REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace – Work – Fatherland
****

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

MSURE DE POUVOIR DANS UN JEU SIMPLE COMPOSÉ : L'INDICE DE BANZAF

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade
Mémoire de D.I.P.E.S II

Par :

SOH KAKEU Roméo Boniface
Licencié en mathématiques

Sous la direction
Dr TCHANTCHO Hugue
Assistant

Année Académique
2015-2016

♣ Dédicace ♣

Je dédie ce travail à ma très chère mère, maman **MBEKOU ODETTE** ***épouse*** **WOUMBA DIFFO** pour toute l'affection que je lui porte et pour toutes les peines et sacrifices consentis pour moi.

♣ Remerciements ♣

Mes remerciements vont à l'endroit de :

♡ Mon Sauveur et Seigneur **JESUS-CHRIST**.

♡ Mon directeur de mémoire **Dr TCHANTCHO Hugue** pour la pertinence du thème proposé et pour sa disponibilité .

♡ Tous les enseignants de l'école normale supérieure de Yaoundé qui, durant notre formation, ont eu pour souci, au-delà de la formation académique dispensée, de nous amener à prendre conscience du rôle de l'enseignant dans la construction d'un Cameroun émergent.

♡ Mon encadreur de stage **Mr ETOA Yves** enseignant de mathématiques au lycée Bilingue de Yaoundé pour les conseils pratiques reçus lors du stage.

♡ Mon père **WOUMBA DIFFO POKAM Boniface** et ma soeur cherie **MEWOUMBA Marie Seraphine** pour leur soutien indéfectible et pour l'attention particulière qu'ils m'accordent.

♡ Mon frere **MIKAM Voltere** ainsi qu'à son épouse pour leur présence inexprimable au centre de mon éducation.

♡ Monsieur **DIAFRE Daniel** , **Mba MOIFO MITTERAN**, Mes oncles **PAGUI maurice** et **DONGMO Salmon**, ma tante **Megoum Cecile** et la grande famille **WOUMBA DIFFO POKAM Boniface** pour leur soutien moral et matériel.

♡ Mes tontons **Tedefeu Armand** et **Fokam Hubert** pour leurs conseils, leurs soutiens financier et pour l'attention qu'il m'accordent.

♡ Une mention particulière à **KAMILA Karé** et **TCHUISSEU SEUYONG Féraud** avec qui nous étions en équipe sous la coordination de notre Directeur de mémoire .

♣ Déclaration sur l'honneur ♣

Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

SOH KAKEU ROMEO BONIFACE

♣ Resumé ♣

Les jeux composés sous forme caractéristique ont été défini par Owen (1964) dans l'esprit de généraliser en terme de composition de jeux, la classe de jeu définie par Shapley (1962) : les jeux simples composés. Un jeu simple composé étant un jeu simple, le problème de mesure du pouvoir se pose comme dans tout jeu de vote. Pradeep Dubey, Ezra Einy et Ori Haimanko (2003) caractérisent axiomatiquemet l'indice de Banzhaf dans les jeux simples composés. Dans nos travaux nous montrons que dans un jeu simple composé l'indice de Banzhaf d'un citoyen est le produit de son indice de Banzhaf dans le jeu composant auquel il est participant par l'indice de Banzhaf de son délégué dans le jeu de second rang (jeu quotient). Pradeep Dubey, Ezra Einy et Ori Haimanko (2003) montrent que les axiomes de la positivité, de composition et de transfert définissent l'indice de Banzhaf.

Mots-clés : Jeu de vote, indice de pouvoir de Banzhaf, Jeux composés, jeux simples, Jeux pondérés.

♣ Abstract ♣

The compound games under the caracteristic form was define by Owen(1964) in the mind of generalise in term of the game's composition, the class of games defined by Shapley (1962) : The compound simple game. A compound simple game is a simple game. As the voting games, there is problem of power measure. Pradeep Dubey, Ezra Einy and Ori Haimanko (2003) defined axiomatively the banzhaf power index of a coumpound simple games. In our work we show that the Banzhaf index of a player in the compound voting is the product of his Banzhaf index of a component game in which he is participant by Banzhaf index power of his delegate in the second-tier game (quotient game). Pradeep Dubey, Ezra Einy and Ori Haimanko (2003) show that the positivity's axioms, the composition and the transfert axioms determine the Banzhaf index.

Keywords : Voting Games, Banzhaf Power Index, Compound Games, Simple Games, Weighted Games.

♣ Table des matières ♣

♣ Liste des abréviations ♣

* JFCC : Jeu Sous Forme Caractéristique avec Compensation .

* $Shap_i(v)$:Valeur de Shapley d'un joueur i dans un JFCC (N, v) .

* $SH_i(v)$: Indice de Shapley d'un joueur i dans le jeu simple (N, v) .

*$\beta'_i(v)$: Indice normalisé de Banzhaf d'un joueur i dans un jeu simple (N, v).

*$\beta_i(v)$: Indice non normalisé de Banzhaf d'un joueur i dans un jeu simple (N, v).

* SG : Ensemble des jeux simples.

*AG : Ensemble des jeux simples additifs.

* β_{t_i} : l'indice de Banzhaf d'un joueur dans le jeu composant $\Gamma_i = (N_i, \mathcal{W}_i)$.

* β_i^q : l'indice de Banzhaf d'un joueur dans le jeu quotient $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$.

* $\beta_{t_i}^c$: l'indice de Banzhaf d'un joueur dans le jeu simple composé $\Gamma = (M, \mathcal{W})$.

♣ Liste des tableaux ♣

♣ Introduction ♣

La théorie des jeux est une discipline mathématique qui étudie les situations où le sort de chaque participant encore appelé joueur, ne dépend pas seulement de la décision qu'il prend, mais aussi de la décision prise par d'autres participants. La théorie des jeux voit véritablement le jour en 1944 avec la publication de l'ouvrage de John Von Neumann et Oskar Morgenstern intitulé "Theory of Game and Economic Behavior ".

Lorsque les joueurs peuvent passer entre eux des accords qui les lient de manière contraignante, on parle de jeu coopératif, dans le cas contraire on dit que le jeu est non coopératif. Les jeux coopératifs qui constituent notre centre d'intérêt sont des jeux qui se caractérisent par la poursuite du même objectif par tous les joueurs. Pour rendre compte de manière numérique du rapport de force qui existe entre les différents participants d'un processus de vote, on a eu recours aux indices de pouvoir.

L'étude du pouvoir dans les jeux coopératifs a donné lieu à une abondante littérature. En effet, de nombreux articles ont débattu de la manière dont on doit mesurer le pouvoir et de nombreux indices ont été proposés. Historiquement le premier indice de pouvoir défini de manière formelle est celui de Shapley-Shubik (1954) qui fut obtenu à partir de la valeur de Shapley (1953) ; puis apparait celui de Banzhaf (1965). Depuis, on a assisté à l'apparition de plusieurs autres indices. On peut citer : l'indice de Johnston (1978), l'indice de Deegan-Packel (1978), l'indice de Coleman (1986), l'indice d'Holler-Packel (1983), l'indice de Colomer-Martinez (1995), l'indice de König-Bräuniger ... Voir Andjiga, Chantreuil et Lepelley (2003) pour une brève présentation de ces indices. Mais ce sont surtout les deux premiers indices qui ont fait couler beaucoup d'encre et ont été appliqués dans plusieurs domaines et notamment dans la politique. Plusieurs études ont été menées pour essayer de comparer ces deux indices de pouvoir. On peut citer Andjiga, Chantreuil et Lepelley (2003).

L'objet de notre travail est donc la mesure du pouvoir d'un joueur dans un jeu simple composé par l'indice de Banzhaf. L'indice de pouvoir de Banzhaf nommé d'après John F. Banzhaf (1965), a été à l'origine inventé par Penrose (1946) et est souvent appelé indice de Penrose-

Banzhaf. C'est un indice de pouvoir défini par la probabilité du changement des résultats d'un scrutin où les droits de vote ne sont pas nécessairement partagés de façon égale entre les électeurs. Pour déterminer le pouvoir d'un électeur en utilisant cet indice, on commence par recenser toutes les coalitions gagnantes puis, on compte tous les électeurs décisifs (critiques). Selon Banzhaf (1965), la mesure du pouvoir d'un joueur dépend du nombre de fois où celui-ci est décisif. Le pouvoir d'un électeur est défini comme la fraction de tous les votes critiques qu'il pourrait exprimer. Contrairement à celui de Shapley (1954), dans le processus de décision de Banzhaf (1965), le vote n'est pas séquentiel et les coalitions votent en bloc.

Les jeux composés sous forme caractéristique ont été définis par Owen (1964) dans l'esprit de généraliser en terme de composition de jeux, les jeux simples composés définis par Shapley (1962). Un jeu simple composé étant un jeu simple, le problème de mesure du pouvoir se pose comme dans tout jeu simple. Pradeep Dubey, Ezra Einy et Ori Haimanko (2003) introduisent axiomatiquement l'indice de Banzhaf dans les jeux simples composés.

Pour faciliter la lecture et la compréhension de nos travaux, nous les avons subdivisés en trois chapitres. Le premier est consacré à un rappel des notions de théorie des jeux notamment les jeux simples ; le deuxième porte sur les indices de Banzhaf et Shapley dans un jeu simple ; le troisième est consacré à la notion du jeu simple composé et la détermination de l'indice de Banzhaf pour cette classe de jeux .

⋆ ⋆ Chapitre Un ⋆ ⋆

Jeu simple

1.1 Jeu sous forme caractéristique avec compensation

Plusieurs situations de la vie courante mettent en interaction des agents (appelés ici joueurs) qui sont chacun soucieux de leur bien-être individuel. Le résultat collectif est obtenu comme résultante d' actions individuelles et chaque joueur souhaite que ce résultat soit le meilleur pour lui. Le jeu oblige chaque joueur à tenir compte des actions des autres individus en interaction avec lui.

La théorie des jeux propose plusieurs formalismes et analyse de telles situations. On distingue deux principales formes de jeux qui sont :

- les jeux non coopératifs où aucun accord contraignant n'est autorisé entre les joueurs ;

- les jeux coopératifs où il existe une possibilité d'accord contraignant entre les joueurs.

On distingue deux catégories de jeux coopératifs, selon que la possibilité de compensations entre les joueurs existe ou non. Dans le premier cas, on parle de jeux coopératifs avec paiements latéraux, ce qui suppose l'existence d'un bien, une "monnaie" qui sert à réaliser des transferts entre joueurs. On parle aussi de jeux coopératifs avec utilité transférable. Plus simplement, on se place dans la situation où le bien servant de monnaie d'échange sert à mesurer les résultats du jeu. On peut alors décrire les possibilités d'une coalition au moyen du montant total que la coalition peut se garantir, laissant le soin à la coalition de répartir ce montant entre ses membres. Nous nous limitons aux jeux coopératifs avec paiements latéraux basés sur le concept de fonction caractéristique. Le problème posé est celui de la répartition des gains obtenus par les joueurs lorsque tous sont regroupés dans la grande coalition.

Pour introduire les jeux sous forme caractéristique avec compensation qui nous intéressent dans ce travail, considérons les exemples suivants :

Exemple 1.1.1. *Trois sociétés 1,2 et 3 d'un même secteur économique peuvent travailler soit individuellement, soit en association. Une étude sur les bénéfices de ces sociétés donne les résultats suivants :* $b(1) = 10, b(2) = 5, b(3) = 4, b(12) = 15, b(13) = 15, b(23) = 11$ *et* $b(123) = 21$ *où* $b(S)$ *désigne le bénéfice collectif obtenu par les membres de* S *lorsqu'ils sont regroupés dans* S.

Comment va se répartir le bénéfice collectif entre les membres de chaque groupe formé ?.

Exemple 1.1.2. *Deux villes 1 et 2 doivent réaliser un projet communautaire. Cette réalisation peut être faite par chaque ville et coûtera* $c(1)$ *pour la ville 1 et* $c(2)$ *pour la ville 2. Ils peuvent aussi avec le même degré de satisfaction pour leurs populations, réaliser un projet commun à un coût* $c(12)$.

Comment va se répartir le coût collectif entre les villes ?.

Tout comme dans ces deux exemples, de nombreux problèmes du même genre se rencontrent dans le monde économique où les producteurs (respectivement. les consommateurs) d'un même bien se regroupent tous afin de maximiser leurs gains (respectivement. minimiser les coûts de leurs achats).

Comment vont-ils partager les gains ainsi obtenus issus de leur coopération ?.

1.1.1 Notion de jeu sous forme caractéristique avec compensation

Définition 1.1. *Soit* N *un ensemble fini non vide.*

On appelle jeu sous forme caractéristique avec compensation, tout couple $(N; v)$ *où* v *est une application réelle définie sur l'ensemble des parties de* N *vérifiant* $v(\emptyset) = 0$.

Les éléments de N sont appelés joueurs et les sous ensembles non vide de N coalitions.

On note par 2^N l'ensemble de toutes les coalitions non vide de N . :

Interprétations 1. *Étant donné un JFCC* $(N; v)$,

- v *désigne l'état de coopération entre les joueurs de N(c'est un bilan des gains estimés lorsque les joueurs coopèrent entre eux).*

- pour toute coalition S, $v(S)$ *est la quantité de biens (gain collectif ou perte collective) qu'obtient la coalition* S *lorsque ses membres décident de commun accord de former* S.

1.1.2 Vecteur partage

Soit N un ensemble fini non vide de joueurs. Notons par $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des applications de N vers $\mathbb{R}$. Une telle application que nous notons x appelé vecteur partage affecte à chaque joueur i de N un nombre réel noté x_i. De façon générique, nous notons un élément x de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $(x_i)_{i \in N}$.

Pour toute coalition S de N et pour tout $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la somme des gains des joueurs de S dans x sera notée

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i$$

Par convention on pose $x(\emptyset) = 0$.

Définition **1.2.** *Etant donné un jeu $(N; v)$ et x un vecteur de gains. On dit que x est :*

1. *individuellement rationnel si pour chaque $i \in N$,$x_i \geq v(i)$;*
2. *collectivement rationnel si pour chaque $x(S) \geq \nu(S)$;*
3. *réalisable si $x(N) \leq v(N)$;*
4. *efficient si $x(N) = v(N)$;*
5. *une imputation s'il est individuellement rationnel et efficient.*

Une interprétation intuitive de la rationalité individuelle est qu'on ne peut pas forcer un joueur à participer et celle de l'efficience est que la somme des allocations est égale à $v(N)$.

On notera par $I(N, v)$ l'ensemble des imputation du jeu $(N; v)$.

1.1.3 Classes particulières de fonctions caractéristiques

Définition **1.3.** *La contribution marginale du joueur i à la coalition S est la quantité $v(S + i) - v(S)$. C'est-à-dire la perte ou le gain de i lorsqu'il quitte la coalition S.*

Définition **1.4.** *Un JFCC remplissant la condition suivante :*

1. *$T \subseteq S \implies v(T) \leq v(S)$ est dit monotone.*

   Si pour toutes coalitions T et S,
2. *$S \cap T = \emptyset \implies v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ alors le jeu est additif.*
3. *si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ pour chaque paire de coalition (S, T) telle que $S \cap T = \emptyset$ alors le jeu est dit super additif.*

Interprétations 2. *Si le jeu est super additif alors la contribution marginale d'un joueur est plus grande que le gain qu'il aurait s'il ne participe à aucune coalition d'au moins 2 joueurs ; l'union fait la force.*

1.1.4 Classes particulières de joueurs

Un joueur i dans un jeu (N, v) est dit :

1. "**décisif**" si $\forall S \in 2^N$,$\forall i \in S$, $v(S) = 1$ et $v(S\backslash\{i\}) = 0$.
2. "**dummy**" si $\forall S \in 2^N$, on a $v(S \cup \{i\}) = v(S)$.
3. **veto** $\forall S \in 2^N$, $v(S) = 1 \Longrightarrow i \in S$
4. **dictateur** si $\forall S \in 2^N$, $(v(S) = 1 \Longleftrightarrow i \in S)$

Interprétations 3. *-Un joueur est **décisif** dans un jeu (N, v) si : sa présence dans une coalition de N fait gagner la totalité du bien et son absence fait perdre la totalité du bien.*

*-Un joueur est **veto** dans un jeu (N, v) si : sa présence dans une coalition de N fait gagner la totalité du bien ou si une coalition de N gagne la totalité du bien il est dans cette coalition.*

*-Un joueur est **dummy** dans un jeu (N, v) si : sa présence dans une coalition de N n'influence pas cette coalition.*

*-Un joueur est **dictateur** dans un jeu (N, v) si : une coalition de N gagne la totalité du bien , si et seulement s'il en fait partie.*

1.1.5 Solutions aux JFCCs

Une solution φ sur l'ensemble des jeux est une application qui associe à chaque jeu (N, v) le sous-ensemble de vecteurs de gains ; alors on dit que cette solution est une règle d'allocation. Une solution est dite :

- ponctuelle si pour tout JFCCs (N, v), $\varphi(N, v)$ est un singleton.

- ensembliste s'il existe au moins un JFCC sur N pour lequel $\varphi(N; v)$ contient au moins deux éléments.

Définition 1.5. *(propriétes d'une solution)*

Soit u et v deux JFCCs, soit π une permutation de N. L'ensemble des répartitions des gains de v est : $R(v) = \{(x_1, x_2...x_n) \in R^n : x(N) = v(N)\}$.

*-φ est **anonyme** si : $\forall v$ un JFCC, $\forall i \in N, \pi$ permutation de N, $\varphi_{\pi(i)}(\pi(v)) = \varphi_i(v)$.*

*-φ est **additive** si : $\forall u, v$ deux JFCCs, $\forall i \in N, \varphi_i(u+v) = \varphi_i(u) + \varphi_i(v)$*

*-φ est **efficiente** si : $\forall v, \varphi(v) \in R(v)$.*

*-φ est **Dummy** si : $\forall v$ un JFCC, $\forall i \in N, [v(S+i) = v(S)\ \forall S \in N \backslash \{i\}] \implies \varphi_i(v) = 0$.*

*-φ est **marginaliste** si : $\forall v, u$ deux JFFCs et $\forall i \in N$,*
$[\forall S \in 2^N, v(S+i) - v(S) = u(S+i) - u(S)] \implies \varphi_i(u) = \varphi_i(v)$

*- φ est dite **fortement monotone (strongly monotonic (SM))** si : $\forall v, u$ deux JFFCs et $\forall i \in N$, $[\forall S \subseteq N, v(S+i) - v(S) \geq u(S+i) - u(S)] \implies \varphi_i(v) \geq \varphi_i(u)$.*

*- φ vérifie **la propriété d'égale traitement (equal treament property (ETP))** si : $\forall v, u$ deux JFFCs et $\forall i, j \in N$, $[\forall S \subseteq N \backslash \{i, j\}, v(S+i) = v(S+j)] \implies \varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.*

Deux joueurs i, j vérifiant $\forall S \subseteq N \backslash \{i, j\}$, $v(S+i) = v(S+j)$ sont dits v-substituables .

Interprétations 4. ***anonyme*** *veut dire que le partage des gains entre les joueurs ne dépend pas de la manière dont ils ont été étiquetés (numérotés).*

Additive *veut dire le gain d'un joueur dans deux jeux est égale à la somme de ses gains dans les deux jeux.*

Dummy *veut dire que un joueur qui n' apporte rien dans les coalitions doit gagner zéro comme gain après le partage .*

Efficiente *veut dire que la somme des gains de tous les joueurs doit être égale au gain de la grande coalition.*

marginaliste *si un joueur à la même contribution marginale dans deux JFFCs alors il aura également le même gain après le partage dans ces deux jeux .*

En supposant les joueurs regroupés dans la grande coalition, plusieurs solutions au problème du partage des gains à l'issu du jeu sont proposés dans la littérature, on cite par exemple le coeur classique (Gilliers,1959), la valeur de Shapley (1953) que nous présenterons dans la suite et l'indice de Banzahf (1965) que nous étudierons en profondeur dans le chapitre 3.

1-Le coeur(clasique)

-Les biens sont les utilités

-Les biens considérés sont supposés infiniment divisibles.

Définition 1.6. *Étant donné un JFCC (N, v), On appelle coeur du JFCC (N, v), l'ensemble $\mathcal{C}(N, v)$ de toutes les imputations collectivement rationnelles. Autrement dit,*

$$\mathcal{C}(N, v) = \{x \in I(N, v) : \forall S \in 2^N, v(S) \leq x(S)\}.$$

2-Valeur de Shapley(Shapley,1953)

Procédure de Shapley

-N se forme par entrées successives des joueurs.

-L'entrée des joueurs est faite de maniéré aléatoire et équiprobable.

-Lorsque le joueur i rejoint une coalition S il reçoit, comme part sa contribution marginale.

Définition 1.7. ***La valeur de Shapley*** *d'un joueur i dans v est l'espérance mathématique de ce joueur dans la procédure de Shapley.*

D'une manière formelle, Posons k le nombre d'éléments d'une coalition K.

-Considérons $P(N)$ l'ensemble des formations possibles de N par entrées successives. $P(N)$ est l'ensemble de permutations possibles, de cardinal $n!$.

-Toutes les permutations de N sont possible et équiprobables.

Définition 1.8. ***La valeur de Shapley*** *d'un joueur i en v est donnée par la relation suivante :*

$$Shap_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S+i) - v(S)]$$

Les théorèmes suivants dû respectivement à Shapley 1953 et Young 1985 donnent une axiomatisation de la valeur de Shapley

Théorème 1.1. *φ **efficiente, additive, Dummy, anonyme** $\Longleftrightarrow$ φ est la valeur de Shapley.*

Preuve. Soit φ la valeur de Shapley, montrons que φ est efficiente, anonyme, dummy et additive.

Efficiente -Pour tout JFCCs v, on a :

$$\sum_{i \in N} Shap_i(v) = \sum_{i \in N}(\sum_{S \subseteq N, i \notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S+i) - v(S)])$$

$$= \sum_{i \in N}(\sum_{S \subseteq N, i \notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(S+i) - \sum_{S \subseteq N, i \notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(S))$$

$$= \sum_{i \in N}(\sum_{S \subseteq N, i \notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(S+i) - \sum_{i \in N}(\sum_{S \subseteq N, i \notin S} \frac{s!(t-s)!}{n!} v(S)$$

$$= \sum_{T \subseteq N}(\sum_{i \in T} \frac{(t-1)!(t-s)!}{n!} v(T) - \sum_{S \subseteq N}(\sum_{i \notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(S) avec |T| = t$$

$$= \sum_{T \in 2^N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} t \times v(T) - \sum_{T \in 2^N - \{N\}} \frac{(s)!(n-s-1)!}{n!} (n-s) \times v(S)$$

$$= \sum_{T \in 2^N} \frac{(t)!(n-t)!}{n!} \times v(T) - \sum_{T \in 2^N - \{N\}} \frac{(s)!(n-s)!}{n!} v(S)$$

$= \frac{(n)!(n-n)!}{n!}v(N)$

$= v(N)$

La valeur de Shapley est donc efficiente.

Anonyme pour tout permutation π de N et pour tout JFCC v, on a :

$Shap_i(\pi v) = \sum_{S\subseteq N, i\notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[\pi v(S+i) - \pi v(S)]$

$= \sum_{S\subseteq N, i\notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(\pi(S)+\pi(i)) - v(\pi(S))]$

$= \sum_{S\subseteq N, \pi(i)\notin T} \frac{t!(n-t-1)!}{n!}[v(T+\pi(i)) - v(T)]$ avec $|T| = t$

$=Shap_{\pi(i)}(v)$

La valeur de Shapley est donc anonyme.

Additivité

pour v, u deux JFCCs et pour tout $i \in N$ on a :

$Shap_i(v+u) = \sum_{S\subseteq N, i\notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[(v+u)(S+i) - (v+u)(S)]$

$= \sum_{S\subseteq N, i\notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S+i) + u(S+i) - v(S) - u(S)]$

$= \sum_{S\subseteq N, i\notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S+i) - v(S)] + \sum_{S\subseteq N, i\notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[u(S+i) - u(S)]$

$Shap_i(v) + Shap_i(u)$

La valeur de Shapley est donc additive.

Dummy. Pour tout JFCC v et pour tout $i \in N$, i est v-dummy(s'il en existe), on a :

$Shap_i(v) = \sum_{S\subseteq N, i\notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S+i) - v(S)]$

$= \sum_{S\subseteq N, i\notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \times 0$

$= 0$

La valeur de Shapley est donc dummy.

Soient φ une valeur vérifiant l'efficiente, l'anonymat, l'additivité et dummy. Montrons que $\varphi(v) = Shap(v)$.

Considérons les JFCCs $(\nu_S)_{S\in 2^N}$ définis par $\forall S \in 2^N, \forall T \in 2^N$,

$$\nu_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subseteq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

.

La famille $(v_S)_{S\in 2^N}$ est une base de C^N (l'ensemble des JFCCS sur N) et par conséquent, le JFCC v s'écrit de façon unique sous la forme $v = \sum_{S\in 2^N} \alpha_S v_S$, où les α_S sont des réels connus. posons $w_S = \alpha_S v_S$ et déterminons $\varphi(w_S)$.

Soit $i \in N - S$. Pour tout $T \in 2^N$,soit $S \subseteq T$ et $S \subseteq T + i$, soit $S \nsubseteq T$ et $S \nsubseteq T + i$. Dans les deux cas, $w_S(T + i) - w_S(T) = 0$. Par conséquent, i est w_S- dummy et comme φ est dummy, alors $\varphi_i(v) = 0$.

Soient $i, j \in S$. considérons la permutation π de N définie par $\pi(i) = j$, $\pi(j) = i$,et $\pi(k) = k$ pour tout $k \neq i, j$. Pour tout $T \in 2^N$, $S \subseteq \pi(T) \iff \pi(S) \subseteq T$ car $\pi \circ \pi$ est une application identique de N. Par conséquent, $w_S(T) = w_S(\pi(T)) = (\pi w_S)(T)$. Il en découle que $w_S = \pi w_S$. La valeur φ étant anonyme, $\varphi_i(\pi w_S) = \varphi_{\pi(i)}(w_S) = \varphi_j(w_S)$ et on en déduit que $\varphi_i(w_S) = \varphi_j(w_S)$.

Le partage $\varphi(w_S)$ est tel que $\forall i \in S$, $\varphi_i(w_S) = \varphi_j(w_S)$ et $\forall i \notin S$, $\varphi_i(w_S) = 0$. La valeur φ étant efficiente, on a $\forall i \in S$, $\varphi_i(w_S) = \dfrac{w_S(N)}{|S|} = \dfrac{\alpha_S}{|S|}$. Par conséquent, $\varphi(w_S)$ est détermine de façon unique.

Les réels α_S étant connus, φ est définie de façon unique par $\varphi(v) = \sum_{S\in 2^N} \dfrac{\alpha_S}{|S|}$.

Comme la valeur de Shapley vérifie l'efficiente, l'anonymat, l'additivité, et dummy, $\varphi(v) = Shap(v)$ ■

Théorème 1.2. *φ **efficiente**, **marginaliste**,**anonyme** $\iff$ φ est la valeur de Shapley.*

Théorème 1.3. *φ est une valeur **(SM)** et **(ETP)** $\iff$ φ est la valeur de Shapley.*

Exemple 1.1.3. ***Déterminons le coeur et la valeur de Shapley de notre exemple introductif (exemple 1.1)***

Trois sociétés 1,2 et 3 d'une même secteur économique peuvent travailler soit individuellement, soit en association. Une étude sur les bénéfices de ces sociétés donne les résultats suivants : $b(1) = 10, b(2) = 5, b(3) = 4, b(12) = 15, b(13) = 15, b(23) = 11$ *et* $b(123) = 21$ *où* $b(S)$ *désigne le bénéfice collectif obtenu par les membres de* S *lorsqu'ils sont regroupés dans* S.

Puisque les joueurs sont déjà regroupés dans la grande coalition alors le seul problème qui reste est celui du partage des biens disponibles dans chaque coalition formée.

a-Détermination du coeur

Soit $x \in \mathbb{R}^3$*, une imputation. Si* $x \in \mathcal{C}(N, b)$*, alors*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 \geq 10 \\ x_2 \geq 5 \\ x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 15 \\ x_1 + x_3 \geq 15 \\ x_2 + x_3 \geq 11 \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 \geq 5 \\ x_3 \geq 4 \\ x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow \; x = (10, t, 11 - t)$ *avec* $7 \geq t \geq 5$

D'où $\mathcal{C}(N, v) = \{(10, t, 11 - t)/7 \geq t \geq 5\}$

Remarque 1.1.1. *Le coeur d'un JFCC peut être vide.*

son inconvénient est que :

-Le partage suivant ce concept de solution n'est pas toujours possible.

-Le coeur étant une solution ensembliste propose souvent pour un partage plusieurs solutions, ce qui n'est pas bien car il faut encore faire le choix sur ces partages.

son avantage : Le coeur est facile à manipuler, la détermination des solutions suivant ce concept de solution est facile.

b-Détermination de la valeur de Shapley

On a :

-La valeur de Shapley de la première société notée $Shap_1(b)$ *est :*

$$Shap_1(b) = \frac{1}{3!}[2! \times 10 + 1! \times 1!(10 + 11) + 2! \times 0! \times 10] = \frac{61}{6}$$

- La valeur de Shapley de la deuxième société notée $Shap_2(b)$ *est :*

$$Shap_2(b) = \frac{1}{3!}[2! \times 5 + 1! \times 1!(5+7) + 2! \times 0! \times 6] = \frac{34}{6}$$

-La valeur de Shapley de la troisième société notée $Shap_3(b)$ est :

$$Shap_3(b) = \frac{1}{3!}[2! \times 4 + 1! \times 1!(5+6) + 2! \times 0!x6] = \frac{31}{6}$$

Donc la valeur de Shapley notée $Shap(b)$ est :

$$Shap(b) = \{(\frac{61}{6}; \frac{34}{6}; \frac{31}{6})\}$$

***c-La valeur de Shapley ainsi trouvée n'appartient pas au coeur** $C(N,b)$ (la rationalité collective n'ait pas vérifié).*

En effet posons $x = (\frac{61}{6}; \frac{34}{6}; \frac{31}{6})$. Alors $x(23) = \frac{65}{6} \leq b(23) = 11$

Donc la valeur de Shapley n'est pas collectivement rationnelle.

La valeur de Shapley est une solution ponctuelle.

1.2 Jeu simple

Pour introduire cette classe de jeux, analysons l'exemple suivant :

Exemple 1.2.1. *Trois personnes doivent partager un « gâteau », ou un magot, dont on suppose que la valeur est égale à 1. On est donc en présence d'un jeu à trois joueurs (1 ,2 et 3), de somme constante, chacun cherchant à obtenir la part la plus importante possible du gâteau. Si ce jeu est décrit par la fonction caractéristique $v(.)$ telle que :*

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	1	1	1	1

Cela signifie qu'un individu seul n'obtient rien et que si deux individus forment une coalition, ils raflent tout et ne laissent donc rien à l'individu restant et que, trivialement, s'ils forment tous une coalition, l'ensemble du gâteau leur revient .

Le jeu ainsi défini est un jeu simple.

1.2.1 Notion de jeu simple

Définition 1.9. *Un jeu simple est un couple $G = (N, \mathcal{W})$ où $\emptyset \neq \mathcal{W} \subseteq 2^N$ vérifiant :*

1) $\forall S \in 2^N, S \in \mathcal{W} \Longrightarrow N \backslash S \notin \mathcal{W}$.

2) $\forall S, T \in 2^N$ $(S \in \mathcal{W}$ et $S \subset T) \Rightarrow T \in \mathcal{W}$.

Interprétation

-Toute partie S non vide de N est appelée coalition.

Un élément de $\mathcal{W}$ est appelé coalition majoritaire ou gagnante ou tout simplement majorité.

La condition (2) est appelée condition de monotonie.

-Un jeu simple est une traduction mathématique des situations de vote "pour ou contre". Ce sont des situations de vote dans lesquelles on dispose d'une assemblée N et chaque fois qu'une motion ou un projet est soumis à cette assemblée pour adoption, chaque membre a alors le choix entre voter "pour" et voter "contre" l'adoption dudit projet. La décision collective dépend de la configuration de vote obtenue. Si l'ensemble de tous ceux qui ont voté pour l'adoption du projet est une coalition gagnante (c'est-à-dire $S \in \mathcal{W}$), alors la décision collective est l'adoption du projet. Sinon, (si $S \notin \mathcal{W}$), la décision collective est le rejet du projet. t encore appelée condition de monotonie.

Définition 1.10. *Soit $G = (N, \mathcal{W})$ un jeu simple .*

** Le jeu simple $G = (N, \mathcal{W})$ est fort si $S \notin \mathcal{W} \iff N \backslash S \in \mathcal{W}$*

** Le jeu simple $G = (N, \mathcal{W})$ est faible si $V = \bigcap_{S \in \mathcal{W}} S \neq \emptyset$ Les membres de V sont appelés joueur de veto*

** Un jeu simple G est dictatorial s'il existe $j \in N$ (le dictateur) de telle sorte que $S \in \mathcal{W} \iff j \in S$.*

Remarque 1.2.1. *Un jeu simple est un jeu sous forme caractéristique particulier. En effet un jeu simple $G = (N, \mathcal{W})$ peut être représenté sous sa forme caractéristique par $g = (N, v)$ tel que :*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \textit{si } S \in \mathcal{W} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

.

Définition 1.11. *Un jeu simple $G = (N, \mathcal{W})$ est symétrique si le jeu sous forme caractéristique associé est symétrique.*

Le jeu simple $G = (N, \mathcal{W})$ est symétrique si $(S \in \mathcal{W}, T \subseteq N$, et $|S| = |T|) \implies T \in \mathcal{W}$

Définition 1.12. *Soit U un ensemble (peut-être) infini de joueurs. Notons par 2^U la collection de toutes les coalitions et par ϕ la coalition vide. Alors un jeu sur U est donné par l'application* *une* $\nu : 2^U \to \mathbb{R}$ *où* $v(\phi) = 0$. *Une coalition* $N \subset U$ *est appelée support de* v *si* $v(S) = v(S \cap N)$ *pour tout* $S \in 2^U$.

Nous dirons qu'un jeu v *est un jeu fini s'il a un support fini. L'espace de tous les jeux finis sur* U *est noté* G.

1.2.2 Jeux Simples Particuliers

-Un jeu simple v est décisif lorsque toute coalition S est gagnante dans v si et seulement $U \backslash S$ perdant dans v.

- Un jeu v appelé additif si $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ avec $S \cap T = \phi$. Notons AG l'ensemble des jeux simples additifs.

Tout jeu w de AG ayant pour support (fini) N peut être identifié à l'aide des vecteurs $\{w_i / i \in N\}$.

-Vote à la majorité absolue ou encore majorité simple $\mathcal{W}^{sm} = \{S \in 2^N : |S| > \dfrac{1}{2}\}$.
De manière générale, à règle q-majoritaire , $q > \dfrac{1}{2}$ est définie par :$\mathcal{W}^{qM} = \{S \in 2^N : \dfrac{|S|}{n} > q\}$
.
Un jeu à la majorité absolue ou encore majorité simple est un jeu à quota de quota q=$\dfrac{n}{2} + 1$ pour n ou q=$\dfrac{n+1}{2}$ pour n impair. Le vote à l'assemblée Nationale Camerounaise est un jeu à la majoritaire absolue.

-Jeu à quota ou jeu pondéré

Définition 1.13. *Le jeu simple* $G = (N, \mathcal{W})$ *est un jeu pondérée (jeu a quota) s'il existe un quota* $q = \sum\limits_{i \in N} w_i > 0$ *et les poids* $w_i \geq 0$ *pour tout* $i \in N$ *tel que pour tout les* $S \in 2^N$, $S \in \mathcal{W} \iff \sum_{i \in S} w_i \geq q$ *c'est-à-dire , une décision ne sera prise que lorsque la somme des poids des joueurs qui votent atteint au moins le quota* q .

On pose dans ce car $\mathcal{W}^{(w,q)} = \{S \in 2^N : \sum\limits_{i \in S} w_i \geq q\}$. $G = (N, \mathcal{W})$ *peut être simplement noté* $G = ((w_i), q)$. *Si pour tout* $i \in N, w_i = w$ *on note* $G = (w, q)$

Exemple 1.2.2. *Une structure intercommunale composé de cinq communes :*$n = 5$ *et* $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *avec comme nombres de délégués respectif :* $15, 10, 5, 5, 4$. *Ici le nombre de délégués représente le poids de vote de chaque commune :* $w_1 = 15$, $w_2 = 10$, $w_3 = 5$, $w_4 = 5$ *et* $w_5 = 4$. *Si la règle de décision est la majorité simple alors le seuil de décision sera :*

$q = \frac{w}{2} + 1$ *si* w *est pair et* $q = \frac{w+1}{2}$ *si* w *est impair (avec* $w = \sum_{i \in N} w_i$*)*

Dans notre exemple, w est impair d'où $q = \frac{w+1}{2} = 20$. On peut donc présenter ce jeu sous la forme ν : $(20; 15, 10, 5, 5, 4)$.

Exemple 1.2.3. *supposons que trois partis : 1, 2 et 3 auxquels sont associés les poids respectifs $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$, cherchent à soumettre un projet de loi dont l'adoption requiert la majorité$(q = \frac{1}{2})$.*

Alors , pour la coalition $S = \{1, 2, 3\}$ on a $v(S) = 1$ car $\sum_{i \in N} w_i = 1 > \frac{1}{2}$

pour la coalition $S = \{1, 2\}$ on a $v(S) = 1$ car $\sum_{i \in N} w_i = \frac{5}{6} > \frac{1}{2}$

pour la coalition $S = \{1, 3\}$ on a $v(S) = 1$ car $\sum_{i \in N} w_i = \frac{5}{6} > \frac{1}{2}$

pour la coalition $S = \{1\}$ on a $v(S) = 1$ car $\sum_{i \in N} w_i = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

pour la coalition $S = \{2\}$, $S = \{3\}$ on a $v(S) = 0$ car $\frac{1}{2} > \sum_{i \in N} w_i = \frac{5}{6}$

pour la coalition $S = \{2, 3\}$ on a $v(S) = 0$ car $\frac{1}{2} > \sum_{i \in N} w_i = \frac{1}{3}$ et par définition de v, '$v(\emptyset) = 0$

On constate que la présence du joueur 1 est nécessaire à rendre toute coalition gagnante ce qui n'est pas le cas pour les joueur 2 et 3. Ainsi le pouvoir d'un joueur est déterminer par sa capacité à rendre gagnante une coalition en acceptant de coopérer à celle-ci.

La valeur de Shapley pour un joueur se base sur cette idée, elle compte le nombre d'occasions qu'a un joueur d'être le pivot dans le processus de décision collective, c'est-à-dire de modifier le résultat selon son absence ou sa présence dans la coalition.

1.2.3 Coeur d'un jeu simple

Notation 1.2.1. *- N : ensemble des joueurs*

- $\mathcal{W}$: ensemble des coalitions gagnantes

- A : ensemble des candidats

- R : le profil (de préordres ou d'ordres totaux (L^N)), indiquant donc la manière dont chacun classe les différents candidats.

Définition 1.14. *Soit $G = (N, \mathcal{W})$ est un jeu un simple, A un ensemble des candidats et R un profil . Soit x et $y \in A$, soit $S \in \mathcal{W}$: on dit que x domine y dans G, pour le profil R via S, ou encore que x domine y dans (G, A, R) noté $xd_G Ry$ via S si $\forall i \in S, x \succ_{R^i} y$. Si le profil est sous entendu, alors $\forall i \in S, x \succ_{R^i} y$ est encore noté $x \succ_S y$, x domine dans (G,A, R) s'il existe $S \in \mathcal{W}$ tel que $x \succ_S y$. On dit que y dominé s'il existe $x \in A$ tel que $x \succ_S y$.*
Le coeur de G pour le profil R noté C(G,A, R) est l'ensemble des candidats non dominés.

Non vacuité du coeur

Exemple 1.2.4. *Soit* $N = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{W}$*= majorité absolue,* $R = (R^1, R^2, R^3), A = \{a, b, c\}$: $R^1 = abc, R^2 = bca, R^3 = cab$. *On a :*

$ad_G Rb$, $bd_G Rc$ *et* $cd_G Rb$ *donc* $C(G, A, R) = \emptyset$.

Ceci veut dire que le coeur ne fait aucune prévision du tout. c'est un phénomène en général considéré comme paradoxal en théorie des jeux coopératifs, qu'un concept de solution ne présente aucun candidat stable.
La non vacuité de C(G,A,R) traduit une sorte d'instabilité de la société alors à s'accorder sur un choix dans A. Une question essentielle consiste alors à déterminer une condition nécessaire et/ou suffisante sur W pour que quelque soit le profil R, $C(G, A, R) = \emptyset$, N et A étant fixés.
Un travail préliminaire sur la question a été faites par Peleg pour le cas des jeux simple à quota symétrique. IL démontrer en effet le théorème ci-dessous.

Théorème 1.4. Peleg (1978)

Soit un $G = (N, \mathcal{W})$ *un jeu simple à quota symétrique (propre) de quota q*
Alors,

$$(C(G, A, R) = \emptyset, \forall R \in L^N) \iff (|A| \leq \frac{n}{n-q})$$

Ce théorème indique clairement, sous l'hypothèse de jeu simple à quota symétrique, quelles sont les valeurs possibles du quota conduisant à un coeur non vide et ceci indépendamment de la manière dont les votants classent les différents candidats. Ce théorème a été généralisé par Nakamura dans le cas d'un jeu simple quelconque.

Définition 1.15. *Soit* $G = (N, \mathcal{W})$ *un jeu simple. On pose* $\lceil(G) = \{L \subset \mathcal{W} : \bigcap_{S \in L} S = \emptyset\}$ *: le nombre de Nakamura de G noté* $v(G)$*est défini par :*

$$v(G) = \begin{cases} +\infty & si \lceil(G) = \emptyset \\ min\{|L|, L \in \lceil(G)\} & si \lceil(G) \neq \emptyset \end{cases}$$

.

On pourrait simplement écrire : $v(G) = Inf\lceil(G)$

Interprétations 5. ** $\lceil(G)$ est l'ensemble des coalitions gagnantes d'intersection vide*
** $v(G)$ le plus petit nombre de coalitions gagnantes d'intersection vide .*

Théorème 1.5. *(Nakamura(1979))*
Soit $G = (N, \mathcal{W})$ est un jeu un simple, A un ensemble de candidats. Alors, $(C(G, A, R) = \emptyset, \forall R \in L^N) \iff (|A| \leq v(G))$

Proposition 1.1. *Soit $G = (N, \mathcal{W})$ un jeu simple a quota symétrique. Le nombre de Nakamura de $G = (N, \mathcal{W})$ est le plus petit entier naturel supérieur ou égal à $\dfrac{n}{n-q}$, n désignant le nombre de joueurs.*

Exemple 1.2.5. *Déterminons le nombre de Nakamura du jeu à quota suivant :*
G=[5, 1, 1, 1, 1 , 1, 1, 1].

Les votants ont le même poids. Donc un jeu à quota symétrique et d'après la proposition ci-dessus le nombre de Nakamura est $v(G) = 4$

Remarque 1.2.2. *Si le nombre d'électeurs est impair et distinct de 1, alors le nombre de Nakamura du vote à la majorité absolue est $v(G) = 3$*

Grâce à Shapley(1962), les jeux simples sont idéals pour capturer l'essence de nombreux processus de vote. Un jeu de vote est caractérisé par le degré de pouvoir d'un électeur. Quel est donc le pouvoir d'un électeur dans un jeu de vote ?

Plusieurs indices sont proposés pour la résolution de ce problème, mais dans nos travaux nous nous intéressons aux deux indices courant a savoir l'indice de Shapley(1954) et l'indice de Banzhaf(1965).

Chapitre Deux

Indices de pouvoir (Shapley-Shubik et Banzhaf) dans un jeu simple

L'étude du pouvoir dans les jeux coopératifs a donné lieu à une abondante littérature. En effet, de nombreux articles ont débattu de la manière dont on doit mesurer le pouvoir et de nombreux indices ont été proposés. Nous étudions uniquement l'indice de Shapley(1954) et celui de Banzhaf (1965) car ils sont les plus fréquents et dans la littérature on les compare en général.

2.1 Notion de poids de vote et indice de pouvoir

Dans les institutions et les organisations où les différents membres disposent de poids de vote différents, on peut croire que le pouvoir de décision d'un membre est égal à son poids de vote, ce n'est pas toujours le cas. Le pouvoir de vote d'un joueur dépend du nombre de fois où celui-ci est **décisif** dans les différentes coalitions gagnantes.

Exemple 2.1.1. ***(Exemple à 5 communes)***

Prenons le parlement canadien après les élections de 2006 et de 2008. En 2006, les sièges étaient repartis comme suit :

1. *parti conservateur : 124*
2. *parti libéral : 102*
3. *bloc québécois : 51*
4. *NPD : 29*
5. *Indépendant : 1*

Si la règle de décision est la majorité simple, on aura un jeu sous la forme v : (154 ; 124, 102, 51, 29, 1).

Les **tableaux 1, 2 et 3** ci-dessous dans lesquels toutes les coalitions présentées sont des coalitions gagnantes, le chiffre 1 à l'intersection de la ligne figurant la coalition S et la coalition correspondant au joueur i signifie que le joueur i est **décisif** dans la coalition S (S est gagnante et $S\backslash\{i\}$ est perdante) et le chiffre 0 signifie que le joueur i n'est pas **décisif** dans la coalition S (S est gagnante et $S\backslash\{i\}$ est également gagnante). On voit bien que **le parti libéral** bien qu'ayant le double du nombre de députés que **le bloc Québécois**, il est autant de fois décisif que le bloc.

Tableau 1 : l'ensemble des coalitions gagnantes à la chambre des communes avec **la majorité simple** des voix et les joueurs **décisifs** dans chaque coalition (parlement élu en 2006).

Coalitions gagnantes S	1	2	3	4	5	Nombre de joueurs	Nombre de pivots
$1, 2$	1	1	0	0	0	2	2
$1, 3$	1	0	1	0	0	2	2
$1, 2, 3$	1	0	0	0	0	3	1
$1, 2, 4$	1	1	0	0	0	3	2
$1, 2, 5$	1	1	0	0	0	3	2
$1, 3, 4$	1	0	1	0	0	3	2
$1, 3, 5$	1	0	1	0	0	3	2
$1, 4, 5$	1	0	0	1	1	3	3
$2, 3, 4$	0	1	1	1	0	3	3
$2, 3, 5$	0	1	1	0	1	3	3
$2, 3, 4, 5$	0	1	1	0	0	4	0
$1, 2, 3, 4$	0	0	0	0	0	4	0
$1, 2, 3, 5$	0	0	0	0	0	4	0
$1, 2, 5, 5$	1	0	0	0	0	4	1
$1, 3, 4, 5$	1	0	0	0	0	4	1
$1, 2, 3, 4, 5$	0	0	0	0	0	5	0
$Total$	10	6	6	2	2	-	26

Par contre, en prenant comme règle de décision **la majorité des deux tiers**, (voir tableau 2) les conclusions ne seront plus les mêmes. Avec cette nouvelle majorité, le nombre de coalitions

gagnantes passe de 16 à 9. On voit bien que dans ce cas le joueur 1 aura un droit de **veto** car il intervient dans toutes les coalitions gagnantes.

Tableau 2 : nombre de coalitions gagnantes avec **la majorité des deux tiers** (2006)

Coalitions gagnantes S	1	2	3	4	5	Nombre de joueurs	Nombre de pivots
$1, 2$	1	1	0	0	0	2	2
$1, 2, 3$	1	1	0	0	0	3	2
$1, 2, 5$	1	1	0	0	0	3	2
$1, 2, 4, 5$	1	1	0	0	0	4	2
$1, 2, 3, 5$	1	1	0	0	0	4	2
$1, 3, 4, 5$	1	0	1	1	1	4	4
$1, 2, 3, 4$	1	1	0	0	0	4	2
$1, 2, 3, 4, 5$	1	0	0	0	0	5	1
$Total$	9	7	1	1	1	-	19

En considérant le parlement (celui issu des élections fédérales de 2008) qui est caractérisé par le jeu v : (154 ; 145, 75, 49, 36, 2) (voir le tableau 3), on voit que les indépendantistes avec deux sièges au parlement n'ont aucun pouvoir de décision. On les appelle en théorie des jeux coopératifs des **joueurs nuls ("Dummy").**

Tableau 3 : Celui issu des élections fédérales de 2008.

Coalitions gagnantes S	1	2	3	4	5	Nombre de joueurs	Nombre de pivots
$1,2$	1	1	0	0	0	2	2
$1,3$	1	0	1	0	0	2	2
$1,4$	1	0	0	1	0	2	2
$1,2,3$	1	0	0	0	0	3	1
$1,2,4$	1	0	0	0	0	3	1
$1,2,5$	1	1	0	0	0	3	2
$1,3,4$	1	0	0	0	0	3	1
$1,3,5$	1	0	1	0	0	3	2
$1,4,5$	1	0	0	1	0	3	2
$2,3,4$	0	1	1	1	0	3	3
$2,3,5$	0	1	1	0	1	3	3
$2,3,4,5$	0	1	1	1	0	4	3
$1,2,3,4$	0	0	0	0	0	4	0
$1,2,3,5$	1	0	0	0	0	4	1
$1,2,4,5$	1	0	0	0	0	4	1
$1,3,4,5$	1	0	0	0	0	4	1
$1,2,3,4,5$	0	0	0	0	0	5	0
$Total$	12	4	4	4	0	-	24

On peut conclure donc que le pouvoir de vote d'un électeur dépend non seulement de son poids de vote mais aussi de la règle de décision adoptée.

De ce fait quel indicateur permet de mesurer le pouvoir de vote d'un électeur ?

2.2 Étude des indices de pouvoir

Définition 2.1. *Soit (N, v) un jeu simple, un indice de pouvoir du jeu (N, v) est une fonction*

$$\alpha : V \to R^n$$
$$v \mapsto \alpha(v)$$

où V est l'ensemble des jeux simples sur N et $\alpha(v) = (\alpha_1(v), \alpha_2(v), ..., \alpha_n(v))$ est un vecteur qui détermine la distribution de pouvoir de la coalition N entre ces joueurs.

$\alpha_i(v)$ est interprété comme la mesure de l'influence qu'exerce le joueur i sur le résultat du vote.

Un indice de pouvoir mesure donc le degré d'influence d'un électeur donné sur le résultat du vote. L'indice de pouvoir du votant i peut être interprété également comme la probabilité que le votant i soit décisif.

2.2.1 L'indice de Shapley-Shubik

L'indice de Shapley-Shubik a été introduit en 1954 par Shapley et Shubik à partir du concept de la valeur de Shapley paru un an auparavant. D'après Shapley et Shubik, le pouvoir (de vote) d'un individu, (membre d'un comité) dépend de la possibilité qui lui est offerte d'être déterminant pour le succès d'une coalition. Cet indice tient compte du raisonnement suivant : prenons un joueur afin de constituer une coalition et regardons si cette coalition est gagnante. Si ce n'est pas le cas, prenons un second joueur et regardons maintenant si la coalition des deux est gagnante, puis un troisième et ainsi de suite. Le joueur qui rejoignant le groupe fait basculer celui-ci de la situation de coalition perdante à celle de coalition gagnante est **décisif**. L'ordre d'apparition des joueurs dans la coalition a donc de l'importance, et en supposant que tous les ordres ont la même probabilité d'apparaitre, tous les ordres doivent être étudiés. L'indice de Shapley-Shubik est déterminé par le rapport du nombre de fois ou un votant est **décisif** sur le nombre total d'ordres (qui est égal à n !). Il est donné par le rapport suivant :

$$SH_i(v) = \frac{nombres\ d'ordres\ avec\ i}{nombre\ total\ d'ordres}$$

Quelques calculs combinatoires montrent que :

$$SH_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \backslash \{i\})]$$

$*s = |S|$ est égal au nombre de joueurs dans la coalition S.

$*(s-1)!$ compte le nombre de permutations possible π des $(s-1)$ joueurs ayant pris part au vote avant l'électeur i ;

$*(n-s)!$ représente le nombre de permutations des $(n-s)$ joueurs prennant part au vote après le joueur i.

$*\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ est le poids du joueur i dans la coalition S.

$*[v(S)-v(S\backslash\{i\})]$ nous donne le nombre de coalitions pour lesquelles le joueur i est décisif.

$*v(S) - v(S\backslash\{i\}) = 1$ si i est pivot dans la coalition S et 0 sinon.

$SH_i(v)$ correspond à la part de pouvoir que le joueur i puisse espérer obtenir dans le jeu. Cette expression revient à diviser le nombre de permutations pour lesquelles le joueur i est décisif par le nombre total de permutations possibles. L'indice de Shapley attribue donc à chaque joueur la moyenne de ses contributions marginales aux coalitions auxquelles il appartient.

Exemple 2.2.1. *Prenons l'exemple suivant pour illustrer le calcul de cet indice : soit le jeu v : $[3; 2, 1, 1, 1]$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$*

Pour chaque permutation π de N et pour tout $i \in S$ et $S \subseteq N$, il y a un joueur unique (le pivot) pour qui la contribution marginale $v(S) - v(S \backslash \{i\}) = 1$; et elle est égale à 0 pour tout les autres joueurs.

Considérons la permutation suivante pour les joueurs : 4-2-1-3.

La contribution marginale de chaque joueur est la suivante :

0 pour le joueur 4,

0 pour le joueur 2,

1 pour le joueur 1,

0 pour le joueur 3.

Ici, le joueur 1 est le pivot de la permutation car il fait basculer la coalition d'une position perdante à une position victorieuse. En considérant toutes les permutations possibles, on remarque que le joueur 1 est pivot s'il arrive en 2^{eme} ou en 3^{eme} position. Ce qui fait au total 12 permutations sur 24 et on a

$$SH_1(v) = \frac{12}{24} = 0,5$$

Le joueur 2 est pivot s'il arrive en 2^{eme} position après le joueur 1 ou s'il arrive en 3^{eme} position après le joueur 3 et le joueur 4. Ce qui donne les quatre permutations suivantes :

1234

1243

3421

4321

Le joueur 3 est pivot s'il arrive en 2^{eme} position après le joueur 1 ou s'il arrive en 3^{eme} position après les joueurs 2 et 4. De la même manière, le joueur 4 est pivot seulement s'il arrive en 2^{eme} position après le joueur 1 ou s'il arrive en 3^{eme} position après le joueur 2 et le joueur 3.

On obtient le pouvoir suivant pour ces trois joueurs :

$$SH_2(v) = \frac{4}{24} = SH_3(v) = SH_4(v)$$

En prenant l'exemple de l'intercommunal on peut calculer le pouvoir de chaque commune à partir des tableaux suivants :

Tableau 4 : l'ensemble des coalitions gagnantes dans l'intercommunal avec la majorité simple des voix et les communes décisives dans chaque coalition.

Coalitions gagnantes$S$	1	2	3	4	5	Nbre de joueurs dans la coalition	Nbre de joueurs décisifs
$1,2$	1	1	0	0	0	2	2
$1,3$	1	0	1	0	0	2	2
$1,4$	1	0	0	1	0	2	2
$1,2,3$	1	0	0	0	0	3	1
$1,2,4$	1	1	0	0	0	3	2
$1,2,5$	1	0	0	0	0	3	1
$1,3,4$	1	0	0	0	0	3	1
$1,3,5$	1	0	1	0	0	3	2
$1,4,5$	1	0	0	1	0	3	2
$2,3,4$	0	1	1	1	0	3	3
$2,3,4,5$	0	1	1	1	0	4	3
$1,2,3,4$	0	0	0	0	0	4	0
$1,2,4,5$	1	0	0	0	0	4	1
$1,2,3,5$	1	0	0	0	0	4	1
$1,3,4,5$	1	0	1	0	0	4	2
$1,2,3,4,5$	0	0	0	0	0	5	0
$Total$	12	4	4	4	0	-	-

Tableau 5 : nombre de coalitions gagnantes avec la majorité des deux tiers.

Coalitions gagnantes S	1	2	3	4	5	Nombre de joueurs	Nombre de pivots
$1,2,3$	1	1	1	0	0	3	3
$1,2,4$	1	1	0	1	0	3	3
$1,2,5$	1	1	0	0	1	3	3
$1,2,3,4$	1	1	0	0	0	4	2
$1,2,4,5$	1	1	0	0		4	2
$1,2,3,5$	1	1	0	0	0	4	2
$1,3,4,5$	1	0	1	1	1	4	4
$1,2,3,4,5$	1	0	0	0	0	5	1
$Total$	8	6	2	2	2	-	-

L'indice de Shapley nous donne les résultats suivants en utilisant la règle de décision à la majorité simple :

$$SH_1(v) = \frac{(2-1)!(5-2)!}{5!} \times 3 + \frac{(3-1)!(5-3)!}{5!} \times 6 + \frac{(4-1)!(5-4)!}{5!} \times 3 = \frac{60}{120} = 0,5$$

En procédant de la même manière, on obtient :

$$SH_2(v) = SH_3(v) = SH_4(v) = \frac{20}{120} = 0,1667 \text{ et } SH_5(v) = 0,000$$

Avec une majorité des deux tiers c'est à dire un quota de 26 voix sur 39, les indices de Shapley-Shubik des joueurs seront :

$SH_1(v) = \frac{60}{120} = 0,5$;
$SH_3(v) = \frac{10}{120} = 0,833 = SH_4(v) = SH_5(v)$;
$SH_2(v) = \frac{30}{120} = 0,25$.

2.2.2 L'indice de Banzhaf normalisé.

L'indice de Banzhaf normalisé a été introduit par John Banzhaf(1965). Comme celui de Shapley-Shubik, il sert à mesurer le pouvoir d'un votant dans un système de vote indirect. L'indice de Banzhaf permet en effet de mesurer la capacité d'un votant à faire basculer les coalitions perdantes en coalitions gagnantes. Banzhaf considère, comme Shapley et Shubik, que la mesure du pouvoir du joueur i doit dépendre du nombre de fois où il est décisif. Cependant, dans le processus de Banzhaf le vote n'est pas séquentiel : les coalitions votent en bloc. L'indice de Banzhaf normalisé du joueur i que nous notons β'_i dans le jeu (N, v) s'obtient en divisant le nombre de coalitions possibles (et non le nombre de permutations possibles à la différence de l'indice de Shapley-Shubik) pour lesquelles i est décisif par le nombre de coalitions décisives contenant le joueur i. Il est donné par la formule

$$\beta_i'(v) = \frac{\displaystyle\sum_{S\subseteq N}[v(S) - v(S\backslash\{i\})]}{\sum_{j\in N}\sum_{S\subseteq N}[v(S) - v(S\backslash\{j\})]}$$

$\sum_{S\subseteq N[v(S)-v(S\backslash\{i\})}]$ représente le nombre de coalitions gagnantes dans les quelles i est décisif.

Exemple 2.2.2. *Avec une règle de décision à la majorité simple des voix dans notre* ***exemple à 5 communes(voir les tableaux 4 et 5)****, on aura :*

$$\beta_1'(v)=\tfrac{12}{24} = 0,5\,;$$
$$\beta_2'(v)=\tfrac{4}{24} = 0,1667 = \beta_3'(v) = \beta_4'(v)\,;$$
$$\beta_5'(v) = \tfrac{0}{24}$$

*Avec un quota de 26 voix sur 39 soit**une majorité des 2/3**, on aura les résultats suivants :*

$$\beta_1'(v)=\tfrac{8}{20} = 0,4\,;$$
$$\beta_2'(v)=\tfrac{6}{20} = 0,3\,;$$
$$\beta_3'(v)=\tfrac{2}{20} = 0,1 = \beta_4'(v) = \beta_5'(v)\,;$$

2.2.3 L'indice non normalisé de Banzhaf

L'indice de Banzhaf non normalisé appelé mesure de Banzhaf ou score de Banzhaf a été proposé en premier par Lionel Penrose en 1946 puis généralisé par Dubey et Shapley en 1979 pour combler les insuffisances de l'indice normalisé de Banzhaf.

En effet, l'indice de Banzhaf non normalisé du joueur i est donné par le nombre de coalitions dans lesquelles i est pivot, divisé par le nombre total de coalitions auxquelles i est susceptible d'appartenir. Dans un jeu de vote à n joueurs, le nombre total de coalitions possibles est de 2^n et le nombre de coalitions (perdantes et gagnantes) auxquelles le joueur i est susceptible d'appartenir est de 2^{n-1}.

Ainsi, l'indice non normalisé de Banzhaf du joueur i est donné par la formule suivante :

$$\beta_i(v) = \tfrac{1}{2^{n-1}}\sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}}[v(S) - v(S\backslash\{i\})]$$

Dans cette expression, le numérateur représente le nombre de coalitions dans lesquelles le joueur i est décisif, tandis que le dénominateur représente le nombre de coalitions dont i fait partie. C'est donc le nombre de coalitions dans lesquelles le joueur i est décisif divisé par le nombre total de coalitions contenant le joueur i.

Exemple 2.2.3. ***exemple à 5 communes (voir les tableaux 4 et 5)*** *Donc, dans notre jeu à 5 communes, on a* $2^4 = 16$ *coalitions susceptibles de contenir le joueur* i. *Ce qui donne les pouvoirs suivants aux joueurs en utilisant cet indice de pouvoir :*

- Majorité simple :

$$\beta_1(v){=}\tfrac{12}{16} = 0,75\,;$$
$$\beta_2(v){=}\beta_3(v){=}\beta_4(v){=}\tfrac{4}{16} = 0,25\,;$$
$$\beta_5(v) = 0.$$

- Majorité des deux tiers :

$$\beta_1(v){=}\tfrac{8}{16} = 0,5\,;$$
$$\beta_2(v){=}\tfrac{6}{16} = 0,375\,;$$
$$\beta_3(v){=}\beta_4(v){=}\beta_5(v){=}\tfrac{2}{16} = 0,125.$$

Le principal problème de cet indice est qu'il n'est pas normalisé. Autrement dit, la somme des indices est souvent différente de 1 :

$$\textstyle\sum_{i\in N} \beta_i(v) \neq 1$$

C'est pourquoi, d'aucuns préfèrent l'appeler score de Banzhaf ou mesure de pouvoir de Banzhaf plutôt qu'indice de Banzhaf (Felsenthal et Machover (1998)) car l'indice de pouvoir d'un votant i est considéré comme la probabilité que le votant i soit décisif ; et la somme des probabilités doit être égale à 1 dans une distribution de probabilité.

Remarque 2.2.1. *- On remarque que quelque soit l'indice choisi pour la mesure du pouvoir de vote, ce dernier varie non seulement en fonction du poids du votant mais aussi en fonction de la règle de vote choisie.*

- On peut donc conclure que le pouvoir de vote d'un électeur est relié de façon monotone mais pas proportionnelle à son poids de vote.

- Puisque pour un même quota et un même poids donné, les différents indices utilisés attribuent des pouvoirs différents aux différents électeurs, le problème du choix de l'indice de pouvoir le plus approprié se trouve clairement posé.

De ce fait, comment peut-on effectuer un choix entre ces deux indices de pouvoir ?

Pour répondre à cette question, nous essaierons d'étudier les caractéristiques de ces indices de pouvoir.

2.3 Propriétés et axiomatisations de l'indice de pouvoir de Banzhaf

Les indices de Banzhaf et l'indice de Shapley-Shubik ont été caractérisés par un certain nombre d'axiomes. En effet, la valeur de Shapley est caractérisée par quatre axiomes. Quant à l'indice de Shapley-Shubik, il a été axiomatisé premièrement par Dubey (1975) puis par Dubey et Shapley (1979). L'indice de Banzhaf quant à lui à été d'abord axiomatisé par Owen (1978) puis par Dubey et Shapley (1979). Plusieurs auteurs ont par la suite proposé d'autres axiomes pour caractériser ces indices dont Laruelle et Valenciano (2001). Les principaux axiomes proposés sont les suivants :

Axiome 2.1. *(l'anonymat)*
Soit (N, v) un jeu simple, pour toute permutation π de N et pour tout $i \in N$ ona :

$$\alpha_i(\pi v) = \alpha_{\pi i}(v) \text{ avec } (\pi v)(S) = v(\pi(S))$$

Une permutation est une bijection $\pi : N \to N$

Cet axiome veut dire que le pouvoir des joueurs ne dépend pas de la manière dont ils ont été étiquetés (numérotés).

Axiome 2.2. *(Dummy)*

Si i est un joueur nul du jeu (N, v), c'est-à-dire si :

$$v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall S \text{ telle que } i \notin S, \text{ alors } \alpha_i(v) = 0$$

Un joueur i est appelé joueur dummy (nul) dans un jeu (N, v), s'il n'apporte rien dans le jeu. Il ne peut en effet changer le résultat d'aucune coalition et ne peut par conséquent transformer aucune coalition perdante en coalition gagnante et vice-versa. Son pouvoir de vote est dans ce cas nul. C'est le cas par exemple des députés indépendantistes dans le parlement (2008) même s'ils décident de voter en bloc (quelque soit l'indice de pouvoir, on a : $\alpha_5(v) = 0$). C'est également le cas du Luxembourg dans l'Europe des six ou les trois grands États ont 4 voix chacun, les deux États de taille moyenne ont 2 voix chacun et 1 voix pour le Luxembourg. Les décisions sont prises avec une règle de majorité qualifiée de 12 voix sur 17, ce qui donne le jeu v : (12 ; 4, 4, 4, 2, 2, 1).

Axiome 2.3. *(La symétrie)*

Si deux joueurs i et j sont substituts dans un jeu $(N,\ v)$, c'est-à-dire pour toute coalition $S \subset\ N \backslash \{i, j\}$, si : $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, alors $\alpha_i(v) = \alpha_j(v)$.

Axiome 2.4. *(Du transfert ou de décomposition)*

Soient (N, v) et (N, ω) deux jeux simples. On définit les opérateurs $(v \wedge \omega)$ et $(v \vee \omega)$ par $(v \vee \omega)(S) = max(v(S), \omega(S))$ et $(v \wedge \omega)(S) = min(v(S), \omega(S))$,alors d'après l'axiome du transfert ou l'axiome de décomposition, on a : $\alpha_i(v \vee \omega) + \alpha_i(v \wedge \omega) = \alpha_i(v) + \alpha_i(\omega)$

Malgré la simplicité mathématique de cet axiome, son interprétation divise encore les spécialistes de la théorie des jeux dont on peut citer entre autre Felsenthal et Machover (1995).

Axiome 2.5. *(L'efficience)*

Pour tout jeu simple (N,v), on a : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) = 1$

L'efficience veut dire que la somme des pouvoirs de tous les joueurs doit être égale à 1. L'efficience est un critère de normalisation.

Axiome 2.6. *(Pouvoir total de l'indice de Banzhaf)*

Pour tout jeu simple (N, v), $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S \backslash \{j\})]$

C'est la somme des pouvoirs de tous les joueurs lorsqu'on utilise l'indice non normalisé de Banzhaf. Cette somme est souvent différente de 1. Soit $\alpha : V \to R$ un indice de pouvoir.

Les théorèmes suivants dû à Dubey et Shapley (1979) donnent une axiomatisation de l'indice de Banzhaf normalisé, l'indice non normalisé de Banzhaf et l'indice de Shapley-Subik

Théorème 2.1. *L'unique indice qui vérifie les axiomes 1, 2, 3, 4 et 5 est l'indice de Shapley-Shubik.*

Théorème 2.2. *L'unique indice satisfaisant les axiomes 1, 2, 3, 4 et 6 est l'indice non normalisé de Banzhaf.*

Théorème 2.3. *L'indice de Banzhaf normalisé quand à lui ne vérifie que les axiomes 1, 2,3 et 5.*

On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

Tableau 6 : tableau récapitulatif des différents axiomes et les indices qui les vérifient.

Indice et Axiome	Anonymat	Dummy	Transfert	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v)$	Symétrie
Shapley-Shuhik	Oui	Oui	Oui	1	Oui
Banzhaf normalisé	Oui	Oui	Non	1	Oui
Banzhaf non normalisé	Oui	Oui	Oui	$\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq N} [v(S) - v(S \backslash \{j\})]$	Oui

D'autres axiomes ont été proposés par les spécialistes de la théorie du vote et de la théorie des jeux coopératifs. On peut citer par exemple les travaux de Laruelle et Valenciano(2001) qui ont proposé d'autres variantes des axiomes proposés par Dubey et Shapley.

Nous remarquons qu'il est difficile de choisir un indice à partir de ces axiomes. En particulier, comment choisir entre l'indice de Shapley-Shubik et l'indice non normalisé de Banzhaf d'autant plus que les deux vérifient les quatre premiers axiomes, mais l'indice de Shapley est normalisé contrairement à l'indice non normalisé de Banzhaf qui vérifie l'axiome 6.

2.4 Analyse probabiliste des indices de Shapley-Shubik et de l'indice de Banzhaf

L'indice de Shapley-Shubik et l'indice non normalisé de Banzhaf ont fait l'objet d'une interprétation probabiliste (Andjiga, Chantreuil et Lepelley (2003)).

En effet, l'indice de Banzhaf non normalisé du joueur i peut s'interpréter comme la probabilité que le joueur i transforme une coalition perdante en coalition gagnante. C'est donc la probabilité que le joueur i soit décisif dans une coalition donnée. Cette probabilité est obtenue à partir de l'ensemble des coalitions auxquelles le joueur i est susceptible d'appartenir (en nombre égal à 2^{n-1}) comme nous l'avons vu précédemment.

L'indice de Shapley Shubik est quant à lui déduit de l'ensemble de toutes les coalitions de taille n avec prise en compte de l'ordre des joueurs qui les constituent. Cet indice peut cependant être analysé comme la probabilité d'être décisif comme le suggère Shapley- Shubik : « le pouvoir de vote d'un individu dépend de la possibilité qui lui est offerte d'être déterminant pour le succès d'une coalition ». Selon Strafin (1982), l'indice de Banzhaf est basé sur une hypothèse d'indépendance des électeurs car chaque votant vote indépendamment des autres avec une équiprobabilité :

$$p = \frac{1}{2^{n-1}}$$

et l'indice de Shapley-Shubik est basé sur une hypothèse d'homogénéité avec une probabilité d'occurrence de

$$p = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

A travers notre étude, il s'avère donc difficile de savoir quel est l'indice le mieux approprié pour calculer le pouvoir de vote d'un électeur. Si on pense que les joueurs font leurs choix de manière complètement indépendante, alors c'est l'indice de Banzhaf qu'il faut utiliser pour calculer leur pouvoir. Si par contre, on estime qu'ils jugent les différentes propositions qui leurs sont soumises en fonction de valeurs communes, alors c'est l'indice de Shapley-Shubik qui apparaît comme le plus approprié.

Le chapitre suivant fera l'objet de l'étude de l'indice de Banzhaf dans un jeu simple composé.

⋆ ⋆ Chapitre Trois ⋆ ⋆

Indice de Banzhaf dans un jeu simple composé

3.1 Notion de jeu composé

3.1.1 Une approche des jeux composés

Scénario de Penrose

Le scénario de base considéré par penrose(1946) (et plus tard réinventé par Banzhaf) est comme suit : Il y a k circonscriptions avec différentes populations de tailles n_1,...,n_k et avec les délégués 1,...,k nommés pour les représenter. Chaque citoyen est libre de voter "pour"(0) ou voter "contre" (N) pour le passage d'un projet de loi. Une fois les citoyens ont lancé leurs votes, le résultat est décidé dans chaque circonscription électorale par la règle de la majorité simple. Décision-faite alors on passe au conseil des délégués. chaque délégué vote 0 ou N en accord avec le plébiscite dans sa circonscription électorale. Le dernier résultat du vote dans le conseil est résolu de maniéré plus subtile, par un jeu de vote v défini sur l'ensemble de délégués 1,...,k. La modélisation mathématique d'un scénario de vote composé est le suivant :

Soit U un ensemble (éventuellement) infini de joueurs. On considère $k+1$ jeux simples $v, \omega_1, ..., \omega_k$ sur U tel que :

i) v a un support $N \subset U$ avec $|N| = k$;

ii) $\omega_1, ..., \omega_k$ ont pour supports finis disjoints $M_1, ..., M_k$.

Soit $\alpha : \{1, ..., k\} \to N$ une bijection. Alors, le jeu simple $u \in SG$ est appelé jeu composé de v avec $\omega_1, ..., \omega_k$ via α et on note par : $u = v_\alpha[\omega_1, ..., \omega_k]$, si $u(S) = (v(\alpha_j|\omega_j(S) = 1)$. Il est à noter que $M = \bigcup_{j=1}^{k} M_j$.

On peut ainsi penser à u comme étant un vote à deux étapes. En première lieu il y a un vote simultané dans les circonscriptions électorales $1, ..., n$. Le résultat de vote m_j de la circonscription électorale j est déterminer par ω_j. Le vote passe alors au conseil de délégué. Le délégué de chaque circonscription électoral j est identifie par $\alpha_j \in N$, et son vote coïncide avec le plébiscite de sa circonscription électorale. Les résultats de vote par les conseils de délégué dans M est donné par v.

Elections présidentielles au États-Unis

L'élection présidentielle américaine est un scrutin indirect. Le président est élu par un collège électoral dont la définition figure dans la constitution. Ce collège est constitué des grands électeurs élus au suffrage universel dans chaque État par des votes à la majorité absolue. Chacun des cinquante États élit un nombre de « grands électeurs » égal au nombre de ses Représentants et Sénateurs soit un total de 538 (100 au titre du Sénat, 435 au titre de la Chambre des représentants, 3 pour le District fédéral de Columbia). L'État le plus peuplé, la Californie, dispose de 55 votes, alors que les 8 États les moins peuplés n'en ont que 3 chacun.
En pratique, les dernières élections se jouent entre le candidat de la parti démocrate et celui du parti républicain comme lors des deux dernières élections. Désignons par $M = \{1, ..., 50\}$ le collège électoral (un élément de M est un État) et par les $N_i,\ i = 1, ..., 50$ les États en question, la population totale est donc $N = \bigcup_{i=1}^{50} N_i$.
Si on note :

- w_i le nombre de grands électeurs de l'État i, c'est le poids de l'État i dans M
- $\mathcal{W}_i = \{T \in 2^{N_i} :\mid T \mid > \frac{1}{2} \mid M_i \mid\}$
- $q = \sum_{i=1}^{50} w_i$
- $\mathcal{W} = \left\{ S \in 2^M : \sum_{i \in S} w_i > \frac{1}{2} q \right\}$

alors, $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W})$ est un jeu simple à quota (l'élu est le candidat ayant réuni en sa faveur au moins $270 = \frac{1}{2}q$ grands électeurs) avec $\mathcal{W}$ comme l'ensemble des coalitions gagnantes et pour tout $i \in M$, $\Gamma_i = (N_i,\ \mathcal{W}_i)$ est un jeu simple (jeu à la majorité simple) avec $\mathcal{W}_i$ comme l'ensemble des coalitions gagnantes.
Les élections se font donc en deux tours, le premier tour s'effectue dans les États où chaque État

i élit ses représentants par un vote à la majorité absolue $\Gamma_i = (N_i,\ \mathcal{W}_i)$ et chaque représentant éligible présente sa préférence entre les deux candidats à l'élection présidentielle et le transcrit fidèlement à la chambre des représentants au cas où il est élu.

Le deuxième tour a lieu au collège électoral où chaque État est représenté avec pour poids son nombre de représentants, l'élu est le candidat ayant réuni en sa faveur au moins $270 = \frac{1}{2}q$ grands électeurs dans le jeu simple à quota $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W})$ avec pour quota 269.

Ces élections peuvent s'interpréter comme un jeu composé simple $\Gamma = (N, \mathcal{W}_N)$ noté $\Gamma = \Gamma_0[\Gamma_1, ..., \Gamma_m]$ où Γ_0 est le quotient et Γ_1,...,Γ_{50} sont les composantes.

$\mathcal{W}_N$ est l'ensemble des coalitions gagnantes du jeu composé est il est donné par :

$\mathcal{W}_N = \left\{S \in 2^N : \mathcal{C}(S) \in \mathcal{W}\right\}$ où $\mathcal{C}(S) = \{i \in M : S \cap N_i \in \mathcal{W}_i\}$.

3.1.2 Formalisme général d'un jeu composé simple

Soit $\Gamma_i = (N_i, v_i)$ une famille de m JFCCs vérifiant $v_i(N_i) = 1,\ \ i \in \{1, .., m\}$ et $N_i \cap N_j = \emptyset$, $\Gamma_0 = (M, u)$ un JFCC tel que $M = \{1, ..., m\}$.

Suivant le scénario de Penrose on peut considérer $\Gamma_0 = (M, u)$ comme le jeu des délègues ou des représentant de circonscription $N_i, i = \{1, ..., m\}$ qui tiennent fidèlement compte des intérêts de leurs circonscription dans le jeu global . Owen(1964) définit ainsi une composition des jeux $\Gamma_1 = (N_1, v_1), ..., \Gamma_m = (N_m, v_m)$ avec le jeu $\Gamma_0 = (M, u)$ sous deux hypothèses :

H_1**-** Le gain d'une coalition de délégué dans le jeu des délégués doit être égal au gain de la réunion de toutes les circonscriptions que ces délégués représentent dans le jeu global.

H_2**-** La contribution marginale d'un agent k, provenant d'une circonscription N_i dans une coalition S du jeu globale doit être proportionnelle à sa contribution marginale dans le jeu de la circonscription N_i et proportionnelle à la contribution marginale de sa circonscription N_i dans S dans le jeu global.

Plus explicitement si on note v la fonction caractéristique du jeu composé obtenu, les hypothèses H_1 et H_2 s'écrivent :

H_1**-** $\forall T \subseteq M,\ \ u(T) = v\left(\bigcup_{j\in T} N_j\right).$

H_2**-** $\forall i \in M,\ \ \forall k \in N_j,\ \ \forall S \subseteq N,$

$$v(S \cup \{k\}) - v(S) = [v_i((S \cap N_i) \cup \{k\}) - v_i((S \cap N_i))]\,[v(S \cup N_i) - v(S \setminus N_i)].$$

Le résultat suivant dû à **Owen (1964)** donne la forme analytique de la fonction caractéristique du jeu composé ainsi obtenu.

Théorème 3.1. *Soient $\Gamma_0 = (M, u)$ et $\Gamma_i = (N_i, v_i)$ m JFCCs vérifiant $v_i(N_i) = 1, \ \ i = 1, ..., m$.*
L'unique fonction v à valeurs réelles, définie sur $N = \bigcup_{i=1}^{m} N_i$ et satisfaisant les hypothèses H_1 et H_2 est définie par :

$$\forall S \subseteq N, \ \ v(S) = \sum_{T \subseteq M} \left[\prod_{i \in T} v_i(S \cap N_i) \prod_{i \notin T} (1 - v_i(S \cap N_i)) \right] u(T).$$

On obtient la définition suivant d'un jeu composé.

Définition 3.1. *Le* ***jeu composé*** *des jeux $\Gamma_1, ..., \Gamma_m$ avec le jeu Γ_0 est le jeu $\Gamma = (N, v)$ noté $\Gamma_0 [\Gamma_1, ..., \Gamma_m]$ et défini par :*

$$\forall S \subseteq N, \ \ v(S) = \sum_{T \subseteq M} \left[\prod_{i \in T} v_i(S \cap N_i) \prod_{i \notin T} (1 - v_i(S \cap N_i)) \right] u(T)$$

$$\text{où } N = \bigcup_{i=1}^{m} N_i.$$

$\Gamma_1, ..., \Gamma_m$ sont les jeux composants (ou tout simplement composantes) de Γ et Γ_0 est son jeu quotient (ou tout simplement quotient).

La complexité de la forme caractéristique d'un jeu composé n'encourage pas les chercheurs à approfondir les propriétés qui caractérisent un tel jeu. Mais fort heureusement bien avant Owen(1964), Shapley(1962) a introduit les jeux simples composé qui sont en faite les jeux composés particuliers .

Définition 3.2. *Un jeu simple composé est un jeu composé où le jeu quotient $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$ et les jeux composants $\Gamma_i = (N_i, \mathcal{W}_i), \ \ i = 1, ..., m$ sont tous simples.*

Remarque 3.1.1. *Lorsque seuls les composantes d'un jeu composé sont simples, on parle de jeu composé simple.*

Le résultat suivant montre qu'un jeu simple composé est un jeu simple.

Proposition 3.1. *Soient $\Gamma_i = (N_i, \mathcal{W}_i), \ \ i = 1, ..., m$, m jeux simples tel que les N_i soit deux à deux disjointes et $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$ un jeu simple tel que $(M = \{1, ..., m\})$.*
Le jeu simple composé Γ=$\Gamma_0[\Gamma_1, ..., \Gamma_m]$ est le jeu simple $\Gamma = (N, \mathcal{W})$ avec
N= $N_1 \cup N_2 ... \cup N_m$ et $\mathcal{W} = \left\{ S \in 2^N : \mathcal{T}_S \in \mathcal{W}_0 \right\}$ où $\mathcal{T}_S = \{ i \in M : S \cap N_i \in \mathcal{W}_i \}$

Preuve. Soit i= 1,...,m ; $\Gamma_i = (N_i, \mathcal{W}_i)$ peut être représenter par la fonction caractéristique v_i définit par : $\forall S \subset N_i$, $\begin{cases} v_i(S) = 1 \text{ si } S \in W_i \\ v_i(S) = 0 \text{ si } S \in W_i \end{cases}$.

$\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$ est un jeu simple donc la fonction caractéristique u est : $\begin{cases} u(S) = 1 \text{ si } S \in W_0 \\ u(S) = 0 \text{ si } S \in W_0 \end{cases}$.

Grâce au Théorème 1.3 d'Owen(1964) la fonction caractéristique du jeu composé Γ=$\Gamma_0[\Gamma_1, ..., \Gamma_m]$ est :

$$\begin{aligned} v(S) &= \sum_{T\subseteq M} \left[\prod_{i\in T} v_i(S\cap N_i) \prod_{i\notin T} (1 - v_i(S\cap N_i)) \right] u(T) \\ &= \sum_{T\subseteq M,\ T\neq T_S} \left[\prod_{i\in T} v_i(S\cap N_i) \prod_{i\notin T} (1 - v_i(S\cap N_i)) \right] u(T) + \prod_{i\in T_S} v_i(S\cap N_i) \prod_{i\notin T_S} (1 - v_i(S\cap N_i)) u(T_S) \\ &= \sum_{T\subseteq M,\ T\neq T_S} \left[\prod_{i\in T} v_i(S\cap N_i) \prod_{i\notin T} (1 - v_i(S\cap N_i)) \right] u(T) + u(T_S) \end{aligned}$$

or $\forall S \subseteq N,\ T \neq T_S \Rightarrow\ \exists i \in T \setminus T_S$ ou $\exists j \in T_S \setminus T$.

Si $\exists i \in T \setminus T_S$, alors $v_i(S\cap N_i) = 0$ et on a $\prod_{i\in T} v_i(S\cap N_i) \prod_{i\notin T}(1 - v_i(S\cap N_i)) = 0$.

Si $\exists j \in T_S \setminus T$, alors $1 - v_j(S\cap N_j) = 0$ et on a $\prod_{i\in T} v_i(S\cap N_i) \prod_{i\notin T}(1 - v_i(S\cap N_i)) = 0$.

Donc $v(S) = u(T_S) = u(\{i \in M :\ S\cap N_i \in \mathcal{W}_i\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{T}_S \in \mathcal{W}_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

■

Interprétations 6. *- Une coalition S est gagnante dans le jeu simple composé $\Gamma = (N, \mathcal{W})$ si les individus qui sont à la fois dans la coalition S et dans la circonscription i gagnent dans cette circonscription et les délégués représentant les circonscriptions i forment aussi une coalition gagnante dans le jeu quotient $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$.*

- S une coalition de $N = \bigcup_{i=1}^{m} N_i$ peut s'écrit sous la forme suivante : $S = \bigcup_{i\in M} S_i$. où $S_i = S \cap N_i$

Pour mieux illustre un jeu simple composé prenons l'exemple suivant

Exemple 3.1.1. *Soient $\Gamma_1 = (N_1, \mathcal{W}_1)$ où $N_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ est l'ensemble des électeurs dans la circonscription électorale 1 et $\mathcal{W}_1 = \{a_1a_2, a_1a_2a_3\}$ est l'ensemble des coalitions gagnantes dans cette circonscription électorale .*

$\Gamma_2 = (N_2, \mathcal{W}_2)$ *où* $N_2 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ *est l'ensemble des électeurs dans la circonscription électorale 2 et* $\mathcal{W}_2 = \{b_3b_4, b_1b_3b_4, b_2b_3b_4, b_1b_2b_3b_4\}$ *est l'ensemble des coalitions gagnantes dans cette circonscription électorale .*

$\Gamma_3 = (N_3, \mathcal{W}_3)$ *où* $N_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$ *est l'ensemble des électeurs dans la circonscription électorale 3 et* $\mathcal{W}_3 = \{c_2c_3, c_1c_2c_3\}$ *est l'ensemble des coalitions gagnantes dans cette circonscription électorale .*

$\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$ *où* $M = \{1, 2, 3\}$ *est l'ensemble des représentants (délégués) de chaque circonscription électorale et* $\mathcal{W}_0 = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Γ=$\Gamma_0[\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3] = (N, \mathcal{W})$ *où* $N = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3\}$ *est l'ensemble de la population totale.*

- La coalitions $S = \{a_1a_2, b_2b_3b_4, c_1c_2c_3\}, T = \{b_1b_3b_4, c_2c_3\}$ *sont quelques coalitions gagnantes dans le jeu simple composé* $\Gamma = (N, \mathcal{W})$.

- La coalitions R=$\{a_1, a_1a_2\}$ *, Q=* $\{c_2c_3, b_1b_4\}$ *sont quelques coalitions perdantes dans le jeu simple composé* $\Gamma = (N, \mathcal{W})$.

La procédure électoral du président des États-Unis est un jeu simple composé où les différents votes dans les États et le vote au niveau des grands électeurs sont des jeux simples .

3.2 L'indice de Banzhaf dans un jeu simple composé

3.2.1 Mesure du pouvoir de vote d'un joueur

Penrose(1946) et Banzhaf (1954) estiment que la véritable mesure de "pouvoir de vote" d'un citoyen est donnée par la probabilité que son vote unique peut faire pencher la balance dans le passage du projet de loi dans ce processus à deux niveau. Un peu de réflexion révèle que son pouvoir, ainsi défini, doit être : (la probabilité que son délégué peut faire pencher la balance dans le conseil) multiplié par (la probabilité qu'il peut faire pencher la balance dans sa circonscription électorale).

La proposition suivant est celle de Shapley (1962) :

Proposition 3.2. *Soit* β_{t_i} *l'indice de Banzhaf d'un joueur dans le jeu composant* $\Gamma_i = (N_i, \mathcal{W}_i)$ *et* β_i^q *l'indice de Banzhaf d'un joueur dans le jeu quotient* $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$ *alors l'indice de Banzhaf* $\beta_{t_i}^c$ *d'un joueur dans le jeu simple composé* Γ=$\Gamma_0[\Gamma_1, ..., \Gamma_m] = (N, \mathcal{W})$ *est donne par :* $\beta_{t_i}^c = \beta_{t_i} \times \beta_i^q$ *.*

Exemple 3.2.1. $\Gamma_1 = (N_1, \mathcal{W}_1)$ *où* $N_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$ *est l'ensemble des électeurs dans la circonscription électorale 1 et* $\mathcal{W}_1 = \{a_1a_2, a_1a_2a_3\}$ *est l'ensemble des coalitions gagnantes dans cette circonscription électorale .*

$\Gamma_2 = (N_2, \mathcal{W}_2)$ *où* $N_2 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ *est l'ensemble des électeurs dans la circonscription électorale 2 et* $\mathcal{W}_2 = \{b_3b_4, b_1b_3b_4, b_2b_3b_4, b_1b_2b_3b_4\}$ *est l'ensemble des coalitions gagnantes dans cette circonscription électorale .*

$\Gamma_3 = (N_3, \mathcal{W}_3)$ *où* $N_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$ *est l'ensemble des électeurs dans la circonscription électorale 3 et* $\mathcal{W}_3 = \{c_2c_3, c_1c_2c_3\}$ *est l'ensemble des coalitions gagnantes dans cette circonscription électorale .*

$\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$ *où* $M = \{1, 2, 3\}$ *est l'ensemble des représentants (délégué) de chaque circonscription électorale et* $\mathcal{W}_0 = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Γ=$\Gamma_0[\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3] = (N, \mathcal{W})$ *où* $N = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3\}$ *est l'ensemble de la population totale .*

1-a) Déterminons l'indice de Banzhaf des électeurs dans le jeu $\Gamma_1 = (N_1, \mathcal{W}_1)$

* $\beta_{a_1}(v) = \dfrac{2}{2^{3-1}} = \dfrac{1}{2}$, *car le joueur* a_1 *est décisif dans les deux coalitions gagnantes du jeu* $\Gamma_1 = (N_1, \mathcal{W}_1)$.

* $\beta_{a_2}(v) = \dfrac{2}{2^{3-1}} = \dfrac{1}{2}$, *car le joueur* a_2 *est décisif dans les deux coalitions gagnantes du jeu* $\Gamma_1 = (N_1, \mathcal{W}_1)$.

* $\beta_{a_3}(v) = \dfrac{0}{2^{3-1}} = \dfrac{0}{4} = 0$, *car le joueur* a_3 *n'est décisif dans aucune coalition gagnante du jeu* $\Gamma_1 = (N_1, \mathcal{W}_1)$.

b) Déterminons l'indice de Banzhaf des électeurs dans le jeu $\Gamma_2 = (N_2, \mathcal{W}_2)$.

* $\beta_{b_1}(v) = \dfrac{0}{2^{4-1}} = \dfrac{0}{8} = 0$, *car le joueur* b_1 *n'est décisif dans aucune coalition gagnante du jeu* $\Gamma_2 = (N_2, \mathcal{W}_2)$.

* $\beta_{b_2}(v) = \dfrac{0}{2^{4-1}} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, *car le joueur* b_2 *n'est décisif dans aucune coalition gagnante du jeu* $\Gamma_2 = (N_2, \mathcal{W}_2)$.

* $\beta_{b_3}(v) = \dfrac{4}{2^{4-1}} = \dfrac{1}{2}$, *car le joueur* b_3 *est décisif dans les quatre coalitions gagnantes du jeu* $\Gamma_2 = (N_2, \mathcal{W}_2)$.

* $\beta_{b_4}(v) = \dfrac{4}{2^{4-1}} = \dfrac{1}{2}$, *car le joueur* b_4 *est décisif dans les quatre coalitions gagnantes du jeu* $\Gamma_2 = (N_2, \mathcal{W}_2)$.

c) Déterminons l'indice de Banzhaf des électeurs dans le jeu $\Gamma_3 = (N_3, \mathcal{W}_3)$

* $\beta_{c_1}(v) = \dfrac{0}{2^{3-1}} = \dfrac{0}{4} = 0$ *car le joueur* c_1 *n'est décisif dans aucune coalitions gagnantes du jeu* $\Gamma_3 = (N_3, \mathcal{W}_3)$.

* $\beta_{c_1}(v) = \dfrac{2}{2^{3-1}} = \dfrac{1}{2}$ *car le joueur* c_2 *est décisif dans les deux coalitions gagnantes du jeu* $\Gamma_1 = (N_3, \mathcal{W}_3)$.

* $\beta_{c_3}(v) = \dfrac{2}{2^{3-1}} = \dfrac{1}{2}$ *car le joueur* c_3 *est décisif dans les deux coalitions gagnantes du jeu* $\Gamma_3 = (N_3, \mathcal{W}_3)$.

2) Déterminons l'indice de Banzhaf des délégués dans le jeu $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$

* $\beta_1^q(v) = \dfrac{0}{2^{3-1}} = \dfrac{0}{4} = 0$ *car le délégué* 1 *n'est décisif dans aucune coalition gagnante du jeu* $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$.

* $\beta_2^q(v) = \dfrac{2}{2^{3-1}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ *car le délégué* 2 *est décisif dans les deux coalitions gagnantes du jeu* $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$.

* $\beta_3^q(v) = \dfrac{2}{2^{3-1}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ *car le délégué* 3 *est décisif dans les deux coalitions gagnantes du jeu* $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W}_0)$.

3) Déterminons l'indice de Banzhaf des électeurs dans le jeu simple composé Γ=$\Gamma_0[\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3] = (N, \mathcal{W})$.

a) L'indice de Banzhaf des électeurs du jeu simple $\Gamma_1 = (N_1, \mathcal{W}_1)$ *dans le jeu composé est :*

$\beta_{a_1}^c(v) = \beta_{a_2}^c(v) = \beta_{a_3}^c(v) = 0$ *car* $\beta_1^q(v) = 0$

b) L'indice de Banzhaf des électeurs du jeu simple $\Gamma_2 = (N_2, \mathcal{W}_2)$ *dans le jeu composé est :*

* $\beta_{b_1}^c(v) = \beta_{b_2}^c(v) = 0 \times \dfrac{1}{2} = 0$

* $\beta_{b_3}^c(v) = \beta_{b_4}^c(v) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

c) L'indice de Banzhaf des électeurs du jeu simple $\Gamma_3 = (N_3, \mathcal{W}_3)$ *dans le jeu composé est :*

* $\beta_{c_1}^c(v) = 0 \times \dfrac{1}{2} = 0$

* $\beta_{c_2}^c(v) = \beta_{c_3}^c(v) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Donc les joueurs $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1$ *sont dummy dans le jeu simple composé.*

3.2.2 Axiomatisation de l'indice de Banzhaf.

L'indice de pouvoir φ est une application $\varphi : SG \rightarrow AG$, avec $\varphi v(i) \equiv$ le pouvoir d'un joueur i dans le jeu de vote v.

Nous allons montrer que β est l'unique indice de pouvoir qui satisfait les trois axiomes simples suivants.

Axiome 3.1. *(positivité)*

L' axiome de la positivité stipule qu'aucun électeur n'a un pouvoir négatif et au moins un a un pouvoir positif.

Axiome 3.2. *(Transfert)*

$\varphi(v \vee \omega) + \varphi(v \wedge \omega) = \varphi(v) + \varphi(\omega)$ *pour tout* $v, \omega \in SG$

Axiome 3.3. *(Composition)*
$u = v_\alpha[\omega_1, ..., \omega_k]$, *ou* $v, \omega_1, ..., \omega_k$ *ont pour support fini disjoints* $N, M_1, ..., M_k$ *ou* $M_1, ..., M_k$ *sont disjoints et où* $\alpha : \{1, ..., k\} \to N$ *est une bijection. En outre, supposons que chaque* ω_j *est un jeu décisif. Alors* $(\varphi u)(i) = (\varphi v)(\alpha(j)).(\varphi\omega_j)(i)$ *si* $i \in M_j$ *, pour tout* $i \in \bigcup_{j=1}^{n} M_j$

Interprétations 7. ** L'axiome de la positivité stipule qu'aucun électeur n'a un pouvoir négatif et au moins un a un pouvoir positif.*

**L'axiome de transfert exige que, lorsque les coalitions gagnantes sont améliorées dans un jeu, le changement de pouvoir de vote ne dépend que du changement dans le jeu, à savoir, sur l'ensemble des nouvelles coalitions gagnantes .*

** L'axiome le plus crucial est l'axiome de composition. Il stipule que l'indice de pouvoir d'un joueur dans un jeu composé (jeu de vote) est le produit de son pouvoir dans la pertinente jeu de premier rang par le pouvoir de son délégué dans le jeu de second rang.*

3.2.3 Unicité de l'indice de Banzhaf

Le Théorème suivant est dû à Pradeep Dubey, Ezra Einy et Ori Haimanko (2003)

Théorème 3.2. *Il existe un, et un seul, indice de pouvoir satisfaisant des axiomes 1 ,2 et 3 : c'est l'indice* β *de Banzhaf.*

Pour la démonstration de ce Théorème nous avons besoin des quatre lemmes suivants :

Lemme 3.1. *Notons* u_i *le jeu de l'unanimité sur l'ensemble* $\{i\}$*, à savoir :* $u_i(S) = 1$ *si* $i \in S$ *et* 0 *sinon. Alors* $(\varphi u_i)(i) = 1$.

Preuve. Considérons la composition $u_i[u_i]$ de u_i avec elle même (ici $k = 1, M_1 = \{i\}, \omega_1 = u_i$), via les α de la bijection triviales avec $\alpha(1) = i$. De tout évidence, $u_i[u_i] = u_i$, et donc $(\varphi(u_i[u_i]))(i) = (\varphi u_i)(i)$. Cependant, par l'axiome de composition $(\varphi(u_i[u_i]))(i) = ((\varphi u_i)(i))^2$ et ainsi $(\varphi u_i)(i) \in \{0, 1\}$. Supposons que $(\varphi u_i)(i) = 0$. Soit $j \in (U \backslash \{i\})$.

Alors (soit ($k = 1, M_1 = \{i, j\}$ un support pour $\omega_1 = u_i$ et α comme avant, c'est-à-dire $\alpha(1) = 1$) l'axiome de composition implique que $(\varphi u_i)(j) = (\varphi(u_i[u_i]))(j) = (\varphi u_i)(i).(\varphi u_i)(j) = 0$, et donc $(\varphi u_i) = 0$, ce qui contredit l'axiome de positivité. Nous concluons que $(\varphi u_i) = 1$.

Pour tout permutation finie $\pi : U \to U$ et un jeu $v \in SG$, on définit $\pi v \in SG$ par $(\pi v)(S) = v(\pi(S))$ pour tout $S \in 2^U$. Le jeu πv est le même que v, sauf que les joueurs sont rebaptisés selon π. ■

Lemme 3.2. *φ satisfait l'axiome de l'anonymat : $\varphi(\pi v) = \pi(\varphi v)$ pour tout $v \in SG$ et toutes permutations π de U.*

Preuve.

Soit $N = \{i_1, ..., i_k\}$ une coalition fini de support v, et (en prenant N assez grand) à l'extérieur la permutation pour laquelle la fonction π est une identité. Considérons maintenant la bijection $\alpha : \{1, ..., k\} \to N$ donnée par $\alpha(j) = \pi(i_j)$ pour chaque $1 \leq j \leq k$, et le jeu compose $u = v_a[u_{i_1}, ..., u_{i_k}]$. Ici j circonscriptions se composent seulement des joueurs i_j, et son délégué est $\pi(i_j)$. C'est donc évident que $u = \pi v$. Ainsi de l'axiome de composition et le lemme 1, pour tout $1 \leq j \leq k$

$\varphi(\pi v)(i_j) = (\varphi u)(i_j) = (\varphi v)(\alpha(j).(\varphi u_{i_j})(i_j) = (\varphi v)(\pi(i_j))$. Comme N peut être pris arbitrairement grand, cet argument montre en fait que $\varphi(\pi v)(i) = \pi(\varphi v)(i)$ pour tout $i \in U$ et cela établit l'anonymat de φ. ■

Lemme 3.3. *φ satisfait l'axiome dummy : Si $v \in SG$, et i est un joueur fictif c'est-à-dire $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i)$ pour tout $S \subset U \backslash \{i\}$, alors $(\varphi v)(i) = v(i)$.*

Preuve.

Premièrement, supposons que $v(i) = 0$. Comme i est aussi un joueur dummy,v à un support qui exclut i.

v et φv sont deux jeux finis, et par conséquent, il existe $j \in U$ qui est en dehors d'un support commun de v et de φv. Ainsi $\pi_{ij} v = v$ (ou π_{ij} est la permutation de U qui inter change i et j, et $(\varphi v)(j) = 0$). Mais à partir de l'axiome d'anonymat établit dans le lemme 2, $(\varphi v)(i) = (\varphi v)(j)$, et on en déduit que $(\varphi v)(i) = 0 = v(i)$. Il reste à examiner le cas lorsque $v(i) = 1$. Cependant, puisque le jeu v est simple, l'existence d'un tel dummy i implique que $v = u_i$ et nous avons déjà montré dans le lemme 1 que $(\varphi u_i)(i) = 1 = u_i(i)$. ■

φ satisfait l'anonymat, positivité et l'axiome de transfert, d'après Einy(1987) : il y a une unique extension de φ à une application linéaire $\overline{\varphi} : G \to AG$. D'après Owen (1982), φ est soit l'indice de Banzhaf , ou la valeur nulle ($\overline{\varphi} \equiv 0$), ou la valeur dictatorial ($\overline{\varphi}(v)(i)) \equiv v(i))$ sur le domaine $CG \subset G$ pour tout jeux à somme constantes. Puisque la valeur nulle et les valeurs dictatoriaux disparaissent sur les jeux décisifs simples V avec $v(i) = 0$ pour tout $i \in U$. Ainsi, φ coïncide avec l'indice de Banzhaf sur CG. Cependant, par le théorème $X.3.18$ de Owen(1982), l'extension linéaire de $\overline{\varphi}$ de CG pour G est unique, pourvu qu'elle remplisse l'axiome dummy, l'axiome de l'anonymat et l'axiome de composition de SG. Ainsi, φ est l'indice de Banzhaf sur G, et par conséquent, φ est l'indice de pouvoir.

Nous donnons maintenant une alternative, façon de compléter la preuve de notre théorème. Il utilise une partie de la machinerie de la théorie de semi valeur, ce qui en fait suffisante pour repérer la valeur de φ pour les jeux de la majorité de trois personnes seulement. Nous avons montrer que φ satisfait l'axiome de l'anonymat, positivités et de transfert. Ainsi d'après Einy (1987) ; il existe un unique mesure de probabilité ε sur [0, 1] tel que pour tout $v \in SG$ avec support fini N .

$(\varphi v)(i) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_{|S|}^{|N|} [v(S \cup \{i\}) - v(S)\ ]$ si $i \in N$ (2)

,ou $p_{|s|}^{|n|} = \int_0^1 x^s (1-x)^{(n-s-1)} d\varepsilon(x)$ (3)

et $(\varphi v)(i) = 0$ si $i \in U \setminus N$ (4)

Les égalités (2) et (4) nous permettrons d'étendre linéairement φ à l'espace de tous les jeux. Ceci conduit à son tour au Lemme 4

Lemme 3.4. *G.Owen (1982)*

Pour tout $i, j, k \in U$ désignions par $v_{i,j,k}$ un jeu de majorité de trois personnes dans G donnée par $v_{i,j,k}(S) = 1$ si $|S \cap \{i, j, k\}| \geq 2$ et 0 sinon pour $S \in 2^U$. Alors, il existe $q \in \{0, \frac{1}{2}\}$, tel que pour tout $i, j, k \in U$ on a

$$(\varphi v_{i,j,k})(i) = (\varphi v_{i,j,k})(j) = (\varphi v_{i,j,k})(k) = q$$

Preuve. du théorème 3.1 β satisfait les axiomes 1 et 2. L'axiome 3 est cochée dans Owen(1982).

Nous montrons maintenant que uniquement les axiomes 1,2 et 3 impliquent β. Nous arrangeons l'indice de pouvoir φ pour satisfaire l'axiome 1,2 et 3.

Considérons maintenant le jeu $v_{i,j,k}$ pour un certain $i, j, k \in U$. Alors $\{i, j, k\}$ est un support de ce jeu ,la positivité de φ implique que $\varphi v_{i,j,k}$ devrait être positive pour au moins un joueur dans $\{i, j, k\}$. Nous concluons que $q = \frac{1}{2}$ et ainsi $(\varphi v_{i,j,k})(i) = \frac{1}{2}$ (5)

Il résulte également de (2) et (3) que $\varphi v_{i,j,k} = 2p_1^2 = \int_0^1 2x(1-x) d\varepsilon(x)$ (6)

Toute fois, la fonction $2x(1-x)$ atteint son maximum unique $\frac{1}{2}$ en $x = \frac{1}{2}$. Par conséquent (5) et (6) peuvent être compatibles seulement si ε est la distribution soutenue sur le point $\frac{1}{2}$. En substituant ceci dans (3), l'égalité (2) et (4) montrent que φ coïncide avec l'indice de pouvoir de Banzhaf (1965). Ceci termine la preuve du théorème.

■

♣ Conclusion ♣

Notre travail qui s'achève ici s'est articulé autour de trois principaux axes : le premier axe était la présentation des jeux simples. Nous avons défini et illustré par quelques exemples les notions de JFCC et de jeu simple. Puis nous avons présenté quelques solutions de jeu simple (coeur) et de JFCC (le coeur et la valeur de Shapley). Le deuxième axe était la présentation des indices de pouvoir (Shapley-Shubik et Banzhaf dans un jeu simple). Nous avons presenté la notion de poids de vote, étudié des propriétés analytiques et axiomatiques des indices de pouvoir de Banzhaf et Shapley . Dans le troisième axe nous avons présenté les jeux composés et axiomatisé l'indice de Banzhaf dans des jeux simples composés .

Nous avons présenté une preuve pour le théorème de l'unicité de l'indice de Banzhaf en énonçant quatre lemmes. Cependant il y a encore beaucoup de travail à faire sur les jeux simples, notamment la détermination du coeur de cette classe de jeux, avec notion du nombre de Nakamura.

♣ Bibliographie ♣

[1]. Andjiga,N.G., Chantreuil,F., Lepelley,D., 2003. La mesure du pouvoir de vote, pp. 111-145.

[2]. Banzhaf, J. F. (1965). Weighted Voting Doesn't Work : A Mathematical Analysis, Rutgers Law Review 19, pp. 317-343.

[3]. Dubey, P. (1975). On the Uniqueness of the Shapley Value, International Journal of Game Theory 4, pp. 131-139.

[4]. Dubey, P. and L. S. Shapley (1979). Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index, Mathematics of Operations Research 4, pp. 99- 131.

[5]. Einy, E. (1987). Semivalues of Simple Games, Mathematics of Operations Research 12, pp. 185-192.

[6]. Felsenthal, D. S. and M. Machover (1998). The Measurement of Voting Power : Theory and Practice, Problems and Paradoxes. Edward Elgar Publishers, London, U.K.

[7]. Hassane Mbik,2009. Analyse économique de la vie politique à partir de la théorie des jeux coopératifs. Université de Montréal.

[8]. Laurelle, A. and F. Valenciano (2001), Shapley-Shubik and Banzhaf Indices , Mathematics of Operations Research 26, pp. 89-104.

[9] L.S. Shapley , (1962) : Compound simple games I. Solutions of sums and products, RAND Corp., RM-3192, .

[10]. Nakamura K.(1979), The vetoers in a simple game with ordinal preference. International Journal of Game Theory 8, pp. 55-61.

[11]. Owen, G. (1982). Game Theory. 2nd edition. Academic Press, New York. PP.389-393.

[12]. Owen, G. (1978). Characterization of the Banzhaf-Coleman Index, SIAM Journal of Applied Mathematics 35, pp. 315-327.

[13]. Peleg, B. (1978), Consistent voting systems, Econometrica 46, 153-161.

[14].Pradeep Dubey, Ezra Einy and Ori Haimanko .(2003). Compound Voting and the Banzhaf Power Index .The Bebrew University of Jerusalem .

[15] . Penrose, L. S. (1946). The Elementary Statistics of Majority Voting, Journal of the Royal Statistical Society 109, pp. 53-57.

[16]. Shapley, L. S. (1953). A Value for n-person Games, in Kuhn H. W. and Tucker A. W., Contributions to the Theory of Games II (Annals of Mathematical Studies 28) ; Princeton University Press, Princeton.

♣ Fiche pédagogique ♣

Ce travail de longues haleines nous a outillé tant sur le plan purement académique que professionnel. En ce qui concerne l'apport pédagogique de ce mémoire à la profession d'enseignants du lycée que nous allons bientôt exercé, nous pouvons mentionner les points suivants :

- Ce travail fût un exercice important dans l'optique de forger " l'honnêteté scientifique" : le fait de reconnaitre que telle chose n'est pas notre découverte ou invention et de mentionner donc son auteur ;

- il nous a permis de savoir faire des recherches affinées sur un thème donné, de collecter les résultats de ces recherches et de sélectionner rigoureusement ceux qui feront l'objet de notre investigation ;

- il nous a initié à faire un travail selon une méthodologie rigoureuse ;

- il nous a initié à faire une rédaction pédagogique ;

- il nous a également accorde le privilège d' apprendre davantage la langue anglaise car la plupart des articles qui traite notre thème de mémoire est en anglais ;

- nous ne saurons oublier la langue française qu'il nous apporté à travers nos multiples recours aux dictionnaires de grammaire, de conjugaison et d'orthographe