

# EFFET DE LA MODULATION GAIN/PERTE D'UN SYSTEME PTS DE TYPE DIMERE

Mémoire présenté et soutenu en vue de l'obtention du DIPES II par :

**MBA NDEDA Stéphane Junior**

Département de Physique

Licencié en Physique

Matricule : **14J2841**

Sous la direction de

**KENFACK JIOTSA Aurélien**

Maitre de conférence

Université de Yaoundé I(E.N.S)

Année Académique

**2018/2019**

---

---

## Dédicaces

---

Je dédie ce mémoire à :

Mon père NDEDA François, et ma mère NJOUONTSO Charlotte.

A ma grand-mère WEKAM Martine

---

## Remerciements

---

Mes remerciements vont :

- Au Professeur KENFACK JIOTSA Aurélien en tant que directeur de ce mémoire, pour avoir accepté de diriger ce travail malgré ses diverses occupations. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.
- Au Professeur OWONO OWONO Luc Calvin, chef du Département de Physique de l'Ecole Normale Supérieur de Yaoundé pour les enseignements et les conseils reçus.
- Tous les enseignants de l'école normale pour les enseignements qu'ils m'ont prodigué durant toute la durée de ma formation.
- À l'endroit de tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de participer au jury.
- À tous les Enseignants du Département de Physique pour la qualité de leurs enseignements dispensés.
- À FENDZI Emmanuel pour ses encouragements et sa disponibilité.
- À SIMO Ibrahim pour sa patience et sa disponibilité.
- À TABEU Stéphane pour sa disponibilité.
- À tous mes camarades de promotions pour les débats édifiants de tous les jours.

À toute la famille particulièrement à M.NDEDA Francois, Mme NJOUNTSO Charlotte, M.SINGHE Etienne, Mme.MAGONE Marie, M.FOTSING Romial et Mlle.MAOUMBE Joriane pour leurs conseils et soutien.

À Mlle.EMENI Manuela et M.TCHOUANI Gilles Patient pour leurs encouragements.

À tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la bonne réalisation de ce mémoire, je leurs exprime ma profonde gratitude.

---

---

# Table des matières

---

Dédicaces	i
Remerciements	ii
Table Des Matières	vii
Résumé	viii
Abstract	ix
Liste des abréviations	x
Liste des figures	xii
Introduction Générale	1
<b>1 Révue de la littérature</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Généralités sur la notion de PTS . . . . .	3
1.2.1 Opérateur inversion spatiale . . . . .	3
1.2.2 Opérateur inversion temporelle . . . . .	4
1.2.3 Opérateur Parité-Temps . . . . .	5

1.3	Généralités sur la modulation . . . . .	7
1.3.1	Équations de Mathieu . . . . .	7
1.3.2	Équations de Hill . . . . .	8
1.4	Conclusion . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Matériels et Méthodes</b>	<b>10</b>
2.1	Introduction . . . . .	10
2.2	Modèle 1 : Cas linéaire . . . . .	10
2.2.1	Équation linéaire du dimère PTS . . . . .	11
2.2.2	Modes propres et seuils de transitions . . . . .	12
2.2.3	Résolution analytique et numérique . . . . .	14
2.3	Modèle 2 : Cas non-linéaire . . . . .	14
2.3.1	Équations non-linéaires du dimère PTS : Cas des ressorts linéaires . . . . .	15
2.3.2	Équations non-linéaires du dimère PTS : Cas des ressorts non-linéaires . . . . .	15
2.3.3	Recherche des modes propres et les seuils de transition . . .	16
2.3.4	Résolution numérique . . . . .	17
2.4	Étude de la modulation du gain . . . . .	18
2.5	Conclusion . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Résultats et discussions</b>	<b>19</b>
3.1	Introduction . . . . .	19
3.2	Modèle 1 : Cas linéaire . . . . .	19
3.2.1	Modes propres . . . . .	19

3.2.2	Seuils de transition . . . . .	20
3.2.3	Solutions analytiques et numériques . . . . .	21
3.3	Modèle 2 : Cas non-linéaire . . . . .	21
3.3.1	Modes propres . . . . .	21
3.3.2	Seuils de transitions . . . . .	22
3.3.3	Interprétation des solutions numériques . . . . .	23
3.4	Modulation du gain . . . . .	24
3.4.1	Amplitudes en fonction du paramètre du système . . . . .	24
3.4.2	Fréquence d'oscillation en fonction des paramètres du système	25
3.5	Conclusion . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Implications Pédagogiques</b>	<b>27</b>
4.1	Introduction . . . . .	27
4.2	Implications sur le plan des enseignements . . . . .	27
4.3	Implications sur le plan de l'apprentissage . . . . .	28
4.4	Conclusion . . . . .	28
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>30</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>33</b>

---

---

## Table Des Matières

---



---

## Résumé

---

Le présent travail porte sur l'étude de l'effet de la modulation gain/perte d'un système PTS de type dimère. Ce dernier est constitué de deux masses reliées chacune à un support fixe par un ressort et couplées entre elles par un troisième ressort en parallèle avec une force visqueuse. La première masse est placée sur une surface parfaitement lisse et la deuxième sur un moteur qui tourne à une vitesse constante. Dans le cadre linéaire, l'étude de la dynamique de ce système nous montre qu'il n'est pas PTS mais peut se comporter comme tel sous certaines conditions; les courbes des solutions numériques s'appuyant sur la courbe des seuils transitions l'illustre assez bien. Lorsque nous remplaçons la force précédente par la force de trainée, nous introduisons le premier cas de non-linéarité. Le second cas est obtenu en considérant les ressorts non linéaires. Les deux cas présentent des similitudes au niveau des seuils de transitions et modes propres mais diffèrent au niveau des réponses temporelles. A la suite de ces précédents résultats, obtenus pour un gain constant, nous nous proposons de faire une modulation du gain en fonction du temps de façon sinusoïdale. Les analyses faites avec ce cas de modulation, nous permettent de constater qu'il y'a disparition des rabi au profit des oscillations sinusoïdales d'amplitude constante.

**Mots-clés :** Parity Time Symmetry, modulation du gain, dimère.

---

## Abstract

---

The present work focuses on the study of the effect of gain/loss modulation of a Dimer-type PTS system. The latter consists of two masses connected each to a fixed support by a spring and coupled with a combination of a third spring and a viscous force connected in parallel. The first mass is placed on a perfectly smooth surface and the second on an engine that rotates at constant speed. In the linear framework, the dynamic study of this system shows that it is not PTS but can behave as such under certain conditions; the curves of the numerical solutions based on the transition thresholds curve illustrates it quite well. When we replace the previous force with a drag force, we introduce the first case of non-linearity. The second case is obtained by considering the nonlinear springs. The two cases present similarities in the thresholds of transitions and proper modes but differ in the level of temporal responses. As a result of these previous results obtained for a constant gain, we propose to make a gain modulation as a sinusoidal function which depends on time. The analyses made with this case of modulation, shows that there is disappearance of Rabi in favor of sinusoidal oscillations.

**Keywords :** System PT, modulation, Dimer type.

---

---

## Liste des abréviations

---

**PTS** : Parity Time Symmetry

**RK4** : Runge-Kutta d'ordre 4

**TH** : Threshold

---

# Table des figures

---

2.1	Modèle constitué de deux masses et trois ressorts linéaires avec pour couplage la force de type visqueuse . . . . .	10
2.2	Modèle identique à celui de la figure (2.1) à la seule différence que la force de type visqueuse est remplacée par une force de type trainée introduisant là la non linéarité du système. . . . .	15
2.3	Cas identique à la figure (2.2) mais cette fois avec plutôt comme liaison des masses aux supports, les ressorts non-linéaires . . . . .	15
3.1	Les modes propres $\omega_{11,12,21,22}$ en fonction $\frac{\gamma}{\gamma_{th1}}$ pour $\kappa=0.4$ , $\omega_0=1.0$ et $\lambda=0.01$ . Le premier cadran présente la partie réelle et le deuxième, la partie imaginaire pure. . . . .	19
3.2	Les seuils de transitions $\gamma_{th1,th2}$ en fonction de $\kappa$ pour $\omega_0=1.0$ et $\lambda=0.01$ ; $\gamma_{th1}$ représenté par la couleur bleue et $\gamma_{th2}$ par la couleur rouge. . . . .	20
3.3	Les amplitudes du mouvement $X_1$ et $X_2$ en fonction de $\tau$ pour $\omega_0=1.0$ ; $\kappa=0.4$ et $\lambda=0.01$ à 0.25, 0.75, 1.0, 1.05% de $\gamma_{th1}$ ; Où le cadran du haut représente la variation de la première masse et le second cadran pour la deuxième masse. . . . .	21

- 3.4  $\omega_{1,2,3,4}$  en fonction de  $\gamma$  pour  $\kappa=0.8$  et  $\omega_0=1.0$ ; le premier cadran présente la partie réelle et le deuxième cadran la partie imaginaire pure; Où  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  sont des modes propres. . . . . 22
- 3.5 Les seuils de transitions  $\gamma_{th1}$  et  $\gamma_{th2}$  en fonction de  $\kappa$  pour  $\omega_0=1.0$ ;  $\gamma_{th1}$  représenté par la couleur bleue et  $\gamma_{th2}$  par la couleur rouge . . . 22
- 3.6 Évolution temporelle des solutions numériques pour  $\omega_0=1.0$ ;  $\kappa=0.8$ ,  $\lambda=0.1$  à 75% de  $\gamma_{th1}$ . Où le cadran du haut représente la variation de la première masse et le second cadran pour la deuxième masse. . . 23
- 3.7 Évolution temporelle des solutions numériques pour  $\omega_0=1.0$ ,  $\kappa=0.8$ ,  $\lambda=0.1$ ,  $\alpha=0.1$  et  $\eta=0.1$  à 75% de  $\gamma_{th1}$ . Où le cadran du haut représente la variation de la première masse et le second cadran pour la deuxième masse. . . . . 23
- 3.8 L'amplitude d'oscillation en fonction du temps et la puissance en fonction de la fréquence d'oscillation. . . . . 24
- 3.9 Représentation des amplitudes du mouvement  $X_1$  et  $X_2$  en fonction de  $\gamma$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  et  $\lambda$ . . . . . 25
- 3.10 courbe présentant la variation de la fréquence d'oscillation en fonction du couplage élastique  $\kappa$  et de la fréquence de modulation  $\omega$  pour laquelle on a une puissance maximale. . . . . 26

---

## Introduction Générale

---

Le concept de symétrie parité-temps (PTS) a récemment attiré beaucoup d'attention dans divers domaines de la physique, en particulier l'optique et la photonique. C'est principalement parce que l'application de tels concepts pour la conception de dispositifs photoniques a ouvert beaucoup de nouvelles possibilités. On suppose classiquement qu'un hamiltonien quantique doit être hermitien pour décrire fidèlement un système physique. Ceci est une condition suffisante pour la réalité du spectre d'énergie. Récemment, cette condition a été contestée comme étant trop restrictive. Bender et collaborateurs [1,2] ont montré qu'une classe d'hamiltoniens clairement non hermitiens, mais invariante sous l'inversion simultanée de l'espace et du temps possèdent un véritable spectre d'énergie. Une généralisation de la théorie hamiltonienne symétrique PT a été donnée par Mostafazadeh dans une série d'articles [3,4]. Jusqu'ici, les travaux menés sur les PTS ont toujours été effectués avec les coefficients de gain/perte constants. Qu'advierait-il si le coefficient gain/perte était défini par une fonction sinusoïdale du temps ?

Le but de ce mémoire est d'étudier l'effet de la modulation gain/perte dans un système PTS de type dimère. Les oscillateurs de type PTS sont des systèmes constitués d'oscillateur couplés avec gain et perte équilibrés. Ils sont dénommés dans la littérature d'ologomers. Il s'agit ici d'un dimère mécaniques PTS composés

respectivement du couplage de deux masses avec gain et perte équilibrés. Dans le présent mémoire, nous présentons au chapitre 1, une revue de la littérature. Le chapitre 2 est dédié aux matériels et méthodes utilisés pour l'étude. Au chapitre 3, nous présentons et analysons les résultats obtenus. Enfin nous donnons au chapitre 4 l'implication pédagogique du sujet sur le système éducatif camerounais.

## 1.1 Introduction

Les oscillateurs de type PTS ont été étudiés dans divers contextes de la physique notamment la mécanique, l'électronique et en optique. Dans ce chapitre, nous présentons les généralités sur la notion de PTS et sur la modulation.

## 1.2 Généralités sur la notion de PTS

### 1.2.1 Opérateur inversion spatiale

L'action de l'opérateur parité consiste à changer le signe de toutes les coordonnées :  $(x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z)$  [6]. Les vecteurs polaires changent de signe en leurs opposés ( $r \rightarrow -r, p \rightarrow -p, E \rightarrow -E$ ) tandis que les vecteurs axiaux ne changent pas  $H \rightarrow H$ . Ici  $r$  est la coordonnées spatiale,  $P$  est la quantité de mouvement,  $E$  le champ électrique et  $H$  le champ magnétique. La valeur moyenne d'une observable associée à une quantité physique est la valeur classique de cette quantité. Puisque la coordonnée et la quantité de mouvement classique changent de signe sous l'inversion spatiale, leurs valeurs moyennes doivent aussi changer leur signe. Ainsi les opérateurs coordonnée et quantité de mouvement se transforment sous l'inversion spatiale par la règle :  $\hat{P}^\dagger \hat{r} \hat{P} = -\hat{r}$  et  $\hat{P}^\dagger \hat{p} \hat{P} = -\hat{p}$



où  $\hat{r}$  et  $\hat{P}$  sont les opérateurs coordonnée et quantité de mouvement. En plus la normalisation de la fonction d'onde doit être préservée sous l'inversion spatiale et ainsi l'opérateur parité est unitaire,  $\hat{P}^\dagger \hat{P} = \hat{I}$

Pour savoir si l'opérateur  $\hat{P}$  est linéaire ou antilinéaire, il est nécessaire de déterminer son action sur l'unité imaginaire :  $\hat{P}^\dagger i \hat{I} \hat{P}$ . Comme les relations canoniques de commutations  $[\hat{r}, \hat{p}] = i\hbar$  doivent rester invariantes sous l'inversion spatiale, nous obtenons :

$$\hat{P}^\dagger i \hat{I} \hat{P} \hbar = \hat{P}^\dagger [\hat{r}, \hat{p}] i \hat{I} \hat{P} = [\hat{r}, \hat{p}] = i\hbar \quad (1.1)$$

Ainsi,

$$\hat{P}^\dagger \hat{r} \hat{p} \hat{P} = (\hat{P}^\dagger \hat{r} \hat{P})(\hat{P}^\dagger \hat{p} \hat{P}) \quad (1.2)$$

Si l'hamiltonien du système est représenté sous forme polynomial d'opérateurs coordonné et quantité de mouvement alors :

$$\hat{P}^\dagger \hat{H}(\hat{p}, \hat{r}, t) \hat{P} = \hat{H}(\hat{P}^\dagger \hat{p} \hat{P}, \hat{P}^\dagger \hat{r} \hat{P}, t) = \hat{H}(-\hat{p}, -\hat{r}, t) \quad (1.3)$$

Un système est P-invariant si son hamiltonien ne change pas sous l'inversion des coordonnées, c'est-à-dire :

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{r}, t) = \hat{H}(-\hat{p}, -\hat{r}, t) \quad (1.4)$$

### 1.2.2 Opérateur inversion temporelle

L'action de l'opérateur inversion du temps  $\hat{T}$  signifie que t change en -t ( $t \rightarrow -t$ ) dans toutes les équations et les dépendances temporelles des quantités physiques. En conclusion, toutes les quantités linéairement dépendant de la dérivée par rapport au temps change de signe sous l'inversion du temps ( $p \rightarrow -p$ ) tandis que les

quantités physiques indépendantes du temps ne change pas ( $r \rightarrow r$ ). Nous obtenons ainsi les règles de transformation des opérateurs  $\hat{r}$  et  $\hat{p}$  sous l'inversion du temps :

$$\hat{T}^+ \hat{r} \hat{T} = \hat{r}, \hat{T}^+ \hat{p} \hat{T} = -\hat{p} \quad (1.5)$$

L'inversion du temps préserve la normalisation de la fonction d'onde. Comme précédemment, pour trouver si l'opérateur  $\hat{T}$  est linéaire ou antilinéaire, il est nécessaire de déterminer son action sur l'unité imaginaire :  $\hat{T}^+ i \hat{T} h$ . De manière similaire à (1.2) et (1.3), nous obtenons :

$$\hat{T}^+ i \hat{T} h = \hat{T}^+ [\hat{r}, \hat{p}] i \hat{P} = -[\hat{r}, \hat{p}] = -i \hat{h} \quad (1.6)$$

Ceci implique que l'opérateur  $\hat{T}$  est antilinéaire et antiunitaire . La relation (1.5) peut aussi s'écrire pour l'opérateur  $\hat{T}$  :

$$\hat{T}^+ \hat{r} \hat{p} \hat{T} = (\hat{T}^+ \hat{r} \hat{T})(\hat{T}^+ \hat{p} \hat{T}) \quad (1.7)$$

$$\hat{T}^+ \hat{r}^2 \hat{p} \hat{T} = (\hat{T}^+ \hat{r} \hat{T})(\hat{T}^+ \hat{r} \hat{T})(\hat{T}^+ \hat{p} \hat{T}) \quad (1.8)$$

nous retrouvons également :

$$\hat{T}^+ \hat{H}(\hat{r}, \hat{p}, t) \hat{T} = \hat{H}^*(\hat{T}^+ \hat{p} \hat{T}, \hat{T}^+ \hat{r} \hat{T}, t) = \hat{H}^*(-\hat{p}, \hat{r}, t) \quad (1.9)$$

Un système est T-invariant si son hamiltonien ne change pas sous l'inversion du temps, c'est-à-dire :

$$\hat{H}(\hat{r}, \hat{p}, t) = \hat{H}^*(\hat{p}, -\hat{r}, -t) \quad (1.10)$$

### 1.2.3 Opérateur Parité-Temps

Historiquement un pseudo-hamiltonien à spectre réel est un hamiltonien PT-symétrique. Un Hamiltonien pseudo-hermitien satisfait la relation donnée par :

$$H^+ = \eta H \eta^{-1} \quad (1.11)$$

où  $\eta$  est un automorphisme hermitique linéaire. Pour plusieurs systèmes symétriques PT, le choix  $\hat{P}$  démontre la correspondance entre la pseudo-hermiticité et la PT-symétrie. Un hamiltonien PT-symétrique signifie qu'il commute avec l'opérateur parité P et l'opérateur inversion du temps T, ceci est donnée par la relation (1.14) :

$$\hat{P}\hat{T}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}\hat{T} \quad (1.12)$$

En combinant les équations (1.13) et (1.14), nous obtenons la transformation de l'hamiltonien sous l'action simultanée des opérateurs  $\hat{P}$  et  $\hat{T}$  :

$$\hat{P}^+\hat{T}^+\hat{H}(\hat{r}, \hat{p}, t)\hat{P}\hat{T} = \hat{H}(\hat{P}^+\hat{T}^+\hat{p}\hat{P}\hat{T}, \hat{P}^+\hat{T}^+\hat{r}\hat{P}\hat{T}, t) = \hat{H}^*(\hat{p}, -\hat{r}, -t) \quad (1.13)$$

Ainsi un système sera donc PT-symétrique si on a :

$$\hat{H}(\hat{r}, \hat{p}, t) = \hat{H}^*(\hat{p}, -\hat{r}, -t) \quad (1.14)$$

Pour les hamiltoniens qui sont sous la forme :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) \quad (1.15)$$

où m est la masse et V l'énergie potentielle de la particule. La condition (1.16) pour que l'hamiltonien soit PT-symétrique requiert que la partie réelle du potentiel soit une fonction paire des coordonnées et la partie imaginaire une fonction

impaire :  $V(\mathbf{r}) = V^*(-\mathbf{r})$ . Un oscillateur mécanique est dit symétrique à parité-temps si son hamiltonien satisfait à la relation (1.14) ou (1.16). Pour un oscillateur mécanique à deux degrés de liberté régie par des équations décrivant la dynamique du modèle, sera dit symétrique à parité et temps si ces équations restent invariantes sous la transformation PT, en d'autres termes si elles sont invariantes sous l'échange des variables  $x$  et  $y$  (degré de liberté du système), suivi d'une inversion de temps.

$$\begin{aligned}
 \hat{P}x(t) &= y(t) \\
 \hat{P}y(t) &= x(t) \\
 \hat{T}x(t) &= x(-t) \\
 \hat{T}y(t) &= y(-t)
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

## 1.3 Généralités sur la modulation

### 1.3.1 Équations de Mathieu

Les propriétés des équation de Mathieu[10] sont examinées afin de discuter de certaines applications qui ont paru ces dernières années. Ceux mentionnés sont : les vibrations dans un tambour elliptique, le pendule inversé, le quadrupole de radio fréquence, la modulation de fréquence, la stabilité d'un corps flottant, la focalisation alternée de gradient, le piège de Paul pour les particules chargées, et le piège de miroir pour le neutre Particules. Dans article[11], nous étudions l'interaction des sous harmonicrosonances dans l'équation non linéaire de Mathieu quasi-périodique,

$$x + [\delta + \epsilon(\cos\Omega_1 t - \cos\omega_2 t)]x + \alpha x^3 = 0 \tag{1.17}$$

Nous supposons que  $\epsilon \ll 1$  et que le coefficient de non-linéaire,  $\alpha$ , est positif mais pas nécessairement petit. Nous utilisons la théorie de la perturbation de la transformation de lie avec des fonctions elliptiques ; plutôt que les fonctions trigonométriques habituelles. Pour étudier les résonances surharmoniques associées aux orbites en résonance avec un pilote respectif. En particulier, nous dérivons des expressions analytiques qui placent les conditions sur  $(\delta, \epsilon, \Omega_1, \omega_2)$  à laquelle les bandes de résonance surharmonique dans une section Poincaré de l'espace d'action commencent à se chevaucher. Ces résultats sont utilisés en combinaison avec le critère de chevauchement de Chirikov pour obtenir une vue d'ensemble du comportement global  $O(\epsilon)$  de l'équation en fonction de  $\delta$  et  $\omega_2$  avec  $\Omega_1, \alpha$  et  $\epsilon$  fixes.

### 1.3.2 Équations de Hill

Dans l'article[12], nous étendons des résultats bien connus pour une équation de Hill et présentons l'analyse de stabilité de deux équations couplées de Hill pour lesquelles la théorie générale n'est pas facilement disponible. Les expressions approximatives sont dérivées dans le contexte de la théorie de la perturbation pour les limites entre les solutions périodiques bornées et non bornées avec des fréquences  $\omega = n/m$  ( $n$  et  $m$  sont des entiers positifs) des équations de Mathieu couplées linéaires et non linéaires comme exemples. On trouve un excellent accord entre les prédictions théoriques et les calculs numériques sur de grandes gammes de valeurs de paramètres et de conditions initiales. Ces solutions périodiques sont importantes parce qu'elles correspondent à certaines des résonances d'ordre le plus bas du système et quand elles sont stables, elles se tournent vers des

grandes régions de mouvement régulier autour d'elles dans l'espace de phase. Les équations de Mathieu couplées apparaissent dans de nombreuses applications physiques importantes, dans les problèmes de dynamique des accélérateurs, d'électrohydrodynamique et de mécanique.

## 1.4 Conclusion

Le but de ce chapitre était de mettre les bases fondamentales nécessaire pour la compréhension de la notion de PTS et la modulation. A cet effet, nous avons fait une revue de littérature sur les généralités en présentant l'opérateur Parité-Temps et l'équation de Mathieu. Nous présentons dans la suite les méthodes utilisées pour la résolution des équations dynamiques du système.

## 2.1 Introduction

Le concept PTS découle des tentatives d'extension de la mécanique quantique au-delà des opérateurs hermitiens [4]. Dans ce chapitre, nous allons nous appesantir sur l'étude analytique puis numérique de nos modèle linéaire et non-linéaire de notre système et sur l'étude de la modulation de notre modèle PTS.

## 2.2 Modèle 1 : Cas linéaire

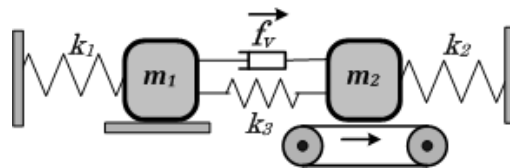


FIGURE 2.1 – Modèle constitué de deux masses et trois ressorts linéaires avec pour couplage la force de type visqueuse

Le couplage linéaire de deux masses dont l'une a une amplification linéaire (gain) et l'autre une quantité égale d'atténuation linéaire (perte) forme une unité que nous appelons dimère PTS. Le système PTS dimère est constitué de deux masses  $m_1$  et  $m_2$  reliée chacune à un support fixe par deux ressorts  $k_1$  et  $k_2$  et sont couplée entre elles par un ressort  $k_3$ . Sur la deuxième masse, nous avons placé

un moteur qui tourne avec une vitesse linéaire constante  $v_c$ . Ce moteur introduit une amplification pour la seconde masse. Ici, nous introduisons une force de type visqueuse comme un couplage des deux masses afin de voir son influence dans celui-ci.

### 2.2.1 Équation linéaire du dimère PTS

pour retrouver les équations de la dynamique du système, nous utilisons la méthode de Lagrange.

Posons :  $m_1=m_2=m$  ,  $k_1=k_2=k_3=k$ . Les énergies cinétique et potentielle du système sont respectivement données par :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad (2.1)$$

$$V = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + k(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) \quad (2.2)$$

Le lagrangien du système est donné par :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - k(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) \quad (2.3)$$

Avec  $x_1$  et  $x_2$  représentant les déplacements des deux masses. D'après le formalisme lagrangien, le système d'équation du mouvement pour un système non conservatif est donné par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = -c_1\dot{x}_1 - \beta(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = F(v_c - \dot{x}_2) - \beta(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (2.5)$$

où  $\beta$  et  $c_1$  représentent les coefficients d'amortissement et  $F(v_c - \dot{x}_2)$  la force délivrée par le moteur relié à la masse  $m_2$ . Cette force est fonction de la vitesse du moteur et de la vitesse relative de la masse  $m_2$ . En faisant un développement



limité à l'ordre 1 de cette force, on obtient :  $F(v_c) - \dot{x}_2 F'(v_c)$  que nous remplaçons dans l'équation (2.5) du système et le système devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = -c_1 \dot{x}_1 - \beta(x_1 - x_2) \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = F(v_c) - \dot{x}_2 F'(v_c) - \beta(x_2 - x_1) \quad (2.7)$$

En remplaçant le Lagrangien par son expression et en effectuant les différentes dérivées, le système précédent devient :

$$\ddot{x}_1 + \frac{\beta + c}{m} \dot{x}_1 + \left(\frac{2k}{m} - \frac{\beta}{m}\right)x_1 - \frac{k}{m}(x_2) = 0 \quad (2.8)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{(F'(v_c) + \beta)}{m} \dot{x}_2 + \frac{2k}{m}x_2 - \frac{\beta}{m}\dot{x}_1 - \frac{k}{m}x_1 = F(v_c) \quad (2.9)$$

En prenant  $F(v_c) = 0$ , et en posant  $\gamma_1 = \frac{\beta + c}{m}$  ;  $\gamma_2 = \frac{(F'(v_c) + \beta)}{m}$  ;  $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$  ;  $\kappa = \frac{k}{m}$  ;  $\lambda = \frac{\beta}{m}$  ; le système devient :

$$\ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \lambda \dot{x}_2 - \kappa x_2 = 0 \quad (2.10)$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \lambda \dot{x}_1 - \kappa x_1 = 0 \quad (2.11)$$

$\omega_0$  représente la pulsation propre du système alors que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  représentent respectivement les coefficients de perte et de gain. Alors en posant  $\gamma_1 = 2\gamma$  ;  $\gamma_2 = -2\gamma$  ; nos équations deviennent :

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \lambda \dot{x}_2 - \kappa x_2 = 0 \quad (2.12)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\gamma \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \lambda \dot{x}_1 - \kappa x_1 = 0 \quad (2.13)$$

## 2.2.2 Modes propres et seuils de transitions

Pour résoudre notre système afin de trouver les valeurs propres du système ainsi que les différentes solutions, nous prendrons les solutions sous la forme d'une onde

plane où seule la partie temporelle est prise en compte :

$$x_1(t) = Ae^{(-i\omega t)} \quad (2.14)$$

$$x_2(t) = Be^{(-i\omega t)} \quad (2.15)$$

A et B représentent les amplitudes et  $\omega$  la fréquence. En effectuant les différentes dérivées que l'on reporte dans notre système, on obtient :

$$(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2)x_1 + (i\lambda\omega^2 - \kappa)x_2 = 0 \quad (2.16)$$

$$(i\lambda\omega^2 - \kappa)x_1 + (-\omega^2 - 2i\omega\gamma + \omega_0^2)x_2 = 0 \quad (2.17)$$

Ce système admet des racines non triviales si et seulement si son déterminant est nulle, on a donc :

$$\omega^4 + (4\gamma^2 - 2\omega_0^2 + \lambda^2)\omega^2 + \omega_0^2 - \kappa^2 = 0 \quad (2.18)$$

Après résolution de cette équation, on obtient les solutions suivantes :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{-(4\gamma^2 - 2\omega_0^2 + \lambda^2) - \sqrt{(4\gamma^2 - 2\omega_0^2 + \lambda^2)^2 - 4(\omega_0^2 - \kappa^2)}}{2}} \quad (2.19)$$

$$\omega_2 = -\sqrt{\frac{-(4\gamma^2 - 2\omega_0^2 + \lambda^2) - \sqrt{(4\gamma^2 - 2\omega_0^2 + \lambda^2)^2 - 4(\omega_0^2 - \kappa^2)}}{2}} \quad (2.20)$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{-(4\gamma^2 - 2\omega_0^2 + \lambda^2) + \sqrt{(4\gamma^2 - 2\omega_0^2 + \lambda^2)^2 - 4(\omega_0^2 - \kappa^2)}}{2}} \quad (2.21)$$

$$\omega_4 = -\sqrt{\frac{-(4\gamma^2 - 2\omega_0^2 + \lambda^2) + \sqrt{(4\gamma^2 - 2\omega_0^2 + \lambda^2)^2 - 4(\omega_0^2 - \kappa^2)}}{2}} \quad (2.22)$$

Nous pouvons dès à présent trouver les seuils de transitions de notre système en résolvant tout simplement l'équation :  $\Delta = 0$ , où  $\Delta$  représente le discriminant de l'équation (2.18) avec pour variable  $\gamma$ (gamma) qui est le paramètre gain/perte.

Cette équation est :

$$(4\gamma^2 - 2\omega_0^2 + \lambda^2)^2 - 4(\omega_0^2 - \kappa^2) = 0 \quad (2.23)$$

Après résolution de cette équation, nous obtenons les deux solutions suivantes :

$$\gamma_{th1} = \sqrt{2\omega_0^2 - \lambda^2 - 2\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}} \quad (2.24)$$

$$\gamma_{th2} = \sqrt{2\omega_0^2 - \lambda^2 + 2\sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}} \quad (2.25)$$

Nous avons rejeté les valeurs négatives car nous travaillons dans un domaine positif.

### 2.2.3 Résolution analytique et numérique

Pour cette partie nous avons utilisé la méthode de Jordan qui consiste à poser :

$$\dot{x}_1 = y_1$$

$$\dot{x}_2 = y_2$$

Le système d'équation du mouvement devient :

$$\dot{x}_1 = y_1 \quad (2.26a)$$

$$\dot{y}_1 + 2\gamma y_1 + \omega_0^2 x_1 - \kappa x_2 = 0 \quad (2.26b)$$

$$\dot{x}_2 = y_2 \quad (2.26c)$$

$$\dot{y}_2 - 2\gamma y_2 + \omega_0^2 x_2 - \kappa x_1 = 0 \quad (2.26d)$$

La résolution ne pouvant pas se faire analytiquement, on a donc procédé à une résolution numérique pour déterminer les différentes positions en utilisant la méthode de RK4 puis les tracer en fonction de l'évolution temporelle.

## 2.3 Modèle 2 : Cas non-linéaire

En introduisant maintenant une force de type trainée à la place de la force de type visqueuse, le système devient non linéaire et vérifie les conditions PT. Par la

suite, nous considérerons les deux ressorts externes non-linéaires et le ressort de couplage linéaire.

### 2.3.1 Équations non-linéaires du dimère PTS : Cas des ressorts linéaires

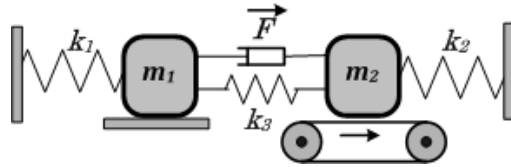


FIGURE 2.2 – Modèle identique à celui de la figure (2.1) à la seule différence que la force de type visqueuse est remplacée par une force de type trainée introduisant là la non linéarité du système.

En effectuant les différentes dérivées et en considérant tout ce que nous avons posés précédemment, les nouvelles équations sont les suivantes :

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2x_1 - \lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 - \kappa x_2 = 0 \tag{2.27}$$

$$\ddot{x}_2 - 2\gamma\dot{x}_2 + \omega_0^2x_2 - \lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 - \kappa x_1 = 0 \tag{2.28}$$

Avec  $\gamma_1 = 2\gamma = \frac{\beta+c}{m}$  ;  $\gamma_2 = -2\gamma = \frac{F'(v_c)+\beta}{m}$  ;  $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$  ;  $\kappa = \frac{k}{m}$  ;  $\lambda = \frac{\beta}{m}$

### 2.3.2 Équations non-linéaires du dimère PTS : Cas des ressorts non-linéaires

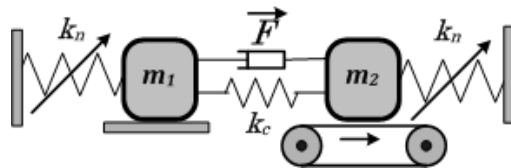


FIGURE 2.3 – Cas identique à la figure (2.2) mais cette fois avec plutôt comme liaison des masses aux supports, les ressorts non-linéaires

Ici on prend les ressorts externes non-linéaires, et celui du couplage linéaire ; alors les énergies cinétique et potentielle sont données par les équations suivantes :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad (2.29)$$

$$V = \frac{1}{2}k_c(x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}\alpha x_1^4 + \frac{1}{6}\eta x_1^6\right) + \left(\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}\alpha x_2^4 + \frac{1}{6}\eta x_2^6\right) \quad (2.30)$$

En utilisant le formalisme Lagrangien, on a :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k_c(x_1 - x_2)^2 - \left(\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{4}\alpha x_1^4 + \frac{1}{6}\eta x_1^6\right) - \left(\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}\alpha x_2^4 + \frac{1}{6}\eta x_2^6\right) \quad (2.31)$$

Les équations du mouvement sont données par :

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_2 - \lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 - \alpha x_1^3 + \eta x_1^5 - \kappa x_2 = 0 \quad (2.32)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\gamma\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \lambda(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 - \alpha x_2^3 + \eta x_2^5 - \kappa x_1 = 0 \quad (2.33)$$

### 2.3.3 Recherche des modes propres et les seuils de transition

Pour ce faire, on ne considère pas la partie non linéaire, alors nos équations deviennent :

$$\ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \kappa x_2 = 0 \quad (2.34)$$

$$\ddot{x}_2 - 2\gamma\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 - \kappa x_1 = 0 \quad (2.35)$$

Pour résoudre notre système d'équation afin de trouver les valeurs propres du système ainsi que les différentes solutions, nous procéderont comme dans le cas linéaire et nous obtenons :

$$(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \omega_0^2)x_1 - \kappa x_2 = 0 \quad (2.36)$$

$$-\kappa x_1 + (-\omega^2 - 2i\omega\gamma + \omega_0^2)x_2 = 0 \quad (2.37)$$

Ce système admet des racines non triviales pour un déterminant nulle, on aura donc l'équation suivante :

$$\omega^4 + (4\gamma^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^2 - \kappa^2 = 0 \quad (2.38)$$

Après résolution de cette équation, on obtient les solutions suivantes :

$$\omega_1 = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\gamma^2) - \sqrt{4\gamma^4 - 4\omega_0^2\gamma^2 + \kappa^2}} \quad (2.39)$$

$$\omega_2 = -\sqrt{(\omega_0^2 - 2\gamma^2) - \sqrt{4\gamma^4 - 4\omega_0^2\gamma^2 + \kappa^2}} \quad (2.40)$$

$$\omega_3 = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\gamma^2) + \sqrt{4\gamma^4 - 4\omega_0^2\gamma^2 + \kappa^2}} \quad (2.41)$$

$$\omega_4 = -\sqrt{(\omega_0^2 - 2\gamma^2) + \sqrt{4\gamma^4 - 4\omega_0^2\gamma^2 + \kappa^2}} \quad (2.42)$$

Nous pouvons dès à présent trouver les seuils de transitions de notre système en résolvant tout simplement l'équation :  $\Delta = 0$ , où  $\Delta$  représente le discriminant de l'équation (2.33) avec pour variable  $\gamma$ (gamma) qui est le paramètre gain/perte. Cette équation est :

$$(4\gamma^2 - 2\omega_0^2 + \lambda^2)^2 - 4(\omega_0^4 - \kappa^2) = 0 \quad (2.43)$$

Après résolution de cette équation nous obtenons les deux solutions suivantes :

$$\gamma_{th1} = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\sqrt{\omega_0^4 - \kappa^2})/2} \quad (2.44)$$

$$\gamma_{th2} = \sqrt{(\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - \kappa^2})/2} \quad (2.45)$$

Nous avons rejeté les valeurs négatives car nous travaillons dans un domaine positif.

### 2.3.4 Résolution numérique

Pour trouver nos solutions, on procède par une résolution numérique pour tracer les seuils de transitions et les modes propres ensuite en utilisant la méthode de RK4, on trace nos positions en fonction de l'évolution temporelle dans les deux cas de non linéarité du système à en utilisant le logiciel MATLAB.

## 2.4 Étude de la modulation du gain

Pour la modulation d'amplitude, il s'agit donc de faire varier l'amplitude de la porteuse en fonction du signal modulant, sans que cette variation dépasse l'amplitude de la porteuse avant modulation. Dans notre cas, nous avons un gain qui est une constante, alors on décide de faire varier ce gain en fonction du paramètre temps de façon sinusoïdale, c'est à dire qu'on prend :

$$\gamma = \gamma_0 \sin(\omega t) \quad (2.46)$$

Ce procédé est appelé : "la modulation du gain". Par la suite, on l'introduit dans notre système pour voir son comportement. Pour le faire, on procède par une résolution numérique dans laquelle on utilise la méthode de RK4 où nous avons représenté l'amplitude en fonction de l'évolution temporelle et la puissance en fonction de la fréquence pour les paramètres fixés du système.

Par la suite nous faisons varier chaque paramètre du système sur des intervalles définis pour voir comment évolue l'amplitude et la fréquence dans notre système.

## 2.5 Conclusion

Il était question pour nous dans ce chapitre de présenter les matériels et méthodes utilisées pour l'étude analytique de notre système linéaire et non-linéaire puis la modulation. Nous présentons ensuite et analysons dans la suite les résultats issu du traitement analytique et numérique des solutions des solutions des équations linéaires et non-linéaires.

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous discutons les résultats issus de la simulation numérique des solutions des équations dans le cas linéaire et non-linéaire. Ensuite, nous analysons l'influence de la modulation du gain sur nos solutions dans le cas non-linéaire.

### 3.2 Modèle 1 : Cas linéaire

Dans cette partie, notre système n'étant pas PTS, on se place dans la condition

$$\lambda^2 < 2\omega_0^2 - 4\gamma^2 \tag{3.1}$$

#### 3.2.1 Modes propres

Nous représentons les quatre modes de vibrations en fonction du paramètre de gain/perte rapporté au paramètre de gain/perte seuil (threshold) à travers la figure 3.1 :

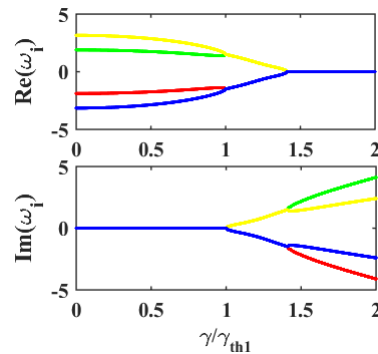


FIGURE 3.1 – Les modes propres  $\omega_{11,12,21,22}$  en fonction  $\frac{\gamma}{\gamma_{th1}}$  pour  $\kappa=0.4$ ,  $\omega_0=1.0$  et  $\lambda=0.01$ . Le premier cadran présente la partie réelle et le deuxième, la partie imaginaire pure.



La figure précédente représente les modes propres de notre système. elle nous présente trois domaines à savoir : la partie réelle avant la première transition, complexe entre les deux transitions, et la partie imaginaire pure après la deuxième transition. Puisque nous recherchons des valeurs propres réelles, nous allons considérer la partie où ces valeurs sont purement réelles.

### 3.2.2 Seuils de transition

la représentation des seuils de transitions en fonction de  $\kappa$

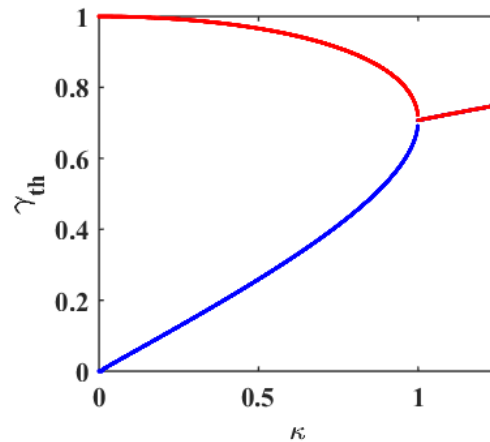


FIGURE 3.2 – Les seuils de transitions  $\gamma_{th1,th2}$  en fonction de  $\kappa$  pour  $\omega_0=1.0$  et  $\lambda=0.01$ ;  $\gamma_{th1}$  représenté par la couleur bleue et  $\gamma_{th2}$  par la couleur rouge.

Cette figure nous montre que le paramètre de gain/perte est réelle pour  $\kappa < 1$ . Le domaine  $\kappa > 1$  est considéré comme interdit car le paramètre gain/perte devient complexe. Dans le domaine  $\kappa < 1$ , on observe l'existence de deux seuils de transitions. La gamme des valeurs du premier et deuxième seuils de transitions augmente avec le couplage entraînant une diminution de la gamme des valeurs pour la phase complexe.

### 3.2.3 Solutions analytiques et numériques

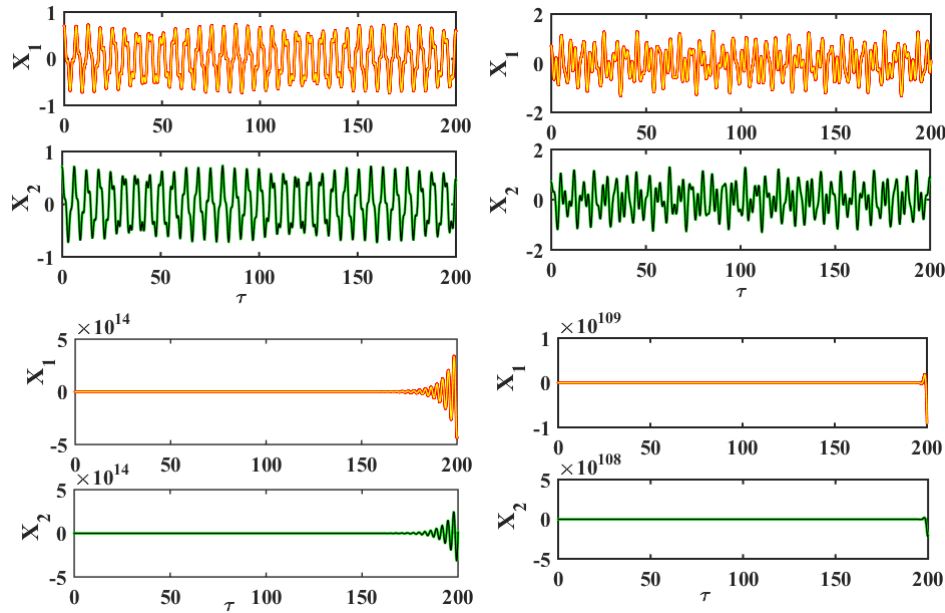


FIGURE 3.3 – Les amplitudes du mouvement  $X_1$  et  $X_2$  en fonction de  $\tau$  pour  $\omega_0=1.0$ ;  $\kappa=0.4$  et  $\lambda=0.01$  à  $0.25, 0.75, 1.0, 1.05\%$  de  $\gamma_{th1}$ ; Où le cadran du haut représente la variation de la première masse et le second cadran pour la deuxième masse.

On observe la disparition progressive des oscillations de rabi. Cela s'explique par le fait qu'à l'approche du seuil de transition, le système tend à se rompre. Nous remarquons aussi que les solutions analytiques et numériques coïncident parfaitement.

## 3.3 Modèle 2 : Cas non-linéaire

dans cette partie pour déterminer les modes propres et seuils de transitions, on annule le coefficient de non linéarité et notre système devenant un simple modèle PTS on a les modes propres et seuils de transitions suivants.

### 3.3.1 Modes propres

La représentation des quatre modes de vibration en fonction de  $\frac{\gamma}{\gamma_{th1}}$  qui est le paramètre gain/perte et  $\kappa=0.8$  et  $\omega_0=1.0$  est donnée par les figures 3.4 :

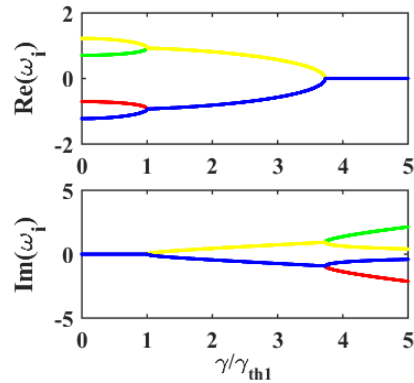


FIGURE 3.4 –  $\omega_{1,2,3,4}$  en fonction de  $\gamma$  pour  $\kappa=0.8$  et  $\omega_0=1.0$ ; le premier cadran présente la partie réelle et le deuxième cadran la partie imaginaire pure; Où  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  sont des modes propres.

La figure 3.4 représente les modes propres de notre système. Elle nous présente trois domaines à savoir : la partie réelle avant la première transition, complexe entre les deux transitions, et la partie imaginaire pure après la deuxième transition. Puisque nous recherchons des valeurs propres réelles, nous allons considérer la partie où ces valeurs sont purement réelles.

### 3.3.2 Seuils de transitions

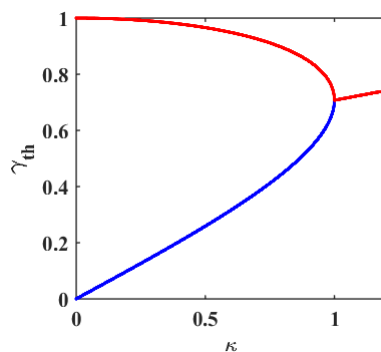


FIGURE 3.5 – Les seuils de transitions  $\gamma_{th1}$  et  $\gamma_{th2}$  en fonction de  $\kappa$  pour  $\omega_0=1.0$ ;  $\gamma_{th1}$  représenté par la couleur bleue et  $\gamma_{th2}$  par la couleur rouge

Ici nos seuils de transition a comportement que précédemment donnée par la figure 3.2 à la seule différence qu'ils dépendent uniquement du couplage élastique.

### 3.3.3 Interprétation des solutions numériques

#### Cas 1 : Ressorts linéaires

La représentation des solutions analytiques et numérique dans le domaine linéaire est donné ci-dessous.

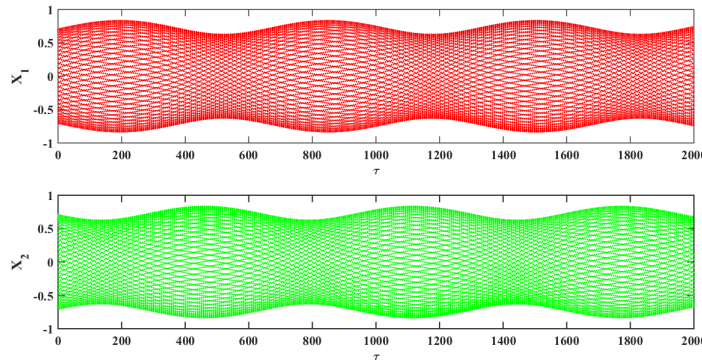


FIGURE 3.6 – Évolution temporelle des solutions numériques pour  $\omega_0=1.0$ ;  $\kappa=0.8$ ,  $\lambda=0.1$  à 75% de  $\gamma_{th1}$ . Où le cadran du haut représente la variation de la première masse et le second cadran pour la deuxième masse.

#### Cas 2 : Ressorts non-linéaires

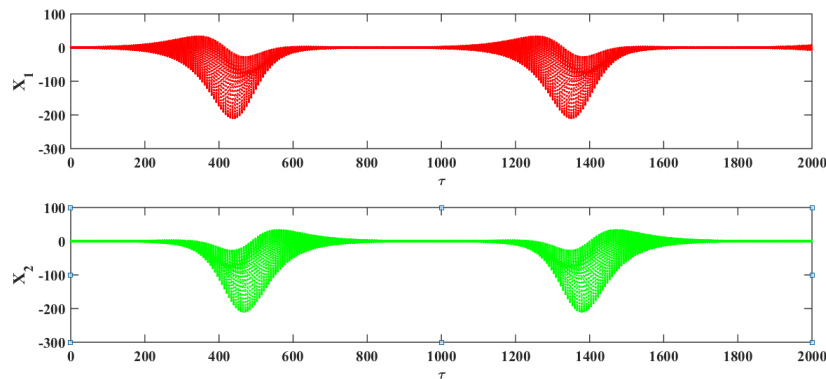


FIGURE 3.7 – Évolution temporelle des solutions numériques pour  $\omega_0=1.0$ ,  $\kappa=0.8$ ,  $\lambda=0.1$ ,  $\alpha=0.1$  et  $\eta=0.1$  à 75% de  $\gamma_{th1}$ . Où le cadran du haut représente la variation de la première masse et le second cadran pour la deuxième masse.

Dans le cadre linéaire, on observe des oscillations de rabi [1]; la non-linéarité est dans nos deux cas va influencer l'amplitude et la fréquence des oscillations. Alors on observe que la non-linéarité a changé la forme des oscillations.

### 3.4 Modulation du gain

La modulation du gain a été déterminée de façon numérique en utilisant la méthode de RK4 et on a représenté l'évolution temporelle de l'amplitude et puissance en fonction de la fréquence comme suit :

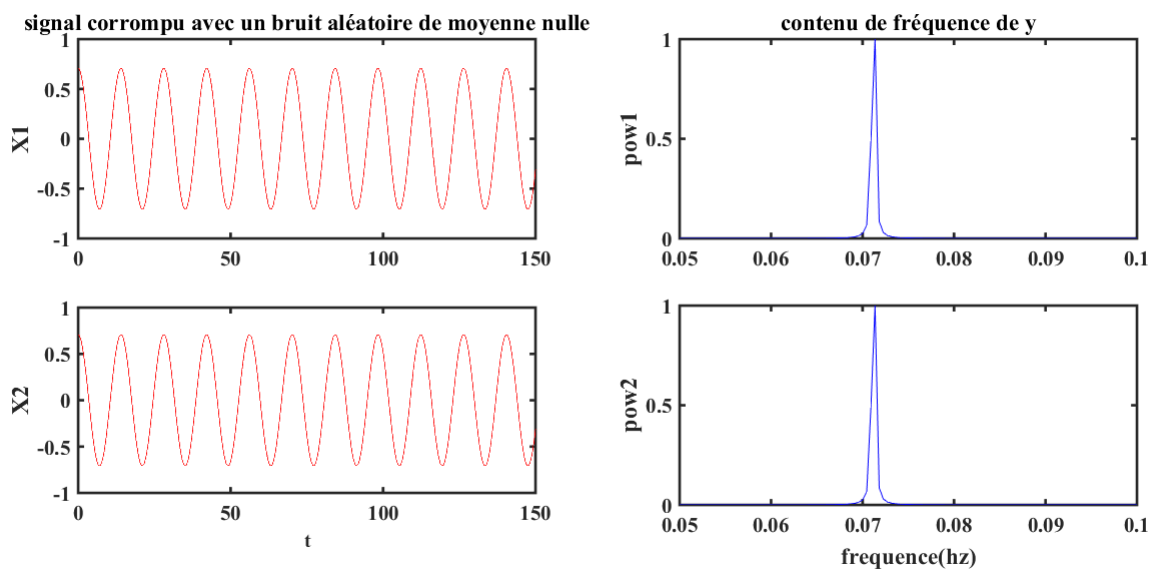


FIGURE 3.8 – L'amplitude d'oscillation en fonction du temps et la puissance en fonction de la fréquence d'oscillation.

#### 3.4.1 Amplitudes en fonction du paramètre du système

Ici on fait varier chaque paramètre du système pour observer leurs influences sur l'amplitude du mouvement.

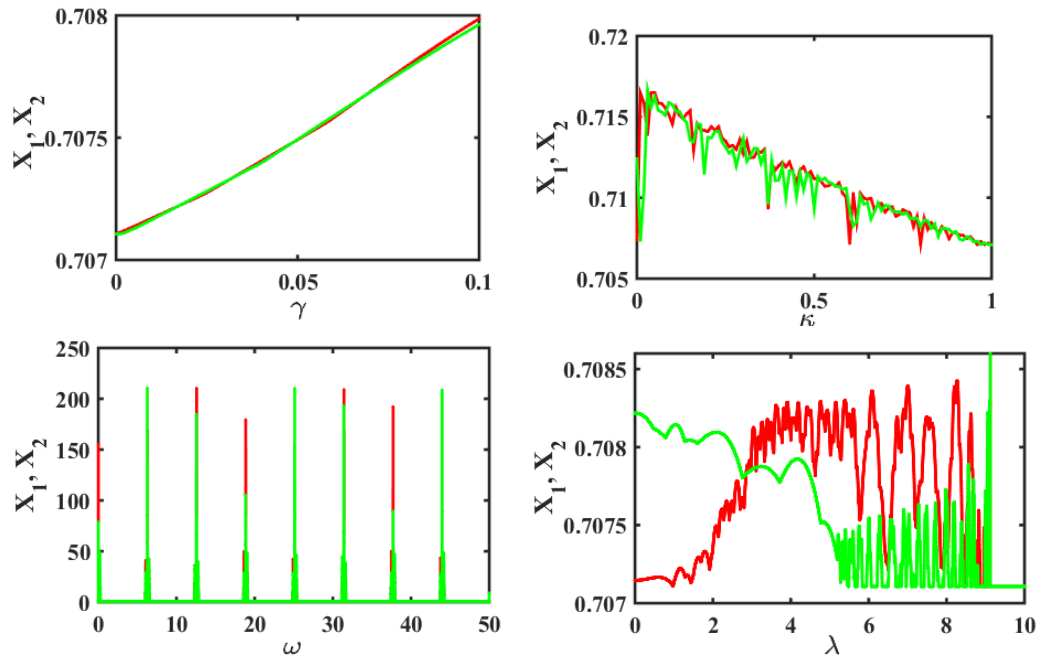


FIGURE 3.9 – Représentation des amplitudes du mouvement  $X_1$  et  $X_2$  en fonction de  $\gamma$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  et  $\lambda$ .

Les deux cadrans du haut nous font constater que les amplitudes maximales d'oscillation des deux masses sont proches les unes des autres avec la variation du gain et du couplage élastique. Le troisième cadran nous montre que la fréquence de modulation maintient les pics de façon périodique car la fonction sinus est périodique. Le dernier cadran présente la perturbation des amplitudes. Cela est due au couplage de traînée au bout duquel il se stabilise pour ce couplage grand.

### 3.4.2 Fréquence d'oscillation en fonction des paramètres du système

Dans le même soucis que précédemment, on fait varier la fréquence d'oscillation pour laquelle on a la puissance maximale en fonction du couplage élastique et de la fréquence de modulation du système.

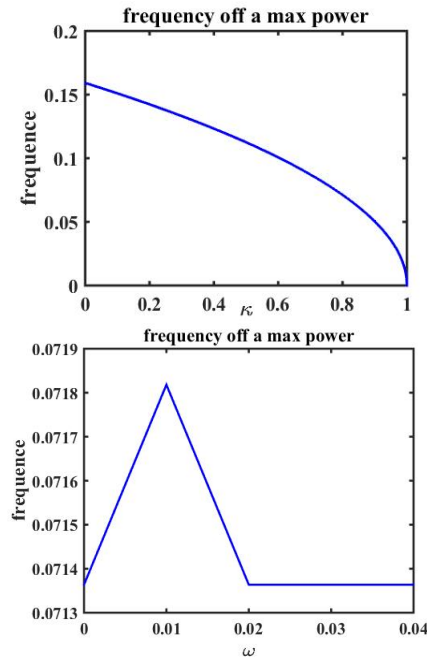


FIGURE 3.10 – courbe présentant la variation de la fréquence d’oscillation en fonction du couplage élastique  $\kappa$  et de la fréquence de modulation  $\omega$  pour laquelle on a une puissance maximale.

Le premier cadran nous montre la décroissance de la fréquence d’oscillation avec l’augmentation du couplage élastique  $\kappa$ . Le deuxième nous présente un pic de fréquence de modulation. Ces deux courbes se traduisent par le fait que si on a besoin d’un gain à :

- Grande ou faible fréquence, le paramètre à modifier est  $\kappa$
- Fréquence constante, on utilise plutôt la fréquence de modulation  $\omega$  ; ce paramètre présente des valeurs qui donne un régime transitoire au bout duquel il se stabilise.

### 3.5 Conclusion

Après analyse de nos résultats, nous constatons que dans le modèle linéaire, bien que notre système n’étant pas PTS, il présente néanmoins un comportement similaire pour certaines valeurs du coefficient du couplage visqueux (équation 3.1). La non-linéarité introduit dans notre système d’une part par un couplage avec une force de traînée et d’autre part avec les ressorts externes non-linéaires modifie la forme des solutions. Enfin la modulation du gain vient annuler les rabi pour nous donner des oscillations simples avec une amplitude constante pour des paramètres fixés.

# IMPLICATIONS PÉDAGOGIQUES

---

## 4.1 Introduction

La pédagogie est conçue comme la branche de l'éducation qui se préoccupe des méthodes d'enseignement. Dans les chapitres précédents, on a étudié l'effet d'un dimère PTS sur une chaîne de pendules couplés par des ressorts. Les systèmes oscillants sont abordés en classe de terminale de l'enseignement secondaire; dans ce thème on présente de façon simple les oscillateurs mécaniques et électriques, l'enseignant devra donc trouver des méthodes et moyens pour que la dite notion soit bien assimilée par les apprenants. La tâche assignée à l'enseignant étant de plus en plus grande, celui-ci a une responsabilité sur le développement des apprenants, des enfants et des jeunes. Celui-ci est ici placé comme pilier et plaque tournante de la gestion des processus d'apprentissage en classe, la transformation de l'ensemble de l'établissement scolaire en une *communauté d'apprenant*, ainsi que les liens avec les collectivités locales et le monde extérieur.

## 4.2 Implications sur le plan des enseignements

La méthode d'enseignement est basée sur la conception des activités, sur les attitudes en situation de classe qui peuvent entraîner un changement de comportement des apprenants. L'enseignement est de nos jours l'un des métiers les plus nobles car il participe à sa manière à une reconstruction d'une société plus consciente et dynamique et ceci passe par la prise de conscience de l'environnement immédiat dans lequel nous nous trouvons. L'enseignant se trouvant dans cette circonstance a donc certaines responsabilités et devoirs. Il n'est plus question pour ce dernier de construire des notions essentiellement focalisées sur la théorie comme jadis mais



amener l'apprenant dans une approche non plus objective mais basée sur le savoir-faire. Pour y parvenir le professionnel du métier de l'enseignement prépare son cours en s'appuyant sur des activités qui ont trait à la vie pratique de tous ces apprenants. Celui-ci pourra se servir dans le cas d'un cours sur les pendules de ces connaissances pour mieux expliquer certaines notions en question aux élèves, mais aussi ce travail peut aider l'enseignant à trouver plus facilement des situations problèmes tirées du quotidien des apprenants pour introduire sa leçon sur les pendules.

### 4.3 Implications sur le plan de l'apprentissage

Les apprenants trouveront dans ce travail des outils didactiques qui leurs permettront de prendre en charge la résolution des situations problèmes en surmontant le conflit cognitif. Un cours bien élaboré (appuyé par une fiche pédagogique soigneusement conçue et orientée expérimentation) par exemple sur les pendules simples et coniques peut influencer l'apprenant et lui permettre de mieux comprendre et de se servir de ces notions pour résoudre une situation problème dans la vie courante. Il peut aussi influencer sur l'orientation du choix de l'apprenant en ce sens que celui-ci deviendra plus éclairé sur les réalités et les ouvertures de cette notion dans sa vie future.

### 4.4 Conclusion

Il était question dans ce chapitre des implications sur le système éducatif du sujet de mémoire soumis à notre investigation ; qui porte sur l'étude de l'effet des systèmes dimère PTS sur une chaîne de pendule couplés par des ressorts. L'enseignement étant basé majoritairement sur le fait de transmettre les des connaissances, tenant ainsi en compte non seulement la qualité de ce qui est transmis c'est-à-dire en regardant aux contenus des enseignements, mais aussi la transformations sociale et psychologique des apprenants. Les différentes notions présentées dans ce document sont vues en classe de terminale scientifique de l'enseignement secondaires permettront à l'enseignant de remplir cette fonction. Les applications de ces notions dans les différents domaines de la physique mentionnés ici peuvent influencer positivement le processus

enseignement apprentissage et aider les apprenants dans leurs choix académiques et professionnels futurs.

---

## Conclusion générale et perspectives

---

En définitive, il était question pour nous dans ce mémoire d'étudier l'effet de la modulation du gain dans un système PTS de type dimère. Nous avons choisi deux modèles et il ressort de cette étude qu'un seul des deux était PTS ; mais le première n'étant pas PTS il a un comportement pour certaines valeurs bien précises du coefficient du couplage. L'étude a porté sur le calcul et la représentation graphique des modes de vibrations de notre système, le calcul et la représentation graphique des solutions (positions des masses oscillantes) des équations régissant la dynamique du système. Dans un premier temps, nous avons travaillé dans le domaine linéaire avec une force visqueuse où les courbes sont trouvées pour certaines valeurs de  $\lambda$ . Dans un second temps dans le domaine non linéaire nous avons introduit plutôt une force de trainée et fait l'étude puis considéré les ressorts comme non linéaires. Nous avons donc constaté d'après les courbes obtenues que les deux cas de non linéarité présentaient les mêmes variations des seuils de transitions et modes propres mais différent sur leurs réponses temporelles. Par la suite la modulation du gain a été fait et le constat est qu'il y'a disparition des rabi au profit des oscillations sinusoïdales. Pour se rassurer des variations des amplitudes et des fréquences de notre système après la modulation, on fait varier ces derniers en fonction des paramètres du système afin de voir le comportement. Comme perspectives, nous envisageons étudier la distribution des énergies, les

diagrammes de phases. Dans la suite, passer en étude le modèle "trimère" puis "quadrimère" associé.

---

# Bibliographie

---

- [1] Bender, C.M., S. Boettcher, and P.N. Meisinger. PT -symmetric quantum mechanics. J. Math. Phys. 40, 2201. 1999.
- [2] Bender, C.M. and S. Boettcher. Real Spectra in Non-Hermitian. Hamiltonians Having PT Symmetry. Phys. Rev. Lett. 80, 5243. 1998.
- [3] Mostafazadeh, A.Pseudo-Hermiticity versus PT -Symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian. J. Math. Phys. 43, 205. 2002.
- [4] Mostafazadeh, A.Pseudo-Hermiticity versus PT -Symmetry II : A complete characterization of nonHermitian Hamiltonians with a real spectrum. J. Math. Phys. 43, 2814. 2002.
- [5] Kaempffer F A, Concepts in Quantum Mechanics (New York : Academic Press, 1965) ; Translated into Russian : Osnovnye Polozheniya Kvantovoi-Mekhaniki (Moscow : URSS, 2007
- [6] B.Amana et J.-L.Lemaire , Etude de pendules couples
- [7] Fernande Fotsa-Ngaffo, Stephane Boris Tabeu, Senghor Tagouegni, and Aurelien Kenfack-Jiotsa Vol.34, No.3/ March 2017/ Journal of the Optical Society of America B

- [8] E.Fermi,J.R Pasta,S.M. Ulam,Studies of nonlinear problems, Los Alamos Sci.Lab. Rep.(1995)LA-1940, reproduced in : A.C.Newell (Ed) Nonlinear wave motion, AMS Lect Appl Math 15 (1974)
- [9] Sergey V. Suchkov, Boris A. Malomed, V.Dimitriev,and Yuri S. Kivshar, Lett.78, 5263, (2007).
- [10] El-Dib,Y.O,'Nonlinear Mathieu equation and coupled resonance mechanism', Chaos Soliton and Fractals 12(4),2001,705-720.
- [11] Zounes, R.and Read,R.H.,'Global behavior of a nonlinear quasi-periodic Mathieu Equation',Nonlinear Dynamics 27,2002,87-105
- [12] Mahmoud, G.M., Bountis, T., and Ahmad, 'stability analysis for systems of nonlinear Hill's equation's, Physica A 286, 2000, 133-146.