RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

****

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE

****

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work – Fatherland
****

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

****

HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE

****

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

COMPORTEMENT LIMITE DES SOLUTIONS D'UNE SUITE DE PROBLÈMES ELLIPTIQUES LINÉAIRES.

Mémoire rédigé et soutenu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur des Lycées d'Enseignement Secondaire deuxième grade (DIPES II) en Mathématiques.

Option : Analyse

Par

NDOHEU DIMEMOU Jospin

Titulaire d'un DIPES I et d'une licence

en Mathématiques

***Matricule :* 14Y350**

Sous la direction de :

Pr. NNANG Hubert

Maître de Conférences

Année académique : 2018 – 2019

COMPORTEMENT LIMITE DES SOLUTIONS D'UNE SUITE DE PROBLÈMES ELLIPTIQUES LINÉAIRES

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de l'obtention du diplôme de Professeur des Lycées d'Enseignement secondaire Général deuxième grade (DIPES II)

en Mathématiques.

Option : Analyse

Par :

NDOHEU DIMEMOU Jospin

Titulaire d'un DIPES I et d'une licence en Mathématiques

Matricule : 14Y350

Sous la direction de :

Pr. NNANG Hubert

Maître de conférences

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année académique :2018-2019

✠ Dédicace ✠

Je dédie ce travail,

À

ma mère **TATMI SEVERINE** .

Tu as su faire du bébé d'hier, l'homme dont je suis fier d'être aujourd'hui.

Ton principe guidera toujours ma vie.

✠ Remerciements ✠

Je rends tout d'abord grâce à ***Dieu le père tout puissant*** qui m'a donné la force nécessaire pour parachever ce travail dans de bonnes conditions. Ce mémoire voit son accomplissement grâce au soutien multiforme de certaines personnes que j'ai eu la grâce d'avoir à mes côtés durant cette année de travail. Mes remerciements s'adressent,

Au Professeur **Hubert NNANG** qui m'a fait l'honneur de diriger ce mémoire. Par votre grande disponibilité malgré vos multiples responsabilités et surtout votre capacité d'écoute exceptionnelle, vous avez su me donner goût pour cette pluridisciplinarité que représente les mathématiques.

À tous les enseignants du département de mathématiques de l'École normale supérieure de Yaoundé I pour la riche formation qu'ils m'ont donnée.

À tous mes camarades de promotion pour leurs conseils, leur accompagnement et leurs suggestions. Je pense particulièrement à **Romaric KAMGA** , **Hyacenthe EHONE** et à **Paulin ZAPOUE** pour leurs critiques et suggestions importantes lors de la lecture de ce mémoire.

À toute ma grande famille pour le soutien qu'elle a eu à m'apporter pour ma réussite académique. Tout particulièrement à mes deux mères **Sévérine TATMI** et **Mirabelle DJIKE**, ma tante **Florence KAMTCHOUN**, mon oncle **Dany BABO**, ma grande soeur **Michou DJIKIE** , mes frères et sœurs **Adrien tchounkeu**, **inocent YAYA**, **Piere TCHOMI**, **Alain DJEUNDA**, **Arnaud**, **Alain**, **Raissa**, **Chalaine** et sans oublier **Marie DOUNKOUKE** qui dépuis mon entrée à l'Ens m'a toujours soutenu...

À mes camarades de promotion. Tout particulièrement à **Belbaron NZUEGO**, **NJOMI, DOUANLA, BENGONO ,ALIHOU, EBANDA, IROUME Blanche**... avec qui j'ai surmonté plusieurs obstacles et aussi à **Cécilia LEKOUA**.

Aux nombreuses personnes que j'ai omises involontairement et qui de près ou de loin ont contribué à la production de ce travail.

✠ Déclaration sur l'honneur ✠

Le présent mémoire est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle par ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Jospin NDOHEU DIMEMOU

✠ Résumé ✠

Le but de la théorie de l'homogénéisation est d'obtenir les propriétés macroscopiques des milieux hétérogènes en prenant en compte leurs caractéristiques microscopiques. Dans le présent travail, nous avons étudié l'homogénéisation (mathématique) périodique d'une équation variationnelle. En utilisant la méthode de la convergence à deux échelles, nous avons obtenu après passage à la limite le problème macroscopique qui est similaire au ε-problème : une équation variationnelle.

Mots clés : *Homogénéisation , équation variationnelle, convergence à deux échelles, problème homogénéisé, problème microscopique, problème macroscopique.*

✠ Abstract ✠

The aim of the homogenization theory is to describe the macroscopic properties of heteregeneous media by means of their microscopics characteristics. In the present dissertation, we studied a periodic setting, the homogenization of a variationnal equation. Using the Two-scale convergence method, we obtained after passing to the limit, the macroscopic problem which is a variationnal problem similar to the ε-problem. : a variationnal equation.

Keys words : *homogenization, variationnal equation, Two-scale convergence, homogenized problem, microscopic problem, macroscopic problem.*

✠ Table des matières ✠

✠ Introduction générale ✠

Pour pouvoir étudier les phénomènes physiques intervenant dans la nature, nous avons tout d'abord besoin d'un modèle permettant de déterminer les équations régissant ces phénomènes ; et ensuite de pouvoir calculer (numériquement) les solutions de ces équations. La modélisation des phénomènes ayant lieu dans les milieux hétérogènes aboutit très souvent à des équations aux dérivées partielles dont les coefficients sont fortement oscillants. Or, il arrive parfois que la puissance de calcul dont on dispose ne soit pas suffisante, non pas en raison d'algorithmes de calculs peu élaborés mais en raison de la complexité intrinsèque du problème, par exemple lorsque le milieu dans lequel le phénomène physique est étudié présente lui-même une très grande complexité. Le but de la théorie de l'homogénéisation est d'obtenir une approximation homogène (simple) d'un milieu décrit par des propriétés microscopiques supposées très hétérogènes. L'importance et la nécessité de la théorie de l'homogénéisation découlent par exemple du fait que presque tous les milieux naturels sont hétérogènes et l'estimation de leurs propriétés effectives est nécessaire et incontournable avant leur utilisation en industrie. Une introduction détaillée à l'homogénéisation mathématique des équations aux dérivées partielles est faite par exemple dans [3]. Il existe plusieurs méthodes d'homogénéisation des équations aux dérivées partielles (la méthode des échelles multiples, des fonctions tests oscillantes de Tartar, de l'éclatement périodique, de la convergence à deux échelles). Dans ce travail, nous utilisons la notion de convergence à deux échelles qui a été introduite par **G. NGUETSENG (1989)** et ensuite développée par **G.ALLAIRE(1992)** avec pour application l'homogénéisation périodique. L'objectif de ce travail est d'étudier le comportement asymptotique (lorsque $\varepsilon \to 0$) du problème suivant :

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x, \frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}) = f \;\; dans \;\; \Omega \\ u_\varepsilon = 0 \; sur \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et A est une matrice carrée d'ordre N , coercive , définie par $A = (a_{i,j})_{i;j=1...N}$ où les coefficients $a_{i,j}$ sont des fonctions Y-périodiques appartenant à $L^\infty(\Omega)$ pour $i, j = 1, ..., N$. Dans le premier chapitre, nous étudions quelques espaces de Sobolev qui vont nous servir à la résolution du problème variationnel associé à (1), ensuite dans le deuxième chapitre nous montrons l'existence et l'unicité des solutions du problème (1). La preuve utilise le théorème de Lax-Milgram. Enfin en utilisant la méthode de la convergence à deux échelles, nous étudions dans le troisième chapitre l'homogénéisation du problème (1). De façon plus précise, nous montrons que la suite de solutions du problème (1) converge vers la solution du problème homogénéisé qui est un problème du même genre.

.

✠ Quelques Notations ✠

- Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$, N≥1.

- Si $x = (x_1, ..., x_N) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, la mesure de Lesbesgue dans $\mathbb{R}^N$ sera notée dx.

- pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, on pose :
  $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$ (longueur de α),
  .

- $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1+...+\alpha_N+\beta_N), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$.

- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_N^{\alpha_N}$

- ∇ est l'opérateur gradient défini par : $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$.

- Δ désigne l'opérateur de Laplace défini par : $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

- $<.,.>$ est le crochet de dualité .

- $(.,.)_H$ est le produit scalaire dans l' espace de Hilbert H.

- $||.||_H$ est la norme sur l'espace H où H est un espace normé quelconque.

- L'opérateur de dérivation partielle d'ordre α sera noté D^α avec $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_N}}$

Chapitre Un

ESPACES DE HILBERT

Dans ce chapitre nous définissons les espaces de Sobolev qui sont les espaces naturels de fonctions permettant de résoudre les formulations variationnelles d'équations aux dérivées partielles. Il s'agit particulièrement des espaces de Hilbert $H^1(\Omega)$ *et* $H_0^1(\Omega)$. Nous allons d'abord définir et donner quelques notions importantes des espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$ respectivement ; et ensuite définir l'espace $H_0^1(\Omega)$ et l'espace $H^{-1}(\Omega)$; Ces résultats se trouvent par exemple dans (**Adams.A, 1975**).

1.1 Espace $L^2(\Omega)$

Définition 1.1.1

$L^2(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions mesurables de carré sommable dans Ω.

Remarque 1.1.1. Muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)\,dx \quad (f, g \in L^2(\Omega)).$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert et on note :

$$||f||_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \; f \in L^2(\Omega)$$

la norme correspondante.

Théorème 1.1.1. ***(Lesfari.A , 2012)***

$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ pour la topologie de la norme de $L^2(\Omega)$.

Corollaire 1.1.1. *Soit $f \in L^2(\Omega)$, si pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a*

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)\,dx = 0,$$

alors $f = 0$ *presque partout sur* Ω.

Preuve. Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$ pour sa norme. On a alors par hypothèse :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$$

c'est-à-dire $(f, \varphi_n)_{L^2(\Omega)} = 0 \ \ \forall n$. Mais le produit scalaire $(.,.)_{L^2(\Omega)}$ est continue ; ainsi en faisant $n \to +\infty$ on obtient $(f, f)_{L^2(\Omega)} = 0$; ie $\|f\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$. D'où $f = 0$ dans $L^2(\Omega)$.
Il suit que $f(x) = 0$ $P.P.x \in \Omega$. ■

Définition 1.1.2

Soient $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans $L^2(\Omega)$ si l' on a : $\int_\Omega f_n(x)\varphi(x)\,dx \to \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.1.3

Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ si pour tout $i \in \{1, ..., N\}$, il existe $w_i \in L^2(\Omega)$ telles que :

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = -\int_\Omega w_i(x)\varphi(x)\,dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Chaque fonction w_i est appelée la i^{me} dérivée partielle faible d'ordre 1 de v et est notée $\frac{\partial v}{\partial x_i}$.

1.2 Espace $H^1(\Omega)$

Définition 1.2.1

$H^1(\Omega)$ est l'ensemble des éléments de $L^2(\Omega)$ tels que toutes les dérivées partielles d'ordre 1 appartiennent à $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire que $H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \forall i = 1, ..., N\right\}$.

Remarque 1.2.1. Muni de la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$, $H^1(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif.

Proposition 1.2.1

a) $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert et le produit scalaire associé est donné par :

$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega uvdx + \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx.$

b) $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Preuve.

a) Associé du produit scalaire $(.,.)_{H^1(\Omega)}$, $H^1(\Omega)$ est un espace préhilbertien. Il nous suffit donc de montrer que $(H^1(\Omega),(.,.)_{H^1(\Omega)})$ est complet.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $H^1(\Omega)$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ et $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega), (\forall i = 1,...,N)$. Puisque $L^2(\Omega)$ est un espace complet , alors il va exister u, $u_i \in L^2(\Omega)$ tels que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^2(\Omega)$ et $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u_i dans $L^2(\Omega), \forall i$.

Mais $L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, donc $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u_i dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. De plus l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_i}$ est continu de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans lui même ceci pour tout i=1,...,N. Donc $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. On obtient que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i$, i=1,...,N. Ainsi $u \in H^1(\Omega)$, il vient donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $H^1(\Omega)$. D'où $(H^1(\Omega),(.,.)_{H^1(\Omega)})$ est complet et par suite $(H^1(\Omega),(.,.)_{H^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert.

b) Considérons l'application f : $H^1(\Omega) \to (L^2(\Omega))^{N+1}$ telle que pour tout u$\in H^1(\Omega)$,

$$f(u) = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}).$$

Il est facile de voir que l'application f est bien définie et linéaire, de plus on a :

$$\|f(u)\|^2_{(L^2(\Omega))^{N+1}} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} ;$$

ainsi f est injective (car f est une isométrie). Mais $(L^2(\Omega))^{N+1}$ est séparable d'où $f(H^1(\Omega))$ est aussi séparable. Puisque $H^1(\Omega)$ est isomorphe à $f(H^1(\Omega))$, il suit que $H^1(\Omega)$ est séparable . ■

Définition 1.2.2

(i) $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions de classe C^∞ et à support compact contenu dans $\mathbb{R}^N$.

(ii) $\mathcal{D}^k(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions de classe C^k et à support compact contenu dans $\mathbb{R}^N$.

Remarque 1.2.2.

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, Mais $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas toujours dense dans $H^1(\Omega)$.

1.3 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.3.1

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ pour la norme sur $H^1(\Omega)$.

Remarque 1.3.1. $(H_0^1(\Omega), ||.||_{H_0^1(\Omega)})$ est un espace de Hilbert, où $||.||_{H_0^1(\Omega)}$ est la restriction de la norme $||.||_{H^1(\Omega)}$ de $H^1(\Omega)$ sur $H_0^1(\Omega)$.

Théorème 1.3.1. *(Inégalité de Poincaré)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins l'une de ses directions. Alors il existe une constante $C(\Omega) > 0$ tel que : $||u||_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega)\, ||\nabla u||_{(L^2(\Omega))^N}$.

Preuve.

Supposons sans nuire à la généralité que Ω est borné dans la direction de x_1 :

$\Omega \subset [-a, a] \times \mathbb{R}^{N-1}$,$(a > 0)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et x$\in \Omega$, on a :

$\varphi(x) = \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N)dt - \varphi(-a, x_2, ..., x_N)$. Mais φ est à support compact contenu dans Ω et $(-a, ..., x_N) \in \partial\Omega$, donc $\varphi(-a, x_2, ..., x_N) = 0$. Ainsi

$|\varphi(x)|^2 \leq (x_1 + a) \int_{-a}^{x_1} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(-t, ..., x_N)\right|^2 dt \leq 2a \int_{-a}^{a} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(-t, ..., x_N)\right|^2 dt$. En intégrant sur Ω on obtient :

$$||\varphi||_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega |\varphi(x)|^2\, dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2a \int_\Omega \int_{-a}^{a} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(-t, ..., x_N)\right|^2 dtdx \\
&\leq (2a)^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(-t, ..., x_N)\right|^2 dx \\
&\leq (2a)^2 \int_\Omega |\nabla \varphi(x)|^2 \, dx \\
&= (2a)^2 \, ||\nabla \varphi||^2_{L^2(\Omega)} .
\end{aligned}$$

En utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient le résultat voulu. ■

1.4 Espace $H^{-1}(\Omega)$

Définition 1.4.1

L'espace $H^{-1}(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $H_0^1(\Omega)$. On munit $H^{-1}(\Omega)$ de la norme canonique donnée par :

$$||f||_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{||v||_{H_0^1(\Omega)} \leq 1, v \in H_0^1(\Omega)} (|< f, v >|);$$

ce qui en fait un espace de Hilbert.

Proposition 1.4.1

Soit f$\in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in H^{-1}(\Omega)$

(ii) f est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$ ie $|< f, v >| \leq c(f) \, ||v||_{H^1(\Omega)}$.

Preuve. On remarque que $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ de façon continue et dense, ce qui entraine que $H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ continue. D'où l'équivalence. ■

Remarque 1.4.1. D'après ce qui précède $H^{-1}(\Omega)$ peut être identifié à un sous espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposition 1.4.2

Soit Δ l'opérateur de Laplace et I l'identité, alors nous avons :

(i) $I - \Delta$ est un opérateur linéaire et continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

(ii) $I - \Delta$ est un isomorphisme isométrique de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Preuve. (i) Soit $u \in H^1(\Omega)$.Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} < u - \Delta u, \varphi > &=< u, \varphi > - < \Delta u, \varphi > \\ &=< u, \varphi > - < \nabla u, \nabla\varphi > \\ &= \int_\Omega (u\varphi + \nabla u.\nabla\varphi)dx \\ &= (u, \varphi)_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ainsi par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ et par continuité de l'opérateur $I-\Delta$ et du produit scalaire $(.,.)_{H^1(\Omega)}$, on obtient :

$$< u - \Delta u, v >= (u, v)_{H^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

L'égalité ci-dessus montre qu'il est évident que $I - \Delta$ est linéaire. Il nous reste donc à montrer la continuité.

Soit donc $u \in H^1(\Omega)$ et v$\in H_0^1(\Omega)$,on a :

$$\begin{aligned} |< (I - \Delta)(u), v >| &= |< u - \Delta u, v >| \\ &= \left|(u, v)_{H^1(\Omega)}\right| \\ &\leq ||u||_{H^1(\Omega)} \, ||v||_{H_0^1(\Omega)} \quad , \quad (Cauchy). \end{aligned}$$

Ainsi en passant le sup sur les v appartenant à la boule unité de $H_0^1(\Omega)$, on obtient :

$$||(I - \Delta)u||_{H^{-1}(\Omega)} \leq ||u||_{H^1(\Omega)} \, .$$

D'où la continuité et il s'en suit le résultat cherché.

(ii) On déduit de (i) que $I - \Delta$ est déjà un opérateur linéaire et continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Soit u$\in H_0^1(\Omega)$ .Puisque $< u - \Delta u, v >= (u, v)_{H^1(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega)$, alors on a :

$$\begin{aligned} ||u||^2_{H^1(\Omega)} &= (u, u)_{H^1(\Omega)} \\ &=< u - \Delta u, u > \end{aligned}$$

$$\leq ||u - \Delta u||_{H^{-1}(\Omega)}\, ||u||_{H^1(\Omega)}$$

On déduit que $||u - \Delta u||_{H^{-1}(\Omega)} = ||u||_{H^1(\Omega)}, \forall\ u \in H_0^1(\Omega)$. D'où $I - \Delta$ est une isométrie. Et par suite $I - \Delta$ est injective.

Il nous reste à montrer que $I - \Delta$ est surjective. Pour cela , posons T= $I - \Delta$; puisque T est une isométrie alors $T(H^1(\Omega))$ est un fermé de $H^{-1}(\Omega)$. Ainsi si nous montrons que $T(H^1(\Omega))$ est dense dans $H^{-1}(\Omega)$, nous aurons terminé. Soit donc u une forme linéaire continue sur $H^{-1}(\Omega)$ et nulle sur $T(H^1(\Omega))$. Alors par réflexivité de $H_0^1(\Omega)$, u peut être vue comme un élément de $H_0^1(\Omega)$.

Ainsi on a $(u, u)_{H^1(\Omega)} =< u - \Delta u >=< u, Tu >= 0$, c'est-à-dire que $||u||^2_{H^1(\Omega)} = 0$, et par suite u=0.

D'où en utilisant un des corollaires de Hahn-Banach, on conclut que $I - \Delta$ est surjective. ■

Proposition 1.4.3

L' espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^{-1}(\Omega)$.

Preuve.

Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$. Alors il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $f = u - \Delta u$, car $I - \Delta$ est un isomorphisme isométrique de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$. Mais $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, d'où il existe une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers u dans $H_0^1(\Omega)$.

Par continuité de $I - \Delta$, la suite $(u_n - \Delta u_n)_n$ converge vers $u - \Delta u = f$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

Mais $u_n - \Delta u_n \in \mathcal{D}(\Omega), \forall\ n$. D'où le résultat cherché. ■

Proposition 1.4.4

Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in H^{-1}(\Omega)$

(ii) f se présente sous la forme (non unique) : $f = f_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ où $f_i \in L^2(\Omega)$ $(i = 0, ..., N)$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ En effet si $f \in H^{-1}(\Omega)$ Alors il va exister $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $f = u - \Delta u$.

Il suffit donc de prendre $f_0 = u$ et $f_i = -\frac{\partial u}{\partial x_i}$, i=1,...,N.

$(ii) \Rightarrow (i)$ En effet :Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
|< f, \varphi >| &= \left|< f_0 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \varphi >\right| \\
&= \left|< f_0, \varphi > - \sum_{i=1}^{N} < f_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >\right| \\
&\leq |< f_0, \varphi >| + \sum_{i=1}^{N} \left|< f_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >\right| \\
&= |(f_0, \varphi)|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left|(f_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i})_{L^2(\Omega)}\right| \\
&\leq ||f_0||_{L^2(\Omega)} \, ||\varphi||_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} ||f_i||_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (||f_0||_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} ||f_i||_{L^2(\Omega)}) \, ||\varphi||_{H^1(\Omega)} \\
&= C \, ||\varphi||_{H^1(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Où $C = ||f_0||_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} ||f_i||_{L^2(\Omega)}$. D'où f est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$ et d'après la proposition (1.4.1), on obtient le résultat voulu . ■

Définition 1.4.2

On dit que Ω possède la propriété de 1-prolongement s'il existe une application

P : $L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ telle que :

(i) P soit linéaire et continue de $H^k(\Omega)$ dans $H^k(\mathbb{R}^N)$,k=0,1.

(ii) $(Pu)_{|\Omega} = u, \forall u \in L^2(\Omega)$.

Remarque 1.4.2. Un opérateur P ayant les propriétés (i) et (ii) est appelé un 1-prolongement.

La proposition ci-dessous se trouve dans **(Adams.A,1975)**

Proposition 1.4.5

On suppose que Ω possède la propriété de 1-prolongement, alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

1.5 Trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$ et formule de Green

On suppose ici que Ω est un ouvert borné de classe C^1. Dans la résolution des problèmes aux limites, nous n'avons pas seulement besoin des valeurs d'une fonction dans Ω, mais aussi de ses valeurs sur la frontière de Ω notée $\partial\Omega$. Dans le cas d'une fonction u continue sur $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$, ses valeurs sur $\partial\Omega$ s'obtiennent en évaluant u sur $\partial\Omega$.
Pour définir la trace sur $H^1(\Omega)$, nous partirons de la proposition suivante que nous ne démontrerons pas et elle se trouve dans **(A.Adams , 1975**).

Proposition 1.5.1

L'application T :$\varphi \mapsto \varphi_{|\Gamma}$ de $\mathcal{D}^1(\overline{\Omega})$ dans $L^2(\Gamma)$, (où $\Gamma = \partial\Omega$) est linéaire continue et se prolonge de façon unique en une application linéaire continue T_0 de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

Définition 1.5.1

L'opérateur T_0 de la proposition précédente est appelé trace sur $H^1(\Omega)$ et est noté en général γ_0. On défini ainsi l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$ par : $H^{1/2}(\Gamma) = \gamma_0(H^1(\Omega))$.

Définition 1.5.2

La formule de Green est donnée dans $\mathcal{D}^1(\overline{\Omega})$ par :

$$\int_\Omega \left(u\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\partial\Omega} uvn_i \, d\sigma, \ \forall \ u, v \in \mathcal{D}^1(\bar{\Omega})$$

où $n = (n_i)_i$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

Proposition 1.5.2

On a :

$$\int_\Omega \left(u\frac{\partial v}{\partial x_i} + v\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx = \int_{\partial\Omega} uvn_i \, d\sigma, \ \forall \ u, v \in H^1(\Omega)$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{D}^1(\overline{\Omega})$ et $u \in H^1(\Omega)$, alors par densité de $\mathcal{D}^1(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, il va exister une suite $(\varphi_n)_n$ de $\mathcal{D}^1(\overline{\Omega})$ telle que $\varphi_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. En utilisant la définition (1.5.2), on obtient :

$$\int_\Omega \left(\varphi \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} + \varphi_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dx = \int_{\partial\Omega} \varphi\, \varphi_n\, n_i\, d\sigma$$

Mais $\varphi_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$, donc $\varphi_n \to u$ dans $L^2(\Omega) - faible$ et $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^2(\Omega) - faible$ pour tout i. Ainsi on a :

$$\int_\Omega \left(\varphi \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} + \varphi_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dx \to \int_\Omega \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dx \; dans\; \mathbb{R}.$$

De plus

$$\|\gamma_0\varphi_n - \gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq c\, \|\varphi_n - u\|_{H^1(\Omega)} \;\; (c = constante\ de\ continuit\acute{e}\ de\ \gamma_0),$$

d'où $\gamma_0\varphi_n \longrightarrow \gamma_0 u$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$-fort. Ce qui entraine que $\gamma_0\varphi_n \longrightarrow \gamma_0 u$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$-faible. Mais $\gamma_0\varphi\, n_i \in L^2(\Gamma)$, d'où

$$\int_\Gamma \varphi\, \varphi_n n_i \partial\sigma \to \int_\Gamma \varphi u\, n_i d\sigma$$

Par suite en faisant n$\to +\infty$, l'on obtient :

$$\int_\Omega \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dx = \int_\Gamma \varphi u\, n_i d\sigma$$

Ceci étant vrai, on obtient le résultat par densité de $\mathcal{D}^1(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$. Pour achever la preuve, on refait le même travail en fixant $v \in H^1(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}^1(\overline{\Omega})$. ■

Remarque 1.5.1. La formule de la proposition précédente est la formule de Green sur $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.5.1. ***(A.Adams, 1975)***

On suppose que Ω est un ouvert borné . Alors

(i) $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ de façon compact.

(ii) Si en plus Ω possède la propriété de 1-prolongement alors $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ de façon compact.

Proposition 1.5.3

On suppose que Ω est un ouvert borné de classe C^1, alors la sémi-norme de $H^1(\Omega)$ donnée par :

$$p(u) := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \;\; u \in H^1(\Omega)$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ restreinte à $H_0^1(\Omega)$.

Preuve. soit u$\in$ $H_0^1(\Omega)$, on a déjà $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in H_0^1(\Omega)$ tel que : $n\,\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)^N} < \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}$.

On a nécessairement $u_n \neq 0\ \forall n$.

Posons $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}} =$. Alors on a $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ *et* $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^N} < \frac{1}{n}$. Ainsi $\nabla v_n \to 0$ dans $L^2(\Omega)$ et la suite $(v_n)_n$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$. D'après le théorème (1.5.1) précédent $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ de façon compact. Il suit qu'il existe une sous-suite de $(v_n)_n$ encore notée $(v_n)_n$ qui converge vers v dans $L^2(\Omega)$. Par suite $\nabla v_n \to \nabla v$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et par unicité de la limite on a $\nabla v = 0$. D'ou $v = c$ sur $\overline{\Omega}$, (où c est une constante). Comme $H_0^1(\Omega)$ est fermé dans $L^2(\Omega)$, alors $v \in H_0^1(\Omega)$. Donc $v = 0$ sur le bord de Ω, il suit que c=0, c'est-à-dire v=0. Ainsi on a $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$. Mais $\|v_n\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ pour tout n, en faisant tendre n vers $+\infty$,on obtient $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$, ce qui est absurde. Ainsi il existe $c > 0$ tel que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ ■

Chapitre Deux

EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION FAIBLE DU PROBLÈME

Il est question pour nous dans ce chapitre de prouver l'existence et l'unicité de la solution faible du problème (1). Pour cela nous allons d'abord énoncer certains théorèmes et donner quelques propositions qui nous permettrons d'atteindre facilement notre objectif.

2.1 Position du problème

Soient Ω un ouvert borné et de classe C^1 de $\mathbb{R}^N, (N \geq 1)$ et $f \in L^2(\Omega)$. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ une matrice donc les coefficients $a_{i,j} \in C(\bar{\Omega}, L^\infty(\mathbb{R}_y^N))$ et $Y = (0,1)^N$ le cube unité ouvert. On considère pour tout ε $(\varepsilon > 0)$ le problème suivant :

$$\begin{cases} A^\varepsilon u_\varepsilon = f \ \ dans\ \Omega \ \ (1) \\ u_\varepsilon = 0 sur\ \ \partial\Omega \qquad (2) \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$A^\varepsilon v = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}^\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)$$

et

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \alpha\,|\xi|^2$$

avec $a_{i,j}^\varepsilon$ vérifiant :

(i) $a_{i,j}^\varepsilon(x) = a_{i,j}(x, \frac{x}{\varepsilon})$ pour tout $x \in \Omega$.

(ii) pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $a_{i,j}(x,.)$ est Y-périodique, (ie $a_{i,j}(x, y+k) = a_{i,j}(x,y)$ $P.P.$ $y \in \mathbb{R}_y^N, \forall k \in \mathbb{N}^N$).

Il s'agit pour nous dans ce chapitre de démontrer l'existence et l'unicité du problème (2.1).

2.2 Résolution du problème

Pour cela nous allons commencer par énoncer quelques théorèmes qui nous aiderons à résoudre le problème (2.1).

Théorème 2.2.1 (De représentation de Riesz).
Soit V un espace de Hilbert et f une forme linéaire et continue sur V, alors il existe un unique x dans V tel que :

$$f(y) = (y, x)_V \quad \forall y \in V,$$

de plus $||f|| = ||x||_V$.

Preuve. Posons $M = kerf = f^{-1}(\{0\})$, alors M est un espace vectoriel fermé de V (car f est linéaire et continue).
Si $M = V$ ie $f = 0$ alors prendre x=0.
Supposons $M \neq V$, alors $M^{\perp} \neq \{0\}$ (car $V = M \oplus M^{\perp}$) . Ainsi il existe $x_0 \in M^{\perp}$ tel que $f(x_0) = 1$; en effet soit $z \in M^{\perp}, z \neq 0$,alors $f(z) \neq 0$, on pose alors $x_0 = \frac{z}{f(z)}$ et on a bien $f(x_0) = 1$.
Soit maintenant $y \in V$, posons $\alpha = f(y)$, alors $f(y - \alpha x_0) = f(y) - \alpha f(x_0) = \alpha - \alpha.1 = 0$. Donc $y - \alpha x_0 \in M$; ainsi on a :

$$\begin{aligned} 0 =& (y - \alpha x_0, x_0)_V \\ =& (y, x_0)_V - \alpha \, ||x_0||_V^2 \end{aligned}$$

Donc $f(y) = (y, \frac{x_0}{||x_0||_V^2})_V = (y, x)_V$ avec $x = \frac{x_0}{||x_0||_V^2}$
Pour montrer l'unicité de x, supposons qu'il existe un autre élément x'de V tel que
$f(y) = (y, x')_V, \forall y \in V$ alors on a : $(y, x - x')_V = 0, \forall y \in V$ d'où $x = x'$.
Montrons que $||f|| = ||x||_V$.
On a pour tout y dans V, $|f(y)| = |(y, x)_V| \leq ||x||_V \, ||y||_V$. On en déduire que $||f|| \leq ||x||_V$.
Si $f = 0$ alors $x = 0$ et donc $||f|| = ||x||_V$.
Si $f \neq 0$ alors $x \neq 0$ et on a :

$$\begin{aligned} f(\frac{x}{||x||_V}) &= (\frac{x}{||x||_V}, x)_V \\ &= \frac{||x||_V^2}{||x||_V} \\ &= ||x||_V \, . \end{aligned}$$

On en déduit que $||x||_V \leq ||f||$ et par suite on obtient l'égalité voulue. ■

Théorème 2.2.2 (Lax-Milgram).

Soit V un espace de Hilbert ,$L(.)$ une forme linéaire continue sur V et $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V. Alors le problème donné par :

$$\begin{cases} trouver\ \ u \in V \\ a(u,v) = L(v) \\ \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{2.2}$$

admet une unique solution dans V.

Preuve. Pour tout $w \in V$, l'application $v \mapsto a(w,v)$ est une forme linéaire continue sur V : par conséquent le théorème de représentation de Riesz entraine qu'il existe un unique élément de V noté $A(w)$ tel que :

$$a(w,v) = (A(w),v)_V,\ \forall\ v \in V.$$

Considérons l'application A :$w \mapsto A(w)$, $w \in V$; alors A est bien définie, linéaire (car a est une forme bilinéaire) et continue en effet on a :

$$\begin{aligned} \|A(w)\|_V^2 &= a(w, A(w)) \\ &\leq M\,\|w\|_V\,\|A(w)\|_V\,. \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\|A(w)\|_V \leq M\,\|w\|_V$, (où M est la constance de continuité de $a(.,.)$) . De plus l'on a :

$$\begin{aligned} \alpha\,\|w\|_V^2 &\leq a(w,w) \\ &= (A(w),w)_V \\ &\leq \|w\|_V\,\|A(w)\|_V\,. \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\|w\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\,\|A(w)\|_V$, $\forall\ v \in V$. De même, L étant une forme linéaire continue sur V ; d'après le théorème de représentation de Riesz il existe un unique $f \in V$ tel que :

$$L(v) = (f,v)_V\ \ \forall v \in V.$$

Ainsi le problème (2.2) est équivalent à trouver $u \in V$ tel que $(A(u),v)_V = (f,v)_V,\ \forall v \in V$, c'est-à-dire que :

$$A(u) = f\ dans\ V$$

Par conséquent il suffit de montrer que A est bijective pour achever la preuve. A est injective en effet si $A(w) = 0$, alors on aura $\|w\|_V \leq 0$, donc $\|w\|_V = 0$ et par suite $w = 0$. Si V est de dimension finie, on aura immédiatement la bijection. Il nous reste à montrer que A est surjective en supposant dans ce cas que V est de dimension infinie. Pour cela nous allons montrer que $Im(A) = V$. Remarquons d'abord que $Im(A)$ est fermé, en effet soit $(y_n)_n$ une suite de $Im(A)$ qui converge vers y dans V. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ de V tel que $A(x_n)_V = y_n$ pour tout n. Mais l'on a :

$$\left\|x_p - x_q\right\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\left\|A(x_p) - A(x_q)\right\|_V = \left\|y_p - y_q\right\|_V .$$

En faisant tendre p et q vers l'infini , on trouve que $\left\|x_p - x_q\right\|_V \to 0$, ainsi la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans V qui est un espace de Banach. Donc il existe $x \in V$ tel que $(x_n)_n$ converge vers x dans V. Par continuité de A on déduit que $A(x) = y$ .D'où $y \in Im(A)$ et donc $Im(A)$ est fermé dans V.

Soit maintenant $v \in Im(A)^{\perp}$, alors on a $\|v\|_V^2 \leq a(v, v) = (A(v), v)_V = 0$, d'où v=0.Ainsi $Im(A)^{\perp} = \{0\}$. Et par suite l'on a :

$$V = \{0\}^{\perp} = (Im(A)^{\perp})^{\perp} = Im(A) \quad (car\ Im(A)\ est\ fermé).$$

Il vient donc que A est surjective et par suite A est bijective. ■

Proposition 2.2.1

a) On considère l'application a^{ε} définie de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par :

$$a^{\varepsilon}(u, v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{i,j}^{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx \,, \forall u \;, v \in H^1(\Omega)$$

Alors on a :

(a) $a^{\varepsilon}(.,.)$ est une forme bilinéaire continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

(b) $a^{\varepsilon}(.,.)$ est coercive sur $H_0^1(\Omega)$ (où $H_0^1(\Omega)-$elliptique), de constante de coercivité α c'est dire qu'on a :

$$a^{\varepsilon}(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Preuve.

(a) Il est facile de vérifier que a^{ε} est une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Montrons la continuité : soit $u, v \in H^1(\Omega)$, posons $B = C(\bar{\Omega}, L^{\infty}(Y))$. On a :

$$|a^{\varepsilon}(u, v)| \leq \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \left|a_{i,j}^{\varepsilon}(x)\right| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right| dx$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{N} \left\|a_{i,j}\right\|_B \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right| \, dx, (\ preuve\ \ similaire\ \ proposition(3.2.2)\ \ chap3).$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{N} \left\|a_{i,j}\right\|_B \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{N} \left\|a_{i,j}\right\|_B \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{N} \left\|a_{i,j}\right\|_B\right) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où la continuité .

(b) Montrons que a^ε est coercive, on a :

$$a^\varepsilon(u,u) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a^\varepsilon_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx$$

$$\geq \alpha \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\alpha}{c_0^2} \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \ (\ c_0 = constance\ d'\ équivalence\ entre\ les\ deux\ normes).$$

D'où le résultat voulu. ■

Proposition 2.2.2

Pour tout $\varepsilon > 0$, le problème (2.1) admet une unique solution.

Preuve.

Nous allons utiliser ici l'approche variationnelle, elle consiste à trouver un problème variationnel facile à résoudre et qui soit équivalent au problème (2.1).

a) **Cadre fonctionnel**

On cherche une solution $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ de (2.1) tel que (1) soit comprise au sens presque partout sur Ω (c'est-à-dire $A^\varepsilon u_\varepsilon(x) = f(x)$ P.P. x$\in$ Ω) et (2) soit comprise au sens de la trace γ_0 sur le bord de Ω (ie $\gamma_0 u_\varepsilon = 0$) de sorte que $u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega)$.

b) **formulation variationnelle**

$\Longrightarrow$) Soit $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ solution de (2.1). Alors on a :

- $u_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$ $(ie\ \ \gamma_0 u_\varepsilon = 0)$, donc $u_\varepsilon \in \ker \gamma_0 = H^1_0(\Omega)$.
- on a aussi $(A^\varepsilon u_\varepsilon)(x) = f(x)\ \ P.P.\ \ x \in \Omega$ de sorte que $A^\varepsilon u_\varepsilon \in L^2(\Omega)$.

En multipliant l'égalité ci-dessus par $\varphi(x)$ $(\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$ et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (A^\varepsilon u_\varepsilon)(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx &\Leftrightarrow -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^\varepsilon_{i,j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right)\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \\
&\Leftrightarrow -\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^\varepsilon_{i,j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right)\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \\
&\Leftrightarrow -\left(\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^\varepsilon_{i,j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\varphi\right) - a^\varepsilon_{i,j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right]dx\right) = \int_\Omega f\varphi\,dx \\
&\Leftrightarrow -\sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} a^\varepsilon_{i,j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\varphi n_i d\sigma + \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a^\varepsilon_{i,j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \\
&(formule\ de\ Stokes) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a^\varepsilon_{i,j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx\ ,(car\ \ \varphi = 0\ sur\ \partial\Omega). \\
&\Leftrightarrow a^\varepsilon(u_\varepsilon, \varphi) = \int_\Omega f\varphi\,dx.
\end{aligned}$$

On en déduit par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$ et par continuité des applications $\varphi \longmapsto a^\varepsilon(u_\varepsilon,\varphi)\ \ et\ \ \varphi \longmapsto \int_\Omega f\varphi dx$ que u_ε est solution du problème variationnel

$$\begin{cases} trouver\ u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega) \\ \quad a^\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l(v) \\ \quad \forall v \in H^1_0(\Omega). \end{cases} \tag{2.3}$$

avec $l(v)$=$\int_\Omega fvdx$.

$\Leftarrow$) Réciproquement, soit u_ε solution de (2.3). Alors on a :

$u_\varepsilon \in H^1_0(\Omega) \Rightarrow \gamma_0 u_\varepsilon = 0,\ \ ie\ \ u_\varepsilon = 0$ sur $\partial\Omega$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
a^\varepsilon(u_\varepsilon,\varphi) = l(\varphi) &\Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a^\varepsilon_{i,j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx \\
&\Leftrightarrow -\sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} a^\varepsilon_{i,j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\varphi n_i d\sigma + \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a^\varepsilon_{i,j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx\,(car\ \varphi = 0\ sur\ \Omega).
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Stokes et en remontant les équivalences précédentes on trouve :

$\int_\Omega (A^\varepsilon u_\varepsilon - f)(x)\varphi(x)\,dx = 0$.

Ainsi pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\int_\Omega (A^\varepsilon u_\varepsilon - f)(x)\varphi(x)\,dx = 0$.
Donc $(A^\varepsilon u_\varepsilon - f)(x) = 0$ $P.P$ $x \in \Omega$. Et par suite on a bien :

$$A^\varepsilon u_\varepsilon = f \ dans \ L^2(\Omega).$$

IL en résulte que u_ε est solution de (2.1). Ainsi (2.1) est équivalent à (2.3).

c) **Résolution complète du problème (2.1)**

Comme (2.1) est équivalente à (2.3), il suffit donc de résoudre (2.3). L'application l définie par $l(v) = \int_\Omega fvdx)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ est une forme linéaire et continue sur $H_0^1(\Omega)$; en effet : il est évident que l soit linéaire et de plus on a :

$$\begin{aligned}|l(v)| &\leq \int_\Omega |fv|\,dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^N} \\ &= \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

d'où le résultat. De plus $a^\varepsilon(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ d'après la proposition (2.2.1). On déduit par le théorème de Lax-Milgram qu'il existe une unique solution de (2.3) donc de (2.1). ■

Proposition 2.2.3

La suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ des solutions du problème (2.1) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

Preuve. D'après proposition(2.2.1) on a :

$$\alpha\|u_\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq a_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = (f, u_\varepsilon)_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

Puisque Ω est borné, et $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, l'inégalité de Poincaré nous donne l'existence d'un $c = c(\Omega) > 0$ tel que $\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}$.
Donc

$$\alpha\|u_\varepsilon\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{c}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

On obtient ainsi le résultat cherché. ■

★ ★ Chapitre Trois ★ ★

COMPORTEMENT LIMITE DES SOLUTIONS DU PROBLÈME

Dans ce chapitre il est question pour nous d'étudier le comportement de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de solutions du problème (2.1) lorsque $\varepsilon \to 0$. Il s'agit de passer à la limite dans le problème (2.1) et d'obtenir le nouveau problème dont la limite de la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est solution. Ce pendant nous disposons de différentes méthodes nous permettant le passage à la limite dans le problème (2.1). Nous avons la méthode des échelles multiples, des fonctions tests oscillantes de Tartar, de l'éclatement périodique, de la convergence à deux échelles. Nous utilisons ici la méthode de la convergence à deux échelles ; mais nous allons d'abord donner quelques résultats importants concernant cette notion avant d'effectuer le passage à la limite dans le problème (2.1) ; ces résultats se trouvent par exemple dans **((G.Nguetseng,1989) and (U.Hornung, 1997))** .

3.1 Fonctions périodiques

Définition 3.1.1

Soit f :$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction définie presque partout sur $\mathbb{R}^N$. La fonction f est dite Y-périodique si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a : f(x+k)=f(x) pour tout $k \in \mathbb{Z}^N$.

Définition 3.1.2 (Valeur moyenne d'une fonction périodique de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. La moyenne de f sur Ω est le réel noté $\mathcal{M}_\Omega(f)$ et défini par $\mathcal{M}_\Omega(f) = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega f(y)dy$ où $mes(\Omega)$ est la mesure de Lebesgue de Ω.

Nous introduisons à présent les définitions des espaces des fonctions périodiques utilisés fréquemment en homogénéisation périodique .

Définition 3.1.3

i) $C_{per}(Y)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ et Y-périodiques.

ii) $C^{\infty}_{per}(Y)$ le sous espace de $C^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ constitué des fonctions Y-périodiques.

iii) $H^1_{per}(Y)$ l'espace des fonctions $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et u est Y-périodique.

iv) $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ l'espace des fonctions mesurables $u : \Omega \longrightarrow C_{per}(Y)$ telles que :

$$\int_{\Omega} \left(\sup_{Y} |u(x)| \right)^2 dx < +\infty.$$

v) $L^p_{per}(Y)$, $(p \in [1, +\infty])$ l'espace des fonctions mesurables $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et soit Y-périodique.

vi) $C(\overline{\Omega}; L^{\infty}_{per}(Y))$ l'espace des restrictions à Ω des fonctions $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow L^{\infty}_{per}(Y)$ qui sont continues.

Remarque 3.1.1.

i) $H^1_{per}(Y)$ est l'adhérence de $C^{\infty}_{per}(Y)$ pour la norme de $H^1(\mathbb{R}^N)$.

ii) On définit la relation d'équivalence sur $H^1_{per}(Y)$ par :

$$u \simeq v \Leftrightarrow u - v \text{ } est \text{ } une \text{ } constante, \; \forall \; u, v \in \; H^1_{per}(Y).$$

$H^1_{per}(Y) \mid \mathbb{R}$ l'espace des classes d'équivalence pour la relation ci-dessus.

iii) La quantité donnée par :

$$||\dot{u}||_{H^1_{per}(Y)|\mathbb{R}} = ||\nabla u||_{L^2(Y)} , \; \forall \; u \in \dot{u}, \; \dot{u} \in H^1_{per}(Y) \mid \mathbb{R}$$

est une norme sur $H^1_{per}(Y) \mid \mathbb{R}$. Ces résultats se trouvent dans **(Allaire.G,1992)**.

3.2 Convergence à deux échelles

Nous donnons ici la définition de la converge à deux échelles et quelques résultats importants concernant cette notion.

Définition 3.2.1

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite d'éléments de $L^2(\Omega)$. Alors on dit que la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge faiblement à deux échelles vers $u \in L^2(\Omega \times Y)$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $\varepsilon \to 0$ si l'on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx = \int_\Omega \int_Y u(x,y)\phi(x,y)\, dx\, dy \tag{3.1}$$

pour tout $\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$.On note $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} u$.

Si en plus nous avons $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega\times Y)}$, alors nous dirons que la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement à deux échelles vers $u \in L^2(\Omega \times Y)$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Proposition 3.2.1

La limite de la convergence à deux échelles lorsqu'elle existe est unique.

Preuve.

Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite d'éléments de $L^2(\Omega)$ et $u, v \in L^2(\Omega \times Y)$ tels que $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} u$ et $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} v$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. Comme $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} u$ dans $L^2(\Omega)$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx = \int_\Omega \int_Y u(x,y)\phi(x,y)\, dx\, dy,$$

pour tout $\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$. De même puisque $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} v$, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, dx = \int_\Omega \int_Y v(x,y)\phi(x,y) dy\, dx,$$

pour tout $\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$. Donc,

$$\int_\Omega \int_Y u(x,y)\phi(x,y) dy\, dx = \int_\Omega \int_Y v(x,y)\phi(x,y) dy\, dx,$$

pour tout $\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$. Ceci entraine que :

$$\int_\Omega \int_Y [u(x,y) - v(x,y)]\phi(x,y) dy\, dx = 0,$$

pour tout $\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y)$. Il vient que :

$$u(x,y) - v(x,y) = 0 \ p.p. \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}^N.$$

Et par suite

$$u = v \text{ dans } L^2(\Omega \times Y).$$

d'où le le résultat. ■

Théorème 3.2.1. *(Nguetseng.G,1989)*
Soit b(y) une fonction mesurable et Y-périodique sur $\mathbb{R}^N$ *et* $b \in L^1(\Omega)$*, alors pour toute fonction continue* φ *sur* Ω*, on a :*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varphi(x) b(\frac{x}{\varepsilon})\, dx = \int_\Omega \int_Y \varphi(x) b(y)\, dy\, dx.$$

Proposition 3.2.2

Soit $f \in L^1(\Omega, C_{per}(Y))$, on pose $f_\varepsilon = f(x, \frac{x}{\varepsilon}), x \in \Omega$.

(i) La fonction f_ε est mesurable sur Ω et est bornée sur $L^1(\Omega)$ et on a : $||f_\varepsilon||_{L^1(\Omega)} \leq ||f||_{L^1(\Omega, C_{per}(Y))}$.

(ii)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega f_\varepsilon(x)\, dx = \int_\Omega \int_Y f(x, y) dy\, dx.$$

(iii) Les points (i) et (ii) restent toujours vrais pour $f \in L^2(\Omega, C_{per}(Y))$ et on a :

$$||f_\varepsilon||_{L^2(\Omega)} \leq ||f||_{L^2(\Omega, C_{per}(Y))}.$$

Preuve. (i) f_ε est mesurable car f l'est ; de plus on a :

$$\begin{aligned} ||f_\varepsilon||^2_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega |f_\varepsilon(x)|\ dx \\ &= \int_\Omega \left| f(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right|\ dx \\ &= \int_\Omega |f(x, y)|\ dx,\ y = \frac{x}{\varepsilon} \\ &\leq \int_\Omega \sup_{y \in Y} |f(x, y)|\ dx = ||f||^2_{L^1(\Omega, C_{per}(Y))}. \end{aligned}$$

(ii) On remarque qu'on peut écrire :$f(x, \frac{x}{\varepsilon}) = f(x)(\frac{x}{\varepsilon})$ et appliquer le théorème (3.2.1).

(iii) On remarque juste que, comme Ω est borné, on a $L^2(\Omega, C_{per}(Y)) \subset L^2(\Omega, C_{per}(Y))$; de plus on a :

$$\begin{aligned} ||f_\varepsilon||^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |f_\varepsilon(x)|^2\ dx \\ &= \int_\Omega \left| f(x, \frac{x}{\varepsilon}) \right|^2\ dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega |f(x,y)|^2\,dx \ ,y=\frac{x}{\varepsilon}\\
&\leq \int_\Omega \left(\sup_{y\in Y}|f(x,y)|\right)^2 dx\\
&= \|f\|^2_{L^2(\Omega,C_{per}(Y))}\,.
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Théorème 3.2.2 (Relation entre convergence forte et convergence à deux échelles).
Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite d'éléments de $L^2(\Omega)$ qui converge fortement vers un élément u dans $L^2(\Omega)$. Alors $u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} u$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Preuve. Soit $\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$, posons $\phi^\varepsilon(x) = \phi(x, \frac{x}{\varepsilon})$; alors on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi^\varepsilon(x)\,dx - \int_\Omega\int_Y u(x)\phi(x,y)dy\,dx\right| &\leq \left|\int_\Omega [u_\varepsilon(x)-u(x)]\phi^\varepsilon(x)\,dx\right|\\
&+\left|\int_\Omega u(x)\phi^\varepsilon(x)\,dx - \int_\Omega\int_Y u(x)\phi(x,y)dydx\right|\\
&\leq \|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)}\,\|\phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\\
&+\left|\int_\Omega u(x)\phi^\varepsilon(x)\,dx - \int_\Omega\int_Y u(x)\phi(x,y)dydx\right|
\end{aligned}$$

Comme $u\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ et la suite $(\phi^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée (d'après la proposition 3.2.2), alors en faisant tendre ε vers 0, le terme de droite de cette inégalité tend vers 0.
Ainsi,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi^\varepsilon(x)\,dx = \int_\Omega\int_Y u(x)\phi(x,y)dy\,dx$$

et on a le résultat. ■

Proposition 3.2.3

Si la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge à deux échelles vers $u \in L^2(\Omega\times Y)$ alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,dx = \int_\Omega\int_Y u(x,y)\phi(x,y)\,dx\,dy \tag{3.2}$$

pour tout $\phi \in C(\bar{\Omega}; L^\infty_{per}(Y))$

Théorème 3.2.3. *(Banach-Alaouglu) (Adams.A,1975)*
Soit X un espace de Banach séparable, alors la boule unité fermée du dual topologique X' de X est compact.

Théorème 3.2.4. *(H.Douanla, 2013)*
De toute suite de fonction $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ bornée dans $L^2(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement à deux échelles dans $L^2(\Omega)$.

Preuve. L'idée générale de cette preuve repose sur le théorème de Banach-Alaouglu qui stipule que de toute suite bornée de X'(X étant un espace de Banach séparable), on peut extraire une sous-suite qui converge pour la topologie duale faible. Dans cette preuve, $X = L^2(\Omega; C_{per}(Y))$.
Soit $\varepsilon > 0$, on définit la fonctionnelle l_ε sur $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ par :

$$l_\varepsilon(\phi) = \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx, \qquad \phi \in X.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a :

$$|l_\varepsilon(\phi)| = \left|\int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx\right| \leq ||u_\varepsilon||_{L^2(\Omega)}\, ||\phi^\varepsilon||_{L^2(\Omega)}\,,$$

et comme (u_ε) est bornée dans $L^2(\Omega)$, alors il existe $c > 0$ tel que $||u_\varepsilon||_{L^2(\Omega)} \leq c$.
De plus $||\phi^\varepsilon||_{L^2(\Omega)} \leq ||\phi||_{L^2(\Omega;\, C_{per}(Y)}$ (d'après la proposition (3.2.2)), d'où on a :

$$|l_\varepsilon(\phi)| \leq c||\phi||_{L^2(\Omega;C_{per}(Y))}. \tag{3.3}$$

On déduit de (3.3) que l_ε est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$; donc l_ε est un élément de $[L^2(\Omega; C_{per}(Y))]'$. D'après le théorème de Banach-Alaouglu, il existe une sous-suite de $(l_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ encore notée $(l_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $l \in [L^2(\Omega; C_{per}(Y)]'$ tels que :

$$l_\varepsilon(\phi) \longrightarrow l(\phi) \quad \forall\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y)).$$

D'autre part en passant à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans (3.3), il vient que

$$|l(\phi)| \leq c||\phi||_{L^2(\Omega\times Y)} \quad \forall\phi \in L^2(\Omega; C_{per}(Y)). \tag{3.4}$$

Puisque $L^2(\Omega; C_{per}(Y))$ est dense dans $L^2(\Omega \times Y)$, alors on peut étendre l à une unique forme linéaire continue sur $L^2(\Omega \times Y)$, encore notée l et on a :

$$|l(\phi)| \leq c||\phi||_{L^2(\Omega\times Y)} \quad \forall\phi \in L^2(\Omega \times Y). \tag{3.5}$$

Comme $L^2(\Omega \times Y)$ est un espace de Hilbert, d'après le théorème de représentation de Riesz, la forme linéaire continue l peut être identifiée à un élément $u \in L^2(\Omega \times Y)$ et on a donc

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \int_\Omega u_\varepsilon(x)\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})dx = \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} l_\varepsilon(\phi) = l(\phi) = (u, \phi)_{L^2(\Omega\times Y)} = \int_\Omega \int_Y u(x, y)\phi(x, y)dydx,$$

pour tout $\phi \in L^2(\Omega \times Y)$. La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 3.2.5. ***(D.Lukkassen, 2000)***
Soit $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite de $H^1(\Omega)$ telle que $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c$, (où c est une constante positive). Alors, il existe $(u, v) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_{per}(Y)/\mathbb{R})$ et une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ encore notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ tels que :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \qquad \text{dans } H^1(\Omega)\text{-faible}. \tag{3.6}$$

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} \nabla_x u + \nabla_y v \qquad \text{dans } (L^2(\Omega))^N. \tag{3.7}$$

3.3 Passage à la limite

La suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$ (voir proposition (2.2.3) du chapitre précédent) ; D'après le théorème de compacité (Théorème (3.2.4), il existe une sous-suite de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ encore notée $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(u, v) \in H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_{per}(Y)/\mathbb{R})$ tels que :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } H^1_0(\Omega)\text{-faible}, \tag{3.8}$$

et

$$\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{2-s} \nabla u + \nabla_y v \qquad \text{dans } L^2(\Omega)^N. \tag{3.9}$$

Soient $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\phi_1 \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y)/\mathbb{R})$,
posons

$$\phi^\varepsilon(x) = \phi(x) + \varepsilon\phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) \qquad (x \in \Omega, \varepsilon > 0),$$

alors

$$\nabla\phi^\varepsilon(x) = \nabla\phi(x) + \varepsilon\nabla_x\phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \nabla_y\phi_1(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

.

Remarquons que la formulation variation faite au chapitre 2 peut encore s'écrire :

$$\int_\Omega A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla v \, dx = l(v), \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

avec

$$A^\varepsilon = (a^\varepsilon_{i,j})_{0\leq i,j\leq N}$$

la matrice à coefficients $a_{i,j}^{\varepsilon}$.

Ainsi on a :

$$\int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon}[A^{\varepsilon}(\nabla\phi + \varepsilon\nabla_x\phi_1^{\varepsilon} + \nabla_y\phi_1^{\varepsilon})] = \int_{\Omega} f[\phi + \varepsilon\phi_1^{\varepsilon}]\, dx. \tag{3.10}$$

En passant à la limite dans (3.10) quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ et en utilisant (3.9) avec pour fonction test

$$A^{\varepsilon}(\nabla\phi + \nabla_y\phi_1^{\varepsilon}) \in C(\bar{\Omega}; L^{\infty}_{per}(Y)),$$

il vient que :

$$\int_{\Omega}\int_{Y} A[\nabla u + \nabla_y v]\cdot[\nabla\phi + \nabla_y\phi_1]\, dydx = \int_{\Omega} f\phi\, dx.$$

$$\forall(\phi,\phi_1) \in \mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega; C^{\infty}_{per}(Y)/\mathbb{R}).$$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$ et de $\mathcal{D}(\Omega; C^{\infty}_{per}(Y)/\mathbb{R})$ dans $L^2(\Omega; H^1_{per}(Y)/\mathbb{R})$,

on obtient que :

$$\int_{\Omega}\int_{Y} A[\nabla u + \nabla_y v]\cdot[\nabla\phi + \nabla_y\phi_1]\, dydx = \int_{\Omega} f\phi\, dx, \quad \forall(\phi,\phi_1) \in H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega; H^1_{per}(Y)/\mathbb{R}).$$

Posons

$$\mathbb{V} = H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega; H^1_{per}(Y)/\mathbb{R})$$

muni de la norme

$$\|(\phi,\phi_1)\|_{\mathbb{V}} = \left[\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \|\nabla_y\phi_1\|^2_{L^2(\Omega\times Y)^N}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad ((\phi,\phi_1)\in\mathbb{V})$$

$\mathbb{V}$ est un espace de Hilbert.

Posons

$$a(U,\Phi) = \int_{\Omega}\int_{Y} A[\nabla u + \nabla_y v]\cdot[\nabla\phi + \nabla_y\phi_1]\, dydx \;\; et \;\; l(\Phi) = \int_{\Omega} f\phi\, dx$$

où $U = (u,v)$ et $\Phi = (\phi,\phi_1)$ dans $\mathbb{V}$.

Par suite on obtient donc le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U = (u,v) \in \mathbb{V} \\ a(U,\Phi) = l(\Phi) \\ \text{pour tout } \; \Phi = (\phi,\phi_1) \in \mathbb{V}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Proposition 3.3.1

Le problème variationnel (3.11) admet une unique solution.

Preuve. Remarquons d'abord que :

$$\forall(\phi,\phi_1)\in\mathbb{V},\ \int_\Omega\int_Y \nabla\phi\cdot\nabla_y\phi_1\,dxdy=\int_\Omega \nabla\phi(x).\left(\int_Y \nabla_y\phi_1(x,y)\,dy\right)dx=0\quad (car\ \phi_1\ est\ Y-périodique).$$

Posons $B=C(\bar\Omega,L^\infty(Y))$; la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{V}\times\mathbb{V}$ en effet on a :

$$\begin{aligned}
|a((u_0,u_1),(v_0,v_1))| &= \left|\int_{\Omega\times Y} A(x,y)(\nabla_x u_0+\nabla_y u_1).(\nabla_x v_0+\nabla_y v_1)\,dx\,dy\right|\\
&\le \int_{\Omega\times Y}\left|A(x,y)(\nabla_x u_0+\nabla_y u_1).(\nabla_x v_0+\nabla_y v_1)\right|\,dx\,dy\\
&\le \|A\|_B\int_{\Omega\times Y}\left|(\nabla_x u_0+\nabla_y u_1).(\nabla_x v_0+\nabla_y v_1)\right|\,dx\,dy\\
&\le \|A\|_B\left\|\nabla_x u_0+\nabla_y u_1\right\|_{L^2(\Omega\times Y)}\left\|\nabla_x v_0+\nabla_y v_1\right\|_{L^2(\Omega\times Y)}\\
&\le \|A\|_B\left(\|\nabla_x u_0\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla_y u_1\right\|_{L^2(\Omega\times Y)}\right)\left(\|\nabla_x v_0\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla_y v_1\right\|_{L^2(\Omega\times Y)}\right)\\
&\le 4\,\|A\|_B\,\|(u_0,u_1)\|_{\mathbb{V}}\,\|(v_0,v_1)\|_{\mathbb{V}}\,.
\end{aligned}$$

De plus elle est coercive sur $\mathbb{V}$. En effet pour $\Phi=(\phi,\phi_1)\in\mathbb{V}$ on a :

$$\begin{aligned}
a(\Phi,\Phi) &= \int_\Omega\int_Y A[\nabla\phi+\nabla_y\phi_1]\cdot[\nabla\phi+\nabla_y\phi_1]\,dxdy\\
&\ge \alpha\int_\Omega\int_Y |\nabla\phi+\nabla_y\phi_1|^2\,dxdy\\
&= \alpha\int_\Omega\int_Y |\nabla\phi|^2+|\nabla\phi_1|^2\,dxdy+2\alpha\int_\Omega\int_Y \nabla\phi\cdot\nabla_y\phi_1\,dxdy\\
&= \alpha\int_\Omega\int_Y |\nabla\phi|^2+|\nabla\phi_1|^2\,dxdy\\
&= \alpha\left(\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)^N}+\|\nabla_y\phi_1\|^2_{L^2(\Omega\times Y)^N}\right)\\
&= \alpha\|(\phi,\phi_1)\|^2_{\mathbb{V}}.
\end{aligned}$$

La forme linéaire l est manifestement continue sur $\mathbb{V}$. En effet on a :

$$\begin{aligned}
|l(\Phi)| &\le \int_\Omega |f\phi|\,dx\\
&\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|\phi\|_{L^2(\Omega)}\\
&\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|\phi\|_{H^1_0(\Omega)}+\left\|\nabla_y\phi_1\right\|_{L^2(\Omega\times Y)^N}\\
&= c_0\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)^N}+\left\|\nabla_y\phi_1\right\|_{L^2(\Omega\times Y)^N}\\
&\le \left(c_0^2\,\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+1\right)^{\frac12}\left(\|\nabla\phi\|^2_{L^2(\Omega)^N}+\left\|\nabla_y\phi_1\right\|^2_{L^2(\Omega\times Y)^N}\right)^{\frac12}\\
&= \left(c_0^2\,\|f\|^2_{L^2(\Omega)}+1\right)^{\frac12}\|\Phi\|_{\mathbb{V}}\,.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Lax-Milgram le problème variationnel (3.11) admet une unique solution.

■

3.4 Problème homogénéisé

Il s'agit ici de trouver le problème dont u_0 est solution.

3.4.1. Problème microscopique

IL s'agit ici de trouver une relation entre v et u.

Dans l'égalité $\int_\Omega \int_Y A\left[\nabla u + \nabla_y v\right] \cdot \left[\nabla \phi + \nabla_y \phi_1\right]\, dydx = \int_\Omega f\phi\, dx$, on prend $\phi = 0$ pour avoir :

$$\int_\Omega \int_Y A(x,y)\left[\nabla u(x) + \nabla_y v(x,y)\right] \cdot \left[\nabla_y \phi_1(x,y)\right]\, dxdy = 0. \tag{3.12}$$

Posons $\phi_1 = \varphi \otimes \omega$ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\omega \in C^\infty_{per}(Y)/\mathbb{R}$ alors, (3.12) implique que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \left[\int_Y A(x,y)\left(\nabla u(x) + \nabla_y v(x,y)\right) \cdot \nabla_y \omega(y) dy\right] \varphi_(x)\, dx = 0.$$

Donc pour presque tout $x \in \Omega$, on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_Y A(x,y)\left(\nabla u(x) + \nabla_y v(x,y)\right) \cdot \nabla_y \omega(y) dy = 0 \\ \text{pour tout } \omega \in C^\infty_{per}(Y)/\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Remarque 3.4.1. Pour tout $x \in \Omega$ et pour presque tout $y \in Y$, la matrice $A(x,y)$ est coercive et $A \in C(\bar{\Omega}; L^\infty_{per}(Y))$.

Proposition 3.4.1

Le problème (3.13) admet une unique solution.

Preuve. On écrit la formulation variationnelle du problème (3.13) , à partir de la remarque (3.4.1), on utilise le théorème de Lax-Milgram pour conclure. ■

Proposition 3.4.2

Soit $1 \le j \le N$. Pour $x \in \Omega$ fixé. Le problème suivant admet une unique solution :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \theta^j \in H^1_{per}(Y)/\mathbb{R} \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_Y A(x,y)\nabla_y \theta^j(y).\nabla_y \omega(y) dy = -\int_Y \sum_{k=1}^N a_{kj} \frac{\partial \omega}{\partial y_k}(y) dy, \\ \text{pour tout } \omega \in H^1_{per}(Y)/\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.14}$$

<u>**Preuve.**</u> Posons

$$a(u,\omega) = \int_Y A(x,y)\nabla_y u \cdot \nabla_y \omega dy$$

et

$$l(\omega) = -\int_Y \sum_{k=1}^{N} a_{kj} \frac{\partial \omega}{\partial y_k}(y)dy \text{ , } pour\ u, v \in H^1_{per}(Y)/\mathbb{R}.$$

Alors $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire continue et coercive (car $A(x,y)$ est coercive, ceci est une conséquence de la remarque (3.4.1)). De plus l est une forme linéaire continue sur $H^1_{per}(Y)/\mathbb{R}$; d'après le Lemme de Lax-Milgram, le problème (3.14) admet une unique solution. ■

Proposition 3.4.3

Pour presque tout $(x,y) \in \Omega \times Y$ fixé, on a :

$$v(x,y) = \theta(y).\nabla u(x) \tag{3.15}$$

et

$$\nabla_y u_1(x,y) = \nabla_y \theta(y)\nabla u_0(x). \tag{3.16}$$

Où $(\nabla_y \theta)_{ij} = \dfrac{\partial \theta^j}{\partial y_i}$ $(1 \leq i, j \leq N)$ et $\theta = (\theta_1, ..., \theta_N)$ est la solution du problème (3.14).

<u>**Preuve.**</u> Fixons $x \in \Omega$, alors en multipliant les membres de (3.14) par $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x)$ on obtient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_Y A(x,y)\nabla_y \theta^j(y)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \cdot \nabla_y \omega(y)dy = -\int_Y \sum_{k=1}^{N} a_{kj}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial \omega}{\partial y_k}(y)dy \\ \text{pour tout } \omega \in H^1_{per}(Y)/\mathbb{R}. \end{cases}$$

Ensuite en sommant sur $j = 1, ..., N$, il vient que :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_Y A(x,y)\nabla_y(\theta(y)\nabla u(x)).\nabla_y \omega(y)dy = -\int_Y A(x,y)\nabla u(x) \cdot \nabla_y \omega(y)dy \\ \text{pour tout } \omega \in H^1_{per}(Y)/\mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc la fonction $(x,y) \mapsto \theta(y).\nabla u(x)$ est solution du problème (3.13) et par unicité de la solution du problème (3.13), on déduit que pour presque tout $x \in \Omega$ on a :

$$v(x,y) = \theta(y).\nabla u(x),$$

et en posant $(\nabla_y \theta)_{ij} = \dfrac{\partial \theta^j}{\partial y_i}$, $(1 \leq i, j \leq N)$, on obtient (3.16). La preuve est ainsi achevée. ■

Remarque 3.4.2. Le problème (3.14) est appelé **problème microscopique**.

3.4.2. Problème macroscopique

Théorème 3.4.1. ***Le problème macroscopique*** *est donné par :*

$$\begin{cases} -div(A^*(x)\nabla u) & = & f(x) & dans & \Omega \\ u_0 & = & 0 & sur & \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

Où pour tout $x \in \Omega$,

$$A^*(x) = \int_Y A(x,y)\left(I + \nabla_y \theta\right) dy.$$

La fonction θ étant la solution du problème microscopique.

Preuve. Dans la relation $\int_\Omega \int_Y A[\nabla u + \nabla_y v] \cdot [\nabla\phi + \nabla_y \phi_1]\, dydx = \int_\Omega f\phi\, dx$, on prend $\phi_1 = 0$ pour avoir

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \int_Y A[\nabla u + \nabla_y v] \cdot \nabla\phi\, dxdy = \int_\Omega f\phi\, dx \\ \text{pour tout } \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases} \tag{3.18}$$

Mais de (3.16) on a :

$$\nabla_y v(x,y) = \nabla_y \theta(y) \nabla u(x).$$

Donc (3.18) implique :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \int_Y A\left(\nabla u + \nabla_y \theta \nabla u\right) \cdot \nabla\phi\, dxdy = \int_\Omega f\phi\, dx, \\ \text{pour tout } \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \int_Y A\left(I + \nabla_y \theta\right) \nabla u(x) \cdot \nabla\phi(x)\, dxdy = \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx \\ \text{pour tout } \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases} \tag{3.19}$$

En posant pour $x \in \Omega$,

$$A^*(x) = \int_Y A(x,y)\left(I + \nabla_y \theta\right) dy,$$

ou encore $A^*(x) = \left(a^*_{i,j}(x)\right)_{i,j}$, avec $a^*_{i,j}(x) = \int_Y \left(a_{i,j}(x,y) + \sum_{k=1}^N a_{i,k} \frac{\partial \theta_j}{\partial y_k}\right) dy$ et (3.19) s'écrit :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A^*(x)\nabla u(x) \cdot \nabla\phi(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx, \\ \text{pour tout } \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{cases} \tag{3.20}$$

Par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ on obtient le problème variationnel homogénéisé suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_\Omega A^*(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x)v(x) dx \\ \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{3.21}$$

qui est la formulation variationnelle du problème macroscopique (3.17). La preuve est ainsi achevée. ■

Proposition 3.4.4

Le problème macroscopique (3.17) admet une unique solution.

Preuve. Il suffit de montrer que le problème variationnel (3.21) admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrons que A^* est coercive. Pour cela remarquons d'abord que :

$$\int_Y A(x,y)(e_j + \nabla_y \theta_j).\nabla_y \theta_i \, dy = 0.$$

Cette égalité découle du fait que θ_j soit solution de (3.14). Cette remarque nous permet d'écrire :

$$a^*_{i,j} = \int_Y A(x,y)(e_j + \nabla_y \theta_j).(e_i + \nabla_y \theta_i) \, dy$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N} a^*_{i,j}(x)\xi_i\xi_j &= \sum_{i,j=1}^{N} \int_Y A(x,y)(e_j + \nabla_y \theta_j).(e_i + \nabla_y \theta_i) \, dy \, \xi_i\xi_j \\
&= \int_Y A(x,y)\left(\xi + \sum_{j=1}^{N} \xi_j \nabla_y \theta_j\right).\left(\xi + \sum_{i=1}^{N} \xi_i \nabla_y \theta_i\right) dy \\
&\geq \alpha \int_Y \left|\xi + \sum_{i=1}^{N} \xi_i \nabla_y \theta_i\right|^2 dy \quad (\textit{par coercivité de } A) \\
&= \alpha\,|\xi|^2 \quad \left(\textit{car} \int_Y \nabla \theta_i \, dy = 0\right).
\end{aligned}$$

Il découle que pour tout $x \in \Omega$ la matrice $A^*(x)$ est coercive. On applique donc le Lemme de Lax-Milgram avec :

$$a(u,v) = \int_\Omega A^*(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \qquad (u, v \in H_0^1(\Omega))$$

et

$$l(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx \qquad (v \in H_0^1(\Omega)).$$

Et on obtient le résultat voulu. ■

Remarque **3.4.3.** On a ainsi montré qu'il existe une sous-suite de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ où u_ε est solution du problème (2.1) qui converge dans $H_0^1(\Omega)$-faible vers la solution u du problème homogénéisé (3.17).

Proposition 3.4.5

La suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers l'unique solution u du problème (3.17).

Preuve. Nous allons montrer que toutes les sous-suites convergent vers u. Par l'absurde, supposons que u ne soit pas l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Alors il existe une sous-suite $(u_{\varphi(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge mais pas vers u_0. La suite $(u_{\varphi(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ est bornée car $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ l'est ; donc en reprenant le procédé d'homogénéisation avec la suite $(u_{\varphi(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$, on obtient qu'elle admet une sous-suite qui converge vers un u'_0 solution du problème (3.17). Mais par unicité de la solution du problème (3.17), $u'_0 = u$. On conclut que $(u_{\varphi(\varepsilon)})_{\varepsilon>0}$ converge vers u. Ce qui est absurde. ■

✠ IMPLICATION PÉDAGOGIQUE ✠

Le présent mémoire du DIPES II intitulé **Comportement limite d'une suite de solutions de problèmes elliptiques linéaires** a beaucoup d'intérêt sur le plan pédagogique et sur le plan didactique.

3.5 Sur le plan didactique

Ce travail m' a permis de maitriser l'usage de Latex qui est un outil didactique numérique d'une grande importance pour la pratique enseignante des mathématiques. En ce sens que, je me suis doté de moyens techniques pour m'améliorer dans ma tâche de présentation des cours. Ce travail me permet aussi de proposer une meilleure qualité des épreuves et de mieux faire une analyse des données en ce qui concerne les comptes rendus des évaluations scolaires.

3.6 Sur le plan pédagogique

Ce travail m' a permis entre autres :

- ♣ D'améliorer la qualité de mes rédactions ce qui me permettra de concevoir les cours compréhensibles.
- ♣ de me rendre compte qu'il y a une théorie des EDP plus générale qui prolonge celle des équations différentielles ordinaires, ce qui me sera d'une grande utilité dans la motivation de mes élèves.
- ♣ De développer l'esprit d'initiative et d'innovation. Ceci est très important pour un enseignant car celui-ci dois toujours innover dans la recherche pour être en phase avec les évolutions épistémologiques des savoirs à enseigner.

✠ Conclusion ✠

Parvenu au terme de ce travail dans lequel il était question pour nous d'homogénéiser une équation variationnelle, nous avons d'abord défini certains espaces de Hilbert nécessaires pour la résolution des problèmes variationnels, puis nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution faible du problème variationnel, ensuite nous avons homogénéisé le problème variationnel en utilisant la méthode de la convergence à deux échelles et enfin nous avons prouvé un résultat de convergence de la suite de solutions du problème initial vers la solution du problème homogénéisé. Une perspective serait d'homogénéiser cette fois-ci les inéquations variationnelles avec obstacle par exemple, les inéquations variationnelles avec des hypothèses de structures générales, avec des hypothèses générales déterministes ou stochastiques.

✠ Bibliographie ✠

[1] A.Adams ; *Sobolev spaces*, Academic press, New York, 1975.

[2] G.Allaire ; *Homogenization and two scale convergence*, SIAM J, Math. Anal, **23** (1992), 1482-1518.

[3] D. Cioranescu and P. Donato ; *An introduction to homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, University Press, New York,1999.

[4] Hermann Douanla ; *Two-scale Convergence and Homogenization of Some Partial Differential Equations*, PhD Thesis, University of Gothenburg, Sweden, 2013.

[5] U. Hornung ; *Homogenization and porous media*, Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer, New-York,1997.

[6] Ahmed Lesfari. Distributions, analyse de FOURIER et transformation de LAPLACE-cours et exercices.ellipse,2012.

[7] D. Lukkassen, G. Nguetseng and P. Wall ; *Two-scale convergence*, Int. J. Pure Appl. Math, **20** (2000), 35-86.

[8] G. Nguetseng ; *A general convergence result for a fonctional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal, **20** (1989), 608-623.