

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

\*\*\*\*\*

Paix – travail – Patrie

\*\*\*\*\*

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

\*\*\*\*\*

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE  
YAOUNDE

\*\*\*\*\*

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



REPUBLIC OF CAMEROON

\*\*\*\*\*

Peace – Work – Fatherland

\*\*\*\*\*

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

\*\*\*\*\*

HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE  
OF YAOUNDE

\*\*\*\*\*

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

\*\*\*\*\*

# Etude et Contrôle Optimal d'un Modèle Proie (Mais) - Prédateur (pyrale du Maïs)

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de  
l'obtention du DIPES II en Mathématiques

Par :

**KAMTO July Belmondo**

Matricule : 08S01991

Licencié en Mathématiques

Sous la direction de :

**Dr. Léontine NKAGUE NKAMBA**

*Chargé de Cours*

*École Normale Supérieure, Université de Yaoundé I*

*Année académique : 2018-2019*

---

---

## ♣ Dédicace ♣

---

---

Je dédie ce mémoire à mes parents **M. NDAM Josué** et **Mn. TCHIMGNE Cécile**.

Vous aurez eu le mérite de conduire mes premiers pas à l'école ; puisse ce travail être perçu comme le symbole de tous vos sacrifices.

---

---

## ♣ Remerciements ♣

---

---

La préparation de ce mémoire a nécessité l'intervention de plusieurs personnes sans lesquelles ce travail n'aurait pas abouti. C'est pourquoi, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à la préparation de ce travail.

♡ J'adresse mes sincères remerciements au **Dr. LEONTINE NKAGUE NKAMBA** pour avoir accepté de diriger ce travail. Vous m'avez toujours honoré de votre confiance durant tout ce temps en me conseillant et en me tenant par la main ; vous n'avez jamais cessé d'enrichir ma vision des choses ainsi que ma façon d'aborder les questions scientifiques. Tout ce que je ferai en tant que chercheur ne se pourrait que grâce à mon apprentissage à vos côtés.

Je remercie tous les enseignants du Département de Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de YAOUNDÉ

♡ J'adresse mes sincères remerciements à mes amis *IROUME, TCHOMTE, BIKAI, DONGMO, TEGA, TACHAGO, TCHAGNA, SAO, ACHABA, Mpono, DJACHEUN, NGWEM II* et tous les étudiants de la filière Mathématiques pour les moments mémorables passés ensemble ;

♡ Je ne pourrais terminer sans exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à toute ma petite famille, mes frères et sœurs :

*TOUOGO MARIE ADRIENNE ; JOUOGO MARGUERITE FÉLICITE ; KENGNE KAMKUIMO GEORGETTE ; KAUWOU PIERRE BERTIN ; KUATÉ ÉZÉCHIEL et MAMBOU CARINE FLORE*  
. Que ce mémoire témoigne tout ce que vous n'avez cessé de m'apporter.

---

---

## ♣ Déclaration sur l'honneur ♣

---

---

**Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs , en partie ou en totalité , pour une autre évaluation académique .Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie .**

Signature du candidat

KAMTO JULY BELMONDO

---

---

## ♣ Résumé ♣

---

---

Le maïs , étant d'une importance capitale dans la sécurité alimentaire au Cameroun, la production nationale de cette céréale au Cameroun avoisine 1,8 million de tonnes, pour une demande nationale estimée à plus de 2 millions de tonnes, apprend-on. En tenant compte des besoins de l'industrie brassicole locale, le déficit de production est de 200 000 tonnes. cette culture est malheureusement attaquée par plusieurs ravageurs à tous les stades de développement plus particulièrement la pyrale du maïs. Les dégâts causés par cette chenille réduisent de manière significative la production. Le maïs ici étant considéré comme une proie et la chenille comme un prédateur.

Dans ce travail , nous étudions un modèle mathématique du type proie-prédateur , nous faisons l'analyse asymptotique et évaluons l'impact de quelques stratégies de contrôle , le contrôle  $u(t)$  ici étant la quantité en kilos de champignons ( *Bauveria bassania*) ou de pesticide disponible . Le but étant de minimiser ou réduire la population de pyrales avec le moins de champignons ou pesticide possible. Nous procéderons à des simulations numériques faites à l'aide du logiciel Matlab.

Après avoir observé les représentations graphiques des courbes de l'évolution des plants de maïs et de la population de pyrales, nous nous rendons comptes que : plus le nombre de chenilles à l'instant où les plants de maïs forment les épis est faible, plus les récoltes sont abondantes.

Par ailleurs , l'observation des représentations graphiques de la première et la deuxième courbes de l'évolution des plants de maïs, de la population de pyrales et du régime anti-parasitaire, nous pouvons conclure que : lorsqu'on augmente le nombre de pieds de maïs par mètre carré , cela favorise la croissance de la population de chenille et l'intervention par l'utilisation des pesticides se caractérise par un taux d'agressivité élevé permettant une élimination de la population de pyrales en un intervalle de temps plus raccourci. Ceci étant, il sera préférable pour nous d'engager une intervention très tôt du contrôle de la population des chenilles pyrales avant que les plants de maïs ne portent les épis.

---

---

## ♣ Abstract ♣

---

---

Maize, being of paramount importance food security in Cameroon, the national production of this cereal in Cameroon is close to 1.8 million tons, in national demand estimated at more than 2 million tons. Considering the needs of the local brewing industry, the production gap is 200 000 tones. this crop is unfortunately attacked by several pests at all stages of development especially the corn borer. Damage caused by these caterpillars significantly reducezt production. Corn here being considered prey and the caterpillar as a predator.

In this work, we was studied a mathematical model of the prey-predator type, we study the asymptotic analysis and evaluated the impact of some control strategies, the control  $u(t)$  here is the quantity pesticide available . The goal is to minimize or reduce the population of moths with the least possible fungi or pesticide. We performed numerical simulations with Matlab software. after having observed the graphical representations of the curves of the evolution of corn plants and the population of moths, we realized that : the higher number of caterpillars at the moment when the corn plants form the ears is small more, the harvests are abundant.

Moreover, by observing the dynamic graphical representations of the Maïse, moth population first and secondly he dynamic of pesticid, we concluded that : when the number of feet of corn per square meter, the rate of aggression of pesticides increases and allow an elimination of the population of moths in a shorter time . This being the case, it will be preferable for us to initiate early control of the larval caterpillar population before the corn plants carry the ears.

---

---

# ♣ Sommaire ♣

---

---

<b>Dédicace</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Déclaration sur l'honneur</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Liste des Tables</b>	<b>viii</b>
<b>Introduction</b>	<b>ix</b>
<b>1 Présentation du Maïs et de la pyrale du Maïs</b>	<b>3</b>
1.1 Présentation du maïs . . . . .	3
1.2 Présentation de la pyrale du Mais [4] . . . . .	7
<b>2 Quelques outils mathématiques</b>	<b>12</b>
2.1 Analyse compartimentale [11] [2] . . . . .	12
2.1.1 Approche linéaire . . . . .	12
2.1.2 L'approche non linéaire . . . . .	13
2.2 Généralité sur les modèles proies-prédateurs [8] . . . . .	14
2.3 Stabilité des systèmes dynamiques . . . . .	15
2.3.1 Stabilité d'une équation différentielle ordinaire . . . . .	16
2.3.2 Notion de stabilité et point d'équilibre . . . . .	17
2.4 Présenter la technique de discrétisation de runge-kutta 4 [10] . . . . .	19

---

2.5	Principe du maximum de pontryagrine [5] . . . . .	20
2.5.1	Généralité . . . . .	20
2.5.2	Équation différentielle contrôlée : existence et une cité des solutions . . . . .	21
2.5.3	Énonce du principe du maximum de Pontryagin . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Présentation du modèle et étude asymptotique</b>	<b>26</b>
3.1	État de l'art sur les applications des modèles proie prédateurs en agriculture [1] . . . . .	26
3.1.1	Prédation . . . . .	26
3.2	Description du modèle . . . . .	27
3.3	Équations du modèle . . . . .	28
3.4	Description des variables et paramètres de ( $M(t), C(t)$ ) . . . . .	28
3.5	Existence des équilibres . . . . .	28
3.6	Stabilité des équilibres . . . . .	29
3.6.1	Équilibre sans proie . . . . .	29
3.6.2	Équilibre proie-prédateur . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Simulation numérique</b>	<b>31</b>
4.1	Simulation de la dynamique Maïs-Chenilles avec différentes conditions initiales . . . . .	31
4.2	Contrôle optimal et Simulation numérique . . . . .	32
4.2.1	Description du problème . . . . .	32
4.2.2	Résolution du problème . . . . .	33
4.2.3	Algorithme numérique et fichiers matlab . . . . .	34
4.2.4	Simulations numériques et Interprétation . . . . .	35
	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>
4.3	Annexe . . . . .	40
	<b>Bibliographie</b>	<b>43</b>



---

---

## ♣ Table des figures ♣

---

---

1.1	Jeune plants de maïs [4] . . . . .	3
1.2	Développement de la variété tardive du maïs . . . . .	7
1.3	Larve mature . . . . .	9
1.4	Larve mature et dégât sur le maïs . . . . .	9
1.5	La Chrysalide de la Race Bivoltine . . . . .	10
2.1	Diagramme de deux compartiments. . . . .	13
4.1	Dynamique du maïs et des chenilles avec différentes conditions initiales . . . . .	32
4.2	Comment visionner les courbes . . . . .	35
4.3	Contrôle Optimale Induite par une Faible Densité . . . . .	36
4.4	Contrôle Optimale Induite par une Forte Densité . . . . .	37

---

---

## ♣ Liste des Tables ♣

---

---

2.1	Description des variables et paramètres . . . . .	18
3.1	Description des variables et paramètres . . . . .	28

---

---

## ♣ Introduction ♣

---

---

Classé 13e producteur africain, le Cameroun enregistre des progrès dans la production du maïs depuis la dernière pénurie de 2011. Selon les chiffres prévisionnels du ministère de l'agriculture et du développement rural (MINADER), en 2015, la production du maïs s'est située à deux million cent quarante huit mille six cent soixante-dix neuf tonnes. La demande intérieur étant évalué à environ trois millions de tonnes. Le Cameroun n'arrive pas encore à couvrir totalement sa demande intérieur en maïs. Elle est la céréale la plus cultivée dans le monde.

Le maïs peut être utilisé comme une céréale, dont on récolte seulement le grain, il est surtout destiné à l'alimentation des populations au Cameroun mais, peut aussi être utilisé à l'alimentation du bétail, de la volaille, et dans une moindre mesure à la production du carburant dans les pays industrialisés[9]. L'objectif de ce mémoire est de présenter et d'étudier un modèle mathématique qui rend compte de la dynamique de la coexistence du maïs et de son parasite la pyrale du maïs, puis aborde le contrôle optimal, il s'agit ici de trouver à chaque fois un protocole pour réduire la population des parasites avec le moins de pesticides possible ou en introduisant progressivement dans les champs les ennemis naturels de la pyrale si on choisit la lutte biologique. Le modèle présenté dans ce mémoire est un modèle de type proie-prédateur appelé aussi modèle Lokta voltera, et dans la littérature, le modèle Lokta voltera trouve plusieurs champs d'applications tels que l'écologie, l'agriculture et bien d'autres [1].

En effet, les plants de maïs sont attaqués et endommagés par la pyrale du maïs, qui en consomme différentes parties de la plante de façon plus ou moins sélective selon les espèces. L'intensité des dommages causés à la plante dépend de la fréquence des attaques ainsi que du stade du développement de la plante au cours duquel elles se produisent. Il exige un suivi rigoureux et nécessite des interventions pour réduire les pertes de rendement.

Ce mémoire s'articule en quatre chapitres. Le premier consiste à présenter le Maïs et la pyrale du maïs, quand au deuxième il va rappeler des outils mathématiques nécessaires à la compréhension

du modèle qui sera présenté et analysé dans le chapitre 3 ; le chapitre 4 , va s'étendre sur le contrôle optimal , les simulations numériques et les interprétations des courbes, le mémoire s'achèvera par une conclusion et des notes sur l'apport pédagogique.

# PRÉSENTATION DU MAÏS ET DE LA PYRALE DU MAÏS

---

---

## 1.1 Présentation du maïs



FIGURE 1.1 – Jeune plants de maïs [4]

### C'est quoi le Maïs ?

**Nom :** Maïs

**Nom scientifique :** Zea mays

**Origine :** [9] Le maïs est une plante tropicale de la famille des graminées, constituant historique de l'alimentation de base des civilisations d'Amérique Centrale d'où la plante est originaire.

L'histoire du maïs commence il y a 9 000 ans, dans une haute vallée du Mexique, où s'écoule

le fleuve Rio Balsas. Une plante locale, la téosinte, est cultivée sur les flancs de cette vallée par les premières civilisations amérindiennes, à 1 500m d'altitude. La téosinte est une plante adaptée au climat tropical et humide de cette vallée. La plante porte plusieurs épis composés chacun de quelques grains seulement. Les grains récoltés sont alors broyés pour obtenir une farine qui est consommée par les populations locales.

L'évolution de la téosinte, l'ancêtre du maïs, s'est faite à la fois de manière naturelle par des mutations génétiques, mais surtout par l'Homme grâce à la sélection massale. En effet, cette période historique s'inscrit dans la domestication des plantes : les agriculteurs amérindiens choisissent volontairement les graines des meilleures plantes pour les conserver et les semer l'année suivante. Ainsi, les caractéristiques facilitant la culture et la récolte des grains, comme la taille des épis et le nombre de grains par épis, sont progressivement sélectionnés par les agriculteurs. Le maïs va acquérir une place centrale dans l'alimentation des civilisations successives d'Amérique Centrale, et va également être au centre de la religion et des rites. À partir du Vème millénaire avant notre ère, le maïs va ensuite rapidement s'étendre sur toute la zone tropicale et équatoriale de l'Amérique centrale et de l'Amérique du Sud, avec des variétés qui sont encore présentes aujourd'hui. Puis les variétés de maïs s'adaptent aux zones tempérées et seront cultivées dès le premier millénaire de notre ère aux États-Unis et jusqu'au Canada.

### **A quoi sert le maïs ? [9]**

Les débouchés du maïs sont extrêmement vastes et divers : il peut être valorisé aussi bien à travers son feuillage que ses grains. Utilisé principalement pour l'alimentation animale et humaine, le maïs entre également dans la composition d'un grand nombre de produits non alimentaires de la vie courante.

Le grain est un aliment très complet constitué essentiellement d'amidon (environ 70%) mais qui renferme aussi :

- des protéines (environ 10%),
- des matières grasses (environ 5%),
- des minéraux (calcium, phosphore),
- des vitamines.

#### **► Le maïs et l'alimentation humaine**

Dans de nombreux pays de l'hémisphère sud, principalement en Amérique Centrale et du Sud, en

Afrique, en Inde et en Asie du Sud-Est, le maïs est une culture vivrière, destinée à l'alimentation humaine. Il est consommé sous forme de bouillie, de pâtes, de galettes cuites... Au Nord, le maïs est plutôt devenu la base de l'alimentation animale, ainsi qu'une matière première importante pour le secteur de l'industrie. Le maïs conserve néanmoins une place importante dans l'alimentation humaine, qu'il soit transformé ou non.

### ► Le maïs et l'alimentation animale

Le maïs est un constituant de base de la ration alimentaire des élevages bovins, en particulier les troupeaux laitiers lorsque les pâturages ne suffisent pas.

Le maïs est avant tout une source d'énergie pour les bovins : dans une ration pour vache laitière, il peut apporter jusqu'à 80% de l'énergie nécessaire à la production de lait. Il constitue la matière première la plus importante dans la fabrication des aliments du bétail. Avec le développement de l'élevage (volaille et porc notamment), la demande devient de plus en plus importante.

### ► Usage industriel

Le maïs est aussi utilisé dans l'industrie pour la fabrication de farine infantile, de la bière, des aliments de bétail.

Le maïs est aussi utilisé comme matière première dans l'industrie de la distillerie : la fermentation des grains de maïs produit de l'alcool pour la consommation humaine. Le maïs distillé est utilisé seul (gin) ou en mélange avec d'autres alcools pour la confection des whiskys et des bourbons par exemple.

De nombreuses industries de première transformation du maïs se sont développées en France pour valoriser les différents constituants du maïs à travers des usages très variés. Outre les usages alimentaires, l'amidon de maïs est à l'origine de nombreux produits de synthèse, notamment dans le secteur des cosmétiques : produits de beauté, dentifrice, savons, crèmes cicatrisantes.

L'amidon est également présent dans le domaine pharmaceutique pour la production d'antibiotiques, de médicaments. La chimie et la pharmacie représentent 30% des utilisations non alimentaires de l'amidon de maïs.

## **Cycle de production [3]**

Le cycle germinatif du maïs dure de 90 à 180 jours suivant la variété et les lieux de la culture. Le maïs passe par les phases de germination, de croissance, de floraison et de fécondation. Le maïs peut atteindre sa maturité entre 90 et 130 jours environ après l'émergence de la plante

lorsque celle-ci est cultivée aux tropiques, à des élévations situées entre 0 et 1 000 m. À des élévations supérieures, il peut mettre 200 à 300 jours pour atteindre sa maturité. A la même altitude et avec des températures identiques, certaines variétés atteindront leur maturité beaucoup plus tôt que d'autres à cause de leur précocité. La principale différence entre une variété précoce (à 90 jours) et une variété tardive (à 130 jours) est la période de temps séparant l'émergence de la plante et la formation des aigrettes (période végétative).

Ce stade peut varier de 40 à 70 jours. La période reproductive (de l'apparition des aigrettes à la maturité) pour les deux espèces est relativement similaire et varie de 50 à 58 jours environ.

La formation des fleurs se produit environ 40 à 70 jours après l'émergence de la plante pour les variétés de 90 à 130 jours. La fleur émerge du verticille des feuilles 1 ou 2 jours avant qu'elle ne commence à perdre le pollen. La perte de pollen commence 2 à 3 jours avant que la soie n'émerge de l'extrémité de l'épi et continue pendant 5 à 8 jours.

### **Phase de germination**

- Le grain gonfle sous l'influence de l'humidité.
- 2 à 3 jours après le semis apparaît la radicule.
- 3 à 4 jours après le semis apparaît la tigelle.
- La levée doit être générale 8 à 10 jours après le semis.

### **Phase de croissance**

- \* De la levée à l'apparition des inflorescences mâles, la croissance du maïs est lente. Ce stade dure plus ou moins longtemps suivant les variétés, la température ambiante et l'état d'humidité du sol.
- \* 4 à 5 semaines après le semis, le maïs atteint 10 à 15 cm de hauteur.
- \* 60 jours après le semis, le maïs a 50 à 60 cm de hauteur environ.

### **Phase de floraison**

- Dès que la croissance est terminée, l'inflorescence mâle apparaît, soit 70 à 95 jours après semis.
- Quelques jours après, les inflorescences femelles sont prêtes pour la fécondation, soit 5 à 8 jours après l'apparition des inflorescences mâles.

### **Phase de maturation**



- Les grains, une fois formés, passent trois stades successifs (stade laiteux, stade pâteux, stade sec).

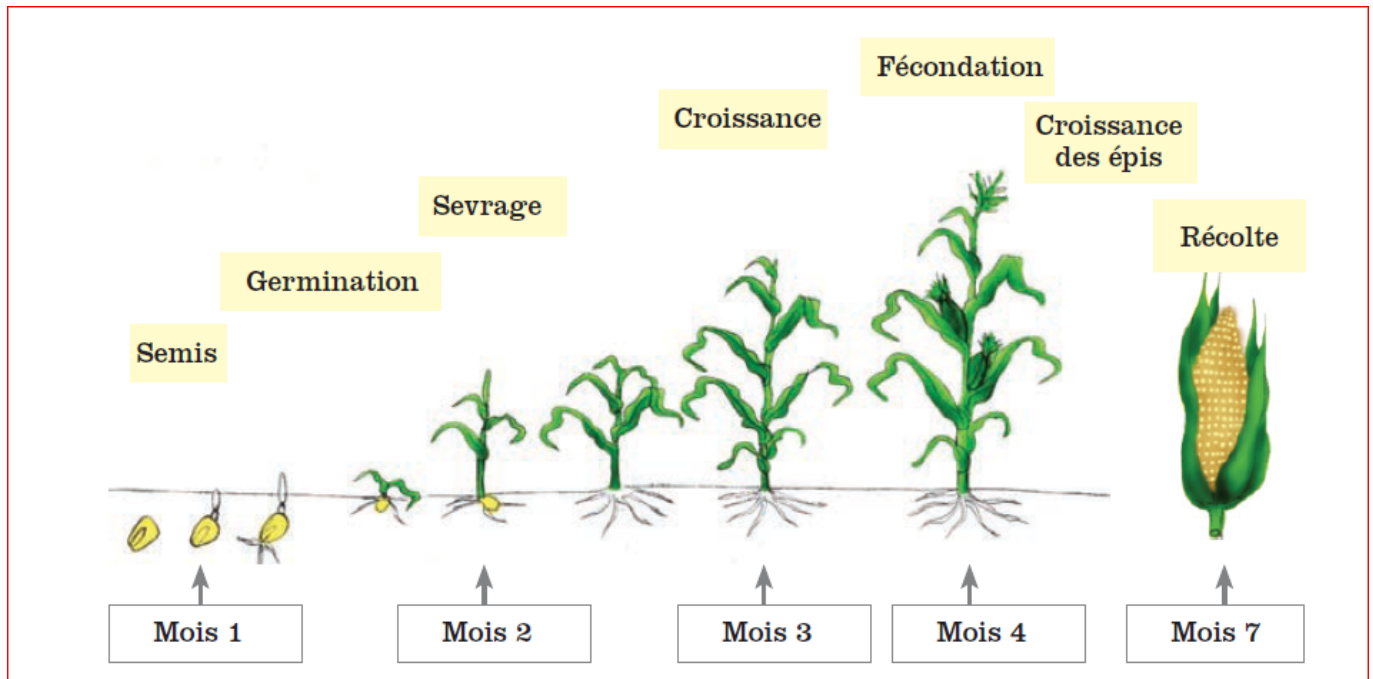


FIGURE 1.2 – Développement de la variété tardive du maïs

## 1.2 Présentation de la pyrale du Maïs [4]

**C'est quoi la pyrale du Maïs ?**

### Historique

La pyrale du maïs *Ostrinia nubilalis* (Hübner) est un parasite introduit. Elle a été amené d'Europe au début du  $XX^e$  siècle, et la signale pour la première fois près de Boston en 1917. La pyrale c'est ensuite propagée graduellement dans d'autres parties des États-Unis, au Canada et en Afrique. La pyrale du maïs *Ostrinia nubilalis* (Hübner) est une espèce de lépidoptères de la famille des Crambidae. Les chenilles de cette espèce sont connues pour attaquer les cultures du maïs, dont ils sont le principal ravageur. Il existe deux races de pyrales de maïs, l'univoltine et le bivoltine. La race univoltine ont une génération par année et la race bivoltine a deux générations par année.

## **description et cycle biologique de la pyrale**

**ADULTE** : Les ailes antérieures sont jaune-beige claire chez la femelle et brunâtres chez le mal. Aux deux tiers de l'extrémité des ailes, on observe une bande jaunâtre en zigzag. un petit triangle jaunâtre, avec un point plus foncé en son centre, se trouve au milieu du haut de l'aile . le mal est plus petit que la femelle et son abdomen est plus élancé. Il possède une marginale brune et uniforme graphé Son cycle biologique présente quatre étapes : adulte, œufs, larve et pupa :

### **► ŒUFS**

Les œufs blanchâtres sont regroupés en masses de 15 à 25 œufs, empilés comme des écailles de poisson. Ils sont généralement pondus sur l'envers des feuilles, souvent près de la nervure centrale , mais ils peuvent se trouver sur la tige ou l'épi. Les masses d'œufs mettent 4 à 9 jours à éclore, selon la température. Environ 1 jour avant l'éclosion, ils sont appelés «têtes noires » ou « capsules céphaliques ».

### **► LARVE**

#### **• jeune larve**

La jeune larve mesure 2 ou 3 mm de long à l'éclosion ; sa tête brun foncé ou noire est légèrement aplatis ; le corps blanc crème est faiblement tacheté.

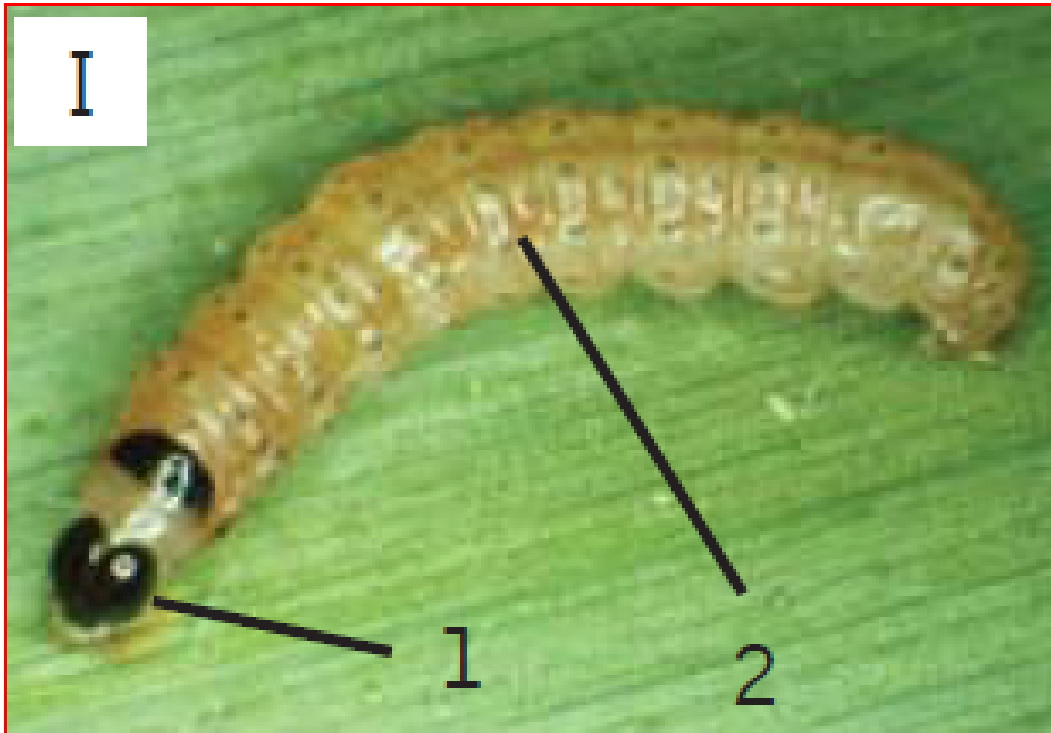


FIGURE 1.3 – Larve mature

La larve atteint 25 mm à maturité. Sa tête globuleuse est brun foncé ou noire (I1). Le corps, de couleur crème à gris rosé ou brun clair, présente des rangées de taches rondes et brunes (tubercules) sur sa partie supérieure (I2).

Cette étape de développement de la pyrale du maïs est caractérisée par une agressivité vis à vis aux plants de maïs.

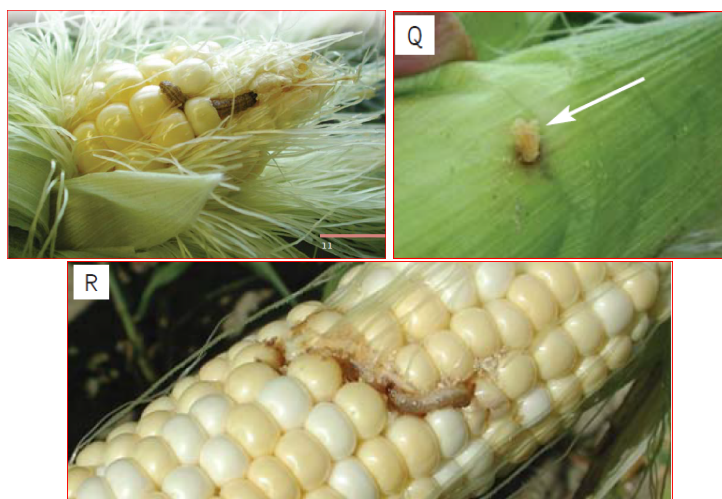


FIGURE 1.4 – Larve mature et dégât sur le maïs

## ► chrysalide

La chrysalide, d'apparence lisse et souple, est brun foncé. Elle se développe dans les chaumes de maïs. En été, la chrysalide de la race bivoltine se développe sur le plant, le plus souvent dans la partie au dessus de l'épi .



FIGURE 1.5 – La Chrysalide de la Race Bivoltine

## Comment s'attaque t-elle au maïs ?

### Le parasitisme

Le parasitisme met en relation deux populations d'espèces distinctes, soit une population de parasites et une population composée d'organismes hôte ; Ainsi, la pyrale du maïs survit au dépend des plants de maïs car elle se nourrit directement à partir de ces derniers. Par conséquent elle cause des dégâts considérables dans une plantation de maïs tels que : les œufs de cette chenille parasites sont bien souvent pondus directement sur des différentes parties de la plante, qui leur sert alors de support, de protection et de source de nutriment jusqu'à leur éclosion, ce qui ralentir la croissance des plant de maïs.

Quel est le mode de propagation ?

- La propagation se fait par le déplacement des adultes femelles qui volent sur des grandes distances et pondent des œufs d'une plante à l'autre.

## **ennemies de la pyrale du Mais**

Dans le maïs, les parasitoïdes suivants s'attaquent à la pyrale du maïs :

- Les trichogrammes
- Guêpe *Macrocentrus cingulum*
- Guêpe *Sympiesis viridula*
- Mouche tachinide *Lydella thompsoni*
- Trichogrammes

# QUELQUES OUTILS MATHÉMATIQUES

---



---

## 2.1 Analyse compartimentale [11] [2]

L'analyse compartimentale est un domaine très utilisé biologie et en médecine pour l'étude des phénomènes dynamiques. Cette analyse suppose que le système étudié est formé par un nombre fini de compartiments entre lesquels s'effectuent des échanges de matières. L'équation bilan au niveau de chaque compartiment est caractérisé par l'hypothèse suivante : la variation de la quantité de matière au niveau de chaque compartiment est égale à la somme des quantités entrantes moins la somme des quantités sortantes.

Dans la théorie de l'analyse compartimentale nous distinguons deux approches.

### 2.1.1 Approche linéaire

Considérons deux compartiments  $C_i$  et  $C_j$  illustrés par la figure 2.1 ,  $i$  et  $j$  étant deux entiers naturels avec  $i \neq j$ .

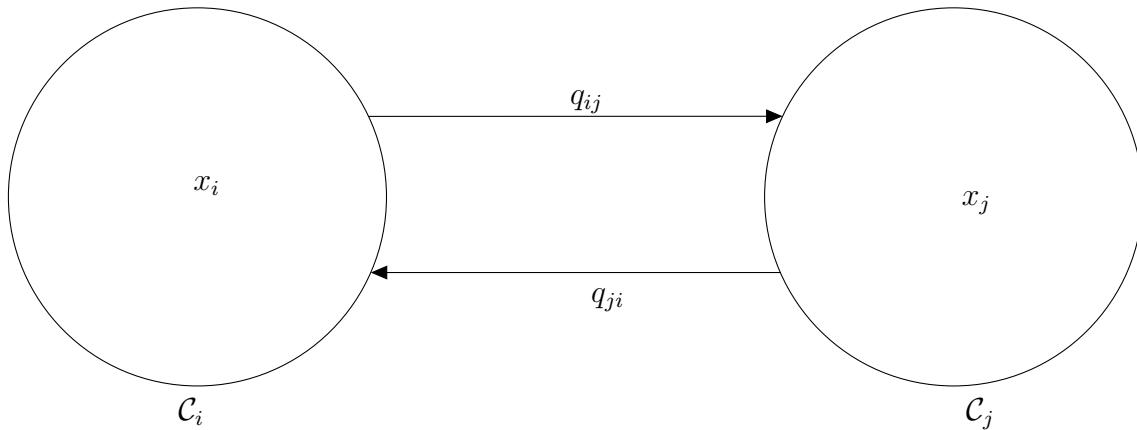


FIGURE 2.1 – Diagramme de deux compartiments.

$q_{ij}$  et  $q_{ji}$  désignent les quantités d'échange et  $x_i$  et  $x_j$  représentent les variables D'après l'hypothèse de linéarité, la quantité passant du compartiment  $C_i$  au compartiment  $C_j$  est proportionnelle à la quantité contenue dans le compartiment de départ et réciproquement. Si le système est fermé et ne comporte que 2 compartiments comme l'indique la figure 2.1, alors les équations bilans s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = q_{ji}x_j - q_{ij}x_i \\ \frac{dx_j}{dt} = q_{ij}x_i - q_{ji}x_j \end{cases}$$

avec condition initiales

$$x_i(0) = x_i^0, x_j(0) = x_j^0$$

### 2.1.2 L'approche non linéaire

Dans plusieurs circonstances, l'hypothèse de linéarité est inadapté pour caractériser les phénomènes physiques, biologiques, chimiques et autres. Dans ce cas, les quantités échangés sont des fonctions non linéaires des variables d'état.

**Cas fréquent** : les quantités de matières entrantes et sortantes du compartiment  $i$  sont respectivement égale à  $q_{ji}x_i^\alpha$  et  $q_{ij}x_ix_j$ . Pour un tel système compartimental à  $n$  compartiments, l'équation

bilan relative au compartiment  $i$  s'écrit alors :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=2}^n q_{ji} x_i^\alpha x_j - \sum_{j=2}^n q_{ij} x_i x_j . x_i(0) = x_i^0$$

Formellement de manière plus générale, on a

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

où  $f$  est une fonction non linéaire décrivant les échanges entre le compartiment  $i$  et les autres compartiments. L'hypothèse d'échange sus-cité permet d'adapter à toutes non linéarités. Ce qui fait dire que, l'analyse compartimentale permet de modéliser tout phénomène où seul le temps intervient.

## 2.2 Généralité sur les modèles proies-prédateurs [8]

### Comment cohabitent les espèces

IL y a près d'un siècle le mathématicien italien Vito Volterra a élaboré un modèle décrivant l'évolution de deux populations dans un même écosystème, l'une étant la proie de l'autre. Ce modèle est fondamental en biologie.

L'objectif de Volterra était de découvrir les fonctions  $X(t)$  et  $Y(t)$  représentant respectivement les populations de proies et de prédateurs en temps réel  $t$ . Les variations de ces populations sont décrites par ce qu'on appelle en mathématiques les «dérivées» ou «taux de variation instantanée» des fonctions  $X(t)$  et  $Y(t)$ . On note ces taux de variations respectivement  $X'(t)$  et  $Y'(t)$ . Ce sont ces taux de variations que Volterra commence par évaluer.

### Les proies

Pour la population des proies, Volterra identifia deux facteurs principaux provoquant la variation  $X(t)$  de la population.

► **Un facteur positif** : la variation est proportionnelle à la population elle-même. Cela se traduit par le terme  $\alpha X(t)$  où  $\alpha$  est le taux de croissance des proies en l'absence de prédateurs.

► **Un facteur négatif** : la possibilité pour les proies d'être dévorées augmente avec le nombre de prédateurs et de proies en présence.



La variation négative, est proportionnelle au produit des deux populations. Cela se traduit par le terme  $-\gamma X(t)Y(t)$  où  $\gamma$  représente en quelque sorte la voracité des prédateurs.

Globalement la variation de la population des proies en présence des prédateurs se traduit par l'équation :  $X'(t) = \alpha X(t) - \gamma X(t)Y(t)$

### Les prédateurs

Pour la population des prédateurs la variation des  $Y'(t)$  dépend aussi de deux facteurs principaux.

► **Un facteur négatif** : s'il n'y avait pas de proies pour se nourrir, la population déclinerait proportionnellement à la population elle-même ce qui se traduit par le terme  $Y'(t) = -\mu Y(t)$  où  $\mu$  est facteur de mortalité dû à la famine.

► **Un facteur positif** : la présence de proies, nourriture des prédateurs, tend à faire augmenter leur population selon le terme  $\sigma X(t)Y(t)$  où  $\sigma$  représente en quelque l'apport des proies.

La variation de la population des prédateurs est alors  $Y'(t) = \sigma X(t)Y(t) - \mu Y(t)$ .

L'évolution globale des populations de proies et des prédateurs est donc donnée par les deux équations suivantes dites de « Lotka-Volterra » car découvertes indépendamment par Alfred James Lotka (1880-1949) qui travaillait sur les interactions de plantes et d'herbivores :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = \alpha X(t) - \gamma X(t)Y(t) \\ \frac{dY(t)}{dt} = \sigma X(t)Y(t) - \mu Y(t) \end{cases}$$

## 2.3 Stabilité des systèmes dynamiques

### Notion de Systèmes Dynamiques [7]

**Définition 2.3.1.** (Système dynamique à temps continu) On appelle système dynamique à temps continu sur un ensemble  $\Omega$  une famille d'applications  $\{\phi_t; t \in \Lambda\}$ , paramétrée soit par l'ensemble  $\mathbb{R}_+$  des réels positifs ou nuls ( $\Lambda = \mathbb{R}_+$ ), soit par l'ensemble  $\mathbb{R}$  de tous les réels ( $\Lambda = \mathbb{R}$ ), et vérifiant les propriétés suivantes :

1. Chaque application  $\phi_t$  est définie sur une partie  $U_t$  de  $\Omega$  et à valeurs dans  $\Omega$  ;
2. L'application  $\phi_0$  définie sur  $\Omega$  tout entier est l'application identité sur  $\Omega$ , ( $id_\Omega$ ) ;

3. Si  $0 \leq t_1 \leq t_2$ , alors  $U_{t_2} \subseteq U_{t_1}$ ;

4. Soient  $t$  et  $s$  deux éléments de l'ensemble  $\Lambda$  qui paramètrent la famille des applications considérées, soit  $x \in U_s$ ; alors  $\phi_s(x)$  est un élément de  $U_t$  si et seulement si  $x$  est un élément de  $U_{s+t}$  et, lorsque c'est le cas, on a :

$$\phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{s+t}(x).$$

L'ensemble  $\Omega$  est appelé espace de phases du système dynamique et  $\phi$  est le flot du système dynamique.

### 2.3.1 Stabilité d'une équation différentielle ordinaire

Considérons l'équation différentielle ordinaire autonome suivante :

$$x'(t) = f(x(t)) \quad (I)$$

**Définition 2.3.2.** (Point d'équilibre) On appelle point d'équilibre d'une équation différentielle toute solution constante de l'équation (I).

Soit  $X_0$  un point d'équilibre de l'équation (I), alors  $f(X_0) = 0$ .

**Définition 2.3.3.** On appelle trajectoire d'un point  $x$  de  $\omega$  l'application :  $X_x : t \rightarrow X_t(x)$

On appelle orbite d'un point  $x$  de  $\omega$  la partie de  $\gamma_x = \{X_t(x), t \in \mathbb{R}\}$  de l'espace des phases.

L'orbite d'un point  $x$  de  $\omega$  est dite périodique si  $x$  n'est pas un point d'équilibre et s'il existe  $T \in \mathbb{R}_+$  tel que  $X_T(x) = x$ . On dit alors que  $T$  est une période de l'orbite périodique considérée.

**Définition 2.3.4.** On dit qu'un point d'équilibre  $x^*$  est attractif s'il existe un ouvert  $V$  contenant  $x^*$  tel que pour tout  $y \in V$ , on a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t(y) = x^*$

**Définition 2.3.5.** (Système linéarisé) Le système linéarisé de (I) autour du point  $X_0$  est donné par :

$$Z'(t) = \mathcal{D}_f(X_0)Z(t) \quad (II)$$

où  $\mathcal{D}_f$  désigne la différentielle de  $f$ .

**Théorème 2.3.1.** Si toutes les valeurs de  $\mathcal{D}_f(X_0)$  sont de parties réelles strictement négatives, alors le point d'équilibre  $X_0$  est localement asymptotiquement stable pour le système non linéaire (I).

### 2.3.2 Notion de stabilité et point d'équilibre

**Définition 2.3.6.** On dit qu'un point d'équilibre  $x^*$  du système (I) est stable ( au sens de Lyapunov) ou tout simplement que le système (I) est stable en  $x^*$  si pour tout voisinage  $V$  de  $x^*$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x^*$  tel que  $\forall y \in U$  et pour tout  $t \geq 0$  on a :  $X_t(y) \in V$ .

Dans le cas contraire, on dit que  $x^*$  est instable.

**Définition 2.3.7.** On dit que  $x^*$  est localement asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.

**Définition 2.3.8.** Soit  $x_0$  un point d'équilibre du système (I). Si  $f$  est de classe  $C^1$ , on appelle système linéarisé de (I) en  $x^*$  le système linéaire :  $\frac{dx}{dt} = Df(x^*)x$  où  $Df(x^*)$  est la différentielle de  $f$  au point  $x^*$ .

Pour montrer la stabilité locale d'un point d'équilibre, Le théorème suivant est très souvent utiliser :

**Théorème 2.3.2.** Poincaré-Lyapunov

On considère le système (I) où  $f$  est de classe  $C^1$  et  $x^*$  un point d'équilibre .

1. Si  $Df(x^*)$  a toute ses valeurs propres à partie réelle négative , alors  $x^*$  est localement asymptotiquement stable. Dans ce cas  $x^*$  est un nœud attractif
2. Si  $Df(x^*)$  a ( au moins ) une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors  $x^*$  est instable. Dans ce cas  $x^*$  est un point selle .
3. Si  $Df(x^*)$  est une matrice carré d'ordre 2 , admettant deux valeurs propres complexes conjugué  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$  , le portrait de phase est une spirale.
  - (a) Si  $Re(\lambda) > 0$  alors le point d'équilibre zéro est un foyer instable et la spirale est sortante.
  - (b) Si  $Re(\lambda) < 0$  alors le point d'équilibre zéro est un foyer asymptotiquement stable et la spirale est entrante.
  - (c) Si  $Re(\lambda) = 0$  alors le point d'équilibre zéro est stable dans ce sens qu'il existe deux voisinages bornés  $U$  et  $V$  de zéro tels que toute solution avec donnée initiale dans  $U$  reste dans  $V$  (on note ici que toutes les solutions sont périodiques ) . la spirale est sortante. C'est un centre.

Dans la pratique, il n'est pas toujours facile de calculer les valeurs propre de la matrice du système linéarisé. Cependant, il existe des critères permettant de conclure sur la stabilité locale d'un point d'équilibre sans calculer explicitement les valeurs propres. On verra l'un de ses critères dans le théorème suivant :

**Théorème 2.3.3.** (critère de Routh-Hurwitz )

Chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que toutes les racines du polynôme réel :

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n \quad (a_0 > 0) \text{ soient à partie réelle négative : } 1. a_n > 0, a_{n-2} > 0, a_{n-4} > 0, \dots, H_{n-2} > 0, H_{n-4} > 0, \dots$$

$$2. a_0 a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0, H_{n-1}, H_{n-3} > 0, \dots$$

où  $H_k$  désigne le mineur principal d'ordre  $k$  de la matrice d'ordre  $n$  suivante :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{2n-4} \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & \dots & a \\ 0 & 0 & a & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

En appliquant ce théorème aux polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 5, nous avons les résultats ci dessus :

TABLE 2.1 – Description des variables et paramètres

Polynôme	Conditions nécessaires et suffisantes pour que toute racine soit à partie réelle négative
$a_0z^2 + a_1z + a_2$	$a_1 > 0, a_2 > 0$
$a_0z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$	$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 > a_0a_3$
$a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$	$a_4 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_3(a_1a - a_0a_3) > a_1^2a_4$

**Corollaire 2.3.1.** Soit  $A$  une matrice carré d'ordre 2 à coefficient réels. Si  $\text{tr}(A) < 0$  et  $\det(A) > 0$  alors toutes les valeurs propre de la matrice  $A$  sont négatives.

## 2.4 Présenter la technique de discrétisation de runge-kutta 4 [10]

L'objectif de cette technique est de chercher à approcher numériquement les solutions d'équations différentielles de la forme :

$$y'(t) = f(t; y(t)) \text{ avec } y(t_0) = y_0 \quad (1)$$

où  $f$  est une fonction continue Lipschitz par rapport à la deuxième variable. Le théorème de Cauchy Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution. Il arrive que l'on sache résoudre ce problème de manière analytique mais dans un grand nombre de cas on ne connaît pas de forme explicite de la solution. On peut alors essayer d'approcher la solution par un schéma numérique.

L'idée des méthodes de Runge-Kutta est de calculer le point  $(t_{n+1}; y_{n+1})$  à partir du point  $(t_n; y_n)$  en utilisant des points intermédiaires  $(t_{n,i}; y_{n,i})$ . En effet si  $z$  est une solution exacte de l'équation (1), du fait que  $z(t_{n+1}) = z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t; z(t))dt$ , on peut essayer d'approcher  $z(t_{n+1}) - z(t_n)$  par des formules de quadrature qui utilisent des points intermédiaires. Ainsi on définit les points intermédiaires  $(t_{n,i}; y_{n,i})_{1 \leq i \leq q}$  avec

$$t_{n,i} = t_n + c_i h ; 1 \leq i \leq q ; c_i \in [0; 1].$$

A chacun de ces points on associe la pente correspondante :

$$K_{n,i} = f(t_{n,i}; y_{n,i})$$

Chacun de ces points est calculé de manière récursive en utilisant une formule de quadrature. En effet comme  $z(t_{n,i}) = z(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+c_i h} f(t; z(t))dt$ , on utilise les points intermédiaires  $(t_{n,j}; y_{n,j})_{j < i}$  pour calculer le point  $(t_{n,i}; y_{n,i})$  :

$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} K_{n,j}$$

. On peut bien entendu utiliser des méthodes de quadrature différentes à chaque étape. Une fois que tous les points sont calculés on évalue le point  $y_{n+1}$  en utilisant une formule de quadrature

utilisant tous les  $(t_{n,i}; y_{n,i})_{1 \leq i \leq q}$  :

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{1 \leq i \leq q} b_i K_{n,i}.$$

Une méthode de Runge-Kutta est ainsi entièrement définie par les coefficients  $(c_i)_{1 \leq i \leq q}$ , les coefficients  $(a_{i,j})_{1 \leq j < i \leq q}$  et les coefficients  $(b_i)_{1 \leq i \leq q}$ . Ainsi, en fixant  $q = 4$ , et  $c_i = \frac{1}{2}$ ;  $1 \leq i \leq 4$ , on obtient :

- $K_{n,1} = f(t_n, y_n)$  est la pente au début de l'intervalle ;
- $K_{n,2} = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_{n,1})$  est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente  $K_{n,1}$  pour calculer la valeur de  $y$  au point  $t_n + \frac{h}{2}$  par la méthode d'Euler ( $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$ ) ;
- $K_{n,3} = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_{n,2})$  est de nouveau la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue en utilisant la pente  $k_{n,2}$  pour calculer  $y$  ;
- $K_{n,4} = f(t_n + h, y_n + hK_{n,3})$  est la pente en fin d'intervalle, avec la valeur de  $y$  calculée en utilisant  $K_{n,3}$ . On obtient finalement la discrétisation de Runge-Kutta à l'ordre 4 :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_{n,1} + 2K_{n,2} + 2K_{n,3} + K_{n,4})$$

La méthode est d'ordre 4, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de  $h^5$ , alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de  $h^4$ . Notons enfin que toutes ces formulations sont encore valables pour des fonctions à valeurs vectorielles.

## 2.5 Principe du maximum de pontrygrine [5]

L'objectif de la théorie du contrôle optimal Conduire un système dynamique contrôlé :

- d'une configuration donnée à une configuration souhaitée ;
- tout en minimisant ou en maximisant un certain coût ;
- et en respectant certaines contraintes.

### 2.5.1 Généralité

On considérera un système dynamique dont l'évolution est régie par l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ pour } t_0 \leq t \leq t_1, \tag{2.1}$$

appelée équation d'état. Ici,  $u(\cdot)$  est une fonction de  $[t_0, t_1]$  dans  $U \subset \mathbb{R}^k$ . C'est la variable de contrôle sur le système. Pour des raisons techniques liées essentiellement au problème d'existence, la variable de contrôle sera supposée continue par morceaux. On notera par

$$\mathcal{U} = C_{pm}^0([t_0, t_1], U)$$

l'ensemble des variables de contrôle admissibles.

Étant donnée une fonction de coût  $F : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit le problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \inf \quad & \int_{t_0}^t F(s, x(s), u(s)) ds \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t_1, \\ & u \in \mathcal{U} \\ & x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

où  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  est une condition initiale donnée.

La dépendance de la variable d'état  $x^u$  par rapport à la variable de contrôle  $u$  sera souvent omise, et on notera plus simplement  $x$ , sauf s'il y a un risque de confusion.

### 2.5.2 Équation différentielle contrôlée : existence et une cité des solutions

Commençons par préciser la notion de continuité par morceaux.

**Définition 2.5.1.** Une fonction  $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$  est continue par morceaux si

- $u$  admet des limites à droite et à gauche en tout point de  $]t_0, t_1[$ , une limite à droite en  $t_0$ , et une limite à gauche en  $t_1$  ;
- l'ensemble des points de  $]t_0, t_1[$  où  $u$  n'est pas continue est fini.

Dans la suite de ce paragraphe, on se donne une fonction  $u \in \mathcal{U}$ , et on considère l'équation différentielle (2.3) où  $f$  est une fonction continue. Afin d'éviter le problème de non dérivabilité de  $x$  aux points de discontinuité de  $u$ , on écrira (2.3) sous la forme intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), u(s)) ds, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \tag{2.3}$$

**Définition 2.5.2.** Soit  $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue et  $u$  une variable de contrôle dans  $\mathcal{U}$ . On dit que  $x(\cdot)$  est une solution de (2.3) avec la condition initiale  $x(t_0) = x_0$  si  $x$  vérifie (2.3).

Ainsi, une solution  $x$  de (2.3) est nécessairement continue. Elle est dérivable à droite et à gauche en tout point de  $[t_0, t_1]$ , avec

$$\dot{x}(t-) = f(t, x(t), u(t-)) \text{ et } \dot{x}(t+) = f(t, x(t), u(t+))$$

, et par suite  $x$  est dérivable en tout point de continuité de  $u$ .

L'existence et l'unicité d'une solution de (2.3) (suivant la définition précédente) est assurée par le théorème suivant.

**Théorème 2.5.1.** *Soit  $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue vérifiant les conditions de Lipschitz et de croissance linéaires : il existe  $K > 0$  tel que*

$$\begin{aligned} |f(t, \xi_1, \nu) - f(t, \xi_2, \nu)| &\leq K |\xi_1 - \xi_2|, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n, \quad (t, \nu) \in [t_0, t_1] \times U, \\ |f(t, \xi, \nu)| &\leq K(1 + |\xi| + |\nu|), \quad (t, \xi, \nu) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Alors, pour toute variable de contrôle  $u \in \mathcal{U}$ , l'équation différentielle (2.3) admet une unique solution vérifiant une condition initiale donnée  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Considérons de nouveau le système de contrôle général

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.5)$$

où  $f$  est une application de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^{1+n+m}$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.5.3.** *Le Hamiltonien du système (2.5) est la fonction*

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, p, u) &\longmapsto H(t, x, p, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}$ .

### 2.5.3 Énoncé du principe du maximum de Pontryagin

Dans ce paragraphe, nous énonçons la condition nécessaire d'optimalité pour le problème de (2.2). Pour ce-là, nous introduisons le Hamiltonien associé :

$$H(t, \xi, \nu, \pi) = F(t, \xi, \nu, \pi) + \pi \cdot f(t, \xi, \nu) \quad (2.6)$$

défini sur  $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .



**Théorème 2.5.2.** *Supposons que  $f$  et  $F$  soient continues, qu'elles vérifient les conditions (2.4), et que les gradients partiels  $f_x$  et  $F_x$  existent, continues, et pour un certain  $\alpha > 0$ ,*

$$\xi \longrightarrow (f_x, F_x)(t, \xi, \nu) \text{ est } \alpha - \text{Hölderienne pour } (t, \nu) \in [t_0, t_1] \times U. \quad (2.7)$$

*Soit  $u^*$  un contrôle optimal pour le problème (2.2), et  $x^* = x^{u^*}$  l'état contrôlé associé. Alors, il existe*

$$p : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

*de classe  $C^1$ , telle que, pour tout  $t \in [t_0, t_1]$  :*

$$\begin{cases} (i) H(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) = \min_{\nu \in U} H(t, x^*(t), \nu, p(t)) \\ (ii) \dot{p}(t) = -H_x(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) \text{ et } p(t_1) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

- La fonction  $p$  introduite dans l'énoncé précédent est appelée état adjoint du système.
- L'équation différentielle qui régit sa dynamique est appelée équation d'état adjoint.
- La condition terminale sur  $p$  est appelée condition de transversalité.
- généralement, On regroupe l'équation d'état adjoint avec l'équation d'état, définissant ainsi le système Hamiltonien :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x^*(t), u^*(t), p(t)), x(t_0) = x_0, \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), p(t)), p(t_1) = 0. : \\ \frac{\partial H}{\partial u}(t, x^*(t), p(t)) = 0 : \text{Equation de commande} \end{cases} \quad (2.9)$$

**Exemple 2.5.1.** *Soit le problème de commande optimale (double intégrateur)*

$$\begin{aligned} \min \quad & J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt \\ & u(t) \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \\ \text{sujet à} \quad & \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ & \dot{x}_2(t) = u(t) \\ & x(0) = (1, 2) \\ & x(2) = (1, 0) \end{aligned}$$

$$L(t, x(t), u(t)) = \frac{1}{2} u^2(t) \text{ est de classe } C^2$$

1. *Hamiltonien :*

$$H(x_1(t), x_2(t), u(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)) = \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t)$$

2. *Équation de commande :*

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x^*, u^*, \lambda^*) = u^*(t) + \lambda_2^*(t) = 0$$

$$u^*(t) = -\lambda_2^*(t)$$

3. *Hamiltonien à l'optimum :*

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) = -\frac{1}{2}\lambda_2^{*2}(t) + \lambda_1^*(t)x_2^*(t)$$

4. *Équations d'état :*

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) = \dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) = \dot{x}_2^*(t) = -\lambda_2^*(t)$$

5. *Équations d'état adjointe :*

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) = \dot{\lambda}_1^*(t) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)) = \dot{\lambda}_2^*(t) = -\lambda_1^*(t)$$

6. *Solution des équations d'état et d'état adjointe :*

$$x_1^*(t) = \frac{C_3}{6}t^3 - \frac{C_4}{2}t^2 + C_2t + C_1$$

$$x_2^*(t) = \frac{C_3}{2}t^2 - C_4t + C_2$$

$$\lambda_1^*(t) = C_3$$

$$\lambda_2^*(t) = -C_3t + C_4$$

7. *Expression explicite de la commande optimale :*

$$u^*(t) = C_3t - C_4$$

8. *Détermination des constantes d'intégration :*

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 2 \quad C_3 = 3 \quad C_4 = 4$$

**9. Solution optimale :**

$$x_1^*(t) = 0.5t^3 - 2t^2 + 2t + 1$$

$$x_2^*(t) = 1.5t^2 - 4t + 2$$

$$\lambda_1^*(t) = 3$$

$$\lambda_2^*(t) = -3t + 4$$

$$u^*(t) = 3t - 4$$

$$H(x^*(t), \lambda^*(t)) = -2$$

$$J(x^*, u^*(t)) = \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt$$

$$J(x^*, u^*(t)) = \frac{3}{2} [t^3]_0^2 - 6 [t^2]_0^2 + 8 [t]_0^2 = 4$$

# PRÉSENTATION DU MODÈLE ET ÉTUDE

## ASYMPTOTIQUE

---

### 3.1 État de l'art sur les applications des modèles proie prédateurs en agriculture [1]

Dans un milieu donné, une espèce est rarement représentée par une unique population. Au contraire, un habitat est souvent partagé par plusieurs populations de différentes espèces. Dans un premier temps, il est courant que des interactions directes lient ces différentes populations : elles forment ainsi une communauté. Dans un second temps, cette communauté, ou ensemble de populations liées entre elles, interagit également de manière indirecte, soit en son sein, soit par l'intermédiaire du milieu qu'elles partagent : elles forment ainsi un écosystème . Les interactions directes entre les populations sont de nos jours connues pour être très répandues dans les écosystèmes. Ainsi, avec le temps, la signification de symbiose a évolué pour finalement correspondre à une multitude d'interactions entre deux organismes. Elles peuvent en particulier avoir des effets à court et à long terme sur chacune des populations, positifs ou négatifs, réciproques ou unilatéraux. En agriculture, nous pouvons observer des interactions directes telles que l'**Amensalisme** d'une part , le **Prédation** et le **Parasitisme** d'autre part.

#### 3.1.1 Prédation

La prédation est simplement la consommation par un prédateur d'une proie qui était vivante quand le prédateur l'a attaquée. Cette définition exclut les détritivores et les nécrophages qui consomment de la matière organique morte. La prédation peut être classifiée de manière taxonomique, en distinguant les prédateurs carnivores, qui consomment des animaux, les herbivores,

qui mangent des végétaux, et les omnivores, qui consomment les deux.

Les brouteurs attaquent aussi un grand nombre de proies au cours de leur vie mais ils ne consomment qu'une part de l'individu. Leur effet sur les proies est souvent douloureux mais très rarement léthal à court terme.

**Exemple 3.1.1.** *C'est le cas des herbivores, comme les ovins et les bovins, qui consomment une part de la végétation qui peut pousser de nouveau après leur passage.*

La prédation peut, dans le premier cas, réduire instantanément la densité de la population de proies, ou, dans le deuxième cas, réduire la croissance, la maintenance et la reproduction des proies. Dans les deux situations, le prédateur bénéficie de la consommation de la proie, qui lui permet d'obtenir les nutriments utiles à son développement. Au contraire, il est toujours plus ou moins néfaste pour ses proies.

## 3.2 Description du modèle

Nous présentons ici un modèle Proie-prédateur,  $(M, C)$  où  $M$  représente la population du maïs et  $C$  la population des chenilles.

On suppose que les chenilles attaquent le maïs dans sa phase de maturation environ 75 jours après la levée des jeunes plants, et que les épis de maïs attaqués par les chenilles est impropre au commerce et donc considéré mort. Le taux de reproduction  $\alpha$  ou vitesse de reproduction est la vitesse avec laquelle le maïs se reproduit, et entre dans le compartiment de la population des épis de maïs. Nous prendrons le jour comme unité de temps.  $\delta$  est la vitesse avec laquelle la pyrale (chenille) attaque les épis de maïs. Donc les épis quittent le compartiment de la population du maïs avec une incidence  $\delta M(t) C(t)$ .  $\sigma$  est la vitesse de reproduction des chenilles pyrales, et il sortent du compartiment des chenilles avec une vitesse  $\mu$  qui ici est le temps de vie de la chenille pyrale. Il peut arriver qu'on veuille éliminer de manière prématurée les chenilles pour préserver le maïs, dans ce cas on peut introduire progressivement des ennemies de la chenille qui les tueront ou alors utiliser des pesticides d'où la fonction de contrôle  $u(t)$  et dans ce cas la quantité des chenilles qui quittent le compartiment de la population des chenilles est  $d C(t) u(t)$  avec  $d$  densité moyenne des plants de maïs par unité de surface.

### 3.3 Équations du modèle

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = \alpha M(t) - \delta M(t) C(t), \\ \dot{C}(t) = \sigma M(t) C(t) - \mu C(t) - d C(t) u(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec les conditions initiales  $(M(0), C(0)) \in \mathbb{R}_+^2$

### 3.4 Description des variables et paramètres de $(M(t), C(t))$

TABLE 3.1 – Description des variables et paramètres

$(M)$	population du maïs
$(C)$	population des chenilles (pyrale)
$(\alpha)$	taux de reproductivité du maïs
$(\delta)$	taux de d'endommagement des épis de maïs
$(\sigma)$	taux de reproductivité des chenilles
$(\mu)$	taux de mortalité des chenilles
$(d)$	densité des plants par mètre carré ou hectare
$(u(t))$	fonction de contrôle

### 3.5 Existence des équilibres

Un état d'équilibre de la population est observé quand aucune des deux populations en présence n'évolue, c'est-à-dire quand les dérivées correspondantes sont nulles, ce qui se traduit par le système d'équations :

$$\begin{cases} M(t)(\alpha - \delta C(t)) = 0 \\ -C(t)(\mu - \sigma M(t)) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

, qui a pour solutions :

$$\{C(t) = 0, M(t) = 0\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \bar{C}(t) = \frac{\alpha}{\delta}, \bar{M}(t) = \frac{\mu}{\sigma} \right\}$$

La première solution correspond à une extinction définitive des deux espèces, la seconde à des valeurs pour les deux populations, dépendant des quatre paramètres

$\alpha, \delta, \sigma$  et  $\mu$ , qui restent stables indéfiniment.

### 3.6 Stabilité des équilibres

La stabilité des points fixes peut être déterminée par une linéarisation du système aux dérivées partielles. La matrice jacobienne du système est

$$J(M(t), C(t)) = \begin{bmatrix} \alpha - \delta C(t) & -\delta M(t) \\ \delta C(t) & \sigma M(t) - \mu \end{bmatrix}$$

#### 3.6.1 Équilibre sans proie

A l'équilibre sans proie  $(0, 0)$ , cette matrice prend la valeur :

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix},$$

qui a pour valeurs propres :

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\mu.$$

Ces valeurs propres sont toujours de signes opposés, ce qui montre que ce point d'équilibre est un point col. Ce n'est donc pas un point d'équilibre stable, ce qui montre en particulier que, suivant ce modèle, l'extinction du maïs et de la pyrale est difficile à obtenir.

#### 3.6.2 Équilibre proie-prédateur

En évaluant la matrice jacobienne au second point d'équilibre, la valeur suivante est obtenue :

$$J\left(\frac{\mu}{\sigma}, \frac{\alpha}{\delta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\delta\sigma}{\beta} \\ \frac{\alpha\sigma}{\delta} & 0 \end{bmatrix}$$

et elle a pour valeurs propres :

$$\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\mu}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\mu}$$

Ce point fixe est donc un foyer et plus particulièrement un centre, ce qui signifie que les populations de proies et prédateurs oscillent autour de leurs valeurs en ce point fixe.



# SIMULATION NUMÉRIQUE

---



---

## 4.1 Simulation de la dynamique Maïs-Chenilles avec différentes conditions initiales

Nous simulons l'évolution des trajectoires du Maïs et de la pyrale en utilisant le solveur code 45 de matlab les valeurs numériques des paramètres sont :

$$\alpha = 1; \delta = 0.1; \mu = 0.5; \sigma = 0.001;$$

A l'équilibre maïs-chenille nous avons :

$$C_0 = 10; M_0 = 500$$

l'équilibre ne dépend pas des conditions initiales seulement des paramètres. Sur la figure 4.1 nous simulons différents scénarios de la dynamique du Maïs et des chenilles correspondants à des conditions initiales différentes. et nous remarquons que le pic des récoltes du maïs dépend du rapport  $\frac{Maïs}{chenille}$  à l'instant  $t = 0$  ici notre instant initiale est quand les plant des maïs obtiennent au moins six feuilles , c'est à ce moment que les larves (chenilles) de la pyrale du maïs commencent à attaquer les jeunes plants. Plus le quotient  $\frac{Maïs}{chenille}$  est grand , plus les pics de récoltes sont élevés.

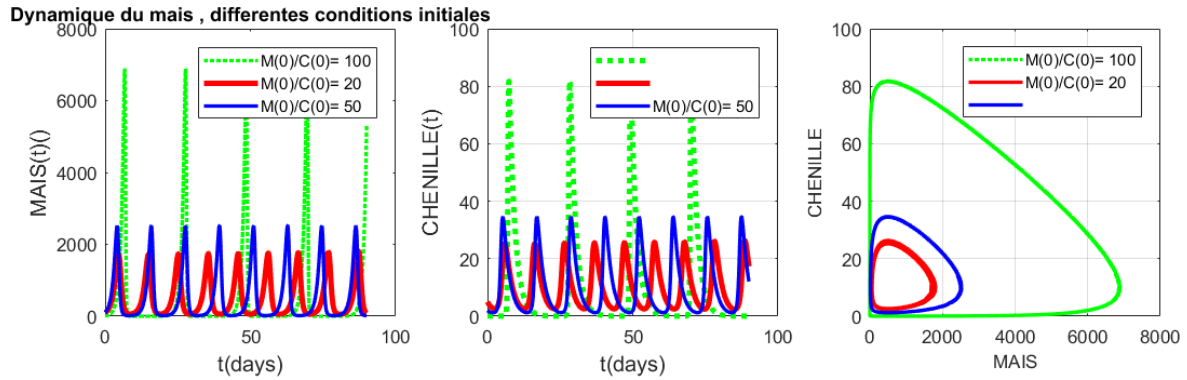


FIGURE 4.1 – Dynamique du maïs et des chenilles avec différentes conditions initiales

## 4.2 Contrôle optimal et Simulation numérique

### 4.2.1 Description du problème

Nous avons vu au chapitre précédent que plus le quotient  $\frac{\text{Maïs}}{\text{chenille}}$  est grand à l'instant initial, plus le pic des récoltes du maïs est bonne. Pour avoir une bonne récolte il faudrait que à l'instant  $T = t_f$  finale qui sonne avec le début de maturation des épis de maïs, que le taux de chenilles soit au plus bas. Nous pouvons donc poser un contrôle qui démarre quand les jeunes plants ont six feuilles (nombre de feuilles minimales pour la survie des chenilles) et s'arrête au début des premières récoltes des épis frais.

Soit  $u(t)$  le contrôle des chenilles (pyrale),  $u(t)$  représente ici la quantité en kilos de champignons (*Bauveria bassiana*) introduite dans le champ par unité de temps. le temps ici peut être le jour, le mois ou l'année. Pour les besoins d'économie la quantité de champignons disponible par unité de temps est limitée ou a un maximum. puisque les champignons s'achètent et ceci a un impact sur le cout de production du maïs par unité de surface (mètre carré, hectare etc). On borne notre

fonction de contrôle comme suit :  $0 \leq u(t) \leq M$ . En bref nous essayons de minimiser ou réduire la population des chenilles avec le moins de champignons ou pesticide possible.

A present nous posons le problème en symboles mathématique

$$\min_u C(T) + \frac{A}{2} \int_1^T u(t)^2 dt \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \text{sujet à } \dot{M}(t) &= \alpha M(t) - \delta M(t) C(t), M(0) = M_0 \\ \dot{C}(t) &= \sigma M(t) C(t) - \mu C(t) - d C(t) u(t), C(0) = C_0 . \\ 0 \leq u(t) &\leq M \text{ et } \int_1^T u(t) dt = B \end{aligned} \quad (4.2)$$

### 4.2.2 Résolution du problème

Pour simplifier le modèle on suppose que  $\alpha = \delta = \sigma = \mu = 1$  notre problème devient :

$$\min_u C(T) + \frac{A}{2} \int_1^T u(t)^2 dt \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{sujet à } \dot{M}(t) &= M(t)(1 - C(t)), M(0) = M_0 \\ \dot{C}(t) &= C(t)(M(t) - 1) - d C(t) u(t), C(0) = C_0 . \\ 0 \leq u(t) &\leq M \text{ et } \int_1^T u(t) dt = B \end{aligned} \quad (4.4)$$

Posons

$$\lambda(t) = (\lambda_i(t)) \text{ avec } i = 1, 2$$

$$X(t) = (M(t), C(t)) \quad (4.5)$$

l'hamiltonien de notre probleme de control est

$$H(t, X(t), u(t), \lambda(t)) = \frac{A}{2} u(t)^2 + \lambda_1(t) \dot{M}(t) + \lambda_2(t) \dot{C}(t)$$

les équations adjointes du système et les conditions de transversalité sont obtenues en utilisant le principe de maximum de Pontryagin

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial H}{\partial M} = \lambda'_1 &= -\lambda_1(1 - C(t)) - \lambda_2 C(t), \quad \lambda_1(T) = 0 \\
 -\frac{\partial H}{\partial C} = \lambda'_2 &= \lambda_1 M(t) - \lambda_2(\lambda_2 M(t) - 1 - d u(t)), \quad \lambda_2(T) = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Prenant en compte les bornes du contrôle

$$0 \leq u \leq M$$

le contrôle optimal  $u^*(t)$ , s'obtient en utilisant les conditions d'optimalité suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial H}{\partial u} \geq 0 \\ 0 \leq u \leq M \quad \text{si} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ u = M \quad \text{si} \quad \frac{\partial H}{\partial u} \leq 0 \end{array} \right.
 \tag{4.7}$$

d'après la relations 4.7 nous avons :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Au(t) - dC(t) \lambda_2 = 0 \quad \text{avec} \quad 0 \leq u(t) \leq M \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \iff Au(t) - dC(t) \lambda_2 = 0 \tag{4.9}$$

De la relation (4.9) nous avons :

$$u(t) = \frac{(\lambda_2 dC(t))}{A} \quad \text{avec} \quad 0 \leq u(t) \leq M \tag{4.10}$$

Prenant en compte les conditions d'optimalité 4.7 induite par les conditions au bord du contrôle  $u$  nous avons [6]

$$u^*(t) = \min(M, \max(0, \frac{(\lambda_2 dC(t))}{A})) \tag{4.11}$$

### 4.2.3 Algorithme numérique et fichiers matlab

L' algorithme numérique utilisé ici est la méthode classique de RUNGE KUTTA 4

## 4.2. Contrôle optimal et Simulation numérique

nous discrétisons l'intervalle  $[t_0, T]$  aux points  $s t_i = t_0 + ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), où  $h$  est le pas de temps tel que  $tn = T = N, h2 = h/2$  et  $j = N + 2 - i$ .

Par la suite nous définissons respectivement les variables d'État et adjointes  $M(t), C(t)$ , et  $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ , et enfin le contrôle  $u(t)$  en fonction des points points nodaux  $M(i), C(i)$  et  $\lambda_1(j) 1, \lambda_2(j)$ . Pour ce faire nous avons créer deux fichiers matlab : **codemaïs.m** et **plotmaïs.m** le premier **codemaïs.m** contient le corps du programme et le deuxième **plotmaïs.m** permet de visualiser la dynamique des trajectoires du Maïs ,des chenilles et du contrôle  $u(t)$  pas besoin d'être un spécialiste de matlab pour faire rouler ce visualiser les courbes, le programme est ergonomique il suffit de télécharger les deux fichiers dans matlab et dans la commande window de matlab ouvrir le fichier **plotmaïs.m** appuyer sur le bouton run et le système vous demandera d'introduire progressivement les paramètres du modèle et le temps final du contrôle, après cela il vous présentera les différentes courbes .

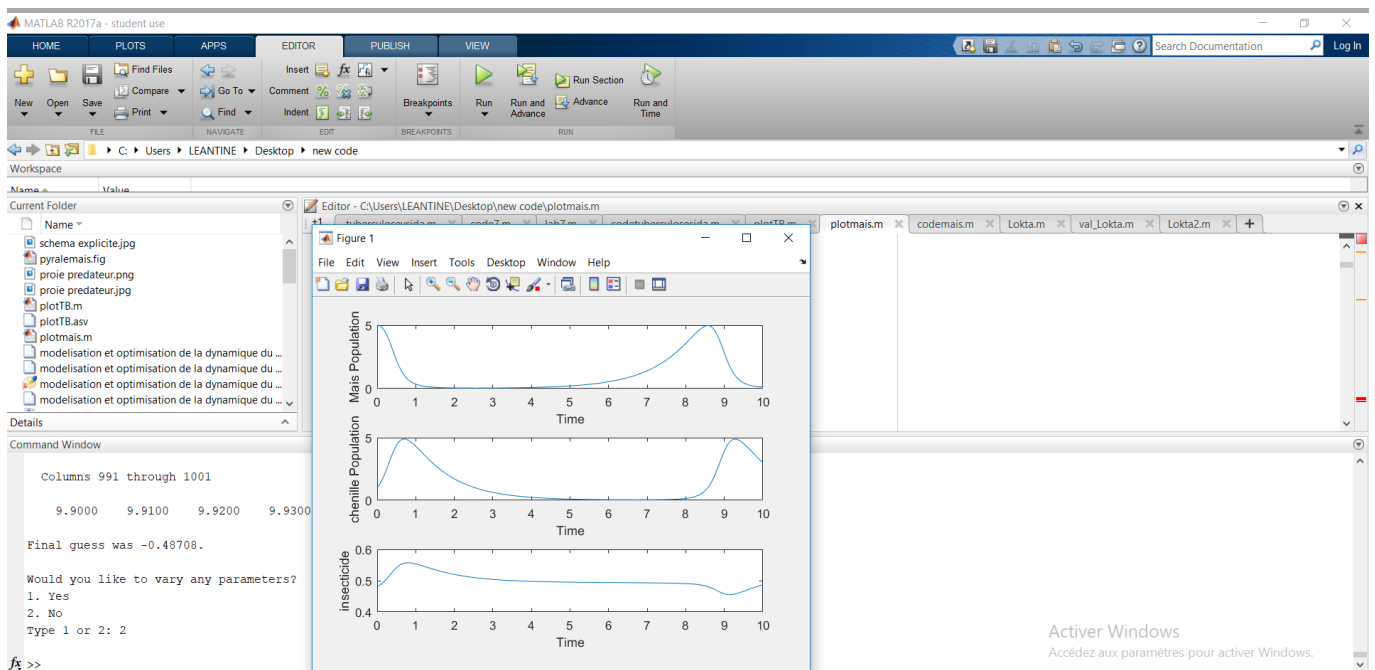


FIGURE 4.2 – Comment visionner les courbes

### 4.2.4 Simulations numériques et Interprétation

Nous allons simuler deux différents scénarios et observer la stratégie de contrôle optimale correspondante, en prenant une semaine comme unité de temps.

Le premier scénario est celui où la densité des plants de maïs par unité de surface est relativement faible pendant que le deuxième scénario est celui avec une forte densité

**Faible densité et Dynamique du maïs plus Stratégie de contrôle correspondante**

Les paramètres du modèles et du contrôle sont : **faible densité  $d = 0.1$**

$$N_{10} = 5 \quad N_{20} = 1 \quad M = 1 \quad A = 1$$

$$B = 5 \quad T = 10 \quad a = -0.52 \quad b = -0.5$$

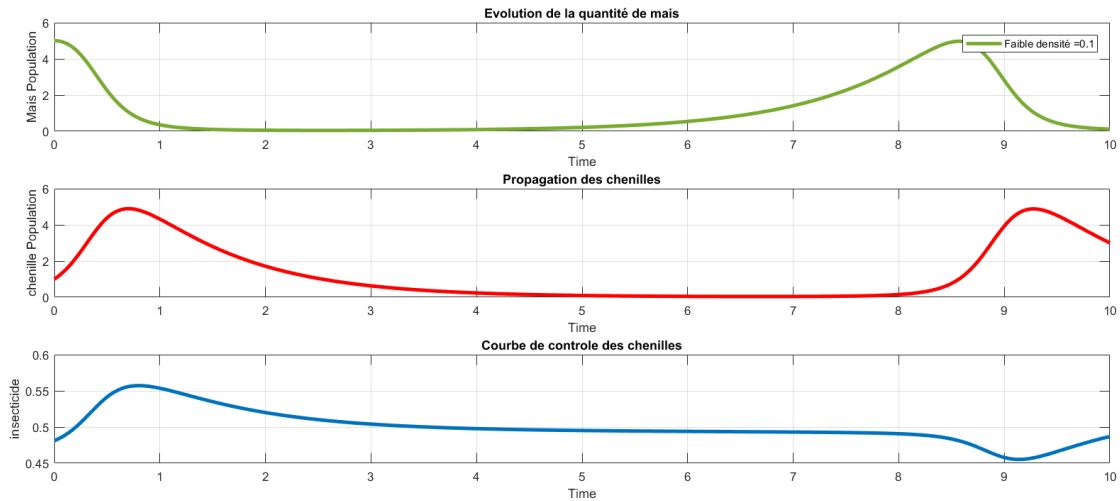


FIGURE 4.3 – Contrôle Optimale Induite par une Faible Densité

**Interprétation des courbes obtenues**

Dans cette première simulation, pour une période  $T=10$ , et pour un faible nombre de pieds de maïs par mètre carré, les courbes d'évolution des plants de maïs et celle de la population des pyrales de maïs présentent deux phases dans la plantation. En effet, la croissance initiale de la population de pyrales de maïs entre l'instant initiale et le pas 1 n'est que normale car nombre de pieds de maïs initialement présent dans la plantation est dévorée et favorise cette augmentation ; ce qui explique le ralentissement totale de la croissance des plants de maïs dans cet intervalle de temps. Cependant, à mesure que le régime anti-parasitaire se renforce et que les plants de maïs décline dans la plantation à partir du pas 1 jusqu'au pas 4, la population de chenille diminue également dans la plantation à partir d'une date inférieur au pas 1 et commence à disparaître à partir du pas 4 ; en ce moment, la courbe du régime anti-parasitaire présente un faible taux d'agressivité ie inférieur à 50% . Ici, nous avons l'impression que les pesticides ont un effet négatif sur l'évolution des plants de maïs et sur le nombre de chenilles dans la plantation ; cet effet est remarquable du pas 1 au pas 5 pour les plants de maïs. En outre, à mesure que le régime anti-parasitaire s'affaiblir et

accompagnée d'une disparition de la population de pyrales, ramène les plants de maïs à reprendre une croissance dans la plantation à partir du pas 5 et à retrouver son état normal. Ici, nous pouvons conclure que si l'application des pesticides impacte l'évolution des plants de maïs, son effet n'est pas dévastatrice ; Autrement dit, la stabilisation de la croissance des plants de maïs est due à l'effet dévastatrice des pyrales du maïs.

### Forte densité et Dynamique du maïs plus Stratégie de contrôle correspondante

Les paramètres du modèle et du contrôle sont : **Forte densité  $d = 0.8$**

$$N_{10} = 5 \quad N_{20} = 1 \quad M = 1 \quad A = 1$$

$$B = 5 \quad T = 10 \quad a = -0.52 \quad b = -0.5$$

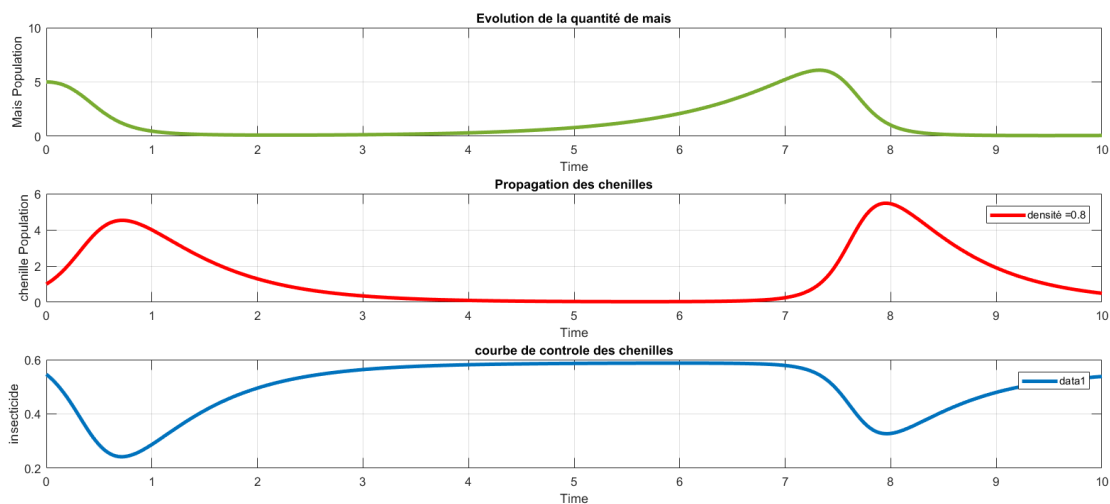


FIGURE 4.4 – Contrôle Optimal Induite par une Forte Densité

### Interprétation des courbes obtenues

Lorsqu'on augmente le nombre de pieds de maïs par mètre carré, nous n'avons plus un résultat similaire en ce qui concerne l'évolution des plants de maïs et des pyrales dans la plantation ; car nous remarquons une forte agressivité des pesticides sur la population de pyrale ie plus de 50%. En effet, le régime anti-parasitaire, bien plus forte au départ qu'avant, commence à une valeur élevée et décroît progressivement pendant une faible durée de la période entre le pas 0 et 1, puis croît rapidement à d'une date inférieure au pas 1, devenant presque constant pendant une grande partie de la période. D'ailleurs, la population de pyrales augmente et les plants de maïs perdent leur

croissance lorsque Le régime anti-parasitaire décroît ; puis la population de pyrale est éliminée avec une vitesse plus rapidement par rapport à la première situation (la population de pyrale décline à partir du pas 4 dans la première situation, or dans la deuxième situation elle décline à partir du pas 3) lorsque le régime anti-parasitaire aborde une phase de croissance rapide devenant presque constant sur une forte durée de la période, Cependant les plants de maïs reprennent rapidement leur croissance (pas 4) par rapport à la première situation (pas 5) .

Voilà pourquoi, après avoir observé la première et la deuxième courbes de l'évolution des plants de maïs, de la population de pyrales et du régime anti-parasitaire, nous pouvons conclure que : lorsqu'on augmente le nombre de pieds de maïs par mètre carré, le taux d'agressivité des pesticides augmente et permettent une élimination de la population de pyrales en un intervalle de temps plus raccourci.



---

---

## ♣ Conclusion ♣

---

---

Dans notre travail qui portait sur l'analyse mathématique, le contrôle et la simulation d'un modèle proie (Maïs)-prédateur (Pyrale du Maïs), nous avons dans un premier temps présenter le maïs et la pyrale du maïs avant d'établir les interactions au cours du temps entre ces deux populations. Ces interactions étant modélisées par un système d'équations différentielles de Lotka Voltera, nous avons au préalable rappelé les notions sur les systèmes dynamiques. Nous avons ensuite trouver les différents équilibres : équilibre sans proie et l'équilibre proie-prédateur.

Le résultat qui en ressort de cette analyse est le suivant :

Les récoltes sont abondantes si le nombre de chenille dans la plantation est le plus petit possible ; autre ment dis le rendement de la récolte du maïs dépend du rapport  $\frac{Maïs}{chenille}$  à l'instant  $t = 0$ . Plus le quotient  $\frac{Maïs}{chenille}$  est élevé, plus les récoltes sont abondantes. Ainsi, pour améliorer les récoltes il nous sera raisonnable de trouver une stratégie permettant de réduire au maximum la population de chenilles (pyrale) ; ce qui nous a permis dans un second temps de faire une étude mathématique du contrôle de la population de pyrale par l'introduction d'une fonction contrôle  $u(t)$ . Le résultat qui ressort de cette analyse est que :

lorsque le nombre de pieds de maïs par mètre carré est élevé, cela favorise la croissance de la population de chenille et l'intervention par l'utilisation des pesticides se caractérise par un taux d'agressivité élevé permettant une élimination de la population de pyrales en un intervalle de temps plus raccourci.

Dans le déroulement de ce mémoire, le concept "CONTRÔLE OPTIMAL" a été utilisé en agriculture ; Ceci étant, une autre ouverture visant à l'utilisation de ce concept dans l'éducation ; plus précisément dans un établissement : disposant un petit nombre de salles de classes, comment pourrions nous couvrir tout le programme des cours.

## Apport pédagogique

Ce mémoire est d'une grande importance pour ma formation d'élève professeur :

1. Avec le développement de ce travail, je peux venir en aide aux paysans, en les apprenant à détecter la présence de la chenille dans la plantation de maïs, comment lutter contre ce ravageur.
2. Grâce à ce travail, je saurais répondre aux élèves et avec exemple à l'appui à la question : à quoi servent les mathématiques dans la société.
3. Il me servira à introduire le cours sur les équations différentielles en classe de terminale scientifique. En effet, Savoir qu'on peut utiliser les équations différentielles pour trouver les solutions pouvant permettre de contrôler les ravageurs dans nos plantations.
4. Ces travaux nous ont permis de développer certaines aptitudes :  
Savoir faire des recherches sur le web et avoir une maîtrise du logiciel de traitement de texte Latex. Aptitude, qui nous permettra de concevoir nos épreuves futur. Elle m'a permise d'avoir une idée sur la programmation en matlab, le contrôle optimal, l'interprétation des courbes)

## 4.3 Annexe

```

x=[0:0.1:11];y=cos(x*pi);
figure(1);
plot(x,y)

```

```

function val_Lokta
clear all;
t0=0;
tf=100;
y0=[0.5;0.7];
[t y]=ode45('Lokta', [t0 tf]);
w=y(:,1); v=y(:,2);
figure(2)
grid on
subplot(2,3,1)
plot(t,w,'b','linewidth',2)%trajectoire du modèle
xlabel('t(months)', 'fontsize',12);ylabel('PREY(t) ','fontsize',12)
%subplot(2,3,2)
%plot(t,v,'b','linewidth',2) %trajectoire du modele
%xlabel('t(months)',fontsize,12); ylabel('PREDATOR(t) ','fontsize',12);
hold on
subplot(2,3,2)
plot(t,v,'b','linewidth',2)%trajectoire du modele
xlabel('t(months)',fontsize,12); ylabel('PREDATOR(t) ','fontsize',12)
hold on
subplot(2,3,3)
plot(w,v,'linewidth',2)
hold on
xlabel('PROIE(t)', 'fontsize',10); ylabel('PREDATOR(t)', 'fontsize',14);
subplot(2,3,4)
plot(t,w,v);
hold
xlabel('PRIOIE', 'fontsize',14),ylabel('PREDATOR(t)', 'fontsize',14);
plottools
end

```

```

function L=Lokta(t,y)
alpha=1; beta=1; gamma=1; delta=1; c1=0.4; c2=0.2; u=0.8;
L(1)=alpha*y(1)-beta*y(2)-y(1)*c1*u;
L(2)=-gamma*y(2)+delta*y(1)*y(2)-c2*y(2)*u;
L=[L(1) L(2)]';
end
function val_Lokta
clear all;
t0=0;
tf=100;
y0=[0.5;0.7];
[t y]=ode45('Lokta', [t0 tf]);
w=y(:,1); v=y(:,2);
figure(2)
grid on
subplot(2,3,1)
plot(t,w,'b','linewidth',2)%trajectoire du modèle
xlabel('t(months)', 'fontsize',12);ylabel('PREY(t) ','fontsize',12)
%subplot(2,3,2)
%plot(t,v,'b','linewidth',2) %trajectoire du modele
%xlabel('t(months)',fontsize,12); ylabel('PREDATOR(t) ','fontsize',12);
hold on
subplot(2,3,2)
plot(t,v,'b','linewidth',2)%trajectoire du modele
xlabel('t(months)',fontsize,12); ylabel('PREDATOR(t) ','fontsize',12)
hold on
subplot(2,3,3)
plot(w,v,'linewidth',2)
hold on
xlabel('PROIE(t) ','fontsize',10); ylabel('PREDATOR(t) ','fontsize',14);
subplot(2,3,4)
plot(t,w,v);
hold
xlabel('PRIOIE', 'fontsize',14),ylabel('PREDATOR(t) ','fontsize',14);
plottools
end

```

---

---

## ♣ Bibliographie ♣

---

---

- [1] Anaïs Chailleux. *Importance des interactions multi-trophiques dans les agrosystèmes pour la mise au point d'une lutte biologique contre une espèce invasive*. PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, 2013.
- [2] Yves Cherruault. *Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant*. Presses Universitaires de France-PUF, 1998.
- [3] YS Fiagan et al. Le système de stockage du maïs en milieu paysan béninois : bilan et perspectives. 1995.
- [4] Christine Jean and Josée Éthel Boisclair. *Les insectes nuisibles et utiles du maïs sucré : mieux les connaître*. Institut de recherche et de développement en agroenvironnement, 2009.
- [5] Morton I Kamien, Nancy L Schwartz, et al. Dynamic optimization : the calculus of variations and optimal control in economics and management. 1980.
- [6] Denise Kirschner, Suzanne Lenhart, and Steve Serbin. Optimal control of the chemotherapy of hiv. *Journal of mathematical biology*, 35(7) :775–792, 1997.
- [7] Joseph Mbang. *Analyse de la stabilité des modèles intra-hôtes avec retard : application à des modèles intra-hôtes de paludisme et de VIH-1*. PhD thesis, Université Paul Verlaine-Metz, 2009.
- [8] Wim Michiels and Silviu-Iulian Niculescu. *Stability and stabilization of time-delay systems : an eigenvalue-based approach*. SIAM, 2007.
- [9] B Nicolie, B Bernier, and M Drouet. Allergie au maïs. *Revue Francaise d'Allergologie*, 49(7) :547–553, 2009.
- [10] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. *Méthodes numériques pour le calcul scientifique*. Edition Springer,( '00), 2000.
- [11] G Sallet. Inria & ird epicasa09 avril 2010. *Rapport technique*, 2010.