RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ 1
****
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
****
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE 1
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

MARIAGES STABLES ET APPLICATIONS

Mémoire rédigé et soutenu publiquement en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade (DIPES II) en Mathématiques

Par :

ALIHOU

Matricule : 14Y021

DIPES I et Licencié en Mathématiques

Sous la direction de :

NICOLAS GABRIEL ANDJIGA

Professeur

Année Académique 2018-2019

MARIAGES STABLES ET APPLICATIONS

Mémoire rédigé et soutenu publiquement en vue de l'obtention du diplôme de professeur de l'enseignement secondaire deuxième grade (DIPES II) en mathématiques.

Par :

ALIHOU

DI.P.E.S I en mathématiques et Licencié en mathématiques

Matricule : 14Y021

Sous la direction de

NICOLAS GABRIEL ANDJIGA

Professeur

Année académique : 2018-2019

✠ Dédicace ✠

Je dédie ce travail

À

ma chère et tendre maman AMINATOU BOUHARI.

✠ Remerciements ✠

J’adresse ici mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à tous ceux qui m’ont porté jusqu’à présent par leur amour, leur amitié, leurs enseignements, leurs conseils, leurs encouragements, leurs aides et leurs reproches. Ma profonde reconnaissance va tout d’abord :

- ♡ À **ALLAH**, seigneur de l’univers, pour son amour, sa miséricorde, sa bonté et ses bienfaits à mon égard dont je ne peux tous citer. Merci Seigneur pour ces dons.
  Mes remerciements s’adressent également de façon particulière :
- ♡ À mon encadreur, **Professeur Nicolas Gabriel Andjiga** qui,a de bon gré,accepté de diriger ce travail. Malgré ses multiples occupations,a soutenu mes efforts jusqu’au bout. Vous vous êtes révélé réellement présent et surtout ouvert et avez ménagé beaucoup d’efforts pour que ce travail puisse être effectué dans les délais.
- ♡ À tout **le personnel du département des mathématiques de l’École normale supérieure de Yaoundé**,pour les enseignements et le suivi qu’il m’a apporté durant ces dernières années passées à l’École normale supérieure.
- ♡ À mes **parents**,pour la grande attention que vous m’accordez et pour votre soutien, vos conseils et cette grande éducation qui fait ma personne d’aujourd’hui.
- ♡ À tous mes **frères** et **soeurs**,je n’oublie pas l’amour et le réconfort que vous m’avez toujours témoignés.
- ♡ À tous mes camarades de promotion, particulièrement à mes camarades **Pleins droit** avec qui nous avons tout partagé ces cinq dernières années.
  Je tiens également à remercier particulièrement :
- ♡ Mes camarades **AYIAGNIGNI MOHAMMED** et **OMBOUDOU TSALA** qui m’ont beaucoup aidé notamment dans la manipulation du logiciel **LATEX**.
- ♡ Toute ma gratitude va aussi à toutes et à tous ceux qui m’ont aidé de près ou de loin, matériellement ou moralement pour la réalisation de ce travail.

✠ Déclaration sur l'honneur ✠

Le présent document est une oeuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

ALIHOU

✠ Résumé ✠

Le problème des mariages stables consiste à affecter (mettre ensemble) les éléments d'un ensemble (proposants) avec ceux d'un autre ensemble (disposants) de manière à réduire au maximum les regrets ou encore à maximiser le bien-être individuel. En 1962, Gale et Shapley montrent qu'il est toujours possible d'avoir une solution stable en adoptant un algorithme, connu sous le nom de "Algorithme de Gale-Shapley". Ce mémoire prône une approche orienté individu pour la résolution du problème classique des mariages stables suivant une liste complète ou même incomplète. Par suite nous proposons quelques applications concrètes du problème des mariages stables comme c'est le cas pour l'affectation dans les établissement secondaires des enseignants sortis de l'École Normale Supérieure.

Mots-clés : Mariage, stabilité, affectation, algorithme de Gale-Shapley, profils de préférences.

✠ Abstract ✠

The matching games is to match (put together) the elements of a set (proposers) with those of another set (disposing) so as to minimize the regression or to maximize individual well-being (stable solution). In 1962, Gale and Shapley show that it is always possible to have a stable solution by adopting an algorithm well known as "Gale-Shapley Algorithm". This memory advocates an individual oriented approach for the resolution of the classic problem of stable marriages according to a complete or even incomplete list. We also propose some concrete application as is the case for the assignment to secondary schools of teachers from the Higher Teacher Training College.

Keys-words : Marriage, stability, assignment, Gale-Shapley algorithme, prefrences profiles.

✠ Table des matières ✠

✠ Introduction ✠

Le problème dit de mariage stable à été présenté et étudié à l'origine par David Gale et Lloyd Shapley en 1962. Le problème s'énonce comme suit :

On considère un ensemble $\mathcal{F}$ des femmes et un ensemble $\mathcal{H}$ des hommes de cardinalités respectives n et m. On admet que les préférences R^H des hommes sur les femmes et les préférences Q^F des femmes sur les hommes sont données. On dit qu'on détermine une solution en mariant les hommes et les femmes, donc en formant k couples, $k \leq max(n, m)$. Mais il existe deux catégories de solutions : les stables et les instables.

(i) Une solution instable est une solution telle qu'il existe un homme h et une femme f non mariés ensemble qui se prefèrent mutuellement à leurs partenaires respectifs. On dit que (h, f) est une cause d'infidélité ou une cause d'instabilité.

(ii) A l'inverse, une solution stable est une solution sans cause d'infidélité.

Il se pose donc les problèmes suivants :

- Existe t-il toujours un mariage stable suivant (R^H, Q^F) donné ?
- Peut on avoir un algorithme de détermination d'un mariage stable suivant (R^H, Q^F) quelconque ?
- Si oui, peut on déterminer tous les mariages stables grâce à cet algorithme ?

Chapitre Un

MARIAGE ENTRE LES ENSEMBLES DE MÊME CARDINALITÉ

1.1. Ordres totaux sur les ensembles et chaque homme sera marié à une femme exactement et vice versa

On suppose que chaque homme classe toutes les femmes par ordre de préférence et chaque femme classe, par ordre de préférence tous les hommes. On s'intéresse à la formation des mariages stables où chaque homme sera en couple avec exactement une femme.

Notation 1.1.1. On note par $\mathcal{H}$ l'ensemble des hommes et par $\mathcal{F}$ celui des femmes.

Ainsi pour chaque homme $h \in \mathcal{H}$, on a un ordre total $\leq_h$ sur $\mathcal{F}$, et pour chaque femme $f \in \mathcal{F}$ on a un ordre total $\leq_f$ sur $\mathcal{H}$ et on note $f_1 \leq_h f_2$ pour signifier que h préfère f_2 à f_1.

Exemple 1.1.1. On se donne $\mathcal{H} = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{F} = \{x, y; z\}$. On définit les préférences des agents suivant :

$P_a = xyz$ $\quad\quad$ $Q_x = bca$

$P_b = xzy$ $\quad\quad$ $Q_y = cba$

$P_c = zxy$ $\quad\quad$ $Q_z = acb$

et on considère les profils suivants : $P = (P_a; P_b; P_c)$ et $Q = (Q_x; Q_y; Q_z)$

Mariage non stable

$M = \{(x, a), (y, b), (z, c)\} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{H}$.

Ce mariage est non stable. En effet , en considérant les couples (x, a) et (y, b) on a bien x préfère b à a et b préfère x à y . Ceci prouve la non stabilité de ce mariage.

Mariage stable :

$M_1 = \{(x, b), (y, c), (z, a)\} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{H}$ et $M_2 = \{(x, b), (y, a), (z, c)\} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{H}$ sont les seuls mariages stables pour ce cas. En effet si nous supposons qu'il existe un mariage stable M_0 différent de M_1 et M_2 alors x est non marié à b (car sinon soit y marié à c et là on a M_1 soit y marié à a et là on a M_2). x non marié à b or x et b se préfèrent mutuellement. Ce qui prouve la non stabilité de ce mariage.

Prouvons la stabilité de M_1

- Si (x, b) n'est pas stable alors il existe un couple (u, v) vérifiant : $\begin{cases} x & \text{préfère} & v \text{ à } b \\ v & \text{préfère} & x \text{ à } u \end{cases} (1)$ ou $\begin{cases} b & \text{préfère} & u \text{ à } x \\ u & \text{préfère} & b \text{ à } v \end{cases} (2)$.

  (1) est impossible car b est le meilleur choix de x.

  De même (2) ne peut être possible car x est le meilleur choix de b

- Si (y, c) n'est pas stable alors il existe un couple (u, v) tel que $\begin{cases} y & \text{préfère} & v \text{ à } c \\ v & \text{préfère} & y \text{ à } u \end{cases} (1)$ ou $\begin{cases} c & \text{préfère} & u \text{ à } y \\ u & \text{préfère} & c \text{ à } v \end{cases} (2)$.

  Si (1) est vérifiée alors y préfère v à c or ceci est est impossible car c est le meilleur choix de y.

  Si (2) est vérifiée alors c préfère u à y, ceci entraine que $u = z$ ou $u = x$; si $u = z$ alors $v = a$ et dans ce cas u préfère v à c ; si $u = x$ alors $v = b$ et dans ce cas u préfère v à c. C'est qui est absurde.

- Si (z, a) n'est pas stable alors il existe un couple (u, v) vérifiant : $\begin{cases} z & \text{préfère} & v \text{ à } a \\ v & \text{préfère} & z \text{ à } u \end{cases} (1)$ ou $\begin{cases} a & \text{préfère} & u \text{ à } z \\ u & \text{préfère} & a \text{ à } v \end{cases} (2)$.

  Si (1) est vérifiée alors z préfère v à a,or a étant le meilleur choix de z celà est impossible.

  Si (2) est vérifiée alors a et u se préfèrent mutuellement ceci entraine $u = x$ ou $u = y$. Si

$u = x$ alors u préfère a à v est impossible car $v = b$ est le meilleur choix de u dans ce cas ; si $u = y$ alors $v = c$ est le meilleur choix de de u, ainsi l'existence d'un tel couple est impossible. En somme nous constatons qu'il n'existe aucun couple (u, v) prêt à quitter chacun son (sa) partenaire pour se mettre ensemble. Ceci prouve la stabilité de M_1.

Prouvons la stabilité de M_2

- Si (y, a) n'est pas stable alors il existe un couple (u, v) vérifiant $\begin{cases} y \quad \text{préfère} \quad v \text{ à } a \\ v \quad \text{préfère} \quad y \text{ à } u \end{cases}$ (1) ou $\begin{cases} a \quad \text{préfère} \quad u \text{ à } y \\ u \quad \text{préfère} \quad a \text{ à } v \end{cases}$ (2).

  Si (1) est vérifiée, alors y préfère v à a ce qui entraine $v = b$ ou $v = c$;

  Si $v = b$ donc b préfère y à u est impossible car y est le dernier choix de b.

  Si $v = c$ donc c préfère y à u est impossible car y est le dernier choix de c. Ceci montre que (1) est impossible.

  Si (2) est vérifiée alors a préfère u à y, ceci entraine $u = x$ or x préfère a à v est impossible car a est le dernier choix de x. Ainsi (x, b) est stable.

- Si (z, c) n'est pas stable alors il existe (u, v) tel que : $\begin{cases} z \quad \text{préfère} \quad v \text{ à } c \\ v \quad \text{préfère} \quad z \text{ à } u \end{cases}$ (1) ou $\begin{cases} c \quad \text{préfère} \quad u \text{ à } z \\ u \quad \text{préfère} \quad c \text{ à } v \end{cases}$ (2).

  Si (1) est vérifiée alors z préfère v à c entraine $v = a$ mais a préfère z à u est impossible car z est le dernier choix de a .

  Si (2) est vérifiée alors c préfère u à z . Ce qui est impossible car z est le meilleur choix de c. Ainsi (z, c) est stable.

- Le couple (x, b) est stable car x et b se préfèrent mutuellement . Ceci prouve la stabilité de M_2.

Définition 1.1.1

$\mu \subset \mathcal{H} \times \mathcal{F}$ est une affectation si $\forall\ x \in \mathcal{H}, \exists\ !\ y \in \mathcal{F}$ tel que $(x, y) \in \mu$ et $\forall\ y \in \mathcal{F}, \exists\ !\ x \in \mathcal{H}$ tel $(x, y) \in \mu$.

Notation 1.1.2. Si μ est une affectation,on notera par μ^x l'unique femme affectée à x par μ et par μ_y l'unique homme affecté à y par μ. μ est une bijection de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.2

Une affectation μ est dite stable s'il n'existe aucun couple $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{F}$ tel que x préfère y à μ^x et que y préfère x à μ_y.

Dans l'exemple ci dessus, M_1 et M_2 sont des affectations stables.

Remarque **1.1.1.** Il est à noter ici qu'on parle d'une affectation lorsque R^H et Q^F sont des ordres totaux et que pour une affectation chaque homme est marié à exactement une femme et vice versa. Ainsi lorsqu'on a à faire à une affectation, il n'existe pas d'homme ou de femme célibataire.

Relativement à la question d'existence d'un mariage stable suivant (R^H, Q^F) donné, la réponse est affirmative ; d'où le théorème suivant.

Théorème 1.1.3 (Gale et Shapley (1962))

Pour tout problème de mariage dans les hypothèses précédentes,il existe au moins une affectation stable.

(Ce théorème est un cas particulier que nous allons généralisé par la suite).

Preuve.

Elle se fait sous forme d'algorithme en étapes :

(i) **Fonctionnement de l'algorithme :**

- On a n hommes h_1 , h_2 ... , h_n et n femmes f_1 , f_2 ... , f_n .
- Pour chaque homme $h_{i\ (1 \le i \le n)}$, il existe un ordre total sur $\mathcal{F}$ noté $\le_{h_i}$, de même que pour chaque femme $f_{j\ (1 \le j \le n)}$, il existe un ordre total sur $\mathcal{H}$ noté $\le_{f_j}$.
- Chaque homme h_i sera marié à une et une seule femme f_j.

Étape 1 :Chaque homme se propose à la femme qu'il préfère le plus ; chaque femme reçoit les propositions et met en attente la proposition de l'homme qui est le mieux classé dans sa liste de préférence et repousse les autres.

Étape 2 Les hommes qui n'ont pas été retenus vont se proposer à leur second choix, puis chaque femme va garder celui qu'elle préfère le plus parmi les nouveaux arrivants et l'ancien retenu, et rejette les autres.

L'algorithme continue jusqu'à ce que toute femme soit convoitée au moins une fois . L'algorithme s'arrête toujours en un nombre fini d'étapes. En effet, puisqu'un homme ne peut pas faire une deuxième proposition à une même femme qui là déjà rejeté une fois dans le passé ; toute femme reçoit à un moment ou à un autre au moins une proposition. De plus, à la fin il ne peut donc pas y avoir un homme et une femme célibataires, puisque l'homme se sera forcément proposé à un moment donné.

(ii) **Stabilité de l'affectation obtenue :**

Soit μ l'affectation obtenue suivant cette algorithme, alors μ est stable car sinon, alors il existerait un couple (x, y) tel que x préfère y à μ^x et que y préfère x à μ_y. Mais alors il existe une étape pendant laquelle x avait été rejeté par y (car sinon il n'aurait jamais convoité μ^x). Puisqu'une femme ne rejette que pour obtenir mieux, alors nécessairement y préfère μ_y à x. D'où la contradiction. Ceci achève la preuve. ■

Remarque 1.1.2.

- L'algorithme utilisé pour la preuve précédente permet, pour n'importe quel profil (R^H, Q^F), d'obtenir un mariage stable (affectation stable).
- Le déroulement de l'algorithme ne change pas si les femmes plutôt se proposent aux hommes mais l'affectation obtenue à la fin n'est pas forcément la même.

Exemple 1.1.2. On donne $\mathcal{H} = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{F} = \{x, y, z, t\}$ et considère les profils suivant :

$P_a : yxtz$	$Q_x : abdc$
$P_b : xtzy$	$Q_y : bacd$
$P_c : xyzt$	$Q_z : dcba$
$P_d : zytx$	$Q_t : bdac$

Nous allons former des mariages stables en supposant :

(i) **Les hommes font des propositions**.

Étape 1

$a \longrightarrow y$

$b \longrightarrow x$

$c \longrightarrow x$

$d \longrightarrow z$

Ainsi, x a deux propositions b et c, comme x préfère b à c donc la proposition de c est rejetée. Ainsi la situation finale de l'**étape 1** est :

$a \longrightarrow y$

$b \longrightarrow x$

c reste seul

$d \longrightarrow z$

Étape 2

$a \longrightarrow y$

$b \longrightarrow x$

$c \longrightarrow y$

$d \longrightarrow z$

Ainsi y a deux propositions a et c et comme y préfère a à c, la proposition c est rejetée ; la situation finale de l'**étape 2** est donc :

$a \longrightarrow y$

$b \longrightarrow x$

c reste seul

$d \longrightarrow z$

Étape 3

$a \longrightarrow y$

$b \longrightarrow x$

$c \longrightarrow z$

$d \longrightarrow z$

Ainsi z a deux propositions c et d et comme z préfère d à c, la proposition de c est rejetée ; la situation finale de l'**étape 3** est donc :

$a \longrightarrow y$

$b \longrightarrow x$

c reste seul

$d \longrightarrow z$

Étape 4

$a \longrightarrow y$

$b \longrightarrow x$

$c \longrightarrow t$

$d \longrightarrow z$

Puisque t n'est pas en union, alors la proposition de c est acceptée. On obtient $M = \{(a,y),(b,x),(c,t),(d,z)\}$

(ii) **Les femmes font des propositions**.

Étape 1

$x \longrightarrow a$

$y \longrightarrow b$

$z \longrightarrow d$

$t \longrightarrow b$

Ainsi, b reçoit deux propositions, y et t, et retient celle de t car préfère t à y. Ainsi la situation finale de l'**étape 1** est donc :

$x \longrightarrow a$

y reste seule

$z \longrightarrow d$

$t \longrightarrow b$

Étape 2

$x \longrightarrow a$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow d$

$t \longrightarrow b$

Ainsi, a reçoit deux propositions x et y et retient celle de y car préfère y à x. La situation finale de l'étape 2 est donc :

x reste seule

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow d$

$t \longrightarrow b$

Étape 3

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow d$

$t \longrightarrow b$

Ainsi, b a de nouveau deux propositions x et t et retient celle de x car préfère ce dernier à t. La situation finale de l'étape 3 est donc :

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow d$

t reste seule

Étape 4

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow d$

$t \longrightarrow d$

Ainsi, d compte deux propositions z et t et retient celle de z car préfère z à t. La situation finale de cette étape est donc :

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow d$

t reste seule

Étape 5

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow d$

$t \longrightarrow a$

De nouveau, a compte deux propositions y et t et comme a préfère y à t, la proposition de t est rejetée. La situation finale de l'étape 5 est donc :

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow d$

t reste seule

Étape 6

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow d$

$t \longrightarrow c$

Puisque c n'a pas de meilleure proposition, accepte donc celle de t et on obtient :

$M' = \{(a,y),(b,x),(c,t),(d,z)\}$

Remarque 1.1.3. Dans le présent cas on obtient exactement la même affectation que M ce qui n'est toujours pas le cas.

Exemple 1.1.3. Pour les même ensembles ci dessus, considérons plutôt les profiles suivant :

P_a : $xyzt$	Q_x : $cabd$
P_b : $xzty$	Q_y : $acbd$
P_c : $yxtz$	Q_z : $bcda$
P_d :$ztyx$	Q_t : $adbc$

Les hommes font des propositions : Étape 1 :

$a \longrightarrow x$

$b \longrightarrow x$

$c \longrightarrow y$

$d \longrightarrow z$

Par suite, x reçoit deux propositions a et b et comme elle préfère a à b , la proposition de b est rejetée. La situation finale de cette étape est donc :

$a \longrightarrow y$

b reste seul

$c \longrightarrow x$

$d \longrightarrow z$

Étape 2 :

$a \longrightarrow x$

$b \longrightarrow z$

$c \longrightarrow y$

$d \longrightarrow z$

Par suite, z reçoit deux propositions b et d et comme z préfère b à d , la proposition de d est rejetée. La situation finale de cette étape est donc :

$a \longrightarrow x$

$b \longrightarrow z$

$c \longrightarrow y$

d reste seul

Etape 3 :

$a \longrightarrow x$

$b \longrightarrow z$

$c \longrightarrow y$

$d \longrightarrow t$

Puisque t n'a pas de meilleur proposition, accepte celle de d et on obtient :

$M = \{(a, x), (b, z), (c, y), (d, t)\}$

Les femmes font des propositions

Etape 1 :

$x \longrightarrow c$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow b$

$t \longrightarrow a$

Par suite, a reçoit deux propositions y et t ; mais comme a préfère y à t , la proposition de cette dernière est rejetée. La situation obtenue est donc :

$x \longrightarrow c$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow b$

t reste seule

Etape 2 :

$x \longrightarrow c$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow b$

$t \longrightarrow d$

Puisque d n'a pas de meilleure proposition, accepte donc celle de t et on obtient :

$M' = \{(a; y), (b; z), (c; x), (d; t)\}$. On a bien $M \neq M'$

Remarque 1.1.4. (i) Les femmes prefèrent se retrouver dans l'affectation M' alors que les hommes prefèrent l'affectation M.

(ii) le nombres d'étapes pour l'obtention d'une affectation stable dépend des profils utilisés. Néanmoins ce nombre est fini et le nombre maximum d'étapes est de n^2 (où $n = card(\mathcal{H}) = card(\mathcal{F})$)

(iii) L'algorithme ne donne pas toujours toutes les affectations stables possibles pour un profil donné. Pour mieux illustrer cette remarque, considérons l'exemple suivant :

Exemple 1.1.4. On considère $\mathcal{H} = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{F} = \{x, y, z\}$ avec les profils suivant :

$P_a : yzt$	$Q_x : bac$
$P_b : zyx$	$Q_y : cba$
$P_c : xzy$	$Q_z : acb$

Les seules affectations stables obtenue à partir de l'algorithme de Gale et Shapley sont :
$M_1 = \{(a; y), (b; x), (c; z)\}$ (celle obtenue lorsque les hommes font des propositions.)
$M_2 = \{(a; z), (b; x), (c; y)\}$ (celle obtenue lorsque les femmes font des propostions).Une autre affectation stable obtenue de manière indépendante de l'algorithme de Gale et Shapley est :
$M_3 = \{(a; x), (b; y), (c; z)\}$

1.2. Ordre total sur un ensemble et partiel sur l'autre.

Dans cette section, on suppose que certains hommes ne classent pas toutes les femmes et que chaque femme classe par un ordre total tous les hommes. Autrement dit, on se donne un ensemble $\mathcal{F}$ formé de n femmes f_1, f_2,... ,f_n et un ensemble $\mathcal{H}$ formé de n hommes h_1, h_2,... ,h_n où pour chaque femme $f_{j(1\leq j\leq n)}$ on a un ordre total $\leq_{f_j}$ sur $\mathcal{H}$ mais il existe certains hommes $(h_{\sigma_1}, h_{\sigma_2}, ..., h_{\sigma_k})_{(1\leq k\leq n)}$ telque : $\forall\ 1 \leq i \leq k$, h_{σ_i} ne classe pas toutes les femmes, autrement dit $\leq_{h_{\sigma_i}}$ est un ordre partiel sur $\mathcal{F}$ $\forall\ 1 \leq i \leq k$. (σ est une permutation sur $\{1; 2; ...n\}$)
Le problème étant toujours celui d'existence d'un mariage stable selon (R^H, Q^F) (définit plus haut.)

Exemples d'une telle situation.

Exemple 1.2.1. On fixe $n = 3$,on considère les profils :

$Q_{f_1} : h_1h_2h_3$ $\quad$ $P_{h_1} : f_1f_2f_3$

$Q_{f_2} : h_1h_3h_2$ $\quad$ $P_{h_2} : f_1f_2$

$Q_{f_3} : h_3h_1h_2$ $\quad$ $P_{h_3} : f_1f_3f_2$

Ici $k = 1$ et le seul ordre partiels est $\leq_{h_2}$.

.

Exemple 1.2.2. Avec $n = 3$ toujours, on considère maintenant les profils :

$Q_{f_1} : h_2h_3h_1$ $\quad$ $P_{h_1} : f_2f_3f_1$

$Q_{f_2} : h_2h_1h_3$ $\quad$ $P_{h_2} : ||$

$Q_{f_3} : h_2h_1h_3$ $\quad$ $P_{h_3} : f_2$

Ici $k = 2$ et les ordres partiels sont $\leq_{h_2}$ et $\leq_{h_3}$. L'homme h_2 ne classe aucune femme, pourtant il est préféré par chacune des filles. Ainsi, deux cas peuvent se présenter :

1.2.1. Chaque homme sera marié à une et une seule femme et vice versa.

Considérons les profils des exemples précédents et intéressons nous sur l'existence d'un mariage stable :

Exemple 1.2.3.

$Q_{f_1} : h_1h_2h_3$ $\quad$ $P_{h_1} : f_1f_2f_3$

$Q_{f_2} : h_1h_3h_2$ $\quad$ $P_{h_2} : f_1f_2$

$Q_{f_3} : h_3h_1h_2$ $\quad$ $P_{h_3} : f_1f_3f_2$

Mariage non stable

$M = \{(h_1, f_2), (h_2, f_1), (h_3, f_3)\} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{H}$. Ce mariage est non stable car h_1 et f_1 se préfèrent mutuellement pourtant non mariés ensemble.

Mariage stable

$M_1 = \{(h_1, f_1), (h_2, f_2), (h_3, f_3)\} \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{H}$. Prouvons la stabilité de M_1 :

- Si (h_3, f_3) n'est pas stable, alors il existe (u, v) tel que : $\begin{cases} h_3 \text{ préfère } v \text{ à } f_3 \\ v \text{ préfère } h_3 \text{ à } u \end{cases} (1)$ ou $\begin{cases} f_3 \text{ préfère } u \text{ à } h_3 \\ u \text{ préfère } f_3 \text{ à } v \end{cases} (2)$.

  Si (1) est vérifiée alors on a $f_3 \leq_{h_3} v$ et $u \leq_v h_3$ d'où $v = f_1$ mais h_3 est le dernier choix de f_1. D'où (1) est impossible.

  (2) est impossible puisque $h_3 \leq_{f_3} u$ ne peut avoir lieu car h_3 est le meilleur choix de de f_3.

- Si (h_2, f_2) n'est pas stable, alors il existe (x, y) tel que $\begin{cases} h_2 \text{ préfère } y \text{ à } f_2 \\ y \text{ préfère } h_2 \text{ à } x \end{cases} (1)$ ou $\begin{cases} f_2 \text{ préfère } x \text{ à } h_2 \\ x \text{ préfère } f_2 \text{ à } y \end{cases} (2)$.

  Si (1) est vérifiée alors on a $f_2 \leq_{h_2} y$ ce qui entraine $y = f_1$ et par suite $x = h_1$ mais $h_1 \leq_{f_1} h_2$ est impossible car h_1 est le meilleur choix de f_1.

  Si (2) est vérifiée alors on a $h_2 \leq_{f_2} x$ ce qui entraine $x = h_1 ou x = h_3$ mais h_1 et h_3 préfèrent chacun être avec sa partenaire actuelle que d'être avec f_2. Ceci prouve que (h_2, f_2) est stable.

- Si (h_1, f_1) n'est pas stable alors il existe (x, y) tel que : $\begin{cases} h_1 \text{ préfère } y \text{ à } f_1 \\ y \text{ préfère } h_1 \text{ à } x \end{cases} (1)$ ou $\begin{cases} f_1 \text{ préfère } x \text{ à } h_1 \\ x \text{ préfère } f_1 \text{ à } y \end{cases} (2)$.

  (1) est impossible car f_1 est le meilleur choix de h_1. De même (2) est impossible car h_1 est le meilleur choix de f_1.

On constate donc qu'il n'existe aucun homme et aucune femme qui aimeraient quitter leurs partenaires. D'où M_1 est stable.

Dans le cas de général il existe au moins un mariage stable dont la détermination est donnée par l'algorithme suivant :

Fonctionnement de l'algorithme

Comme pour le cas précédent il fonctionne en étapes :

Étape 1 Chaque femme se propose à l'homme qu'elle préfère le plus. L'homme reçoit les propositions et retient celle qui est mieux classée dans sa liste de préférence . Si aucune d'entre elles n'apparait dans sa liste, il retient néanmoins la première proposition qui lui a été faite.

Étape 2 Les femmes qui n'ont pas été retenues vont se proposer à leur second choix. Puis chaque homme va garder celle qu'il préfère le plus parmi les nouvelles propositions et l'ancienne retenue. S'il n'est pas possible de faire une comparaison entre l'ancienne et la nouvelle proposition, il retient alors celle qui apparait dans sa liste quel qu'en soit sa position et si les deux n'apparaissent pas, il conserve l'ancienne. L'algorithme continue ainsi de suite jusqu'à ce que chaque femme soit en couple avec un seul homme. Ceci est toujours possible car si on suppose à la fin de l'algorithme qu'il existe un homme h et une femme f qui ne sont pas en couple, alors à un moment ou à un autre la femme a fait une proposition à l'homme h. Si l'homme l'a repoussé cela voudrait dire qu'il est avec une autre qu'il préfère à f (même si f n'apparait pas dans sa liste, selon l'algorithme il serait resté avec f qui n'avait pas eu meilleure proposition).

Stabilité de l'affectation obtenue

Donnons nous à la fin deux couples (h_1, f_1) , (h_2, f_2) tels que h_1 et f_2 souhaitent se mettre ensemble. Alors ceci voudrait dire $f_1 \leq_{h_1} f_2$ et $h_2 \leq_{f_2} h_1$. Mais alors f_2 avait donc faire une proposition à h_1 avant h_2. Alors trois cas se présentent :

- soit f_1 et f_2 apparaissent dans la liste de h_1 et dans ce cas $f_2 \leq_{h_1} f_1$ car h_1 ne repousse que pour être avec une femme qu'il préfère à la dernière.
- soit f_2 n'apparait pas dans la liste de préférence de h_1 et f_1 apparait dans cette liste et dans ce cas h_1 n'a aucune intention à être avec f_2.
- soit f_1 et f_2 n'apparaissent pas dans la liste de h_1 et dans ce cas h_1 n'éprouve pas de besoin d'être ni avec f_1 ni avec f_2 ; mais puisqu'il doit être marié à une femme et que f_1 l'a convoitée en première , il reste avec f_1. Ceci prouve la stabilité de l'affectation ainsi obtenue.

Remarque **1.2.1.** Dans le déroulement de cet algorithme, on sous entend que toutes les femmes non classées par un homme occupent toutes la position la moins préférée.

Exemple 1.2.4. Reprenons l'exemple 1.2.3 ;

$Q_{f_1} : h_1 h_2 h_3$ $\qquad$ $P_{h_1} : f_1 f_2 f_3$

$Q_{f_2} : h_1 h_3 h_2$ $\qquad$ $P_{h_2} : f_1 f_2 (f_3)$

$Q_{f_3} : h_3 h_1 h_2$ $\qquad$ $P_{h_3} : f_1 f_3 f_2$

Ici, nous mettons entre parenthèses les femmes non désirées.

1.2.2. Mariage avec existence des membres célibataires

Ici on suppose que si une femme n'est pas dans la liste de préférence d'un homme, l'homme ne se mettra pas en couple avec elle et préférera rester célibataire.

Exemple d'une telle situation.

Exemple 1.2.5. On donne $\mathcal{H} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F} = \{x, y, z\}$ avec les profils :

$P_a : yzx$ $\qquad$ $Q_x : bca$

$P_b : xz$ $\qquad$ $Q_y : bac$

$P_c : y$ $\qquad$ $Q_z : bac$

Mariage stable

$M = \{(a, y), (b, x)\}$. On vérifie aisément la stabilité de ce mariage.

Mariage non stable

$M' = \{(a, x), (b, z), (c, y)\}$. Ce mariage n'est pas stable car b et x se préfèrent mutuellement mais non marié ensembles.

Proposition 1.2.1

Dans le présent cas,l'existence d'un mariage stable n'est pas toujours possible.

En effet, il peut exister des situations où on ne peut former de mariage (même non stable)comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.2.6. $n = 2$ et on donne $\mathcal{H} = \{a, b\}$ et $\mathcal{F} = \{x, y\}$ avec les profils suivant :

$P_a : ||$ $\quad$ $Q_x : ab$

$P_b : ||$ $\quad$ $Q_y : ba$

Pour ce profil, il n'est pas possible de former un mariage car aucun homme ne désire ce mettre en couple. Mais par contre si on ajoute l'hypothèse qu'au moins un homme désire (classe) au moins une femme,il existera un mariage stable.

Exemple 1.2.7. On donne $\mathcal{H} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F} = \{x, y, z\}$ avec les profils :

$P_a : xy$ $\quad$ $Q_x : abc$

$P_b : ||$ $\quad$ $Q_y : acb$

$P_c : y$ $\quad$ $Q_z : bac$

$M = \{(a, x), (c, y)\}$ est stable.

Preuve.

- Si (a, x) est non stable, alors il existe (u, v) vérifiant :
$$\begin{cases} a & \text{préfère} \quad v \text{ à } x \\ v & \text{préfère} \quad a \text{ à } u \end{cases} (1) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x & \text{préfère} \quad u \text{ à } a \\ u & \text{préfère} \quad x \text{ à } v \end{cases} (2).$$
(1) est impossible car x est le meilleur choix de a ; de même (2) est impossible car a est le meilleur choix de x .
- Si (c, y) est non stable alors il existe (u, v) vérifiant :
$$\begin{cases} c & \text{préfère} \quad v \text{ à } y \\ v & \text{préfère} \quad c \text{ à } u \end{cases} (1) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y & \text{préfère} \quad u \text{ à } c \\ u & \text{préfère} \quad y \text{ à } v \end{cases} (2).$$
(1) est impossible car le seul choix de c est y. Si (2) est réalisée alors $u = a$ mais a étant marié à son meilleur choix ne désire pas quitter sa partenaire actuelle pour se mettre avec y ; d'où (2) ne peut avoir lieu. Ceci prouve la stabilité de ce mariage.

■

Remarque 1.2.2.

- Ici, on a : $CardM \leq CardH = CardF$
- L'algorithme utilisé pour former un mariage stable admet exactement les mêmes étapes que celui de Gale-Shapley à la seule différence qu'ici les femmes se proposent uniquement qu'aux hommes qui les classent.

TABLE 1.1 – Tableau récapitulatif

Différents cas	**Existence de mariage stable**	**Algorithme de détermination**	**Observation**
Ordres totaux : un homme marié à une femme et vice versa	oui	oui : Gale-Shapley	L'algorithme ne permet de déterminer tous les mariages stables
Ordre total sur un des ensemble et partiel sur l'autre : un homme marié à une femme et vice-versa.	oui	oui : Gale-Shapley amélioré	L'algorithme ne permet pas de déterminer toutes les solutions stables
Ordre total sur un des ensemble et partiel sur l'autre : possibilité de célibataires	non : exemple 1.2.6	R.A.S	R.A.S

Chapitre Deux

MARIAGE ENTRE DES ENSEMBLES DE CARDINALITÉS DIFFÉRENTS

2.1. Définitions et présentation du problème

2.1.1. Définitions.

Définition 2.1.1

Pour le problème de mariage entre n hommes (dans $\mathcal{H}$) et m femmes (dans $\mathcal{F}$) $(n, m \in \mathbb{N}, n \neq m)$ une affectation est une relation fonctionnelle de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{H}$.

Définition 2.1.2

une affectation $\mathcal{T}$ est dite instable s'il existe deux couples (α, A) , $(\beta, B) \in \mathcal{T}$ tels que :

(i) α prefère B à A et B prefère α à β ou

(ii) β prefère A à B et A prefère β à α.

Si tel est le cas, le couple (α, A) est un facteur d'instabilitée.

Une affectation est donc dite stable s'il n'existe aucun couple de la sorte.

Définition 2.1.3

Un ensemble de paires,homme-femme $A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{F}$ est un couplage si chaque homme et chaque femme apparait dans au plus un élément de A.

Définition 2.1.4

$A \subset \mathcal{H} \times \mathcal{F}$ est un couplage parfait si chaque homme et chaque femme apparaissent dans exactement un élément de A.

Par la suite, dans certains cas on parlera de coulage et dans d'autre cas d'affectation selon la situation du problème ; mais il est à noter que la notion de stabilité ne change pas.

Définition 2.1.5

On dit qu'une femme est possible pour un homme s'il existe au moins une affectation stable pour laquelle cette femme et cet homme sont en couple. Sinon, on dit que cette femme est impossible pour cet homme.

De même, on définit un homme possible et impossible pour une femme.

Définition 2.1.6

Une affectation stable est dite optimale pour les hommes si chaque homme est en couple avec une femme qu'il préfère à toutes les autres femmes possibles.

De même, on définit une affectation stable optimale pour les femmes.

Définition 2.1.7

Une affectation stable est dite la moins optimale pour les hommes si chaque homme est en couple avec une femme à qui il préfère le moins à toutes les autres femmes possibles.

De même, on définit une affectation stable la moins optimale pour les femmes.

2.1.2. Présentation du problème.

On se donne un ensemble de n hommes noté $\mathcal{H}$ et un ensemble de m femmes noté $\mathcal{F}$ avec $n, m \in \mathbb{N}$ et $n \neq m$. En admettant que les préférences R^H des hommes sur les femmes et les préférences Q^F des femmes sur les hommes sont données, nous allons distinguer deux cas :

(i) Premièrement, nous supposons que chaque homme classe par un ordre total toutes les m femmes et que chaque femme classe par un ordre total tout les n hommes.

(ii) Par suite on se mettra dans le cas où certaines femmes n'apparaissent pas dans la liste de préférence de certains hommes.

Puisque $n \neq m$, on va supposer sans nuire à la généralité par la suite que $n < m$ (il y a plus de femmes que d'hommes.) Ce qui nous conduira à deux sous-cas des cas (i) et (ii) :

- Le cas où chaque membre des m femmes et des n hommes se trouve dans au moins un couple. Bien sûr il est clair que pour cette réalisation certains hommes se trouveront mariés à plus d'une femme.
- Cas où chaque homme sera marié à exactement une femme (certaines femmes resterons célibataires.) Aussi pour le (ii), nous pourrons examiner le cas suivant :
- Existence des membres célibataires des deux camps. Ici, on va former k couples avec $k < min(n, m)$; les hommes seront mariés a une seule femme mais uniquement une des femmes qu'ils classent ; si aucune n'apparait dans sa liste, alors il préfèrera être célibataire.

2.2. Ordres totaux sur les ensembles.

On suppose $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, ...h_n\}$ et $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, ...f_m\}$ et que pour chaque homme $h_{i(1\leq i\leq n)} \in \mathcal{H}$ on a un ordre total sur $\mathcal{F}$ noté $\leq_{h_i}$. De même, pour chaque femme $f_{i(1\leq i\leq m)} \in \mathcal{F}$ on a un ordre total noté $\leq_{f_i}$ sur $\mathcal{H}$.

2.2.1. Mariage sans membres célibataires.

Dans cette section, nous supposons que chaque homme(respectivement chaque femme) se trouve marié(e) à la fin ; c'est à dire : $\forall h_{i(1\leq i\leq n)} \in \mathcal{H}, \exists f_{j(1\leq j\leq m)} \in \mathcal{F}$ tel que (h_i, f_j) forme un couple et $\forall f_{j(1\leq j\leq m)} \in \mathcal{F}, \exists h_{i(1\leq i\leq n)} \in \mathcal{H}$ tel que (h_i, f_j) forme un couple. Ainsi,puisque $n < m$ il est nécessaire d'avoir des couples de la forme $(h_i, f_j), (h_i f_k)$ avec $1 \leq j, k \leq m$ et $j \neq k$.

Remarque 2.2.1.

Les relations de préférences considérées ici sont strictes.

Exemple 2.2.1.

Considérons $\mathcal{H} = \{a, b\}$ et $\mathcal{F} = \{x, y, z\}$ avec les profils :

$P_a : xyz$ $\qquad$ $Q_x : ab$

$P_b : yxz$ $\qquad$ $Q_y : ba$

$\qquad$ $Q_z : ab$

$P^H = (P_a, P_b)$ et $Q^F = (Q_x, Q_y, Q_z)$.

(i) **Mariage non stable :**

$M_1 = \{(a, y); (b, x); (b, z)\}$. Il est non stable car (a, y) constitue une preuve d'instabilité : puisque a préfère x à y et x préfère a à b.

(ii) **Mariage stable :**

$M_2 = \{(a, x); (b, y); (a, z)\}$

Preuve.

- Si (a, x) est une preuve d'instabilité alors il existe un couple (u, v) vérifiant :
$$\begin{cases} a & \text{préfère} \quad v \text{ à } x \\ v & \text{préfère} \quad a \text{ à } u \end{cases} \quad (1) \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} x & \text{préfère} \quad u \text{ à } a \\ u & \text{préfère} \quad x \text{ à } v \end{cases} \quad (2).$$
La relation (1) est impossible car x est le meilleur choix de a. De même, (2) est impossible puisque a est le meilleur choix de x. Ainsi (a, x) n'est pas une preuve d'instabilité.

- Si (b, y) est une preuve d'instabilité alors il existe un couple (u, v) vérifiant : $\left\{\begin{array}{lll} b & \text{préfère} & v \text{ à } y \\ v & \text{préfère} & b \text{ à } u \end{array}\right. (1)$ ou $\left\{\begin{array}{lll} y & \text{préfère} & u \text{ à } b \\ u & \text{préfère} & y \text{ à } v \end{array}\right. (2)$.

  La relation (1) est impossible car y est le meilleur choix de b. De même (2) est impossible puisque b est le meilleur choix de y. Donc (b, y) n'est pas une preuve d'instabilité.

- Si (a, z) est une preuve d'instabilité alors il existe un couple (u, v) vérifiant : $\left\{\begin{array}{lll} a & \text{préfère} & v \text{ à } z \\ v & \text{préfère} & a \text{ à } u \end{array}\right. (1)$ ou $\left\{\begin{array}{lll} z & \text{préfère} & u \text{ à } a \\ u & \text{préfère} & z \text{ à } v \end{array}\right. (2)$.

  - (1) est vérifiée, alors $v = x$ ou $v = y$.

  (i) $v = x$ entraine $u = a$ et par suite $\rceil$ (v préfère a à x) car sinon, on aurait x préfère a à a ce qui est absurde.

  (ii) $v = y$ alors $\rceil$ (v préfère a à x) car v dans ce cas préfère être avec son partenaire actuel plutôt que d'être avec a.

  - Si (2) est vérifiée alors z préfère u à a est impossible car a est le meilleur choix de z. D'où n'est pas une preuve d'instabilité. On conclut donc $M_2 = \{(a, x); (b, y); (a, z)\}$ est stable.

■

Remarque 2.2.2.

M_2 est une solution optimale pour les hommes ainsi que pour les femmes.
On peut aussi prouver(d'une manière analogue) que $M_3 = \{(a, x); (b, y); (b, z)\}$ est aussi une solution stable mais par contre elle n'est optimale que pour les hommes (car a est un homme possible de z qui est préféré à b).

Définition 2.2.1

On appelle appariement l'ensemble des m couples obtenus en mariant chaque homme avec au moins une femme.

Définition 2.2.2

Soit un problème de mariage stable entre n hommes de $\mathcal{H}$ et m femmes de $\mathcal{F}$, soit A un appariement pour ce problème, et soient $h_i \in \mathcal{H}$ et $f_j \in \mathcal{F}$. Le couple (h_i, f_j) est bloquant dans l'appariement A si :

(i) h_i et f_j ne sont pas mariés dans A.

(ii) h_i préfère f_j à au moins une de ses partenaires actuelles dans A.

(iii) f_j préfère h_i à son partenaire actuel dans A.

Définition 2.2.3 (Appariement stable)

Un appariement A est dit stable s'il ne contient aucun couple bloquant.

Remarque 2.2.3.

On peut constater d'après l'exemple 1, pour que toutes les femmes soient mariées, il est nécessaire que l'un des hommes (a ou b) se marie à deux femmes différentes. D'où la définition suivante :

Définition 2.2.4

On appelle quota d'un homme $h_i \in \mathcal{H}$, le nombre de femmes disponible pour cet homme et on le note q_{h_i}.

Exemple 2.2.2.

Reprenons les mariages obtenus de l'exemple 1 ;

$M_2 = \{(a, x); (b, y); (a, z)\}$ et $M_3 = \{(a, x); (b, y); (b, z)\}$. On a :

(i) Dans M_2, $q_a = 2$ et $q_b = 1$

(ii) Dans M_3, $q_a = 1$ et $q_b = 2$.

Remarque 2.2.4.

Pour un problème de mariage entre n hommes et m femmes sans membre célibataire on a la relation : $\sum_{i=1}^{n} q_{h_i} = m$

Théorème 2.2.5

Pour un problème de mariage entre n hommes et m femmes sans membres célibataires, il existe toujours au moins un couplage stable.

Preuve. On va donner une preuve constructive de l'existence d'un couplage stable. Il s'agit d'un algorithme itératif.

Algorithme de détermination d'une solution stable :

On note $\mathcal{H} = \{h_1, ...h_n\}$ et $\mathcal{F} = \{f_1, ...f_m\}$ et pour chaque homme $h_i \in \mathcal{H}$, on note q_{h_i} le quota de cet homme.

Etape 1 : Une femme prise au hasard fait sa proposition à l'homme qu'elle préfère le plus (le résultat final ne dépendra pas de l'ordre dans lequel la femme fait la proposition).

Etape 2 : L'homme retient provisoirement la proposition de cette femme.

Etape 2 : On recommence l'étape 1 avec une autre femme et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ait un conflit (lorsque le quota de l'homme en question est dépassé ; autrement dit lorsque h_i reçoit $q_{h_i} + 1$ propositions). Dans ce cas, on regarde toutes les propositions de ce dernier et on élimine la moins bien classée dans sa liste. Cette dernière femme n'est plus possible pour cet homme et est définitivement éliminée chez h_i et par suite elle fait une proposition à son second choix(où troisième si elle était affectée à son second choix et ainsi de suite).

Etape 4 : On itère à partir de l'étape 1 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucune modification.

Etape 5 : La solution est ainsi trouvée. ■

Exemple 2.2.3.

On considère $\mathcal{H} = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{F} = \{x, y, z, t, s\}$ avec $q_a = 2$; $q_b = 1$; $q_c = 2$ et les relations de préférences définies par :

$P_a : yzsxt$	$Q_x : abc$
$P_b : zxtsy$	$Q_y : bac$
$P_c : ytszx$	$Q_z : cba$
	$Q_t : bac$

$$Q_s : bac$$

Etape 1.

$x \longrightarrow a$

$y \longrightarrow b$

$z \longrightarrow c$

$t \longrightarrow b$

$s \longrightarrow b$

Ainsi b déborde car $q_b = 1$ et b reçoit 3 propositions ; on élimine les 2 moins bien classées : y et s. La situation finale de cette étape est donc :

$x \longrightarrow a$

y reste seule

$z \longrightarrow c$

$t \longrightarrow b$

s reste seule

Etape 2.

$x \longrightarrow a$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow c$

$t \longrightarrow b$

$s \longrightarrow a$

Ainsi, a est débordé car $q_a = 2$ et a reçoit 3 propositions ; on élimine la moins bien classée : x. La situation finale de cette étape est donc :

x reste seule

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow c$

$t \longrightarrow b$

$s \longrightarrow a$

Etape 3.

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow c$

$t \longrightarrow b$

$s \longrightarrow a$

Ainsi, b est débordé car $q_b = 1$ et b reçoit 2 propositions ; on élimine la moins bien classée : t.

La situation finale de cette étape est donc :

$x \longrightarrow a$

$y \longrightarrow b$

$z \longrightarrow c$

t reste seule

$s \longrightarrow b$

Etape 4.

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow c$

$t \longrightarrow a$

$s \longrightarrow a$

Ainsi a est débordé car $q_a = 2$ et a reçoit 3 propositions ; on élimine la moins bien classée : t.

La situation finale de cette étape est donc :

$x \longrightarrow a$

$y \longrightarrow b$

$z \longrightarrow c$

t reste seule

$s \longrightarrow a$

Etape 5.

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow a$

$z \longrightarrow c$

$t \longrightarrow c$

$s \longrightarrow a$

Aucun quota n'est débordé on aboutit donc à :

$M = \{(a, y); (a, s); (b, x); (c, z); (c, t)\}$. La solution obtenue est bien stable en effet,

(i) Chez l'homme a sont affectées y et s ; or z est mieux classée que s mais a été affectée chez c qu'elle préférait.

(ii) Chez l'homme b est affectée x ; or z est mieux classée que x mais a été affectée chez c qu'elle préférait.

(iii) Chez l'homme c sont affectées z et t ; or y est mieux classée qu'eux deux mais a été affectée à a qu'elle préférait ; s est mieux classée que z mais a été classée chez a qu'elle préférait . D'où le résultat établi.

Remarque 2.2.5. Pour le déroulement de cet algorithme deux options étaient envisageables :

- Soit privilégier le classement des femmes fait par les hommes pour que chaque homme récupère les femmes les mieux classées.
- Soit privilégier le classement des hommes fait par les femmes pour que chaque femme soit satisfaite (dans la mesure du possible).

Remarque 2.2.6.

La solution obtenue à la fin de l'algorithme est optimale pour les femmes (en supposant qu'elles font des propositions).

2.2.2. Mariages avec des femmes célibataires.

Dans cette section, nous supposons que chaque homme sera marié à exactement une femme mais que certaines femmes resteront des célibataires (puisque $card\mathcal{H} < card\mathcal{F}$). En d'autres termes, nous allons former un couplage A tel que $cardA = card\mathcal{H} = n$.

Exemple 2.2.4.

Considérons $\mathcal{H} = \{a, b\}$ et $\mathcal{F} = \{x, yz\}$ avec les profils :

$P_a : xyz$	$Q_x : ab$
$P_b : yxz$	$Q_y : ba$
	$Q_z : ab$

$P^H = (P_a, P_b)$ et $Q^F = (Q_x, Q_y, Q_z)$. Ainsi on peut former des couplages :
$A_1 = \{(a, y); (b, x)\}$; $A_2 = \{(a, x); (b, y)\}$ et $A_3 = \{(a, z); (b, y)\}$.

Définition 2.2.6

Un couple bloquant pour un problème de mariage entre n hommes et m femmes avec existence des femmes célibataires est un couple $(h, f) \in \mathcal{H} \times \mathcal{F}$ tel que :

(i) h et f ne sont pas mariés ensemble

(ii) h préfère être avec f plutôt que d'être avec sa partenaire actuelle

(iii) f préfère être avec h plutôt que d'être avec son partenaire actuel ou de rester célibataire.

On donne une définition équivalente de la stabilité du mariage.

Définition 2.2.7

Un mariage M est dit stable s'il n'existe aucun couple $(h, f) \in \mathcal{H} \times \mathcal{F}$ tel que (h, f) forme un couple bloquant.

Exemple 2.2.5.

Reprenons les mariages obtenus de l'exemple précédent

- A_1 n'est pas stable car (a, x) constitue un couple bloquant
- A_3 n'est pas stable car (a, x) constitue un couple bloquant
- A_2 est un couplage stable.

Prouvons la stabilité de A_2 :

Supposons qu'il existe $(h, f) \in \mathcal{H} \times \mathcal{F}$ tel que (h, f) forme un couple bloquant. Nécessairement $h \neq a$ car a est marié à son meilleur choix. Ainsi $h \in \mathcal{H} \backslash \{a\} = \{b\}$ donc $h = b$. Or b est aussi marié à son meilleur choix. Ceci contredit l'existence d'un tel couple d'où A_2 est stable.

Théorème 2.2.8

Pour un problème de mariage entre n hommes et m femmes, pour tout profil de préférence il existe toujours au moins un couplage stable avec $m - n$ femmes célibataires.

Preuve. Elle se fait de manière similaire que celle du théorème 2.2.5. ■

Proposition 2.2.1

L'algorithme se termine après n^2 étapes au maximum.

Lemme 2.2.2

On obtient toujours au moins une solution stable quelque en soit les proposants (hommes ou femmes).

Remarque 2.2.7.

Lorsque les femmes font des propositions et qu'une femme fait toutes ses propositions mais n'est retenue par aucun homme, alors elle est simplement retirée du processus du déroulement de l'algorithme et fera partie des $m - n$ femmes célibataires.

Proposition 2.2.3

L'algorithme construit l'unique couplage stable optimal pour les hommes lorsque ces derniers font des propositions.

Preuve. Existence :

On raisonne par l'absurde. Supposons que le couplage obtenu par l'algorithme ne soit pas optimal pour les hommes. Alors il existe au moins un homme qui s'est fait rejeté par une femme possible au cours de l'algorithme. Soit h le premier homme qui s'est fait rejeté par une femme possible f. On note h' l'homme pour lequel f a rejeté h ; on sait donc que f préfère h' à h. De plus comme f est possible pour h il existe un couple stable M pour lequel h et f sont en couple et h' est en couple avec f' (puisque chaque homme sera marié à exactement une femme). Donc f' est possible pour h' ; or h est le premier homme rejeté par une femme possible, donc h' n'a pas été rejeté par f' ainsi, il ne l'a pas encore rencontrée. Comme il rencontre les femmes par ordre de préférence, on en déduit que h' préfère f à f' ; ainsi le couplage pour lequel h et f sont en couple est non stable car (h', f) constitue dans ce cas un couple bloquant. D'où la contradiction. On en déduit que le couplage obtenu par l'algorithme est optimal pour les hommes.

Unicité :

On note par A le couplage obtenu de l'algorithme et on suppose qu'il existe un autre couplage stable K qui soit optimal pour les hommes. Alors il existe $(h, f) \in$ K tel que $(h, f) \notin$ A. Ainsi,h est en couple avec f' dans A (puisque chaque homme est marié à une unique femme). Puisque K est stable alors f est possible pour h de plus A étant optimal pour les hommes on déduit que h préfère f' à f ; or ceci contredit le fait que K soit optimal pour les hommes (puisque f' est possible pour h et non marié à h). Ceci prouve le résultat. ■

Exemple 2.2.6.

On considère $\mathcal{H} = \{a, b\}$ et $\mathcal{F} = \{x, y, z, t\}$ avec pour profils :

$P_a : xyzt$	$Q_x : ba$
$P_b : yxtz$	$Q_y : ab$
	$Q_z : ba$
	$Q_t : ab$

Par application de l'algorithme (lorsque les hommes font des propositions) on obtient :

$M_1 = \{(a, x); (b, y)\}$

Lorsque les femmes font des propositions, on obtient :

$M_2 = \{(a, y); (b, x)\}$.

2.3. Mariage stable avec liste incomplète.

Au chapitre précédent, pour la même la configuration de la liste incomplète nous avons supposé que l'ordre soit total pour les éléments d'un ensemble et partiel pour l'autre ; ici,nous généralisons cette condition en supposant que chaque élément ne classe qu'une partie de ceux de l'autre ensemble, seulement ceux qu'il juge acceptables. En voici un exemple :

Exemple 2.3.1. On considère $\mathcal{H} = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{F} = \{x, y, z, t, s\}$ avec pour profils :

$P_a : sxyt$	$Q_x : bca$
$P_b : ysxz$	$Q_y : cb$
$P_c : xtz$	$Q_z : ba$
	$Q_t : ab$
	$Q_s : c$

$P = (P_a, P_b, P_c)$ et $Q = (Q_x, Q_y, Q_z, Q_t, Q_s)$.

Définition 2.3.1

Un homme h est dit acceptable pour une femme f s'il apparait dans la liste de préférence de cette femme. Dans le cas contraire il est dit inacceptable.

De même, nous définissons une femme f est acceptable ou pas par un homme h.

Notation 2.3.1.

Pour faire simple, par la suite nous notons entre parenthèses sur la liste de chaque adhérent ceux de ses acceptables qui le jugent, lui inacceptables.

Exemple 2.3.2. en reprenant la configuration de l'exemple 2.3.1, on obtient :

$P_a : (s)xyt$	$Q_x : bca$
$P_b : y(s)xz$	$Q_y : (c)b$
$P_c : xtz$	$Q_z : b(a)$
	$Q_t : a(b)$
	$Q_s : (c)$

Nous voyons que s juge a inacceptable, de même b est inacceptable seul c est acceptable par cette dernière et à son tour elle est jugée inacceptable par c.

2.3.1. Mariages sans membres célibataires.

Dans cette section, nous supposons que chaque homme, chaque femme se trouve dans au moins un couple du mariage formé. Ceci dit, même si un homme (respectivement une femme) est jugé(e) inacceptable par une femme (respectivement un homme) ils peuvent néanmoins formé un couple. Pour que chaque homme, chaque femme se trouve marié à la fin nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.3.1

Toute femme inacceptable par un homme est en fait acceptable et occupe la dernière position dans sa liste de préférence.

On va supposer que les femmes font les propositions.

Remarque 2.3.1. Dans cette nouvelle configuration, il est possible de former un mariage entre un homme et une femme initialement jugée inacceptable ou l'inverse.

Remarque 2.3.2.

La définition de la stabilité reste inchangée ; de plus, le théorème 2.1 de Gale-Shapley reste valable(on adopte le même processus).

Exemple 2.3.3.

On reprend la configuration de l'exemple 2.8 et on définit $q_a = q_b = 2$ et $q_c = 1$.

$P_a : (s)xyt$ $\qquad$ $Q_x : bca$

$P_b : y(s)xz$ $\qquad$ $Q_y : (c)b$

$P_c : xtz$ $\qquad$ $Q_z : b(a)$

$Q_t : a(b)$

$Q_s : (c)$

$P = (P_a, P_b, P_c)$ et $Q = (Q_x, Q_y, Q_z, Q_t, Q_s)$. Nous allons rechercher un mariage stable par application du théorème de Gale-Shapley.

Etape 1.

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow c$

$z \longrightarrow b$

$t \longrightarrow a$

$s \longrightarrow c$

Ainsi, c est débordé car $q_c = 1$ et c reçoit deux propositions y et s ;puisque les deux occupent la même position dans la liste de préférence de c (la dernière) on décide arbitrairement d'affecté y à c. La situation finale de cette étape est donc :

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow c$

$z \longrightarrow b$

$t \longrightarrow a$

inacceptable s reste seule

Etape 2

$x \longrightarrow b$

$y \longrightarrow c$

$z \longrightarrow b$

$t \longrightarrow a$

$s \longrightarrow a$

On remarque que s classe dans la même position(dernière) a et b mais puisque le quota de b est atteint, alors s n'a d'autre choix que de se proposer à a.

On obtient donc $M = \{(a, t); (a, s); (b, x); (b, z); (c, y)\}$.

2.3.2. Mariages avec des femmes célibataires.

Dans cette partie, nous supposons que pour tout homme h, $q_h = 1$; mais puisque $card\mathcal{H} < card\mathcal{F}$, on aura exactement $m - n$ femmes célibataires.

Exemple 2.3.4. On reprend la configuration des profils de l'exemple 2.3.3 ; on peut ainsi former comme couplages :

$$M_1 = \{(a, s); (b, y); (c, x)\}\ M_2 = \{(a, t); (b, x); (c, y)\}\ M_3 = \{(a, t); (b, x); (c, s)\}\ M_4 = \{(a, z); (b, t); (c, x)\}.$$

Remarque 2.3.3. La notion de couplage stable ne change pas ; de plus, les hommes comme des femmes peuvent faire des propositions.

Exemple 2.3.5. M_1 est le couplage obtenu lorsque les hommes font des propositions ; M_2 et M_3 sont les couplages obtenus lorsque les femmes font des propositions.

Remarque 2.3.4.

En y ajoutant l'hypothèse que tout homme inacceptable est en fait acceptable et occupe la dernière position ; de même pour les femmes alors on reste dans le cas de la section 2.2.2 ; et le **théorème 2.2.5** reste valable.

Exemple 2.3.6.

M_1, M_2, M_3 sont tous stables et M_4 par contre est non stable car (a, t) constitue dans ce cas une preuve d'instabilité.

2.3.3. Mariages avec existence d'hommes et de femmes célibataires.

Ici, chaque adhérent ne classe qu'une partie de ceux (ou celles) de l'autre sexe, seulement ceux qu'il juge acceptables. On peut aussi considérer qu'il a classé tous ceux de l'autre sexe comme dans le cas des préférences complètes mais qu'il s'est également classé lui même en ce sens qu'il préfère les acceptables à lui même (c'est à dire à son célibat) mais qu'il préfère son célibat plutôt qu'à former un couple avec une inacceptable selon le schéma suivant :
h : $f_1 f_2 ... f_k h f'_1 f'_2 ... f'_l$ où $f_{i_{1\leq i\leq k}}$ sont les acceptable et $f'_{j_{1\leq j\leq l}}$ sont les inacceptables ; avec $k, l \in \mathbb{N}$ et $k + l = m$.

Définition 2.3.2

Une solution est une partition de l'ensemble des adhérents en k couples (h, f) et $m + n - 2k$ célibataires h et (ou) f où $k \leq min(m, n)$ (non nécessairement égal).

Ceux ou celles qui restent célibataires s'appellent les laissés pour compte de la solution.

Définition 2.3.3

Une solution est dite irrationnelle si elle contient un couple dont l'un des membres est jugé inacceptable par l'autre.

On rationalise une configuration de préférence en retirant sur la liste de chaque adhérent ceux de ses acceptables qui le jugent lui inacceptable (ceux qui se trouvent entre parenthèses).

Remarque 2.3.5.

La définition d'une solution instable ne change pas à cela près qu'un célibataire peut entrer dans une cause d'infidélité.

Exemple 2.3.7.

On reprend la configuration de préférence de l'exemple 2.3.3 :

$P_a : (s)xyt$	$Q_x : bca$
$P_b : y(s)xz$	$Q_y : (c)b$
$P_c : xtz$	$Q_z : b(a)$
	$Q_t : a(b)$
	$Q_s : (c)$

$P = (P_a, P_b, P_c)$ et $Q = (Q_x, Q_y, Q_z, Q_t, Q_s)$.
$M = \{(a, y); (b, z); (c, t)\}$ est une solution instable car (b, x) est une preuve d'instabilité.

Proposition 2.3.2

Toute solution irrationnelle est instable.

Preuve.

Soit S une solution irrationnelle ; alors, il existe (h, f) tel que $h \leq_f f$ ou $f \leq_h h$. SNALG, on suppose $f \leq_h h$ alors h est marié à une inacceptable et par suite (h, h) est une preuve d'instabilité car h préfère rester célibataire plutôt que de se mettre en couple avec f. ■

Théorème 2.3.4 (Gale et Shapley (1962))

Quelle que soit la configuration de préférences P, il existe au moins une solution stable pour P.

(Ce théorème est la forme généralisée de celle énoncé au chapitre un).

Preuve. (Elle se fait de manière analogue que celle du théorème de Gale- Shapley énoncé et prouvé au chapitre un). ■

Table 2.1 – tableau récapitulatif

Différents cas	Existence de mariage stable	Algorithme de détermination	Observation
Ordres totaux sans membre célibataires	oui	oui	l'algorithme ne détermine pas toutes les solutions stables
Ordres totaux avec possibilité de célibataires	oui	oui	l'algorithme ne détermine pas toutes les solutions
Ordres partiels sans membres célibataires	oui	oui	l'algorithme ne donne pas toutes les solutions stables
Ordre total sur un ensemble et partiel sur l'autre avec existence de femmes célibataires	non	R.A.S	R.A.S
Ordres partiels avec existence de femmes et d'hommes célibataires	oui	oui	l'algorithme ne détermine toutes les solutions stables

Chapitre Trois

APPLICATIONS CONCRÈTES DU PROBLÈME DES MARIAGES

Dans les deux premiers chapitres,nous avons présenté le problème des mariages stables dans les différents cas de figures (certes pas les seuls mais les plus fréquents) et avons résolu le problème d'existence et de détermination d'une solution (stable).Dans ce chapitre, nous allons passer à l'application concrète notamment sur :

i) l'affectation des enseignants à la sortie de l'ENS dans les différentes régions du pays.

ii) l'affectation des militaires à la sortie de L'EMIA dans les différents corps possibles de l'armée.

3.1. Affectation des enseignants.

On considère un échantillon de 7 étudiants de la filière mathématique du niveau 5 et on s'intéresse au classement de cinq des dix régions disponibles (car le travail est manuel et risque d'être pénible pour traiter avec les dix régions) par chaque étudiant.

les étudiants considérés ici sont :

1. ALIHOU
2. BIKAI
3. CHRISTIAN
4. DOUANLA
5. EBANDA
6. FOENING
7. GUBONG

Par suite, chaque étudiant à un classement sur les régions suivantes :

1. CENTRE (C)

2. LITTORAL (L)
3. ADAMAOUA (A)
4. NORD-OUEST (NO)
5. OUEST (O)

On considère le classement des étudiants par ordre de mérite à la fin de la formation suivant :

1^{er} GUBONG (E_1)

2^e DOUANLA (E_2)

3^e ALIHOU (E_3)

4^e EBANDA (E_4)

5^e FOENING (E_5)

6^e BIKAI (E_6)

7^e CRISTIAN (E_7)

On considère donc l'ensemble $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$ des étudians et l'ensemble $R = \{A, C, L, NO, O\}$ formés des régions.

Par suite, pour chaque région, le classement sur les étudiants est l'ordre de mérite. On a donc :
$P_A = P_C = P_L = P_{NO} = P_O = E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 - E_6 - E_7$.

On a en outre pour les étudiants le profil de preférence sur les régions suivantes :

Q_{E_1} : C-L-A-NO-O

Q_{E_2} : O-C-L-A-NO

Q_{E_3} : C-A-O-ON-L

Q_{E_4} : C-NO-A-L-O

Q_{E_5} : O-L-C-NO-A

Q_{E_6} : L-C-A-NO-O

Q_{E_7} : O-A-L-C-NO

On définit les quotas des régions suivantes :

$q_A = q_{NO} = 2$ et $q_O = q_C = q_L = 1$.

Nous allons rechercher les solutions (affectations) stables par application de l'algorithme de Gale et Shapley ; lorsqu'on privilégie le choix des étudiants et lorsque c'est celui des régions qui est privilégié.

3.1.1. Le choix des étudiants est prioritaire.

Par application de l'algorithme de Gale et Shapley, on a :

Étape 1

$E_1 \longrightarrow C$

$E_2 \longrightarrow O$

$E_3 \longrightarrow C$

$E_4 \longrightarrow C$

$E_5 \longrightarrow O$

$E_6 \longrightarrow L$

$E_7 \longrightarrow O$

Ainsi, on a :

i) 3 étudiants (E_1, E_3, E_4) désirent être affectés au Centre alors que cette région ne peut qu'en prendre un seul ; puisque E_1 est le mieux classé parmi les 3 alors, seule sa proposition est retenue.

ii) 3 étudiants (E_2, E_5, E_7) désirent être affecté à l'Ouest pourtant cette région ne peut qu'en prendre un seul ; puisque E_2 est le mieux classé parmi les 3, alors seule sa proposition est retenue.

La situation finale de cette étape est donc :

$E_1 \longrightarrow C$

$E_2 \longrightarrow O$

$E_3 \longrightarrow$ Reste seul

$E_4 \longrightarrow$ Reste seul

$E_5 \longrightarrow$ Reste seul

$E_6 \longrightarrow L$

$E_7 \longrightarrow$ Reste seul

Étape 2

$E_1 \longrightarrow C$

$E_2 \longrightarrow O$

$E_3 \longrightarrow A$

$E_4 \longrightarrow NO$

$E_5 \longrightarrow L$

$E_6 \longrightarrow L$

$E_7 \longrightarrow A$

Ainsi, deux étudiants désirent être affectés au Littoral (E_5, E_6) alors qu'une place est disponible ; E_5 étant le mieux classé, seule sa proposition est retenue. La situation finale de cette étape est donc :

$E_1 \longrightarrow C$

$E_2 \longrightarrow O$

$E_3 \longrightarrow A$

$E_4 \longrightarrow NO$

$E_5 \longrightarrow L$

$E_6 \longrightarrow$ Reste seul

$E_7 \longrightarrow A$

Étape 3

$E_1 \longrightarrow C$

$E_2 \longrightarrow O$

$E_3 \longrightarrow A$

$E_4 \longrightarrow NO$

$E_5 \longrightarrow L$

$E_6 \longrightarrow C$

$E_7 \longrightarrow A$

Ainsi, le quota de la région du Centre est de nouveau débordé (deux demandes pour une place disponible) ; alors, la demande de l'étudiant le moins bien classé est irrecevable. A la fin de cette étape, E_6 reste de nouveau sans affectation et passe à son prochain choix.

Étape 4

$E_1 \longrightarrow C$

$E_2 \longrightarrow O$

$E_3 \longrightarrow A$

$E_4 \longrightarrow NO$

$E_5 \longrightarrow L$

$E_6 \longrightarrow A$

$E_7 \longrightarrow A$

Ainsi, le quota de la région de l'Adamaoua est débordé (3 demandes pour deux places disponibles).Par suite, la demande de l'étudiant le moins bien classé des trois (E_7) est retiré. Et par la suite, E_7 passe à son prochain choix jusqu'à atteindre la dernière place disponible (NO) puisque étant l'étudiant le moins biens classé (dernier). On obtint ainsi à la dernière étape :

Étape finale

$E_1 \longrightarrow C$

$E_2 \longrightarrow O$

$E_3 \longrightarrow A$

$E_4 \longrightarrow NO$

$E_5 \longrightarrow L$

$E_6 \longrightarrow A$

$E_7 \longrightarrow NO$

Pour terminer :

GUBONG étant l'étudiant le mieux classé est affecté à sa région préférée (CENTRE).

DOUANLA est aussi affecté à son premier choix (OUEST) car le seul étudiant mieux classé que lui (GUBONG) préfère une autre région à laquelle il est affecté à cette dernière.

ALIHOU est affecté à son second choix (ADAMAOUA) car son premier choix a été occupé par un étudiant mieux classé que lui (GUBONG).

EBANDA est également affecté à son second choix (NORD-OUEST) car son premier choix a été occupé par un étudian mieux classé que lui (GUBONG).

FOENING est affecté à son second choix (LITTORAL) car son premier choix a été occupé par un étudiant mieux classé que lui (DOUANLA).

BIKAI est affecté à son troisième choix (ADAMAOUA) car ses deux premiers choix ont été occupés par des étudiants mieux classés que lui (FOENING pour le LITTORAL et GUBONG pour le CENTRE).

CHRISTIAN est affecté à son dernier choix car ses quatre premiers choix ont été occupés par des étudiants tous mieux classés que lui. Ainsi, lorsqu'on privilégie le choix des étudiants on obtient comme affectation stable :

ALIHOU $\longrightarrow$ ADAMAOUA

BIKAI $\longrightarrow$ ADAMAOUA

CHRISTIAN $\longrightarrow$ NORD OUEST

DOUANLA $\longrightarrow$ OUEST

EBANDA $\longrightarrow$ NORD OUEST

FOENING$\longrightarrow$ LITTORAL

GUBONG $\longrightarrow$ CENTRE

3.1.2. Le choix des régions est prioritaire :

Dans ce cas, lorsque le choix des régions est privilégié (les régions font des propositions) ; puisque les régions ont le même choix sur les étudiants alors chaque étudiant sera affecté dans la région qu'il préfère le plus parmi celles qui sont encore disponibles.

Nous illustrons ce résultat par l'application de l'algorithme de Gale et Shapley :

Étape 1

Toutes les régions vont faire la proposition à E_1 (meilleur choix à chacune des régions) et E_1 sera affecté à la position qui l'arrange le plus (CENTRE).

Étape 2

Les propositions se font de manière analogue qu'à l'étape 1 et seul E_2 sera affecté à son meilleur choix (OUEST).

Étape 3

A la fin de cette étape E_3 sera affecté à son meilleur choix encore disponible (ADAMAOUA).

Étape 4

E_4 sera affecté à son secnd choix (NORD OUEST).

Étape 5

E_5 sera affecté à son second choix (LITTORAL).

Étape 6

E_6 sera affecté à son troisième choix (ADAMAOUA).

Étape 7

E_7 sera affecté à son dernier choix (NORD OUEST).

A la fin, on obtient les mêmes affectations que lorsqu'on privilégie le choix des étudiants.

Remarque 3.1.1.

i) Ces résultats étaient prévisibles, puisque chaque étudiant classe toutes les régions ; et les régions ayant les mêmes ordres de préférences sur les étudiants, à chaque étape on retrouve le même étudiant sollicité par toutes les régions encore disponibles.

ii) Une région qui atteint son quota ne fait plus de proposition et donc un candidat moins bien classé que ceux qui y sont affectés à cette région ne pourra être affecté à cette dernière et fera son choix parmi les régions encore disponibles.

Remarque 3.1.2 (Comparaison entre ancien et nouveau système)**.** La différence entre le fait pour un étudiant de classer toutes les régions et de ne classer qu'un nombre fini d'entre elles (le plus souvent 3) est que lorsqu'il classe toutes les régions sa volonté est respectée au mieux que possible ce qui n'est toujours pas le cas lorsqu'il ne classe qu'un nombre restreint de régions.

Exemple 3.1.1. Prenons l'exemple de l'étudiant CHRISTIAN ; s'il avait pour profil de préférence :
OUEST-ADAMAOUA-LITTORAL .
Cette relation de préférence traduit le fait que s'il n'est affecté dans aucune des trois régions ci-dessus alors il est considéré comme étant indifférent d'être affecté dans n'importe quelles autres régions autre que ces trois et donc il pourrait être affecté au Nord alors que pour lui le Nord-ouest est meilleur choix que le Nord.

Remarque 3.1.3. Une étude menée auprès des responsables chargés de l'affectation des étudiants de l'Ecole Polytechnique de Yaoundé dans les différentes filières après le tronc commun (deuxième année) a montré que l'algorithme utilisé est exactement le même que celui décrit pour l'affectation des enseignants où les filières jouent le rôle des régions et on remarque bien que les filières ont, toutes, le même ordre de préférence sur les étudiants qui est le classement par ordre de mérite.

3.2. Affectation des millitaires de L'EMIA.

A la sortie de l'EMIA, les nouveaux officiers et sous-officiers sont affectés dans les différents corps de l'armée suivants : armée de l'air, marine, armée de terre, la gendarmerie, la garde présidentielle et les sapeurs pompiers.
Le processus d'affectation est pratiquement le même que celui utilisé pour l'affectation des enseignants à quelques différences près.
Les étudiants vont classer par ordre de préférences les différents corps et chaque corps à un quota bien défini. L'ordre de préférence des filières sur les étudiants ne change pas c'est encore l'ordre de mérite. La seule différence ici est que l'algorithme ne s'applique pas directement comme pour l'affectation des enseignants. On regroupe les étudiants par sous groupes de même nombre en suivant l'ordre du mérite (le premier groupe comprendra l'étudiant classé 1^{er} jusqu'à

l'étudiant classé 10^e, le second va du 11^e au 20^e et ainsi de suite) et on applique exactement le même algorithme que pour l'affectation des enseignants à chaque bloc des étudiants où l'ordre de préférence des corps dans chaque bloc est l'ordre du mérite (en considérant le second bloc par exemple, le 11^e est le premier de ce bloc ainsi de suite jusqu'au 20^e qui en est le 10^e). Un tel regroupement permet que chaque filière ait au moins un bon étudiant.

Exemple 3.2.1 (Application)**.** Nous allons appliquer le processus en considérant 10 étudiants $E_1, ..., E_{10}$ avec i = rang de l'étudiant ; et on considère les trois filières suivantes :

1. ARMÉE DE L'AIR (A)
2. MARINE (M)
3. ARMÉE DE TERRE (T)

avec les quotas définis suivants : $q_A = q_T = 4$ et $q_M = 2$.
Ainsi, on va scinder les étudiants en deux blocs :
$B_1 = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ et $B_2 = \{E_6, E_7, E_8, E_9, E_{10}\}$; et l'ensemble des filières est donné par : $F = \{A, M, T\}$ avec le profil de préférence suivant :

Q_{E_1} : M-A-T
Q_{E_2} : M-A-T
Q_{E_3} : A-M-T
Q_{E_4} : A-M-T
Q_{E_5} : M-T-A
Q_{E_6} : M-A-T
Q_{E_7} : T-M-A
Q_{E_8} : M-T-A
Q_{E_9} : T-A-M
$Q_{E_{10}}$: A-M-T

Par suite, pour chaque filière, le classement sur les étudiants est le suivant :
$P_A = P_M = P_T =: E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 - E_6 - E_7 - E_8 - E_9 - E_{10}$.

Phase 1 :On marie les élement de B_1 avec ceux de F.

Pour cette phase, les quotas sont définis par :$q_A = q_R = 2$ et $q_M = 1$.
Par application de l'algorithme de Gale et Shapley on a :

Étape 1

$E_1 \longrightarrow M$

$E_2 \longrightarrow M$

$E_3 \longrightarrow A$

$E_4 \longrightarrow A$

$E_5 \longrightarrow M$

Ainsi, trois étudiants (E_1, E_2, E_5) préfèrent la Marine alors que cette filière ne peut qu'en prendre un seul ; puisque E_1 est le mieux classé des trois, alors seule sa proposition sera retenue. La situation finale de cette étape est donc :

$E_1 \longrightarrow M$

$E_2 \longrightarrow$ reste seul

$E_3 \longrightarrow A$

$E_4 \longrightarrow A$

$E_5 \longrightarrow T$

Étape 2

$E_1 \longrightarrow M$

$E_2 \longrightarrow A$

$E_3 \longrightarrow A$

$E_4 \longrightarrow A$

$E_5 \longrightarrow T$

A la fin de cette étape, on se retrouve avec trois demandes pour l'armée de l'air (E_2, E_3, E_4) pour deux places disponibles ; par suite, la proposition de E_4 sera rejetée. Par suite, E_4 reste seul à la fin de cette étape et passe à son prochain choix.

Étape 3

$E_1 \longrightarrow M$

$E_2 \longrightarrow A$

$E_3 \longrightarrow A$

$E_4 \longrightarrow M$

$E_5 \longrightarrow T$

On se retrouve avec deux demandes pour la Marine (E_1, E_4) pour une place disponible ; puisque E_1 est le mieux classé, sa proposition sera retenue et E_4 passera à son prochain choix.

Étape 4

$E_1 \longrightarrow M$

$E_2 \longrightarrow A$

$E_3 \longrightarrow A$

$E_4 \longrightarrow T$

$E_5 \longrightarrow T$

Pour cette première phase, on obtient comme affectation stable :

L'étudiant E_1 affecté à la Marine

L'étudiant E_2 affecté à l'armée de l'air

L'étudiant E_3 affecté à l'armée de l'air

L'étudiant E_4 affecté à l'armée de terre

L'étudiant E_5 affecté à l'armée de terre

Phase 2 :On marie B_2 avec F.

Pour cette phase les quotas sont définis par :$q_A = q_R = 2$ et $q_M = 1$.

Par application de l'algorithme de Gale et Shapley, après trois étapes, on obtient comme affectations stables :

L'étudiant E_6 affecté à l'armée marine

L'étudiant E_7 affecté à l'armée de terre

L'étudiant E_8 affecté à l'armée de terre

L'étudiant E_9 affecté à l'armée de l'aire

L'étudiant E_{10} affecté à l'armée de l'aire

Remarque 3.2.1. E_2, de loin mieux classé que E_6 mais ce dernier à été affecté dans le corps préféré de E_2. Cette méthode garantit, à chaque corps, d'avoir au moins un des cinq premiers (lorsque le partage est fait par bloc de cinq).

Chapitre Quatre

IMPLICATION PÉDAGOGIQUE

Le présent travail nous a permis de faire nos premiers pas dans la recherche scientifique, la construction d'un raisonnement logique et l'utilisation des outils technologiques nécessaires dans cette nouvelle ère du numérique.

4.1. Apport sur le plan méthodique et pédagogique.

Le métier d'enseignant requiert beaucoup d'exigence. Dans le souci de mieux nous appliquer dans cet exercice, ce travail nous a permis de :

- Augmenter notre culture dans le domaine des mathématiques ; et de ce fait, nous donner une vision plus large des mathématiques que nous enseignerons aux lycées, en particulier.
- Accroitre notre aptitude à rédiger un compte rendu d'un travail.
- Consolider notre aptitude à mener un travail à la lumière des savoirs déjà construits (initiation à la recherche).
- Il nous donne une culture sur les applications que l'on peut faire des mathématiques (affectation des enseignants après leur formations) ; de ce fait, il nous aidera à donner des utilités concrètes que l'on peut faire des mathématiques afin de motiver nos apprenants.

  Par ailleurs, les élèves ayant des affinités entre eux, ce travail nous permettra aussi de :
- former des groupes d'études entre les élèves (pour le travail en groupe).
- choisir pour chaque élève, son(ses) voisin(s) du banc afin que chacun soit au mieux que possible satisfait de sa position dans la salle de classe.

4.2. Initiation à l'usage des nouvelles technologies de l'information et de la communication.

Pendant la rédaction de ce mémoire, nous avons eu à utiliser des outils des technologies de

l'information et de la communication ; il s'agit de :
micro-ordinateur, videoprojecteur, du logiciel **Latex**,ou encore d'Internet en général. L'emploi de ces outils informatiques peut nous aider à faire des recherches sur internet pour actualiser les contenus enseigner, à préparer nos cours, les actualiser, à saisir nos fiches des travaux dirigés et nos sujets d'examens pour une bonne clarté. Notons que l'usage du vidéoprojecteur peut permettre de mieux présenter une leçon.

✠ Conclusion ✠

Il était pour nous question d'étudier l'existence et si possible l'unicité d'une solution (stable) à un problème donné dit de mariage stable. Il en ressort que pour n'importe quelle configuration de préférence, il existe toujours au moins une solution stable dont la détermination peut être obtenue en appliquant l'algorithme de gale de Gale-Shapley. Cet algorithme donne, suivant la configuration des profils, deux solutions extrêmes (la plus optimale et la moins optimale) suivant qui fait des propositions. La questions d'unicité ne se pose donc pas. Vu que toute solution obtenue à partir de Gale-Sapley favorise une communauté (la plus optimale pour les proposants) tout en défavorisant l'autre communauté (la moins optimale pour les disposants), on s'intéresse donc à, comment à partir de Gale-Shapley, construire une méthode (algorithme) qui réduit les écarts de satisfaction entre les proposants et les disposants ; c'est-à-dire un algorithme qui fournit une solution non seulement stable mais aussi équitable (du point de vue de la satisfaction dans les deux communautés) ?

✠ Bibliographie ✠

[1] D. Gale et L. Shapley (1962). College admissions and the stability of marriage. American Mathematical Monthly, vol.69, p.9-14.

[2] D. Knuth (1976). Mariages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires. Edition revue et corrigé. Université de Montréal.

[3] D. Levine (2018). Introduction to the special issue in honor of Lloyd Shapley : Seven topics in game theory. Games Economic Behavior. https//doi.org/10.1016/j.geb.2018.05.001

[4] A. Roth et M. Sotomayor (1990). Two-Sided Matching : A study in Game Theoric Modeling and Analysis. London/New York : Cambridge University press.

[5] T. Sönmez (1997). Games of manipulation in mariage problems. p.169-176.

[6] Wikipédia (2017).https ://fr.wikipédia.org/wiki/problème des mariages stables. (vu : 21/12/2O17 ; 15 :49)