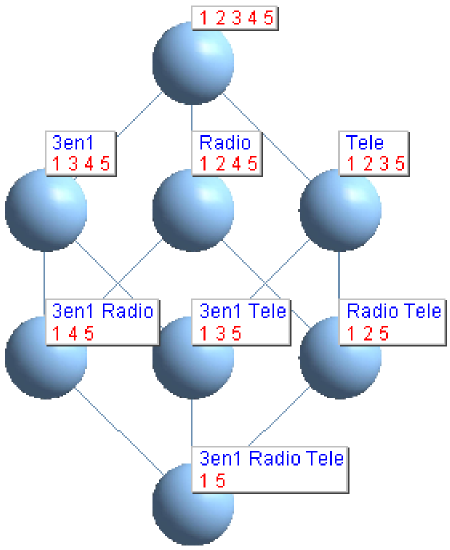



***Situation 2*** *: (Le regroupement des trois appareils)*

*L'existence d'un appareil capable de lire les CD, MP3 et DVD traduit une généralisation existentielle des attributs CD, MP3 et DVD puisqu'un client désormais qui désire au moins l'un des appareils peut obtenir trois appareils au prix d'un. Désignons par (3 en 1) l'ensemble des trois appareils regroupés et par le contexte*

$\mathbb{K}_1 := (G, \{Tele, 3\ en\ 1, Radio\}, I_1)$ *ce contexte généralisé. Alors nous avons le contexte* $\mathbb{K}_1$ *défini ci-dessous et à côté, son treillis des concepts :*

| $\mathbb{K}_1$ | $Tele$ | $3en1$ | $Radio$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | |
| 4 | | $\times$ | $\times$ |
| 5 | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

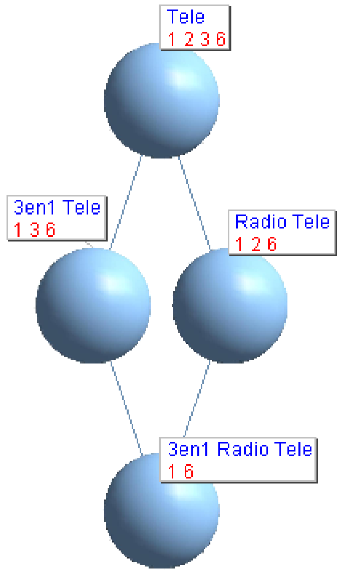



***Situation 3*** *: (L'intervention de la banque)*

*Intervention du gestionnaire bancaire que nous considérons comme objet 6. Il s'agit également ici d'un cas de généralisation existentielle des objets 4 et 5 puisque le gestionnaire doit satisfaire au moins l'un des deux clients. Alors nous obtenons le nouveau contexte généralisé* $\mathbb{K}_2 := (\{1, 2, 3, 6\}, \{Tele, 3\ en\ 1, Radio\}, I_2)$ *où la relation binaire* $I_2$ *est définie dans le ta-*

*bleau ci-dessous et à côté, son treillis des concepts :*

| $\mathbb{K}_2$ | $Tele$ | $3en1$ | $Radio$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\times$ | $\times$ | $\times$ |
| 2 | $\times$ | | $\times$ |
| 3 | $\times$ | $\times$ | |
| 6 | $\times$ | $\times$ | $\times$ |




*Le contexte $\mathbb{K}_2$ ainsi obtenu est un contexte généralisé des attributs et des objets à partir du contexte initial.*

*Nous remarquons déjà qu'après généralisation existentielle, le nombre de concepts diminue ce qui a pour avantage la bonne gestion de l'espace dans le magasin. Entre autre, dans le contexte initial, aucun individu n'a acheté tous les types d'appareils alors qu'après généralisation, au moins deux clients sont susceptibles d'en acheter ce qui serait un grand avantage pour ce magasin dans la vitesse avec laquelle elle épuisera son stock d'appareils et aussi au niveau du gain. Les clients 1 et 5 (**Situation 2**) et 1 et 6 (**Situation 3**) concernés dans cet exemple pourront également en tirer satisfaction en ce sens qu'ils pourront bénéficier des autres appareils qu'ils ne sollicitaient pas ou en faire cadeau s'ils le désirent.*

## 3.3 Applications de la généralisation existentielle

*Dans cette section nous présentons quelques domaines d'application de la généralisation existentielle.*

***En économie*** *Nous pouvons considérer l'exemple d'un marché où s'échangent divers biens, notamment des biens alimentaires. Parmi les biens alimentaires, les plus vendus sont entre autres : bananes, banane-plantain, macabo, igname douce, igname jaune, igname rouge, patate, tomate, orange, pamplemousse, mangue, feuille de manioc, Ndolè, Eru, riz, arachide, Taro. On peut sur un tel marché évaluer la situation des commandes en tubercule, en fruit ou en légume. Ces attributs n'étant pas directement visibles sur le marché en leur* *état, ils doivent être obtenus à partir des biens existants effectivement sur le marché. Ainsi, un client commande une tubercule si et seulement s'il commande l'un au moins des biens macabo, patate, igname douce, igname jaune, igname rouge et taro. Un client commande un fruit si et seulement s'il commande l'un au moins des biens orange, pamplemousse, mangue, tomate ; et un client commande un légume si et seulement s'il commande l'un au moins des biens feuille de manioc, Eru, ndolè. Ainsi, les attributs tubercule, fruit, légume sont des attributs obtenus par généralisation existentielle de ceux existant effectivement sur le marché.*

***En statistiques****, dans le recensement des entreprises qui sont regroupées en petites, moyennes et grandes entreprises , des établissements d'enseignements secondaires regroupées en établissements publiques d'enseignement et établissements privés d'enseignement.*

***En médecine,*** *dans la prescription des examens et des ordonnances. Dans la prescription des examens, nous avons d'un côté une panoplie de symptômes ou propriétés caractéristiques de chaque maladie et de l'autre côté les différents tests caractéristiques de chaque maladie. Ainsi, un individu est soumis à un examen particulier s'il présente au moins un des symptômes caractéristiques de la maladie liée au test prescrit.*

***Dans le domaine sportif****, nous avons le concept de saut qui regroupe saut en hauteur, triple saut et saut à la perche, le concept de course qui regroupe la course de vitesse, de résistance et de relais où un sportif est déclaré sauteur ou coureur s'il pratique au moins une des disciplines concernées.*

***Dans l'enseignement****, nous avons :*

- *Le langage qui renvoie aux moyens que nous utilisons pour communiquer. Pour communiquer, nous utilisons soit la parole, l'écriture ou les gestes.*
- *Le concept d'anagramme d'un mot en français ou en mathématiques qui est l'ensemble des mots formés en permutant les lettres du mot considéré.*
- *Le concept de triangle particulier. Un triangle est dit particulier s'il possède au moins l'une des propriétés suivantes :* $p_1$ *: "possède un angle droit",*
  $p_2$ *: "possède deux cotés égaux" ou* $p_3$ *: "possède trois cotés égaux".*

# ♣ Implication pédagogique ♣

*La réalisation de ce travail a fait l'objet de nombreuses investigations scientifiques. La fiche ci-dessous ressort brièvement les apports pédagogiques de notre travail dans l'exercice du métier d'enseignant. Ainsi, la conception et la rédaction de ce document nous aidera à l'avenir :*

- ***dans le jeu bilingue instauré dans les établissements*** *en ce sens que la majorité des documents en rapport avec notre thème et que nous avons exploités étaient rédigés en langue anglaise a contribué à l'amélioration de notre niveau en langue anglaise,*
- ***dans la lecture et l'exploitation minutieuse des documents*** *qui nous serviront à élaborer nos leçons de mathématiques,*
- ***dans le choix et la conception des manuels scolaires et ceux utiles à l'élaboration de nos leçons****,*
- ***dans la conception et l'élaboration des bonnes leçons de mathématiques*** *qui se fait à partir du programme officiel et de tout manuel en rapport avec ce programme afin de reconstituer les définitions, propriétés et théorèmes utiles pour les thèmes à aborder,*
- ***dans la motivation des apprenants*** *à apprendre et à comprendre les sciences mathématiques car elles trouvent leur application dans la quasi totalité des domaines de la vie et en particulier dans la plupart des disciplines scolaires,*
- ***dans les échanges avec les apprenants*** *à travers l'ouverture à la critique,*
- ***dans le choix des pratiques de classe*** *où le travail en groupe s'avère très important dans la recherche des conceptions des apprenants par rapport aux notions abordées,*
- ***dans la recherche*** *en ce sens qu'il nous a donné une vision plus large des mathématiques en générale et donc des mathématiques que nous enseigneront au lycée en particulier en nous édifiant d'avantage sur les applications que nous pouvons faire des mathématiques ; ce qui nous aidera à démystifier cette matière souvent jugée comme la plus difficile parmi*

*les autres disciplines dans le secondaire et nous adapter plus aisément à la nouvelle approche d'enseignement dite APC,*

- ***la production et la rédaction de certains rapports*** *en ce sens que leur production obéira aux exigences et la rigueur qui à conduit à l'élaboration de ce document,*
- ***dans la saisie de nos cours et sujets d'évaluation*** *à travers l'utilisation des éditeurs et compilateurs Latex qui nous ont permis de faire nos premier pas dans la manière de présenter un document scientifique.*

# ♣ Conclusion et perspectives ♣

*Il était question pour nous d'expliquer de manière détaillée la généralisation existentielle. Il en ressort qu'il existe bien des contextes possédant des couples d'attributs dont la généralisation existentielle entraine une augmentation de la taille du treillis initial. Tout contexte contenant au moins une copie de l'un des contextes de cette famille de contextes possède un couple d'attributs qui augmente la taille du treillis après généralisation. A partir de la mesure de similarité $S_{gen}$ compatible avec la généralisation existentielle, nous avons montré qu'une généralisation de deux attributs $x$ et $y$ réduit la taille du treillis des concepts après généralisation sur les attributs $x$ et $y$ si et seulement si $S_{gen}(x, y) \gneq \frac{1}{2}$ et que cette mesure augmente avec la faiblesse de la variation de la taille du treillis des concepts. Nous avons également montré que le concept de généralisation existentielle d'un contexte formel s'applique à plusieurs domaines de la vie ; notamment en économie, en médecine et surtout dans l'enseignement des mathématiques.*

*La mesure de similarité compatible avec la généralisation existentielle présentée ici résout le problème de choix des attributs à généraliser pour un contrôle de la variation de la taille du treillis des concepts et s'avère être la seule pour le moment. Cette mesure de similarité est-elle unique ou alors il en existe d'autres compatibles avec la généralisation existentielle ? Nos travaux futurs pourront s'atteler à répondre à cette question.*

# ♣ Bibliographie ♣


[1] *R. Belohlavek. Introduction to formal concept analysis.* Palacky Universty, Department of computer Science, Olomouc*, 47, 2008.*

[2] *K. Bertet.* Structure de treillis Contributions structurelles et algébriques Quelques usages pour des données images. *PhD thesis, Université de la Rochelle, 2011.*

[3] *G. Jatteau.* Approximation du treillis des concepts pour la fouille de données. *PhD thesis, Gatineau, Université du Québec en Outaouais, Département d'informatique,68 p, 2005. http ://di.ugo.ca/id/eprint/266.*

[4] *K. Kazimierz.* Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie. *Institut de Mathématiques de l'Université de Genève, 1966.*

[5] *J-L. Krevine.* Théorie des ensembles. *Cassini, 1998 - 280 pages. http ://www.fichier-pdf.fr/2014/01/03/jean-louis-krivine-theorie-des-ensembles/.*

[6] *R.S. Kuitché1, R.E.A. Temgoua2, and L. Kwuida. A similarity measure to generalize attributes. Vol -2123 :141–152, 2018. CEUR-WS.org/Vol-2123/paper12.pdf.*

[7] *L. Kwuida, R.S. Kuitché, and R.E.A. Temgoua. On the size of* $\exists$*-generalized concept lattices, discrete applied mathematics (2019). https ://doi.org/10.1016/j.dam.2019.02.035.*

[8] *L. Kwuida, R. Missaoui, A. Balamane, and J. Vaillancourt. Generalized pattern extraction from concept lattices.* Annal of mathematics and artificial intelligence*, 72(1-2) :151–168, 2014.*