

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN  
Paix-Travail-Patrie  
\*\*\*\*\*  
UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I  
\*\*\*\*\*  
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
DE YAOUNDÉ  
\*\*\*\*\*  
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE  
\*\*\*\*\*



REPUBLIC OF CAMEROON  
Peace-Work-Fatherland  
\*\*\*\*\*  
UNIVERSITY OF YAOUNDE I  
\*\*\*\*\*  
HIGHER TEACHER TRAINING  
COLLEGE OF YAOUNDE  
\*\*\*\*\*  
DEPARTMENT OF PHYSICS  
\*\*\*\*\*

**LABORATOIRE D'ENERGIE, DES SYSTEMES  
ELECTRIQUES ET ELECTRONIQUES**

**ETUDE FRACTIONNAIRE DU CONTRÔLE  
ET DE LA SYNCHRONISATION DES  
CELLULES  $\beta$  DU PANCRÉAS.**

Mémoire rédigé et présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de  
l'Enseignement Secondaire 2<sup>ème</sup> grade (DIPES II) en Physique.

Par  
**MBEZELE THIERRY RÉGINE**  
Licencié en Physique (UY I)

Matricule : 07W482

**Jury de soutenance :**

**Président :** ATANGANA JACQUES, Maître de Conférences, Université de Yaoundé I  
**Rapporteur :** BODO BERTRAND, Maître de Conférences, Université de Yaoundé I  
**Examineur :** NKENFACK JIOSTSA, Maître de Conférences, Université de Yaoundé I

Juin 2019

# **Etude fractionnaire du contrôle et de la synchronisation des cellules $\beta$ pancréas**

Mémoire présenté et soutenu en vue de l'obtention du  
Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire 2ième  
Grade (DIPES II)

Option : Systèmes Électriques et Électroniques

Par :

**MBEZELE THIERRY RÉGINE**

Matricule : 07W482

Licencié en Sciences Physiques

Sous la Direction du :

**Pr. BODO BERTRAND**

Maitre de Conférences à l'Université de Yaoundé I

Faculté des Sciences

Département de Physique

Année 2019

# Dédicace

J'ai le plaisir de dédier ce travail à mon feu père **MINKONDA MBEZELE** et ma mère **ALIMA MARCELLINE**.

# Remerciements

Je rends grâce à Dieu qui m'a accordé la santé pour pouvoir faire ce mémoire. C'est à lui que reviens la gloire de ce travail. Mes remerciements vont à l'endroit :

- De mon Directeur de mémoire, le **Professeur BODO BERTRAND** qui m'a encadré pour ce mémoire, qui a proposé ce sujet de mémoire qui fait l'objet d'intenses recherches dans les milieux scientifiques, qui m'a assisté durant toutes les phases d'élaborations malgré ses multiples occupations.
- Du **Professeur ESSIMBI ZOBO BERNARD**, responsable du laboratoire d'électronique, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, pour ses prodigieux conseils et pour ses unités d'enseignements très profitables.
- Du **Professeur JACQUES ATANGANA** Chef du Département de Physique (par intérim) de l'École Normale Supérieure de Yaoundé I pour son contrôle permanent de l'état d'avancement de nos travaux.
- Des imminents membres du jury qui ont accepté d'examiner et d'apprécier ce travail.
- De l'ensemble des Enseignants du Département de Physique, pour tous les enseignements.
- De mon grand frère le **Docteur LEKINI NKODO CLAUDE BERNARD** pour le soutien financier et moral.
- Du Doctorant **Monsieur ANICET NZEPANG**.
- Du Doctorant **Monsieur GNYAMSI NKUIGWA GAETAN GILDAS**.
- De Mademoiselle **POUNTOUGNIGNI AÏCHETOU ZAGÊTI**.
- De tous mes camarades de promotion pour toutes les interactions, la franche collaboration que nous avons entretenue dans la construction des différents savoirs et savoir-faire et qui a suscité à chaque fois grande émulation parmi nous.
- De tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont aidé à mener ce travail à bout.

Je vous suis grés.

# Résumé

Les cellules  $\beta$  du pancréas peuvent être décrites par un modèle d'oscillateurs biologiques couplés avec des voies de communication, lesquelles peuvent synchroniser leur activité électrique, en donnant des signaux carrés tels que des bursts ou des spikes qui induisent la sécrétion de l'insuline. En effet, les cellules  $\beta$  du pancréas jouent un rôle dans l'analyse et les typologies des diabètes. Cette recherche porte sur la synchronisation entre deux modèles de cellules  $\beta$  d'ordre fractionnaire. Pour la résolution numérique, le modèle fractionnaire est analysé et utilisant l'algorithme dérivé de Grünwald-Letnikov et sa programmation sur MATLAB. Lorsqu'on modifie les ordres fractionnaires du modèle en préservant les mêmes paramètres, on observe plusieurs types de bouffées de potentiel d'action. Ensuite, nous étudions la synchronisation entre deux cellules  $\beta$  fractionnaires couplées en considérant plusieurs types d'activité électrique propre à ces cellules. Les résultats de la simulation démontrent qu'une synchronisation complète est effectivement obtenue en choisissant une valeur appropriée du paramètre de contrôle.

# Abstract

$\beta$ -cells in the pancreas can be described by a model of coupled biological oscillators with communication links, which can synchronize their electrical activities, giving rise to a square-wave bursting-like insulin release. In fact,  $\beta$ -cells play a vital role in analyzing and characterizing diabetes conditions. This research work studies the synchronization between two fractional-order pancreatic  $\beta$ -cells. Numerically, the fractional-order model of the pancreatic  $\beta$ -cell is analyzed using an algorithm derived from the Grünwald-Letnikov scheme. It is found that, by modifying only the fractional-order while preserving the system parameter values, different types of bursting activities can be observed. Then, synchronization in the coupled fractional-order pancreatic  $\beta$ -cells is studied in detail by considering different patterns of the bursting activities. Simulation results demonstrate that a complete synchronization is effectively attained by choosing a proper value for the control gain.

# Table de matière

Dédicace.....	i
Remerciements.....	ii
Résumé.....	iii
Abstract.....	iv
Table des figures .....	viii
Table des tableaux .....	x
Introduction générale.....	1
Chapitre 1 : Généralités sur le calcul fractionnaire et les systèmes chaotiques	
Introduction.....	3
1. Les dérivées fractionnaires.....	3
1.1.Historique.....	3
1.2.Définition .....	4
1.2.1. Dérivée au sens de Grunwald-Letnikov.....	4
1.2.2. Dérivée au sens de Riemann Liouville.....	5
1.2.3. Dérivée fractionnaire au sens de Caputo.....	6
1.3.Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires.....	6
1.3.1. Définition de la transformée de Laplace.....	6
1.3.2. Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.....	7
1.4.Transformée de Fourier des dérivées fractionnaires.....	8
1.4.1. Définition de la transformée de Fourier.....	8
1.4.2. Transformée de Fourier de la dérivée de Riemann.....	8
1.5.Evaluation numérique des dérivées et intégrales fractionnaires.....	10
1.5.1. Approximation numérique de la dérivée fractionnaire.....	10
1.5.2. Solutions numériques d'une équation différentielle fractionnaire.....	11
1.6.Quelques propriétés des dérivées fractionnaires.....	12
2. Généralités sur les systèmes chaotiques.....	14
2.1.Rappels historiques.....	14

2.2. Les systèmes dynamiques.....	15
2.2.1. Temps continu.....	15
2.2.2. Temps discret.....	16
2.3. Définition du chaos.....	19
2.3.1. La non linéarité .....	19
2.3.2. Le déterminisme.....	19
2.3.3. L'aspect aléatoire .....	19
2.3.4. Sensibilité aux conditions initiales.....	19
2.3.5. Attracteur étrange.....	20
2.3.6. La section de Poincaré.....	22
2.3.7. Les exposants de Lyapunov.....	22
2.4. Les dynamiques chaotiques.....	24
2.4.1. Le chaos continu.....	24
2.4.2. Le chaos discret.....	26
2.4.3. Le chaos à retard.....	28
2.5. Bifurcation et routes vers le chaos.....	28
3. Conclusion.....	30
Chapitre 2 : Description du modèle mathématique de Pernarowski de la cellule $\beta$ du	
pancréas.....	31
1. Introduction .....	31
2. Étude du modèle classique de Pernarowski de la cellule $\beta$ .....	32
2.1 Détermination du point fixe.....	33
2.2 Stabilité du point fixe.....	33
2.3. Résultats des simulations numériques des équations du système.....	34
3. Étude du modèle fractionnaire de Pernarowski de la cellule $\beta$ .....	39
3.1. Détermination du point d'équilibre et étude de la stabilité.....	40
3.1.1. Détermination du point d'équilibre.....	40
3.1.2. Étude de la stabilité du point fixe.....	40
3.2. Résultats des simulations numériques du système (2.16).....	42

3.3. Effet du changement d'ordre de dérivées fractionnaires sur la dynamique du sous-système rapide de Pernarowski.....	45
4. Conclusion.....	47
Chapitre 3 : Contrôle et synchronisation des cellules $\beta$ .....	50
1. Introduction.....	50
2. Synchronisation de deux cellules $\beta$ .....	51
2.1. Analyse de la synchronisation.....	54
2.1.1. Synchronisation entre cellules actives.....	54
2.1.2. Synchronisation des cellules actives et inactives.....	57
2.1.3. Diagrammes de phase des variables d'état.....	58
3. Conclusion.....	61
Implications pédagogiques.....	62
Conclusion générale.....	62
Références bibliographiques .....	63
Annexe.....	68

# Table des figures

Figure 1.1. Portraits de phase des états dynamiques du système de Rossler.....	18
Figure 1.2. Evolution temporelles des états dynamiques du système de Rössler.....	19
Figure 1.3. Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales sur l'état.....	20
Figure 1.4. Attracteur étrange de Rössler.....	21
Figure 1.5. Section de Poincaré.....	22
Figure 1.6. Divergence de trajectoires dans le plan de phase.....	23
Figure 1.9. Portrait de phase des états dynamiques du système chaotique de Lorenz.....	26
Figure 1.10. Attracteur étrange de Lorenz.....	26
Figure 1.11. Trajectoire de la fonction logistique.....	27
Figure 1.12. Application logistique pour $r = 4$ .....	27
Figure 1.13. Portrait de phase du système de Mackey-Glass avec $\tau = 8$ .....	28
Figure 1.14. Diagramme de bifurcation de la fonction logistique.....	29
Figure 2.1. Évolution dans le temps du potentiel membranaire $x(t)$ en (a), du paramètre d'activation de canal pour le canal de potassium voltage-dépendant $y(t)$ en (b) et de la concentration de calcium $z(t)$ en (c) pour $\eta = \frac{3}{4}$ , $\mu_\beta = -0.954$ .....	35
Figure 2.2. Évolution dans le temps du potentiel membranaire $x(t)$ en (a), du paramètre d'activation de canal pour le canal de potassium voltage-dépendant $y(t)$ en (b) et de la concentration de calcium $z(t)$ en (c) pour $\eta = 1$ et $\mu_\beta = -0.954$ .....	37

Figure 2.3. Évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$  en bleu et de la concentration de calcium  $z(t)$  en rouge ; (a) une cellule active avec  $\eta = \frac{3}{4}$  et  $\mu_\beta = -0.954$  et (b) des décharges continues de la cellule avec  $\eta = 1$  et  $\mu_\beta = -2$  .....39

Figure 2.4. Évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$ , la concentration de calcium  $z(t)$  en (a) et portrait de phase en (b) ; pour  $q_1 = q_2 = 0,98$ ,  $q_3 = 1$  et  $\eta = \frac{3}{4}$  .....42

Figure 2.5. Évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$  et la concentration de calcium  $z(t)$  en (a) et (b) portrait de phase, pour  $q_1 = q_2 = 0,99$ ,  $q_3 = 1$  et  $\eta = \frac{3}{4}$  .....43

Figure 2.6. Évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$  et la concentration de calcium  $z(t)$  en (a), le portrait de phase en (b) ; pour  $q_1 = q_2 = 0,99$ ,  $q_3 = 1$  et  $\eta = 1$  .....44

Figure 2.7. Évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$  pour (a)  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$  ; (b)  $q_1 = q_2 = 0,98$ ,  $q_3 = 1$  ; (c)  $q_1 = q_2 = 1$ ,  $q_3 = 0,97$  .....45

Figure 2.8. Contrôle du nombre des pics par rafale par ordre fractionnaire dans l' évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$  (a)  $q_1 = q_2 = 0,985$  ; (b)  $q_1 = q_2 = 0,984$  ; (c)  $q_1 = q_2 = 0,9834$  ; (d)  $q_1 = q_2 = 0,9825$  ; (e)  $q_1 = q_2 = 0,982$  ; (f)  $q_1 = q_2 = 0,9815$  ; (g)  $q_1 = q_2 = 0,98$  .....48

Figure 3.1. Diagrammes de phase de  $x_1$  versus  $x_2$  (colonne de gauche) et signaux de potentiel membranaire pour les deux cellules d'ordre fractionnaire (colonne de droite) avec différents modèles de bouffées de potentiel d'action. États asynchrones et synchrones, après application du schéma de synchronisation proposé (3.1) et (3.2) pour : (a) deux bouffées de potentiel d'action à onde carrée ; (b) de bouffées de potentiel d'action à onde carrée et de bouffées de potentiel d'action parabolique ; (c) de bouffées de potentiel d'action à onde carrée et de bouffées de potentiel d'action conique ; (d) de bouffées de potentiel d'action à onde carrée et comportement silencieux.....56

Figure 3.2. Diagrammes de phase des variables d'état.....58

Figure : 3.3. Dépendance du gain du contrôle de synchronisation sur l'erreur entre  $x_1$  et  $x_2$  avec des bouffées de potentiel d'action à signaux carrés générées des cellules d'ordre fractionnaire et l'autre, des bouffées de potentiel d'action signaux paraboliques.....61

# Table des tableaux

Tableau 1.1. Définition des grandeurs constituant la dérivée selon G. Letnikov.....	5
Tableau 1.2. Définition des grandeurs constituant la dérivée selon G. Louiville.....	6
Tableau 1.3. Classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapunov.....	24

# Introduction générale

Chez l'Homme et plus généralement chez les mammifères, les cellules des îlots de Langerhans jouent un rôle majeur dans l'homéostasie énergétique et plus précisément dans le contrôle de la glycémie en sécrétant la seule hormone hypoglycémisante de l'organisme : l'insuline. La stimulation de la sécrétion d'insuline est le seul moyen pour lutter contre l'hyperglycémie, alors qu'il existe plusieurs facteurs nerveux ou hormonaux dits contre-régulateurs, dont la libération est déclenchée par l'hypoglycémie. Les altérations dans le fonctionnement des cellules du pancréas entraînent des troubles métaboliques dont les plus fréquents sont les syndromes hypoglycémiques et les diabètes sucrés [1]. Comme le nerf et de nombreuses cellules endocriniennes, les cellules du pancréas sont électriquement excitables, produisant des impulsions électriques en réponse à l'élévation du glucose. Le diabète est causé par un niveau anormalement élevé de glycémie connu sous le nom d'hyperglycémie. Ceci est causé par une attaque auto-immune contre les cellules sécrétées par le pancréas (Type I) ou par l'insuffisance de l'offre ou de la fonction des cellules dans la contre-action des fluctuations de la glycémie élevée et faible dans le corps (Type II). Le diabète est devenu une épidémie avec des complications considérables telles que la rétinopathie, la néphropathie, la neuropathie périphérique et la cécité [2]. L'autogestion du diabète sucré est essentielle pour éviter les complications chroniques qui compromettent la santé et se caractérise par de nombreux effets cliniques souvent non facilement observables. Par conséquent, il est urgent d'améliorer les méthodes de diagnostic qui fournissent des évaluations cliniques plus précises et une détection sensible des symptômes aux premiers stades de la maladie. Cela peut être facilité par des modèles et des outils mathématiques améliorés liés à la corrélation dynamique entre les variables physiologiques. Alors que les études théoriques sur les modèles électriques dans les cellules excitables ont été largement étudiées, des modèles mathématiques fractionnaires ont été développés récemment pour donner un aperçu des modèles électro-physiologiques observés dans les cellules excitables [3,4].

Dans ce mémoire un modèle mathématique fractionnaire des cellules  $\beta$  du pancréas est utilisé pour la synchronisation desdites cellules en recherchant des explications qualitatives et quantitatives sur l'impact du paramètre d'ordre.

Ce mémoire s'articulera en trois chapitres. Nous débuterons d'abord par une introduction générale sur le sujet. Ensuite le premier chapitre présentera les généralités sur le

calcul fractionnaire et les systèmes chaotiques sur les cellules bêta du pancréas et le calcul fractionnaire. Au deuxième chapitre, nous allons décrire le modèle mathématique des cellules  $\beta$ . Nous nous intéresserons alors d'une part au modèle classique de Pernarowski des cellules et d'autre part à la modélisation par les dérivées fractionnaires du modèle de Pernarowski des cellules. Le troisième chapitre concerne le contrôle et la synchronisation des cellules  $\beta$ . Il sera en fait question d'y faire une étude fractionnaire en d'autres termes en se focalisant sur les cellules couplées d'ordre fractionnaire. Enfin une conclusion générale clos ce travail.

# Chapitre 1 : Généralités sur le calcul fractionnaire et les systèmes chaotiques

Notre objectif dans ce chapitre, est de présenter les outils d'analyse nécessaires, qui nous aideront à faire une étude fractionnaire du contrôle et de la synchronisation des cellules bêta du pancréas. Il est donc question ici, dans un premier temps, de parcourir la notion de calcul fractionnaire qui autre fois n'était pas utilisée dû à l'absence de solutions aux problèmes fractionnaires posés, sans toutefois oublier d'aborder les généralités liées à quelques systèmes chaotiques.

## 1. Les dérivés fractionnaires

### 1.1. Historique

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17<sup>ième</sup> siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de  $\frac{d^n y}{dt^n}$  lorsque  $n = \frac{1}{2}$ . Leibniz, dans sa réponse, voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et a écrit à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tiré des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparitions comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo [5,6]. A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme une abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique...

## 1.2. Définition

La dérivation fractionnaire, peut être définie donc comme étant une non linéaire opération qui consiste, à dériver une fonction donnée, à un ordre non entier [7]. L'opérateur général de dérivée à un ordre non entier servant, à effectuer une telle opération est défini par :

$${}_a D_t^\alpha = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \text{ avec } \alpha > 0 \quad (1.1)$$

Où  $\alpha$  est l'ordre de la dérivée.

Lorsque  $\alpha$  est inférieur à zéro, on a plutôt à faire à une intégration de la fonction donnée à un ordre non entier. On parlera alors d'intégration fractionnaire et l'opérateur d'intégration sera noté :

$${}_a D_t^\alpha = \int_a^t d\tau^\alpha \quad (1.2)$$

Où  $a$  et  $t$  sont les bornes d'intégration.

Plusieurs définitions mathématiques rencontrées dans la littérature étayent la notion de calcul fractionnaire définie ci-dessus. Nous retiendrons pour la suite celle de Riemann Liouville, de Caputo et de Grunwald Letnikov.

### 1.2.1. Dérivée au sens de Grunwald-Letnikov

Soit  $f(t)$  une fonction de variable réelle  $t$  donnée. Partant de la dérivée nième de la fonction  $f(t)$  suivante :

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j C_n^j f(t - jh) \text{ avec } h = \frac{t-a}{n},$$

la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  au sens de Grunwald-Letnikov notée  ${}^GL D_t^\alpha f(t)$  est donnée par :

$${}^GL D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j C_\alpha^j f(t - jh) \quad (1.3)$$

qui peut être généralisée par [7] :

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[ \frac{t-a}{h} \right]} (-1)^j C_\alpha^j f(t-jh)$$

Avec le tableau suivant :

Tableau 1.1. : Définition des grandeurs constituant la dérivée selon G. Letnikov

$a = \text{constante}$ $h = \frac{t-a}{n}$ $\left[ \frac{t-a}{n} \right]$ $C_\alpha^j = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j)\Gamma(\alpha-j)}, C_\alpha^0 = 1$ $\Gamma(\alpha) = \int_0^t t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ et $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$				
<b>Borne inférieure du domaine de dérivation</b>	Est le pas de la sommation	Est la partie entière du pas h	$\Gamma$ est la fonction gamma	Est la fonction gamma

### 1.2.2. Dérivée au sens de Riemann Liouville

En considérant l'intégrale n-ième de Liouville d'une fonction  $f(t)$  définie par [7] :

$$D^{-n} f(t) = \int_a^t \int_a^{t_n} \int_a^{t_{n-1}} \dots \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} dt_n$$

$$\Rightarrow D^{-n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-n}} d\tau$$

A laquelle correspond l'intégrale fractionnaire d'ordre  $(\alpha > 0)$  donner par :

$$\Rightarrow {}^{RL} D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (1.4)$$

On définit la dérivée fractionnaire d'ordre  $(\alpha > 0)$  de la fonction  $f(t)$  entre  $a$  et  $t$  par :

$${}^{RL} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad \text{avec } n-1 < \alpha < n \quad (1.5)$$

Nous notons que l'alpha est un réel positif non entier et n un entier positif non nul.

Remarque : pour  $n = 1, 0 < \alpha < 1$ , on a le tableau suivant :

Tableau 1.2. : Définition des grandeurs constituant la dérivée selon G. Louville

${}^{RL}D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$	${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$
<b>Est l'intégrale fractionnaire d'ordre alpha <math>\alpha</math> de <math>f(t)</math></b>	<b>Est la dérivée fractionnaire d'ordre alpha <math>\alpha</math> de <math>f(t)</math></b>

### 1.2.3. Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Elle est donnée par [7] :

$${}^C D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \quad (1.6)$$

Il est à noter que sous des conditions initiales identiques, la dérivée de Riemann Liouville et celle de Caputo sont équivalentes. On montre qu'elles sont étroitement liées par la relation :

$${}^{RL}D_t^{-\alpha} f(t) = {}^C D_t^{-\alpha} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) \quad \text{où } f^{(k)}(a) = 0 \text{ avec } k = (0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Il découle donc que les conditions initiales pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire avec les dérivées de Caputo sont sous la même forme que celles des équations différentielles d'ordre entier. Cela est un grand avantage lorsqu'on sait que grand nombre de problèmes d'application demandent à ce que les dérivées fractionnaires soient définies en des endroits où on a une bonne interprétation des conditions initiales à savoir  $f(a)$ ,  $f'(a)$ ,  $f''(a)$  etc.

## 1.3. Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

### 1.3.1. Définition de la transformée de Laplace

Soit  $f(t)$  une fonction définie pour  $t > 0$ , on appelle transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$ , la fonction  $F(p)$  de variable complexe  $p$  définie par :

$$F(p) = L\{f(t), p\} = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

### 1.3.2. Transformée de Laplace de la Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Rappelons que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville donnée pour  $a = 0$  par :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \text{ avec } n-1 < \alpha < n$$

peut-être écrite comme :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = g^n(t) \quad (1.7)$$

et dont sa transformée de Laplace qui est celle d'une dérivée d'ordre entier  $n$  est donnée par :

$$\begin{aligned} L\{{}^{RL}D_t^\alpha f(t), P\} &= L\{g^n(t), p\} \\ L\{{}^{RL}D_t^\alpha f(t), P\} &= p^n G(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k g^{n-k-1}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

De même,  $g^n(t) = {}^{RL}D_t^\alpha f(t)$

$$\Rightarrow g(t) = D^{-n} g^n(t) = D^{-n} {}^{RL}D_t^\alpha f(t)$$

On a donc  $\Rightarrow g(t) = {}^{RL}D_t^{-(n-\alpha)} f(t)$  et sa transformée de Laplace est :

$$\Rightarrow G(p) = L\{{}^{RL}D_t^{-(n-\alpha)} f(t), P\} = p^{\alpha-n} F(p) \quad (1.9)$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} g^{n-k-1}(t) &= \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} g(t) \\ \Rightarrow g^{n-k-1}(t) &= \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}^{RL}D_t^{-(n-\alpha)} f(t) \end{aligned}$$

C'est-à-dire :  $\Rightarrow g^{n-k-1}(t) = {}^{RL}D_t^{\alpha-k-1} f(t) \quad (1.10)$

On obtient en remplaçant (1.9) et (1.10) dans l'expression de (1.7)

$$L\{{}^{RL}D_t^\alpha f(t), P\} = p^n p^{-n+\alpha} F(p) - \sum_{k=0}^{\alpha-k-1} p^k \left[ {}^{RL}D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0} \text{ avec } n-1 < \alpha < n$$

Ainsi la transformée de Laplace de la dérivée n-ième de  $f(t)$  est :

$$L\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), P\} = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left[ {}^{RL}D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0} \quad \text{avec } n-1 < \alpha < n \quad (1.11)$$

**Remarque :** Pour des conditions initiales toutes égales à zéro,

$$L\{ {}^{GL}D_t^\alpha f(t), P\} = L\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), P\} = L\{ {}^C D_t^\alpha f(t), P\} = p^\alpha F(p)$$

## 1.4. Transformée de Fourier des dérivées fractionnaires

### 1.4.1. Définition de la transformée de Fourier

On appelle transformée de Fourier exponentielle d'une fonction  $f(t)$  continue et absolument intégrable sur  $\mathbb{R}$  la fonction

$$F_e\{f(t), \omega\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \quad (1.12)$$

Son inverse est la fonction suivante :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_e(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad (1.13)$$

### 1.4.2. Transformée de Fourier de la dérivée de Riemann

Rappelons que l'expression de cette dérivée donnée par :

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (1.14)$$

Peut être mise sous la forme

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}^{RL}D_t^{\alpha-n} f^n(t)$$

En effet, l'intégrale fractionnaire de Riemann Liouville à l'ordre  $(n-\alpha)$  de la dérivée n-ième de  $f(t)$  notée  $f^n(t)$  est donnée par :

$${}^{RL}D_t^{-(n-\alpha)} f^n(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{1-(n-\alpha)}} d\tau$$

qui est le membre de droite de l'équation (1.14).

Pour évaluer la transformée de Fourier des dérivées fractionnaires, nous allons par la suite considérer que la borne inférieure de l'intégrale ci-dessus est un infini négatif ( $a \rightarrow -\infty$ ).

On a alors :

$$\begin{aligned}
F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= F_e \left\{ {}^{RL}D_t^{\alpha-n} f^n(t), \omega \right\} \\
\Rightarrow F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= F_e \left\{ \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \omega \right\} \\
\Rightarrow F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} F_e \left\{ \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \omega \right\} \\
\Rightarrow F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} F_e \left\{ \int_a^t (t-\tau)^{-(\alpha-n+1)} f^n(\tau) d\tau, \omega \right\} \\
\Rightarrow F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} F_e \left\{ h(t), \omega \right\} \cdot F_e \left\{ f^n(t), \omega \right\} \\
\Rightarrow F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[ L \left\{ h(t), p \right\} \cdot L \left\{ f^n(t), p \right\} \right]_{p=-j\omega} \\
\Rightarrow F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[ \frac{(-(\alpha-n+1))!}{p^{-(\alpha-n+1)+1}} \cdot p^n F(p) \right]_{p=-j\omega} \\
\Rightarrow F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[ \frac{\Gamma(-(\alpha-n+1)+1)}{p^{-(\alpha-n+1)+1}} \cdot p^n F(p) \right]_{p=-j\omega} \\
\Rightarrow F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left[ \frac{\Gamma(n-\alpha)}{p^{-(\alpha-n+1)+1}} \cdot p^n F(p) \right]_{p=-j\omega} \\
\Rightarrow F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha)} \left[ p^{-(n-\alpha)} \cdot p^n F(p) \right]_{p=-j\omega} \\
\Rightarrow F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= \left[ p^\alpha F(p) \right]_{p=-j\omega} \\
\Rightarrow F_e \left\{ {}^{RL}D_t^\alpha f(t), \omega \right\} &= (-j\omega)^\alpha F(\omega)
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \Rightarrow F_e \left\{ {}_{-\infty}^{RL} D_t^\alpha f(t), \omega \right\} = (-j\omega)^\alpha F(\omega) \quad (1.15)$$

**Remarque :** On montre de même que la transformée de Fourier de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville ou de Caputo est donnée par la relation :

$$\Rightarrow F_e \left\{ {}_{-\infty}^{RL} D_t^\alpha f(t), \omega \right\} = (-j\omega)^{-\alpha} F(\omega) \quad (1.16)$$

## 1.5. Evaluation numérique des dérivées et intégrales fractionnaires.

### 1.5.1. Approximation numérique de la dérivée fractionnaire

Pour effectuer le calcul numérique des dérivées fractionnaire, nous allons considérer la définition des dérivées fractionnaires faite par Grunwald-Letnikov. Cette approche est fondée sur le fait que pour une vaste classe de fonctions, les trois définitions à savoir celle de Caputo, de Riemann-Liouville et celle de Letnikov coïncident. Ceci étant, nous rappelons que selon Letnikov la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  d'une fonction  $f(t)$  est donnée par :

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lceil \frac{t-a}{h} \rceil} (-1)^j C_\alpha^j f(t-jh)$$

En posant  $t_k = kh$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) où  $h$  comme pas temporel,

En considérant  $a = \left( \frac{t_k - L_m}{h} \right)$  où  $L_m$  est la largeur mémoire.

L'approximation numérique explicite de la dérivée fractionnaire  ${}^G D_t^\alpha f(t)$  aux points  $t_k$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \left( {}_{k-L_m/h}^G D_{t_k}^\alpha f(t) \right) &= h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_\alpha^j f(kh-jh) \\ \Rightarrow \left( {}_{k-L_m/h}^G D_{t_k}^\alpha f(t) \right) &= h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_\alpha^j f[(k-j)h] \\ \Rightarrow \left( {}_{k-L_m/h}^G D_{t_k}^\alpha f(t) \right) &= h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_\alpha^j f(t_{k-j}) \\ \Rightarrow \left( {}_{k-L_m/h}^G D_{t_k}^\alpha f(t) \right) &= h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t_{k-j}) \end{aligned} \quad (1.17)$$

En posant  $C_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j}$ , l'approximation numérique sera alors donnée par :

$$\Rightarrow \left( {}_{k-\frac{L_m}{h}}^{GL} D_t^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^k C_j^{(\alpha)} f(t_{k-j}) \right) \quad (1.18)$$

Les coefficients binomiaux  $C_j^{(\alpha)}$  sont calculés en se servant des expressions

$$C_j^{(\alpha)} = \left( 1 - \frac{1+\alpha}{j} \right) C_{j-1}^{(\alpha)} \text{ et } C_j^{(\alpha)} = 1 ; j = (0, 1, 2, \dots)$$

### 1.5.2. Solutions numériques d'une équation différentielle fractionnaire

Soit l'équation différentielle d'ordre alpha suivante :

$${}_a D_t^\alpha y(t) = f(y(t), t). \quad (1.19)$$

Les solutions numériques de cette équation sont les fonctions  $y(t_k)$  données par :

$$y(t_k) = h^\alpha f(y(t), t_k) - \sum_{j=v}^k C_j^{(\alpha)} y(t_{k-j}) \text{ avec } v = \begin{cases} 1 & \text{si } k < \frac{L_m}{h} \\ k - \frac{L_m}{h} & \text{si } k > \frac{L_m}{h} \end{cases} \quad (1.20)$$

En effet si nous remplaçons  ${}_a D_t^\alpha y(t)$  par son expression discrétisée dans l'équation discrète

$${}_a D_t^\alpha = f(y(t_k), t_k)$$

On obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k C_j^{(\alpha)} y(t_{k-j}) &= f(y(t_k), t_k) \\ \Rightarrow \sum_{j=0}^k C_j^{(\alpha)} y(t_{k-j}) &= h^\alpha f(y(t_k), t_k) \\ \Rightarrow C_0^{(\alpha)} y(t_k) + \sum_{j=0}^k C_j^{(\alpha)} y(t_{k-j}) &= h^\alpha f(y(t_k), t_k) \\ \Rightarrow y(t_k) + \sum_{j=1}^k C_j^{(\alpha)} y(t_{k-j}) &= h^\alpha f(y(t_k), t_k) \\ \Rightarrow y(t_k) = h^\alpha f(y(t_k), t_k) - \sum_{j=1}^k C_j^{(\alpha)} y(t_{k-j}) & \quad (1.21) \end{aligned}$$

Si nous tenons maintenant compte du principe de mémoire réduite, on se doit de fixer la borne inférieure de la sommation égale à une valeur  $v$  définie par :

$$v = \begin{cases} 1 & \text{si } k < \frac{L_m}{h} \\ k - \frac{L_m}{h} & \text{si } k > \frac{L_m}{h} \end{cases}$$

### 1.6. Quelques propriétés des dérivées fractionnaires

**Propriété 1 :** Si  $f(t)$  est une fonction analytique du temps alors sa dérivée fractionnaire  ${}_0D_t^\alpha f(t)$  est une fonction analytique de  $t$  et  $\alpha$ .

**Propriété 2 :** Lorsque  $\alpha$  est nul ( $\alpha=0$ ), l'opérateur de la dérivation fractionnaire sont identiques à ceux de la dérivation classique d'ordre entier.

**Propriété 3 :** Lorsque  $\alpha$  est nul ( $\alpha=0$ ), l'opération de dérivation  ${}_0D_t^0 f(t)$  est l'opérateur identité défini par  $I_d f(t) = {}_0D_t^0 f(t) = f(t)$ .

**Propriété 4 :** Pour plus d'informations, voir [8] pour l'interprétation des dérivées fractionnaires.

#### Exemples d'application :

Exemple N°1 : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \exp(kx), \quad k > 0$$

On a

$$I_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(kx) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \exp(k(x-t)) dt$$

$$\Rightarrow I_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(kx) = \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} \exp(-kt) dt$$

Posons

$$y = kt$$

Alors

$$dy = k dt$$

Par suite

$$\begin{aligned}\Rightarrow I_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(kx) &= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{k}\right)^{\alpha-1} \exp(-y) \frac{dy}{k} \\ \Rightarrow I_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(kx) &= \frac{\exp(kx)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} (y^{\alpha-1} \exp(-y) dy) \frac{k^{-\alpha+1}}{k}\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}D_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(kx) &= D^{(n)} I_{-\infty}^{(n-\alpha)} \exp(kx) \\ \Rightarrow D_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(kx) &= \frac{d^n}{dx^n} I_{-\infty}^{(n-\alpha)} \exp(kx) = \frac{d^n}{dx^n} k^{n-\alpha} \exp(kx) \\ \Rightarrow D_{-\infty}^{(\alpha)} \exp(kx) &= k^{\alpha-n} k^n \exp(kx) = k^\alpha \exp(kx)\end{aligned}$$

C'est cette dernière relation, extension de l'égalité suivante

$$D^{(n)} \exp(kx) = k^n \exp(kx) \quad (1.22)$$

**Exemple N°2 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (x-a)^\alpha, \quad x > a$$

Dans ce cas on a :

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^\alpha dt$$

Posons

$$t = a + (x-a)v$$

Alors

$$dt = (x-a)dv$$

Par suite, il résulte que

$$\Rightarrow I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{(x-a)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1} (1-v)^{\alpha-1} (x-a)^\alpha v^\alpha (x-a) dv$$

$$\Rightarrow I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{(x-a)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} v^\alpha dv = \frac{(x-a)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \alpha+1)$$

Où  $\beta$  est la fonction beta d'Euler définie par

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$\beta(r_1, r_2) = \frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}{\Gamma(r_1+r_2)}$$

Alors, il résulte que :

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{(x-a)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

C'est-à-dire

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} (x-a)^{2\alpha}. \quad (1.23)$$

## 2. Généralités sur les systèmes chaotiques

### 2.1. Rappels historiques

Depuis longtemps, le chaos était synonyme de désordre et de confusion. Il s'opposait à l'ordre et devrait être évité. La science physique était caractérisée par le déterminisme, la prévisibilité et la réversibilité. Poincaré fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos [9]. Il découvrit la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème de l'interaction de trois corps célestes.

Le terme « chaos » définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais qui est très sensible aux conditions initiales, et imprédictible à long terme. Des chercheurs d'horizons divers ont alors commencé à s'intéresser à ce comportement. Ils ont cherché à répondre à des questions telles que : les arythmies cardiaques ou les variations d'une population animale obéissent-elles à des règles ? les mouvements commerciaux ou les marchés financiers peuvent-ils s'expliquer ?

Le chaos a ainsi trouvé de nombreuses applications dans les domaines tant physiques que biologiques, chimique ou économique. Ainsi, nous nous intéressons principalement dans cette partie aux systèmes dynamiques chaotiques en nous attardant sur les espaces de phases, les attracteurs étranges et les scénarios de transition vers le chaos (appelés aussi bifurcations), lesquels nous permettront de mieux comprendre la nature du chaos.

L'objectif de ce paragraphe est de donner quelques notions élémentaires sur les systèmes dynamiques afin de mieux appréhender ce qu'est le chaos : ses apparitions dans un systèmes et la manière de le qualifier.

## 2.2. Les systèmes dynamiques

Un système dynamique est une structure qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- causale, ou son avenir dépend que de phénomènes du passé ou du présent,
- déterministe, c'est-à-dire qu'à partir d'une condition initiale donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur, un et un seul état « futur » possible.

L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes :

- une évolution continue dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire.
- une évolution discrète dans le temps, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale car elle permet de mettre en évidence des résultats importants qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues. Elle est représentée par le modèle générale des équations aux différences finies.

### 2.2.1. Temps continu

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t)$$

Où  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne la dynamique du système.

Si on associe à cette dynamique un état initial

$$x_0 = x(t_0)$$

Pour chaque couple choisi,  $(x_0, t_0)$  on peut identifier une solution unique :

$\Phi(\bullet; x_0, t_0): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

$$\Phi_F(t_0; x_0, t_0) = x_0 \text{ et } \dot{\Phi}_F(t; x_0, t_0) = F(\Phi_F(t; x_0, t_0), t)$$

Cette solution appelée souvent trajectoire, fournit les états successifs occupés par les systèmes à chaque instant  $t$ .

### 2.2.2. Temps discret

Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une équation au différences finies sous la forme :

$$x(k+1) = G(x(k), k)$$

$G: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  indique la dynamique du système en temps discret.

On peut également identifier pour chaque couple  $(x_0, k_0)$  une solution unique

$$\Phi_G(k_0; x_0, k_0) = x_0 \text{ et } \Phi_G(k+1; x_0, k_0) = G(\Phi_G(k; x_0, k_0); k) \quad (1.24)$$

### 2.3. Définition du chaos

Le chaos tel que le physicien le comprend ne signifie pas l'absence d'ordre ; il se rattache plutôt à une notion d'imprévisibilité, d'impossibilité de prévoir une évolution à long terme du fait que l'état final dépend de manière si sensible de l'état initial.

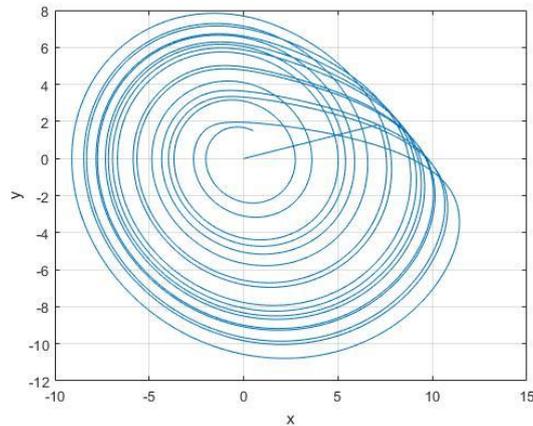
On appelle donc système dynamique chaotique, tout système qui dépend de plusieurs paramètres et caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ils ne sont pas déterminés ou modélisés par des systèmes d'équations linéaires ni par les lois de la mécanique classique ; pourtant, ils ne sont pas nécessairement aléatoires, relevant du seul calcul des probabilités.

L'exemple suivant illustre les propriétés d'un système chaotique. Soit le modèle chaotique donnée par Otto de Rössler.

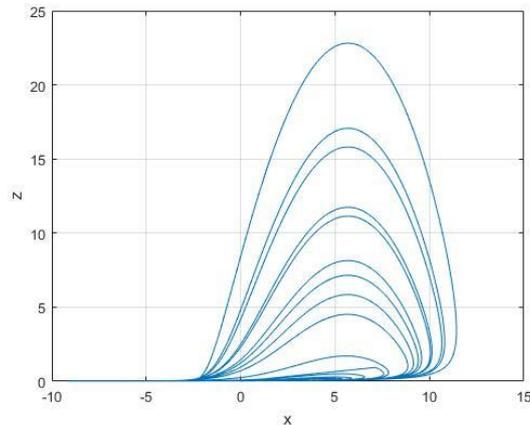
$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = c + z(x - b) \end{cases} \quad (1.25)$$

Où  $(x_1, x_2, x_3)$  est le vecteur d'état de  $a, b, c$  sont les paramètres du système.

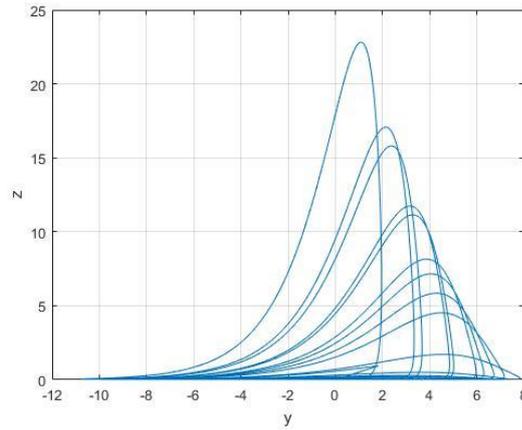
Le système de Rössler montre un comportement chaotique pour  $a=0,2$ ,  $b=5,7$ ,  $c=0,2$  avec les conditions initiales  $x(1)=0,5$  ;  $y(1)=1,5$  ;  $z(1)=0,1$ . Grâce à l'algorithme de Runge Kutta d'ordre 4, et sa programmation sur MATLAB (voir annexe A), nous obtenons les portraits de phase et les évolutions temporelles suivants :



(a) Diagramme de phase des états  $(x, y)$

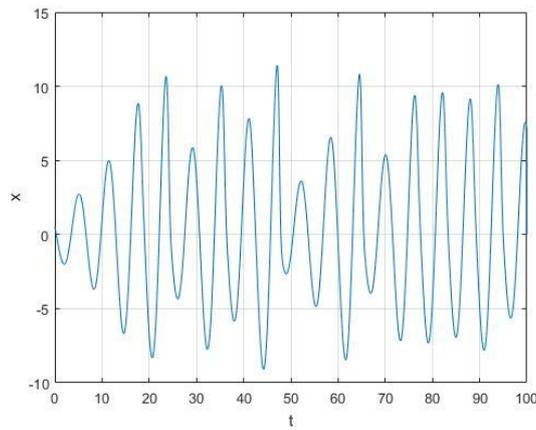


(b) Diagramme de phase des états  $(x, z)$

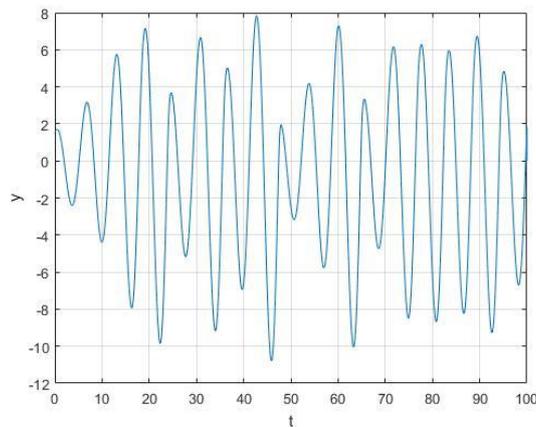


(c) Diagramme de phase des états dynamiques  $(y, z)$

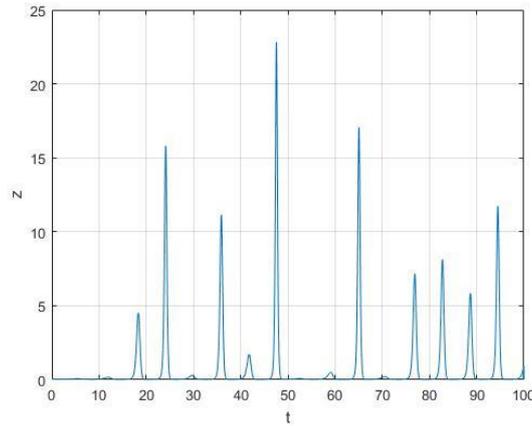
Figure 1.1 - Portraits de phase des états dynamiques du système de Rossler



(a) Evolution temporelle de l'état dynamique  $x$



(b) Evolution temporelle de l'état dynamique  $y$



(c) Evolution temporelle de l'état dynamique  $z$ .

Figure 1.2 – Evolution temporelles des états dynamiques du système de Rössler

Les définitions et propriétés suivantes permettent davantage de comprendre d'un point de vue qualitatif les points marquants des systèmes chaotiques.

### 2.3.1. La non linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique.

### 2.3.2. Le déterminisme

La notion de déterminisme signifie la capacité de prédire le futur d'un phénomène à partir d'un événement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due à sa non linéarité.

### 2.3.3. L'aspect aléatoire

Tous les états d'un système chaotique présentent des aspects aléatoires. La figure 1.2.a illustre l'aspect aléatoire du système de Rössler. Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. A l'opposé, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.

### 2.3.4. Sensibilité aux conditions initiales

Certains phénomènes dynamiques non linéaire sont si sensibles aux conditions initiales que, mêmes s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles. Comme la plupart des phénomènes sont non linéaires, on comprend alors l'importance de la découverte de Lorenz [10].

Une autre propriété des phénomènes chaotiques est qu'ils sont très sensibles aux perturbations. L'un des premiers chercheurs à s'en être aperçu fut Edward Lorenz qui s'intéressait à la météorologie et par conséquent aux mouvements turbulents d'un fluide comme l'atmosphère. Lorenz venait de découvrir que dans les systèmes non linéaires, d'infimes différences dans les conditions initiales engendraient à la longue des trajectoires totalement différentes. Il a illustré ce fait par *l'effet papillon* [10].

Il est clair que la moindre erreur ou impression sur la condition initiale interdit de décider à tout temps quelle sera la trajectoire effectivement suivie et, en conséquence, de faire une prédiction sur l'évolution à long terme du système.

Une des propriétés essentielles du chaos est donc cette sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant des taux de divergence des trajectoires. Ceci est illustré par la figure suivante :

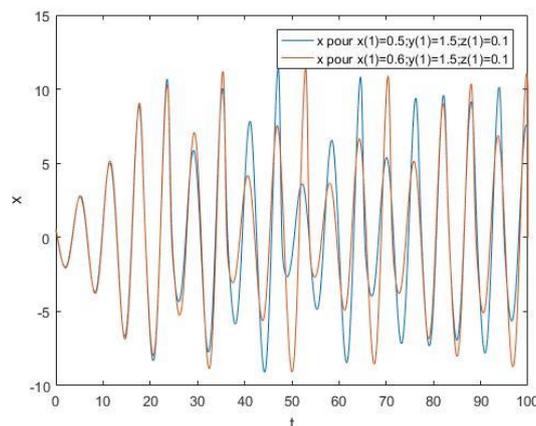


Figure 1.3. Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales sur l'état

### 2.3.5. Attracteur étrange

Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires de l'espace des phases, c'est-à-dire une situation ou un ensemble de situations vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.

Dans un espace des phases à deux dimensions, les attracteurs sont soit des points soit des cycles limites.

Pour tous les attracteurs réguliers, c'est-à-dire pour les systèmes non chaotiques, des trajectoires qui partent des points proches d'un de l'autre dans l'espace de phase restent

indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution de ces systèmes à partir d'une situation connue.

Les systèmes à deux variables ne peuvent pas conduire à des mouvements chaotiques : il suffit de rajouter une troisième variable pour de tels systèmes dans certaines conditions deviennent instables. Sous-adjacent dans le chaos déterministe, cet objet particulier possède une structure fractale. La figure 1.3 illustre l'attracteur chaotique du système de Rössler

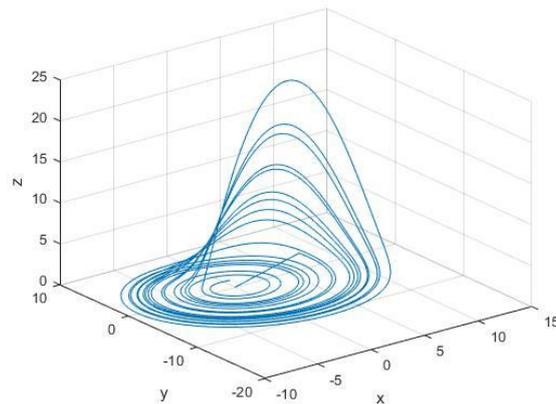


Figure 1.4. Attracteur étrange de Rössler

L'attracteur chaotique dit aussi étrange n'est pas une surface lisse, mais une surface repliée plusieurs fois sur elle-même. En effet, les trajectoires des points divergent (puisque, par définition deux points ne peuvent avoir la même évolution), mais comme l'attracteur a des dimensions finies, il doit se replier sur lui-même.

Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur considéré. On peut donc avoir plusieurs attracteurs dans un même espace des phases. Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

L'objet géométrique observé dans la figure 1.3 est relativement complexe et dégage la richesse d'informations que contient le système. Un attracteur chaotique possède notamment la propriété remarquable suivante : la trajectoire ne repasse jamais par un même état. Ce qui signifie, entre autres, que cette trajectoire passe par une infinité d'états.

Il est à noter que pour observer les trajectoires d'un attracteur, il est parfois intéressant de réduire la dimension  $d$  de l'espace de phases.

### 2.3.6. La section de Poincaré

La section de Poincaré est un hyperplan  $\Sigma$  de dimension  $d-l$  qui transforme la trajectoire continue en une succession de points de passages discontinus à travers la section (Figure 1.5).

Cette section peut être considérée comme une transformation du système en temps continu en un système en temps discret.

Le principe consiste à se ramener à une étude dans  $\mathbb{R}^2$  par intersection de trajectoire dans  $\mathbb{R}^n$ .

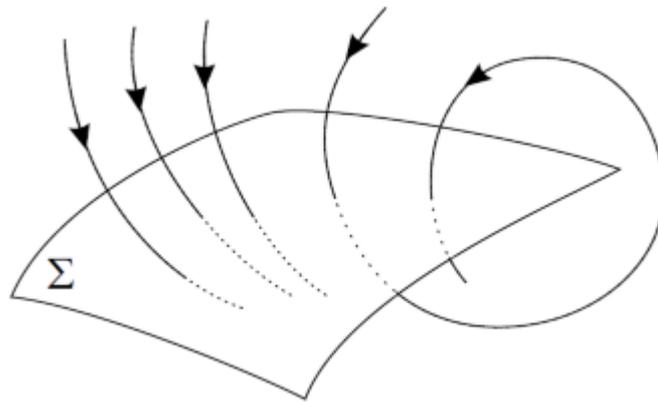


Figure 1.5. Section de Poincaré

### 2.3.7. Les exposants de Lyapunov

L'évolution chaotique est difficile à appréhender car la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide. Pour cette raison on essaie si c'est possible de mesurer sinon d'estimer la vitesse de divergence ou de convergence. Cette vitesse est donnée par l'exposant de Lyapunov qui caractérise le taux de séparation de deux trajectoires très proches [11,12].

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . Pour chaque point  $x_0$  on définit un exposant de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  comme suit :

$$\lambda(x_0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \left| (f^n)'(x_0) \right| \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \left| f'(x_j) \right| \right) \quad (1.26)$$

Avec  $x_j = f^j(x_0)$

Donc deux trajectoires dans le plan de phase initialement séparées par un taux  $Z_1$  divergent après un temps  $\Delta t = t_2 - t_1$  vers  $Z_2$  tel que :

$$Z_2 \approx e^{\lambda \Delta t} |Z_1|$$

Où  $\lambda$  est l'exposant de Lyapunov

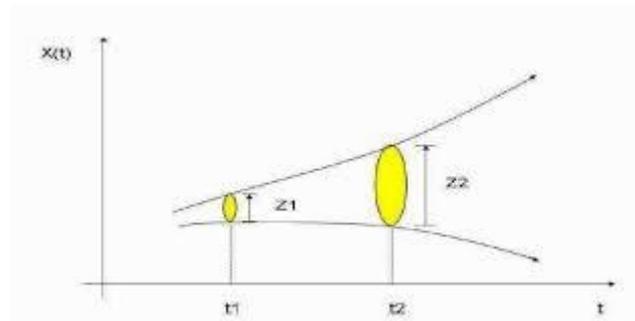


Figure 1.6. Divergence de trajectoires dans le plan de phase

Les exposants de Lyapunov sont une généralisation des valeurs propres pour le point fixe et des multipliers caractéristiques pour les solutions périodiques.

Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative. Un attracteur étrange possèdera toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont un au moins doit être positif (voir le tableau ci-dessus).

Etat stable	Flot	Dimension de Lyapunov	Exposant de Lyapunov
<b>Point d'équilibre</b>	Point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
<b>Période</b>	Cercle	1	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
<b>Période d'ordre 2</b>	Tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
<b>Période d'ordre K</b>	k-tores	K	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
<b>Chaotique</b>		Non entier	$\lambda_1 > 0$

<b>Hyperchaotique</b>		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
-----------------------	--	------------	--

Tableau 1.3. Classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapunov

## 2.4. Les dynamiques chaotiques

Depuis que l'attracteur de Lorenz est découvert en 1963, la recherche dans le domaine du chaos a attiré l'attention des chercheurs et experts. Plusieurs sortes de systèmes chaotiques et hyperchaotiques ont été présentés par la suite.

En termes de modèles mathématiques et de leurs propriétés, les systèmes chaotiques peuvent être classés en chaos continu, chaos discret, chaos commuté, chaos retardé, hyperchaos... etc.

Dans ce qui suit, quelques propriétés de systèmes chaotiques continus et discrets seront présentées.

### 2.4.1. Le chaos continu

Plusieurs systèmes chaotiques continus ont été étudiés dans la littérature ; Parmi ces systèmes, on retrouve le système de Lorenz, le système de Rössler, l'attracteur de Chen et la fonction Jerk pour ne citer que cela.

Prenons comme exemple de systèmes chaotiques continus, le système de Lorenz [10-13]

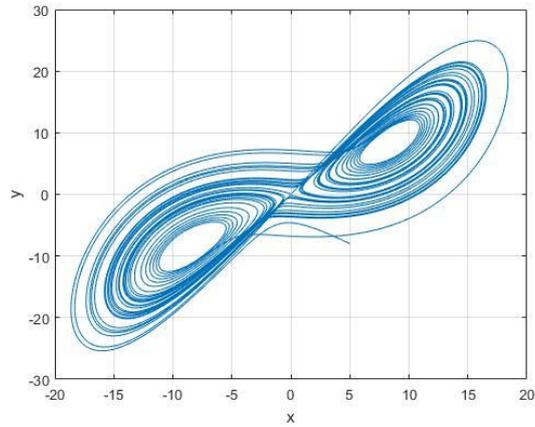
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (1.28)$$

Le système de Lorenz est un système d'équations non linéaires à cause des termes  $xy$  et  $xz$ . Ce système n'est pas intégrable dans le cas général. La détermination de ce système doit se faire à l'aide des méthodes d'approximation [13].

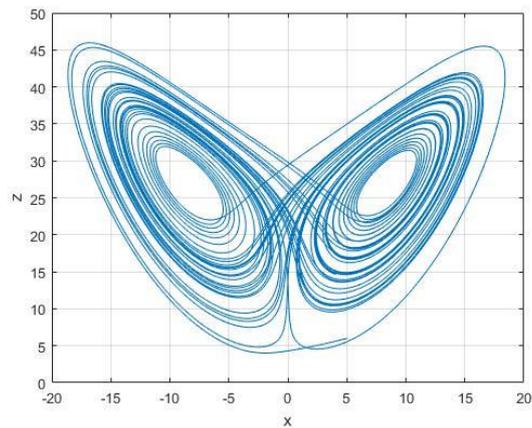
Lorsque les paramètres réels  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $b$  prennent les valeurs suivantes :  $\sigma = 10$  ;  $\rho = 28$  et  $b = \frac{8}{3}$ , avec les conditions initiales  $x(1) = 5$ ,  $y(1) = -8$ ,  $z(1) = 6$  le système (1.28) est chaotique.

Dans ce qui suit, nous vérifions quelques propriétés du système chaotique (1.28) :

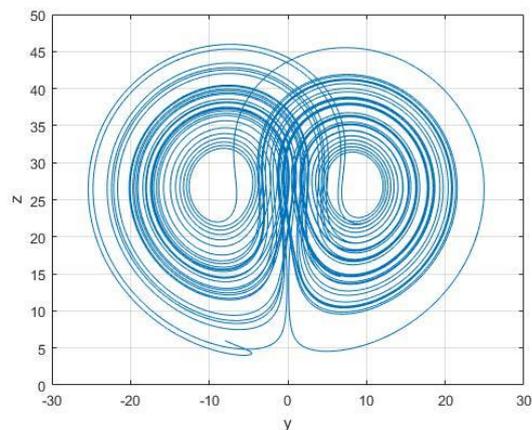
La figure (1.7) illustre l'aspect aléatoire du système (1.28)



(a) Portrait de phase des états dynamiques  $(x, y)$  du système chaotique de Lorenz



(b) Portrait de phase des états dynamiques  $(x, z)$  du système chaotique de Lorenz



(c) Portrait de phase des états dynamiques  $(y, z)$  du système chaotique de Lorenz

Figure 1.9. Portrait de phase des états dynamiques du système chaotique de Lorenz

Le système chaotique (1.27) représente un superbe attracteur étrange en forme d'ailes de papillon, représenté sur la figure (1.10). La trajectoire commençant pas s'enrouler sur une aile, puis sautant pour commencer à s'enrouler sur l'autre aile, et ainsi de suite.

On observe que la dynamique du système de Lorenz donnée par le système (1.27) est indépendante du temps  $t$ , par conséquent ce type de système est qualifié d'être autonome [15].

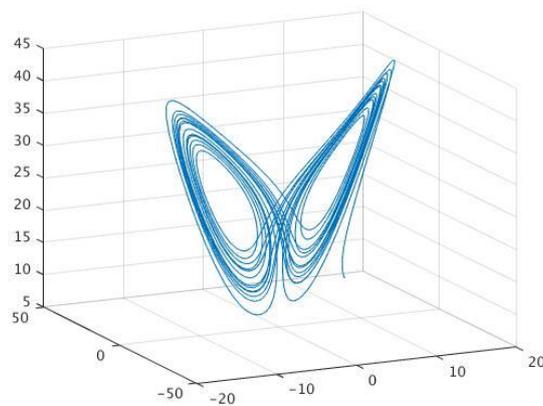


Figure 1.10. Attracteur étrange de Lorenz

#### 2.4.2. Le chaos discret

Le système chaotique discret le plus connu est la fonction logistique qui est l'une des fonctions de Tchebychev, il existe toutefois d'autres systèmes chaotiques discrets comme le système de Hénon, la fonction de Tent et la fonction Gaussienne discrète.

La fonction logistique très connue dans la théorie des systèmes non linéaires, est une application non bijective du domaine  $[0,1]$  dans lui-même qui sert de récurrence à la suite :

$$x_{k+1} = f(x_k) = rx_k(1 - x_k) \quad (1.29)$$

Où  $k = 0, 1, \dots$  dénotes le temps discret,  $x$  la variable dynamique et  $r$  un paramètre réel.

La dynamique de cette application correspond à un comportement très différent ; ainsi selon la valeur du paramètre  $r$ , une plus grande variété de régimes permanents se représente, parmi lesquelles on trouve, par ordre de complexité :

- Pour  $0 < r < 3$  le système possède un point fixe attractif, qui devient instable lorsque  $r = 3$ .
- Pour  $3 < r < 3,57\dots$ , le système évolue périodiquement de période  $r^n$ , avec  $n$  un entier naturel qui tend vers l'infini lorsque  $r$  tend vers  $3,57\dots$
- Pour  $r = 4$ , le système évolue de manière chaotique.

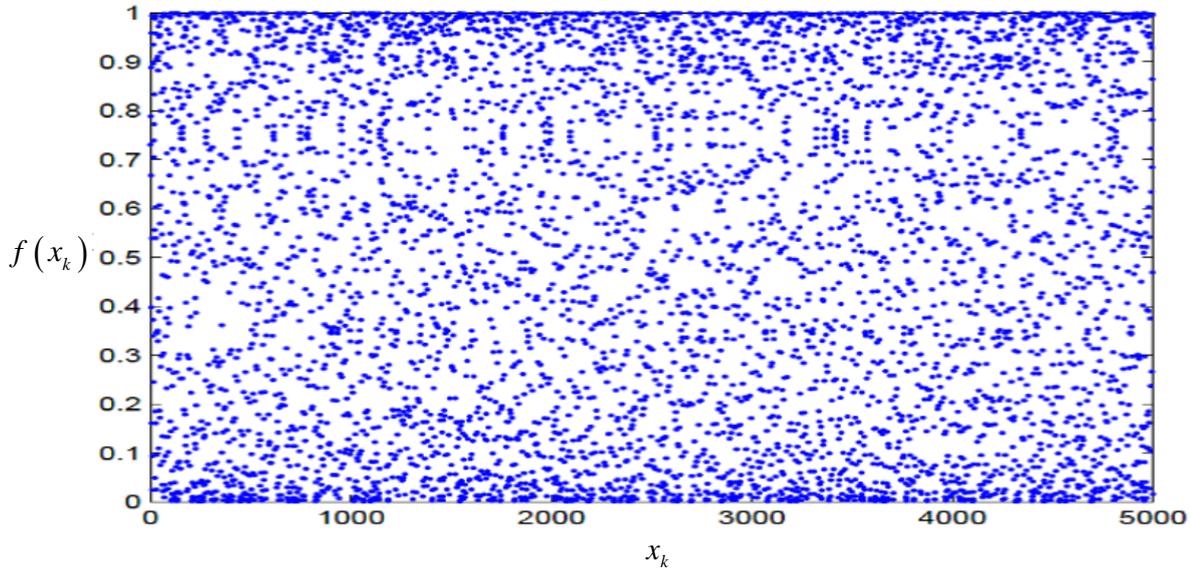


Figure 1.11. Trajectoire de la fonction logistique

De même que pour le cas continu, nous présentons dans ce qui suit quelques propriétés du système chaotique discret (1.29).

- **Aspect aléatoire**

La figure suivante illustre l'aspect aléatoire du système (1.29) pour  $r = 4$ . Il est alors impossible de discerner à l'œil nu cette trajectoire de celle d'une variable aléatoire.

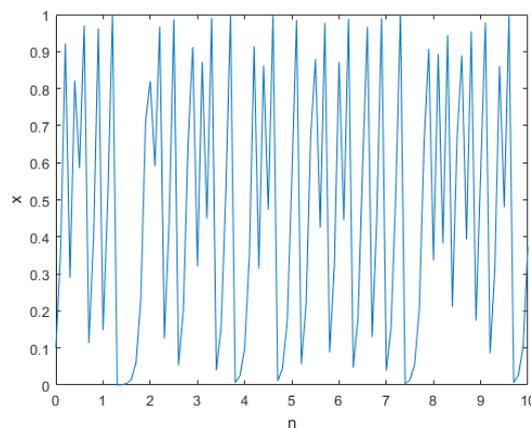


Figure 1.12. Application logistique pour  $r = 4$

### - Exposant de Lyapunov

Comme il a été déjà mentionné, la fonction logistique présente un comportement chaotique à partir d'une valeur spécifique du paramètre  $r = 4$ . Après calcul de l'exposant de Lyapunov de la fonction logistique :

$$x_{k+1} = 4x_k(1 - x_k) \quad (1.29)$$

nous obtenons la valeur  $\lambda = \ln 2 > 0$ , d'où le comportement chaotique.

### 2.4.3. Le chaos à retard

Le système de Mackey-Glass est le premier chaos à retard découvert en 1977 à partir d'un modèle physiologique. Il est donné par l'équation suivante [14] :

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \frac{2x(t-\tau)}{1 + x(t-\tau)^{10}} \quad (1.30)$$

Le portrait de la figure est donné par la figure suivante

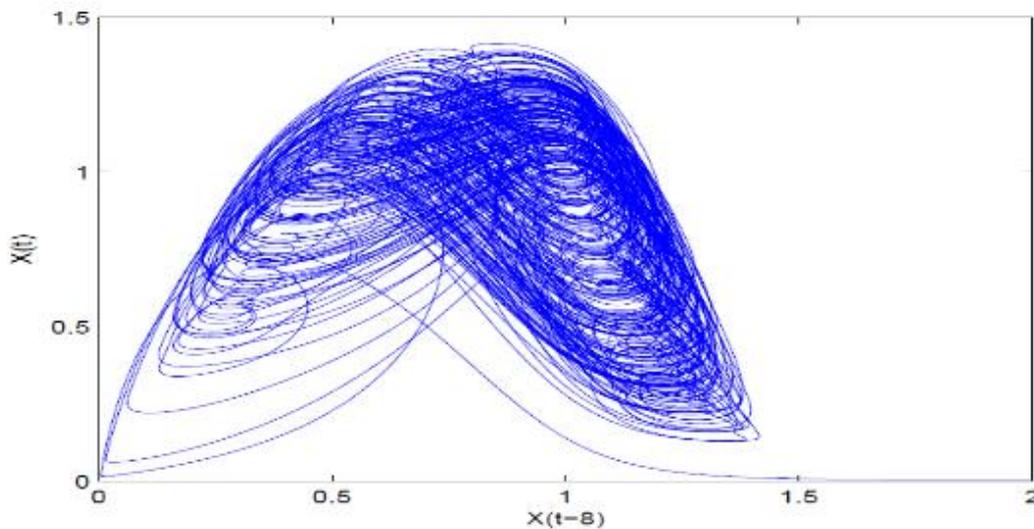


Figure 1.13. Portrait de phase du système de Mackey-Glass avec  $\tau = 8$

Un autre système chaotique à retard est celui d'Ikeda obtenu comme modèle d'un système optique passif :

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \mu \sin(x(t-\tau)) \quad (1.31)$$

### 2.5. Bifurcation et routes vers le chaos

La théorie de bifurcation est l'étude mathématique des changements qualitatifs ou topologiques de la structure d'un système dynamique [14].

Une bifurcation survient lorsqu'une variation quantitative d'un paramètre du système engendre un changement qualitatif des propriétés d'un système telles que la stabilité, le nombre de points d'équilibre ou la nature des régimes permanents. Les valeurs des paramètres au moment du changement sont appelées *valeurs de bifurcation*.

Dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation montre les comportements possibles d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation [14] figure (1.14)

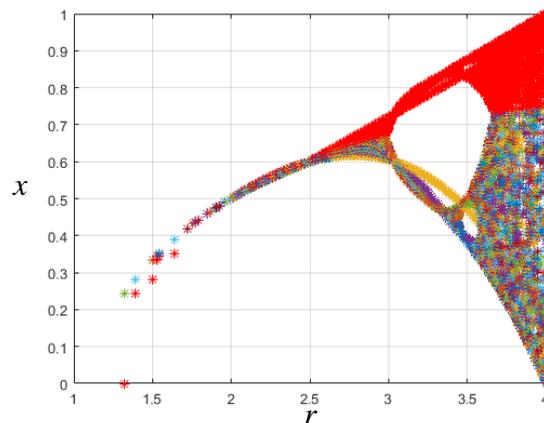


Figure 1.14. Diagramme de bifurcation de la fonction logistique

Dans les équations de Lorenz par exemple, la résolution du système n'apporte pas toujours le chaos. Ce régime n'apparaît que pour certaines valeurs des paramètres. Pour caractériser le chaos.

Il peut être intéressant d'étudier l'apparition du chaos (ce qu'on appelle le scénario ou la route vers le chaos).

On distingue trois scénarios théoriques d'évolution vers le chaos. Toutes ces évolutions ont permis de classer certains phénomènes expérimentaux comme chaotiques déterministes.

On obtient l'apparition du chaos en modifiant la valeur d'un paramètre du système que ça soit de manière théorique ou expérimentale.

#### - **Le doublement de période**

L'augmentation d'un paramètre provoque, pour un système périodique, l'apparition d'un doublement de période, la période se multiplie ainsi en 4, 8, 16, ...

A partir d'une certaine valeur du paramètre, les doublements étant de plus en plus rapproché, on tend vers un point auquel on obtiendrait hypothétiquement une fréquence infinie et c'est à ce moment que le chaos apparaît.

- **L'intermittence**

Ce scénario est caractérisé par un mouvement périodique stable entrecoupé par des mouvements chaotiques qui apparaissent de manière irrégulière.

Le système conserve pendant un certain laps de temps un régime périodiquement ou pratiquement quasi-périodique, c'est-à-dire une certaine « irrégularité » et se déstabilise, brutalement, pour donner lieu à un comportement chaotique. Il se stabilise de nouveau pour donner lieu à une autre « explosion chaotique » plus tard.

La fréquence et la durée des phases chaotiques ont tendance à s'accroître plus on s'éloigne de la valeur critique de la contrainte ayant conduit à leur apparition.

- **La quasi périodicité**

Ce troisième scénario fait intervenir pour un système périodique l'apparition d'une autre période dont le rapport avec la première n'est pas rationnel.

### **3. Conclusion**

Dans le présent chapitre, quelques définitions et notions sur le calcul fractionnaire et les systèmes chaotiques ont été présentés. Nous allons montrer leur utilisation à des fins de synchronisation des systèmes biologiques chaotiques, en l'occurrence celui des cellules  $\beta$  d l'îlot de Langerhans du pancréas grâce au modèle mathématique Pernarowski.

# Chapitre 2 : Description du modèle de mathématique Pernarowski de la cellule $\beta$ du pancréas

## 1. Introduction

La modélisation des bouffées d'oscillations dans les cellules est un sujet intéressant et plusieurs modèles ont été proposés et étudiés dans le but de mieux comprendre le système. Le premier modèle mathématique pour ces bouffées d'oscillations a été proposé par Chay et Keizer [15]. De nombreux auteurs ont proposé des modèles plus révisés et plus raffinés avec des résultats compatibles avec la physiologie. Le modèle mathématique mis en œuvre dans ce chapitre a été proposé par Pernarowski [16, 17]. Nous étudierons dans un premier temps le modèle classique de Pernarowski et dans un second temps le modèle fractionnaire qui peut conduire à un comportement chaotique.

## 2. Étude du modèle classique de Pernarowski de la cellule $\beta$

La principale caractéristique du modèle de Pernarowski est qu'il présente des variables rapides et lentes qui peuvent modéliser différents comportements de cellules, telles que : une cellule active, qui correspond à une cellule qui comporte des phases active et silencieuse pendant la sécrétion d'insuline ; une cellule inactive qui correspond à une cellule qui ne produit plus d'oscillations ; et des cellules qui produisent des décharges continues, qui font référence à des cellules qui sont isolées de l'amas de cellules. Comme les autres modèles, il s'agit d'un système singulièrement perturbé qui se compose d'un sous-système rapide bidimensionnel et d'au moins un sous-système lent à une dimension. Ce modèle est décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) - y - z \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + f(x) - 3x - y - 3 \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon (\beta(x - \mu_\beta) - z) \end{cases} \quad (2.1)$$

Où  $x$  est le potentiel membranaire,  $y$  est un paramètre d'activation de canal pour le canal de potassium voltage-dépendant et  $z$  représente les concentrations des agents qui règlent l'activité

électrique de sécrétion tels que le calcium intracellulaire et la concentration du calcium dans le réticulum endoplasmique et de l'ADP. la fonction  $f(x)$  a la forme suivante :

$$f(x) = -\frac{a}{3}x^3 + a\mu x^2 + (1 - a(\mu^2 - \eta^2))x \quad (2.2)$$

## 2.1 Détermination du point fixe

Les points d'équilibre sont des points tels que :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) - y - z = 0 \\ x^3 + f(x) - 3x - y - 3 = 0 \\ \varepsilon(\beta(x - \mu_\beta) - z) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) - y - z = 0 \\ x^3 + f(x) - 3x - y - 3 = 0 \\ (\beta(x - \mu_\beta) - z) = 0 \end{cases}$$

En remplaçant  $f(x)$  par son expression on obtient :

$$-\frac{a}{3}x^3 + a\mu x^2 + (1 - a(\mu^2 - \eta^2))x - y - z = 0 \quad (2.4)$$

$$\left(1 - \frac{a}{3}\right)x^3 + a\mu x^2 - (2 + a(\mu^2 - \eta^2))x - y - 3 = 0 \quad (2.5)$$

$$\beta(x - \mu_\beta) - z = 0 \quad (2.6)$$

De l'équation (2.6) on a :

$$z = \beta(x - \mu_\beta) \quad (2.7)$$

En faisant la différence des équations (2.5)-(2.4), on obtient :

$$x^3 - 3x - y - 3 = 0 \quad (2.8)$$

En remplaçant  $z$  par sa valeur on obtient l'équation suivante :

$$x^3 + (\beta - 3)x - \beta\mu_\beta - 3 \quad (2.9)$$

Les valeurs de paramètres standard de Pernarowski sont [17] :

$$a = \frac{1}{4}; \quad \eta = \frac{3}{2}; \quad \beta = 4; \quad \mu_\beta = -0,954; \quad \varepsilon = 0,0025$$

On obtient finalement :

$$x^3 + x + 0,816 = 0 \quad (2.10)$$

La résolution de cette équation sur Maple 13 donne une valeur réelle  $x = -0,6$  on déduit  $y = -1,609$  et  $z = 1,416$ . Le modèle de Pernarowski n'a qu'un unique point d'équilibre E de coordonnées  $(0,6, -1,609, 1,416)$ .

## 2.2 Stabilité du point fixe

Le système d'équations décrivant le modèle de Pernarowski étant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{a}{3}x^3 + a\mu x^2 + (1 - a(\mu^2 - \eta^2))x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = \left(1 - \frac{a}{3}\right)x^3 + a\mu x^2 - (2 + a(\mu^2 - \eta^2))x - y - 3 \\ \frac{dz}{dt} = \varepsilon(\beta(x - \mu_\beta) - z) \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= -\frac{a}{3}x^3 + a\mu x^2 + (1 - a(\mu^2 - \eta^2))x - y - z \\ g_2(x, y, z) &= \left(1 - \frac{a}{3}\right)x^3 + a\mu x^2 - (2 + a(\mu^2 - \eta^2))x - y - 3 \\ g_3(x, y, z) &= \varepsilon(\beta(x - \mu_\beta) - z) \end{aligned}$$

Le jacobien du système est donné par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial g_1(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial g_1(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial g_2(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial g_2(x, y, z)}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3(x, y, z)}{\partial x} & \frac{\partial g_3(x, y, z)}{\partial y} & \frac{\partial g_3(x, y, z)}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

On obtient après calcul des dérivées :

$$J = \begin{pmatrix} -ax^2 + 2a\mu x + 1 - a(\mu^2 - \eta^2) & -1 & -1 \\ (3-a)x^2 + 2a\mu x - 2 - a(\mu^2 - \eta^2) & -1 & 0 \\ \varepsilon\beta & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Au point E de coordonnées (0.6, -1.609, 1.416),  $a = \frac{1}{4}$  ;  $\eta = \frac{3}{4}$  ;  $\beta = 4$  ;  $\mu = \frac{3}{2}$  ;  $\mu_\beta = -0.954$   
 $\varepsilon = 0.0025$ , l'expression du jacobien dévient

$$J = \begin{pmatrix} 0.038125 & -1 & -1 \\ -1.88175 & -1 & 0 \\ 0.01 & 0 & -0.0025 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

L'équation caractéristique de  $J$  est donnée par  $\det(J - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 0.038125 - \lambda & -1 & -1 \\ -1.88175 & -1 - \lambda & 0 \\ 0.01 & 0 & -0.0025 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 - 0.964375\lambda^2 + 1.709470312\lambda - 0.0052035 \quad (2.15)$$

En résolvant cette équation sur Maple 13 on obtient les valeurs propres suivantes :  $\lambda_1 = -1.946$ ,  $\lambda_2 = 0.978$  et  $\lambda_3 = 0.002$ . Le point  $E$  a des valeurs propres positive et négative donc le point  $E$  est un point d'équilibre non stable.

### 2.3 Résultats des simulations numériques des équations du système

En utilisant l'algorithme de Runge Kutta d'ordre 4 (RK4) avec un pas de discrétisation  $\Delta t = 10^{-2}s$  et du logiciel de calcul numérique Matlab 9.1.0 (R2016b) pour résoudre

numériquement les équations du système 2.1, avec pour conditions initiales  $x(t=0) = -1.345$  ;  $y(t=0) = 0$  ;  $z(t=0) = 1.4$ .

En utilisant les valeurs des paramètres standard, les potentiels d'action sont organisés en bouffées caractéristiques de l'activité électrique oscillatoire des cellules du pancréas. Les différents comportements qui peuvent être obtenus dans le modèle classique de Pernarowski (2.1) selon les valeurs de  $\mu_\beta$  et  $\eta$  sont présentés par les figures ci-dessous :

- Pour  $\eta = \frac{3}{4}$ ,  $\mu_\beta = -0.954$ , la figure 2.1 présente une cellule active avec des rafales. Les autres paramètres sont  $a = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = 4$ ,  $\mu = \frac{3}{2}$ ,  $\varepsilon = 0.0025$ .

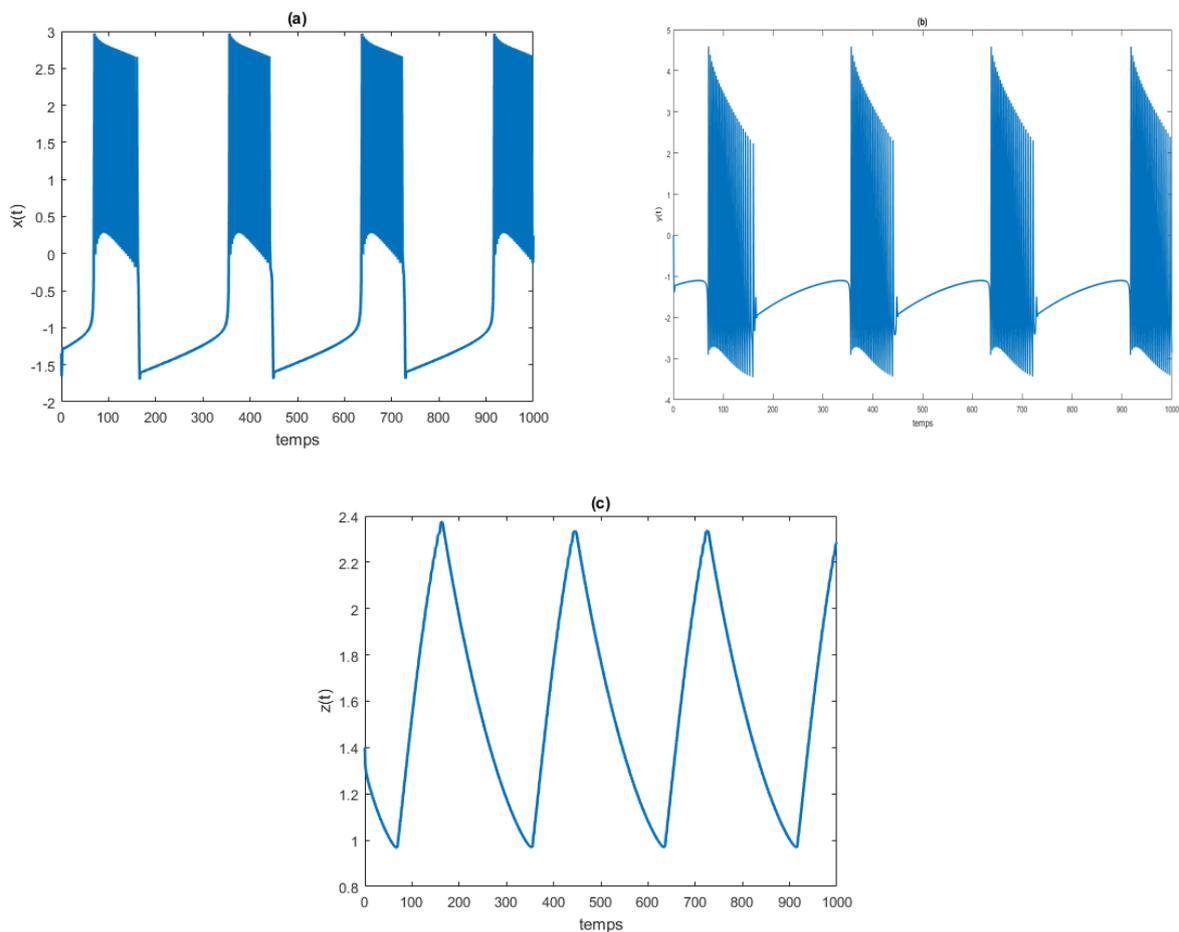
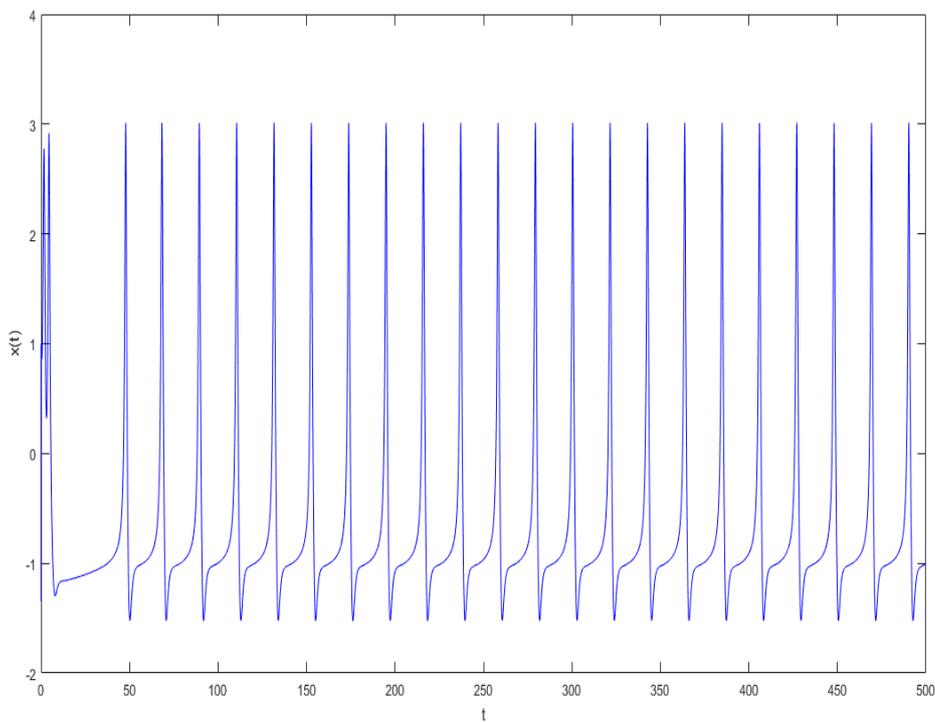


Figure 2.1 – Évolution dans le temps du potentiel membranaire  $x(t)$  en (a), du paramètre d'activation de canal pour le canal de potassium voltage-dépendant  $y(t)$  en (b) et de la concentration de calcium  $z(t)$  en (c) pour  $\eta = \frac{3}{4}$ ,  $\mu_\beta = -0.954$ .

On voit sur la figure 2.1 (a) que le potentiel membranaire  $x(t)$  est déclenché en raison des niveaux de glucose dans le sang. La figure 2.1 (b) montre le paramètre d'activation de canal pour le canal de potassium voltage-dépendant  $y(t)$ , et la figure 2.1 (c) montre la concentration de calcium  $z(t)$ . Lorsque la concentration de calcium  $z(t)$ , en raison du taux de glucose dans le sang, augmente, le potentiel de la membrane et le paramètre d'activation de canal pour le canal de potassium dépendant du voltage présentent une phase active avec des bouffées de potentiel d'action. La génération de rafales se caractérise par une alternance entre une phase silencieuse et une phase d'oscillation rapide dont la durée semble avoir une grande importance dans la régulation de la glycémie.

- La figure 2.2 présente des décharges continues d'une cellule pour,  $\eta = 1$  et  $\mu_\beta = -0.954$ . Les autres paramètres sont  $a = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = 4$ ,  $\mu = \frac{3}{2}$ ,  $\varepsilon = 0.0025$   $a = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = 4$ ,  $\mu = \frac{3}{2}$ ,  $\varepsilon = 0.0025$



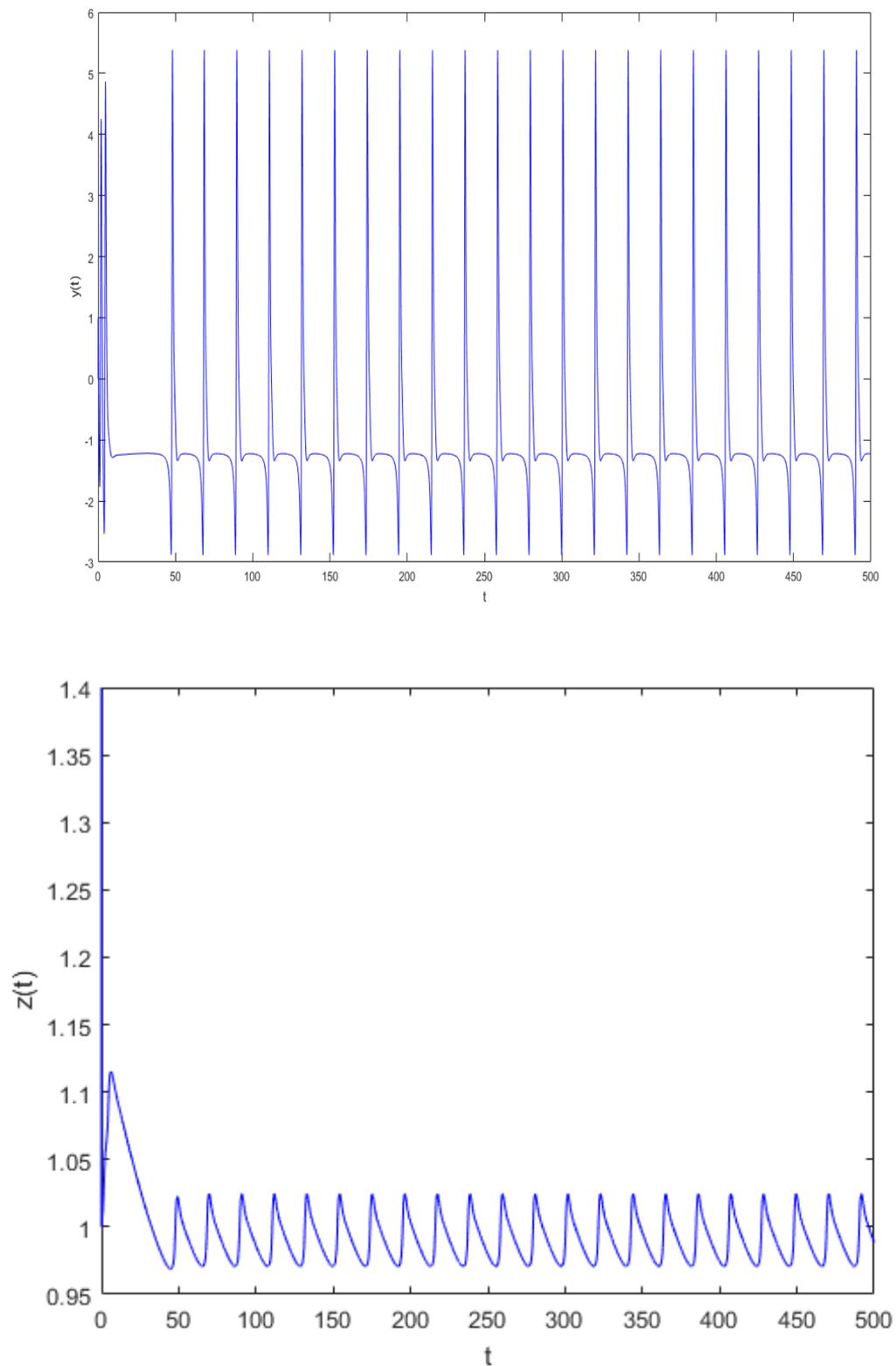
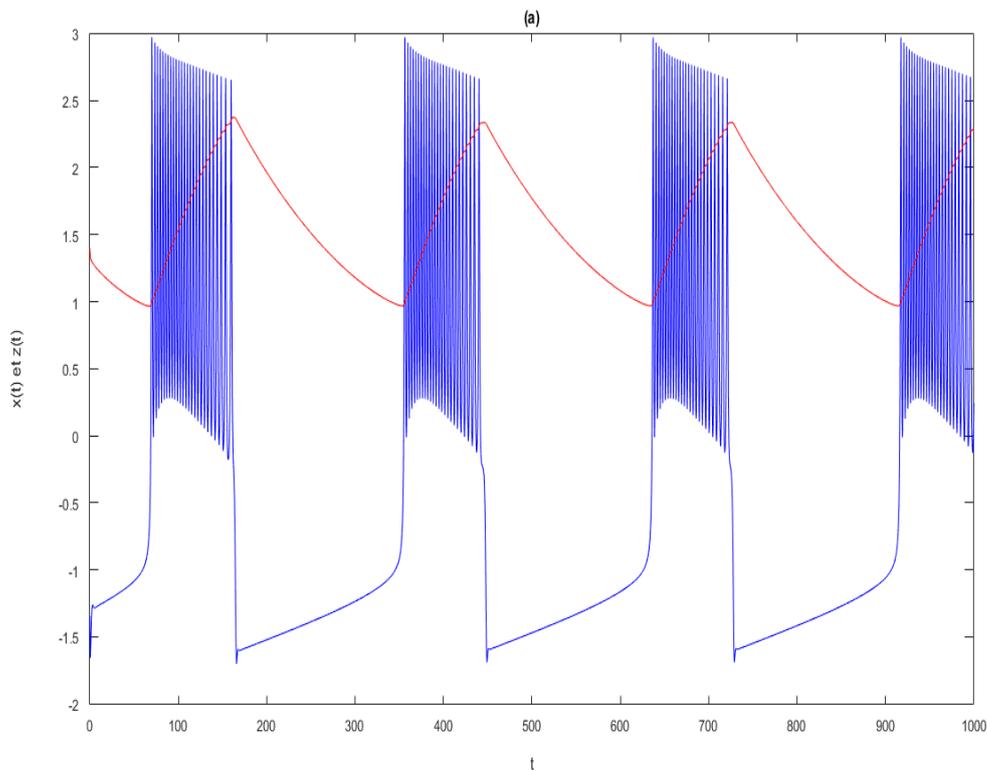


Figure 2.2 – Évolution dans le temps du potentiel membranaire  $x(t)$  en (a), du paramètre d'activation de canal pour le canal de potassium voltage-dépendant  $y(t)$  en (b) et de la concentration de calcium  $z(t)$  en (c) pour  $\eta = 1$  et  $\mu_\beta = -0.954$ .

Lorsque  $\mu_\beta$  reste inchangé et  $\eta$  augmente jusqu'à 1, on observe à la figure 2.2 (a) - (c), un comportement différent de  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  qui correspond aux décharges continues. Comme le paramètre rapide varie, le système présente toujours une activité électrique. Les bouffées de potentiel disparaissent et on observe maintenant des décharges ou battements continus. L'activité de décharge est représentée par des oscillations rapides sous forme de pics. Ceci est généralement attribué aux cellules isolées et parfois aux cellules appartenant à des amas de cellules avec un nombre réduit de cellules en elle.

- Le figure 2.3 donne une vue plus détaillée de l'évolution dans le temps du potentiel membranaire  $x(t)$  et de la concentration de  $Ca^{2+}$ ,  $z(t)$  pour une cellule active et une cellule constante, c'est-à-dire lorsque  $\mu_\beta = -0.954$  et lorsque les deux valeurs précédentes du paramètre  $\eta$  sont considérées à savoir  $\eta = \frac{3}{4}$  et  $\eta = 1$ . Les autres paramètres sont  $a = \frac{1}{4}$ ,  $\beta = 4$ ,  $\mu = \frac{3}{2}$ ,  $\varepsilon = 0.0025$ .



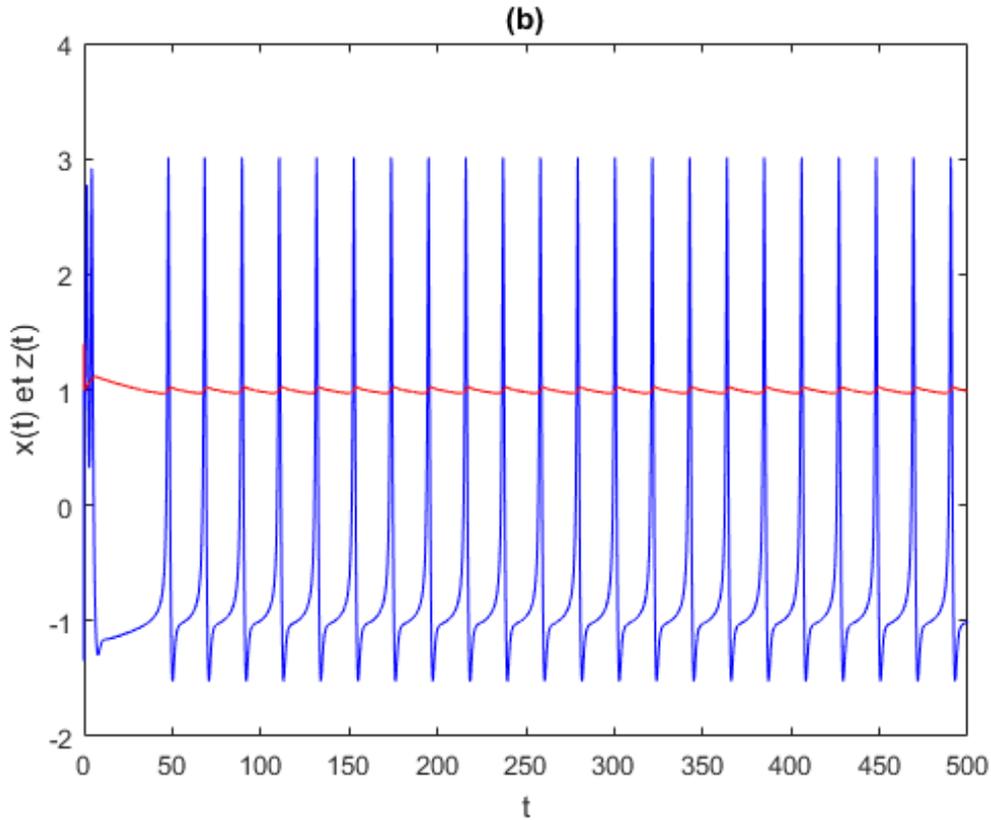


Figure 2.3 – Évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$  en bleu et de la concentration de calcium  $z(t)$  en rouge ; (a) une cellule active avec  $\eta = \frac{3}{4}$  et  $\mu_\beta = -0.954$  et (b) des décharges continues de la cellule avec  $\eta = 1$  et  $\mu_\beta = -2$ .

L'activité électrique dans les cellules  $\beta$  change lorsque le paramètre  $\eta = 1$  varie de l'activité de rafale (figure 2.3(a)) à des oscillations rapides sous forme de pics (figure 2.3(b)).

### 2.3 Étude du modèle fractionnaire de Pernarowski de la cellule $\beta$

Le système de Pernarowski peut être décrit par les équations différentielles fractionnaires du système (2.16) :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = f(x) - y - z \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = x^3 + f(x) - 3x - y - 3 \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = \varepsilon (\beta(x - \mu_\beta) - z) \end{cases} \quad (2.16)$$

La fonction  $f(x)$  a la forme suivante :

$$f(x) = -\frac{a}{3}x^3 + a\mu x^2 + (1 - a(\mu^2 - \eta^2))x \quad (2.17)$$

Les paramètres standard de Pernarowski sont [15] :

$$a = \frac{1}{4} ; \eta = \frac{3}{4} ; \beta = 4 ; \mu = \frac{3}{2} ; \mu_\beta = 0.954 ; \varepsilon = 0.0025 .$$

### 2.3.1 Détermination du point d'équilibre et étude de la stabilité

#### 2.3.1.1 Détermination du point d'équilibre

Les points fixes sont solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} x}{dt^{q_1}} = 0 \\ \frac{d^{q_2} y}{dt^{q_2}} = 0 \\ \frac{d^{q_3} z}{dt^{q_3}} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) - y - z = 0 \\ x^3 + f(x) - 3x - y - 3 = 0 \\ \varepsilon(\beta(x - \mu_\beta) - z) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Le point fixe reste inchangé on a  $E^* = (-0.6, -1.609, 1.416)$ .

#### 2.3.1.2 Étude de la stabilité du point fixe

La stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires est très complexe et différente de celle des systèmes linéaires fractionnaires ou classiques. La différence fondamentale est que pour des systèmes non linéaires d'ordre fractionnaire, il est nécessaire d'examiner les états stables pouvant être de deux catégories : les points fixes et les cycles limites.

Nous appliquons la méthode de linéarisation pour étudier la stabilité autour des points fixes. Nous considérons le cas où les ordres fractionnaires sont différents (cas incommensurable). Dans le cas contraire, il n'est question que de déductions.

La matrice Jacobienne du système autour du point fixe est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} -ax^2 + 2a\mu x + 1 - a(\mu^2 - \eta^2) & -1 & -1 \\ (3-a)x^2 + 2a\mu x - 2 - a(\mu^2 - \eta^2) & -1 & 0 \\ \varepsilon\beta & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Au point d'équilibre  $E^* = (-0.6, -1.609, 1.416)$  le jacobien vaut :

$$J = \begin{pmatrix} 0.038125 & -1 & -1 \\ -1.88175 & -1 & 0 \\ 0.01 & 0 & -0.0025 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

L'équation caractéristique est donnée par :

$$\det(\text{diag}(\lambda^{mq_1} \lambda^{mq_2} \lambda^{mq_3} - J^*)) = 0 \quad (2.22)$$

Où  $m$  est le PPCM des dénominateurs des ordres  $q_1, q_2$  et  $q_3$  ;  $\gamma = \frac{1}{m}$  son inverse, les  $q_i$  étant

sous forme  $q_i = \frac{v_i}{u_i}$  avec  $v_i, u_i \in Z (i = 1, 2, 3)$ .

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda^{mq_1} - 0.038125 & 1 & 1 \\ 1.88175 & \lambda^{mq_2} + 1 & 0 \\ -0.01 & 0 & \lambda^{mq_3} + 0.0025 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \lambda^{m(q_1+q_2+q_3)} + 0.0025\lambda^{m(q_1+q_2)} + \lambda^{m(q_1+q_3)} + 0.0025\lambda^{mq_1} - 0.038125\lambda^{m(q_2+q_3)} \\ + 0.01\lambda^{mq_2} - 1.9130\lambda^{mq_3} - 0.0052035 = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Selon le théorème de stabilité définie dans Tavazoi [19] :

- Ce point d'équilibre est asymptotiquement stable pour  $q_1 \neq q_2 \neq q_3$  si toutes les valeurs propres  $\lambda$  de la matrice jacobienne  $J^*$  évaluée au point d'équilibre satisfont la condition :  $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2m}$ .
- Si au moins une valeur propre vérifie  $|\arg(\lambda)| < \frac{\pi}{2m}$  alors, le système est instable.

- Ce point d'équilibre est asymptotiquement stable pour  $q_1 = q_2 = q_3 = q$  lorsque toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne  $J^*$  évaluée au point d'équilibre satisfont la condition  $|\arg(\lambda)| < q \frac{\pi}{2}$ . Ils sont stables si  $|\arg(\lambda)| \geq q \frac{\pi}{2}$

### 2.3.2 Résultats des simulations numériques du système (2.16)

En appliquant la méthode des différences finies non standard développé par Mickens et la discrétisation de Grunwald-Letnikov avec un pas temporel  $h$  sur le système d'équation (2.16), on a :

$$\sum_{j=0}^{n+1} C_j^{q_1} x_{n+1-j} = -\frac{a}{3} x_{n+1} x_n^2 + a\mu x_n x_{n+1} + \left(1 - a(\mu^2 - \eta^2)\right) x_n - y_n - z_n \quad (2.25)$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} C_j^{q_2} y_{n+1-j} = \left(\left(1 - \frac{a}{3}\right) x_n + a\mu\right) x_n x_{n+1} - \left(2 + a(\mu^2 - \eta^2)\right) x_n - 3 \quad (2.26)$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} C_j^{q_3} z_{n+1-j} = \varepsilon\beta x_n - \varepsilon z_n - \varepsilon\beta\mu_\beta \quad (2.27)$$

Soit en développant :

$$C_0^{q_1} x_{n+1} + \sum_{j=0}^{n+1} C_j^{q_1} x_{n+1-j} = -\frac{a}{3} x_{n+1} x_n^2 + a\mu x_n x_{n+1} + \left(1 - a(\mu^2 - \eta^2)\right) x_n - y_n - z_n \quad (2.28)$$

$$C_0^{q_2} y_{n+1} + \sum_{j=0}^{n+1} C_j^{q_2} y_{n+1-j} = \left(\left(1 - \frac{a}{3}\right) x_n + a\mu\right) x_n x_{n+1} - \left(2 + a(\mu^2 - \eta^2)\right) x_n - 3 \quad (2.29)$$

$$C_0^{q_3} z_{n+1} + \sum_{j=0}^{n+1} C_j^{q_3} z_{n+1-j} = \varepsilon\beta x_n - \varepsilon z_n - \varepsilon\beta\mu_\beta \quad (2.30)$$

On a donc les expressions de  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  ci-dessous :

$$x_{n+1} = \frac{C_0^{q_1} \left[ \left(1 - a(\mu^2 - \eta^2)\right) x_n - y_n - z_n - \sum_{j=0}^{n+1} C_j^{q_1} x_{n+1-j} \right]}{1 - C_0^{-q_1} a x_n \left( \mu - \frac{x_n}{3} \right)} \quad (2.31)$$

$$y_{n+1} = C_0^{-q_2} \left[ \left(\left(1 - \frac{a}{3}\right) x_n + a\mu\right) x_n x_{n+1} - \left(2 + a(\mu^2 - \eta^2)\right) x_n - 3 - \sum_{j=0}^{n+1} C_j^{q_2} y_{n+1-j} \right] \quad (2.32)$$

$$z_{n+1} = C_0^{-q_3} \left[ \varepsilon \beta x_n - \varepsilon z_n - \varepsilon \beta \mu_\beta - \sum_{j=0}^{n+1} C_j^{q_3} z_{n+1-j} \right] \quad (2.33)$$

Avec  $C_0^{q_1} = h^{-q_1}$ ,  $C_0^{q_2} = h^{-q_2}$ ,  $C_0^{q_3} = h^{-q_3}$  et  $0 < q_i < 1$  avec  $i = 1, 2, 3$ .

En se servant du logiciel Matlab 9.1.0(R2016b) pour résoudre ces équations, et en variant les ordres fractionnaires  $q_1$  et  $q_2$  avec  $q_3$  fixé on obtient les résultats suivants selon qu'on change le paramètre  $\eta$

- La figure 2.4 présente l'évolution temporelle du potentiel de la membrane, de la concentration de calcium et le portrait de phase pour  $q_1 = q_2 = 0,8$ ,  $q_3 = 1$  et  $\eta = \frac{3}{4}$ . Les autres paramètres sont :  $a = \frac{1}{4}$ ,  $\mu = \frac{3}{2}$ ,  $\beta = 4$ ,  $\mu_\beta = -0.954$ ,  $\sigma = 0,0025$ .

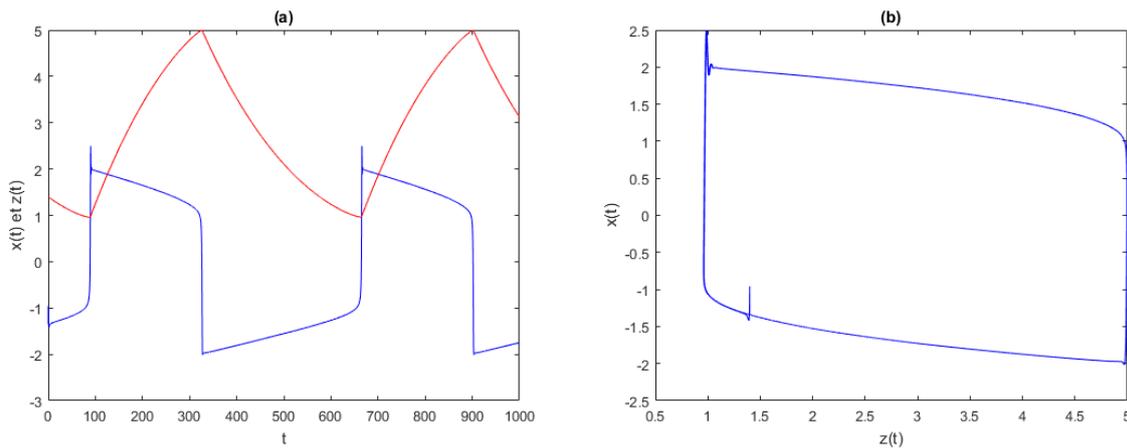


Figure 2.4 – Évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$ , la concentration de calcium  $z(t)$  en (a) et portrait de phase en (b) ; pour  $q_1 = q_2 = 0,98$ ,  $q_3 = 1$  et  $\eta = \frac{3}{4}$ .

On observe que le système fractionnaire (2.16) décrit les oscillations de relaxation. L'évolution temporelle figure 2.4 (a) représente un paquet d'impulsion périodique sans potentiel d'action, et que le portrait de phase donné par la figure 2.4 (b) présente une boucle d'hystérésis. On peut déduire de la figure 2.4 (a) que l'activité électrique oscillatoire ne correspond plus à la sécrétion d'insuline qui a une amplitude relativement plus grande que celle de la réponse électrique de la membrane. En fait, la réponse électrique de la cellule  $\beta$  n'est plus corrélée aux niveaux de

calcium. Par conséquent, le système dans ce cas pourrait refléter une pathologie associée à la régulation du glucose.

- La figure 2.5 montre l'évolution temporelle du potentiel de la membrane, de la concentration de calcium et le portrait de phase pour  $q_1 = q_2 = 0,99$ ,  $q_3 = 1$  et  $\eta = \frac{3}{4}$ .

Les autres paramètres sont :  $a = \frac{1}{4}$ ,  $\mu = \frac{3}{2}$ ,  $\beta = 4$ ,  $\mu_\beta = -0.954$ ,  $\sigma = 0,0025$ .

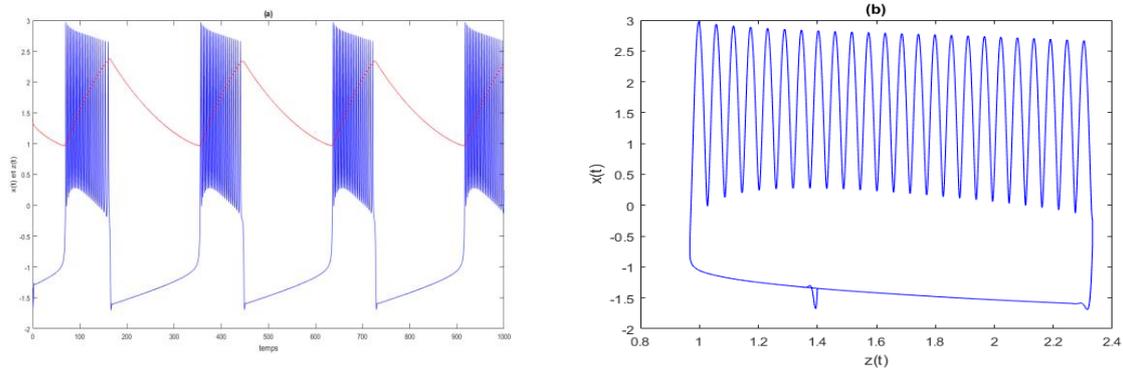


Figure 2.5 – Évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$  et la concentration de calcium  $z(t)$  en (a) et (b) portrait de phase, pour  $q_1 = q_2 = 0,99$ ,  $q_3 = 1$  et  $\eta = \frac{3}{4}$ .

On observe des paquets d'impulsion périodique présenté par le système. En fait, le sous-système rapide génère des potentiels d'action pendant la phase active de la rafale. À la figure 2.5 (b), une seule branche est oscillante. L'activité électrique oscillatoire fractionnaire dans ce cas est semblable à celle du modèle standard (2.1). Cela prouve une fois de plus que les modèles différentiels à ordre entier constituent un cas particulier de modèles différentiels à ordre fractionnaire.

- La figure (2.6) présente les évolutions temporelles du potentiel de la membrane, de la concentration de calcium et le portrait de phase pour  $q_1 = q_2 = 0,99$ ,  $q_3 = 1$  et  $\eta = 1$ . Les autres paramètres sont :  $a = \frac{1}{4}$ ,  $\mu = \frac{3}{2}$ ,  $\beta = 4$ ,  $\mu_\beta = -0.954$ ,  $\sigma = 0,0025$ .

On observe des décharges continues. Le système évolue avec une dynamique rapide. Le schéma observé à la figure 2.6 (b) peut être assimilé au modèle de rafale parabolique [21].

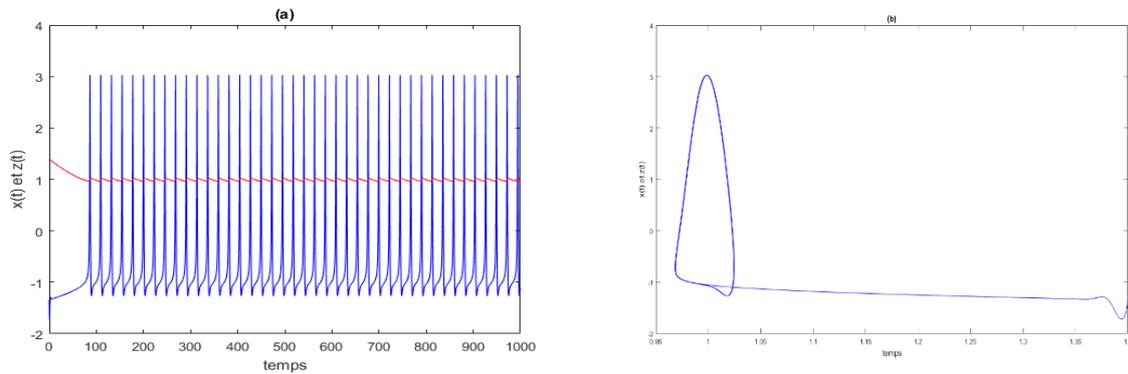
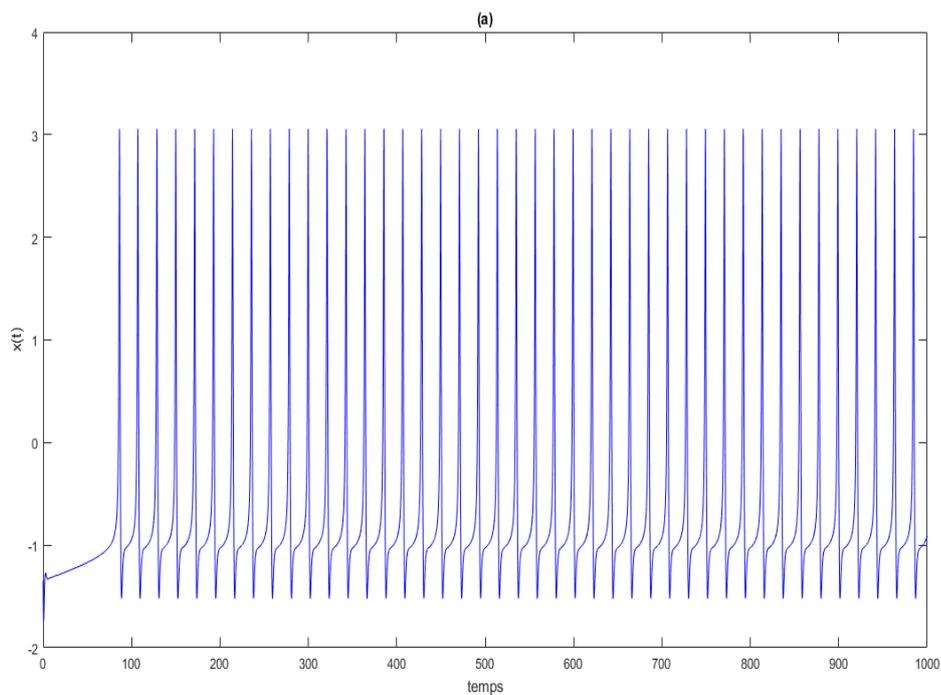


Figure 2.6 – Évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$  et la concentration de calcium  $z(t)$  en (a), le portrait de phase en (b) ; pour  $q_1 = q_2 = 0,99$ ,  $q_3 = 1$  et  $\eta = 1$ .

- pour certaines valeurs des ordres fractionnaires  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  ; le système fractionnaire est considéré comme rapide ou lent et l'activité électrique serait différente de celle du système classique. Les valeurs des paramètres étant  $a = \frac{1}{4}$ ,  $\mu = \frac{3}{2}$ ,  $\beta = 4$ ,  $\mu_\beta = -0.954$ ,  $\sigma = 0,0025$  et  $\eta = 1$ . Ces observations sont données par les figures suivantes :



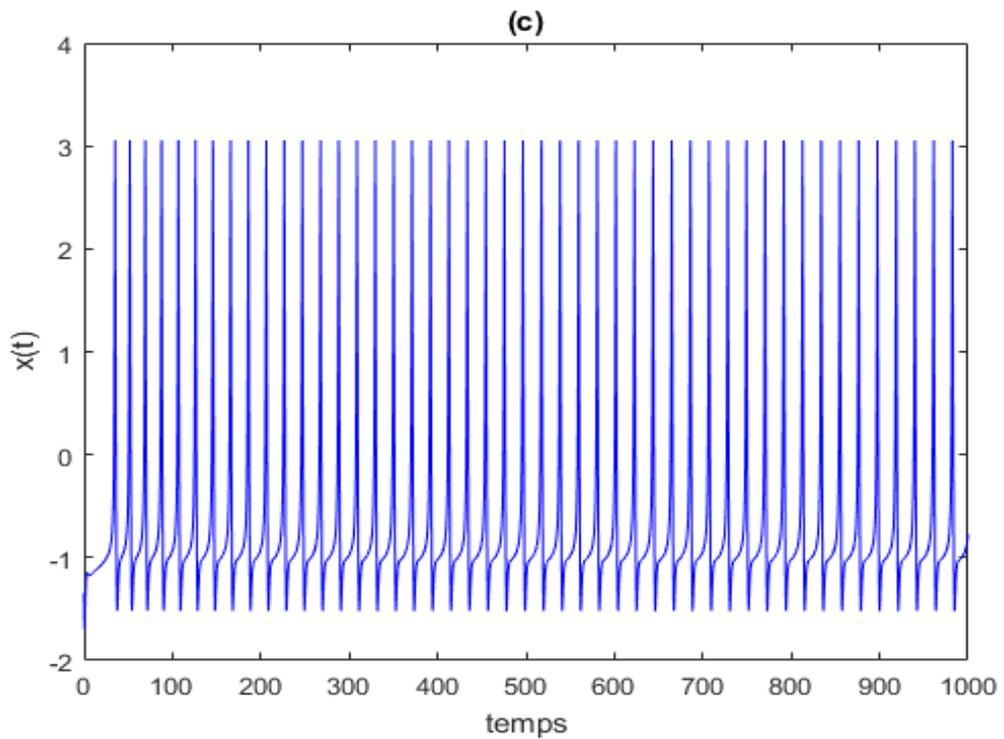
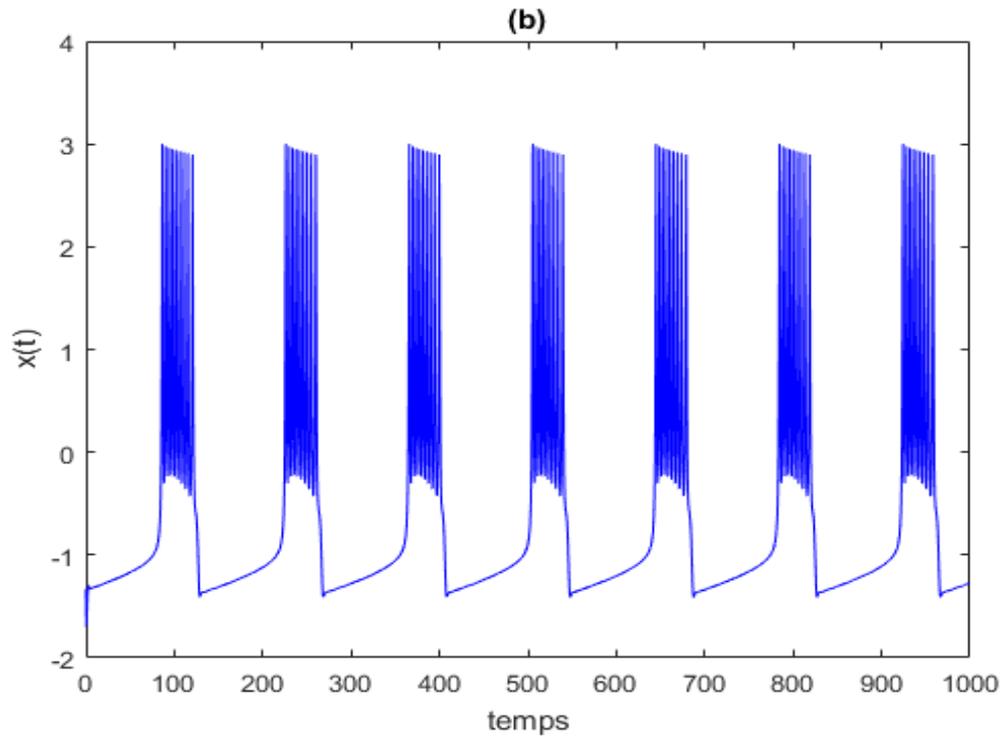


Figure 2.7 – Évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$  pour (a)  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$  ;  
 (b)  $q_1 = q_2 = 0,98$ ,  $q_3 = 1$  ; (c)  $q_1 = q_2 = 1$ ,  $q_3 = 0,97$

Selon le modèle classique de Pernarowski (2.1), pour  $\eta = 1$  l'activité électrique doit prendre la forme de pics [voir la figure 2.2 (c) rappelée pour plus de clarté à la figure 2.7 (a)]. Cependant, comme on le voit sur la figure 2.7 (b) on observe plutôt les rafales. En effet la dynamique de décharge correspondant à  $\eta = 1$  dans le modèle classique de Pernarowski figure 2.7 (a) se retrouve à la figure 2.7 (c). Ensuite, le sous-système rapide rendrait plus compte de la génération des pics. Par conséquent, les hypothèses de la différenciation d'ordre fractionnaire modifieront significativement l'activité électrique si les paramètres de simulation restent ceux de [17].

### **2.3.3. Effet du changement d'ordre de dérivées fractionnaires sur la Dynamique du sous-système rapide de Pernarowski**

Certains résultats sont présentés à la figure 2.8 pour les valeurs des paramètres  $\eta = 1$ ,  $q_3 = 1$ ,  $q_1 = q_2$  avec  $0.98 \leq q_1 \leq 0.985$ .

Comme on peut le voir sur la figure (2.8) (a) - (g), le nombre de pics par rafale augmente de  $n$  à  $n+1$  à chaque fois. Comme indiqué dans [22]-[24], le sous-système lent agit indépendamment comme une fonction de forçage pour le sous-système rapide. Ce comportement donne lieu à une dynamique non périodique dans le système global, qui peut également être considérée comme une dynamique chaotique [23]. La transition observée à  $n$  à partir de  $n+1$  pics pour les valeurs de l'ordre fractionnaire dont la différence est de l'ordre de  $\frac{1}{1000}$ , est presque similaire à la sensibilité des conditions initiales observées dans les systèmes chaotiques. On peut noter que la phase silencieuse entre deux rafales augmente selon la dérivée fractionnaire. Il en est de même du nombre de rafale pour le même temps de simulation. Enfin, il est observé pour chaque rafale un pic isolé des autres pics.

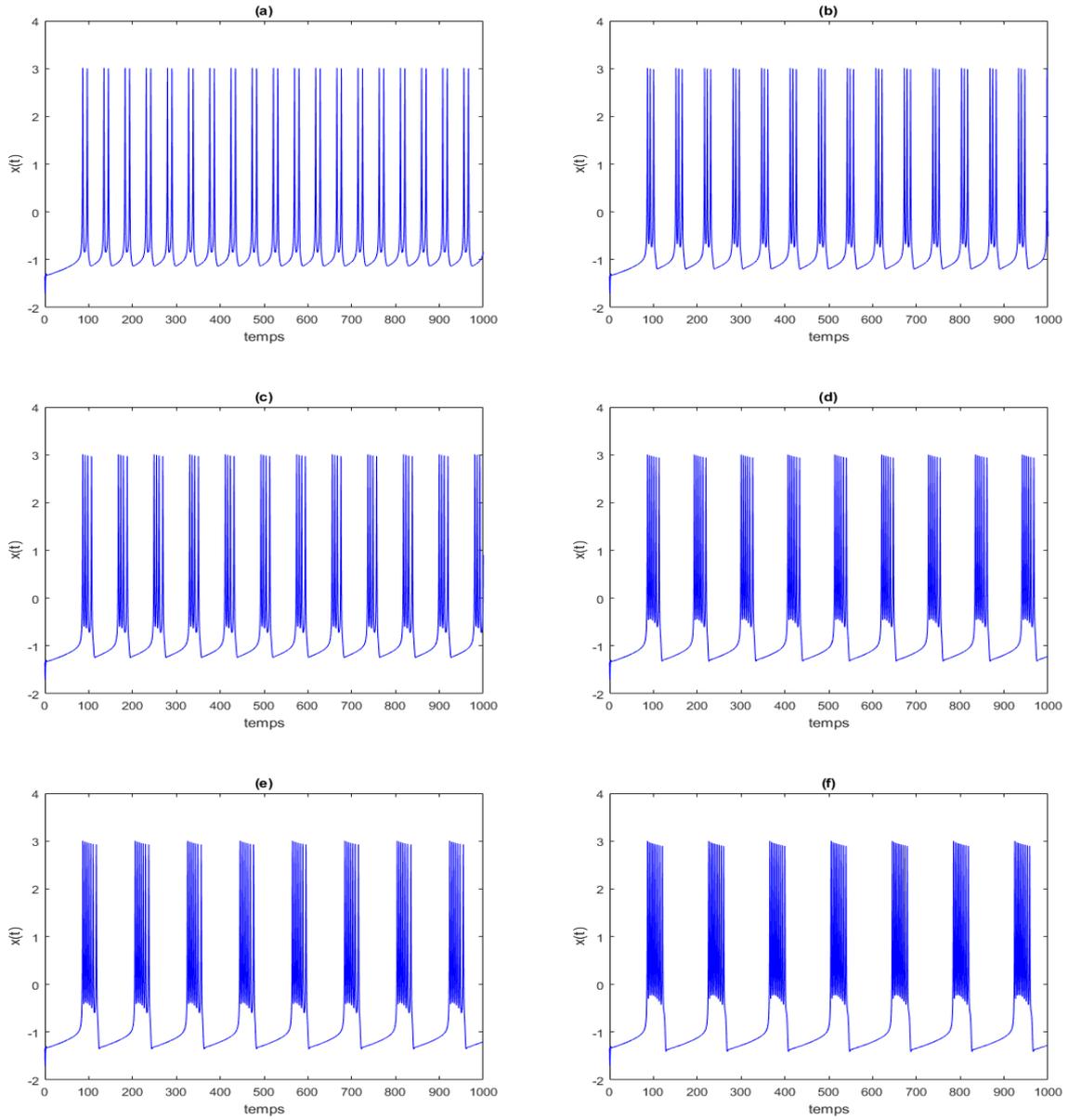


Figure 2.8 – Contrôle du nombre des pics par rafale par ordre fractionnaire dans l' évolution temporelle du potentiel de la membrane  $x(t)$  (a)  $q_1 = q_2 = 0.985$  ; (b)  $q_1 = q_2 = 0,984$  ; (c)  $q_1 = q_2 = 0,9834$  ; (d)  $q_1 = q_2 = 0,9825$  ; (e)  $q_1 = q_2 = 0,982$  ; (f)  $q_1 = q_2 = 0,9815$  ; (g)  $q_1 = q_2 = 0,98$  .

## 2.4 Conclusion

Au terme de ce chapitre qui consistait à étudier le comportement dynamique des deux modèles de Pernarowski (classique et fractionnaire). Nous avons étudié numériquement le comportement dynamique des systèmes décrivant la régulation du glucose avec de l'insuline dans les cellules  $\beta$  des îlots de Langerhans. On a observé une bistabilité de la membrane de la cellule en faisant varier le paramètre rapide. Nous avons montré que le système d'ordre

fractionnaire fournit de nouveaux comportements dynamiques par rapport à ceux du système classique. La synchronisation de deux cellules sera présentée dans le chapitre précédent.

# Chapitre 3 : Contrôle et synchronisation des cellules $\beta$

## 1. Introduction

Les cellules  $\beta$  du pancréas jouent un rôle vital dans la synthèse de l'insuline. Une carence en production d'insuline due aux cellules  $\beta$  au-delà d'un certain seuil entraîne le diabète [25]. Il est important de noter que le fonctionnement des cellules  $\beta$  du pancréas n'est pas isolé. Elles sont regroupées dans les îlots de Langerhans pour travailler ensemble sous forme de synchronisation afin de libérer l'insuline via des voies de communication [26-28].

Plus particulièrement, les cellules  $\beta$  du pancréas présentent une activité électrique, des bouffées d'oscillations électriques qui constituent le principal mécanisme de la sécrétion d'insuline [29,30]. Il est bien connu que les oscillations électriques peuvent être observé non pas seulement sur les cellules  $\beta$  du pancréas, mais également dans un large éventail de nerfs et de cellules endocrines, ce qui constitue probablement l'un des schémas les plus importants et distinctifs des comportements dynamiques des cellules [27]. D'un point de vue biologique, les bouffées d'oscillations électriques tel des bursts ou des spikes sont caractérisés par des oscillations périodiques du potentiel membranaire dans une cellule  $\beta$ , constituées d'une phase active pendant laquelle le potentiel de membrane subit des oscillations rapides et d'une phase silencieuse pendant laquelle le potentiel de membrane varie lentement [28].

Bien que les mécanismes sous-jacents à la dynamique des cellules  $\beta$  aient été largement étudiés à l'aide de modèles mathématiques d'ordre entier [31-37], on ne sait peu sur les modèles de cellules  $\beta$  du pancréas d'ordre fractionnaire et leur synchronisation. La théorie du calcul fractionnaire, qui est une généralisation du calcul traditionnel en ordre entier, a récemment attiré l'attention de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie [38-43]. Les modèles d'ordre fractionnaire préservent les propriétés héréditaires, c'est-à-dire la mémoire, de divers systèmes dynamiques. En outre, un modèle d'ordre fractionnaire introduit un degré de liberté supplémentaire. Ces deux caractéristiques ont démontré la capacité à obtenir des résultats plus précis que l'analyse avec d'ordre entier dans de nombreux domaines scientifiques tels que les systèmes de contrôle [44], la conception de circuits [43], la cryptographie [45], la dynamique cachée [46-50], l'économie [51], communications [52], botanique [53] et ainsi de suite. Ils ont fourni une motivation dans la modélisation des systèmes biologiques [54-60]. Par exemple,

dans [58], il a été démontré qu'un modèle de neurone d'ordre fractionnaire est capable de produire des motifs de rupture abondants contrôlés par l'ordre fractionnaire, agissant comme paramètre clé du modèle. Une analyse mathématique d'un modèle de population biologique d'ordre fractionnaire, ainsi qu'une méthode asymptotique optimale par homotopie, est présentée dans [59]. Dans [60], une analyse de plusieurs modèles de tissus végétaux d'ordre fractionnaire est introduite à partir de réseaux électriques.

Depuis que Pecora et Carroll [61] ont proposé une méthode pour synchroniser deux systèmes dynamiques identiques d'ordre entier, la synchronisation de systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire a acquis une grande popularité dans l'étude de systèmes complexes [52,62,63]. Deux systèmes identiques couplés sont dits synchronisés lorsque les variables d'état des systèmes couplés deviennent égales de manière asymptotique. Ce type de synchronisation est appelé synchronisation complète [64]. Concernant les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire, de nombreuses techniques de synchronisation, telles que le contrôle actif [65], le contrôle en mode glissant [66], le contrôle adaptatif [67], la synchronisation adaptative [68], la synchronisation pour les dynamiques complexes [46-49], et etc. ont été proposés.

Motivée par ces discussions ci-dessus, la synchronisation entre deux modèles couplés de cellules  $\beta$  du pancréas d'ordre fractionnaire est analysée. Tout d'abord, nous allons présenter la synchronisation par un contrôle actif en utilisant l'algorithme numérique Grünwald-Letnikov, pour ensuite compléter notre étude avec la synchronisation parfaite. Pour ce faire, nous allons proposer un schéma de synchronisation pour le modèle de cellules  $\beta$  d'ordre fractionnaire basé sur le théorème de la valeur finale de la transformation de Laplace et la méthode de couplage unidirectionnel.

On observera deux scénarios de synchronisation qu'on va étudier. Dans le premier scénario, nous montrons comment synchroniser deux cellules  $\beta$  du pancréas d'ordre fractionnaire couplées, qui présentent des types distincts d'oscillations électriques. Ici, des ordres fractionnaires incommensurables non identiques et des conditions initiales sont définis pour le système d'entraînement de la cellule  $\beta$  maitresse et le système de réponse de la cellule  $\beta$  esclave, respectivement. Dans le deuxième scénario, nous montrerons qu'il est possible de provoquer la réactivation d'une cellule  $\beta$  inactive d'ordre fractionnaire lorsque son comportement est synchronisé avec une activité électrique en rafale générées par des cellules  $\beta$ . Cela pourrait être très utile dans d'autres études sur la façon de réactiver ou d'éveiller les cellules  $\beta$  au repos [69]. Dans les deux scénarios, nous évaluons la synchronisation par diagrammes de phase et l'évolution temporelle des signaux d'activité électrique en rafale, et

montrons comment cela dépend de la valeur du gain de synchronisation. Nous démontrons que les résultats numériques concordent raisonnablement avec l'analyse théorique.

## 2. Synchronisation de deux cellules $\beta$ .

Dans ce paragraphe, la synchronisation entre les modèles de cellules  $\beta$  du pancréas d'ordre fractionnaire, en considérant la méthode de couplage unidirectionnel sera étudiée. Le système de la cellule maitresse et le système de réponse (les systèmes des cellules esclaves) sont décrits par les équations différentielles d'ordre fractionnaire suivantes :

$$\begin{cases} D^{q_1} x_1(t) = f(x_1(t)) - y_1(t) - z_1(t) \\ D^{q_2} y_1(t) = g(x_1(t)) - y_1(t) \\ D^{q_3} x_1(t) = \varepsilon(h(x_1(t)) - z_1(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

Et

$$\begin{cases} D^{q_4} x_2(t) = f(x_2(t)) - y_2(t) - z_2(t) - K(x_2(t) - x_1(t)) \\ D^{q_5} y_2(t) = g(x_2(t)) - y_2(t) - K(y_2(t) - y_1(t)) \\ D^{q_6} z_2(t) = \varepsilon(h(x_2(t)) - z_2(t)) - K(z_2(t) - z_1(t)) \end{cases} \quad (3.2)$$

où les  $q_i$  et  $K$  sont respectivement les ordres fractionnaires et le gain de contrôle. En définissant les erreurs de synchronisation entre le système maitre et le système esclave comme :

$$e_1(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad e_2(t) = y_2(t) - y_1(t), \quad e_3(t) = z_2(t) - z_1(t),$$

$$p_1 = -\frac{a}{3} \quad p_2 = a\hat{x} \quad p_3 = (1 - a(\hat{x}^2 - \eta^2)) \quad p_4 = \left(1 - \frac{a}{3}\right) \quad p_5 = a\hat{x} \quad p_6 = -(2 + a(\hat{u}^2 - \eta^2)) \quad p_7 = \beta, \text{ et}$$

en fixant les constantes à

$$p_1 = -\frac{a}{3} \quad p_2 = a\hat{x} \quad p_3 = (1 - a(\hat{x}^2 - \eta^2)) \quad p_4 = \left(1 - \frac{a}{3}\right) \quad p_5 = a\hat{x} \quad p_6 = -(2 + a(\hat{x}^2 - \eta^2)) \quad p_7 = \beta, \text{ le}$$

système d'erreur du schéma de synchronisation (3.1) et (3.2) est donné par la relation (3.3) :

$$\begin{cases} D^q e_1(t) = p_1(x_2^3 - x_1^3) + p_2(x_2^2 - x_1^2) + p_3 e_1(t) - e_2(t) - e_3(t) - K e_1(t) \\ D^q e_2(t) = p_4(x_2^3 - x_1^3) + p_5(x_2^2 - x_1^2) + p_6 e_1(t) - e_2(t) - K e_2(t) \\ D^q e_3(t) = \varepsilon(p_7(e_1(t)) - e_3(t)) - K e_3(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

En prenant la transformation de Laplace des deux côtés de (3.3) on a :

$$E_i(s) = L\{e_i(t)\}, (i = 1, 2, 3) \quad (3.4)$$

En appliquant :

$$L\left\{\frac{d^q e_i(t)}{dt^q}\right\} = s^q E_i(s) - s^{q-1} e_i(0), (i = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

On obtient donc :

$$s^q E_1(s) - s^{q-1} e_1(0) = L\{p_1(x_2^3 - x_1^3) + p_2(x_2^2 - x_1^2)\} + p_3 E_1(s) - E_2(s) - E_3(s) - KE_1(s)$$

$$s^q E_2(s) - s^{q-1} e_2(0) = L\{p_4(x_2^3 - x_1^3) + p_5(x_2^2 - x_1^2)\} + p_6 E_1(s) - E_2(s) - E_3(s) - KE_2(s)$$

$$s^q E_3(s) - s^{q-1} e_3(0) = \varepsilon(p_7 E_1(s) - E_3(s)) - KE_3(s) \quad (3.6)$$

On peut réécrire l'équation (3.6) :

$$E_1(s) = \frac{L\{p_1(x_2^3 - x_1^3) + p_2(x_2^2 - x_1^2)\}}{s^q + K - p_3} - \frac{E_2(s)}{s^q + K - p_3} - \frac{E_3(s)}{s^q + K - p_3} + \frac{s^{q-1} e_1(0)}{s^q + K - p_3}$$

$$E_2(s) = \frac{L\{p_4(x_2^3 - x_1^3) + p_5(x_2^2 - x_1^2)\}}{s^q + 1 + K} + \frac{p_6 E_1(s)}{s^q + 1 + K} + \frac{s^{q-1} e_2(0)}{s^q + 1 + K}$$

$$E_3(s) = \frac{\varepsilon p_7 E_1(s)}{s^q + \varepsilon + K} + \frac{s^{q-1} e_3(0)}{s^q + \varepsilon + K} \quad (3.7)$$

Par le théorème de la transformation de Laplace [70], on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_1(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{sL\{p_1(x_2^3 - x_1^3) + p_2(x_2^2 - x_1^2)\}}{s^q + K - p_3} - \frac{sE_2(s)}{s^q + K - p_3} - \frac{sE_3(s)}{s^q + K - p_3} + \frac{s^q e_1(0)}{s^q + K - p_3} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sL\{p_1(x_2^3 - x_1^3) + p_2(x_2^2 - x_1^2)\}}{K - p_3} - \frac{1}{K - p_3} \lim_{s \rightarrow 0} (e_2(t) + e_3(t)) \quad (3.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_2(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{sL \{ p_4 (x_2^3 - x_1^3) + p_5 (x_2^2 - x_1^2) \}}{s^q + K + 1} + \frac{p_6 s E_1(s)}{s^q + K + 1} + \frac{s^q e_2(0)}{s^q + K + 1} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sL \{ p_4 (x_2^3 - x_1^3) + p_5 (x_2^2 - x_1^2) \}}{K + 1} + \frac{p_6}{K + 1} \lim_{s \rightarrow 0} e_1(t) \quad (3.9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{\varepsilon p_7 E_1(s)}{s^q + \varepsilon + K} + \frac{s^{q-1} e_3(0)}{s^q + \varepsilon + K} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t) = \frac{1}{K + 1} \lim_{s \rightarrow 0} e_1(t) \quad (3.10)$$

D'après les équations (3.8) – (3.10), on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i(t) = 0 \quad (3.22)$$

Ainsi, la synchronisation entre le système maître (3.1) et le système esclave (3.2) est réalisée.

Pour simuler les résultats de cette synchronisation, deux codes MATLAB sont adjoints à l'annexe. Le premier permet la détection du chaos et le second permet de visualiser les états synchronisés des variables du modèle.

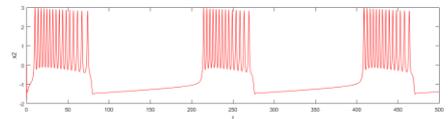
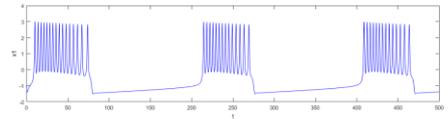
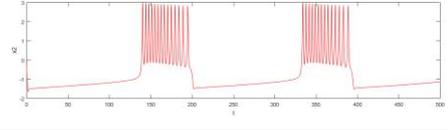
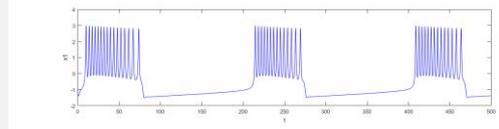
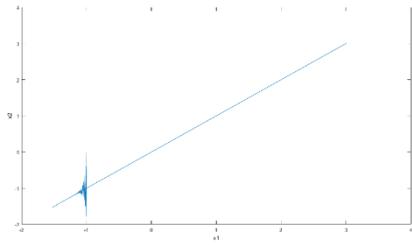
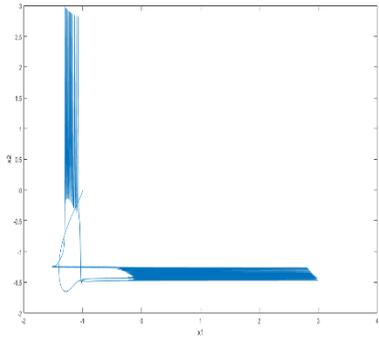
## 2.1. Analyse de la synchronisation

### 2.1.1. Synchronisation entre cellules actives.

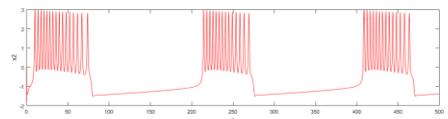
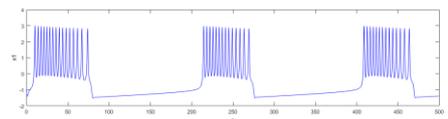
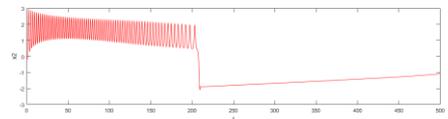
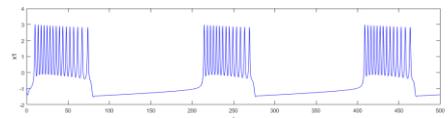
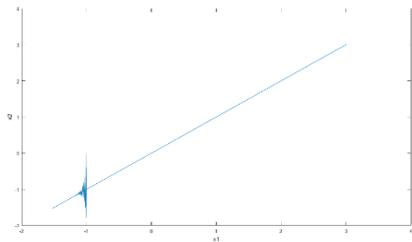
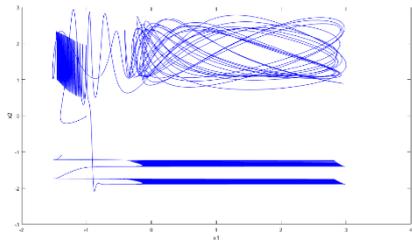
Il est donc possible d'observer deux scénarios :

Dans le scénario 1, deux cellules d'ordre fractionnaire couplées sont synchronisées, comme illustré à la figure 3.1.

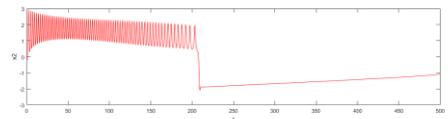
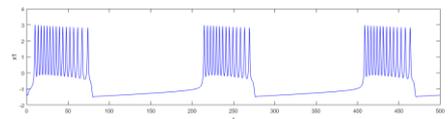
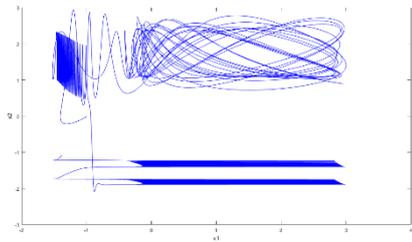
**(a)**



**(b)**



**(c)**



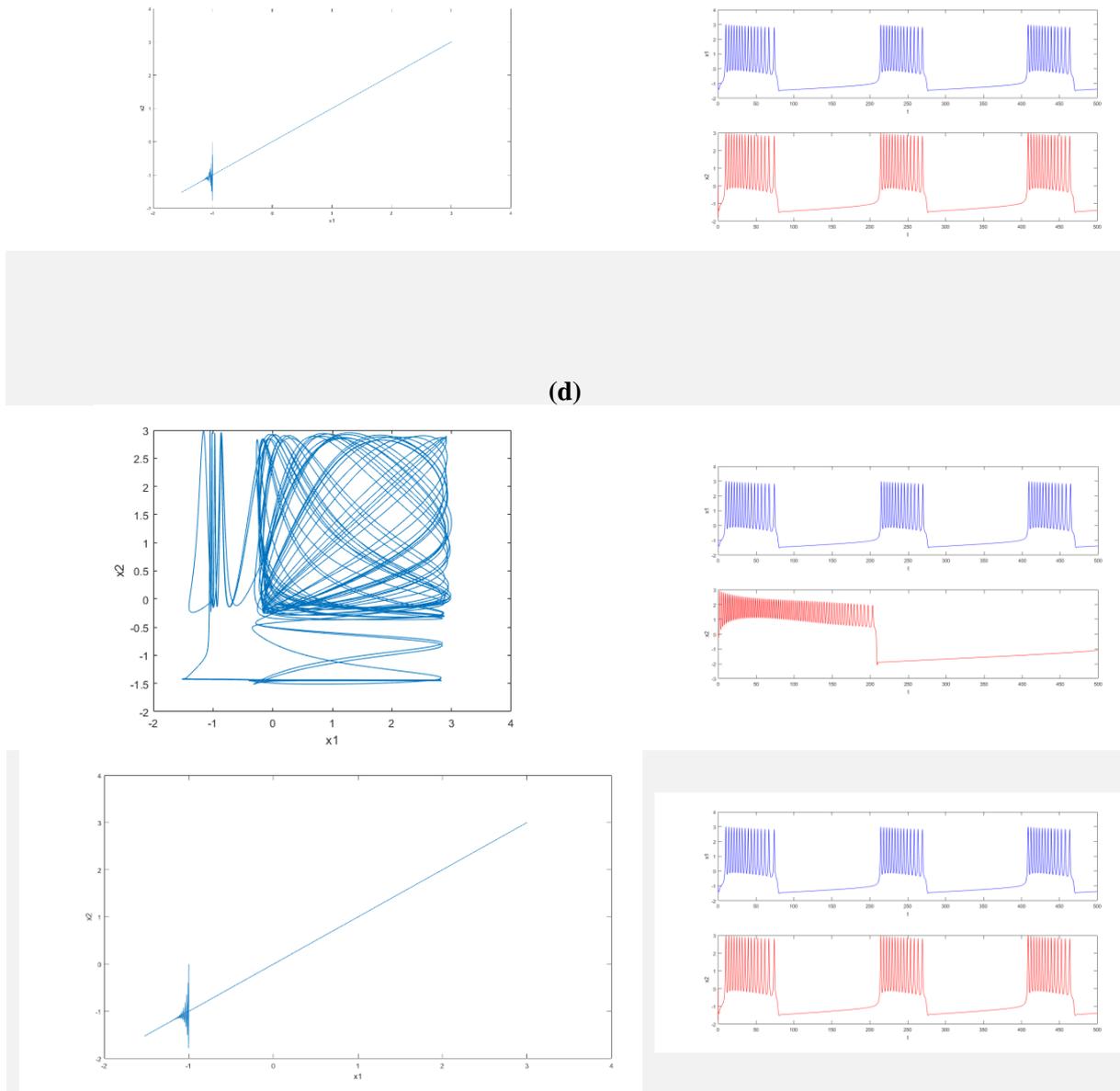


Figure 3.1 : Diagrammes de phase de  $x_1$  versus  $x_2$  (colonne de gauche) et signaux de potentiel membranaire pour les deux cellules d'ordre fractionnaire (colonne de droite) avec différents modèles de bouffées de potentiel d'action. États asynchrones et synchrones, après application du schéma de synchronisation proposé (3.1) et (3.2) pour : (a) deux bouffées de potentiel d'action à onde carrée ; (b) de bouffées de potentiel d'action à onde carrée et de bouffées de potentiel d'action parabolique ; (c) de bouffées de potentiel d'action à onde carrée et de bouffées de potentiel d'action conique ; (d) de bouffées de potentiel d'action à onde carrée et comportement silencieux.

Une cellule génère des bouffées de potentiel d'action avec des oscillations rapides, car ce type d'activité électrique est caractéristique d'un fonctionnement sain, et l'autre présente un

type d'oscillations électriques différent : des bouffées de potentiel d'action parabolique, bouffées de potentiel d'action conique ou d'autres bouffées de potentiel d'action à onde carrée, mais dans des conditions initiales différentes.

- La **figure 3.1.a** montre la synchronisation pour le premier cas où les deux cellules génèrent des bouffées de potentiel d'action ayant la forme de signaux carrés avec  $q_i = 0,99$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , et pour conditions initiales  $(x_1(0) = -1, y_1(0) = 0, z_1(0) = 1)$  pour le système de la cellule maitresse et  $(x_2(0) = 0, y_2(0) = 0, z_2(0) = 1)$  pour le système de cellule esclave. Dans la partie supérieure de cette figure, on peut observer l'évolution temporelle du potentiel membranaire  $x_1$  et  $x_2$ , lorsqu'ils ne sont pas synchronisés. Le diagramme de phase de  $x_1$  par rapport à  $x_2$  confirme le résultat en ce sens qu'on observe évolution chaotique. D'autre part, la partie inférieure de la figure 3.1.a affiche une synchronisation raisonnable pour les deux cellules générant des signaux carrés. Le comportement synchrone entre  $x_1$  et  $x_2$  est démontré par une ligne droite sur le diagramme de phase.

- Pour le second cas, la synchronisation entre une cellule générant des bouffées de potentiel d'action ( $q_1 = q_2 = q_3 = 0,99$   $x_1(0) = -1, y_1(0) = 0, z_1(0) = 1$ ), alors qu'une autre cellule présentant des bouffées de potentiel d'action parabolique ( $q_4 = 0,98$   $q_5 = 0,97$   $q_6 = 0,99$   $(u_2(0) = 0, w_2(0) = 0, c_2(0) = 1)$ ), est montré à la figure 3.1.b. Comme dans le cas précédent, les comportements asynchrone et synchrone des potentiels membranaires  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont illustrés par le diagramme de phase et l'évolution temporelle.

- La figure 3.1c montre le troisième cas où une cellule à ordre fractionnaire produisant des bouffées de potentiel d'action avec des signaux carrés, avec les  $q_1 = q_2 = q_3 = 0,99$ ,  $x_1(0) = -1, y_1(0) = 0, z_1(0) = 1, \mu_\beta = -0,954$  est synchronisé avec une autre cellule d'ordre fractionnaire montrant des bouffées de potentiel d'action conique ( $q_4 = q_5 = q_6 = 0,99$  et  $x_2(0) = -1$   $y_2(0) = 0$   $z_2(0) = 1$   $\mu_\beta = -1,5$ ).

### 2.1.2. Synchronisation des cellules actives et inactives

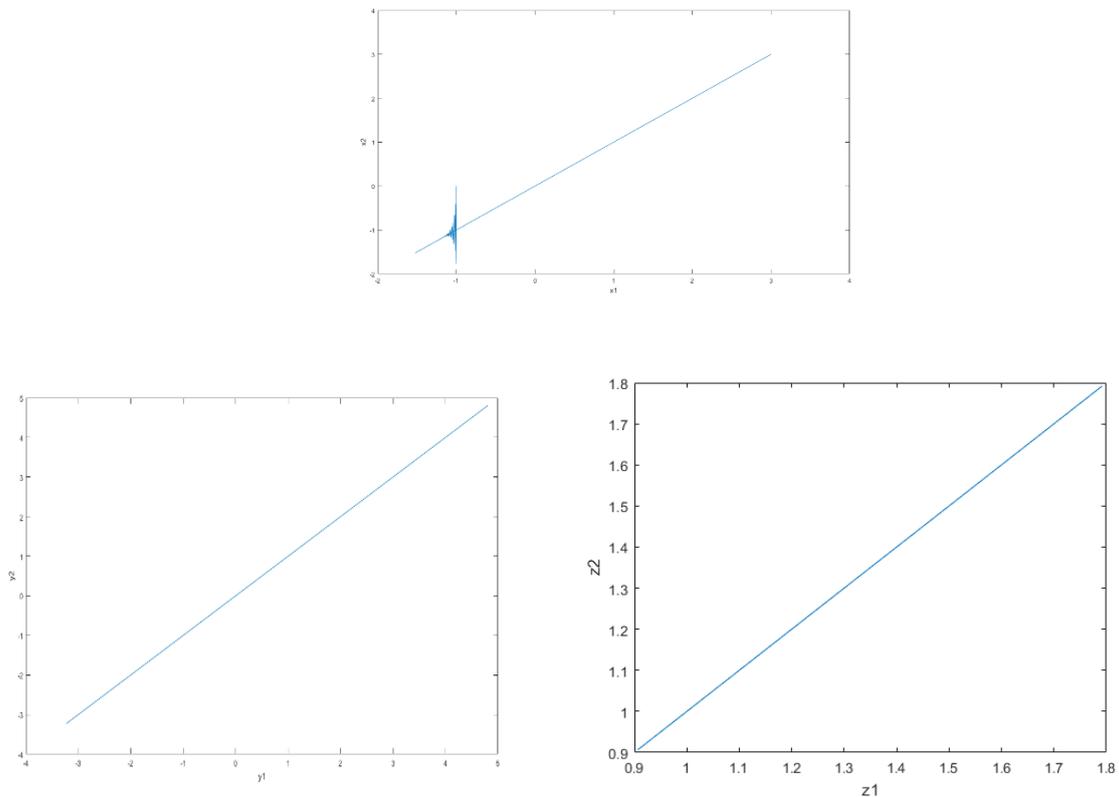
Dans le scénario 2, la synchronisation entre les cellules d'ordre fractionnaire actives et inactives est analysée. Réactiver ou réveiller les cellules au repos peut être intéressant d'un point

de vue biologique. On constate qu'en utilisant un gain de commande approprié dans les schémas de synchronisation proposés (3.1) et (3.2), le comportement silencieux de la cellule inactive se synchronise bien avec des bouffées de potentiel d'action à signaux carrés, comme le montre la **figure 2d**. Ici, les conditions d'ordre fractionnaire et les conditions initiales sont définies comme suit :  $(q_1 = q_2 = q_3 = 0,99 \quad x_1(0) = -1, y_1(0) = 0, z_1(0) = 1)$  ; et  $(q_4 = q_5 = q_6 = 0,99$  et  $x_2(0) = -1 \quad y_2(0) = 0 \quad z_2(0) = 1 \quad \mu_\beta = -1,5)$ .

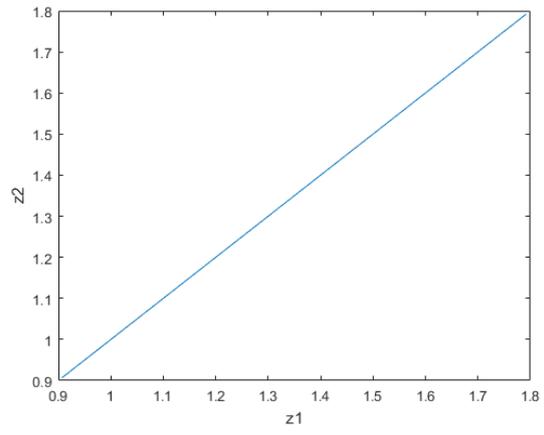
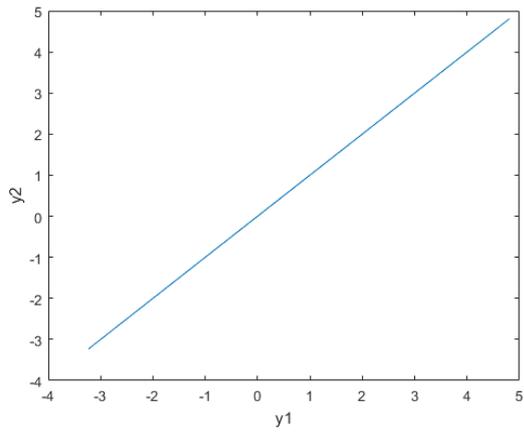
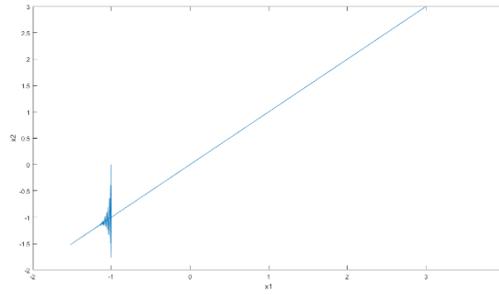
### 2.1.3. Diagramme de phase des variables d'état.

Enfin, les phénomènes de synchronisation des potentiels membranaires  $x_1(t)$  par rapport à  $x_2(t)$ , les tensions des canaux d'activation potassique  $y_1(t)$  par rapport à  $y_2(t)$  et la concentration en substances régulant les bursts  $z_1(t)$  par rapport à  $z_2(t)$ , sont représentés par les diagrammes de phase de la **figure 3.2**.

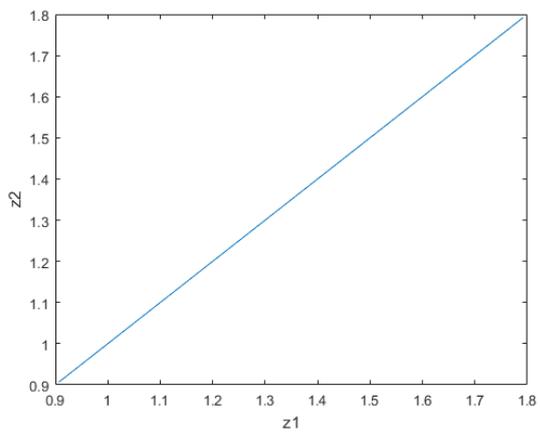
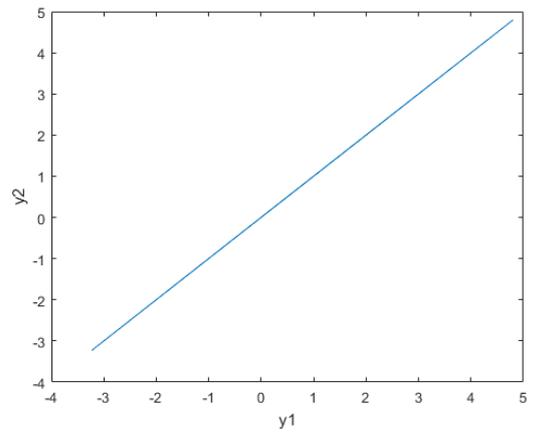
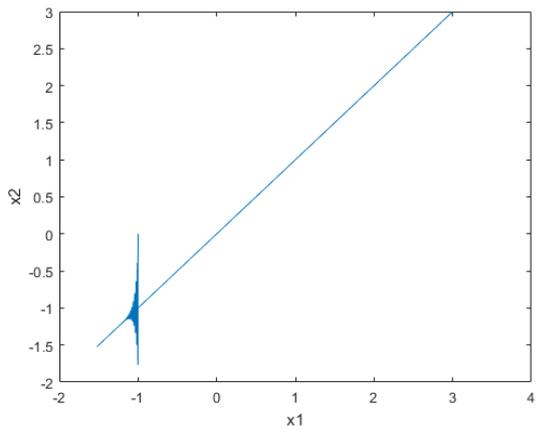
(a)



(b)



(c)



(d)

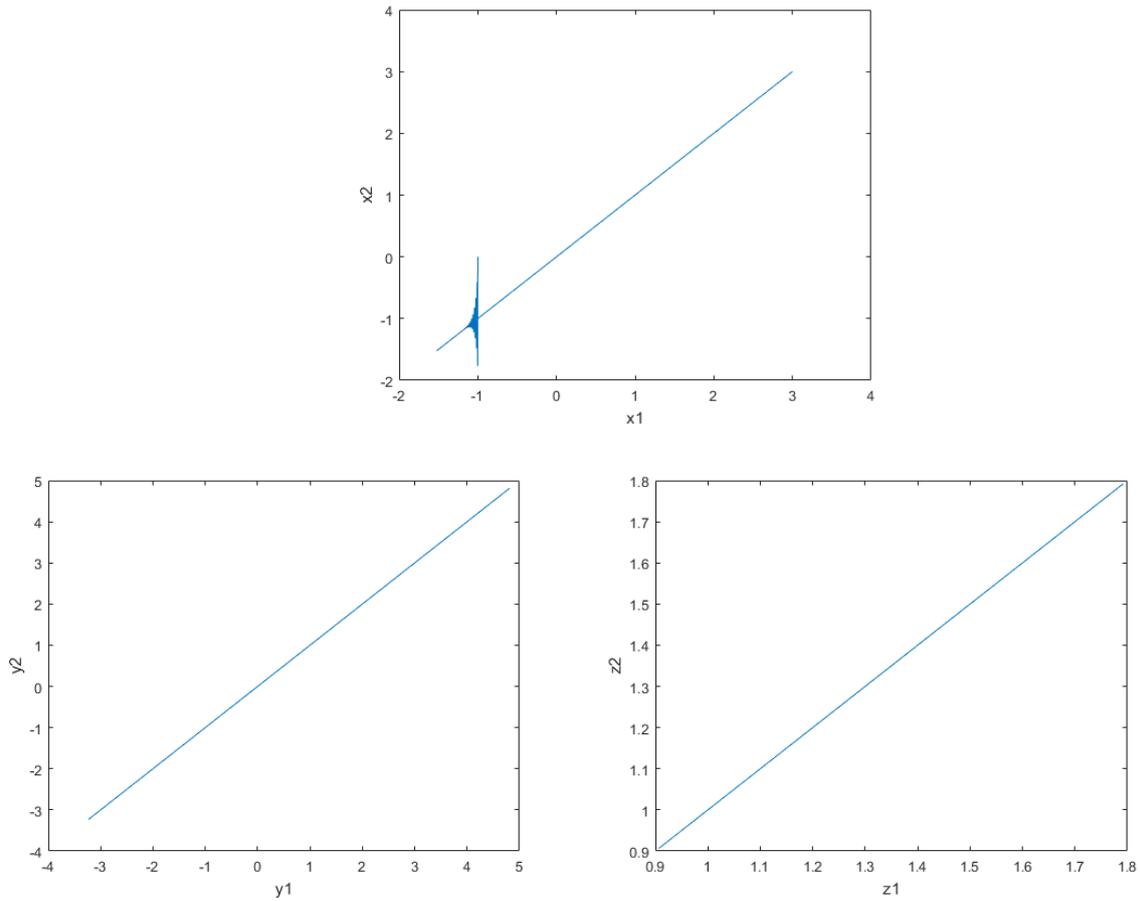


Figure 3.2 : Diagrammes de phase des variables d'état.

Comme on peut le voir sur les figures 3a et 3d, une synchronisation complète est obtenue pour les trois variables d'état du modèle de cellules d'ordre fractionnaire (7), présentant différents types de rafales. Le gain de contrôle de compensation  $K$  concernant l'erreur de synchronisation entre  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  est représenté à la figure 4, où l'erreur disparaît pour des valeurs  $K > 1,30$ .

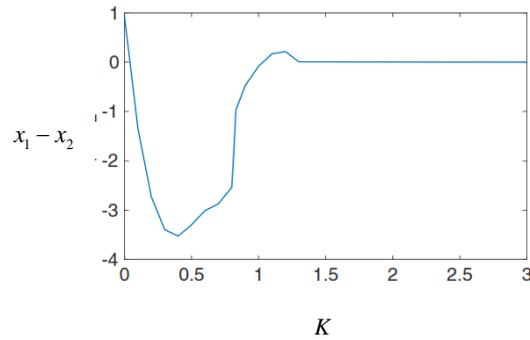


Figure : 3.3 : Dépendance du gain du contrôle de synchronisation sur l'erreur entre  $x_1$  et  $x_2$  avec des bouffées de potentiel d'action à signaux carrés générées des cellules d'ordre fractionnaire et l'autre, des bouffées de potentiel d'action signaux paraboliques.

### 3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la synchronisation de deux cellules  $\beta$  fractionnaires. Pour ce faire, nous avons utilisé comme méthode de synchronisation, la méthode par couplage unidirectionnelle. Ce schéma de synchronisation nous a suggéré de faire recours à la transformée de Laplace et l'approximation de Grünwald-Letnikov. Nous avons découvert qu'il était possible de réveiller les cellules inactives en les synchronisant avec les cellules actives pour un paramètre de contrôle convenablement choisi. Enfin nous nous sommes rendus compte que la synchronisation à variable de couplage unidimensionnelle était pertinente pour synchroniser les cellules  $\beta$ .

# Implications pédagogiques

En ce qui concerne les implications pédagogiques, l'étude du contrôle et de la synchronisation des cellules  $\beta$ , nous a permis de pratiquer de l'autodidactie pour pouvoir maîtriser la notion de dérivés fractionnaires et de systèmes chaotiques. Nous avons donc dû multiplier les stratégies pour nous contourner certaines difficultés, comme avoir recouru à l'encadreur qui vérifiait d'abord si on avait effectué des recherches en nous interrogeant de façon à nous amener donc à comprendre lesdites notions et leurs applications. L'encadreur en fait nous amenait à comprendre par nous-même. Cette expérience fut passionnante et nous nous disons que pour rendre l'école des enfants plus agréable, il faudrait peut-être leur encourager à faire dans de l'autodidactie pour leur rendre autonome dès le bas âge. Toutefois, nous ne disons pas que l'enfant doit pas s'abandonner à lui-même mais plutôt garder la médiation de son encadreur. Aussi nous encourageons surtout les parents à mettre à la disposition des enfants les fournitures scolaires nécessaire à la recherche. C'est en ce sens que nous, jugeons de l'importance de l'autodidactie.

Le modèle mathématique de Pernarowski de la cellule  $\beta$ , outre le système de d'Otto Rössler constitue un exemple d'application directe qu'on pourrait associer lors de la conception d'une leçon sur la notion de dérivés fractionnaires. Hélas, cette notion n'est enseignée que dans les niveaux universitaires élevés. Mais on peut toutefois citer son analogie en classe de Terminale scientifique. En effet, la physique facilite l'enseignement de la mathématique. Ceci se vérifie en classe de terminale lorsque le professeur de Physique introduit la notion d'équations différentielles en cinématique car sa progression le lui impose. Pourtant, dans la progression du professeur de mathématique, il entrevoit aborder la notion vers la fin d'année notamment au mois d'avril. Certains professeurs de mathématique sont souvent étonnés de constater que l'enseignement des équations différentiels passe avec une coopération facile des élèves qui ne ménagent alors aucun effort pour intégrer ladite notion. Ceci parce qu'à cette date-là, les élèves peuvent d'avantage, prolonger leur réflexion en l'orientant dans le pouvoir de l'imaginaire.

A la fin de notre étude, nous avons généré des codes MATLAB qui pourrait qui peuvent à leur tour générer les circuits électriques en cliquant sur Simulink ou Pspice et implémenter électriquement des micro-équipements pour l'électroceutique, entendons par là l'électronique

de la médecine. Ceci est une source de motivation pour la jeunesse créatrice à l'exemple de l'ingénieur camerounais ARTHUR ZANG dont l'actualité récente mentionne l'invention par ce dernier du CARDIOPAD, machine qui contrôle le rythme cardiaque.

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons mené une étude fractionnaire du contrôle et de la synchronisation des cellules  $\beta$ . Nous avons dans le cadre du premier chapitre, abordé la notion de dérivation fractionnaire dans sa définition suivant plusieurs approches à savoir, les approches de Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville et Caputo par la suite, une solution numérique générale d'une équation différentielle fractionnaire a été proposée. C'est toujours dans le cadre de ce même chapitre que nous avons fait un exposé sur les systèmes chaotiques.

Au deuxième chapitre, nous avons résolu les équations du système obtenu sur Matlab pour le cas classique (ordre de dérivée entier) et pour le cas fractionnaire (ordre de dérivée non entier). Les résultats obtenus décrivent la façon d'obtenir un comportement chaotique dans les modèles fractionnaires excitables utilisant des techniques numériques assez standard avec pour paramètres de contrôle les ordres des dérivées et que l'oscillation d'un système excitable est une alternance entre les phases actives et les phases silencieuses. C'est ce qui nous a permis de comprendre l'activité électrique qui se développe lors de l'exocytose des granules d'insuline des îlots de Langerhans pour une cellule  $\beta$ . En fait l'étude des propriétés d'oscillations régulières et irrégulières peut être fructueuse pour des idées fondamentales sur la dynamique spatio-temporelle et le chaos.

Au troisième chapitre, nous avons mené une étude fractionnaire du contrôle et de la synchronisation des cellules  $\beta$ . Nous avons utilisé une méthode de couplage unidirectionnel moyennant pour la résolution numérique du système l'algorithme de Grünwald-Letnikov. On a observé que pour un bon paramètre de contrôle  $K$ , les erreurs de synchronisation disparaissaient. On se retrouvait avec une bonne synchronisation linéaire de deux cellules  $\beta$  du pancréas.

Perspectives : Dans un futur proche, il sera opportun de pousser cette étude pour un cluster de cellules  $\beta$  du pancréas. Il sera donc possible d'améliorer d'avantages la qualité des machines électroniques utilisées en médecine.

# Références bibliographiques

- [1] Julien Papin, Thèse présentée en vue de l'obtention du grade légal de docteur en Sciences de la Vie et de la Santé, Biologie cellulaire et Physiopathologie : Bases Moléculaires des défauts sécrétoires des cellules pancréatiques lors de la glucotoxicité, université de bordeaux, Décembre 2009
- [2] M. Derouich, A. Boutayeb. The effect of physical exercise on the dynamics of glucose and insulin. *J. Biomech.* 35, 911-917 (2002)
- [3] Bertrand Bodo, Alain Mvogo, Saverio Morfu. Fractional dynamical behavior of electrical activity in a model of pancreatic  $\beta$ -cells. *Chaos, Solitons and Fractals* 102, 426-432. (2017).
- [4] D. Jun, Z. Guang-jun, X. Yong, Y. Hong, W. Jue. Dynamic behavior analysis of fractional-order HindmarshRose neuronal model. *Cogn. Neurodyn.* 8, 167-175 (2014).
- [5] Zhang S, The Existence of a Positive Solution for a Nonlinear Fractional Differential Equation, *J.Math.Anal.Appl.*, **252**, 804-812 (2000).
- [6] Yang C,Zhai C.B, Uniqueness of Positive Solutions for a Fractional Differential Equation Via a Fixed Point Theorem of a Sum Operator, *Elec.J.Diff.Eqs.*, **70**, 1-8 (2012).
- [7] Cafagna D., 2007, Fractional Calculus: A mathematical tool from the past for present engineers, *IEEE Industrial Electronics Magazine*1, 35–40.
- [8] Podlubny I., 2002, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5, 367–386
- [9] E. Cherrier. Estimation de l'état et des entrées inconnues pour une classe de systèmes non linéaires. Thèse de doctorat, 2006
- [10] N, Lorenz. E. the essence of Chaos. University of Washinton Press, 1993.
- [11] A. J. Michaels. « Digital chaotic Communications. » Thèse de Doctorat, Géorgie Institute of Technology, 2009
- [12] T. Yang. Impulsive Control theory. Srpinger Verlag, Lecture Notes in Control and Information Sciences Publishers, 2001.
- [13] Y. Moussa. « Elaboration d'Algorithmes de Masquage pour les systèmes de communication chaotique. » Thèse de Doctorat, Université Mentouri – Constantine, 2012

- [14] H. Zha. Chaos Synchronisation and its application to secure communication. Thèse de Doctorat, Université de Waterloo, Ontario, Canada, 2010.
- [15] Chay TR, Keizer J. Minimal model for membrane oscillations in the pancreatic beta-cell. *Biophys J*, 42(2) : 181-9. (1983)
- [16] Pernarowski M. Fast subsystem bifurcations in a slowly varying liénard system exhibiting bursting. *SIAM J Appl Math*, 58, 1667-87. (1998)
- [17] Pernarowski M. Fast and slow subsystems for a continuum model of bursting activity in the pancreatic islet. *SIAM J Appl Math*, 58, 1667-87
- [18] Slimani Dalila, Dérivation non entière : Application en traitement d'image, mémoire magister
- [19] Petras I. Fractional-order nonlinear systems : modeling, analysis and simulation series : nonlinear physical science. Springer, HEP. (2011)
- [20] Podlubny I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional différentiation, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5, 367-386. (2002)
- [21] Rinzel J. A formal classification of bursting mechanisms in excitable systems. In : *Proceedings of international congress of mathematicians*. California : Bekerley ; (1986)
- [22] Atwater I, Dawson CM, scott A, Eddlestone G, Rojas E. The nature of oscillatory behavior in electrical activity from pandreatic  $\beta$ -cells, 10, 100-107. (1980)
- [23] Terman D. Chaotic spikes arising from a model of bursting in excitable membranes, *SIAM J Appl Maths*, 51(5), 1418-50. (1986)
- [24] Ermentrout GB, Kopell N. Parabolic bursting in an excitable system coupled with a slow oscillation. *SIAM J Appl Maths*, 46, 233 – 53. (1986)
- [25]. H. Heydarinejad, H. Delavari, Fractional order back stepping sliding mode control for blood glucose regulation in type I diabetes patients, in *Theory and Applications of Non-integer Order Systems*, edited by A. Babiarz, A. Czornik, J. Klamka, M. Niezabitowski (Springer, 2017), pp. 187-202
- [26] A. Loppini, A. Capolupo, C. Cherubini, A. Gizzi, M. Bertolaso, S. Filippi, G. Vitiello, *Phys. Lett. A* 378, 3210 (2014)
- [27] G. Dupont, M. Falcke, V. Kirk, J. Sneyd, *Models of Calcium Signalling* (Springer, Switzerland, 2016)
- [28] G. de Vries, R.M. Miura, *SIAM J. Appl. Math.* 58, 607 (1998) 5. P. Meng, Q. Wang, Q. Lu, *Cogn. Neurodyn.* 7, 197 (2013) 6. MA. Ravier, P. Gilon, J.C. Henquin, *Diabetes* 48, 2374 (1999)
- [29] G. de Vries, R.M. Miura, *SIAM J. Appl. Math.* 58, 607 (1998) 5. P. Meng, Q. Wang, Q. Lu, *Cogn. Neurodyn.* 7, 197 (2013) 6. MA. Ravier, P. Gilon, J.C. Henquin, *Diabetes* 48, 2374 (1999)
- [30] G. Meng Q. Wang, Q. Lu, *Cogn. Neurodyn.* 7. 197 (2013)

- [31] MA. Ravier, P. Gilon J.C. Henquin, *Diabetes* 48, 2374 (1999)
- [32] D.K Guevara-Flores et al., Dynamical analysis of a beta cell biological system and its hardware realization, in *Nonlinear Systems, Design, Applications and Analysis*, edited by C. Volos (Nova, 2017), pp. 341-365
- [33] D.A. Striegel, M. Hara, V. Periwat, *PLoS Comput. Biol.* 11, e1004423 (2015)9.
- [34] N. Oliver, P. Georgiou, D. Johnston, C. Toumazou, *J. Diabetes Sci. Technol.* 3, 1419
- [35] J. Wang, S. Liu, X. Liu, *Chaos Soliton. Fract.* 68, 65 (2014)
- [36] M-F. Danca, W. Tang, Q. Wang, G. Chen, *Eur. Phys. J. B* 86, 79 (2013)
- [37] D. Ding, X. Qian, W. Hu, N. Wang, D. Liang, *Eur. Phys. J. Plus* 132, 447 (2017)
- [38] S. He, K. Sun, X. Mei, B. Yan, S. Xu, *Eur. Phys. J. Plus* 132, 36 (2017)
- [39] Y. Xu, K. Sun, S. He, L. Zhang, *Eur. Phys. J. Plus* 131, 186 (2016)
- [40] E. Zambrano-Serrano, J.M. Munoz-Pacheco, *Nonlinear Dyn.* 83, 1629 (2016)
- [41] E. Zambrano-Serrano, J.M. Munoz-Pacheco, E. Campos-Canton, *Int. J. Electron. Commun. (AEU)* 79, 43 (2017)
- [42] S. Ghasemi, A. Tabesh, J. Askari-Marnani, *IEEE Trans. Energy Convers.* 29, 780 (2014)
- [43] P. Muthukumar, P. Balasubramaniam, *Nonlinear Dyn.* 74, 1169 (2013)
- [44] V-T. Pham, A. Ouannas, C. Volos, T. Kapitaniak, *Int. J. Electron. Commun. (AE)* 86, 69 (2018)
- [45] V.-T. Pham, S. T. Kingni, C. Volos, S. Jafari, T. Kapitaniak, *Int. J. Electron. Commun. (AEU)* 78, 220 (2017)
- [46] A. Ouannas, X. Wang, V.-T. Pham, G. Grassi, T. Ziar, *Adv. Dier. Equ.* 35, 1 (2018)
- [47] X. Wang, A. Ouannas, V.-T. Pham, H. R. Abdolmohammadi, *Adv. Dier. Equ.* 20, 1 (2018)
- [48] D.V. Hoang, S.T. Kingni, V.-T. Pham, *Math. Probl. Eng.* 3927184, 1 (2017)
- [49] W-C. Chen, *Chaos Soliton. Fract.* 36, 1305 (2017)
- [50] A. Razminia, D. Baleanu, *J. Comput. Nonlinear Dyn.* 8, 031012 (2013)
- [51] I.S Jesus, J.A. Tenreiro-Machado, J. Boaventure-Cunha, *J. Vib. Control* 14, 1389 (2008)
- [52] E. Ahmed, HA. El-Saka, *Nonlinear Biomed. Phys.* 4, 1 (2010)
- [53] B. Bodo, A. Mvogo, S. Morfu, *Chaos Soliton. Fract.* 102, 426 (2017)
- [54] C. Ionescu, A. Lopes, D. Copota, J.A.T. Machado, J.H.T. Bates, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 51, 141 (2017)
- [55] A. Mvogo, G.H. Ben-Bolie, T.C. Kofane, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 48, 258 (2017)
- [56] WW. Teka, RK. Upadhyay, A. Mondal, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.* 56, 161 (2018)
- [57] S. Sarwar, M. A. Zahid, S. Iqbal, *Int. J. Biomath.* 9, 1650081 (2016)
- [58] A. AboBakr, L.A. Said, A.H. Madian, A.S. Elwakil, A.G. Radwan, *Int. J. Electron. Commun.* 80, 1 (2017)
- [59] L. Pecoras, T. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* 64, 821 (1990)
- [60] X. Yang, H. Liu, S. Li, *Adv. Dier. Equ.* 2017, 344 (2017)
- [61] P. Muthukumar, P. Balasubramaniam, K. Ratnavelu, *Int. J. Dyn. Control* 5, 115 (2017)
- [62] S. Acharyya, R.E. Amritkar, *Eur. Phys. J. Special Topics* 222, 939 (2013)
- [63] S. Bhalekar, *Eur. Phys. J. Special Topics* 223, 1495 (2014)
- [64] K. Rajagopal, A. Karthikeyan, A.K. Srinivasan, *Nonlinear Dyn.* 87, 2281 (2017)
- [65] R. Kengne, R. Tchitnga, A. Mezatio, A. Fomethé, G. Litak, *Eur. Phys. J. B* 90, 88 (2017)

- [66] S. Vaidyanathan, Eur. Phys. J. Special Topics 223, 1519 (2014)
- [67] M. Hara, J.L. Fowler, G.I. Bell, L.H. Philipson, Diabetes Metab. 42, 157 (2016)
- [68] A. Sherman, J. Rinze. Model for synchronization of pancreatic  $\beta$ -cells by gap junction coupling. Biophys. J. 59(3), 547-59 (1991).
- [69] B. Bodo, A. Mvogo, S. Morfu. Fractional dynamical behavior of electrical activity in a model of pancreatic  $\beta$ -cells. Chaos, Solitons and Fractals : [doi.org/10.1016/j.chaos.2017.04.036](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.04.036)
- [70] M. Pernarowski. Fast and slow subsystems for a continuum model of bursting activity in the pancreatic islet. SIAM J. Appl. Math. 58. 1667 – 1687 (1998).

# Annexe

Codes MATLAB du comportement chaotique des potentiels membranaires.

```
close all;
clear;
clc;
a=1/4;u=3/2;b=4;e=0.0025;n=3/4;ub=-0.954;ub0=-1.5;

T=500;
N=50000;
h=T/N;
t=0:h:T;

q1=0.99;q2=0.99;q3=0.99;
q4=0.99;q5=0.99;q6=0.99;

x1=zeros(length(t),1);
y1=zeros(length(t),1);
z1=zeros(length(t),1);
x2=zeros(length(t),1);
y2=zeros(length(t),1);
z2=zeros(length(t),1);

RSx1=zeros(1,length(t));
RSy1=zeros(1,length(t));
RSz1=zeros(1,length(t));
RSx2=zeros(1,length(t));
RSy2=zeros(1,length(t));
RSz2=zeros(1,length(t));

RSx1(1)=1;RSy1(1)=1;RSz1(1)=1;
RSx2(1)=1;RSy2(1)=1;RSz2(1)=1;

for k=2:length(t)

    RSx1(k)=(1-(1+q1)/(k-1))*RSx1(k-1);
    RSy1(k)=(1-(1+q2)/(k-1))*RSy1(k-1);
    RSz1(k)=(1-(1+q3)/(k-1))*RSz1(k-1);

    RSx2(k)=(1-(1+q1)/(k-1))*RSx2(k-1);
    RSy2(k)=(1-(1+q2)/(k-1))*RSy2(k-1);
    RSz2(k)=(1-(1+q3)/(k-1))*RSz2(k-1);
end

x1(1)=-1;y1(1)=0;z1(1)=1;

for j=2:length(t)

    x1(j)=(h^q1)*((-a/3)*(x1(j-1)^3)+a*u*(x1(j-1)^2)+(1-a*((u^2)-
(n^2)))*x1(j-1)-y1(j-1)-z1(j-1))-sum((RSx1(2:j)*x1(j-1:-1:1))));

    y1(j)=(h^q2)*((1-(a/3))*(x1(j-1)^3)+a*u*(x1(j-1)^2)-(2+a*((u^2)-
(n^2)))*x1(j-1)-3*y1(j-1))-sum((RSy1(2:j)*y1(j-1:-1:1))));
```

```

        z1(j)=(h^q3)*(e*(b*(x1(j-1)-ub)-z1(j-1)))-sum((RSz1(2:j)*z1(j-1:-
1:1)));

end

x2(1)=0;y2(1)=0;z2(1)=2;

for j=2:length(t)

    x2(j)=(h^q4)*((-a/3)*(x2(j-1)^3)+a*u*(x2(j-1)^2)+(1-a*((u^2)-
(n^2)))*x2(j-1)-y2(j-1)-z2(j-1))-sum((RSx2(2:j)*x2(j-1:-1:1)));

    y2(j)=(h^q5)*((1-(a/3))*(x2(j-1)^3)+a*u*(x2(j-1)^2)-(2+a*((u^2)-
(n^2)))*x2(j-1)-3-y2(j-1))-sum((RSy2(2:j)*y2(j-1:-1:1)));

    z2(j)=(h^q6)*(e*(b*(x2(j-1)-ub)-z2(j-1)))-sum((RSz2(2:j)*z2(j-1:-
1:1)));

end

%subplot(211)
%plot(t,x1,'r')
%subplot(212)
%plot(t,x2,'k')
plot(x1,x2)
xlabel('x1')
ylabel('x2')

```

## Codes MATLAB du schéma de synchronisation des potentiels membranaires

```

close all;
clear;
clc;
a=1/4;u=3/2;b=4;e=0.0025;n=3/4;ub0=-1.5;K=1.757;ao=(1-a*((u^2)-(n^2)));ub=-
0.954;

T=500;
N=50000;
h=T/N;
t=0:h:T;

q1=0.99;q2=0.99;q3=0.99;
q4=0.99;q5=0.99;q6=0.99;

x1=zeros(length(t),1);
y1=zeros(length(t),1);
z1=zeros(length(t),1);

x2=zeros(length(t),1);
y2=zeros(length(t),1);
z2=zeros(length(t),1);

RSx1=zeros(1,length(t));
RSy1=zeros(1,length(t));

```

```

RSz1=zeros(1,length(t));

RSx2=zeros(1,length(t));
RSy2=zeros(1,length(t));
RSz2=zeros(1,length(t));

RSx1(1)=1;RSx2(1)=1;RSy1(1)=1;RSy2(1)=1;RSz1(1)=1;RSz2(1)=1;

x1(1)=-1;y1(1)=0;z1(1)=1;
x2(1)=0;y2(1)=0;z2(1)=1;

for k=2:length(t)

    RSx1(k)=(1-(1+q1)/(k-1))*RSx1(k-1);
    RSy1(k)=(1-(1+q2)/(k-1))*RSy1(k-1);
    RSz1(k)=(1-(1+q3)/(k-1))*RSz1(k-1);

    RSx2(k)=(1-(1+q4)/(k-1))*RSx2(k-1);
    RSy2(k)=(1-(1+q5)/(k-1))*RSy2(k-1);
    RSz2(k)=(1-(1+q6)/(k-1))*RSz2(k-1);

end

for j=2:length(t)

    x1(j)=(h^q1)*((-a/3)*(x1(j-1)^3)+a*u*(x1(j-1)^2)+(1-a*((u^2)-(n^2)))*x1(j-1)-y1(j-1)-z1(j-1))-sum((RSx1(2:j)*x1(j-1:-1:1)));

    y1(j)=(h^q2)*((1-(a/3))*(x1(j-1)^3)+a*u*(x1(j-1)^2)-(2+a*((u^2)-(n^2)))*x1(j-1)-3-y1(j-1))-sum((RSy1(2:j)*y1(j-1:-1:1)));

    z1(j)=(h^q3)*(e*(b*(x1(j-1)-ub)-z1(j-1)))-sum((RSz1(2:j)*z1(j-1:-1:1)));

    x2(j)=(h^q4)*((-a/3)*(x2(j-1)^3)+a*u*(x2(j-1)^2)+(1-a*((u^2)-(n^2)))*x2(j-1)-y2(j-1)-z2(j-1))-K*(x2(j-1)-x1(j-1))-sum((RSx2(2:j)*x2(j-1:-1:1)));

    y2(j)=(h^q5)*((1-(a/3))*(x1(j-1)^3)+a*u*(x1(j-1)^2)-(2+a*((u^2)-(n^2)))*x1(j-1)-3-y1(j-1))-K*(y2(j-1)-y1(j-1))-sum((RSy2(2:j)*y2(j-1:-1:1)));

    z2(j)=(h^q6)*(e*(b*(x2(j-1)-ub0)-z2(j-1)))-K*(z2(j-1)-z1(j-1))-sum((RSz2(2:j)*z2(j-1:-1:1)));
end

%subplot(211)
%xlabel('t')
%ylabel('x1')
%plot(t,x1,'r')
%subplot(212)
%xlabel('t')
%ylabel('x2')
%plot(t,x2,'k')
plot(x1,x2,'blue')
xlabel('x1')
ylabel('x2')

```