RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITÉ DE YAOUNDE 1
****
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
****
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE 1
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

58e promotion

HOMOGÉNÉISATION PÉRIODIQUE D'UN PROBLÈME SEMI-LINÉAIRE

Mémoire rédigé et soutenu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade (DIPESII) en Mathématiques.

Par

EHONE NSAMBO Denis Hyacenthe

Licencié en Mathématiques

Matricule : 10V0099

Sous la direction du

Pr. NNANG Hubert

Maître de Conférences

École Normale supérieure, Université de Yaoundé 1

Année académique :2018-2019

♣ Dédicace ♣

À la mémoire de ma grand-mère

Ce travail est dédié à grand-mère qui m'a toujours poussé et motivé dans mes études. J'espère que, du monde qui est sien maintenant, elle apprécie cet humble geste comme preuve de reconnaissance de la part d'un de ses petits fils qui a toujours prié pour le salut de son âme. Puisse Dieu, le tout puissant l'avoir en sa sainte miséricorde.

ENON Jeannette

♣ Remerciements ♣

Il y a eu tout au long de ce travail des moments de stress, d'incertitudes et bien d'autres sentiments et situations inconfortables susceptibles de me faire baisser les bras et de tout abandonner ; mais le Dieu tout puissant a mis sur ma route des personnes qui m'ont tenu la main et m'ont donné le courage d'aller de l'avant.

Je tiens ainsi à remercier :

♠ Mon encadreur Pr. NNANG Hubert, pour avoir accepté ce travail et pour sa disponibilité.

♠ Tous les enseignants du Département de Mathématiques de l'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE pour leurs conseils et leurs enseignements.

♠ Les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont également à l'endroit de :

♠ Mes camarades de promotion à l'instar de : TACHAGO, DJACHEUN, PABAME, MEDAH, ACHABA et bien d'autres pour leur soutien moral et tous les bons moments passés ensemble.

♠ Mes amis : KENNE Steve, WEMBE Edgar, NGOKO WAWO, DJOMEGNE Landry, MACHE Karim, FEUSSI Raphaël, HEUDONG, TSAFO, DJENE Elodie,
ZILLI Sandrine pour tout leur soutien moral et leurs multiples encouragements.

Je ne saurais terminer sans adresser des remerciements spéciaux à :

♠ Mes mamans EBANDJI Frida et KOUTA Rachel pour leur bon encadrement, tout leur amour et leur affection.

♠ Mes frères et soeurs EKIL NGOU, MBANDA Idel, TCHOUMI Serge, ENON Kevine, MBE Charle pour leur amour.

♠ Mes oncles NSAMBO Oscar et EKANGO Clément.

♠ Ma tante ELOM LOUISE et ma grand-mère ESSEBE Emilie.

♠ Tous ceux qui de près ou de loin m'ont soutenu et encouragé et dont les noms ne sont pas cités dans ce document.

♣ Déclaration sur l'honneur ♣

Le présent mémoire est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle par ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

EHONE NSAMBO

♣ Résumé ♣

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'homogénéisation périodique d'un problème semi-linéaire sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Nous avons commencé par démontrer l'existence et l'unicité de la solution faible de notre ε-problème ; ensuite nous sommes passés à l'homogénéisation proprement dite de notre problème qui est rendue possible grâce à la méthode de convergence à deux échelles inventée par Gabriel NGUETSENG **[7]**.

Mots clés :
Homogénéisation périodique, convergence à deux échelles, problème semi-linéaire, problème microscopique, problème macroscopique.

♣ Abstract ♣

The aim of this work was to study the periodic homogenization of a semi-linear problem over a bounded open subset of $\mathbb{R}^N$ using the two-scale convergence method invented by Gabriel NGUETSENG **[7]**. We first established the existence and uniqueness of the weak solution of our ε-problem. We later on obtained the macroscopic problem called homogenized problem which is similar to the ε-problem by setting ε to turn towards 0.

Keywords :
Periodic Homogenization, two scale convergence, semi-linear problem, microscopic problem, macroscopic problem.

♣ Table des matières ♣

♣ Notations ♣

Notations générales

Nous ci-dessous certains notations et espaces fonctionnels utilisés tout au long de ce travail.

E' Espace dual de E, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur E.

E'' Le bidual de E.

$< \cdot, \cdot >$ Crochet de dualité entre E' et E.

$\mathcal{L}(E, F)$ Espace des opérateurs linéaires continus de E dans F.

ε Petit paramètre représentatif de l'échelle microscopique.

x Variable macroscopique.

$y = \frac{x}{\varepsilon}$ Variable microscopique.

$\sigma(E, E')$ Topologie faible définie sur E.

$\sigma(E', E)$ Topologie faible* définie sur E'.

$|A|$ Mesure de Lebesgue de l'ensemble A.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$ = gradient de u.

$divu = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ = divergence de u.

$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ = Laplacien de u.

$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}, |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$, avec $\alpha_i \in \mathbb{N}$

$Supp\ f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction f.

Espaces fonctionnels

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné.

$Y \ =]0,1[^N$ est la cellule unité.

$\partial\Omega$ est la frontière de Ω.

$\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$.

$\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$ ou encore l'espace des distributions sur Ω.

$L^p(\Omega; X)$ est l'espace des classes de fonctions mesurables $u : x \in \Omega \longmapsto u(x) \in X$ telles que $\displaystyle\int_\Omega \|u(x)\|_X^p \mathrm{d}x < +\infty$ avec X espace de Banach, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq +\infty$.

$L^p(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable telles que $\displaystyle\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$.

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $|f| \leq c \ p.p.$ sur $\Omega\}$.

$L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)= \{u \in L^p(\Omega), \forall\, \Omega$ ouvert borné de $\mathbb{R}^N\}$.

Le symbole $\#$ indique la périodicité dans Y.

$C_\#(Y)$ est l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ qui sont $Y-$ périodiques.

$C^\infty_\#(Y)$ $=\{u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, u est $Y-$périodique$\}$.

$L^p_\#(Y) = \{u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N),\ u$ est $Y-$périodique $\}$, $1 \leq p \leq +\infty$.

$L^p_\#(Y; \mathcal{C}(\overline{\Omega}))$ est l'espace des classes de fonctions mesurables $u : Y \longrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega}), y \longmapsto u(y)$ et $\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \in L^p_\#(Y)$.

$L^p(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ est l'espace des classes de fonctions mesurables $u : \Omega \longrightarrow \mathcal{C}_\#(Y)), x \longmapsto u(x)$ telles que $\displaystyle\int_\Omega \|u(x)(.)\|^p_{\mathcal{C}_\#(Y)} \mathrm{d}x < +\infty$.

$\mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}^\infty_\#(Y))$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact sur $\Omega \times \mathbb{R}^N$ telles que $u(x,.) \in \mathcal{C}_\#(Y)$.

♣ Introduction ♣

Dans de nombreux problèmes de mécanique, physique, ou d'ingénierie, on est amené à étudier des problèmes aux limites dans les milieux ayant une structure périodique ou présentant des hétérogénéités de petite taille par rapport à la dimension du domaine. C'est le cas notamment des matériaux composites, qui sont de plus en plus utilisés en industrie tant pour leurs caractéristiques que pour leurs composantes.

La modélisation de certains phénomènes comme l'écoulement d'un fluide peut aboutir à certaines équations aux dérivées partielles dont les coefficients sont fortement oscillants. Lorsqu'elles sont nombreuses, ces oscillations peuvent générer des problèmes dans leur résolution numérique. La théorie mathématique de l'homogénéisation permet d'y remédier en remplaçant les problèmes aux coefficients fortement oscillants par des problèmes approchés dont les coefficients n'oscillent plus, et donc beaucoup plus simple à traiter numériquement. L'importance et la nécessité de cette méthode découlent par exemple du fait que presque tous les milieux naturels sont hétérogènes et l'estimation de leurs propriétés effectives est nécessaire et incontournable avant leur utilisation en industrie. IL existe plusieurs méthodes d'homogénéisation des équations aux dérivées partielles (G-convergence, H-convergence, Γ-convergence, convergence deux échelles, éclatement périodique). Dans ce travail, nous utilisons la méthode de la convergence deux échelles inventée par Nguetseng [7] et développée par Allaire [2].

L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique (lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$) de la suite des solutions du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -div(A^{\varepsilon}(x)\nabla u_{\varepsilon}) + g^{\varepsilon}[u_{\varepsilon}] & = & f & dans \quad \Omega, \\ u_{\varepsilon} & = & 0 & sur \quad \Gamma = \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{1}$$

où A^{ε} est une matrice elliptique , les fonctions f et g vérifient certaines conditions.

Dans un premier temps, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème **(1)** ; ceci pour tout $\varepsilon > 0$. La preuve utilise un théorème du point fixe. Ensuite en utilisant la méthode de convergence à deux-échelles, nous étudions l'homogénéisation du problème **(1)**. De façon plus précise, nous montrons que la suite de solutions du problème **(1)** converge vers la solution du problème homogénéisé qui est une équation semi-linéaire du même genre.

Ce travail est structuré en trois chapitres comme suit : le Chapitre 1 est consacré à quelques résultats d'analyse fonctionnelle qui nous serons utiles dans la suite de ce travail. Le Chapitre 2 porte sur les rappels sur la notion de convergence à deux échelles. Au Chapitre 3, nous étudions le comportement asymptotique de la solution faible du problème **(1)** quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

CHAPITRE UN

QUELQUES RÉSULTATS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions d'analyse fonctionnelle qui nous aiderons dans la suite de notre travail. Ces résultats peuvent être consultés dans **[4, 5, 9, 11]**.

1.1 Notions de convergence faible dans un espace de Banach

1.1.1 Convergence faible

Définition 1.1.1.

Soient E un espace de Banach, E' son dual et $< \cdot, \cdot >$ le crochet de dualité entre E' et E.

On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge faiblement vers $x \in E$ si

$$\lim_{n\to+\infty} < x', x_n > = < x', x >, \text{ pour tout } x' \in E'.$$

Notation 1.1.1. .

On note $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E pour signifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in E$ dans E.

Proposition 1.1.1. ***[4, page 35]***

Soient E un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge faiblement vers x dans E. Alors on a :

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite bornée dans E, c'est-à-dire il existe une constante C indépendante de n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\|_E \leq C$;*

(ii) $\|x\|_E \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \|x_n\|_E$.

Théorème 1.1.1. ***(Théorème de Eberlein-Smuljan) [5, page 15-16]***

Soient E un espace de Banach réflexif, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans E. Alors on a :

(i) Il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in E$ telle que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ faiblement dans E.

(ii) Si toutes les sous-suites $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent faiblement vers la même limite x dans E, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x dans E.

1.1.2 Convergence faible*

Définition 1.1.2.

Soient E un espace de Banach, E' son dual et $< \cdot, \cdot >$ le crochet de dualité entre E' et E.

On dit que la suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E' converge faiblement vers $x' \in E'$ dans E' si*

$$\lim_{n\to+\infty} < x'_n, x >=< x', x >, \text{ pour tout } x \in E.$$

Notation 1.1.2. .

On note $x'_n \rightharpoonup x'$ faiblement dans E' pour signifier que la suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E' converge faiblement* vers $x' \in E'$ dans E'.*

Proposition 1.1.2. ***[4, page 40-41]***

Soient E un espace de Banach, E' son dual et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E' qui converge faiblement vers x' dans E'. Alors on a :*

(i) $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans E', c'est-à-dire il existe une constante C indépendante de n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x'_n\|_{E'} \leq C$;

(ii) $\|x'\|_{E'} \leq \liminf\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|x'_n\|_{E'}$.

Théorème 1.1.2. ***(Théorème de compacité faible*) [5, page 17]***

Soit E' un espace de Banach séparable et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans E', alors on a :

(i) Il existe une sous-suite $(x'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x' \in E$ telle que $x'_n \rightharpoonup x'$ faiblement dans E'.*

(ii) Si toutes les sous-suites $(x'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite x', alors la suite $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x' dans E'.*

1.2 Convergence faible et faible* dans $L^2(\Omega)$.

Dans cette section, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$).

Définition 1.2.1.

(i) La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\Omega)$ est dite faiblement convergente dans $L^2(\Omega)$ vers $u \in L^2(\Omega)$ si

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x, \textit{ pour tout } v \in L^2(\Omega).$$

(ii) La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^\infty(\Omega)$ converge faiblement dans $L^\infty(\Omega)$ vers $u \in L^\infty(\Omega)$ si*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x, \textit{ pour tout } v \in L^1(\Omega).$$

(iii) La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^1(\Omega)$ converge faiblement dans $L^1(\Omega)$ vers $u \in L^1(\Omega)$ si

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x, \textit{ pour tout } v \in L^\infty(\Omega).$$

Donnons quelques resultats caractérisant la convergence faible.

Proposition 1.2.1.

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\Omega)$ tel que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ et $u_\varepsilon \rightharpoonup w$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors $u = w$.

Preuve .

$u_\varepsilon \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ implique pour tout $v \in L^2(\Omega)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

De même , $u_\varepsilon \rightharpoonup w$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ implique pour tout $v \in L^2(\Omega)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega w(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega w(x)v(x)\mathrm{d}x$, pour tout $v \in L^2(\Omega)$

c'est-à-dire $\displaystyle\int_\Omega (u-w)(x)v(x)\mathrm{d}x = 0$, pour tout $v \in L^2(\Omega)$. Donc $(u-w)(x) = 0$ p.p. dans Ω de sorte que $u = w$ dans $L^2(\Omega)$.

D'où le résultat.

Proposition 1.2.2. ***(Inégalité de Young) [11, page 16]***

Soient a et b deux réels. Alors,

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Théorème 1.2.1. ***(Inégalité de Hölder) [4, page 56]***

Si $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et $\displaystyle\int_\Omega |fg|\mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|g\|_{L^2(\Omega)}$.

1.3 Les espaces $H^m(\Omega)$.

Dans cette section, Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.3.1.

Pour $m \in \mathbb{N}$, l'espace de Sobolev noté $H^m(\Omega)$ est constitué des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m au sens des distributions s'identifient à des fonctions de $L^2(\Omega)$. De façon explicite, on a :

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,\ 0 \leq |\alpha| \leq m\right\}.$$

Proposition 1.3.1. ***[1, page 60]***

L'espace $H^m(\Omega)$ muni de la norme définie par

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

est un espace de Banach.

Définition 1.3.2.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné. On note par $H_0^m(\Omega)$, l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ au sens de la norme $\|.\|_{H^m(\Omega)}$.

Proposition 1.3.2. ***[1, page 61]***

L'espace $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$< u, v >= \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert.

Proposition 1.3.3. ***[4, page 121]***

(i) L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace réflexif.

(ii) L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace séparable.

(iii) L'espace $H_0^m(\Omega)$ est un espace de Banach séparable ; il est de plus réflexif.

1.4 Quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle

Soit H un espace de Hilbert. Nous notons la norme de H par $\|\cdot\|$.

Définition 1.4.1. *On dit qu'une forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est*

(i) ***continue*** *s'il existe une constante réelle $C > 0$ telle que :*

$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$, *pour tout $u, v \in H$.*

(ii) ***cœrcive*** *s'il existe une constante réelle $\alpha > 0$ telle que :*

$|a(v,v)| \geq \alpha\|v\|^2$, *pour tout $v \in H$.*

Définition 1.4.2. *Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques.*
On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est une contraction stricte s'il existe $k \in [0,1[$ tel que $\delta\left[f(x), f(y)\right] \leq kd(x,y)$, pour tout $x, y \in E$.

Théorème 1.4.1. ***(Lemme de Lax-Milgram) [4, page 84]***

Soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire continue et cœrcive sur H.
*Alors pour tout $l \in H'$(**le dual topologique de** H), il existe une unique solution du problème :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \\ a(u,v) = l(v), \\ \text{pour tout } \ v \in H. \end{cases} \tag{1.1}$$

Théorème 1.4.2. ***(Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) [4, page 81]***

Etant donné $f \in H'$, il existe un unique $g \in H$ tel que : $\langle f, v\rangle_{H',\, H} = (g,v)$, pour tout $v \in H$. De plus :

$$\|g\|_H = \|f\|_{H'}.$$

Théorème 1.4.3.

Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $f : E \longrightarrow E$ une contraction stricte. Alors, f admet un unique point fixe.

Preuve . *La preuve est constructive. On se donne un point $x_0 \in E$ et on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur dans E et définie par*

$$x_{n+1} = f(x_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

On remarque que $x_n = f^n(x_0)$ et on montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E,d), donc converge (car (E,d) est complet). Soit $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$; en utilisant la continuité de f, on a :

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x.$$

Si y est un autre point fixe de f, on a :

$$0 \leq d(x,y) \leq d\left(f(x), f(y)\right) \leq \alpha d(x,y),$$

où α est le coefficient de contraction stricte.
Avec $\alpha < 1$, il vient que $d(x,y) = 0$ et l'unicité du point fixe est démontré. ■

Théorème 1.4.4.

Soient V un espace de Hilbert, $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire dans V et $\|\cdot\|$ la norme correspondante. Soit T un opérateur de V dans lui-même tel que :

a) pour tout $u, v \in V$, $\|Tu - Tv\| \leq M\|u - v\|$;

b) pour tout $u, v \in V$, $(Tu - Tv|u - v) \geq m\|u - v\|^2$ où M et m sont des réels strictement positifs.

Alors pour tout $f \in V$ donné, il existe un unique $u \in V$ tel que $Tu = f$.

Preuve . *Soit $f \in V$ fixé. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons l'application A_ε de V dans V donnée par*

$$A_\varepsilon u = u - \varepsilon(Tu - f), \text{ pour tout } u \in V.$$

On a pour tout $u, v \in V$,

$$\begin{array}{rcl} \|A_\varepsilon u - A_\varepsilon v\|^2 & = & (u - v - \varepsilon(Tu - Tv)|u - v - \varepsilon(Tu - Tv)) \\ & = & \|u - v\|^2 - 2\varepsilon(Tu - Tv|u - v) + \varepsilon^2\|Tu - Tv\|^2 \\ & \leq & \|u - v\|^2 - 2\varepsilon m\|u - v\|^2 + \varepsilon^2 M^2\|u - v\|^2 \end{array}$$

Donc $\|A_\varepsilon u - A_\varepsilon v\|^2 \leq (1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 M^2)\|u - v\|^2$, pour tout $u, v \in V$.
Notons déjà que $1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 M^2 > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi, si l'on suppose que $0 < \varepsilon < \dfrac{m}{M^2}$ et si l'on pose ensuite $k = (1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 M^2)^{1/2}$, alors $0 < k < 1$ et par suite A_ε est une contraction stricte. Il en résulte du ***Théorème 1.4.3.*** *qu'il existe un unique $u \in V$ tel que $A_\varepsilon u = u$, c'est-à-dire $Tu = f$.* ■

Théorème 1.4.5. ***(Inégalité de Poincaré) [5, page 52]***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Si Ω est borné dans au moins une direction, alors il existe une constante $C = C(\Omega)$ telle que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}$, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$.
De plus la semi-norme $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)^N}$ définie une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à celle induite par $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.4.6. ***[1, page 74]***

Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tel que*

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)\mathrm{d}x = 0, \text{ pour tout } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors

$$u(x) = 0 \ p.p. \text{ sur } \Omega.$$

⋆ ⋆ CHAPITRE DEUX ⋆ ⋆

RAPPELS SUR LA CONVERGENCE À DEUX ÉCHELLES

Dans ce chapitre, nous rappelons la notion de fonctions périodiques, la notion de valeurs moyenne d'une fonction périodique, la notion de convergence à deux échelles, quelques théorèmes de compacité fondamentales pour notre travail. Ces résultats peuvent être consultés dans **[2, 3, 6, 7]**.

2.1 Fonctions périodiques

Soit Y une cellule de $\mathbb{R}^N$ définie par :

$$Y =]0, l_1[\times \cdots \times]0, l_N[,$$

où $l_1, \ldots, l_N$ sont des entiers naturels.

Donnons une définition qui introduit la notion de fonction périodique presque partout.

Définition 2.1.1.

Soient Y définie comme ci-dessus et f une fonction définie presque partout sur $\mathbb{R}^N$. La fonction f est dite Y-périodique si :

$$f(x + kl_ie_i) = f(x) \ \text{p.p. sur } \mathbb{R}^N, \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \text{ et pour tout } i \in \{1, \ldots, N\};$$

où $\{e_1, \ldots, e_N\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

Dans le cas où $N = 1$, on dit simplement que f est l_1-périodique.

La valeur moyenne d'une fonction périodique est essentielle quand on étudie les fonctions périodiques. Rappelons sa définition.

Définition 2.1.2. ***(Valeur moyenne d'une fonction périodique)***

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^1(\Omega)$. La valeur moyenne de f sur Ω est le nombre réel $\mathcal{M}_\Omega(f)$ défini par

$$\mathcal{M}_\Omega(f) = \frac{1}{\mid \Omega \mid} \int_\Omega f(y)\mathrm{d}y.$$

Théorème 2.1.1. ***[6, page 3]***

Une fonction $f \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$si, et seulement si il existe un sous-ensemble E de Ω de mesure nulle tel que :

i) pour tout $x \in \Omega \backslash E$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue et Y-périodique ;

ii) pour tout $y \in Y$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est mesurable ;

iii) $\displaystyle\int_\Omega \|f(x,.)\|^2_{\mathcal{C}_\#(Y)} \mathrm{d}x < +\infty.$

.

Théorème 2.1.2. ***[6, page 5]***

Soit $\phi(x,y) \in L^1(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$.

Alors la fonction

$$\begin{aligned} \phi^\varepsilon : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi^\varepsilon(x) = \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) \end{aligned}$$

est bien définie, mesurable et on a :

$$\|\phi^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\phi\|_{L^1(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx = \int_\Omega \int_Y \phi(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Théorème 2.1.3. ***[6, page 6]***

Soit p un entier tel que $1 \leq p < +\infty$. On dénote par $B_p(\Omega; Y)$ l'un des espaces suivants $L^p(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$, $L^p_\#(Y; \mathcal{C}(\bar{\Omega}))$ ou $\mathcal{C}(\bar{\Omega}; \mathcal{C}_\#(Y))$. Alors $B_p(\Omega, Y)$ possède les propriétés suivantes :

i) $B_p(\Omega, Y)$ est un espace de Banach séparable ;

ii) $B_p(\Omega, Y)$ est dense dans $L^p(\Omega \times Y)$;

iii) pour tout $\phi \in B_p(\Omega, Y)$, la fonction

$$\begin{aligned} \phi^\varepsilon : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \phi^\varepsilon(x) = \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) \end{aligned}$$

est bien définie, mesurable et on a :

$$\|\phi^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\phi\|_{B_p(\Omega,Y)},$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \left|\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\right|^p \mathrm{d}x = \int_\Omega \int_Y |\phi(x,y)|^p \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Introduisons à présent la notion de périodicité des fonctions de l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Définition 2.1.3.

Soit $\mathcal{C}^\infty_\#(Y)$ le sous espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ des fonctions Y-périodiques. On désigne par $H^1_\#(Y)$ l'adhérence de $\mathcal{C}^\infty_\#(Y)$ pour la norme de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Définition 2.1.4.

L'espace quotient $H^1_\#(Y)/\mathbb{R}$, définit l'espace des classes d'équivalences de $H^1_\#(Y)$ muni de la relation d'équivalence suivante :

$$u \simeq v \ \Leftrightarrow \ u - v \textit{ est une constante}, \textit{pour tout } u, v \in H^1_\#(Y).$$

On désignera par $\dot{u}$ le représentant de u.

Proposition 2.1.1. ***[5, Proposition 3.52. page 59]***

La quantité suivante :

$$\|\dot{u}\|_{H^1_\#(Y))/\mathbb{R}} = \|\nabla v\|_{L^2(Y)^N}, \textit{pour tout } v \in \dot{u}, \ \dot{u} \in H^1_\#(Y),$$

définit une norme sur $H^1_\#(Y)/\mathbb{R}$.

2.2 La convergence à deux échelles

Nous donnons ici la définition de la notion de convergence à deux échelles faible et de convergence à deux échelles forte ; puis nous donnerons quelques résultats importants concernant cette notion. Dans ce paragraphe, Y est la cellule unité.

2.2.1 Définitions

Définition 2.2.1. ***(Convergence à deux échelles faible)***

*Une suite de fonctions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\Omega)$ **converge faiblement à deux échelles** vers $u \in L^2(\Omega \times Y)(\equiv L^2(\Omega; L^2_\#(Y)))$ si pour tout $\Phi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\Phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x = \int_\Omega \int_Y u(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

Notation 2.2.1.

On pourra écrire $u_\varepsilon \overset{2s}{\rightharpoonup} u$ dans $L^2(\Omega)$.

Définition 2.2.2. ***(Convergence à deux échelles forte)***

Une suite de fonctions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\Omega)$ ***converge fortement à deux échelles*** *vers* $u \in L^2(\Omega \times Y)(\equiv L^2(\Omega; L^2_\#(Y))$ *si :*

(i) Elle converge faiblement à deux échelles vers $u \in L^2(\Omega \times Y)$*.*

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega \times Y)}$.

Notation 2.2.2.

On pourra écrire $u_\varepsilon \xrightarrow{2s} u$ *dans* $L^2(\Omega)$*.*

Remarque 2.2.1.

(i) Dans la suite quand on dira convergence à deux échelles, cela signifiera convergence faible à deux échelles.

(ii) Si $Y =]0, l_1[\times \cdots \times]0, l_N[$*, alors la relation* ***(2.1)*** *devient* :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\Phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x = \frac{1}{|Y|}\int_\Omega \int_Y u(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

où $|Y|$ *désigne la mesure de Lebesgue de* Y*.*

(iii) La limite de la convergence à deux échelles est unique. En effet soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une suite de* $L^2(\Omega)$ *telle que* $u_\varepsilon \xrightharpoonup{2s} u$ *et* $u_\varepsilon \xrightharpoonup{2s} v$ *avec* $u, v \in L^2(\Omega \times Y)$*.*

On a $u_\varepsilon \xrightharpoonup{2s} u$ *dans* $L^2(\Omega)$ *implique*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\Phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x = \int_\Omega \int_Y u(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \textit{pour tout } \Phi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y)).$$

De même, $u_\varepsilon \xrightharpoonup{2s} v$ *dans* $L^2(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\Phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx = \int_\Omega \int_Y v(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \textit{pour tout } \Phi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y));$$

donc

$$\int_\Omega \int_Y u(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_\Omega \int_Y v(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \textit{pour tout } \Phi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y));$$

c'est-à-dire

$$\int_\Omega \int_Y [u(x,y) - v(x,y)]\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 0, \textit{pour tout } \Phi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y));$$

d'où $u(x,y) - v(x,y) = 0$ *p.p. dans* $\Omega \times Y$ *de sorte que* $u = v$ *dans* $L^2(\Omega \times Y)$*.*

Donnons à présent quelques exemples de suites convergeant à deux échelles :

Exemple 2.2.1.

(i) Pour toute fonction régulière $u_0(x,y)$, $Y-$périodique en y, la suite définie par $u_\varepsilon(x) = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) \overset{2s}{\rightharpoonup} u_0(x,y)$.

(ii) Toute suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers une limite u converge à deux échelles vers la même limite.

2.2.2 Relations entre convergence forte, à deux échelles et faible

Pour toute suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de $L^2(\Omega)$, nous avons trois notions de convergence qui nous s'intéressent : **forte, à deux échelles et faible**. Dans cette section nous explorons les différentes relations qui existent entre elles.

Théorème 2.2.1. ***(Relation entre convergence forte et à deux échelles) [6]***

Si $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement vers u dans $L^2(\Omega)$, alors $u_\varepsilon \overset{2s}{\rightharpoonup} u_1(x,y) = u(x)$.

Preuve .

Soit $\Phi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$, alors on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\Phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x - \int_\Omega\int_Y u_1(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right| \\
\leq\ & \left|\int_\Omega [u_\varepsilon(x)-u(x)]\Phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x\right| + \left|\int_\Omega u(x)\Phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x - \int_\Omega\int_Y u_1(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right| \\
\leq\ & \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}\|\Phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \left|\int_\Omega u(x)\Phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x - \int_\Omega\int_Y u_1(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right|
\end{aligned}$$

*Comme $u(x)\Phi(x,y) \in L^1(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ et $(\|\Phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)})_{\varepsilon>0}$ est **(Théorème 2.1.3.)**, alors en faisant tendre ε vers 0 et en utilisant le **Théorème 2.1.2.** , le terme de droite de cette inégalité tend vers 0. Ainsi, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\Phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x = \int_\Omega\int_Y u_1(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ et on a le résultat.* ■

Théorème 2.2.2. ***(Relation entre convergence faible et à deux échelles) [6]***

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite dans $L^2(\Omega)$ telle que $u_\varepsilon \overset{2s}{\rightharpoonup} u \in L^2(\Omega\times Y)$. Alors

$$u_\varepsilon \rightharpoonup v(x) = \int_Y u(x,y)\mathrm{d}y \ \textit{ faiblement dans } L^2(\Omega),$$

et la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée.

Preuve .

Par définition de la convergence à deux échelles, on a : pour tout $\Phi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\Phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x = \int_\Omega \int_Y u(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Pour Φ *indépendante de* y*, on obtient*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\Phi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \int_Y u(x,y)\Phi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Puisque chaque fonction dans $L^2(\Omega)$ *peut être identifiée par* $\Phi \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ *indépendante de* y*, alors on a le résultat c'est-à-dire* $u_\varepsilon \rightharpoonup v(x) = \int_Y u(x,y)\mathrm{d}y$ *faiblement dans* $L^2(\Omega)$*. Par suite, étant donné que toute suite convergeant faiblement est bornée* ***(Théorème 1.1.1.)****, on déduit que* $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *est bornée.*

Ce qui achève la preuve. ■

Exemple 2.2.2. ***(La convergence à deux échelles n'implique pas la convergence forte)***

Considérons la suite (u_ε) *définie par* $u_\varepsilon(x) = \sin(\frac{x}{\varepsilon})$*. Cette suite admet une limite à deux échelles notée* $\sin(y)$ *mais elle ne converge pas fortement.*

Exemple 2.2.3. ***(La convergence faible n'implique pas la convergence à deux échelles)***

Soit la suite (u_n) *définie par* $u_n(x) = \begin{cases} \sin(nx) \text{ si } n \text{ est impair} \\ \cos(nx) \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$.

Cette suite converge faiblement vers 0 *dans* $L^p(\Omega)$ *mais n'admet pas de limite à deux échelles. Notons tout de même que toute suite convergeant faiblement admet une sous-suite qui converge à deux échelles.*

2.2.3 Quelques résultats pour la convergence à deux échelles

La proposition suivante est capitale quand nous utiliserons la méthode de convergence à deux échelles pour passer à la limite dans notre problème.

Proposition 2.2.1. ***[6]***

Si la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *converge à deux échelles vers* $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$*, alors* ***(2.1)*** *est encore valable pour* $\Phi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}; L^\infty_\#(Y))$.

La proposition qui va suivre nous dit qu'il est possible de remplacer l'espace $L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ par $\mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}^\infty_\#(Y))$ dans la définition de la convergence à deux échelles **(2.1)** à condition d'y ajouter l'hypothèse que la suite soit bornée dans $L^2(\Omega)$.

Proposition 2.2.2. *[6]*

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une suite bornée dans* $L^2(\Omega)$ *telle que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathcal{C}^\infty_\#(Y))$. *Alors* $u_\varepsilon \xrightarrow{2s} u \in L^2(\Omega\times Y)$.

Preuve .

Soit $\phi \in L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))$. *Montrons que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\ dx = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)\ dy\ dx.$$

Soit $(\psi_m)_m \subset \mathcal{D}(\Omega;\mathcal{C}^\infty_\#(Y))$, *tel que* $\psi_m \longrightarrow \phi$ *dans* $L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))$ *quand* $m \longrightarrow \infty$. *Comme* $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *est bornée c'est-à-dire il existe* $c>0$ *tel que* $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c$, *alors pour* $\varepsilon>0$ *fixé on a :*

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x - \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right| \\
= \ & |\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x - \int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi_m(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x + \int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi_m(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x \\
- \ & \int_\Omega\int_Y u(x,y)\psi_m(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_\Omega\int_Y u(x,y)\psi_m(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ | \\
\leq \ & |\int_\Omega u_\varepsilon(x)[\phi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \psi_m(x,\frac{x}{\varepsilon})]\mathrm{d}x\ | + |\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi_m(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x - \int_\Omega\int_Y u(x,y)\psi_m(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y| \\
+ \ & |\int_\Omega\int_Y u(x,y)[\psi_m(x,y) - \phi(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y|.
\end{aligned}$$

Comme $\psi_m \longrightarrow \phi$ *dans* $L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))$, *alors pour tout* $\delta>0$, *il existe* $m_0\in\mathbb{N}$ *tel que*

$$\|\psi_{m_0} - \phi\|_{L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))} < \frac{\delta}{3K} \text{ pour } K = \max(c, \|u\|_{L^2(\Omega\times Y)}).$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\left[\phi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \psi_{m_0}(x,\frac{x}{\varepsilon})\right]\ dx\right| &\leq \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\|\psi^\varepsilon_{m_0} - \phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\|\psi_{m_0} - \phi\|_{L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))} \\
&< c\frac{\delta}{3K}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u(x)\left[\phi(x,\frac{x}{\varepsilon}) - \psi_{m_0}(x,\frac{x}{\varepsilon})\right]\ dx\right| &\leq \|u\|_{L^2(\Omega\times Y)}\|\psi^\varepsilon_{m_0} - \phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{L^2(\Omega\times Y)}\|\psi_{m_0} - \phi\|_{L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))} \\
&< K\frac{\delta}{3K} = \frac{\delta}{3}.
\end{aligned}$$

De plus,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi_{m_0}(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\psi_{m_0}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

donc, il existe $\varepsilon_0 > 0$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$*, on ait*

$$\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi_{m_0}(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x\ - \int_\Omega\int_Y u(x,y)\psi_{m_0}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| < \frac{\delta}{3}.$$

On déduit que pour tout $\delta >$*, il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0$*, on ait*

$$\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x\ - \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq \delta,$$

ce qui conduit donc à dire que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x\ = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\ .$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.2.3. ***[6, page 13]***

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une suite de* $L^2(\Omega)$ *telle que* $u_\varepsilon \overset{2s}{\rightharpoonup} u \in L^2(\Omega\times Y)$*. Alors, on a :*

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega\times Y)} \geq \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

où $v(x) = \displaystyle\int_Y u(x,y)\mathrm{d}y$*.*

Le théorème qui va suivre montre que si une suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge à deux échelles, alors par densité, on peut avoir

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\Phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

pour toute fonction test appartenant à un espace autre que $L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))$.

Théorème 2.2.4. ***[6, page 11]***

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\Omega)$ *telle que* $u_\varepsilon \overset{2s}{\rightharpoonup} u \in L^2(\Omega\times Y)$*. Alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\Phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\Phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

pour tout $\Phi \in L^2_\#(Y;\mathcal{C}(\overline{\Omega}))$*.*

Théorème 2.2.5. ***[6, page 16]***

Toute fonction $u \in L^2(\Omega\times Y)$ *atteint une limite à deux échelles.*

2.2.4 Quelques théorèmes de compacité

Les deux résultats suivants concernent deux théorèmes de compacité faible qui seront très utiles dans la suite de notre travail. Le premier théorème s'énonce comme suit :

Théorème 2.2.6. *[6]*

Pour toute suite bornée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\Omega)$, il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $w \in L^2(\Omega \times Y)$ tels que cette sous-suite converge faiblement à deux échelles vers w.

Preuve .

D'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x\right| \leq \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \left\|\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\right\|_{L^2(\Omega)},$$

et comme (u_ε) est bornée dans $L^2(\Omega)$, alors il existe $c > 0$ telle que $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c$.
De plus $\|\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\phi(x,y)\|_{L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))}$, d'où on a :

$$\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x\right| \leq c\|\phi(x,y)\|_{L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))}. \tag{2.2}$$

On déduit de ***(2.2)*** *que la suite $\left(x \mapsto \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx\right)_{\varepsilon>0}$ est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))$. D'après le théorème de représentation de Riesz (**Théorème 1.4.2.**), il existe une suite $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset [L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))]'$ telle que :*

$$< v_\varepsilon, \phi >= \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x.$$

On a :$\|v_\varepsilon\| = sup_{\|\phi\|=1}|< v_\varepsilon,\phi >| = sup_{\|\phi\|=1}\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x\right| \leq c$.
Comme $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée, il existe une sous-suite de $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ que nous choisissons toujours notée $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $v \in [L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))]'$ tels que $(v_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement vers v de sorte que :*

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x =< v_\varepsilon,\phi >\longrightarrow< v,\phi >, \text{ pour tout } \phi \in L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y)). \tag{2.3}$$

Pour achever la preuve, il est suffisant de montrer que :

$$< v,\phi >= \int_\Omega\int_Y w(x,y)\phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

(2.3) *entraine que $< v_\varepsilon,\phi >\leq c\left\|\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\right\|_{L^2(\Omega)}$.*
(2.2) *entraine que*

$$\begin{aligned} < v_\varepsilon,\phi > &\leq c\left\|\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c\left\|\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\right\|_{L^q(\Omega\times Y)}, \text{ pour tout } \phi \in L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y)). \end{aligned}$$

Comme $L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))$ est dense dans $L^2(\Omega\times Y)$, alors, pour tout $\phi\in L^2(\Omega\times Y)$, il existe une suite $(\phi_h)\in L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))$ telle que $\phi_h\longrightarrow\phi$ dans $L^2(\Omega\times Y)$, c'est-à-dire qu'on peut définir un prolongement $\widetilde{v}$ de v sur $L^2(\Omega\times Y)$ tel que :

$$<\widetilde{v},\phi>=\lim_{h\to o}<w,\phi_h>,$$

et d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe $w\in L^2(\Omega\times Y)$ tel que :

$$<\widetilde{v},\phi>=\int_\Omega\int_Y w(x,y)\phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\ \textit{pour tout}\ \phi\in L^2(\Omega\times Y).$$

Plus particulièrement, pour tout $\phi\in L^2(\Omega;\mathcal{C}_\#(Y))$, on a :

$$<v,\phi>=\int_\Omega\int_Y w(x,y)\phi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Avant énoncé le deuxième résultat de compacité, nous allons d'abord une lemme qui nous aiderons pour faire la preuve de ce résultat.

Lemme 2.2.1. ***[3, page 317]***

Soit $f\in(L^2_\#(Y))^N$ tel que $\displaystyle\int_Y f(y).g(y)\mathrm{d}y=0$, pourtout $g\in(\mathcal{C}^\infty_\#(Y))^N$ avec $div_y g=0$. Alors il existe $z\in H^1_\#(Y)/\mathbb{R}$ unique à une constante additive près tel que $f=\nabla_y z$.

Théorème 2.2.7. ***[6]***

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite bornée de $H^1(\Omega)$. Alors il existe $(u_0,u_1)\in H^1(\Omega)\times L^2(\Omega;H^1_\#(\Omega))$ et une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ encore notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ tels que :

1. *$u_\varepsilon\rightharpoonup u_0$ dans $H^1(\Omega)$-faible.*
2. *$\nabla u_\varepsilon \overset{2s}{\rightharpoonup} \nabla_x u_0(x)+\nabla_y u_1(x,y)$ dans $(L^2(\Omega))^N$.*

Preuve .

***Étape 1*.**

*Par hypothèses, les suites $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont bornés dans $L^2(\Omega)$ et $(L^2(\Omega))^N$ respectivement. D'après le théorème de compacité pour la convergence à deux échelles (**Théorème 2.2.6.**), il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$(toujours notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$), $w\in L^2(\Omega\times Y)$ et $\xi_0\in(L^2(\Omega\times Y))^N$ tels que*

$$u_\varepsilon \overset{2s}{\rightharpoonup} w\ \textit{et}\ \nabla u_\varepsilon \overset{2s}{\rightharpoonup} \xi_0.$$

Étape 2.

D'après le ***Théorème 2.2.2.****, on obtient* $u_0(x) = \displaystyle\int_Y w(x,y)\mathrm{d}y$*. Si nous réussissons à montrer que* w *ne dépend pas de* y*, alors avec l'unicité de la limite, on déduira que toute la suite* (u_ε) *converge à deux échelles vers* u_0*. Pour cela, soit* $\psi \in (\mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y)))^N$*. On a :*

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x = \int_\Omega u_\varepsilon(x)[div_x\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})]\mathrm{d}x - \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega u_\varepsilon(x) div_y \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x \qquad (2.4)$$

Multiplions l'équation ***(2.4)*** *par* ε *et passons à la limite quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$*, on obtient :*

$$\int_\Omega \int_Y w(x,y) div_y \psi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 0. \qquad (2.5)$$

On en déduit donc que w *ne dépend pas de* y*. En effet prenons* ψ *sous la forme* $\psi(x,y) = \varphi(x)\phi(y)$ *avec* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *et* $\phi \in (\mathcal{C}^\infty_\#(Y))^N$*. On déduit de* ***(2.5)*** *que*

$$\int_\Omega \left(\int_Y w(x,y)\ div_y\ \phi(y)\mathrm{d}y \right) \varphi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

D'où

$$\int_Y w(x,y)\ div_y\ \phi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 0,\ \textit{pour tout}\ \phi \in (\mathcal{C}^\infty_\#(Y))^N.$$

Prenons successivement $\phi = (\phi_1, 0, 0, ..., 0)$*,* $\phi = (0, \phi_2, 0, ..., 0)$*,* $\phi = (0, 0, \phi_3, 0, ..., 0)$
avec $\phi_j \in \mathcal{C}^\infty_\#(Y)$*, on obtient*

$$\int_Y w(x,y)\frac{\partial \phi_j}{\partial y_j}\ dy = 0,\ \ \textit{pour tout}\ 1 \le j \le N.$$

D'où $\frac{\partial w}{\partial y_j}(x,.) = 0$ *pour tout* $1 \le j \le N$*, ce qui justifie bien que* u_0 *ne dépend pas de* y *et ceci achève la preuve de* ***1.*** *.*

Étape 3.

Nous allons à présent montrer ***2.****, c'est-à-dire que* $\xi_0(x,y) = \nabla_x u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)$*. Dans l'équation* ***(2.4)****, supposons que* ψ *satisfait* $div_y\psi(x,y) = 0$*, alors nous avons*

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\mathrm{d}x = \int_\Omega u_\varepsilon(x)[div_x\psi(x, \frac{x}{\varepsilon})]\mathrm{d}x.$$

Passons à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$*, nous obtenons :*

$$\int_\Omega \int_Y \xi_0(x,y) \cdot \psi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_\Omega \int_Y u_0(x)[div_x\psi(x,y)]\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

d'où

$$\int_\Omega \int_Y [\xi_0(x,y) - \nabla_x u_0(x)] \cdot \psi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 0,$$

pour tout ψ *tel que* $div_y\psi(x,y)=0$.

Prenons $\psi(x,y)=\varphi(x)\phi(y)$ *avec* $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ *et* $\phi\in(\mathcal{C}^{\infty}_{\#}(Y))^N$ *vérifiant* $div_y\phi=0$, *on obtient finalement*

$$\int_Y[\xi_0(x,y)-\nabla_x u_0(x)]\cdot\phi(y)\mathrm{d}y=0.$$

Soit $L:(\mathbb{C}^{\infty}_{\#}(Y))^N\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie par* $L(\phi)=\displaystyle\int_Y[\xi_0(x,y)-\nabla_x u_0(x)]\cdot\phi(y)\mathrm{d}y$,
pour tout $\phi\in(\mathbb{C}^{\infty}_{\#}(Y))^N$.

Alors L *est continue sur* $(\mathbb{C}^{\infty}_{\#}(Y))^N$ *et s'annule sur le noyau de la divergence par hypothèse. Donc d'après le* ***Lemme2.2.1.****, il existe* $u_1(x,.)\in H^1_{\#}(Y)/\mathbb{R}$ *tel que*

$$\xi_0(x,.)-\nabla_x u_0(x)=\nabla_y u_1(x,.).$$

Ceci définit une fonction $u_1:\Omega\longrightarrow H^1_{\#}(Y)/\mathbb{R}$ *mesurable telle que*

$$u_1\in L^2(\Omega;H^1_{\#}(Y)/\mathbb{R})\ \ et\ \ \xi_0=\nabla_x u_0+\nabla_y u_1.$$

■

HOMOGÉNÉISATION D'UNE ÉQUATION SEMI-LINÉAIRE

Dans ce chapitre, nous nous contentons d'exposer la théorie de l'homogénéisation pour des structures périodiques. Ces structures sont très nombreuses dans la nature ou dans les applications industrielles et on dispose d'une méthode très simple et très puissante pour les homogénéiser : la méthode de convergences à deux échelles que nous présenterons ci-dessous. Dans une structure périodique, nous notons ε le rapport de la période sur la taille caractéristique de la structure. En général, ce paramètre ε est petit et l'homogénéisation mathématique consiste à effectuer une analyse asymptotique lorsque ε tend vers zéro. La limite ainsi obtenue sera dite homogénéisée, macroscopique ou effective. Dans le problème homogénéisé, la forte hétérogénéité de la structure périodique d'origine est moyennée et remplacée par l'utilisation des coefficients effectifs. Dans ce chapitre, nous présenterons le problème aux limites d'ordre ε ; ensuite le passage à la limite dans la formulation variationnelle du problème aux limites d'ordre ε ; et à la fin le problème homogénéisé.

3.1 Problème aux limites d'ordre ε

Soit N entier $(N \geq 1)$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1. On s'intéresse au comportement asymptotique (lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$) du problème elliptique semi-linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -div(A^\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon) + g^\varepsilon[u_\varepsilon] & = & f & dans \quad \Omega, \\ u_\varepsilon & = & 0 & sur \quad \Gamma = \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3.1}$$

avec

$$A^\varepsilon(x) = (a_{ij}^\varepsilon(x))_{1\leq i,j\leq N} \text{ tel que } a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \ p.p \ x \in \mathbb{R}^N$$

et

$$g^\varepsilon[u_\varepsilon](x) = g(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon(x)) \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}.$$

Où f un élément de $L^2(\Omega)$, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ une matrice dont les coefficients vérifient les conditions suivantes :

i) $a_{ij} \in L^\infty_\#(Y)$, pour tout $i, j \in \{1, ..., N\}$,

ii) il existe $0 < \alpha \leq \beta$ tels que pour tout $y \in \mathbb{R}^N$,

$$\alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(y)\xi_i\xi_j \leq \beta|\xi|^2, \text{ presque tout } \xi \in \mathbb{R}^N,$$

et,

$g : (y, \lambda) \longmapsto g(y, \lambda)$ une fonction de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

iii) $(g(y, \lambda) - g(y, \mu))(\lambda - \mu) \geq 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

iv) g est continue et Y-périodique par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^N$ et continue par rapport à la deuxième variable au sens suivant :

il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|g(y, \lambda) - g(y, \mu)| \leq k|\lambda - \mu|, \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}^N,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

v) $g(y, 0) = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$

La formulation variationnelle du problème **(3.1)** est donnée par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)\ telque : \\ a^\varepsilon(u_\varepsilon, v) + G^\varepsilon[u_\varepsilon, v] = l(v), \\ \text{pour tout } v \in H^1_0(\Omega) \end{cases} \tag{3.2}$$

où,

$$a^\varepsilon(u, v) = \int_\Omega A^\varepsilon \nabla u \nabla v \mathrm{d}x, \text{ pour tout } u, v \in H^1_0(\Omega);$$

$$l(v) = \int_\Omega f v \mathrm{d}x, \text{ pour tout } v \in H^1_0(\Omega);$$

$$G^\varepsilon[u, v] = \int_\Omega g^\varepsilon[u] v \mathrm{d}x. \text{ pour tout } u, v \in H^1_0(\Omega).$$

Théorème 3.1.1.

Sous les hypothèses ***(i), (ii), (iii), (iv) et (v)****, si f est donné dans $L^2(\Omega)$ alors pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un unique $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ solution (faible) de* ***(3.1)****.*

Preuve .

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

Notons d'abord que $g \in \mathcal{C}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$; et comme g vérifie ***(iv)*** *alors $g[u] \in L^2(\Omega)$, pour tout $u \in H^1(\Omega)$.*

Il suffira de montrer que le problème variationnel ***(3.2)*** *admet une unique solution.*

*Soit $u \in H_0^1(\Omega)$; alors l'application $v \mapsto a^\varepsilon(u,v) + G^\varepsilon[u,v]$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Il vient du théorème de représentation de Riesz-Fréchet **(Théorème 1.4.2.)** qu'il existe un unique $Tu \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a^\varepsilon(u,v) + G^\varepsilon[u,v] = (Tu,v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi pour chaque $u \in H_0^1(\Omega)$ correspond un unique $Tu \in H_0^1(\Omega)$ tel que*

$$a^\varepsilon(u,v) + G^\varepsilon[u,v] = (Tu,v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Ce qui nous permet de définir une application

$$\begin{aligned} T : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega) \\ u &\longmapsto Tu. \end{aligned}$$

De même, l'application $v \mapsto l(v)$ étant une forme linéaire sur $H_0^1(\Omega)$, il existe un unique $z_f \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$l(v) = (z_f|\varphi), \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

*On déduit de **(3.3) et (3.4)** que le problème **(3.2)** est équivalent au problème*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \; telque : \\ Tu = z_f. \end{cases} \tag{3.5}$$

*Il suffira donc de prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème **(3.5)**.*

On a :

pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$$(Tu - Tv|Tu - Tv) = a^\varepsilon(u - v, Tu - Tv) + G^\varepsilon[u, Tu - Tv] - G^\varepsilon[v, Tu - Tv]$$

ou encore

$$\|Tu - Tv\|^2 = a^\varepsilon(u - v, Tu - Tv) + \int_\Omega (g^\varepsilon[u] - g^\varepsilon[v])(x)(Tu - Tv)(x)\, dx.$$

Mais, pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$,

$a^\varepsilon(u - v, Tu - Tv) \leq \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)} \|Tu - Tv\|_{H_0^1(\Omega)}$ (puisque $a^\varepsilon(.,.)$ est une forme bilinéaire et continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$) et

$$\left| \int_\Omega (g^\varepsilon[u] - g^\varepsilon[v])(x)(Tu - Tv)(x) \mathrm{d}x \right| \leq k\|u - v\|_{H_0^1(\Omega)} \|Tu - Tv\|_{H_0^1(\Omega)}$$

(en utilisant (iv) et l'inégalité de Hölder).

Donc

$$\|Tu - Tv\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq (1+k)\|u-v\|_{H^1_0(\Omega)}\|Tu - Tv\|_{H^1_0(\Omega)},$$

pour tout $u, v \in H^1_0(\Omega)$ *et par suite,*

$$\|Tu - Tv\|_{H^1_0(\Omega)} \leq M\|u-v\|_{H^1_0(\Omega)}, \text{ pour tout } u, v \in H^1_0(\Omega) \textbf{ (avec M=1+k)} \tag{3.6}$$

D'autre part, pour tout $u, v \in H^1_0(\Omega)$,

$$\begin{aligned} (Tu - Tv|u-v) &= a^\varepsilon(u-v, u-v) + [G^\varepsilon[u, u-v] - G^\varepsilon[v, u-v] \\ &= a^\varepsilon(u-v, u-v) + \int_\Omega (g^\varepsilon[u] - g^\varepsilon[v])(x)(u-v)(x)\, dx \\ &\geq a^\varepsilon(u-v, u-v) (\text{en utilisant (iii)}). \end{aligned}$$

Mais, $a^\varepsilon(u-v, u-v) \geq \alpha\|u-v\|^2_{H^1_0(\Omega)}$, *pour tout* $u, v \in H^1_0(\Omega)$ *(en utilisant (ii)), donc*

$$(Tu - Tv|u-v) \geq m\|u-v\|^2_{H^1_0(\Omega)}, \text{ pour tout } u, v \in H^1_0(\Omega) \textbf{ (avec m=}\alpha). \tag{3.7}$$

Les hypothèses du ***Théorème 1.4.4*** *étant vérifiées* ***(en (3.6) et (3.7))****, il vient qu'il existe un unique* $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$ *solution du problème* ***(3.5)*** *et par conséquent* ***(3.2)*** *admet une unique solution* $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$. ■

3.2 Passage à la limite

Dans cette section, nous nous intéressons au passage à la limite dans la formulation variationnelle du problème **(3.1)**(voir le problème (**3.2**)).

Lemme 3.2.1. ***(Estimation à priori)***

La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset H^1_0(\Omega)$ *ainsi obtenue du problème* ***(3.2)*** *est bornée dans* $H^1_0(\Omega)$ *c'est-à-dire, il existe une constante* $\gamma = \gamma(\Omega) > 0$ *telle que :*

$$||u_\varepsilon||_{H^1_0(\Omega)} \leq \gamma \text{ , pour tout } \varepsilon > 0. \tag{3.8}$$

Preuve .

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\alpha\|u_\varepsilon\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq a^\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq a^\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + G^\varepsilon[u_\varepsilon, u_\varepsilon] = \int_\Omega f(x)u_\varepsilon(x)\mathrm{d}x$$

et

$$\int_\Omega f(x)u_\varepsilon(x)\mathrm{d}x \leq \left|\int_\Omega f(x)u_\varepsilon(x)\mathrm{d}x\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\varepsilon\|_{H^1_0(\Omega)}.$$

(où $C(\Omega)$ est une constante strictement positive de l'inégalité de Poincaré)

Donc,

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C(\Omega)}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)} \text{ si } u_\varepsilon \text{ est non nulle}.$$

Prendre $\gamma = \frac{C(\Omega)}{\alpha}\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + 1\right)$ *pour conclure.* ■

Lemme 3.2.2.

Pour tout $v \in L^2(\Omega)$,$g^v \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$

où $g^v(x,y) = g(y, v(x))$, *pour tout* $(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$.

Preuve .

Nous avons :

− pour tout $x \in \Omega$ *fixé, la fonction* $y \mapsto g^v(x,y)$ *est continue et* Y*-périodique*

− et pour tout $y \in Y$ *fixé, la fonction* $x \mapsto g^v(x,y)$ *est mesurable.*

D'après le ***Théorème 2.1.1.*** *, il reste à montrer que*

$$\int_\Omega \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^N} |g^v(x,y)|\right)^2 \mathrm{d}x < +\infty.$$

Soit $(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$.

Puisque g *est* k*-lipschitzienne par rapport à la deuxième variable,*

$|g(y, v(x)) - g(y,0)| \leq k|v(x) - 0|$ *donc* $|g^v(x,y)| \leq k|v(x)|$ *(car* $g(y,0) = 0$*).*

On a donc, $\displaystyle\int_\Omega (\sup_{y\in\mathbb{R}^N} |g^v(x,y)|)^2 \mathrm{d}x \leq k^2 \int_\Omega |v(x)|^2 \mathrm{d}x$ *; et comme* $v \in L^2(\Omega)$ *alors il vient que* $g^v \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$.

D'où le résultat. ■

Lemme 3.2.3.

Si $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$*converge vers* u_0 *dans* $H^1(\Omega)$*-faible, alors pour tout* $v \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega g^\varepsilon[u_\varepsilon](x) v(x) \mathrm{d}x = \int_\Omega \int_Y g(y, u_0(x)) v(x) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Preuve .

Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *fixé, on a :*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[g^\varepsilon[u_\varepsilon](x) - \int_Y g(y, u_0(x))\mathrm{d}y\right] v(x)\mathrm{d}x \\
= \; &\int_\Omega \left[g(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon(x)) - g(\frac{x}{\varepsilon}, u_0(x))\right] v(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \left[g(\frac{x}{\varepsilon}, u_0(x)) - \int_Y g(y, u_0(x))\mathrm{d}y\right] v(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned}
& \left|\int_\Omega \left[g(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon(x)) - g(\frac{x}{\varepsilon}, u_0(x))\right] v(x)\mathrm{d}x\right| \\
\leq\ & \int_\Omega \left|g(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon(x)) - g(\frac{x}{\varepsilon}, u_0(x))\right| |v(x)|\, \mathrm{d}x \\
\leq\ & k\int_\Omega |u_\varepsilon(x) - u_0(x)||v(x)|\mathrm{d}x \\
\leq\ & k\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)};
\end{aligned}$$

mais, étant donné que l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, il vient que donc $\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. D'où

$$\int_\Omega \left[g(\frac{x}{\varepsilon}, u_\varepsilon(x)) - g(\frac{x}{\varepsilon}, u_0(x))\right] v(x)\mathrm{d}x \longrightarrow 0$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

D'autre part, on a $g^{u_0} \in L^2(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$ et $v \in L^2(\Omega)$ donc $g^{u_0}v \in L^1(\Omega; \mathcal{C}_\#(Y))$, et par suite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega g(\frac{x}{\varepsilon}, u_0(x))v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega\int_Y g(y, u_0(x))v(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

*en utilisant le **Théorème 2.1.2.**.*

D'où le résultat. ■

Théorème 3.2.1.

*De la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de solutions du problème **(3.2)**, on peut extraire une sous-suite toujours notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) - \textit{faible},$$

$$\nabla u_\varepsilon \overset{2s}{\rightharpoonup} \nabla u_0 + \nabla_y u_1 \text{ dans } L^2(\Omega)^N.$$

De plus, $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R})$ est l'unique solution du problème variationnel global suivante :

$$\begin{cases}
\textit{Trouver } (u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R}) \; telque : \\
\displaystyle\int_\Omega\int_Y A(y)(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
\displaystyle+ \int_\Omega\int_Y g(y, u_0)v(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x, \\
\textit{pour tout } (v, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R}).
\end{cases} \tag{3.9}$$

Preuve .

*La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ des solutions du problème **(3.2)** étant borné (**Lemme 3.2.1.**) dans l'espace de Banach réflexif $H_0^1(\Omega)$, d'après les Théorèmes de compacité **Théorème 2.2.6.** et*

***Théorème 2.2.7.**, il existe une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ que nous noterons toujours $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R})$ telle que*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) - \text{faible}$$

et

$$\nabla u_\varepsilon \stackrel{2s}{\rightharpoonup} \nabla u_0 + \nabla_y u_1 \text{ dans } L^2(\Omega)^N.$$

Ensuite, posons

$$w_\varepsilon(x) = v(x) + \varepsilon v_1(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

*avec $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $v_1 \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#^\infty(Y)/\mathbb{R})$, on multiplie scalairement la première équation du problème **(3.1)** par $w_\varepsilon(x)$ et on intègre par partie sur Ω pour avoir :*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon(x) \cdot (\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\mathrm{d}x + \varepsilon \int_\Omega A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon(x) \cdot (\nabla_x v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega g^\varepsilon[u_\varepsilon(x)](v(x) + \varepsilon v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)(v(x) + \varepsilon v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\mathrm{d}x. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Or

$$\int_\Omega A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon(x) \cdot (\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot A^t(\frac{x}{\varepsilon}) \left(\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, \frac{x}{\varepsilon})\right) \mathrm{d}x,$$

et,

$$\int_\Omega A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon(x) \cdot (\nabla_x v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot A^t(\frac{x}{\varepsilon})(\nabla_x v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\mathrm{d}x,$$

*donc **(3.10)** devient*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot A^t(\frac{x}{\varepsilon}) \left(\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, \frac{x}{\varepsilon})\right) \mathrm{d}x + \varepsilon \int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot A^t(\frac{x}{\varepsilon})(\nabla_x v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega g^\varepsilon[u_\varepsilon](x)(v(x) + \varepsilon v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)(v(x) + \varepsilon v_1(x, \frac{x}{\varepsilon}))\mathrm{d}x. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

*En passant à la limite dans **(3.11)** quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ avec pour fonction test $A^t(\frac{x}{\varepsilon}) \left(\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, \frac{x}{\varepsilon})\right) \in \left(\mathbb{C}(\bar{\Omega}; L_\#^\infty(Y))\right)^N$ et utilisant le **Lemme 3.2.3.**, il vient que*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_Y A(y)(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot (\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x, y))\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&+ \int_\Omega \int_Y g(y, u_0(x))v(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x, \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

*pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $v_1 \in \mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#^\infty(Y)/\mathbb{R})$. Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et de $\mathcal{D}(\Omega; \mathcal{C}_\#^\infty(Y)/\mathbb{R})$ dans $L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R})$, on obtient que **(3.12)** reste vraie pour tout $(v, v_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R})$. D'où (u_0, u_1) vérifie **(3.9)**.*

Posons

$$W = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H_\#^1(Y)/\mathbb{R}).$$

Muni de la norme

$$\|(v,v)\|_W = \left[\|(\nabla v)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|(\nabla_y v_1)\|^2_{L^2(\Omega\times X)^N}\right]^{1/2}, \textit{ pour tout } (v,v_1) \in W.$$

W est un espace de Hilbert. Posons,

$$a(U,V) = \int_\Omega \int_Y A(y)(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y))(\nabla v(x) + \nabla_y v_1(x,y))\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

$$G[U,V] = \int_\Omega \int_Y g(y,u_0(x))v(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

et

$$l(V) = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

où $U = (u_0,u), V = (v,v_1) \in W$. Alors le problème variationnel global est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \textit{Trouver } U = (u_0,u_1) \in W \\ a(U,V) + G[U,V] = l(V), \\ \textit{pour tout } V = (v,v_1) \in W. \end{cases} \tag{3.13}$$

*Le problème **(3.13)** admet une unique solution en l'identifiant au problème **(3.2)** (voir **Théorème 3.1.1.**).*

*Par conséquent (u_0,u_1) est l'unique solution du problème **(3.9)**.* ■

3.3 Problème homogénéisé

3.3.1 Problème microscopique

Énonçons d'abord un résultat qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 3.3.1.

Soit $1 \leq j \leq N$. Le problème suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} \textit{Trouver } \chi^j \in H^1_\#(Y)/\mathbb{R} \textit{ tel que} \\ \displaystyle\int_Y A(y)\nabla_y \chi^j(y)\cdot\nabla_y\omega(y)\mathrm{d}y = -\int_Y \sum_{k=1}^N a_{kj}(y)\frac{\partial\omega}{\partial y_k}(y)\mathrm{d}y, \\ \textit{pour tout } \omega \in H^1_\#(Y)/\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Preuve .

*On utilise le théorème de **Lax-Milgram (Théorème 1.4.1.)** avec*

$a(u,\omega) = \displaystyle\int_Y A(y)\nabla_y u\cdot\nabla_y\omega(y)\mathrm{d}y$ *et* $l(\omega) = -\displaystyle\int_Y \sum_{k=1}^N a_{kj}(y)\frac{\partial\omega}{\partial y_k}(y)\mathrm{d}y,$ *où $u,\ \omega \in H^1_\#(Y)$.* ■

Proposition 3.3.2.

Pour presque tout $(x, y) \in \Omega \times Y$, on a

$$u_1(x, y) = \chi(y) \cdot \nabla u_0(x), \tag{3.15}$$

$$\nabla_y u_1(x, y) = \nabla_y \chi(y) \nabla u_0(x), \tag{3.16}$$

où $(\nabla_y \chi)_{ij} = \dfrac{\partial \chi^j}{\partial y_i}$ $(1 \leq i, j \leq N)$ *et χ est la solution du problème **(3.14)**.*

Preuve .

*Dans l'équation du problème **(3.9)**, on prend $v = 0$ pour avoir*

$$\int_\Omega \int_Y A(y)[\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)] \cdot [\nabla_y v_1(x, y)] \mathrm{d}y \mathrm{d}x = 0. \tag{3.17}$$

*Posons $v_1 = \varphi \otimes \omega$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\omega \in \mathcal{D}_\#(Y)$ alors, **(3.17)** implique que :*

$$\int_\Omega \left[\int_Y A(y)(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot \nabla_y \omega(y)\, dy \right] \varphi_(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Donc pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$\int_Y A(y)(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x, y)) \cdot \nabla_y \omega(y) \mathrm{d}y = 0, \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{D}_\#(Y).$$

Ceci implique que pour presque tout $x \in \Omega$ fixé,

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_Y A(y) \nabla_y u_1(x, y) \cdot \nabla_y \omega(y) \mathrm{d}y = - \int_Y A(y) \nabla u_0(x) \cdot \nabla_y \omega(y) \mathrm{d}y \\ \text{pour tout } \omega \in \mathcal{D}_\#(Y). \end{array} \right. \tag{3.18}$$

*Tout comme le problème **(3.14)** , le problème **(3.18)** admet une unique solution. Fixons $x \in \Omega$, alors en multipliant scalairement l'équation du problème **(3.14)** par $\dfrac{\partial u_0}{\partial x_j}(x)$, $1 \leq j \leq N$, on obtient*

$$\int_Y A(y) \nabla_y \chi^j(y) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \right) \cdot \nabla_y \omega(y) \mathrm{d}y = - \int_Y \sum_{k=1}^N a_{kj}(y) \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \omega}{\partial y_k}(y) \mathrm{d}y.$$

Ensuite en sommant sur $j = 1, ..., N$, on obtient :

$$\int_Y A(y) \nabla_y [\chi(y) \cdot \nabla u_0(x)] \cdot \nabla_y \omega(y) \mathrm{d}y = - \int_Y A(y) \nabla u_0(x) \cdot \nabla_y \omega(y) \mathrm{d}y.$$

*Donc la fonction $(x, y) \mapsto \chi(y) \cdot \nabla u_0(x)$ est solution du problème **(3.18)**. Par unicité de la solution du problème **(3.18)**, on déduit que pour presque tout $(x, y) \in \Omega \times Y$,*

$$u_1(x, y) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x) \chi^j(y) = \chi(y) \cdot \nabla u_0(x).$$

En posant $(\nabla_y \chi)_{ij} = \dfrac{\partial \chi^j}{\partial y_i}$ $(1 \leq i, j \leq N)$*, il suit que pour presque tout $(x, y) \in \Omega \times Y$,*

$$\nabla_y u_1(x, y) = \nabla_y \chi(y) \nabla u_0(x).$$

Ce qui achève la preuve. ■

Remarque **3.3.1.**

*Le problème **(3.14)** est appelé problème microscopique.*

3.3.2 Problème macroscopique

Théorème **3.3.1.**

Le problème macroscopique est donné par

$$\begin{cases} -div(A^*\nabla u_0) + g^*[u_0] &= f \quad \textit{dans} \quad \Omega \\ u_0 &= 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.19}$$

où

$$A^* = \int_Y A(y)[(I + \nabla_y \chi(y))]\mathrm{d}y, \tag{3.20}$$

et pour tout $x \in \Omega$

$$g^*[u_0](x) = g^*(u_0(x)) = \int_Y g(y, u_0(x))\mathrm{d}y$$

avec pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $g^*(\lambda) = \displaystyle\int_Y g(y,\lambda)\mathrm{d}y$

La fonction χ étant la solution du problème microscopique.

Preuve **.**

*Dans l'équation du problème **(3.9)**, on prend $v_1 = 0$ pour avoir*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega\int_Y A(y)[\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)]\cdot\nabla v(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_\Omega\int_Y g(y,u_0(x))v(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x, \\ \textit{pour tout } v \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases} \tag{3.21}$$

*D'après **(3.16)** on a :*

$$\nabla_y u(x,y) = \nabla_y \chi(y)\nabla u_0(x)$$

*donc **(3.21)** devient :*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega\int_Y A(y)[\nabla u_0(x) + \nabla_y \chi(y)\nabla u_0(x)]\cdot\nabla v(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_\Omega\int_Y g(y,u_0(x))v(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x, \\ \textit{pour tout } v \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

D'où on obtient le problème :

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u_0 \; H_0^1(\Omega) \textit{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega\int_Y A(y)(I + \nabla_y \chi(y))\nabla u_0(x)\cdot\nabla v(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_\Omega\int_Y g(y,u_0(x))v(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x \\ \textit{pour tout } v \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases} \tag{3.22}$$

En posant

$$A^* = \int_Y A(y)(I + \nabla_y \chi(y))\mathrm{d}y$$

et pour $x \in \Omega$

$$g^*(x, u_0(x)) = \int_Y g(y, u_0(x))\mathrm{d}y.$$

Le problème ***(3.22)*** *s'écrit*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u_0 \ H_0^1(\Omega) \ \textit{tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega A^* \nabla u_0(x) \cdot \nabla v(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega g^*(x, u_0(x))v(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x, \\ \textit{pour tout } v \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases} \tag{3.23}$$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *on obtient le problème variationnel homogénéisé suivant :*

$$\begin{cases} \textit{Trouver } u_0 \in \ H_0^1(\Omega) \ \textit{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega A^* \nabla u_0(x) \cdot \nabla v(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega g^*(x, u_0(x))v(x) \, dx \ = \ \int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x \\ \textit{pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.24}$$

qui est la formulation variationnelle du problème macroscopique ***(3.19)****.*

La preuve est ainsi achevée. ■

Proposition 3.3.3.

La matrice A^* *définie par* ***(3.20)*** *est cœrcive .*

Preuve .

Puisque χ^j *est solution du problème* ***(3.14)****, on a :*

$$\int_Y A(y)\nabla_y \chi^j(y) \cdot \nabla_y \omega(y) \, dy = -\int_Y A(y)e_j \cdot \nabla_y \omega(y)\mathrm{d}y \textit{ pour tout } \omega \in H^1_\#(Y)/\mathbb{R}.$$

En particulier pour $\omega = \chi^i$*, on a*

$$\int_Y A(y)(e_j + \nabla_y \chi^j(y)) \cdot \nabla_y \chi^i(y)\mathrm{d}y = 0.$$

Ainsi les coefficients $a^*_{i,j}$ *de la matrice* A^* *se réécrivent comme suit :*

$$a^*_{i,j} = \int_Y A(y)(e_j + \nabla_y \chi^j(y)) \cdot (e_i + \nabla_y \chi^i(y))\mathrm{d}y.$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N a^*_{i,j}\xi_i\xi_j &= \int_Y A(y)\sum_{j=1}^N (e_j + \nabla_y \chi^j(y))\xi_j \cdot \sum_{i=1}^N (e_i + \nabla_z \chi^i(y))\xi_i \mathrm{d}y \\ &= \int_Y A(y)(\xi + \sum_{j=1}^N \xi_j \nabla_y \chi^j(y)) \cdot (\xi + \sum_{i=1}^N \xi_i \nabla_y \chi^i(y))\mathrm{d}y \\ &\geq \alpha \int_Y |(\xi + \sum_{i=1}^N \xi_i \nabla_y \chi^i(y))|^2 \mathrm{d}y \ (\textit{d'après ii) de la section 3.1}) \\ &\geq \alpha|\xi|^2 \qquad \left(\textit{\textbf{car}} \ \int_Y \nabla_y \chi^i(y)\mathrm{d}y = 0\right). \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 3.3.4.

*Le problème macroscopique **(3.19)** admet une unique solution.*

Preuve .

*Il suffit de montrer que le problème variationnel **(3.24)** admet une unique solution $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Puisque la matrice A^* est cœrcive ; d'après le **Théorème 3.1.1.**, il suffira de montrer que la fonction g^* est strictement monotone et lipschitzienne ; ce qui se déduit du fait que g est strictement monotone et lipschitzienne.* ■

Remarque 3.3.2. *On a ainsi montré qu'il existe une sous-suite de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ (où u_ε est solution du problème **(3.1)** pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé) qui converge dans $H_0^1(\Omega)$-faible vers la solution u_0 du problème homogénéisé **(3.19)**.*

Proposition 3.3.5.

*Toute la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers l'unique solution u_0 du problème **(3.19)**.*

Preuve .

*Nous allons montrer que toutes les sous-suites convergent vers u_0. Par l'absurde, supposons que u_0 ne soit pas l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Alors il existe une sous-suite $(u_{\varphi(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge mais pas vers u_0. La suite $(u_{\varphi(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ est bornée car $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ l'est ; donc en reprenant le procédé d'homogénéisation avec la suite $(u_{\varphi(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$, on obtient qu'elle admet une sous-suite qui converge vers un u_0' solution du problème **(3.19)**. Mais par unicité de la solution du problème **(3.19)**, $u_0' = u_0$. On conclut que $(u_{\varphi(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ converge vers u_0. Ce qui est absurde.* ■

Nous avons ainsi prouvé le théorème suivant

Théorème 3.3.2.

La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ où pour tout $\varepsilon > 0$, u_ε est solution du problème

$$\begin{cases} -div(A^\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon) + g^\varepsilon[u_\varepsilon] & = & f \quad dans \quad \Omega, \\ u_\varepsilon & = & 0 \quad sur \quad \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

converge dans $H_0^1(\Omega) - faible$ vers l'unique solution u_0 du problème homogénéisé

$$\begin{cases} -div(A^*\nabla u_0) + g^*[u_0] & = & f \quad dans \quad \Omega, \\ u_0 & = & 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

.

♣ Portée Pédagogique ♣

Dans le cadre de la rédaction du mémoire de **D.I.P.E.S II**, il nous a été demandé de donner l'intérêt pédagogique de notre travail : Rappelons que le thème soumis à notre étude s'intitule **Homogénéisation périodique d'un problème semi-linéaire**. C'est un sujet important tant chez l'enseignant que chez l'élève. Ainsi, il permet de :

- ♣ de se rendre compte qu'il existe une théorie des EDPs plus générale qui prolonge la théorie des équations différentielles ordinaires.
- ♣ de se familiariser avec les espaces de fonctions ayant de très bonnes propriétés et permettant de mieux dominer les fonctions classiques au Lycée.
- ♣ d'améliorer la qualité de nos rédactions et de nos démarches, ce qui nous permettra de concevoir des cours compréhensibles, logiques et selon la règle de l'art.
- ♣ d'étendre notre champ de connaissance des mathématiques, ce qui nous sera d'une grande utilité dans la motivation de nos élèves.
- ♣ d'avoir une capacité élevée de synthèse qui nous sera très utile pour préparer un cours en utilisant toutes les ressources actuelles telles que Internet, les livres de plusieurs collections, les anciens cours et autres.
- ♣ de se familiariser avec le logiciel de programmation Latex qui fait une trés bonne mise en page et une bonne lisibilité donc très utile pour la rédaction des épreuves d'évaluation de mathématiques.
- ♣ d'apprendre à concevoir et à présenter un document scientifique.

♣ Conclusion ♣

Parvenu au terme de notre travail dans lequel il était question pour nous d'appliquer la méthode de convergence à deux échelles pour l'homogénéisation d'un problème semi-linéaire. Il ressort qu'on ne pourrait montrer celle-ci sans connaitre au préalable quelques résultats utiles portant sur l'analyse fonctionnelle, sur les fonctions périodiques, sur la notion de convergence faible, de convergence à deux échelles. Tout d'abord, nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution faible de notre ε-problème semi-linéaire ; la preuve utilise un théorème du point fixe comme principal résultat. Ensuite nous sommes passés au procédé d'homogénéisation de notre problème en utilisant la méthode de convergence à deux échelles pour obtenir le problème homogénéisé. Enfin nous avons prouvé un résultat de convergence de la suite de solutions du problème initial vers la solution du problème homogénéisé.

♣ Bibliographie ♣

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic press, New York, 1975.

[2] G. Allaire, *Homogenization and two scale convergence* , SIAM J. Math. Anal., **23**(1992), 1482-1518.

[3] G. Allaire and M. Briane, *Multiscale convergence and reiterated homogenization*, Proceedings of the Royal Society of Edingurgh, **126** (1996), 297-342.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.

[5] D. Cioranescu and P. Donato, *An introduction to homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, University Press, New York, 1999.

[6] D. Lukkassen, G. Nguetseng and P. Wall, *Two-scale convergence*, Int. J. Pure Appl. Math., **20**(2000), 35-86.

[7] G. Nguetseng, *A general convergence result for a fonctional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., **20**(1989), 608-623.

[8] G. Nguetseng and H. Nnang, *Homogenization of nonlinear monotone operators beyond the periodic setting*, J. Diff. Equ., **36**(2003), 1-24.

[9] G. Nguetseng, *Problèmes aux limites elliptiques*, L.A.N., Université de Yaoundé I, 2001.

[10] H.Nnang, *Deterministic homogenization of weakly damped nonlinear hyperbolic-parobolic*, Nonlinear Differ. Equ. Appl., **19**(2012), 539-574.

[11] Y. sonntag, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, Les Pennes Mirabeau, 1997.