REPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE 1
****
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE 1
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE 1
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE OF YAOUNDE 1
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

EQUATIONS D'EINSTEIN-MAXWELL FLUIDE PARFAIT EN SYMETRIE CYLINDRIQUE

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de l'obtention du diplôme de D.I.P.E.S. II de Mathématiques

par :

NANKEP NTONGME Stéphane

Licencié en Mathématiques

Matricule : 14R2472

Sous la direction du

Pr. TEGANKONG David

Maître de conférences

Ecole Normale Supérieure de Yaoundé, Université de Yaoundé 1

Année académique : 2018-2019

EQUATIONS D'EINSTEIN-MAXWELL FLUIDE PARFAIT EN SYMETRIE CYLINDRIQUE

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de l'obtention du DIPES II

EN MATHEMATIQUES

par

NANKEP NTONGME STEPHANE

Matricule : 14R2472

Licencié en mathématiques

Sous la Direction de

Pr. TEGANKONG David

Maître de conférences, Ecole Normale Supérieure de Yaoundé 1

Yaoundé, juin 2019

♣ Dédicace ♣

Ce mémoire est dédié à mon papa

NTONGME NICOLAS .

♣ Déclaration sur l'honneur ♣

Le présent mémoire est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle par ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

NANKEP NTONGME STEPHANE

♣ Remerciements ♣

Ce mémoire représente l'accomplissement de deux années de formation. Cette œuvre d'édification n'aurais pas pu être faite sans le soutient matériel, moral et physique de certaines personnes à qui je tiens à adresser tous mes remerciements. Il s'agit de :

♣ Mon **Dieu** tout puissant, pour toute sa miséricorde, ses grâces et pour m'avoir donné le courage, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

♣ Mon encadreur **Pr. TEGANKONG David**, pour avoir accepté de superviser ce travail, pour sa disponibilité tout au long de la rédaction de ce travail, pour ses multiples remarques, suggestions et conseils tant sur le plan humain que scientifique.

♣ Tous les enseignants de l'E.N.S pour leurs enseignements et leur accompagnement tout au long de notre formation.

♣ Mes amis et mes camarades de promotion en particulier : **YOMENI FLAVIEN**, **NGOKO BORIS** et **EHONE SAMBO** .

♣ Mes camarades de l'U.Y.1 **NANA GERAUD**, **Yopah ERMANE** et **KIEGIE DENGA**

Je ne saurais terminer sans adresser des remerciements spéciaux à :

♦ Mes parents NTONGME NICOLAS et NDJEUKEU FEUBA YVETTE pour l'éducation qu'ils ont su me donner, pour tout leur amour sans faille et leur soutien inconditionnel.

♦ Toute ma famille, pour leur soutien moral et tout leur amour.

À tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail, qu'ils reçoivent ici l'expression de ma profonde considération.

♣ Table des matières ♣

♣ Résumé ♣

Les équations d'Einstein sont les équations aux dérivées partielles principales de la relativité générale. Ce sont des équations dynamiques qui décrivent comment la matière et l'énergie modifient la géométrie de l'espace-temps. Dans le présent mémoire, nous écrivons les équations d'Einstein-Maxwell fluide parfait en symétrie cylindrique. Nous obtenons ainsi un système de douze équations à dix inconnues que nous distinguons en équations de contraintes et équations d'évolution. Et nous donnons les conditions initiales.

Mots clés : *Relativité générale, équations d'Einstein, équations de Maxwell, équations d'Euler, symétrie cylindrique, espace-temps.*

♣ Abstract ♣

Einstein equations are the main partial differential equations of general relativity. They are dynamic equations that describe how matter and energy change the geometry of space-time. In this long essay, we write the equations of Einstein-Maxwell in cylindric symmetry. Thus, we obtain a system of twelve equations to ten unknown and we distinguish the equation of contraints from the equations of evolution. And we give the initial conditions.

Keys words : *General Relativity, Einstein equations, Maxwell equations, Euler equations , space-times, cylindric symmetry.*

♣ INTRODUCTION ♣

La théorie de la relativité, considérée comme la plus importante création intellectuelle jamais réalisée, a été conçue par Albert Einstein [1] entre 1907 et 1915. C'est une théorie physique qui lie la gravité, l'espace et le temps et qui se modélise fondamentalement par les équations d'Einstein. Cette théorie révolutionne celle de Newton pour qui, le mouvement d'un corps est déterminer par des forces. Le phénomène familier de la gravitation possède en relativité générale l'interprétation extraordinaire d'être la manifestation de la courbure de l'espace et du temps produite par la présence des massifs. Les travaux d'Einstein aboutissent aux équations de la forme : [2]

$$G_{\delta\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\delta\beta} \quad avec \quad \delta, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Où $G_{\delta\beta}$ la composante du tenseur d'Einstein donné par $G_{\delta\beta} = R_{\delta\beta} - \frac{1}{2} R g_{\delta\beta}$, $(R_{\delta\beta})$ pour le tenseur de Ricci, R la courbure riemannienne, $(g_{\delta\beta})$ le coefficient du tenseur métrique g , G la constante gravitationnelle, C la célérité de la lumière et $(T_{\delta\beta})$ le coefficient du tenseur impulsion énergie T dont l'expression dépend du choix de la matière. Nous supposons que la matière est constituée d'un système auto-entretenu dont les particules considérées évoluent sous l'action du champ électromagnétique qu'elles créent. Ce champ électromagnétique vérifie les équations de Maxwell. Ainsi, les équations d'Einstein sont couplées aux équations de Maxwell qui prennent la forme

$$^2W \nabla_a F^{ab} = 0 \qquad et \qquad \nabla_a F_{bc} + \nabla_b F_{ac} + \nabla_c F_{ab} = 0 \quad a,\ b\ c = 0, 1, 2, 3.$$

où ∇_a est la connexion de levi-civita et (F^{ab}) est le champ électromagnétique. Le tenseur impulsion énergie peut être vu comme somme de plusieurs tenseurs élémentaires dont les équations dépendent. Lorsque la matière considérée est un fluide parfait [2] , le tenseur énergie-impulsion prend une forme particulière caractéristique d'un tel milieu, les équations d'Einstein-Maxwell sont alors

1. physicien américain d'origine allemande né le 14 mars 1879 à Ulm dans le wurtemberg et mort le 18 avril 1955 à New Jersey

2. En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait lorsqu'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de viscosité et de conductivité thermique.

couplées aux équations d'Euler et le système Einstein-Maxwell-Euler est ainsi obtenu. Dans le présent mémoire, il est question pour nous d'établir les équations d'Einstein-maxwell fluide parfait en symétrie cylindrique. Nous définissons dans le premier chapitre les notions requises pour bien manipuler ces équations, ensuite dans le second chapitre, nous déterminons le tenseur d'Einstein et enfin dans le troisième chapitre, nous écrivons les équations-maxwell fluide parfait en symétrie cylindrique.

⋆ ⋆ CHAPITRE UN ⋆ ⋆

PRÉLIMINAIRES

1.1 Quelques notions de géométrie différentielle

L'objet de ce chapitre est de ressortir les notions fondamentales de géométrie différentielles à base des rappels topologiques et du calcul différentiel que nous utiliserons par la suite.

1.1.1 Préliminaires de topologie et de calcul différentiel

Nous allons commencer par présenter l'essentiel de la topologie générale et de calcul différentiel nécessaire à la compréhension des notions de géométrie différentielles. Notamment la notion de variété différentielle important pour la réalisation de ce projet.

Définition 1.1.1. *(Espace topologique)*

Soit E un ensemble non vide, $\mathcal{O}$ une famille de parties de E vérifiant :

(i) $\emptyset, E \in \mathcal{O}$,

(ii) $\forall\ A, B \in \mathcal{O}, A \cap B \in \mathcal{O}$,

(iii) $\forall\ (O_i)_{i\in I} \subset \mathcal{O}, \bigcup\limits_{i\in I} O_i \in \mathcal{O}$.

On dit que $\mathcal{O}$ est une topologie sur E et que le couple $(E, \mathcal{O})$ appelé espace topologique où $\mathcal{O}$ est appelé ensemble des ouverts de E.

Notation 1.1.1. *Dans la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera tout simplement $E = (E, \mathcal{O})$*

Définition 1.1.2. *(Espace topologique séparé)*

Un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est dit séparé au sens de Hausdorff ou tout simplement séparé si $\forall x, y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe $U \in \mathcal{O}$ contenant x et $V \in \mathcal{O}$ contenant y tels que $U \cap V = \emptyset$.

Définition 1.1.3. *(Continuité)*

Soient E et F deux espaces topologiques. Une application $f : E \longrightarrow F$ est continue en un point x de E lorsque l'image réciproque par f de tout voisinage de $f(x)$ dans F est un voisinage de x dans E. f est continue sur E lorsque l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.On dira que f est de classe $\mathcal{C}^0$.

Définition 1.1.4. *(Homéomorphisme)*

Soient E et F deux espaces topologiques. Une application $f : E \longrightarrow F$ est un homéomorphisme lorsqu'elle est continue sur E, bijective et lorsque son inverse f^{-1} est continu sur F.

Définition 1.1.5. *(Application de classe $\mathcal{C}^\infty$) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Soient $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. On pose :*

$$|p| = p_1 + \ldots + p_n \text{ et } D^p = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}}.$$

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ si pour tout $p \in \mathbb{N}^n$ tel que $|p| \leq k,\ D^p f$ existe et est continue. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$,pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m (m \in \mathbb{N})$ est différentiable en x_0 s'il existe une application linéaire continue appelée différentielle de f en x_0

$$\begin{aligned} df(x_0) : U &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ h &\longmapsto df(x_0)(h) \end{aligned}$$

telle que $f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0)(h) + \|h\|\varepsilon(h)$ et $\lim \varepsilon(h) = 0$ quand $h \mapsto 0$.
On dit que cette application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est de classe $\mathcal{C}^k$ dans U si elle est $k fois$ différentiable dans U et si son application différentielle d' ordre k est continue dans U.

Définition 1.1.6. *($\mathcal{C}^k$-difféomorphisme,$k \in \mathbb{N}$) On dit qu'une application $f : U \longrightarrow V$ entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme si f est bijective de U sur V, f est de classe $\mathcal{C}^k$ dans U et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ dans V.*

1.1.2 Variétés différentielles

CARTES, ATLAS ET VARIETE

Définition 1.1.7. *(Cartes locales et $\mathcal{C}^k$-compatibilité $k \in \mathbb{N}^*$)*

Soit E un espace topologique. On appelle carte locale de dimension n sur E, la donnée d'un couple (U, φ) tel que :

(i) U *est un ouvert de* E*,*

(ii) L'application $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ *est un homéomorphisme.*

Deux cartes (U, φ) et (V, ψ) sur un espace topologique E telles que $U \cap V \neq \emptyset$ sont dites $\mathcal{C}^k-$compatibles lorsque l'application de transition $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$ est un $\mathcal{C}^k-$difféomorphisme.

Définition 1.1.8. *(Atlas et atlas* $\mathcal{C}^k - compatibles$*)*

Soit M *un espace topologique séparé. Un atlas de dimension* n $(n \in \mathbb{N}^*)$*, de classe* $\mathcal{C}^k$ $(k \in \mathbb{N})$ *sur* M *est la donnée d'une famille* $(U_i, \varphi)_{i\in I}$ *telle que : pour tout* $i \in I,$ (U_i, φ_i) *sont des cartes* $\mathcal{C}^k-$*compatibles recouvrant* M*.*

Deux atlas $\mathbb{A}_1$ *et* $\mathbb{A}_2$ *de classe* C^k *sur* M *sont dits* $\mathcal{C}^k$*-compatibles si* $\mathbb{A}_1 \cup \mathbb{A}_2$ *est encore un atlas de classe* $\mathcal{C}^k$*.On peut ainsi définir une relation d'équivalence "atlas* $\mathcal{C}^k - compatibles$*".*

Définition 1.1.9. *(Variété topologique)*

Une variété topologique V_n *de dimension* $n \in \mathbb{N}^*$ *est un espace topologique séparé dont chaque point possède un voisinage ouvert homéomorphe à* $\mathbb{R}^n$*.*

ESPACE TANGENT

A chaque point d'une variété différentiable V_n, nous allons associer un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$: l'espace vectoriel tangent à V_n en ce point.

Définition 1.1.10. *(Courbe différentielle en un point)[3]*

Soit V_n *une variété différentiable,* I *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *contenant* 0*,* x *un point de* V_n*. Une courbe différentielle de* V_n *en* x *est une application différentielle* $c : I \longrightarrow V_n,\ t \longmapsto c(t)$ *telle que* $c(0) = x$*.* $\Gamma = c(I) \subset V_n$ *est appelé arc paramétré de* V_n *et le couple* (I, c) *est la paramétrisation de la courbe* c*.*

Définition 1.1.11. *(Courbes tangentes en un point)*

Deux courbes c_1 *et* c_2 *passant par* x *sont dites tangentes si pour toute carte locale* $(U,\ \varphi)$ *d'une variété différentielle* V_n*, on a :*

$$\begin{cases} c_1(0) = c_2(0) = x, \\ \frac{d(\varphi \circ c_1)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi \circ c_2)}{dt}(0). \end{cases}$$

Par la suite, on définit la relation $\mathcal{R}_x$ sur l'ensemble des arcs paramétrés de V_n par $c_1\ \mathcal{R}_x\ c_2$ si et seulement si c_1 et c_2 sont tangents en x.

$\mathcal{R}_x$ ainsi définie est une relation d'équivalence et une classe d'équivalence suivant la relation $\mathcal{R}_x$ est définie par :

$$\begin{aligned} [c]_x : \mathcal{C}^\infty(M_n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto [c]_x(g) = \frac{d}{dt} g(x). \end{aligned}$$

Définition 1.1.12. *(Vecteur tangent-Espace tangent)*

Soit V_n une variété différentielle et $x \in V_n$. Un vecteur tangent à V_n en x est une classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}_x$ définie ci-dessus.
L'espace tangent à V_n en x est l'ensemble des vecteurs tangents à V_n en x. Noté T_xV_n, c'est un espace vectoriel de dimension égale à celle de V_n .

Définition 1.1.13. *(Fibré tangent)*

Soit V_n une variété différentielle.
$TV_n = \bigcup_{x \in V_n} \{x\} \times T_xV_n$ est une variété différentielle de dimension égale à deux fois la dimension de V_n appelée fibré tangent à V_n .
On adopte souvent cette notation $TV_n = \bigcup_{x \in V_n} T_xV_n$.

Définition 1.1.14. *(Champ de vecteurs)*

Soit V_n une variété différentielle. Un champ de vecteurs sur V_n est une application

$$\begin{aligned} X : V_n &\longrightarrow TV_n \\ x &\longmapsto X(x) = (x; X_x) \end{aligned}$$

(avec $X_x \in T_xV_n$)

Un champ de vecteur est dit différentiable si l'application qui le définit est une application $\mathcal{C}^\infty$.

Notation 1.1.2. *$\mathcal{X}(V_n)$ est l'ensemble des champs de vecteurs définis sur V_n.*

Définition 1.1.15. *(Dérivation)*

Soit V_n une variété différentielle.
Un champ de vecteurs X de V_n définit une dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(V_n)$ par :

$$\begin{aligned} X : \mathcal{C}^\infty(V_n) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(V_n) \\ g &\longmapsto Xg, \end{aligned}$$

où $Xg = \frac{\partial g}{\partial x^i}|_x \frac{dx^i}{dt}$, vérifiant :

i) $\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ \forall g,\ h \in \mathcal{C}^\infty(V_n),\ X(ag + bh) = aXg + bXh,$

ii) $\forall g,\ h \in \mathcal{C}^{\infty}(V_n),\ X(gh) = gXh + hXg.$

Définition 1.1.16. *(La composé de deux champs de vecteurs)*

La composé de deux champs de vecteurs X et Y sur V_n est définie par :

$$(X \circ Y)(g) = X(Yg), \quad \forall g \in \mathcal{C}^{\infty}(V_n).$$

Proposition 1.1.1. *La composé de deux champs de vecteurs ne définit pas une dérivation.*

Preuve .

Soient X et Y deux champs de vecteurs. Pour tout $g,\ h \in \mathcal{C}^{\infty}(V_n)$, on a :

$$\begin{aligned}(X \circ Y)(gh) &= X(Y(gh))\\ &= X(gYh + hYg)\\ &= gX(Yh) + XgYh + hX(Yg) + XhYg.\end{aligned}$$

Mais,
$g(X \circ Y)h + h(X \circ Y)g = gX(Yh) + hX(Yg)$.
Il vient que, $X \circ Y(gh) \neq g(X \circ Y)h + h(X \circ Y)g$. ■

Définition 1.1.17. *(Crochet)*

Soit V_n une variété différentiable.
On appelle crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y, le champ de vecteur noté $[.,.]$ et défini par :

$$\begin{aligned}[.,.] : \mathcal{X}(V_n) \times \mathcal{X}(V_n) &\longrightarrow \mathcal{X}(V_n)\\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X.\end{aligned}$$

L'opérateur crochet définit une dérivation sur $\mathcal{C}^{\infty}(M)$. En coordonnées locales, on a :

$$[X, Y] = (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i)\partial_i.$$

Définition 1.1.18. *(Dérivée de Lie)*

La dérivée de Lie d'un champ de vecteurs X par rapport à un autre champ de vecteurs Y est le champ de vecteurs $L_X(Y)$ défini par : $L_X(Y) = [X, Y]$.

ESPACE CO-TANGENT

Soit V_n une variété différentiable, x un point de V_n.

Définition 1.1.19. *(Covecteur ou 1-forme) Un covecteur ou 1-forme encore appelé forme différentielle de degré 1 au point x de V_n est une forme linéaire sur T_xV_n.*

Définition 1.1.20. *(Espace vectoriel co-tangent) L'espace co-tangent en x à V_n est le dual de l'espace tangent T_xV_n.On le note $T_x^*V_n = L(T_xV_n; K)$.*

Définition 1.1.21. *(Fibré co-tangent)*

Soit V_n une variété différentielle.
$T^*V_n = \bigcup_{x\in V} T_x^*V_n$ est une variété différentielle de dimension égale à deux fois la dimension de V_n appelée fibré co-tangent à V_n.

1.1.3 Algèbre multilinéaire et calcul tensoriel

Définition 1.1.22. *(Applications $n-$linéaires)[3]*

Soient n un entier naturel supérieur ou égale à 1, $E_1, \ldots, E_n$ et F des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. Une application $f : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ est dite $n-$linéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables . Lorsque $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme linéaire sur $E_1 \times \cdots \times E_n$; et sur E lorsque $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$

Définition 1.1.23. *(Tenseur élémentaire)[3]*

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $x \in E$ et $y \in F$. On appelle tenseur élémentaire, l'application

$$\begin{array}{rcl} x \otimes y : E^* \times F^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\varphi, \psi) & \longmapsto & (x \otimes y)(\varphi, \psi) =< \varphi(x), \psi(y) > \end{array}$$

où E^* et F^* désignent les duales algébriques des espaces E et F respectifs ; φ et ψ sont des formes linéaires.

Définition 1.1.24. *(Produit tensoriel)[3]*

Soient E et F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, $x \in E$ et $y \in F$. On appelle produit tensoriel de E par F, l'ensemble $E \otimes F$ défini par :

$$E \otimes F = \{x \otimes y,\ x \in E,\ y \in F\}.$$

Définition 1.1.25. *(Tenseur covariant)[3]*

Un tenseur de type $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ *ou* $p-$*fois covariant au point* $x \in M_n$ *est une forme* $p-$*linéaire définie sur* $(T_xV_n)^p$.

On désigne par $\bigotimes^p T_x^*V_n \equiv T^0_{x\,p}V_n$ *l'espace des formes* $p-$*linéaires sur* T_xV_n.

Définition 1.1.26.

Un tenseur $2-$*fois covariant ou de type* $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *au point* x *est une forme bilinéaire symétrique définie sur* $T_xV_n \times T_xV_n$.

Définition 1.1.27. *(Tenseur contravariant)[3]*

Un tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix}$ *ou* $q-$*fois contravariant au point* x *est une forme* $q-$*linéaire définie sur* $(T_x^*V_n)^q$.

On désigne par $\bigotimes^q T_xV_n \equiv T^q_{x\,0}V_n$ *l'espace de toutes les formes* $q-$*linéaires sur* $T_x^*V_n$.

Définition 1.1.28. *(Tenseur mixte)[3]*

Un tenseur mixte de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ *ou tenseur* $p-$*fois covariant et* $q-$*fois contravariant au point* $x \in V_n$ *est une forme* $(p+q)-$*linéaire définie sur* $(T_xV_n)^p \times (T_x^*V_n)^q$.

On désigne par $T^q_{x\,p}V_n$ *l'ensemble des tenseurs de type* $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ *au point* $x \in V_n$.

Définition 1.1.29. *(Fibré tensoriel)*

On appelle fibré tensoriel, la variété différentielle $T^q_pV_n$ *définie par :*$T^q_pV_n = \bigcup_{x \in V_n} (\{x\} \times T^q_{x\,p})$.

Définition 1.1.30. *(Champ de tenseurs)*

Un champ de tenseur de type $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ *sur* V_n *est une application*

$$\begin{array}{rcl} T : V_n & \longrightarrow & T^q_pV_n \\ x & \longmapsto & T(x) = (x, t_x), \quad t_x \in T^q_{x\,p}V_n. \end{array}$$

1.2 Notions de Géométrie lorentzienne

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K} = (\mathbb{R}\ ou\ \mathbb{C})$ et $B = \{e_1,\ e_2,\ ...,\ e_n\}$ une base de E. Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i;\ x_i \in \mathbb{K}$.

Un indice tel que i sur lequel on effectue la somme est appelé indice muet. La convention d'Einstein consiste à supprimer le signe $\sum$ et d'indiquer l'indice muet en haut et en bas. Ainsi
$x = x^i e_i, \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n.$

Dans toute la suite, V_4 désigne une variété différentiable de dimension 4, le corps de base est $\mathbb{R}$. On adopte la convention de sommation d'Einstein où les indices grecs $\delta,\ \beta,\ \gamma, ...$ vont de 0 à 3 .

Définition 1.2.1. *(Variété lorentzienne) [7]*

Une variété lorentzienne ou hyperbolique est la donnée du couple (V_4, g) où V_4 est une variété différentielle de dimension 4 et g, un champ de tenseur $2-$fois covariant de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ sur V_4, $p \geq 1$ vérifiant les conditions suivantes :

i) g est symétrique ;

ii) $\forall x \in V_4,\ g$ induit sur l'espace tangent T_x en x à V_4 une forme bilinéaire non dégénérée $g_x : T_x V_4 \times T_x V_4 \longrightarrow \mathbb{R}$;

iii) g est de signature $(+, -, -, -)$ ou $(-, +, +, +)$; On dit que g est de signature hyperbolique.

g est appelé tenseur métrique.

Remarque 1.2.1.

1. *Au cours de notre étude ,puisque nous travaillons en symétrie cylindrique la réduction en carré de la forme quadratique associé à la forme bilinéaire symétrique g_x aura pour signature $(1; 3)$ (car nous sommes en dimension 4)*

2. *Dans un repère naturel e_δ de $V_4,\ g$ s'écrit en coordonnées locales par $g = g_{\delta\beta} dx^\delta dx^\beta$ où $g_{\delta\beta} = g(e_\delta, e_\beta)$. g est alors vue comme une matrice carrée symétrique d'ordre 4 dont les composantes sont les $g_{\delta\beta}$. On note alors $g = (g_{\delta\beta})$. La matrice g est inversible et son inverse est noté $(g^{\delta\beta})$. On a : $g^{\delta\lambda} g_{\lambda\beta} = \delta^\delta_\beta$ (symbole de Kronecker).*

Définition 1.2.2. *(Repère orthonormé) [7]*

Le repère (e_α) est dit orthonormé dans (V_4, g) si g s'écrit : $g = ds^2 = (dx^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2$ en signature $(+, -, -, -)$ ou $ds^2 = g = -(dx^0)^2 + \sum_{i=1}^{3} (dx^i)^2$ en signature $(-, +, +, +)$.

Un élément $x \in V_4$ est représenté par $x = (x^0, x^i)$ avec $x^0 = t$ appelée coordonnée temporelle et x^i coordonnée d'espace. Ainsi, pour tout système de coordonnées locales (x^δ) dans V_4, x^0 représente le temps t et x^i l'espace. Cette représentation est dûe à Minkowski dans les années 1908.

Définition 1.2.3. *(Espace-temps) [7]*

Un espace-temps est la donnée d'un couple (M, g) avec (M, g) variété lorentzienne.

Définition 1.2.4. *la forme quadratique associée à g_x est le scalaire :$ds^2 = g_{\delta\beta}dx^\delta dx^\beta$*

Remarque 1.2.2. $ds^2 : V \longrightarrow \mathcal{R}$, $X \mapsto ds^2(X) = g_x(X, X) = g_{\delta\beta}X^\delta X^\beta$

Définition 1.2.5. *(Connexion linéaire-Symboles de Christoffel)*

Une connexion linéaire sur V_4 est la donnée d'une application

$$\begin{aligned} \nabla : TV_4 &\longrightarrow T^*V_4 \otimes TV_4 \\ v &\longmapsto \nabla v \end{aligned}$$

définie sur les champs de tenseurs différentiables sur V_4 et qui est telle que

$$\begin{aligned} \nabla(u+v) &= \nabla u + \nabla v, \\ \nabla f u &= df \otimes u + f\nabla u, \end{aligned} \tag{1.1}$$

pour toute fonction différentiable f.
∇v est appelée différentielle absolue ou covariante de v. Si $v = v^\delta e_\delta$ dans la base naturelle (e_δ) de T_xV_4, alors les composantes locales du tenseur mixte ∇v notées $\nabla_\delta v^\beta$ sont données par

$$\nabla_\delta v^\beta = \partial_\delta v^\beta + \Gamma^\beta_{\delta\lambda} v^\lambda. \tag{1.2}$$

(1.2) montre que la connaissance des 64 coefficients $\Gamma^\lambda_{\delta\beta}$ détermine entièrement ∇ dans une carte locale de V_4.
Les coefficients $\Gamma^\lambda_{\delta\beta}$ de la relation (1.2) s'appellent symboles de Christoffel associés à la connexion ∇.

Remarque 1.2.3.

Les composantes covariantes locales du tenseur ∇v notées $\nabla_\delta v_\beta$ sont données par

$$\nabla_\delta v_\beta = \partial_\delta v_\beta + \Gamma^\lambda_{\delta\beta} v_\lambda$$

Où $\partial_\delta := \frac{\partial}{\partial x^\delta}$ *avec* $\delta = 0, 1, 2, 3.$

Propriété 1.2.1. *(Identités de Ricci)[1]*

$$\partial_\mu g_{\delta\beta} = g_{\delta\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\mu} + g_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\delta\mu}. \tag{1.3}$$

la relation (1.3) est appelée identités de Ricci.

Proposition 1.2.1. *[1]*

Les coefficients de Christoffel en coordonnées locales s'obtiennent du tenseur métrique par :

$$\Gamma^{\lambda}_{\delta\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}(\partial_\delta g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\delta\mu} - \partial_\mu g_{\delta\beta}). \tag{1.4}$$

Preuve .

D'après les identités de Ricci, on a :

$$\begin{aligned} \partial_\delta g_{\mu\beta} &= g_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\delta} + g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} \\ \partial_\beta g_{\delta\mu} &= g_{\delta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} + g_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\delta\beta} \\ \partial_\mu g_{\delta\beta} &= g_{\delta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} + g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu}\partial_\delta g_{\mu\beta} &= \Gamma^{\lambda}_{\beta\delta} + g^{\lambda\mu} g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} \\ &= \Gamma^{\lambda}_{\delta\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu}\partial_\beta g_{\delta\mu} &= \Gamma^{\lambda}_{\delta\beta} + g^{\lambda\mu} g_{\delta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} \\ &= \Gamma^{\lambda}_{\delta\beta} + \delta^{\mu}_{\delta}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu}\partial_\mu g_{\delta\beta} &= g^{\lambda\mu} g_{\delta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} + g^{\lambda\mu} g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} \\ &= \delta^{\mu}_{\delta}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} + \delta^{\mu}_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} g^{\lambda\mu}(\partial_\delta g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\delta\mu} - \partial_\mu g_{\delta\beta}) &= \Gamma^{\lambda}_{\delta\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\delta\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} + \delta^{\mu}_{\delta}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \delta^{\mu}_{\delta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\delta\mu} \\ &= 2\Gamma^{\lambda}_{\delta\beta} \end{aligned}$$

Ce qui donne alors le résultat (1.4). ■

Proposition 1.2.2. *[1]*

Les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport aux variables covariantes c'est-à-dire :

$$\Gamma^{\lambda}_{\delta\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\delta}.$$

Preuve . *On a :*

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda}_{\beta\delta} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_\beta g_{\mu\delta} + \partial_\delta g_{\beta\mu} - \partial_\mu g_{\beta\delta}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_\delta g_{\beta\mu} + \partial_\beta g_{\mu\delta} - \partial_\mu g_{\beta\delta}) \\
&= \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(\partial_\delta g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\delta\mu} - \partial_\mu g_{\delta\beta}) \quad (\text{ car } (g_{\mu\nu}) \text{ est symétrique}). \\
&= \Gamma^{\lambda}_{\delta\beta}
\end{aligned}$$

■

Généralisons cette notion de dérivée covariante d'un champ de vecteurs pour le cas d'un champ de tenseurs. Si (e_δ) est la base naturelle de $T^p_q V_4$ et (e^δ) sa base duale, alors pour tout tenseur T, on a :

$$T = T^{\delta_1 \dots \delta_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} e_{\delta_1} \otimes \cdots \otimes e_{\delta_p} \otimes e^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes e^{\beta_q}.$$

Exemple **1.2.1.**

- *Pour un tenseur de type* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\nabla_\delta T^{\lambda}_{\mu} = \partial_\delta T^{\lambda}_{\mu} + T^{\lambda}_{\delta\gamma} T^{\gamma}_{\mu} - T^{\gamma}_{\delta\mu} T^{\lambda}_{\gamma}.$$

- *Pour un tenseur de type* $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$\nabla_\nu T^{\delta\beta}_{\lambda\mu} = \partial_\nu T^{\delta\beta}_{\lambda\mu} + T^{\delta}_{\nu\sigma} T^{\sigma\beta}_{\lambda\mu} + T^{\beta}_{\nu\sigma} T^{\delta\sigma}_{\lambda\mu} - T^{\sigma}_{\nu\lambda} T^{\delta\beta}_{\sigma\mu} - T^{\sigma}_{\nu\mu} T^{\delta\beta}_{\lambda\sigma}.$$

Définition **1.2.6.** *(Tenseur de courbure)[1]*

Le tenseur de courbure ou tenseur de Riemann $R^{\lambda}_{\mu\delta\beta}$ *associé à la connexion linéaire* ∇ *est un tenseur mixte de type* $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *sur* V_4 *défini par :*

$$R^{\lambda}_{\mu\delta\beta} = \partial_\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} \Gamma^{\nu}_{\delta\mu}. \tag{1.5}$$

Proposition **1.2.3.**

Le tenseur de courbure $R^{\lambda}_{\mu\delta\beta}$ *est antisymétrique par rapport aux indices* δ *et* β, *c'est-à-dire*

$$R^{\lambda}_{\mu\delta\beta} = -R^{\lambda}_{\mu\beta\delta}.$$

Preuve .

D'après (1.5), *on a :*

$$R^{\lambda}_{\mu\delta\beta} = \partial_\delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \Gamma^{\nu}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} \Gamma^{\nu}_{\delta\mu},$$

et

$$R^{\lambda}_{\mu\beta\delta} = \partial_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\delta} - \Gamma^{\lambda}_{\delta\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu}.$$

En utilisant la proposition (1.2.2)*, on a :*

$$\begin{aligned} R^{\lambda}_{\mu\beta\delta} &= -(\partial_{\delta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\delta} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\Gamma^{\nu}_{\delta\mu}) \\ &= -R^{\lambda}_{\mu\delta\beta}. \end{aligned}$$

■

Définition 1.2.7. *(Torsion de courbure)[1]*

On appelle torsion de la courbure linéaire ∇, le tenseur T d'ordre $(2,1)$ de composantes locales :

$$T^{\lambda}_{\delta\beta} = \partial_{\delta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\lambda}_{\mu\delta}.$$

théorème et définition 1.2.1. *(Connexion de Levi-Civita)[1]*

Il existe sur V_4 une connexion linéaire et une seule ∇ telle que :

1. *∇ est sans torsion, c'est-à-dire $T = 0$,*
2. *$\nabla g = 0$.*

Une telle connexion est appelée connexion de Levi-Civita.

Définition 1.2.8. *(Tenseur de Ricci)[1]*

Le tenseur de Ricci est le tenseur de composantes $R_{\delta\beta} = R^{\mu}_{\delta\mu\beta}$ obtenu par contraction de l'indice supérieur et du deuxième indice inférieur du tenseur de courbure.
Son expression en fonction des coefficients de Christoffel est :

$$R_{\delta\beta} = \partial_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\mu\delta} + \Gamma^{r}_{\beta\delta}\Gamma^{\mu}_{\mu r} - \Gamma^{r}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta r}.$$

Proposition 1.2.4. *Le tenseur de Ricci est un tenseur symétrique :*

$$R_{\delta\beta} = R_{\beta\delta}.$$

Preuve . *Voir [2].* ■

Définition 1.2.9. *(courbure riemannienne)[1]*

La courbure riemannienne R de (V_4, g) est le scalaire obtenu par contraction des deux indices du tenseur de Ricci :

$$R = g^{\delta\beta}R_{\delta\beta}.$$

⋆ ⋆ CHAPITRE DEUX ⋆ ⋆

CALCUL TENSORIEL EN SYMETRIE CYLINDRIQUE

Dans ce chapitre nous retrouverons d'abord de façons explicite les coefficients de la métrique puis les symboles de Christoffel, le tenseur de Ricci et en fin la courbure scalaire.
Nous le faisons en coordonnes cylindrique pour lesquelles la métrique prend la forme :
$ds^2 = -\alpha e^{2(\eta-\gamma)}dt^2 + e^{2(\eta-\gamma)}dr^2 + e^{2\gamma}(dz + Ad\theta)^2 + r^2e^{-2\gamma}d\theta^2$ où $\alpha, \eta, \gamma,$ et A sont des fonctions qui dépendent de t et r .

2.1 La métrique cylindrique

2.1.1 Identification des coefficients de la métrique

Étant donné que $ds^2 = g_{\delta\beta}dx^\delta dx^\beta$,la forme quadratique associer au tenseur métrique g où les $g_{\delta\beta}$ sont symétriques Comme en symétrie cylindrique, l'espace temps est $(t; r, z, \theta)$,nous aurons :
$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}dz^2 + g_{33}d\theta^2 + g_{01}dtdr + g_{02}dtdz + g_{03}dtd\theta + g_{12}drdz + g_{13}drd\theta + g_{23}dzd\theta + g_{10}drdt + g_{20}dzdt + g_{30}d\theta dt + g_{21}dzdr + g_{31}d\theta dr + g_{32}d\theta dz$.
Ainsi par identification,on a :
$g_{00} = -\alpha e^{2(\eta-\gamma)}, g_{11} = e^{2(\eta-\gamma)}, g_{22} = e^{2\gamma}, g_{33} = r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}, g_{23} = g_{32} = Ae^{2\gamma}, \quad g_{01} = g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0$

Et sa forme matricielle est :

$$g = \begin{pmatrix} -\alpha e^{2(\eta-\gamma)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(\eta-\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\gamma} & Ae^{2\gamma} \\ 0 & 0 & Ae^{2\gamma} & r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire les composantes non nulles sont :

$$\begin{aligned} g_{00} = g_{tt} &= -\alpha e^{2(\eta-\gamma)}, \\ g_{11} = g_{rr} &= e^{2(\eta-\gamma)}, \\ g_{22} = g_{zz} &= e^{2\gamma}, \\ g_{23} = g_{z\theta} &= Ae^{2\gamma}, \\ g_{33} = g_{\theta\theta} &= r^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Toutes les autres composantes sont nulles.

Son déterminant est $detg = -\alpha r^2 e^{4(\eta-\gamma)} \neq 0$, donc la matrice g est inversible ; son inverse $g^{-1} = (g^{ij})_{0\leq i,j\leq 3}$ est alors donnée par :

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(\eta-\gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2} & -\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2} \\ 0 & 0 & -\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2} & \frac{e^{2\gamma}}{r^2} \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que : les composantes non nulles de g^{-1} sont :

$$\begin{aligned} g^{00} = g^{tt} &= -\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}, \\ g^{11} = g^{rr} &= e^{-2(\eta-\gamma)}, \\ g^{22} = g^{zz} &= e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}, \\ g^{23} = g^{z\theta} &= -\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}, \\ g^{33} = g^{\theta\theta} &= \frac{e^{2\gamma}}{r^2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Et $g^{01} = g^{02} = g^{03} = g^{12} = g^{13} = 0$.

2.1.2 Les symbôles de Christoffel

Les symbôles de Christoffel représentent l'évolution des vecteurs de base d'un point à l'autre de l'espace temps, due à la courbure de ce dernier. Ses coefficients dépendent de la métrique de la variété sur laquelle on s'y trouve. La forme générale en système de coordonnées locales est donnée par :

$$\Gamma^{\lambda}_{\delta\beta} = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu}(\partial_\delta g_{\nu\beta} + \partial_\beta g_{\delta\nu} - \partial_\nu g_{\delta\beta}).$$

On dénombre 64 coefficients et pour des raisons de symétrie, plusieurs coefficients de Christoffel sont nuls. On a :

Proposition 2.1.1. *(Coefficients nuls de Christoffel)*

$\Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{03} = \Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{13} = 0,$

$\Gamma^1_{02} = \Gamma^1_{03} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{13} = 0,$

$\Gamma^2_{00} = \Gamma^2_{01} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{33} = 0,$

$\Gamma^3_{00} = \Gamma^3_{01} = \Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{33} = 0.$

Preuve .

Dans cette preuve, on utilisera les résultats de (2.1) et (2.2).

On a :

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{12} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_r g_{\nu 2} + \partial_z g_{1\nu} - \partial_\nu g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_r g_{02} + \partial_z g_{10} - \partial_t g_{12}) \\
&= 0 = \Gamma^0_{21}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{02} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_t g_{\nu 2} + \partial_z g_{0\nu} - \partial_\nu g_{02}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_t g_{02} + \partial_z g_{00} - \partial_t g_{02}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\partial_z g_{00} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\right)\partial_z\left(-\alpha e^{2(\eta-\gamma)}\right) \\
&= 0 = \Gamma^0_{20}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{03} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_t g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_t g_{03} + \partial_\theta g_{00} - \partial_t g_{03}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\partial_\theta g_{00} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\right)\partial_\theta\left(-\alpha e^{2(\eta-\gamma)}\right) \\
&= 0 = \Gamma^0_{30}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{13} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_\theta g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{1\nu} - \partial_\nu g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_\theta g_{03} + \partial_\theta g_{10} - \partial_t g_{13}) \\
&= 0 = \Gamma^0_{31}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{02} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_t g_{\nu 2} + \partial_z g_{0\nu} - \partial_\nu g_{02})\\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_t g_{12} + \partial_z g_{01} - \partial_\theta g_{02})\\
&= 0 = \Gamma^1_{20}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{03} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_t g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03})\\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_t g_{13} + \partial_\theta g_{01} - \partial_r g_{03})\\
&= 0 = \Gamma^1_{30}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_r g_{\nu 2} + \partial_z g_{1\nu} - \partial_\nu g_{12})\\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_r g_{12} + \partial_z g_{11} - \partial_r g_{12})\\
&= \frac{1}{2}g^{11}\partial_z g_{11}\\
&= \frac{1}{2}e^{2(\eta-\gamma)}\partial_z(e^{2(\eta-\gamma)})\\
&= 0 = \Gamma^1_{21}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{13} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_r g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{1\nu} - \partial_\nu g_{13})\\
&= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_r g_{13} + \partial_\theta g_{11} - \partial_\theta g_{13})\\
&= \frac{1}{2}g^{11}\partial_\theta g_{11}\\
&= \frac{1}{2}e^{2(\eta-\gamma)}\partial_r(e^{2(\eta-\gamma)})\\
&= 0 = \Gamma^1_{31}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{00} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_t g_{\nu 0} + \partial_t g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00})\\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_t g_{20} + \partial_t g_{02} - \partial_z g_{00}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_t g_{30} + \partial_t g_{03} - \partial_\theta g_{00})\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{01} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_t g_{\nu 1} + \partial_r g_{0\nu} - \partial_\nu g_{01})\\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_t g_{21} + \partial_r g_{02} - \partial_z g_{01}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_t g_{31} + \partial_r g_{03} - \partial_\theta g_{01})\\
&= 0 = \Gamma^2_{10}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_r g_{\nu 1} + \partial_r g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11})\\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_r g_{21} + \partial_r g_{12} - \partial_z g_{11}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_r g_{31} + \partial_r g_{13} - \partial_\theta g_{11})\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_z g_{\nu 2} + \partial_z g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_z g_{22} + \partial_z g_{22} - \partial_z g_{22}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_z g_{32} + \partial_z g_{23} - \partial_3 g_{22}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{23} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_z g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{2\nu} - \partial_\nu g_{23}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_z g_{23} + \partial_\theta g_{22} - \partial_z g_{23}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_z g_{33} + \partial_\theta g_{23} - \partial_\theta g_{23}) \\
&= 0 = \Gamma^2_{32}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^2_{33} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_\theta g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_\theta g_{23} + \partial_\theta g_{32} - \partial_z g_{33}) + \frac{1}{2}g^{23}(\partial_z g_{33} + \partial_\theta g_{33} - \partial_\theta g_{33}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{00} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_t g_{\nu 0} + \partial_t g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) \\
&= \frac{1}{2}g^{23}(\partial_t g_{30} + \partial_t g_{03} - \partial_\theta g_{00}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_t g_{20} + \partial_t g_{02} - \partial_z g_{00}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{10} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_r g_{\nu 0} + \partial_t g_{1\nu} - \partial_\nu g_{10}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_r g_{30} + \partial_t g_{13} - \partial_\theta g_{10}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_r g_{20} + \partial_t g_{12} - \partial_z g_{10}) \\
&= 0 = \Gamma^3_{01}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{11} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_r g_{\nu 1} + \partial_r g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_r g_{31} + \partial_r g_{13} - \partial_\theta g_{11}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_r g_{21} + \partial_r g_{12} - \partial_z g_{11}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{22} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_z g_{\nu 2} + \partial_z g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_z g_{32} + \partial_z g_{23} - \partial_\theta g_{22}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_z g_{22} + \partial_z g_{22} - \partial_z g_{22}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_z g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{2\nu} - \partial_\nu g_{23}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_z g_{33} + \partial_\theta g_{23} - \partial_\theta g_{23}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_z g_{23} + \partial_\theta g_{22} - \partial_z g_{23}) \\
&= 0 = \Gamma^3_{32}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{33} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_\theta g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}(\partial_\theta g_{33} + \partial_\theta g_{33} - \partial_\theta g_{33}) + \frac{1}{2}g^{32}(\partial_\theta g_{32} + \partial_\theta g_{32} - \partial_z g_{33}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.2. *(Coefficients non nuls de Christoffel)*

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2\alpha}\partial_t\alpha + \partial_t\eta - \partial_t\gamma, \\
\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2\alpha}\partial_r\alpha + \partial_r\eta - \partial_r\gamma = \Gamma^0_{10}, \\
\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma), \\
\Gamma^0_{22} &= \frac{1}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}\partial_t\gamma, \\
\Gamma^0_{33} &= \frac{e^{4\gamma-2\eta}(A\partial_t A + A^2\partial_t\gamma) - r^2\partial_t\gamma e^{-2\eta}}{\alpha}, \\
\Gamma^0_{23} &= \frac{1}{2\alpha}e^{4\gamma-2\eta}\partial_t A + \frac{1}{\alpha}Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_t\gamma = \Gamma^0_{32}, \\
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}\partial_r\alpha + \alpha\partial_r\eta - \alpha\partial_r\gamma, \\
\Gamma^1_{01} &= \partial_t\eta - \partial_t\gamma = \Gamma^1_{10}, \\
\Gamma^1_{11} &= \partial_r\eta - \partial_r\gamma, \\
\Gamma^1_{22} &= -e^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma, \\
\Gamma^1_{23} &= -\frac{1}{2}e^{4\gamma-2\eta}\partial_r A - Ae^{4\gamma-2\mu}\partial_r\gamma = \Gamma^1_{32}, \\
\Gamma^1_{33} &= (-r + r^2\partial_r\gamma)e^{-2\eta} - e^{4\gamma-2\mu}(A\partial_r A + A^2\partial_r\gamma), \\
\Gamma^2_{02} &= \partial_t\gamma - \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A = \Gamma^2_{20},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{03} &= \frac{\partial_t A}{2} + 2A\partial_t\gamma - \frac{A^2e^{4\gamma}}{2t^2}\partial_t A = \Gamma^2_{30}, \\
\Gamma^2_{12} &= \partial_r\gamma - \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A = \Gamma^2_{21}, \\
\Gamma^2_{13} &= \frac{1}{2}\partial_r A - \frac{A}{r} + 2A\partial_r\gamma - \frac{A^2e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A = \Gamma^2_{31}, \\
\Gamma^3_{02} &= \frac{e^{4\gamma}}{2t^2}\partial_t A = \Gamma^3_{20}, \\
\Gamma^3_{03} &= \frac{1}{t} + \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A - \partial_t\gamma = \Gamma^3_{30}, \\
\Gamma^3_{12} &= \frac{e^{4\gamma}}{2t^2}\partial_r A = \Gamma^3_{21}, \\
\Gamma^3_{13} &= \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A - \partial_r\gamma + \frac{1}{r} = \Gamma^3_{31}.
\end{aligned}$$

Preuve .

Dans toute la preuve, on utilisera les résultats de (2.1) et (2.2). On a donc :

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_t g_{\nu 0} + \partial_t g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\partial_t g_{00} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\right)\partial_t(-\alpha e^{2(\eta-\gamma}) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\partial_t\alpha + \partial_t\eta - \partial_t\gamma.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_t g_{\nu 1} + \partial_r g_{0\nu} - \partial_\nu g_{01}) \\
&= \frac{1}{2}g^{00}\partial_r g_{00} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma))}}{\alpha}\right)\partial_r(-\alpha e^{2(\eta-\gamma)}) \\
&= \frac{1}{2\alpha}\partial_r\alpha + \partial_r\eta - \partial_r\gamma.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_r g_{\nu 1} + \partial_r g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_t g_{11} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma))}}{\alpha}\right)\partial_t(e^{2(\eta-\gamma)}) \\
&= \frac{1}{\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{22} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_z g_{\nu 2} + \partial_z g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_t g_{22} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma))}}{\alpha}\right)\partial_t e^{2\gamma} \\
&= \frac{1}{\alpha}e^{4\gamma-2\eta}\partial_t\gamma.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{33} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_\theta g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_t g_{33} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma))}}{\alpha}\right)\partial_t(r^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma}) \\
&= \frac{e^{4\gamma-2\eta}(A\partial_t A + A^2\partial_t\gamma) - r^2\partial_t\gamma e^{-2\mu}}{\alpha}.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{23} &= \frac{1}{2}g^{0\nu}(\partial_z g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{2\nu} - \partial_\nu g_{23}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{00}\partial_t g_{23} \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{-2(\eta-\gamma))}}{\alpha}\right)\partial_t(Ae^{2\gamma}) \\
&= \frac{1}{2\alpha}e^{4\gamma-2\eta}\partial_t A + \frac{1}{\alpha}Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_t\gamma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_t g_{\nu 0} + \partial_t g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_r g_{00} \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma))}\right)\partial_r(-\alpha e^{2(\eta-\gamma)}) \\
&= \frac{1}{2}\partial_r\alpha + \alpha\partial_r\eta - \alpha\partial_r\gamma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_t g_{\nu 1} + \partial_r g_{0\nu} - \partial_\nu g_{01}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}\partial_t g_{11} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma))}\right)\partial_t(e^{2(\eta-\gamma)}) \\
&= \partial_t\eta - \partial_t\gamma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_r g_{\nu 1} + \partial_r g_{1\nu} - \partial_\nu g_{11}) \\
&= \frac{1}{2}g^{11}\partial_r g_{11} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma))}\right)\partial_r(e^{2(\eta-\gamma)}) \\
&= \partial_r\eta - \partial_r\gamma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_z g_{\nu 2} + \partial_z g_{2\nu} - \partial_\nu g_{22}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_r g_{22} \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma))}\right)\partial_r e^{2\gamma} \\
&= -e^{4U-2\mu}\partial_r\gamma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{23} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_z g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{2\nu} - \partial_\nu g_{23}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_r g_{23} \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma))}\right)\partial_r(Ae^{2\gamma}) \\
&= -\frac{1}{2}e^{4\gamma-2\eta}\partial_r A - Ae^{4\gamma-2\eta}\partial_r\gamma.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{33} &= \frac{1}{2}g^{1\nu}(\partial_\theta g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{3\nu} - \partial_\nu g_{33}) \\
&= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_r g_{33} \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-2(\eta-\gamma)}\right)\right)\partial_r(t^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma}) \\
&= r^2 e^{-2\eta}\partial_r\gamma - re^{-2\eta} - e^{4\gamma-2\eta}(A\partial_r A + A^2\partial_r\gamma).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{02} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_t g_{\nu 2} + \partial_z g_{0\nu} - \partial_\nu g_{02}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}\partial_t g_{22} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_t g_{23} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t e^{2\gamma} + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t(Ae^{2\gamma}) \\
&= \partial_t\gamma - \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{03} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_t g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}\partial_t g_{23} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_t g_{33} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t(r^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma}) \\
&= \frac{\partial_t A}{2} + 2A\partial_t\gamma - \frac{A^2 e^{4\gamma}}{2t^2}\partial_t A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_r g_{\nu 2} + \partial_z g_{1\nu} - \partial_\nu g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}\partial_r g_{22} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_r g_{23} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r e^{2U} + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(Ae^{2U}) \\
&= \partial_r\gamma - \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{13} &= \frac{1}{2}g^{2\nu}(\partial_r g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{1\nu} - \partial_\nu g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}g^{22}\partial_r g_{23} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_r g_{33} \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(r^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma}) \\
&= \frac{1}{2}\partial_r A - \frac{A}{r} + 2A\partial_r\gamma - \frac{A^2 e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^3_{02} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_t g_{\nu 2} + \partial_z g_{0\nu} - \partial_\nu g_{02}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}\partial_t g_{23} + \frac{1}{2}g^{32}\partial_t g_{22} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t e^{2\gamma} \\
&= \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{03} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_t g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{0\nu} - \partial_\nu g_{03}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}\partial_t g_{33} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_t g_{23} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_t(Ae^{2\gamma}) \\
&= \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t A - \partial_t\gamma.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{12} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_r g_{\nu 2} + \partial_z g_{1\nu} - \partial_\nu g_{12}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}\partial_r g_{23} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_r g_{22} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(Ae^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r e^{2\gamma} \\
&= \frac{e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2}g^{3\nu}(\partial_r g_{\nu 3} + \partial_\theta g_{1\nu} - \partial_\nu g_{13}) \\
&= \frac{1}{2}g^{33}\partial_r g_{33} + \frac{1}{2}g^{23}\partial_r g_{23} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(t^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\right)\partial_r(Ae^{2\gamma}) \\
&= \frac{Ae^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r A - \partial_r\gamma + \frac{1}{r}.
\end{aligned}
$$

■

2.1.3 Le tenseur de Ricci

Dans le cadre de la théorie de la relativité, le champ gravitationnel est interprété comme une déformation de l'espace-temps : Cette déformation est exprimée par le tenseur de Ricci. Le tenseur de Ricci est un tenseur d'ordre 2 obtenu par contraction du tenseur de courbure complet défini en coordonnées locales par [1] :

$$R^\lambda_{\delta\nu\beta} = (\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\beta\delta} - \partial_\beta\Gamma^\lambda_{\nu\delta}) + (\Gamma^\lambda_{\nu\gamma}\Gamma^\nu_{\beta\delta} - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\delta}). \tag{2.3}$$

Par suite, le tenseur de Ricci est donné par :

$$R_{\delta\beta} = R^\lambda_{\delta\lambda\beta} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\beta\delta} - \partial_\beta\Gamma^\lambda_{\lambda\delta}) + (\Gamma^\lambda_{\nu\lambda}\Gamma^\nu_{\beta\delta} - \Gamma^\lambda_{\beta\nu}\Gamma^\nu_{\lambda\delta}). \tag{2.4}$$

Proposition 2.1.3. *Les coefficients nuls du tenseur de Ricci sont :*

$$
\begin{aligned}
R_{02} &= R_{03} = R_{20} = R_{30} = 0, \\
R_{12} &= R_{13} = R_{21} = R_{31} = 0.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Proposition 2.1.4. *Les coefficients non nuls du tenseur de Ricci sont :*

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} + \alpha(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - (\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma) + \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\ &\quad -\frac{(\partial_t A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - 2(\partial_t\gamma)^2 - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{\alpha}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2r}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$R_{01} = \frac{\partial_t\eta}{r} - 2\partial_t\gamma\partial_r\gamma + \frac{\partial_t A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma}, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma}{\alpha} - (\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha^2}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) + \frac{1}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\ &\quad -\frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - 2(\partial_r\gamma)^2 - \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} + \frac{2\partial_r\gamma}{r}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} R_{23} &= \frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_t\alpha\partial_t A}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{2\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{A\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - 2\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{4\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{A(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{\partial_r A}{2r}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma} - \frac{A\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{A(\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_t A\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad +\frac{4A\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A^2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{r^2(\alpha\partial_{rr}\gamma - \partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta} - \frac{A^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad +\frac{r^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta} - \frac{r\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} + \frac{A\partial_r A}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{(\partial_r A)^2}{2}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad +\frac{A^2(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma} - 4A\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{r^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} - \frac{A^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{A\partial_r A\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + r\partial_r\gamma e^{-2\eta}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Preuve . *Dans cette preuve, on utilisera les coefficients de Christoffel donnés par les proposition* (2.2.1) *et* (2.2.2) *et aussi le fait que* $\partial_2\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \partial_3\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0$, $\forall\nu,\mu,\lambda = 0,1,2,3$.

On a :

$$R_{00} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{00} - \partial_0\Gamma^\lambda_{\lambda 0}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{00} - \Gamma^\lambda_{0\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0}).$$

Mais,

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{00} - \partial_0\Gamma^\lambda_{\lambda 0} &= \partial_0\Gamma^0_{00} + \partial_1\Gamma^1_{00} - \partial_0(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{30}) \\ &= \partial_1\Gamma^1_{00} - \partial_0(\Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{30}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{00} - \Gamma^\lambda_{0\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{00} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{00} - \Gamma^2_{00}\Gamma^0_{20} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{00} - \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{30} \\ &+\Gamma^0_{10}\Gamma^1_{00} - \Gamma^0_{01}\Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{01}\Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{00} - \Gamma^2_{01}\Gamma^1_{20} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{00} - \Gamma^3_{01}\Gamma^1_{30} \\ &+\Gamma^0_{20}\Gamma^2_{00} - \Gamma^0_{02}\Gamma^2_{00} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{00} - \Gamma^1_{02}\Gamma^2_{10} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{00} - \Gamma^2_{02}\Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{00} - \Gamma^3_{02}\Gamma^2_{30} \\ &+\Gamma^0_{30}\Gamma^3_{00} - \Gamma^0_{03}\Gamma^3_{00} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{00} - \Gamma^1_{03}\Gamma^3_{10} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{00} - \Gamma^2_{03}\Gamma^3_{20} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{00} - \Gamma^3_{03}\Gamma^3_{30}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \Gamma^0_{00}(\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}) + \Gamma^1_{00}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} - \Gamma^0_{10}) - 2\Gamma^2_{03}\Gamma^3_{20} - (\Gamma^1_{01})^2 - (\Gamma^2_{02})^2 \\ &-(\Gamma^3_{03})^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}R_{00} &= \partial_1\Gamma^1_{00} - \partial_0(\Gamma^1_{10} + \Gamma^2_{20} + \Gamma^3_{30}) + \Gamma^0_{00}(\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}) \\ &+\Gamma^1_{00}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} - \Gamma^0_{10}) - 2\Gamma^2_{03}\Gamma^3_{20} - (\Gamma^1_{01})^2 - (\Gamma^2_{02})^2 - (\Gamma^3_{03})^2.\end{aligned}$$

On obtient finalement après calculs :

$$\begin{aligned}R_{00} &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} + \alpha(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - (\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma) + \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\ &-\frac{(\partial_t A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - 2(\partial_t\gamma)^2 - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{\alpha}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{\partial_r\alpha}{2r}.\end{aligned}$$

$$R_{01} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{01} - \partial_1\Gamma^\lambda_{\lambda 0}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{01} - \Gamma^\lambda_{1\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0})$$

Mais,

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{01} - \partial_1\Gamma^\lambda_{\lambda 0} &= \partial_0\Gamma^0_{01} - \partial_1\Gamma^0_{00} + \partial_1\Gamma^1_{10} - \partial_1\Gamma^1_{10} \\ &= \partial_0\Gamma^0_{01} - \partial_1\Gamma^0_{00}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{01} - \Gamma^\lambda_{1\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 0} &= \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{10} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{10} + \Gamma^0_{10}\Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{10} + \Gamma^0_{10}\Gamma^3_{30} - \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{10} \\ &+\Gamma^1_{10}\Gamma^0_{01} - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11} + \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{10}\Gamma^1_{11} + \Gamma^1_{10}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{20}\Gamma^2_{11} + \Gamma^1_{10}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{30}\Gamma^3_{11} \\ &+\Gamma^2_{10}\Gamma^0_{02} - \Gamma^2_{00}\Gamma^0_{12} + \Gamma^2_{10}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{10}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{10}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{10}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{30}\Gamma^3_{12} \\ &+\Gamma^2_{10}\Gamma^0_{03} - \Gamma^3_{00}\Gamma^0_{13} + \Gamma^3_{10}\Gamma^1_{13} - \Gamma^3_{10}\Gamma^1_{13} + \Gamma^3_{10}\Gamma^2_{23} - \Gamma^3_{20}\Gamma^2_{13} + \Gamma^3_{10}\Gamma^3_{33} - \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{13} \\ &= \Gamma^0_{10}(\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}) + \Gamma^1_{10}(\Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{31}) - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11} - \Gamma^2_{20}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{30}\Gamma^3_{12} - \Gamma^3_{20}\Gamma^2_{13} \\ &-\Gamma^3_{30}\Gamma^3_{13}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R_{01} &= \partial_0\Gamma^0_{01} - \partial_1\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{10}(\Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}) + \Gamma^1_{10}(\Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{31}) - \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{11} \\ &\quad -\Gamma^2_{20}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{30}\Gamma^3_{12} - \Gamma^3_{20}\Gamma^2_{13} - \Gamma^3_{30}\Gamma^3_{13}. \end{aligned}$$

D'où après calculs, on a

$$R_{01} = \frac{\partial_t\eta}{r} - 2\partial_t\gamma\partial_r\gamma + \frac{\partial_t A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma}.$$

$$R_{11} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{11} - \partial_1\Gamma^\lambda_{\lambda 1}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{11} - \Gamma^\lambda_{1\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 1}).$$

Or,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{11} - \partial_1\Gamma^\lambda_{\lambda 1} &= \partial_0\Gamma^0_{11} - \partial_1\Gamma^0_{01} + \partial_1\Gamma^1_{11} - \partial_1\Gamma^1_{11} + \partial_2\Gamma^2_{11} - \partial_1\Gamma^2_{21} + \partial_3\Gamma^3_{11} - \partial_1\Gamma^3_{31} \\ &= \partial_0\Gamma^0_{11} - \partial_1(\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{11} - \Gamma^\lambda_{1\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 1} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{11} - \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{11} - \Gamma^2_{10}\Gamma^0_{21} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{11} - \Gamma^3_{10}\Gamma^0_{31} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{11} - \Gamma^0_{11}\Gamma^1_{01} \\ &\quad +\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{11} - \Gamma^3_{11}\Gamma^1_{31} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{11} - \Gamma^0_{12}\Gamma^2_{01} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} \\ &\quad +\Gamma^3_{23}\Gamma^2_{11} - \Gamma^3_{12}\Gamma^2_{31} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{11} - \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{01} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{11} - \Gamma^2_{13}\Gamma^3_{21} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{11} - \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \\ &= \Gamma^0_{11}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03} - \Gamma^1_{01}) + \Gamma^1_{11}(\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^0_{10}) - (\Gamma^0_{10})^2 - (\Gamma^2_{12})^2 - (\Gamma^3_{13})^2 \\ &\quad -2\Gamma^3_{12}\Gamma^2_{31}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_0\Gamma^0_{11} - \partial_1(\Gamma^0_{01} + \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{31}) + \Gamma^0_{11}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03} - \Gamma^1_{01}) \\ &\quad +\Gamma^1_{11}(\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^0_{10}) - (\Gamma^0_{10})^2 - (\Gamma^2_{12})^2 - (\Gamma^3_{13})^2 - 2\Gamma^3_{12}\Gamma^2_{31}. \end{aligned}$$

D'où après calcul, on obtient

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma}{\alpha} - (\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma) - \frac{\partial_t\alpha}{2\alpha^2}(\partial_t\eta - \partial_t\gamma) + \frac{1}{r}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) \\ &\quad -\frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - 2(\partial_r\gamma)^2 - \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha}(\partial_r\eta - \partial_r\gamma) + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} + \frac{2\partial_r\gamma}{r}. \end{aligned}$$

$$R_{22} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{22} - \partial_2\Gamma^\lambda_{\lambda 2}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{22} - \Gamma^\lambda_{2\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 2}).$$

Mais,

$$\begin{aligned}\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{22} - \partial_2 \Gamma^\lambda_{\lambda 2} &= \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{22} = \partial_0 \Gamma^0_{22} + \partial_1 \Gamma^1_{22} + \partial_2 \Gamma^2_{22} + \partial_3 \Gamma^3_{22} \\ &= \partial_0 \Gamma^0_{22} + \partial_1 \Gamma^1_{22}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{22} - \Gamma^\lambda_{2\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 2} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{22} - \Gamma^0_{20}\Gamma^0_{02} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{22} - \Gamma^1_{20}\Gamma^0_{12} + \Gamma^3_{03}\Gamma^0_{22} - \Gamma^3_{20}\Gamma^0_{32} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{22} - \Gamma^0_{21}\Gamma^1_{02} \\ &\quad + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12} + \Gamma^3_{13}\Gamma^1_{22} - \Gamma^3_{21}\Gamma^1_{32} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{22} - \Gamma^0_{22}\Gamma^2_{02} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} \\ &\quad + \Gamma^3_{23}\Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{22}\Gamma^2_{32} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{22} - \Gamma^0_{23}\Gamma^3_{02} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{22} - \Gamma^1_{23}\Gamma^3_{12} + \Gamma^3_{33}\Gamma^3_{22} - \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} \\ &= \Gamma^0_{22}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01} + \Gamma^3_{03} - \Gamma^2_{02}) + \Gamma^1_{22}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{12}) - 2\Gamma^3_{20}\Gamma^0_{32} - 2\Gamma^3_{21}\Gamma^1_{32}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}R_{22} &= \partial_0 \Gamma^0_{22} + \partial_1 \Gamma^1_{22} + \Gamma^0_{22}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01} + \Gamma^3_{03} - \Gamma^2_{02}) + \Gamma^1_{22}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{12}) \\ &\quad -2\Gamma^3_{20}\Gamma^0_{32} - 2\Gamma^3_{21}\Gamma^1_{32}.\end{aligned}$$

D'où après calcul, on obtient

$$\begin{aligned}R_{22} &= \frac{\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} \\ &\quad -\frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma}.\end{aligned}$$

$$R_{23} = (\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{32} - \partial_3 \Gamma^\lambda_{\lambda 2}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{32} - \Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 2}).$$

Mais,

$$\begin{aligned}\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{32} - \partial_3 \Gamma^\lambda_{\lambda 2} &= \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{32} = \partial_0 \Gamma^0_{32} + \partial_1 \Gamma^1_{32} + \partial_2 \Gamma^2_{32} + \partial_3 \Gamma^3_{32} \\ &= \partial_0 \Gamma^0_{32} + \partial_1 \Gamma^1_{32}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{32} - \Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda 2} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{32} - \Gamma^0_{30}\Gamma^0_{02} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{32} - \Gamma^1_{30}\Gamma^0_{12} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{32} - \Gamma^2_{30}\Gamma^0_{22} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{32} - \Gamma^0_{31}\Gamma^1_{02} \\ &\quad + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{32} - \Gamma^1_{31}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{32} - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{22} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{32} - \Gamma^0_{32}\Gamma^2_{02} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{32} - \Gamma^1_{32}\Gamma^2_{12} \\ &\quad + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{32} - \Gamma^2_{32}\Gamma^2_{22} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{32} - \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{02} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{32} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{12} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{32} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{22} \\ &= \Gamma^0_{32}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01}) + \Gamma^1_{32}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}) - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{22} - \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{02} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{12} - \Gamma^2_{30}\Gamma^0_{22}.\end{aligned}$$

Donc,

$$R_{23} = \partial_0 \Gamma^0_{32} + \partial_1 \Gamma^1_{32} + \Gamma^0_{32}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01}) + \Gamma^1_{32}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11}) - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{22} - \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{02} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{12} - \Gamma^2_{30}\Gamma^0_{22}.$$

D'où après calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
R_{23} \;=\;& \frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_t\alpha\partial_t A}{4\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{2\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}\\
&-\frac{A\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma} - 2\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{4\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}\\
&-\frac{A(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{\partial_r A}{2r}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma} - \frac{A\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma},
\end{aligned}$$

$$R_{33} = (\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{33} - \partial_3\Gamma^\lambda_{\lambda3}) + (\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{33} - \Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda3}).$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{33} - \partial_3\Gamma^\lambda_{\lambda3} &= \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{33} = \partial_0\Gamma^0_{33} + \partial_1\Gamma^1_{33} + \partial_2\Gamma^2_{33} + \partial_3\Gamma^3_{33}\\
&= \partial_0\Gamma^0_{33} + \partial_1\Gamma^1_{33},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{33} - \Gamma^\lambda_{3\nu}\Gamma^\nu_{\lambda3} &= \Gamma^0_{00}\Gamma^0_{33} - \Gamma^0_{30}\Gamma^0_{03} + \Gamma^1_{01}\Gamma^0_{33} - \Gamma^1_{30}\Gamma^0_{13} + \Gamma^2_{02}\Gamma^0_{33} - \Gamma^2_{30}\Gamma^0_{23} + \Gamma^0_{10}\Gamma^1_{33} - \Gamma^0_{31}\Gamma^1_{03}\\
&\quad+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{33} - \Gamma^1_{31}\Gamma^1_{13} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{33} - \Gamma^2_{31}\Gamma^1_{23} + \Gamma^0_{20}\Gamma^2_{33} - \Gamma^0_{32}\Gamma^2_{03} + \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{33} - \Gamma^1_{32}\Gamma^2_{13}\\
&\quad+\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{33} - \Gamma^2_{32}\Gamma^2_{23} + \Gamma^0_{30}\Gamma^3_{33} - \Gamma^0_{33}\Gamma^3_{03} + \Gamma^1_{31}\Gamma^3_{33} - \Gamma^1_{33}\Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{32}\Gamma^3_{33} - \Gamma^2_{33}\Gamma^3_{23}\\
&= \Gamma^0_{33}(\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} - \Gamma^3_{03}) + \Gamma^1_{33}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13}) - 2\Gamma^0_{32}\Gamma^2_{03} - 2\Gamma^2_{31}\Gamma^1_{23}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$R_{33} = \partial_0\Gamma^0_{33}+\partial_1\Gamma^1_{33}+\Gamma^0_{33}(\Gamma^0_{00}+\Gamma^1_{01}+\Gamma^2_{02}-\Gamma^3_{03})+\Gamma^1_{33}(\Gamma^0_{10}+\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{12}-\Gamma^3_{13})-2\Gamma^0_{32}\Gamma^2_{03}-2\Gamma^2_{31}\Gamma^1_{23}.$$

D'où après calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
R_{33} \;=\;& \frac{(\partial_t A)^2}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2(\partial_t A)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+8\gamma} + \frac{A(\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A\partial_t A\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}\\
&+\frac{4A\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{A^2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{r^2(\alpha\partial_{rr}\gamma - \partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta} - \frac{A^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+4\gamma}\\
&+\frac{r^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta} - \frac{r\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} + \frac{A\partial_r A}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{A^2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+4\gamma} - \frac{(\partial_r A)^2}{2}e^{-2\eta+4\gamma}\\
&+\frac{A^2(\partial_r A)^2}{2r^2}e^{-2\eta+8\gamma} - 4A\partial_r A\partial_r\gamma e^{-2\eta+4\gamma} + \frac{r^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta} - \frac{A^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma}\\
&-\frac{A\partial_r A\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+4\gamma} + r\partial_r\gamma e^{-2\eta}.
\end{aligned}$$

■

2.1.4 La courbure Riemannienne

Encore appelé constante de Ricci, la courbure Riemannienne notée R est obtenue par contraction du tenseur de Ricci. Son expression est

$$R = g^{\delta\beta} R_{\delta\beta} \quad .$$

Proposition 2.1.5. *La courbure Riemannienne en Symétrique cylindrique est donnée par :*

$$\begin{aligned} R \;=\; & -\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta - \partial_r\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - 2(\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{2(\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} \\ & -\frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta - \partial_t\gamma)}{\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - 2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+2\gamma} \\ & +\frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Preuve . *On a :*

$$\begin{aligned} R \;=\; & g^{00}R_{00} + g^{01}R_{01} + g^{02}R_{02} + g^{03}R_{03} + g^{10}R_{10} + g^{11}R_{11} + g^{12}R_{12} + g^{13}R_{13} + +g^{20}R_{20} \\ & +g^{21}R_{21} + g^{22}R_{22} + g^{23}R_{23} + g^{30}R_{30} + g^{31}R_{31} + g^{32}R_{32} + g^{33}R_{33} \\ =\; & g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + 2g^{23}R_{23} + g^{33}R_{33} \quad Car \quad g^{01} = g^{02} = g^{03} = g^{12} = g^{13} = 0. \end{aligned}$$

Mais,en utilisant les propositions (2.1.3) et(2.1.4) et aussi le résultat de (2.2), on a :

$$\begin{aligned} g^{00}R_{00} \;=\; & -\frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta - \partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - (\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} \\ & -\frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta - \partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\eta - \partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma} \\ & +\frac{2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{11}R_{11} \;=\; & \frac{\partial_{tt}\eta - \partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta - \partial_t\gamma)}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta - \partial_r\gamma)}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{\partial_r\eta - \partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma} \\ & -\frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} - 2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+2\gamma} + \frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma} - (\partial_{rr}\eta - \partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma} \\ & -\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{22}R_{22} \;=\; & \frac{\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma} - \frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} \\ & +\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{A^2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{A^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{A^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} \\ & -\frac{A^2\partial_r\gamma}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{(A^2(\partial_tA)^2}{2\alpha r^4}e^{-2\eta+10\gamma} + \frac{(A^2(\partial_rA)^2}{2r^4}e^{-2\eta+10\gamma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2g^{23}R_{23} \;=\; & -\frac{A(\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{2A^2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{4A\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} \\ & +\frac{A\partial_tA\partial_t\alpha}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{A^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{4A\partial_rA\partial_r\gamma}{r^2}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{A\partial_rA\partial_r\alpha}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} \\ & +\frac{A^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{2A^2\partial_r\gamma}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma} - \frac{A\partial_rA}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma} + \frac{A^2(\partial_tA)^2}{\alpha r^4}e^{-2\eta+10\gamma} \\ & -\frac{A^2(\partial_rA)^2}{r^4}e^{-2\eta+10\gamma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g^{33}R_{33} &= \frac{\alpha\partial_{rr}\gamma-\partial_{tt}\gamma}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma}\\
&+\frac{A(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{A^2(\partial_{tt}A-\alpha\partial_{rr}A)}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A\partial_tA\partial_t\alpha}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\
&-\frac{A^2\partial_t\gamma\partial_t\alpha}{2\alpha^2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{4A\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{4A\partial_rA\partial_r\gamma}{r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A\partial_rA\partial_r\alpha}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\
&-\frac{A^2\partial_r\gamma\partial_r\alpha}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{A\partial_rA}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{A^2\partial_r\gamma}{r^3}e^{-2\eta+6\gamma}+\frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}\\
&-\frac{A^2(\partial_tA)^2}{2\alpha r^4}e^{-2\eta+10\gamma}+\frac{A^2(\partial_rA)^2}{2r^4}e^{-2\eta+10\gamma}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{\partial_{rr}\alpha}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-2(\partial_{rr}\eta-\partial_{rr}\gamma)e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{2(\partial_{tt}\eta-\partial_{tt}\gamma)}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}\\
&-\frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)}{\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{(\partial_r\alpha)^2}{2\alpha^2}e^{-2\eta+2\gamma}-\frac{\partial_r\alpha}{\alpha r}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}e^{-2\eta+2\gamma}-2(\partial_r\gamma)^2e^{-2\eta+2\gamma}\\
&+\frac{2\partial_r\gamma}{r}e^{-2\eta+2\gamma}+\frac{(\partial_tA)^2}{2\alpha r^2}e^{-2\eta+6\gamma}-\frac{(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{-2\eta+6\gamma}.
\end{aligned}$$

★ ★ CHAPITRE TROIS ★ ★

ÉQUATIONS D'EINSTEIN-MAXWELL-FLUIDE PARFAIT EN SYMETRIE CYLINDRIQUE

Dans ce chapitre, nous allons établir les équations d'Einstein- Maxwell-fluide parfait qui est système de douze équations aux dérivées partielles non linéaires. Pour cela nous commencerons par établir les équations de Maxwell qui est un système de quatre équations, ensuite les équations d'Einstein qui est un système de six équations pour les composantes du tenseur métrique $(g_{\delta\beta})$ contenant le tenseur impulsion énergie $T_{\delta\beta}$ au second membre donné par :

$$R_{\delta\beta} - \frac{1}{2} R g_{\delta\beta} = K T_{\delta\beta}.$$

Avec $K = \frac{8\pi G}{C^4}$, $\quad T_{\delta\beta} = T^f_{\delta\beta} + T^M_{\delta\beta}$ et $\delta, \beta = 0, 1, 2, 3$.
Où $T^f_{\delta\beta}$ est le tenseur impulsion énergie lié au fluide parfait et $T^M_{\delta\beta}$ le tenseur de maxwell . Et en fin les équations d'Euler liés au fluide parfait qui est un système de deux équations.

3.1 Les équations de Maxwell

Pour établir les équations de Maxwell, nous considérons des particules chargées de masse identique $(= 1)$ et de charge q évoluant à très grande vitesse et sans collisions. Nous supposons la fonction de distribution f des particules nulles. Par contre, ces particules chargées créent entre elles un champ électromagnétique F qui est un tenseur covariant d'ordre 2, solution des équations de Maxwell [6]

$$\nabla_a F^{ab} = J^b \tag{3.1}$$

$$\nabla_a F_{bc} + \nabla_b F_{ac} + \nabla_c F_{ab} = 0 \tag{3.2}$$

Avec $a, b, c = 0, 1, 2, 3$; où J^b est le vecteur courant donné par :

$$J^b = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{p^b}{p^0} f \sqrt{\mid g \mid} d\bar{p}. \quad avec \quad \bar{p} = (p_1, \quad p_2, \quad p_3).$$

Puisque $f = 0, \quad J^b = 0.$

D'où l'équation (3.1) devient : $\nabla_a F^{ab} = 0$. Afin de rendre le système résoluble, $Cf[6]$ on définit le champ électromagnétique F en fonction du potentiel scalaire (Λ_a) par

$$F_{ab} = \partial_a \Lambda_b - \partial_b \Lambda_a. \tag{3.3}$$

Comme nous recherchons les solutions du système en jauge temporelle $Cf[6]$, on a la condition $\Lambda_0 = 0$. Les équations de Maxwell que nous voulons trouver sont au nombre de quatre et nous avons besoin du calcul de F_{ab} pour y arriver.

Calcul de F_{ab}

$F_{ab} = \partial_a \Lambda_b - \partial_b \Lambda_a$

On compte 16 coefficients de F_{ab} ; Ces coefficients étant antisymétriques ($F_{ab} = -F_{ba}$), nous ne calculons que 10 et on déduit les autres. On a donc :

$$F_{01} = \partial_0 \Lambda_1 - \partial_1 \Lambda_0 = \partial_t \Lambda_1 - \partial_r \Lambda_0 = \partial_t \Lambda_1$$

$$F_{02} = \partial_0 \Lambda_2 - \partial_2 \Lambda_0 = \partial_t \Lambda_2 - \partial_z \Lambda_0 = \partial_t \Lambda_2$$

$$F_{03} = \partial_0 \Lambda_3 - \partial_3 \Lambda_0 = \partial_t \Lambda_3 - \partial_\theta \Lambda_0 = \partial_t \Lambda_3$$

$$F_{12} = \partial_1 \Lambda_2 - \partial_2 \Lambda_1 = \partial_r \Lambda_2 - \partial_z \Lambda_1 = \partial_r \Lambda_2$$

$$F_{13} = \partial_1 \Lambda_3 - \partial_3 \Lambda_1 = \partial_r \Lambda_3 - \partial_\theta \Lambda_1 = \partial_r \Lambda_3$$

$$F_{23} = \partial_2 \Lambda_3 - \partial_3 \Lambda_2 = \partial_z \Lambda_3 - \partial_\theta \Lambda_2 = \quad 0$$

$$F_{aa} = 0 \ \ avec \quad a = 0, 1, 2, 3.$$

Les équations de Maxwell s'obtiennent finalement en utilisant la relation définie par :

$$\begin{aligned} \nabla_a F^{ab} &= 0. \\ Avec, \quad \nabla_a F^{ab} &= \partial_a F^{ab} + \Gamma^a_{a\lambda} F^{\lambda b} + \Gamma^b_{\lambda a} F^{a\lambda}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\nabla_a F^{a0} = 0 \iff & \nabla_0 F^{00} + \nabla_1 F^{10} + \nabla_2 F^{20} + \nabla_3 F^{30} = 0 \\
\iff & \partial_1 F^{10} + \Gamma^1_{d1} F^{d0} + \Gamma^0_{d0} F^{1d} + \partial_2 F^{20} + \Gamma^2_{2d} F^{d0} + \Gamma^0_{2d} F^{2d} + \partial_3 F^{30} \\
& + \Gamma^3_{3d} F^{d0} + \Gamma^0_{3d} F^{3d} = 0 \\
\iff & \partial_1 F^{10} + (\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}) F^{10} = 0. \\
\iff & \partial_r \left(\frac{e^{-4(\eta-\gamma)}}{\alpha} \partial_t \Lambda_1\right) + \left(\frac{1}{2\alpha}\partial_r \alpha + 2(\partial_r \eta - \partial_r \gamma) + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{e^{-4(\eta-\gamma)}}{\alpha}\partial_t \Lambda_1\right) = 0. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_a F^{a1} = 0 \iff & \nabla_0 F^{01} + \nabla_1 F^{11} + \nabla_2 F^{21} + \nabla_3 F^{31} = 0 \\
\iff & \partial_0 F^{01} + \Gamma^0_{d0} F^{d1} + \Gamma^1_{d0} F^{0d} + \partial_2 F^{21} + \Gamma^2_{d2} F^{d1} + \Gamma^2_{d2} F^{0d} + \partial_3 F^{31} \\
& + \Gamma^3_{d3} F^{d1} + \Gamma^1_{d3} F^{0d} = 0 \\
\iff & \partial_0 F^{01} + (\Gamma^0_{00} + \Gamma^1_{01} + \Gamma^2_{02} + \Gamma^3_{03}) F^{01} = 0. \\
\iff & \partial_t \left(\frac{e^{-4(\eta-\gamma)}}{\alpha} \partial_t \Lambda_1\right) + \left(\frac{1}{2\alpha}\partial_t \alpha + 2(\partial_t \eta - \partial_t \gamma)\right)\left(-\frac{e^{-4(\eta-\gamma)}}{\alpha}\partial_t \Lambda_1\right) = 0. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_a F^{a2}=0 \iff\ & \nabla_0F^{02}+\nabla_1F^{12}+\nabla_2F^{22}+\nabla_3F^{32}=0\\
\iff\ & \nabla_0F^{02}+\nabla_1F^{12}=0 \quad (car F^{22}=F^{32}=0)\\
\iff\ & \partial_0F^{02}+\partial_1F^{12}+\Gamma^0_{d0}F^{d2}+\Gamma^2_{d0}F^{0d}+\Gamma^1_{d1}F^{d2}=0.\\
\iff\ & \partial_1F^{10}+\partial_1F^{12}+\Gamma^0_{00}F^{02}+\Gamma^0_{10}F^{12}+\Gamma^2_{20}F^{02}+\Gamma^2_{30}F^{03}\\
& +\Gamma^1_{01}F^{02}+\Gamma^1_{11}F^{12}+\Gamma^2_{21}F^{12}+\Gamma^2_{31}F^{11}=0\\
\iff\ & \partial_0F^{02}+\partial_1F^{12}+(\Gamma^0_{00}+\Gamma^2_{02}+\Gamma^1_{01})F^{02}+(\Gamma^0_{10}+\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{21})F^{12}\\
& +\Gamma^2_{30}F^{30}+\Gamma^2_{31}F^{13}=0.\\
\iff\ & (\frac{e^{-2\eta}}{\alpha}+A^2\frac{e^{-(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2})\partial_{tt}\Lambda_2+A\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}\partial_{tt}\Lambda_3+(e^{-2\eta}+A^2\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2})\partial_{rr}\Lambda_2\\
& +(2\partial_t\eta\frac{e^-2\eta}{\alpha}+2A\partial_tA\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}+2A^2\partial_t(\eta-2\gamma)\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}+A^2\partial_t\alpha\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{2\alpha^2r^2})\partial_t\Lambda_2\\
& -\frac{Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}\partial_{rr}\Lambda_3+(\partial_tA\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{2\alpha r^2}-2A\partial_t(\eta-2\gamma)\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}-A\partial_t\alpha\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{2\alpha^2r^2})\partial_t\Lambda_3\\
& +(-2\eta_re^{-2\eta}+\frac{2AA_re^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}-\frac{2A^2e^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^3}-\frac{2A^2(\eta_r-2\gamma_r)e^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2})\partial_r\Lambda_2\\
& +(-\frac{A_re^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}+2A(\eta_r-2\gamma_r)\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}+\frac{2Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^3})\partial_r\Lambda_3\\
& +(\frac{\alpha_t}{2\alpha}+2(\eta_t-\gamma_t)+\gamma_t-\frac{AA_te^{4\gamma}}{2r^2})(-(\frac{e^{-2\eta}}{\alpha}+\frac{A^2e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2})\partial_t\Lambda_2+\frac{Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2})\partial_t\Lambda_3)\\
& +(\frac{\alpha_r}{2\alpha}+2(\eta_r-\gamma_r)+\gamma_r-\frac{AA_re^{4\gamma}}{2r^2})((e^{-2\eta}+\frac{A^2e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2})\partial_r\Lambda_2+\frac{Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}\partial_r\Lambda_3)\\
& +(\frac{A_t}{2}+2a\gamma_t-\frac{A^2A_te^{4\gamma}}{2r^2})(\frac{Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}\partial_t\Lambda_2-\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}\partial_t\Lambda_3)\\
& +(\frac{A_r}{2}-\frac{A}{r}+2A\gamma_r-\frac{AA_re^{-2(\eta-2\gamma)}}{2r^2})(\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}\partial_r\Lambda_3-\frac{Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}\partial_r\Lambda_2=0\\
.\ \iff\ & (\frac{\alpha_te^{-2\eta}}{\alpha^2}-\frac{AA_te^{-2(\eta-2\gamma)}}{2\alpha r^2}+\frac{A^2\alpha_te^{-2(\eta-2\gamma)}}{2\alpha^2r^2}+\frac{\gamma_t}{\alpha}-\frac{A^2\gamma_te^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2})\partial_t\Lambda_2\\
& +(\frac{A_te^{-2(\eta-2\gamma)}}{2\alpha r^2}-\frac{A\alpha_te^{-2(\eta-2\gamma)}}{2\alpha^2r^2}+\frac{A\gamma_te^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2})\partial_t\Lambda_3\\
& +(-\frac{A^2e^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^3}+\frac{A^2\alpha_re^{-2(\eta-2\gamma)}}{2\alpha}+\frac{A^2\gamma_re^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}+\frac{\alpha_re^{-2\eta}}{2\alpha}-\gamma_re^{-2\eta})\partial_r\Lambda_2\\
& +(-\frac{A_re^{-2(\eta-2\gamma)}}{2r^2}+\frac{Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^3}-\frac{A\gamma_re^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2})\partial_r\Lambda_3\\
& -(\frac{e^{-2\eta}}{\alpha}+\frac{A^2e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2})(\partial_{tt}\Lambda_2-\alpha\partial_{rr}\Lambda_2)+\frac{Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}(\partial_{tt}\Lambda_3-\alpha\partial_{rr}\Lambda_3)=0. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_a F^{a3} = 0 \iff & \nabla_0 F^{03} + \nabla_1 F^{13} + \nabla_2 F^{23} + \nabla_3 F^{33} = 0 \\
\iff & \nabla_0 F^{03} + \nabla_1 F^{13} = 0 \quad (car F^{23} = F^{33} = 0) \\
\iff & \partial_0 F^{03} + \partial_1 F^{13} + (\Gamma^0_{00} + \Gamma^3_{30} + \Gamma^1_{01}) F^{03} + (\Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{31}) F^{13} \\
& + \Gamma^3_{20} F^{02} + \Gamma^3_{21} F^{12} = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\iff & (\frac{A_t}{2\alpha r^2} - \frac{A}{2\alpha^2 r^2}\alpha_t + \frac{A}{\alpha r^2}\gamma_t) e^{-2(\eta-2\gamma)} \partial_t \Lambda_2 + (\partial_{tt}\Lambda_2 - \alpha \partial_{rr}\Lambda_2) \frac{A e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2} \\
& (\frac{\alpha_t}{2\alpha^2 r^2} - \frac{\gamma_t}{\alpha r^2}) e^{-2(\eta-2\gamma)} \partial_t \Lambda_3 - (\partial_{tt}\Lambda_2 - \alpha \partial_{rr}\Lambda_2) \frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2} \\
& + (-\frac{A_r}{2r^2} - \frac{A}{r^2}\gamma_r - \frac{A}{2\alpha r^2}\alpha_r + \frac{A}{r^3}) e^{-2(\eta-2\gamma)} \partial_r \Lambda_2 + (\frac{\gamma_r}{r^2} + \frac{\alpha_r}{2\alpha r^2} - \frac{1}{r^3}) e^{-2(\eta-2\gamma)} \partial_r \Lambda_3 = 0
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Remarque 3.1.1. *Les équations* (3.4) , (3.5), (3.6) *et* (3.7) *forme le système d'équations de Maxwell.*

3.1.1 Tenseur de Maxwell

Le tenseur impulsion énergie de Maxwell est un champ tensoriel symétrique du type $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ qui décrit la distribution de la matière et de l'énergie dans l'univers. L'expression des coefficients du tenseur Maxwell est donné par :

$$
T^M_{ab} = -\frac{g_{ab}}{4} F_{cd} F^{cd} + F_{bc} F_a{}^c \quad (tenseur\ de\ Maxwell). \tag{3.8}
$$

Compte tenu de sa longueur et de sa complexité, nous allons procéder en 4 étapes.

Etape 1 Calcul de $F_{bc} F_a{}^c$

Nous désignons par $F_a{}^c$ l'expression mixte du tenseur F_{ac} défini par :

$$
F_a{}^c = g^{ck} F_{ak}. \tag{3.9}
$$

Seul les coefficients non nuls feront l'objet d'un calcul.

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
F_{0c} F_0{}^c &= F_{00} F^0_0 + F_{01} F^1_0 + F_{02} F^2_0 + F_{03} F^3_0 \\
&= F_{01} g^{1k} F_{0k} + F_{02} g^{2k} F_{0k} + F_{03} g^{3k} F_{0k} \\
&= (\partial_t \Lambda_1)^2 (e^{2(\eta-\gamma)}) + (\partial_t \Lambda_2)^2 (e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2}) + (\partial_t \Lambda_3)^2 (\frac{e^{2\gamma}}{r^2}) - \frac{2A e^{2\gamma}}{r^2} \partial_t \Lambda_2 \partial_t \Lambda_3.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
F_{1c}F_0{}^c &= F_{10}F_0^0 + F_{11}F_0^1 + F_{12}F_0^2 + F_{13}F_0^3 \\
&= F_{10}g^{k1}F_{0k} + F_{12}g^{k2}F_{0k} + F_{13}g^{k3}F_{0k} \\
&= F_{12}g^{22}F_{02} + F_{12}g^{32}F_{03} + F_{13}g^{32}F_{03} + F_{13}g^{33}F_{03} \\
&= (e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})\partial_r\Lambda_2\partial_t\Lambda_2 - \frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 - \frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_3\partial_t\Lambda_3 + \frac{e^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_3\partial_t\Lambda_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{1c}F_1{}^c &= F_{10}F_1^0 + F_{11}F_1^1 + F_{12}F_1^2 + F_{13}F_1^3 \\
&= F_{10}g^{0k}F_{1k} + F_{11}g^{1k}F_{1k} + F_{12}g^{2k}F_{1k} + F_{13}g^{3k}F_{1k} \\
&= F_{10}g^{00}F_{10} + F_{11}g^{11}F_{11} + F_{12}g^{22}F_{12} + F_{12}g^{23}F_{13} + F_{13}g^{32}F_{12} + F_{13}g^{33}F_{13} \\
&= -\frac{e^{2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_1)^2 + (e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 - \frac{2Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 + \frac{e^{2\gamma}}{r^2}(\partial_r\Lambda_3)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2c}F_0{}^c &= F_{20}F_2^0 + F_{21}F_0^1 + F_{22}F_2^0 + F_{23}F_0^3 \\
&= F_{20}g^{0k}F_{0k} + F_{21}g^{1k}F_{0k} \\
&= F_{20}g^{00}F_{00} + F_{21}g^{11}F_{01} \\
&= -\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_2)^2 + e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_r\Lambda_2)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2c}F_2{}^c &= F_{20}F_2^0 + F_{21}F_2^1 + F_{22}F_2^2 + F_{23}F_2^3 \\
&= F_{20}g^{0k}F_{2k} + F_{21}g^{1k}F_{2k} \\
&= F_{20}g^{00}F_{20} + F_{21}g^{11}F_{21} \\
&= -\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_2)^2 + e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_r\Lambda_2)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{3c}F_2^c &= F_{30}F_2^0 + F_{31}F_2^1 + F_{32}F_2^2 + F_{33}F_2^3 \\
&= F_{30}g^{0k}F_{2k} + F_{31}g^{1k}F_{2k} \\
&= F_{30}g^{00}F_{20} + F_{31}g^{11}F_{21} \\
&= -\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_3)(\partial_t\Lambda_2) + e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_r\Lambda_3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{3c}F_3^c &= F_{30}F_3^0 + F_{31}F_3^1 + F_{32}F_3^2 + F_{33}F_3^3 \\
&= F_{30}g^{0k}F_{3k} + F_{31}g^{1k}F_{3k} \\
&= F_{30}g^{00}F_{30} + F_{31}g^{11}F_{31} \\
&= -\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_3)^2 + e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_r\Lambda_3)^2.
\end{aligned}$$

Etape 2 Calcul de $F_{cd}F^{cd}$

Nous désignons par F^{cd} l'expression contravariante du tenseur F_{cd} définit par :

$$F^{cd} = g^{kc}g^{ld}F_{kl} \quad k,l = 0,1,2,3. \tag{3.10}$$

Ainsi, on a :

$$F_{00}F^{00} = 0.$$

$$\begin{aligned}
F_{01}F^{01} &= g^{k0}g^{l1}F_{01}F_{kl} \\
&= g^{00}g^{l1}F_{01}F_{0l} + g^{01}g^{l1}F_{01}F_{1l} + g^{02}g^{l1}F_{01}F_{2l} + g^{03}g^{l1}F_{01}F_{3l} \\
&= g^{00}g^{l1}F_{01}F_{0l} \\
&= g^{00}g^{01}F_{01}F_{00} + g^{00}g^{11}F_{01}F_{01} + g^{00}g^{21}F_{01}F_{02} + g^{00}g^{31}F_{01}F_{03} \\
&= g^{00}g^{11}F_{01}F_{01} \\
&= -\frac{e^{-4(\eta-\gamma)}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_1)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{02}F^{02} &= g^{k0}g^{l2}F_{02}F_{kl} \\
&= g^{00}g^{l2}F_{02}F_{0l} + g^{10}g^{l2}F_{02}F_{1l} + g^{20}g^{l2}F_{02}F_{2l} + g^{30}g^{l2}F_{02}F_{3l} \\
&= g^{00}g^{l2}F_{02}F_{0l} \\
&= g^{00}g^{02}F_{02}F_{00} + g^{00}g^{12}F_{02}F_{01} + g^{00}g^{22}F_{02}F_{02} + g^{00}g^{32}F_{02}F_{03} \\
&= g^{00}g^{22}F_{02}F_{02} + g^{00}g^{32}F_{02}F_{03} \\
&= -\frac{e^{2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 + \frac{Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_2)(\partial_t\Lambda_3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{03}F^{03} &= g^{0k}g^{l3}F_{03}F_{kl} \\
&= g^{00}g^{l3}F_{03}F_{0l} + g^{10}g^{l3}F_{03}F_{1l} + g^{20}g^{l3}F_{03}F_{2l} + g^{30}g^{l3}F_{03}F_{3l} \\
&= g^{00}g^{03}F_{03}F_{00} + g^{00}g^{13}F_{03}F_{01} + g^{00}g^{23}F_{03}F_{02} + g^{00}g^{33}F_{03}F_{03} \\
&= g^{00}g^{23}F_{03}F_{02} + g^{00}g^{33}F_{03}F_{03} \\
&= \frac{Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_3)(\partial_t\Lambda_2) - \frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_3)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{12}F^{12} &= g^{k1}g^{l2}F_{12}F_{kl}\\
&= g^{01}g^{l2}F_{01}F_{0l}+g^{11}g^{l2}F_{12}F_{1l}+g^{21}g^{l2}F_{12}F_{2l}+g^{31}g^{l2}F_{12}F_{3l}\\
&= g^{11}g^{l2}F_{12}F_{1l}\\
&= g^{11}g^{02}F_{12}F_{10}+g^{11}g^{12}F_{12}F_{12}+g^{11}g^{22}F_{12}F_{12}+g^{11}g^{32}F_{12}F_{13}\\
&= g^{11}g^{22}F_{12}F_{12}+g^{11}g^{32}F_{12}F_{13}\\
&= e^{-2(\eta-\gamma)}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2-\frac{Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_r\Lambda_3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{13}F^{13} &= g^{k1}g^{l3}F_{13}F_{kl}\\
&= g^{01}g^{l3}F_{13}F_{0l}+g^{11}g^{l3}F_{13}F_{1l}+g^{21}g^{l3}F_{13}F_{2l}+g^{31}g^{l3}F_{13}F_{3l}\\
&= g^{11}g^{03}F_{13}F_{10}+g^{11}g^{13}F_{13}F_{11}+g^{11}g^{23}F_{13}F_{12}+g^{11}g^{33}F_{13}F_{13}\\
&= g^{11}g^{23}F_{13}F_{12}+g^{11}g^{33}F_{13}F_{13}\\
&= -\frac{Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}(\partial_r\Lambda_3)(\partial_r\Lambda_2)+\frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}(\partial_r\Lambda_3)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
F_{cd}F^{cd} &= F_{00}F^{00}+F_{01}F^{01}+F_{02}F^{02}+F_{03}F^{03}+F_{10}F^{10}+F_{11}F^{11}+F_{12}F^{12}+F_{13}F^{13}\\
&\quad +F_{20}F^{20}+F_{21}F^{21}+F_{22}F^{22}+F_{23}F^{23}+F_{30}F^{30}+F_{31}F^{31}+F_{32}F^{32}+F_{33}F^{33}\\
&= 2F_{01}F^{01}+2F_{02}F^{02}+2F_{03}F^{03}+2F_{12}F^{12}+2F_{13}F^{13}\\
&= -\frac{2e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2-\frac{2e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2\\
&\quad +\frac{2Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_2)(\partial_t\Lambda_3)+\frac{2Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_3)(\partial_t\Lambda_2)-\frac{2e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_3)^2\\
&\quad +2e^{-2(\eta-\gamma)}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2-\frac{2Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_r\Lambda_3)\\
&\quad -\frac{2Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}(\partial_r\Lambda_3)(\partial_r\Lambda_2)+\frac{2e^{-2(\eta-2)}}{r^2}(\partial_r\Lambda_3)^2\\
&= -\frac{2e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2-\frac{2e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2\\
&\quad +\frac{4Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_2)(\partial_t\Lambda_3)-\frac{2e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_3)^2\\
&\quad +2e^{-2(\eta-\gamma)}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2-\frac{4Ae^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_r\Lambda_3)\\
&\quad +\frac{2e^{-2(\eta-2\gamma)}}{r^2}(\partial_r\Lambda_3)^2
\end{aligned}$$

Etape 3 calcul de $-\frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}g_{00}F_{cd}F^{cd} &= \frac{1}{4}\alpha e^{2(\eta-\gamma)}F_{cd}F^{cd}\\
&= -\frac{1}{2}e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 - \frac{1}{2}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 + \frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}(\partial_t\Lambda_2)(\partial_t\Lambda_3)\\
&\quad -\frac{1}{2r^2}e^{2\gamma}(\partial_t\Lambda_3)^2 + \frac{\alpha}{2}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 - \frac{\alpha Ae^{2\gamma}}{r^2}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_r\Lambda_3) + \frac{\alpha e^{2\gamma}}{2r^2}(\partial_r\Lambda_3)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}g_{11}F_{cd}F^{cd} &= -\frac{1}{4}e^{2(\eta-\gamma)}F_{cd}F^{cd}\\
&= \frac{1}{2\alpha}e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{1}{2\alpha}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 + \frac{1}{\alpha r^2}e^{2\gamma}(\partial_t\Lambda_3)^2\\
&\quad -\frac{A}{\alpha r^2}e^{2\gamma}(\partial_t\Lambda_2)(\partial_t\Lambda_3) - \frac{1}{2}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{A}{r^2}e^{2\gamma}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_r\Lambda_3)\\
&\quad -\frac{1}{2r^2}e^{2\gamma}(\partial_r\Lambda_3)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}g_{22}F_{cd}F^{cd} &= -\frac{1}{4}e^{2\gamma}F_{cd}F^{cd}\\
&= \frac{1}{2\alpha}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{1}{2\alpha}e^{-2(\eta-2\gamma)}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 + \frac{1}{2\alpha t^2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_3)^2\\
&\quad -\frac{A}{\alpha r^2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_2)(\partial_t\Lambda_3) - \frac{1}{2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda)^2\\
&\quad +\frac{A}{r^2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_r\Lambda_3) - \frac{1}{2r^2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_r\Lambda_3)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}g_{23}F_{cd}F^{cd} &= -\frac{1}{4}Ae^{2\gamma}F_{cd}F^{cd}\\
&= \frac{A}{2\alpha}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{A}{2\alpha}e^{-2(\eta-2\gamma)}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{A^2}{\alpha r^2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_2)(\partial_t\Lambda_3)\\
&\quad +\frac{A}{2\alpha r^2}e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_3)^2 - \frac{A}{2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(e^{-2\gamma}+\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 - \frac{A}{2r^2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_r\Lambda_3)^2\\
&\quad +\frac{A^2}{r^2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_r\Lambda_3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}g_{33}F_{cd}F^{cd} &= -\frac{1}{4}(r^2e^{-2\gamma}+A^2e^{2\gamma})F_{cd}F^{cd}\\
&= \frac{1}{\alpha}(r^2e^{-2\gamma}+A^2e^{2\gamma})e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{1}{2\alpha}(r^2e^{-4\gamma}+2A^2+\frac{A^4}{r^2}e^{4\gamma})e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_2)^2\\
&\quad -\frac{A}{\alpha r^2}(r^2e^{-2\gamma}+A^2e^{2\gamma})e^{-2(\eta-2\gamma)}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 + \frac{1}{2\alpha r^2}(r^2e^{-2\gamma}+A^2e^{2\gamma})e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_3)^2\\
&\quad -\frac{1}{2}(r^2e^{-4\gamma}+2A^2+\frac{A^4}{r^2}e^{4\gamma})e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{A}{r^2}(r^2e^{-2\gamma}+A^2e^{2\gamma})e^{-2(\eta-2\gamma)}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3\\
&\quad -\frac{1}{2r^2}(r^2e^{-2\gamma}+A^2e^{2\gamma})e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_r\Lambda_3)^2.
\end{aligned}$$

Etape 4 Calcul des coefficients T^M_{ab} **du Tenseur de Maxwell.**

On a :

$$\begin{aligned}
T^M_{00} &= -\frac{g_{00}}{4}F_{cd}F^{cd} + F_{0c}F^c_0 \\
&= -\frac{1}{2}e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 - \frac{1}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 + \frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}(\partial_t\Lambda_2)(\partial_t\Lambda_3) \\
&\quad -\frac{1}{2r^2}e^{2\gamma}(\partial_t\Lambda_3)^2 + \frac{\alpha}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 - \frac{\alpha Ae^{2\gamma}}{r^2}(\partial_r\Lambda_2) + (\partial_r\Lambda_3) + \frac{\alpha e^{2\gamma}}{2r^2}(\partial_r\Lambda_3)^2 \\
&\quad (\partial_t\Lambda_1)^2(e^{-2(\eta-\gamma)}) + (\partial_t\Lambda_2)^2(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2}) + (\partial_t\Lambda_3)^2(\frac{e^{2\gamma}}{r^2}) - \frac{2Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
T^M_{00} = \frac{1}{2}e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{1}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2}{r^2}e^{2\gamma})(\partial_t\Lambda_2)^2 + \frac{1}{2r^2}e^{2\gamma}(\partial_t\Lambda_3)^2 - \frac{A}{r^2}e^{2\gamma}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 \\
+\frac{\alpha e^{2\gamma}}{2r^2}(\partial_r\Lambda_3)^2 + \frac{\alpha}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 - \frac{\alpha Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^M_{01} &= -\frac{g_{01}}{4}F_{cd}F^{cd} + F_{1c}F^c_0 \\
&= 0 + (e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})\partial_r\Lambda_2\partial_t\Lambda_2 - \frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 - \frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_3\partial_t\Lambda_3 + \frac{e^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_3\partial_t\Lambda_3.
\end{aligned}$$

D'où,

$$T^M_{01} = (e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})\partial_r\Lambda_2\partial_t\Lambda_2 - \frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 - \frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_3\partial_t\Lambda_3 + \frac{e^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_3\partial_t\Lambda_3.$$

$$\begin{aligned}
T^M_{11} &= -\frac{g_{11}}{4}F_{cd}F^{cd} + F_{1c}F^c_1 \\
&= \frac{1}{2\alpha}e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{1}{2\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 + \frac{1}{\alpha r^2}e^{2\gamma}(\partial_t\Lambda_3)^2 \\
&\quad -\frac{A}{\alpha r^2}e^{2\gamma}(\partial_t\Lambda_2)(\partial_t\Lambda_3) - \frac{1}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{A}{t^2}e^{2\gamma}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_r\Lambda_3) \\
&\quad -\frac{1}{2r^2}e^{2\gamma}(\partial_r\Lambda_3)^2 + -\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_1)^2 + (e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 - \frac{2Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 + \frac{e^{2\gamma}}{r^2}(\partial_r\Lambda_3)^2.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
T^M_{11} = -\frac{1}{2\alpha}e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{1}{2\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{A}{\alpha r^2}e^{2\gamma}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 + \frac{e^{2\gamma}}{2\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_3)^2 \\
+\frac{1}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{1}{2r^2}e^{2\gamma}(\partial_r\Lambda_3)^2 - \frac{A}{r^2}e^{2\gamma}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^M_{22} &= -\frac{g_{22}}{4}F_{cd}F^{cd} + F_{2c}F^c_2 \\
&= \frac{1}{2\alpha}e^{6\gamma-4\eta}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{1}{2\alpha}e^{-2(\eta-2\gamma)}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 + \frac{1}{2\alpha r^2}e^{6\gamma-2\eta}(\partial_t\Lambda_3)^2 \\
&\quad -\frac{A}{\alpha r^2}e^{6\gamma-2\eta}(\partial_t\Lambda_2)(\partial_t\Lambda_3) - \frac{1}{2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda)^2 + \frac{A}{r^2}e^{6\gamma-2\eta}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_r\Lambda_3) \\
&\quad -\frac{1}{2r^2}e^{6\gamma-2\eta}(\partial_r\Lambda_3)^2 - \frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_2)^2 + e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_r\Lambda_2)^2.
\end{aligned}$$

D'où

$$T^M_{22} = e^{2\gamma}e^{-2(\eta-\gamma)}[\frac{1}{2\alpha}(\partial_t\Lambda_1)^2 + (\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2} - \frac{e^{-2\gamma}}{\alpha})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{A}{\alpha r^2}e^{2\gamma}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3$$
$$+\frac{e^{2\gamma}}{2\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_3)^2 + (\frac{1}{2}e^{-2\gamma} - \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{A}{r^2}e^{2\gamma}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 - \frac{1}{2r^2}e^{2\gamma}(\partial_r\Lambda_3)^2].$$

$$\begin{aligned}
T^M_{23} &= -\frac{g_{23}}{4}F_{cd}F^{cd} + F_{3c}F^c_2 \\
&= \frac{A}{2\alpha}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{A}{2\alpha}e^{-2(\eta-2\gamma)}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{A^2}{\alpha r^2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_2)(\partial_t\Lambda_3) \\
&\quad +\frac{A}{2\alpha r^2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_3)^2 - \frac{A}{2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 - \frac{A}{2r^2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_r\Lambda_3)^2 \\
&\quad +\frac{A^2}{r^2}e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_\theta\Lambda_3) + -\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_3)(\partial_t\Lambda_2) + e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_r\Lambda_2)(\partial_r\Lambda_3).
\end{aligned}$$

D'où

$$T^M_{23} = e^{2\gamma}e^{-2(\eta-\gamma)}[\frac{A}{2\alpha}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{A}{2\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{A^2}{\alpha r^2}e^{2\gamma}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 + \frac{A}{2\alpha r^2}e^{2\gamma}(\partial_t\Lambda_3)^2$$
$$-\frac{Ae^{2\gamma}}{2r^2}(\partial_r\Lambda_3)^2 - \frac{A}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{A^2e^{2\gamma}}{t}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 - \frac{e^{-2\gamma}}{\alpha}\partial_t\Lambda_3\partial_t\Lambda_2 + e^{-2\gamma}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3].$$

$$\begin{aligned}
T^M_{33} &= -\frac{g_{33}}{4}F_{cd}F^{cd} + F_{3c}F^c_3 \\
&= \frac{1}{\alpha}(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{1}{2\alpha}(r^2e^{-4\gamma} + 2A^2 + \frac{A^4}{r^2}e^{4\gamma})e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_2)^2 \\
&\quad -\frac{A}{\alpha r^2}(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})e^{-2(\eta-2\gamma)}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 + \frac{1}{2\alpha r^2}(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_t\Lambda_3)^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}(r^2e^{-4\gamma} + 2A^2 + \frac{A^4}{r^2}e^{4\gamma})e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{A}{r^2}(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})e^{-2(\eta-2\gamma)}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 \\
&\quad -\frac{1}{2r^2}(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})e^{-2(\eta-2\gamma)}(\partial_r\Lambda_3)^2 - \frac{e^{-2(\eta-2\gamma)}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_3)^2 + e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_r\Lambda_3)^2.
\end{aligned}$$

D'où

$$T^M_{33} = e^{-2\eta}[\frac{r^2}{2\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{r^2}{2\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{Ae^{2\gamma}}{\alpha}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3$$
$$+\frac{e^{2\gamma}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_3)^2 - \frac{r^2}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + Ae^{2\gamma}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 + \frac{1}{2}e^{2\gamma}(\partial_r\Lambda_3)^2]$$
$$+e^{2\gamma}e^{-2(\eta-\gamma)}[\frac{A^2}{2\alpha}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{A^2}{2\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{A^3}{\alpha r^2}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3$$
$$-\frac{A^2}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{A^3}{t}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 + (e^{-2\gamma} - \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_3)^2 + (\frac{A^2e^{2\gamma}}{2\alpha r^2} - \frac{e^{-2\gamma}}{\alpha})(\partial_t\Lambda_3)^2].$$

■

3.1.2 Tenseur impulsion-énergie lié au fluide parfait

Le tenseur impulsion-énergie décrit la distribution de la matière et de l'énergie dans l'univers. L'expression de ses coefficients dans ce cas est de la forme :

$$T^f_{\delta\beta} = (p+\rho)u_\delta u_\beta + pg_{\delta\beta}, \tag{3.11}$$

Ici, ρ est l'énergie du fluide, $u = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ est le vecteur vitesse unitaire temporel du fluide et orienté vers le futur c'est-à-dire $u_0 > 0$. $p = k^2\rho$ est la pression du fluide et k est la vitesse du son dans le fluide et tel que $0 \leq k < 1$.

Proposition 3.1.1.

$$T^f_{00} = \rho\left[(1+k^2)u_0^2 - k^2\alpha e^{2(\eta-\gamma)}\right].$$

$$T^f_{01} = \rho(1+k^2)u_0u_1.$$

$$T^f_{11} = \rho\left[(1+k^2)u_1^2 + k^2 e^{2(\eta-\gamma)}\right].$$

$$T^f_{22} = \rho\left[(1+k^2)u_2^2 + k^2 e^{2\gamma}\right].$$

$$T^f_{23} = \rho\left[(1+k^2)u_2u_3 + k^2 A e^{2\gamma}\right].$$

$$T^f_{33} = \rho\left[(1+k^2)u_3^2 + k^2(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})\right].$$

Preuve .

On a :

$$\begin{aligned} T^f_{00} &= (\rho+p)u_0^2 + pg_{00} \\ &= (\rho+p)u_0^2 - \alpha p e^{2(\eta-\gamma)} \\ &= \rho\left[(1+k^2)u_0^2 - k^2\alpha e^{2(\eta-\gamma)}\right]. \end{aligned}$$

D'où, $T^f_{00} = \rho\left[(1+k^2)u_0^2 - k^2\alpha e^{2(\eta-\gamma)}\right]$.

$$\begin{aligned} T^f_{01} &= (\rho+p)u_0u_1 + pg_{01} \\ &= (\rho+p)u_0u_1 \\ &= \rho(1+k^2)u_0u_1. \end{aligned}$$

D'où, $T^f_{01} = \rho(1+k^2)u_0u_1$.

$$\begin{aligned} T_{11}^{f} &= (\rho+p)u_1^2 + pg_{11} \\ &= (\rho+p)u_1^2 + pe^{2(\eta-\gamma)} \\ &= \rho\left[(1+k^2)u_1^2 + k^2 e^{2(\eta-\gamma)}\right]. \end{aligned}$$

D'où, $T_{11}^{f} = \rho\left[(1+k^2)u_1^2 + k^2 e^{2(\eta-\gamma)}\right]$.

$$\begin{aligned} T_{22}^{f} &= (\rho+p)u_2^2 + pg_{22} \\ &= (\rho+p)u_2^2 + pe^{2\gamma} \\ &= \rho\left[(1+k^2)u_2^2 + k^2 e^{2\gamma}\right]. \end{aligned}$$

D'où, $T_{22}^{f} = \rho\left[(1+k^2)u_2^2 + k^2 e^{2\gamma}\right]$.

$$\begin{aligned} T_{23}^{f} &= (\rho+p)u_2 u_3 + pg_{23} \\ &= (\rho+p)u_2 u_3 + Ape^{2\gamma} \\ &= \rho\left[(1+k^2)u_2 u_3 + k^2 A e^{2\gamma}\right]. \end{aligned}$$

D'où, $T_{23}^{f} = \rho\left[(1+k^2)u_2^2 + k^2 e^{2\gamma}\right]$.

$$\begin{aligned} T_{33}^{f} &= (\rho+p)u_3^2 + pg_{33} \\ &= (\rho+p)u_3^2 + p(t^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma}) \\ &= \rho\left[(1+k^2)u_3^2 + k^2(t^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma})\right]. \end{aligned}$$

D'où, $T_{33}^{f} = \rho\left[(1+k^2)u_3^2 + k^2(t^2 e^{-2\gamma} + A^2 e^{2\gamma})\right]$.

■

3.1.3 Tenseur d'impulsion énergie ($T_{\delta\beta} = T_{\delta\beta}^{f} + T_{\delta\beta}^{M}$)

Le tenseur impulsion énergie du système est la somme du tenseur de Maxwell et du tenseur lié aux fluide parfait   On a :

$$T_{\delta\beta} = T_{\delta\beta}^{M} + T_{\delta\beta}^{f}$$

Et nous obtenons les résultats suivant :

$$\begin{aligned} T_{00} = {} & \frac{1}{2}e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{1}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2}{r^2}e^{2\gamma})(\partial_t\Lambda_2)^2 + \frac{1}{2r^2}e^{2\gamma}(\partial_t\Lambda_3)^2 - \frac{A}{r^2}e^{2\gamma}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 \\ & + \frac{\alpha e^{2\gamma}}{2r^2}(\partial_r\Lambda_3)^2 + \frac{\alpha}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2 e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 - \frac{\alpha A e^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 + \rho\left[(1+k^2)u_0^2 - k^2\alpha e^{2(\eta-\gamma)}\right]. \end{aligned}$$

$$
T_{01} = (e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})\partial_r\Lambda_2\partial_t\Lambda_2 - \frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 - \frac{Ae^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_3\partial_t\Lambda_3 + \frac{e^{2\gamma}}{r^2}\partial_r\Lambda_3\partial_t\Lambda_3 + \rho(1+k^2)u_0u_1.
$$

$$
\begin{aligned}
T_{11} &= -\frac{1}{2\alpha}e^{-2(\eta-\gamma)}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{1}{2\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{A}{\alpha r^2}e^{2\gamma}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 + \frac{e^{2\gamma}}{2\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_3)^2 \\
&+\frac{1}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{1}{2r^2}e^{2\gamma}(\partial_r\Lambda_3)^2 - \frac{A}{r^2}e^{2\gamma}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 + \rho\left[(1+k^2)u_1^2 + k^2e^{2(\eta-\gamma)}\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{22} &= e^{2\gamma}e^{-2(\eta-\gamma)}[\frac{1}{2\alpha}(\partial_t\Lambda_1)^2 + (\frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2} - \frac{e^{-2\gamma}}{\alpha})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{A}{\alpha r^2}e^{2\gamma}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 \\
&+\frac{e^{2\gamma}}{2\alpha r^2}(\partial_t\Lambda_3)^2 + (\frac{1}{2}e^{-2\gamma} - \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{A}{r^2}e^{2\gamma}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 - \frac{1}{2r^2}e^{2\gamma}(\partial_r\Lambda_3)^2] \\
&+\rho\left[(1+k^2)u_2^2 + k^2e^{2\gamma}\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{23} &= e^{2\gamma}e^{-2(\eta-\gamma)}[\frac{A}{2\alpha}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{A}{2\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{A^2}{\alpha r^2}e^{2\gamma}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 + \frac{A}{2\alpha r^2}e^{2\gamma}(\partial_t\Lambda_3)^2 \\
&-\frac{Ae^{2\gamma}}{2r^2}(\partial_r\Lambda_3)^2 - \frac{A}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{A^2e^{2\gamma}}{t}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 - \frac{e^{-2\gamma}}{\alpha}\partial_t\Lambda_3\partial_t\Lambda_2 + e^{-2\gamma}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3] \\
&+\rho\left[(1+k^2)u_2u_3 + k^2Ae^{2\gamma}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{33} &= e^{-2\eta}[\frac{r^2}{2\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{r^2}{2\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{Ae^{2\gamma}}{\alpha}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 \\
&+\frac{e^{2\gamma}}{\alpha}(\partial_t\Lambda_3)^2 - \frac{r^2}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + Ae^{2\gamma}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 + \frac{1}{2}e^{2\gamma}(\partial_r\Lambda_3)^2] \\
&+e^{2\gamma}e^{-2(\eta-\gamma)}[\frac{A^2}{2\alpha}(\partial_t\Lambda_1)^2 + \frac{A^2}{2\alpha}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_t\Lambda_2)^2 - \frac{A^3}{\alpha r^2}\partial_t\Lambda_2\partial_t\Lambda_3 \\
&-\frac{A^2}{2}(e^{-2\gamma} + \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_2)^2 + \frac{A^3}{t}\partial_r\Lambda_2\partial_r\Lambda_3 + (e^{-2\gamma} - \frac{A^2e^{2\gamma}}{r^2})(\partial_r\Lambda_3)^2 + (\frac{A^2e^{2\gamma}}{2\alpha r^2} - \frac{e^{-2\gamma}}{\alpha})(\partial_t\Lambda_3)^2] \\
&+\rho\left[(1+k^2)u_3^2 + k^2(r^2e^{-2\gamma} + A^2e^{2\gamma})\right].
\end{aligned}
$$

Ce tenseur d'impulsion énergie ; nous permet avec les résultats du chapitre 2 d'écrire les équations dont nous avons besoin.

3.2 Les équations d'Einstein -Maxwell

Les équations d'Einstein sont sous la forme suivante :

$$
R_{\delta\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\delta\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\delta\beta}. \tag{3.12}
$$

Dans la suite, nous prendrons $K = \frac{8\pi G}{c^4}$. Suivant les composantes, ces équations non nulles donnent le système suivant :

$$\begin{aligned}
R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} &= KT_{00} && (3.13)\\
R_{01} - \frac{1}{2}Rg_{01} &= KT_{01} && (3.14)\\
R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} &= KT_{11} && (3.15)\\
R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} &= KT_{22} && (3.16)\\
R_{23} - \frac{1}{2}Rg_{23} &= KT_{23} && (3.17)\\
R_{33} - \frac{1}{2}Rg_{33} &= KT_{33} && (3.18)
\end{aligned}$$

En reportant les équations (2.6), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) et (2.11) respectivement dans (3.13), (3.14), (3.15), (3.16), (3.16), (3.17) et (3.18) ; puis en se servant des expressions (2.1), et (2.12) on obtient le système suivant constitué d'équations d'Einstein :

$$\frac{\alpha\partial_r\eta}{r} - (\partial_t\gamma)^2 - \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \frac{(\partial_t A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - \frac{\alpha(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} = KT_{00} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial_t\eta}{r} - 2\partial_t\gamma\partial_r\gamma - \frac{\partial_t A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma} = KT_{01} \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial_r\eta}{r} + \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r} - (\partial_r\gamma)^2 - \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} - \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma} - \frac{(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} = KT_{11} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
&e^{-2\eta+4\gamma}[-\frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} + \frac{2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha} - \frac{\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta}{\alpha} + \frac{\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} - \frac{2\partial_r\gamma}{r}\\
&+\frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha} + \frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2} + \frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r} - \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} + (\partial_r\gamma)^2]\\
&+e^{-2\eta+8\gamma}[-\frac{3(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2} + \frac{3(\partial_r A)^2}{4r^2}] = KT_{22}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
&e^{-2\eta+4\gamma}[\frac{A\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} - \frac{A(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha} + \frac{2A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha} + \frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha}\\
&+\frac{A\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha} + \frac{A\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2} - \frac{A(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} + \frac{A\partial_r\alpha}{2\alpha r} - \frac{A(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}\\
&-\frac{2A\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r A}{2r} - \frac{\partial_t A\partial_t\alpha}{4\alpha^2} - \frac{\partial_r A\partial_r\alpha}{4\alpha} + \frac{2\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha} - 2\partial_r A\partial_r\gamma + A(\partial_r\gamma)^2]\\
&+e^{-2\eta+8\gamma}[\frac{3A(\partial_r A)^2}{4r^2} - \frac{3A(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}] = KT_{23}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$e^{-2\eta}[\frac{r^2\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} - \frac{r^2(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha} + \frac{r^2\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2\alpha} + \frac{r^2\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha^2} - \frac{r^2(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{r^2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha}$$
$$+r^2(\partial_r\gamma)^2] + e^{-2\eta+4\gamma}[\frac{A\partial_r A}{r} + \frac{A^2\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} - \frac{A^2(\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta)}{\alpha} + \frac{A(\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A)}{\alpha}$$
$$+\frac{2A^2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha} + \frac{A^2\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha} + \frac{A^2\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2} + \frac{A^2\partial_r\alpha}{2\alpha r}$$
$$-\frac{A^2(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha} - \frac{(\partial_r A)^2}{4} - \frac{2A^2\partial_r\gamma}{r} - 4A\partial_r A\partial_r\gamma + \frac{4A\partial_t A\partial_t\gamma}{\alpha}$$
$$-\frac{A\partial_r A\partial_r\alpha}{2\alpha} - \frac{A\partial_t A\partial_t\alpha}{2\alpha^2} - \frac{A^2(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} + A^2(\partial_r\gamma)^2]$$
$$+e^{-2\eta+8\gamma}[\frac{3A^2(\partial_r A)^2}{4r^2} - \frac{3A^2(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}] \qquad = KT_{33} \tag{3.24}$$

Remarque 3.2.1. *Ce système d'équations d'Einstein est constitué d'équations aux dérivées partielles (e.d.p) non linéaires du* 1^{er} *et du* 2^{nd} *ordre.*

Proposition 3.2.1. *En posant :*
$U = -g^{00}KT_{00}$, $V = -\frac{g^{11}KT_{01}}{\sqrt{\alpha}}$, $P_1 = g^{11}KT_{11}$, *Les équations* (3.19) ,(3.20) *et* (3.21) *Qui sont d'équations aux dérivées aux partielles (e.d.p) du* 1^{er} *ordre, et deviennent respectivement :*

$$\frac{\partial_r\eta}{r} = (\partial_r\gamma)^2 + \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma} + \frac{(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} + Ue^{2(\eta-\gamma)} \tag{3.25}$$
$$\frac{\partial_t\eta}{r} = +2\partial_t\gamma\partial_r\gamma + \frac{\partial_t A\partial_r A}{2r^2}e^{4\gamma} - \sqrt{\alpha}e^{2(\eta-\gamma)}V \tag{3.26}$$
$$\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r} = e^{2(\eta-\gamma)}(P_1 - U) \tag{3.27}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (3.25) \\ (3.26) \\ (3.27) \end{cases}$$

Qui sont les équations de contraintes

Preuve . *En multipliant* (3.19) *par* $-g^{00} = \frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}$ *, on obtient* (3.25).
De même en multipliant (3.20) *par* $-\frac{g^{11}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\sqrt{\alpha}}$ *on obtient* (3.26)
D'autre part de (3.21) *on a :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_r\alpha}{2\alpha r} &= -\frac{\partial_r\eta}{r} + (\partial_r\gamma)^2 + \frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} + \frac{(\partial_t A)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma} + \frac{(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} + KT_{11} \\
&= -\frac{1}{\alpha}[\alpha\frac{\partial_r\eta}{r} - \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \alpha\frac{(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} - \frac{(\partial_t A)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - \alpha\frac{(\partial_r A)^2}{4r^2}e^{4\gamma}] + KT_{11} \\
&= -\frac{KT_{00}}{\alpha} + KT_{11} \\
&= -Ue^{2(\eta-\gamma)} + e^{2(\eta-\gamma)}P_1 \quad (Car \quad KT_{00} = -g_{00}U \ et \ KT_{11} = g_{11}U) \\
&= e^{2(\eta-\gamma)}(P_1 - U).
\end{aligned}$$

Proposition **3.2.2.** *En posant :*

$$S_{23} = \frac{K(T_{23} - AT_{22})}{r} \quad , \quad P_2 = KT_{22}e^{-2\gamma} \quad et \quad P_3 = \frac{Ke^{2\gamma}}{r^2}(T_{33} - A^2T_{22} - \frac{2ArS_{23}}{K}),$$

les équations (3.22) , (3.23) *et* (3.24) *qui sont des équations aux dérivées partielles(e.d.p) du* 2^{nd} *ordre, deviennent respectivement :*

$$\begin{aligned}
\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha} + \frac{(\partial_tA)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - \frac{\alpha(\partial_rA)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - (\partial_t\gamma)^2 + \alpha(\partial_r\gamma)^2 \\
&\quad -\alpha P_3e^{2\eta-2\gamma}, \qquad (3.28) \\
\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} + \frac{(\partial_tA)^2 - \alpha(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{4\gamma} \\
&\quad + \frac{\alpha(\Phi - P_1 + P_2 - P_3)}{2}e^{2\eta-2\gamma}, \qquad (3.29) \\
\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A &= -\frac{\alpha\partial_rA}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_rA}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_tA}{2\alpha} - 4\partial_tA\partial_t\gamma + 4\alpha\partial_rA\partial_r\gamma + 2\alpha rS_{23}e^{2\eta-4\gamma}. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (3.28) \\ (3.29) \\ (3.30) \end{cases}$$

Qui sont les équations d'évolution

Preuve **.** *De l'équation* (3.22)*, on a*

$$\begin{aligned}
\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= -K\alpha T_{22}e^{2\eta-4\gamma} - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + 2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma) + \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} - \frac{2\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha}{2r} \\
&\quad + \frac{\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2} + \frac{\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha} + \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \frac{3(\partial_tA)^2}{4r^2}e^{4\gamma} + \frac{3\alpha(\partial_rA)^2}{4r^2}e^{4\gamma}.
\end{aligned}$$

En reportant cette valeur dans (3.23)*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
KT_{23}e^{2\eta-4\gamma} &= \frac{A\partial_{rr}\alpha}{2\alpha} + KT_{22}e^{2\eta-4\gamma} + \frac{A(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} - \frac{2A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha} - \frac{A(\partial_{rr}\alpha)}{2\alpha} + \frac{2A\partial_r\gamma}{r} \\
&\quad - \frac{A\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha} - \frac{A\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2} - \frac{A\partial_r\alpha}{2\alpha r} + \frac{A(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} - A(\partial_r\gamma)^2 + \frac{3A(\partial_tA)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma} \\
&\quad - \frac{3A(\partial_rA)^2}{4r^2}e^{4\gamma} + \frac{2A(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha} + \frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha} + \frac{A\partial_r\alpha(\partial_r\eta - 2\partial_r\gamma)}{2\alpha} \\
&\quad + \frac{A\partial_t\alpha(\partial_t\eta - 2\partial_t\gamma)}{2\alpha^2} - \frac{A(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha^2} + \frac{A\partial_r\alpha}{2\alpha r} - \frac{A(\partial_t\gamma)^2}{\alpha} - \frac{2A\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_rA}{2r} - \frac{\partial_tA\partial_t\alpha}{4\alpha^2} \\
&\quad - \frac{\partial_rA\partial_r\alpha}{4\alpha} + \frac{2\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha} - 2\partial_rA\partial_r\gamma + A(\partial_r\gamma)^2 + \frac{3A(\partial_rA)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - \frac{3A(\partial_tA)^2}{4\alpha r^2}e^{4\gamma}.
\end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$\frac{\partial_{tt}A - \alpha\partial_{rr}A}{2\alpha} = K(T_{23} - AT_{22})e^{2\eta-4\gamma} - \frac{\partial_rA}{2r} + \frac{\partial_tA\partial_t\alpha}{4\alpha^2} + \frac{\partial_rA\partial_r\alpha}{4\alpha} - \frac{2\partial_tA\partial_t\gamma}{\alpha} + 2\partial_rA\partial_r\gamma$$

En remplaçant $K(T_{23} - AT_{22})$ *par* rS_{23} *on obtient* (3.30).

Et en reportant cette dernière égalité et aussi celle (3.23) *dans* (3.24), *on obtient :*

$$\begin{aligned}\frac{2r^2(\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma)}{\alpha}e^{-4\gamma} &= -KT_{33}e^{2\eta-4\gamma} + Kr^2T_{22}e^{2\eta-8\gamma} + 2r\partial_r\gamma e^{-4\gamma} + [\frac{r^2\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{\alpha} + \frac{r^2\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha^2}]e^{-4\gamma} \\ &\quad -\frac{r\partial_r\alpha}{2\alpha}e^{-4\gamma} + \frac{(\partial_tA)^2}{\alpha} - (\partial_rA)^2 + KA^2T_{22}e^{2\eta-4\gamma} + 2ArS_{23}e^{2\eta-4\gamma}\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= -\frac{K\alpha T_{33}}{2r^2}e^{2\eta} + \frac{K\alpha T_{22}}{2}e^{2\eta-4\gamma} + \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} - \frac{\partial_r\alpha}{4r} + \frac{(\partial_tA)^2}{2r^2}e^{4\gamma} \\ &\quad -\frac{\alpha(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{4\gamma} + \frac{KA^2\alpha T_{22}}{2r^2}e^{2\eta} + \frac{A\alpha S_{23}}{r}e^{2\eta}.\end{aligned}$$

Or d'après (3.27), $\frac{\partial_r\alpha}{r} = 2\alpha(P_1 - \Phi)e^{2(\eta-\gamma)}$.

Donc

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} - \frac{\partial_r\alpha}{4r} + \frac{(\partial_tA)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - \frac{\alpha(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{4\gamma} - \frac{K\alpha T_{33}}{2r^2}e^{2\eta} \\ &\quad +\frac{K\alpha T_{22}}{2}e^{2\eta-4\gamma} - \frac{\alpha(P_1 - \Phi)}{2}e^{2\eta-2\gamma} + \frac{KA^2\alpha T_{22}}{2r^2}e^{2\eta} + \frac{A\alpha S_{23}}{r}e^{2\eta}.\end{aligned}$$

Mais d'après proposition (3.3.3), $P_3 = \frac{Ke^{2\gamma}}{r^2}(T_{33} - A^2T_{22} - \frac{2ArS_{23}}{K})$

D'où

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\gamma - \alpha\partial_{rr}\gamma &= \frac{\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\gamma}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{2\alpha} + \frac{(\partial_tA)^2 - \alpha(\partial_rA)^2}{2r^2}e^{4\gamma} \\ &\quad +\frac{\alpha(\Phi - P_1 + P_2 - P_3)}{2}e^{2\eta-2\gamma}.\end{aligned}$$

En reportant cette dernière égalité dans (3.22), *on a :*

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= -K\alpha T_{22}e^{2\eta-4\gamma} - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{2\alpha\partial_r\gamma}{r} + \partial_r\alpha\partial_r\gamma + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha} + \frac{(\partial_tA)^2 - \alpha(\partial_rA)^2}{r^2}e^{4\gamma} \\ &\quad +\alpha(\Phi - P_1 + P_2 - P_3)e^{2\eta-2\gamma} + \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} - \frac{2\alpha\partial_r\gamma}{r} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2} - \partial_r\alpha\partial_r\gamma + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha} \\ &\quad -\frac{\partial_t\alpha\partial_t\gamma}{\alpha} + \frac{\partial_r\alpha}{2r} - (\partial_t\gamma)^2 + \alpha(\partial_r\gamma)^2 - \frac{3((\partial_tA)^2 - \alpha(\partial_rA)^2)}{4r^2}e^{4\gamma}.\end{aligned}$$

Or $\frac{\partial_r\alpha}{r} = 2\alpha(P_1 - \Phi)e^{2(\eta-\gamma)}$.

Donc

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\eta - \alpha\partial_{rr}\eta &= \frac{\partial_{rr}\alpha}{2} - \frac{(\partial_r\alpha)^2}{4\alpha} + \frac{\partial_r\alpha\partial_r\eta}{2} + \frac{\partial_t\alpha\partial_t\eta}{2\alpha} + \frac{(\partial_tA)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - \frac{\alpha(\partial_rA)^2}{4r^2}e^{4\gamma} - (\partial_t\gamma)^2 + \alpha(\partial_r\gamma)^2 \\ &\quad -\alpha P_3e^{2\eta-2\gamma}.\end{aligned}$$

■

Proposition 3.2.3. *Les équations de Maxwell* (3.4), (3.5), (3.6) *et* (3.7) *nous donnent le système d'équations suivantes :*

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\Lambda_2-\alpha\partial_{rr}\Lambda_2 &= -\partial_t\Lambda_2(-\frac{\partial_t e^{2\gamma}}{2\alpha}+\frac{A\partial_tAe^{4\gamma}}{2r^2}-\partial_t\gamma)+\frac{\partial_tAe^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t\Lambda_3\\ &\quad \partial_r\Lambda_2(\frac{\alpha}{r}+\frac{\partial_r\alpha}{2}+\frac{\alpha A\partial_r e^{4\gamma}}{2r^2}-\alpha\partial_r\gamma)-\frac{\alpha\partial_rAe^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r\Lambda_3 \end{aligned}\tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\Lambda_3-\alpha\partial_{rr}\Lambda_3 &= (-2(\partial_t\gamma)A-\frac{A\partial_tA}{2}+\frac{A^2\partial_tA}{2r^2})\partial_t\lambda_2+(-\partial_t\gamma-\frac{\partial_t\alpha}{2\alpha}-\frac{A\partial_tA}{2r^2})\partial_t\Lambda_3\\ &\quad +(-\frac{\alpha A^2\partial_rAe^{4\gamma}}{2r^2}+2\alpha A\partial_r\gamma-\frac{\alpha\partial_rA}{2}+\frac{\alpha A}{r})\partial r\Lambda_2\\ &\quad +(\frac{\alpha A\partial_rAe^{4\gamma}}{2r^2}-\frac{\partial_r\alpha}{2}+\frac{\alpha}{r}-\alpha\partial_r\gamma)\partial_r\Lambda_3\end{aligned}\tag{3.32}$$

$$\partial_t(\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\partial_t\Lambda_1) = 0 \tag{3.33}$$

$$\partial_r(\frac{re^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\partial_t\Lambda_1) = 0 \tag{3.34}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}(3.31)\\(3.32)\\(3.33)\\(3.34)\end{cases}$$

Preuve . *En remarquant que* $(3.6)-A(3.7)=0$ *on obtient*

$$\begin{aligned}-\frac{e^{-2\eta}}{\alpha}(\partial_{tt}\Lambda_2-\alpha\partial_{rr}\Lambda_2)+(\frac{\partial_t\alpha e^{-2\eta}}{2\alpha^2}-\frac{A\partial_tAe^{-2(\eta-2\gamma)}}{2\alpha r}+\frac{\partial_t\gamma}{\alpha})\partial_t\Lambda_2\\ +(\frac{\partial_r\alpha e^{-2\eta}}{2}+\frac{A\partial_rAe^{-2(\eta-2\gamma)}}{2r^2}-\partial_r\gamma)\partial_r\Lambda_2\frac{(\partial_rA)e^{-2(\eta-2\gamma)}}{2r^2}\partial_r\Lambda_3+\frac{(\partial_tA)e^{-2(\eta-2\gamma)}}{2\alpha r^2}\partial_t\Lambda_3=0\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\Lambda_2-\alpha\partial_{rr}\Lambda_2 &= (\frac{\partial_t\alpha}{2\alpha}-\frac{A(\partial_tA)e^{4\gamma}}{2r^2}+\partial_t\gamma)\partial_t\Lambda_2+\frac{(\partial_tA)e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_t\Lambda_3\\ &\quad (\frac{\partial_r\alpha}{2}-\frac{(\alpha A\partial_rA)}{2r^2}-\alpha\partial_r\gamma)\partial_r\Lambda_2-\frac{(\alpha\partial_rA)e^{4\gamma}}{2r^2}\partial_r\Lambda_3\end{aligned}$$

En remplaçant (3.35) *dans* (3.7) *On obtient ainsi :*

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\Lambda_3-\alpha\partial_{rr}\Lambda_3 &= (-2(\partial_t\gamma)A-\frac{A\partial_tA}{2}+\frac{A^2\partial_tA}{2r^2})\partial_t\lambda_2+(-\partial_t\gamma-\frac{\partial_t\alpha}{2\alpha}-\frac{A\partial_tA}{2r^2})\partial_t\Lambda_3\\ &\quad +(-\frac{\alpha A^2\partial_rAe^{4\gamma}}{2r^2}+2\alpha A\partial_r\gamma-\frac{\alpha\partial zl_rA}{2}+\frac{\alpha A}{r})\partial r\Lambda_2\\ &\quad +(\frac{\alpha A\partial_rAe^{4\gamma}}{2r^2}-\frac{\partial_r\alpha}{2}+\frac{\alpha}{r}-\alpha\partial_r\gamma)\partial_r\Lambda_3\end{aligned}$$

L'équation (3.4) *nous donne :*

$$\partial_r(\frac{e^{-4(\eta-\gamma)}}{\alpha}\partial_t\Lambda_1)+(\frac{1}{2\alpha}\partial_r\alpha+2(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)+\frac{1}{r})(\frac{e^{-4(\eta-\gamma)}}{\alpha}\partial_t\Lambda_1)=0.$$

$$\begin{aligned}
&\iff (-\frac{1}{2\alpha^2}\partial_r\alpha-\frac{2(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)}{\alpha}+\frac{1}{\alpha r})e^{-4(\eta-\gamma)}\partial_t\Lambda_1+\frac{e^{-4(\eta-\gamma)}\partial_{tr}\Lambda_1}{\alpha}=0\\
&\iff (-\frac{r}{2\alpha^2}\partial_r\alpha-\frac{2r(\partial_r\eta-\partial_r\gamma)}{\alpha}+\frac{1}{\alpha})e^{-2(\eta-\gamma)}\partial_t\Lambda_1+\frac{re^{-2(\eta-\gamma)}\partial_{tr}\Lambda_1}{\alpha}=0\\
&\iff \partial_r(\frac{re^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\partial_t\Lambda_1)=0.
\end{aligned}$$

L'équation (3.5) *nous donne :*

$$\partial_t(\frac{e^{-4(\eta-\gamma)}}{\alpha}\partial_t\Lambda_1)+(\frac{1}{2\alpha}\partial_t\alpha+2(\partial_t\eta-\partial_t\gamma))(-\frac{e^{-4(\eta-\gamma)}}{\alpha}\partial_t\Lambda_1)=0$$

$$\begin{aligned}
&\iff (\frac{1}{2\alpha^2}\partial_t\alpha+\frac{2(\partial_t\eta-\partial_t\gamma)}{\alpha})e^{-2(\eta-\gamma)}\partial_t\Lambda_1+\frac{1}{\alpha}e^{-2(\eta-\gamma)}\partial_{tt}\Lambda_1=0\\
&\iff \partial_t(\frac{e^{-2(\eta-\gamma)}}{\alpha}\partial_t\Lambda_1)=0.
\end{aligned}$$

Remarque 3.2.2. *Les équations de* (3.13) *à* (3.18) *et de* (3.31) *à* (3.34) *constituent le système d'équation d'Einstein-Maxwell.*

3.3 Les Équations d'Euler

Ce sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent l'écoulement des fluides (liquide ou gaz). Dans toute la suite nous supposerons que le tenseur de Maxwell se conserve ; Et nous nous intéresserons uniquement sur la conservation du tenseur impulsion énergie lié au fluide parfait pour nous faciliter le travail.

Lemme 3.3.1. $u=(u_\lambda)$ *est le vecteur unitaire temporel du fluide implique*

$$(\sqrt{\alpha}u^0)^2-(u^1)^2=e^{-2(\eta-\gamma)} \tag{3.35}$$

Preuve . *Puisque le vecteur* u *étant unitaire cela implique :* $u_\beta u^\beta=g_{\lambda\beta}u^\lambda u^\beta=-1$ *avec* $\lambda;\beta=0,1,2,3.$

$$\begin{aligned}
g_{\lambda\beta}u^\lambda u^\beta=-1 \implies\ & g_{00}u^0u^0+2g_{01}u^0u^1+2g_{02}u^0u^2+2g_{03}u^0u^3+g_{11}u^1u^1\\
&+2g_{12}u^1u^2+2g_{13}u^1u^3+2g_{23}u^2u^3+g_{22}u^2u^2+g_{33}u^3u^3=-1
\end{aligned}$$

Or $\quad g_{01}=g_{02}=g_{03}=g_{12}=g_{13}=0$

Ceci implique $g_{00}(u^0)^2 + g_{11}(u^1)^2 + g_{22}(u^2)^2 + 2g_{23}u^2u^3 + g_{33}(u^3)^2 = -1$

On choisit $u_2 = u_3 = 0$ *qui va entrainer alors* $u^2 = u^3 = 0$ *.*

On obtient : $g_{00}(u^0)^2 \ + \ g_{11}(u^1)^2 = -1$

D'où, $$(\sqrt{\alpha}u^0)^2 - (u^1)^2 = e^{-2(\eta-\gamma)}$$

Remarque 3.3.1. *Les équations d'Einstein étant sous la forme* $G_{\delta\beta} = KT_{\delta\beta}$ *nous donne :*
Pour $\delta = 0$ *et* $\beta = 2,$ $G_{02} = KT_{02}$ *et Pour* $\delta = 0$ *et* $\beta = 3$ *,* $G_{03} = KT_{03}$
sont les équations nulles d'Einstein car $G_{02} = G_{03} = 0$ *.*
Ainsi on obtient :

$$T_{02} = \rho(1+k^2)u_0u_2 = 0 \quad et \quad T_{03} = \rho(1+k^2)u_0u_3 = 0 \quad (\text{ comme } K \neq 0 \text{ })$$

Ceci implique $u_2 = u_3 = 0$ *car* $\rho(1+k^2) \neq 0$ *et* u *est orienté vers le futur (* $u_0 > 0$ *)*

Remarque 3.3.2. *On a :*

$$u_2 = u_3 = 0 \Longrightarrow u^2 = u^3 = 0$$

Preuve . *On a :*
$u^2 = g^{2\beta}u_\beta = g^{20}u_0 + g^{21}u_1 + g^{22}u_2 + g^{23}u_3 = 0$ *or* $g^{02} = g^{21} = 0$ *et comme* $u_2 = u_3 = 0$
D'où $u^2 = 0$ *.*
De même ,
$u^3 = g^{3\beta}u_\beta = g^{30}u_0 + g^{31}u_1 + g^{32}u_2 + g^{33}u_3 = 0$ *or* $g^{03} = g^{31} = 0$ *et comme* $u_2 = u_3 = 0$ *.*
D'où $u^3 = 0$

Théorème 3.3.1. *(Conservation de l'énergie et du moment)*
Une importance conséquence de l'équation d'Einstein est la conservation local de l'énergie et du moment. Ce résultat apparaît en utilisant l'identité de différentielle de Bianchi pou obtenir :

$$\nabla_\delta G^{\delta\beta} \quad = \quad 0 \quad pour\ \delta, \beta = 0, 1, 2, 3, \ \ avec \quad G^{\delta\beta} = KT^{\delta\beta}. \tag{3.36}$$

Preuve . *Cf[3]*

Remarque 3.3.3. *L'équation* (3.36) *est équivalente à :*

$$\nabla_\delta T^{\delta\beta} = \nabla_\delta T^{\delta\beta(f)} + \nabla_\delta T^{\delta\beta(M)} = 0 \qquad (\text{car l'opérateur } \nabla_\delta \text{ est linéaire}). \qquad .$$

Or Tenseur de Maxwell se conserve d'où $\nabla_\delta T^{\delta\beta(M)} = 0$ *.*
L'équation (3.36) *dévient :*

$$\nabla_\delta T^{\delta\beta(f)} \quad = \quad 0 \tag{3.37}$$

On parlera de la conservation du tenseur impulsion énergie lié au fluide parfait .

Lemme **3.3.2.** *La relation précédente* (3.37)*, nous permet d'obtenir l'équation suivante :*

$$(\nabla_0\rho)u^0 + (\nabla_1\rho)u^1 + \rho(1+k^2)(\nabla_0 u^0 + \nabla_1 u^1) = 0 \tag{3.38}$$

Preuve . *D'après* (3.37) *, on a :*

$$\nabla_\delta T^{\delta\beta(f)} = 0, \quad \forall\delta,\ \beta = 0,1,2,3.$$

L'expression $T^{\delta\beta(f)} = (p+\rho)u^\delta u^\beta + pg^{\delta\beta} \quad \forall\delta,\beta = 0,1,2,3$ *avec* $p = k^2\rho$ *.*
En considérant k *constante puisque* $0 \leq k < 1$*. On a :*

$$T^{\delta\beta(f)} = \rho(1+k^2)u^\delta u^\beta + k^2\rho g^{\delta\beta} \quad \forall\delta,\beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$\begin{aligned}
\nabla_\delta T^{\delta\beta(f)} \quad &\Leftrightarrow \quad \nabla_\delta[\rho(1+k^2)u^\delta u^\beta + k^2\rho g^{\delta\beta}] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (1+k^2)(\nabla_\delta\rho)u^\delta u^\beta + \rho(1+k^2)(\nabla_\lambda u^\delta)u^\beta + \rho(1+k^2)u^\delta(\nabla_\delta u^\beta) \\
&\qquad +k^2(\nabla_\delta\rho)g^{\delta\beta} + \rho k^2(\nabla_\lambda g^{\delta\beta}) = 0.
\end{aligned}$$

Puisque $\nabla_\delta g^{\delta\beta} = 0$ *d'après le théorème et définition 1.2.1 ; alors on a :*

$$(1+k^2)(\nabla_\delta\rho)u^\delta u^\beta + \rho(1+k^2)(\nabla_\delta u^\delta)u^\beta + \rho(1+k^2)u^\delta(\nabla_\delta u^\beta) + k^2(\nabla_\delta\rho)g^{\delta\beta} = 0$$

En multipliant l'équation précédente par u_β*, on obtient l'équation suivante*

$$(1+k^2)(\nabla_\delta\rho)u^\delta u^\beta u_\beta + \rho(1+k^2)(\nabla_\delta u^\delta)u^\beta u_\beta + \rho(1+k^2)u^\delta(\nabla_\delta u^\beta)u_\beta + k^2(\nabla_\delta\rho)g^{\delta\beta}u_\beta = 0$$

Puisque $u^\beta u_\beta = -1$ *on a :*

$$-(\nabla_\delta\rho)u^\delta - \rho(1+k^2)(\nabla_\delta u^\delta) + 2\rho u^\delta(\nabla_\delta u^\beta)u_\beta = 0.$$

Comme $(\nabla_\delta u^\beta)u_\beta = 0$ *et en multipliant par -1, il en résulte que*

$$(\nabla_\delta\rho)u^\delta + \rho(1+k^2)(\nabla_\delta u^\delta) = 0 \qquad .$$

En se rappelant que $u^2 = u^3 = 0$ *,* *On a finalement le résultat suivant :*

$$(\nabla_0\rho)u^0 + (\nabla_1\rho)u^1 + \rho(1+k^2)(\nabla_0 u^0 + \nabla_1 u^1) = 0.$$

Remarque **3.3.4.** *Les équations* (3.35) *et* (3.38) *qui nous donne le système suivant*

$$\begin{cases} (\sqrt{\alpha}u^0)^2 - (u^1)^2 = e^{-2(\eta-\gamma)} \\ (\nabla_0\rho)u^0 + (\nabla_1\rho)u^1 + \rho(1+k^2)(\nabla_0 u^0 + \nabla_1 u^1) = 0 \end{cases}$$

sont appelées les équations d'Euler

Remarque 3.3.5. *le système d'équation d'Einstein-Maxwell ajouté ; aux équations* (3.35) *et* $(3.38))$ *forme le système d'équation d'Einstein-Maxwell fluide parfait, de douze équations aux dérivées partielles non linéaires du* 1^{er} et 2^{nd} *ordre dont dix inconnues (dans le système de coordonnées cylindriques) sont :*
les fonctions α , γ ,η , A ,Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 , ρ , u^0 *et* u^1 *; à deux variables* t, r
La résolution de ces équations nécessite des données initiales (Conditions de Cauchy) en $t = t_0 > 0$ *. Ces données sont imposées par le choix de la symétrie cylindrique .*

Remarque 3.3.6. *Compte tenu du fait que le nombre d'équations est supérieur au nombre d'inconnues, certaines équations peuvent être considérées comme des équations de contraintes et d'autres comme des équations d'évolution.*

Remarque 3.3.7. *L'existence des solutions du système d'Einstein -Maxwell-Euler requiert la présence de données initiales, en tenant compte de la singularité à* $t = 0$*, ces données initiales sont prescrites à* $t = t_0 > 0$ *par :*
$\eta(t_0, r) = \eta_0(r)$, $\partial_t\eta(t_0, r) = \eta_1(r)$, $\alpha(t_0, r) = \alpha_0(r)$, $\gamma(t_0, r) = \gamma_0(r)$, $\partial_t\gamma(t_0, r) = \gamma_1(r)$, $A(t_0, r) = A_0(r)$, $\partial_t A(t_0, r) = A_1(r)$, $\rho(t_0, r) = \rho_0(r)$, $U(t_0, r) = U_0(r)$. $\Lambda_1(t_0, \theta) = \Lambda_1^0(\theta)$, $\Lambda_2(t_0, \theta) = \Lambda_2^0(\theta)$, $\Lambda_3(t_0, \theta) = \Lambda_3^0(\theta)$, $\partial_t\Lambda_1(t_0, \theta) = \Lambda_1^1(\theta)$, $\partial_t\Lambda_2(t_0, \theta) = \Lambda_2^1(\theta)$,
$\partial_t\Lambda_3(t_0, \theta) = \Lambda_3^1(\theta)$.
Il est question d'étudier l'existence locale et globale dans le temps du problème de Cauchy pour le système d'Einstein-Maxwell-Euler, qui est un problème qui prolonge se travail.

♣ Portée Pédagogique ♣

Dans le cadre de la rédaction du mémoire de D.I.P.E.S II, il nous à été demandé de donner l'intérêt pédagogique de notre travail : Rappelons que le thème soumis à notre étude s'intitule **Équations d'Einstein-Maxwell fluide parfait en symétrie cylindrique**. Ainsi :

3.4 Pour l'enseignant

- ★ Il permet de se rendre compte qu'il y a une théorie plus générale qui prolonge celle de Newton ; et mieux comprendre notre univers.
- ★ Il permet de mieux comprendre la loi de l'attraction gravitationnelle que très peu perçoivent clairement.
- ★ Il permet de maitriser la résolution des équations différentielles ordinaires à coefficients constants.
- ★ Il permet aussi de se familiariser avec le logiciel de programmation Latex qui fait une très bonne mise en page et s'avère donc très utile pour la rédaction des épreuves d'évaluation.

♣ Conclusion ♣

Parvenu au terme de notre travail dans lequel il était question pour nous d'établir les Équations d'Einstein-Maxwell-fluide parfait dans le système de coordonnées locale (symétrie cylindrique) . Pour y arriver, nous avons donné dans le chapitre un, des notions requises afin de mieux comprendre le problème. Dans le chapitre deux, nous avons effectué des calculs qui aboutirons dans le chapitre trois à l'établissement de ces équations. Dans l'expression du tenseur d'impulsion-énergie dans le référentiel de repos du fluide parfait, se trouvent deux inconnues u (vitesse unitaire temporelle) et ρ (densité énergie) qui font apparaître les équations d'Euler. Nous remarquons que les équations d'Einstein-Maxwell couplées à celles d'Euler conduisent à un système de douze équations aux dérivées partielles non linéaires du premier et du second ordre à dix inconnues dépendantes de deux variables t et r, dont six d'Einstein, quatre de Maxwell et deux d'Euler. Notons qu'à l'aide de ces équations, on parvient à expliquer plusieurs phénomènes physiques tels que la gravitation, la formation des trous noirs, et plus généralement la cosmologie. Ces équations sont très souvent difficiles à résoudre (c'est-à-dire sans faire des approximations). Une autre perspective serait d'étudier l'existence et l'unicité (locale et globale) des solutions du problème de Cauchy posé par ces équations en symétrie cylindrique.

♣ Bibliographie ♣

[1] Häkan ANDRÉASSON (1999) *Global foliations of matter spacetimes with Gowdy symmetry*. Comm. Math. Phys. 206, 337-366.

[2] Luc BLANCHET (2009) *Introduction à la Relativité générale, Institut d'Astrophysique de Paris, UMR 7095 du CNRS, Université Pierre et Marie Curie, 7504 Paris, France.*

[3] Y. CHOQUET-BRUHAT. *Geométrie différentielle et mécanique analytique, cepaduece, ann, inst Fourier, ne 3p, 181-201, 1971.*

[4] Mikael FJÄLLBORG (2007) on *The Cylindrically Symmetry Einstein-Vlasov system*.class.quantum.grav, 24 : 2253-2270.

[5] A. KANA (2015) *Equations d'Einstein-Maxwell en symétrie cylindrique*. Mémoire DIPES II. Ecole Normale Supérieure de Yaoundé. Cameroun.

[6] P. NOUNDJEU, P. TEGANKONG. *The Einstein-Vlasov-Maxwell(EVM) system with cylindrical symmetry in temporal gauge, journal syllabus, ENS, UYI (2015).*

[7] O'NEIL B.(1983) *Semi-Riemannian geometry*. Newyork-London : Academic press, 482 pages.

[8] TALPART Y. (1993) *Leçon et Applications de Géométrie Différentielle et de Mécanique Analytique*. Ouagadougou, Burkina Faso. Cepaduece editions, 554 pages.