REPUBLIQUE DU CAMEROUN
*Paix – Travail – Patrie*
********

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DEPARTEMENT DE Mathematiques
*********

REPUBLIC OF CAMEROUN
*Peace – Work – Fatherland*
*******

UNIVERSITY OF YAOUNDE I
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
DEPARTMENT OF Mathematics
*******

# Kernel d'un jeu compose simple

Mémoire de D.I.P.E.S II de Mathematiques

Par :

**KAMILA KARE**
**Licencie en Mathematiques**

Sous la direction
**TCHANTCHO Huge**
**Assistant**



**Année Académique**
**2015-2016**

# ♣ Dédicaces ♣

Je dédie ce travail

A ma mère chérie NDOUVADA BIZITCHA.

# ♣ Remerciements ♣

Au terme de nos premiers pas dans la recherche, nous tenons à remercier ceux qui de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

- ⋆ Nos profonds sentiments de gratitudes au Dr TCHANTCHO Hugue, qui a accepté de diriger ce travail, malgré ses multiples occupations. Nous lui savons gré pour la rigueur scientifique et la patience avec lesquelles il a guidé ce travail ;
- ⋆ Une mention spéciale est adressée à tous les enseignants de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé qui, durant notre formation, ont eu pour souci, au-delà de la formation académique dispensée, de nous amener à prendre conscience du rôle de l'enseignant dans la construction d'un Cameroun émergent ;
- ⋆ Nos remerciements vont à l'endroit de notre famille pour le soutien financier et moral ;
- ⋆ A tous les élèves professeurs de la 55ème promotion de la filière mathématiques, nous adressons nos remerciements pour leur convivialité, leur collaboration et l'esprit de travail qui a prévalu tout au long de notre formation.
- ⋆ Une mention particulière à SOH KAKEU Roméo et TCHUISSEU SEUYONG Féraud avec qui nous étions en équipe sous la coordination de notre Directeur de mémoire ; Merci pour la convivialité qui à régner entre nous.

# ♣ Déclaration sur l'honneur ♣

***Le présent travail est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs, en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.***

**Signature du candidat**

**KAMILA KARE**

# ♣ Résumé ♣

Le Kernel (M. Davis et M. Maschler, 1965) est un concept de solution pour un jeu coopératif. Il reflète les propriétés de symétrie de la fonction caractéristique et les relations de désirabilité entre les joueurs. Le Kernel est une réunion finie de polyèdres convexes. Malgré ces propriétés assez intéressantes du point de vue mathématique, la détermination du Kernel contraste avec sa définition. Suivant la généralisation des jeux composés par G. OWEN (1964) sur les jeux simples composés de SHAPLEY de 1962, NIMROD en 1974 définit les jeux composés simples et propose le Kernel de cette nouvelle classe de jeux. Dans nos travaux, nous proposons une méthode analytique de détermination du Kernel d'un jeu monotone à trois joueurs, et suivant les traces de NIMROD, nous montrons que les polyèdres convexes qui définissent le Kernel d'un jeu composé simple sont les enveloppes convexes de l'ensemble des sommets des polyèdres convexes qui définissent les Kernels des jeux composants pris un à un.

**Mots clés :** kernel, jeu simple, jeu composé, polyèdre convexe.

# ♣ Abstract ♣

The Kernel (M. Davis and M. Maschler) is a solution concept for a cooperative game. It reflects symmetry properties of the caracteristic function and desirability relations over the sets of players. The Kernel is a finite union of convex polyhedra. Despite these rather interesting properties from the mathematical point of view, the determination of Kernel contrast with its definition. Following generalization of compound games by G. Owen (1964) on Shapley's compounds simple games 1962, NIMROD in 1974 defines simple compounds games and offers the Kernel of this new class of games. In our work, we propose an analytical method for determining the kernel of a monotonous game with three players, and following the footsteps of NIMROD, we show that the convex polyhedra that define the kernel of a simple game are composed of convex hulls the set of vertices of convex polyhedra that define Kernels games components taken individually.

**Keywords :** kernel, simple game, compound game, convex polyhedron.

# ♣ Liste des abréviations ♣

- **JFCC** : jeu sous forme caractéristique avec compensation
- **COV** : covariance sous équivalence stratégique
- **AN** : anonymat
- **RGP** : propriété du jeu reduit de **Davis-Maschler**(**reduced game property**)

# ♣ Table des matières ♣

# ♣ Introduction générale ♣

Il existe plusieurs solutions au problème de partage de gains issus d'un JFCC lorsque les joueurs sont regroupés dans la grande coalition, en particulier le cœur (Gillies, 1959), le domaine de marchandage classique (Aumann et Maschler, 1964) et le Kernel (Davis et Maschler, 1965). Cette dernière faisant l'objet de notre travail.

Le Kernel est un concept de solution dont la motivation était de rechercher les éléments du domaine de marchandage. C'est ainsi que Davis et Maschler ont introduit un sous ensemble de ce domaine qui est toujours non vide et plus facile à déterminer que le domaine de marchandage lui même. Il est à noter que la non vacuité du Kernel leur est dû. Quelque temps plus tard M. Maschler et B. Peleg (1966, 1967) ont présenté quelques propriétés intéressantes du Kernel dont l'une qui a le plus frappé dans nos travaux : le Kernel est une réunion finie de polyèdres convexes. Ainsi la détermination du Kernel consiste donc à la recherche des points sommets des polyèdres convexes qui le constituent.

Dans nos travaux nous proposons une méthode analytique de détermination de Kernel d'un JFCC à 3 joueurs monotone.

Les jeux composés ont été définis par G. Owen (1964) en tentant de passer de la composition des jeux simples due à Shapley à la composition des JFCCs d'une manière générale ; ce qui a permis à Nimrod M. (1971) de composer des jeux simples avec un JFCC, obtenant ainsi les jeux composés simples. Il propose alors une formule de détermination du Kernel de cette classe de jeu.

Le Kernel d'un jeu composant d'un jeu composé simple est une réunion finie de polyèdres convexes. Si on prend dans chacun des Kernels de chaque jeu composant un polyèdre convexe, nous obtenons une famille de points, constitué par les différents sommets de ces polyèdres convexes. Nous montrons que l'enveloppe formée par la famille de points ainsi obtenue est un polyèdre convexe qui constitue le Kernel du jeu composé simple.

Pour faciliter la lecture et la compréhension de nos travaux, nous les avons subdivisés en trois chapitres. Le premier est consacré à la présentation des jeux sous forme caractéristique avec compensation ; le deuxième porte sur le Kernel d'un JFCC et le troisième est consacré au Kernel d'un jeu composé simple.

⋆ ⋆ Chapitre Un ⋆ ⋆

# JEU SOUS FORME CARACTERISTIQUE AVEC COMPENSATION

## 1.1 Notion de Jeu sous forme caractéristique avec compensation

Plusieurs situations de la vie courante mettent en interaction des agents (appelés ici joueurs) qui sont chacun soucieux de son bien-être individuel. Le résultat collectif est obtenu comme résultante d' actions individuelles et chaque joueur souhaite que ce résultat soit le meilleur pour lui. Ce vœu oblige ainsi chaque joueur à tenir compte des actions des autres individus en interaction avec lui.

La théorie des jeux propose plusieurs formalismes et analyse de telles situations. On distingue deux principales formes de jeux qui sont :

- les jeux non coopératifs où aucun accord contraignant n'est autorisé entre les joueurs ;

- les jeux coopératifs où il existe une possibilité d'accord contraignant entre les joueurs.

Pour introduire les jeux coopératifs qui nous intéressent dans ce travail, considérons les exemples suivants :

### 1.1.1 Illustrations

**Exemple 1.1.1.** *Quatre touristes souhaitant visiter la ville de Bakassi doivent traverser un fleuve. A cet effet, trois piroguiers sont disponibles et peuvent assurer le transport de ces derniers. Un piroguier ne peut conduire qu'au plus deux touristes à la fois. Le coût total de transport de ces touristes est de 1000 Fcfa. Ainsi*

- $c(1) = c(2) = c(3) = 0$ *;*
- $c(12) = c(13) = c(23) = 1000$ *;*
- $c(123) = 1000$.

*où $c(S)$ désigne le montant collectif obtenu par les piroguiers de $S$ lorsqu'ils sont regroupés dans $S$.*

*Le premier tiret signifie qu'aucun piroguier ne peut gagner seul cette somme de 1000 Fcfa. Le deuxième traduit le fait que si deux piroguiers quelconques parmi les trois s'entendent alors ils assurent le transport et gagnent cette somme. Le dernier quant-à-lui nous montre que lorsque les 3 piroguiers coopèrent pour ce transport, alors ils obtiennent les 1000 francs.*

*Il est important de savoir ici :*

*- Comment vont se regrouper les piroguiers pour maximiser chacun son bénéfice ?*

*- Comment va se répartir le bénéfice collectif entre les piroguiers de chaque groupe formé ?*

**Exemple 1.1.2.** *Deux villes 1 et 2 doivent réaliser un projet communautaire. Cette réalisation peut être faite par chaque ville et coûtera $c(1)$ pour la ville 1 et $c(2)$ pour la ville 2. Elles peuvent aussi avec le même degré de satisfaction pour leurs populations, réaliser un projet commun à un coût $c(12)$. Les deux villes vont-elles s'associer pour le projet d'adduction d'eau ? Si oui, comment vont-elles se répartir les coûts ?*

Tout comme dans ces deux exemples, de nombreux problèmes du même genre se rencontrent dans le monde économique où les producteurs (respectivement les consommateurs) d'un même bien désirent se regrouper afin de maximiser leurs gains (respectivement minimiser les coûts de leurs achats). S'ils arrivent à le faire, il faudrait alors qu'ils partagent les gains issus de leur coopération. Les deux questions posées dans les exemples ci-dessus constituent en général les problèmes que posent un jeu sous forme caractéristique avec compensation.

Donnons à présent une définition générale de ce type de jeu.

**Définition 1.1.1.** *Soit $N$ un ensemble fini non vide.*

*On appelle jeu sous forme caractéristique avec compensation, tout couple $(N; v)$ où $v$ est une application réelle définie sur l'ensemble des parties de $N$ vérifiant $v(\emptyset) = 0$.*

Les éléments de $N$ sont appelés joueurs et les sous ensembles non vides de $N$ coalitions. L'application $v$ est appelée fonction caractéristique du jeu.

On note par $2^N$ l'ensemble de toutes les coalitions de $N$. :

**Interprétations 1.** *Etant donné un JFCC $(N; v)$,*

*- $v$ désigne l'état de coopération entre les joueurs de $N$ (c'est un bilan des gains estimés lorsque les joueurs coopèrent entre eux).*

*- pour toute coalition $S$, $v(S)$ est la quantité de biens (gain collectif ou perte collective) qu'obtient la coalition $S$ lorsque ses membres décident de commun accord de former $S$.*

Notons que la notion de JFCC correspond dans la littérature à la notion anglaise de "Transferable Utility game ou TU-game".

### 1.1.2 Classes particulières de fonction caractéristique

**Définition 1.1.2.** *Un jeu $(N;v)$ est dit :*

1. ***monotone** si pour toute paire de coalitions $S,T$ telle que $S \subset T$ on a $v(S) \leq v(T)$.*
2. ***N-0-monotone** si $v(N) \geq v(S) + \sum_{j\in N\setminus S} v(j)$ $\forall S \subseteq N$.*

**Définition 1.1.3.** *La contribution marginale du joueur $i$ à la coalition $S$ est la quantité $v(S) - v(S/\{i\})$.*

*C'est-à-dire la perte ou le gain de $i$ lorsqu'il quitte la coalition $S$.*

**Définition 1.1.4.** *On dit que deux JFCCs $(N,v)$ et $(N,w)$ sont stratégiquement équivalents s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}^N$ tels que $w(S) = \alpha v(S) + \beta(S)$ pour tout $S \subseteq N$ avec $\beta(S) = \sum_{i\in S} \beta_i$.*

**Définition 1.1.5.** *Un joueur $k$ est dit plus désirable qu'un joueur $l$ dans un jeu $(N;v)$ si $v(S \cup \{k\}) \geq v(S \cup \{l\})$ $k,l \notin S$.*

**Définition 1.1.6.** *Deux joueurs distincts $k$ et $l$ sont dits symétriques dans un jeu $(N;v)$ si $v(S \cup \{k\}) = v(S \cup \{l\})$ $k,l \notin S$.*

**Définition 1.1.7.** *Un joueur $i$ dans un jeu $(N,v)$ est dit "**dummy**" si pour toute coalition $S$, on a $v(S \cup i) = v(S)$.*

#### Notion de jeu simple

**Définition 1.1.8.** *Un jeu simple est un JFCC où pour toute coalition $S$, $v(S) = 0$ ou $v(S) = 1$.*

Les coalitions telles que $v(S) = 1$ sont appelées **coalitions gagnantes** et celles dont $v(S) = 0$ sont appelées **coalitions perdantes**.

L'ensemble des coalitions gagnantes est noté $\mathcal{W}$. Ainsi un jeu simple peut être représenté par $(N, \mathcal{W})$.

On admet que $N \in \mathcal{W}$ et que $\emptyset \notin \mathcal{W}$.

Une coalition $S$ est dite minimale gagnante si aucun sous-ensemble propre de $S$ n'est gagnante.

**Définition 1.1.9.** *Un joueur $i$ est dit **veto** s'il appartient à toutes les coalitions gagnantes ie $v(S) = 1 \Longrightarrow i \in S$ pour tout $S \subset N$.*

Une coalition $T$ a un pouvoir veto si $T \cap S \neq \emptyset$ pour toute coalition gagnante $S$.

Les jeux simples nous renvoient aux jeux de vote. Ils fournissent un modèle élémentaire de systèmes de vote dans lesquels certaines coalitions peuvent passer une loi alors que d'autres ne le peuvent pas.

### 1.1.3 Partages et Imputations

Soit $N$ un ensemble non vide de joueurs. Notons par $\mathbb{R}^N$ l'ensemble des applications de $N$ vers $\mathbb{R}$. Une telle application que nous notons $x$ affecte à chaque joueur $i$ de $N$ un nombre réel $x_i$. De façon générique, nous notons un élément $x$ de $\mathbb{R}^N$ par $(x_i)_{i\in N}$. Lorsque l'ensemble $N$ contient $n$ joueurs numérotées, nous identifions $x$ au $n$-uplet $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Pour toute coalition $S$ de $N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la somme des gains des joueurs de $S$ dans $x$ sera noté

$$x(S) = \sum_{i\in S} x_i.$$

On convient que $x(\emptyset) = 0$.

**Définition 1.1.10.** *Soit $(N; v)$ un JFCC. On appelle partage tout élément $x$ de $\mathbb{R}^N$.*

**Définition 1.1.11.** *Etant donné un jeu $(N; v)$ et $x$ un partage. On dit que $x$ est :*

1. *individuellement rationnel si pour chaque $i \in N$,$x_i \geq v(i)$ ;*
2. *réalisable si $x(N) \leq v(N)$ ;*
3. *efficient si $x(N) = v(N)$ ;*
4. *une imputation s'il est individuellement rationnel et efficient ;*
5. *une faible imputation s'il est individuellement rationnel et $x(N) \leq v(N)$ ;*
6. *une pseudo-imputation s'il est efficient et $\forall i \in N$, $x_i \geq 0$.*

Une interprétation intuitive de la rationalité individuelle est qu' on ne peut pas forcer un joueur à participer.

On peut aussi définir la rationalité collective sur les coalitions dans un jeu. Un jeu est dit collectivement rationnel si

$\forall S \subset N, x(S) \geq v(S)$.

On notera par $\chi(N)$ (respectivement $\tilde{\chi}(N)$) l'ensemble des imputations (respectivement faibles imputations) du jeu $(N; v)$ ou $\chi(\Gamma)$ (respectivement $\tilde{\chi}(\Gamma)$) lorsque $\Gamma = (N; v)$.

**Définition 1.1.12.** *Soient $(N, v)$ un JFCC, $x$ une imputation et $S$ une coalition.*

*On appelle **excès** de $S$ sur $x$, le réel $e(v, S) = v(S) - x(S)$.*

L'excès de $S$ sur $x$ mesure le degré d'insatisfaction de la coalition $S$ dans le partage $x$.

**Définition 1.1.13.** *Soit $(N; v)$ un JFCC. $\forall x \in \mathbb{R}^N$, le jeu à excès maximal noté $w_x$ est défini sur $N$ par $w_x(S) = Max\{e(T, x), T \subseteq S\}$ $\forall S \subseteq N$.*

L'issue d'un JFCC consiste en une partition ou regroupement des joueurs accompagné d'un partage des gains obtenus par les différentes coalitions formées. Si on laisse les joueurs décider librement de la coopération et du partage des biens issus de cette coopération, quelle partition de $N$ va être observée à l'issue du jeu et quelle sera la part de chaque joueur dans la coopération retenue ?

- La question "quelle partition de $N$ va être observée à l'issue du jeu ?" est appelée "problème de formation des coalitions".

- La question "quelle est la part de chaque joueur à l'issue du jeu ?" est connue sous le nom de "problème de répartition des biens".

Nous supposons que la grande coalition $N$ se forme. Alors comment les joueurs de $N$ se partageront-ils les gains obtenus (de manière optimale ou stable) ? En l'état actuel de la recherche, plusieurs solutions sont données au problème de partage optimal des gains obtenus. Parmi les solutions classiques, on peut citer par exemple le cœur (Gillies 1959), le domaine de marchandage (Aumann et Maschler, 1964), le Kernel (Davis et Maschler, 1965) et le nucléolus (Scheimeidler 1969).

## 1.2 Solutions de JFCC

**Dans la suite de nos travaux on suppose que la grande coalition $N$ se forme.**

**Définition 1.2.1.** *Soit $N$ un ensemble non vide.*

*On appelle solution aux JFCCs sur $N$, toute application $f$ qui, à tout JFCC $(N; v)$ associe un sous-ensemble $f(N; v)$ de l'ensemble, vide ou non, de tous les partages possibles.*

**Définition 1.2.2.** *Une solution $f$ au jeu $(N; v)$ est dite :*

- ***ponctuelle** si pour tout JFCC $(N; v)$, $f(N; v)$ est un singleton. On identifie alors $f(N; v)$ au seul partage qu'il contient.*
- ***ensembliste** lorsque $f(N; v)$ contient au moins deux éléments.*

**Définition 1.2.3.** *Une solution $f$ aux JFCCs sur $N$ est dite **covariante sous équivalence stratégique (COV)** si pour tous JFCCs $(N; v)$ et $(N; w)$ stratégiquement équivalents tels que $w = \alpha v + \beta$, $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}^N$, on a $f(w) = \alpha f(v) + \beta$.*

La notion de covariance stratégique a une importance pratique ; elle permet de déduire à partir d'une classe de JFCCs appropriée, la solution d'une autre classe de jeu.

**Définition 1.2.4.** *Soient $\Gamma = (N; v)$ un JFCC et $x \in \chi(\Gamma)$.*
*le jeu réduit $(S, v_{x,S})$ de **Davis-Maschler** pour une coalition non vide $S$ est défini comme suit :*

$$v_{x,S}(T) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ T = \emptyset \\ v(N) - x(N \setminus S) \ \ si \ \ S = T \\ \max\{v(T \cup Q) - x(Q), Q \subseteq N \setminus S\} \ \ si \ \ \emptyset \neq T \subsetneq S \end{cases}$$

**Définition 1.2.5.** *Une solution $\varphi$ sur l'ensemble des JFCCs sur un ensemble non vide $N$ a la propriété du jeu réduit **RGP** (reduced game property) si elle satisfait la condition suivante :*
*Pour tout JFCC $\Gamma = (N, v)$ et pour tout $S \in 2^N$, si $x \in \varphi((N, v))$, alors $x^S \in \varphi((S, v_{x,S}))$ où $x^S$ désigne la restriction de $x$ sur S.*

**Définition 1.2.6.** *Une solution $\varphi$ sur l'ensemble des JFCCs sur un ensemble non vide $N$ a la propriété d'anonymat* **(AN)** *si elle satisfait la condition suivante :*
*Pour tout JFCC $\Gamma = (N, v)$ et pour toute bijection $\pi : N \longrightarrow N$,*

$$\varphi((N, \pi v)) = \{\pi x, \;\; x \in \varphi((N, v))\}$$

*où le jeu $\pi v$ est défini par : $\pi v(S) = v(\pi^{-1}(S))$ pour toute coalition $S$ de $N$ et*
*$\pi x = (x_{\pi^{-1}(i)})_{1 \leq i \leq n}$ pour $x = (x_1, ..., x_n)$.*

Nous étudierons dans la suite le cœur, le domaine de marchandage, le nucléolus et le kernel sera étudié en profondeur dans les chapitres suivants.

### 1.2.1 Le cœur (Gillies, 1959)

**Ici on suppose que les biens considérés sont des utilités.**

**Définition 1.2.7.** *Etant donné un JFCC $(N; v)$, On appelle cœur de $(N; v)$, l'ensemble $\mathcal{C}(N; v)$ de tous les partages collectivement rationnels. Autrement dit,*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(N; v) &= \{x \in \chi(N; v) : \forall S \in 2^N, e(v, S) \leq 0\} \\ &= \{x \in \chi(N; v) : \forall S \in 2^N, v(S) \leq x(S)\}. \end{aligned}$$

**Exemple 1.2.1.** *Soit le JFCC $(N, v)$ à 3 joueurs défini ainsi qu'il suit :*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \textit{si } S \in \{(12), (13), (123)\} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

*Déterminons $\mathcal{C}(N; v)$.*

*Soit $x \in \mathbb{R}^3$, une imputation. Si $x \in \mathcal{C}(N; v)$, alors*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \forall i \in N \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \end{cases}$$

*Ce qui implique*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, \forall i \in N \\ x_3 \leq 0 \\ x_2 \leq 0 \\ 1 \geq x_3 \end{cases}$$

*ie*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_3 = 0 \end{cases}$$

*D'où* $\mathcal{C}(N, v) = \{(1, 0, 0)\}$

**Exemple 1.2.2.** *Soit le JFCC* $(N, v)$ *à 3 joueurs défini ainsi qu'il suit :*

$v(i) = 2$ *pour* $i = 1, 2, 3$ *;* $v(12) = 11, v(13) = 16, v(23) = 19$ *et* $v(123) = 20$

*Déterminons le cœur de ce jeu.*

*Soit* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *une imputation. Si* $x \in C(N, v)$*, alors*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ x_i \geq 2, \forall i \in N \\ x_1 + x_2 \geq 11 \\ x_1 + x_3 \geq 16 \\ x_2 + x_3 \geq 19 \end{cases}$$

*Ainsi* $(x_1 + x_2) + (x_1 + x_3) + (x_2 + x_3) \geq 11 + 16 + 19$

*D'où* $x_1 + x_2 + x_3 \geq 23$ *ce qui est impossible car* $x_1 + x_2 + x_3 = 20$.

*On peut donc conclure que* $\mathcal{C}(N, v) = \emptyset$

Les exemples précédents prouvent que que le cœur est une notion attractive en ce sens que sa notion intuitive est facile à cerner ainsi sa détermination aisée. Cependant il peut être vide. Le domaine de marchandage vient résoudre ce problème de vacuité.

### 1.2.2 Domaine de marchandage d'un JFCC (Aumann et Maschler, 1964)

Ici, on suppose :

- Les biens considérés sont des utilités et sont infiniment divisibles.
- Les joueurs sont individuellement rationnels.

**Définition 1.2.8.** *Soient* $(N; v)$ *un JFCC, et* $x$ *une imputation. Soient* $i$ *et* $j$ *deux joueurs distincts. On appelle objection de* $i$ *contre* $j$ *sur* $x$ *tout couple* $(S, y)$ *où* $S \subset N/\{i, j\}$ *et* $y \in \mathsf{R}^N$ *qui satisfont :*

1. $y(S \cup i) = v(S \cup i)$
2. $y_k \geq x_k$, $\forall k \in S \cup i$

**Définition 1.2.9.** *On appelle contre-objection de* $j$ *à l'objection* $(S, y)$ *de* $i$ *contre* $j$ *sur* $x$*, tout couple* $(T, z)$ *où* $T \subset N/\{i, j\}$ *et* $z \in \mathsf{R}^N$ *qui satisfont :*

1. $z(T \cup j) = v(T \cup j)$
2. $z_k > y_k$, $\forall k \in S \cap T$ *et* $z_k \geq x_k, \forall k \in (T/S) \cup j$

**Définition 1.2.10.** *Soient* $(N; v)$ *un JFCC. Le domaine de marchandage du jeu* $(N; v)$ *est l'ensemble noté* $\mathcal{M}_1^i(N; v)$ *de toutes les imputations pour lesquelles toute objection admet au moins une contre-objection.*

Le théorème suivant de M. Davis et M. Maschler (1967) nous donne une importance fondamentale du domaine de marchandage sur sa non vacuité.

**Théorème 1.2.1.** *Soit $(N; v)$ un JFCC. Le domaine de marchandage $\mathcal{M}_1^i(N; v)$ est non vide si et seulement si l'ensemble des imputations est non vide.*

**Remarque 1.2.1.** *Soit $(N; v)$ un JFCC. Toute imputation appartenant au cœur n'admet aucune objection, donc appartient au domaine de marchandage. Par conséquent, le cœur est une partie du domaine de marchandage. Concrètement, $\mathcal{C}(N; v) \subset \mathcal{M}_1^i(N; v)$.*

Malgré la non vacuité du domaine de marchandage, sa détermination n'est pas aisée. Cependant la détermination complète du domaine de marchandage d'un jeu à trois joueurs a été établie par Tchantcho H. (2014)

**Exemple 1.2.3.** $N = \{1, 2, 3\}$ *,*$v(i) = 0, \forall i \in N$*,* $v(12) = 1$*,* $v(13) = 1$*,* $v(23) = 2$ *et* $v(N) = 1$*. On trouve* $\mathcal{M}_1^i(N; v) = \{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$*.*

### 1.2.3 Nucléolus (Scheimeidler 1969)

Pour chaque imputation $x$ et pour chaque coalition, on mesure l'insatisfaction par $e(S, x)$. Pour chaque imputation $x$, il existe $2^n$ valeurs d'insatisfaction et une pour chaque coalition $S$. On ordonne les insatisfactions de la plus grande à la plus petite dans le vecteur suivant :

$$e(x) = \{e_1(x), \cdots, e_{2^n}(x)\}.$$

**Définition 1.2.11.** *Une imputation $x$ est au moins aussi satisfaisante qu'une imputation $y$ (on note $x \succeq_L y$) s'il n'existe pas de $l \in \{1, \cdots, 2^n\}$ tel que :*

$$e_l(x) > e_l(y), e_k(x) = e_k(y) \forall k < l.$$

*Autrement dit, $x$ est plus satisfaisant que $y$ ($x \succ_L y$) si $e_l(x) < e_l(y)$ pour le plus petit $l$ tel que $e_l(x) \neq e_l(y)$.*

**Définition 1.2.12.** *Le Nucléole, noté $\mathcal{N}(N, v)$ est défini par l'ensemble :*

$$\mathcal{N}(N, v) = \{x \in \chi(N; v) : x \succeq_L y, \forall y \in \chi(N; v)\}.$$

Nous aurons besoin au chapitre suivant du théorème très important établi par Schemeidler 1968 qui nous donne la non vacuité du nucléole.

**Théorème 1.2.2.** *Pour un jeu $\Gamma$ donné, $\mathcal{N}(\Gamma) \neq \emptyset$ des que $\chi(\Gamma) \neq \emptyset$.*

Dans le chapitre suivant nous étudions en profondeur le Kernel d'un JFCC.

# KERNEL D'UN JFCC

Le Kernel est un concept de solution pour les JFCCs. La principale fonction était d'éclairer les propriétés du domaine de marchandage et de faciliter ou d'écourter le calcul de cet ensemble difficile à déterminer. Le Kernel n'avait pas une signification intuitive directe. Néanmoins, il a été vite découvert que le Kernel a de nombreuses propriétés mathématiques intéressantes qui reflètent de différentes manières la structure du jeu. Peu à peu, il est devenu un concept de solution important.

On suppose que :

– Les joueurs sont réunis dans la grande coalition.
– Les biens sont infiniment divisibles et sont des utilités.
– Les joueurs sont rationnels.

## 2.1 Kernel comme solution ensembliste

Soient $\Gamma = (N, v)$ un JFCC à $n$ joueurs, $x \in \chi(\Gamma)$, $k$ et $l$ deux joueurs distincts. Nous notons par $T_{kl}$ l' ensemble de toutes les coalitions contenant $k$ mais pas $l$ :

$$T_{kl} = \{D \subset N : k \in D, l \notin D\} \tag{2.1}$$

**Définition 2.1.1.** *Soient $\Gamma = (N, v)$ un JFCC, $x \in \chi(\Gamma)$, $k$ et $l$ deux joueurs distincts. Le **surplus maximum** du joueur $k$ contre $l$ :*

$$S_{kl}(x) = Max\{e(D, x) : D \in T_{kl}\}. \tag{2.2}$$

Intuitivement, lorsque $k$ et $l$ sont dans une même coalition et que $S_{kl}(x)$ est positif, alors $S_{kl}(x)$ est le montant maximal avec lequel $k$ peut "maneouvrer"( ie prendre pour lui même ou offrir à ses partenaires) dans le cas où il veut fonder une nouvelle coalition qui exclura $l$.

**Définition 2.1.2.** *Soient $\Gamma = (N, v)$ un JFCC, $x \in \chi(\Gamma)$, $k$ et $l$ deux joueurs distincts. Le joueur $k$ **domine** $l$ si*

$$S_{kl} > S_{lk} \; et \; x_l \neq v(l). \tag{2.3}$$

Si $k$ ne domine pas $l$ et $l$ ne domine pas $k$ alors on dira que $k$ et $l$ sont en **équilibres**. Notons le rôle spécial qu'un joueur $i$ a s'il gagne $v(i)$ dans $x$. Dans ce cas, aucun joueur ne peut le dominer.

**Définition 2.1.3.** *Soient $\Gamma = (N, v)$ un JFCC, $x \in \chi(\Gamma)$. L'imputation $x$ est dite balancée si deux joueurs distincts $k, l$ sont en équilibres.*

**Définition 2.1.4.** *Soit $\Gamma = (N, v)$ un JFCC. Soit $x \in \chi(\Gamma)$. Le* ***Kernel*** *de $\Gamma$ noté $\mathcal{K}(\Gamma)$ ou $\mathcal{K}(N; v)$ est l'ensemble de toutes les imputations balancées.*

La proposition suivante nous donne une définition équivalente du Kernel sous forme d'un système d'inéquations qui conduit aux vecteurs gains de cet ensemble.

**Proposition 2.1.1.** *Soit $\Gamma = (N, v)$ un JFCC, $x \in \chi(\Gamma)$, $k$ et $l$ deux joueurs distincts.*

$$k \text{ domine } l \text{ ssi } (S_{kl} - S_{lk})(x_l - v(l)) > 0 \tag{2.4}$$

$$k \text{ et } l \text{ sont en equilibres ssi } (S_{kl} - S_{lk})(x_l - v(l)) \leq 0 \text{ et } (S_{lk} - S_{kl})(x_k - v(k)) \leq 0 \tag{2.5}$$

**Preuve :** En effet si $k$ domine $l$ alors $S_{kl} > S_{lk}$ et $x_l > v(l)$. Donc $S_{kl} - S_{lk} > 0$ et $x_l - v(l) > 0$. D'où $(S_{kl} - S_{lk})(x_l - v(l)) > 0$. Réciproquement si $(S_{kl} - S_{lk})(x_l - v(l)) > 0$. Alors on a nécessairement $S_{kl} - S_{lk} > 0$ et $x_l - v(l) > 0$ car on ne pourrait avoir $x_l < v(l)$ car $x$ satisfait la rationalité individuelle. Donc on aura $S_{kl} > S_{lk}$ et $x_l > v(l)$ et ainsi $k$ domine $l$. (2.5) découle de (2.4).

**Remarque 2.1.1.**

1. *Une imputation $x$ appartient au Kernel du jeu si et seulement si pour toute paire de joueurs distincts $k, l$*

$$[S_{kl}(x) - S_{lk}(x)].[x_l - v(l)] \leq 0 \text{ et } [S_{lk}(x) - S_{kl}(x)].[x_k - v(k)] \leq 0 \tag{2.6}$$

2. *Si le jeu est monotone et vérifie $v(N) = 1$ et $v(i) = 0$ pour tout $i \in N$ alors (2.6) devient*

$$S_{kl}(x) = S_{lk}(x) \tag{2.7}$$

3. *Le pseudo-kernel d'un jeu est l'ensemble de toutes les pseudo-imputations $x$ tels que pour toute paire de joueurs distincts $k, l$*

$$[S_{kl}(x) - S_{lk}(x)].x_l \leq 0 \text{ et } [S_{lk}(x) - S_{kl}(x)].x_k \leq 0 \tag{2.8}$$

**Remarque 2.1.2.**

1. *Le Kernel préserve la relation de désirabilité. Autrement dit, si un joueur $k$ est plus désirable qu'un autre $l$ dans un jeu $\Gamma = (N; v)$, et si $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$ alors $x_k \geq x_l$. En effet,*

   *Soient $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$, $k$ et $l$ deux joueurs distincts. Supposons que $k$ est plus désirable que $l$ et $x_k < x_l$. Soit $S$ la coalition dans laquelle $l$ atteint son surplus maximum contre $k$ ; i.e. $S_{lk} = e(v, S), S \in T_{lk}$. Posons $T = (S \cup \{k\}) \setminus \{l\}$ ; Ainsi $v(T) \geq v(S)$. D'où $e(v, T) > e(v, S)$ car $x_l > x_k$. Donc $S_{kl} > S_{lk}$ et $x_l > x_k \geq 0$. Par conséquent $k$ domine $l$. Ce qui est absurde car $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$.*

2. *Si deux joueurs $k$ et $l$ sont symétriques dans un jeu $\Gamma$ donné alors $\forall x \in \mathcal{K}(\Gamma)$, $x_l = x_k$.*
3. *Si un joueur $k$ est dummy dans un jeu $\Gamma = (N; v)$, alors $\forall x \in \mathcal{K}(\Gamma)$, $x_k = 0$.*

Nous allons étudier dans la suite quelques propriétés du Kernel.

## 2.2 Axiomatisation du Kernel et Propriétés

### 2.2.1 Axiomatisation du Kernel

Le Théorème suivant dû à Peleg (1986) permet d'axiomatiser le Kernel.

**Théorème 2.2.1.** *En considérant l'ensemble de tous les JFCCs sur un ensemble fini $N$, le Kernel est l'unique solution non vide vérifiant* ***rationalité individuelle****,* ***COV****,* ***AN****, et* ***RGP****.*

### 2.2.2 Propriétés du Kernel

#### Non vacuité du Kernel

La non vacuité du Kernel a été étudié par Davis et Maschler auteurs du théorème suivant

**Théorème 2.2.2.** *Soit $\Gamma = (N; v)$ un JFCC, alors si $\chi(\Gamma) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{K}(\Gamma) \neq \emptyset$.*

**Preuve :** Nous allons montrer que $\mathcal{N}(\Gamma) \subseteq \mathcal{K}(\Gamma)$ et conclure d'après le Théorème 1.2.2. Par la contraposée. Soit $x \notin \mathcal{K}(\Gamma)$, on veut montrer que $x \notin \mathcal{N}(\Gamma)$. Comme $x \notin \mathcal{K}(\Gamma)$ alors il existe une coalition $B$ et deux joueurs $k, l$ appartenant à $B$ tels que $S_{lk}(x) > S_{kl}(x)$ et $x_k > v(k)$. Soit $y$ une imputation correspondante à l'utilité transférable $\epsilon > 0$ de $k$ à $l$ :

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \neq k \textit{ et } i \neq l \\ x_k - \epsilon & \text{si } i = k \\ x_l + \epsilon & \text{si } i = l \end{cases}$$

Vu que $x_k > v(k)$ et $S_{lk}(x) > S_{kl}(x)$, on peut choisir $\epsilon > 0$ assez petit tel que :

* $x_k - \epsilon > v(k)$
* $S_{lk}(y) > S_{kl}(y)$

Nous allons montrer que $x \preceq_L y$. Notons que pour toute coalition $S$ de $N$ telle que $e(S, x) \neq e(S, y)$. Nous avons soit :

* $k \in S$ et $l \notin S$ $(e(S, x) > e(S, y)$ vu que $e(S, y) = e(S, x) + \epsilon > e(S, x))$ ;
* $k \notin S$ et $l \in S$ $(e(S, x) < e(S, y)$ vu que $e(S, y) = e(S, x) - \epsilon < e(S, x))$.

Soit $\{B_1(x), \cdots, B_M(x)\}$ une partition de l'ensemble de toutes les coalitions telles que

- $S, T \in B_i(x)$ si et seulement si $e(S, x) = e(S, y)$. Nous notons par $e_i(x)$ la valeur commune de l'excès dans $B_i(x)$, ie $e_i(x) = e(S, x) \forall S \in B_i(x)$.
- $e_1(x) > e_2(x) > \cdots > e_M(x)$.
  Autrement, $e(x) =< \underbrace{e_1(x), \cdots, e_1(x)}_{\mid B_1(x) \mid \text{ fois}}, \cdots, \underbrace{e_M(x), \cdots, e_M(x)}_{\mid B_M(x) \mid \text{ fois}} >$.

Soit $i^\star$ la plus petite valeur de $i \in \{1, \cdots, M\}$ telle qu'il existe $B \in B_{i^\star}(x)$ avec $e(B, x) \neq e(B, y)$. Pour tout $i < i^\star$, on a $B_i(x) = B_i(y)$ et $e_i(x) = e_i(y)$.
Comme $S_{lk}(x) > S_{kl}(x)$, $B_{i^\star}$ contient :

- au moins une coalition $S$ qui contient $l$ mais pas $k$ et $e(S,x) > e(S,y)$.
- aucune coalition contenant $k$ mais pas $l$.

Si $B_{i^\star}$ contient soit :

- les coalitions qui contiennent $k$ et $l$
- ou les coalitions qui ne contiennent ni $k$ ni $l$.

Alors pour de telles coalitions $S$, nous avons $e(S,x) = e(S,y)$ et il s'en suit que $B_{i^\star}(y) \subseteq B_{i^\star}(x)$. Ailleurs, nous avons $e_{i^\star}(y) < e_{i^\star}(x)$. Dans ces deux cas, $x \preceq_L y$.

D'où $x \notin \mathcal{N}(\Gamma)$.

**Covariance du Kernel**

Dans la suite, on pose $\Upsilon$ l'ensemble des jeux $(N;v)$, tels que $v(N) = \epsilon$ et $v(i) = 0$ pour tout $i \in N$. Ces JFCCs sont appelés jeu 0-réduit et lorsque $\epsilon = 1$, on parle alors de jeu 0,1-réduit.

Nous aurons besoin du Théorème suivant bien connu voir H. TCHANTCHO (2014). Une preuve de ce Théorème a été donné par ce dernier et permet d'obtenir un jeu 0,1-réduit stratégiquement équivalent à un JFCC donné.

**Théorème 2.2.3.** *Pour tout jeu sous forme caractéristique $(N,w)$, il existe un jeu $(N;v)$ de $\Upsilon$ tel que $w$ et $v$ soient stratégiquement équivalents.*

**Remarque 2.2.1.** *Il faut noter dans le Théorème précédent que, si $(N;w)$ est monotone alors $(N;v)$ le sera aussi. En effet, posons $v = \alpha w + \beta$ avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}^3$. Soient $S$ et $T$ deux coalitions telles que $S \subseteq T$. Alors on a : $w(S) \leq w(T)$ ;*
*ainsi $\alpha w(S) + \beta(S) \leq \alpha w(T) + \beta(S) \leq \alpha w(T) + \beta(T)$ , i.e. $v(S) \leq v(T)$.*

Le Théorème suivant sur la covariance du Kernel dû à M. Davis et M. Maschler est d'une importance capitale car il nous permet de déduire le Kernel d'une classe de jeu à partir du Kernel d'une classe de jeu appropriée.

**Théorème 2.2.4.** *$(N,v)$ et $(N,w)$ étant deux JFCCs de $\Upsilon$ stratégiquement équivalents tels que $w = \alpha v + \beta$, $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}^N$. On a*
*$\mathcal{K}(N,w) = \alpha\mathcal{K}(N,v) + \beta$.*

**Propriété géométrique**

Le Kernel présente une propriété géométrique intéressante.

**Définition 2.2.1.** *On appelle **polytope** l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.*

**Définition 2.2.2.** *Soit $E$ un espace affine. On appelle **polyèdre convexe** de $E$ tout polytope d'intérieur non vide.*

Le résultat suivant de Aumann R. , B. Peleg et D. Rabinowitz (1965) nous permet de saisir une propriété géométrique du Kernel.

**Théorème 2.2.5.** *Le Kernel d'un jeu* $\Gamma$ *est une réunion finie de polyèdres convexes.*

**Preuve** $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$ si et seulement si

$$x \in \chi(\Gamma) \text{ et pour tout } i = 1, \cdots, n, x_i = v(i) \text{ ou} \tag{2.9}$$

$$S_{ij}(x) \geq S_{ji}(x) \text{ pour tout } j \neq i.$$

Ainsi $S_{ij}(x)$ (et aussi $S_{ji}(x)$) est le maximum d'un nombre fini de fonctions linéaires de $x$, i.e. les fonctions de la forme $x \mapsto a.x + c$. Donc (2.9) est construit à partir d'inégalités linéaires au moyen des conjonctions et disjonctions. Ce qui rend complexe sa structure mais peut être simplifiée en choisissant de conjonctions et de disjonctions d'inégalités appropriées. Ainsi, il existe de fonctions linéaires $g_{pq}(x)$, où $p$ et $q$ appartiennent à des ensembles finis tels que (2.9) soit équivalent à

$$Il \text{ existe } p \text{ tel que } \forall q, g_{pq}(x) \geq 0. \tag{2.10}$$

Chaque $g_{pq}(x)$ apparait dans (2.9) et est soit de la forme $\sum_S x_i - v(S)$ pour de coalitions $S$ soit $\sum_S x_i - \sum_T x_i - (v(S) - v(T))$ pour de coalitions $S, T$. De la forme (2.10), il vient que le Kernel est une réunion de $P$ polyèdres convexes, chacun déterminé par $Q$ inégalités.

### Le Kernel et cœur - domaine de marchandage

Dans cette sous-section, nous allons voir les relations qui peuvent exister entre le Kernel et le cœur d'une part et le Kernel et le domaine de marchandage d'autre part.

Tamas Solymosi (1998) compare le Kernel et le cœur des jeux $N - 0-$monotones. Il énonce le Théorème suivant.

**Théorème 2.2.6.** *Soient* $\Gamma = (N; v)$ *un JFCC* $N - 0-$*monotone et* $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$*. Alors* $x \in \mathcal{C}(\Gamma)$ *si et seulement si le jeu à excès maximal* $w_x$ *induit par* $x$ *est balancé.*

**Corollaire 2.2.1.** *Soit* $\Gamma = (N; v)$ *un JFCC* $N - 0-$*monotone. Alors*

*(i)* $\mathcal{C}(\Gamma) \neq \emptyset$ *si et seulement si* $w_x$ *est balancé pour tout* $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$ *;*

*(ii)* $\mathcal{K}(\Gamma) \subseteq \mathcal{C}(\Gamma)$ *si et seulement si* $w_x$ *est balancé pour tout* $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$.

L'exemple suivant montre que la caractérisation du Théorème 2.2.6 n'est plus valable pour de jeux qui ne sont pas $N - 0-$monotone.

**Exemple 2.2.1.** *Sur l'ensemble* $N = \{1, 2, 3, 4\}$*, on définit* $v$ *par* $v(S) = 0$ *pour* $\mid S \mid \leq 1$, $v(12) = 3$*,* $v(S) = \mid S \cap \{12\} \mid$ *pour* $\mid S \mid \geq 2$*,* $S \neq \{12\}$.

*L'imputation* $x = (1, 1, 0, 0) \in \mathcal{K}(\Gamma)$*,* $w_x$ *est balancé, mais* $x \notin \mathcal{C}(\Gamma) = \emptyset$.

*De* $x = (1,1,0,0)$ *seule la coalition* $\{12\}$ *a un excès positif, toutes les autres coalitions (exceptées* $\{1\}$ *et* $\{2\}$*) ont un excès nul. D'où, le surplus* $S_{ij}(x)$ *n'est pas nul si* $i$ *est l'un des joueurs 1 ou 2 et* $j$ *est soit le joueur 3 ou 4. Comme* $x_3 = 0 = v(3)$ *et* $x_4 = 0 = v(4)$*, donc* $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$.

$w_x$ *est donné par*

$$w_x(S) = \begin{cases} 1 \text{ si } \{12\} \subseteq S \\ \qquad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

*Ainsi* $w_x$ *est balancé, car, par exemple* $(1,0,0,0) \in \mathcal{C}(w_x)$. *Mais* $\mathcal{C}(\Gamma) = \emptyset$ *car* $v(12) + v(34) > v(1234)$.

**Corollaire 2.2.2.** *Si* $\Gamma = (N; v)$ *est un jeu à* $4$ *joueurs balancé alors* $\mathcal{K}(\Gamma) \subseteq \mathcal{C}(\Gamma)$.

Le théorème suivant de M. Maschler et B. Peleg nous donne une comparaison entre le Kernel et le cœur pour des jeux quelconques.

**Théorème 2.2.7.** *Si le cœur d'un JFCC est non vide, alors il contient un élément du Kernel.*

Le Théorème suivant de Davis et Maschler (1965) montre que le Kernel est un sous-ensemble du domaine de marchandage. Il nous permet étant donné la complexité autour du calcul du domaine de marchandage, de trouver quelques éléments de ce domaine en passant par le Kernel.

**Théorème 2.2.8.** *Soit* $\Gamma = (N; v)$ *un JFCC. Alors* $\mathcal{K}(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}_1^i(\Gamma)$.

## 2.3 Kernel d'un JFCC à trois joueurs monotone

Ici, nous nous proposons de déterminer le Kernel d'un JFCC 0,1- réduit et monotone et en déduire le Kernel d'un JFCC à 3 joueurs monotone.

**Proposition 2.3.1.** *Soit* $(N; v)$ *un JFCC défini par* $N = \{1,2,3\}$, $v(123) = 1$, $v(12) = a$, $v(13) = b$, $v(23) = c$ *et* $v(i) = 0$ *pour tout* $i \in N$. *On suppose que* $\chi(N, v) \neq \emptyset$. *Si* $(N; v)$ *est monotone alors*

$$\mathcal{K}(N; v) = \{(\tfrac{1+a+b-2c}{3}, \tfrac{1+a+c-2b}{3}, \tfrac{1+b+c-2a}{3})\}$$

**Preuve**

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \chi(N; v)$. $x \in \mathcal{K}(N; v)$ si et seulement si pour toute paire de joueurs distincts $i, j$ on a $S_{ij}(x) = S_{ji}(x)$. Ainsi, $x$ vérifie le système

$$\begin{cases} S_{12}(x) = S_{21}(x) \\ S_{13}(x) = S_{31}(x) \\ S_{23}(x) = S_{32}(x) \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Comme $S_{12}(x) = Max\{e(D,x) : D \in T_{12}\} = e(\{13\}, x) = b - x_1 - x_3$,
$S_{21}(x) = Max\{e(D,x) : D \in T_{12}\} = e(\{23\}, x) = c - x_2 - x_3$
$S_{13}(x) = Max\{e(D,x) : D \in T_{13}\} = e(\{12\}, x) = a - x_1 - x_2$
$S_{31}(x) = Max\{e(D,x) : D \in T_{31}\} = e(\{31\}, x) = c - x_3 - x_2$
$S_{23}(x) = Max\{e(D,x) : D \in T_{23}\} = e(\{21\}, x) = a - x_2 - x_1$ et
$S_{32}(x) = Max\{e(D,x) : D \in T_{32}\} = e(\{13\}, x) = b - x_1 - x_3$.
$S_{12}(x) = S_{21}(x) \Leftrightarrow x_1 - x_2 = b - c \Rightarrow x_2 = -b + c + x_1$
$S_{13}(x) = S_{31}(x) \Leftrightarrow x_1 - x_3 = a - c \Rightarrow x_3 = -a + c + x_1$ et
$S_{23}(x) = S_{32}(x) \Leftrightarrow x_2 - x_3 = a - b$
Puisque $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, alors $x_1 - b + c + x_1 - a + c + x_1 = 1$.
D'où $x_1 = \frac{1+a+b-2c}{3}$, $x_2 = \frac{1+a+c-2b}{3}$ et $x_3 = \frac{1+b+c-2a}{3}$.

**Exemple 2.3.1.** *Déterminons le Kernel pour la grande coalition du jeu à majorité $M_3$ à 3 joueurs défini par :*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & si\ S \in \{(12), (13), (23), (123)\} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$M_3$ est un jeu $0, 1$-réduit et monotone, alors une application directe de la Proposition 2.3.1 nous donne
$\mathcal{K}(N; v) = \{(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})\}$.

**Exemple 2.3.2.** *Déterminons le Kernel pour la grande coalition du jeu à 3 joueurs suivant :*
$v(i) = 0, \forall i \in N$, $v(12) = 2$,$v(13) = 3$, $v(23) = 4$ *et* $v(N) = 6$.

Notre jeu est monotone mais n'est pas 0,1-réduit. Nous allons chercher le jeu $(N; w)$ de $\Upsilon$ qui lui est stratégiquement équivalent. D'après H. TCHANTCHO (2014), on a : $w(N) = 1$ et pour toute coalition $S$,
$w(S) = \dfrac{v(S) - \sum_{i \in S} v(i)}{v(N) - \sum_{i \in N} v(i)} = \dfrac{v(S)}{v(N)}$.
Ainsi $w(12) = \frac{1}{3}$, $w(13) = \frac{1}{2}$ et $w(23) = \frac{2}{3}$.
En appliquant la proposition 2.3.1 au jeu $(N; w)$, on obtient $\mathcal{K}(N; w) = \{(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2})\}$. Et d'après le Théorème 2.2.4, $\mathcal{K}(N; v) = 6\mathcal{K}(N; w) = \{(1; 2; 3)\}$.

Nous remarquons que la détermination du Kernel d'un JFCC n'est pas toujours facile et plus particulièrement pour un jeu composé simple dont le chapitre suivant fait l'objet.

⋆ ⋆ Chapitre Trois ⋆ ⋆

# KERNEL D'UN JEU COMPOSE SIMPLE

## 3.1 Notion de jeu composé simple

### 3.1.1 Quelques approches de jeu composé simple

**(a) Scénario d'un jeu composé de Penrose**

Une approche des jeux composés a été introduite par Shapley en 1962. Le scénario de base considéré par Penrose en 1946 et réinventé plus tard par Banzhaf est comme suit : il y'a $n$ circonscriptions électorales avec des groupes disjoints de populations de dimension $N_1, N_2, \cdots, N_n$ ayant les délégués $1, \cdots, n$ désignés pour les représenter . Chaque citoyen est libre de voter "pour" ou de voter "contre" l' adoption d'une proposition. Une fois les citoyens ont lancé leur vote, le résultat est décidé dans chaque circonscription électorale par la règle de majorité simple. Décision faite alors on passe au conseil des délégués. Chaque délégué vote pour ou contre en accord avec le plébiscite dans sa circonscription électorale. Le dernier résultat de vote est résolu de manière plus subtile dans le conseil par un jeu simple de vote défini sur les délégués $1, \cdots, n$. La modélisation mathématique d' un scénario de vote composé est le suivant : Soit $U$ un ensemble ( peut-être infini) de joueurs. On considère $n+1$ jeux simples $v, w_1, w_2, \cdots, w_n$ sur $U$ tels que

1. $v$ a un support $N$ avec $card(N) = n$
2. $w_1, w_2, \cdots, w_n$ ont $n$ supports disjoints et finis $M_1, M_2, \cdots, M_n$.
   Soit $\alpha : \{1, \cdots, n\} \longrightarrow N$, une bijection. Alors le jeu simple $\mu$ est appelé jeu composé de $v$ avec $w_1, w_2, \cdots, w_n$ via $\alpha$ et on note $\mu = v_\alpha[w_1, w_2, \cdots, w_n]$ si
   $\mu(S) = v(\{\alpha(j), w_j(S) = 1\})$. Il est à noter que $M = \cup_{j=1}^{n} M_j$ est le support de $\mu$. On peut ainsi penser à $\mu$ comme étant un vote à deux étapes. En premier lieu, il y' a un vote simultané parmi les circonscriptions électorales $1, \cdots, n$. Le résultat de vote dans la population $M_j$ est déterminé par $w^j$. Le vote passe alors aux conseils des délégués. Le délégué de chaque circonscription est identifié par $\alpha(j) \in N$ et son vote doit coïncider avec le plébiscite de sa circonscription électorale. Les résultats de vote par le conseil des

délégués dans $M$ est donné par $v$.

**(b) Les élections présidentielles aux États Unis d' Amérique**

L'élection présidentielle américaine est un scrutin indirect. Le président est élu par un collège électoral dont la définition figure dans la constitution. Ce collège est constitué des grands électeurs élus au suffrage universel dans chaque État par des votes à la majorité simple. Chacun des 50 États élit un nombre de grands électeurs égal au nombre de ses représentants et sénateurs (l'État le plus peuplé la Californie dispose de 55 votes, alors que les huit États les moins peuplés ne dispose que de 3 votes) soit un nombre total de 538 grands électeurs.
En pratique, les dernières élections se jouent entre les deux candidats des partis démocrate et républicain comme lors des deux dernières élections . Désignons par $M = \{1, \cdots, 50\}$ le collège électoral (un élément de $M$ est un État) et par les $N_i,\ i = 1, \cdots, 50$ les États en question.
L'ensemble des circonscriptions est donc $N = \bigcup\limits_{i=1}^{50} N_i$.
Si on note :

- $w_i$ le nombre de grands électeurs de l'État $i$ ; c'est le poids de l'État $i$ dans M
- $\mathcal{W}_i = \{T \in 2^{N_i} :\mid T \mid > \frac{1}{2} \mid M_i \mid\}$
- $Q = \sum\limits_{i=1}^{50} w_i$
- $\mathcal{W} = \left\{ S \in 2^M : \sum\limits_{i \in S} w_i > \frac{1}{2} Q \right\}$

alors, $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W})$ est un jeu simple à quota (l'élu est le candidat ayant réuni en sa faveur au moins $270 = \frac{1}{2}Q + 1$ grands électeurs) avec $\mathcal{W}$ comme l'ensemble des coalitions gagnantes et pour tout $i \in M$, $\Gamma_i = (N_i,\ \mathcal{W}_i)$ est un jeu simple (jeu à la majorité simple) avec $\mathcal{W}_i$ comme l'ensemble des coalitions gagnantes.
Les élections se font donc en deux tours, le premier tour s'effectue dans les États où chaque État $i$ élit ses représentants par un vote à la majorité simple $\Gamma_i = (N_i,\ \mathcal{W}_i)$ et chaque représentant éligible présente sa préférence entre les deux candidats à l'élection présidentielle et le transcrit fidèlement à la chambre des représentants au cas où il est élu.
Le deuxième tour a lieu au collège électoral où chaque État est représenté avec pour poids son nombre de représentants, l'élu est le candidat ayant réuni en sa faveur au moins $270 = \frac{1}{2}Q + 1$ grands électeurs dans le jeu simple à quota $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W})$ avec pour quota 270.
Ces élections peuvent s'interpréter comme un jeu composé simple $\Gamma = (N, \mathcal{W}_N)$ noté
$\Gamma = \Gamma_0[\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m]$ où $\Gamma_0$ est le quotient et $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_{50}$ sont les jeux composants.
$\mathcal{W}_N$ est l'ensemble des coalitions gagnantes du jeu composé est il est donné par :
$\mathcal{W}_N = \{S \in 2^N : T_S \in \mathcal{W}\}$ où $T_S = \{i \in M : S \cap N_j \in \mathcal{W}_j\}$.

### 3.1.2 Formalisme générale d'un jeu composé

Soient $\Gamma_0 = (M, u)$ et $\Gamma_1 = (N_1, v_1), \cdots, \Gamma_m = (N_m, v_m)$ une famille de $m$ JFCCs vérifiant $v_i(N_i) = 1, \ \ i = 1, \cdots, m.$
On suppose que $M = \{1, ..., m\}$ et que $N_i \cap N_j = \emptyset$, pour $i, j = 1, \cdots, m \ \ , i \neq j.$
$\Gamma_0$ peut être considéré comme un conseil de délégués ou de représentants des circonscriptions $N_i, \ \ i = 1, \cdots, m$ qui transcrivent fidèlement les décisions prises dans les circonscriptions qu'ils représentent en vue d'une prise de décision dans la population totale $N = \bigcup_{i=1}^{m} N_i$. Ainsi, les décisions prises au conseil sont représentatives de celles issues de la population totale ; on définie ainsi une composition des jeux $\Gamma_1 = (N_1, v_1), \cdots, \Gamma_m = (N_m, v_m)$ par le jeu $\Gamma_0 = (M, u)$ dans lequel la définition des gains des coalitions repose intuitivement sur deux hypothèses :

$H_1$- Le gain d'un groupe de délégués dans le conseil doit être égal au gain de l'ensemble de toutes les circonscriptions que ces délégués représentent dans la population totale.

$H_2$- La contribution marginale d'un agent $k$, provenant d'une circonscription $N_i$ dans une coalition $S$ de la population totale doit être proportionnelle à sa contribution marginale dans $S$ dans sa circonscription $N_i$ et proportionnelle à la contribution marginale de sa circonscription $N_i$ dans $S$ dans la population totale.

Si on note $v$ la fonction caractéristique du jeu composé obtenu, alors les hypothèses $H_1$ et $H_2$ s'écrivent :

$H_1$- $\forall T \subseteq M, \ \ u(T) = v\left(\bigcup_{j \in T} N_j\right).$

$H_2$- $\forall i \in M, \ \ \forall k \in N_j, \ \ \forall S \subseteq N,$
$v(S \cup \{k\}) - v(S) = [v_i((S \cap N_i) \cup \{k\}) - v_i((S \cap N_i))] \, [v(S \cup N_i) - v(S \setminus N_i)].$

Le résultat suivant dû à **Owen** donne la forme analytique de la fonction caractéristique du jeu composé ainsi obtenu.

**Théorème 3.1.1.** *Soient $\Gamma_0 = (M, u)$ et $\Gamma_1 = (N_1, v), \cdots, \Gamma_m = (N_m, v_m)$ une famille de m JFCCs vérifiant $v(N_i) = 1, \ \ i = 1, \cdots, m.$*
*L'unique fonction $v$ à valeurs réelles, définie sur $N = \bigcup_{i=1}^{m} N_i$ et satisfaisant les hypothèses $H_1$ et $H_2$ est donné par :*

$$\forall S \subseteq N, \ \ v(S) = \sum_{T \subseteq M} \left[\prod_{i \in T} v_i(S \cap N_i) \prod_{i \notin T} (1 - v_i(S \cap N_i))\right] u(T).$$

Il en découle la définition suivante d'un jeu composé.

**Définition 3.1.1.** ***(G. Owen, 1964)***
*Soient $\Gamma_0 = (M, u)$ et $\Gamma_1 = (N_1, v), \cdots, \Gamma_m = (N_m, v_m)$ une famille de m JFCCs vérifiant $v(N_i) = 1, \ \ i = 1, \cdots, m$ .*
*On suppose que $M = \{1, \cdots, m\}$ et que $N_i \cap N_j = \emptyset$, pour $i, j = 1, \cdots, m \ \ i \neq j.$*
*Le **jeu composé** des jeux $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ avec le jeu $\Gamma_0$ est le jeu défini par :*

$$\Gamma = (N, v) = \Gamma_0 [\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m] \text{ où } N = \bigcup_{i=1}^{m} N_i \text{ et}$$
$$\forall S \subseteq N, \ \ v(S) = \sum_{T \subseteq M} \left[ \prod_{i \in T} v_i(S \cap N_i) \prod_{i \notin T} (1 - v_i(S \cap N_i)) \right] u(T)$$

*$\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ sont les jeux composants de $\Gamma$ et $\Gamma_0$ est son jeu quotient.*

Nimrod Megiddo utilise la définition des jeux composés pour introduire les jeux composés simples. Il en donne la définition suivante.

**Définition 3.1.2.** ***(Nimrod M. 1974)***
*Un **Jeu composé simple** ou **jeu composé à composantes simples** est un jeu composé dont les jeux composants sont des jeux simples.*

**Remarque 3.1.1.**
*Si le quotient du jeu composé simple $\Gamma$ est un jeu simple, alors on dit que $\Gamma$ est un **jeu simple composé** ou **jeu de vote composé** tels que décrit par le **scénario de Penrose** et dont une application est l' **élection présidentielle aux Etas Unis d'Amerique**.*

Notons ici que la complexité de la forme analytique d'un jeu composé ne motive pas les chercheurs à approfondir les propriétés qui caractérisent un tel jeu. Mais lorsqu'on considère que les composantes du jeu composé sont des jeux simples l'expression analytique de sa fonction caractéristique devient moins complexe comme le prouve le résultat suivant.

**Proposition 3.1.1.** *Soient $\Gamma_i = (N_i, \mathcal{W}^i), \ \ i = 1, \cdots, m$ une suite de m jeux simples sur les familles 2 à 2 disjointes de joueurs $N_i \ \ , i = 1, \cdots, m$. Soit $\Gamma_0 = (M, u)$ un JFCC de m-joueurs $(M = \{1, \cdots, m\})$.*
*Le jeu composé $\Gamma$=$\Gamma_0[\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m]$ est défini sur l'ensemble $N = N_1 \cup N_2 \cdots \cup N_m$ et sa fonction caractéristique $v$ est définie par :*

$$v(S) = u(\{i \in M : \ S \cap N_i \in \mathcal{W}^i\}), \quad \forall S \subseteq N. \tag{3.1}$$

**Preuve**

Soit $S \subseteq N$, posons $T_S = \{i \in M : \ S \cap N_i \in \mathcal{W}^i\}$, alors $\begin{cases} v_i(S \cap N_i) = 1 \text{ si } i \in T_S \\ v_i(S \cap N_i) = 0 \text{ si } i \notin T_S \end{cases}$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} v(S) &= \sum_{T \subseteq M} \left[ \prod_{i \in T} v_i(S \cap N_i) \prod_{i \notin T} (1 - v_i(S \cap N_i)) \right] u(T) \\ &= \sum_{T \subseteq M, \, T \neq T_S} \left[ \prod_{i \in T} v_i(S \cap N_i) \prod_{i \notin T} (1 - v_i(S \cap N_i)) \right] u(T) \\ &\quad + \prod_{i \in T_S} v_i(S \cap N_i) \prod_{i \notin T_S} (1 - v_i(S \cap N_i)) u(T_S) \\ &= \sum_{T \subseteq M, \, T \neq T_S} \left[ \prod_{i \in T} v_i(S \cap N_i) \prod_{i \notin T} (1 - v_i(S \cap N_i)) \right] u(T) + u(T_S) \end{aligned}$$

or $\forall S \subseteq N,\ T \neq T_S \Rightarrow \ \exists i \in T \setminus T_S$ ou $\exists j \in T_S \setminus T$.
Si $\exists i \in T \setminus T_S$, alors $v_i(S \cap N_i) = 0$ et on a $\prod_{i\in T} v_i(S \cap N_i) \prod_{i\notin T}(1 - v_i(S \cap N_i)) = 0$.
Si $\exists j \in T_S \setminus T$, alors $1 - v_j(S \cap N_j) = 0$ et on a $\prod_{i\in T} v_i(S \cap N_i) \prod_{i\notin T}(1 - v_i(S \cap N_i)) = 0$.
Donc $v(S) = u(T_S) = u(\{i \in M :\ S \cap N_i \in \mathcal{W}^i\})$.

**Remarque 3.1.2.**
*Dans le cas où le quotient du jeu composé est aussi un jeu simple $\Gamma_0 = (M, \mathcal{W})$, le jeu composé simple est un jeu simple appelé ( **jeu simple composé** ou **jeu de vote composé**) d'ensemble de coalitions gagnantes :*

$$\mathcal{W}_N = \left\{S \in 2^N : T_S \in \mathcal{W}\right\} \text{ où } T_S = \{i \in M : S \cap N_i \in \mathcal{W}^i\}$$

**Remarque 3.1.3.** *Le produit de deux jeux simples $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ est défini par*

$$\Gamma_1 \otimes \Gamma_2 = B_2[\Gamma_1, \Gamma_2] \tag{3.2}$$

*et leur somme est définie par*

$$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 = B_2^\star[\Gamma_1, \Gamma_2] \tag{3.3}$$

*où $B_2$ et $B_2^\star$ sont définis par*

$$B_2 = (\{1, 2\}; \{1, 2\}) \tag{3.4}$$

$$B_2^\star = (\{1, 2\}; \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}). \tag{3.5}$$

**Rappel**

Soit $T$ une transformation de $E^r$dans $E^r$ définie par

$$Tx = \frac{Ax + b}{\langle c, x\rangle + \delta} \tag{3.6}$$

où $A$ est une transformation linéaire de $E^r$ dans lui-même, $b$ et $c$ sont de vecteurs de dimension $r$ et $\delta$ un nombre réel. On suppose que si $c$ est le vecteur nul alors $\delta \neq 0$. Toute transformation ainsi définie est appelée **transformation projective** de $E^r$. Elle n'est pas définie pour $x \in N(T) = \{y : \langle c, y\rangle + \delta = 0\}$. Les transformations projectives conservent la convexité, i.e, *si $T$ est est une transformation projective de $E^r$ et si $P \subset E^r$ est tel que $T$ soit définie pour tout $x \in conv\ P$ alors*

$$T(conv\ P) = conv\ T(P). \tag{3.7}$$

Une transformation $T$ de $\times_{i=1}^s E_i^r$ $(E_i^r = E^r, i = 1, \cdots, s)$ dans $E^r$est appelée transformation multi-projective si pour tout $i = 1, \cdots, s$ et pour $x^1, \cdots, x^{i-1}, x^{i+1}, \cdots, x^s$ fixés dans $E^r$, la transformation $T_i : E^r \to E^r$ définie par

$$T_i(x) = T(x^1, \cdots, x^{i-1}, x, x^{i+1}, \cdots, x^s) \tag{3.8}$$

est une transformation projective de $E^r$. Si $P_i \subset E_i^r$, $i = 1, \cdots, s$, sont tels que la transformation multi-projective $T$ est définie par $(x^1, x^2, \cdots, x^s) \in conv\ P_1 \times \cdots \times convP_s$ alors

$$T(conv\ P_1 \times \cdots \times conv\ P_s) = conv\ T(P_1 \times \cdots \times P_s). \tag{3.9}$$

## 3.2 Lemmes de base

Nous supposons que pour tout joueur $i$ dans $(N; v)$

$$v(\{i\}) = 0 \tag{3.10}$$

Notons que si un joueur $i \in N_k$ ne satisfaisant pas (3.10) dans le jeu composé alors $\{i\} \in \mathcal{W}^k$ et ainsi le noyau de $\Gamma_k$ est vide ou contient un unique vecteur où le joueur $i$ obtient 1 et les autres joueurs de $\Gamma_k$ 0.

Nos jeux composés sont supposés monotones et dummy. Nous supposons aussi que pour chaque jeu composant $\Gamma_k = (N_k; \mathcal{W}^k), k = 1, \cdots, m, N_k \in \mathcal{W}^k$ et $\emptyset \notin \mathcal{W}^k$.

**Lemme 3.2.1.** *Soit $\mathcal{K}$ le Kernel du jeu simple $\Gamma = (N; v)$. Désignons par*

$$\mu(x) = min\{x(S) : S \in \mathcal{W}\}, (x \in \chi(\Gamma)). \tag{3.11}$$

*Il existe de polyèdres convexes $K_1, \cdots, K_r$ tels que $\mathcal{K} = \bigcup_{i=1}^{r} K_i$ et tels que $\mu(x)$ soit linéaire sur chaque $K_i$, $i = 1, \cdots, r$.*

**Preuve**

$\mathcal{K}(\Gamma)$ est une réunion finie de polyèdres convexes (voir Théorème 2.2.5). Les polyèdres requis sont d'intersections non vides de la forme $P_i \cap H_S$ où

$$H_S = \{x \in E^n : x(S) \leq x(T), \forall T \in \mathcal{W}\}(S \in \mathcal{W}) \tag{3.12}$$

et les $P_i$ sont les polyèdres donnés par le Théorème 2.2.5.

Pour tout joueur $i$ et pour tout $x \in \tilde{\chi}(\Gamma)$, posons :

$$g_i(x) = \max\{e(S, x) : i \in S \subset N\} \tag{3.13}$$

$$h_i(x) = \max\{e(S, x) : i \notin S \subset N\} \tag{3.14}$$

**Lemme 3.2.2.** *Soit $\Gamma = (N; v)$ un jeu monotone satisfaisant (3.10). Si $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$ alors $\forall i \in N$*

$$g_i(x) = h_i(x) \tag{3.15}$$

*( et ainsi $g_i(x) = s(x) \equiv \max\{e(S, x) : S \subset N\}$).*

**Preuve** :

Vu que pour toute paire de joueurs distincts $i, j$, $S_{ij}(x) = S_{ji}(x)$ $(x \in \mathcal{K}(\Gamma))$, il s'en suit que :

$$\begin{aligned}
g_i(x) &= \max\{e(S,x) : i \in S \subset N\} \\
&= \max[\max\{e(S,x) : i \in S \subsetneqq N\}, 0] \\
&= \max[\max\{S_{ij}(x) : j \in N, j \neq i\}, 0] \\
&= \max[\max\{S_{ji}(x) : j \in N, j \neq i\}, 0] \qquad (3.16) \\
&= \max[\max\{e(S,x) : i \notin S, \emptyset \neq S \subset N\}, 0] \\
&= \max\{e(S,x) : i \notin S \subset N\} \\
&= h_i(x).
\end{aligned}$$

Si $i, j$ sont deux joueurs distincts dans $(N; v)$, posons :

$$\mathcal{J}_{ij} = \{S \subset N : i \in S, j \notin S\} \tag{3.17}$$

Et pour un jeu simple $(N; \mathcal{W})$, posons

$$\mathcal{W}_{ij} = \mathcal{W} \cap \mathcal{J}_{ij}. \tag{3.18}$$

De même,

$$\begin{aligned}
a_{ij}(x) &= \max\{e(S,x) : i \notin S, j \notin S, \emptyset \neq S \subset N\}, (x \in \tilde{\chi}(\Gamma)) && (3.19)\\
b_{ij}(x) &= \max\{e(S,x) : i \in S, j \in S, S \subset N\}, (x \in \tilde{\chi}(\Gamma)). && (3.20)
\end{aligned}$$

Étant donné une imputation $x \in \chi(\Gamma)$ dans un jeu composé $\Gamma = (N; v)$, nous notons par $\mu$ une faible imputation dans $\Gamma_0$ (voir (3.1)).

$$\mu \equiv \mu[x] = (\mu_1[x], \cdots, \mu_m[x]) \tag{3.21}$$

où

$$\mu_k[x] = \min\{x(S) : S \in \mathcal{W}^k\}(k = 1, \cdots, m). \tag{3.22}$$

Nous noterons par $e^k(S,x)$, $s^k(x)$ (voir Lemme 3.2.2), $\mathcal{J}^k_{ij}$, $\mathcal{W}^k_{ij}$, $s^k_{ij}(x)$, $g^k_i(x)$, $h^k_i(x)$, $a^k_{ij}(x)$, $b^k_{ij}(x)$, où ces expressions se réfèrent au jeu $\Gamma_k$, $k = 0, \cdots, m$. Notons que

$$s^k(x) = 1 - \mu_k[x] \tag{3.23}$$

**Lemme 3.2.3.** *Soient $\Gamma = (N; v)$ un jeu composé, $x \in \chi(\Gamma)$, $i, j \in N_k$ deux joueurs distincts appartenant au même jeu composant $\Gamma_k$, $k = 1, \cdots, m$.*

*i) Si $j$ n'est pas un joueur veto dans $\Gamma_k$ alors*

$$s_{ij}(x) = max[g^0_k(\mu) + s^k_{ij}(x) - s^k(x), h^0_k(\mu) - x_i]. \tag{3.24}$$

*ii) Si $j$ est un joueur veto dans $\Gamma_k$ alors*

$$s_{ij}(x) = h_k^0(\mu) - x_i \tag{3.25}$$

**Preuve**

i)

$$\begin{aligned}
s_{ij}(x) &= Max\{e(S,x) : S \in \mathcal{J}_{ij}\} \\
&= Max[Max\{e(S,x) : S \in \mathcal{J}_{ij}, S \cap N_k \in \mathcal{W}^k\}, Max\{e(S,x) : S \in \mathcal{J}_{ij}, S \cap N_k \notin \mathcal{W}^k\}] \\
&= Max[Max\{u(T) - \mu(T \setminus \{k\}) : k \in T \subset M\} - min\{x(S) : S \in \mathcal{W}_{ij}^k\}, \\
&\quad Max\{u(T) - \mu(T) : k \notin T \subset M\} - x_i] \\
&= Max[Max\{e^0(T,\mu) : k \in T \subset M\} + \mu_k - min\{x(S) : S \in \mathcal{W}_{ij}^k\}, \\
&\quad Max\{e^0(T,\mu) : k \notin T \subset M\} - x_i] \\
&= Max[g_k^0(\mu) + s_{ij}^k(x) - s^k(x), h_k^0(\mu) - x_i].
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ii) Si $j$ est un joueur veto dans $\Gamma_k$ alors $\mathcal{W}_{ij}^k = \emptyset$ et

$$\begin{aligned}
s_{ij}(x) &= Max\{e(S,x) : S \in \mathcal{J}_{ij}, S \cap N_k \notin \mathcal{W}^k\} \\
&= Max\{e^0(T,\mu) : k \notin T \subset M\} - x_i \\
&= h_k^0(\mu) - x_i.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

**Lemme 3.2.4.** *Soient $\Gamma = (N; v)$ un jeu composé, $x \in \chi(\Gamma)$ et $i, j \in N_k$ deux joueurs distincts appartenant à deux jeux composants distincts $\Gamma_k$, $\Gamma_l$, $1 \leq k < l \leq m$.*

*i) Si $j$ n'est pas un joueur veto dans $\Gamma_l$ alors*

$$\begin{aligned}
s_{ij}(x) = \; & Max[s_{kl}^0(\mu) + g_i^k(x) - s^k(x), a_{kl}^0(\mu) - x_i, \\
& b_{kl}^0(\mu) + g_i^k(x) - s^k(x) + h_j^l(x) - s^l(x), \\
& s_{lk}^0(\mu) + h_j^l(x) - s^l(x) - x_i].
\end{aligned} \tag{3.28}$$

*ii) Si $j$ est un joueur veto dans $\Gamma_l$ alors*

$$s_{ij}(x) = Max[s_{kl}^0(\mu) + g_i^k(x) - s^k(x), a_{kl}^0(\mu) - x_i]. \tag{3.29}$$

**Lemme 3.2.5.** *Soient $\Gamma = (N; v)$ un jeu composé, $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$. Pour tout $k, k = 1, \cdots, m$,*

$$\mu_k[x] = 0 \Longleftrightarrow x(N_k) = 0. \tag{3.30}$$

**Preuve** : Supposons que $\mu_k[x] = 0$ et soit $S_0 \in \mathcal{W}^k$ telle que $x(S_0) = 0$. Pour tous $i, j$ tels que $S_0 \in \mathcal{J}_{ij}$, $s_{ij}^k(x) = 1$. D'où

$$s^k(x) = 1. \tag{3.31}$$

Supposons que $x(N_k) > 0$ et soit $j \in N_k$ tel que $x_j > 0$. $j \notin S_0$ ainsi $j$ n'est pas un joueur veto. Soit $i \in S_0$. D'après le lemme 3.2.3,

$$\begin{aligned} s_{ij}(x) &= Max[g_k^0(\mu) + s_{ij}^k(x) - s^k(x), h_k^0(\mu) - x_i] \\ &= Max[g_k^0(\mu), h_k^0(\mu)] \\ &= s^0(\mu). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} s_{ji}(x) &\leq g_j(x) \\ &= Max[g_k^0(\mu) + \mu_k - Min\{x(S) : j \in S \subset \mathcal{W}\}, h_k^0(\mu) - x_j] \\ &\leq Max[g_k^0(\mu) + \mu_k - x_j, h_k^0(\mu) - x_j] \\ &= s^0(\mu) - x_j \\ &< s^0(\mu). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Il en résulte que $s_{ji}(x) < s_{ij}(x)$ en contradiction avec notre hypothèse $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$.

Le second sens de (3.30) est immédiat.

**Lemme 3.2.6.** *Soit* $\Gamma = (N; v)$ *un jeu composé, soit* $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$. *Pour tout* $k, k = 1, \cdots, m$,

$$g_k^0(\mu) = s(x). \tag{3.34}$$

**Preuve** : Si $\mu_k = 0$ alors $\forall T \subset M$

$$\begin{aligned} e^0(T \cup \{k\}, \mu) &= u(T \cup \{k\}) - \mu(T \cup \{k\}) \\ &= u(T \cup \{k\}) - \mu(T \cup) \\ &\geq u(T) - \mu(T) \\ &= e^0(T, \mu). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Il s'en suit que

$$g_k^0(\mu) = s^0(\mu) = s(x). \tag{3.36}$$

Supposons que $\mu_k > 0$ et soit $i \in N_k$ tel que $x_i > 0$ et

$$g_i^k(x) = s^k(x). \tag{3.37}$$

Ainsi,

$$g_i(x) = Max[g_k^0(\mu), h_k^0(\mu) - x_i]. \tag{3.38}$$

Si $i$ n'est pas un joueur veto dans $\Gamma_k$ alors

$$h_i(x) = Max[g_k^0(\mu) + h_i^k(x) - s^k(x), h_k^0(\mu)]. \tag{3.39}$$

Dans ce cas, il résulte du lemme 3.2.2 et de (3.38)-(3.39) que

$$g_k^0(\mu) \geq h_k^0(\mu) \tag{3.40}$$

et cela est équivalent à (3.34). Si $i$ est veto alors

$$h_i(x) = h_k^0(\mu). \tag{3.41}$$

Dans ce cas,(3.40) découle du lemme 3.2.2 , de (3.38) et (3.41).

**Remarque 3.2.1.** *Si $i$ est un joueur veto dans $\Gamma_k$ alors il résulte du lemme 3.2.2 , de (3.38) et (3.41) que*

$$g_k^0(\mu) = h_k^0(\mu). \tag{3.42}$$

## 3.3 Kernel d'un jeu composant

La projection barycentrique d'une imputation $x \in \chi(\Gamma)$ sur une coalition $S$ telle que $x(S) > 0$ sera notée par $B_S x$ et représente le $|S|$-uplet $B_S x = [(B_S x)_i]_{i \in S}$ où pour tout $i \in S$,

$$(B_S x)_i = \frac{x_i}{x(S)}. \tag{3.43}$$

Notons que si $\Gamma$ est un jeu composé et $\Gamma_k = (N_k; \mathcal{W}^k)$ est un jeu composant de $\Gamma$ alors $B_{N_k}x$ est une pseudo-imputation dans $\Gamma_k$ ou même une imputation si (3.10) est satisfait dans $\Gamma_k$.

**Théorème 3.3.1.** *Soient $\Gamma = (N; v)$ un jeu composé, $x \in \chi(\Gamma)$ telle que pour tout $k, k = 1, \cdots, m$,*

$$g_k^0(\mu) = s(x). \tag{3.44}$$

*Sous ces conditions, si $x(N_k) > 0$ et $\Gamma_k$ est un jeu ayant de joueurs veto alors*

$$B_{N_k}x \in \mathcal{K}(\Gamma_k) \tag{3.45}$$

*si et seulement si pour toute paire de joueurs distincts $i, j \in N_k$*

$$[s_{ij}(x) - s_{ji}(x)].x_j \leq 0. \tag{3.46}$$

**Preuve** : Le noyau d'un jeu simple ayant de joueurs veto est un unique vecteur dans lequel les joueurs veto partagent équitablement le gain total tandis que les autres joueurs obtiennent 0 ([5 ;Théorème 4.1]).

(a) Supposons $B_{N_k}x \in \mathcal{K}(\Gamma_k)$ et soient $i, j$ deux joueurs distincts dans $\Gamma_k$. Si les deux sont veto alors (voir le Lemme 3.2.3)

$$s_{ij}(x) = h_k^0(\mu) - x_i \tag{3.47}$$

$$s_{ji}(x) = h_k^0(\mu) - x_j \tag{3.48}$$

et vu que $x_i = x_j$ il s'en suit que $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$. Si $j$ est un joueur veto et que $i$ ne l'est pas, alors (remarquons que $s^k_{ij}(x) = s^k(x)$ vu que toutes les coalitions gagnantes dans $\Gamma_k$ ont le même excès $1 - x(N_k)$)

$$s_{ij}(x) = Max[g^0_k(\mu), h^0_k(\mu) - x_j]. \tag{3.49}$$

Selon (3.47) (cela tient quand $i$ n'est un joueur veto) et le fait que $x_i = 0$, il s'en suit que

$$s_{ij}(x) = h^0_k(\mu). \tag{3.50}$$

En considérant (3.44) il résulte que $s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x)$. Si $j$ n'est pas un joueur veto, (3.46) découle du fait que $x_j = 0$.

(b) Supposons que (3.46) est vraie pour toute paire de joueurs distincts $i, j$. (3.47)-(3.48) tiennent pour toute paire de joueurs veto. D'après (3.46) $x_i = x_j$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $j \in N_k$, qui n'est pas un joueur veto, tel que $x_j > 0$. Soit $i$ un joueur veto dans $\Gamma_k$. (3.46) implique $s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x)$. Ainsi, d'après le Lemme 3.2.3 et (3.44)

$$s^0(\mu) + s^k_{ij}(x) - s^k(x) \leq s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x) = h^0_k(\mu) - x_j < s^0(\mu) \tag{3.51}$$

et donc

$$s^k_{ij}(x) < s^k(x). \tag{3.52}$$

Cela signifie que $j$ appartient à toute coalition gagnante ayant un excès maximal ((3.52) tient pour chaque joueur veto $i$). Ainsi, une coalition $S$ qui a un excès maximal contient tous les joueurs veto et tous les autres joueurs ayant un gain positif. Ainsi,

$$s^k(x) = 1 - x(N_k). \tag{3.53}$$

Il en résulte que toutes les coalitions gagnantes ont le même excès ; ce qui contredit (3.52). Cette contradiction prouve que tout joueur $j$ qui n'est pas veto obtient 0 et donc $B_{N_k}x$ appartient au Kernel.

**Théorème 3.3.2.** *Soient $\Gamma = (N; v)$ un jeu composé, $x \in \chi(\Gamma)$ une imputation satisfaisant (3.44). Sous ces conditions, si $\Gamma_k$ est exempt de joueurs veto et $x(N_k) > 0$ alors*

$$B_{N_k}x \in \mathcal{K}(\Gamma_k) \tag{3.54}$$

*si et seulement si pour toute paire de joueurs distincts $i, j \in N_k$*

$$s_{ij}(x) = s_{ji}(x). \tag{3.55}$$

**Preuve** : Soient $i, j$deux joueurs distincts quelconques dans $\Gamma_k$ et posons

$$\hat{x} = B_{N_k}x \tag{3.56}$$

$$\Delta = g^0_k(\mu) - h^0_k(\mu) \tag{3.57}$$

$$\hat{\Delta} = \frac{\Delta}{x(N_k)}. \tag{3.58}$$

Il résulte de (3.44) (notons que $s(x) = s^0(\mu)$) que

$$\Delta, \hat{\Delta} \geq 0. \tag{3.59}$$

En utilisant le Lemme 3.2.3, on trouve que

$$\begin{aligned} s_{ij}(x) &= Max[g_k^0(\mu) + s_{ij}^k(x) - s^k(x), h_k^0(\mu) - x_i] \\ &= g_k^0(\mu) - s^k(x) + Max[s_{ij}^k(x), s^k(x) - \Delta - x_i] \end{aligned} \tag{3.60}$$

et il vient que

$$\begin{aligned} s_{ij}(x) = s_{ji}(x) &\iff Max[s_{ij}^k(\hat{x}), s^k(\hat{x}) - \hat{\Delta} - \hat{x}_i] \\ &= \quad Max[s_{ji}^k(\hat{x}), s^k(\hat{x}) - \hat{\Delta} - \hat{x}_j]. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Supposons que (3.55) est satisfait pour toute pair de joueurs distincts $i, j \in N_k$. Nous allons montrer que pour tout joueur $j \in N_k$($j$ n'est pas un joueur veto)

$$h_j^k(\hat{x}) \geq g_j^k(\hat{x}). \tag{3.62}$$

En effet, si $h_j^k(\hat{x}) < g_j^k(\hat{x})$ alors il existe $S_0$ telle que $j \in S_0$ et

$$h_j^k(\hat{x}) < e^k(S_0, \hat{x}) = s^k(\hat{x}). \tag{3.63}$$

Soit $i \in N_k \backslash S_0$ ((3.63) implique $e^k(S_0, \hat{x}) > 0$ et ainsi $S_0 \neq N_k$). D'où $x \in \mathcal{K}(\Gamma_k)$.

$$s_{ij}^k(\hat{x}) < s^k(\hat{x}) = s_{ij}^k(x). \tag{3.64}$$

Vu que

$$Max[s_{ij}^k(\hat{x}), s^k(\hat{x}) - \hat{\Delta} - \hat{x}_i] = Max[s_{ji}^k(\hat{x}), s^k(\hat{x}) - \hat{\Delta} - \hat{x}_j] \tag{3.65}$$

il s'en suit que

$$\hat{x}_i = \hat{\Delta} = 0. \tag{3.66}$$

La dernière égalité est vraie pour tout $i \notin S_0$ afin que $x(S_0) = 1$ ; ce qui contredit (3.63). Ainsi (3.62) est prouvée. Soit $S_0 \subset N_k$ une coalition telle que $j \notin S_0$ et

$$e^k(S_0, \hat{x}) = s^k(\hat{x}). \tag{3.67}$$

Vu que pour tout $i \in N_k$ $(i \neq j)$

$$e^k(S_0 \cup \{i\}, \hat{x}) \geq e^k(S_0, \hat{x}) - \hat{x}_i = s^k(\hat{x}) - \hat{x}_i \tag{3.68}$$

il s'en suit que

$$s_{ij}^k(\hat{x}) \geq s^k(\hat{x}) - \hat{x}_i. \tag{3.69}$$

De même,

$$s_{ji}^k(\hat{x}) \geq s^k(\hat{x}) - \hat{x}_j. \tag{3.70}$$

Il vient de (3.59),(3.61) et (3.69)-(3.70) que

$$s_{ij}^k(\hat{x}) = s_{ji}^k(\hat{x}) \tag{3.71}$$

D'où $x \in \mathcal{K}(\Gamma_k)$.

Réciproquement, si $\hat{x} \in \mathcal{K}(\Gamma_k)$ alors (3.69) est satisfait par toute paire de joueurs distincts $i, j \in N_k$.Le Lemme (3.2.2) implique $h_j^k(\hat{x}) = s^k(\hat{x})$.. D'où, il existe $S_0 \subset N_k$telle que $j \in S_0$ et $s^k(\hat{x}) = e^k(S_0, \hat{x}) = h_j^k(\hat{x})$. Ainsi

$$s_{ij}^k(\hat{x}) \geq e^k(S_0 \cup \{i\}) \geq e^k(S_0, \hat{x}) - \hat{x}_i = s^k(\hat{x}) - \hat{x}_i. \tag{3.72}$$

A l'aide d'un raisonnement similaire, on montre que (3.70) tient . (3.55) découle de (3.59),(3.61),(3.70) et (3.72).

## 3.4 La dépendance du jeu quotient

Dans la section précédente, nous avons montré que la projection barycentrique d'un partage du Kernel du jeu composé sur un jeu composant doit appartenir au Kernel de ce dernier (ou au pseudo-kernel si (3.10) n'est pas satisfait dans le jeu composant). En plus, si la projection barycentrique d'une imputation du jeu composé est dans le Kernel d'un composant, alors cette imputation doit satisfaire la condition du Kernel (2.6) pour toute paire de joueurs distincts dans ce composant. Pour compléter la caractérisation du Kernel du jeu composé, nous devons montrer comment les Kernels des jeux composants devraient être composés afin d'obtenir le Kernel du jeu composé.

Le Kernel du jeu composé dépend du jeu quotient au moyen d'un sous-ensemble particulier de l' ensemble des imputations de ce dernier.

Définissons ce sous-ensemble.

**Définition 3.4.1.** *Soit $\Gamma = (M; u)$ un JFCC monotone à $m$ joueurs, $w = (w_1, \cdots, w_m)$ un $m$-uplet de nombres positifs. Le* ***[faible]*** $w$***-égalisateur*** *$[\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma)]\mathcal{P}(\Gamma)$ de $\Gamma$ est l'ensemble de toutes les [faibles] imputations $[y \in \tilde{\chi}(\Gamma)]y \in \chi(\Gamma)$ satisfaisant les conditions suivantes :*

*(i) Pour tout $i, i = 1, \cdots, m$,*

$$g_i(y) = s(y). \tag{3.73}$$

*(ii) Pour toute paire de joueurs distincts $i, j \in M$ si $w_i = 0$ et $w_j > 0$ alors*

$$s_{ij}(y) = s(y). \tag{3.74}$$

*(iii) Pour toute paire de joueurs distincts $i, j \in M$ si $w_i > 0$ et $w_j > 0$ alors*

$$Max[s_{ij}(y), a_{ij}(y) - \frac{y_i}{w_i}] = Max[s_{ji}(y), a_{ij}(y) - \frac{y_j}{w_j}]. \tag{3.75}$$

**Remarque 3.4.1.** $[\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma)]\mathcal{P}(\Gamma)$ *est une réunion finie de polytopes convexes. Le nombre d'inégalités linéaires qui déterminent le $w$-égalisateur est du même ordre que celui qui déterminent le kernel.*

**Lemme 3.4.1.** *Si $\Gamma = (M;\mathcal{U})$ est un jeu monotone simple sans joueurs veto alors*

$$\tilde{\mathcal{P}}(\Gamma) = \{\alpha x : x \in \mathcal{P}(\Gamma), 0 \leq \alpha \leq 1\}. \tag{3.76}$$

**Preuve** : Pour toute paire de joueurs distincts $i, j \in M, \mathcal{U}_{ij} \neq \emptyset$. D'où pour tout $x \in \tilde{\chi}(\Gamma)$

$$s_{ij}(x) = Max\{e(S,x) : S \in \mathcal{U}_{ij}\} = 1 - min\{x(S) : S \in \mathcal{U}_{ij}\}. \tag{3.77}$$

On a :

$$g_i(x) = 1 - min\{x(S) : i \in S \in \mathcal{U}\} \tag{3.78}$$

$$s(x) = 1 - min\{x(S) : S \in \mathcal{U}\}. \tag{3.79}$$

De même, s'il existe $S \in \mathcal{U}$ telle que $i, j \in S$ alors

$$a_{ij}(x) = 1 - min\{x(S) : i, j \notin S \in \mathcal{U}\} \tag{3.80}$$

et

$$a_{ij}(x) = s_{ij}(x). \tag{3.81}$$

Une imputation $x \in \chi(\Gamma)$ satisfait les conditions de la définition 3.2.1 si et seulement si $\alpha x$ les satisfait. Cela prouve (3.76).

Le $w$-égalisateur sera utilisé pour caractériser la dépendance du Kernel composé du jeu quotient.

**Lemme 3.4.2.** *Soient $\Gamma = (N; v)$ un jeu composé monotone satisfaisant (3.10), $x^k \in \mathcal{K}(\Gamma_k)$ et $\alpha_k, k = 1, \cdots, m$ de nombres positifs tels que $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = v(N)$. Soit $x^{k^\star} \in \chi(\Gamma)$ où $x_i^{k^\star} = x_i^k$ pour $i \in N_k$ et $x_i^{k^\star} = 0$ pour $i \notin N_k$ . Désignons par $w_k$ le nombre de joueurs veto dans $\Gamma_k$. Soit $x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x^{k^\star}$. Sous ces conditions*

$$x \in \mathcal{K}(\Gamma) \Longleftrightarrow \mu[x] \in \tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0). \tag{3.82}$$

**Preuve** : D'après le lemme 3.2.2, pour tout $i \in N_k (k = 1, \cdots, m)$

$$g_i^k(x) = h_i^k(x) = s^k(x). \tag{3.83}$$

(a) Si $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$ alors le lemme 3.2.6 implique la condition (i) (voir Définition 3.2.1).

(b) Nous prouvons la nécessité de la condition (ii). Supposons que $w_k = 0$ et $w_l > 0$, $1 \leq k < l \leq m$. Soient $i \in N_k$ et $j \in N_l$ un joueur veto dans $\Gamma_l$. Vu que $x^k \in \mathcal{K}(\Gamma_k)$ et $x^l \in \mathcal{K}(\Gamma_l)$, il vient de (3.83) et du lemme 3.2.4 que

$$s_{ij}(x) = max[s_{kl}^0(\mu), \alpha_{kl}^0(\mu) - x_i] \tag{3.84}$$

et

$$\begin{aligned} s_{ij}(x) &= Max[s^0_{lk}(\mu) + g^l_j(x) - s^l(x), \alpha^0_{kl}(\mu) - x_j, \\ &\quad b^0_{kl}(\mu) + g^l_j(x) - s^l(x) + h^k_i(x) - s^k(x), \\ &\quad s^0_{kl}(\mu) + h^k_i(x) - s^k(x) - x_j] \\ &= Max[s^0_{lk}(\mu), b^0_{kl}(\mu), \alpha^0_{kl}(\mu) - x_j, s^0_{kl}(\mu) - x_j] \\ &= Max[g^0_l(\mu), h^0_l(\mu) - x_j]. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Notons que (3.84) et (3.85) tiennent même si $x \notin \mathcal{K}(\Gamma)$ et (3.85) est indépendant du fait que $j$ soit un joueur veto. Si $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$, de la condition (i) et de (3.85), il en résulte que

$$s_{ji}(x) = s^0(\mu). \tag{3.86}$$

Supposons que $x(N_k) = 0$. Pour tout $T \subset M$

$$e^0(T \cup \{k\}, \mu) \geq e^0(T, \mu) \tag{3.87}$$

(voir (3.35)). Ainsi, en prenant le maximum sur les coalitions $T$ telles que $k, l \notin T$,

$$s^0_{kl}(\mu) \geq \alpha^0_{kl}(\mu). \tag{3.88}$$

Il résulte de (3.84) et (3.88) que

$$s_{ij}(x) = s^0_{kl}(\mu). \tag{3.89}$$

Vu que $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$, la condition (ii) découle de (3.86) et (3.89). Supposons que $x(N_k) > 0$. Soit $i \in N_K$ tel que $x_i > 0$. D'où,

$$s^0(\mu) \geq \alpha^0_{kl}(\mu) > \alpha^0_{kl}(\mu) - x_i. \tag{3.90}$$

Vu que $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$, il résulte de (3.84) et de (3.86) que

$$s^0(\mu) = Max[s^0_{kl}(\mu), \alpha^0_{kl}(\mu) - x_i] \tag{3.91}$$

et la condition (ii) découle de (3.90) et de (3.91).

(c) Nous prouvons la nécessité de (iii). Supposons que $w_k, w_l > 0$, $(1 \leq k < l \leq m)$ et soient $i \in N_k$ et $j \in N_l$ deux joueurs veto dans leurs jeux composants.
D'après [5 ;Théorème 4.1]

$$x_i = \frac{\mu_k}{w_k};\ x_j = \frac{\mu_l}{w_l}. \tag{3.92}$$

Le lemme 3.2.4 et (3.83) impliquent

$$s_{ij}(x) = Max[s^0_{kl}(\mu), \alpha^0_{kl}(\mu) - \frac{\mu_k}{w_k}] \tag{3.93}$$

et par symétrie,

$$s_{ji}(x) = Max[s^0_{lk}(\mu), \alpha^0_{kl}(\mu) - \frac{\mu_l}{w_l}]. \tag{3.94}$$

Les deux dernières égalités sont indépendants du fait que $x$ appartient au Kernel.
Si $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$ alors $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$ et (iii) vient de (3.93) et (3.94).

(d) Supposons que $\mu[x] \in \tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0)$ et montrons que $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$. La condition (i) et les Théorèmes 3.2.1 et 3.2.2, impliquent que pour toute paire de joueurs distincts $i, j \in N_k$ $(k = 1, \cdots, m)$

$$[s_{ij}(x) - s_{ji}(x)].x_j \leq 0. \tag{3.95}$$

Soit $i \in N_k$ et $j \in N_l$ $(1 \leq k < l \leq m)$. Si $i$ et $j$ sont veto dans leur composante respective, alors (3.93)-(3.94) tiennent et la condition (iii) implique $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$. Si $i$ n'est pas un joueur veto mais $j$ un joueur veto, alors (3.84) et (3.85)tiennent et les conditions (i) et (ii) impliquent $s_{ij}(x) = s_{ji}(x) = s^0(\mu)$. Si les deux joueurs $i$ et $j$ ne sont pas veto alors (3.85) et l'égalité de symétrie,

$$s_{ij}(x) = Max[g_k^0(\mu), h_k^0(\mu) - x_i], \tag{3.96}$$

impliquent que $s_{ij}(x) = s_{ji}(x) = s^0(\mu)$. D'où (3.95) tient pour toutes les paires de joueurs distincts $i, j \in N$. Ainsi $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$.

## 3.5 Kernel du jeu composé

Les résultats des sections précédentes nous conduisent au principal théorème de notre travail, un théorème qui détermine la structure du Kernel d'un jeu composé. Ce théorème permet d'écourter les calculs conduisant au Kernel d'un jeu décomposable.

**Théorème 3.5.1.** *Soit* $\Gamma = \Gamma_0[\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m]$ *un jeu composé monotone, dummy avec les composantes* $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_m$ *simples. Supposons que tout composant qui consiste en plus d'un joueur est* $0, 1$*-réduit (*$N_k \in \mathcal{W}^k$ *et pour* $i \in N_k$*,*$\{i\} \notin \mathcal{W}^k$*). Désignons par* $w_k$ *le nombre de joueurs veto dans* $\Gamma_k$ *et* $w = (w_1, \cdots, w_m)$*. Sous ces hypothèses,* $x \in \chi(\Gamma)$ *appartient au Kernel* $\mathcal{K}(\Gamma)$ *si et seulement si pour tout* $k$*,* $k = 1, \cdots, m$*, tel que* $x(N_k) > 0$ $B_{N_k}x \in \mathcal{K}(\Gamma_k)$ *et l'imputation faible* $\mu[x]$ *appartient au faible* $w$*-égalisateur* $\tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0)$ *du jeu quotient* $\Gamma_0$.

**Preuve :**

(a) Supposons $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$. Le Lemme 3.2.6 assure que les hypothèses des Théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 sont satisfaites. De ces théorèmes, il vient que pour tout $k$ tel que $x(N_k) > 0$ $B_{N_k}x \in \mathcal{K}(\Gamma_k)$. Vu que $x \in \chi(\Gamma)$

$$x = \sum_{k=1}^{m} x(N_k).(B_{N_k}x)^\star \tag{3.97}$$

(pour la notation *, qui se réfère au Lemme 3.2.8 ; si $x(N_k) = 0$ pour un certain $k$, nous définissons $B_{N_k}x$ comme un point quelconque dans $\chi(\Gamma_k)$, il sera multiplié par 0) il résulte du Lemme 3.2.8 que $\mu[x] \in \tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0)$.

(b) Supposons que $x \in \chi(\Gamma)$ est une imputation qui satisfait nos hypothèses. Le Lemme 3.2.8 implique que $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$.

**Corollaire 3.5.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 3.5.1*

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \chi(\Gamma) \cap \{\sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\mu_k}}{\mu_k[x^{k^\star}]} x^{k^\star} : \mu \in \tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0), x^j \in \mathcal{K}(\Gamma_j), 1 \leq j \leq m\}. \tag{3.98}$$

**Preuve :** Supposons $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$. Pour tout $k \in M$ tel que $x(N_k) > 0$, posons $x^k = B_{N_k} x$ et $\hat{\mu} = \mu[x]$. Pour $k \in M$ tel que $x(N_k) = 0$, soit $x^k$ un point quelconque dans $\mathcal{K}(\Gamma_k)$. D'après le Théorème 3.2.1,$x^k \in \mathcal{K}(\Gamma_k)$ pour tout $k \in M$ et $\mu \in \tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0)$. Le gain minimal d'une coalition gagnante est positif pour tout élément du Kernel d'un jeu simple (voir [6 ; Lemme 3.7]). Ainsi $\mu_k[x^{k^\star}] > 0$ et

$$\frac{\mu_k}{\mu_k[x^{k^\star}]} = x(N_k). \tag{3.99}$$

D'après (3.97)

$$x = \sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\mu_k}}{\mu_k[x^{k^\star}]} x^{k^\star} \tag{3.100}$$

et cela prouve que $\mathcal{K}(\Gamma_k)$ est contenu dans le second membre de l'égalité (3.98). Soit $x$ appartenant au second membre de l'égalité (3.98). Ainsi, $x \in \chi(\Gamma)$ et il existe $x^k \in \mathcal{K}(\Gamma_k)$, $k = 1, \cdots, m$, et $\hat{\mu} \in \tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0)$ tel que (3.99) soit satisfaite. Nécessairement, pour tout $k$ tel que $x(N_k) > 0$, $x_k = B_{N_k} x$ et pour tout $k \in M$

$$\begin{aligned}
\mu_k[x] &= min\{x(S) : S \in \mathcal{W}^k\} \\
&= min\{\frac{\hat{\mu_k}}{\mu_k[x^{k^\star}]} x^k(S) : S \in \mathcal{W}^k\} \\
&= \frac{\hat{\mu_k}}{\mu_k[x^{k^\star}]} \mu_k[x^{k^\star}] = \hat{\mu_k}
\end{aligned}$$

et donc $\mu[x] \in \tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0)$. Le Théorème 3.5.1 implique que $x \in \mathcal{K}(\Gamma)$.

Le corollaire 3.5.1 montre comment le Kernel du jeu composé est obtenu à partir des Kernels des composants et des faibles $w$-égalisateurs du jeu quotient. Le Théorème suivant montre comment le Kernel est obtenu si nous nous restreignons aux sommets de quelques polyèdres qui génèrent les Kernels des composants et aux sommets de faible $w$-égalisateur.

**Théorème 3.5.2.** *Supposons que les conditions du Théorème 3.5.1 sont vérifiées. Supposons que $\mathcal{K}(\Gamma_k) = \cup_{j=1}^{s_k} K_j^k$, $k = 1, \cdots, m$, où $K_j^k$, $j = 1, \cdots, s_k, k = 1, \cdots, m$ sont de polyèdres convexes et $\mu_k[x]$ est une fonction linéaire de $x$ sur $K_j^k$ (voir le Lemme 3.2.1).*
*Soit $\tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0) = \cup_{j=1}^{s_0} K_j^0$, $j = 1, \cdots, s_0$, sont des polyèdres convexes. Sous ces conditions*

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \chi(\Gamma) \cap \bigcup_{j_0=1}^{s_0} \cdots \bigcup_{j_m=1}^{s_m} conv\{\sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\mu_k}}{\mu_k[x^{k^\star}]} x^{k^\star} : \hat{\mu} \in vert\ K_{j_0}^0, x^i \in vert\ K_{j_i}^i, i = 1, \cdots, m\}. \tag{3.101}$$

*$vert\ K$ désigne l'ensemble des sommets du polyèdre $K$.*

**Preuve :** Définissons l'application $\psi : \tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0) * \mathcal{K}(\Gamma_1) * \cdots * \mathcal{K}(\Gamma_m) \to E^m$ par

$$\psi(\hat{\mu}, x^1, \cdots, x^m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\mu_k}}{\mu_k[x^{k^\star}]} x^{k^\star}. \tag{3.102}$$

D'après le corollaire 3.5.1

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \chi(\Gamma) \cap \psi[\tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0) * \mathcal{K}(\Gamma_1) * \cdots * \mathcal{K}(\Gamma_m)]. \tag{3.103}$$

Si $1 \leq j_k \leq s_k, k = 0, 1, \cdots, m$, alors la restriction de $\psi$ à $K^0_{j_0} * K^1_{j_1} * \cdots * K^m_{j_m}$ est partout définie et est une application multi-projective vu que $\mu_k[x^{k^\star}]$ est linéaire sur $K^k_{j_k}, k = 1, \cdots, m$. Ainsi, $\psi$ préserve la convexité dans ce domaine (voir (3.9)) et donc,

$$\begin{aligned} \psi[K^0_{j_0} * \cdots * K^m_{j_m}] &= conv\ \psi[vertK^0_{j_0} * \cdots * K^m_{j_m}] \\ &= conv\ \{\psi(\hat{\mu}, x^1, \cdots, x^m) : \hat{\mu} \in vertK^0_{j_0}, \\ &\quad x^i \in vertK^i_{j_i}, i = 1, \cdots, m\}. \end{aligned} \tag{3.104}$$

Notons que

$$\psi[\tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0) * \mathcal{K}(\Gamma_1) * \cdots * \mathcal{K}(\Gamma_m)] = \bigcup_{j_0=1}^{s_0} \cdots \bigcup_{j_m=1}^{s_m} \psi[K^0_{j_0} * \cdots * K^m_{j_m}]. \tag{3.105}$$

Dans le cas $\Gamma_0$ est un jeu simple sans joueurs veto, le Kernel du jeu composé peut être calculé en utilisant $\mathcal{P}^w(\Gamma_0)$ au lieu de $\tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0)$. Cela sera fait par une modification appropriée de l'application $\psi$. Par ailleurs, dans ce cas, l'intersection avec $\chi(\Gamma)$ peut être omise.

**Théorème 3.5.3.** *Sous les hypothèses du Théorème 3.5.1, supposons que $\Gamma_0$ est un jeu simple sans joueurs veto. Soit $K^k_j$, $j = 1, \cdots, s_k, k = 1, \cdots, m$, défini comme dans le Théorème 3.5.2. Soit $\mathcal{P}^w(\Gamma_0) = \bigcup_{j=1}^{s_0} K^0_j$ où $K^0_j$, $j = 1, \cdots, s_0$, sont de polyèdres convexes. Sous ces conditions*

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \bigcup_{j_0=1}^{s_0} \cdots \bigcup_{j_m=1}^{s_m} conv\{\sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\mu_k}/\mu_k[x^{k^\star}]}{\sum_{i=1}^{m} \hat{\mu_i}/\mu_i[x^{i^\star}]} x^{k^\star} : \hat{\mu} \in vert\ K^0_{j_0}, x^i \in vert\ K^i_{j_i}, 1 \leq i \leq m\}. \tag{3.106}$$

**Preuve :** Comme $\Gamma_0$ est un jeu simple sans joueurs veto, il vient du Lemme 3.2.7 que $\hat{\mu} \in \tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0)$ si et seulement si $\hat{\mu}/\hat{\mu}(M) \in \mathcal{P}^w(\Gamma_0)$. Il s'en suit que tous les sommets de $\tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0)$ excepté l'origine sont des sommets de $\mathcal{P}^w(\Gamma_0)$. L'origine contribue aucunement à la relation (3.92), ainsi il peut être omis des $vertK^0_{j_0}$(voir (3.92)) et nous écrirons $\mathcal{P}^w(\Gamma_0)$ au lieu de $\tilde{\mathcal{P}}^w(\Gamma_0)$. Par ailleurs, au lieu de prendre l'intersection avec $\chi(\Gamma)$ dans le membre de droite de (3.92), nous obtenons exactement les mêmes imputations par normalisation i.e, en définissant

$$\psi(\hat{\mu}, x^1, \cdots, x^m) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\mu_k}/\mu_k[x^{k^\star}]}{\sum_{j=1}^{m} \hat{\mu_j}/\mu_j[x^{j^\star}]} x^{k^\star}. \tag{3.107}$$

**Remarque 3.5.1.** *Si* $1, \cdots, l$ *sont de joueurs veto dans* $\Gamma_0$ *alors soit*

$$\Gamma = \Gamma_1 \otimes \cdots \otimes \Gamma_m \tag{3.108}$$

*(dans le cas où* $l = m$*), ou*

$$\Gamma = \Gamma_1 \otimes \cdots \otimes \Gamma_l \otimes \Gamma'_0[\Gamma_{l+1}, \cdots, \Gamma_m] \tag{3.109}$$

*(dans le cas où* $1 \leq l < m$*) où* $\Gamma'_0$ *est un jeu monotone simple sans joueurs veto. Le Kernel de* $\Gamma'_0[\Gamma_{l+1}, \cdots, \Gamma_m]$ *peut être calculé d'après le Théorème 3.5.3. Étant donné les Kernels des composants, le Kernel du jeu produit peut s'obtenir rapidement (voir [6 ;Theorem 3.1]). L'ensemble de sommets d'un polyèdre du Kernel du jeu produit est la réunion de l'ensemble de sommets des polyèdres dans les Kernels des composants.*

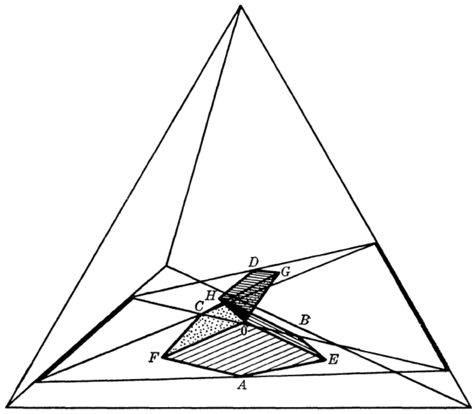
**Exemple 3.5.1.** *Soit* $\Gamma_6$ *un jeu monotone simple dans lequel toutes les coalitions à 3 joueurs sont gagnantes exceptées* $\{1, 2, 3\}$ *et* $\{4, 5, 6\}$*. Déterminons le Kernel du jeu composé* $\mathcal{K}(\Gamma_{12})$ *défini par* $\Gamma_{12} = \Gamma_6 \oplus \Gamma_6$*. Le Kernel de* $\Gamma_6$ *est le segment* $[(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0), (0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})]$*. Posons*

$$x^\alpha = (\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3}, \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{3}, \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{3}, \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{3}). \tag{3.110}$$

*Ainsi,*

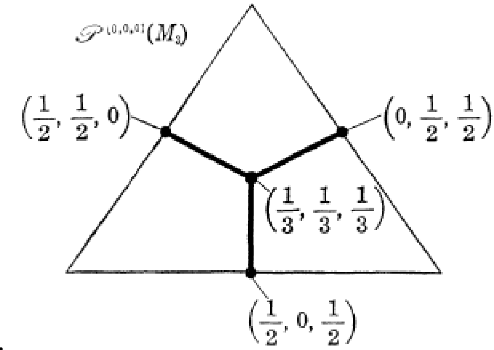
$$\mu(x^\alpha) = min\{x^\alpha(S) : S \in \mathcal{W}\} = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{3} & \text{si } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2-\alpha}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$\mu(x)$ *est une fonction linéaire de* $x$ *sur* $K_1 = [(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0), (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})]$ *et sur* $K_2 = [(0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})]$*. Le jeu quotient de* $\Gamma_{12}$ *est* $(\{1, 2\}; \{1\}, \{2\}, \{1, 2\})$*. Il n'y a pas de joueurs veto dans* $\Gamma_6$*. Le* $(0, 0)$*-égalisateur pour le jeu quotient est le singleton* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$*. Un sommet de* $\mathcal{K}(\Gamma_{12})$ *est une combinaison de sommets du polyèdre qui génère* $\mathcal{K}(\Gamma_6)$*. Cette combinaison est déterminée par (3.98). Par exemple si* $x^1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0)$ *et* $x^2 = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ *alors comme* $\hat{\mu} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$*,* $x = \psi(\hat{\mu}, x^1, x^2) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0, 0, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15})$*. Par symétrie, chaque imputation* $x$ *appartenant à* $\mathcal{K}(\Gamma_{12})$ *peut être représentée par un quadruplet* $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4)$ *où* $\alpha_1 = x_1 = x_2 = x_3, \alpha_2 = x_4 = x_5 = x_6$ *etc. Le Kernel de* $\Gamma_{12}$ *se compose des 4 quadrilatères suivants présentés par leurs sommets. (a)*$AEFO$ *(b)* $BEHO$ *(c)* $CGFO$ *(d)* $DGHO$ *où* $A = (\frac{1}{6}; 0; \frac{1}{6}; 0)$*,* $B = (\frac{1}{6}; 0; 0; \frac{1}{6})$*,* $C = (0; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; 0)$*,* $D = (0; \frac{1}{6}; 0; \frac{1}{6})$*,* $E = (\frac{1}{5}; 0; \frac{1}{15}; \frac{1}{15})$*,* $F = (\frac{1}{15}; \frac{1}{15}; \frac{1}{5}; 0)$*,* $G = (0; \frac{1}{5}; \frac{1}{15}; \frac{1}{15})$*,* $H = (\frac{1}{15}; \frac{1}{15}; 0; \frac{1}{5})$ *et* $O = (\frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12})$*.*



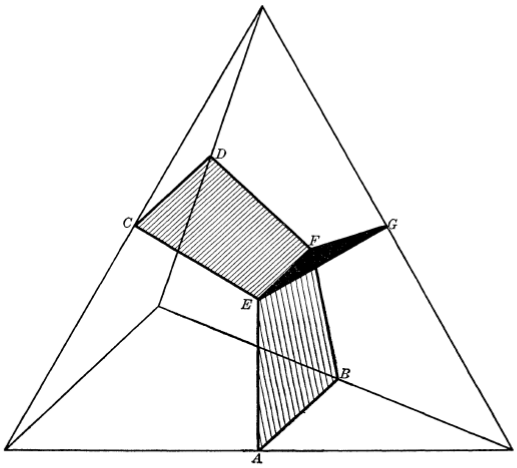

*L'on peut matérialiser ces sommets par le schéma ci-contre.*

**Exemple 3.5.2.** *Soit $\Theta$ un jeu simple monotone à quatre joueurs d'ensemble de coalitions minimales gagnantes $\{\{1,3\},\{2,3\},\{1,4\},\{2,4\}\}$. Soit $M_3$ le jeu simple à majorité à 3 joueurs. Déterminons le Kernel de $\Gamma = M_3[\Theta, M_3, M_3]$.*
*On a $\mathcal{K}(\Theta) = [(1/2,1/2,0,0),(0,0,1/2,1/2)]$ et $\mathcal{K}(M_3) = \{(1/3,1/3,1/3)\}$.*




*Le $(0,0,0)$-égalisateur de $M_3$ est illustré par la figure ci-dessous :*

*Soient $x^1 = (1/2;1/2;0;0) \in \mathcal{K}(\Theta)$, $x^2 = x^3 \in \mathcal{K}(M_3)$, et $\hat{\mu} = (1/2;0;1/2) \in \mathcal{P}^{(0,0,0)}(M_3)$.*
*On a $\psi(\hat{\mu}, x^1, x^2, x^3) = (2/7;2/7;0;0;0;0;0;1/7;1/7;1/7)$.*
*En considérant toutes les combinaisons possibles, on trouve que $\mathcal{K}(\Gamma)$ est constitué de deux quadrilatères $(a)ABEF$, $(b)CDEF$ et du triangle $(c)GEF$ où $A = (2/7,0,1/7,0)$, $B = (0,2/7,1/7,0)$, $C = (2/7,0,0,1/7)$, $D = (0,2/7,0,1/7)$, $E = (1/5,0,1/10,1/10)$,*




$F = (0,1/5,1/10,1/10)$ *et* $G = (0,0,1/6,1/6)$.

# ♣ Conclusion ♣

Parvenu au terme de nos travaux qui se sont articulés autour de trois principaux axes à savoir : premièrement nous avons défini les notions et concepts utiles à la manipulation du Kernel, deuxièmement nous avons donné les propriétés essentielles du Kernel d'un JFCC et proposé une méthode analytique de calcul du Kernel d'un JFCC à trois joueurs monotone et troisièmement nous avons décrit les polyèdres qui constituent le Kernel d'un jeu composé simple. Il ressort de nos travaux que la détermination du Kernel d'un jeu composé simple est plus géométrique que analytique comme l'a montré la formule de NIMROD MEGIDDO. Il ressort aussi que dans un jeu composé simple monotone, les relations que reflète le Kernel entre les joueurs dans un jeu composant et dans le jeu composé sont de même nature ; ainsi, la satisfaction d'un joueur dans un jeu composant est transcrit dans le grand jeu composé. Nos travaux se sont intéressés aux jeux composés simples, cependant nous nous demandons s'il existe aussi une caractérisation du compound Kernel d'un jeu composé qui n'est pas nécessairement à composants simples. Nous nous proposons d'y réfléchir pour de prochaines investigations.

# ♣ Bibliographie ♣

[1] Airiau S. Cooperatives games, Lecture 6 : The kernel.

[2] Aumann R. J. and B. Peleg and D. Rabinowitz (1965) A method for computing the kernel of n-person games, Mathematics of computation.

[3] Davis M. and Maschler M. (1965) The kernel of a cooperative game. Naval Research Logistics : Quaterly, 223-259.

[4] Maschler M. and B. Peleg, A characterization existence proof and dimension bounds for the kernel of a game, Pacific J. Math (1966) 289-328.

[5] Maschler M. and B. Peleg, The structure of the kernel of a cooperative game, SIAM J. Appl. Math., (1967), 569-604.

[6] Nimrod M. , The kernel and the nucleolus of a product of simple games, Israel J. Math., (1971), 210-221.

[7] Nimrod M., (1972) : Tensor decomposition of cooperative games, Res. Memo. 71, Research Program in Game Theory and Mathematical Economics. The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem.

[8] Ninmrod M. (1974) Kernels of compound game with simple components. Pacific Journal of mathematics : 531-555.

[9] G. Owen,(1964) : The tensor composition of non-negative games, Advances in Game Theory, Princeton University Press, Princeton, N.J., 307-326.

[10] Serrano R. , (1999) : "*Four Lectures on the Nucleolus and the Kernel*". the hebrew University of Jerusalem 10th Summer School in Economic Theory, Department of Economics, Brown university.

[11] Solymosi T. (1999), On the bargaining set, kernel and core of supperadditive games. International Journal of Game Theory 28 : 229-240.

[12] Tchantcho H. (2014) Caractérisation du domaine de marchandage et position latente du coeur. Thèse Ph.D, Université de Yaoundé I, Faculté des Sciences, Cameroun.

# ♣ Implications pédagogiques ♣

Ce travail de longues haleines nous a outillé tant sur le plan purement académique que professionnel. En ce qui concerne l'apport pédagogique de ce mémoire à la profession d'enseignants du lycée que nous allons bientôt exercés, nous pouvons mentionner les points suivants :

- la modélisation mathématique sous forme de JFCCs de nombreuses situations concrètes de la vie ; cela va permettre à l'élève de se rendre compte de l'utilité directe des mathématiques ;

- la résolution de certains problèmes liés au partage (partage de points, répartition de travaux de groupe...) en modélisant des situations de partage sous forme de JFCCs et déterminer leur Kernel ;

- apprendre aux élèves les notions géométriques de polyèdres convexes en procédant par les représentations schématiques ;

- mieux apprendre aux élèves la notion des coordonnées de points dans l'espace et le lien avec des figures convexes comme le triangle, carré...