REPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITE DE YAOUNDE I
****
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DE YAOUNDE I
****
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE I
****
HIGHER TEACHER TRAINING
COLLEGE OF YAOUNDE I
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

N
E S

ESPACES PROJECTIFS :

STRUCTURES ADDITIONNELLES SUR UN ESPACE PROJECTIF

Mémoire de Di.P.E.S II de mathématiques

De

EFOUBA EKASSI Rucène

***Matricule* : 11Y613**

Licencié en Mathématiques

Sous la direction de :

Dr MBA Alphonse

Chargé de Cours

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année académique : 2015-2016

ESPACES PROJECTIFS:
Structures additionnelles sur un espace projectif.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Professeur d'enseignement secondaire deuxième grade en Mathématiques

Par:

EFOUBA EKASSI

Rucène

Matricule: $11Y613$

Sous la coordination du:

Dr. MBA Alphonse

Chargé de cours à l'école normale supérieure de Yaoundé

Juin 2016

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire au couple :

EKASSI Jules Didier et MESSINA Flore.

REMERCIEMENTS

Je saisis l'occasion qui m'est offerte pour adresser mes vifs remerciements au Dr. MBA Alphonse, qui au delà de ses multiples occupations m'a attribué un sujet et a guidé mes premiers pas dans la recherche.

Je tiens également à remercier les enseignants de la Faculté de Science de l'Université de Yaoundé I et de l'École Normale Supérieure de Yaoundé qui m'ont suivi tout au long de mon cursus universitaire.

Mes vifs remerciements vont également à :

☞ Mes parents M. EKASSI Jules Didier et Mme EKASSI Flore pour leurs soutiens moral, financier et leur amour sans faille qui ont su me donner la force d'affronter mes défis quotidiens.

☞ Mon oncle M. NDJOBO Dieudonnée pour les sacrifices qu'il a fait pour moi

☞ Aux camarades de classe de la 55$^{\text{ème}}$ promotion pour leur soutien moral durant la formation.

☞ Merci à tous mes frères et sœurs pour leur grande affection, en particulier à BIDZOGO EKASSI Sandrine et ELOBO EKASSI pour leur soutien moral et financier.

☞ Merci également à tous les parents, amis et connaissances que je n'ai pas nommés mais qui m'ont marqué par leurs intentions honorables.

RÉSUMÉ

Notre travail a pour objectif l'étude d'un espace géométrique dans lequel toutes les droites sont sécantes : **l'espace projectif**. Pour se faire, nous utilisons les propriétés des espaces vectoriels et des espaces affines pour obtenir les résultats suivants :

- ☞ Un espace projectif est un espace affine qu'on a complété par des points appelés **points à l'infini**.
- ☞ Un espace projectif, privé d'un hyperplan, a une structure d'espace affine.
- ☞ Les théorèmes de PAPPUS et DESARGUES ont des énoncés et des démonstrations simplifiés dans un espace projectif.
- ☞ Sur un espace projectif complexe on retrouve une structure qui laisse les points réels invariants.
- ☞ Sur un espace projectif, on retrouve la notion d'angle entre deux droites.

Termes clés : espace affine, espace projectif, liaison affine-projectif, structure affine et structure angulaire.

ABSTRACT

Our work is devoted to the analysis of a new geometric space in which all the straight lines are secant : **the projective space**. We use vectorial and affine spaces properties to have the following results :

- ☞ A projective space is an affine space completed by some points called **infinity points**.
- ☞ A projective space, except an hyperplane, has an affine space structure.
- ☞ PAPPUS and DESARGUES theorems have simplified terms and demonstrations in a projective space.
- ☞ In a complex projective space we also have a structure which let reals points invariant.
- ☞ In a projective space, we also have the notion of angle between two straight lines.

Key words : affine space, projective space, affine-projective connexion, affine structure and angular structure.

NOTATIONS

Voici les notations que nous allons utiliser tout au long de notre travail.

- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.
- K : un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
- E : espace vectoriel sur un K.
- $dimE$: dimension de E.
- $T_n(K)$: groupe des translations de K^n.
- $GL_n(K)$: groupe des transformations linéaires de K^n.
- $GL(E)$: groupe des automorphismes linéaires de E.
- $Aff_n(K)$ groupe des transformations affines de K^n.

LISTE DES FIGURES

Table des matières

INTRODUCTION

Les espaces vectoriels et les espaces affines sont des espaces que nous connaissons et que nous utilisons depuis le secondaire. A partir de l'espace vectoriel, on définit un autre espace qui complète l'espace affine et qui joue un rôle en informatique notamment dans le traitement des images : c'est **l'espace projectif**. Notre travail est consacré à l'étude des espaces projectifs et pour se faire nous allons donner le lien entre les espaces affines et les espaces projectifs et étudier la généralisation de certaines structures de l'espace affine dans l'espace projectif. Notre mémoire est donc structuré en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions d'action d'un groupe sur un ensemble, de produit semi direct de groupes et d'espace affine. Dans le deuxième chapitre, nous allons définir les espaces projectifs et donner quelques éléments de base de cet espace. Dans le troisième chapitre, nous allons définir des structures additionnelles sur un espace projectif telles que : structure affine sur un espace projectif, structure réelle sur un espace projectif complexe et structure angulaire sur un espace projectif. Dans le quatrième chapitre, nous allons donner les intérêts pédagogique et didactique de notre travail.

Chapitre Un

ESPACES AFFINES

Dans ce chapitre nous allons donner quelques rappels importants sur les actions d'un groupe sur un ensemble. Nous allons définir les espaces affines avec des éléments de base (sous espaces affines, repères affines, coordonnées, barycentre, théorèmes, applications affines...) qui caractérisent un espace affine. Nous allons enfin donner quelques limites des espaces affines.

1.1 Action d'un groupe sur un ensemble

Définitions 1.1.1 :
Soit G un groupe et soit X un ensemble non vide.

1. On dit que G opère sur X s'il existe un morphisme entre les groupes G et $S(X)$ où $S(X)$ est l'ensemble les bijections de $X \to X$.

2. On appelle **orbite** d'un élément $x \in X$, l'ensemble $O_x = \{gx, g \in G\}$ et on appelle **stabilisateur** de x, l'ensemble $G_x = \{g \in G / gx = x\}$.
3. L'action de G sur X est dite **simple** si tous les stabilisateurs sont triviaux ; c'est à dire $\forall x \in X, G_x = \{e\}$.
4. L'action de G sur X est dite **fidèle** si $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$.
5. L'action de G sur X est dite **transitive** s'il n y a qu'une seule orbite, c'est-à-dire pour tout $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $y = gx$.

Remarque 1.1.1 :
Toute action simple est fidèle.

1.2 Produit semi direct de deux groupes

Soient G, H deux groupes et ϕ un morphisme de H dans $Aut(G)$.

Définition 1.2.1 :

On appelle produit semi direct de G par H relativement à ϕ, le groupe $G \times_\phi H$ muni de la loi $(g,h)(g',h') = (g\phi_h(g'), hh')$.

Exemples 1.2.1 :

1. Le produit semi direct d'un groupe par lui-même est un groupe relativement à l'application identité.
2. Soient $GL_n(K)$ le groupe des isomorphismes linéaires de K^n, $T_n(K)$ le groupe des translations de K^n et $\phi : GL_n(K) \to Aut(T_n(K))$ telle que :
   $\phi(f) = id_{T_n(K)}, \forall t \in T_n(K)$.
   $T_n(K) \times GL_n(K)$ est un sous groupe du produit semi direct de l'ensemble des applications(de K^n sur K^n) sur lui même.
   En effet, $(t,f)(t',f') = (tt', ff') \in T_n(K) \times GL_n(K)$ et
   $(t,f)^{-1} = (t^{-1}, f^{-1}) \in T_n(K) \times GL_n(K)$.

1.3 Espaces affines

Tous les grands résultats obtenus dans ce chapitre sont tirés de [1].

1.3.1 Définitions et propriétés

Définitions 1.3.1 :

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps K et soit X un ensemble non vide.

On dit que X est un **espace affine** de direction E et de dimension n s'il existe une application

$\theta : X \times X \to E$ tels que $\theta(A,B) = \overrightarrow{AB}$ et $\forall A,B,C \in X, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

Un espace affine de dimension 1 est appelé **droite affine** et un espace affine de dimension 2 est appelé **plan affine**.

Exemples 1.3.1 :

1. Tout espace vectoriel E est un espace affine via l'application
   $\theta : E \times E \to E$ telle que $\theta(u, v) = u - v$.
2. Si X et X' sont deux espaces affines de directions respectives E et E', alors $X \times X'$ est un espace affine appelé **espace affine produit** via l'application
   $\theta : (X \times X') \times (X \times X') \to E \times E'$ telle que :
   $\theta((A, A'), (B, B')) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

Remarques 1.3.1 *On fait les remarques suivantes :*

1. *Un espace affine est formé de points, de droites, de plans...*
2. *La définition d'un espace affine X de direction E provient d'une action du groupe additif E sur l'ensemble X.*
   En effet, l'application $\theta : E \to S(X)$ telle que $\theta(u) = f_u$ où $f_u : X \to X$ telle que $f_u(A) = A + u$ est un morphisme de groupes.
   Cette action est fidèle et transitive.

Propriétés 1.3.1 :

Soit X un espace affine de direction E. On a les propriétés suivantes sur X :

1. $\forall A \in X, \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
2. $\forall A, B \in X, \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Remarque 1.3.1 :

Soient X un espace affine de direction E et A un point de cette espace affine.
L'application $\theta_A : X \to E$ telle que $\theta_A(M) = \overrightarrow{AM}$ est bijective et définit donc une structure d'espace vectoriel sur X.
L'espace vectoriel obtenu dépend du point A et est appelé **vectorialisé de l'espace affine** X d'origine A. On le note $X_A = (X; +_A; \times_A)$.
Dans X_A les vecteurs sont des points et on a la relation :
$M +_A N = Q \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AQ}$. A est l'élément nul de X_A par la relation $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

1.3.2 Sous espaces affines

1.3.2.1 Définition, exemples et propriétés

Définition 1.3.1 :

Soit Y un sous ensemble d'un espace affine X de direction E.

Y est appelé **sous espace affine** de X si Y est vide ou s'il contient un point M tel que : $\theta_M(Y)$ est un sous espace vectoriel de E.

Exemples 1.3.2 :

1. Tout singleton formé par un point d'un espace affine X est un sous espace affine de X.
2. L'intersection de plusieurs sous espaces affines est aussi un sous espace affine.
3. Soit W un sous ensemble d'un espace affine X.
   L'intersection de tous les sous espaces affines de X contenant W est un sous espace affine appelé **sous espace affine engendré par** W.
   C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous espace affine contenant W.

Proposition 1.3.1 :

Soit Y un sous espace affine non vide d'un espace affine X de direction E.

Il existe un sous espace vectoriel F de E tel que :

$\forall M \in Y, \theta_M(Y) = F$.

Le sous espace vectoriel F est la direction du sous espace affine Y

Preuve:

Soit $A \in Y$. Posons $F = \theta_A(Y)$.

Soit $M \in Y$. Montrons que $\theta_M(Y) = F$.

Soit $u \in \theta_M(Y)$. Alors il existe $N \in Y$ tel que $u = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$.

Donc $u \in \theta_A(Y) = F$. Ainsi $\theta_M(Y) \subset F$.

De même $F = \theta_A(Y) \subset \theta_M(Y)$. D'où le résultat. ∎

Proposition 1.3.2 :

Soit F un sous espace vectoriel de la direction E d'un espace affine X et soit A un point de X.

Il existe un unique sous espace affine passant par A et de direction F.

Preuve:

Soit $Y = \{M \in X / \overrightarrow{AM} \in F\}$.

On a : $\theta_A(Y) = F$. Donc Y est un sous espace affine de X.

Soit Y' un autre espace affine passant par A et de direction F.

Alors $\theta_A(Y') = F$. Donc $\theta_A(Y) = \theta_A(Y')$

D'où $Y = Y'$ car θ_A est une bijection. ∎

1.3.2.2 Position relative de deux sous espaces affines

Définition 1.3.2 :

On dit que deux sous espaces affines Y et Y' d'un espace affine sont **parallèles** si ils ont la même direction.

Propriétés 1.3.2 :

1. *Deux sous espaces affines parallèles d'un espace affine sont égaux ou disjoints.*
2. *Par un point d'un espace affine il passe une unique droite parallèle à une autre.*
3. *La relation "parallèle à" est une relation d'équivalence entre les droites d'un espace affine.*

Preuve:

1. Soient Y et Y' deux sous espaces affines parallèles d'un espace affine X.
   Supposons que $Y \bigcap Y' \neq \varnothing$ alors il existe A dans X tel que $A \in Y \bigcap Y'$.
   On a : $\theta_A(Y) = \theta_A(Y')$ d'où $Y = Y'$.
2. Soient D une droite affine de direction E et A un point qui n'est pas sur D.
   D'après la proposition précédente, il existe un unique sous espace affine passant par A de direction E.
   D'où le résultat. ∎

1.3.3 Repères et coordonnées

1.3.3.1 Repères cartésiens et coordonnées cartésiennes

Soit X un espace affine de direction E et de dimension finie n.

- $R = (O, e_1, e_2, ..., e_n)$ est un **repère affine** de X si O est un point de X et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.
- Un point M de X est repéré par les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(e_1, ..., e_n)$ et ces coordonnées sont appelées **coordonnées cartésiennes** du point M.

Exemple 1.3.1 :

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^n; n \geq 1$ on a le repère affine $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n})$ où $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et O un point de $\mathbb{R}^n$.

1.3.3.2 Repère affine et coordonnées affines

Soit X un espace affine de direction E et de dimension finie n.

Soient $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ des points de X.

- On dit que $R = (A_0, A_1, ..., A_n)$ est un **repère affine** de X si $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, ..., \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E.
- Un point M de X, dans le repère R s'écrit de manière unique sous la forme $M = A_0 + x_1\overrightarrow{A_0A_1} + ... + x_n\overrightarrow{A_0A_n}$ et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ sont les **coordonnées affines** du point M.

Exemple 1.3.2 :

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, trois points non alignés forment un repère affine de l'espace affine $\mathbb{R}^2$.

1.3.4 Barycentre et coordonnées barycentriques

Définitions 1.3.2 :

Soient X un espace affine de direction E et $(A_i, \alpha_i)(1 \leq i \leq n)$ des points pondérés de X tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

☞ Il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

Ce point G est appelé **barycentre** des points pondérés $(A_i, \alpha_i)(1 \leq i \leq n)$.

☞ Lorsque $\alpha_i = \alpha_j (1 \leq i, j \leq n)$, G est appelé **isobarycentre**.

☞ Dans le cas où X est de dimension finie n et que $(A_i)(0 \leq i \leq n)$ est un repère affine de X, un point M de X s'écrit de manière unique comme barycentre des points $(A_i, \alpha_i)(0 \leq i \leq n)$ avec $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$.
Le $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ représente les **coordonnées barycentriques** du point M dans le repère $(A_0, A_1, ..., A_n)$ de X.

1.3.5 Applications affines

1.3.5.1 Définition et exemples

Définition 1.3.3 :

Soient X et Y deux espaces affines de directions respectives E et F.

Une application $f : X \to Y$ est dite **affine** s'il existe une application linéaire $\phi : E \to F$ et un point O de X tel que pour tout point M de X :

$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \phi(\overrightarrow{OM})$.

Remarque 1.3.2 :

L'application linéaire ϕ ne dépend pas du point O mais seulement de f.

En effet, soit O' un autre point de X.

On a : $\overrightarrow{f(O')f(M)} = \overrightarrow{f(O')f(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)} = -\overrightarrow{f(O)f(O')} + \overrightarrow{f(O)f(M)}$

Donc $\overrightarrow{f(O')f(M)} = -\phi(\overrightarrow{OO'}) + \phi(\overrightarrow{OM}) = \phi(-\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM}) = \phi(\overrightarrow{O'M})$

On peut donc noter par $\vec{f}$ l'application linéaire associée à f.

Exemples 1.3.3 :

1. L'application constante d'un espace affine vers un point de cet espace est une application affine dont l'application linéaire associé est l'application nulle.
2. Un espace vectoriel étant un espace affine, toute application linaire est donc une application affine.
3. Les translations, les symétries, les homothéties...sont des applications affines.

4. Si $X = Y = K^n$ alors toute application affine est de la forme
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + ... + a_n^1 x_n + b_1 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + ... + a_n^2 x_n + b_2 \\ . \\ . \\ a_1^n x_n + a_2^n x_2 + ... + a_n^n x_n + b_n \end{pmatrix}$$

1.3.5.2 Propriétés

On a les propriétés suivantes :

1. Les applications affines conservent le barycentre de points pondérés.
2. L'image d'un sous espace affine par une application affine est un sous espace affine.
3. Les images de trois points alignés par une application affine sont alignées.
4. L'image réciproque d'un sous espace affine par une application affine est un sous espace affine.

Preuve:

1. Soient X et Y deux espaces affines et $A_i (1 \leq i \leq n)$ des points de X.
   Soit $G = bar\{(A_1, \alpha_1), ..., (A_n, \alpha_n)\}$ et soit f une application affine de X vers Y d'application linéaire associée $\vec{f}$.
   On a : $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ donc $\vec{f}(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}$.
   On a donc $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{f}(\overrightarrow{GA_i}) = \vec{0}$, d'où $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{f(G)f(A_i)} = \vec{0}$.
2. Soient X et X' deux espaces affines, f une application affine de X vers X' et Y un sous espace affine de X de direction F.
   Si Y est vide alors $f(Y)$ est vide et l'ensemble vide est un sous espace affine.
   Si Y est non vide, alors soit A un point de Y. $f(Y)$ est le sous espace affine de X' passant par $f(A)$ et de direction $\vec{f}(F)$.
3. Découle de 2.
4. Soient X et X' deux espaces affines, f une application de X vers X' et Y un sous espace affine de X' de direction F.
   Si Y est vide, alors $f^{-1}(Y)$ est vide et est donc un sous espace affine de X.
   Si Y est non vide, alors soit A un point de Y. $f^{-1}(Y)$ est le sous espace affine de X passant par $f^{-1}(A)$ et de direction $\vec{f}^{-1}(F)$. ■

1.3.5.3 Groupe affine

Proposition 1.3.3 :

1. *La composée de deux applications affines est une application affine.*
2. *Une application affine est bijective si et seulement si l'application linéaire associée est bijective.*
3. *La bijection réciproque d'une application affine bijective est une application affine bijective.*

Preuve:

1. Soit f et g deux applications dont la composée $f \circ g$ est possible.
   $\overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)} = \overrightarrow{f(g(M) f(g(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{g(M) g(N)}) = \vec{f} \circ \vec{g}(\overrightarrow{MN})$.
   D'où $f \circ g$ est l'application affine associée à $\vec{f} \circ \vec{g}$.
2. Soit f une application affine d'un espace affine X vers un espace affine X' de direction E'.
   Supposons que $\vec{f}$ est bijective. Soient M et N deux points de X tels que $f(M) = f(N)$.
   $\overrightarrow{f(M) f(N)} = \vec{0}$ c'est à dire $\vec{f}(\overrightarrow{MN}) = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ car $\vec{f}$ est bijective. Par conséquent $M = N$. D'où f est injective.
   Soient M' un point de X', O un point de X d'image O' et M un point de X tel que $\vec{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'}$.
   $\overrightarrow{O' f(O + \overrightarrow{OM})} = \vec{f}(O(O + \overrightarrow{OM})) = \overrightarrow{O'M'}$. D'où f est surjective.

   Réciproquement, supposons que f est bijective et soit O un point de X d'image O' Soient u et v deux vecteurs tels que $\vec{f}(u) = \vec{f}(v)$. Il existe deux point M et N de X tels que $u = \overrightarrow{OM}$ et $v = \overrightarrow{ON}$. On a donc $\overrightarrow{O' f(M)} = \overrightarrow{O' f(N)}$ c'est à dire $f(M) = f(N)$ et $M = N$ (car f est injective). Par conséquent $u = v$. D'où $\vec{f}$ est injective.
   Soit v un vecteur de E'. Il existe un unique point B' tel que $\overrightarrow{O'B'} = v$. On peut trouver B de X tel que $f(B) = B'$. Par conséquent $\vec{f}(\overrightarrow{OB}) = v$.
3. La réciproque d'une application affine bijective f est l'application affine bijective f^{-1} telle que $\overrightarrow{f^{-1}} = \vec{f}^{\,-1}$. ■

Remarques 1.3.2 *Ces remarques découlent des propositions ci-dessus.*

- *L'ensemble des applications affines bijectives d'un espace affine X sur lui même est un groupe appelé* ***groupe affine*** *de X et est noté $GA(X)$.(Le groupe $GA(K^n)$ est souvent noté $Aff_n(K)$).*
- *L'application $GA(X) \to GL(E)$, qui à une bijection affine de X associe l'automorphisme linéaire associée, est un homomorphisme surjectif de groupes dont le noyau est l'ensemble des translations de X.*

En effet, la composée de deux applications affines f et f' de $GA(X)$ a pour application linéaire associée $\vec{f} \circ \vec{f'}$ qui est un élément de $GL(E)$. Et aussi, si ϕ est un élément de $GL(E)$ alors ϕ est l'application linéaire associée à l'application affine f telle que $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \phi(\overrightarrow{AB})$.

De plus si $f \in GA(X)$ a pour isomorphisme linéaire associé id_E alors $\forall M, N \in X$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{f(M)f(N)}$. D'où f est une translation.

Proposition 1.3.4 :

Soient K un corps et n un entier naturel non nul.

Le groupe $Aff_n(K)$ s'identifie au produit semi direct des groupes $GL_n(K)$, des transformations linéaires de K^n et celui des translations de K^n.

Preuve:

Soit f une transformation affine de K^n.

Si $f = \vec{f}$ alors $f = id_{K^n} \circ f$ et id_{K^n} est une translation.

Si $f \neq \vec{f}$ alors $f = g \circ \vec{f}$ où $\vec{g} = id_{K^n}$. D'où g est une translation t et $f = t \circ \vec{f}$.

Posons $\phi : T_n(K) \times GL_n(K) \to Aff_n(K)$ telle que $\phi(t, f) = t \circ f$.

ϕ est surjective.

Soient $(t, f), (t', f') \in T_n(K) \times GL_n(K)$ tels que $t \circ f = t' \circ f'$, alors $f = t^{-1} \circ t' \circ f'$ donc $t^{-1} \circ t' \circ f'$ est une application linéaire, ainsi $t^{-1} \circ t' = id_{K^n}$ car sinon $t^{-1} \circ t'$ ne serait pas une translation. D'où $t = t'$. Par conséquent $f = f'$. ϕ est donc injective. ∎

1.3.6 Quelques théorèmes dans les espaces affines

1.3.6.1 Théorème de THALÈS

Soient d, d' et d'' trois droites parallèles distinctes, D_1 et D_2 deux droites sécantes dont aucune n'est parallèle à d.

On pose $A_i = D_i \bigcap d$, $A'_i = D_i \bigcap d'$ et $A''_i = D_i \bigcap d''$ $i = 1, 2$. Alors on a :
$\dfrac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \dfrac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$.

Réciproquement si un point B de D_1 vérifie $\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A'_1}} = \dfrac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$, alors il est sur d''.

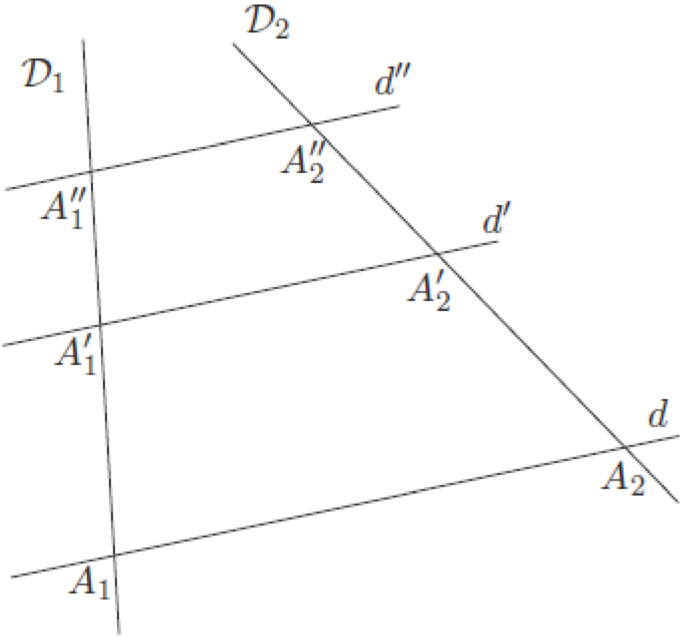

Figure 1.1 – Théorème de THALES dans le cas général

Preuve:

Soit p la projection sur D_2 parallèlement à d et soit $\vec{p}$ la projection linéaire associée.

p envoie A_1 sur A_2, A'_1 sur A'_2 et A''_1 sur A''_2. De plus $\overrightarrow{A_1A''_1} = \lambda\overrightarrow{A_1A'_1}$ donc $\vec{p}(\overrightarrow{A_1A''_1}) = \lambda\vec{p}(\overrightarrow{A_1A'_1})$. D'où $\overrightarrow{A_2A''_2} = \lambda\overrightarrow{A_2A'_2}$.

Par conséquent : $\lambda = \dfrac{\overline{A_1A''_1}}{\overline{A_1A'_1}} = \dfrac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$.

Supposons que $\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A'_1}} = \dfrac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}$ alors $\overrightarrow{A_1B} = \dfrac{\overline{A_2A''_2}}{\overline{A_2A'_2}}\overrightarrow{A_1A'_1}$ D'où $B = A''_1$. ∎

Proposition 1.3.5 :

Soient D_1 et D_2 deux droites sécantes en A et d et d' deux droites parallèles distinctes tels que $A_i = D_i \bigcap d$ et $A'_i = D_i \bigcap d'$; $i = 1, 2$.

On a : $\dfrac{\overline{AA'_1}}{\overline{AA_1}} = \dfrac{\overline{AA'_2}}{\overline{AA_2}} = \dfrac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A_1A_2}}$.

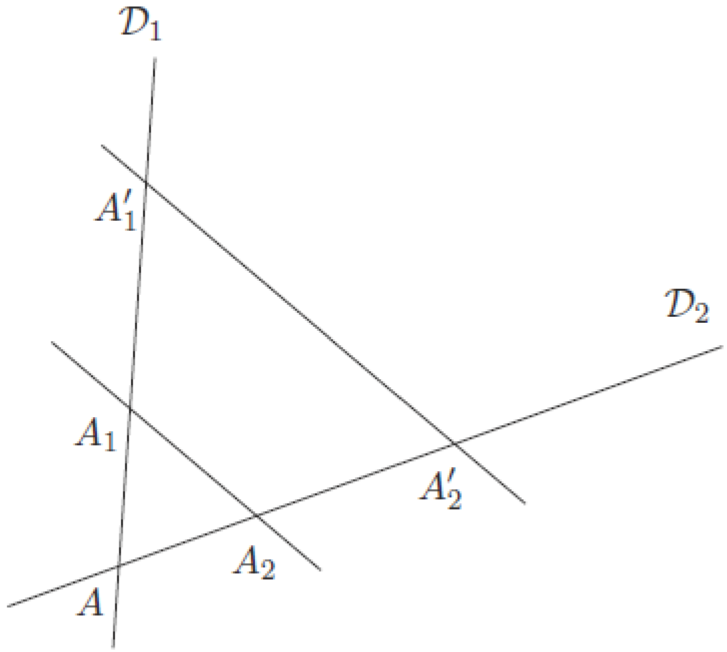

FIGURE 1.2 – Cas particulier du théorème de THALES

Preuve:

On fait passer une droite parallèle à d passant par A et on applique le théorème de THALES. On obtient :
$\dfrac{\overline{AA'_1}}{\overline{AA_1}} = \dfrac{\overline{AA'_2}}{\overline{AA_2}}$.
Soit h l'homothétie de centre A qui envoie A_1 sur A'_1. Alors h envoie A_2 sur A'_2. Et donc
$\dfrac{\overline{AA'_1}}{\overline{AA_1}} = \dfrac{\overline{AA'_2}}{\overline{AA_2}} = \dfrac{\overline{A'_1A'_2}}{\overline{A_1A_2}}$. ■

1.3.6.2 Théorème de PAPPUS

Théorème 1.3.1 :

Soient A ,B et C trois point d'une droite D et A', B' et C' trois d'une droite D'.

Si $A'B \parallel AB'$, $B'C \parallel BC'$ alors $A'C \parallel AC'$.

Preuve:

Supposons que D et D' ne sont pas parallèles et qu'elles se rencontrent en un point O.

Soit h l'homothétie de centre O qui transforme A en B et soit h' l'homothétie de centre O qui transforme B en C. On a :

$h' \circ h(A) = C$ et $h \circ h'(C') = A'$. Or $h \circ h' = h' \circ h$ car deux homothéties de même centre commutent. Donc $h \circ h'$ est une homothétie qui transforme A en C et C' en A'. D'où

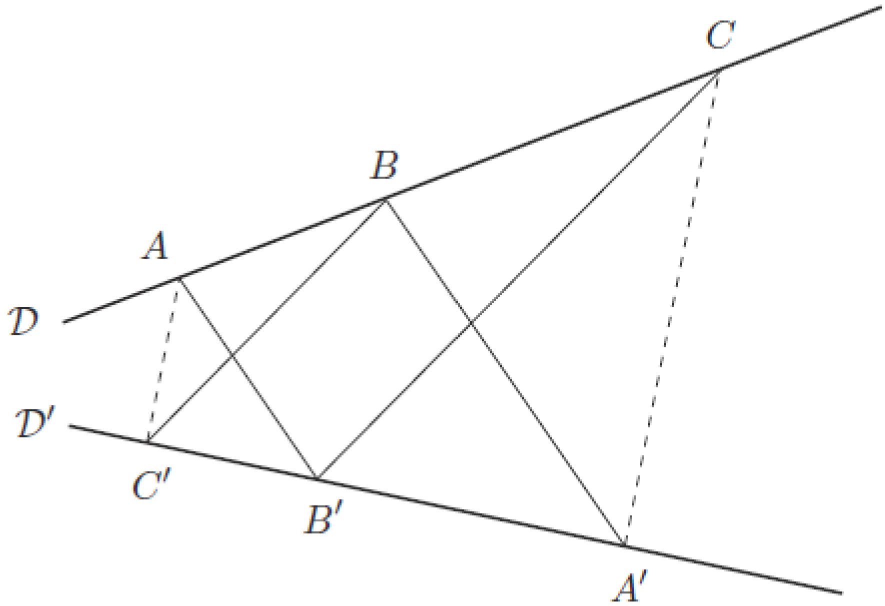

Figure 1.3 – Théorème de PAPPUS

$AC' \parallel CA'$.

Supposons que D et D' soient parallèles. On procède de la même façon mais en utilisant des translations. ∎

1.3.6.3 Théorème de DESARGUES

Théorème 1.3.2 :

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommet commun et à côtés parallèles. Alors les droites AA', BB' et CC' sont concourantes ou parallèles.

Preuve:

Supposons que les droites AA' et BB' soient sécantes en un point O. Soit h l'homothétie de centre O qui envoie A sur A'. Alors $h(B) = B'$ d'après la relation de THALES.

Soit C'' l'image de C par h. Alors $A'C'' \parallel AC$, donc C'' est sur la parallèle à AC passant par A', donc sur $A'C'$. On a aussi $B'C'' \parallel BC$ donc C'' est sur la parallèle à BC passant par B' qui est $B'C'$. D'où $C'' = C'$.

Supposons que les droites AA' et BB' soient plutôt parallèles, alors on utilise le même raisonnement mais avec des translations. ∎

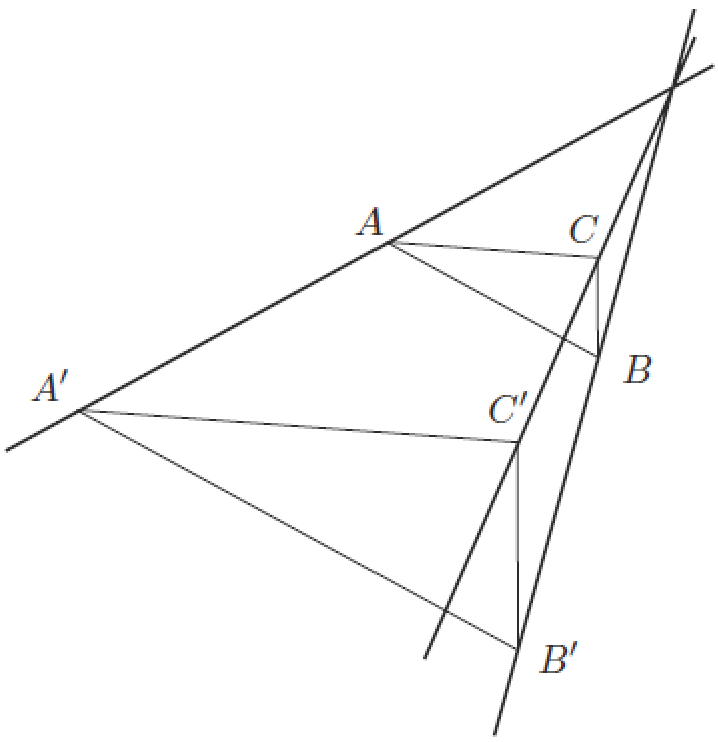

FIGURE 1.4 – Théorème de DESARGUES

1.3.7 Quelques limites des espaces affines

Dans les espaces affines on rencontre la notion de parallélisme et deux sous espaces affines distincts qui sont parallèles ne se **rencontrent pas**.
Cette notion pose un gros problème au niveau des énoncés et des démonstrations de certains théorèmes en géométrie affine (théorèmes de PAPPUS, DESARGUES).
Il serait donc intéressant de travailler dans un nouvel espace, qui englobe l'espace affine, le complète et où la notion de droites non sécantes n'existe pas.

ESPACES PROJECTIFS

L'un des objectifs de ce chapitre est de présenter les espaces projectifs et quelques éléments de base sur ces espaces projectifs(sous espaces projectifs, coordonnées homogènes, homographies, repères projectifs, birapport etc...). Le but principal étant de donner le lien qui existe entre les espaces projectifs et les espaces affines. On verra comment compléter un espace affine pour en faire un espace projectif.

2.1 Espaces projectifs

2.1.1 Définitions et exemples

Définitions 2.1.1 :

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps K. On appelle **espace projectif issu de** E et on note $P(E)$ l'ensemble des droites vectorielles de E (c'est-à-dire l'ensemble des sous espaces vectoriels de dimension 1).

Par définition $dimP(E) = dimE - 1$

☞ Si $dimE = 2$ alors $P(E)$ est une **droite projective**.

☞ Si $dimE = 3$ alors $P(E)$ est un **plan projectif**.

Exemples 2.1.1 :

1. $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{C}^{n+1}$ sont des $\mathbb{R}-$ espaces vectoriels $(n \geq 2)$, donc $P(\mathbb{R}^{n+1})$ et $P(\mathbb{C}^{n+1})$ sont des espaces projectifs notés respectivement $P^n(\mathbb{R})$ et $P^n(\mathbb{C})$.
2. Soit K un corps et soit $n \geq 1$. K^{n+1} est un espace vectoriel sur K et donc $P(K^{n+1})$ est un espace projectif de dimension n qu'on note généralement $P^n(K)$.
3. Si E est un espace vectoriel de dimension $n+1$, alors son dual $E^\star$ est un espace vectoriel.

$P(E^\star)$ est donc un espace projectif appelé **espace projectif dual**.

On sait qu'une droite de E définit un plan de $E^\star$ et un plan de E définit une droite de $E^\star$.

Par conséquent, on a le tableau suivant :

$P(E)$	E	$E^\star$	$P(E^\star)$
point	droite vectorielle	plan vectoriel	droite projective
droite projective	plan vectoriel	droite vectoriel	point

2.1.2 Sous espaces projectifs

Définition 2.1.1 :

Soit $P(E)$ un espace projectif sur un espace vectoriel E. On dit qu'un ensemble V est un **sous espace projectif** de $P(E)$ si $V = P(F)$, F étant un sous espace vectoriel de E.

Exemple 2.1.1 :

$P^n(\mathbb{R})$ est un sous espace projectif de $P^n(\mathbb{C})$

Propositions 2.1.1 :

Soient V et W deux sous espaces projectifs d'un espace projectif $P(E)$.

1. *Si $dimV + dimW \geq dimP(E)$ alors $V \bigcap W$ n'est pas vide.*
2. *Deux droites projectives d'un plan projectif se coupent toujours.*

M. Audin (2006, page 179)

Preuve:

1. Soient F et G les sous espaces vectoriels de E tels que $V = P(F)$ et $W = P(G)$. $dimV + dimW \geq dimP(E)$ signifie que $dimF - 1 + dimG - 1 \geq dimE - 1$, donc $dinnF + dimG \geq dimE + 1$. Or $dim(F + G) = dimF + dimG - dim(F \bigcap G)$ donc $dim(F+G)+dim(F \bigcap G) = dimF+dimG$. Donc $dimF+dimG \leq dimE+dim(F \bigcap G)$ car $dim(F+G) \leq dimE$. C'est-à-dire $dim(F \bigcap G) \geq 1$. Par conséquent $F \bigcap G$ contient une droite vectorielle et de ce fait $V \bigcap W = P(F \bigcap G)$ est non vide.
2. Considérons un plan projectif $P(E)$ et deux droites projectives D et D' de ce plan. $dimD + dimD' = 2 \geq dimP(E)$. Donc $D \bigcap D'$ est non vide d'après 1.. ■

2.2 Coordonnées homogènes

Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$ et soit $(e_0, ...e_n)$ une base de E. Choisissons un point M de $P(E)$ et un vecteur u qui engendre la droite M.
Les coordonnées $(X_0, X_1, ..., X_n)$ de u dans la base de E représentent les **coordonnées homogènes** du point M. On les note $[X_0, X_1, ..., X_n]$.

Proposition 2.2.1 :
Les coordonnées homogènes $[X_0, X_1, ..., X_n]$ et $[Y_0, Y_1, ..., Y_n]$ définissent le même point de $P(E)$ si et seulement s'il existe un réel non nul λ tel que $X_i = \lambda Y_i$ $0 \leq i \leq n$.

J.C Sidler (2000, page 2)

Preuve:
$[X_0, X_1, ..., X_n]$ et $[Y_0, Y_1, ..., Y_n]$ sont les coordonnées homogènes d'un même point M signifie que $(X_0, X_1, ..., X_n)$ et $(Y_0, Y_1, ..., Y_n)$ sont les coordonnées de deux vecteurs u et v qui engendrent la droite M. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}*$ tel que $u = \lambda v$. Réciproquement, $X_i = \lambda Y_i$ $(0 \leq i \leq n)$ signifie que les vecteurs $u(X_0, X_1, ..., X_n)$ et $v(Y_0, Y_1, ..., Y_n)$ engendre la même droite M et de ce fait M a pour coordonnées homogènes $[X_0, X_1, ..., X_n]$ et $[Y_0, Y_1, ..., Y_n]$. ■

2.3 Homographies et repères projectifs

2.3.1 Homographies

Définition 2.3.1 :
Soient E, E' deux espaces vectoriels de même dimension et $f : E \to E'$ un isomorphisme. f transforme toute droite vectorielle de E en une droite vectorielle de E', donc f définit une application $\hat{f} : P(E) \to P(E')$ qui est bijective. $\hat{f}$ est appelée **transformation projective** ou **homographie**. Une transformation projective de $P(E)$ dans lui-même est appelée **automorphisme projectif**.

Exemple 2.3.1 :
L'ensemble des automorphismes projectifs de $P^n(K) \to P^n(K)$ est noté $PG_n(K)$.

Propriétés 2.3.1 :

1. *La composée de deux homographies est une homographie.*
2. *L'image d'une droite projective par une homographie est une droite projective.*
3. *L'ensemble des automorphismes projectifs sur un espace projectif $P(E)$ est un groupe pour la composition des applications, noté $GP(E)$. On l'appelle* ***groupe projectif de*** *E.*
4. *Soit $GL(E)$ le groupe des isomorphismes linéaires de $E \to E$.*

   L'application $GL(E) \to GP(E)$ qui à tout isomorphisme linéaire associe une homographie de $P(E)$ est un homomorphisme surjectif de groupes dont le noyau est le groupe des homothéties de E (l'ensemble des homothéties vectorielles est un groupe).

Preuve:

1. Soient $\hat{f}$ et $\hat{f}'$ deux homographies provenant d'isomorphismes d'espaces vectoriels f et f'. Soit M une droite vectorielle engendrée par un vecteur u. $\hat{f}'(M)$ est la droite vectorielle engendrée par $f'(u)$. $\hat{f} \circ \hat{f}'(M)$ est la droite vectorielle engendrée par $f \circ f'(u)$. D'où $\hat{f} \circ \hat{f}'(M) = f \hat{\circ} f'(M)$. Par conséquent $\hat{f} \circ \hat{f}' = f \hat{\circ} f'$.
2. L'image d'un plan vectoriel par un isomorphisme linéaire est un plan vectoriel, donc l'image d'une droite projective par une homographie est une droite projective.
3. La composée de deux automorphismes projectifs est un automorphisme projectif (d'après 1.). L'identité de $P(E)$ est une homographie provenant de l'identité de E. Et si $\hat{g}$ est une homographie provenant de g alors $\hat{g}^{-1} = \widehat{g^{-1}}$. D'où $PG_n(E)$ est un groupe.
4. Soit $\phi : GL(E) \to GP(E)$ l'application qui à tout isomorphisme linéaire associe une homographie. ϕ est un morphisme de groupes d'après 3. Soit $f \in GL(E)$ tel que $\hat{f} = id_{P(E)}$. Alors f préserve toutes les droites vectorielles c'est-à-dire $\forall x \in E$ il existe un scalaire λ non nul tel que $f(x) = \lambda x$. Donc f est une homothétie. ■

Remarques 2.3.1 *1. Si f, f' sont deux homographies de $P(E) \to P(E')$, alors $f'^{-1} \circ f$ est un automorphisme projectif.*

2. *Le groupe des matrices $GL(n+1,K)$ étant isomorphe au groupe des isomorphismes linéaires alors toute homographie provient d'une matrice de $GL(n+1,K)$. Une homographie provenant d'une matrice A de $GL(n+1,K)$ est notée $\hat{A}$.*

2.3.2 Repères projectifs

Soit E un $K-$ espace vectoriel de dimension $n+1$. Une base $(m_1, m_2, ..., m_{n+1})$ de E induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $f : K^{n+1} \to E$ tel que : $f(e_i) = m_i$ avec $1 \leq i \leq n+1$ et $(e_i)_{1\leq i \leq n+1}$ étant la base canonique de K^{n+1}.

Cet isomorphisme f définit donc une homographie $\hat{f} : P^n(K) \to P(E)$.

Définition 2.3.2 :
On appelle **repère projectif** d'un espace projectif $P(E)$ de dimension n toute transformation projective $f : P^n(K) \to P(E)$.

Proposition 2.3.1 :
Deux repères projectifs f et f' sont égaux si et seulement si ils proviennent de deux bases équivalentes.

Preuve:
Il est clair que deux bases équivalentes induisent le même repère projectif.
Soient $(m_1, m_2, ..., m_{n+1})$ et $(m'_1, m'_2, ..., m'_{n+1})$ deux bases définissant le même repère projectif. Alors $\hat{f} = \hat{f'}$ c'est à dire $f^{-1} \circ f' = id_{P^n(K)}$. Donc $f^{-1} \circ f'$ est une homothétie (d'après la propriété 4 des homographies). Par conséquent il existe λ dans K^n non nul tel que $f' = \lambda f$. D'où l'équivalence des deux bases. ∎

Définition 2.3.3 :
Soit $P(E)$ un espace projectif de dimension n. r points $x_1, x_2, ..., x_r$ sont projectivement indépendants si les vecteurs e_i tels que $x_i = [e_i]$ sont linéairement indépendants.

$[e_i]$ étant la droite vectorielle engendrée par le vecteur e_i.

Proposition 2.3.2 :

$n+2$ points $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ d'un espace projectif de dimension n tels que toute sous famille de $n+1$ points est projectivement indépendante, définissent un repère projectif de $P(E)$ et réciproquement.

Preuve:

Soient $(e'_i)_{1\leq i\leq n+1}$ des vecteurs de E tels que $x_i = [e'_i]$. Posons e_{n+2} un vecteur tel que $x_{n+2} = [e_{n+2}]$. $(e'_1, e'_2, ..., e'_{n+1})$ forme une base de E car $x_1, ..., x_{n+1}$ sont projectivement indépendants. Donc $e_{n+2} = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + ... + \lambda_{n+1} e'_{n+1}$. Comme la famille $(x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n+2})$ est projectivement indépendante, alors $\lambda_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n+1)$.

Posons $e_i = \lambda_i e'_i$ $(1 \leq i \leq n+1)$. $(e_1, ..., e_{n+1})$ est aussi une base de E. Les points $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ définissent la base $(e_1, ..., e_{n+1})$ de E tel que $[e_i] = x_i$ $(1 \leq i \leq n+1)$, $e_{n+2} = e_1 + e_2 + ... + e_{n+1}$ et $x_{n+2} = [e_{n+2}]$. Donc les points $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ définissent le repère projectif associé à la base $(e_1, ..., e_{n+1})$.

Réciproquement, soit f un repère projectif de $P(E)$ et soit $(e_1, ..., e_{n+1})$ la base associée à ce repère. Posons $x_i = [e_i]$ $(1 \leq i \leq n+1)$ et $x_{n+2} = [e_{n+2}]$ avec $e_{n+2} = e_1 + ... + e_{n+1}$. Toute sous famille de $n+1$ vecteurs de la famille $(e_1, ..., e_{n+1}, e_{n+2})$ est linéairement indépendante. D'où le résultat. ∎

Cette proposition nous permet de donner une autre définition du repère projectif équivalente à la première.

Définition 2.3.4 :

Soient $P(E)$ un espace projectif de dimension n et $(e_1, ..., e_{n+1})$ une base de E.

On appelle repère projectif de $P(E)$ la donnée de $n+2$ points $M_1, ..., M_{n+2}$ de $P(E)$ tels que : $M_i = [e_i]$, $1 \leq i \leq n+2$ avec $e_{n+2} = e_1 + ... + e_{n+1}$.

Exemple 2.3.2 :

Trois points distincts d'une droite projective forment repère projectif de cette droite.
En particulier, 0, 1 et ∞ forment un repère projectif de $K \cup \{\infty\}$.

Théorème 2.3.1 :

Soient $P(E)$ et $P(E')$ deux espaces projectifs de même dimension n et de repères projectifs respectifs (x_i) et (x'_i) $(1 \leq i \leq n+2)$. Il existe une unique homographie $\phi : P(E) \to P(E')$ telle que $\phi(x_i) = x'_i$.

J.C Sidler (2000, page 5)

Preuve:

Soient (e_i) et (e'_i) les bases associées aux repères projectifs (x_i) et (x'_i). Il existe un unique isomorphisme $f : E \to E'$ tel que $f(e_i) = e'_i$. Donc $\hat{f}$ est une homographie telle que $\hat{f}(x_i) = x'_i$ $(1 \leq i \leq n+1)$. On a : $f(e_{n+2}) = e'_{n+2}$ donc $\hat{f}(x_{n+2}) = x'_{n+2}$. Comme f est unique alors $\hat{f}$ est aussi unique. ∎

2.4 Liaison entre affine et projectif

2.4.1 Droite projective

Soient E un espace vectoriel de dimension 2 et (e_1, e_2) une base de E. $P(E)$ est une droite projective.

Toutes les droites vectorielles de E ont un unique vecteur directeur de coordonnées $(x, 1)$ sauf la droite de vecteur directeur e_1. Autrement dit toutes les droites vectorielles rencontrent la droite affine d'équation $y = 1$ en un point unique, sauf la droite $[e_1]$.

On peut donc définir une bijection f : (droite affine $y = 1$)$\cup\{\infty\} \to P(E)$
telle que $f((x, 1)) = [x, 1]$ et $f(\infty) = [1, 0]$.

On peut donc voir une droite projective comme une droite affine à laquelle on a ajouté un point ∞ qu'on appelle **point à l'infini**.

2.4.2 Plan projectif

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. $P(E)$ est un plan projectif.

Soit $\overrightarrow{F}$ le plan vectoriel d'équation $z = 0$ et soit F le plan affine d'équation $z = 1$ de direction $\overrightarrow{F}$. Toute droite vectorielle de E, dirigé par un vecteur de coordonnées $(x, y, 1)$ passe par un unique point de F de coordonnées $(x, y, 1)$. Et toute autre droite vectorielle de E, étant dirigée par un vecteur de coordonnées $(x, y, 0)$, est une droite de $\overrightarrow{F}$.

Ainsi on a la bijection $f : F \bigcup P(\overrightarrow{F}) \to P(E)$ telle que $f((x,y,1)) = [x,y,1]$ et $f([x,y,0]) = [x,y,0]$.

On peut donc voir un plan projectif comme un plan affine auquel on a ajouté une droite projective qu'on appelle **droite à l'infini**.

Remarque 2.4.1 :
Dans un plan projectif $P(E)$, vu comme un plan affine F auquel on a ajouté une droite à l'infini $P(\overrightarrow{F})$, la droite à l'infini est l'ensemble des droites vectorielles de $\overrightarrow{F}$.
C'est-à-dire l'ensemble des directions des droites affines de F. Chaque point de la droite à l'infini est donc une direction de droites parallèles dans F.

Par conséquent toutes les droites parallèles de F se rencontrent en un point de la droite à l'infini et pour chacune de ces droites, ce point représente le point à l'infini.
Si D est une droite affine alors on note ∞_D son point à l'infini.

2.4.3 Complétion projective d'un espace affine

Soit F un espace affine de dimension n.
Plongeons F dans un espace vectoriel $E = \overrightarrow{F} \oplus Ka, a \in F$ de dimension $n+1$ tel que la direction $\overrightarrow{F}$ de F ait pour équation $x_{n+1} = 0$ et F a pour équation $x_{n+1} = 1$.
Chaque droite vectorielle de E, qui n'est pas dans $\vec{F}$, coupe F en un seul point.
On obtient ainsi une bijection : $F \to P(E) - P(\overrightarrow{F})$.
L'hyperplan $P(\overrightarrow{F})$ s'appelle **l'hyperplan à l'infini de** F.

2.5 Birapport

Si D est une droite projective, alors trois points distincts a,b et c forment un repère projectif de D.
IL existe donc une unique homographie $D \to K \bigcup \{\infty\}$ qui envoie a sur ∞, b sur 0 et c sur 1.

Définition 2.5.1 :

Si d est un point de D, l'image de d par l'homographie ci-dessus est un point de $K \bigcup \{\infty\}$ qu'on appelle **birapport** et qu'on note $[a, b, c, d]$.

On étend la notion de birapport à quatre point alignés d'un espace projectif.

Remarque 2.5.1 :

Par définition, lorsque $[a, b, c, d]$ vaut :

- ∞ alors $d = a$
- 0 alors $d = b$
- 1 alors $d = c$

2.5.1 Propriétés du birapport

1. Soient A, B et C trois points d'une droite projective.
   Si $[A, B, C, M] = [A, B, C, N]$ alors $M = N$.
2. Une homographie conserve le birapport.

J.C. Sidler (2000, page 7)

2.5.2 Calcul du birapport

Dans ce paragraphe nous donnons les méthodes de calcul d'un birapport à partir des coordonnées homogènes.

Soit $P(E)$ un plan projectif et soit M_i $(1 \leq i \leq 4)$ quatre points d'une droite projective (dont les trois premiers sont tous distincts) de coordonnées homogènes respectives $[X_i, Y_i]$ $(1 \leq i \leq 4)$.

$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \dfrac{\begin{vmatrix} X_3 & X_1 \\ Y_3 & Y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_4 & X_1 \\ Y_4 & Y_1 \end{vmatrix}} : \dfrac{\begin{vmatrix} X_3 & X_2 \\ Y_3 & Y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_4 & X_2 \\ Y_4 & Y_2 \end{vmatrix}}$ Si, de plus, les points M_i sont tous différents du point à l'infini alors :

$(M_1, M_2, M_3, M_4) = \dfrac{X_3 - X_1}{X_3 - X_2} : \dfrac{X_4 - X_1}{X_4 - X_2}.$

Ceci s'obtient en prenant $[X_i, 1]$ comme coordonnées homogènes de M_i.

2.5.3 Birapport harmonique

Définition 2.5.2 :

Lorsque le birapport (A, B, C, D) est égal à -1 on dit qu'il est **harmonique**.

On dit encore que les points forment une division harmonique.

Proposition 2.5.1 :

Soient A,B et C trois points distincts d'une droite affine D.

$(A, B, C, \infty_D) = -1 \Leftrightarrow$ *C est le milieu de* $[AB]$.

Sidler J.C. (2000, page 8)

Preuve:

On va prendre $A[a,1]$, $B[b,1]$, $C[c,1]$ et $\infty_D[1,0]$.

$(A, B, C, \infty_D) = \dfrac{c-a}{c-b} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

D'où $(A, B, C, \infty_D) = -1 \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{CB}$. ■

2.6 Structure d'espace projectif de dimension n

La définition que nous avons donné d'un espace projectif s'est faite à partir d'un espace vectoriel.

Il serait intéressant de donner une définition d'espace projectif sans faire allusion à un espace vectoriel.

D'où la notion de structure d'espace projectif sur un ensemble.

Définition 2.6.1 :

On appelle **structure d'espace projectif de dimension** n sur un ensemble X, la donnée d'une famille F de bijections : $f : P^n(K) \to X$ telles que si f_0 appartient à cette famille, alors $F = \{f_0 \circ u, u \in PG_n(K)\}$. Ces bijections de F sont appelés **repères projectifs** de X.

Exemples 2.6.1 :

- Si E est un espace vectoriel de dimension $n+1$, alors l'ensemble des repères projectifs sur $P(E)$ définit une structure d'espace projectif sur $P(E)$ au sens de la définition précédente.
- Soient Π un $K-$ espace affine de dimension n, $\delta(\Pi)$ l'ensemble des directions des droites de Π et $\hat{\Pi} = \Pi \bigcup \delta(\Pi)$.

  Choisissons un repère affine $(\Omega, \vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ dans Π.

  Posons $\phi : [X_1, X_2, ..., X_{n+1}] \to M$ de $P^n(K)$ sur Π, en posant :

  $\vec{\Omega M} = \dfrac{X_1}{X_{n+1}}\vec{e_1} + ... + \dfrac{X_n}{X_{n+1}}\vec{e_n}$ si $X_{n+1} \neq 0$

  et M = point à l'infini dans la direction de $X_1\vec{e_1} + ... + X_n\vec{e_n}$, si $X_{n+1} = 0$.

  ϕ est une bijection qui nous permet de définir la structure d'espace projectif $F = \{\phi \circ u, u \in PG_n(K)\}$ sur $\hat{\Pi}$.

A partir de la définition que nous venons de donner, nous redéfinissons les notions de transformations projectives et de sous espaces projectifs.

Définitions 2.6.1 :

Soient X et X' deux espaces munis de structures projectives F et F' respectivement.

- On appelle **transformation projective** toute bijection $\phi : X \to X'$ telle que $F' = \{\phi \circ f, f \in F\}$.
- X' est un sous espace projectif de X,de dimension r si pour tout f dans F, $f^{-1}(X')$ est un sous espace projectif de dimension r de $P^n(K)$.

L'espace projectif est donc une complétion de l'espace affine et exclu l'idée de sous espaces parallèles disjoints. Regardons comment se représentent certaines structures des espaces affines dans le cas projectif.

STRUCTURES ADDITIONNELLES SUR UN ESPACE PROJECTIF

Dans ce chapitre nous allons d'abord définir une structure affine sur un espace projectif ce qui nous permettra d'étendre les théorèmes de géométrie affine en géométrie projective (théorème de Pappus et théorème de Desargues). Nous allons ensuite définir une structure réelle sur un espace projectif complexe et compléter un espace projectif réel à un espace projectif complexe. Nous allons enfin définir la notion d'angle entre deux droites dans un espace projectif.

3.1 Structure affine sur un espace projectif

On a déjà vu comment compléter un espace affine Π pour en faire un espace projectif $\hat{\Pi} = \Pi \bigcup \delta(\Pi)$ en lui ajoutant un hyperplan de l'infini $\delta(\Pi)$ (plan si $dim\Pi = 3$, droite si $dim\Pi = 2$ et point si $dim\Pi = 1$), formé des directions de droites dans Π. Réciproquement,

Définition 3.1.1 :

On appelle **structure affine** sur un espace projectif X, de dimension n, la donnée d'un hyperplan projectif H de X (c'est-à-dire un sous espace de dimension $n-1$) tel que :

☞ Deux sous espaces projectifs de même dimension X_1 et X_2, non inclus dans H sont dits parallèles si : $X_1 \bigcap X_2 \subset H$

☞ Les éléments de H sont appelés les points à l'infini, ceux de $X - H$ sont dits : "à distance finie".

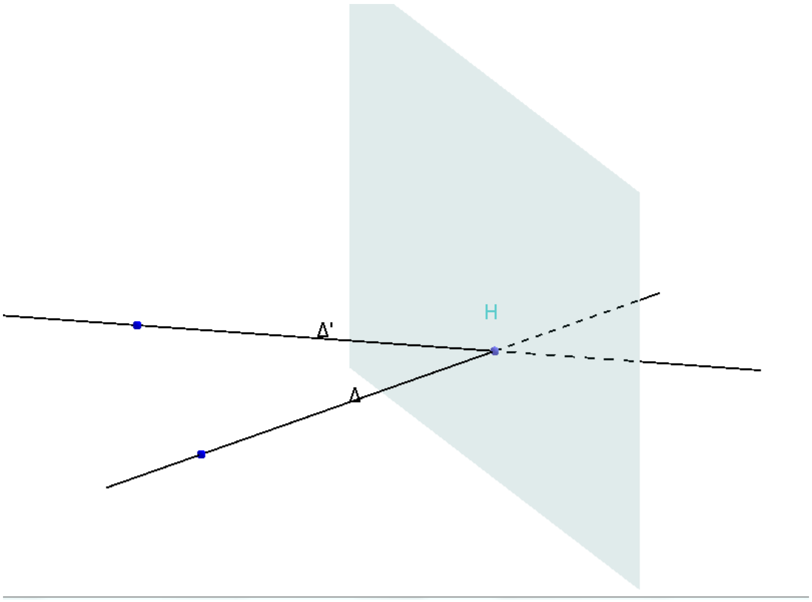

FIGURE 3.1 – Droites parallèles dans X-H

☞ On appellera rapport de trois points A, B et C à distance finie et alignés sur une droite projective Δ et l'on notera (A, B, C) le birapport $(A, B; C, \infty_\Delta)$ où $\Delta \bigcap H = \infty_\Delta$. En particulier si $(A, B, C) = -1$, alors C est le milieu de $[AB]$.

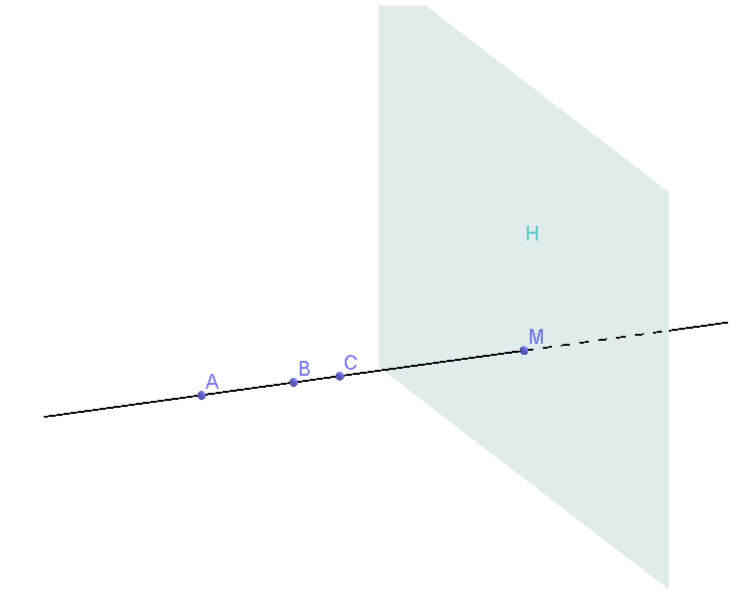

FIGURE 3.2 – Points alignés dans X-H

☞ On appellera parallélogramme dans un plan projectif $\hat{\Pi}$ non inclus dans H, la donnée de 4 droites projectives dans $\hat{\Pi}$, non incluses dans H, telles que trois d'entre elles ne soient pas concourantes et ayant deux sommets dans H.

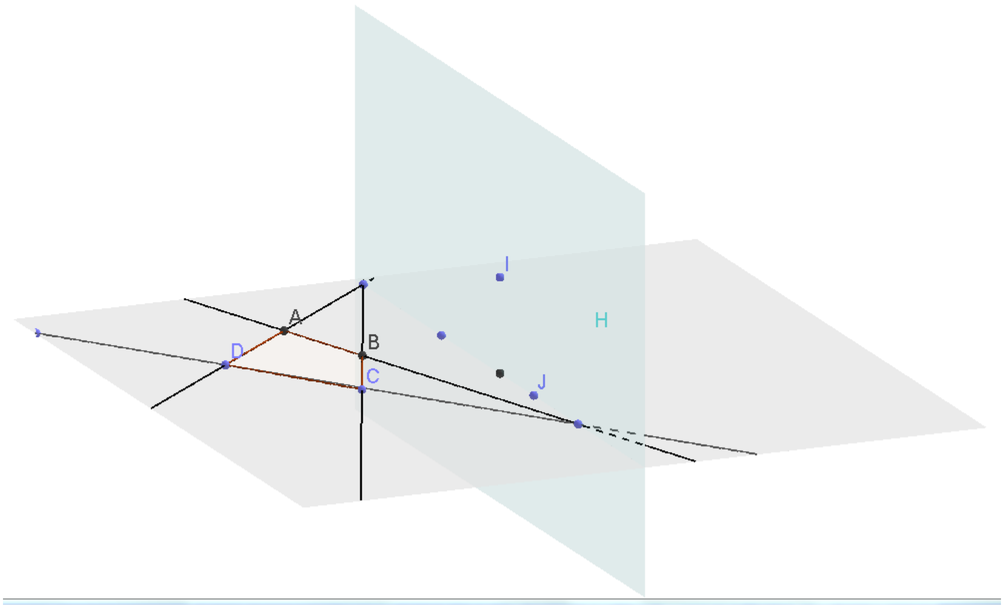

Figure 3.3 – Parallélogramme dans X-H

☞ Étant donnés deux espaces affines (X, H) et (X', H') de même dimension, on appellera **transformation affine** de l'un dans l'autre, toute transformation projective $\phi : X \longrightarrow X'$ telle que $\phi(H) = H'$

Remarque 3.1.1 :

Une telle transformation affine est entièrement déterminé par sa restriction

$X - H \longrightarrow X' - H'$

En effet si δ est un point de H, alors il existe une droite projective Δ telle que $\delta = \infty_\Delta$. De ce fait l'image $\phi(\delta)$ de δ sera $\infty_{\phi(\Delta)}$ et $\phi(\Delta)$ est entièrement déterminé par les images A et B de deux points de Δ.

3.1.1 Principe d'extension projective des théorèmes de géométrie affine

Proposition 3.1.1 :

Soit Π un $K-$ espace affine de dimension n et X un $K-$ espace projectif de même dimension. Il existe toujours une transformation affine $\phi : \hat{\Pi} \longrightarrow X$ tel que $\phi(\delta(\Pi)) = H$ où H est une structure affine sur X

Lehmann D. (1988, page 299)

Preuve:

Choisissons $n+1$ points m_i projectivement indépendants dans $\delta(\Pi)$ c'est-à-dire un repère projectif de $\delta(\Pi)$ et aussi un repère $(m'_i)_{1\leq i\leq n+1}$ projectif de H. Complétons le premier repère en un repère projectif de $\hat{\Pi}$ en ajoutant un $n+2-ime$ point m_{n+2} dans $\Pi = \hat{\Pi}-\delta(\Pi)$, et de même choisissons un point m'_{n+2} dans $X - H$. Il existe donc une transformation projective transformant le repère m_i en $m'_i(1 \leq i \leq n+2)$ ∎

La proposition précédente permet de "transporter" par une telle transformation n'importe quel théorème de géométrie affine sur Π. On peut jouer sur la marge dont on dispose tant en ce qui concerne H, que le choix des points m_i et m'_i, pour particulariser le résultat général obtenu.

3.1.2 Théorème de PAPPUS

Théorème 3.1.1 :

Soient D et D' deux droites d'un plan projectif. Soient A, B et C trois points de D et A', B' et C' trois points de D'. Alors les points d'intersection de $B'C$ et $C'B$, $A'C$ et AC' et de $A'B$ et $B'A$ sont alignés.

Preuve:

Soit $\hat{\Pi} = \Pi \bigcup \delta(\Pi)$ le plan projectif. posons $E' = B'C \bigcap C'B$ et $E = C'A \bigcap CA'$. En considérant sur $X = \hat{\Pi}$ et la structure affine EE' sur X. $BC' \cap B'C \in EE' \Rightarrow BC' \parallel BC$ dans $X-H$. $CA' \bigcap AC' \in EE' \Rightarrow CA' \parallel A'C$ dans $X-H$. Donc $A'B \parallel AB'$ dans $X-H$ (d'après Pappus affine). Ainsi $A'B \bigcap AB' \in EE'$ ∎

3.1.3 Théorème de DESARGUES

Théorème 3.1.2 :

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Alors si les points d'intersection de BC et $B'C'$, CA et $C'A'$ et de AB et $A'B'$ sont alignés, alors AA', BB' et CC' sont concourantes.

Preuve:

Posons $X = \hat{\Pi}$ et $H = \Delta$ où Δ est la droite contenant $BC \bigcap B'C'$, $AB \bigcap A'B'$ et $AC \bigcap A'C'$. en considérant la structure affine H sur X, on a : $BC \parallel B'C'$, $AB \parallel A'B'$ et

$AC \parallel A'C'$. D'après Desargues affine, AA', BB' et CC' sont parallèles ou concourantes, donc concourantes dans X ■

3.1.4 Espace affine $X - H$

On peut munir $X - H$ de la même structure d'espace affine que K^n.

Remarque 3.1.2 :

$P^n(K)$ s'identifie naturellement à $\hat{K^n} = K^n \bigcup P^{n-1}(K)$, l'inclusion naturelle de K^n dans $P^n(K)$ s'écrivant $(x_1, ..., x_n) \to [x_1, ..., x_n, 0]$ et l'identification de $P^{n-1}(K)$ aux points à l'infini de $\hat{K^n}$ s'écrivant $[X_1, ..., X_n] \to [X_1, ..., X_n, 0]$

Définition 3.1.2 :

On appellera **repère affine** de (X, H) tout repère projectif $f : P^n(K) \to X$ tel que $f^{-1}(H) = P^{n-1}(K)$, c'est-à dire une transformation affine de $(P^n(K); P^{n-1}(K))$ sur $(X; H)$

Posons $F_H(X)$ l'ensemble des repères affines de X. Si $f, f' \in F_H(X)$, alors $f'^{-1} \circ f$ est de la forme $\hat{A}$ avec A sous la forme$A = \begin{bmatrix} A_1 & Y \\ 0.........0 & a \end{bmatrix}$ puisqu'elle doit conserver K^n considéré comme sous-espace affine de K^{n+1} par $(x_1, ..., x_n) \to (x_1, ..., x_n, 0)$. Puisque $det(A) = det(A_1) \times a \neq 0$, alors $A_1 \in GL(n, K)$ et $a \neq 0$. On peut normaliser la matrice A en imposant à a d'être égal à 1.

Théorème 3.1.3 :

1. *L'ensemble des matrices A de $GL(n, K)$ de la forme* $\begin{bmatrix} \alpha_i{}^j & Y \\ 0....0 & 1 \end{bmatrix}$ $1 \leq i, j \leq n$ *,où*

$$Y = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$$, *est un sous groupe $A_n(K)$ de $PG_n(K)$*

2. *$A_n(K)$ est canoniquement isomorphe au groupe $Aff_n(K)$ des automorphismes affines de K^n. Le sous groupe des matrices* $\begin{bmatrix} \alpha_i{}^j & 0 \\ 0...0 & 1 \end{bmatrix}$ *s'identifie au groupe $GL_n(K)$ des transformations linéaires de K^n et le sous groupe des matrices* $\begin{bmatrix} I_n & Y \\ 0....0 & 1 \end{bmatrix}$ *(où I_n est la matrice identité et* $Y = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$*) s'identifie au groupe des translations de K^n.*

3. *En opérant sur $P^n(K)$, $A_n(K)$ conserve les sous ensembles de K^n et $P^{n-1}(K)$ de $P^n(K)$, et les actions suivantes de $A_n(K)$ sur K^n coïncident :*
   ☞ *celle obtenue par restriction à K^n de son action sur $P^n(K)$*
   ☞ *celle correspondant à l'action naturelle de $Aff_n(K)$ par l'identification $A_n(K) \equiv Aff_n(K)$*

4. *Il existe une structure naturelle de $K-$ espace affine de dimension n sur $X - H$ pour laquelle les repères affines $f : (P^n(K), P^{n-1}(K)) \to (X, H)$ ont une restriction à $K^n = P^n(K) - P^{n-1}(K)$ qui est un isomorphisme d'espaces affines $K^n \to X - H$*

Lehmann D. (1988, page 300)

Preuve:

1. $A_n(K) \subset GL_{n+1}(K)$ et $A_n(K)$ est un groupe, donc $A_n(K)$ est un sous groupe de $GL_{n+1}(K)$. considérons la projection $p : GL_{n+1}(K) \to PG_n(K)$ telle que $p(A) = \hat{A}$. p est injective, donc $p_{/A_n(K)}$ est injective. Par conséquent $p_{/A_n(K)}(A_n(K)) = A_n(K)$ est un sous groupe de $PG_n(K)$.

2. Ecrivons $A = \begin{bmatrix} \alpha_i{}^j & Y \\ 0.....0 & 1 \end{bmatrix}$ en abrégé $A = \begin{bmatrix} A_1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $A = \begin{bmatrix} A_1 & Y \end{bmatrix}$ où $A_1 \in GL_n(K)$ et $Y \in K^n$. On a la loi : $\begin{bmatrix} A_1 & Y_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_2 & Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & Y_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_2 & Y_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & A_1Y_2 + Y_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A_2 & Y_1 + A_1Y_2 \end{bmatrix}$. On obtient une matrice de la même forme. Donc l'ensemble $A_n(K)$ s'identifie au produit semi-direct $GL_n(K) \times K^n$ avec la loi de groupe ci-dessus. C'est précisément la loi de composition du groupe $Aff_n(K)$ des transformations affines de K^n produit semi-direct de $GL_n(K)$ des transformations linéaires de K^n et

du groupe des translations de K^n (isomorphe à K^n). Donc $A_n(K) \cong GL_n(K) \times K^n$ et $Aff_n(K) \cong GL_n(K) \times K^n$. D'où $A_n(K) \cong Aff_n(K)$

3. On a vu que $p^n(K) = K^n \bigcup P^{n-1}(K)$. $\begin{bmatrix} A_1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(m) + Y & 1 \end{bmatrix}$, $m \in K^n$.
   Donc $A_n(K)$ laisse invariant K^n et $A_n(K)$ conserve aussi $P^{n-1}(K)$ en tant que sous groupe de $PG_n(K)$. La restriction à K^n de l'action de $A_n(K)$ sur $P^n(K)$ s'écrit $\begin{bmatrix} A_1 & Y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(m) + Y & 1 \end{bmatrix}$.
   L'action sur K^n du groupe $Aff_n(K) = GL_n(K) \times K^n$ s'écrit :
   $((A_1; Y); m) \to A_1(m) + Y$.On constate que ces deux actions coïncident.
4. Soit $f : (P^n(K), P^{n-1}(K)) \to (X, H)$ un repère affine. Par transport de structure de la structure affine de $K^n = P^n(K) - P^{n-1}(K)$ sur$X - H$,on en déduit une structure affine sur $X - H$, à l'aide de la restriction de f à K^n. Soit f' un autre repère affine de $X - H$. On vient de voir que $f'^{-1} \circ f$ en tant que automorphisme affine de $P^n(K)$ a une restriction à K^n qui est un automorphisme affine de K^n, c'est-à-dire f et f' définissent, par transport de structure, la même structure affine de dimension n sur $X - H$. ∎

3.2 Structure réelle sur un espace projectif complexe

3.2.1 Structure réel sur $P^n(\mathbb{C})$

On peut identifier $P^n(\mathbb{R})$ à un sous ensemble de $P^n(\mathbb{C})$ par :$[X_1, ...X_{n+1}] \to [X_1, ...X_{n+1}]$ induite de l'inclusion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Mais la situation est bien plus riche, car il existe sur $P^n(\mathbb{C})$ une injection $\sigma_0 : P^n(\mathbb{C}) \to P^n(\mathbb{C})$ tel que $\sigma_0 = \sigma_0{}^{-1}$ ($\sigma_0^2 = id$) et $P^n(\mathbb{R})$ s'identifie comme les points invariants par σ_0.

En effet, posons $\sigma_0 : P^n(\mathbb{C}) \to P^n(\mathbb{C})$ telle que $\sigma_0([X_1, ..., X_{n+1}]) = [\bar{X}_1, ..., \bar{X}_{n+1}]$ ($\sigma_0(m) = \bar{m}$) où $\bar{X}_i$ est le conjugué de X_i. On vérifie que $\sigma_0 = \sigma_0^{-1}$ et que $\forall x \in P^n(\mathbb{R})$, $\sigma_0(x) = x$.

3.2.2 Structure réelle sur un espace projectif complexe quelconque

Soit X un espace projectif complexe de dimension n.

Posons $F = \{f : P^n(\mathbb{C}) \to X$ repère projectif $\}$.

Définitions 3.2.1 :

☞ On appelle **structure réelle** la donnée d'une fonction $\sigma : X \to X$ telle qu'il existe $f \in F$ tel que $\sigma = f \circ \sigma_0 \circ f^{-1}$

☞ On appelle **repère réel** de (X, σ) l'ensemble des repères projectifs f de X tels que $\sigma = f \circ \sigma_0 \circ f^{-1}$. De la formule $\sigma_0^2 = id_{P^n(\mathbb{C})}$, on déduit que $\sigma^2 = id_X$

☞ Deux points x et x' de X tels que $\sigma(x) = x'$ sont dits **imaginaires conjugués**. Un point x de X est dit **réel**si $\sigma(x) = x$ sinon il est dit **imaginaire**. On note $X_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des points réels de X.

Exemple 3.2.1 :

Pour $X = P^n(\mathbb{C})$ on a : $X_{\mathbb{R}} = P^n(\mathbb{R})$

Théorème 3.2.1 :

1. *$PG_n(\mathbb{R})$ s'identifie au sous groupe des éléments $\hat{A}$ de $PG_n(\mathbb{C})$ qui commutent avec σ_0.*
2. *En opérant sur $P^n(\mathbb{C})$ en tant que sous groupe de $PG_n(\mathbb{C})$, $PG_n(\mathbb{R})$ laisse invariant $P^n(\mathbb{R})$ et la restriction à $P^n(\mathbb{R})$ de son action sur $P^n(\mathbb{C})$ coïncide avec l'action naturelle de $PG_n(\mathbb{R})$ sur $P^n(\mathbb{R})$*
3. *Il existe une structure naturelle de $\mathbb{R}-$ espace projectif de dimension n sur $X_{\mathbb{R}}$ pour laquelle les repères réels $(P^n(\mathbb{C}), \sigma_0) \to (X, \sigma)$ ont une restriction $f_{\mathbb{R}}$ à $P^n(\mathbb{R})$ qui est un repère projectif $P^n(\mathbb{R}) \to X_{\mathbb{R}}$ de $X_{\mathbb{R}}$.*

Lehmann D. (1988, page 305)

Preuve:

1. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ donc $GL(n+1, \mathbb{R}) \subset GL(n+1, \mathbb{C})$ donc $PG_n(\mathbb{R}) \subset PG_n(\mathbb{C})$.

   Ainsi $\forall \hat{A} \in PG_n(\mathbb{R})$,

   $\forall [X_1, ...X_{n+1}] \in P^n(\mathbb{R}), \hat{A} \circ \sigma_0([X_1, ...X_{n+1}]) = \sigma_0 \circ \hat{A}([X_1, ...X_{n+1}]) = \hat{A}([X_1, ...X_{n+1}])$.

   D'où $\hat{A} \circ \sigma_0 = \sigma_0 \circ \hat{A}$.

   Réciproquement, soit $\hat{A} \in PG_n(\mathbb{C})$ tel que $\hat{A} \circ \sigma_0 = \sigma_0 \circ \hat{A}$.

Notons $\bar{A}$ la matrice dont les coefficients sont les nombres conjugués de ceux de A. $\forall m \in \mathbb{C}^{n+1}$, $[A(\bar{m})] = [\overline{A(m)}] = [\bar{A}(\bar{m})]$. En particulier pour $m = e_i = (0, 0, ..., 1, 0, .., 0)$ où 1 est à la $i-$ ième place, on a :$[A(e_i)] = [\bar{A}(e_i)]$ car $e_i = \bar{e_i}$. Donc il existe $\lambda_i \in C$ tel que $|\lambda_i| = 1$ et $A(e_i) = \lambda_i \bar{A}(e_i)$. De même pour $m = e_i + e_j$ $(i \neq j)$ il existe $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda_{ij}| = 1$, $A(e_i + e_j) = \lambda_{ij}\bar{A}(e_i + e_j)$ c'est-à-dire $A(e_i) + A(e_j) = \lambda_{ij}\bar{A}(e_i) + \lambda_{ij}\bar{A}(e_j)$. Ainsi $\lambda_i \bar{A}(e_) + \lambda_j \bar{A}(e_j) = \lambda_{ij}\bar{A}(e_i) + \lambda_{ij}\bar{A}(e_j)$. Comme les vecteurs $\bar{A}(e_i)$ sont linéairement indépendants, on a : $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_{ij}$. Il existe donc un unique complexe $e^{i\theta}$ tel que $A(e_i) = e^{i\theta}\bar{A}(e_i)$, $\forall i \in \{1, ..., n+1\}$. Posons $A_1 = e^{-i\frac{\theta}{2}}$, on a : $A_1(e_i) = \bar{A}_1(e_i)$, $\forall i \in \{1, ...n+1\}$. D'où $A_1 \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$. Par conséquent $\hat{A} = \hat{A}_1 \in PG_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $f : (P^n(\mathbb{C}), \sigma_0) \to (X, \sigma)$ un repère réel. $f(P^n(\mathbb{R})) = X_{\mathbb{R}}$ car l'image des points invariants par σ_0 est égal à l'ensemble des points invariants de X par σ.

   Donc f induit une bijection $f_{\mathbb{R}} : P^n(\mathbb{R}) \to X_{\mathbb{R}}$ qui est la restriction de f à $P^n(\mathbb{R})$. D'où la structure d'espace projectif sur $X_{\mathbb{R}}$ par transport de structure.

   Soit f' un autre repère réel de $(P^n(\mathbb{C}), \sigma_0) \to (X, \sigma)$. On a :$f'^{-1} \circ f = \hat{A}$ avec $\hat{A} \in PG_n(\mathbb{C})$. $\sigma = f'^{-1} \circ \sigma_0 \circ f'$ et $\sigma = f^{-1} \circ \sigma_0 \circ f$. Donc $(f'^{-1} \circ f) \circ \sigma_0 = \sigma_0 \circ (f'^{-1} \circ f)$. D'où $f'^{-1} \circ f \in PG_n(\mathbb{R})$ d'après 1..

   Donc f' et f définissent la même structure d'espace projectif réel sur $X_{\mathbb{R}}$. ■

3.2.3 Complexification d'un espace projectif réel

Soit X un $\mathbb{R}-$ espace projectif de dimension n et F l'ensemble des repères projectifs de $P^n(\mathbb{R}) \to X$

On veut définir un $\mathbb{C}-$ espace projectif $X_{\mathbb{C}}$ et une structure réelle σ sur $X_{\mathbb{C}}$ tels que :

- ☞ X s'identifie aux points de $X_{\mathbb{C}}$ qui sont réels pour σ.
- ☞ Tout repère f de X s'étende naturellement en un repère projectif de $X_{\mathbb{C}}$, réel pour la structure.

Posons $X_{\mathbb{C}} = (F \times P^n(\mathbb{C}))/T$ où T est la relation d'équivalence $(f, [m]) \sim (f \circ \hat{A}, \hat{A}^{-1}([m]))$ (pour $\hat{A} \in PG_n(\mathbb{R})$) dans $F \times P^n(\mathbb{C})$. $\sigma : X_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ tel que $\sigma(\overline{(f, [m])}) = \overline{(f, \sigma_0([m]))}$.

Propositions 3.2.1 :

- ☞ *$X_{\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}-$ espace projectif.*
- ☞ *X s'identifie aux points réels de $X_{\mathbb{C}}$ pour σ.*

☞ *Tout repère f de X s'étend comme repère projectif de $X_{\mathbb{C}}$, réel pour la structure σ.*

Lehmann D. (1988, page 307)

Preuve:

$\forall f \in F, \forall x \in X$, $\sigma(\overline{(f, f^{-1}(x))}) = \overline{(f, \sigma_0(f^{-1}(x)))} = \overline{(f, f^{-1}(x))}$ car $f^{-1}(x) \in P^n(\mathbb{R})$. Donc les points $\overline{(f, f^{-1}(x))}$ sont les points de $X_{\mathbb{C}}$ invariants par σ dans $X_{\mathbb{C}}$. On peut donc identifier X à l'ensemble des points de $X_{\mathbb{C}}$ invariants par σ grâce à l'application :

$x \to \overline{(f, f^{-1}(x))}$.

Soit $f_{\mathbb{C}} : P^n(\mathbb{C}) \to X_{\mathbb{C}}$ telle que $f_{\mathbb{C}}([m]) = \overline{(f, [m])}$. $f_{\mathbb{C}}$ est bijective. $(f'_{\mathbb{C}})^{-1} \circ f_{\mathbb{C}} = \hat{A}$ et $\hat{A} \in PG_n(\mathbb{R})$. Donc $(f'_{\mathbb{C}})^{-1} \circ f_{\mathbb{C}} \in PG_n(\mathbb{C})$. D'où $f_{\mathbb{C}}$ et $f'_{\mathbb{C}}$ définissent la même structure d'espace projectif sur $X_{\mathbb{C}}$. Ainsi $X_{\mathbb{C}}$ est un $\mathbb{C}-$ espace projectif de dimension n. De plus $\forall x \in P^n(\mathbb{C})$, $f_{\mathbb{C}} \circ \sigma_0(x) = \overline{(f, \sigma_0(x))} = \sigma\overline{(f, x)} = \sigma \circ f_{\mathbb{C}}(x)$.

Donc $f_{\mathbb{C}} \circ \sigma_0 = \sigma \circ f_{\mathbb{C}}$.

C'est-à-dire $\sigma = f_{\mathbb{C}}^{-1} \circ \sigma_0 \circ f_{\mathbb{C}}$. D'où $f_{\mathbb{C}}$ est un repère réel de $(X_{\mathbb{C}}, \sigma)$.

Enfin $\forall [m] \in P^n(\mathbb{R})$, $\exists x \in X$ tel que $[m] = f^{-1}(x)$. Donc $f_{\mathbb{C}}([m]) = \overline{(f, [m])} = \overline{(f, f^{-1}(x))}$. D'où $f_{\mathbb{C}}$ a pour restriction f sur $P^n(\mathbb{R})$ (une fois X identifié comme une partie de $X_{\mathbb{C}}$). ∎

3.3 Structure angulaire sur un espace projectif

Dans ce paragraphe, nous allons définir la notion d'angle dans un espace projectif vu comme un espace affine de dimension n complété en espace projectif.

3.3.1 Notion d'ombilicale

Soit Π un espace affine réel de dimension n, $\hat{\Pi}$ son complété projectif et $\hat{\Pi}_{\mathbb{C}}$ le complexifié de $\hat{\Pi}$.

$\delta(\Pi)$ est un hyperplan de $\hat{\Pi}$ et un sous espace projectif de $\hat{\Pi}$. Donc $\delta(\Pi)_{\mathbb{C}}$ est un hyperplan de $\hat{\Pi}_{\mathbb{C}}$, et donc une structure affine sur $\hat{\Pi}_{\mathbb{C}}$.

On suppose que Π est muni d'une structure euclidienne, c'est-à-dire d'un produit scalaire permettant de définir les angles et les distances.

Définition 3.3.1 :

On appelle **hypersphère** (sphère pour $n = 3$, cercle pour $n = 2$) de centre ω et de rayon R, l'ensemble des points situés à la distance R de ω.

Remarque 3.3.1 :

Soit Γ une hypersphère.

Γ admet, relativement à un repère orthonormé de Π, l'équation : $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 - R^2 = 0$ où $\omega(a_1, ..., a_n)$. On peut encore écrire :

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i a_i + c = 0.$

Par rapport aux coordonnées homogènes associées, $\Gamma_{\mathbb{C}}$ a pour équation :

$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i X_i X_{n+1} + c{X_{n+1}}^2 = 0.$

L'ensemble $\Gamma_{\mathbb{C}} \cap \delta(\Pi)_{\mathbb{C}}$ des points à l'infini de $\Gamma_{\mathbb{C}}$ admet pour équation : $\begin{cases} X_{n+1} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \end{cases}$.

Cette équation ne dépend :

- ni de Γ (c'est à dire a_i, R, c)
- ni du repère choisi, pourvu qu'il soit orthonormé.

Définition 3.3.2 :

L'hypersurface algébrique Ω dans $\delta(\Pi)_{\mathbb{C}}$, réelle sans point réel, de degré 2, qui ne dépend que de la structure euclidienne de Π tel que $\Omega = \Gamma_{\mathbb{C}} \cap \delta(\Pi)_{\mathbb{C}}$ est appelée **Ombilicale**.

Remarque 3.3.2 :

Si le produit scalaire définissant la structure euclidienne de Π est multiplié par $k > 0$(toutes les distances sont multipliées par $\sqrt{k}$ mais les angles ne changent pas), les hypersphères, pour le nouveau produit scalaire $k <.>$ et l'ombilicale ne changent pas.

Définition 3.3.3 :

On appelle **structure angulaire** sur un espace affine réel Π la donnée d'une classe d'équivalence de produits scalaires.

$<,>_1 \; R <,>_2 \Leftrightarrow \exists k > 0, <,>_2 = k <,>_1.$

Remarque 3.3.3 :

La notion d'ombilicale nous permet de définir l'angle entre deux directions de droites de Π. C'est ce que nous allons définir dans la suite en dimension 2 pour ensuite généraliser à une dimension quelconque.

3.3.2 Angle entre deux directions de droites : cas où $dim\Pi = 2$

Dans un cas Π est un plan que nous supposerons orienté. Soit (Ox, Oy) un repère orthonormé direct de Π. Désignons par X, Y et Z les coordonnées homogènes associées.

L'équation de l'ombilicale est : $\begin{cases} Z = 0 \\ X^2 + Y^2 = 0 \end{cases}$

$X^2 + Y^2 = 0 \Leftrightarrow (X + iY)(X - iY) = 0 \Leftrightarrow X + iY = 0$ ou $X - iY = 0$.

Soient I et J les points de coordonnées homogènes respectives $[1; i; 0]$ et $[1; -i; 0]$.

L'ombilicale se réduit aux points I et J qui sont les points à l'infini des droites d'équations $Y - iX = 0$ et $Y + iX = 0$.

Soient D et D' deux droites de Π passant par O, d'équations respectives $Y - mX = 0$ et $Y - m'X = 0$.

On a : $tan(Ox, D) = m$ et $tan(Ox, D') = m'$ et $D, D' \neq Oy$. Donc

$tan(D, D') = tan[(D, Ox) + (Ox, D')] = \dfrac{tan(Ox, D') - tan(Ox, D)}{1 + tan(Ox, D')tan(Ox, D)} = \dfrac{m' - m}{1 + mm'}$.

Posons $(D, D') = \theta(mod 2\pi)$, $d = \infty_D$ et $d' = \infty'_D$.

Théorème 3.3.1 :

Formule de Laguerre *:*

1. *(d, d', I, J) est un nombre complexe de module 1 (Son logarithme est un nombre imaginaire pur modulo $2i\pi$).*
2. *$\theta(mod\pi) = -\dfrac{i}{2}Log(d, d', I, J)$.*

Lehmann D. (1988, page 314)

Preuve:

1. Les ordonnées des points d'intersection des droites D, D', OI et OJ avec la droite d'équation $x = 1$ sont respectivement m, m', i et $-i$. Donc :

$$(d, d', I, J) = (m, m', i, -i) = \frac{m - i}{m' - i} \times \frac{m' + i}{m + i} = \frac{1 + mm' - i(m' - m)}{1 + mm' + i(m' - m)} = \frac{1 - i\dfrac{m - m'}{1 + mm'}}{1 + i\dfrac{m - m'}{1 + mm'}}$$

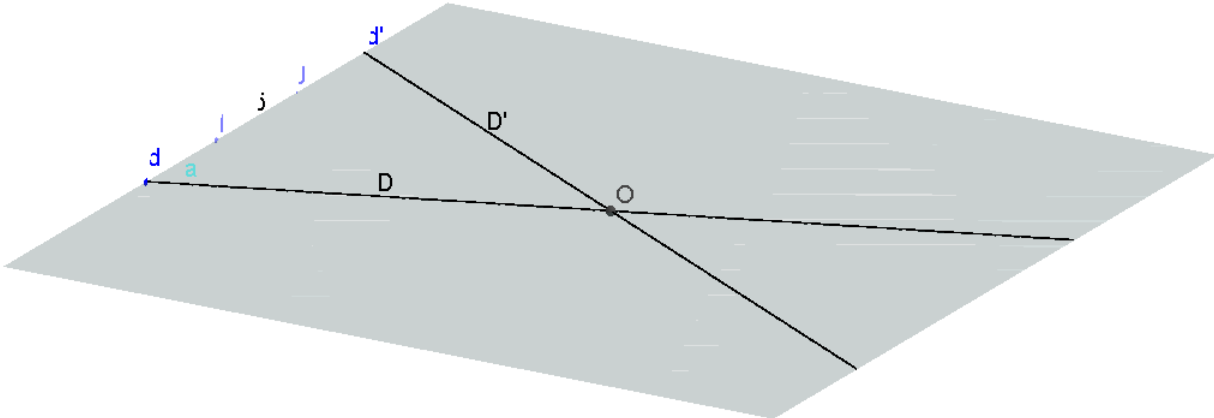

FIGURE 3.4 – Angle entre deux droites en dimension 2

$= \dfrac{1 - itan\theta}{1 - itan\theta} = \dfrac{cox\theta - isin\theta}{cos\theta + isin\theta} = cos(-2\theta) + isin(-2\theta) = e^{-2i\theta}$.
Si $D = Oy$, alors $(D, D') = (D, Ox) + (Ox, D') = -\dfrac{\pi}{2} + (Ox, D')$.
$tan\theta = tan(\dfrac{\pi}{2} + (Ox, D')) = -\dfrac{1}{m'}$.
Ainsi $(d, d', I, J) = (\infty, m', i, -i) = \dfrac{m' + i}{m' - i} = \dfrac{1 + \dfrac{I}{m'}}{1 - \dfrac{i}{m'}} = \dfrac{1 - itan\theta}{1 + itan\theta} = e^{-2\theta}$.
De même, pour $D' = Oy$, on a : $(d, d', I, J) = e^{-2i\theta}$
Pour D et D' confondues $(d, d', I, J) = 1 = \dfrac{1 - itan\theta}{1 + itan\theta} = e^{-2\theta}$ avec $tan\theta = 0$.

2. On a : $(d, d', I, J) = e^{-2i\theta}$, d'où $\theta(mod\pi) = -\dfrac{i}{2}Log(d, d', I, J)$. ■

Proposition 3.3.1 :

Les deux aasertions suivantes sont équivalentes :

1. *D et D' sont orthogonales*
2. $(d, d', I, J) = -1$

Preuve:

D et D' sont orthogonales, donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}(mod\pi)$. Donc $\dfrac{i}{2}Log(d, d', I, J) = -\dfrac{\pi}{2}(mod\pi)$
$\Rightarrow Log(d, d', I, J) = i\pi(mod2i\pi) \Rightarrow (d, d', I, J) = -1$.
Réciproquement, $(d, d', I, J) = -1 \Rightarrow Log(d, d', I, J) = i\pi(mod2i\pi)$
$\Rightarrow -\dfrac{i}{2}Log(d, d', I, J) = \dfrac{\pi}{2}(mod\pi)$. D'où D et D' sont orthogonales. ■

Orientation de l'angle θ

Supposons que l'on change l'orientation du plan Π, les points I et J sont alors permutés.
De la formule $(d,d',J,I) = (d,d',I,J)^{-1}$ on a : $-\frac{i}{2}Log(d,d',J,I) = \frac{i}{2}Log(d,d',I,J)$.
L'angle θ est ainsi changé en $-\theta$.

Exemple 3.3.1 :
Dans $\widehat{\mathbb{R}^2}$ considérons les droites $D : y = 3$ et $D' : y = x + 3$. Le point de rencontre de ces droites est le point $A(0;3)$, nous allons donc trouver l'angle (D,D') dans le repère $(A,\vec{i},\vec{j})$. Dans ce repère : $D : Y = 0$ et $D' : Y = X$, les points à l'infini de D et D' sont respectivement $d = [1;0;0]$ et $d' = [1;1;0]$ et les points de l'ombilicale sont $I = [1;i;0]$ et $J = [1;-i;0]$.
$(D,D') = \frac{-i}{2}Log(d,d',I,J) = \frac{-i}{2}Log(\frac{i-0}{i-1} : \frac{-i-0}{-i-1})$
Donc $(D,D') = \frac{-i}{2}Log(-i) = \frac{-i}{2}(\frac{-i\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

3.3.3 Angle entre deux directions de droites : cas où $din\Pi \geq 3$

Soient D et D' deux droites de Π de directions d et d' dans $\delta(\Pi)$.
Notons par Δ la droite joignant les points d et d'. Δ est réelle (car $\delta(\Pi)_{\mathbb{C}}$ est un hyperplan réel de $\hat{\Pi}_{\mathbb{C}}$), donc Δ coupe l'ombilicale en deux points I et J nécessairement imaginaires conjugués.
Soit P le plan contenant les deux droites D et D'. $\Delta = \delta(P)$.
En munissant P de la structure euclidienne induite de celle de Π, on se ramène à la situation plane. Dans ce cas :
$(D,D') = \pm\frac{i}{2}Log(d,d',I,J)$.

Illustration

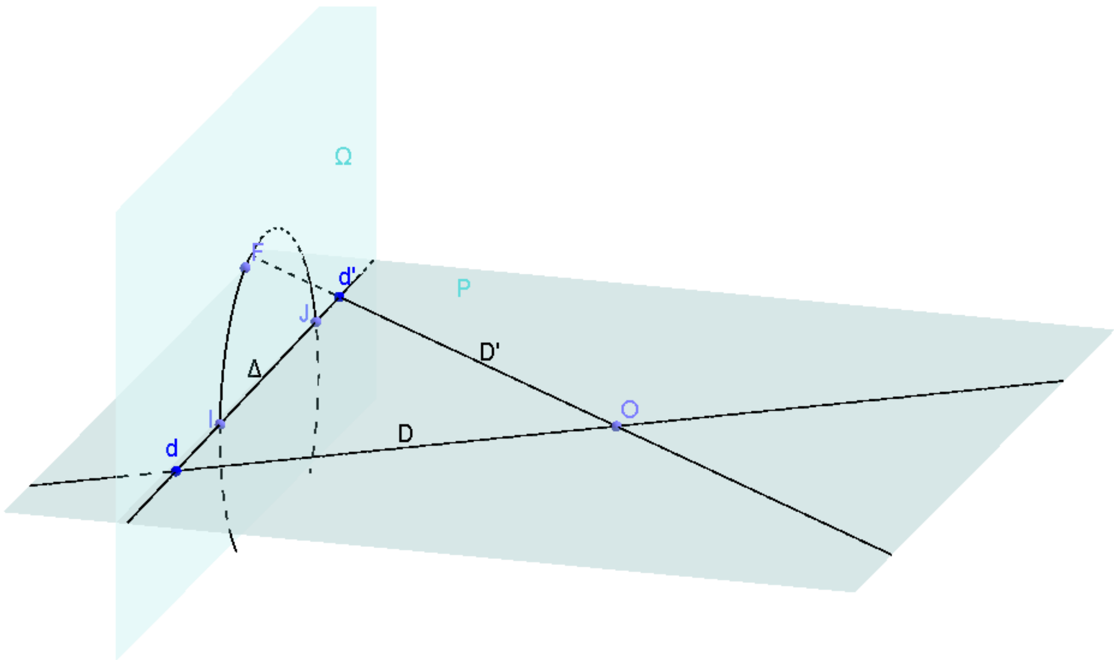

FIGURE 3.5 – Angle entre deux directions de droites en dimension n

Intérêts pédagogique et didactique

Les géométries affine et projective sont des branches de la géométrie (comme science de l'espace, des modèles de l'espace et de leur structure). Donc elles offrent autant d'avantages que la géométrie sur les plan didactique et pédagogique. Dans ce chapitre, nous allons donc regarder les intérêts didactique et pédagogique de la géométrie en général et les intérêts de la géométrie affine et de la géométrie projective en particulier.

4.1 Intérêts de la géométrie

4.1.1 Pour l'élève

La géométrie, par ses énoncés, ses méthodes, ses démonstrations et les représentations physiques et mentales qu'elle propose, est d'une grande importance pour les élèves.

☞ Elle entraîne les élèves au raisonnement mathématique c'est-à-dire à un raisonnement déductif et à une imagination inductive.

☞ Elle prépare les élèves à aborder d'autres théories mathématiques.

☞ Elle favorise la visualisation de l'espace naturel et les propriétés que offre cet espace.

Brousseau G. (2000, 67-79)

4.1.2 Pour le professeur et le futur professeur

En plus de tous les intérêts suscités pour l'élève :

☞ La géométrie offre au professeur la possibilité de provoquer chez leurs élèves une activité reconnue comme authentique par les mathématiciens eux mêmes.

☞ L'enseignement de la géométrie porte en lui une épistémologie spontanée : c'est-à-dire un ensemble de croyances et de déclarations sur ce que sont les mathématiques, sur la façon d'en faire, d'en apprendre, d'en chercher, d'en trouver, de les organiser...que les professeurs et les élèves peuvent utiliser et développer ensemble.

Brousseau G. (2000, 67-79)

4.2 Intérêt de la géométrie projective et de la géométrie affine

4.2.1 La géométrie affine au lycée

La géométrie affine fait partie des programmes des enseignements des mathématiques au lycée.

- ☞ Depuis la classe de sixième, on aborde les notions de points, de droites, de plans et de solides de l'espace qui sont propres aux espaces affines.
- ☞ Dès la classe de cinquième, commence la notion de repérage d'un point et pour repérer un point sur un plan on utilise des repères affines ou cartésiens.
- ☞ Dès la classe de troisième, on définit les application affines qui permettent aux élèves de résoudre des problèmes concrets se ramenant à des systèmes d'équations ou des équations du premier ordre.
- ☞ Dès la classe de première scientifique, on introduit la notion de barycentre qui est définie à partir d'un espace affine.

Il est donc important pour un élève-professeur d'approfondir ses connaissances sur les espaces affines en vue d'améliorer ses pratiques enseignantes sur le terrain.

4.2.2 Intérêt de la géométrie projective

La géométrie projective est une branche de la géométrie abordé au niveau 3 en filière mathématique. Elle n'est pas abordé dans le programme du secondaire. Elle présente donc des intérêts seulement dans la formation de l'élève professeur.

- ☞ Elle permet à l'élève professeur de se familiariser avec le logiciel de saisie mathématique (LaTeX) et les logiciels de réalisation de figures (Geogebra) ce qui lui permettra une production de cours et d'épreuves de qualité dans la pratique de son métier.

☞ L'école normale offre à ses étudiants une formation à la fois académique et professionnelle. La géométrie projective fait partie du programme de la formation académique des étudiants de mathématiques. Cette géométrie nous permet d'avoir une vision plus approfondie de la géométrie affine introduite au lycée et des astuces de démonstration nouvelles.

☞ Depuis le lycée, il est enseigné la notion abstraite d'espace vectoriel.
Les espaces projectifs et affines sont définis à partir des espaces vectoriels. Dont les géométries projective et affine offrent un champ d'application concret de la notion d'espace vectoriel.

Conclusion et perspectives

La géométrie projective est une complétion de la géométrie affine et généralise certaines des structures qu'on retrouve sur un espace affine : structure affine, structure angulaire, structure réelle sur un espace projectif complexe. En plus de cette complétion, la géométrie projective permet de simplifier des théorèmes de géométrie et utilise les notions propres telles que : la notion de point à l'infini, de droite à l'infini, d'hyperplan de l'infini ; qui permettent de modéliser les notions de perspective et d'horizon.

Figure 4.1 – Paysage avec horizon

Comme perspective, il serait intéressant d'étudier l'application de la géométrie projective au traitement des images par ordinateur ; on pourrait étudier comment la géométrie projective combinée aux nouveaux outils algébriques et numériques permet à un ordinateur de percevoir une scène observée c'est à dire la reconstruire virtuellement.

Bibliographie

[1] Audin M. (2006), *Géométrie*. France, EDP sciences, 420 pages.

[2] Brousseau G. (2000) *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire, L'étude de l'espace et de la géométrie* : 67-83. Grèce, Rethymon.

[3] Lehmann D. (1988) *Initiation à la géométrie*. Paris, Presses universitaire de France. 500 pages

[4] Sidler J.C. (2000) *Géométrie projective*. Paris, DUNOD, 206 pages.