

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix – Travail – Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



REPUBLIC OF CAMEROUN

Peace – Work – Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ANALYSE ASYMPTOTIQUE D'UN MODÈLE ÉPIDÉMIQUE DE LA DYNAMIQUE DU CHOLÉRA

Mémoire de D.I.P.E.S. II de mathématiques

Par :

TCHAPNGA Williém Parménas
Licencié en Mathématiques

Sous la direction
Dr. NKAGUÉ NKAMBA Léontine
Chargée de Cours



Année Académique
2015-2016



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire de Yaoundé I. Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : biblio.centrale.uyi@gmail.com

WARNING

This document is the fruit of an intense hard work defended and accepted before a jury and made available to the entire University of Yaounde I community. All intellectual property rights are reserved to the author. This implies proper citation and referencing when using this document.

On the other hand, any unlawful act, plagiarism, unauthorized duplication will lead to Penal pursuits.

Contact: biblio.centrale.uyi@gmail.com

◆ Dédicace ◆

Je dédie ce travail à

ma mère : Mme PAHO épouse TCHAKOUNTÉ Fride

◆ Remerciements ◆

Tout seul, on ne peut arriver à bâtir.

J'adresse ici mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à tous ceux qui m'ont porté jusque là par leur amour, leur amitié, leurs enseignements, leurs conseils, leurs encouragements, leurs aides et leurs reproches. Ma profonde reconnaissance va tout d'abord :

♡ Au souverain Seigneur Dieu tout puissant , pour son amour, sa miséricorde, sa bonté et sa protection. Merci Seigneur pour tous ces dons.

Mes remerciements s'adressent également de façon particulière :

♡ À mon encadreur, Docteur **Leontine NKAGUE NKAMBA** qui a de bon gré accepté de diriger ce travail, malgré ses occupations, a soutenu mes efforts jusqu'au bout. Vous vous êtes révélé réellement présente et surtout ouverte et n'avez ménagé aucun effort pour que ce travail puisse être effectué dans les délais. Merci grandement.

♡ **À tous les enseignants de mathématiques de École Normale Supérieure de Yaoundé**, pour les enseignements et le suivi qu'ils m'ont apportés durant ces deux années passées à l'école normale. Merci beaucoup.

♡ À mon feu père **DJEUTA Justin** et à tous mes frères et soeurs : **TCHAKOUNTE Yolande , MBIANKE Christelle simone, NTCHANA Gaele Flore, NGAHAN TCHAKOUNTE Nicamor, TCHOUTA Nelly Michelle, DJEUTA DJATANT Gislain, NGOUNOU Flore, DJEUTA YONKEU**, je n'oublie pas l'amour et le réconfort que vous m'avez toujours témoigné. Merci à vous tous.

♡ À tous mes camarades de la 55^e promotion, je pense particulièrement à **AGOANET Franklin Platini, TCHOUNKE Billy Gaspari, DJOU MBOU Ferdinand, ETOGA BEGNOMO Adrien**. Malgré la distance, vous n'avez jamais cessé de me témoigner votre amour par vos encouragements ; pour cela, je vous dis merci.

À tous ceux qui sur mon chemin m'ont encouragé, soutenu, maintenu ou relevé et dont je n'ai pas fait mention, recevez ici l'expression de ma plus profonde gratitude.

◆ Déclaration sur l'honneur ◆

Le présent travail est une oeuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signé,

TCHAPNGA Williem Parménas

◆ Table des matières ◆

Dédicace	i
Remerciements	ii
1 LE CHOLÉRA	2
1.1 Historique de la maladie (Janny 2004)	2
1.2 Symptômes de la maladie (Aubry et Gauzère 2015)	3
1.3 Modes de transmission (Janny T. 2004, Aubry et Gauzère 2015))	4
1.4 Prophylaxie (Aubry et Gauzère 2015)	5
1.5 Traitement (Aubry et Gauzère 2015)	6
2 QUELQUES RÉSULTATS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES ET FONCTIONS DE LYAPUNOV	7
2.1 Généralités sur les systèmes dynamiques continus	7
2.2 Systèmes dynamiques autonomes	8
2.2.1 Ensembles particuliers	8
2.2.2 Notion de stabilité et point d'équilibre	10
2.3 Fonctions de Lyapunov	12
2.4 Principe d'invariance de Lasalle	13
2.5 Autres approches de démonstration de la stabilité globale d'un point d'équilibre	14
2.5.1 Première approche (Tian et Wang 2011)	14
2.5.2 Deuxième approche (approche géométrique) (Tian et Wang 2011, Nkague 2012)	16
2.6 Méthode de calcul du taux de reproduction de base	17
3 QUELQUES MODÈLES MATHÉMATIQUES DU CHOLÉRA EXISTANTS	20
3.1 Modèle de Codeço (2001)	20

3.1.1	Présentation générale du modèle	20
3.1.2	Diagramme des transferts et système différentiel	21
3.2	Modèle de Mukandavire et al. (2010)	22
3.2.1	Présentation générale du modèle	22
3.2.2	Diagramme des transferts et système différentiel	23
4	MODÈLE DE WANG ET LIAO (2010)	25
4.1	Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$) .	26
4.1.1	Quelques résultats fondamentaux	26
4.1.2	Stabilité du point d'équilibre sans maladie	30
4.1.3	Stabilité du point d'équilibre endémique	32
4.2	Modèle avec fonction d'incidence dépendant linéairement de I et non linéairement de B	38
4.2.1	Quelques résultats fondamentaux	38
4.2.2	Stabilité du point d'équilibre sans maladie	43
4.2.3	Stabilité du point d'équilibre endémique	44
4.3	Simulations numériques	47
4.3.1	Cas où la fonction d'incidence dépend uniquement de B , (système (4.9) – (4.11))	47
4.3.2	Cas où la fonction d'incidence dépend linéairement de I et non linéairement de B : système (4.16)-(4.18)(modèle de Mukandavire et al)	49
	INTÉRÊT DIDACTIQUE	52
	CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	53
	BIBIOGRAPHIE	54
	ANNEXE	56

◆ RÉSUMÉ ◆

Le choléra est une maladie infectieuse dont l'agent pathogène responsable est le **vibron cholérique**. Plusieurs modèles mathématiques ont déjà été proposés pour étudier la dynamique de cette maladie, à l'instar de celui de J. Wang et S Liao (Wang et liao 2010). Ce modèle est constitué de quatre compartiments : S , les susceptibles, I , les infectés, R , les rétablis et B , la concentration du vibron cholérique dans les sources d'eau. La spécificité de ce modèle est qu'il résume tous les moyens de transmission de la maladie par une fonction $f(I, B)$, dite fonction d'incidence et l'évolution de la concentration du vibron cholérique est régie par une fonction $h(I, B)$. Dans notre travail, nous analysons les stabilités asymptotiques (locale et globale) des points d'équilibre de ce modèle dans deux cas particuliers : le cas où la fonction d'incidence dépend uniquement de B et celui où elle dépend linéairement de I et non linéairement de B . Pour y parvenir, nous nous servons des fonctions de Lyapunov, de la théorie des systèmes dynamiques monotones et de l'approche géométrique. Et enfin, Nous procédons à quelques simulations numériques à l'aide du logiciel MATLAB dans le but de visualiser les différentes stabilités. L'analyse présentée ici est faite dans le but d'élaborer une meilleure compréhension des mécanismes fondamentaux de la dynamique du choléra.

mots clés : Système dynamique, compartiment, point d'équilibre, modèle mathématique, stabilité asymptotique.

◆ ABSTRACT ◆

Cholera is an infectious disease caused by the pathogen *Vibrio Cholerae*. Many mathematical models have been proposed to study the dynamic of this disease, like J. Wang and S. Liao model (Wang et Liao 2010). This model is made up of four compartments : S the Susceptibles, I the infected populations, R the recovered populations and B the concentration of *Vibrio Cholerae* in water resource. The specificity of this model is that, it resumes the multiple transmission pathways of the disease by the function $f(I, B)$, which is also termed the incidence function, and the growth of the concentration of *Vibrio Cholerae* is characterised by the function $h(I, B)$. In this work, we are going to analyse the local and global asymptotical stability of the points of equilibrium of this model in two cases which are : the case where the incidence function depends only on B and the other case where it depends linearly on I and non-linearly on B . In order to achieve this, we will make use of the Lyapunov function, the theory of monotone dynamical systems, and geometric approach. Finally we are going to perform certain numerical simulations with the aid of the MATLAB program in order to visualize the stability of these points of equilibrium. The analysis presented here permits us to have a deeper understanding of the fundamental mechanism in cholera dynamics.

Keywords : Dynamical system, compartment, point of equilibrium, mathematical model, asymptotical stability.

◆ Table des figures ◆

1.1	Vibrio Cholerae	4
1.2	Répartition du choléra dans le monde entier	5
1.3	centre typique d'urgence pour une épidémie de choléra	6
3.1	Diagramme compartimental du modèle de codeco (2001)	21
3.2	Diagramme compartimental du modèle de Mukandavire et al(2010)	23
4.1	Chroniques des solutions et portrait de phase du système (4.9)-(4.11) lorsque $\mathcal{R}_0 = 0.5039 < 1$ et $f(B) = \frac{aB}{K+B}$	48
4.2	Chroniques des solutions et portrait de phase du système (4.9)-(4.11) lorsque $\mathcal{R}_0 = 1,5832 > 1$ et $f(B) = \frac{aB}{K+B}$	49
4.3	Chroniques des solutions et portrait de phase du modèle de Mukandavire et al lorsque $\mathcal{R}_0 < 1$	50
4.4	Chroniques des solutions et portrait de phase du modèle de Mukandavire et al lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$	51

◆ Liste des tableaux ◆

1.1	les six premières pandémies de l'ère classique du choléra	3
4.1	valeurs des différents paramètres du système (4.9)-(4.11) avec $f(B) = \frac{aB}{B+K}$	48
4.2	valeurs des différents paramètres du système (4.16)-(4.18)	50

◆ INTRODUCTION GÉNÉRALE ◆

Le choléra est une maladie qui durant de nombreuses années a fait de multiples victimes, et qui continue à décimer les populations. De ce fait, l'élaboration des stratégies permettant de limiter son expansion est une attitude de plus en plus importante et qui nécessite des contributions interdisciplinaires. Plusieurs mathématiciens y ont participé d'ailleurs en proposant des modèles mathématiques permettant d'étudier la dynamique de cette maladie. Capasso et Paveri-Fontana (1979) en ont proposé l'un des plus anciens. Ils ont été suivis par Codeço (2001), Jensen et al(2006), et Mukandavire et al (2010). L'une des principales difficultés dont on peut faire face lors de la réalisation de cette noble tâche est de fournir des réponses aux deux questions suivantes : Comment est-ce que la fonction d'incidence est déterminée ? Et comment formaliser la dynamique de la concentration des agents pathogènes responsables de cette maladie dans les sources d'eau ? C'est dans le but d'apporter des réponses de plus en plus satisfaisantes aux questions posées ci-dessus que J. Wang et S. Liao dans (Wang et Liao 2010) ont proposé un modèle qui unifie tous les moyens de transmission de la maladie dans une fonction $f(I, B)$. Et toujours sur ce modèle qui nous intéressera dans la suite de notre travail, la dynamique de la concentration des agents pathogènes de la maladie est régie par une fonction $h(I, B)$. Nous analyserons ce modèle dans deux cas : le cas où f définie ci-dessus n'est fonction que de B , et celui où f est linéairement dépendante de I et non linéairement de B .

Le présent document est organisé comme suit : au premier chapitre, nous présentons le choléra de manière générale ; au deuxième chapitre, nous présentons quelques outils mathématiques permettant de faire une bonne étude de notre modèle. Quelques modèles mathématiques étudiant la dynamique du choléra sont proposés au troisième chapitre, et au quatrième chapitre, nous analysons le modèle de J. Wang et S. Liao dans deux cas comme nous l'avons dit plus haut : dans un premier temps, lorsque f ne dépend que de B , dans un second temps lorsque f est linéairement dépendante de I et non linéairement de B . Ensuite, nous ferons quelques simulations numériques pour illustrer les résultats analytiques obtenus, et enfin au dernier chapitre, nous ferons ressortir quelques intérêts pédagogiques que nous avons pu tirer de ce travail.

LE CHOLÉRA

Introduction (Crevier 1885)

Le choléra a été de tout temps la terreur des peuples, et le désespoir des médecins, parmi lesquels il a fait de nombreuses victimes. cette désolante maladie a été connue dans tous les temps ; Hippocrate, le père de la médecine, Celse, Aretee, Caelius, etc, en ont fait des descriptions très exactes. Pour eux, cette maladie était un grand écoulement de bile, par haut et par bas, d'où est venu le nom de « kolera », de « xole » qui signifie bile et de « reo », je coule. Le choléra peut aussi être défini comme une maladie infectieuse diarrhéique à caractère épidémique, d'origine bactérienne, transmise par voie digestive. C'est une maladie du péril fécal par excellence, une véritable urgence en santé publique. Le choléra est le compagnon privilégié des catastrophes naturelles et des situations de conflits avec déplacements massifs de la population.

1.1 Historique de la maladie (Janny 2004)

Le choléra existe depuis plus de deux millénaires. Les premières traces écrites qui attestent de sa présence sont des textes Sanskrits de Susruta datant de 2500 ans. Le nom « choléra » trouve son origine de l'antiquité grecque : il signifiait vraisemblablement écoulement de bile. cette maladie était alors confinée dans le delta du Gange et plus précisément à l'actuel Bangladesh, débordant épisodiquement sur les territoires limitrophes d'extrême-orient. Le développement et la systématisation du commerce maritime, les échanges intercontinentaux marquent en 1817 le début de l'ère classique du choléra, caractérisée par 6 premières pandémies présentées dans le tableau 1.1 donné plus bas . C'est en 1854, avant l'identification formelle du « vibrio cholerae » par Koch en 1883 que J. Snow reconnut le rôle primordial de l'eau dans la diffusion du choléra.

1.2. Symptômes de la maladie (Aubry et Gauzère 2015)

TABLE 1.1 – les six premières pandémies de l'ère classique du choléra

	Durée	Zones affectées	Voie de transport	Évènement
1 ^{re} pandémie	1817-1823	Océan Indien : Asie, Moyen-Orient, Cote Est de l'Afrique	.	.
2 ^e pandémie	1829-1851	idem + Europe et Amérique du nord	Maritime	1832 : Grandes Épidémies de paris, de Londres, New-York
3 ^e pandémie	1852-1859	Idem+Amérique du Sud	Maritime	1854 : Découverte de Snow : Rôle central de l'eau dans la propagation
4 ^e pandémie	1863-1879	idem	Canal de Suez	.
5 ^e pandémie	1881-1896	tous les continents sauf l'Australie	Maritime	1883 : Description du vibrio cholerae par R. Koch
6 ^e pandémie	1899-1923	Tous les continents sauf l'Europe et l'Amérique du Nord	Maritime	.

La septième pandémie, qui a débuté en 1961 au niveau de l'archipel des Célèbes, en Indonésie, démontre que la planète n'est pas débarrassée de choléra.

1.2 Symptômes de la maladie (Aubry et Gauzère 2015)

Le syndrome « cholérique » est caractérisé par la survenue brutale d'une diarrhée aqueuse, d'odeur fade, sans glaire ni sang, avec des vomissements abondants « en jet », entraînant une déshydratation rapide et sévère réalisant la triade « diarrhée aqueuse, vomissement, déshydratation ». Le nombre d'émission est de l'ordre de 10 à 50 et plus par jour (4 à 20 litres de liquides). Le malade présente des crampes abdominales. cette forme classique (dite encore historique) évolue en 3 phases :

- Phase liquidienne,
- Phase de collapsus ou d'algidité (déshydratation, pouls imprenable, tension artérielle effondrée, température inférieure ou égale à 36°,...),
- Phase évolutive avec une amélioration spectaculaire sous réhydratation ou décès si le malade

n'est pas réhydraté.

1.3 Modes de transmission (Janny T. 2004, Aubry et Gauzère 2015))

L'agent pathogène du choléra est un bacille Gram- : le *Vibrio cholerae*. Il s'agit d'une bactérie hydrique (de l'eau) appartenant à la famille des *Vibrionaceae* et au genre *Cholerae*. Il possède une morphologie en virgule d'où le nom que lui avait attribué Pacini dès 1854. Parmi toutes les souches de *Vibrio cholerae*, seules celles fabriquant une toxine peuvent procurer le choléra : ce sont les **vibrions cholériques**.



FIGURE 1.1 – Vibrio Cholerae

Le choléra est une maladie à transmission féco-orale. Le réservoir est environnemental en période inter-épidémique, et essentiellement humain en période épidémique. Le milieu hydrique est un réservoir de germes pathogènes (exemple : Saumâtre des estuaires des grands fleuves d'Asie). Le réservoir humain entre en jeu en cas d'épidémie et explique la rapidité de la dissémination de la maladie. Ce réservoir comprend les malades, les cadavres de sujets morts de choléra, les porteurs sains.

1.4. Prophylaxie (Aubry et Gauzère 2015)

La transmission est donc hydrique ou inter-humaine : par consommation des eaux souillées, des produits marins contaminés, mains sales (toilette, transport des cadavres, repas), fruits et légumes arrosés d'eaux souillées. On propose ci-dessous la carte de la répartition du choléra dans le monde entier.

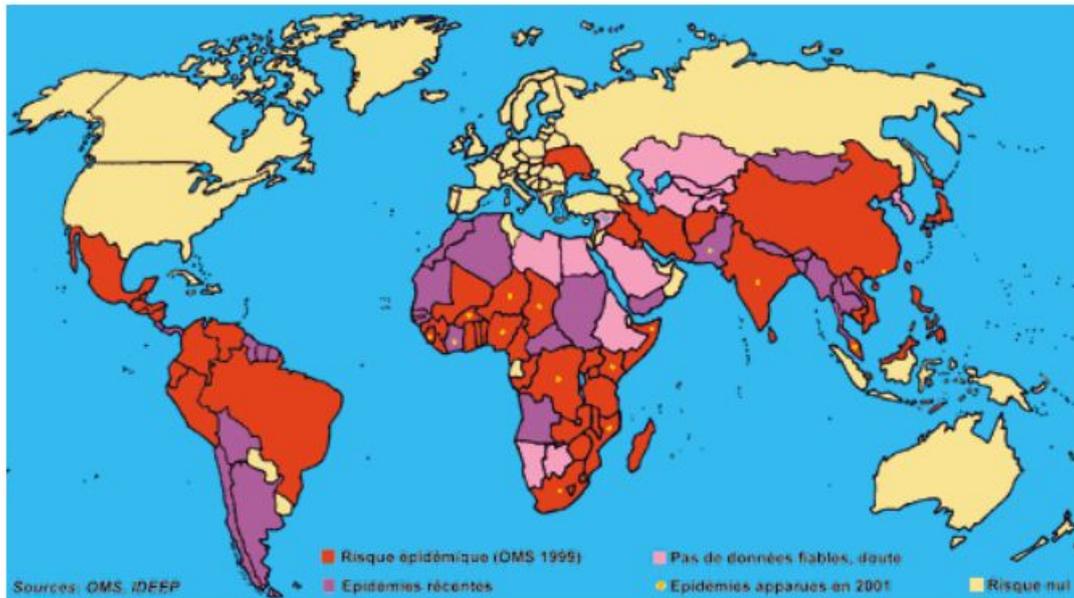


FIGURE 1.2 – Répartition du choléra dans le monde entier

1.4 Prophylaxie (Aubry et Gauzère 2015)

La prévention du choléra repose avant tout sur l'élévation du niveau d'hygiène :

- Consommer de l'eau potable,
- Laver les fruits et les légumes avant consommation,
- Se laver les mains avant et après le repas, après passage aux toilettes etc...

Il existe à ce jour deux types de vaccins anticholériques oraux, sûrs et efficaces.

1. Le vaccin oral inactivé constitué de bactéries entières tuées (*V. cholerae* O1) et de sous unité B de la toxine cholérique purifiée obtenue par génie génétique spécialisé (DUKORAL).
2. Le vaccin SHANCHOL et le vaccin MORCVAX, vaccins oraux bivalents, étroitement associés, préparés à partir des sérogroupes O1 et O139.

1.5 Traitement (Aubry et Gauzère 2015)

Le malade de choléra doit être admis dans un centre de traitement du choléra (CTC) créé en fonction des besoins, offrant les meilleures conditions de traitement et permettant l'isolement du malade. La figure 1.3 ci-dessous en présente un exemple.



FIGURE 1.3 – centre typique d'urgence pour une épidémie de choléra

L'essentiel du traitement est la réhydratation. En effet, tout cholérique parvenu à temps dans un centre de traitement équipé doit en sortir guéri au 3^e jour.

Les buts du traitement sont les suivants :

- Rétablir l'équilibre hydroélectrolytique : c'est le geste thérapeutique urgent et essentiel.
- Lutter contre le germe : c'est un geste secondaire diminuant la durée de la diarrhée et aussi la durée du partage (évitant ainsi la dissémination des vibrions)

QUELQUES RÉSULTATS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES ET FONCTIONS DE LYAPUNOV

Introduction

La modélisation mathématique conduit le plus souvent à l'étude des systèmes dynamiques. Ces systèmes peuvent être continus, discrets ou à dérivées partielles. Les modèles étudiés dans la suite étant des systèmes différentiels non linéaires, nous rappelons dans ce chapitre quelques résultats sur les systèmes différentiels ainsi que quelques résultats en analyse compartimentale que nous utiliserons plus tard pour analyser ces modèles.

2.1 Généralités sur les systèmes dynamiques continus

Définition 2.1. (Système dynamique (Mbang J. 2009))

Un système dynamique est la donnée d'un triplet (T, Ω, Φ) où Ω est un espace topologique, T un espace temporel (ensemble des temps d'observation) et Φ est l'application définie comme suit :

$$\begin{aligned}\Phi : T \times \Omega &\rightarrow \Omega \\ (t, x) &\mapsto \Phi(t, x) = \Phi_t(x)\end{aligned}$$

telle que :

1. $\Phi(0, x) = x, \forall x \in \Omega$
2. $\Phi(s + t, x) = \Phi(s, \Phi(t, x))$

Ω est appelé espace de phase du système.

- Si $T \subset \mathbb{N}$ ou \mathbb{Z} , alors le système dynamique est discret,
- Si $T \subset \mathbb{R}$, le système dynamique est dit continu.

2.2. Systèmes dynamiques autonomes

Dans la suite, nous supposons que Ω est un sous ensemble de \mathbb{R}^n .

Définition 2.2. (équation différentielle du premier ordre)

Une équation différentielle du premier ordre s'écrit sous la forme générale :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (2.1)$$

où $\frac{dx}{dt}$ encore noté \dot{x} , désigne la dérivée de x par rapport à la variable t .

Si la fonction f dépend directement du temps, l'équation (2.1) est dite non autonome. Elle est dite autonome si la fonction f ne dépend pas explicitement du temps. C'est-à-dire :

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.2)$$

Si f est linéaire, l'équation (2.1) est dite linéaire, sinon, elle est dite non linéaire.

Une solution particulière de l'équation différentielle (2.1) est une fonction du temps qui vérifie l'équation différentielle. Une solution particulière dépend de la condition initiale x_0 , c'est-à-dire de la valeur de la variable t à un instant initial $t_0 : x_0 = x(t_0)$.

2.2 Systèmes dynamiques autonomes

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Considérons l'équation différentielle autonome définie par :

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.3)$$

On suppose que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et satisfait à des conditions telles qu'une solution du système (2.3) existe en tout point, est unique et dépend de manière continue des conditions initiales. Pour chaque $x \in \Omega$, nous notons par $X_t(x)$ la solution du système (2.3) satisfaisant : $X_0(x) = x$. Nous supposons que X satisfait des conditions telles que $X_t(x)$ est continue en (t, x) .

2.2.1 Ensembles particuliers

Définition 2.3. (Trajectoire, orbite (Nkague 2012))

- On appelle **trajectoire** d'un point x de Ω l'application : $X_x : t \mapsto X_t(x)$.
- On appelle **orbite** d'un point x de Ω la partie $\Upsilon_x = \{X_t(x), t \in \mathbb{R}\}$ de l'espace des phases. L'orbite d'un point x de Ω est dite périodique si x n'est pas un point d'équilibre (c'est-à-dire si $f(x) \neq 0$) et s'il existe τ appartenant à \mathbb{R}_+ tel que $X_\tau(x) = x$. On dit alors que τ est une **période** de l'orbite périodique considérée.

Définition 2.4. (Ensemble ω -limite)

Soit x_0 un élément de Ω . L'ensemble ω -limite de x_0 , noté $\omega(x_0)$ est défini par :

$$\omega(x_0) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{X_s(x_0), s \geq t\}}.$$

Remarque 2.2.1. La notation ω signifie que l'on regarde l'ensemble limite de x_0 vers les temps positifs. On pourrait aussi définir l'ensemble $\omega(x_0)$ de la manière suivante :

$$\omega(x_0) = \{y \in \Omega \mid \exists t_n \rightarrow +\infty; X_{t_n} \rightarrow y\}.$$

Autrement dit, $\omega(x_0)$ est l'ensemble des points d'adhérence de $\gamma_{x_0}^+$ au voisinage des temps infinis.

Définition 2.5. (Ensemble absorbant (Tewa 2007))

Supposons que le système (2.3) est tel que f soit de classe C^1 et que Ω soit un ouvert de \mathbb{R}^n . Supposons de plus que cette équation admette des solutions quel que soit $t \geq 0$. Un sous ensemble D de Ω est dit **absorbant** suivant (2.3) si tout sous-ensemble borné K de Ω satisfait $X_t(K) \subset D$ pour tout temps t suffisamment grand. D est dit absorbant lorsque pour toute condition initiale x_0 , il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $t > \lambda$, $X_t(x_0) \in D$.

Définition 2.6. (Ensemble invariant)

Un sous-ensemble K est dit positivement (resp négativement)invariant relativement au système (2.3) si $X_t(K) \subset K$ pour tout $t \geq 0$ (resp $t \leq 0$). K est dit invariant si $X_t(K) = K$ pour tout t .

Remarque 2.2.2. Un sous-ensemble D absorbant a la propriété d'attirer toutes les trajectoires relatives à (2.3). Ainsi, lorsqu'un sous-ensemble est dit positivement invariant et absorbant suivant (2.3), toutes les trajectoires relatives à (2.3) rentrent dans D et n'en ressortent plus.

Le théorème suivant est très souvent utilisé pour prouver qu'un ensemble est positivement invariant. Il est connu sous le nom de *théorème de la barrière*.

Théorème 2.1. (Théorème de la barrière (Tewa 2007))

On considère le système (2.3). Soit $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $\langle | \rangle$ un produit scalaire sur \mathbb{R}^n . Pour $a \in \mathbb{R}$ on pose : $H^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) = a\}$ et $H^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) \leq a\}$. On suppose que pour tout $x \in H^{-1}(a)$:

- le gradient $\nabla H(x) \neq 0$,
- le gradient $\langle f(x) | \nabla H(x) \rangle \leq 0$.

Alors l'ensemble $H^{-1}(]-\infty, a])$ est positivement invariant pour le système (2.3).

Définition 2.7. (Dissipativité du modèle (Mbang 2009))

Un modèle dynamique est dit dissipatif s'il existe un compact K tel que pour toute condition initiale, la solution issue de cette condition initiale rentre dans ce compact et n'en ressort plus. En d'autres termes, si on désigne par $X_t(x_0)$ l'unique solution au temps t issu de x_0 , $\exists K$ compact et $\exists \lambda > 0$ tel que $\forall t > \lambda, X_t(x_0) \in K$

2.2.2 Notion de stabilité et point d'équilibre

Définition 2.8. (point d'équilibre)

Un point x^* est un point d'équilibre, ou point singulier, ou point stationnaire de l'équation (2.3) si et seulement si on a : $f(x^*) = 0$.

Définition 2.9. (point d'équilibre stable)

On dit qu'un point d'équilibre x^* du système (2.3) est stable (au sens de Lyapunov) ou que le système (2.3) est stable en x^* si pour tout voisinage U de x^* , il existe un voisinage V de x^* tel que pour tout $y \in V$ et pour tout $t \geq 0$ on a : $X_t(y) \in U$.

Dans le cas contraire, on dit que x^* est instable.

Définition 2.10. (Point d'équilibre attractif)

On dit qu'un point d'équilibre x^* est attractif s'il existe un ouvert V contenant x^* tel que pour tout $y \in V$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(y) = x^*.$$

Définition 2.11. (stabilité asymptotique)

On dit que x^* est localement asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

Remarque 2.2.3. La stabilité n'implique pas l'attractivité

Définition 2.12. (stabilité globale)

Un point d'équilibre x^* est dit globalement asymptotiquement stable s'il est globalement attractif. Autrement dit, pour tout voisinage U de x^* on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0) - x^*| = 0 \text{ pour tout } x_0 \in U$$

Remarque 2.2.4. Si x^* est globalement stable par rapport à un ouvert U , alors x^* est nécessairement le seul point d'équilibre stable dans U . De plus, il existe un voisinage compact K de x^* tel que chaque sous ensemble compact $F \subset U$ vérifie $X_t(F) \subset K$ pour tout t suffisamment grand. Un tel K est dit **absorbant** dans U .

2.2. Systèmes dynamiques autonomes

Définition 2.13. Soit x^* un point d'équilibre du système (2.3). Si f est de classe C^1 , on appelle système linéarisé de (2.3) en x^* le système linéaire :

$$\dot{x} = Df(x^*)x$$

où $Df(x^*)$ est la différentielle de f au point x^* .

On peut se servir du théorème suivant pour montrer la stabilité locale d'un point d'équilibre.

Théorème 2.2. (Poincaré-Lyapunov)

On considère le système (2.3) où f est de classe C^1 et x^* un point d'équilibre.

1. Si $Df(x^*)$ a les parties réelles de toutes ses valeurs propres strictement négatives, alors x^* est localement asymptotiquement stable.
2. Si $Df(x^*)$ a (au moins) une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors x^* est instable.

Dans la pratique, il n'est pas toujours facile de calculer les valeurs propres de la matrice du système linéarisé. Cependant, il existe des critères permettant de conclure sur la stabilité locale d'un point d'équilibre sans calculer explicitement les valeurs propres .

Théorème 2.3. (critère de Routh-Hurwitz (Korn G.A. et Korn T.M. 2000))

Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que toutes les racines du polynôme réel f définie par

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n; (a_0 > 0)$$

soient à partie réelle négative :

1. $a_n > 0, a_{n-2} > 0, a_{n-4} > 0, \dots, H_{n-2} > 0, H_{n-4} > 0, \dots$
2. $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0, \dots, H_{n-1} > 0, H_{n-3} > 0, \dots$

où H_k désigne le mineur principal d'ordre k de la matrice d'ordre n suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2n-4} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{2n-5} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

2.3. Fonctions de Lyapunov

En particulier, pour $n \in \{2, 3, 4\}$, on a :

- Si $f(z) = a_0z^2 + a_1z + a_2$, alors les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les racines de f soient à partie réelle négative sont les suivantes :

$$a_1 > 0, a_2 > 0.$$

- Si $f(z) = a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$, alors les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les racines de f soient à partie réelle négative sont les suivantes :

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 - a_0a_3 > 0.$$

- Si $f(z) = a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$, alors les conditions nécessaires et suffisantes pour que toutes les racines de f soient à partie réelle négative sont les suivantes :

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_4 > 0, a_3(a_1a_2 - a_0a_3) > a_1^2a_4.$$

Les fonctions de Lyapunov jouent un grand rôle dans l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques. dans la section suivante, nous définissons les fonctions de Lyapunov et donnons quelques résultats liés à ces fonctions.

2.3 Fonctions de Lyapunov

Soient $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_0 \in \Omega$.

Définition 2.14. (Nkague 2012)

- La fonction V est dite **définie positive** si $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour tout $x \neq x_0$ dans un voisinage Ω_0 de x_0 .
- La fonction V est dite **définie négative** si $-V$ est définie positive
- La fonction V est dite **semi-positive** si $V(x_0) = 0$ et $V(x) \geq 0$ dans un voisinage Ω_0 de x_0 .

Définition 2.15. (Fonction de Lyapunov (Mbang 2009))

Une fonction $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction de Lyapunov** pour le système (2.3) si elle est décroissante le long des trajectoires du système. Si V est de classe C^1 , cela revient à dire que sa dérivée \dot{V} par rapport au système (2.3) est négative sur Ω , c'est-à-dire, $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

La théorie de Lyapunov a de nombreuses applications en systèmes dynamiques, notamment dans l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires. On a par exemple le théorème suivant :

2.4. Principe d'invariance de Lasalle

Théorème 2.4. (Stabilité locale d'un point d'équilibre (Lasalle et Lefschetz 1961))

Soit $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- Si la fonction V est définie positive et \dot{V} semi-définie négative sur Ω , alors le point d'équilibre x^* est stable pour le système (2.3).
- Si la fonction V est définie positive et \dot{V} est définie négative sur Ω , alors x^* est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (2.3).

Remarque 2.3.1. Pour prouver la stabilité d'un point d'équilibre, il suffira donc de construire une fonction de Lyapunov dans un voisinage de ce point d'équilibre.

Théorème 2.5. (Stabilité globale d'un point d'équilibre (Lasalle et Lefschetz 1961))

S'il existe une fonction de Lyapunov V pour le système (2.3) au point d'équilibre x^* qui est globalement définie positive, radialement non bornée et telle que sa dérivée temporelle est globalement définie négative (c'est-à-dire : $\dot{V}(x) < 0; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$), alors le point d'équilibre x^* est globalement asymptotiquement stable.

Montrer la stabilité asymptotique d'un système donné à partir de la théorie de Lyapunov revient donc à déterminer une fonction V définie positive et dont la dérivée \dot{V} est définie négative. Dans la pratique, ce travail n'est pas aisé. La condition sur la dérivée peut être allégée en utilisant le **Principe d'invariance de Lasalle** qui sera énoncé dans la section suivante.

2.4 Principe d'invariance de Lasalle

Théorème 2.6. (Principe d'invariance de Lasalle (Lasalle 1976))

Soit Ω un sous ensemble de \mathbb{R}^n

Supposons que Ω est un ouvert positivement invariant pour le système (2.3) en x_0 . Soit $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 pour le système (2.3) en x_0 telle que :

1. $\dot{V} \leq 0$ sur Ω
2. Soient $E = \{x \in \Omega; \dot{V} = 0\}$ et L le plus grand ensemble invariant par f contenu dans E .

Alors, toute solution bornée commençant dans Ω tend vers l'ensemble L lorsque le temps tend vers l'infini.

Ce théorème est un outil très utilisé dans l'analyse des systèmes dynamiques ; à la différence du théorème de Lyapunov, il n'exige pas que la fonction V soit définie positive, ou que sa dérivée soit négative. Il fournit juste des informations sur l'attractivité du système considéré au point d'équilibre

2.5. Autres approches de démonstration de la stabilité globale d'un point d'équilibre

x_0 . Par exemple, il ne peut être utilisé pour prouver que les solutions tendent vers un point d'équilibre que lorsque l'ensemble L est réduit à ce point d'équilibre ; il n'indique pas si ce point d'équilibre est stable ou pas. Pour établir la stabilité d'un point d'équilibre, on peut utiliser le corollaire qui suit le théorème ci-dessous.

Théorème 2.7. (Bathia et Szego 1970)

Soit Ω un ensemble positivement invariant pour le flot décrit par le système d'équations différentielles (2.3). Soit V une fonction de classe C^1 définie sur Ω . Supposons $\dot{V} \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$; Soit L le plus grand ensemble invariant contenu dans E tel que :

- L attire toutes les solutions issues de Ω , c'est à dire : $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(X_t(x), L) = 0$, où d est la distance entre $X_t(x)$ et L lié à la topologie de Ω ;
- S est le plus petit ensemble relativement asymptotiquement stable par rapport à Ω contenant L .

Alors L est relativement asymptotiquement stable par rapport à Ω .

Une conséquence de ce théorème est le résultat suivant :

Corollaire 2.1. Sous les hypothèses du théorème précédent, si l'ensemble L est réduit au point $x_0 \in \Omega$, alors x_0 est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (2.3) définie sur Ω .

2.5 Autres approches de démonstration de la stabilité globale d'un point d'équilibre

Soit F une fonction de classe C^1 ; $F : x \mapsto F(x) \in \mathbb{R}^n$, pour x appartenant à un ensemble ouvert convexe, borné $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

On considère le système suivant :

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (2.4)$$

2.5.1 Première approche (Tian et Wang 2011)

Énonçons quelques définitions de base liées à la notion de stabilité orbitale d'un point d'équilibre.

Définition 2.16. Supposons que $x = p(t)$ est une solution périodique de (2.4), de plus petite période $\omega > 0$ et que γ est l'orbite définie par $\gamma = \{p(t) | 0 \leq t \leq \omega\}$.

- γ est dite **orbitalement stable** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que toute solution $x(t)$ de (2.4) dont la distance à γ est inférieure à δ , reste à une distance inférieure à ε de γ pour tout $t \geq 0$.

2.5. Autres approches de démonstration de la stabilité globale d'un point d'équilibre

- γ est dite **orbitalement asymptotiquement stable** si la distance de $x(t)$ à γ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.
- L'orbite γ est dite **orbitalement asymptotiquement stable avec phase asymptotique** si elle est orbitalement asymptotiquement stable et il existe $\eta > 0$ tel que toute solution $x(t)$ de (2.4) pour laquelle la distance de $x(0)$ à γ est inférieure à η satisfasse : $|x(t) - p(t - \tau)| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ pour tout τ dépendant de $x(0)$.

Le résultat suivant permet aussi d'établir la stabilité globale asymptotique d'un point d'équilibre.

Théorème 2.8. (Li et Muldowney 1995)

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\bullet(H_1)$ Il existe un compact absorbant $K \subset D$.
 $\bullet(H_2)$ Le système (2.4) a un unique équilibre \bar{x} dans D ,
2. \bar{x} est localement asymptotiquement stable,
3. Le système (2.4) vérifie la propriété de poincaré Bendixson c'est-à-dire que tout ensemble non vide compact ω -limite de ce système est soit une orbite fermée, soit un point d'équilibre.
4. Chaque orbite périodique de (2.4) est orbitalement asymptotiquement stable dans D ,

alors l'unique équilibre \bar{x} est globalement asymptotiquement stable dans D .

Définition 2.17. Le système (2.4) est dit uniformément persistant s'il existe une constante $c > 0$ tel que chaque composante de toute solution $x(t)$ avec $x(0) = x_0 \in D$ vérifie :

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) > c, \liminf_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) > c, \dots, \liminf_{t \rightarrow +\infty} x_n(t) > c.$$

Lemme 2.1. (Butter et Waltman 1986)

Si le système (2.4) est uniformément persistant dans le domaine ouvert convexe et borné D , alors la condition (H_1) est vérifiée.

Définition 2.18. Le système (2.4) est dit **compétitif** s'il existe une matrice diagonale H dont les valeurs diagonales sont ± 1 telles que tous les termes extra-diagonaux de la matrice $H \frac{\partial F}{\partial x} H$ sont non positifs dans D , où $\frac{\partial F}{\partial x}$ est la matrice jacobienne de (2.4).

Remarque 2.5.1. Les systèmes compétitifs tri-dimensionnels possèdent la propriété de poincaré-Bendixson.

En effet, on a le résultat suivant :

Théorème 2.9. (Smith 1995)

Pour tout système compétitif défini sur un domaine ouvert convexe tri-dimensionnel, si un ensemble ω -limite non vide et compact ne contient aucun point d'équilibre, alors c'est une orbite fermée.

Définition 2.19. (Seconde composante additive d'une matrice)

Supposons que $n = 3$. Soit $A = (a_{ij})$, une matrice de dimension 3×3 . la seconde composante additive de A , notée $A^{[2]}$, est une matrice de dimension $\mathcal{C}_3^2 \times \mathcal{C}_3^2$, c'est-à-dire de dimension 3×3 , et définie comme suit :

$$A^{[2]} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{pmatrix}$$

Le théorème suivant permet aussi d'établir la stabilité orbitale avec phase asymptotique d'une solution périodique du système (2.4).

Théorème 2.10. (Tian et Wang 2011)

Une condition suffisante pour que l'orbite périodique $\gamma = \{p(t) | 0 \leq t \leq \omega\}$ de (2.4) soit asymptotiquement orbitalement stable avec phase asymptotique est que le système linéaire : $\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial F^{[2]}}{\partial x}(p(t))\right)z(t)$ soit asymptotiquement stable ; où $\frac{\partial F^{[2]}}{\partial x}$ est la seconde matrice composée de $\frac{\partial F}{\partial x}$ qui est la matrice jacobienne associée au système (2.4).

Le système (2.4) n'est pas toujours compétitif. Et dans ce cas, pour établir la stabilité globale d'un point d'équilibre, on peut aussi utiliser l'approche suivante.

2.5.2 Deuxième approche (approche géométrique) (Tian et Wang 2011, Nkague 2012)

De manière générale, lorsque $\frac{\partial F}{\partial x}$ est de dimension $n \times n$, alors celle de la matrice $\frac{\partial F^{[2]}}{\partial x}$ est de $\mathcal{C}_n^2 \times \mathcal{C}_n^2$.

Soit $x \mapsto P(x)$, une matrice de dimension $\mathcal{C}_n^2 \times \mathcal{C}_n^2$ dont les différentes entrées sont des fonctions de classe C^1 dans D . Supposons que P^{-1} existe et est continue dans un compact $K \subset D$.

Posons $Q = P_F P^{-1} + P \frac{\partial F^{[2]}}{\partial x} P^{-1}$,

Où P_F est la dérivée de P le long des directions de F .

Définition 2.20. (mesure de Lozinskii)

La mesure de Lozinskii de Q définie suivant la norme matricielle $||| \cdot |||$ est donnée par :

$$m(Q) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|||I + hQ||| - 1}{h}.$$

Posons $\bar{q}_2 = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t m(Q(x(s, x_0))) ds$.

2.6. Méthode de calcul du taux de reproduction de base

Théorème 2.11. (Ting et Wang 2011) Supposons que D est simplement connexe et que les hypothèses H_1 et H_2 du théorème 2.8. sont vérifiées. Alors l'unique point d'équilibre de (2.4) est globalement stable dans D si $\bar{q}_2 < 0$.

Définition 2.21. (Norme subordonnée (Nkagué 2012))

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n . la norme subordonnée à $\|\cdot\|$ est l'application :

$$N : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$A \mapsto N(A) = \sup_{v \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$$

2.6 Méthode de calcul du taux de reproduction de base

Le taux de reproduction de base couramment noté \mathcal{R}_0 est une quantité sans dimension qui, sous certaines conditions permet d'étudier la stabilité des points d'équilibre d'un système dynamique. Ce paramètre généralement utilisé dans la modélisation en écologie, en démographie et en épidémiologie est un concept clé et important que les mathématiciens ont apporté à la théorie des épidémies. Le taux de reproduction de base joue le rôle d'un coefficient multiplicatif. En effet, si on introduit un petit nombre d'infectés n , on obtiendra tout d'abord $\mathcal{R}_0 n$ nouveaux infectés, puis $\mathcal{R}_0^k n$ au bout de k étapes. Ce raisonnement est tout à fait intuitif. En fait, il s'agit d'une approximation au voisinage d'une situation où il y a peu d'infectieux, par rapport à la population totale. On pourrait en déduire que si $\mathcal{R}_0 > 1$, on observera une augmentation des cas, donc une épidémie, et si $\mathcal{R}_0 < 1$ alors les cas disparaîtront. Le taux de reproduction de base apparaît donc comme susceptible de jouer le rôle de seuil, pour les apparitions des épidémies.

Définition 2.22. Taux de reproduction de base

Le taux de reproduction de base est le nombre moyen de cas secondaires, produit par un individu infectieux au cours de sa période d'infectivité dans une population totalement constituée de susceptibles.

La méthode que nous décrivons par la suite est appelée la "next generation matrix"(matrice de la prochaine génération). Elle a d'abord été élaborée par Diekmann et Heesterbeek et puis reprise par Van Den Driessche et Watmough (Voir [20] c'est-à-dire (Van Den driessche et Watmough 2002)) pour les systèmes en dimension finie.

On considère un modèle épidémiologique comportant n classes ou compartiments homogènes. Le vecteur x représente l'état du système et x_j est le nombre (ou la concentration) d'individus dans le

2.6. Méthode de calcul du taux de reproduction de base

compartiment j . Les compartiments sont ordonnés de telle sorte que les derniers sont des infectés (latents, infectieux). Les k premiers compartiments sont les individus libres de l'infection (susceptibles). Soit le vecteur $x = (x_j); j = 1, \dots, n$ où x_j est le nombre (ou la concentration) des individus dans le compartiment j . Soit $\mathcal{F}_j(x)$ la vitesse d'apparition des infectieux dans ce même compartiment j . On note v_j^+ la vitesse de transfert des individus dans le compartiment j par tout autre moyen et v_j^- la vitesse de transfert hors du compartiment j . La dynamique définie dans ce compartiment est :

$$\dot{x}_j = \mathcal{F}_j(x) + v_j^+(x) - v_j^-(x)$$

On suppose que les fonctions \mathcal{F}_j, v_j^+ et v_j^- sont au moins de classe C^1 . Si on pose $v_j(x) = v_j^+(x) - v_j^-(x)$, la relation précédente devient :

$$\dot{x}_j = \mathcal{F}_j(x) + v_j(x)$$

Un état du système x_0 est sans maladie si les compartiments des infectés sont vides.

Définissons à présent le nombre moyen de ré-infections produites par un individu typique infecté dans un voisinage du point d'équilibre sans maladie.

Considérons la dynamique du système linéarisé au voisinage de ce point d'équilibre sans maladie avec une infection bloquée.

$$\dot{x} = Dv(x_0)(x - x_0) = Dv^+(x_0)(x - x_0) + Dv^-(x_0)(x - x_0).$$

On a le lemme suivant :

Lemme 2.2. (Van Den Driessche et Watmough 2002)

Si x_0 est un point d'équilibre sans maladie, alors les matrices $D\mathcal{F}(x_0)$ et $Dv(x_0)$ se décomposent en blocs :

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}, \quad Dv(x_0) = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

où $F > 0$ (matrice définie positive) et F est une matrice de Metzler (c'est-à-dire une matrice dans laquelle tous termes extras diagonaux sont positifs).

Par ailleurs, si x_0 est un point d'équilibre sans maladie,

$$F = \left[\frac{\partial \mathcal{F}_j(x_0)}{\partial x_i} \right], \quad V = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_j(x_0)}{\partial x_i} \right] \quad \text{avec } i, j = 1, \dots, n$$

V est une matrice de Metzler.

Interprétation de la matrice $-FV^{-1}$

Considérons un individu infecté introduit dans un compartiment $k > m$ d'une population sans maladie. L'entrée $(i; k)$ de la matrice $-V^{-1}$ est le temps moyen que l'individu passera dans le compartiment i au cours de sa vie, en supposant que l'on a bloqué la ré-infection.

2.6. Méthode de calcul du taux de reproduction de base

L'entrée $(j; i)$ de la matrice F est la vitesse à laquelle un infecté dans le compartiment i produit des infections dans le compartiment j . Ainsi, l'entrée $(j; i)$ de la matrice F est la vitesse à laquelle un infecté dans le compartiment i produit des infections dans le compartiment j . Ainsi, l'entrée $(j; k)$ de $-FV^{-1}$ est le nombre espéré de nouvelles infections dans le compartiment j produit par un individu infecté introduit originellement dans le compartiment k . La matrice $-FV^{-1}$ est appelée la "next generation matrix". Le rayon spectral de la matrice $-FV^{-1}$ et le nombre de reproduction de base. C'est-à-dire :

$$\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1}).$$

QUELQUES MODÈLES MATHÉMATIQUES DU CHOLÉRA EXISTANTS

Introduction

Plusieurs modèles mathématiques ont déjà été proposés pour étudier la complexité des épidémies et les endémies de choléra que le monde a déjà connues. Dans ce chapitre, nous présentons deux d'entre eux : le modèle de Codeço (Codeço 2001) et le modèle de Z. Mukandavire, S. Liao, J. wang, H. Gaff (Mukandavire et al. 2010).

3.1 Modèle de Codeço (2001)

3.1.1 Présentation générale du modèle

Le modèle proposé ici est une extension de celui établi par Capasso et Paveri-Fontana (1979) [4], qui était destiné à étudier l'épidémie de choléra qu'avait connue l'Italie en 1973. Leur modèle comprenait deux compartiments : Celui des personnes infectées I et celui des agents pathogènes dans les sources d'eau B . Dans son modèle, Codeço a introduit un nouveau compartiment : celui des personnes susceptibles S , qui sont les individus non infectés mais qui peuvent le devenir en cas d'exposition au vibrion cholérique. Le but de ce modèle est d'explorer le rôle du réservoir aquatique dans la persistance de la maladie. On suppose que n désigne le taux de natalité et le taux de mortalité de la population humaine, et que tous les individus naissent susceptibles. On suppose également que les susceptibles s'infectent uniquement par ingestion d'eaux contaminées et que le taux de contamination est $a \frac{B}{K+B}$. le taux de guérison des individus infectées est désigné par r et chaque personne infectée contribue à l'évolution de la population des vibrions cholériques à un taux e .

3.1.2 Diagramme des transferts et système différentiel

La figure 3.1 donnée plus bas indique les migrations entre les différents compartiments du modèle de Codeço (2001). Les flèches en traits continus illustrent les transferts des personnes entre les compartiments, tandis que celles en traits interrompus indiquent l'influence des facteurs environnementaux sur la croissance de la population des vibrions, pour ce qui de la flèche horizontale, et les autres désignent les transferts de vibrions entre l'homme et l'environnement.

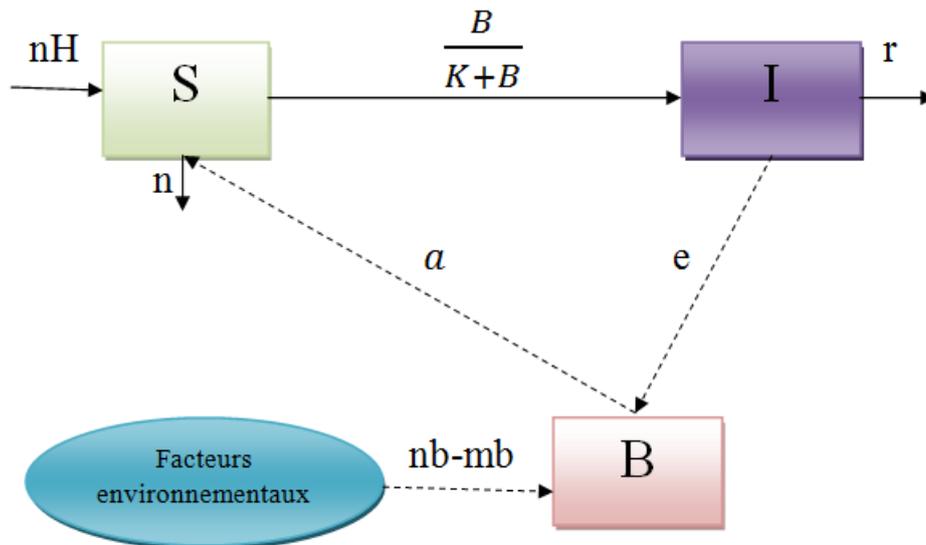


FIGURE 3.1 – Diagramme compartimental du modèle de codeco (2001)

Où :

- S représente le nombre de personnes susceptibles.
- I représente le nombre de personnes infectées.
- B est la concentration du vibrion cholérique dans les sources d'eau.
- H est la taille de la population humaine totale.
- n est le taux de natalité et de mortalité naturel des humains.
- r est le taux de rétablissement (guérison).
- K représente la dose de vibrion cholérique dans l'eau, suffisante pour donner la maladie à 50% de ceux qui la consomment.
- e représente l'apport de chaque personne infectée dans la contamination des eaux.
- nb représente le taux de croissance du vibrion cholérique dans les sources d'eau.
- mb est le taux de décès du vibrion cholérique dans les sources d'eau.
- a est le taux de contact entre les susceptibles et les eaux contaminées.

3.2. Modèle de Mukandavire et al. (2010)

– $\frac{B}{K+b}$ est la probabilité qu'une personne qui consomme une eau contaminée contracte la maladie.

Du diagramme donné plus haut, il en ressort que si on connaît le nombre de susceptibles ($S(t)$) à un instant t , alors à l'instant $t + \Delta t$ (avec Δt assez petit), on aura comme nombre de susceptibles :

$$S(t + \Delta t) = S(t) + \Delta t(nH - nS - a\frac{B}{B + K}S)$$

D'où on a :

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = nH - nS - a\frac{B}{K + B}S$$

Donc en considérant Δt infinitésimal, on obtient :

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = nH - nS - a\frac{B}{K + B}S.$$

D'où l'équation :

$$\dot{S} = n(H - s) - a\frac{B}{K + B}S$$

En procédant ainsi sur les autres classes (I, B), on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = n(H - s) - a\frac{B}{K+B}S \\ \dot{I} = a\frac{B}{K+B}S - rI \\ \dot{B} = eI - (mb - nb)B \end{cases}$$

La première équation décrit la dynamique des susceptibles dans la communauté de taille H , la deuxième décrit celle des infectés et la troisième, celle de la concentration du vibron cholérique dans les sources d'eau.

3.2 Modèle de Mukandavire et al. (2010)

3.2.1 Présentation générale du modèle

Ce modèle a été élaboré dans la but d'étudier l'épidémie de choléra qui a débuté en 2008 au Zimbabwe. Dans ce modèle, la population humaine totale est désignée par N et elle se partitionne en trois classes : celle des susceptibles S , celle des personnes infectées I et celle des personnes rétablies R qui est constituée de l'ensemble des personnes qui ont déjà eu à contracter la maladie et qui en sont guéries. On suppose qu'un rétabli ne peut plus contracter la maladie, que tous les humains naissent susceptibles et que le taux de natalité est égale au taux de mortalité et est désigné par μ . On suppose également qu'il y a deux moyens de transmission du vibron :

– Soit par contact direct avec une personne infectée et dans ce cas, β_2 désigne le taux d'ingestion de vibrions cholériques lors d'un contact entre un individu susceptible et un individu infecté.

3.2. Modèle de Mukandavire et al. (2010)

- On peut aussi être infecté en consommant une eau souillée. Dans ce cas, le taux de contamination est $\beta_1 \frac{B}{K+B}$ où β_1 est le taux de contact entre les susceptibles et les eaux contaminées, et $\frac{B}{K+B}$ est la probabilité qu'une personne qui entre en contact avec une eau souillée contracte la maladie.

On désigne par γ , le taux de guérison des personnes infectées et celles-ci peuvent aussi mourir d'une mort naturelle au taux μ , de même que les rétablis. chaque individu infecté contribue à l'évolution de la concentration du vibron cholérique au taux ξ . δ désigne le taux de décès du vibron cholérique et B sa concentration dans une eau contaminée.

3.2.2 Diagramme des transferts et système différentiel

Le diagramme représentant les migrations entre les différents compartiments du modèle de Mukandavire et al (2010) est donné plus bas ; et comme pour le cas précédent, Les flèches en traits continus illustrent les transferts des personnes entre les compartiments, tandis que celles en traits interrompus indiquent les transferts de vibrions entre l'homme et l'environnement.

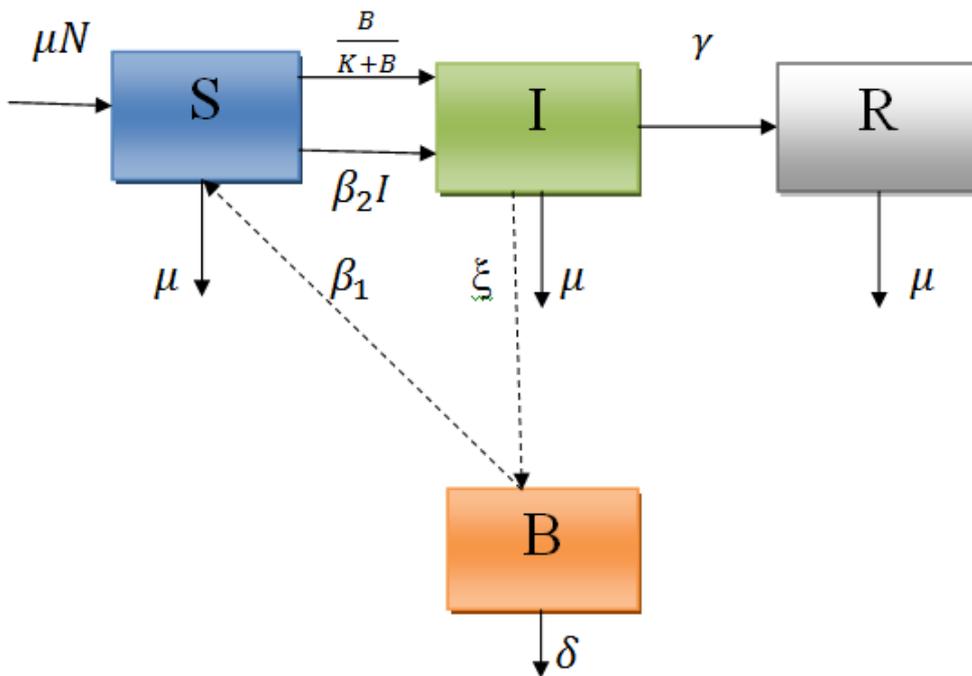


FIGURE 3.2 – Diagramme compartimental du modèle de Mukandavire et al(2010)

De la représentation ci-dessus, on peut dire que si on connaît le nombre de susceptibles $S(t)$ à un instant t , alors à l'instant $t + \Delta t$ (avec Δt assez petit), ce nombre est égal à :

$$S(t + \Delta t) = S(t) + \Delta t(\mu N - \mu S - \beta_1 S \frac{B}{K+B} - \beta_2 SI).$$

3.2. Modèle de Mukandavire et al. (2010)

D'où :

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \mu N - \mu S - \beta_1 S \frac{B}{K + B} - \beta_2 SI.$$

Donc en considérant Δt infinitésimal, on obtient :

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \mu N - \mu S - \beta_1 S \frac{B}{K + B} - \beta_2 SI.$$

D'où l'équation différentielle :

$$\dot{S} = \mu N - \mu S - \beta_1 S \frac{B}{K + B} - \beta_2 SI.$$

En procédant de manière similaire sur les autres compartiments (I , R et B), on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = \mu N - \beta_1 S \frac{B}{K+B} - \beta_2 SI - \mu S \\ \dot{I} = \beta_1 S \frac{B}{K+B} + \beta_2 SI - (\gamma + \mu) I \\ \dot{R} = \gamma I - \mu R \\ \dot{B} = \xi I - \delta B \end{cases}$$

La première équation décrit la dynamique des susceptibles dans la communauté de taille N , la seconde celle des infectés, la troisième celle des rétablis et la quatrième celle de la concentration du vibron cholérique dans les eaux souillées.

La différence fondamentale qui existe entre les deux modèles présentés plus haut réside au niveau de la définition des fonctions qui modélisent la transmission de la maladie c'est-à-dire les fonctions d'incidence ($f_1(B) = a \frac{B}{K+B}$ pour le modèle de codeço (2001), et $f_2(I, B) = \beta_1 \frac{B}{K+B} + \beta_2 I$ pour le modèle de Mukandavire et al (2010)). Dans le chapitre suivant, nous présentons un modèle qui propose une autre alternative.

MODÈLE DE WANG ET LIAO (2010)

Introduction

Le modèle que nous étudions est une sorte de généralisation du modèle de Mukandavire et al(2010) présenté à la deuxième partie du chapitre précédent. Dans ce modèle, il y a introduction de deux fonctions $f(I, B)$ et $h(I, B)$, où f est la fonction générale d'incidence, c'est elle qui régit les transferts du compartiment S vers le compartiment I ; elle peut aussi être vue comme taux de transmission de la maladie. La fonction h quant à elle permet de décrire la dynamique de la concentration du vibron cholérique B dans les sources d'eau. Le fait que f soit fonction de I nous ramène aux cas où la transmission se fait d'un infecté vers un susceptible et f fonction de B est lié aux cas où la transmission découle de l'ingestion d'eaux contaminées. h quant à elle fonction de I permet de considérer l'influence des infectés sur la contamination des eaux et, h fonction de B est pour le cas où une eau est souillée par une autre eau contaminée. Le modèle en question qui est proposé dans [21] (Wang et Liao 2010) est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{S} = bN - Sf(I, B) - bS & (4.1) \\ \dot{I} = Sf(I, B) - (\gamma + b)I & (4.2) \\ \dot{R} = \gamma I - bR & (4.3) \\ \dot{B} = h(I, B) & (4.4) \end{cases}$$

où b est le taux de natalité/mortalité (on suppose que le taux de natalité est égale au taux de mortalité) et γ est le taux de guérison. Sur la base de certaines considérations d'ordre biologique et logique ,on suppose pour la suite que pour $I \geq 0$ et $B \geq 0$, on a :

- (a) $f(0, 0) = 0$ et $h(0, 0) = 0$.
- (b) $f(I, B) \geq 0$.
- (c) $\frac{\partial f}{\partial I}(I, B) \geq 0$, $\frac{\partial f}{\partial B}(I, B) \geq 0$, $\frac{\partial h}{\partial I}(I, B) \geq 0$, $\frac{\partial h}{\partial B}(I, B) \leq 0$.
- (d) f et h sont concaves.
- (e) L'équation $h(I, B) = 0$ définie implicitement une fonction g telle que $B = g(I)$, qui vérifie $g'(I) \geq 0$ et $g''(I) \leq 0$.

4.1. Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$)

Nous ferons l'étude de notre modèle dans deux cas : Celui où la transmission se fait uniquement de l'environnement vers les humains et celui où la fonction d'incidence dépend linéairement de I et non linéairement de B .

4.1 Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$)

Un exemple de cette catégorie que nous étudions d'ailleurs est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = bN - Sf(B) - bS \quad (4.5) \\ \dot{I} = Sf(B) - (\gamma + b)I \quad (4.6) \\ \dot{R} = \gamma I - bR \quad (4.7) \\ \dot{B} = eI - mB \quad (4.8) \end{array} \right.$$

où $h(I, B) = eI - mB$

Remarquons que :

$$N = S + I + R. \quad (R)$$

Ceci s'explique par le fait qu'un humain est soit susceptible, soit infecté ou soit rétabli.

Étant donné que les équations en S, I et B du système (4.5)-(4.8) ne dépendent pas de R c'est-à-dire des rétablis, nous pouvons nous contenter d'étudier la dynamique du système constitué des équations (4.5), (4.6) et (4.8) et la dynamique de R pourra être étudiée grâce à l'équation (4.7) et à la relation (R). Donc notre étude se fera sur le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S} = bN - Sf(B) - bS \quad (4.9) \\ \dot{I} = Sf(B) - (\gamma + b)I \quad (4.10) \\ \dot{B} = eI - mB \quad (4.11) \end{array} \right.$$

4.1.1 Quelques résultats fondamentaux

Domaine de faisabilité

Proposition 4.1. $\Delta = \{(S, I, B) | S \geq 0, I \geq 0, 0 \leq S + I \leq N, 0 \leq B \leq \frac{eN}{m}\}$ est un domaine positivement invariant et absorbant pour le système (4.9)-(4.11).

Preuve. Considérons les fonctions g_1, g_2 et F définies de \mathbb{R}_+^3 vers \mathbb{R} par :

4.1. Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$)

$$g_1(S, I, B) = S + I - N; g_2(S, I, B) = B - \frac{eH}{m} \text{ et}$$

$$F(S, I, B) = \begin{pmatrix} bN - Sf(B) - bS \\ Sf(B) - (\gamma + b)I \\ eI - mB \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle F | \nabla g_1 \rangle &= bN - Sf(B) - bS + Sf(B) - (\gamma + b)I \\ &= bN - bS - \gamma I - bI \\ &\leq bN - bS - bI = b(N - (S + I)) = 0 \quad \text{sur } \{(S, I, B) \in \mathbb{R}_+^3 | S + I = N\} \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de la barrière, aucune trajectoire de (4.9) – (4.11) issue d'un point tel que $g_1(S, I, B) \leq 0$ ne peut sortir par l'ensemble $\{(S, I, B) \in \mathbb{R}_+^3 | S + I = N\}$.

On a aussi :

$$\begin{aligned} \langle F | \nabla g_2 \rangle &= eI - mB \\ &\leq eN - mB = m\left(\frac{eN}{m} - B\right) = 0 \quad \text{sur } \{(S, I, B) \in \mathbb{R}_+^3 | B = \frac{eN}{m}\} \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de la barrière, aucune trajectoire de (4.9) – (4.11) issue d'un point tel que $g_2(S, I, B) \leq 0$ ne peut sortir par l'ensemble $\{(S, I, B) \in \mathbb{R}_+^3 | B = \frac{eN}{m}\}$.

En outre,

Sur l'hyperplan d'équation $S(t) = 0$, on a : $\dot{S} = bN > 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc on ne peut franchir l'hyperplan d'équation $S(t) = 0$ vers les $S(t)$ strictement négatifs.

Sur l'hyperplan d'équation $I(t) = 0$, on a : $\dot{I} = Sf(B) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc on ne peut franchir l'hyperplan d'équation $I(t) = 0$ vers les $I(t)$ strictement négatifs.

Sur l'hyperplan d'équation $B(t) = 0$, on a : $\dot{B} = eI \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc on ne peut franchir l'hyperplan d'équation $B(t) = 0$ vers les $B(t)$ strictement négatifs.

Donc Δ est positivement invariant.

D'autre part, on a : $\dot{B} = eI - mB \Rightarrow \dot{B} \leq eN - mB$ (i) d'après (R).

La solution générale de l'inéquation $\dot{B} + mB \leq 0$ associée à (i) est : $B(t) \leq ke^{-mt}$, $k \in \mathbb{R}$ (ii)

En faisant varier la constante, on obtient :

$$\begin{aligned} k'e^{-mt} - mke^{-mt} &\leq eN - mke^{-mt} \Rightarrow k' \leq eNe^{mt} \\ &\Rightarrow k \leq \frac{eN}{m}e^{mt} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4.1. Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$)

En remplaçant cette dernière inégalité dans (ii), on obtient : $B(t) \leq \frac{eN}{m} + ce^{-mt}$.

Par conséquent, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Sup} B(t) \leq \frac{eN}{m}$. D'où $B \leq \frac{eN}{m}$.

Or (R) entraîne aussi que : $S + I \leq N$.

Donc l'ensemble Δ est absorbant. ■

Proposition 4.2. Le point d'équilibre sans maladie X_0 du système (4.9)-(4.11) est donné par $X_0 = (N, 0, 0)$.

Preuve le point d'équilibre sans maladie X_0 du système (4.9)-(4.11) est donné par :

$$\begin{cases} bN - Sf(B) - bS = 0 \\ Sf(B) - (\gamma + b)I = 0 \\ eI - mB = 0 \\ I = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

D'où on a :

$$\begin{cases} S = N \\ I = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$
■

Proposition 4.3. Le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 du système (4.9)-(4.11) est donné par :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{N}{\gamma + b} f'(0) \frac{e}{m}$$

Preuve Déterminons \mathcal{R}_0 à l'aide de la méthode de Van Den Driessche et Watmough donnée dans le lemme 2.2.

Posons

$$\mathcal{F}(I, B) = \begin{pmatrix} Sf(B) - (\gamma + b)I \\ eI - mB \end{pmatrix}$$

et $X = (I, B)$.

Alors la matrice jacobienne de \mathcal{F} au point d'équilibre sans maladie X_0 est :

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{F}(X_0)} &= \begin{pmatrix} -(\gamma + b) & Nf'(0) \\ e & -m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & Nf'(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\gamma + b) & 0 \\ e & -m \end{pmatrix} \\ &= F + V \end{aligned}$$

4.1. Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$)

où

$$F = \begin{pmatrix} 0 & Nf'(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} -(\gamma + b) & 0 \\ e & -m \end{pmatrix}$$

Alors

$$V^{-1} = \frac{1}{m(\gamma + b)} \begin{pmatrix} -m & 0 \\ -e & -(\gamma + b) \end{pmatrix}$$

D'où

$$-FV^{-1} = \frac{1}{m(\gamma + b)} \begin{pmatrix} 0 & Nf'(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ e & \gamma + b \end{pmatrix} = \frac{1}{m(\gamma + b)} \begin{pmatrix} eNf'(0) & N(\gamma + b)f'(0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire (supérieure), donc ses valeurs propres sont les valeurs diagonales, qui sont : $\frac{eNf'(0)}{m(\gamma + b)}$ et 0.

D'où le rayon spectral est $\frac{eNf'(0)}{m(\gamma + b)}$

Donc :

$$\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1}) = \frac{eNf'(0)}{m(\gamma + b)}.$$

■

Proposition 4.4. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors outre le point d'équilibre sans maladie $X_0 = (N, 0, 0)$, le système (4.9)-(4.11) admet un deuxième point d'équilibre : le point d'équilibre endémique $X^* = (S^*, I^*, B^*)$.

Preuve. On admet dans cette preuve que $f'(0) > 0$. Les points d'équilibre du système (4.9)-(4.11) sont donnés par :

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ \dot{I} = 0 \\ \dot{B} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} bN - Sf(B) - bS = 0 & (i) \\ Sf(B) - (\gamma + b)I = 0 & (ii) \\ eI - mB = 0 & (iii) \end{cases}$$

On a :

$$(i) + (ii) \implies bN - bS - (\gamma + b)I = 0$$

D'où :

$$S = N - \frac{\gamma + b}{b}I \quad (iv)$$

$$(iii) \implies B = \frac{e}{m}I \quad (v)$$

(iv) et (v) dans (ii) donne :

$$\left(N - \frac{\gamma + b}{b}I\right)f\left(\frac{e}{m}I\right) - (\gamma + b)I = 0 \quad (vi)$$

4.1. Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$)

le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction f est donné par :

$$f(B) = f(0) + Bf'(0) = Bf'(0) \text{ car } f(0) = 0 \text{ d'après (a).}$$

D'où :

$$f\left(\frac{e}{m}I\right) = \frac{e}{m}If'(0) \quad (vii)$$

(vii) dans (vi) donne :

$$\left(N - \frac{\gamma + b}{b}I\right)\left(\frac{e}{m}If'(0)\right) - (\gamma + b)I = 0$$

$$\left(N - \frac{\gamma + b}{b}I\right)\left(\frac{e}{m}If'(0)\right) - (\gamma + b)I = 0 \Rightarrow I\left[\left(\frac{e}{m}f'(0)\right)\left(N - \frac{\gamma + b}{b}I\right) - (\gamma + b)\right] = 0$$

$$\Rightarrow I = 0 \text{ ou } \left(\frac{e}{m}f'(0)\right)\left(N - \frac{\gamma + b}{b}I\right) - (\gamma + b) = 0$$

$I = 0$ entraîne que $B = 0$ d'après (v) et que $S = N$ d'après (iv). On obtient là le point d'équilibre sans maladie X_0 .

$$\begin{aligned} \frac{e}{m}f'(0)\left(N - \frac{\gamma + b}{b}I\right) - (\gamma + b) = 0 &\Rightarrow \left(N - \frac{\gamma + b}{b}I\right) = \frac{\gamma + b}{\frac{e}{m}f'(0)} \\ &\Rightarrow \frac{\gamma + b}{b}I = N - \frac{\gamma + b}{\frac{e}{m}f'(0)} \\ &\Rightarrow I = \frac{Nb}{\gamma + b} - \frac{b}{\frac{e}{m}f'(0)} \\ &\Rightarrow I = \frac{1}{\frac{e}{m}f'(0)}\left(\frac{Nb\frac{e}{m}f'(0)}{\gamma + b} - b\right) \\ &\Rightarrow I = \frac{mb}{ef'(0)}(\mathcal{R}_0 - 1) > 0 \end{aligned}$$

Donc on peut prendre $I^* = \frac{mb}{ef'(0)}(\mathcal{R}_0 - 1)$ et dans ce cas, (iv) et (v) vont entraîner que :

$$B^* = \frac{e}{m} \frac{mb}{ef'(0)}(\mathcal{R}_0 - 1) = \frac{b}{f'(0)}(\mathcal{R}_0 - 1) > 0$$

et

$$S^* = N - \frac{m(\gamma + b)}{ef'(0)}(\mathcal{R}_0 - 1) = N\left(1 - \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0}\right) = \frac{1}{\mathcal{R}_0} > 0$$

■

4.1.2 Stabilité du point d'équilibre sans maladie

Stabilité locale du point d'équilibre sans maladie

Proposition 4.5. Si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors le point d'équilibre sans maladie $X_0 = (N, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable. Mais lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$, $X_0 = (N, 0, 0)$ est instable.

Preuve. La matrice jacobienne associée au système (4.9)-(4.11) au point $X_0 = (N, 0, 0)$ est donnée par :

$$J_{X_0} = \begin{pmatrix} -b & 0 & -Nf'(0) \\ 0 & -\gamma - b & Nf'(0) \\ 0 & e & -m \end{pmatrix}$$

4.1. Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$)

Les valeurs propres de cette matrice sont : $-b, \lambda_1, \lambda_2$, où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -\gamma - b & Nf'(0) \\ e & -m \end{pmatrix}$$

on aura alors : $\lambda_1 \lambda_2 = \det(A)$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A)$.

Si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors on a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= m(\gamma + b) - eNf'(0) \\ &= m(\gamma + b)\left(1 - \frac{eNf'(0)}{m(\gamma + b)}\right) \\ &= m(\gamma + b)(1 - \mathcal{R}_0) > 0 \end{aligned}$$

Donc λ_1 et λ_2 sont deux nombres réels ayant le même signe. D'autre part, $\text{tr}(A) = -\gamma - b - m < 0$.

D'où $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

Donc toutes les valeurs propres de J_{X_0} , ($-m, \lambda_1$ et λ_2) sont strictement négatives ; ce qui nous permet de conclure que $X_0 = (N, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable (d'après le théorème 2.2.).

Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors $\det(A) < 0$ et puisque λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors λ_1 et λ_2 sont de signes opposés. Donc $X_0 = (N, 0, 0)$ est instable (d'après le théorème 2.2.). ■

Stabilité globale du point d'équilibre sans maladie

Proposition 4.6. Si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors le point d'équilibre sans maladie $X_0 = (N, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable dans Δ .

Preuve. On suppose $\mathcal{R}_0 < 1$. Considérons la fonction V définie comme suit :

$$V = (S, I, B) = eI + (\gamma + b)B$$

La dérivée orbitale de V est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e\dot{I} + (\gamma + b)\dot{B} \\ &= e(Sf(B) - (\gamma + b)I) + (\gamma + b)(eI - mB) \\ &= eSf(B) - m(\gamma + b)B \\ &= m(\gamma + b)\left[\frac{eSf(B)}{m(\gamma + b)} - B\right] \end{aligned}$$

Or le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction f est :

$$f(B) = f(0) + Bf'(0) = Bf'(0) \quad \text{car} \quad (a) \quad \text{donne} \quad f(0) = 0.$$

D'où on a :

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= m(\gamma + b) \left[\frac{eSBf'(0)}{m(\gamma+b)} - B \right] \\
 &= mB(\gamma + b) \left[\frac{eSf'(0)}{m(\gamma+b)} - 1 \right] \\
 &= mB(\gamma + b) \left[\frac{eNf'(0)}{m(\gamma+b)} \frac{S}{N} - 1 \right] \\
 &= mB(\gamma + b) \left(\frac{S}{N} \mathcal{R}_0 - 1 \right) \\
 &\leq mB(\gamma + b)(\mathcal{R}_0 - 1) \leq 0 \quad \text{car} \quad \mathcal{R}_0 - 1 < 0
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\dot{V} \leq 0$$

En outre, $\dot{V} = 0 \Rightarrow B = 0$.

Donc le plus grand ensemble invariant contenu dans $\{(S, I, B) \in \Delta \mid \dot{V} = 0\}$ est le singleton X_0 .

D'où d'après le principe d'invariance de Lasalle (théorème 2.6.), Le point X_0 est globalement asymptotiquement stable Dans Δ . ■

4.1.3 Stabilité du point d'équilibre endémique

Stabilité locale du point d'équilibre endémique

Proposition 4.7. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le point d'équilibre endémique $X^* = (S^*, I^*, B^*)$ est localement asymptotiquement stable.

Preuve. La matrice jacobienne associée au système (4.9)-(4.11) en un point $X = (S, I, B)$ est donnée par :

$$J_X = \begin{pmatrix} -f(B) - b & 0 & -Sf'(B) \\ f(B) & -(\gamma + b) & Sf'(B) \\ 0 & e & -m \end{pmatrix}$$

Au point $X^* = (S^*, I^*, B^*)$, cette matrice est alors :

$$J_{X^*} = \begin{pmatrix} -f(B^*) - b & 0 & -S^*f'(B^*) \\ f(B^*) & -(\gamma + b) & S^*f'(B^*) \\ 0 & e & -m \end{pmatrix}$$

4.1. Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$)

Le polynôme caractéristique de J_{X^*} est donné par :

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= \begin{vmatrix} -f(B^*) - b - \lambda & 0 & -S^* f'(B^*) \\ f(B^*) & -(\gamma + b) - \lambda & S^* f'(B^*) \\ 0 & e & -m - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (-f(B^*) - b - \lambda)((-\gamma + b) - \lambda)(-m - \lambda) - eS^* f'(B^*) - f(B^*)(eS^* f'(B^*)) \\
 &= (-f(B^*) - b - \lambda)(m(\gamma + b) + (\gamma + b)\lambda + m\lambda + \lambda^2 - eS^* f'(B^*)) - f(B^*)eS^* f'(B^*) \\
 &= -[\lambda^3 + (f(B^*) + m + \gamma + 2b)\lambda^2 + ((f(B^*) + b)(m + \gamma + b) + m(\gamma + b) - eS^* f'(B^*))\lambda \\
 &\quad + (m(f(B^*) + b)(\gamma + b) - (f(B^*) + b)eS^* f'(B^*) + f(B^*)eS^* f'(B^*))] \\
 &= -Q(\lambda)
 \end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned}
 Q(\lambda) &= \lambda^3 + (f(B^*) + m + \gamma + 2b)\lambda^2 + ((f(B^*) + b)(m + \gamma + b) + m(\gamma + b) - eS^* f'(B^*))\lambda \\
 &\quad + (m(f(B^*) + b)(\gamma + b) - (f(B^*) + b)eS^* f'(B^*) + f(B^*)eS^* f'(B^*)).
 \end{aligned}$$

$P(\lambda) = -Q(\lambda)$ entraîne que les polynômes P et Q ont les mêmes racines. Donc l'étude des valeurs propres de J_{X^*} peut être faite sur Q .

On peut écrire : $Q(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$.

Où :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = f(B^*) + m + \gamma + 2b \\ a_2 = (f(B^*) + b)(m + \gamma + b) + m(\gamma + b) - eS^* f'(B^*) \\ a_3 = m(f(B^*) + b)(\gamma + b) - (f(B^*) + b)eS^* f'(B^*) + f(B^*)eS^* f'(B^*) \end{cases}$$

Posons :

$$\Gamma = m(\gamma + b) - eS^* f'(B^*).$$

Montrons que $\Gamma > 0$.

On sait que :

$$S^* f(B^*) - (\gamma + b)I^* = 0 \quad \text{et} \quad eI^* - mB^* = 0;$$

D'où :

$$\gamma + b = \frac{S^* f(B^*)}{I^*} \quad \text{et} \quad m = \frac{eI^*}{B^*}.$$

Le développement limité à l'ordre 1 au voisinage 0 de f nous permet d'écrire :

$$f(B^*) = f(0) + B^* f'(0) = B^* f'(0) \quad \text{car} \quad f(0) = 0;$$

D'où on a :

$$m(\gamma + b) = \frac{eI^*}{B^*} \frac{S^* f(B^*)}{I^*} = \frac{eS^* f(B^*)}{B^*} = \frac{eS^* B^* f'(0)}{B^*} = eS^* f'(0).$$

4.1. Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$)

Donc :

$$\begin{aligned}\Gamma &= m(\gamma + b) - eS^*f'(B^*) \\ &= eS^*f'(0) - eS^*f'(B^*) \\ &= eS^*(f'(0) - f'(B^*))\end{aligned}$$

Or $f'(0) - f'(B^*) > 0$ car f' est strictement décroissante d'après (d) et $B^* > 0$.

Donc $\Gamma = eS^*(f'(0) - f'(B^*)) > 0$.

Alors :

$$\begin{aligned}a_3 &= m(f(B^*) + b)(\gamma + b) - (f(B^*) + b)eS^*f'(B^*) + f(B^*)eS^*f'(B^*) \\ &= (f(B^*) + b)(m(\gamma + b) - eS^*f'(B^*)) + f(B^*)eS^*f'(B^*) \\ &= (f(B^*) + b)\Gamma + f(B^*)eS^*f'(B^*) > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_1a_2 - a_0a_3 &= (f(B^*) + m + \gamma + 2b)(f(B^*) + b)(m + \gamma + b) + m(\gamma + b) - eS^*f'(B^*) \\ &\quad - (1)m(f(B^*) + b)(\gamma + b) - (f(B^*) + b)eS^*f'(B^*) + f(B^*)eS^*f'(B^*) \\ &= (f(B^*) + b)^2(m + \gamma + b) + m(\gamma + b)(f(B^*) + b) - eS^*f'(B^*)(f(B^*) + b) \\ &\quad + (f(B^*) + b)(m + \gamma + b)^2 + (m(\gamma + b)(m + \gamma + b) - eS^*f'(B^*)(m + \gamma + b) \\ &\quad - (f(B^*) + b)m(\gamma + b) + eS^*f'(B^*)(f(B^*) + b) - f(B^*)eS^*f'(B^*)) \\ &= (f(B^*) + b)^2(m + \gamma + b) + m(\gamma + b)(f(B^*) + b) - (f(B^*) + b)m(\gamma + b) \\ &\quad + (f(B^*) + b)(m + \gamma + b)^2 - eS^*f'(B^*)(f(B^*) + b) + (m(\gamma + b)(m + \gamma + b) \\ &\quad - eS^*f'(B^*)(m + \gamma + b) + eS^*f'(B^*)(f(B^*) + b) - f(B^*)eS^*f'(B^*)) \\ &= (f(B^*) + b)^2(m + \gamma + b) + (f(B^*) + b)[m + \gamma + b]^2 - eS^*f'(B^*) \\ &\quad + (m + \gamma + b)[m(\gamma + b) - eS^*f'(B^*)] + eS^*f'(B^*)b \\ &= (f(B^*) + b)^2(m + \gamma + b) + (f(B^*) + b)[m^2 + (\gamma + b)^2 + m(\gamma + b) + m(\gamma + b) \\ &\quad + m(\gamma + b) - eS^*f'(B^*)] + (m + \gamma + b)\Gamma + eS^*f'(B^*)b \\ &= (f(B^*) + b)^2(m + \gamma + b) + (f(B^*) + b)[m^2 + (\gamma + b)^2 + m(\gamma + b) + \Gamma] \\ &\quad + (m + \gamma + b)\Gamma + eS^*f'(B^*)b > 0.\end{aligned}$$

On aussi

$$a_1 = f(B^*) + m + \gamma + 2b > 0$$

Donc on a en définitive :

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0 \quad \text{et} \quad a_1a_2 - a_0a_3 > 0.$$

Donc d'après le théorème 2.3 (critère de Routh-Hurwitz), le point d'équilibre endémique $X^* = (S^*, I^*, B^*)$ est localement asymptotiquement stable. ■

Stabilité globale du point d'équilibre endémique

Nous allons établir la stabilité globale du système (4.9)-(4.11) sur $D = \Delta^\circ$, qui est l'intérieur de Δ .

Remarque 4.1.1. Nous avons vu plus haut que lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$, le système (4.9)-(4.11) admet deux points d'équilibre sur Δ qui sont : le point d'équilibre sans maladie $X_0 = (N, 0, 0)$ et le point d'équilibre endémique $X^* = (S^*, I^*, B^*)$. Or $X_0 = (N, 0, 0)$ appartient à la frontière de Δ . Donc le seul point d'équilibre du système (4.9)-(4.11) qui appartient à Δ° est $X^* = (S^*, I^*, B^*)$. D'où la condition (H_2) du théorème (2.8) est vérifiée.

Étudions maintenant la persistance du système (4.9)-(4.11).

Proposition 4.8. (Tian et Wang 2011)

Le point d'équilibre sans maladie X_0 est le seul point ω -limite du système (4.9)-(4.11) sur la frontière $\partial\Delta$ de Δ .

Proposition 4.9. (Tian et Wang 2011)

Lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$, X_0 ne peut être le point ω -limite d'une orbite dont l'origine appartient à Δ° , l'intérieur de Δ .

les propositions 4.4. et 4.5. ci-dessus nous permettent d'avoir le résultat suivant.

Corollaire 4.1. Le système (4.9)-(4.11) est uniformément persistant.

Le corollaire 4.1. et le lemme 2.1. nous donnent le résultat suivant.

Corollaire 4.2. la condition (H_1) du théorème (2.8) est vérifiée.

Vérifions que le système (4.9)-(4.11) satisfait à la propriété de Poincaré Bendixson.

Proposition 4.10. Le système (4.9)-(4.11) est compétitif

Preuve. La matrice jacobienne associée au système (4.9)-(4.11) en un point $X = (S, I, B)$ est donnée par :

$$J_X = \begin{pmatrix} -f(B) - b & 0 & -Sf'(B) \\ f(B) & -(\gamma + b) & Sf'(B) \\ 0 & e & -m \end{pmatrix}$$

Posons :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1. Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$)

On a :

$$\begin{aligned}
 HJ_X H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -f(B) - b & 0 & -Sf'(B) \\ f(B) & -(\gamma + b) & Sf'(B) \\ 0 & e & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -f(B) - b & 0 & -Sf'(B) \\ -f(B) & -(\gamma + b) & -Sf'(B) \\ 0 & -e & -m \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On voit bien que tous les termes extra-diagonaux de la matrice $HJ_X H$ sont négatifs. Donc le système (4.9)-(4.11) est compétitif. ■

Proposition 4.11. Le système (4.9)-(4.11) vérifie la propriété de Poincaré Bendixson.

Preuve. Elle découle de la remarque 2.6.1. et de la proposition 4.6. ■

Proposition 4.12. La trajectoire d'une solution périodique non-constante du système (4.9)-(4.11), si elle existe, est orbitalement asymptotiquement stable avec phase asymptotique.

Preuve. La seconde matrice composée du système (4.9)-(4.11) est donnée par :

$$J^{[2]} = \begin{pmatrix} -2b - \gamma - f(B) & Sf'(B) & Sf'(B) \\ e & -b - m - f(B) & 0 \\ 0 & f(B) & -b - m - \gamma \end{pmatrix}$$

Alors, le second système composé défini le long d'une solution périodique $(S(t), I(t), B(t))$ du système (4.9)-(4.11) est donné par

$$\begin{cases} \dot{X} &= -(2b + \gamma + f(B))X + Sf'(B)(Y + Z) \\ \dot{Y} &= eX - (b + m + f(B))Y \\ \dot{Z} &= f(B)Y - (b + m + \gamma)Z \end{cases}$$

Considérons la fonction de Lyapunov définie comme suit

$$V(X, Y, Z, S, I, B) = \sup\{|X|, \frac{I}{B}(|Y| + |Z|)\}$$

Étant donné que le système (4.9)-(4.11) est persistant, chacune de ses solutions périodiques $(S(t), I(t), B(t))$ est à une distance strictement positive de la frontière $\partial\Delta$ de Δ . Ainsi $\frac{I}{B}$ est bien définie, et il existe un réel $c > 0$ tel que $\frac{I}{B} > c$. Considérons un réel c_0 tel que $1 \geq c_0 > 0$ et $c > c_0$. On a alors :

$$V(X, Y, Z, S, I, B) \geq c_0 \sup\{|X|, |Y|, |Z|\}$$

4.1. Modèle avec fonction d'incidence dépendant uniquement de B ($f(I, B) = f(B)$)

Où $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ et $(S(t), I(t), B(t))$ est une solution périodique du système (4.9)-(4.11).

Évaluons la dérivée à droite le long d'une solution $(X(t), Y(t), Z(t))$ du second système composé donné plus haut et $(S(t), I(t), B(t))$ du système (4.9)-(4.11).

$$\begin{aligned} D_+|X(t)| &\leq -(2b + \gamma + f(B))|X| + \frac{Sf'(B)B}{I} \frac{I}{B} (|Y| + |Z|), \\ D_+|Y(t)| &\leq e|X| - (b + m + f(B))|Y|, \\ D_+|Z(t)| &\leq f(B)|Y| - (b + m + \gamma)|Z|, \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} D_+ \frac{I}{B} (|Y| + |Z|) &= \left(\frac{I'B - B'I}{B^2} \right) (|Y| + |Z|) + \frac{I}{B} D_+ (|Y| + |Z|) \\ &= \left(\frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} \right) \frac{I}{B} (|Y| + |Z|) + \frac{I}{B} D_+ (|Y| + |Z|) \\ &\leq \left(\frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} \right) \frac{I}{B} (|Y| + |Z|) + \frac{I}{B} (e|X| - (b + m)(|Y| + |Z|)) \end{aligned}$$

Donc

$$D_+ \frac{I}{B} (|Y| + |Z|) \leq e \frac{I}{B} |X| + \left(\frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} - (b + m) \right) \frac{I}{B} (|Y| + |Z|).$$

Posons $g_1(t) = -2b - \gamma - f(B) + \frac{Sf'(B)B}{I}$ et $g_2(t) = e \frac{I}{B} + \frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} - (b + m)$.

L'équation (4.11) nous permet d'écrire $\frac{B'}{B} = e \frac{I}{B} - m$

Alors, on a

$$g_2(t) = \frac{I'}{I} - b$$

De l'équation (4.10), on a $\frac{I'}{I} = \frac{Sf'(B)}{I} - (\gamma + b)$. Donc $\frac{S}{I} = \left(\frac{I'}{I} + (\gamma + b) \right) \frac{1}{f(B)}$.

Pour $B > 0$, il existe $\eta \in]0; B[$ tel que

$$\frac{f(B) - f(0)}{B - 0} = f'(\eta).$$

or $f(0) = 0$ d'après l'hypothèse (a) et f' est décroissante car $f'' \leq 0$ d'après l'hypothèse (d). donc

Pour $B > 0$, et $\eta \in]0; B[$, on a

$$\frac{f(B)}{B} = \frac{f(B) - f(0)}{B - 0} = f'(\eta) \geq f'(B)$$

ce qui entraîne que $f'(B)B \leq f(B)$. D'où on peut écrire

$$\begin{aligned} g_1(t) &= -2b - \gamma - f(B) + f'(B)B \left(\frac{I'}{I} + (\gamma + b) \right) \frac{1}{f(B)} \\ &= -2b - \gamma - f(B) + \frac{f'(B)B}{f(B)} \left(\frac{I'}{I} + (\gamma + b) \right) \\ &\leq -2b - \gamma - f(B) + \frac{I'}{I} + (\gamma + b) = -b - f(B) + \frac{I'}{I} \leq \frac{I'}{I} - b. \end{aligned}$$

Donc on a alors

$$D_+ V(t) \leq \max\{g_1(t), g_2(t)\} V(t) = g_2(t) V(t)$$

Notons par τ , la période de la solution périodique $S((t), I(t), B(t))$ du système (4.9)-(4.11). On a :

$$\int_0^\tau \max\{g_1(t), g_2(t)\} dt \leq \int_0^\tau \left(\frac{I'}{I} - b \right) dt = [\ln I(t) - bt]_0^\tau = -b\tau < 0.$$

4.2. Modèle avec fonction d'incidence dépendant linéairement de I et non linéairement de B

Donc

$$V(t) \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty$$

D'où

$$(X(t), Y(t), Z(t)) \rightarrow (0, 0, 0) \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty$$

Donc le second système composé du système (4.9)-(4.11) est asymptotiquement stable ; et par conséquent, d'après le théorème 2.9., le système (4.9)-(4.11) est orbitalement asymptotiquement stable avec phase asymptotique. ■

Proposition 4.13. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le point d'équilibre endémique $X^* = (S^*, I^*, B^*)$ est globalement asymptotiquement stable dans Δ° .

Preuve. Elle découle du théorème 2.8., des propositions 4.7., 4.11., 4.12., de la remarque 4.1.1. et du corollaire 4.2. ■

4.2 Modèle avec fonction d'incidence dépendant linéairement de I et non linéairement de B

Un exemple de cette catégorie que nous étudions est le modèle de Mukandavire et al (2010) [15] présenté au chapitre précédent. Ce modèle est :

$$\begin{cases} \dot{S} = \mu N - \beta_1 S \frac{B}{K+B} - \beta_2 SI - \mu S & (4.12) \\ \dot{I} = \beta_1 S \frac{B}{K+B} + \beta_2 SI - (\gamma + \mu)I & (4.13) \\ \dot{R} = \gamma I - \mu R & (4.14) \\ \dot{B} = \xi I - \delta B & (4.15) \end{cases}$$

Comme pour le modèle précédent, étant donné que les équations en S, I et B du système ci-dessus ne dépendent pas de R, nous pouvons nous contenter d'étudier la dynamique du système constitué des équations (4.12), (4.13) et (4.15) et la dynamique de R pourra être étudiée grâce à l'équation (4.14) et à la relation (R) ($N = S + I + R$). Donc notre étude se fera sur le système :

$$\begin{cases} \dot{S} = \mu N - \beta_1 S \frac{B}{K+B} - \beta_2 SI - \mu S & (4.16) \\ \dot{I} = \beta_1 S \frac{B}{K+B} + \beta_2 SI - (\gamma + \mu)I & (4.17) \\ \dot{B} = \xi I - \delta B & (4.18) \end{cases}$$

4.2.1 Quelques résultats fondamentaux

Proposition 4.14. $\Delta = \{(S, I, B) | S \geq 0, I \geq 0, 0 \leq S + I \leq N, 0 \leq B \leq \frac{\xi}{\delta} N\}$ est un domaine positivement invariant et absorbant pour le système (4.16)-(4.18).

4.2. Modèle avec fonction d'incidence dépendant linéairement de I et non linéairement de B

Preuve. Considérons les fonctions F_1, F_2 et F définies de \mathbb{R}_+^3 vers \mathbb{R} par :

$$F_1(S, I, B) = S + I - N; F_2(S, I, B) = B - \frac{\xi N}{\delta} \text{ et}$$

$$F(S, I, B) = \begin{pmatrix} \mu N - \beta_1 S \frac{B}{K+B} - \beta_2 SI - \mu S \\ \beta_1 S \frac{B}{K+B} + \beta_2 SI - (\gamma + \mu)I \\ \xi I - \delta B \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\nabla F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle F | \nabla F_1 \rangle &= \mu N - \beta_1 S \frac{B}{K+B} - \beta_2 SI - \mu S + (\beta_1 S \frac{B}{K+B} + \beta_2 SI - (\gamma + \mu)I) \\ &= \mu N - \mu S - \gamma I - \mu I \\ &\leq \mu N - \mu S - \mu I = \mu(N - (S + I)) = 0 \quad \text{sur} \quad \{(S, I, B) \in \mathbb{R}_+^3 | S + I = N\} \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de la barrière, aucune trajectoire de (4.16) – (4.18) issue d'un point tel que $F_1(S, I, B) \leq 0$ ne peut sortir par l'ensemble $\{(S, I, B) \in \mathbb{R}_+^3 | S + I = N\}$.

On a aussi :

$$\begin{aligned} \langle F | \nabla g_2 \rangle &= \xi I - \delta B \\ &\leq \xi N - \delta B = \delta \left(\frac{\xi N}{\delta} - B \right) = 0 \quad \text{sur} \quad \{(S, I, B) \in \mathbb{R}_+^3 | B = \frac{\xi N}{\delta}\} \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de la barrière (théorème 2.1.), aucune trajectoire de (4.16) – (4.18) issue d'un point tel que $F_2(S, I, B) \leq 0$ ne peut sortir par l'ensemble $\{(S, I, B) \in \mathbb{R}_+^3 | B = \frac{\xi N}{\delta}\}$.

En outre,

- Sur l'hyperplan d'équation $S(t) = 0$, on a : $\dot{S} = \mu N > 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc on ne peut franchir l'hyperplan d'équation $S(t) = 0$ vers les $S(t)$ strictement négatifs.
- Sur l'hyperplan d'équation $I(t) = 0$, on a : $\dot{I} = \beta_1 \frac{SB}{K+B} \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc on ne peut franchir l'hyperplan d'équation $I(t) = 0$ vers les $I(t)$ strictement négatifs.
- Sur l'hyperplan d'équation $B(t) = 0$, on a : $\dot{B} = \xi I \geq 0$ pour tout $t \geq 0$. Donc on ne peut franchir l'hyperplan d'équation $B(t) = 0$ vers les $B(t)$ strictement négatifs.

Donc Δ est positivement invariant.

D'autre part, on a : $\dot{B} = \xi I - \delta B \Rightarrow \dot{B} \leq \xi N - \delta B$ (i) (d'après (R)).

La solution générale de l'inéquation $\dot{B} + \delta B \leq 0$ associée à (i) est : $B(t) \leq ke^{-\delta t}$ (ii), $k \in \mathbb{R}$

En faisant varier la constante, on obtient :

$$\begin{aligned} k'(t)e^{-\delta t} - \delta k(t)e^{-\delta t} \leq eN - \delta k(t)e^{-\delta t} &\Rightarrow k'(t) \leq eNe^{\delta t} \\ &\Rightarrow k(t) \leq \frac{eN}{\delta} e^{\delta t} + c, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4.2. Modèle avec fonction d'incidence dépendant linéairement de I et non linéairement de B

En remplaçant cette dernière inégalité dans (ii), on obtient : $B(t) \leq \frac{eN}{\delta} + ce^{-\delta t}$.

Par conséquent, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Sup} B(t) \leq \frac{eN}{m}$. D'où $B \leq \frac{eN}{\delta}$.

Or (R) entraîne aussi que : $S + I \leq N$

Donc l'ensemble Δ est absorbant. ■

Proposition 4.15. Le point d'équilibre sans maladie X_0 du système (4.16)-(4.18) est donné par $X_0 = (N, 0, 0)$.

Preuve. Le point d'équilibre sans maladie X_0 du système (4.16)-(4.18) est donné par :

$$\begin{cases} \mu N - \beta_1 S \frac{B}{K+B} - \beta_2 SI - \mu S = 0 \\ \beta_1 S \frac{B}{K+B} + \beta_2 SI - (\gamma + \mu) I = 0 \\ \xi I - \delta B = 0 \\ I = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} S = N \\ I = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

Proposition 4.16. Le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 du système (4.16)-(4.18) est donné par :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{N}{\gamma + \mu} \left(\beta_1 \frac{\xi}{K\delta} + \beta_2 \right).$$

Preuve. Déterminons \mathcal{R}_0 à l'aide de la méthode de Van Den Driessche et Watmough.

Posons

$$\mathcal{F}(I, B) = \begin{pmatrix} \beta_1 S \frac{B}{K+B} + \beta_2 SI - (\gamma + \mu) I \\ \xi I - \delta B \end{pmatrix}$$

et $X=(I,B)$.

Alors la matrice jacobienne de \mathcal{F} au point d'équilibre sans maladie X_0 est :

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{F}(X_0)} &= \begin{pmatrix} \beta_2 N - (\gamma + \mu) & \frac{\beta_1 N}{K} \\ \xi & -\delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_2 N & \frac{\beta_1 N}{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 \\ \xi & -\delta \end{pmatrix} \\ &= F + V \end{aligned}$$

4.2. Modèle avec fonction d'incidence dépendant linéairement de I et non linéairement de B

où

$$F = \begin{pmatrix} \beta_2 N & \frac{\beta_1 N}{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} -(\gamma + \mu) & 0 \\ \xi & -\delta \end{pmatrix}$$

Alors

$$V^{-1} = \frac{1}{\delta(\gamma + \mu)} \begin{pmatrix} -\delta & 0 \\ \xi & -(\gamma + \mu) \end{pmatrix}$$

D'où

$$-FV^{-1} = \frac{1}{\delta(\gamma + \mu)} \begin{pmatrix} \beta_2 N & \frac{\beta_1 N}{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \xi & \gamma + \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta(\gamma + \mu)} \begin{pmatrix} \beta_2 N \delta + \frac{\beta_1 N \xi}{K} & (\gamma + \mu) \frac{\beta_1 N}{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire (supérieure), donc ses valeurs propres sont les valeurs diagonales, qui sont : $\frac{N}{\gamma + \mu}(\beta_1 \frac{\xi}{K\delta} + \beta_2)$ et 0.

D'où le rayon spectral de $-FV^{-1}$ est $\frac{N}{\gamma + \mu}(\beta_1 \frac{\xi}{K\delta} + \beta_2)$

Donc :

$$\mathcal{R}_0 = \rho(-FV^{-1}) = \frac{N}{\gamma + \mu}(\beta_1 \frac{\xi}{K\delta} + \beta_2).$$

■

Proposition 4.17. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le système (4.16-4.18) en plus du point d'équilibre sans maladie $X_0 = (N, 0, 0)$, admet un second point d'équilibre : le point d'équilibre endémique $X^1 = (S^1, I^1, B^1)$.

Preuve. Les points d'équilibre du système (4.16)-(4.18) sont donnés par :

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ \dot{I} = 0 \\ \dot{B} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{S} = 0 \\ \dot{I} = 0 \\ \dot{B} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu N - \beta_1 \frac{SB}{K+B} - \beta_2 SI - \mu S = 0 & (1) \\ \beta_1 \frac{SB}{K+B} + \beta_2 SI - (\gamma + \mu)I = 0 & (2) \\ \xi I - \delta B = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\xi I - \delta B = 0 \implies I = \frac{\delta}{\xi} B. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\implies \mu N - \mu S - (\gamma + \mu)I = 0 \\ &\implies S = N - \frac{\gamma + \mu}{\mu} I \end{aligned}$$

Et (4) entraîne que :

$$S = N - \left(\frac{\gamma + \mu}{\mu}\right) \left(\frac{\delta}{\xi} B\right) \quad (5)$$

4.2. Modèle avec fonction d'incidence dépendant linéairement de I et non linéairement de B

(4) et (5) dans (2) donnent :

$$\frac{\beta_1(N - (\frac{\gamma+\mu}{\mu})(\frac{\delta}{\xi}B))B}{K+B} + \beta_2(N - (\frac{\gamma+\mu}{\mu})(\frac{\delta}{\xi}B))(\frac{\delta}{\xi}B) - (\gamma+\mu)(\frac{\delta}{\xi}B) = 0.$$

D'où on a :

$$B = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\beta_1(N - (\frac{\gamma+\mu}{\mu})(\frac{\delta}{\xi}B))}{K+B} + \beta_2(N - (\frac{\gamma+\mu}{\mu})(\frac{\delta}{\xi}B))(\frac{\delta}{\xi}) - (\gamma+\mu)\frac{\delta}{\xi} = 0$$

$$B = 0 \Rightarrow I = \frac{\delta}{\xi}B = 0 \quad \text{et} \quad S = N - \frac{\gamma+\mu}{N}I = N;$$

On retrouve là le point d'équilibre sans maladie.

$\frac{\beta_1(N - (\frac{\gamma+\mu}{N})(\frac{\delta}{\xi}B))}{K+B} + \beta_2(N - (\frac{\gamma+\mu}{N})(\frac{\delta}{\xi}B))(\frac{\delta}{\xi}) - (\gamma+\mu)(\frac{\delta}{\xi}) = 0$ entraîne que :

$$\beta_1(N - (\frac{\gamma+\mu}{N})(\frac{\delta}{\xi}B)) + \beta_2(K+B)(N - (\frac{\gamma+\mu}{N})(\frac{\delta}{\xi}B))\frac{\delta}{\xi} - (\gamma+\mu)(K+B)\frac{\delta}{\xi} = 0 \quad \text{et} \quad K+B \neq 0.$$

D'où on a encore :

$$\beta_1N - \frac{\beta_1(\gamma+\mu)\delta B}{N\xi} + \frac{\beta_2KN\delta}{\xi} - \frac{\beta_2K(\gamma+\mu)\delta^2 B}{N\xi^2} - \frac{\beta_2(\gamma+\mu)\delta^2 B^2}{N\xi^2} + \frac{\beta_2BN\delta}{\xi} - \frac{\gamma K\delta}{\xi}$$

$$- \frac{\gamma B\delta}{\xi} - \frac{\mu K\delta}{\xi} - \frac{\mu B\delta}{\xi} = 0 \quad \text{et} \quad K+B \neq 0$$

Soit :

$$- \frac{\beta_2(\gamma+\mu)\delta^2}{N\xi^2} B^2 + (-\frac{\beta_1(\gamma+\mu)\delta}{N\xi} - \frac{\beta_2K(\gamma+\mu)\delta^2}{N\xi^2} + \frac{\beta_2N\delta}{\xi} - \frac{\gamma\delta}{\xi} - \frac{\mu\delta}{\xi})B$$

$$+ (\beta_1N + \frac{\beta_2KN\delta}{\xi} - \frac{\gamma K\delta}{\xi} - \frac{\mu K\delta}{\xi}) = 0 \quad \text{et} \quad B \neq -K.$$

qui est encore égale à $a_2B^2 + a_1B + a_0 = 0$ et $B \neq -K$ où :

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{\beta_2(\gamma+\mu)\delta^2}{N\xi^2} \\ a_1 = -\frac{\beta_1(\gamma+\mu)\delta}{N\xi} - \frac{\beta_2K(\gamma+\mu)\delta^2}{N\xi^2} + \frac{\beta_2N\delta}{\xi} - \frac{\gamma\delta}{\xi} - \frac{\mu\delta}{\xi} \\ a_0 = \beta_1N + \frac{\beta_2KN\delta}{\xi} - \frac{\gamma K\delta}{\xi} - \frac{\mu K\delta}{\xi} \end{cases}$$

Posons : $P(B) = a_2B^2 + a_1B + a_0$

$$a_2 = -\frac{\beta_2(\gamma+\mu)\delta^2}{N\xi^2} < 0 \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \beta_1N + \frac{\beta_2KN\delta}{\xi} - \frac{\gamma K\delta}{\xi} - \frac{\mu K\delta}{\xi} \\ &= \frac{K\delta}{\xi} (\frac{\beta_1N\xi}{K\delta} + \beta_2N - (\gamma+\mu)) \\ &= \frac{K\delta(\gamma+\mu)}{\xi} (\frac{N}{\gamma+\mu} (\frac{\beta_1\xi}{K\delta} + \beta_2) - 1) \\ &= \frac{K\delta(\gamma+\mu)}{\xi} (\mathcal{R}_0 - 1) > 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que $a_2 < 0$ et $a_0 > 0$.

$$a_2 < 0 \quad \text{et} \quad a_0 > 0 \Rightarrow a_0a_2 < 0 \Rightarrow -a_0a_2 > 0$$

4.2. Modèle avec fonction d'incidence dépendant linéairement de I et non linéairement de B

Donc le discriminant du polynôme P défini par : $D = a_1^2 - a_0a_2$ est strictement positif.

Donc P admet deux racines distinctes qui sont : $B_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_0a_2}}{2a_2} < 0$ et $B_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_0a_2}}{2a_2} > 0$

D'où on a :

$$B^1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_0a_2}}{2a_2}$$

$$I^1 = \frac{\delta}{\xi} B^1, \quad S^1 = N - \frac{\gamma + \mu}{N} \frac{\delta}{\xi} B^1$$

■

4.2.2 Stabilité du point d'équilibre sans maladie

Stabilité locale du point d'équilibre sans maladie

Théorème 4.1. Lorsque $\mathcal{R}_0 < 1$, $X_0 = (N, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable, et lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$, $X_0 = (N, 0, 0)$ est instable.

Preuve. La matrice jacobienne associée au système (4.16)-(4.18) au point $X_0 = (N, 0, 0)$ est donnée par :

$$J_{X_0} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_2 N & -\frac{\beta_1 N}{K} \\ 0 & \beta_2 N - (\gamma + \mu) & \frac{\beta_1 N}{K} \\ 0 & \xi & -\delta \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont : $-\mu, \lambda_1, \lambda_2$, où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} \beta_2 N - (\gamma + \mu) & \frac{\beta_1 N}{K} \\ \xi & -\delta \end{pmatrix}$$

on aura alors : $\lambda_1 \lambda_2 = \det(B)$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(B)$.

Si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors on a :

$$\begin{aligned} \det(B) &= -\delta(\beta_2 N - (\gamma + \mu)) - \frac{\xi \beta_1 N}{K} \\ &= -\delta \beta_2 N + \delta(\gamma + \mu) - \frac{\xi \beta_1 N}{K} \\ &= \delta(\gamma + \mu) \left(1 - \left(\frac{\delta \beta_2 N}{\delta(\gamma + \mu)} + \frac{\xi \beta_1 N}{K \delta(\gamma + \mu)} \right) \right) \\ &= \delta(\gamma + \mu) \left(1 - \frac{N}{\gamma + \mu} \left(\beta_2 + \frac{\xi \beta_1}{K \delta} \right) \right) \\ &= \delta(\gamma + \mu) (1 - \mathcal{R}_0) > 0 \end{aligned}$$

Donc λ_1 et λ_2 sont deux nombres réels ayant le même signe. D'autre part :

$$\text{tr}(B) = \beta_2 N - (\gamma + \mu) - \delta = (\gamma + \mu) \left(\frac{\beta_2 N}{\gamma + \mu} - 1 - \frac{\delta}{\gamma + \mu} \right).$$

Or :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{N}{\gamma + \mu} \left(\beta_1 \frac{\xi}{K \delta} + \beta_2 \right) = \frac{N \beta_1 \xi}{K \delta (\gamma + \mu)} + \frac{N \beta_2}{\gamma + \mu}$$

Donc :

$$\frac{N\beta_2}{\gamma + \mu} = \mathcal{R}_0 - \frac{N\beta_1\xi}{K\delta(\gamma + \mu)}$$

D'où :

$$\begin{aligned} Tr(B) &= (\gamma + \mu)\left(\mathcal{R}_0 - \frac{N\beta_1\xi}{K\delta(\gamma + \mu)} - 1 - \frac{\delta}{\gamma + \mu}\right) \\ &= (\gamma + \mu)(\mathcal{R}_0 - 1) + (\gamma + \mu)\left(-\frac{N\beta_1\xi}{K\delta(\gamma + \mu)} - \frac{\delta}{\gamma + \mu}\right) < 0. \end{aligned}$$

D'où $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

Donc toutes les valeurs de J_{X_0} , $(-m, \lambda_1$ et $\lambda_2)$ sont négatives ; ce qui nous permet de conclure que $X_0 = (N, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable.

Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors $\det(B) < 0$ et puisque λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors λ_1 et λ_2 sont de signes opposés. donc $X_0 = (N, 0, 0)$ est instable. ■

4.2.3 Stabilité du point d'équilibre endémique

Stabilité globale du point d'équilibre endémique

Proposition 4.18. (Tian et Wang 2011)

Le point d'équilibre sans maladie $X_0 = (N, 0, 0)$ est le seul point ω -limite du système (4.16)-(4.18) appartenant à la frontière $\partial\Delta$ de Δ .

Proposition 4.19. (Tian et Wang 2011)

Lorsque $R_0 > 1$, $X_0 = (N, 0, 0)$ ne peut être le point ω -limite d'une orbite dont l'origine appartient à Δ° , l'intérieur de Δ .

Corollaire 4.3. Le système (4.16)-(4.18) est uniformément persistant. Donc par conséquent, les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées.

Le système (4.16)-(4.18) n'est pas compétitif ou monotone car la fonction d'incidence f définie par

$$f(I, B) = \beta_1 \frac{SB}{K + B} + \beta_2 SI$$

dépend de deux variables $(I$ et $B)$. Ainsi, pour établir la stabilité globale du point d'équilibre endémique X^1 du système (4.16)-(4.18), nous ne pouvons pas utiliser le théorème 2.8. Nous nous servons plutôt de l'approche géométrique (théorème 2.11.).

Proposition 4.20. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le point d'équilibre endémique $X^1 = (S^1, I^1, B^1)$ est globalement asymptotiquement stable dans Δ° .

4.2. Modèle avec fonction d'incidence dépendant linéairement de I et non linéairement de B

Preuve. la matrice jacobienne du système (4.16)-(4.18) est

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I - \mu & -\beta_2 S & -\frac{\beta_1 K S}{(K+B)^2} \\ \frac{\beta_1 B}{K+B} + \beta_2 I & \beta_2 S - (\gamma + \mu) & \frac{\beta_1 K S}{(K+B)^2} \\ 0 & \xi & -\delta \end{pmatrix}$$

La seconde matrice composée du système (4.16)-(4.18) est

$$J^{[2]} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I + \beta_2 S - \gamma - 2\mu & \frac{\beta_1 K S}{(K+B)^2} & \frac{\beta_1 K S}{(K+B)^2} \\ \xi & -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I - \mu - \delta & -\beta_2 S \\ 0 & \frac{\beta_1 B}{K+B} + \beta_2 I & \beta_2 S - \gamma - \mu - \delta \end{pmatrix}$$

posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I}{B} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I}{B} \end{pmatrix}$$

Alors

$$P_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I}{B}(\frac{I'}{I} - \frac{B'}{B}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I}{B}(\frac{I'}{I} - \frac{B'}{B}) \end{pmatrix}$$

Et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B}{I} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B}{I} \end{pmatrix}$$

D'où on a

$$P_F P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} \end{pmatrix}$$

Et

$$P J^{[2]} P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I + \beta_2 S - \gamma - 2\mu & \frac{\beta_1 K S}{(K+B)^2} \frac{B}{I} & \frac{\beta_1 K S}{(K+B)^2} \frac{B}{I} \\ \xi \frac{I}{B} & -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I - \mu - \delta & -\beta_2 S \\ 0 & \frac{\beta_1 B}{K+B} + \beta_2 I & \beta_2 S - \gamma - \mu - \delta \end{pmatrix}$$

Posons

$$\begin{aligned} Q &= P_F P^{-1} + P J^{[2]} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I + \beta_2 S - \gamma - 2\mu & \frac{\beta_1 K S}{(K+B)^2} \frac{B}{I} & \frac{\beta_1 K S}{(K+B)^2} \frac{B}{I} \\ \xi \frac{I}{B} & -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I - \mu - \delta + \frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} & -\beta_2 S \\ 0 & \frac{\beta_1 B}{K+B} + \beta_2 I & \beta_2 S - \gamma - \mu - \delta + \frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.2. Modèle avec fonction d'incidence dépendant linéairement de I et non linéairement de B

Q peut aussi être écrite sous forme de matrice en bloc comme suit

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \left(\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I + \beta_2 S - \gamma - 2\mu \right) \\ Q_{12} &= \left(\frac{\beta_1 K S}{(K+B)^2} \frac{B}{I} \quad \frac{\beta_1 K S}{(K+B)^2} \frac{B}{I} \right) \\ Q_{21} &= \begin{pmatrix} \xi \frac{I}{B} \\ 0 \end{pmatrix} \\ Q_{22} &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I - \mu - \delta + \frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} & -\beta_2 S \\ \frac{\beta_1 B}{K+B} + \beta_2 I & -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I - \mu - \delta + \frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considérons la norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^3 définie comme suit :

$$\|(u, v, w)\| = \max\{|u|, |v| + |w|\}$$

pour tout vecteur $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. Désignons par m , la mesure de Lozinskii définie suivant la norme $\|\cdot\|$ présentée ci-dessus. On a alors

$$m(Q) \leq \sup\{g_1, g_2\}$$

Avec

$$g_1 = m_1(Q_{11}) + |Q_{12}|_2,$$

$$g_2 = |Q_{21}|_1 + m_2(Q_{22})$$

où $|Q_{12}|_2$ et $|Q_{21}|_1$ sont des normes matricielles induites par la norme vectorielle N telle que $N(x, y) = |x| + |y|$, m_1 est la mesure de Lozinskii définie suivant la norme $|\cdot|$ et m_2 en est une autre définie suivant la norme N .

On a :

$$m_2(Q_{22}) = \frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} - \mu - \delta + \sup\{2\beta_2 S - \gamma, 0\},$$

et

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{I'}{I} - \frac{B'}{B} - \mu - \delta + \sup\{2\beta_2 S - \gamma, 0\} + \xi \frac{I}{B} \\ &= \frac{I'}{I} - \mu + \sup\{2\beta_2 S - \gamma, 0\} \leq \frac{I'}{I} - \mu, \end{aligned}$$

car $N \leq \frac{\gamma}{2\beta_2}$. D'autre part, on a aussi :

$$g_1 = -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I + \beta_2 S - \gamma - 2\mu + \frac{\beta_1 K S}{(K+B)^2} \frac{B}{I}$$

Or

$$\begin{aligned} (4.17) \quad &\iff \frac{I'}{I} = \frac{B}{I} \frac{S\beta_1}{K+B} + \beta_2 S - (\gamma + \mu) \\ &\iff \frac{B}{I} \frac{S\beta_1}{K+B} = \frac{I'}{I} - \beta_2 S + (\gamma + \mu) \end{aligned}$$

4.3. Simulations numériques

donc

$$\begin{aligned}g_1 &= -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I + \beta_2 S - \gamma - 2\mu + \frac{K}{K+B} \left(\frac{I'}{I} - \beta_2 S + \gamma + \mu \right) \\ &\leq -\frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I + \beta_2 S - \gamma - 2\mu + \frac{I'}{I} - \beta_2 S + \gamma + \mu\end{aligned}$$

D'où

$$g_1 \leq \frac{I'}{I} - \mu - \frac{\beta_1 B}{K+B} - \beta_2 I \leq \frac{I'}{I} - \mu.$$

Ce qui entraîne que $m(Q) \leq \frac{I'}{I} - \mu$

Puisque $0 \leq I(t) \leq N$, il existe $T > 0$ tel que lorsque $t > T$, $\frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} < \frac{\mu}{2}$.

Donc

$$\frac{1}{t} \int_0^t m(Q) dt \leq \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{I'}{I} - \mu \right) dt = \frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} - \mu < -\frac{\mu}{2}.$$

Ce qui implique que

$$\bar{q}_2 \leq -\frac{\mu}{2} < 0.$$

Donc d'après le théorème 2.11. et le corollaire 4.3., $X^1 = (S^1, I^1, B^1)$ est globalement asymptotiquement stable dans Δ° . ■

Corollaire 4.4. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors le point d'équilibre endémique $X^1 = (S^1, I^1, B^1)$ est localement asymptotiquement stable.

4.3 Simulations numériques

4.3.1 Cas où la fonction d'incidence dépend uniquement de B , (système (4.9) – (4.11))

Ici, pour réaliser les simulations, on suppose que f est définie par $f(B) = \frac{aB}{K+B}$;

où a est le taux de contact entre les individus susceptibles et les eaux contaminées, et K est la concentration de vibron cholérique qu'une eau souillée doit contenir pour qu'une personne qui la consomme ait plus de 50% de chance de contracter la maladie. De manière générale, aux différents paramètres de ce modèle, on associe les valeurs suivantes qui sont essentiellement prises dans (Codeço 2001) :

4.3. Simulations numériques

TABLE 4.1 – valeurs des différents paramètres du système (4.9)-(4.11) avec $f(B) = \frac{aB}{B+K}$

Paramètres	Significations	Valeurs
b	Taux de natalité/mortalité	0,01014
N	Population humaine totale étudiée	1000
K	Concentration du vibriion cholérique nécessaire dans une eau pour qu'une personne qui la consomme ait plus de 50% de chance de tomber maladie	1000000cell/ml
a	Taux de contact entre les susceptibles et les eaux contaminées	1
γ	taux de guérison	0,05
e	Contribution des personnes infectées dans l'évolution de la population du vibriion cholérique dans les ressources d'eau.	10cell/ml/jr/pers
m	Taux de mortalité du vibriion cholérique	0,33/jour

De l'expression de f donnée plus haut, le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 de notre modèle est donné par : $\mathcal{R}_0 = \frac{Nae}{km(\gamma+b)} = 0,5039 < 1$. Les chroniques des solutions et le portrait de phase du système (4.9)-(4.11) dans le cas présent, obtenus à l'aide de l'algorithme 1 et de l'algorithme 2 proposés à l'annexe de ce document (et exécutés sur MATLAB), sont donnés par la figure 4.1 ci-dessous.

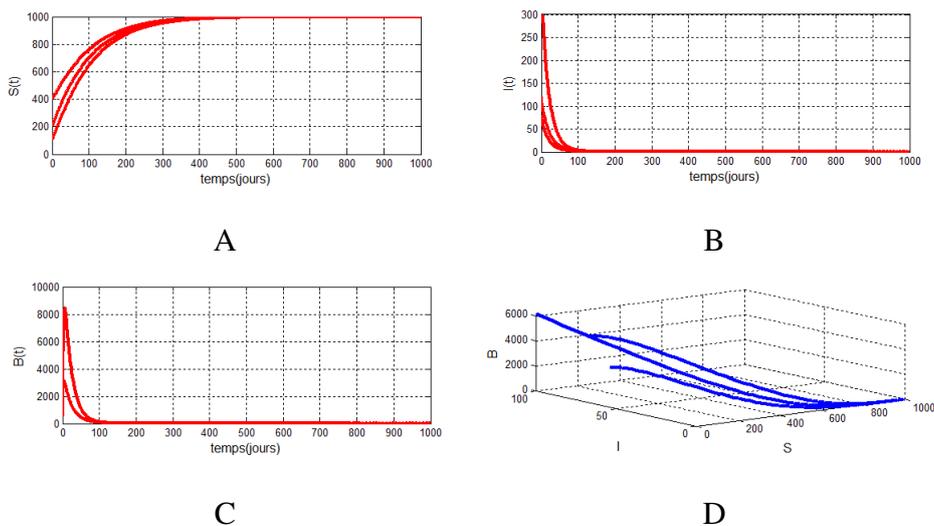


FIGURE 4.1 – Chroniques des solutions- et portrait de phase du système (4.9)-(4.11) lorsque $\mathcal{R}_0 = 0.5039 < 1$ et $f(B) = \frac{aB}{K+B}$

4.3. Simulations numériques

Les figures précédentes montrent que pour $\mathcal{R}_0 < 1$, le nombre d'individus sains tend vers N (le nombre de personne de la population étudiée) d'après la figure A, tandis que les figures B et C illustrent la disparition avec le temps des individus infectés et des vibrions cholériques dans les sources d'eau. La figure D quant à elle montre que pour toute condition initiale $(S_0, I_0, B_0) \in \Delta$, les solutions $(S(t), I(t), B(t))$ du système (4.9)-(4.11) tendent vers $(N, 0, 0)$. Ce qui confirme que le point d'équilibre sans maladie $(N, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

En prenant $\gamma = 0,009$ et considérant les autres valeurs des paramètres consignées dans le tableau 4.1, on obtient $\mathcal{R}_0 = 1,5832 > 1$ et dans ce cas, les simulations numériques obtenues par exécution des algorithmes 1 et 2 sur MATLAB, prenant $\gamma = 0,009$ ont donné les figures suivantes :

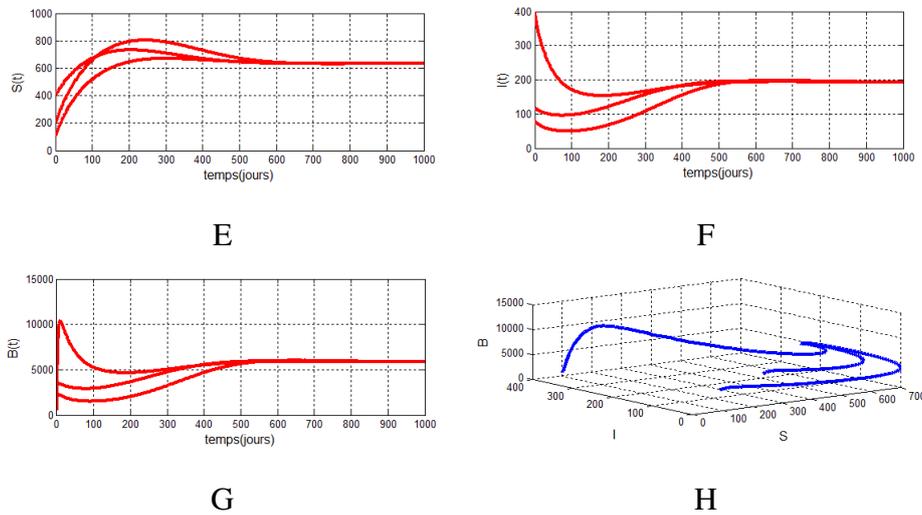


FIGURE 4.2 – Chroniques des solutions et portrait de phase du système (4.9)-(4.11) lorsque $\mathcal{R}_0 = 1,5832 > 1$ et $f(B) = \frac{aB}{K+B}$

Les figures F et G montrent que lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$, les individus infectés et les vibrions cholériques dans les sources d'eau demeurent. Donc la maladie persiste. La figure H quant à elle montre que pour toute condition initiale $(S_0, I_0, B_0) \in \Delta$, les solutions $(S(t), I(t), B(t))$ du système (4.9)-(4.11) tendent vers le point d'équilibre endémique (S^*, I^*, B^*) qui est alors globalement asymptotiquement stable.

4.3.2 Cas où la fonction d'incidence dépend linéairement de I et non linéairement de B : système (4.16)-(4.18)(modèle de Mukandavire et al)

Pour réaliser nos simulations, aux différents paramètres de ce modèle, on associe les valeurs suivantes qui proviennent majoritairement de (codeço 2001) :

4.3. Simulations numériques

TABLE 4.2 – valeurs des différents paramètres du système (4.16)-(4.18)

Paramètres	Significations	Valeurs
μ	Taux de natalité/mortalité	0,01014
N	Population humaine totale étudiée	1000
K	Concentration du vibron cholérique nécessaire dans une eau pour qu'une personne qui la consomme ait plus de 50% de chance de tomber malade	1000000cell/ml
β_1	Taux d'ingestion des vibrions cholériques par consommation d'eaux souillées	0,3
β_2	Taux d'ingestion des vibrions cholériques par contact avec les infectés	0,00015
γ	taux de guérison	0,2
ξ	Contribution des personnes infectées dans l'évolution de population des vibrions cholériques dans les ressources d'eau.	10cell/ml/jr/pers
δ	Taux de mortalité des vibrions cholériques	0,33/jour

Dans ce cas, le taux de reproduction de base \mathcal{R}_0 est donné par $\mathcal{R}_0 = \frac{N}{\gamma + \mu} \left(\frac{\beta_1 \xi}{K \delta} + \beta_2 \right) = 0,757 < 1$. Les chroniques des solutions et le portrait de phase du système (4.16)-(4.18) dans le cas présent, obtenus à l'aide des algorithmes 3 et 4 proposés à l'annexe de ce document (et exécutés sur MATLAB), sont donnés par la figure 4.3 ci-dessous.

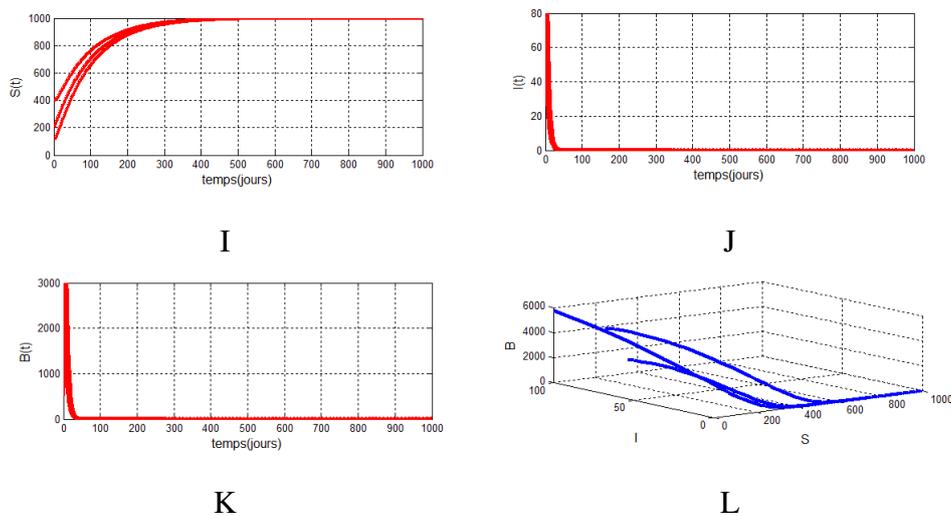


FIGURE 4.3 – Chroniques des solutions et portrait de phase du modèle de Mukandavire et al lorsque $\mathcal{R}_0 < 1$

4.3. Simulations numériques

Les figures ci-dessus montrent que pour $\mathcal{R}_0 < 1$, le nombre d'individus sains tend vers $N = 1000$ (le nombre de personnes de la population étudiée) d'après la figure I, tandis que les figures J et K illustrent la disparition avec le temps des individus infectés et des vibrions cholériques dans les sources d'eau. La figure L quant à elle montre que pour toute condition initiale $(S_0, I_0, B_0) \in \Delta$, les solutions $(S(t), I(t), B(t))$ du système (4.9)-(4.11) tendent vers $(N, 0, 0)$. Ce qui implique que le point d'équilibre sans maladie $(N, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

En prenant $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0,0006$ et considérant les autres valeurs des paramètres consignées dans le tableau 4.2, on obtient $\mathcal{R}_0 = 2,9994 > 1$ et dans ce cas, les simulations numériques obtenues par exécution des algorithmes 3 et 4 sur MATLAB, prenant $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0,0006$, ont donné les figures suivantes :

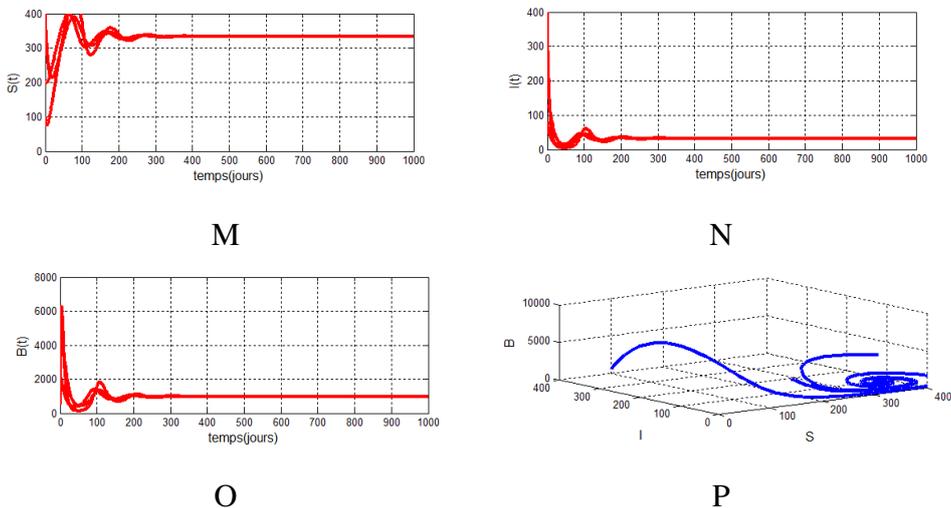


FIGURE 4.4 – Chroniques des solutions et portrait de phase du modèle de Mukandavire et al lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$

Les figures N et O montrent que lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$, les individus infectés et les vibrions cholériques dans les sources d'eau demeurent. Donc la maladie persiste. La figure P quant à elle montre que pour toute condition initiale $(S_0, I_0, B_0) \in \Delta$, les solutions $(S(t), I(t), B(t))$ du système (4.9)-(4.11) tendent vers le point d'équilibre endémique $X^1 = (S^1, I^1, B^1)$ qui est alors globalement asymptotiquement stable.

◆ INTÉRÊT DIDACTIQUE ◆

Les mathématiques appliquées à l'épidémiologie ont ceci de particulier, c'est qu'elles concilient la vie pratique au travaux scientifiques. Tels sont également les aspirations de l'approche pédagogique qui est en cours d'implémentation au Cameroun : l'approche par compétence (APC). L'un des nombreux atouts de cette approche pédagogique est le fait qu'elle associe des situations de vie aux différentes notions enseignées. Allant dans ce sens, nous avons élaboré une activité qui pourrait permettre d'introduire le chapitre consacré aux équations différentielles en classe de terminale C.

Les pré-requis suivants sont nécessaires pour la bonne entame de ce chapitre :

- Savoir calculer les limites d'une fonction,
- Savoir calculer la dérivée d'une fonction en un point.

Notre activité portera sur l'équation (4.18) c'est-à-dire $\dot{B} = \xi I - \delta B$.

Supposons que I est un paramètre. De manière générale, aux différents paramètres de cette équation, on associe les valeurs suivantes : $I = 10$, $\xi = 0,01$ et $\delta = 0,2$. Cette activité est prévue pour 10 minutes.

Activité

Abodo est malade. Il est transporté dans un centre hospitalier où il fait un examen qui révèle qu'il est malade de Choléra. En effet, dans un échantillon de ses selles, on dénombre $x(t)$ vibrions cholériques à un instant t ; et plus tard à un autre moment h , on y trouve $x(h) = x(t) + (h - t)(0,1 - 0,2x(t))$ vibrions.

1. Donner une autre écriture de $\frac{x(h) - x(t)}{h - t}$ en utilisant l'égalité donnée plus haut.
2. En déduire celle de $\dot{x}(t) = \lim_{h \rightarrow t} \frac{x(h) - x(t)}{h - t}$.

◆ CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES ◆

Dans notre travail, nous avons étudié la dynamique du choléra à l'aide du modèle proposé par J. Wang et S. Liao (Wang et Liao 2010). Cette étude a été faite dans deux cas : celui où la fonction d'incidence ne dépend que de B , la concentration du vibron cholérique dans les sources d'eau, et celui où cette fonction dépend linéairement de B et non linéairement de I , qui représente les individus infectés. Cette analyse a été réalisée à chaque fois à l'aide d'un exemple. Nous avons vu dans les deux cas que, lorsque le taux de reproduction de base $\mathcal{R}_0 < 1$, le système n'admet qu'un seul point d'équilibre : le point d'équilibre sans maladie, qui est d'ailleurs globalement asymptotiquement stable. Et lorsque $\mathcal{R}_0 > 1$, on a un nouveau point d'équilibre : le point d'équilibre endémique. Ce point est globalement asymptotiquement stable tandis que le point d'équilibre sans maladie devient instable ; donc la maladie persiste. Ces résultats ont été confirmés par des simulations numériques. Donc il en ressort que pour combattre cette maladie de façon efficace, toutes les stratégies visant à réduire le \mathcal{R}_0 doivent être adoptées. Par exemple, pour le second cas (où la fonction d'incidence dépend linéairement de I et non linéairement de B), le \mathcal{R}_0 est donné par $\mathcal{R}_0 = \frac{N}{\gamma + \mu} (\beta_1 \frac{\xi}{K\delta} + \beta_2)$ et pour le réduire, on peut par exemple diminuer β_2 , ce qui revient réellement à réduire le taux de contact entre les individus susceptibles et les les individus infectés.

Dans nos prochains travaux, nous pourrons dans un premier temps étudier un autre aspect de ce modèle de J. Wang et S. Liao : celui où la fonction d'incidence f est bilinéaire et h est linéairement dépendante de B et fonction de I aussi, mais non linéairement (Tian et Wang 2011). On pourra ensuite étudier le modèle de J. Wang et S. Liao dans sa forme la plus originale (Wang et Liao 2010).

◆ Bibliographie ◆

- [1] Aubry P., Gauzère B.A. (2015) *Choléra, actualités 2015*. Médecine tropicale.
- [2] Bathia N. P., Szego G. P. (1970) *Stability theory of dynamical systems*. Springer Verlag.
- [3] Butter G. J., Waltman (1986) *Persistence in dynamical systems*. Proc. Amer. Math. Soc.
- [4] Capasso V., Paveri-Fontana S. L. (1979) *A mathematical model for the 1973 cholera epidemic in the european mediterranean region*. Revue dépidémiologie et de santé publique 27.
- [5] Codeço C. T. (2001) *Endemic and epidemic dynamics of cholera : the role of the aquatic reservoir*. BMC Infectious Diseases 1.
- [6] Coppel W. A. (1965) *Stability and asymptotic behavior of differential equations*. D. C. Heath and company Boston.
- [7] Crevier J.A. (1885) *Le choléra*. Montréal,imprimerie générale,18 pages.
- [8] Janny T. (2004) *Épidémies de choléra en Afrique : Analyse d'une étiologie multifactorielle*. mémoire de l'école nationale de la santé publique (Rennes), France.
- [9] Jensen M., Faruque S.M., Mekalanos J.J., Levin B. (2006) *Modeling the role of bacteriophage in the control of cholera outbreaks*. Proceedings of the National Academy of Sciences 103 4652.
- [10] Korn G.A., Korn T.M. (2000) *Mathematical handbook for scientist and engineers : definitions, theorems, and formulas for references and review*. Dover Publications. Mineola NY.
- [11] Lasalle J. (1976) *Stability of dynamical systems*. SIAM Philadelphia.
- [12] Lasalle J.A., Lefschetz S. (1961) *Stability by Lyapunov's direct method with applications*. Academic press New York.
- [13] Li M.Y., Muldowney J.S. (1995) *Global stability for the SEIR model in epidemiology*. Mathematical Bioscience 125, 155.
- [14] Mbang J. (2009) *Analyse de la stabilité des modèles intra-hôtes avec retard : application à des modèles intra-hôtes du paludisme et du V.I.H-1*. Thèse Ph.D, université de Metz, laboratoire de mathématiques et applications de Metz, France.

- [15] Mukandavire Z., Liao S., Wang J., Gaff H. (2010) *Estimating the reproductive numbers for the 2008-2009 cholera outbreak in Zimbabwe*. Submitted : 8767-8772.
- [16] Nkague N. L. (2012) *Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle*. Thèse Ph.D, université de Lorraine, laboratoire de mathématiques et applications de Metz, France.
- [17] Smith H.L. (1995) *Monotone dynamical systems : An introduction to the theory of competitive and cooperative systems*. American Mathematical Society, Providence.
- [18] Tewa J.J. (2007) *Analyse globale des modèles épidémiologiques multi-compartimentaux : application à des modèles intra-hôtes de paludisme et de V.I.H*. Thèse Ph.D, université de Metz, laboratoire de mathématiques et applications de Metz, France.
- [19] Tian J. P., Wang J. (2011) *Global stability for cholera epidemic models*. Mathematical Biosciences 232 :31-41.
- [20] Van Den Driessche P., Watmough J. (2002) *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*. Mathematical Biosciences 180, 29.
- [21] Wang J., Liao S. (2010) *A generalized cholera model and epidemic/endemic analysis*. Journal of Biological Dynamics 6(2) : 568-589.doi : 10.1080/phytokeys.17513758.2012.658089.

◆ ANNEXE ◆

Algorithme 1

```
function Z = codeco(t, y)
b = 0.01014; N = 1000; K = 1000000; a = 1; gamma = 0.009; e = 10; m = 0.33;
R0 = N * a * e / ((gamma + b) * K * m)
Z(1) = b * N - y(1) * a * y(3) / (K + y(3)) - b * y(1);
Z(2) = y(1) * a * y(3) / (K + y(3)) - (gamma + b) * y(2);
Z(3) = e * y(2) - m * y(3);
Z = [Z(1) Z(2) Z(3)]';
end
```

Algorithme 2

```
clear all ;
to = 0;
tf = 1000;
yo = [400; 120; 3000] ;
[ty] = ode45('codeco', [to tf], yo);
u = y(:, 1); v = y(:, 2); w = y(:, 3);
figure(1)
grid on
subplot(2,2,1)
plot(t,u,'r','linewidth',3)
xlabel('temps(jours)','fontsize',12); ylabel('S(t)','fontsize',12);
hold on,
subplot(2,2,2)
plot(t,v,'r','linewidth',3)
xlabel('temps(jours)','fontsize',12); ylabel('I(t)','fontsize',12);
hold on,
subplot(2,2,3)
plot(t,w,'r','linewidth',3);
xlabel('temps(jours)','fontsize',12); ylabel('B(t)','fontsize',12);
hold on,
subplot(2,2,4)
plot3(u,v,w)
xlabel('S','fontsize',12); ylabel('I','fontsize',12); zlabel('B','fontsize',12);
hold on,
plottools
```

Algorithme 3

```
function Z=mukandavire(t,y)
mu = 0.01014; N = 1000; K = 1000000; beta1 = 1; beta2 = 0.0006; gamma = 0.2; ki = 10;
delta = 0.33;
R0 = (N/(gamma + mu)) * (beta1 * ki/(K * delta) + beta2)
Z(1) = mu * N - beta1 * y(1) * y(3)/(K + y(3)) - beta2 * y(1) * y(2) - mu * y(1);
Z(2) = beta1 * y(1) * y(3)/(K + y(3)) + beta2 * y(1) * y(2) - (gamma + mu) * y(2);
Z(3) = ki * y(2) - delta * y(3);
Z = [Z(1) Z(2) Z(3)]';
end
```

Algorithme 4

```
clear all ;
to = 0 ;
tf = 1000 ;
yo = [100; 400; 500] ;
[ty] = ode45('mukandavire', [tof], yo) ;
u = y(:, 1) ; v = y(:, 2) ; w = y(:, 3) ;
figure(1)
grid on
subplot(2,2,1)
plot(t,u,'r','linewidth',3)
xlabel('temps(jours)','fontsize',12) ; ylabel('S(t)','fontsize',12) ;
hold on,
subplot(2,2,2)
plot(t,v,'r','linewidth',3)
xlabel('temps(jours)','fontsize',12) ; ylabel('I(t)','fontsize',12) ;
hold on,
subplot(2,2,3)
plot(t,w,'r','linewidth',3) ;
xlabel('temps(jours)','fontsize',12) ; ylabel('B(t)','fontsize',12) ;
hold on,
subplot(2,2,4)
plot3(u,v,w)
xlabel('S','fontsize',12) ; ylabel('I','fontsize',12) ;
zlabel('B','fontsize',12) ;
hold on,
plottools
```