REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail – Patrie
****

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROUN
Peace – Work – Fatherland
****

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

STABILITE DES JEUX HEDONISTIQUES

Présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Professeur de l'Enseignement Secondaire deuxième grade
Mémoire de D.I.P.E.S II

Par :

NGUEFO TAKONGMO Amour
Licencié en mathématiques

Sous la direction
Pr TCHANTCHO Bertrand
Maitre de Conférences

Année Académique
2015-2016

♠ Dédicace ♠

À

Ma douce mère ***TSOPGUIM Odette*** *qui s'est donnée à fond pour ma réussite.*

♠ Remerciements ♠

Sans le soutien de plusieurs personnes, ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. A ces personnes, j'adresse mes sincères remerciements particulièrement :

- Au Dieu tout puissant qui ne cesse de me combler de ses multiples grâces et bénédictions depuis ma naissance ;
- Au Professeur **Bertrand TCHANTCHO** qui malgré ses multiples occupations a accepté de m'encadrer en faisant preuve d'une grande disponibilité ;
- A tous les enseignants du département de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé qui se dévouent pour notre formation ;
- Au Docteur **MOMO KENFACK Joseph Armel** pour la disponibilité et le soutien.
- A Monsieur **MBA DEFOSSO Gerry**, mon encadreur de stage en service au lycée bilingue de Nkol-Eton pour ses multiples conseils.
- A toute ma famille pour le soutien moral, matériel et financier qu'elle a consenti à faire jusqu'ici pour ma réussite académique.
- A **NGUIATCHUENG TOTIE Guilène Carole** pour son affection et ses encouragements.
- Je ne saurais terminer sans remercier mes camarades de la $55^{\text{ième}}$ promotion, particulièrement **SAFOKEM Adin** et **YOBUNG TATSI Corielle Sylvie** qui m'ont guidé pendant mes premiers pas dans Latex.

♠ Déclaration sur l'honneur ♠

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

NGUEFO TAKONGMO Amour

♠ Table des matières ♠

♠ Résumé ♠

Ce mémoire présente des concepts de stabilité d'un jeu hédonistique dans lequel la satisfaction d'un individu dépend uniquement de la coalition à laquelle il appartient (Banerjee *et al.* 2001)[7]. Nous détaillons quelques concepts classiques de stabilité tels que les partitions cœurs stables, Nash stables, individuellement stables et contractuellement individuellement stables tout en précisant des relations entre ces concepts (Bogomolnaia & Matthew 2002)[8]. En outre, nous avons énoncé quelques conditions d'existence de ces partitions. Par la suite, nous remarquons une « myopie » des joueurs dans ces solutions classiques (Diamantoudi & Xue 2003)[10] et avons introduit de nouvelles partitions « farsighted » stables qui y sont associées (où lorsqu'une personne voudra aller dans une autre coalition, il tiendra compte qu'après, une autre personne pourra faire de même et le mettre en difficulté). En plus, nous proposons une preuve d'existence d'un ensemble Nash « farsighted » stable. Enfin, nous montrons qu'avec les préférences strictes, les partitions cœur stables sont aussi « farsighted » stables, propriété qui reste vraie avec les partitions Nash stables mais fausse avec les partitions individuellement stables et contractuellement individuellement stables.

Mots-clés : jeu hédonistique ; coalition ; cœur stable ; Nash stable ; « farsighted » stable.

♠ Abstract ♠

This document shows stability concepts of hedonic games were each player's payoff depends solely on the composition of the coalition they belong to (Banerjee *et al.*2001)[7]. We first introduce classical stability concepts including core stability, Nash stability, individual stability and contractual individual stability without forget to show relation between these stability concepts (Bogomolnaia & Matthew 2002)[8]. We also give some conditions to guarentee the existence of these concepts. Given that these stability concepts may exibit the myopia on the part of players, we introduce the farsighted stability concepts in wich when a person moves to another coalition, he will consider the possibility that another person can do the same and makes it worse off (Diamantoudi & Xue 2003)[10]. We study the properties of the farsighted stability. In particular, we provide a proof for existence of Nash farsighted stability and then show that when preferences are stricts, coalitions strutures in the core are farsighted stable and a similar result also holds for Nash stability but not for individual stability and contractual individual stability.

Key words : hedonic game ; coalition ; core stability ; Nash stability ; farsighted stability.

♠ Liste des abréviations ♠

- vN-M : von Neumann et Morgenstern.
- C-FCSS : Coalitional Farsighted Conservative Stable Set.
- C-LFCSS : Coalitional Largest Farsighted Conservative Stable Set.
- N-FCSS : Nash Farsighted Conservative Stable Set.
- N-LFCSS : Nash Largest Farsighted Conservative Stable Set.
- I-FCSS : Individual Farsighted Conservative Stable Set.
- I-LFCSS : Individual Largest Farsighted Conservative Stable Set.
- CI-FCSS : Contractual Individual Farsighted Conservative Stable Set.
- CI-LFCSS : Contractual Individual Largest Farsighted Conservative Stable Set.

♠ Introduction ♠

Depuis la publication de von Neumann & Morgenstern (1944)[23], les coalitions occupent une place importante en théorie des jeux. Deux questions cruciales peuvent être posées : comment est-ce que des individus vont se regrouper ? comment partager le fruit de la coopération ? Puisque les biens obtenus dépendent des coalitions formées, Il est naturel de penser que l'on doit d'abord résoudre le problème de formation des coalitions avant celui de la répartition des coûts. Toutefois une coalition ne se formant que si chaque joueur maximise son gain, la formation d'une coalition dépend aussi de la répartition des gains qui en sera issue. L'idéal consistera donc à résoudre simultanément la formation des coalitions et la répartition des gains. Pour Maschler (1992)[17], cet idéal est loin d'être atteint. Cependant, Zhou (1994) [25] a fait un travail remarquable en réponse à ce double problème. Plusieurs auteurs dans la littérature se sont dévoués exclusivement au problème de la répartition des gains en supposant résolu le problème de formation des coalitions : Shapley (1953) [21], Gillies (1959) [14], Aumann & Maschler (1964) [2], Davis & Maschler (1967), Aumann & Drèze (1974) [3], Nowak & Radzik (1994) [19], Owen (1997) [20], Moyouwou *et al.* (2013)[18], Andjiga & Courtin (2015) [1], Diffo Lambo & Wambo (2015) [11]. En supposant le problème de répartition des gains résolu, nous allons rendre compte des réponses relatives au problème de la formation des coalitions. Les jeux de formation des coalitions ou jeux hédonistiques formalisés par Drèze & Greenberg (1980)[12], Banerjee *et al.* (2001)[7] sont des jeux dans lesquels la satisfaction qu'a un individu dépend seulement de la coalition à laquelle il appartient.

Le but de ce mémoire est de présenter les travaux de Bogomolnaia & Matthew (2002)[8], ainsi que ceux de Diamantoudi & Xue (2003)[10] qui traitent des partitions stables d'un jeu hédonistique. Nous rendons explicite leurs principaux résultats, nous apportons les preuves de quelques propriétés énoncées sans démonstration dans leurs documents (parce qu'évidentes pour le public à qui les travaux sont adressés).

En marge de ce compte rendu, nous nous servons des techniques utilisées par ces derniers pour apporter une preuve d'existence de l'ensemble Nash « farsighted » stable et large sous le conservatisme.

Notre travail contient trois chapitres. Le premier porte sur les généralités des jeux hédonistiques et les concepts classiques de stabilité : les partitions cœur stables dans lesquelles aucune coalition ne pourra améliorer sa satisfaction en se réunissant (Banerjee *et al.* 2001 [7], Bogomolnaia & Matthew 2002 [8]). Lorsque les coalitions sont de grandes tailles, la coordination des actions est pénible (cas où tous les professeurs d'un collège dans un village veulent une mutation pour aller en ville). Nous présenterons un autre concept de stabilité qu'est les partitions Nash stables. Dans une partition Nash stable, aucun individu ne pourra améliorer sa satisfaction en se déplaçant dans une autre coalition de la même partition (Bogomolnaia & Matthew 2002 [8]). Un tel déplacement peut être vu comme un censeur i qui souhaite quitter le lycée A pour le lycée B. Remarquons que l'arrivée de ce censeur i du lycée A peut nuire au censeur j du lycée B qui ne sera plus chef secrétariat au Baccalauréat. Puisque les partitions Nash stables ne tiennent pas compte du tord que peut causer ce censeur i au censeur j, on définit un autre concept de stabilité : les partitions individuellement stables qui puisent leurs origines sur l'équilibre individuellement stable introduit par Greenberg (1978)[13] et Drèze & Greenberg (1980)[12]. Une partition est individuellement stable si aucun individu ne pourra améliorer sa satisfaction en se déplaçant vers une autre coalition de la même partition sans nuire à un individu de ladite coalition (Bogomolnaia & Matthew 2002)[8]. Lorsqu'un professeur i souhaite quitter le lycée A pour le lycée B, même si le personnel du lycée B l'accepte, le départ de ce professeur qui enseigne très bien les mathématiques peut mettre en difficultés le lycée A qu'il laisse. Ainsi voit le jour les partitions contractuellement individuellement stables. Une partition est contractuellement individuellement stable si à chaque fois qu'un individu préfère rejoindre une autre coalition de la même partition, si les membres de cette coalition l'acceptent, cet individu mettra en difficulté un autre individu de la coalition qu'il laisse.

Le deuxième chapitre dans un premier temps compare les concepts classiques de stabilité : toute partition Nash stable est individuellement stable qui à son tour est contractuellement individuellement stable. En outre, nous énoncerons des conditions d'existence des partitions stables. Pour qu'un jeu ait une partition cœur stable, il suffit qu'il soit ordinairement balancé (Scarf 1967 [22], Greenberg 1994 [13], Bogomolnaia & Matthew 2002)[8]) ou qu'il soit consécutif (Banerjee *et al.* 2001 [7]) ou qu'il soit faiblement consécutif (Bogomolnaia & Matthew 2002)[8] ou qu'il soit essentiellement balancé, condition aussi nécessaire (Iehle 2005)[16] ou qu'il satisfasse la propriété du rangement commun ou que les préférences des joueurs soient anonymement neutres (Warut 2014)[24]. Pour qu'un jeu admette une partition Nash stable par suite individuellement et contractuellement individuellement stable, il suffit que les préférences des joueurs soient additivement séparables et symétriques (Bogomolnaia & Matthew 2002)[8] , condition affaiblie avec la neutralité par parties (Warut 2014)[24]. Une autre condition suffisante est que les préférences des joueurs soient anonymement neutres (Warut 2014)[24]. En plus, une partition individuellement stable et par suite contractuellement individuellement stable existe si le jeu satisfait l'ordre caractéristique (Bogomolnaia & Matthew 2002)[8] ou la propriété du rangement commun ou lorsque les préférences des joueurs sont anonymement neutres (Warut 2014)[24]. En outre, pour qu'un jeu admette une partition contractuellement individuellement stable, il suffit que les préférences des joueurs soient strictes (Bogomolnaia & Matthew 2002)[8]. D'autres travaux dans la littérature ont consisté à évaluer les complexités des différents algorithmes conduisant à ces partitions stables (Ballester 2004 [6], Aziz *et al.* 2010 [4], Aziz *et al.* 2014 [5]).

Enfin au troisième chapitre, puisque les concepts classiques de stabilité sont souvent muets ou présentent un défaut de rationalité observé dans les comportements myopes dans le sens où une coalition bloquante ignore qu'une autre coalition puisse se réunir et les mettre dans des difficultés, nous introduirons des concepts de stabilité « farsighted » liés à chacun des concepts classiques de stabilité et qui existent toujours (Harsanyi 1975 [15], Chwe 1994 [9], Diamantoudi & Xue 2003 [10]). Particulièrement, un apport du présent travail a consisté à montrer que l'ensemble Nash « farsighted » stable et large sous le conservatisme existe toujours. En outre, lorsque les préférences des joueurs sont strictes, nous montrerons que les partitions cœur stables sont aussi « farsighted » stables, résultat qui reste vrai avec les partitions Nash stables mais faux avec les partitions individuellement stables et contractuellement individuellement stables (Diamantoudi & Xue 2003 [10]).

Chapitre Un

Généralités et concepts classiques de stabilité

1.1 Généralités

Dans tout le document,

- N est un ensemble fini non vide désignant l'ensemble des joueurs. Son cardinal est n.
- 2^N représente l'ensemble des parties non vides de N. Ses éléments sont appelés coalitions.

1.1.1 Préférences individuelles

Définition 1.1.

Soient E et F deux ensembles non vides.

(i) On appelle relation binaire de E vers F toute partie R de $E \times F$.

(ii) Soient R une relation binaire de E vers F et $(a; b) \in E \times F$.

- *Lorsque $(a; b) \in R$, on dit que a est en relation avec b et on note aRb.*
- *Lorsque $(a; b) \notin R$, on dit que a n'est pas en relation avec b et on note $\neg(aRb)$.*
- *Lorsque $E = F$, on dit que R est une relation binaire sur E.*

Définition 1.2.

Une relation binaire R sur un ensemble E est dite :

(i) réflexive lorsque $\forall a \in E,\ aRa$

(ii) symétrique lorsque $\forall (a; b) \in E^2,\ aRb \Rightarrow bRa$

(iii) asymétrique lorsque $\forall (a; b) \in E^2,\ aRb \Rightarrow \neg(bRa)$

(iv) antisymétrique lorsque $\forall (a; b) \in E^2,\ (aRb \text{ et } bRa) \Rightarrow a = b$

(v) transitive lorsque $\forall (a; b; c) \in E^3,\ (aRb \text{ et } bRc) \Rightarrow aRc$

(vi) complète ou totale lorsque $\forall (a;b) \in E^2,\ aRb$ *ou* bRa

Les relations binaires seront utilisées pour modéliser les préférences des joueurs comme nous le verrons dans la définition ci-dessous.

Définition 1.3.
On appelle préférence d'un joueur $i \in N$*, toute relation binaire* $\succeq_i$ *qui est réflexive, transitive et totale sur l'ensemble* $\mathcal{S}(i)$ *où* $\mathcal{S}(i)$ *est l'ensemble des coalitions contenant le joueur* i*. Formellement, on a* $\mathcal{S}(i) = \{S \subseteq N \,/\, i \in S\}$*.*

Définition 1.4.
Soit $\succeq_i$ *une préférence d'un joueur* $i \in N$*.*

(i) On appelle partie stricte (ou asymétrique) de $\succeq_i$*, la relation notée* $\succ_i$ *et définie par :*

$$\forall (S;T) \in \mathcal{S}(i)^2,\ S \succ_i T \Leftrightarrow [S \succeq_i T\ et \neg(T \succeq_i S)]$$

(ii) L'indifférence de la relation $\succeq_i$ *est notée* $\sim_i$ *et définie par :*

$$\forall (S;T) \in \mathcal{S}(i)^2,\ S \sim_i T \Leftrightarrow [(S \succeq_i T)\ et\ (T \succeq_i S)]$$

On notera $S \succeq_i T$ *pour dire que le joueur* i *préfère (au moins autant) la coalition* S *à la coalition* T *et* $S \succ_i T$ *pour signifier que le joueur* i *préfère strictement la coalition* S *à la coalition* T*.*

Définition 1.5.
Un jeu hédonistique est un couple $\Big(N; (\succeq_i)_{i \in N}\Big)$ *où* N *est un ensemble fini non vide et* $(\succeq_i)_{i \in N}$ *un profil de préférences de chaque joueur* i *sur* $\mathcal{S}(i)$*.*

Exemples de jeux hédonistiques

Nous proposons quelques exemples de situations réelles pouvant être modélisées comme des jeux hédonistiques.

Exemple 1.1.1. (problème de colocation) (Diamantoudi E. *et al.* 2003) [10]
Trois étudiants vont participer à un séminaire dans une université. Pour réaliser des économies, ils décident de s'associer pour prendre des chambres à l'hôtel. Cependant, ils font face aux contraintes ci-après :

chacun préfère être en couple que d'être seul, et être seul que d'être avec les deux autres ;
le premier étudiant préfère être avec le deuxième qu'avec le troisième ;
le deuxième préfère être avec le troisième qu'avec le premier ;
le troisième préfère être avec le premier qu'avec le deuxième.

Au vue des ces exigences, on pourrait se poser la question de savoir quel regroupement vont-ils accepter de mettre en œuvre ?

Exemple 1.1.2. (« Tennessee Valley Authority »)
Pour lutter contre la grande dépression de 1929, le gouvernement des États-Unis a organisé une politique de grands travaux. Dans ce cadre est créé en 1930 la « Tennessee Valley Authority » qui a pour but d'aménager la vallée du fleuve Tennessee pour :

Projet 1 : améliorer la navigation dans le fleuve ;

Projet 2 : contrôler le débit en eau ;

Projet 3 : produire de l'énergie électrique.

Les financements de chaque projet étaient indépendants mais leurs réalisations pouvaient être communes. L'estimation des coûts (en millions de dollars) des projets était la suivante :
$c(1) = 163520; c(2) = 140826; c(3) = 250096; c(12) = 301607; c(13) = 378821;$
$c(23) = 367370; c(123) = 419584$ où $c(i)$ est le coût nécessaire à la réalisation du projet i, $c(ij)$ celui de la réalisation commune des projets i et j avec le même degré de satisfaction et $c(123)$ celui de la réalisation commune des 3 projets avec le même degré de satisfaction. La somme économisée est redistribuée de manière égalitaire.
Pourquoi la décision de réalisation commune des trois projets a-t-elle été unanime ?

Exemple 1.1.3. (problème de mariage)
On désire marier n hommes avec n femmes. Chaque individu ayant une préférence stricte sur tous les autres individus de sexe opposé.
Comment organiser ces mariages ?

1.1.2 Problématique

Etant donné un jeu hédonistique :

- Comment est-ce que tous les joueurs vont se regrouper ?
- Quelle(s) est (sont) la (les) « bonne(s) » partition(s) que les joueurs peuvent former ?
- Comment agréger les préférences individuelles des joueurs ?
- Comment transformer le plus fidèlement possible les préférences individuelles des joueurs en préférence(s) collective(s) ?

Pour répondre à ces interrogations, nous rendons compte des concepts suivants : partitions cœur stables, Nash stables, individuellement stables, contractuellement individuellement stables que nous allons critiquer et introduire de nouvelles partitions « farsighted » stables. Après ce compte rendu, nous procéderons à une étude comparative de ces concepts entre eux.

1.2 Concepts classiques de stabilité

1.2.1 Partitions cœur et Nash stables

Définition 1.6.

Soit $S_1; S_2; \ldots; S_k \in 2^N, \ 1 \leq k \leq n$. $P = \{S_1; S_2; \ldots; S_k\}$ *est une partition de* N *si :*

(i) $\forall i \in \{1; 2; \ldots; k\}$, $S_i \neq \emptyset$

(ii) $\forall i, j \in \{1; 2; \ldots; k\}$ *avec* $i \neq j$, $S_i \cap S_j = \emptyset$

(iii) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i = N$.

Notation 1.2.1.

(i) L'ensemble de toutes les partitions de N sera noté $\mathcal{P}$ dans tout le document.

(i) Si P est une partition de N, alors tout joueur i dans N appartient à une unique coalition S telle que $S \in P$. Cette coalition S sera notée $S_P(i)$.

Définition 1.7.

Soient P *une partition de* N *et* S *une coalition .*

(i) On dit que la coalition S *bloque la partition* P *ou encore que* S *est une coalition* $P-$*bloquante lorsque* $\forall i \in S$ *, on a :* $S \succ_i S_P(i)$.

(i) La partition P *est dite cœur stable lorsqu'il n'existe aucune coalition qui la bloque. C'est-à-dire* $\nexists T \in 2^N / \forall j \in T, \ T \succ_j S_P(j)$.

Interprétation :

Si une partition P est cœur stable, on ne pourra pas trouver dans cette partition des joueurs qui préfèrent strictement tous quitter les coalitions où ils étaient dans la partition P pour former ensemble une autre coalition S.

Exemple 1.2.1. Considérons le jeu hédonistique dans lequel l'ensemble des joueurs est $N = \{1; 2; 3\}$ et les préférences des joueurs sont :

$$\begin{array}{cccc} \{1;2\} \succ_1 & \{1\} \succ_1 & \{1;2;3\} \succ_1 & \{1;3\} \\ \{1;2\} \succ_2 & \{2\} \succ_2 & \{1;2;3\} \succ_2 & \{2;3\} \\ \{1;2;3\} \succ_3 & \{2;3\} \succ_3 & \{1;3\} \succ_3 & \{3\} \end{array}$$

Les partitions de N sont :

$P_1 = \Big\{\{1\}; \{2\}; \{3\}\Big\}$; $P_2 = \Big\{\{1;2\}; \{3\}\Big\}$; $P_3 = \Big\{\{1;3\}; \{2\}\Big\}$
$P_4 = \Big\{\{2;3\}; \{1\}\Big\}$; $P_5 = \Big\{\{1;2;3\}\Big\}$.

P_1 n'est pas cœur stable. En effet : $S_{P_1}(1) = \{1\}; S_{P_1}(2) = \{2\}$. Pour $S = \{1;2\}$; on a $S \succ_1 S_{P_1}(1)$ et $S \succ_2 S_{P_1}(2)$. S est une coalition P_1- bloquante et par conséquent, P_1 n'est pas cœur stable.

P_3 n'est pas cœur stable. En effet : $S_{P_3}(1) = \{1;3\}; S_{P_3}(2) = \{2\}$. Pour $S = \{1;2\}$; on a $S \succ_1 S_{P_3}(1)$ et $S \succ_2 S_{P_3}(2)$. S est une coalition P_3- bloquante et par conséquent, P_3 n'est pas cœur stable.

P_4 n'est pas cœur stable. En effet : $S_{P_4}(1) = \{1\}; S_{P_1}(2) = \{2;3\}$. Pour $S = \{1;2\}$; on a $S \succ_1 S_{P_4}(1)$ et $S \succ_2 S_{P_4}(2)$. S est une coalition P_4- bloquante et par conséquent, P_4 n'est pas cœur stable.

Pour la partition P_2, on a :

$$\neg\Big(\{1\} \succ_1 \{1;2\}\Big); \qquad \neg\Big(\{1\} \cup \{3\} \succ_1 \{1;2\}\Big);$$

$$\neg\Big(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \succ_1 \{1;2\}\Big); \qquad \neg\Big(\{2\} \succ_2 \{1;2\}\Big); \qquad \neg\Big(\{2\} \cup \{3\}\Big) \succ_2 \{1;2\}\Big)$$

Donc $P_2 = \Big\{\{1;2\};\{3\}\Big\}$ est la seule partition cœur stable de ce jeu.

Cependant, dans cette partition P_2, $\{3\} \cup \{1;2\} \succ_3 \{3\}$. Ce qui nous amène à définir un nouveau concept de solution :

Définition 1.8.

Une partition P est dite Nash stable si :

$$\nexists i \in N \textit{ et } S \in P \cup \{\emptyset\} / S \cup \{i\} \succ_i S_P(i)$$

Interprétation :

Dire qu'une partition P est Nash stable revient à dire qu'aucun joueur n'a intérêt à laisser la coalition dans laquelle il appartenait dans P pour rejoindre une autre coalition ou former seul sa coalition.

Exemple 1.2.2. En reprenant l'exemple précédant, la partition P_2 qui est cœur stable n'est pas Nash stable car : $\{3\} \cup \{1;2\} \succ_3 \{3\}$.

Si une partition n'est pas Nash stable parce qu'un joueur préfère strictement rejoindre une autre coalition S, on ne demande pas (à tord) l'accord des membres de ladite coalition. Ceci nous conduit à une autre stabilité :

1.2.2 Partitions individuellement et contractuellement individuellement stables

Définition 1.9.

Une partition P est dite individuellement stable si :

$$\nexists i \in N \textit{ et } S \in P \cup \{\emptyset\} / \left\{ \begin{array}{lll} S \cup \{i\} & \succ_i & S_P(i) \\ S \cup \{i\} & \succeq_j & S, \, \forall j \in S \end{array} \right.$$

Interprétation :

Dire qu'une partition est individuellement stable revient à dire qu'on ne peut trouver un joueur qui préfère strictement rejoindre une autre coalition S dans cette partition (éventuellement être seul) par rapport à sa coalition initiale, sans que l'arrivée de ce joueur ne nuise à au moins un joueur de S.

Dans la stabilité individuelle, même si les membres d'une coalition acceptent un nouveau joueur, on a négligé le mal que peut causer ce joueur aux autres membres de la coalition qu'il laisse. C'est pour cela qu'on définit un autre concept de stabilité :

Définition 1.10.

Une partition P est dite contractuellement individuellement stable si :

$$\nexists i \in N \textit{ et } S \in P \cup \{\emptyset\} / \left\{ \begin{array}{lll} S \cup \{i\} & \succ_i & S_P(i) \\ S \cup \{i\} & \succeq_j & S, \, \forall j \in S \\ S_P(i) \backslash \{i\} & \succeq_k & S_P(i), \, \forall k \in S_P(i) \backslash \{i\} \end{array} \right.$$

Interprétation :

Dire qu'une partition est contractuellement individuellement stable revient à dire que si un joueur préfère strictement rejoindre une autre coalition S dans cette partition (éventuellement être seul) par rapport à sa coalition initiale, alors son arrivée va nuire à au moins un joueur de S ou son départ va nuire à au moins un joueur qu'il a laissé.

Chapitre Deux

Existence des concepts classiques de stabilité

2.1 Comparaison des concepts classiques de stabilité

Nous avons défini quatre concepts de solutions sur un jeu hédonistique. Existe-t-il de relation entre ces quatre concepts ?

2.1.1 Partitions Nash stables et partitions individuellement stables

Propriété 2.1.

(i) Si un jeu hédonistique admet une partition Nash stable, alors cette partition est aussi individuellement stable.

(ii) La réciproque est fausse.

Preuve.

(i) Considérons un jeu hédonistique $\Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ et P une partition qui ne soit pas individuellement stable puis, montrons que P n'est pas Nash stable. Puisque P n'est pas individuellement stable, alors :

$$\exists i \in N \quad et \quad S \in P \cup \{\emptyset\} \quad / \quad \begin{cases} S \cup \{i\} & \succ_i \quad S_P(i) \\ S \cup \{i\} & \succeq_j \quad S,\ \forall j \in S \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\exists i \in N \quad et \quad S \in P \cup \{\emptyset\} \quad / \quad S \cup \{i\} \succ_i S_P(i).$$

Ainsi, P n'est pas Nash stable.

En prenant la contraposée, on obtient : si une partition P est Nash stable, alors cette même partition P est aussi individuellement stable.

(ii) On va construire un jeu hédonistique admettant une partition individuellement stable qui n'est pas Nash stable.

Considérons $N = \{1;2;3\}$ avec les préférences :

$$\begin{array}{cccc}\{1;2\} \succ_1 & \{1\} \succ_1 & \{1;2;3\} \succ_1 & \{1;3\} \\ \{1;2\} \succ_2 & \{2\} \succ_2 & \{1;2;3\} \succ_2 & \{2;3\} \\ \{1;2;3\} \succ_3 & \{2;3\} \succ_3 & \{1;3\} \succ_3 & \{3\}\end{array}$$

Les partitions de N sont :

$P_1 = \Big\{\{1\};\{2\};\{3\}\Big\}$; $P_2 = \Big\{\{1;2\};\{3\}\Big\}$; $P_3 = \Big\{\{1;3\};\{2\}\Big\}$

$P_4 = \Big\{\{2;3\};\{1\}\Big\}$; $P_5 = \Big\{\{1;2;3\}\Big\}$.

P_2 est individuellement stable. En effet :

Soient $i \in N$ et $S \in P_2 \cup \{\emptyset\}$: $S \cup \{i\} \succ_i S_P(i)$. Ceci impose en observant les préférences que $i \neq 1$ $\Big($ car $\forall T \in \mathcal{S}(1),\ \neg(T \succ_1 \{1;2\})\Big)$ et $i \neq 2$ $\Big($ car $\forall T \in \mathcal{S}(2),\ \neg(T \succ_2 \{1;2\})\Big)$. Ainsi, $i = 3$ et puisque $\neg\Big(\{3\} \succ_3 \{3\}\Big)$, alors $S = \{1;2\}$. On a $1 \in \{1;2\}$, mais $\neg\big(\{1;2\} \cup \{3\} \succeq_1 \{1;2\}\big)$. Par suite, P_2 est individuellement stable.

Cependant, dans cette partition P_2, $\{3\} \cup \{1;2\} \succ_3 \{3\}$. Donc P_2 n'est pas Nash stable.

On a alors un jeu qui admet une partition individuellement stable mais qui n'est pas Nash stable.

■

Propriété 2.2.

(i) Si un jeu hédonistique admet une partition individuellement stable, alors cette partition est aussi contractuellement individuellement stable.

(ii) La réciproque est fausse.

Preuve.

(i) Considérons un jeu hédonistique $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ et P une partition qui ne soit pas contractuellement individuellement stable puis, montrons que P n'est pas individuellement stable.

Puisque P n'est pas contractuellement individuellement stable, alors :

$$\exists i \in N \quad et \quad S \in P \cup \{\emptyset\} \quad / \quad \begin{cases} S \cup \{i\} & \succ_i \quad S_P(i) \\ S \cup \{i\} & \succeq_j \quad S, \ \forall j \in S \\ S_P(i) \backslash \{i\} & \succeq_k \quad S_P(i), \ \forall k \in S_P(i) \backslash \{i\}. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists i \in N \quad et \quad S \in P \cup \{\emptyset\} \quad / \quad \begin{cases} S \cup \{i\} \ \succ_i \ S_P(i) \\ S \cup \{i\} \ \succeq_j \ S, \ \forall j \in S \end{cases}$$

Ainsi, P n'est pas individuellement stable.

En prenant la contraposée, on obtient : si une partition P est individuellement stable, alors cette même partition P est aussi contractuellement individuellement stable.

(ii) On va construire un jeu hédonistique admettant une partition contractuellement individuellement stable qui n'est pas individuellement stable.

Le jeu de l'**exemple 1.1.1.** peut être modélisé par un jeu hédonistique dans lequel $N = \{1; 2; 3\}$ est l'ensemble des joueurs avec les préférences :

$$\begin{array}{cccc} \{1;2\} \succ_1 & \{1;3\} \succ_1 & \{1\} \succ_1 & \{1;2;3\} \\ \{2;3\} \succ_2 & \{1;2\} \succ_2 & \{2\} \succ_2 & \{1;2;3\} \\ \{1;3\} \succ_3 & \{2;3\} \succ_3 & \{3\} \succ_3 & \{1;2;3\} \end{array}$$

La partition $P = \Big\{\{2;3\};\{1\}\Big\}$ est contractuellement individuellement stable. En effet : Soient $i \in N$ et $S \in P \cup \{\emptyset\}$: $S \cup \{i\} \succ_i S_P(i)$ et $S \cup \{i\} \succeq_j S_P(j) \quad \forall j \in S \cup \{i\}$. Ceci impose en observant les préférences que $i \neq 1$ $\Bigg($ car $\neg(\{2;3\} \cup \{1\} \succ_1 \{1\})$ $\Bigg)$ et $i \neq 2$ $\Bigg($ car $\forall T \in \mathcal{S}(2), \ \neg(T \succ_2 \{2;3\})\Bigg)$. Ainsi, $i = 3, \ S_P(i) = \{2;3\}$ et $S = \{1\}$. On a $2 \in \{2;3\} \backslash \{3\}$, mais $\neg\big(\{2;3\} \backslash \{3\} \succeq_2 \{2;3\}\big)$. Par suite, P est contractuellement individuellement stable.

Cependant, dans cette partition P, $\{3\} \cup \{1\} \succ_3 \{2;3\}$ et $\{3\} \cup \{1\} \succeq_1 \{1\}$. Donc P n'est pas individuellement stable.

On a alors un jeu qui admet une partition contractuellement individuellement stable mais qui n'est pas individuellement stable.

■

2.1.2 Partitions cœur stables et partitions contractuellement individuellement stables

Propriété 2.3.

Si un jeu hédonistique admet une partition cœur stable, alors cette partition n'est pas nécessai-

rement contractuellement individuellement stable, ni nécessairement individuellement stable, ni nécessairement Nash stable.

Preuve.

On va construire un jeu hédonistique admettant une partition cœur stable qui n'est pas contractuellement individuellement stable. Considérons $N = \{1;2;3\}$ avec les préférences :

$$\begin{array}{llll} \{1;2\} \sim_1 & \{1;3\} \sim_1 & \{1;2;3\} \succ_1 & \{1\} \\ \{2;3\} \sim_2 & \{1;2\} \sim_2 & \{1;2;3\} \succ_2 & \{2\} \\ \{1;3\} \sim_3 & \{2;3\} \sim_3 & \{1;2;3\} \succ_3 & \{3\} \end{array}$$

La partition $P = \Big\{\{1;2\};\{3\}\Big\}$ est cœur stable sinon, il existerait une coalition S qui bloque cette partition P. En observant les préférences, on voit que ni le joueur 1 ni le joueur 2 ne préfère strictement une coalition que la coalition $\{1;2\}$ où ils se trouvent. D'où $1 \notin S$ et $2 \notin S$. Ainsi, $S = \{3\}$. Puisque $S_P(3) = \{3\}$ et que S bloque P, on devrait avoir $\{3\} \succ_3 \{3\}$. ce qui est impossible.

Cependant, cette partition n'est pas contractuellement individuellement stable car

$\{1;2\} \cup \{3\} \succ_3 \{3\};\ \{1;2\} \cup \{3\} \succeq_1 \{1;2\};\ \{1;2\} \cup \{3\} \succeq_2 \{1;2\}$

$\forall i \in \{3\} \backslash \{3\},\ \{3\} \backslash \{3\} \succeq_i \{3\}$.

On a un jeu qui admet une partition cœur stable mais qui n'est pas contractuellement individuellement sable et par suite, qui n'est pas individuellement stable et qui n'est pas Nash stable. ■

Propriété 2.4.

Si un jeu hédonistique admet une partition Nash stable ou individuellement stable ou contractuellement individuellement stable, alors cette partition n'est pas nécessairement cœur stable.

Preuve.

On va construire un jeu hédonistique admettant une partition Nash stable qui n'est pas cœur stable. Considérons $N = \{1;2;3\}$ avec les préférences :

$$\begin{array}{llll} \{1;2\} \succ_1 & \{1;3\} \succ_1 & \{1;2;3\} \succ_1 & \{1\} \\ \{2;3\} \succ_2 & \{1;2\} \succ_2 & \{1;2;3\} \succ_2 & \{2\} \\ \{1;3\} \succ_3 & \{2;3\} \succ_3 & \{1;2;3\} \succ_3 & \{3\} \end{array}$$

La partition $P = \Big\{\{1;2;3\}\Big\}$ est Nash stable et par suite, individuellement et contractuellement individuellement stable. En effet : $\forall i \in \{1;2;3\}, \neg\big(\{i\} \succ_i \{1;2;3\}\big)$.

Cependant, $\{1;2\}$ bloque cette partition P et ainsi, P n'est pas cœur stble.

On a un jeu qui admet une partition Nash stable et par suite, individuellement stable puis contractuellement individuellement stable mais qui n'est pas cœur stable. ■

2.2 Condition nécessaire et/ou suffisante d'existence de partitions stables

Nous avons vu qu'une partition stable peut ne pas exister. Lorsque les préférences des joueurs satisfont certaines propriétés, l'existence de ces partitions stables peut être garantie. Dans cette section, nous allons énoncer des conditions d'existence de partitions stables.

2.2.1 Propriétés particulières d'un jeu hédonistique

Partition individuellement rationnelle

Soit $\Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique.

Définition 2.1.

(i) Une partition P est individuellement rationnelle pour un joueur i lorsque $S_P(i) \succeq_i \{i\}$.

(ii) Une partition P est individuellement rationnelle si elle l'est pour tout joueur $i \in N$.

Exemple 2.2.1. $N = \{1; 2; 3\}$ avec les préférences :

$$\begin{array}{llll} \{1;2\} \succ_1 & \{1;3\} \succ_1 & \{1;2;3\} \succ_1 & \{1\} \\ \{2;3\} \succ_2 & \{1;2\} \succ_2 & \{1;2;3\} \succ_2 & \{2\} \\ \{1;3\} \succ_3 & \{2;3\} \succ_3 & \{1;2;3\} \succ_3 & \{3\} \end{array}$$

Toutes les partitions de ce jeu sont individuellement rationnelles.

Exemple 2.2.2. $N = \{1; 2; 3\}$ avec les préférences :

$$\begin{array}{llll} \{1\} \succ_1 & \{1;3\} \succ_1 & \{1;2;3\} \succ_1 & \{1;2\} \\ \{2\} \succ_2 & \{1;2\} \succ_2 & \{1;2;3\} \succ_2 & \{2;3\} \\ \{3\} \succ_3 & \{2;3\} \succ_3 & \{1;2;3\} \succ_3 & \{1;3\} \end{array}$$

Seule la partition $\Big\{\{1\}; \{2\}; \{3\}\Big\}$ de ce jeu est individuellement rationnelle.

Définition 2.2.

(i) Une famille β de coalitions de N est dite balancée si

$$\forall S \in \beta, \exists X_S \geq 0 : \left(\forall i \in N, \sum_{S\in\beta, i\in S} X_S = 1\right).$$

Les X_S sont appelés coefficients de balancement.

(ii) Un jeu est dit ordinairement balancé si de toute famille balancée β, il existe une partition P vérifiant $\forall i \in N, \exists S \in \beta : i \in S$ et $S_P(i) \succeq_i S$

Exemple 2.2.3. Toute partition P de N est une famille balancée avec $X_S = 1, \forall S \in P$

Exemple 2.2.4. $N = \{1;2;3\}$
$\beta_1 = \big\{\{1;2\};\{1;3\};\{2;3\}\big\}$ est une famille balancée avec $X_S = \dfrac{1}{2}, \forall S \in \beta_1$
$\beta_2 = \big\{\{1\};\{2;3\};\{1;3\}\big\}$ est une famille balancée avec $X_{\{1\}} = X_{\{2;3\}} = 1;\ X_{\{1;3\}} = 0$
$\beta_3 = \big\{\{1;2\};\{2;3\}\big\}$ n'est pas une famille balancée sinon on devrait avoir :

$$\begin{cases} & X_{\{1;2\}} & = 1 \\ X_{\{1;2\}} & +X_{\{2;3\}} & = 1 \\ & X_{\{2;3\}} & = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X_{\{1;2\}} & = & 1 \\ X_{\{2;3\}} & = & 0 \\ X_{\{2;3\}} & = & 1 \end{cases} \text{ ce qui est impossible.}$$

Définition 2.3.

(i) Un classement des joueurs est une permutation f de N.

(ii) Une coalition S est dite consécutive par rapport à un classement f lorsque :

$$\forall i,j,k \in N, \quad \begin{cases} f(i) < & f(j) < & f(k) \\ & i,k \in S & \end{cases} \Longrightarrow \quad j \in S.$$

(iii) Une partition P est dite consécutive par rapport à un classement f si $\forall S \in P, S$ est consécutive par rapport à f.

Définition 2.4.

(i) Un jeu $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ est faiblement consécutif s'il existe un classement de joueurs f tel qu'à chaque fois qu'une coalition S bloque une partition P, il existe une coalition T consécutive par rapport au classement f qui bloque P.

(ii) Un jeu $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ est consécutif s'il existe un classement de joueurs f tel que :
$\forall S \subset N,\ \exists i \in S : S \succ_i \{i\} \Rightarrow$ S est consécutive par rapport à f.

Définition 2.5.

(i) Les préférences d'un joueur i sont dites additivement séparables s'il existe une fonction d'utilité $v_i : N \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall S,T \in 2^N : i \in S \cap T$, on a :

$$S \succeq_i T \Longleftrightarrow \sum_{j\in S} v_i(j) \geq \sum_{j\in T} v_i(j). \textit{ Par convention, } v_i(i) = 0\ \forall i \in N.$$

(ii) Un profil de préférences additivement séparables représenté par $(v_1;v_2;...;v_n)$ satisfait :
– la mutualité si $\forall i,j \in N, v_i(j) = 0 \Rightarrow v_j(i) = 0$
– la symétrie si $\forall i,j \in N, v_i(j) = v_j(i)$. La symétrie implique donc la mutualité.

(iii) Les préférences d'un joueur i satisfont l'anonymat si $\forall S,T \in 2^N : i \in S \cap T$, on a $\mid S \mid = \mid T \mid \Rightarrow S \sim_i T$

Interprétation

– Lorsque Les préférences d'un joueur i sont **additivement séparables**, i qui attribut un « poids » à chaque joueur $j \in N \setminus \{i\}$ préfère S à T si la somme des poids attribués à chaque joueur dans S dépasse celle dans T.
– L'**anonymat** stipule que tout joueur i est indifférent aux coalitions de même taille.

Exemple 2.2.5.

Considérons le jeu suivant dans lequel $N = \{1;2;3\}$ avec les préférences suivantes :

$$\begin{array}{cccc} \{1;2\} \succ_1 & \{1;2;3\} \succ_1 & \{1\} \succ_1 & \{1;3\} \\ \{1;2;3\} \succ_2 & \{2;3\} \succ_2 & \{1;2\} \succ_2 & \{2\} \\ \{2;3\} \succ_3 & \{3\} \succ_3 & \{1;2;3\} \succ_3 & \{1;3\} \end{array}$$

Les profils de préférences des joueurs du jeu ci-dessus sont additivement séparables .

En effet : en prenant les fonctions d'utilité $(v_i)_{i \in N}$ définies par :

$v_1(2) = v_2(3) = 2; v_2(1) = v_3(2) = 1; v_1(3) = -1; v_3(1) = -2; v_i(i) = 0 \ \forall i \in N$, on a : $\sum\limits_{j\in\{1;2\}} v_1(j) = v_1(1) + v_1(2) = 0 + 2 = 2;$ $\sum\limits_{j\in\{1;2;3\}} v_1(j) = v_1(1) + v_1(2) + v_1(3) = 0 + 2 - 1 = 1;$ $\sum\limits_{j\in\{1\}} v_1(j) = v_1(1) = 0;$ $\sum\limits_{j\in\{1;3\}} v_1(j) = v_1(1) + v_1(3) = 0 - 1 = -1.$

Puisque $2 > 1 > 0 > -1$, alors $\{1;2\} \succ_1 \{1;2;3\} \succ_1 \{1\} \succ_1 \{1;3\}$.

$\sum\limits_{j\in\{1;2;3\}} v_2(j) = v_2(1) + v_2(2) + v_2(3) = 1 + 0 + 2 = 3;$ $\sum\limits_{j\in\{2;3\}} v_2(j) = v_2(2) + v_2(3) = 0 + 2 = 2;$ $\sum\limits_{j\in\{1;2\}} v_2(j) = v_2(1) + v_2(2) = 1 + 0 = 1;$ $\sum\limits_{j\in\{2\}} v_2(j) = v_2(2) = 0.$

Puisque $3 > 2 > 1 > 0$, alors $\{1;2;3\} \succ_2 \{2;3\} \succ_2 \{1;2\} \succ_2 \{2\}$.

$\sum\limits_{j\in\{2;3\}} v_3(j) = v_3(2) + v_3(3) = 1 + 0 = 1;$ $\sum\limits_{j\in\{3\}} v_3(j) = v_3(3) = 0;$ $\sum\limits_{j\in\{1;2;3\}} v_3(j) = v_3(1) + v_3(2) + v_3(3) = -2 + 1 + 0 = -1;$ $\sum\limits_{j\in\{1;3\}} v_3(j) = v_3(1) + v_3(3) = -2 + 0 = -2.$

Puisque $1 > 0 > -1 > -2$, alors $\{2;3\} \succ_3 \{3\} \succ_3 \{1;2;3\} \succ_3 \{1;3\}$. On a alors

$$\begin{array}{cccc} \{1;2\} \succ_1 & \{1;2;3\} \succ_1 & \{1\} \succ_1 & \{1;3\} \\ \{1;2;3\} \succ_2 & \{2;3\} \succ_2 & \{1;2\} \succ_2 & \{2\} \\ \{2;3\} \succ_3 & \{3\} \succ_3 & \{1;2;3\} \succ_3 & \{1;3\} \end{array}$$

Ainsi, les profils de préférences des joueurs du jeu ci-dessus sont additivement séparables et ce profil de préférences additivement séparable n'est pas symétrique car $v_1(2) = 2 \neq 1 = v_2(1)$.

Exemple 2.2.6.

Considérons le jeu suivant dans lequel $N = \{1;2;3\}$ et les profils de préférences des joueurs donnés par :

$$\begin{array}{cccc} \{1;3\} \succ_1 & \{1\} \succ_1 & \{1;2\} \succ_1 & \{1;2;3\} \\ \{1;2;3\} \succ_2 & \{2;3\} \succ_2 & \{1;2\} \succ_2 & \{2\} \\ \{2;3\} \succ_3 & \{3\} \succ_3 & \{1;2;3\} \succ_3 & \{1;3\} \end{array}$$

Les profils de préférences des joueurs du jeu ci-dessus ne sont pas additivement séparables. En effet : puisque $\{1;3\} \succ_1 \{1\}$ et $\{1;2\} \succ_1 \{1;2;3\}$, si les préférences étaient additivement séparables, il existerait une application $v_1 : N \longrightarrow \mathbb{R}$ |
$\begin{cases} v_1(1)+v_1(3) & > v_1(1) \\ v_1(1)+v_1(2) & > v_1(1)+v_1(2)+v_1(3) \end{cases}$ $\Rightarrow v_1(3) > 0 > v_1(3)$, ce qui est impossible.

En outre, les préférences du joueur 1 ne sont pas anonymes car :
$\mid \{1;3\} \mid = \mid \{1;2\} \mid$ mais $\neg\Big(\{1;3\} \sim_1 \{1;2\}\Big)$.

Définition 2.6.

(i) Une partiiton P est dite faiblement pareto efficiente si pour toute partition $P' \neq P, \exists i \in N : S_P(i) \neq S'_P(i)$ et $S_P(i) \succeq_i S_{P'}(i)$.

(ii) Une partition P' pareto domine une partition P lorsque $\begin{cases} \forall i \in N, & S_{P'}(i) & \succeq_i & S_P(i) \\ \exists j \in N : & S_{P'}(j) & \succ_j & S_P(j) \end{cases}$

(iii) Une partiiton P est dite pareto efficiente ou pareto optimale s'il n'existe aucune partition qui la pareto domine.

Définition 2.7.

(i) Les préférences d'un joueur i sur un ensemble $\{0;1;...;k\}$ sont dites unimodales lorsqu'il existe un nombre p_i appelé mode du joueur i tel que $\forall s_1, s_2 \in \{0;1;...;k\}, \Big((s_1 < s_2 \leqslant p_i)$ ou $(s_1 > s_2 \geqslant p_i)\Big) \Rightarrow (s_2 \underset{i}{\succ} s_1)$. s_r est la taille d'une coalition contenant i. Les préférences sur $\mathcal{S}(i)$ s'étendent sur $\{0;1;...;k\}$.

(ii) On suppose qu'il existe une application $c : 2^N \longrightarrow \{0;1;...;n\}$, que les préférences des joueurs sont unimodales sur $\{0;1;...;n\}$ avec les modes $p_i \geq 1$ et que $\forall i \in N,\ \forall S,T \in S(i),\ S \succeq_i T \Leftrightarrow c(S) \succeq_i c(T)$.

Un jeu hédonistique satisfait l'ordre caractéristique lorsque l'application c satisfait les conditions suivantes :

- *Si $c(S) < \mid S \mid$, alors $c(S) = p_j$ pour un certain $j \in S$.*
- *Si $i \notin S,\ j \notin S$ et $p_i \geqslant p_j$, alors $c(S \cup \{i\}) \geqslant c(S \cup \{j\})$. Plus généralement, si $c(S \cup \{i\}) > p_i$, alors $c(S \cup \{i\}) = c(S \cup \{j\})$.*

(iii) Un jeu hédonistique qui satisfait l'ordre caractéristique est dit consistent lorsque $\forall i \in N, \forall S \in 2^N$, si $c(S+i) = p_i < c(S) < \min\limits_{j \in S} p_j$, alors $c(T+i) \leq p_i\ \forall T$.

2.2.2 Conditions d'existence d'une partition stable

Condition nécessaire d'existence d'une partition cœur ou Nash stable

Proposition 2.1.

Pour qu'un jeu admette une partition cœur ou Nash stable, il faut qu'il admette une partition P individuellement rationnelle.

Preuve.

Supposons qu'aucune partition P d'un jeu ne soit individuellement rationnelle. Donc pour toute partition $P, \exists i \in N : \{i\} \succ_i S_P(i)$. Ainsi, pour toute partition $P,\ \{i\}$ est une coalition $P-$ bloquante et par conséquent, le jeu n'admet aucune partition cœur stable.
De plus, le joueur i préfère strictement rejoindre le vide que d'être dans $S_P(i)$ et par conséquent, le jeu n'admet aucune partition Nash stable. ■

Quelques conditions suffisantes d'existence de partitions stables

Le théorème ci-dessous est dû à Scarf (1967)[22] et Greenberg (1994)[13]

Théorème 2.1.

- *Si un jeu est ordinairement balancé, alors il admet une partition cœur stable.*
- *Si un jeu est faiblement consécutif par rapport à un classement f, alors il admet une partition cœur stable consécutive par rapport à f.*

Nous avons des conditions suffisantes de non vacuité du cœur. On peut se demander s'il existe une relation entre ces conditions.

Définition 2.8.

(i) *Soit $V \in 2^N$. Une partie S de V est appelée coalition préférée de V lorsque :*
$S \succeq_i T, \quad \forall T \subset V : i \in S \cap T.$
Chaque joueur de S se trouvant dans n'importe quelle partie T de V préfère S à T.

(ii) *Un jeu satisfait la propriété de coalition préférée si toute partie non vide de N admet une coalition préférée.*

Définition 2.9.

Soit $V \in 2^N$. Une partie S de V est appelée coalition préférée de V au sens faible s'il existe $l \in \mathbb{N}^*$ et une suite $(S^1; S^2; ...; S^l)$ d'éléments de 2^S tels que :

(i) $\{S^1; S^2; ...; S^l\}$ *soit une partition de* S.

(ii) $\forall i \in S^1, \forall T \subset V : i \in T,$ *on a :*$S \succeq_i T.$

(iii) $\forall k \in \{2; ...; l\}, \forall i \in S^k, \forall T \subset V : i \in T,$ *on a :* $T \succ_i S \Rightarrow T \cap (\bigcup_{m<k} S^m) \neq \emptyset.$

Définition 2.10.

Un jeu satisfait la propriété de coalition préférée au sens faible s'il existe une partition $P = \{S_1; S_2; ...; S_m\}$ de N telle que : $\forall k \in \{1; 2; ...; m\}, S_k$ soit une coalition préférée de $N \setminus (\bigcup\limits_{i<k} S_i)$ au sens faible.

Proposition 2.2.

Un jeu qui satisfait la propriété de coalition préférée est faiblement consécutif lorsque les préférences sont strictes.

Preuve.

Soit $(N; (\succ_i)_{i\in N})$ un jeu hédonistique satisfaisant la propriété de coalition préférée. Montrons qu'il est faiblement consécutif.

Puisque $N \subset N$ et $N \neq \emptyset$, d'après l'hypothèse, N admet une coalition préférée S_1.

Si $N \backslash S_1 = \emptyset$, on s'arrête.

Sinon $N \backslash S_1 \subset N$ et $N \backslash S_1 \neq \emptyset$. D'après l'hypothèse, $N \backslash S_1$ admet une coalition préférée S_2.

Si $N \backslash (S_1 \cup S_2) = (N \backslash S_1) \backslash S_2 = \emptyset$, on s'arrête.

Sinon, il admet une coalition préférée S_3. N étant fini, ce processus s'arrête après un nombre fini d'étapes. On a donc une partition $\{S_1; S_2; ...; S_k\}$ de N vérifiant :

$S_{i+1} \subset N \backslash (\bigcup\limits_{j\leq i} S_j), N = (\bigcup\limits_{j\leq k} S_j)$. Considérons un classement f de N tel que :

$\forall i \in S_1, f(i) \in \{1; 2; ...; \mid S_1 \mid\}$.

$\forall j \in \{2; 3; ...; k\}, \forall i \in S_j, f(i) \in \left\{ (\sum\limits_{l=1}^{j-1} \mid S_l \mid) + 1; (\sum\limits_{l=1}^{j-1} \mid S_l \mid) + 2; ...; \sum\limits_{l=1}^{j-1} \mid S_l \mid + \mid S_j \mid \right\}$.

Maintenant, considérons une partition quelconque P bloquée par une partition S, puis, cherchons une coalition T qui bloque aussi P et qui est consécutive par rapport au classement f.

S bloque P, donc P n'est pas cœur stable. Comme $\forall i \in \{1; 2; ...; k\}, S_i$ est coalition préférée de $N \backslash (\cup_{j=1}^{i} S_j)$ alors, $\{S_1; S_2; ...; S_k\}$ est cœur stable et par suite, $P \neq \{S_1; S_2; ...; S_k\}$

Si $\forall i, S_i \in P$, alors on devrait avoir $\{S_1; S_2; ...; S_k\} \subset P$ et par suite $\{S_1; S_2; ...; S_k\} = P$ car ces deux ensembles sont des partitions de N ; ce qui est impossible.

$\{i \in \mathbb{N}^* : S_i \notin P\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}^*$: il admet un plus petit élément m.

Si $k = 1$, alors $S_1 = N$ bloque P et N est consécutive par rapport à f.

Sinon, puisque S_m est coalition préférée de $N \backslash (\cup_{j<m} S_j)$, alors S_m bloque P et S_m est consécutive par rapport à f. ■

Exemple 2.2.7. $N = \{1; 2; 3\}$ avec les préférences :

$$\begin{array}{cccc}
\{1;2\} \succ_1 & \{1;3\} \succ_1 & \{1\} \succ_1 & \{1;2;3\} \\
\{1;2;3\} \succ_2 & \{2;3\} \succ_2 & \{1;2\} \succ_2 & \{2\} \\
\{1;2;3\} \succ_3 & \{2;3\} \succ_3 & \{1;3\} \succ_3 & \{3\}
\end{array}$$

Considérons le classement $f = Id_N$ et S une coalition non consécutive par rapport au classement f. Alors : $\exists i, j, k \in N : i, k \in S; j \notin S$ et $f(i) < f(j) < f(k)$. Ceci impose que $i = 1; j = 2; k = 3$ et $S = \{1; 3\}$.
La seule coalition non consécutive par rapport au classement f est $\{1; 3\}$ qui bloque l'unique partition $P = \{\{1\}; \{2\}; \{3\}\}$. Cette partition est à son tour bloquée par la coalition $\{2; 3\}$ qui est consécutive par rapport au classement f. Ainsi, ce jeu est faiblement consécutif.
En outre, ce jeu n'est pas ordinairement balancé. En effet :
Posons $\beta = \{\{1; 2\}; \{2; 3\}; \{1; 3\}\}$. Pour $S \in \beta$, on prend pour coefficient de balancement $X_S = \dfrac{1}{2}$ et β est une famille balancée. Considérons maintenant une partition P et cherchons $i \in N$ tel que $\forall S \in \beta, i \notin S$ ou $\neg(S_P(i) \succeq_i S.)$
Si P a un singleton $\{j\}$, alors $\forall S \in \beta : j \in S, S \succ_j \{j\}$ car chaque joueur préfère strictement être en couple que d'être seul.
Si P n'a pas de singleton, alors $P = \{\{1; 2; 3\}\}$. Pour $i = 1, \forall S \in \beta : 1 \in S$, on a $S \succ_1 \{1; 2; 3\}$ car, $\{1 ;2 ;3\}$ est la pire coalition du joueur 1. Ainsi, ce jeu n'est pas ordinairement balancé.
Enfin, ce jeu n'a pas la propriété de coalition préférée au sens faible car N n'a pas de coalition préférée au sens faible. En effet : en observant les préférences, les probables telles coalitions sont $\{1; 2; 3\}$ ou $\{1; 2\}$. Cependant, ce n'est ni $\{1; 2; 3\}$ car $\{1\} \succ_1 \{1; 2; 3\}$ ni $\{1; 2\}$ car $\{2\} \cup \{3\} \succ_2 \{1; 2\}$ et $\{2\} \cup \{3\} \succ_3 \{3\}$

On a donc un jeu faiblement consécutif qui n'est pas ordinairement balancé et ne possède pas la propriété de coalition préférée au sens faible.

Exemple 2.2.8. $N = \{1; 2; 3\}$ avec les préférences :

$$\begin{array}{cccc} \{1;2;3\} \succ_1 & \{1;2\} \succ_1 & \{1;3\} \succ_1 & \{1\} \\ \{2;3\} \succ_2 & \{1;2\} \succ_2 & \{1;2;3\} \succ_2 & \{2\} \\ \{1;3\} \succ_3 & \{1;2;3\} \succ_3 & \{2;3\} \succ_3 & \{3\} \end{array}$$

Ce jeu possède la propriété de coalition préférée au sens faible. En effet :
Une partition de N est $P = \{N\}$. De plus, $N \in P$ et une suite d'éléments de 2^N est $(S^1; S^2; S^3)$ avec $S^1 = \{1\}; S^2 = \{3\}; S^3 = \{2\}$. Vérifions que N est une coalition préférée de N au sens faible. $\{S^1; S^2; S^3\}$ est déjà une partition de N. Il reste donc à montrer que :

(i) $\forall i \in S^1, \forall T \subset N : i \in N$, on a : $N \succeq_i T$.

(ii) $\forall k \in \{2; 3\}, \forall i \in S^k, \forall T \subset N : i \in T$, on a : $T \succ_i \{1; 2; 3\} \Rightarrow T \cap (\bigcup\limits_{m<k} S^m) \neq \emptyset$.

$i \in S^1 \Rightarrow i = 1$ et $\forall T \subset N : 1 \in T, \{1; 2; 3\} \succeq_1 T$.

Pour $k = 2, i \in S^2 \Rightarrow i = 3$. Soit $T \subset N : 3 \in T$ et $T \succ_3 \{1; 2; 3\}$. En observant les

préférences, il suit que $T = \{1;3\}$. Ainsi, $1 \in T \cap S^1 \subset T \cap (\bigcup\limits_{m<2} S^m)$ et par conséquent, $T \cap (\bigcup\limits_{m<2} S^m) \neq \emptyset$.
Pour $k = 3, i \in S^3 \Rightarrow i = 2$. Considérons $T \subset N : 2 \in T$ et $T \succ_2 \{1;2;3\}$. En observant les préférences, il suit que : soit $T = \{2;3\}$ $\big($et dans ce cas, $3 \in T \cap S^2 \subset T \cap (\bigcup\limits_{m<3} S^m)\big)$ soit $T = \{1;2\}\big($ et dans ce cas, $1 \in T \cap S^1 \subset T \cap (\bigcup\limits_{m<3} S^m)\big)$. Dans tous les cas, on a toujours $T \cap (\bigcup\limits_{m<3} S^m) \neq \emptyset$. Ainsi, N est une coalition préférée de N au sens faible. D'où $P = \{P_1\}$ est une partition de N avec $P_1 = N$ qui est une coalition préférée de N au sens faible. Par conséquent, ce jeu a la propriété de coalition préférée au sens faible.

En outre, ce jeu n'est pas faiblement consécutif. En effet, une observation des préférences montre que seule la coalition $S_1 = \{2;3\}$ bloque la partition $P_1 = \big\{\{1;2\};\{3\}\big\}$, seule la coalition $S_2 = \{1;2\}$ bloque la partition $P_2 = \big\{\{1;3\};\{2\}\big\}$, seule la coalition $S_3 = \{1;3\}$ bloque la partition $P_3 = \big\{\{2;3\};\{1\}\big\}$ et ces coalitions ne sont consécutives par rapport à aucun classement f de joueurs sinon on devrait avoir $S_1 = N$ ou $S_2 = N$ ou $S_3 = N$
$\Bigg($par exemple si $f = Id_N$, puisque $1 \in S_3, 3 \in S_3$ et $f(1) < f(2) < f(3)$, on devrait avoir $2 \in S_3$ et par suite, $S_3 = N$ $\Bigg)$ce qui est impossible.

Enfin, ce jeu n'est pas ordinairement balancé car : une famille balancée de N est $\beta = \Big\{\{1;2\};\{2;3\};\{1;3\}\Big\}$ avec pour coefficients de balancement tous égaux à $\frac{1}{2}$. Considérons une partition P de N et cherchons $i \in N : \forall S \in \beta, i \notin S$ ou $\neg\Big(S_P(i) \succeq_i S\Big)$.
Si P a un singleton $\{j\}$, puisque chaque joueur préfère strictement être en couple que d'être seul, alors $\forall S \in \beta : j \in S,\ \neg\Big(S_P(j) \succeq_j S\Big)$. Il suffit de prendre $i = j$.
Si P n'a pas de singleton, alors $P = \{1;2;3\}$. Pour $i = 2, \forall S \in \beta : 2 \in S$, on a $\neg\Big(S_P(2) \succeq_2 S\Big)$ car le joueur 2 préfère strictement être en couple que d'être dans N.
On a donc un jeu ayant la propriété de coalition préférée au sens faible, mais qui n'est ni faiblement consécutif ni ordinairement balancé.

Nous avons vu plus haut qu'une partition Nash stable peut ne pas exister. Bogomolnaia & Matthew (2002)[8] énoncent une condition suffisante d'existence d'une telle partition.

Théorème 2.2.
Si dans un jeu hédonistique les préférences des joueurs sont additivement séparables et symétriques, alors, ce jeu admet une partition Nash stable et par suite, individuellement puis contractuellement individuellement stable.

Preuve.
Considérons $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique dans lequel les préférences des joueurs sont additivement séparables et symétriques avec les fonctions d'utilité $(v_i)_{i\in N}$ et montrons que ce jeu

admet une partition Nash stable. Soit P une partition de N. Posons $\phi(P) = \sum_{i;j:\exists S\in P|i;j\in S} v_i(j)$.
N étant fini, $\mathcal{P}$ est aussi fini et par suite, $\exists P_0 \in \mathcal{P} \mid P_0 \in \underset{P\in\mathcal{P}}{Argmax}\ \phi(P)$.
Supposons par l'absurde que P_0 ne soit pas Nash stable. Alors
$\exists T \in P_0 \cup \{\emptyset\},\ \exists i \in N:\ T\cup\{i\} \succ_i S_{P_0}(i)$. Ainsi, $\sum_{j\in T\cup\{i\}} v_i(j) > \sum_{j\in S_{P_0}(i)} v_i(j)$ et par suite,
$\epsilon = \sum_{j\in T\cup\{i\}} v_i(j) - \sum_{j\in S_{P_0}(i)} v_i(j) > 0$. Formons la partition P_1 de la manière suivante :

(i) $S_{P_0}(i)\setminus\{i\} \in P_1 \Leftrightarrow S_{P_0}(i)\setminus\{i\} \neq \emptyset$.

(ii) $T\cup\{i\} \in P_1$.

(iii) $S \in P_1,\ \forall S \in P_0 \setminus \{S_{P_0}(i); T\}$.

$$\begin{aligned}
\phi(P_1) &= \sum_{k;j:\exists S\in P_1|k;j\in S} v_k(j) = \sum_{k;j\in T\cup\{i\}} v_k(j) + \sum_{k;j\in S_{P_0}(i)\setminus\{i\}} v_k(j) + \sum_{k;j:\exists S\in P_1\setminus\left\{S_{P_0}(i)\setminus\{i\};T\cup\{i\}\right\}|k;j\in S} v_k(j)\\
&= \sum_{k;j\in T} v_k(j) + \sum_{j\in T\cup\{i\}} v_i(j) + \sum_{k\in T\cup\{i\}} v_k(i) + \sum_{k;j\in S_{P_0}(i)} v_k(j) - \sum_{j\in S_{P_0}(i)} v_i(j) - \sum_{k\in S_{P_0}(i)} v_k(i) +\\
&\quad \sum_{k;j:\exists S\in P_0\setminus\left\{S_{P_0}(i)\setminus\{i\};T\cup\{i\}\right\}|k;j\in S} v_k(j) \quad \text{car } v_j(j)=0, \forall j\in N\\
&= \sum_{k;j\in S_{P_0}(i)} v_k(j) + \sum_{k;j\in T} v_k(j) + \sum_{k;j:\exists S\in P_0\setminus\left\{S_{P_0}(i);T\right\}|k;j\in S} v_k(j) + 2\left(\sum_{j\in T\cup\{i\}} v_i(j) - \sum_{j\in S_{P_0}(i)} v_i(j)\right)\\
&\qquad\qquad \text{(car les préférences sont symétriques)}
\end{aligned}$$

$= \phi(P_0) + 2\epsilon > \phi(P_0)$, ce qui contredit le fait que $P_0 \in \underset{P\in\mathcal{P}}{Argmax}\ \phi(P)$.
Ainsi, P_0 est Nash stable et par conséquent, si les préférences des joueurs dans un jeu hédonistique sont additivement séparables et symétriques, alors ce jeu admet une partition Nash stable et par suite, individuellement et contractuellement individuellement stable. ■

Les deux théorèmes ci-dessous sont dus à Bogomolnaia & Matthew (2002)[8]

Théorème **2.3.**

(i) Si un jeu hédonistique satisfait l'ordre caractéristique, alors il admet une partition individuellement stable.

(ii) Si de plus ce jeu est consistent, cette partition est faiblement pareto efficiente.

Théorème **2.4.**
Soit $\left(N;(\succeq_i)_{i\in N}\right)$ *un jeu hédonistique.*

- *Toute partition pareto efficiente est contractuellement individuellement stable.*
- *Lorsque les préférences sont strictes, alors le jeu* $\left(N;(\succ_i)_{i\in N}\right)$ *admet une partition pareto efficiente, individuellement rationnelle et contractuellement individuellement stable.*

$\boxed{\textbf{Preuve}}$.

Soit $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique.

- Supposons par l'absurde que P soit une partition pareto efficiente sans être contractuellement individuellement stable. Ainsi, $\exists i \in N,\ \exists S_k \in P \cup \{\emptyset\}$:

  (i) $S_k \cup \{i\} \succ_i S_P(i)$

  (ii) $S_k \cup \{i\} \succeq_j S_k,\ \forall j \in S_k$

  (iii) $S_P(i) \setminus \{i\} \succeq_j S_P(i),\ \forall j \in S_P(i) \setminus \{i\}$. Considérons la partition P' obtenue de P par « i quitte $S_P(i)$ dans P pour $S_k \cup \{i\}$ dans P' » . Formellement, on a :
  – $S_P(i) \setminus \{i\} \in P' \Leftrightarrow S_P(i) \setminus \{i\} \neq \emptyset$.
  – $S_k \cup \{i\} \in P'$.
  – $S \in P',\ \forall S \in P \setminus \{S_P(i); S_k\}$.

  Puisque P est pareto optimale, alors, P' ne pareto domine pas P. Ainsi,

  $$\begin{cases} (iv) \quad \exists i_0 \in N : \quad S_P(i_0) \succ_{i_0} S_{P'}(i_0) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ou \\ (v) \quad \forall j \in N, \quad S_P(j) \succeq_j S_{P'}(j) \end{cases}$$

  Supposons (v) $\forall j \in N,\ S_P(j) \succeq_j S_{P'}(j)$. Alors, pour $j = i$, on devrait avoir $S_P(i) \succeq_i S_{P'}(i)$. C'est à dire $S_P(i) \succeq_i S_k \cup \{i\}$, ce qui contredit (i)

  Supposons (iv) $\exists i_0 \in N :\ S_P(i_0) \succ_{i_0} S_{P'}(i_0)$

  – si $i_0 \notin S_k \cup S_P(i)$, alors par construction de P', $S_{P'}(i_0) = S_P(i_0)$. Ainsi, $(iv) \Rightarrow S_P(i_0) \succ_{i_0} S_P(i_0)$ ce qui est absurde.

  – si $i_0 \in S_k$, alors $S_P(i_0) = S_k$ et $S_{P'}(i_0) = S_k \cup \{i\}$. Ainsi, $(iv) \Rightarrow S_k \succ_{i_0} S_k \cup \{i\}$ ce qui contredit (ii)

  – si $i_0 \in S_P(i)$, alors $S_P(i) = S_P(i_0)$
    – si $i_0 = i$, alors $S_{P'}(i) = S_k \cup \{i\}$
      $(iv) \Rightarrow S_P(i) \succ_i S_k \cup \{i\}$ ce qui contredit (i)
    – si $i_0 \neq i$, alors $S_{P'}(i_0) = S_P(i) \setminus \{i\}$
      $(iv) \Rightarrow S_P(i) \succ_{i_0} S_P(i) \setminus \{i\}$ ce qui contredit (iii)

  Donc toute partition pareto optimale est aussi contractuellement individuellement stable.

- Supposons que les préférences des joueurs soient strictes et cherchons une partition individuellement rationnelle, pareto optimale et contractuellement individuellement stable.
  Posons $i_1 = 1,\ \hat{S}_1 = max_{\succ_{i_1}}\Big\{S \subset N : i_1 \in S \text{ et } S \succeq_j \{j\}, \forall j \in S\Big\}$
  Soit $t \in N,\ t \geq 2$. Supposons construits i_k et $\hat{S}_k, \forall k \in \{1; 2; ...; t-1\}$.
  Posons $i_t = min_{\leq}\ N \setminus \big(\cup_{k=1}^{t-1} \hat{S}_k\big)$ et
  $\hat{S}_t = max_{\succ_{i_t}}\Big\{S \subset N \setminus \big(\cup_{k=1}^{t-1} \hat{S}_k\big) : i_t \in S \text{ et } S \succeq_j \{j\}, \forall j \in S\Big\}$.

N étant fini, $\exists r \in N : N \setminus \left(\cup_{k=1}^{r} \hat{S}_k \right) = \emptyset$. Posons $P = \{\hat{S}_1; \hat{S}_2; ...; \hat{S}_r\}$.

Par construction, P est une partition individuellement rationnelle.

Bogomolnaia & Matthew (2012) [8] montrent que cette partition P est pareto efficiente et par conséquent contractuellement individuellement stable.

■

Définition 2.11.

(i) *un jeu* $\left(N; (\succeq_i)_{i\in N}\right)$ *satisfait la propriété du rangement commun lorsqu'il existe une application* $w : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $\forall i \in N,\ \forall C, D \in \mathcal{S}(i),\ C \succeq_i D \Leftrightarrow w(C) \geq w(D)$.

(ii) *un jeu* $\left(N; (\succeq_i)_{i\in N}\right)$ *est additif par parties lorsque* $\forall i \in N,\ \exists v_i : \mathcal{S}(i) \longrightarrow \mathbb{R} \mid$
$\forall i \in N,\ \forall C, D \in \mathcal{S}(i),\ C \succeq_i D \Leftrightarrow \sum\limits_{i\in C'\subset C} v_i(C') \geq \sum\limits_{i\in D'\subset D} v_i(D')$.

(iii) *un jeu* $\left(N; (\succeq_i)_{i\in N}\right)$ *est neutre par parties lorsqu'il existe une application* $w : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $\forall i \in N,\ \forall C, D \in \mathcal{S}(i),\ C \succeq_i D \Leftrightarrow \sum\limits_{i\in C'\subset C} w(C') \geq \sum\limits_{i\in D'\subset D} w(D')$.

(iv) *Un profil de préférences est anonymement neutre lorsqu'il existe une application* $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que* $\forall i \in N,\ \forall C, D \in \mathcal{S}(i),\ C \succeq_i D \Leftrightarrow f(\mid C \mid) \geq f(\mid D \mid)$.

Interprétation

– Lorsqu'un jeu satisfait la **propriété du rangement commun**, il existe une application commune w qui donne le poids de chaque coalition. i préfère C à D si le poids de C dépasse celui de D.

– Pour l'**anonymat neutre**, la préférence d'un joueur sur deux coalitions dépend d'une application f et seulement de la taille de ces coalitions.

Proposition 2.3.

Si $\left(N; (\succeq_i)_{i\in N}\right)$ *est un jeu hédonistique avec les préférences anonymement neutre , alors :*

(i) *Le jeu est neutre.*

(ii) *Le jeu satisfait la propriété du rangement commun.*

***Preuve*.**

Soient $\left(N; (\succeq_i)_{i\in N}\right)$ est un jeu hédonistique avec les préférences anonymement neutre et considérons une application $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
$\forall i \in N,\ \forall C, D \in \mathcal{S}(i),\ C \succeq_i D \Leftrightarrow f(\mid C \mid) \geq f(\mid D \mid)$.

(i) Montrons que ce jeu est neutre. Soient $i \in N,\ C, D \in \mathcal{S}(i)$.

$$\begin{array}{rcl} \mid C \mid = \mid D \mid & \Rightarrow & f(\mid C \mid) = f(\mid D \mid) \\ & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} f(\mid C \mid) & \geq & f(\mid D \mid) \\ f(\mid D \mid) & \geq & f(\mid C \mid) \end{array} \right. \\ & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} C \succeq_i D \\ D \succeq_i C \end{array} \right. \\ & \Rightarrow & C \sim_i D \end{array}$$

et par suite, le jeu est neutre.

(ii) Montrons que le jeu satisfait la propriété du rangement commun. Pour celà, cherchons une application $w : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall i \in N,\ \forall C, D \in \mathcal{S}(i),\ C \succeq_i D \Leftrightarrow w(C) \geq w(D)$.

Pour $S \in 2^N$, posons $w_0(S) = f(\mid S \mid)$.

Soient $i \in N,\ C, D \in \mathcal{S}(i)$.

$$\begin{array}{rcl} C \succeq_i D & \Leftrightarrow & f(\mid C \mid) \geqslant f(\mid D \mid) \\ & \Leftrightarrow & w_0(C) \geqslant w_0(D). \end{array}$$

Il suffit de prendre $w = w_0$ et par suite, le jeu satisfait la propriété du rangement commun.

$\blacksquare$

Proposition 2.4.

(i) Un profil de préférences additivement séparable et symétriques dans un jeu $\Big(N; (\succeq_i)_{i \in N}\Big)$ *est neutre par parties*

(ii) La réciproque est fausse.

Preuve.

(i) Soit $\Big(N; (\succeq_i)_{i \in N}\Big)$ un jeu avec les préférences additivement séparable et symétriques. Considérons les fonctions d'utilité $u_i,\ i \in N$ telles que

$\forall i \in N,\ \forall C, D \in \mathcal{S}(i),\ C \succeq_i D \Leftrightarrow \sum\limits_{j \in C} u_i(j) \geq \sum\limits_{j \in D} u_i(j).$

Construisons l'application $w : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall S \in 2^N,\ w(S) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 \text{ si} & \mid S \mid = 1 & \text{ou} \mid S \mid > 2 \\ u_i(j) & \text{si} & S = \{i; j\} \end{array} \right.$$

Soient $i \in N,\ S, T \in \mathcal{S}(i)$. Par définition de w, on a :

$\sum\limits_{i \in S' \subset S} w(S') = \sum\limits_{i \in S' \subset S : |S'| = 2} w(S') = \sum\limits_{j \in S} w(\{i; j\}) = \sum\limits_{j \in S} u_i(j)$. D'où

$$\begin{array}{rcl} \forall i \in N,\ \forall C, D \in \mathcal{S}(i),\ C \succeq_i D & \Leftrightarrow & \sum\limits_{j \in C} u_i(j) \geq \sum\limits_{j \in D} u_i(j) \\ & \Leftrightarrow & \sum\limits_{i \in C' \subset C} w(C') \geqslant \sum\limits_{i \in D' \subset D} w(D') \end{array}.$$

Ainsi, un profil de préférences additivement séparable et symétriques dans un jeu $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ est neutre par parties.

(ii) Pour justifier que la réciproque est fausse, on va construire un jeu hédonistique dans lequel les préférences des joueurs sont neutres par parties mais pas additivement séparables et symétriques.

Prenons $N=\{1;2;3\}$ et $w(S)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mid S\mid=1 \\ 1 & \text{si} \quad \mid S\mid=2 \\ -2 & \text{si} \quad \mid S\mid=3 \end{cases}$

$\sum\limits_{1\in s'\subset\{1;3\}} w(S')=w(\{1\})+w(\{1;3\})=1$

$\sum\limits_{1\in s'\subset\{1\}} w(S')=w(\{1\})=0$

$\sum\limits_{1\in s'\subset\{1;2\}} w(S')=w(\{1\})+w(\{1;2\})=1$

$\sum\limits_{1\in s'\subset\{1;2;3\}} w(S')=w(\{1\})+w(\{1;2\})+w(\{1;3\})+w(\{1;2;3\})=0$

$\sum\limits_{1\in s'\subset\{1;3\}} w(S')=1>0=\sum\limits_{1\in s'\subset\{1\}} w(S')$. D'où $\{1;3\}\succ_1\{1\}$

$\sum\limits_{1\in s'\subset\{1;2\}} w(S')=1>0=\sum\limits_{1\in s'\subset\{1;2;3\}} w(S')$. D'où $\{1;2\}\succ_1\{1;2;3\}$

Si les préférences étaient additivement séparables et symétriques, il existerait une application $v_1:N\longrightarrow\mathbb{R}\mid$ $\begin{cases} v_1(1)+v_1(3) & >v_1(1) \\ v_1(1)+v_1(2) & >v_1(1)+v_1(2)+v_1(3) \end{cases}$ $\Rightarrow v_1(3)>0>v_1(3)$, ce qui est impossible.

■

Bogomolnaia & Matthew (2002)[8] montrent que dans un jeu hédonistique, si les préférences des joueurs sont additivement séparables et symétriques, alors ce jeu admet une partition Nash stable. Le théorème ci-dessous dû à Warut S.(2014) [24] en est une amélioration.

Théorème 2.5.

Lorsque les préférences des joueurs dans un jeu hédonistique sont neutres par parties, alors ce jeu admet une partition Nash stable.

Preuve.

Soit $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique dans lequel les préférences des joueurs sont neutres par parties et considérons une application $w:2^N\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que

$\forall i\in N,\ \forall C,D\in\mathcal{S}(i),\ C\succeq_i D\Leftrightarrow\sum\limits_{i\in C'\subset C} w(C')\geq\sum\limits_{i\in D'\subset D} w(D')$.

Soit P une partition de N. Posons $\Phi(P) = \sum\limits_{C\in P: C'\in 2^C} w(C')$. N étant fini, $\mathcal{P}$ est aussi fini et par suite, $\exists P_0 \in \mathcal{P} \mid P_0 \in \underset{P\in\mathcal{P}}{Argmax}\ \Phi(P)$.
Supposons par l'absurde que P_0 ne soit pas Nash stable. Alors
$\exists S_k \in P_0 \cup \{\emptyset\},\ \exists i \in N:\ S_k \cup \{i\} \succ_i S_{P_0}(i)$. Ainsi, $\sum\limits_{i\in C'\subset S_k\cup\{i\}} w(C') > \sum\limits_{i\in C'\subset S_{P_0}(i)} w(C')$ et par suite, $\epsilon = \sum\limits_{i\in C'\subset S_k\cup\{i\}} w(C') - \sum\limits_{i\in C'\subset S_{P_0}(i)} w(C') > 0$. Formons la partition P_1 de la manière suivante :

(i) $S_{P_0}(i) \setminus \{i\} \in P_1 \Leftrightarrow S_{P_0}(i) \setminus \{i\} \neq \emptyset$.

(ii) $S_k \cup \{i\} \in P_1$.

(iii) $S \in P_1,\ \forall S \in P_0 \setminus \{S_{P_0}(i); S_k\}$.

$\Phi(P_1) = \sum\limits_{C\in P_1: C'\in 2^C} w(C') = \Phi(P_0)+\epsilon > \Phi(P_0)$, ce qui contredit le fait que $P_0 \in \underset{P\in\mathcal{P}}{Argmax}\ \Phi(P)$.

■

Proposition 2.5.

Un profil de préférences anonymement neutre est aussi neutre par parties.

$\boxed{\textbf{Preuve}}$.
Soient $\Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique dans lequel les préférences des joueurs sont anonymement neutres et une application $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que
$\forall i \in N,\ \forall C, D \in \mathcal{S}(i),\ C \succeq_i D \Leftrightarrow f(\mid C \mid) \geq f(\mid D \mid)$.
Cherchons une application $w : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
$\forall i \in N,\ \forall C, D \in \mathcal{S}(i),\ C \succeq_i D \Leftrightarrow \sum\limits_{i\in C'\subset C} w(C') \geq \sum\limits_{i\in D'\subset D} w(D')$.
Il suffit de chercher une application $w : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall i \in N,\ \forall S \in \mathcal{S}(i),\ \sum_{i\in S'\subset S} w(S') = f(\mid S \mid) \tag{2.1}$$

Posons $w(A) = w(B)\ \forall A, B \in 2^N :\mid A \mid=\mid B \mid$. Il suffit donc de chercher les valeurs de w sur $\{1\}; \{1; 2\}; ...; \{1; 2; ...; n\}$
Posons $w(\{1\}) = f(1)$.
Soit $k \in N : k \geq 2$. Supposons qu'on ait $w(\{1\}); w(\{1; 2\}); ...; w(\{1; 2; ...; k-1\})$.
Posons

$$w(\{1; 2; ...; k\}) = f(k) - \sum_{1\in C'\subsetneq\{1;2;...;k\}} w(C'). \tag{2.2}$$

Soient $i \in N,\ S \in \mathcal{S}(i)$. Montrons que $\sum\limits_{i\in S'\subset S} w(S') = f(\mid S \mid)$.

Si $\mid S \mid = 1$, alors $\sum\limits_{i \in S' \subset S} w(S') = w(\{i\}) = w(\{1\}) = f(1) = f(\mid S \mid)$.

Soit $k \leqslant n$. Supposons le résultat vrai pour $\mid S \mid < k$. Considérons $T = \{1; 2; ...; k\}$ avec $i \in T$.

D'après (1.2), on a :

$$\begin{aligned} f(\mid T \mid) = f(k) &= w(T) + \sum_{1 \in T' \subsetneq T} w(T') \\ &= w(T) + \sum_{i \in T' \subsetneq T} w(T') \quad . \\ &= \sum_{i \in T' \subset T} w(T') \end{aligned}$$

D'où le résultat. ∎

Corollaire 2.1.

Dans un jeu hédonistique, lorsque les préférences des joueurs sont anonymement neutre, alors ce jeu admet une partition Nash stable.

Preuve.

Supposons que les préférences des joueurs dans un jeu hédonistique soient anonymement neutres. D'après la **proposition 2.5.**, elles sont aussi neutres par parties et d'après le **théorème 2.5.**, le jeu admet une partition Nash stable. ∎

Remarque 2.2.1. On sait qu'une partition cœur stable n'est pas nécessairement individuellement stable et inversement. Le résultat ci-dessous donne une condition suffisante d'existence d'une partition qui soit à la fois cœur stable et individuellement stable.

Théorème 2.6.

Lorsqu'un jeu hédonistique satisfait la propriété du rangement commun, alors ce jeu admet une partition qui soit à la fois cœur stable et individuellement stable.

Preuve.

Soient $\Big(N; (\succeq_i)_{i \in N}\Big)$ un jeu hédonistique satisfaisant la propriété du rangement commun et $w : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall i \in N,\ \forall C, D \in \mathcal{S}(i),\ C \succeq_i D \Leftrightarrow w(C) \geq w(D)$.

Posons $T_1 = N$ et $\forall t \geqslant 1,\ S_t \in \underset{A \in 2^{T_t}}{Argmax}\, w(A),\ T_{t+1} = T_t \setminus S_t, S_t$ de taille maximale.

N étant fini, $\exists r \in N : P = \{S_1; S_2; ...; S_r\}$ soit une partition de N.

(i) Montrons que P est cœur stable.

Supposons par l'absurde qu'il y ait un joueur i de S_1 dans une coalition $P-$ bloquante S. Ainsi, $S \succ_i S_1$, d'où $w(S) > w(S_1)$, ce qui contredit le fait que $S_1 \in \underset{A \in 2^{T_1}}{Argmax}\, w(A)$. Ainsi, aucun joueur de S_1 ne se trouve dans une coalition $P-$ bloquante.

Soit $k \in N, k < r : \forall j \in \{1; 2; ...; k\}$, aucun joueur de S_j n'appartienne à une coalition $P-$ bloquante.

Supposons qu'un joueur i de S_{k+1} se trouve dans une coalition $P-$ bloquante S.

Alors $S \succ_i S_{k+1}$. D'où $w(S) > w(S_{k+1})$. De plus, $\forall j \in \{1; 2; ...; k\}$, aucun joueur de S_j n'appartient à une coalition $P-$ bloquante. Ainsi, $S \in 2^{T_{k+1}}$ et $w(S) > w(S_{k+1})$, ce qui contredit le fait que $S_{k+1} \in \underset{A \in 2^{T_{k+1}}}{Argmax}\, w(A)$.

Aucun joueur de N ne participe à une coalition $P-$ bloquante et par conséquent, la partition P est cœur stable.

(ii) Montrons que P est individuellement stable.

Supposons par l'absurde que P ne soit pas individuellement stable. Alors,

$$\exists i, j, k : \begin{cases} i \in S_k \\ S_j \cup \{i\} & \succ_i S_k \\ S_j \cup \{i\} & \succeq_t S_j, \forall t \in S_j. \end{cases}$$

- Si $j = k$, alors $S_j \cup \{i\} \succ_i S_k \Rightarrow S_j \succ_i S_j$, ce qui est absurde.
- Si $k < j$, alors $S_k, S_j \cup \{i\} \in T_k$. De plus, $S_j \cup \{i\} \succ_i S_k$. D'où $w(S_j \cup \{i\}) > w(S_k)$, ce qui contredit le fait que $S_k \in \underset{A \in 2^{T_k}}{Argmax}\, w(A)$.
- Si $j < k$, alors $S_j, S_j \cup \{i\} \in T_j$. De plus, $S_j \cup \{i\} \succeq_t S_j, \forall t \in S_j$. D'où $w(S_j \cup \{i\}) \geq w(S_j)$, ce qui contredit le fait que $S_j \in \underset{A \in 2^{T_j}}{Argmax}\, w(A)$, S_j de taille maximale.

P est donc une partition à la fois cœur et individuellement stable.

■

Corollaire 2.2.

Lorsque les préférences des joueurs dans un jeu hédonistique sont anonymement neutres, alors ce jeu admet une partition qui soit à la fois cœur stable et individuellement stable.

$\boxed{\textbf{Preuve}}$.

Supposons que les préférences des joueurs dans un jeu hédonistique soient anonymement neutre. D'après la **proposition 2.3.**, ce jeu satisfait aussi la propriété du rangement commun et d'après le **théorème 2.6.**, le jeu admet une partition qui soit à la fois cœur stable et individuellement stable. ■

Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de partitions cœur stable

Bogomolnaia & Matthew (2002)[8] montrent qu'une condition suffisante pour qu'un jeu admette une coalition cœur stable est que ce jeu soit ordinairement balancé. L'exemple ci-dessous dû à Banerjee *et al.*(2001)[7] justifie que cette condition n'est pas nécessaire. En effet : Considérons le jeu hédonistique $\left(N; (\succeq_i)_{i \in N}\right)$ où $N = \{1; 2; 3\}$ avec les préférences :

$$\begin{array}{llll} \{1;2\} \succ_1 & \{1;3\} \succ_1 & \{1;2;3\} \succ_1 & \{1\} \\ \{1;2\} \succ_2 & \{2;3\} \succ_2 & \{1;2;3\} \succ_2 & \{2\} \\ \{1;3\} \succ_3 & \{2;3\} \succ_3 & \{1;2;3\} \succ_3 & \{3\} \end{array}$$

Les partitions de N sont :
$P_1 = \Big\{\{1\};\{2\};\{3\}\Big\}$; $P_2 = \Big\{\{1;2\};\{3\}\Big\}$; $P_3 = \Big\{\{1;3\};\{2\}\Big\}$
$P_4 = \Big\{\{2;3\};\{1\}\Big\}$; $P_5 = \Big\{\{1;2;3\}\Big\}$.
La partition $P_2 = \Big\{\{1;2\};\{3\}\Big\}$ de ce jeu est cœur stable puisque ni le joueur 1 ni le joueur 2 ne préfère une autre coalition que le coalition $\{1;2\}$ et si le joueur 3 les rejoint, la coalition $\{1;2;3\}$ ne sera pas P_2-bloquante.
Cependant, ce jeu n'est pas ordinairement balancé. Pour le justifier, cherchons une famille balancée β : $\forall P \in \mathcal{P},\ \exists i \in N \mid \forall S \in \beta, i \in S \Rightarrow S \succ_i S_P(i)$.
Posons $\beta = \big\{\{1;2\};\{1;3\};\{2;3\}\big\}$. β est une famille balancée avec pour coefficients de balancement $X_S = \dfrac{1}{2}, \forall S \in \beta$

- Pour la partition $P_1 = \Big\{\{1\};\{2\};\{3\}\Big\}$, en choisissant $i = 1$, on a $S_{P_1}(1) = \{1\}$. Si $S \in \beta$ et $1 \in S$, alors $S \in \big\{\{1;2\};\{1;3\}\big\}$ et dans tous les cas, on a $S \succ_1 S_{P_1}(1)$.
- Pour la partition $P_2 = \Big\{\{1;2\};\{3\}\Big\}$, en choisissant $i = 3$, on a $S_{P_2}(3) = \{3\}$. Si $S \in \beta$ et $3 \in S$, alors $S \in \big\{\{1;3\};\{2;3\}\big\}$ et dans tous les cas, on a $S \succ_3 S_{P_2}(3)$.
- Pour la partition $P_3 = \Big\{\{1;3\};\{2\}\Big\}$, en choisissant $i = 2$, on a $S_{P_3}(2) = \{2\}$. Si $S \in \beta$ et $2 \in S$, alors $S \in \big\{\{1;2\};\{2;3\}\big\}$ et dans tous les cas, on a $S \succ_2 S_{P_3}(2)$.
- Pour la partition $P_4 = \Big\{\{2;3\};\{1\}\Big\}$, en choisissant $i = 1$, on a $S_{P_4}(1) = \{1\}$. Si $S \in \beta$ et $1 \in S$, alors $S \in \big\{\{1;2\};\{1;3\}\big\}$ et dans tous les cas, on a $S \succ_1 S_{P_4}(1)$.
- Pour la partition $P_5 = \Big\{\{1;2;3\}\Big\}$, en choisissant $i = 1$, on a $S_{P_5}(1) = \{1;2;3\}$. Si $S \in \beta$ et $1 \in S$, alors $S \in \big\{\{1;2\};\{1;3\}\big\}$ et dans tous les cas, on a $S \succ_1 S_{P_5}(1)$.

On a donc un jeu hédonistique $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ qui admet une partition cœur stable sans être ordinairement balancé.
Nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes sur un jeu hédonistique pour qu'il admette une partition cœur stable.

Définition 2.12.
Une famille $I = \big(I(S)\big)_{S\in 2^N}$ est appelée distribution essentielle lorsque $\forall S \in 2^N, I(S) \in 2^S$. L'ensemble de toutes les distributions essentielles est noté $\mathcal{I}$.

Définition 2.13.
Soit $I \in \mathcal{I}$. Une famille $\mathcal{B} \subset 2^N$ est dite $I-$ balancée si la famille $\Bigg(I(S)\Bigg)_{S\in\mathcal{B}}$ est balancée.

Définition 2.14.
Un jeu hédonistique $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ *est dit essentiellement balancé s'il existe une distribution essentielle* $I \in \mathcal{I}$ *telle que de toute famille* $I-$ *balancée* $\mathcal{B}$,
$\exists P \in \mathcal{P} : \forall i \in N,\ \exists S \in \mathcal{B} \mid i \in S$ *et* $S_P(i) \succeq_i S$.

Proposition 2.6.
Tout jeu hédonistique $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ *ordinairement balancé est essentiellement balancé.*

Preuve.
Soit $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique ordinairement balancé. Posons $I(S) = S,\ \forall S \in 2^N$.
Le jeu étant ordinairement balancé, alors de toute famille balancée $\mathcal{B}$,
$\exists P \in \mathcal{P} : \forall i \in N,\ \exists S \in \mathcal{B} \mid i \in S$ et $S_P(i) \succeq_i S$. Ainsi, de toute famille $I-$ balancée $\mathcal{B}$,
$\exists P \in \mathcal{P} : \forall i \in N,\ \exists S \in \mathcal{B} \mid i \in S$ et $S_P(i) \succeq_i S$ et par suite, le jeu $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ est essentiellement balancé. Donc tout jeu hédonistique $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ ordinairement balancé est essentiellement balancé. ■

Les deux propositions suivantes dues à Bogomolnaia & Matthew (2002)[8] donnent des conditions suffisantes pour qu'un jeu soit ordinairement balancé.

Proposition 2.7.
Si $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ *est un jeu hédonistique consécutif, alors il est ordinairement balancé.*

Proposition 2.8.
Si un jeu hédonistique $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ *satisfait la propriété de coalition préférée, alors il est ordinairement balancé.*

Proposition 2.9.
Si un jeu hédonistique $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ *admet une partition cœur stable, alors il est essentiellement balancé.*

Preuve.
Soit $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique admettant une partition cœur stable P. Par l'absurde, supposons que ce jeu ne soit pas essentiellement balancé. P étant cœur stable,
alors $\forall S \in 2^N,\ \exists i \in N : S_P(i) \succeq_i S$. Ainsi, $\forall S \in 2^N,\ I(S) = \{i \in S : S_P(i) \succeq_i S\} \neq \emptyset$ et par suite, $I = \big(I(S)\big)_{S\in 2^N}$ est une distribution essentielle. Le jeu n'étant pas essentiellement balancé, il existe une famille $I-$ balancée $\mathcal{B}, \exists i \in N,\ \forall S \in \mathcal{B} \mid i \in S,\ S \succ_i S_P(i)$ et par construction de $I(S), \forall S \in \mathcal{B} \mid i \in S, i \notin I(S)$. $\mathcal{B}$ étant une famille $I-$ balancée, alors la famille $\Bigg(I(S)\Bigg)_{S\in\mathcal{B}}$ est balancée. D'où $\forall S \in \mathcal{B},\ \exists X_{I(S)} \geq 0 : \sum_{S\in\mathcal{B}: i\in I(S)} X_{I(S)} = 1$, ce qui

contredit le fait que $\forall S \in \mathcal{B} \mid i \in S, i \notin I(S)$. Donc tout jeu hédonistique $\left(N; (\succeq_i)_{i \in N}\right)$ ayant une partition cœur stable est essentiellement balancé.

■

Le théorème ci-dessous dû à Ihele V.(2005)[16] caractérise les jeux hédonistiques ayant une partition cœur stable.

Théorème 2.7.
Un jeu hédonistique $\left(N; (\succeq_i)_{i \in N}\right)$ *admet une partition cœur stable si et seulement s'il est essentiellement balancé.*

Concepts de stabilité « farsighted »

Dans le problème de colocation dans lequel $N = \{1; 2; 3\}$ avec les préférences :

$$\begin{array}{llll} \{1;2\} \succ_1 & \{1;3\} \succ_1 & \{1\} \succ_1 & \{1;2;3\} \\ \{2;3\} \succ_2 & \{1;2\} \succ_2 & \{2\} \succ_2 & \{1;2;3\} \\ \{1;3\} \succ_3 & \{2;3\} \succ_3 & \{3\} \succ_3 & \{1;2;3\} \end{array}$$

il n'y pas de partition cœur stable, ni Nash stable, ni individuellement stable. Le seul concept classique de solution est l'ensemble des partitions contractuellement individuellement stables. $P_0 = \Big\{\{2;3\}; \{1\}\Big\}$ est contractuellement individuellement stable.
Cependant dans cette partition P_0, $\{3\} \cup \{1\} \succ_3 \{2;3\}$ et $\{1\} \cup \{3\} \succ_1 \{1\}$. Cette partition peut être taxée de médiocre partition.
Si le joueur 3 fait une prévision, il ne quittera pas 2 pour rejoindre 1 et former la partition $P_1 = \Big\{\{1;3\}; \{2\}\Big\}$ car, une fois cette partition formée, 1 laissera 3 pour rejoindre 2 et former la partition $P_2 = \Big\{\{1;2\}; \{3\}\Big\}$ qui est pire que la partition P_0 pour le joueur 3.

3.1 Existence des partitions « farsighted » stables

3.1.1 Partitions « farsighted » stables

Stabilité coalitionnelle

Lorsqu'une partition P est statu quo, les membres d'une coalition quelconque S peuvent se regrouper et faire une objection contre P. Avant que d'autres joueurs ne se regroupent, la nouvelle partition existante est $P' = \{S\} \cup \{T \backslash S : \ T \in P$ et $T \backslash S \neq \emptyset\}$. Nous noterons cette situation par : $P \xrightarrow{S} P'$. On va donc étendre la notion de préférences des joueurs (qui existe sur les coalitions) à celle de préférences des coalitions (sur les partitions).

Définition 3.1.
Soient $P, P' \in \mathcal{P}$ et $S \in 2^N$.

(i) On dit que S préfère P à P' et on note $P \succeq_S P'$ si $\forall i \in S,\ S_P(i) \succeq_i S'_P(i)$.

(ii) On dit que S préfère strictement P à P' et on note $P \succ_S P'$ si $\forall i \in S,\ S_P(i) \succ_i S'_P(i)$.

<u>Notation</u> 3.1.1.
Soient $S, T, T' \in 2^N;\ P, P' \in \mathcal{P};\ j \in N$. On notera :

(i) $T \succ_S T'$ lorsque $\forall i \in S : i \in T \cap T',\ T \succ_i T'$.

(ii) $T \succeq_S T'$ lorsque $\forall i \in S : i \in T \cap T',\ T \succeq_i T'$.

(iii) $P \succ_j P'$ lorsque $P \succ_{\{j\}} P'$.

(iv) $P \succeq_j P'$ lorsque $P \succeq_{\{j\}} P'$.

Définition 3.2.
Soient $\Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique et $P, P' \in \mathcal{P}$.

(i) On dit que P' domine (directement) P et on note $P' > P$ lorsque :
$\exists\ S \in 2^N : P' \succ_S P$ et $P \xrightarrow{S} P'$. Cette dominance induit le système abstrait $(\mathcal{P}; >)$.

(ii) Le cœur de ce système abstrait $(\mathcal{P}; >)$ noté Cœur $(\mathcal{P}; >)$ est l'ensemble des partitions non (directement) dominées. Formellement, Cœur$(\mathcal{P}; >) = \{P \in \mathcal{P} / \nexists P' \in \mathcal{P} : P' > P\}$

La myopie vient du fait que lorsqu'une coalition S bloque une partition P, elle ne considère pas la possibilité de regroupement des autres joueurs.
En d'autres termes, si $P \xrightarrow{S} P_1$, il est possible qu'on puisse trouver $S_1 \in 2^N : P_1 \xrightarrow{S_1} P_2$ et ainsi de suite. Si les joueurs « voient loin » , ils ne viseraient que les issues finales de leurs actions. Ainsi une coalition peut dévier vers une partition ne lui apportant pas une amélioration directe, mais qui conduira à une autre partition finale (via d'autres coalitions) bénéfique à ses membres.

De façon similaire, une coalition peut choisir de ne pas dévier vers une partition qui lui rapporte une amélioration directe parce qu'elle pourra conduire à une autre partition pire que la partition initiale. Harsanyi (1974)[15] et Chwe (1994)[9] ont défini la notion de dominance indirecte.

Définition 3.3.
Soient $P, P' \in \mathcal{P}$.
P' domine indirectement P et on note $P' \gg P$ lorsque :
$\exists S^1, S^2, ..., S^{k-1} \in 2^N,\ \exists P^1, P^2, ..., P^k \in \mathcal{P}$ vérifiant :
$P^1 = P, P^k = P',\ P^j \xrightarrow{S^j} P^{j+1}, P' \succ_{S^j} P^j, j = 1, 2, ..., k-1$
Cette dominance induit le système abstrait noté $(\mathcal{P}; \gg)$.

Examinons quelques concepts de solutions :

Définition 3.4.
Le cœur de ce système abstrait $(\mathcal{P};\gg)$ *noté Cœur* $(\mathcal{P};\gg)$ *est l'ensemble des partitions non indirectement dominées. De façon formelle, Cœur*$(\mathcal{P};\gg) = \{P \in \mathcal{P}/\nexists P' \in \mathcal{P} : P' \gg P\}$.

La proposition ci-dessous est immédiate.

Proposition 3.1.
Cœur $(\mathcal{P};\gg) \subset$ *Cœur* $(\mathcal{P};>)$.

L'ensemble « farsighted » von Neumann-Morgenstern (vN-M) stable

Soient $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ et $P \in \mathcal{P}$. Posons : $\mathcal{L}\mid_{P,\gg} = \{P' \in \mathcal{L} : P' = P$ ou $P' \gg P\}$.
Interprétation : Si $\mathcal{L}$ est l'ensemble des solutions, alors $\mathcal{L}\mid_{P,\gg}$ est vu comme l'ensemble des « meilleures » issues lorsqu'une partition P est considérée.

Définition 3.5.
Soient $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ *un jeu hédonistique et* $\mathcal{R}$ *une partie de* $\mathcal{P}$.

(i) $\mathcal{R}$ *est dite « farsighted » von Neumann-Morgenstern (vN-M) intérieurement stable lorsque* $\forall Q \in \mathcal{R}, \nexists P \in \mathcal{P}$ *et* $S \in 2^N : Q \xrightarrow{S} P$ *et* $P' \succ_S Q$ *pour une certaine partition* $P' \in \mathcal{R}\mid_{P,\gg}$.

(ii) $\mathcal{R}$ *est dite « farsighted » vN-M extérieurement stable lorsque* $\forall Q \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{R}$, $\exists P \in \mathcal{P}$ *et* $S \in 2^N : Q \xrightarrow{S} P$ *et* $P' \succ_S Q$ *pour une certaine partition* $P' \in \mathcal{R}\mid_{P,\gg}$.

(iii) $\mathcal{R}$ *est dite « farsighted » vN-M stable lorsqu'elle est farsighted vN-M intérieurement et extérieurement stable.*

Ensembles collectivement « farsighted » stables sous le conservatisme (C-FCSS)

Définition 3.6.
Soient $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ *un jeu hédonistique et* $\mathcal{R}$ *une partie de* $\mathcal{P}$.

(i) $\mathcal{R}$ *est dite collectivement « farsighted » stable intérieurement sous le conservatisme si* $\forall Q \in \mathcal{R},\ \nexists P \in \mathcal{P}$ *et* $S \in 2^N : Q \xrightarrow{S} P\ ; \mathcal{R}\mid_{P,\gg} \neq \emptyset$ *et* $P' \succ_S Q \quad \forall P' \in \mathcal{R}\mid_{P,\gg}$.

(ii) $\mathcal{R}$ *est dite collectivement « farsighted » stable extérieurement sous le conservatisme si* $\forall Q \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{R}, \exists P \in \mathcal{P}$ *et* $S \in 2^N : Q \xrightarrow{S} P\ ; \mathcal{R}\mid_{P,\gg} \neq \emptyset$ *et* $P' \succ_S Q \quad \forall P' \in \mathcal{R}\mid_{P,\gg}$.

(iii) $\mathcal{R}$ *est dite collectivement « farsighted » stable sous le conservatisme (C-FCSS) si elle est collectivement « farsighted » stable intérieurement et extérieurement sous le conservatisme.*

(iv) L'ensemble collectivement « farsighted » stable et large sous le conservatisme est le plus grand ensemble pour l'inclusion parmi les ensembles $\mathcal{R}$ *qui sont collectivement « farsighted » stables sous le conservatisme . Cet ensemble est noté C-LFCSS(G).*

Propriété 3.1.
Soient $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ *un jeu hédonistique et* $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$. *Si* $\mid \mathcal{L} \mid = 1$, *alors* $\mathcal{L}$ *est collectivement « farsighted » stable intérieurement sous le conservatisme.*

Preuve.
Soient $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique et $Q \in \mathcal{P}$. Posons $\mathcal{L} = \{Q\}$ et montrons que $\mathcal{L}$ est collectivement « farsighted » stable intérieurement sous le conservatisme. Supposons par l'absurde que $\mathcal{L}$ ne soit pas intérieurement stable. Puisque $Q \in \mathcal{L}$, alors $\exists P \in \mathcal{P}$ et $S \in 2^N$: $Q \xrightarrow{S} P$; $\mathcal{L} \mid_{P,\gg} \neq \emptyset$ et $P' \succ_S Q \quad \forall P' \in \mathcal{L} \mid_{P,\gg}$. Puisque $\mathcal{L} \mid_{P,\gg} \neq \emptyset$, soit $P^0 \in \mathcal{L} \mid_{P,\gg} \subset \mathcal{L} = \{Q\}$. On a alors $P^0 = Q$ et $P^0 \succ_S Q$. D'où $Q \succ_S Q$, ce qui est absurde.
Ainsi, si $\mid \mathcal{L} \mid = 1$, alors $\mathcal{L}$ est collectivement « farsighted » stable intérieurement sous le conservatisme. ■

Exemple 3.1.1. G est un jeu hédonistique dans lequel $N = \{1; 2; 3; 4\}$ est un ensemble de 4 joueurs avec les préférences individuelles :

$$\begin{array}{llllllll}
\{1;4\} & \succ_1 & \{1;2;3\} & \succ_1 & \{1;2\} & \succ_1 & \{1\} & \succ_1 \ldots \\
\{1;2;3\} & \succ_2 & \{1;2\} & \succ_2 & \{2;3\} & \succ_2 & \{2\} & \succ_2 \ldots \\
\{1;2;3\} & \succ_3 & \{2;3\} & \succ_3 & \{3;4\} & \succ_3 & \{3\} & \succ_3 \ldots \\
\{3;4\} & \succ_4 & \{1;4\} & \succ_4 & \{4\} & \succ_4 \ldots & &
\end{array}$$

chaque joueur étant indifférent entre les autres coalitions non écrites qui sont rangées strictement après celles qui sont écrites.
En observant les préférences des joueurs et les partitions, on constate que le cœur du jeu hédonistique $\Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ contient la seule partition $\big\{\{1; 4\}; \{2; 3\}\big\}$.
Remarquons que la partition $\big\{\{1; 2\}; \{3; 4\}\big\}$ n'est pas dans ce cœur car elle est bloquée par la coalition $\{1; 2; 3\}$. Cependant, si le joueur 2 voit loin, il verra qu'une fois la partition $\big\{\{1; 2; 3\}; \{4\}\big\}$ formée, la coalition $\{1; 4\}$ pourra se regrouper et apporter la nouvelle partition $\big\{\{1; 4\}; \{2; 3\}\big\}$ qui est pire pour le joueur 2 que la partition initiale $\big\{\{1; 2\}; \{3; 4\}\big\}$. Le joueur 2 s'il voit loin pourrait donc s'abstenir de former la coalition $\{1; 2; 3\}$.
La partition $\big\{\{1; 4\}; \{2; 3\}\big\}$ domine indirectement la partition $\big\{\{1; 2\}; \{3; 4\}\big\}$. En effet :
$\big\{\{1; 2\}; \{3; 4\}\big\} \xrightarrow{\{1;3\}} \big\{\{2\}; \{1; 3\}; \{4\}\big\} \xrightarrow{\{2;3\}} \big\{\{1\}; \{2; 3\}; \{4\}\big\} \xrightarrow{\{1;4\}} \big\{\{1; 4\}; \{2; 3\}\big\}$.
De plus, $\big\{\{1; 4\}; \{2; 3\}\big\} \succ_{\{1;3\}} \big\{\{1; 2\}; \{3; 4\}\big\}$; $\big\{\{1; 4\}; \{2; 3\}\big\} \succ_{\{2;3\}} \big\{\{2\}; \{1; 3\}; \{4\}\big\}$ et $\big\{\{1; 4\}; \{2; 3\}\big\} \succ_{\{1;4\}} \big\{\{1\}; \{2; 3\}; \{4\}\big\}$.
La partition $\big\{\{1; 2\}; \{3; 4\}\big\}$ domine indirectement la partition $\big\{\{1; 4\}; \{2; 3\}\big\}$. En effet :
$\big\{\{1; 4\}; \{2; 3\}\big\} \xrightarrow{\{2;4\}} \big\{\{1\}; \{2; 4\}; \{3\}\big\} \xrightarrow{\{1;2\}} \big\{\{1; 2\}; \{3\}; \{4\}\big\} \xrightarrow{\{3;4\}} \big\{\{1; 2\}; \{3; 4\}\big\}$.
De plus, $\big\{\{1; 2\}; \{3; 4\}\big\} \succ_{\{2;4\}} \big\{\{1; 4\}; \{2; 3\}\big\}$; $\big\{\{1; 2\}; \{3; 4\}\big\} \succ_{\{1;2\}} \big\{\{1\}; \{2; 4\}; \{3\}\big\}$

et $\{\{1;2\};\{3;4\}\} \succ_{\{3;4\}} \{\{1;2\};\{3\};\{4\}\}$.
La partition $\{\{1;2\};\{3;4\}\}$ domine indirectement la partition $\{\{2\};\{1;3\};\{4\}\}$. En effet : $\{\{2\};\{1;3\};\{4\}\} \xrightarrow{\{1;2\}} \{\{1;2\};\{3\};\{4\}\} \xrightarrow{\{3;4\}} \{\{1;2\};\{3;4\}\}$.
De plus, $\{\{1;2\};\{3;4\}\} \succ_{\{1;2\}} \{\{2\};\{1;3\};\{4\}\}$ et $\{\{1;2\};\{3;4\}\} \succ_{\{3;4\}} \{\{1;2\};\{3\};\{4\}\}$.
$\{\{1;2\};\{3;4\}\}$ et $\{\{1;4\};\{2;3\}\}$ sont des éléments de C-LFCSS(G).
On remarque même que Cœur ($\mathcal{P};\gg$) $=\emptyset$ car, $\forall P \in \mathcal{P},\ \exists P' \in \mathcal{P} : P' \gg P$.

Stabilité individuelle

Les solutions Nash stables, individuellement stables et contractuellement individuellement stables sont basées sur le fait qu'un seul joueur peut quitter une coalition et rejoindre une autre coalition ou rester seul. Nous allons définir la notion d'ensemble « farsighted » stable liée à ces solutions.

Ensembles Nash « farsighted » stables sous le conservatisme(N-FCSS)

On suppose que lorsqu'un joueur i dans une partition P laisse la coalition $S_P(i)$, c'est pour rejoindre une autre coalition ou être seul. Avant qu'un autre joueur ne fasse de même, la nouvelle partition P' qui existe est définie par :

(i) $S_P(i)\backslash\{i\} \in P' \Leftrightarrow S_P(i)\backslash\{i\} \neq \emptyset$

(ii) $T \cup \{i\} \in P'$ pour un certain $T \in P \cup \{\emptyset\}$

(iii) $\forall S \in P : S \neq S_P(i)$ et $S \neq T$, on a $S \in P'$.

On notera cette situation par $P \xrightarrow{\{i\}} P'$.
En considérant uniquement des déviations individuelles, les ensembles collectivement « farsighted » stables sous le conservatisme (C-FCSS) sont appelés ensembles Nash « farsighted » stables sous le conservatisme (N-FCSS) tandis que l'ensemble collectivement « farsighted » stable et large sous le conservatisme (C-LFCSS(G)) sera appelé ensemble Nash « farsighted » stable et large sous le conservatisme (N-LFCSS(G)).

Définition 3.7.
Soient $P, P' \in \mathcal{P}$. On dit que P' 1-domine indirectement et individuellement P et on note $P' \ggg P$ lorsque $\exists i^1, i^2, ..., i^{k-1} \in N,\ \exists P^1, P^2, ..., P^k \in \mathcal{P}$ vérifiant :
$P^1 = P,\ P^k = P',\ \ P^j \xrightarrow{\{i^j\}} P^{j+1},\ P' \succ_{i^j} P^j,\ j = 1, 2, ..., k-1.$

Soient $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ et $P \in \mathcal{P}$. Posons : $\mathcal{L}\mid_{P,\ggg} = \{P' \in \mathcal{L} : P' = P$ ou $P' \ggg P\}$.
Interprétation : Si $\mathcal{L}$ est l'ensemble des solutions, en considérant uniquement des déviations individuelles, $\mathcal{L}\mid_{P,\ggg}$ est vu comme l'ensemble des « meilleures » issues lorsqu'une partition P est considérée.

Ensembles Nash « Farsighted » Stables sous le Conservatisme (N-FCSS)

Définition 3.8.
Soient $G = \left(N; (\succeq_i)_{i \in N}\right)$ un jeu hédonistique et $\mathcal{R}$ une partie de $\mathcal{P}$.

(i) *$\mathcal{R}$ est dite Nash « farsighted » stable intérieurement sous le conservatisme si :*
$\forall Q \in \mathcal{R},\ \nexists P \in \mathcal{P}$ *et* $i \in N : Q \xrightarrow{\{i\}} P\ ; \mathcal{R}\ |_{P,\ggg} \neq \emptyset$ *et* $P' \succ_i Q \quad \forall P' \in \mathcal{R}\ |_{P,\ggg}$.

(ii) *$\mathcal{R}$ est dite Nash « farsighted » stable extérieurement sous le conservatisme si*
$\forall Q \in \mathcal{P} \backslash \mathcal{R}, \exists P \in \mathcal{P}$ *et* $i \in N : Q \xrightarrow{\{i\}} P\ ; \mathcal{R}\ |_{P,\ggg} \neq \emptyset$ *et* $P' \succ_i Q \quad \forall P' \in \mathcal{R}\ |_{P,\ggg}$.

(iii) *$\mathcal{R}$ est dite Nash « farsighted » stable sous le conservatisme si elle est Nash « farsighted » stable intérieurement et extérieurement sous le conservatisme.*

(iv) *L'ensemble Nash « farsighted » stable et large sous le conservatisme est le plus grand ensemble pour l'inclusion parmi les ensembles $\mathcal{R}$ qui sont Nash « farsighted » stables sous le conservatisme . Cet ensemble est noté N-LFCSS(G).*

Propriété 3.2.
Soient $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique et $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$. Si $\mid \mathcal{L} \mid = 1$, alors $\mathcal{L}$ est Nash « farsighted » stable intérieurement sous le conservatisme.

Preuve.
Soient $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique et $Q \in \mathcal{P}$. Posons $\mathcal{L} = \{Q\}$ et montrons que $\mathcal{L}$ est Nash « farsighted » stable intérieurement sous le conservatisme. Supposons par l'absurde que $\mathcal{L}$ ne soit pas intérieurement stable. Puisque $Q \in \mathcal{L}$, alors $\exists P \in \mathcal{P}$ et $i \in N : Q \xrightarrow{\{i\}} P\ ; \mathcal{L}\ |_{P,\ggg} \neq \emptyset$ et $P' \succ_{\{i\}} Q \quad \forall P' \in \mathcal{L}\ |_{P,\ggg}$. Puisque $\mathcal{L}\ |_{P,\ggg} \neq \emptyset$, soit $P^0 \in \mathcal{L}\ |_{P,\ggg} \subset \mathcal{L} = \{Q\}$. On a alors $P^0 = Q$ et $P^0 \succ_{\{i\}} Q$. D'où $Q \succ_{\{i\}} Q$, ce qui est absurde.
Ainsi, si $\mid \mathcal{L} \mid = 1$, alors $\mathcal{L}$ est Nash « farsighted » stable intérieurement sous le conservatisme.

■

Exemple 3.1.2. G est un jeu hédonistique dans lequel $N = \{1; 2; 3\}$ avec les préférences individuelles :

$$\{1;2\} \succ_1 \{1\} \succ_1 \{1;2;3\} \succ_1 \{1;3\}$$
$$\{1;2\} \succ_2 \{2\} \succ_2 \{1;2;3\} \succ_2 \{2;3\}$$
$$\{1;2;3\} \succ_3 \{3\} \succ_3 \{1;3\} \succ_3 \{2;3\}$$

Ce jeu n'a aucune partition Nash stable car $\forall P \in \mathcal{P},\ \exists T \in P \cup \{\emptyset\},\ \exists i \in N : T \cup \{i\} \succ_i S_P(i)$.

$$\text{N-LFCSS(G)} = \Bigg\{ \Big\{\{1;2\};\{3\}\Big\}; \Big\{\{1;2;3\}\Big\}; \Big\{\{1\};\{2\};\{3\}\Big\} \Bigg\}.$$

Dominance indirecte pour les déplacements par des individus

Dans la définition précédente, un joueur i peut transformer une partition P en une autre partition P' telle que $P \xrightarrow{\{i\}} P'$. Cependant, le joueur i peut avoir besoin de la permission de $S_{P'}(i) \backslash \{i\}$ pour rejoindre cette coalition. Ainsi, le joueur i seul ne peut pas changer P en P'

seulement parce que $P \xrightarrow{\{i\}} P'$. Nous noterons par : $P \xrightarrow[S_{P'}(i)]{\{i\}} P'$ pour dire que le joueur i a besoin de la permission de $S_{P'}(i)\backslash\{i\}$ pour changer P en P'.

Définition 3.9.

Soient $P, P' \in \mathcal{P}$. On dit que P' domine indirectement et individuellement P et on note $P' \gg P$ lorsque $\exists i^1, i^2, ..., i^{k-1} \in N$, $\exists P^1, P^2, ..., P^k \in \mathcal{P}$ vérifiant :

$P^1 = P,\ P^k = P',\ P^j \xrightarrow[S_{P^{j+1}}(i^j)]{\{i^j\}} P^{j+1},\ P' \succ_{\{i^j\}} P^j,\ P' \succeq_{S_{P^{j+1}}(i^j)} P^j,\ j = 1, 2, ..., k-1.$

Soient $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}$ et $P \in \mathcal{P}$. Posons : $\mathcal{L}\mid_{P,\gg} = \{P' \in \mathcal{L} : P' = P \text{ ou } P' \gg P\}$.

Interprétation : Si $\mathcal{L}$ est l'ensemble des solutions, en considérant uniquement des déplacements par des individus avec la permission des membres de la coalition qu'un individu rejoint, $\mathcal{L}\mid_{P,\gg}$ est vu comme l'ensemble des « meilleures » issues lorsqu'une partition P est considérée.

Ensembles individuellement « Farsighted » stables sous le conservatisme (I-FCSS)

Définition 3.10.

Soient $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique et $\mathcal{R}$ une partie de $\mathcal{P}$.

(i) $\mathcal{R}$ est dite individuellement « farsighted » stable intérieurement sous le conservatisme si : $\forall Q \in \mathcal{R},\ \nexists P \in \mathcal{P}$ et $i \in N$ vérifiant $Q \xrightarrow[S_P(i)]{\{i\}} P$; $\mathcal{R}\mid_{P,\gg} \neq \emptyset,\ P' \succ_{\{i\}} Q$ et $P' \succeq_{S_P(i)} Q \quad \forall P' \in \mathcal{R}\mid_{P,\gg}$.

(ii) $\mathcal{R}$ est dite individuellement « farsighted » stable extérieurement sous le conservatisme si : $\forall Q \in \mathcal{P}\backslash\mathcal{R},\ \exists P \in \mathcal{P}$ et $i \in N$ vérifiant $Q \xrightarrow[S_P(i)]{\{i\}} P$; $\mathcal{R}\mid_{P,\gg} \neq \emptyset,\ P' \succ_{\{i\}} Q$ et $P' \succeq_{S_P(i)} Q \quad \forall P' \in \mathcal{R}\mid_{P,\gg}$.

(iii) $\mathcal{R}$ est dite individuellement « farsighted » stable sous le conservatisme (I-FCSS) si elle est individuellement « farsighted » stable intérieurement et extérieurement sous le conservatisme.

(iv) L'ensemble individuellement « farsighted » stable et large sous le conservatisme est le plus grand ensemble pour l'inclusion parmi les ensembles $\mathcal{R}$ qui sont individuellement « farsighted » stables sous le conservatisme . Cet ensemble est noté I-LFCSS(G).

On peut aussi définir l'ensemble contractuellement et individuellement « farsighted » stable et large sous le conservatisme (CI-LFCSS(G)) en ajoutant en plus le fait que le joueur i a aussi besoin de la permission des membres de $S_P(i)\backslash\{i\}$ qu'il laisse et qui voient aussi loin.

Exemple 3.1.3. $N = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ est un ensemble de 5 joueurs avec les préférences individuelles :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\{1;4;5\} & \succ_1 & \{1;2\} & \succ_1 & \{1\} & \succ_1 & \dots & & & & \\
\{2;3\} & \succ_2 & \{2;3;4;5\} & \succ_2 & \{1;2\} & \succ_2 & \{2\} & \succ_2 & \{1;2;3\} & \succ_2 & \dots \\
\{2;3\} & \succ_3 & \{3;4;5\} & \succ_3 & \{3\} & \succ_3 & \{1;2;3\} & \succ_3 & \{1;3\} & \succ_3 & \dots \\
\{1;4;5\} & \succ_4 & \{4;5\} & \succ_4 & \{3;4;5\} & \succ_4 & \{4\} & \succ_4 & \{2;4;5\} & \succ_4 & \\
 & & \{1;2;4;5\} & \succ_4 & \{2;3;4;5\} & \succ_4 & \dots & & & & \\
\{1;4;5\} & \succ_5 & \{4;5\} & \succ_5 & \{3;4;5\} & \succ_5 & \{5\} & \succ_5 & \{2;4;5\} & \succ_5 & \\
 & & \{1;2;4;5\} & \succ_5 & \{1;2;3;5\} & \succ_5 & \{2;3;4;5\} & \succ_5 \dots & & &
\end{array}$$

les autres coalitions non écrites sont rangées de façon stricte après celles qui sont écrites.
La partition $\Big\{\{1;2\};\{3;4;5\}\Big\}$ est individuellement stable car : si le joueur 1 ou 3 ou 4 ou 5 quitte sa coalition dans cette partition pour rejoindre une autre coalition ou être seul, sa nouvelle coalition ne sera pas préférée à la coalition initiale. Le joueur 2 non seulement ne préfère pas être seul que d'être dans la coalition $\{1;2\}$ mais aussi, s'il rejoint la coalition $\{3;4;5\}$, le joueur 3 ne préfère pas la coalition $\{2;3;4;5\}$ à la coalition $\{3;4;5\}$.
En outre, la partition $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\}$ est aussi individuellement stable parce que si un joueur quitte sa coalition dans cette partition pour rejoindre une autre coalition ou être seul, sa nouvelle coalition ne sera pas préférée à la coalition initiale.

Ces deux partitions sont même les seules partitions individuellement stables.
La partition $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\}$ qui n'est dominée indirectement par aucune partition appartient à chaque ensemble I-FCSS et CI-FCSS.
Les partitions qui sont directement dominées par $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\}$ sont exclues de chaque ensemble I-FCSS et CI-FCSS. C'est le cas de la partition $\Big\{\{1;4;5\};\{2\};\{3\}\Big\}$ car :
$\Big\{\{1;4;5\};\{2\};\{3\}\Big\} \xrightarrow[\{2;3\}]{\{2\}} \Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\}$ et $\{2;3\} \succ_2 \{2\}$.
D'autres partitions qui doivent être exclues de tout ensemble I-FCSS et CI-FCSS sont celles qui sont directement dominées par $\Big\{\{1;4;5\};\{2\};\{3\}\Big\}$.
C'est le cas de la partition $\Big\{\{1;2\};\{3\};\{4;5\}\Big\}$ puisqu'on a
$\Big\{\{1;2\};\{3\};\{4;5\}\Big\} \xrightarrow[\{1;4;5\}]{\{1\}} \Big\{\{1;4;5\};\{2\};\{3\}\Big\}$ et $\{1;4;5\} \succ_1 \{1;2\}$.
C'est aussi le cas de la partition $P' = \Big\{\{1;2\};\{4;5\};\{3\}\Big\}$ puisqu'on a
$\Big\{\{1;2\};\{4;5\};\{3\}\Big\} \xrightarrow[\{1;4;5\}]{\{1\}} \Big\{\{1;4;5\};\{2\};\{3\}\Big\}$ et $\{1;4;5\} \succ_1 \{1;2\}$.
Ainsi de suite on élimine des partitions n'appartenant à aucun ensemble I-FCSS jusqu'à ce qu'il reste les partitions $\Big\{\{1;2;3;4;5\}\Big\}$; $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\}$ et $\Big\{\{1;2\};\{3;4;5\}\Big\}$.
On remarque que :$\Big\{\{1;2;3;4;5\}\Big\} \xrightarrow[\{1\}]{\{1\}} \Big\{\{2;3;4;5\};\{1\}\Big\} \xrightarrow[\{1;4\}]{\{4\}} \Big\{\{2;3;5\};\{1;4\}\Big\} \xrightarrow[\{1;4;5\}]{\{5\}}$
$\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\}$. De plus, $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\} \succ_{\{1\}} \Big\{\{1;2;3;4;5\}\Big\}$
$\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\} \succ_{\{4\}} \Big\{\{2;3;4;5\};\{1\}\Big\}$ et $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\} \succeq_{\{1;4\}} \Big\{\{2;3;4;5\};\{1\}\Big\}$

$\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\} \succ_{\{5\}} \Big\{\{2;3;5\};\{1;4\}\Big\}$ et $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\} \succeq_{\{1;4;5\}} \Big\{\{2;3;5\};\{1;4\}\Big\}$.
Par conséquent, la partition $\Big\{\{1;2;3;4;5\}\Big\}$ n'est dans aucun ensemble I-FCSS.
Remarquons aussi que : $\Big\{\{1;2\};\{3;4;5\}\Big\} \xrightarrow[\{1;2;3\}]{\{3\}} \Big\{\{1;2;3\};\{4;5\}\Big\} \xrightarrow[\{1;4;5\}]{\{1\}} \Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\}$.
De plus, $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\} \succ_{\{3\}} \Big\{\{1;2\};\{3;4;5\}\Big\}$ et $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\} \succeq_{\{1;2;3\}} \Big\{\{1;2\};\{3;4;5\}\Big\}$;
$\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\} \succ_{\{1\}} \Big\{\{1;2;3\};\{4;5\}\Big\}$ et $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\} \succeq_{\{1;4;5\}} \Big\{\{1;2;3\};\{4;5\}\Big\}$.
Ce qui nous permet d'éliminer aussi la partition $P = \Big\{\{1;2\};\{3;4;5\}\Big\}$.
Finalement, on a un seul ensemble I-FCSS qui est $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\}$ et par conséquent,
I-LFCSS(G)= $\Big\{\{1;4;5\};\{2;3\}\Big\}$.

3.1.2 Existence des partitions « farsighted » stables

Existence de l'ensemble C-LFCSS(G)

Dans le chapitre précédant, nous avons vu qu'une partition cœur stable ou Nash stable ou individuellement stable ou contractuellement individuellement stable peut ne pas exister. Qu'en est-il des partitions « farsighted » stables ?

Lemme 3.1.
Soit $\Big(N;(\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ *un jeu hédonistique. Si on pose :* $\mathcal{L}^0 = \mathcal{P}$ *et* $\forall k$,

$$\mathcal{L}^{k+1} = \left\{Q \in \mathcal{L}^k \mid \nexists P \in \mathcal{P} \text{ et } S \subset N : Q \xrightarrow{S} P,\ \mathcal{L}^k_{|P,\gg} \neq \emptyset,\ P' \succ_S Q \quad \forall P' \in \mathcal{L}^k_{|P,\gg}\right\},$$

alors $\exists k^* : \mathcal{L}^{k^*+1} = \mathcal{L}^{k^*}$.

$\boxed{\textbf{Preuve}}$.
Montrons d'abord que $\forall k, \forall P \in \mathcal{P},\ \exists P' \in \mathcal{L}^k : P' \in \mathcal{L}^k_{|P',\gg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P',\gg} \subset \mathcal{L}^k_{|P,\gg}$.

Pour $k = 0$, soit $P \in \mathcal{P}$. En prenant $P' = P$, on a
$P' \in \mathcal{L}^0 = \mathcal{P},\ P' \in \mathcal{L}^0_{|P',\gg}$ et $\mathcal{L}^0_{|P',\gg} \subset \mathcal{L}^0_{|P,\gg}$.

Supposons le résultat vrai pour un entier k.
Soit $P_1 \in \mathcal{P}$. Cherchons $P' \in \mathcal{L}^{k+1} : P' \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P',\gg}$ et $\mathcal{L}^{k+1}_{|P',\gg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\gg}$.

(i) Si $P^1 \in \mathcal{L}^{k+1}$, alors $P^1 \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\gg}$ et $\mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\gg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\gg}$. Il suffit de prendre $P' = P^1$.

(ii) Si $P^1 \in \mathcal{L}^k \setminus \mathcal{L}^{k+1}$, alors par définition de $\mathcal{L}^{k+1}$,
$\exists Q \in \mathcal{P}$ et $S \subset N : P^1 \xrightarrow{S} Q,\ \mathcal{L}^k_{|Q,\gg} \neq \emptyset,\ R \succ_S P^1 \quad \forall R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\gg}$.
Montrons que $\forall R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\gg}, \quad R \gg P^1$.
Soit $R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\gg}$. On a alors $R \in \mathcal{L}^k$.

– Si $R = Q$, alors $Q \in \mathcal{L}^k$. Ainsi, $Q \in \mathcal{L}^k_{|Q,\gg}$. Puisque $P^1 \xrightarrow{S} Q$ et $R \succ_S P^1 \quad \forall R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\gg}$, alors $P^1 \xrightarrow{S} Q$ et $Q \succ_S P^1$. D'où $Q \gg P^1$ et ainsi, $R \gg P^1$.

– Si $R \neq Q$, alors $R \gg Q$. De plus, $P^1 \xrightarrow{S} Q$ et $R \succ_S P^1 \quad \forall R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\gg}$. D'où $P^1 \xrightarrow{S} Q,\ R \gg Q$ et $R \succ_S P^1$. Ainsi, $R \gg P^1$ et par suite, $\forall R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\gg}, \quad R \gg P^1$.

Montrons que $\mathcal{L}^k_{|Q,\gg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^1,\gg}$.

Soit $R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\gg}$. On a alors $R \in \mathcal{L}^k$ et $R \gg P^1$. D'où $R \in \mathcal{L}^k_{|P^1,\gg}$ et par suite, $\mathcal{L}^k_{|Q,\gg} \subset \mathcal{L}^k_{|P^1,\gg}$.

$P^1 \in \mathcal{L}^k_{|P^1,\gg}$ car $P^1 \in \mathcal{L}^k$. Si $P^1 \in \mathcal{L}^k_{|Q,\gg}$, alors on devrait avoir $P^1 \gg P^1$, ce qui est absurde. Donc $\mathcal{L}^k_{|Q,\gg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^1,\gg}$.

Pour $P = Q$, d'après l'hypothèse, $\exists P^2 \in \mathcal{L}^k : P^2 \in \mathcal{L}^k_{|P^2,\gg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P^2,\gg} \subset \mathcal{L}^k_{|Q,\gg}$.

Ainsi, $P^2 \in \mathcal{L}^k_{|P^2,\gg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P^2,\gg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^1,\gg}$.

Montrons que $\mathcal{L}^{k+1}_{|P^2,\gg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\gg}$.

soit $R \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^2,\gg}$. On a alors $R \in \mathcal{L}^{k+1}$ et $R \in \mathcal{L}^k_{|P^2,\gg}$ car $\mathcal{L}^{k+1} \subset \mathcal{L}^k$. De plus, $\mathcal{L}^k_{|P^2,\gg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^1,\gg}$. Ainsi, $R \in \mathcal{L}^{k+1}$ et $R \in \mathcal{L}^k_{|P^1,\gg}$. D'où $R \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\gg}$ et par suite, $\mathcal{L}^{k+1}_{|P^2,\gg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\gg}$.

Si $P^2 \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^2,\gg}$, il suffit de prendre $P' = P^2$

Si $P^2 \notin \mathcal{L}^{k+1}_{|P^2,\gg}$, alors $P^2 \in \mathcal{L}^k \setminus \mathcal{L}^{k+1}$ et par suite, $\exists P^3 \in \mathcal{L}^k : P^3 \in \mathcal{L}^k_{|P^3,\gg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P^3,\gg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^2,\gg}$.

$\mathcal{L}^k$ étant fini, $\exists l,\ \exists P^l \in \mathcal{L}^k$:

$P^l \in \mathcal{L}^k_{|P^l,\gg}, \quad \mathcal{L}^k_{|P^l,\gg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^{l-1},\gg} \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^3,\gg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^2,\gg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^1\gg}$ et $P^l \in \mathcal{L}^{k+1}$.

Ainsi, $P^l \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^l,\gg}$ et $\mathcal{L}^{k+1}_{|P^l,\gg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\gg}$. Il suffit de prendre $P' = P^l$.

(iii) Si $P^1 \notin \mathcal{L}^k$, alors d'après l'hypothèse, $\exists P'' \in \mathcal{L}^k : P'' \in \mathcal{L}^k_{|P'',\gg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P'',\gg} \subset \mathcal{L}^k_{|P^1,\gg}$.

D'où $\mathcal{L}^{k+1}_{|P'',\gg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\gg}$.

– Si $P'' \in \mathcal{L}^{k+1}$, alors $P'' \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P'',\gg}$ et $\mathcal{L}^{k+1}_{|P'',\gg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\gg}$. Il suffit de prendre $P' = P''$

– Si $P'' \notin \mathcal{L}^{k+1}$, alors $P'' \in \mathcal{L}^k \setminus \mathcal{L}^{k+1}$ et d'après (ii), $\exists P^r \in \mathcal{L}^{k+1} : P^r \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^r,\gg}$ et $\mathcal{L}^{k+1}_{|P^r,\gg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P'',\gg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\gg}$. Il suffit de prendre $P' = P^r$.

On a alors : $\forall k, \forall P \in \mathcal{P},\ \exists P' \in \mathcal{L}^k : P' \in \mathcal{L}^k_{|P',\gg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P',\gg} \subset \mathcal{L}^k_{|P,\gg}$. D'où $\mathcal{L}^k_{|P,\gg} \neq \emptyset$.

$\mathcal{L}^k$ étant fini, $\exists k^* : \mathcal{L}^{k^*+1} = \mathcal{L}^{k^*}$.

■

Théorème 3.1.

Si $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i \in N}\Big)$ est un jeu hédonistique, alors C-LFCSS(G) existe toujours.

Preuve.

Soit $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i \in N}\Big)$ un jeu hédonistique. Montrons que $\mathcal{L}^{k^*}$ du lemme précédant est C-FCSS.

Pour la stabilité interne, si $Q \in \mathcal{L}^{k^*}$, alors $Q \in \mathcal{L}^{k^*+1}$ et par définition de $\mathcal{L}^{k^*+1}$,

$\nexists P \in \mathcal{P}$ et $S \subset N : Q \xrightarrow{S} P,\ \mathcal{L}^{k^*}_{|P,\gg} \neq \emptyset$ et $P' \succ_S Q,\ \forall P' \in \mathcal{L}^{k^*}_{|P,\gg}$. Ainsi, $\mathcal{L}^{k^*}$ est intérieurement stable.

Pour la stabilité externe, si $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{L}^{k^*}$, alors $\exists k < k^* :\ P \in \mathcal{L}^k \setminus \mathcal{L}^{k+1}$. Ainsi, $\exists Q \in \mathcal{P}$ et $S \subset N : P \xrightarrow{S} Q,\ \mathcal{L}^{k}_{|Q,\gg} \neq \emptyset$ et $P' \succ_S P,\ \forall P' \in \mathcal{L}^{k}_{|Q,\gg}$. $k < k^* \Rightarrow \mathcal{L}^{k^*}_{|Q,\gg} \subset \mathcal{L}^{k}_{|Q,\gg}$ car la suite $(\mathcal{L}^k)$ est décroissante. D'où $P' \succ_S P \quad \forall P' \in \mathcal{L}^{k^*}_{|Q,\gg}$. De plus,$\forall k,\ \forall P \in \mathcal{P}, \mathcal{L}^{k}_{|P,\gg} \neq \emptyset$. D'où, $\mathcal{L}^{k^*}_{|Q,\gg} \neq \emptyset$. On a alors :

$\exists Q \in \mathcal{P}$ et $S \subset N : P \xrightarrow{S} Q,\ \mathcal{L}^{k^*}_{|Q,\gg} \neq \emptyset$ et $P' \succ_S P,\ \forall P' \in \mathcal{L}^{k^*}_{|Q,\gg}$. Par conséquent, $\mathcal{L}^{k^*}$ est C-FCSS.

Montrons que C-LFCSS(G)= $\mathcal{L}^{k^*}$.

Soit $\mathcal{L}'$ un ensemble C-FCSS. Montrons que $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^{k^*}$.

Montrons d'abord que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^k$.

(i) Pour $k = 0$, on a $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^0$ car $\mathcal{L}^0 = \mathcal{P}$ et $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{P}$.

(ii) Soit $k \in \mathbb{N} : \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^k$. Montrons que $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^{k+1}$. Supposons par l'absurde que $\mathcal{L}' \nsubseteq \mathcal{L}^{k+1}$. Soit $P \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}^{k+1}$.

Puisque $P \in \mathcal{L}'$ qui est intérieurement stable, alors

$\nexists Q_1 \in \mathcal{P}$ et $S_1 \in 2^N : P \xrightarrow{S_1} Q_1,\ \mathcal{L}'_{|Q_1,\gg} \neq \emptyset,\ P' \succ_{S_1} P \quad \forall P' \in \mathcal{L}'_{|Q_1,\gg}$.

$P \in \mathcal{L}' \Rightarrow P \in \mathcal{L}^k$ car $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^k$ et par suite, puisque $P \notin \mathcal{L}^{k+1}$, alors par définition de $\mathcal{L}^{k+1}$, $\exists Q \in \mathcal{P}$ et $S \in 2^N : P \xrightarrow{S} Q,\ \mathcal{L}^{k}_{|Q,\gg} \neq \emptyset,\ P' \succ_S P \quad \forall P' \in \mathcal{L}^{k}_{|Q,\gg}$.

Comme $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^k$, alors $\mathcal{L}'_{|Q,\gg} \subseteq \mathcal{L}^{k}_{|Q,\gg}$. De plus, $P' \succ_S P \quad \forall P' \in \mathcal{L}^{k}_{|Q,\gg}$.

D'où $P' \succ_S P \quad \forall P' \in \mathcal{L}'_{|Q,\gg}$.

Montrons que $\mathcal{L}'_{|Q,\gg} \neq \emptyset$.

- Si $Q \in \mathcal{L}'$, alors $Q \in \mathcal{L}'_{|Q,\gg}$ et par suite, $\mathcal{L}'_{|Q,\gg} \neq \emptyset$.
- Si $Q \notin \mathcal{L}'$ qui est extérieurement stable, alors $\exists P_2 \in \mathcal{P}$ et $S_2 \in 2^N$: $Q \xrightarrow{S_2} P_2,\ \mathcal{L}'_{|P_2,\gg} \neq \emptyset,\ P' \succ_{S_2} Q \quad \forall P' \in \mathcal{L}'_{|P_2,\gg}$.
  Soit $P_0 \in \mathcal{L}'_{|P_2,\gg}$. On a $P_0 \in \mathcal{L}'$ et $P_0 \succ_{S_2} Q$ car $P' \succ_{S_2} Q \quad \forall P' \in \mathcal{L}'_{|P_2,\gg}$.

– Si $P_0 = P_2$, alors $Q \xrightarrow{S_2} P_0$ et $P_0 \succ_{S_2} Q$ d'où $P_0 \gg Q$. De plus, $P_0 \in \mathcal{L}'$. Donc $P_0 \in \mathcal{L}'_{|Q,\gg}$ et par suite, $\mathcal{L}'_{|Q,\gg} \neq \emptyset$.

– Si $P_0 \neq P_2$, alors $P_0 \gg P_2$. En outre, $Q \xrightarrow{S_2} P_2$ et $P_0 \succ_{S_2} Q$. D'où $P_0 \gg Q$. De plus, $P_0 \in \mathcal{L}'$. Donc $P_0 \in \mathcal{L}'_{|Q,\gg}$ et par suite, $\mathcal{L}'_{|Q,\gg} \neq \emptyset$.

D'une part, $P \in \mathcal{L}'$. D'autre part $\exists Q \in \mathcal{P}$ et $S \in 2^N : P \xrightarrow{S} Q,\ \mathcal{L}'_{|Q,\gg} \neq \emptyset$, $P' \succ_S P \quad \forall P' \in \mathcal{L}'_{|Q,\gg}$, ce qui contredit la stabilité interne de $\mathcal{L}'$.

On a alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^k$. En particulier, pour $k = k^*$, on a $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^{k^*}$ et par conséquent, C-LFCSS(G)= $\mathcal{L}^{k^*}$. ■

Existence de l'ensemble N-LFCSS(G)

Le théorème précédent dû à Diamantoudi & Xue(2003) [10] donne l'existence de l'ensemble C-LFCSS(G) d'un jeu hédonistique $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$. On peut se demander s'il en est de même avec l'ensemble N-LFCSS(G).

Un des apports de ce mémoire a été de répondre par l'affirmation.

Théorème 3.2.
Si $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ est un jeu hédonistique, alors N-LFCSS(G) existe toujours.

***Preuve*.**
Soit $G = \Big(N; (\succeq_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique. Montrons que N-LFCSS(G) existe.
Posons $\mathcal{L}^0 = \mathcal{P}$ et $\forall k$,

$$\mathcal{L}^{k+1} = \left\{ Q \in \mathcal{L}^k \mid \nexists P \in \mathcal{P} \text{ et } i \in N : Q \xrightarrow{\{i\}} P,\ \mathcal{L}^k_{|P,\ggg} \neq \emptyset,\ P' \succ_{\{i\}} Q \quad \forall P' \in \mathcal{L}^k_{|P,\ggg} \right\}.$$

Montrons que $\exists k^* : \mathcal{L}^{k^*+1} = \mathcal{L}^{k^*}$.

Montrons d'abord que $\forall k, \forall P \in \mathcal{P},\ \exists P' \in \mathcal{L}^k : P' \in \mathcal{L}^k_{|P',\ggg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P',\ggg} \subset \mathcal{L}^k_{|P,\ggg}$.
Pour $k = 0$, soit $P \in \mathcal{P}$. En prenant $P' = P$, on a
$P' \in \mathcal{L}^0 = \mathcal{P},\ P' \in \mathcal{L}^0_{|P',\ggg}$ et $\mathcal{L}^0_{|P',\ggg} \subset \mathcal{L}^0_{|P,\ggg}$.
Supposons le résultat vrai pour un entier k.
Soit $P_1 \in \mathcal{P}$. Cherchons $P' \in \mathcal{L}^{k+1} : P' \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P',\ggg}$ et $\mathcal{L}^{k+1}_{|P',\ggg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\ggg}$.

(i) Si $P^1 \in \mathcal{L}^{k+1}$, alors $P^1 \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\ggg}$ et $\mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\ggg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\ggg}$. Il suffit de prendre $P' = P^1$.

(ii) Si $P^1 \in \mathcal{L}^k \setminus \mathcal{L}^{k+1}$, alors par définition de $\mathcal{L}^{k+1}$,
$\exists Q \in \mathcal{P}$ et $i \in N : P^1 \xrightarrow{\{i\}} Q,\ \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg} \neq \emptyset,\ R \succ_i P^1 \quad \forall R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$.
Montrons que $\forall R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}, \quad R \ggg P^1$.
Soit $R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$. On a alors $R \in \mathcal{L}^k$.

- Si $R = Q$, alors $Q \in \mathcal{L}^k$. Ainsi, $Q \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$. Puisque $P^1 \xrightarrow{\{i\}} Q$ et $R \succ_i P^1 \quad \forall R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$, alors $P^1 \xrightarrow{\{i\}} Q$ et $Q \succ_i P^1$. D'où $Q \ggg P^1$ et ainsi, $R \ggg P^1$.
- Si $R \neq Q$, alors $R \ggg Q$. De plus, $P^1 \xrightarrow{\{i\}} Q$ et $R \succ_i P^1 \quad \forall R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$. D'où $P^1 \xrightarrow{\{i\}} Q,\ R \ggg Q$ et $R \succ_i P^1$. Ainsi, $R \ggg P^1$ et par suite, $\forall R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}, \quad R \ggg P^1$.

Montrons que $\mathcal{L}^k_{|Q,\ggg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^1,\ggg}$.
Soit $R \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$. On a alors $R \in \mathcal{L}^k$ et $R \ggg P^1$. D'où $R \in \mathcal{L}^k_{|P^1,\ggg}$ et par suite, $\mathcal{L}^k_{|Q,\ggg} \subset \mathcal{L}^k_{|P^1,\ggg}$.
$P^1 \in \mathcal{L}^k_{|P^1,\ggg}$ car $P^1 \in \mathcal{L}^k$. Si $P^1 \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$, alors on devrait avoir $P^1 \ggg P^1$, ce qui est absurde. Donc $\mathcal{L}^k_{|Q,\ggg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^1,\ggg}$.
Pour $P = Q$, d'après l'hypothèse, $\exists P^2 \in \mathcal{L}^k : P^2 \in \mathcal{L}^k_{|P^2,\ggg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P^2,\ggg} \subset \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$.

Ainsi, $P^2 \in \mathcal{L}^k_{|P^2,\ggg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P^2,\ggg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^1,\ggg}$.

Montrons que $\mathcal{L}^{k+1}_{|P^2,\ggg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\ggg}$.

Soit $R \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^2,\ggg}$. On a alors $R \in \mathcal{L}^{k+1}$ et $R \in \mathcal{L}^k_{|P^2,\ggg}$ car $\mathcal{L}^{k+1} \subset \mathcal{L}^k$. De plus, $\mathcal{L}^k_{|P^2,\ggg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^1,\ggg}$. Ainsi, $R \in \mathcal{L}^{k+1}$ et $R \in \mathcal{L}^k_{|P^1,\ggg}$. D'où $R \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\ggg}$ et par suite, $\mathcal{L}^{k+1}_{|P^2,\ggg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\ggg}$.

Si $P^2 \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^2,\ggg}$, il suffit de prendre $P' = P^2$.

Si $P^2 \notin \mathcal{L}^{k+1}_{|P^2,\ggg}$, alors $P^2 \in \mathcal{L}^k \setminus \mathcal{L}^{k+1}$ et par suite, $\exists P^3 \in \mathcal{L}^k : P^3 \in \mathcal{L}^k_{|P^3,\ggg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P^3,\ggg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^2,\ggg}$.

$\mathcal{L}^k$ étant fini, $\exists l,\ \exists P^l \in \mathcal{L}^k$:

$P^l \in \mathcal{L}^k_{|P^l,\ggg}, \quad \mathcal{L}^k_{|P^l,\ggg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^{l-1},\ggg} \subsetneq ... \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^3,\ggg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^2,\ggg} \subsetneq \mathcal{L}^k_{|P^1\ggg}$ et $P^l \in \mathcal{L}^{k+1}$.

Ainsi, $P^l \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^l,\ggg}$ et $\mathcal{L}^{k+1}_{|P^l,\ggg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\ggg}$. Il suffit de prendre $P' = P^l$.

(iii) Si $P^1 \notin \mathcal{L}^k$, alors d'après l'hypothèse pour $P = P^1$, $\exists P'' \in \mathcal{L}^k : P'' \in \mathcal{L}^k_{|P'',\ggg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P'',\ggg} \subset \mathcal{L}^k_{|P^1,\ggg}$. D'où $\mathcal{L}^{k+1}_{|P'',\ggg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\ggg}$.

– Si $P'' \in \mathcal{L}^{k+1}$, alors $P'' \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P'',\ggg}$ et $\mathcal{L}^{k+1}_{|P'',\ggg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\ggg}$. Il suffit de prendre $P' = P''$

– Si $P'' \notin \mathcal{L}^{k+1}$, alors $P'' \in \mathcal{L}^k \setminus \mathcal{L}^{k+1}$ et d'après (ii), $\exists P^r \in \mathcal{L}^{k+1} : P^r \in \mathcal{L}^{k+1}_{|P^r,\ggg}$ et $\mathcal{L}^{k+1}_{|P^r,\ggg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P'',\ggg} \subset \mathcal{L}^{k+1}_{|P^1,\ggg}$. Il suffit de prendre $P' = P^r$.

On a alors : $\forall k, \forall P \in \mathcal{P},\ \exists P' \in \mathcal{L}^k : P' \in \mathcal{L}^k_{|P',\ggg}$ et $\mathcal{L}^k_{|P',\ggg} \subset \mathcal{L}^k_{|P,\ggg}$. D'où $\mathcal{L}^k_{|P,\ggg} \neq \emptyset$.

$\mathcal{L}^k$ étant fini, $\exists k^* : \mathcal{L}^{k^*+1} = \mathcal{L}^{k^*}$.

Montrons que $\mathcal{L}^{k^*}$ est N-FCSS.

Pour la stabilité interne, si $Q \in \mathcal{L}^{k^*}$, alors $Q \in \mathcal{L}^{k^*+1}$ et par définition de $\mathcal{L}^{k^*+1}$, $\nexists P \in \mathcal{P}$ et $i \in N : Q \xrightarrow{\{i\}} P,\ \mathcal{L}^{k^*}_{|P,\ggg} \neq \emptyset$ et $P' \succ_i Q,\ \forall P' \in \mathcal{L}^{k^*}_{|P,\ggg}$. Ainsi, $\mathcal{L}^{k^*}$ est intérieurement stable.

Pour la stabilité externe, si $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{L}^{k^*}$, alors $\exists k < k^* :\ P \in \mathcal{L}^k \setminus \mathcal{L}^{k+1}$. Ainsi, $\exists Q \in \mathcal{P}$ et $i \in N : P \xrightarrow{\{i\}} Q,\ \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg} \neq \emptyset$ et $P' \succ_i P,\ \forall P' \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$. $k < k^* \Rightarrow \mathcal{L}^{k^*}_{|Q,\ggg} \subset \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$ car $(\mathcal{L}^k)$ est décroissante. D'où, $P' \succ_i P \quad \forall P' \in \mathcal{L}^{k^*}_{|Q,\ggg}$. De plus, $\forall k,\ \forall P \in \mathcal{P}, \mathcal{L}^k_{|P,\ggg} \neq \emptyset$. Donc $\mathcal{L}^{k^*}_{|Q,\ggg} \neq \emptyset$. On a alors : $\exists Q \in \mathcal{P}$ et $i \in N : P \xrightarrow{\{i\}} Q,\ \mathcal{L}^{k^*}_{|Q,\ggg} \neq \emptyset$ et $P' \succ_i P,\ \forall P' \in \mathcal{L}^{k^*}_{|Q,\ggg}$.
Par conséquent, $\mathcal{L}^{k^*}$ est N-FCSS.

Montrons que N-LFCSS(G)= $\mathcal{L}^{k^*}$.

Soit $\mathcal{L}'$ un ensemble N-FCSS. Montrons que $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^{k^*}$.
Montrons d'abord que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^k$.

(a) Pour $k = 0$, on a $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^0$ car $\mathcal{L}^0 = \mathcal{P}$ et $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{P}$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N} : \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^k$. Montrons que $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^{k+1}$. Supposons par l'absurde que $\mathcal{L}' \nsubseteq \mathcal{L}^{k+1}$. Soit $P \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}^{k+1}$.

Puisque $P \in \mathcal{L}'$ qui est intérieurement stable, alors

$\nexists Q_1 \in \mathcal{P}$ et $i \in N : P \xrightarrow{\{i\}} Q_1,\ \mathcal{L}'_{|Q_1,\ggg} \neq \emptyset,\ P' \succ_{\{i\}} P \quad \forall P' \in \mathcal{L}'_{|Q_1,\ggg}$.

$P \in \mathcal{L}' \Rightarrow P \in \mathcal{L}^k$ car $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^k$ et par suite, puisque $P \notin \mathcal{L}^{k+1}$, alors par définition de $\mathcal{L}^{k+1}$, $\quad \exists Q \in \mathcal{P}$ et $j \in N : P \xrightarrow{\{j\}} Q,\ \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg} \neq \emptyset,\ P' \succ_{\{j\}} P \quad \forall P' \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$.

Comme $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^k$, alors $\mathcal{L}'_{|Q,\ggg} \subseteq \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$. De plus, $P' \succ_{\{j\}} P \quad \forall P' \in \mathcal{L}^k_{|Q,\ggg}$.

D'où $P' \succ_{\{j\}} P \quad \forall P' \in \mathcal{L}'_{|Q,\ggg}$.

Montrons que $\mathcal{L}'_{|Q,\ggg} \neq \emptyset$.

- Si $Q \in \mathcal{L}'$, alors $Q \in \mathcal{L}'_{|Q,\ggg}$ et par suite, $\mathcal{L}'_{|Q,\ggg} \neq \emptyset$.
- Si $Q \notin \mathcal{L}'$ qui est extérieurement stable, alors $\exists P_2 \in \mathcal{P}$ et $k \in N$: $Q \xrightarrow{\{k\}} P_2,\ \mathcal{L}'_{|P_2,\ggg} \neq \emptyset,\ P' \succ_{\{k\}} Q \quad \forall P' \in \mathcal{L}'_{|P_2,\ggg}$.

  Soit $P_0 \in \mathcal{L}'_{|P_2,\ggg}$. On a $P_0 \in \mathcal{L}'$ et $P_0 \succ_{\{k\}} Q$ car $P' \succ_{\{k\}} Q \quad \forall P' \in \mathcal{L}'_{|P_2,\ggg}$.

– Si $P_0 = P_2$, alors $Q \xrightarrow{\{k\}} P_0$ et $P_0 \succ_{\{k\}} Q$ d'où $P_0 \ggg Q$. De plus, $P_0 \in \mathcal{L}'$. Donc $P_0 \in \mathcal{L}'_{|Q,\ggg}$ et par suite, $\mathcal{L}'_{|Q,\ggg} \neq \emptyset$.

– Si $P_0 \neq P_2$, alors $P_0 \gg P_2$. En outre, $Q \xrightarrow{\{k\}} P_2$ et $P_0 \succ_{\{k\}} Q$. D'où $P_0 \ggg Q$. De plus, $P_0 \in \mathcal{L}'$. Donc $P_0 \in \mathcal{L}'_{|Q,\ggg}$ et par suite, $\mathcal{L}'_{|Q,\ggg} \neq \emptyset$.

D'une part, $P \in \mathcal{L}'$. D'autre part $\exists Q \in \mathcal{P}$ et $j \in N : P \xrightarrow{\{j\}} Q,\ \mathcal{L}'_{|Q,\ggg} \neq \emptyset$, $P' \succ_{\{j\}} P \quad \forall P' \in \mathcal{L}'_{|Q,\ggg}$, ce qui contredit la stabilité interne de $\mathcal{L}'$.

On a alors : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^k$. En particulier, pour $k = k^*$, on a $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}^{k^*}$ et par conséquent, N-LFCSS(G)$= \mathcal{L}^{k^*}$. ■

Lemme 3.2.

Si $\Big(N; (\succ_i)_{i\in N}\Big)$ est un jeu hédonistique dans lequel les préférences des joueurs sont strictes, alors toute partition $P^* \in$ Cœur $(\mathcal{P}; >)$ domine indirectement toute partition $P \in \mathcal{P} \setminus \{P^*\}$.

Preuve.

Soit $G = \Big(N; (\succ_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique dans lequel les préférences des joueurs sont strictes, $P^* \in$ Cœur $(\mathcal{P}; >)$ et $P \in \mathcal{P} \setminus \{P^*\}$. Montrons que $P^* \gg P$.

Si $S_P \in P : S_P \notin P^*$ et $| S_P | > 1$, alors $\exists i_1 \in S_P : P^* \succ_{i_1} P$ car, P^* est cœur stable.

Posons $T_1 = \{i_1\}$ et formons la partition P_1 telle que $P \xrightarrow{T_1} P_1$. On a $T_1, (S_P \setminus T_1) \in P_1$.

Si $S_{P_1} \in P_1 : S_{P_1} \notin P^*$ et $| S_{P_1} | > 1$, alors $\exists i_2 \in S_{P_1} : P^* \succ_{i_2} P_1$ car, P^* est cœur stable.

Posons $T_2 = \{i_2\}$ et formons la partition P_2 telle que $P_1 \xrightarrow{T_2} P_2$. On a $T_1, T_2, (S_{P_1} \setminus T_2) \in P_2$.

N étant fini, $\exists P_t \in \mathcal{P} : \forall S_{P_t} \in P_t,\ S_{P_t} \notin P^* \Rightarrow | S_{P_t} | = 1$.

P^* étant cœur stable, $\forall \{i\} \in P_t \setminus P^*,\ P^* \succ_i P$.

Posons $P^* \setminus P_t = \{T_{t+1}; T_{t+2}; ...; T_{t+l}\}$ et formons la partition P_{t+1} telle que $P_t \xrightarrow{T_{t+1}} P_{t+1}$.
$\forall j \in T_{t+1},\ S_{P^*}(j) = T_{t+1} \neq S_{P_t}(j)$ sinon on devrait avoir $T_{t+1} \in P_t$, contredisant le fait que $T_{t+1} \in P^* \setminus P_t$.
$\forall j \in T_{t+1},\ S_{P_t}(j) = \{j\}$ sinon $S_{P_t}(j) \in P_t$ et $\mid S_{P_t}(j) \mid > 1$. Ainsi, $S_{P_t}(j) \in P^*$ et par suite, $T_{t+1} = S_{P_t}(j)$, ce qui est absurde.
On a alors : $\forall j \in T_{t+1}, S_{P^*}(j) \neq S_{P_t}(j)$ et $S_{P_t}(j) = \{j\}$. P^* étant cœur stable, $P^* \succ_{T_{t+1}} P_t$.
Soit $r < l \mid \forall k \leq r, \quad P_{t+k-1} \xrightarrow{T_{t+k}} P_{t+k}$ et $P^* \succ_{T_{t+k}} P_{t+k}$.
Formons la partition P_{t+r+1} telle que $P_{t+r} \xrightarrow{T_{t+r+1}} P_{t+r+1}$.
$\forall j \in T_{t+r+1},\ S_{P^*}(j) = T_{t+r+1}$ et $S_{P_{t+r}}(j) = S_{P_t}(j) = \{j\}$. Puisque $T_{t+r+1} \in P^* \setminus P_t$, alors $T_{t+r+1} \neq \{j\}$. De plus, P^* est cœur stable. D'où $P^* \succ_{T_{t+r+1}} P_{t+r+1}$.
Ainsi, $P_0 = P \xrightarrow{T_1} P_1 \xrightarrow{T_2} P_2 ... P_{t-1} \xrightarrow{T_t} P_t \xrightarrow{T_{t+1}} P_{t+1} \xrightarrow{T_{t+2}} P_{t+2} ... P_{t+l-1} \xrightarrow{T_{t+l}} P_{t+l} = P^*$ et $P^* \succ_{T_j} P_{j-1} \quad \forall j \geq 1$. Donc $P^* \gg P$.

■

Signalons également le théorème ci-dessous dû à Diamantoudi & Xue (2003)[10] qui donne une condition suffisante sur un jeu G pour que C-LFCSS(G) soit un singleton.

Théorème 3.3.
Si G= $\Big(N; (\succ_i)_{i \in N}\Big)$ est un jeu hédonistique dans lequel les préférences des joueurs sont strictes et si le jeu satisfait la propriété de coalition préférée, alors ce jeu admet un unique ensemble C-FCSS.

Preuve.
Puisque $N \subset N$ et $N \neq \emptyset$, d'après l'hypothèse, N admet une coalition préférée S_1.
Si $N \backslash S_1 = \emptyset$, on s'arrête.
Sinon $N \backslash S_1 \subset N$ et $N \backslash S_1 \neq \emptyset$. D'après l'hypothèse, $N \backslash S_1$ admet une coalition préférée S_2.
Si $N \backslash (S_1 \cup S_2) = (N \backslash S_1) \backslash S_2 = \emptyset$, on s'arrête.
Sinon, $N \backslash (S_1 \cup S_2)$ admet une coalition préférée S_3. N étant fini, ce processus s'arrête après un nombre fini d'étapes. $\exists r \in N : S_{i+1} \subset N \backslash (\bigcup\limits_{j \leq i} S_j), N = (\bigcup\limits_{j \leq r} S_j)$.
Par construction, $P^* = \{S_1; S_2; ...; S_r\}$ est une partition de N.
Montrons que P^* est cœur stable. Supposons par l'absurde qu'il y ait un joueur i de S_1 dans une coalition $P-$ bloquante S. Ainsi, $S \succ_i S_1$, ce qui contredit le fait que S_1 soit une coalition préférée de N. Ainsi, aucun joueur de S_1 ne se trouve dans une coalition $P-$ bloquante.
Soit $k \in N, k < r : \forall j \in \{1; 2; ...; k\}$, aucun joueur de S_j n'appartienne à une coalition $P-$ bloquante.
Supposons qu'un joueur i de S_{k+1} se trouve dans une coalition $P-$ bloquante S.

Alors $S \succ_i S_{k+1}$. De plus, $\forall j \in \{1; 2; ...; k\}$, aucun joueur de S_j n'appartient à une coalition $P-$ bloquante. Ainsi, $S,\ S_{k+1} \in 2^{N \setminus (\bigcup\limits_{j \leq k} S_j)}$ et $S \succ_i S_{k+1}$, ce qui contredit le fait que S_{k+1} soit une coalition préférée de $N \setminus (\bigcup\limits_{j \leq k} S_j)$. Aucun joueur de N ne participe à une coalition $P-$ bloquante et par conséquent, la partition P est cœur stable.

Posons $\mathcal{L}^* = \{P^*\}$ et montrons que $\mathcal{L}^*$ est C-FCSS.

Pour la stabilité interne, puisque $| \mathcal{L}^* | = 1$, alors $\mathcal{L}^*$ est intérieurement stable.

Pour la stabilité externe, soit $Q \notin \mathcal{L}^*$. Cherchons $P \in \mathcal{P}$ et $S \in 2^N$:

$Q \xrightarrow{S} P,\ \mathcal{L}^* |_{P,\gg} \neq \emptyset$ et $P' \succ_S Q \quad \forall P' \in \mathcal{L}^* |_{P,\gg}$.

Puisque $\mathcal{L}^* = \{P^*\}$, il suffit de chercher $P \in \mathcal{P}$ et $S \in 2^N$: $Q \xrightarrow{S} P,\ P^* \gg P$ et $P^* \succ_S Q$.

On a $Q \notin \mathcal{L}^*$. D'où $Q \neq P^*$. De plus, P^* est cœur stable. Par suite, P^* domine indirectement Q. Ainsi, $\exists T^1, T^2, ..., T^{k-1} \in 2^N$, $\exists P^1, P^2, ..., P^k \in \mathcal{P}$ vérifiant :

$P^1 = Q, P^k = P^*, P^j \xrightarrow{T^j} P^{j+1}, P^* \succ_{T^j} P^j, j = 1, 2, ..., k-1$. On a $Q \xrightarrow{T^1} P^2$ et $P^* \succ_{T^1} Q$.

De plus, $\exists T^2, T^3, ..., T^{k-1} \in 2^N$, $\exists P^2, P^3, ..., P^k \in \mathcal{P}$ vérifiant :

$P^2 = P^2, P^k = P^*, P^j \xrightarrow{T^j} P^{j+1}, P^* \succ_{T^j} P^j, j = 2, 3, ..., k-1$. D'où $P^* \gg P^2$. Ainsi, $Q \xrightarrow{T^1} P^2,\ P^* \gg P^2$ et $P^* \succ_{T^1} Q$. Il suffit de prendre $P = P^2$ et $S = T^1$.

$\mathcal{L}^* = \{P^*\}$ est donc C-FCSS.

Diamantoudi & Xue (2003) [10] montrent que C-LFCSS(G)= $\{P^*\}$ et par conséquent, $\{P^*\}$ est le seul ensemble C-FCSS du jeu G. ■

3.2 Relations entre les concepts classiques de stabilité et les concepts de stabilité « farsighted »

3.2.1 Partitions cœur stables et Nash stables : les ensembles C-LFCSS(G) et N-LFCSS(G)

Partitions cœur stables et l'ensemble C-LFCSS(G)

Étant donnée une partition cœur stable d'un jeu hédonistique G, on peut se demander si cette partition appartient à l'ensemble C-LFCSS(G).

Théorème 3.4.

*Si $G = \Big(N; (\succ_i)_{i \in N}\Big)$ est un jeu hédonistique dans lequel les préférences des joueurs sont des **ordres totaux**, $\mathcal{L}^*$ l'ensemble C-LFCSS(G) et Cœur(G) l'ensemble des partitions Cœur stables, alors Cœur (G) $\subset \mathcal{L}^*$.*

$\boxed{\texttt{Preuve}}$.

Soient $G = \Big(N; (\succ_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique dans lequel les préférences des joueurs sont des ordres totaux, $\mathcal{L}^*$ l'ensemble C-LFCSS(G) et $P^* \in$ Cœur (G). Montrons que $P^* \in \mathcal{L}^*$.

Posons $\bar{\mathcal{L}} = \{P^*\}$. Montons d'abord que $\bar{\mathcal{L}}$ est C-FCSS.

$\mid \bar{\mathcal{L}} \mid = 1$ donc $\bar{\mathcal{L}}$ est intérieurement stable.

Pour la stabilité externe, soit $Q \notin \bar{\mathcal{L}}$. Cherchons $P \in \mathcal{P}$ et $S \in 2^N$:

$Q \overset{S}{\longrightarrow} P,\ \bar{\mathcal{L}} \mid_{P,\gg} \neq \emptyset$ et $P' \succ_S Q \quad \forall P' \in \bar{\mathcal{L}} \mid_{P,\gg}$.

Puisque $\bar{\mathcal{L}} = \{P^*\}$, il suffit de chercher $P \in \mathcal{P}$ et $S \in 2^N$: $Q \overset{S}{\longrightarrow} P,\ P^* \gg P$ et $P^* \succ_S Q$.

On a $Q \notin \bar{\mathcal{L}}$. D'où $Q \neq P^*$. $P^* \in$ Cœur (G) et les préférences sont des ordres totaux donc P^* domine indirectement Q. Ainsi, $\exists T^1, T^2, ..., T^{k-1} \in 2^N,\ \exists P^1, P^2, ..., P^k \in \mathcal{P}$ vérifiant :

$P^1 = Q, P^k = P^*,\ P^j \overset{T^j}{\longrightarrow} P^{j+1}, P^* \succ_{T^j} P^j, j = 1, 2, ..., k-1$. On a $Q \overset{T^1}{\longrightarrow} P^2$ et $P^* \succ_{T^1} Q$.

De plus, $\exists T^2, T^3, ..., T^{k-1} \in 2^N,\ \exists P^2, P^3, ..., P^k \in \mathcal{P}$ vérifiant :

$P^2 = P^2, P^k = P^*,\ P^j \overset{T^j}{\longrightarrow} P^{j+1}, P^* \succ_{T^j} P^j, j = 2, 3, ..., k-1$. D'où $P^* \gg P^2$. Ainsi, $Q \overset{T^1}{\longrightarrow} P^2,\ P^* \gg P^2$ et $P^* \succ_{T^1} Q$. Il suffit de prendre $P = P^2$ et $S = T^1$.

$\bar{\mathcal{L}} = \{P^*\}$ est donc C-FCSS. Par définition de $\mathcal{L}^*$, on a $\bar{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}^*$. Ainsi, $P^* \in \mathcal{L}^*$ et par conséquent, Cœur (G) $\subset \mathcal{L}^*$.

■

Remarque 3.2.1. Si les préférences ne sont plus des ordres, alors ce résultat n'est plus vrai. Considérons le jeu hédonistique G de 4 joueurs avec les préférences :

$\{1;2\} \ \sim_1\ \{1;3\} \ \succ_1\ \{1;4\} \ \succ_1\ \{1\} \ \succ_1 ...$

$\{2;4\} \ \succ_2\ \{2;1\} \ \sim_2\ \{2;3\} \ \succ_2\ \{2\} \ \succ_2 ...$

$\{1;3\} \ \succ_3\ \{3;4\} \ \sim_3\ \{3;2\} \ \sim_3\ \{3\} \ \succ_3 ...$

$\{3;4\} \ \succ_4\ \{2;4\} \ \succ_4\ \{1;4\} \ \succ_4\ \{4\} \ \succ_4 ...$

Chaque joueur étant indifférent entre les autres coalitions non écrites qui sont rangées strictement après celles qui sont écrites. Si on pose $P = \Big\{\{1;2\};\{3;4\}\Big\}$, alors

$P \in$Cœur(G) mais $P \notin$ C-LFCSS(G). (Diamantoudi & Xue 2003 [10])

Partitions Nash stables et l'ensemble N-LFCSS(G)

Théorème 3.5.

Si $G = \Big(N; (\succ_i)_{i\in N}\Big)$ est un jeu hédonistique dans lequel les préférences des joueurs sont des ***ordres totaux****, Nash(G) l'ensemble des partitions Nash stables et $\mathcal{L}^*$ l'ensemble N-LFCSS(G), alors Nash(G) $\subset \mathcal{L}^*$.*

Preuve.

Soit $\Big(N; (\succ_i)_{i\in N}\Big)$ un jeu hédonistique dans lequel les préférences des joueurs sont des ordres totaux. Si on pose : $\mathcal{L}^0 = \mathcal{P}$, et $\forall k$,

$\mathcal{L}^{k+1} = \left\{ Q \in \mathcal{L}^k \mid \nexists P \in \mathcal{P} \text{ et } i \in N : Q \xrightarrow{\{i\}} P,\ \mathcal{L}^k_{|P,\ggg} \neq \emptyset, P' \succ_{\{i\}} Q \quad \forall P' \in \mathcal{L}^k_{|P,\ggg} \right\}$,
alors $\exists k^* : \mathcal{L}^{k^*+1} = \mathcal{L}^{k^*} = \mathcal{L}^*$.

Montrons que Nash(G) $\subset \mathcal{L}^*$.

Soit $Q \in$ Nash(G). Montrons que $Q \in \mathcal{L}^*$. Il suffit de montrer que $\forall k \geqslant 0,\ Q \in \mathcal{L}^k$.

$\mathcal{L}^0 = \mathcal{P}$ et Nash(G) $\subset \mathcal{P}$. Donc $Q \in \mathcal{L}^0$.

Soit $k \geqslant 0 : Q \in \mathcal{L}^k$. Montrons que $Q \in \mathcal{L}^{k+1}$. Supposons par l'absurde que $Q \notin \mathcal{L}^{k+1}$. Alors $\exists P \in \mathcal{P}$ et $i \in N : Q \xrightarrow{\{i\}} P,\ \mathcal{L}^k_{|P,\ggg} \neq \emptyset, P' \succ_{\{i\}} Q \quad \forall P' \in \mathcal{L}^k_{|P,\ggg}$.

Si $Q = P$, alors $Q \in \mathcal{L}^k_{|P,\ggg}$. Ainsi, $Q \succ_{\{i\}} Q$, ce qui est impossible.

On a alors $Q \neq P$ et puisque $\succ_i$ est un ordre total, soit $P \succ_{\{i\}} Q$ soit $Q \succ_{\{i\}} P$.

Q étant Nash stable et $Q \xrightarrow{\{i\}} P$, alors $Q \succ_{\{i\}} P$. De plus $Q \xrightarrow{\{i\}} P$. D'où $P \xrightarrow{\{i\}} Q$. Ainsi, $Q \ggg P$ et par suite, $Q \succ_{\{i\}} Q$, ce qui est absurde.

Ainsi, $\forall k \geqslant 0,\ Q \in \mathcal{L}^k$. D'où, $Q \in \mathcal{L}^{k^*} = \mathcal{L}^*$ et par conséquent, Nash(G) $\subset \mathcal{L}^*$.

■

3.2.2 Partitions individuellement et contractuellement individuellement stables : les ensembles I-LFCSS(G) et CI-LFCSS(G)

Nous venons de voir qu'avec les préférences strictes d'un jeu hédonistique G, toute partition cœur stable appartient à l'ensemble C-LFCSS(G) et toute partition Nash stable appartient à l'ensemble N-LFCSS(G). On peut donc se poser la question de savoir s'il en est de même avec toute partition individuellement stable et contractuellement individuellement stable.

Nous allons répondre à cette question par la négation.

Reprenons le jeu G de l'**Exemple 3.1.4** dû à Diamantoudi & Xue (2003)[10] dans lequel $N = \{1;2;3;4;5\}$ est un ensemble de 5 joueurs avec les préférences individuelles :

$\{1;4;5\} \succ_1 \{1;2\} \succ_1 \{1\} \succ_1 \ldots$

$\{2;3\} \succ_2 \{2;3;4;5\} \succ_2 \{1;2\} \succ_2 \{2\} \succ_2 \{1;2;3\} \succ_2 \ldots$

$\{2;3\} \succ_3 \{3;4;5\} \succ_3 \{3\} \succ_3 \{1;2;3\} \succ_3 \{1;3\} \succ_3 \ldots$

$\{1;4;5\} \succ_4 \{4;5\} \succ_4 \{3;4;5\} \succ_4 \{4\} \succ_4 \{2;4;5\} \succ_4 \{1;2;4;5\} \succ_4 \{2;3;4;5\} \succ_4 \ldots$

$\{1;4;5\} \succ_5 \{4;5\} \succ_5 \{3;4;5\} \succ_5 \{5\} \succ_5 \{2;4;5\} \succ_5 \{1;2;4;5\} \succ_5 \{1;2;3;5\} \succ_5 \{2;3;4;5\} \succ_5 \ldots$

les autres coalitions non écrites sont rangées de façon stricte après celles qui sont écrites.

Nous avons vu que la partition $P = \Big\{\{1;2\};\{3;4;5\}\Big\}$ est individuellement stable mais n'appartient pas à l'ensemble I-LFCSS(G)=$\left\{\left\{\{1;4;5\};\{2;3\}\right\}\right\}$.

En outre, la partition $P' = \left\{\{1;2\};\{4;5\};\{3\}\right\}$ est contractuellement individuellement stable mais n'appartient pas à l'ensemble CI-LFCSS(G).

♠ Implication pédagogique ♠

Nous proposons ici quelques intérêts de notre travail dans l'éducation.

Mutation du personnel

Dans le cadre de la mutation du personnel enseignant des lycées du Cameroun, un enseignant a une préférence d'être muté dans un lycée A que dans un lycée B. Le personnel d'un lycée peut être vu comme une coalition et une partition peut être vue comme l'ensemble de tous les lycées du pays. Considérons une partition quelconque P.

- Si des professeurs désirent être affectés dans un nouveau lycée créé, on pourra dire que cette partition n'est pas « bonne » au sens du cœur (elle n'est pas cœur stable.)
- Si un professeur souhaite quitter le lycée A pour le lycée B sans nuire le lycée A qu'il laisse et que le personnel du lycée B accepte, on pourra dire que cette partition n'est pas contractuellement individuellement stable.

Nous avons vu dans notre travail que si les professeurs avaient des préférences strictes, on pourrait toujours trouver une « bonne » situation, une situation qui satisfait tout le personnel enseignant des lycées du pays, une partition contractuellement individuellement stable.

Formation des groupes de travail

Mon travail m'a outillé dans la formation des groupes de travail. Après l'évaluation diagnostique des élèves en début d'année, je formerai des groupes d'élèves de telle manière qu'on puisse avoir une réussite optimale des élèves.

Ouverture d'esprit

Les travaux de mon mémoire m'ont permis d'avoir un engouement à la recherche, un esprit ouvert face à la modélisation des situations de vie. En outre, l'utilisation du logiciel Latex me permettra d'obtenir des épreuves plus perfectionnées.

♠ Conclusion et perspectives ♠

Ici s'achève le présent travail qui est un compte rendu des travaux de Bogomolnaia & Matthew (2002) [8] et ceux de Diamantoudi & Xue (2003) [10] sur la stabilité des jeux hédonistiques. Ce travail s'est étalé sur plusieurs points. Tout d'abord nous avons défini des notions de base d'un jeu hédonistique et rappelé des concepts classiques de stabilité. Ensuite, nous avons comparé ces concepts classiques : toute partition Nash stable est aussi individuellement stable qui à son tour est contractuellement individuellement stable. En outre, nous avons détaillé des conditions d'existence d'une partition stable : un jeu hédonistique admet une partition cœur stable s'il est ordinairement balancé (Bogomolnaia & Matthew 2002) [8] ou si et seulement s'il est essentiellement balancé (Iehle 2005) [16]. Pour qu'un jeu hédonistique admette une partition Nash stable, il suffit que les préférences des joueurs soient additivement séparables et symétriques (Bogomolnaia & Matthew 2002)[8], ou qu'elles soient anonymement neutres (Warut 2014) [24]. Enfin, nous avons signalé une forme de myopie de la part des joueurs dans les concepts classiques de stabilité qui n'existent même pas toujours, ce qui nous a motivé de présenter également des concepts de stabilité « farsighted » liés à chacun de ces concepts et qui existent toujours (Harsanyi 1975 [15], Chwe 1994 [9], Diamantoudi & Xue 2003 [10]). En particulier, un apport de mon travail a été de montrer que l'ensemble Nash « farsighted » stable et large sous le conservatisme existe toujours. En outre, sous réserve que les joueurs aient des préférences strictes, nous avons montré que les partitions cœur stables sont aussi « farsighted » stables, résultat qui reste vrai avec les partitions Nash stables mais faux avec les partitions individuellement stables et contractuellement individuellement stables (Diamantoudi & Xue 2003 [10]). Toutefois nous avons supposé que les joueurs présentent des comportements pessimistes. Nous nous proposons dans nos prochains travaux de regarder ce qui se passe lorsque les joueurs présenteront des comportements optimistes.

♠ Bibliographie ♠

[1] ANDJIGA N.G., COURTIN S. (2015) *Coalition configuations and share function Ann Oper Res (2015) 225 :3-25 DOI 10.1007s 10479-014-1754-8*

[2] AUMANN R. J., MASCHLER M. (1964) *The bargaining set for cooperative games. In : Dresher M, Shapley LS, Tucker AW (eds.) Advances in Game Theory. Princeton University Press, Princeton, 443–476.*

[3] AUMANN R. J., DRÈZE, J. H. (1974) *Cooperative games with coalition structures. International Journal of Game Theory, 3, 217–237*

[4] AZIZ H., BRANDT F., SEEDIG H.G. (2010). *Stable partitions in additively separable hedonic games. arXiv :1008.0074v3 [cs.GT] 21 Dec 2010.*

[5] AZIZ H., BRANDT F., HARRENSTEIN P. (2014). *Fractional Hedonic Games. Pages 5–12 of : Proceedings of the 13th International Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS). IFAAMAS.*

[6] BALLESTER C. (2004) *NP-completeness in hedonic games. Games and Economic Behavior 49(1) :1–30.*

[7] BANERJEE S., KONISHI H., SONMEZ, T. (2001) *Core in a simple coalition Formation Game, Social Choice and Welfare **18**,135-153..*

[8] BOGOMOLNAIA A., JACKSON M.O. (2002) *The Stability of Hedonic Coalition Structures. Games and economic behavior **38**,201-230. doi : 10.1006/game.2001.0877, available online at http ://www.idealibrary.com on **IDEAL***

[9] CHWE M.S.Y. (1994) *Farsighted coalitional stability. J Econ Theory 63 : 299-325.*

[10] DIAMANTOUDI E., XUE L. (2003) *Farsighted stability in hedonic games. Social Choice and Welfare **21**,39-61. doi : 10.1007/s00355-003-0200-7.*

[11] DIFFO LAMBO L., WAMBO P. (2015) *The Fairness of Solidarity Bills under the Solidarity Value of Nowak and Radzik. Hindawi Publishing Corporation. Game Theory. Volume 2015, Article ID 450208, 12 pages http ://dx.doi.org/10.1155/2015/450208.*

[12] DREZE J. , GREENBERG J. (1980) *"Hedonic coalitions : Optimality and stability", Econometrica **48** , 987-1003.*

[13] GREENBERG J. (1994) *"Coalition Structures", in : Handbook of Game Theory with Economic Applications, volume 2, R. Aumann and S. Hart (ed), Elsevier Science B. V., Netherlands, 1305-1337.*

[14] GILLIES D. B. (1959). *Solutions to general non-zero-sum games. In : Tucker AW, Luce RD (eds) Contributions to the theory of games IV. Volume 40 of Annals of mathematical studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 47–85.*

[15] HARSANYI J.C. (1974) *Interpretation of stable sets and a proposed alternative definition. Manag Sci 20 :1472-1495.*

[16] IEHLE V. (2005) *The core-partition of a hedonic game. Maison des Sciences Économiques, 106-112 boulevard de L'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13 http ://mse.univ-paris1.fr/Publicat.htm ISSN : 1624-0340.*

[17] MASCHLER M. (1992) *The bargaining set, kernel, and nucleolus, in R. J. Aumann and S. Hart (eds), Handbook of Game Theory with Economic Applications, Vol. I, Elsevier, Amsterdam et al., chapter 34, pp. 591—667.*

[18] MOYOUWOU I., TCHANTCHO H., ANDJIGA N.G. (2013) *The Core, the Objection-Free Core and the Bargaining Set of Transferable Utility Games. Journal of Game Theory 2013, 2(2) : 18-22 DOI : 10.5923/j.jgt.20130202.03*

[19] NOWAK A. S., RADZIK T. (1994). *A solidarity value for n-person transferable utility games, International Journal of Game Theory 23 : 43.48.*

[20] OWEN, G. (1977) *Values of games with a priori unions. In R. Henn & O. Moeschlin (Eds.), Essays in mathematical economics and game theory (pp. 76–88). Berlin : Springer.*

[21] SHAPLEY L. S. (1953) *A value for n-person games. Annals of Mathematics Studies 28, 307–318.*

[22] SCARF, H. (1967) *"The Core of an N-Person Game," Econometrica **35**, 50-69*

[23] VON NEUMANN J., MORGENSTERN, O. (1947) *Theory of Games and Economic Behavior, 2nd Edition. Princeton University Press.*

[24] WARUT S. (2014) *Individual and Group Stability in Neutral Restrictions of Hedonic Games. Department of Computer Science, Stanford University 353 Serra Mall, Stanford, CA 94305, USA*

[25] ZHOU L. (1994). *A new bargaining set of an n-person game and endogenous coalition formation. Games and Economic Behavior 6, 512–526.*