REPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE I
****
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE YAOUNDE
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE I
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE OF YAOUNDE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

CHAMPS DE TENSEURS CANONIQUES SUR LE FIBRÉ TANGENT

Mémoire de DI.P.E.S II de Mathématiques

De

TAKAM TAKOUGOUM Clovis-Christel

Matricule : **CM04-08SCI0391**

Licencié en Mathématiques

Sous la direction de :

Dr KOUOTCHOP WAMBA Pierre M.

Assistant

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année académique : 2015-2016

CHAMPS DE TENSEURS CANONIQUES SUR LE FIBRÉ TANGENT

Mémoire de DI.P.E.S II de Mathématiques

Par

TAKAM TAKOUGOUM Clovis-Christel

Matricule : CM04-08SCI0391

Sous l'encadrement de

Dr KOUOTCHOP WAMBA Pierre

Assistant.

Année académique : 2015-2016

♣ Dédicaces ♣

Je dédie ce travail à :

Mon feu père Mr TAKOUGOUM GASTON.

♣ Remerciements ♣

Mes remerciements vont aux personnes suivantes :

- ⋆ **Dr KOUOTCHOP Wamba Pierre** qui a bien accepté de diriger ce travail ;
- ⋆ Ma maman **Mme TAKOUGOUM née KAMGOUM Delphine** ;
- ⋆ Ma grande sœur **Mme TCHAMENI née DJUIGNE Takougoum Josiane Nathalie** ;
- ⋆ Mon grand frère **Mr PEDIEU Takougoum Eugene Landry** ;
- ⋆ Les enseignants de l'école normale supérieure de Yaoundé ;
- ⋆ **Mr BOUDA Albert** mon encadreur de stage en classes de TC du lycée bilingue d'application de Yaoundé qui a accepté de me diriger pendant le stage ;
- ⋆ Les enseignants du département de M-I de l'université de Dschang ;
- ⋆ Ma famille pour le soutien financier, matériel et moral ;
- ⋆ La famille **MBOUYABIE** pour le soutien financier, matériel et moral ;
- ⋆ **LONTUO Fogang Robertine** pour le soutien financier, moral et matériel ;
- ⋆ Mes camarades pour leur apport, aussi bien académique que social.

♣ Déclaration sur l'honneur ♣

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

TAKAM TAKOUGOUM CLOVIS-CHRISTEL

♣ Résumé ♣

Soit M une variété différentiable de dimension $m > 0$. On désigne par TM le fibré tangent de M. Le but de ce travail est de montrer que certains champs de tenseurs se construisent naturellement sur le fibré TM, puis nous étudions leurs propriétés.

Mots clés : variété différentiable, fibré vectoriel, fibré tangent, champ de tenseur, champ d'Euler, tenseur de Nijenhuis.

♣ Abstract ♣

Let M be a smooth manifold of dimension $m > 0$. We denote by TM the tangent bundle of M. The aim of this work is to show that, some tensor fields on TM are defined naturally and we study their properties.

keywords : smooth manifold, vector bundle, tangent bundle, tensor fields, Euler field, Nijenhuis tensor.

♣ Table des matières ♣

♣ Introduction ♣

Le but principal de ce projet de mémoire est de faire une étude sur la géométrie du fibré tangent. C'est un domaine récent de la géométrie différentielle qui est développé depuis plusieurs décennie et où les auteurs ont utilisés des approches variées et différentes pour définir certains objets géométriques du fibré tangent d'une variété différentiable. Dans ce travail nous nous intéressons particulièrement aux champ d'Euler et au tenseur de Nijenhuis, qui jouent un rôle fondamental en mécanique Lagrangienne et permettent de donner une formulation globale des systèmes différentielles d'ordre 2 sur une variété différentiable. Le champ d'Euler permet aussi de généraliser aux champs de tenseurs le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes.

Dans la littérature, ces deux champs de tenseurs (Champ d'Euler et tenseur de Nijenhuis) sont définis sans trop de précisions et les propriétés naturelles de ces tenseurs ne sont pas étudiés en détails. C'est pourquoi, nous proposons une définition simple qui pourrait être adaptée à des différentes situations dans la pratique de résolution des problèmes de géométrie sur le fibré tangent et étudions les propriétés de ces tenseurs.

Ainsi, notre travail se divise en trois chapitres.

Au premier chapitre, nous donnons quelques éléments de base et notations pour la bonne compréhension de notre document. C'est pourquoi, nous rappelons les notions de variétés différentiables et applications différentiables.

Au chapitre 2, nous parlons de champs de tenseurs sur un fibré vectoriel réel. Nous commençons par définir un fibré vectoriel réel, nous étudions les fibrés vectoriels induits et les champs de tenseurs sur un fibré vectoriel réel. Un accent particulier est mis sur l'étude des champs de vecteurs sur une variété différentiable. Notons que toutes ces notions sont bien développées dans [2].

Au dernier chapitre, nous définissons et étudions le champ d'Euler et le tenseur de Nijehnuis. Nous commençons par parler de relèvement tangent des champs de vecteurs, de formes différentielles de degré 1, puis nous donnons les différentes définitions de champs d'Euler et de tenseurs de Nijenhuis. Notre contribution dans ce travail réside dans les calculs, lorsque nous établissons les propriétés naturels des champs de tenseurs ainsi définis.

Chapitre Un

RAPPELS

1.1 Rappel de topologie

1.1.1 Espaces topologiques.

Définition 1.1.1. On appelle espace topologique un couple (X, $\mathcal{O}$) où X est un ensemble et $\mathcal{O}$ est une famille de parties de X, appelées ouverts, vérifiant :

(i) X et $\emptyset$; sont des éléments de $\mathcal{O}$;

(ii) si $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{O}$, alors

$$\bigcup_{i\in I} B_i$$

est encore un élément de $\mathcal{O}$;

(iii) pour toute famille $(B_i)_{i=1,\ldots,p}$ d'éléments de $\mathcal{O}$,

$$\bigcap_{i=1}^{p} B_i$$

est un élément de $\mathcal{O}$.

Exemple 1.1.1. (i) *Tout espace métrique (X, d) est un espace topologique. La topologie ici étant définie au moyen de la distance distance d. De manière précise, une partie $U \subset X$ est dite ouverte si $U = \emptyset$ ou $U \neq \emptyset$ et pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tels que*

$$\{y \in X | d(x, y) < r\} \subset U$$

En particulier $\mathbb{R}^n$ est un espace topologique lorsqu'on le dote de l'une des distances équivalentes suivantes :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|, \qquad d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}, \qquad d_3(x, y) = \sup_{1\leq i\leq n} |y_i - x_i|$$

pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$.

(ii) *Le couple $(X, P(X))$ est un espace topologique. Une telle topologie sur X est dite discrète.*

(iii) *On pose* $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$*. Le couple* $(X, \mathcal{O})$ *est un espace topologique. On l'appelle topologie grossière de* X*.*

Dans la suite l'espace topologique $(X, \mathcal{O})$ sera noté simplement par X, lorsqu'il y a pas de risque de confusion sur la topologie de X.

Définition 1.1.2. Une partie F de X est dite fermée si $\complement_X^F$ est un élément de $\mathcal{O}$.

Notation 1.1.1. *On note* $\mathcal{F}$ *la famille constituée de toutes les parties fermées de* X*.*

Proposition 1.1.1. *La famille* $\mathcal{F}$ *vérifie :*

(i) *les ensembles* $\emptyset$ *et* X *sont des fermés de* X *;*

(ii) *toute intersection de fermés de* X *est un fermé de* X *;*

(iii) *une réunion finie de fermés de* X *est un fermé de* X*.*

Définition 1.1.3. Soient X un espace topologique et $B \subset X$. On appelle voisinage de B dans X, toute partie de X contenant un ouvert contenant B.

On désigne par $\mathcal{V}(B)$ l'ensemble des voisinages de B. Lorsque $B = \{x\}$, on note $\mathcal{V}(B)$ par $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

1.1.2 Séparation et Topologie induite

Définition 1.1.4. On dit que l'espace topologique X est séparé au sens de *Haussdorf*, si pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe U_x, U_y des ouverts de X contenant respectivement x et y tels que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Exemple 1.1.2. (i) *Les espaces métriques sont des espaces topologiques séparés.*

(ii) *Soit* X *un ensemble non vide. L'espace topologique discret* $(X, P(X))$ *est séparé. Toutefois, pour* $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$*, l'espace topologique* $(X, \mathcal{O})$ *n'est pas séparé.*

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et A une partie de X. On pose

$$\mathcal{O}_A = \{U \cap A, U \in \mathcal{O}\}$$

Il est immédiat que $\mathcal{O}_A$ est une famille de parties de A qui possède les propriétés (i), (ii) et (iii) de la définition (1.1.1). Donc $\mathcal{O}_A$ définit une topologie sur A appelée topologie induite sur A. On dit alors que A est un sous-espace topologique de $(X, \mathcal{O})$.

1.1.3 Applications continues

Soient $(X, \mathcal{O})$, $(X', \mathcal{O}')$ deux espaces topologiques et $f : X \to X'$ une application.

Définition 1.1.5. On dit que f continue sur X si :

$$\forall O', \quad (O' \in \mathcal{O}') \quad \Rightarrow \quad \left(f^{-1}(O') \in \mathcal{O}\right)$$

Si en plus f est bijective et f^{-1} continue sur X', on dit que f est un homéomorphisme de X sur X'.

Théorème 1.1.1. *Il y a équivalence entre :*

(i) *f est continue sur X.*

(ii) *L'image réciproque par f de toute partie fermée de X' est une partie fermée de X. En d'autres termes, $\forall F' \in \mathcal{F}'$, $f^{-1}(F') \in \mathcal{F}$.*

Preuve. Voir [3] ■

Application : topologie sur un espace vectoriel réel de dimension finie

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$. Soit $B = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de V, et l'application linéaire bijective $\varphi_B : V \to \mathbb{R}^n$ dont l'isomorphisme réciproque est définie par :

$$\varphi_B^{-1} : \mathbb{R}^n \to V, \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

On peut définir une topologie sur V à partir des φ_B. Plus précisément, une partie U est un ouvert de V si $\varphi_B(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $B' = (v'_1, \cdots, v'_n)$ une autre base de V, à B' et à l'application $\varphi_{B'} : V \to \mathbb{R}^n$ comme précédemment à B, on associe la topologie sur V obtenue à partir de B' est la même que celle sur V obtenue à partir de B ; car tous sont homéomorphes à $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, l'application

$$\varphi_{B'} \circ \varphi_B^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

est un homéomorphisme, de classe C^∞ car linéaire. Ce qui montre que la topologie ainsi définie sur V ne dépend pas de la base choisie.

1.1.4 Espace connexe et connexe par arc

Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique. On rappelle que $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des parties fermées de X. En général $\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{O}$, d'après la proposition (1.1.1) et la définition (1.1.1).

Définition 1.1.6. (i) On dit alors que $(X, \mathcal{O})$ est connexe si

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$$

(ii) Une partie A de X est connexe si $(A, \mathcal{O}_A)$ est connexe.

Proposition 1.1.2. (i) *Une partie A de X est connexe si et seulement si l'existence de deux ouverts disjoints O_1 et O_2 de X tels que $A \subset O_1 \cup O_2$ entraine $A \subset O_1$ ou $A \subset O_2$*

(ii) *Les seules parties connexes de $\mathbb{R}^n$ sont des ensembles de la forme*

$$K = \prod_{i=1}^{n} K_i$$

où K_i est un intervalle de $\mathbb{R}$.

(iii) *Soit $f : X \to X'$ une application continue. L'image d'une partie connexe de X par f est une partie connexe de X'. En particulier, si X est connexe et f surjective, alors X' est connexe.*

(iv) *Tout espace vectoriel réel de dimension finie V, qu'on munit de la topologie "d'espace vectoriel réel de dimension finie", est connexe.*

Preuve. Voir [3] ■

Définition 1.1.7. (i) On appelle chemin ou arc joignant $x \in X$ à $y \in X$ toute application continue de $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

(ii) Une partie A de X est connexe par arcs si deux points quelconques de A peuvent être reliés par un chemin.

Proposition 1.1.3. *Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Définition 1.1.8. (i) Un espace topologique est dit localement connexe s'il est séparé et si chacun de ses points possède un voisinage connexe.

(ii) Pour tout point x de X, on appelle composante connexe de x et on note $\mathcal{C}(x)$ le plus grand(au sens de l'inclusion) connexe contenant x :

$$\mathcal{C}(x) = \bigcup_{x \in \mathcal{C} \subset X, \mathcal{C} connexe} \mathcal{C}$$

1.1.5 Espaces compacts.

Définition 1.1.9. Soit A une partie d'un espace topologique X. On dit qu'une famille $(U_i)_{i\in I}$ forme un recouvrement ouvert de A si :

(i) $A = \bigcup_{i\in I} U_i$,

(ii) U_i ouvert de X pour tout $i \in I$.

Définition 1.1.10. (i) On dit qu'un espace topologique X est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.

(ii) Une partie A d'un espace topologique séparé X est dite compacte si $(A, \mathcal{O}_A)$ est compact.

Exemple 1.1.3. *Les seules parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées bornées de $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 1.1.1. (i) Si K est une partie compacte de X séparé, alors K est un fermé de X.

(ii) Si X compact et F est une partie fermée de X, alors F est compact.

Définition 1.1.11. Un espace topologique est dit localement compact s'il est séparé et si chacun de ses points possède un voisinage compact.

1.2 Variétés différentiables.

1.2.1 Notion de carte.

Soit M un espace topologique séparé.

Définition 1.2.1. Une carte de M est un triplet $c = (U, \theta, n)$ où

(i) U est un ouvert de M,

(ii) θ est un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

L'ouvert U et l'entier naturel n sont respectivement appelés domaine et dimension de la carte c. Lorsqu'un point x de M appartient à U, on dit que (U, θ) est une carte de M en x. Si en plus $\theta(x) = 0$, on dit que (U, θ) est carte de M centrée en x.
Soient (U, θ, n) une carte de M et $a \in \{1, 2, 3, ..., n\}(n \geq 1)$. Posons l'application
$\pi^a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la a-ième projection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$, et $x^a = \pi^a \circ \theta : U \longrightarrow \mathbb{R}$. On obtient ainsi un système $(x^a)_{a\in\{1,2,...,n\}}$ d'application de U vers $\mathbb{R}$ qu'on appelle application coordonnées. Dans ce cas, le système $(x^1, ..., x^n)$ est appelé système de coordonnées locales associées à la carte (U, θ, n).

Exemple 1.2.1. *Le couple $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ est une carte de $\mathbb{R}^n$ en chacun de ses points.*

Définition 1.2.2. On dit que deux cartes (U, θ, n) et (V, ϕ, m) de M sont $\mathcal{C}^k$-compatibles si $U \cap V = \emptyset$ ou si l'application $\theta \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \theta(U \cap V)$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$.

Il en résulte que $\phi \circ \theta^{-1}$ est aussi un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarque 1.2.1. Si $U \cap V \neq \emptyset$ et si (U, θ, n) et (V, ϕ, m) sont $\mathcal{C}^k$-compatibles alors les deux cartes sont de même dimension $(n = m)$.

1.2.2 Notion d'atlas.

Soit M un espace topologique séparé.

Définition 1.2.3. Un atlas de classe $\mathcal{C}^k$ de M est une famille $(U_i, \theta_i, n_i)_{i \in I}$ de carte de M telle que :

(i) $M = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$

(ii) Pour tout $i, j \in I$, (U_i, θ_i, n_i) et $(U_j \theta_j, n_j)$ sont $\mathcal{C}^k$-compatibles.

Définition 1.2.4. On dit que deux atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \theta_i, n_i)_{i \in A}\}$ et $\mathcal{B} = \{(V_j, \phi_j, m_j)_{j \in B}\}$ sont $\mathcal{C}^k$-compatibles si pour tout $(i, j) \in A \times B$ les cartes (U_i, θ_i, n_i) et (V_j, ϕ_j, m_j) sont $\mathcal{C}^k$-compatibles.

Exemple 1.2.2. (i) *Le couple* $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ *est un atlas à une carte.*

(ii) *Soient* V *un espace vectoriel réel de dimension* n *muni de la structure d'espace topologique,* $B = (e_1, ..., e_n)$ *et* $B' = (e'_1, ..., e'_n)$ *deux bases de* V*. Soient deux applications*

$$\begin{array}{cccc} \varphi_B : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x = \sum_{i=1}^n x_i e_i & \longmapsto & (x_1, ..., x_n) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{B'} : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x = \sum_{i=1}^n x_i e'_i & \longmapsto & (x_1, ..., x_n) \end{array}$$

les cartes (V, φ_B) *et* (V, φ'_B) *de* M *sont* $\mathcal{C}^k$*-compatibles pour tout* $k \in \mathbb{N}$*. Donc la famille* $(V, \varphi_B)_{B \in \{B \text{ base de } V\}}$ *est un atlas de* V*.*

Proposition 1.2.1. *Si l'espace* M *est connexe, toutes les cartes d'un même atlas sont de même dimension.*

Preuve. Soient $(U_i, \theta_i)_{i\in I}$ un atlas de M et $i_0 \in I$ tels que la carte (U_{i_0}, θ_{i_0}) soit de dimension n. Posons $J = \{i \in I \mid (U_i, \theta_i)$ est de dimension $n\}$ et $V_1 = \bigcup_{i\in J} U_i$. $J \neq \emptyset$ car $i_0 \in J$. Si $J = I$ c'est terminée ; sinon($J \neq I$) on a : $M = \bigcup_{i\in I} U_i = V_1 \cup (\bigcup_{i\notin J} U_i)$

Soit $V_2 = \bigcup_{i\notin J} U_i$, V_1 et V_2 sont des ouverts de M et $M = V_1 \cup V_2$. Il est claire que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, car si $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, il existera U_j et U_r tel que $U_j \cap U_r \neq \emptyset$ avec $U_j \subset V_1, U_r \subset V_2$. Or $(U_i, \theta_i)_{i\in I}$ est un atlas, donc (U_j, θ_j) et (U_r, θ_r) sont $\mathcal{C}^k$-compatibles, donc de même dimension. Ce qui contredit le fait que U_r n'est pas inclu dans V_1. Donc $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ainsi $M = V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ce qui contredit le fait que M soit un connexe. Donc $\forall i \in I, (U_i, \theta_i)$ est de dimension n. ■

Définition 1.2.5. Un atlas de dimension n est un atlas dont toutes ses cartes sont de dimension n.

1.2.3 Variétés différentiables.

Soit M un espace topologique séparé. On désigne par $\mathfrak{R}_k(M)$ l'ensemble des atlas de classe $\mathcal{C}^k$ sur M. On définit sur $\mathfrak{R}_k(M)$ la relation suivante :

$$\text{pour tout } \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{R}_k(M), (\mathcal{A}\ \mathfrak{R}\ \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B} \text{ sont } \mathcal{C}^k - \textit{compatibles}).$$

La relation "$\mathfrak{R}$" est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{R}_k(M)$.

Définition 1.2.6. Une structure de variété de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n sur M est la donnée d'une classe d'équivalence de la relation "$\mathfrak{R}$" des atlas de M de dimension n.

Notation 1.2.1. *La variété différentiable est notée $(M, \mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est une classe d'équivalence de la relation "$\mathfrak{R}$" sur $\mathfrak{R}_k(M)$.*

Remarque 1.2.2. Si $k = 0$ on dit que M est une variété topologique.

Exemple 1.2.3. (i) *$M = \mathbb{R}^n$. On considère l'atlas $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$. Soit θ une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ est un atlas de $\mathbb{R}^n$ et on sait que $\theta = \theta \circ (Id_{\mathbb{R}^n})^{-1}$; θ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, car linéaire et bijective. Donc ces deux atlas $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ et $(\mathbb{R}^n, \theta)$ sont en relation("$\mathfrak{R}$"), donc définissent la même structure de variété de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

(ii) *Soit $\mathfrak{a} = (\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})$ et $\mathfrak{b} = (\mathbb{R}, \theta)$ avec $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\theta(t) = t^3$.*
Il est claire que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ne sont pas $\mathcal{C}^1$-compatibles car θ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
$(\theta^{-1} : t \longmapsto \sqrt[3]{t}$ n'est pas différentiable en $t = 0)$.

Proposition 1.2.2. (i) *Toute variété différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension n est localement compacte.*

(ii) *Toute variété différentiable de classe* $\mathcal{C}^k$ *et de dimension* n *est connexe si et seulement si elle est connexe par arc.*

(iii) *Toute variété différentiable de classe* $\mathcal{C}^k$ *et de dimension* n *est localement connexe.*

Preuve. Voir [4] ■

Un procédé d'usage pour montrer qu'un ensemble non vide possède une structure de variété différentiable est décrit par le théorème suivant.

Théorème 1.2.1. *Si* N *un ensemble non vide et* $(U_\alpha, \theta_\alpha)_{\alpha \in A}$ *une famille telle que :*

(i) $N = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$.

(ii) *pour tout* $\alpha \in A$, $\theta_\alpha(U_\alpha)$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* θ_α *est une bijection de* U_α *sur* $\theta_\alpha(U_\alpha)$.

(iii) *pour tout* $\alpha, \beta \in A$, *tel que* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $\theta_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ *et* $\theta_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *sont des ouverts de* $\mathbb{R}^n$ *et l'application* $\theta_\beta \circ \theta_\alpha^{-1} : \theta_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \theta_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *est un difféomorphisme classe* $\mathcal{C}^k$.

Alors $(U_\alpha, \theta_\alpha)_{\alpha \in A}$ *est un atlas de* N *qui lui confère une unique structure de variété différentiable.*

Preuve. Voir [2] ■

1.2.4 Quelques exemples de variétés différentiables.

Exemple 1.2.4. *On considère* $\mathbb{R}^{n+1}$, *muni du produit scalaire canonique* $< x, y >= \sum x^i y^i$. *La sphère de dimension* n, *notée* $\mathbb{S}^n$, *est définie par :* $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} :< x, x >= 1\}$.

Exemple 1.2.5. *(Les espaces vectoriels) Soit* V *un espace vectoriel de dimension* $n \geq 1$ *et* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *une base de* V. *L'application* $\theta_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$ *définie par* $\theta_B(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels. On obtient ainsi une carte* (V, θ_B^{-1}). *Si* $B' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ *est une autre base de* V *et* $(V, \theta_{B'}^{-1})$ *sa carte.* $(V, \theta_B^{-1})_{B \in \{\text{base de } V\}}$ *sont* $\mathcal{C}^\infty$*-compatibles pour tout* $B \in \{$ *base de* $V\}$. *Donc la structure de variété de* V *ne dépend pas de la base choisie. Pour finir tout espace vectoriel de dimension* $n (n \geq 1)$ *est une variété différentiable de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *et de dimension* n.

Exemple 1.2.6. *(Variété produit) Soient* M *et* N *deux variétés différentiables de dimension* m *et* n *respectivement. Soit* $\mathcal{A} = \{(U_i, \theta_i)_{i \in A}\}$ *un atlas de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *de* M *et* $\mathcal{B} = \{(V_j, \phi_j)_{j \in B}\}$ *un atlas de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *de* N. *Posons pour tout* $(i, j) \in A \times B$, $W_{i,j} = U_i \times V_j$ *et* $\theta_i \times \phi_j : W_{i,j} \longrightarrow \theta_i(U_i) \times \phi_j(V_j)$ *définie par* $\theta_i \times \phi_j(x, y) = (\theta_i(x), \phi_j(y))$. *Il est claire que* $(W_{i,j}, \theta_i \times \phi_j)_{(i,j) \in A \times B}$ *est un atlas de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *de* $M \times N$ *qui définit la structure de variété de* $M \times N$ *et on parle de variété produit de* M *et* N *et on a* $\dim M \times N = m + n = \dim M + \dim N$.

Exemple 1.2.7. *$\mathcal{T}^n = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \times ... \times \mathcal{S}^1 (nfois)$ est une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dimension n. on l'appelle Tore.*

Théorème 1.2.2. *(Whitney) Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ et de dimension $n \geq 1$. Il existe B un atlas de M de dimension n et de classe $\mathcal{C}^\infty$ $\mathcal{C}^k$-compatible à tous les éléments de $\mathcal{A}$.*

Preuve. Voir [9] ■

Le théorème de *Whitney* nous permet de considérer dans la suite que toutes les variétés différentiables sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1.3 Applications différentiables.

1.3.1 Définitions et propriétés.

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement.

Définition 1.3.1. (i) Une application $f : M \longrightarrow N$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ au point x si f est continue en x et s'il existe une carte (U, θ) de M centrée en x, une carte (V, ϕ) de N centrée en $y = f(x)$ telles que $f(U) \subset V$ et l'application $\phi \circ f \circ \theta^{-1} : \theta(U) \longrightarrow \phi(V)$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ en $\theta(x)$. $\phi \circ f \circ \theta^{-1}$ est l'expression locale de f sur U.

(ii) On dit qu'une application $f : M \longrightarrow N$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ sur M si f est différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ en tout point de M.

(iii) Si f est différentiable et de classe $\mathcal{C}^k$ sur M, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Notation 1.3.1. *On note $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ l'ensemble des applications différentiables de classe $\mathcal{C}^\infty$ de M vers N. Dans le cas où $N = \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ par $\mathcal{C}^\infty(M)$.*

Définition 1.3.2. Une application $f : M \longrightarrow N$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ si f est bijective et si f et f^{-1} sont différentiables de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 1.3.1. (i) *Soient G une variété différentiable, $f : M \longrightarrow N$ et $g : N \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont différentiables de classe $\mathcal{C}^k (k \in N$ ou $k = \infty)$, alors $g \circ f$ est une application différentiable de classe $\mathcal{C}^k$.*

(ii) *Si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $f.g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(f + g) : M \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $f.g, (f + g) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.*

(iii) *Si $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $g(x) \neq 0$ $\forall x \in M$ et $(\frac{f}{g}) : M \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^\infty(M)$.*

Remarque 1.3.1. De la proposition 1.3.1, on déduit que $\mathcal{C}^\infty(M)$ muni des opérations d'addition, de multiplication par un scalaire et de produit de deux fonctions, est une algèbre. On l'appelle l'algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M.

1.3.2 Dérivées partielles.

Soient M une variété différentielle de dimension $n \geq 1$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ en x_o. Pour une carte (U, θ) de M en x_o, son expression local $f \circ \theta^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^r$ $(r \leq k)$ en $\theta(x_o)$. On note par $(x^1, ..., x^n)$ un système de coordonnées associées à la carte (U, θ). Si $p \in U$, on a : $\theta(p) = (x^1(p), x^2(p), ..., x^n(p))$.

Définition 1.3.3. f admet les dérivées partielles d'ordre r en x_o, s'il existe une carte (U, θ) de M en x_o telle que son expression locale dans (U, θ) admet des dérivées partielles d'ordre r en $\theta(x_o)$.

Cette définition ne dépend pas de la carte choisie. On note les dérivées partielles quand elles existent en x_o par :

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \partial x_{i_2}^{\alpha_2} ... \partial x_{i_n}^{\alpha_n}}(x_o) = \frac{\partial^\alpha (f \circ \theta^{-1})}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \partial x_{i_2}^{\alpha_2} ... \partial x_{i_n}^{\alpha_n}}(\theta(x_o)) \text{ avec } \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \leq r$$

Proposition 1.3.2. (i) *Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en x_o, f est continue en x_o.*

(ii) *Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ en x_o, alors f admet des dérivées partielles d'ordre r en x_o. La réciproque est fausse.*

(iii) *Les dérivées partielles vérifie les propriétés habituelles, i.e. pour tout $f, g \in \mathcal{C}^k(M)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x^i}(x_o) = \frac{\partial(f)}{\partial x^i}(x_o) g(x_o) + \frac{\partial(g)}{\partial x^i}(x_o) f(x_o)$$

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x^i}(x_o) = \frac{\partial(f)}{\partial x^i}(x_o) + \frac{\partial(g)}{\partial x^i}(x_o) \text{ et } \frac{\partial(\lambda g)}{\partial x^i}(x_o) = \lambda \frac{\partial(g)}{\partial x^i}(x_o)$$

1.3.3 Rang d'une application différentiable(submersion-immersion).

Soient M et N deux variétés différentiables de classe $\mathcal{C}^k$ de dimension m et n respectivement, $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable de classe $\mathcal{C}^k$. Pour tout x un point de M. Soient (U, θ) et (V, ϕ) deux cartes en x et $f(x)$ respectivement($f(U) \subset V$). L'expression locale de f par rapport à ces deux cartes, en x est $F = \phi \circ f \circ \theta^{-1} : \theta(U) \longrightarrow \phi(V)$ est différentiable au point $\theta(x)$.

Définition 1.3.4. (i) On appelle matrice jacobienne de f en x dans les cartes (U, θ) et (V, ϕ), la matrice jacobienne de son expression locale au point $\theta(x)$.

(ii) On appelle rang de f en x, le rang de la matrice jacobienne de F au point $\theta(x)$. On note $rang(f)(x)$.

Remarque 1.3.2. (i) Le rang de f en x ne dépend pas des cartes choisies, car les changements de coordonnées locales sont des difféomorphismes. En effet, soit (U_1, θ_1) une autre carte de M en x et (V_1, ϕ_1) une autre carte de N en $f(x)$ telle que $f(U_1) \subset V_1$. On a l'expression locale $F_1 = \phi_1 \circ f \circ \theta_1^{-1}$. pour les expressions locales $\phi \circ f \circ \theta^{-1}$ et $\phi_1 \circ f \circ \theta_1^{-1}$, on note par $D(\phi \circ f \circ \theta^{-1})(\theta(x))$ la matrice jacobienne de $\phi \circ f \circ \theta^{-1}$ au point $\varphi(x)$. Comme

$$\phi_1 \circ f \circ \theta_1^{-1} = (\phi_1 \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ f \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \theta_1^{-1}).$$

On déduit que

$$D(\phi_1 \circ f \circ \theta_1^{-1})(\theta_1(x)) = D(\phi_1 \circ \phi^{-1})(\phi(f(x))).D(\phi \circ f \circ \theta^{-1})(\theta(x)).D(\theta \circ \theta_1^{-1})(\theta_1(x)).$$

Comme les matrices $D(\phi_1 \circ \phi^{-1})(\phi(f(x)))$ et $D(\theta \circ \theta_1^{-1})(\theta_1(x))$ sont inversibles car $\phi_1 \circ \phi^{-1}$ et $\theta \circ \theta_1^{-1}$ sont des difféomorphismes, il vient que les matrices $D(\phi_1 \circ f \circ \theta_1^{-1})(\theta_1(x))$ et $D(\phi \circ f \circ \theta^{-1})(\theta(x))$ ont le même rang.

(ii) $D(\phi \circ f \circ \theta^{-1})(\theta(x))$ est une matrice à n lignes et m colonnes. Donc $\mathrm{rang}(D(\phi \circ f \circ \theta^{-1})(\theta(x))) \leq \inf\{m, n\}$. Et par conséquent pour tout $x \in M$ on a $rang(f)(x) \leq \inf\{m, n\}$.

Définition 1.3.5. (i) On dit que f est une submersion si pour tout $x \in M$, $rang(f)(x) = dim N = n$.

(ii) On dit que f est une immersion si pour tout $x \in M$, $rang(f)(x) = dim M = m$.

Remarque 1.3.3. (i) Si f est une submersion alors $n \leq m$.

(ii) Si f est une immersion alors $m \leq n$.

Définition 1.3.6. Supposons que $m \leq n(rang(f) = m)$. L'application $\partial m, n : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\partial m, n(z^1, z^2, ..., z^m) = (z^1, z^2, ..., z^m, 0, 0, ..., 0)$ est une injection canonique.

Définition 1.3.7. Supposons que $n \leq m(rang(f) = n)$. L'application $Prm, n : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $Prm, n(z^1, z^2, ..., z^m) = (z^1, z^2, ..., z^n)$ est une projection canonique des n premiers composantes.

Corollaire 1.3.1. *f est une submersion si et seulement si pour tout $x \in M$, $\exists (U, \varphi)$ une carte de M centrée en x, (V, ϕ) une carte de N centrée en $f(x)$ telle que $\phi \circ f \varphi^{-1} = \partial m, n \,|_{\varphi(U)}$.*

Corollaire 1.3.2. *f est une immersion si et seulement si pour tout $x \in M$, $\exists (U, \varphi)$ une carte de M centrée en x, (V, ϕ) une carte de N centrée en $f(x)$ telle que $\phi \circ f \varphi^{-1} = Prm, n \,|_{\varphi(U)}$.*

Corollaire 1.3.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que une application f injective soit un difféomorphisme est que $m = dim M = n = dim N = rang(f)(x)$ pour tout $x \in M$.*

Proposition 1.3.3. *Soit P une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ et dimension p. Soit $g : N \longrightarrow P$ une application différentiable de classe $\mathcal{C}^k$. Si f et g sont des submersion(resp. immersion) alors $g \circ f$ est une submersion(resp. immersion).*

Proposition 1.3.4. (i) *Si f est une submersion, l'image par f de tout ouvert de M est un ouvert de N.*

(ii) *Soit P une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ et dimension p. supposons que f soit une immersion injective. Pour qu'une application continue $g : P \longrightarrow M$ soit différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ il faut et il suffit que $f \circ g : P \longrightarrow N$ soit différentiable de classe $\mathcal{C}^k$.*

(iii) *Soit P une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ et dimension p. supposons que f soit une submersion surjective. Pour qu'une application continue $g : N \longrightarrow P$ soit différentiable de classe $\mathcal{C}^k$ il faut et il suffit que $g \circ f : M \longrightarrow P$ soit différentiable de classe $\mathcal{C}^k$.*

⋆ ⋆ Chapitre Deux ⋆ ⋆

Champ de tenseurs sur un fibré vectoriel réel.

Dans la suite, différentiable signifie différentiable et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2.1 Généralités sur les fibrés vectoriels.

2.1.1 Fibration.

Définition 2.1.1. Une variété fibrée est un triplet $\lambda = (Y, M, p)$ tels que

(i) Y et M sont des variétés différentiables ;

(ii) $p : Y \longrightarrow M$ une submersion surjective.

Y est appelé l'espace total λ, M sa base. Pour $x \in M$, $p^{-1}(x)$ est appelé fibre au dessus de x ; on le note Y_x.

Exemple 2.1.1. *Soient M et S deux variétés différentiables. On désigne par $pr_1 : M \times S \longrightarrow M$ la première projection. Le triplet $(M \times S, M, pr_1)$ est une variété fibrée appelé variété fibrée triviale.*

Définition 2.1.2. On appelle fibration une variété fibrée (Y, M, p) qui vérifie la condition suivante : pour tout $x \in M$, il existe U un voisinage ouvert de x dans M, une variété différentiable S_x et un difféomorphisme $\varphi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times S_x$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p \mid U"'] & U \times S_x \arrow[d, "p_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Le couple (U, φ) est appelé une trivialisation locale tandis que le couple (U, φ^{-1}) une application repère. p_1 est la projection suivant le premier facteur.
Soient $\lambda = (Y, M, p)$ et $\mu = (Z, N, q)$ deux fibrations.

Définition 2.1.3. On appelle morphisme de fibrations de λ vers μ un couple d'applications $(\overline{f}, f)$ où $f : Y \longrightarrow Z$ et $\overline{f} : M \longrightarrow N$ différentiables et tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ p\downarrow & & \downarrow q \\ M & \underset{\overline{f}}{\longrightarrow} & N \end{array}$$

2.1.2 Définition d'un fibré vectoriel réel.

Soient M et E deux variétés différentiables et $\pi : E \longrightarrow M$, une application différentiable telle que pour tout $x \in M$, $E_x = \pi^{-1}(x) = \{z \in E | \pi(z) = x\}$ soit un espace vectoriel réel de dimension finie.

Définition 2.1.4. On dit que le triplet (E, M, π) est un fibré vectoriel réel de fibre type un espace vectoriel réel de V de dimension $n \geqslant 1$ si pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de M contenant x_0 et un difféomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times V$ tel que :

(i) $\pi = p_1 \circ \phi$.

(ii) La restriction de $p_2 \circ \phi$ à chaque fibre $E_x = \pi^{-1}(x)$ est linéaire.

Où p_1 et p_2 désignent respectivement les projections suivant le premier et le deuxième facteur.

Définition 2.1.5. Une section différentiable du fibré vectoriel (E, M, π) est une application différentiable $\sigma : M \longrightarrow E$ telle que :

$$\pi \circ \sigma = Id_M.$$

On note par $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections différentiables de E.

Exemple 2.1.2. *Soient M une variété différentiable de dimension $n \geq 1$ et V un espace vectoriel réel. Soit l'application $\pi : M \times V \longrightarrow M$, $(x, v) \longmapsto x$. Le triplet $(M \times V, M, \pi)$ est un fibré vectoriel réel. Un tel fibré est dit trivial. En particulier, $\Gamma(M \times V)$ s'identifie à $\mathcal{C}^\infty(M, V)$.*

Définition 2.1.6. (Morphisme de fibrés vectoriels) On appelle morphisme entre deux fibrés vectoriels (E, M, π) et (E', M', π'), la donnée de deux applications différentiables $f : E \longrightarrow E'$ et $g : M \longrightarrow M'$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \pi\downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \underset{g}{\longrightarrow} & M' \end{array}$$

commute et que la restriction de f à chaque fibre E_x soit une application linéaire de E_x vers $E'_{g(x)}$.

2.1.3 Exemple de fibré vectoriel : Le fibré tangent d'une variété différentiable.

Soient M une variété différentiable de dimension $n \geq 1$ et $x \in M$. Dans l'ensemble $\mathcal{C}_x^\infty(\mathbb{R}, M)$ des courbes $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M)$ telles que $\gamma(0) = x$, on définit la relation $\mathfrak{R}_x$ suivante : pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}_x^\infty(\mathbb{R}, M)$

$$(\gamma_1 \ \mathfrak{R}_x \ \gamma_2) \Longleftrightarrow \left(\frac{d}{dt}(\gamma_1 \circ u)(t) \mid_{t=o} = \frac{d}{dt}(\gamma_2 \circ u)(t) \mid_{t=o}\right)$$

pour une carte (U, u) de M en x. On vérifie que $\mathfrak{R}_x$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_x^\infty(\mathbb{R}, M)$ indépendante de la carte considérée au point x. On désigne par T_xM l'ensemble quotient de $C_x^\infty(\mathbb{R}, M) \diagup \mathfrak{R}_x$ et un élément de T_xM se note $[\gamma]$ où $\gamma \in \mathcal{C}_x^\infty(\mathbb{R}, M)$ et est appelé vecteur tangent à M au point x ; on dit alors que $T_xM = C_x^\infty(\mathbb{R}, M) \diagup \mathfrak{R}_x$ est l'ensemble des vecteurs tangents à M en x. Soit $c = (U, u)$ une carte de M en x ; on pose

$$\begin{array}{rccc} \theta_{c,x} : & T_xM & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & [\gamma] & \longmapsto & \frac{d}{dt}(\gamma \circ u)(t) \mid_{t=o} \end{array}$$

$\theta_{c,x}$ est une application bijective. On transporte au moyen de $\theta_{c,x}$ sur T_xM la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ on vérifie que la structure transportée ne dépend pas de la carte considérée. Donc T_xM est un espace vectoriel réel. On note TM la réunion (deux à deux disjoints) des espaces vectoriels T_xM lorsque x décrit M. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi_M : & TM & \longrightarrow & M \\ & [\gamma] & \longmapsto & \gamma(0) \end{array}$$

elle est bien définit et on a :

Proposition 2.1.1. *Il existe sur TM une et une seule structure de variété différentiable telle que (TM, M, π_M) soit un fibré vectoriel réel de fibre type $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. Voir [10] ■

Soit $x \in M$, on désigne par $\mathcal{T}_xM$ l'ensemble des formes linéaires L de $\mathcal{C}^\infty(M)$ telles que

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M),\ L(f.g) = L(f).g(x) + f(x).L(g)$$

$\mathcal{T}_xM$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et pour tous $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $[\gamma] \in T_xM$, on pose

$$\theta_{[\gamma]}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \mid_{t=o}$$

Il est clair que si $[\delta] \in T_xM$ tel que $[\delta] = [\gamma]$ on a $\theta_{[\gamma]}(f) = \theta_{[\delta]}(f)$. Donc $\theta_{[\gamma]}(f)$ ne dépend pas du représentant de la classe choisie. On définit ainsi une application

$$\begin{array}{rccc} \theta_{[\gamma]}: & \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \mid_{t=o} \end{array}$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\theta_{[\gamma]}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et on a : pour tous $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \theta_{[\gamma]}(f.g) &= \frac{d}{dt}((f.g) \circ \gamma)(t) \mid_{t=o} \qquad = \frac{d}{dt}((f.g)(\gamma)(t)) \mid_{t=o} \\ &= \frac{d}{dt}((f(\gamma(t)).g(\gamma(t))) \mid_{t=o} = (f(\gamma(0)))\frac{d}{dt}(g \circ \gamma)(t) \mid_{t=o} + (g(\gamma(0)))\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \mid_{t=o} \\ &= f(x)\theta_{[\gamma]}(g) + g(x)\theta_{[\gamma]}(f) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \theta_{[\gamma]}(f + \alpha.g) &= \frac{d}{dt}((f + \alpha.g) \circ \gamma)(t) \mid_{t=o} = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma + \alpha.(g \circ \gamma))(t) \mid_{t=o} \\ &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \mid_{t=o} + \alpha.\frac{d}{dt}(g \circ \gamma)(t) \mid_{t=o} = \theta_{[\gamma]}(f) + \alpha.\theta_{[\gamma]}(g) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une application

$$\begin{array}{rccc} \theta: & T_xM & \longrightarrow & \mathcal{T}_xM \\ & [\gamma] & \longmapsto & \theta_{[\gamma]} \end{array}$$

Théorème 2.1.1. *L'application θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, au moyen duquel on identifie T_xM à $\mathcal{T}_xM$.*

<u>Preuve</u>. Voir [7] ■

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M),\ \theta_{\theta_{c,x}^{-1}(e_i)}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \mid_{t=o} = \frac{d}{dt}[(f \circ u^{-1}) \circ (u \circ \gamma)(t)] \mid_{t=o}$$

avec $\gamma(t) = u^{-1}(te_i + u(x))$, $\gamma(0) = x$
ce qui donne

$$\theta_{\theta_{c,x}^{-1}(e_i)}(f) = \sum_j \frac{\partial(f \circ u^{-1})(u(x))}{\partial u^j}\frac{d(u \circ \gamma)}{dt}(t) \mid_{t=o} = \sum_j \frac{\partial(f \circ u^{-1})(u(x))}{\partial u^j}(e_i)$$

Donc

$$\theta_{\theta_{c,x}^{-1}(e_i)}(f) = \frac{\partial(f \circ u^{-1})(u(x))}{\partial u^i}, \qquad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

En posant

$$\theta_{\theta_{c,x}^{-1}(e_i)} = (\frac{\partial}{\partial u^i})_x \text{ on a } (\frac{\partial}{\partial u^i})_x(f) = \frac{\partial(f \circ u^{-1})(u(x))}{\partial u^i}$$

$\theta_{\theta_{c,x}^{-1}(e_i)} = (\frac{\partial}{\partial u^i})_x$ est une base de T_xM on identifie $\theta_{c,x}^{-1}(e_i)$ et $\theta_{\theta_{c,x}^{-1}(e_i)} = (\frac{\partial}{\partial u^i})_x$ et on écrit $(\frac{\partial}{\partial u^i})_x = \theta_{c,x}^{-1}(e_i)$.

Remarque 2.1.1. Un vecteur tangent à M au point x peut être vu comme un élément de $\mathcal{T}_xM$.

2.2 Champs de vecteurs.

2.2.1 Dérivation.

On rappelle que : une algèbre de Lie est la donnée d'un quadruplet $(A, +, ., [., .])$ où

(i) le triplet $(A, +, .)$ est un espace vectoriel réel ;

(ii) l'application $[., .] : A \times A \longrightarrow A$ est bilinéaire, antisymétrique et vérifie l'égalité :

$$[[x.y].z] + [[y.z].x] + [[z.x].y] = 0 \qquad \forall x, y, z \in A$$

cette égalité est appelée identité de Jacobi.
Soit A une algèbre de Lie.

Définition 2.2.1. Une dérivation de A est une application linéaire $D : A \longrightarrow A$ telle que :

$$D(x.y) = D(x).y + x.D(y)$$

pour tout $x, y \in A$.

Exemple 2.2.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour tout $i = 1, 2, ..., n$, on pose :*

$$D_i(g) = \frac{\partial g}{\partial x^i} \text{ avec } g \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

On obtient ainsi une application $D_i : A \longrightarrow A$ qui est une dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Remarque 2.2.1. Soit A une algèbre quelconque, on désigne par $Der(A)$ l'ensemble des dérivations de A. Soient D_1, $D_2 \in Der(A)$, on a : $D_1 \circ D_2$ est linéaire. D'autre part, pour $x, y \in A$,

$$\begin{aligned} D_1 \circ D_2(x.y) &= D_1(D_2(x.y)) = D_1(D_2(x).y + x.D_2(y)) = D_1(D_2(x).y) + D_1(x.D_2(y)) \\ &= D_1 \circ D_2(x).y + D_2(x).D_1(y) + D_1(x).D_2(y) + x.D_1 \circ D_2(y) \\ &= D_1 \circ D_2(x).y + x.D_1 \circ D_2(y) + D_2(x).D_1(y) + D_1(x).D_2(y) \end{aligned}$$

On constate que $D_1 \circ D_2$ n'est pas une dérivation de A. De même, en calculant
$D_2 \circ D_1(x.y)$ on obtient :

$$D_2 \circ D_1(x.y) = D_2 \circ D_1(x).y + x.D_2 \circ D_1(y) + D_1(x).D_2(y) + D_2(x).D_1(y)$$

On a :

$$D_1 \circ D_2(x.y) - D_2 \circ D_1(x.y) = (D_1 \circ D_2(x).y - D_2 \circ D_1(x).y) + (x.D_1 \circ D_2(y) - x.D_2 \circ D_1(y))$$

En posant,

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

On a :

$$[D_1, D_2](x.y) = [D_1, D_2](x).y + x.[D_1, D_2](y)$$

Ainsi, $[D_1, D_2]$ est une dérivation de A. On a ainsi définit une application

$$\begin{array}{rccc} [.,.] : & Der(A) \times Der(A) & \longrightarrow & Der(A) \\ & (D_1, D_2) & \longmapsto & [D_1, D_2] \end{array}$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Le quadruplet* $(Der(A), +, ., [.,.])$ *est une algèbre de Lie.*

Preuve. Soient $D_1, D_2, D_3 \in Der(A)$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ et $x, y, z, \in A$.
On a

$$\begin{aligned} [x+y, \alpha z] &= (x+y) \circ (\alpha z) - (\alpha z) \circ (x+y) \\ &= \alpha(x \circ z) + \alpha(y \circ z) - \alpha(z \circ x) - \alpha(z \circ y) \\ &= \alpha(x \circ z - z \circ x) + \alpha(y \circ z - z \circ y) \\ &= \alpha[x, z] + \alpha[y, z] \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

et

$$\begin{aligned} [\alpha z, x+y] &= (\alpha z) \circ (x+y) - (x+y) \circ (\alpha z) \\ &= -\alpha(x \circ z) - \alpha(y \circ z) + \alpha(z \circ x) + \alpha(z \circ y) \\ &= \alpha(z \circ x - x \circ z) + \alpha(z \circ y - y \circ z) \\ &= \alpha[z, x] + \alpha[z, y] \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

d'après (2.2.1) et (2.2.2) l'application $[.,.] : A \times A \longrightarrow A$ est bilinéaire.
On pose $I = \alpha D_1 + \gamma D_2$; $I \in Der(A)$ et le triplet $(Der(A), +, .)$ est un espace vectoriel réel.
Posons :

$$J = [[D_1, D_2], D_3] + [[D_2, D_3], D_1] + [[D_3, D_1], D_2].$$

On a :

$$
\begin{aligned}
[[D_1, D_2], D_3] &= [D_1, D_2] \circ D_3 - D_3 \circ [D_1, D_2] \\
&= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) \circ D_3 - D_3 \circ (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) \\
&= D_1 \circ D_2 \circ D_3 - D_2 \circ D_1 \circ D_3 - D_3 \circ D_1 \circ D_2 + D_3 \circ D_2 \circ D_1 \qquad (2.2.3)
\end{aligned}
$$

De même on a

$$
\begin{aligned}
[[D_2, D_3], D_1] &= [D_2, D_3] \circ D_1 - D_1 \circ [D_2, D_3] \\
&= (D_2 \circ D_3 - D_3 \circ D_2) \circ D_1 - D_1 \circ (D_2 \circ D_3 - D_3 \circ D_2) \\
&= D_2 \circ D_3 \circ D_1 - D_3 \circ D_2 \circ D_1 - D_1 \circ D_2 \circ D_3 + D_1 \circ D_3 \circ D_2 \qquad (2.2.4)
\end{aligned}
$$

De même on a

$$
\begin{aligned}
[[D_3, D_1], D_2] &= [D_3, D_1] \circ D_2 - D_2 \circ [D_3, D_1] \\
&= (D_3 \circ D_1 - D_1 \circ D_3) \circ D_2 - D_2 \circ (D_3 \circ D_1 - D_1 \circ D_3) \\
&= D_3 \circ D_1 \circ D_2 - D_1 \circ D_3 \circ D_2 - D_2 \circ D_3 \circ D_1 + D_2 \circ D_1 \circ D_3 \qquad (2.2.5)
\end{aligned}
$$

Ainsi d'après (2.2.3), (2.2.4) et (2.2.5) on a $J = 0$. Finalement, le quadruplet $(Der(A), +, ., [., .])$ est une algèbre de Lie. ■

2.2.2 Champs de vecteurs.

Soit M une variété différentiable de dimension $n \geq 1$. On rappel que (TM, M, π_M) est un fibré vectoriel réel de fibre type $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2.2. (i) Un champ de vecteurs sur M, est une section différentiable du fibré vectoriel réel (TM, M, π_M).

(ii) Soit U un ouvert de M, un champ de vecteurs sur U est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ X de U dans TM telle que $\pi_M \circ X = Id_U$.

Notation 2.2.1. *On note par $\mathfrak{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M.*

Remarque 2.2.2. Soit (U, x^i) un système de coordonnées de M, pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, on a :

$$X\mid_U = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

où $X^i \in \mathcal{C}^\infty(U)$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$.

Proposition 2.2.1. *L'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ est doté d'une structure canonique de $\mathcal{C}^\infty(M)$-module.*

Preuve. Soient $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, pour tout $x \in M$, $X(x), Y(x) \in T_xM$ et donc $X(x) + Y(x) \in T_xM$, on pose : $(X + Y)(x) = X(x) + Y(x)$ De même, $(g.X)(x) = g(x).X(x)$ Il est clair que $X + Y \in \mathfrak{X}(M)$ et $g.X \in \mathfrak{X}(M)$ ■

Soient $X \in \mathfrak{X}(M)$ et les applications

$$\begin{array}{rccc} X(f): & M & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & X(p)(f) \end{array}$$

$X(f)$ est une application différentiable sur M, on obtient ainsi une autre application

$$\begin{array}{rccc} D_X: & \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & f & \longmapsto & X(f) \end{array}$$

Lemme 2.2.1. *L'application D_X est une dérivation sur l'algèbre réelle $\mathcal{C}^\infty(M)$.*

Preuve. Voir [1] ■

On obtient une application

$$D : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow Der(\mathcal{C}^\infty(M)), \quad X \longmapsto D_X$$

Théorème 2.2.2. *L'application D est un $\mathcal{C}^\infty(M)$-isomorphisme de modules.*

Preuve. D est bijective et les propriétés d'homomorphisme d'algèbres se vérifie par calcul. ■

2.2.3 Crochet de deux champs de vecteurs.

Soit M un variété différentiable de dimension $n \geq 1$. Pour tout $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, il existe D_1 et D_2 deux dérivations sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ tels que :

$$\begin{cases} D_1 = D_{X_1} \\ D_2 = D_{X_2} \end{cases} \text{(d'après le théorème 2.2.2)}$$

Comme $[D_1, D_2] \in Der(\mathcal{C}^\infty(M))$, on déduit d'après le théorème 2.2.2, qu'il existe un unique champ de vecteurs noté $[X_1, X_2]$ tel que :

$$D_{[X_1,X_2]} = [D_1, D_2] = [D_{X_1}, D_{X_2}]$$

Définition 2.2.3. Le champ de vecteurs $[X_1, X_2]$ est appelé crochet de Lie des champs de vecteurs X_1 et X_2.

Remarque 2.2.3. On définit ainsi une application

$$\begin{array}{rccc} [.,.]: & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & (X_1; X_2) & \longmapsto & [X_1; X_2] \end{array}$$

Proposition 2.2.2. *Soient* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *on a :*

(i) *Pour tout* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *on a :* $[X, Y] = -[Y, X]$

(ii) *Pour tout* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *on a :* $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z]$

(iii) *Pour tout* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, *on a :* $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

(iv) *Pour tout* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *et* $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, *on a :* $[gX, Y] = g[X, Y] - Y(g)X$

La propriété (iii) est appelée identité de Jacobi.

Preuve. Voir [7] ■

2.2.4 Flot d'un champ de vecteurs.

Soient M une variété différentiable de dimension $n \geq 1$.

Définition 2.2.4. Un groupe de transformations à un paramètre est une application différentiable

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R} \times M & \longrightarrow & M \\ & (t, x) & \longmapsto & \phi(t, x) \end{array}$$

vérifiant

(i) $\phi(0, x) = x$;

(ii) $\phi(t + s, x) = \phi(t, \phi(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in M$

Soit ϕ un groupe de transformations à un paramètre, on peut construire un champ de vecteurs X_ϕ à partir de ϕ.
Pour tout $x \in M$, on pose

$$X_\phi(x) = [\phi(., x)]_{\mathfrak{R}_x} \in T_x M$$

En d'autres termes, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$X_\phi(f)(x) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi(t, x)) \mid_{t=0}$$

l'application

$$X_\phi : M \longrightarrow TM$$

est différentiable et plus précisément $X_\phi \in \mathfrak{X}(M)$.

Expression en coordonnées locales.

Soit (U, u) une carte de M de système de coordonnées $(x^1, ..., x^n)$ on a

$$X_\phi \mid_U = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ \phi(t, .))}{dt} \mid_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Proposition 2.2.3. *Soient $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ deux groupes de transformations à un paramètre. Si les champs de vecteurs X_ϕ et X_ψ sont égaux, alors*

$$\phi_t = \psi_t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Définition 2.2.5. Le champ de vecteurs X_ψ correspondant au groupe de transformations à un paramètre $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est appelé champ de vecteurs associé à ψ.

Groupe de transformations local à un paramètre.

Définition 2.2.6. Un groupe de transformations locales à un paramètre est un couple (D, ϕ) tel que :

(i) D est un voisinage ouvert de $\{0\} \times M$ dans $\mathbb{R} \times M$;

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\mathbb{R} \times M) \cap D$ est connexe ;

(iii) $\phi : D \longrightarrow M$ est différentiable et vérifie :

- (a) pour tout $x \in M$, $\phi(0, x) = x$;
- (b) pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, $x \in M$ tel que $(s, x) \in D$, $(t+s, x) \in D$, $(t, \phi(s, x)) \in D$, on a

$$\phi(t+s, x) = \phi(t, \phi(s, x))$$

Soient (D, ϕ) un groupe de transformations locales à un paramètre et $x \in M$, il existe $\epsilon_x > 0$ et un ouvert U de M tels que $]-\epsilon, \epsilon[\times U$ avec $x \in U$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \phi^x : &]-\epsilon, \epsilon[& \longrightarrow & M \\ & t & \longmapsto & \phi(t, x) \end{array}$$

ϕ^x est une courbe différentiable, on obtient un champ de vecteurs

$$\begin{array}{rccc} X_\phi : & M & \longrightarrow & TM \\ & x & \longmapsto & [\phi^x]_{\mathfrak{R}_x} \end{array}$$

appelée transformation de (D, ϕ)

Théorème 2.2.3. *Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des champs de vecteurs sur M et l'ensemble des groupes de transformations locales à un paramètre.*

Preuve. Voir [7] ■

Soit X un champ de vecteurs sur M, il existe (D,ϕ) un groupe local à un paramètre tel que $X = X_\phi$.

Définition 2.2.7. On l'appelle le flot du champ de vecteurs X l'application ϕ se note Fl^X.

En général, D est différent de $\mathbb{R}\times M$. Toute fois lorsque $D = \mathbb{R}\times M$, on dit que X est un champ de vecteurs complet.

2.3 Construction des fibrés vectoriels.

Soient (E_1, M, π_1) et (E_2, M, π_2) deux fibrés vectoriels de fibre type V_1 et V_2.

2.3.1 Fibré vectoriel $E_1 \otimes E_2$.

Pour tout $x \in M$, on définit le produit tensoriel des espaces vectoriels E_{1x} et E_{2x} qu'on note $E_{1x}\otimes E_{2x}$. On pose

$$E_1 \otimes E_2 = \bigcup_{x\in M} (E_{1x}\otimes E_{2x})$$

On définit alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \pi_1\otimes\pi_2 : & E_1\otimes E_2 & \to & M \\ & E_{1x}\otimes E_{2x} \ni h & \mapsto & x \end{array}$$

Plus précisément, pour $h = h_1 \otimes h_2 \in E_{1x}\otimes E_{2x}$, on a :

$$\pi_1\otimes\pi_2 (h_1\otimes h_2) = \pi_1(h_1) = \pi_2(h_2)$$

Proposition 2.3.1. *Le triplet $(E_1\otimes E_2, M, \pi_1\otimes\pi_2)$ est un fibré vectoriel réel de fibre type $V_1\otimes V_2$.*

Preuve. Voir [8] ■

Corollaire 2.3.1. *Soient E_1, E_2 et E_3 trois fibrés vectoriels de base M. On a :*

$$E_1\otimes E_2 \cong E_2\otimes E_1 \tag{2.3.1}$$

$$(E_1\otimes E_2)\otimes E_3 \cong E_1\otimes(E_2\otimes E_3) \tag{2.3.2}$$

$$(E_1\oplus E_2)\otimes E_3 \cong (E_1\otimes E_3)\oplus(E_2\otimes E_3) \tag{2.3.3}$$

Preuve. Voir [8] ■

Remarque 2.3.1. Pour une famille de fibrés vectoriels $(E_1, M, \pi_1), \cdots, (E_p, M, \pi_p)$ on définit compte tenu de l'équation (2.3.2) le fibré vectoriel

$$E = E_1 \otimes E_2 \otimes \cdots \otimes E_p$$

de base M. On note parfois

$$E = \bigotimes_{i=1}^{p} E_i$$

et sa projection canonique est notée

$$\bigotimes_{i=1}^{p} \pi_i : E \to M$$

Dans le cas particulier où $E_1 = \cdots = E_p = E$, le fibré vectoriel $\bigotimes\limits_{i=1}^{p} E_i$ est noté

$$\bigotimes^{p} E$$

et par $\bigotimes\limits^{p} \pi : \bigotimes\limits^{p} E \to M$ sa projection canonique.

2.3.2 Le fibré vectoriel Hom (E_1, E_2).

Pour tout $x \in M$, on désigne par $\mathrm{Hom}(E_{1x}, E_{2x})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des morphismes d'espaces vectoriels de E_{1x} vers E_{2x}. on pose

$$\mathrm{Hom}(E_1, E_2) = \bigcup_{x \in M} \mathrm{Hom}(E_{1x}, E_{2x})$$

On note par $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2) : \mathrm{Hom}(E_1, E_2) \to M$ la projection naturelle telle que

$$\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)^{-1}(x) = \mathrm{Hom}(E_{1x}, E_{2x})$$

Une trivialisation locale de $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$, peut s'obtenir de la manière suivante : pour (U, φ) et (U, ψ) des trivialisations locales de E_1 et E_2 respectivement au dessus de $U \ni x$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}(\varphi, \psi) : & \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)^{-1}(U) & \to & U \times \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \\ & \mathrm{Hom}(E_{1y}, E_{2y}) \ni g & \mapsto & \left(y, \psi_y \circ g \circ \varphi_y^{-1}\right) \end{array}$$

où $\varphi_y : E_{1y} \to V_1$ et $\psi_y : E_{2y} \to V_2$ sont des applications partielles deduites des trivialisations locales (U, φ) et (U, ψ) au point $y \in U$. On déduit ainsi le résultat suivant :

Théorème 2.3.1. *le triplet* $(\mathrm{Hom}(E_1, E_2), M, \mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2))$ *est un fibré vectoriel réel de fibre type* $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$.

Preuve. Voir [8] ■

Remarque 2.3.2. Dans le cas particulier où $E_2 = M \times \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{Hom}\,(E_1, M \times \mathbb{R}) \;=\; \bigcup_{x\in M} \mathrm{Hom}\,(E_{1x}, \{x\} \times \mathbb{R}) \cong \bigcup_{x\in M} \mathrm{Hom}\,(E_{1x}, \mathbb{R}) = \bigcup_{x\in M} E_{1x}^*$$

On pose alors

$$E_1^* = \bigcup_{x\in M} E_{1x}^*$$

On l'appelle fibré vectoriel dual de E_1 et on note par $\pi_1^* : E_1^* \to M$ sa projection canonique.

Proposition 2.3.2. *Soient (E_1, M, π_1), (E_2, M, π_2) et (E_3, M, π_3) trois fibrés vectoriels, on a :*

$$\mathrm{Hom}\,(E_1, E_2) \simeq E_1^* \otimes E_2 \tag{2.3.4}$$

$$\mathrm{Hom}\,(E_1 \otimes E_2, E_3) \simeq \mathrm{Hom}\,(E_1, \mathrm{Hom}\,(E_2, E_3)) \tag{2.3.5}$$

$$(E_1 \otimes E_2)^* \simeq \mathrm{Hom}\,(E_1, E_2^*) \simeq E_1^* \otimes E_2^* \tag{2.3.6}$$

$$(E_1^*)^* = E_1 \tag{2.3.7}$$

Preuve. Voir [8] ■

Remarque 2.3.3. Soit (E, M, π) un fibré vectoriel réel, par récurrence on a :

$$\left(\bigotimes^{p} E\right)^* = \bigotimes^{p} E^* \tag{2.3.8}$$

Proposition 2.3.3. *Soient E_1, E_2, E_3 et E_4 quatre fibrés vectoriels de même base M. On a :*

$$\mathrm{Hom}\,(E_1 \otimes E_2, E_3 \otimes E_4) \simeq \mathrm{Hom}\,(E_1, E_3) \otimes \mathrm{Hom}\,(E_2, E_3) \tag{2.3.9}$$

Preuve. Voir [8] ■

Remarque 2.3.4. Pour un fibré vectoriel réel E et pour $q \geq 2$, on construit le fibré vectoriel $\bigotimes^{q} E^*$ qu'on note souvent $\bigotimes_q^0 E$. En posant $\bigotimes^{1} E = E$ et $\bigotimes^0 E = M \times \mathbb{R}$, on pose pour tout $p, q \geq 0$

$$\bigotimes_q^p E = \left(\bigotimes^{p} E\right) \otimes \left(\bigotimes^{q} E^*\right)$$

On note par $\bigotimes_q^p \pi : \bigotimes_q^p E \to M$ la projection naturelle. Tenant compte de ce qui précède, on a :

$$\left(\bigotimes_q^p E\right)^* = \bigotimes_p^q E \tag{2.3.10}$$

Proposition 2.3.4. *Soit E un fibré vectoriel réel, on a :*

$$\bigotimes_q^p E \otimes \bigotimes_s^r E \simeq \bigotimes_{q+s}^{p+r} E$$

Preuve. Voir [8] ■

Remarque 2.3.5. Soit (E, M, π) un fibré vectoriel réel. Pour tout $x \in M$, E_x est un espace vectoriels, on peut construire les espaces vectoriels $\bigwedge^p E_x^*$ et $\bigodot^p E_x^*$. On construit ainsi les fibrés vectoriels

$$\bigwedge^p E^* = \bigcup_{x \in M} \bigwedge^p E_x^* \ et \ \bigodot^p E^* = \bigcup_{x \in M} \bigodot^p E_x^*$$

On rappelle que pour un espace vectoriel V de dimension finie m, $\bigwedge^p V^*$ et $\bigodot^p V^*$ désigne l'ensemble des formes p-linéaires alternées (resp. symétriques). En remplaçant E^* par son fibré vectoriel dual E, on a :

$$\bigwedge^p E = \bigcup_{x \in M} \bigwedge^p E_x \ et \ \bigodot^p E = \bigcup_{x \in M} \bigodot^p E_x$$

Pour $s_1, s_2, \cdots, s_p \in E_x$, on a :

$$s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_p = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma) s_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes s_{\sigma(p)} \tag{2.3.11}$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ et $\mathfrak{S}_m$ est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \cdots, m\}$.

En prenant $E = TM$, on forme les fibrés vectoriels $\bigwedge^p TM$ et $\bigwedge^p T^*M$. Une section de $\bigwedge^p TM$ est appelée un p-champ de vecteurs tandis qu'une section de $\bigwedge^p T^*M$ est appelée une forme différentielle de degré p.

2.4 Champs de tenseurs sur un fibré vectoriel réel.

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel réel de fibre type V. On note par $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections différentiables de E ; lorsque $E = TM$, on note $\mathfrak{X}(M)$ et lorsque $E = \bigwedge^p T^*M$, on note $\Omega^p(M)$ avec $p \leq dimM$. Pour tout entier p, q on a définit le fibré vectoriel $(\bigotimes_q^p E, M, \bigotimes_q^p \pi)$.

2.4.1 Définitions et exemples

Pour tout entier p, q on considère le fibré vectoriel $\left(\bigotimes_q^p E, M, \bigotimes_q^p \pi\right)$.

Définition 2.4.1. On appelle champ de tenseur sur E, toute section différentiable du fibré vectoriel $\left(\bigotimes_q^p E, M, \bigotimes_q^p \pi\right)$.

Soit $\alpha \in \Gamma\left(\bigotimes_q^p E\right)$, Si $p = 0$, on dit que α un champ de tenseur q-fois covariant sur E. Si $q = 0$, on dit que α est p-fois contravariant sur E. De manière générale, lorsque $p \neq 0$ et $q \neq 0$, on dit que α est un champ de tenseur de type (p, q) sur E ou champ de tenseur p-fois contravariant et q-fois covariant.

Remarque 2.4.1. Lorsque $E = TM$, un champ de tenseur de type (p, q) sur TM est appelé champ de tenseur de type (p, q) sur M.

Exemple 2.4.1. *Soit* (E, M, π) *un fibré vectoriel. Une section différentiable de* E *est un champ de tenseur* 1*-fois contravariant sur* E*. En particulier, un champ de vecteurs est un champ de tenseur* 1*-fois contravariant sur* M*.*

Exemple 2.4.2. *Soit* (E, M, π) *un fibré vectoriel et* $u : E \to E$ *un* M*-morphisme de fibrés vectoriels. Donc* u *est une section différentiable de* $Hom(E, E) = E^* \otimes E$*. Plus précisément,* $u \in \Gamma\left(\bigotimes_1^1 E\right)$ *et par conséquent* u *est un champ de tenseur de type* $(1, 1)$*.*

Soit (E, M, π) un fibré vectoriel, pour tout $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ et $g \in C^\infty(M)$, on pose : pour tout $x \in M$,

$$\begin{cases} (s_1 + s_2)(x) & = & s_1(x) + s_2(x) \\ et & & \\ (g \cdot s_1)(x) & = & g(x) \cdot s_1(x) \end{cases}$$

Il est clair que $s_1 + s_2 \in \Gamma(E)$ et $g \cdot s_1 \in \Gamma(E)$. On déduit ainsi les opérations

$$\begin{array}{rccc} + : & \Gamma(E) \times \Gamma(E) & \to & \Gamma(E) \\ & (s_1, s_2) & \mapsto & s_1 + s_2 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \centerdot : & C^\infty(M) \times \Gamma(E) & \to & \Gamma(E) \\ & (g, s) & \mapsto & g \cdot s \end{array}$$

Le triplet $(\Gamma(E), +, \centerdot)$ a une structure de $C^\infty(M)$-module.

Remarque 2.4.2. Soit U un ouvert de M, on note par $\Gamma_U(E)$ le $C^\infty(U)$-module des sections différentiables au dessus de U. On a : pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U_x de M contenant x tel que $\Gamma_{U_x}(E)$ soit de type fini. On dit que $\Gamma(E)$ est localement fini.

2.4.2 Applications p-linéaires sur le $\mathcal{C}^\infty(M)$-module $\Gamma(E)$.

Soient (E, M, π) un fibré vectoriel de fibre type V et un entier $p \geq 2$.

Définition 2.4.2. Une application $\varphi : \Gamma(E) \times \cdots \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$ est dite p-linéaire si : pour tout $s_1, \cdots, s_p \in \Gamma(E)$ et pour tout $i = 1, \cdots, p$ l'application partielle

$$\begin{array}{rccc} \varphi(s_1, \cdots, s_{i-1}, \cdot, s_{i+1}, \cdots, s_p) : & \Gamma(E) & \to & C^\infty(M) \\ & s & \mapsto & \varphi(s_1, \cdots, s_{i-1}, s, s_{i+1}, \cdots, s_p) \end{array}$$

est $C^\infty(M)$-linéaire.

Soit $\alpha \in \Gamma\left(\bigotimes_p^0 E\right) = \Gamma\left(\bigotimes^p E^*\right)$, pour tous $s_1, \cdots, s_p \in \Gamma(E)$, on pose :

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\alpha}(s_1, \cdots, s_p) : & M & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \alpha(x)(s_1(x), \cdots, s_p(x)) \end{array}$$

Lemme 2.4.1. *L'application* $\widetilde{\alpha}(s_1, \cdots, s_p) : M \to \mathbb{R}$ *est de classe* $C^\infty(M)$.

Preuve. Soit $x \in M$, il existe U un ouvert de M contenant x une base de sections $\{\varepsilon_i\}_{1\leq i\leq n}$ de E au dessus de U. Donc pour tout $i = 1, \cdots, p$,

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} g_i^j \varepsilon_j$$

où $g_i^j \in C^\infty(U)$. On note par $\{\varepsilon^i\}_{1\leq i\leq n}$ la base de sections de E^* au dessus de U tel que : pour tout $y \in U$, $\{\varepsilon^i(y)\}_{1\leq i\leq n}$ est la base duale de $\{\varepsilon_i(y)\}_{1\leq i\leq n}$. On a :

$$\alpha\,|_U = \alpha_{i_1\cdots i_p}\varepsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{i_p}$$

où $\alpha_{i_1\cdots i_p} \in C^\infty(U)$. On a : pour tout $y \in U$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}(s_1, \cdots, s_p)(y) &= \alpha(y)\left(g_1^{j_1}\varepsilon_{j_1}, \cdots, g_p^{j_p}\varepsilon_{j_p}\right) \\
&= g_1^{j_1}(y)\cdots g_p^{j_p}(y)\,\alpha(y)\left(\varepsilon_{j_1}(y), \cdots, \varepsilon_{j_p}(y)\right) \\
&= g_1^{j_1}(y)\cdots g_p^{j_p}(y)\,\alpha_{j_1\cdots j_p}(y)
\end{aligned}$$

Donc

$$\widetilde{\alpha}(s_1, \cdots, s_p)\,|_U = g_1^{j_1}\cdots g_p^{j_p}\alpha_{j_1\cdots j_p}$$

ce qui montre que $\widetilde{\alpha}(s_1, \cdots, s_p)$ est de classe C^∞. ■

On définit ainsi une application

$$\begin{array}{rccc}
\widetilde{\alpha}: & \Gamma(E) \times \cdots \times \Gamma(E) & \to & C^\infty(M) \\
& (s_1, \cdots, s_p) & \mapsto & \widetilde{\alpha}(s_1, \cdots, s_p)
\end{array}$$

Lemme 2.4.2. *L'application* $\widetilde{\alpha} : \Gamma(E) \times \cdots \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$ *est p-linéaire au sens des modules.*

Preuve. Soient $s, s_1, s_2, \cdots, s_p \in \Gamma(E)$ et $g \in C^\infty(M)$, on a : pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}(s + s_1, \cdots, s_p)(x) &= \alpha(x)\left(s(x) + s_1(x), s_2(x), \cdots, s_p(x)\right) \\
&= \alpha(x)\left(s(x), s_2(x), \cdots, s_p(x)\right) + \alpha(x)\left(s_1(x), s_2(x), \cdots, s_p(x)\right) \\
&= \widetilde{\alpha}(s, \cdots, s_p)(x) + \widetilde{\alpha}(s_1, \cdots, s_p)(x) \\
&= \left(\widetilde{\alpha}(s, \cdots, s_p) + \widetilde{\alpha}(s_1, \cdots, s_p)\right)(x)
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\widetilde{\alpha}(s + s_1, \cdots, s_p) = \widetilde{\alpha}(s, \cdots, s_p) + \widetilde{\alpha}(s_1, \cdots, s_p)$$

De même,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}(g \cdot s_1, \cdots, s_p)(x) &= \alpha(x)\left(g(x) \cdot s_1(x), s_2(x), \cdots, s_p(x)\right) \\
&= g(x)\,\alpha(x)\left(s_1(x), s_2(x), \cdots, s_p(x)\right) \\
&= \left(g \cdot \widetilde{\alpha}(g \cdot s_1, \cdots, s_p)\right)(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\widetilde{\alpha}\left(g \cdot s_1, \cdots, s_p\right) = g \cdot \widetilde{\alpha}\left(g \cdot s_1, \cdots, s_p\right)$$

■

On note par $\mathcal{A}^p_{C^\infty(M)}\left(\Gamma\left(E\right)\right)$; elle a une structure de $C^\infty\left(M\right)$-module définie pour tout $h \in \Gamma\left(E\right) \times \cdots \times \Gamma\left(E\right)$ par :

$$\begin{cases} \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)(h) & = & \alpha_1\left(h\right) + \alpha_2\left(h\right) \\ \\ \left(g \cdot \alpha_1\right)(h) & = & g \cdot \alpha_1\left(h\right) \end{cases}$$

de ce qui précède, on déduit une application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \Gamma\left(\bigotimes^0_p E\right) & \to & \mathcal{A}^p_{C^\infty(M)}\left(\Gamma\left(E\right)\right) \\ & \alpha & \mapsto & \widetilde{\alpha} \end{array}$$

Théorème 2.4.1. *L'application $\Phi : \Gamma\left(\bigotimes^0_p E\right) \to \mathcal{A}^p_{C^\infty(M)}\left(\Gamma\left(E\right)\right)$ est un isomorphisme de $C^\infty\left(M\right)$-modules.*

Avant d'établir la preuve de ce résultat, nous avont besoin des résultats suivants :

Lemme 2.4.3. *Soit M une variété, U et V des ouverts de M tels que $\overline{V} \subset U$. Il existe une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ différentiable telle que : pour tout $x \in M$, $0 \leq f\left(x\right) \leq 1$, $f\mid_V \equiv 1$ et $f\mid_{M-U} \equiv 0$*

Preuve. Voir [8] ■

Lemme 2.4.4. *Soit $x \in M$ et $h_x \in E_x$, il existe une section $s \in \Gamma\left(E\right)$ telle que :*

$$s\left(x\right) = h_x$$

Preuve. Soit $x \in M$, il existe in ouvert U de M en x et une famille de sections $\{s_1, \cdots, s_n\}$ telle que, $\left(s_1\left(y\right), \cdots, s_n\left(y\right)\right)$ soit une base de E_y pour tout $y \in U$. Comme $h_x \in E_x$, on a :

$$h_x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j s_j\left(x\right)$$

On pose

$$\widetilde{s} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j s_j$$

Comme M est localement fermé, il existe F un fermé contenu dans M et contenu dans U qui soit un voisinage de x. Il existe V un ouvert tel que $V \subset F \subset U$ et par conséquent $V \subset \overline{V} \subset F \subset U$. Il existe f une fonction pour tout $x \in M$, $0 \leq f\left(x\right) \leq 1$, $f\mid_V \equiv 1$ et $f\mid_{M-U} \equiv 0$. On pose

$$s\left(y\right) = \begin{cases} \left(f \cdot \widetilde{s}\right)(y) & \text{si} \quad y \in V \\ 0 & \text{si} \quad y \notin U \end{cases}$$

il est clair que $f \cdot \widetilde{s} \in \Gamma(E)$ et on a : $s(x) = h_x$.

Soit $\alpha : \Gamma(E) \times \cdots \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$ une application p-linéaire. Pour tout $x \in M$ et $h_x^1, \cdots, h_x^p \in E_x$, on pose :

$$\widehat{\alpha(x)}\left(h_x^1, \cdots, h_x^p\right) = \alpha(s_1, \cdots, s_p)(x)$$

où $s_i(x) = h_x^i$. On obtient ainsi une application

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\alpha(x)} : & E_x \times \cdots \times E_x & \to & \mathbb{R} \\ & (h_x^1, \cdots, h_x^p) & \mapsto & \alpha(s_1, \cdots, s_p)(x) \end{array}$$

On va montrer que $\widehat{\alpha(x)}$ est bien définie. ■

Lemme 2.4.5. *Soient $s_1, \cdots, s_p \in \Gamma(E)$ tels qu'il existe $i \leq p$ vérifiant $s_i \mid_U \equiv 0$, alors*

$$\alpha(s_1, \cdots, s_p) \mid_U \equiv 0$$

<u>Preuve</u>. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $s_1 \mid_U \equiv 0$. Il existe $g \in C^\infty(M)$ tel que $x \in M$, $0 \leq g(x) \leq 1$, $g \mid_V \equiv 1$ et $g \mid_{M-U} \equiv 0$. On a : $g \cdot s_1 \equiv 0$. Ainsi, pour tout $y \in U$,

$$\alpha(g \cdot s_1, s_2, \cdots, s_p)(y) = 0 = g(y) \cdot \alpha(s_1, s_2, \cdots, s_p)(y) = \alpha(s_1, s_2, \cdots, s_p)(y)$$

Ce qui montre que,

$$\alpha(s_1, s_2, \cdots, s_p)(y) = 0$$

pour tout $y \in U$. ■

Lemme 2.4.6. *Soient $s_1, s_1' \cdots, s_p \in \Gamma(E)$ tels qu'il existe $i \leq p$ vérifiant $s_1 \mid_U \equiv s_1' \mid_U$, alors*

$$\alpha(s_1, \cdots, s_p) \mid_U = \alpha(s_1', \cdots, s_p) \mid_U$$

<u>Preuve</u>. On a : $s_1 \mid_U \equiv s_1' \mid_U$, i.e. $s_1 - s_1' \mid_U \equiv 0$. Donc,

$$\alpha(s_1, \cdots, s_p) \mid_U = \alpha(s_1', \cdots, s_p) \mid_U$$

■

Lemme 2.4.7. *Soient $s_1, s_1' \cdots, s_p \in \Gamma(E)$ tels qu'il existe $i \leq p$ vérifiant $s_1(x) \equiv s_1'(x)$, alors*

$$\alpha(s_1, \cdots, s_p)(x) = \alpha(s_1', \cdots, s_p)(x)$$

Ce résultat montre que l'application $\widehat{\alpha(x)}$ est bien définie. On a évidemment $\widehat{\alpha(x)} \in \bigotimes_p^0 E_x$. On obtient une application

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\alpha} : & M & \to & \bigotimes_p^0 E \\ & x & \mapsto & \widehat{\alpha(x)} \end{array}$$

On a clairement,

$$\bigotimes_p^0 \pi \circ \widehat{\alpha} = id_M$$

Lemme 2.4.8. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\alpha}: & M & \to & \bigotimes_p^0 E \\ & x & \mapsto & \widehat{\alpha(x)} \end{array}$$

est différentiable.

Preuve. Voir [8] ■

Preuve du théorème 2.4.1 L'application $\Phi : \Gamma\left(\bigotimes_p^0 E\right) \to \mathcal{A}^p_{C^\infty(M)}(\Gamma(E))$ est une bijection de bijection réciproque

$$\begin{array}{rccc} \Phi^{-1}: & \mathcal{A}^p_{C^\infty(M)}(\Gamma(E)) & \to & \Gamma\left(\bigotimes_p^0 E\right) \\ & \alpha & \mapsto & \widehat{\alpha} \end{array}$$

et on a :

$$\begin{cases} \Phi(\alpha+\beta) &= \Phi(\alpha)+\Phi(\beta) \\ \\ \Phi(g\cdot\alpha) &= g\cdot\Phi(\alpha) \end{cases}$$

En effet, pour tous $x \in M$ et $s_1, \cdots, s_p \in \Gamma(E)$,

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha+\beta)(s_1,\cdots,s_p)(x) &= (\alpha+\beta)(x)(s_1(x),\cdots,s_p(x)) \\ &= \alpha(x)(s_1(x),\cdots,s_p(x)) + \beta(x)(s_1(x),\cdots,s_p(x)) \\ &= \widetilde{\alpha}(s_1,\cdots,s_p)(x) + \widetilde{\beta}(s_1,\cdots,s_p)(x) \\ &= (\Phi(\alpha)+\Phi(\beta))(s_1,\cdots,s_p)(x) \end{aligned}$$

L'autre cas se démontre de la même façon.

Remarque 2.4.3. Au moyen de cet isomorphisme de $C^\infty(M)$-modules, on identifie $\Gamma\left(\bigotimes_p^0 E\right)$ à $\mathcal{A}^p_{C^\infty(M)}(\Gamma(E))$ de sorte que, pour $\alpha \in \Gamma\left(\bigotimes_p^0 E\right)$, on peut l'écrire comme une application $\Gamma(E)\times\cdots\times\Gamma(E) \to C^\infty(M)$ p-linéaire qu'on note encore α.

Soit $\alpha \in \Gamma\left(\bigotimes_q^p E\right)$, pour $s_1, \cdots, s_q$ on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \alpha(s_1,\cdots,s_q): & \Gamma(E^*)\times\cdots\times\Gamma(E^*) & \to & C^\infty(M) \\ & (s_1^*,\cdots,s_q^*) & \mapsto & \left\langle \alpha(s_1,\cdots,s_q), s_1^*\otimes\cdots\otimes s_q^* \right\rangle \end{array}$$

où pour tout $x \in M$,

$$\left\langle \alpha(s_1,\cdots,s_q), s_1^*\otimes\cdots\otimes s_p^* \right\rangle(x) = \alpha(x)\left(s_1(x),\cdots,s_q(x),s_1^*(x),\cdots,s_p^*(x)\right)$$

Il est clair que $\alpha(s_1,\cdots,s_q) \in \Gamma(\bigotimes^p E)$, on déduit une application

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\alpha}: & \Gamma(E)\times\cdots\times\Gamma(E) & \to & \Gamma(\bigotimes^p E) \\ & (s_1,\cdots,s_q) & \mapsto & \alpha(s_1,\cdots,s_q) \end{array}$$

qui est q-linéaire à valeurs dans le $C^{\infty}(M)$-module $\Gamma\left(\bigotimes^p E\right)$. On note par $\mathcal{A}^q_{C^{\infty}(M)}\left(\Gamma(E), \Gamma\left(\bigotimes^p E\right)\right)$ l'ensemble des applications q-lineaires à valeurs dans $\Gamma\left(\bigotimes^p E\right)$; elle a une structure canonique de $C^{\infty}(M)$-module.

Corollaire 2.4.1. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \Gamma\left(\bigotimes^p E\right) & \to & \mathcal{A}^q_{C^{\infty}(M)}\left(\Gamma(E), \Gamma\left(\bigotimes^p E\right)\right) \\ & \alpha & \mapsto & \widehat{\alpha} \end{array}$$

est un isomorphisme de $C^{\infty}(M)$-modules.

Soit $\alpha \in \Omega^p(M)$, en vertu du corollaire précédant, l'application $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ est $\mathbb{R}$-linéaire en particulier pour $p = 1$ l'application $\alpha : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ est linéaire. Toute forme différentiable de degré sur M s'identifie à une forme $\mathcal{C}^{\infty}(M)$-linéaire sur $\mathfrak{X}(M)$.

Champs de tenseurs canoniques sur le fibré tangent.

3.1 Relèvement tangent des champs de vecteurs.

3.1.1 Relèvement complet des champs de vecteurs.

Soit X un champ de vecteurs sur M. On désigne par Fl^X le flot du champ de vecteurs X. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que X est complet. On pose :

$$\begin{array}{rccc} Fl^X : & \mathbb{R}\times M & \longrightarrow & M \\ & (t,x) & \longmapsto & Fl_t^X(x) \end{array}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi_t : & TM & \longrightarrow & TM \\ & v & \longmapsto & T(Fl_t^X)(v) \end{array}$$

ϕ_t est bien définie et on a :

Proposition 3.1.1. *La famille $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est le groupe à un paramètre d'un champ de vecteurs que nous notons $X^{(c)}$.*

Preuve. Soit $t, s \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi_{t+s}(v) = T(Fl_{t+s}^X)(v) = T(Fl_t^X \circ Fl_s^X)(v) = T(Fl_t^X)\circ T(Fl_s^X)(v) = \phi_t \circ \phi_s(v)$$

Et on a $\phi_0(v) = T(Fl_0^X)(v) = T(Id_M)(v) = Id_M(v)$. Ainsi $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un flot d'un champ de vecteurs. ■

Exemple 3.1.1. *On prend $M = \mathbb{R}^2$ et X un champ de vecteurs tel que :*

$$\begin{array}{rccc} X : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$$

Et $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$. *On a*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

Donc $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt} = x$ *c'est-à-dire que* $\dfrac{d^2x}{dt^2} - x = 0$. *L'équation homogène de cet équation différentielle est* $r^2 - 1 = 0$ *qui admet* $r_1 = -1$ *et* $r_2 = 1$ *comme solutions.*
Ainsi la solution de l'équation $\dfrac{d^2x}{dt^2} - x = 0$ *est* $x(t) = Ae^t + Be^{-t}$.
On a : $\dfrac{dy}{dt} = x(t) = Ae^t + Be^{-t}$ *c'est-à-dire que* $y(t) = Ae^t - Be^{-t}$.
Or $x(0) = x$ *et* $y(0) = 0$.
Donc

$$\begin{cases} x(0) = A + B = x \\ y(0) = A - B = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{x+y}{2} \\ B = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$$

D'où $x(t) = \dfrac{(x+y)}{2}e^t + \dfrac{(x-y)}{2}e^{-t}$ *et* $y(t) = \dfrac{(x+y)}{2}e^t - \dfrac{(x-y)}{2}e^{-t}$. *On pose*

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t,(x,y)) & \longmapsto & (\dfrac{(x+y)}{2}e^t + \dfrac{(x-y)}{2}e^{-t}, \dfrac{(x+y)}{2}e^t - \dfrac{(x-y)}{2}e^{-t}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} \phi_t : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (\dfrac{(x+y)}{2}e^t + \dfrac{(x-y)}{2}e^{-t}, \dfrac{(x+y)}{2}e^t - \dfrac{(x-y)}{2}e^{-t}) \end{array}$$

On a :

$$\begin{aligned} \phi_t(x,y) &= (\frac{(x+y)}{2}e^t + \frac{(x-y)}{2}e^{-t}, \frac{(x+y)}{2}e^t - \frac{(x-y)}{2}e^{-t}) \\ &= (\frac{(e^t+e^{-t})}{2}x + \frac{(e^t-e^{-t})}{2}y, \frac{(e^t-e^{-t})}{2}x + \frac{(e^t+e^{-t})}{2}y) \\ &= (x.ch(t) + y.sh(t), x.sh(t) + y.ch(t)) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Donc on a la matrice Jacobienne de ϕ_t

$$J(\phi_t) = \begin{bmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{bmatrix}$$

$|J(\phi_t)| = ch^2(t) - sh^2(t) = 1$.
On a : $T(\phi_t)(x,y,\dot{x},\dot{y}) = (x, y, \dot{x}ch(t) + \dot{y}sh(t), \dot{x}sh(t) + \dot{y}ch(t))$
et $X = A\dfrac{\partial}{\partial x} + B\dfrac{\partial}{\partial y} + C\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}} + D\dfrac{\partial}{\partial \dot{y}}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} \mid_{t=0} = A \\ \\ \dfrac{dy}{dt} \mid_{t=0} = B \\ \\ \dfrac{d\dot{x}}{dt} \mid_{t=0} = C \\ \\ \dfrac{d\dot{y}}{dt} \mid_{t=0} = D \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = x \\ B = y \\ C = \dot{x} \\ D = \dot{y} \end{cases}$$

Donc $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y} + \dot{x}\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\dfrac{\partial}{\partial \dot{y}}$.

Remarque 3.1.1. (Expression en coordonnées locales de $X^{(c)}$.) Soit (U, φ) une carte de M de système de coordonnées locales $(x^1, ..., x^n)$, (x^i, y^i) celui de TM induit. Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$. On a :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$X^{(c)} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\dot{x}^k \frac{\partial}{\partial y^i}$$

3.1.2 Relèvement vertical des champs de vecteurs.

Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi_t : & TM & \longrightarrow & TM \\ & v & \longmapsto & v + tX(\pi(v)) \end{array}$$

Proposition 3.1.2. *La famille* $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *est le groupe à un paramètre d'un champ de vecteurs que nous notons* $X^{(v)}$ *sur* TM.

<u>Preuve</u>. Soit $t, s \in \mathbb{R}$ on a :

$$\phi_{t+s}(v) = v + (t+s)X(\pi(v)) \quad = \quad v + tX(\pi(v)) + sX(\pi(v)) \tag{3.1.2}$$

Or

$$\phi_t \circ \phi_s(v) = \phi_t(\phi_s(v)) = \phi_t(v + sX(\pi(v))) \quad = \quad v + sX(\pi(v)) + tX(\pi(v)) \tag{3.1.3}$$

Donc d'après (3.1.2) et (3.1.3), on a $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$

Par ailleurs $\phi_0(v) = v + 0 \times X(\pi(v)) = v$ c'est-à-dire $\phi_0 = Id_{TM}$.

Ainsi $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est le groupe global à un paramètre d'un champ de vecteurs $X^{(v)}$. ■

Exemple 3.1.2. *Pour* $M = \mathbb{R}^2$, $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$
On a :

$$\phi_t : T\mathbb{R}^2 \longrightarrow T\mathbb{R}^2, \quad (x, y, \dot{x}, \dot{y}) \longmapsto (x, y, (\dot{x}, \dot{y}) + t(y, x))$$

Donc

$$\phi_t(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (x, y, (\dot{x}, \dot{y}) + t(y, x)) \quad = \quad (x, y, \dot{x} + ty, \dot{y} + tx) \tag{3.1.4}$$

Ainsi $X = y\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}} + x\dfrac{\partial}{\partial \dot{y}}$

Remarque 3.1.2. Soit (U, φ) une carte de M de système de coordonnées locales $(x^1, ..., x^n)$.
En effet, soit X un champ de vecteurs sur M. Pour (U, x^i) un système local de M, On a

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Par conséquent dans le système de coordonnées induit (x^i, y^i) sur TM, on a :

$$X^{(v)} = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

3.1.3 Propriétés des relèvements des champs de vecteurs.

Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on considère les fonctions $g^{(v)} = g \circ \pi_M$ et $g^{(c)} : TM \longrightarrow M$ telles que :

$$\begin{cases} g^{(v)}(v) = g(\pi_M([\gamma])) \\ g^{(c)}([\gamma]) = \dfrac{d}{dt}(g \circ \gamma)(t) \mid_{t=0} \end{cases} \qquad \forall [\gamma] \in TM$$

$g^{(c)}$ et $g^{(v)}$ sont des applications différentiables sur TM et on a :

Théorème 3.1.1. *Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur TM tels que*

$$\begin{cases} X(g^{(c)}) = Y(g^{(c)}) \\ X(g^{(v)}) = Y(g^{(v)}) \end{cases} \qquad \forall g \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

alors $X = Y$.

Preuve. Soit $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, dans la carte (U, x^i) de M, on a

$$\begin{cases} X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + X_1^i \dfrac{\partial}{\partial y^i} \\ Y = Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + Y_1^i \dfrac{\partial}{\partial y^i} \end{cases}$$

D'autres part, pour $x^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$ la i-ème fonction de coordonnées, on a $(x^i)^{(v)} = x^i \circ \pi_M$ et $(x^i)^{(c)} = y^i$
Ainsi $X((x^i)^{(v)}) = X^i$ et $Y((x^i)^{(v)}) = Y^i$ donc $X^i = Y^i$
De même, $X((x^i)^{(c)}) = X(y^i) = X_1^i$ et $Y((x^i)^{(v)}) = Y(y^i) = Y_1^i$ donc $X_1^i = Y_1^i$
Ainsi, $X = Y$ sur U d'où $X = Y$. ∎

Définition 3.1.1. Les fonctions $g^{(v)}$ et $g^{(c)}$ sont appelées relèvement complet(respectivement vertical) de la fonction g.

Proposition 3.1.3. *Soit X un champ de vecteurs sur M.*

(i) *le champ de vecteurs $X^{(c)}$ est l'unique champ de vecteurs sur TM vérifiant :*

$$\begin{cases} X^{(c)}(g^{(c)}) = (X(g))^{(c)} \\ X^{(c)}(g^{(v)}) = (X(g))^{(v)} \end{cases} \qquad \forall g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$$

(ii) *le champ de vecteurs $X^{(v)}$ est l'unique champ de vecteurs sur TM vérifiant :*

$$\begin{cases} X^{(v)}(g^{(c)}) = (X(g))^{(v)} \\ X^{(v)}(g^{(v)}) = 0 \end{cases} \qquad \forall g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$$

Théorème 3.1.2. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *on a :*

(i) $[X^{(c)}, Y^{(c)}] = [X, Y]^{(c)}$

(ii) $[X^{(v)}, Y^{(c)}] = [X^{(c)}, Y^{(v)}] = [X, Y]^{(v)}$

(iii) $[X^{(v)}, Y^{(v)}] = 0$

(iv) $(fX)^{(c)} = f^{(v)}X^{(c)} + f^{(c)}X^{(v)}$

Preuve. Soit $g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$, on a

$$\begin{aligned} [X^{(c)}, Y^{(c)}](g^{(c)}) &= X^{(c)}(Y^{(c)}(g^{(c)})) - Y^{(c)}(X^{(c)}(g^{(c)})) = \Big(X(Y(g))\Big)^{(c)} - \Big(Y(X(g))\Big)^{(c)} \\ &= \Big(X \circ Y(g) - Y \circ X(g)\Big)^{(c)} = ([X, Y](g))^{(c)} = [X, Y]^{(c)}(g^{(c)}) \end{aligned}$$

.De même

$$\begin{aligned} [X^{(c)}, Y^{(c)}](g^{(v)}) &= X^{(c)}(Y^{(c)}(g^{(v)})) - Y^{(c)}(X^{(c)}(g^{(v)})) = X^{(c)}\Big(Y(g)\Big)^{(v)} - Y^{(c)}\Big(Y(g)\Big)^{(v)} \\ &= \Big(X \circ Y(g) - Y \circ X(g)\Big)^{(v)} = ([X, Y](g))^{(v)} = [X, Y]^{(c)}(g^{(v)}) \end{aligned}$$

Donc $[X, Y]^{(c)} = [X^{(c)}, Y^{(c)}]$.

On démontre (ii) et (iii) de la même manière.

Montrons (iv), soit $g \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$, on a

$$\begin{aligned} (fX)^{(c)}(g^{(c)}) &= (fX(g))^{(c)} = f^{(v)}(X(g))^{(c)} + f^{(c)}(X(g))^{(v)} = f^{(v)}X^{(c)}(g^{(c)}) + f^{(c)}X^{(v)}(g^{(c)}) \\ &= (f^{(v)}X^{(c)} + f^{(c)}X^{(v)})(g^{(c)}) \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} (fX)^{(c)}(g^{(v)}) &= (fX(g))^{(v)} = f^{(v)}(X(g))^{(v)} = f^{(v)}X^{(c)}(g^{(v)}) = f^{(v)}X^{(c)}(g^{(v)}) + f^{(c)}X^{(v)}(g^{(v)}) \\ &= (f^{(v)}X^{(c)} + f^{(c)}X^{(v)})(g^{(v)}) \end{aligned}$$

Donc $(fX)^{(c)} = f^{(v)}X^{(c)} + f^{(c)}X^{(v)}$ ■

Théorème 3.1.3. *L'ensemble* $\{X^{(c)}, X^{(v)} : X \in \mathfrak{X}(M)\}$ *engendre le* $\mathcal{C}^\infty(TM)$*-module* $\mathfrak{X}(TM)$*.*

Remarque 3.1.3. Dans ce théorème nous avons utilisé le fait que les applications

$$\begin{array}{rccc} \phi_1 : & \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & g & \longmapsto & g^{(c)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \phi_2 : & \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & g & \longmapsto & g^{(v)} \end{array}$$

sont $\mathbb{R}$-linéaire.

3.2 Relèvement tangent des formes différentielles.

3.2.1 Relèvement tangent des formes différentielles de degré 1.

Soit M un variété différentiable de dimension $n \geq 1$.

Théorème 3.2.1. *Soient* α *et* β *deux formes différentielles de degré 1 sur* TM*. Si* $\alpha(X^{(c)}) = \beta(X^{(c)})$ *et* $\alpha(X^{(v)}) = \beta(X^{(v)})$*, pour tout* $X \in \mathfrak{X}(M)$*, alors*

$$\alpha = \beta$$

Preuve. Soit (U, u) une carte de M de système de coordonnées $(x^1, ..., x^n)$. On désigne par (x^i, y^i) le système de coordonnées de TM. On pose

$$\alpha\mid_U = \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_0^i dx^i + \alpha_1^i dy^i\right) \text{ et } \beta\mid_U = \sum_{i=1}^{n}\left(\beta_0^i dx^i + \beta_1^i dy^i\right)$$

Pour $X = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, on a $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)^{(c)} = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ et $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)^{(v)} = \dfrac{\partial}{\partial y^i}$

$$\alpha\left((\frac{\partial}{\partial x^i})^{(c)}\right) = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \alpha_0^i \text{ et } \beta\left((\frac{\partial}{\partial x^i})^{(c)}\right) = \beta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \beta_0^i$$

on déduit que $\beta_0^i = \alpha_0^i$. De même

$$\alpha\left((\frac{\partial}{\partial x^i})^{(v)}\right) = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \alpha_1^i \text{ et } \beta\left((\frac{\partial}{\partial x^i})^{(v)}\right) = \beta\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \beta_1^i$$

donc $\beta_0^i = \alpha_0^i$. Ainsi $\alpha\mid_U = \beta\mid_U$ pour tout ouvert U de M. Par conséquent $\alpha = \beta$. ∎

Théorème 3.2.2. *Soit* θ *une forme différentielle de degré 1 sur* M*. Il existe une et une seule forme différentielle* $\theta^{(c)}$ *sur* TM *tel que :*

$$\begin{cases} \theta^{(c)}(X^{(v)}) = \Big(\theta(X)\Big)^{(v)} \\ \theta^{(c)}(X^{(c)}) = \Big(\theta(X)\Big)^{(c)} \end{cases} \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Preuve. Si $\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i dx^i$, en écrivant $\theta^{(c)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i dx^i + \beta_i dy^i\right)$ on a

$$\theta^{(c)}(\frac{\partial}{\partial y^i}) = \theta^{(c)}\left((\frac{\partial}{\partial x^i})^{(v)}\right) = \left(\theta(\frac{\partial}{\partial x^i})\right)^{(v)} = \left(\theta_i\right)^{(v)} = \theta_i \circ \pi_M$$

$$\theta^{(c)}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \left(\theta(\frac{\partial}{\partial x^i})\right)^{(c)} = \left(\theta_i\right)^{(c)} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^i} y^i = \alpha_i$$

donc $\theta^{(c)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \theta^i}{\partial x^i} y^i dx^i + \theta_i dy^i\right)$ ■

Théorème 3.2.3. *Soit θ une forme différentielle de degré 1 sur M. Il existe une et une seule forme différentielle $\theta^{(v)}$ sur TM tel que :*

$$\begin{cases} \theta^{(v)}(X^{(v)}) = 0 \\ \theta^{(v)}(X^{(c)}) = \left(\theta(X)\right)^{(v)} \end{cases} \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

Expression en coordonnées locales.

Soit (U, ϕ) une carte de M de système de coordonnées locales $(x^1, ..., x^n)$.
Si

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i dx^i$$

alors

$$\theta^{(v)} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i dx^i$$

3.3 Champs de tenseurs canoniques sur le fibré tangent.

3.3.1 Champs d'*Euler*.

Soit M une variété différentiable de dimension $n \geq 1$. On désigne par TM le fibré tangent de M. Soit $(x^1, ..., x^n)$ un système de coordonnées locales de M et $(x^i, y^i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que :

$$\begin{cases} x^i([\gamma]) = x^i(\gamma(0)) = x^i \circ \pi_M \\ y^i([\gamma]) = \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma)(t) \mid_{t=0} \end{cases}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ on considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi_t : & TM & \longrightarrow & TM \\ & v & \longmapsto & e^t v \end{array}$$

pour tous $t, s \in \mathbb{R}$ et $v \in TM$ on a :

$$\phi_{t+s}(v) = e^{t+s}v = e^t e^s v = \phi_t(e^s v) = \phi_t(\phi_s(v)) \quad = \quad \phi_t \circ \phi_s(v) \tag{3.3.1}$$

et

$$\phi_0(v) = e^0 v \quad = \quad v \tag{3.3.2}$$

D'après (3.3.1) et (3.3.2) $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est le groupe à un paramètre d'un champ de vecteurs ζ_{TM} sur TM.
On a :

$$\frac{d}{dt}(x^i \circ \phi_t(v)) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}(x^i(\phi_t(v))) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}(x^i(e^t v)) \mid_{t=0} = v\frac{d}{dt}(x^i(v)) = 0$$

Donc $\frac{d}{dt}(x^i \circ \phi_t(v)) \mid_{t=0} = 0$. De même

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(y^i \circ \phi_t(v)) \mid_{t=0} &= \frac{d}{dt}(y^i \circ e^t v) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}(\frac{d}{ds}(x^i \circ e^t\gamma(s)) \mid_{s=0}) \mid_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\frac{d}{ds}(x^i(e^t\gamma(s)) \mid_{s=t=0} = \frac{d}{ds}\frac{d}{dt}(x^i(e^t\gamma(s)) \mid_{s=t=0} \\
&= \frac{d}{ds}(\frac{d}{dt}e^t(x^i \circ \gamma(s)) \mid_{t=0}) \mid_{s=0} = \frac{d}{ds}((x^i \circ \gamma(s))) \mid_{s=0} \\
&= y^i(v)
\end{aligned}$$

Donc $\frac{d}{dt}(y^i \circ \phi_t(v)) \mid_{t=0} = y^i(v)$. Ainsi $\zeta_{TM} = y^i\frac{\partial}{\partial y^i}$ est le champ d'*Euler* sur TM.
Soient (U, φ) une carte de M et N une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $\{X_M\}$ une famille de champs de vecteurs lorsque M décrit l'ensemble des variétés différentiables.

Définition 3.3.1. On dit que $\{X_M\}$ est un champ de vecteur naturel si : pour toutes variétés M, N et pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M, N)$, on a

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{X_M} & TM \\
f\downarrow & & \downarrow Tf \\
N & \overrightarrow{X_N} & TN
\end{array}$$

Proposition 3.3.1. *Soit l'application $f : M \longrightarrow N$ différentiable, le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc}
TM & \xrightarrow{\zeta_{TM}} & TTM \\
Tf\downarrow & & \downarrow T(Tf) \\
TN & \overrightarrow{\zeta_{TN}} & TTN
\end{array}$$

c'est-à-dire que $\zeta_{TN} \circ Tf = T(Tf) \circ \zeta_{TM}$

Preuve. Soient les applications

$$\begin{array}{rccc} Fl^{\zeta_{TM}}: & \mathbb{R}\times TM & \longrightarrow & TM \\ & (t,v) & \longmapsto & e^t v \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} Fl_t^{\zeta_{TM}}: & TM & \longrightarrow & TM \\ & v & \longmapsto & e^t v \end{array}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times TM & \overset{Fl^{\zeta_{TM}}}{\longrightarrow} & TM \\ Id_{\mathbb{R}}\times Tf \downarrow & & \downarrow Tf \\ \mathbb{R}\times TN & \underset{Fl^{\zeta_{TN}}}{\longrightarrow} & TN \end{array}$$

on a :

$$\zeta_{TM}(t,v) \quad = \quad Tf(e^t v) = e^t Tf(v) = Fl^{\zeta_{TN}}(t, Tf(v)) = Fl^{\zeta_{TN}} \circ Tf(v)$$

Donc

$$Tf \circ Fl^{\zeta_{TM}} = Fl^{\zeta_{TN}} \circ Tf$$

Ainsi

$$\zeta_{TN} \circ Tf = T(Tf) \circ \zeta_{TM}$$

■

Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on considère les fonctions

$$g^{(v)} = g \circ \pi_M : TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{rccc} g^{(c)}: & TM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & [\gamma] & \longmapsto & \dfrac{d}{dt}(g\circ\gamma)(t)\mid_{t=0} \end{array}$$

$g^{(c)}$ et $g^{(v)}$ sont bien définies et sont des applications différentiables sur TM.

Remarque 3.3.1. La famille $\{\zeta_{TM}\}$ est un champ de tenseurs naturels.

Proposition 3.3.2. *Pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a*

$$\begin{cases} \zeta_{TM}(g^{(c)}) = 0 \\ \zeta_{TM}(g^{(v)}) = g^{(v)} \end{cases}$$

Preuve. Voir [1] ■

Théorème 3.3.1. *ζ_{TM} est l'unique champ de vecteurs sur TM qui vérifie :*

$$\zeta_{TM}(g^{(c)}) = 0 \text{ et } \zeta_{TM}(g^{(v)}) = g^{(v)}$$

Preuve. D'après la proposition précédente,

$$\zeta_{TM}(g^{(c)}) = 0 \text{ et } \zeta_{TM}(g^{(v)}) = g^{(v)}$$

d'où l'existence de ζ_{TM}. Soit X un autre champ de vecteurs tel que :

$$X(g^{(c)}) = 0 \text{ et } X(g^{(v)}) = g^{(v)}$$

alors, on a

$$X(g^{(c)}) = \zeta_{TM}(g^{(c)}) \text{ et } X(g^{(v)}) = \zeta_{TM}(g^{(v)})$$

et d'après le théorème 3.1.1,

$$X = \zeta_{TM}$$

d'où l'unicité de ζ_{TM}. ■

Proposition 3.3.3. *Soit X un champ de vecteurs sur TM.*

(i) $[X^{(c)}, \zeta_{TM}] = 0$

(ii) $[X^{(v)}, \zeta_{TM}] = -X^{(v)}$

Preuve. (i) Pour tout $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$\begin{aligned}[X^{(c)}, \zeta_{TM}](g^{(c)}) &= X^{(c)} \circ \zeta_{TM}(g^{(c)}) - \zeta_{TM} \circ X^{(c)}(g^{(c)}) = X^{(c)}(\zeta_{TM}(g^{(c)})) - \zeta_{TM}(X^{(c)}(g^{(c)})) \\ &= X^{(c)}(0) - \zeta_{TM}(g^{(c)}) = 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}[X^{(c)}, \zeta_{TM}](g^{(v)}) &= X^{(c)} \circ \zeta_{TM}(g^{(v)}) - \zeta_{TM} \circ X^{(c)}(g^{(v)}) = X^{(c)}(\zeta_{TM}(g^{(v)})) - \zeta_{TM}(X^{(c)}(g^{(v)})) \\ &= X^{(c)}(g^{(v)}) - \zeta_{TM}(X(g)((v)) = 0\end{aligned}$$

donc $[X^{(c)}, \zeta_{TM}] = 0$.

(ii)

$$\begin{aligned}[X^{(v)}, \zeta_{TM}](g^{(c)}) &= X^{(v)} \circ \zeta_{TM}(g^{(c)}) - \zeta_{TM} \circ X^{(v)}(g^{(c)}) = X^{(v)}(\zeta_{TM}(g^{(c)})) - \zeta_{TM}(X^{(v)}(g^{(c)})) \\ &= X^{(v)}(0) - X^{(v)}(g^{(c)}) = -X^{(v)}(g^{(c)})\end{aligned}$$

donc $[X^{(v)}, \zeta_{TM}](g^{(c)}) = X^{(v)}(g^{(c)})$ et

$$\begin{aligned}[X^{(v)}, \zeta_{TM}](g^{(v)}) &= X^{(v)} \circ \zeta_{TM}(g^{(v)}) - \zeta_{TM} \circ X^{(v)}(g^{(v)}) = X^{(v)}(\zeta_{TM}(g^{(v)})) - \zeta_{TM}(X^{(v)}(g^{(v)})) \\ &= X^{(v)}(g^{(v)}) - \zeta_{TM}(g^{(v)}) = g^{(v)} - g^{(v)} = 0\end{aligned}$$

donc $[X^{(v)}, \zeta_{TM}](g^{(v)}) = 0$ et $[X^{(v)}, \zeta_{TM}] = -X^{(v)}$

■

3.3.2 Tenseur canonique de *Nijenhuis*.

Soit M une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de dimension $n \geq 1$. Comme (TM, M, π_M) est un fibré vectoriel réel, pour tout $x \in M$, T_xM est doté d'une structure d'espace vectoriel réel. L'application

$$\varphi_x : \mathbb{R} \times T_xM \longrightarrow T_xM$$

est la multiplication externe qui définit la structure d'espace vectoriel réel de T_xM. On définit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} \times TM & \longrightarrow & TM \\ & (t, v) & \longmapsto & tv \end{array}$$

cet application est différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme on identifie $T\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^2$, on définit alors

$$T\varphi : T\mathbb{R} \times TTM \longrightarrow TTM$$

Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} S : & TTM & \longrightarrow & TTM \\ & \widetilde{v} & \longmapsto & T\varphi(e_2, v) \end{array}$$

S est différentiable et pour tout $v \in TM$, on a

$$(S_{TM})_v = S_{TM} \mid_{T_vTM} : T_vTM \longrightarrow T_vTM$$

est un endomorphisme. Par conséquent, S_{TM} est un champ de tenseurs type $(1,1)$ sur TM.

Définition 3.3.2. Le champ de tenseurs S_{TM} est appelé tenseur canonique de *Nijenhuis* sur TM.

Expression locale de S_{TM}.

Soit (x^i, y^i) le système de coordonnées locales de TM(adapté), on a

$$S_{TM} = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i$$

En particulier, $S_{TM}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}$ et $S_{TM}(\frac{\partial}{\partial y^i}) = 0$.

Proposition 3.3.4. *Pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, on a*

$$\begin{cases} S_{TM}(X^{(c)}) = X^{(v)} \\ S_{TM}(X^{(v)}) = 0 \end{cases}$$

Preuve. Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$, en coordonnées locales, on a

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

par conséquent,

$$\begin{cases} X^{(c)} = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + \dfrac{\partial X^i}{\partial x^k} y^k \dfrac{\partial}{\partial y^i} \\ X^{(v)} = X^i \dfrac{\partial}{\partial y^i} \end{cases}$$

Ainsi,

$$S_{TM}(X^{(c)}) = S_{TM}(X^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^k}y^k\frac{\partial}{\partial y^i}) = X^i S_{TM}(\frac{\partial}{\partial x^i}) + \frac{\partial X^i}{\partial x^k}y^k S_{TM}(\frac{\partial}{\partial y^i}) = X^i\frac{\partial}{\partial y^i} = X^{(v)}$$

$$S_{TM}(X^{(v)}) = S_{TM}(X^i\frac{\partial}{\partial y^i}) = X^i S_{TM}(\frac{\partial}{\partial y^i}) \quad = \quad 0 \tag{3.3.3}$$

■

Remarque 3.3.2. $S_{TM}(\zeta_{TM}) = S_{TM}(y^i\frac{\partial}{\partial y^i}) = y^i S_{TM}(\frac{\partial}{\partial y^i}) = 0.$

Proposition 3.3.5. *Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable, le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} TTM & \overset{S_{TM}}{\longrightarrow} & TTM \\ TTf\downarrow & & \downarrow TTf \\ TTN & \underset{S_{TN}}{\longrightarrow} & TTN \end{array}$$

c'est-à-dire que $S_{TN}\circ TTf = TTf\circ S_{TM}$

Preuve. Voir [5] ■

Soit S un champ de tenseur de type $(1,1)$ sur M. Pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, on pose

$$T_S(X,Y) = [SX, SY] - S\Big([X, SY] + [SX, Y] - S[X,Y]\Big)$$

$T_S(X,Y)$ est un champ de tenseur de type $(2,1)$ sur M.

Définition 3.3.3. (i) Le champ de tenseur T_S est appelé torsion associée à S.

(ii) On dit que (M,S) une variété de *Nijenhuis* si $T_S = 0$

Théorème 3.3.2. *Le couple (TM, S_{TM}) est une variété de Nijenhuis.*

Preuve.

$$\begin{aligned} T_{S_{TM}}(X^{(c)}, Y^{(c)}) &= [SX^{(c)}, SY^{(c)}] - S\Big([X^{(c)}, SY^{(c)}] + [SX^{(c)}, Y^{(c)}] - S[X^{(c)}, Y^{(c)}]\Big) \\ &= [X^{(v)}, Y^{(v)}] - S\Big([X,Y]^{(v)} + [X,Y]^{(v)} - [X,Y]^{(v)}\Big) = 0 \end{aligned}$$

■

Proposition 3.3.6. *Soit S^* la transposée du tenseur de Nijenhuis S. on a :*

$$S^*(\theta^{(c)}) = \theta^{(v)} \;\; et \;\; S^*(\theta^{(v)}) = 0$$

Preuve. Soit $X \in \mathfrak{X}(M)$, on a

$$S^*(\theta^{(c)})(X^{(c)}) = \theta^{(c)}\Big(S(X^{(c)})\Big) = \theta^{(c)}\Big(X^{(v)}\Big) = \theta^{(v)}\Big(X^{(c)}\Big)$$

et

$$S^*(\theta^{(c)})(X^{(v)}) = \theta^{(c)}\Big(S(X^{(v)})\Big) = \theta^{(c)}\Big(0\Big) = 0 = \theta^{(v)}\Big(X^{(v)}\Big)$$

on constate que

$$\begin{cases} S^*(\theta^{(c)})(X^{(c)}) = \theta^{(v)}\Big(X^{(c)}\Big) \\ S^*(\theta^{(c)})(X^{(v)}) = \theta^{(v)}\Big(X^{(v)}\Big) \end{cases} \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M)$$

donc $S^*\theta^{(c)} = \theta^{(v)}$. ■

♣ Conclusion ♣

Notre travail qui s'achève ici s'est articulé autour de trois principaux axes : le premier axe, la définition de la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ sur $\mathfrak{R}_k(M)$ qui nous permet, à partir des atlas de définir et d'illustrer par des exemples, les notions de variétés différentiables et d'application différentiables ; le deuxième axe était l'utilisation du fibré vectoriel réel (E, M, π_M) pour construire le fibré vectoriel réel $(\bigotimes_q^p E, M, \bigotimes_q^p \pi)$ afin de définir et donner des exemples des champs de tenseurs sur le fibré vectoriel réel ; puis pour terminer, la définition du flot et champ d'Euler nous permet d'établir les résultats de la proposition 3.3.2, l'étude du tenseur de Nijenhuis nous permet d'établir aussi les résultats de la proposition 3.3.4.

Récemment, il a été prouvé que le fibré tangent TM d'une variété peut être généralisé, par le fibré tangent d'ordre supérieur. La question qui se pose est de savoir si l'on peut généraliser ces notions de champ d'Euler et tenseur de Nijenhuis au fibré tangent d'ordre supérieur.

♣ Apports pédagogiques ♣

Pendant la conception de ce document ; tout ce temps de recherche nous a permis d'avoir une grande intuition, d'accentuer la logique mathématique et d'avoir une bonne critique face aux problèmes du lycée. Personnellement, cette recherche m'a permis d'apprendre à saisir avec le logiciel "*Latex*" et d'avoir quelques techniques de recherche.

♣ Bibliographie ♣

[1] ALESSANDRA FRABETTI(2010) Géométrie différentielle appliquée à la physique. Cours M2 - Lyon 1 Université de Lion 1.

[2] AZZOUZ AWANE(2005) Cours de géométrie différentielle. DEA. 2001-2005 à la Faculté des Sciences, Ben M'sik. Casablanca. Maroc.

[3] FRANCIS NIER ET DRAGOS IFTIMIE(2001) Introduction à la Topologie. Licence de Mathématiques Université de Rennes 1.

[4] FRÉDÉRIC PAULIN(2006) Géométrie différentielle élémentaire. Formation Interuniversitaire de Mathémétiques Fondamentales et appliquées, Cours de première année de mastère, École Normale Supérieure.

[5] G. MORANDI, ET *al*(1989) THE INVERSE PROBLEM IN THE CALCULUS OF VARIATIONS AND THE GEOMETRY OF THE TANGENT BUNDLE. Department of Physics, University of Ferrara, via Paradiso 12. 44100 Ferrara, Italy.

[6] HERVÉ LAURENT ET GÉRARD RIO(2002) Calcul Tensoriel. Université de Bretagne Sud.

[7] IVAN KOLÁR, ET *al* (1993) Natural opérations in différential géometry, Springer-Verlag.

[8] JEAN DIEUDONNÉ(1964) Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, tome 2 et tome 3. Paris.

[9] LIONEL DUMARTHERAY(2004) Le Théorème de Whitney. faculté de science, DEA de Mathématiques, Université de Nice. .

[10] MARCEL BERGER BERNARD GOUSTIAUX(1993) Géométrie différentielle : Variétés, courbe et surface. Collection puf.

[11] ROBERT COQUEREAUX(2001) ESPACES FIBRÉS et CONNEXIONS. Centre de Physique Théorique Luminy - Marseille.