RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
****
Paix-Travail-Patrie
****
UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
****
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
****
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
****

REPUBLIC OF CAMEROON
****
Peace-Work-Fatherland
****
UNIVERSITY OF YAOUNDE I
****
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE
****
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
****

PROBLÈME D'AIDE MULTICRITÈRE À LA DÉCISION : APPROCHE QUALITATIVE

Mémoire Présenté en vue de l'obtention du D.I.P.E.S II de Mathématiques par :

DONGMO Chanceline Laure

Matricule : CMO4-09SCI/1770

Licenciée en Mathématiques

Sous la direction de :

Pr TCHANTCHO Bertrand

Professeur

École Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année Académique 2018-2019

PROBLÈMES D'AIDE MULTICRITÈRE À LA DÉCISION : APPROCHE QUALITATIVE

Mémoire présenté et soutenu publiquement en vue de

l'obtention du D.I.P.E.S II

en Mathématiques

Par :

DONGMO Chanceline Laure

Licenciée en Mathématiques

Matricule : CMO4-09SCI/1770

Sous la direction de

Bertrand TCHANTCHO

Professeur

Ecole Normale Supérieure

Juin 2019

✠ Dédicace ✠

Je dédie ce mémoire à mon père papa ZOHOKO Salomon.

Les valeurs que tu m'as inculqué telles que la discipline ; l'ardeur au travail ; l'endurance et le respect pour autrui ont contribué à la construction de ma personnalité.

✠ Remerciements ✠

Je rends tout d'abord grâce à Dieu le père tout puissant qui m'a donné le courage et la force nécessaire pour parachever ce travail dans de bonnes conditions.

Ma profonde gratitude s'adresse :

Premièrement à mon encadreur, le Professeur Bertrand TCHANTCHO qui m'a fait l'honneur de diriger ce mémoire. Par votre grande disponibilité malgré vos multiples responsabilités et surtout votre capacité d'écoute exceptionnelle, vous avez su me donner goût de cette pluridisciplinarité que représentent les mathématiques appliquées.

À tous les enseignants du département de mathématiques de l'école normale supérieure de Yaoundé et particulièrement à ceux de mathématiques 4 et 5 pour la passion de la recherche qu'ils m'ont transmise ; leur disponibilité constante et leur rigueur scientifique ont été des atouts majeurs .

À monsieur KALDJOB KALDJOB Paul Alain ; TOUYEM Hilaire ; DONGMO Gérard pour leurs critiques et suggestions importantes lors de la rédaction de ce mémoire.

À toute ma grande famille pour le soutien qu'elle a eu à m'apporter pour ma réussite académique. Tout particulièrement à mon père papa ZOHOKO Salomon ; ma mère maman SILATSA Emilienne, mon tuteur papa KENG TAPIE Léopold, mes oncles Monsieur DEMANOU Nestor et Monsieur NANFAH Gaston ; mes soeurs Evéline FEUDJIO, Alice ZOHOKO, Florence NGUEUJIO et Berthe MESSOP .

À mes camarades de promotion. Tout particulièrement à NZUEGO Belbaron ; IROUME Blanche, KAMTO July Belmondo, et OMBOUDOU Thiérry.
À monsieur DONFACK KITIO Lionel.

Aux nombreuses personnes que j'omets involontairement et qui de près ou de loin ont contribué à la production de ce travail.

✠ Déclaration sur l'honneur ✠

Le présent document est une oeuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment recensées et mentionnées en bibliographie.

Signature de la candidate

DONGMO Chanceline Laure

✠ Table des matières ✠

✠ Table des figures ✠

✠ Liste des tableaux ✠

✠ Résumé ✠

L'analyse multicritère est un outil d'aide à la décision développé pour résoudre les problèmes multicritères complexes qui incluent plusieurs aspects qualitatifs et quantitatifs dans les processus décisionnels. Ce domaine connaît une évolution importante ; qui s'est traduite par le développement d'un grand nombre de méthodes. Nous présentons quelques méthodes qualitatives d'Aide MuliCritère à la Décision (AMCD) en les classifiant suivant deux catégories, la première constituée de la famille ELECTRE et la seconde de la famille PROMETHEE. Ces méthodes sont dites de surclassement ayant pour particularités de générer des relations non complètes ou intransitives, de produire des informations qualitatives avec peu d'informations et d'aboutir à des solutions de compromis . Elles ont pour but de comparer les alternatives de façon binaire, puis d'agréger ces comparaisons.

Mots-clés :
AMCD ; Méthodes de surclassement ; Méthodes qualitatives ; Famille ELECTRE ; Famille PROMETHEE.

✠ Abstract ✠

Multicriteria analysis is a decision support tool developped to solve complex multi-criteria problems that include several qualitatives and quantitative aspects in the decision making process. This area is experiencing a significant evolution which resulted in the development of a large number of methods. We present some qualitative methods of multicriteria aid to the decision by classifying them according to two categories, the first consisting of the family ELECTRE and the second one of the family PROMETHEE. These methods are called outranking methods that have the particularity of generating comparaisons of incomplete or intransitive relationships, producing qualitatives informations with little information and leading to compromise solutions. They aim to compare the alternatives in a binary way, then to aggregate these comparisons .

keywords :
AMCD ; Methods of upgrading ; Qualitative methods ; ELECTRE family ; PROMETHEE family.

✠ Introduction générale ✠

L'aide à la décision multicritère est une approche scientifique des problèmes de décisions qui se posent dans tous les contextes socio-économiques. Dans bien des situations de la vie, l'être humain est confronté à des problèmes complexes où son intervention par une prise de décision est plus que nécessaire. Citons par exemple l'achat d'une maison en tenant compte du prix, l'accès et le confort ; la sélection des candidats à un concours selon les critères âge et moyenne ; la sélection des candidats pour un poste d'ingénieur en se basant sur le niveau d'étude après le baccalauréat, le nombre d'années d'expérience et la note obtenue lors de l'entretien ; le problème du choix d'un tronçon d'une voie ferrée à construire reliant deux villes parmi plusieurs propositions de tracés, on devra désigner ici le meilleur tracé qui prend en compte les aspects écologiques et financiers ; adopter un nouveau processus de production dans une usine pour améliorer les délais, la qualité des produits, et réduire les coûts en tenant compte de l'investissement et de la capacité de l'investissement des employés.
Ainsi, à chaque problème posé, l'homme doit rechercher la ou les "meilleures" solutions pour le résoudre. Parfois il se heurte à d'énormes difficultés quant au choix de la "meilleure" solution à cause de l'hétérogénéité de ces solutions. C'est pourquoi en pratique il est préférable de résoudre ces problèmes complexes via un processus scientifique appelé aide à la décision permettant la modélisation mathématique du problème posé. Ce processus d'aide à la décision met en scène deux acteurs principaux à savoir : le décideur dont les préférences sont censées régir le processus décisionnel et l'homme d'étude qui est un ingénieur de la décision ou l'analyste (le facilitateur). Le premier a la responsabilité de décider après délibération du choix final de la "meilleure" solution au problème ; il peut intervenir tout le long du processus en donnant ses préférences, ses priorités, en émettant des avis et autres souhaits. L'analyste quant à lui facilite le processus d'aide à la décision par une analyse méthodologique et scientifique du problème, l'apport méthodologique étant plus important que l'apport scientifique. Il utilise pour cela des

formulations claires et des structures rationnelles nécessaires à la modélisation du problème. Il peut aussi interagir avec le décideur à travers des discussions pour requérir son avis ou la modification de certaines données fournies par ce dernier.

Analyser le comportement d'un individu confronté à un problème de choix entre plusieurs alternatives suivant des points de vue souvent contradictoires, lui procurer une aide pour mieux cerner ses préférences et les modéliser sont des enjeux majeurs de l'aide MultiCritère à la Décision (AMCD), une discipline de la recherche opérationnelle née dans les années soixante. Son objectif est donc de faciliter, grâce à un analyste (ou facilitateur), la tâche d'un décideur dans sa recherche d'une "meilleure" alternative parmi plusieurs sur la base de critères de décision.

Le but de ce mémoire est d'étudier quelques méthodes qualitatives d'AMCD existant dans la littérature. Ce sont les méthodes PROMETHEE et ELECTRE qui font partie de la famille des méthodes de surclassement dont le principe général se base sur la comparaison binaire, puis l'agrégation en utilisant l'une de ces méthodes **(Lenka 2004 ; Rolland 2011)**. Pour montrer l'efficacité de ces méthodes nous formulons la problématique suivante : comment les méthodes ELECTRE et PROMETHEE peuvent-elles aider à la prise de décision multicritère ? Pour répondre à cette question fondamentale, d'autres questions secondaires émergent : quels sont les concepts de base de l'aide multicritère à la décision ? Quels sont les principes de base des méthodes ELECTRE et PROMETHEE ? Et quels sont les limites de ces méthodes ? Afin de répondre à ces questions, nous avons conçu ce mémoire en trois chapitres. Nous présentons tout d'abord dans son chapitre un les raisons d'être des méthodes d'AMCD, la démarche générale en décision multicritère, les problématiques, quelques exemples de problèmes d'AMCD et enfin le formalisme. Au second chapitre, nous présentons quelques méthodes ELECTRE à l'instar de ELECTRE I, ELECTRE II et leurs limites. Ensuite, au troisième chapitre, nous présentons quelques méthodes dites PROMETHEE à l'instar de PROMETHEE I,PROMETHEE II et leurs limites. Ce travail s'achève par une conclusion et les perspectives.

Chapitre Un

PRÉSENTATION GÉNÉRALE DES PROBLÈMES D'AIDE MULTICRITÈRE À LA DÉCISION (AMCD)

Dans ce chapitre, nous présentons des raisons d'être des méthodes d'AMCD **(Ben. M. 2000)**, la démarche à suivre en décision multicritère, quelques exemples de problèmes d'AMCD, le modèle avec les différentes problématiques et les acteurs .

1.1. Raison d'être des méthodes d'AMCD

1.1.1. Quelques limites de la Recherche opérationnelle

La recherche opérationnelle est une démarche qui implique habituellement le traitement mathématique d'un procédé d'un problème ou d'une opération pour atteindre l'efficacité maximale afin d'améliorer la prise des décisions. Mais où s'arrête la recherche opérationnelle ? doit-elle être considérée comme une panacée ?

Avant l'apparition des méthodes d'AMCD, les problèmes de décision se ramenaient le plus souvent à l'optimisation d'une fonction économique. Cette approche avait le mérite de déboucher sur des problèmes mathématiques bien posés mais qui n'étaient pas toujours représentatifs de la réalité car :

* La comparaison de plusieurs actions possibles se fait rarement suivant un seul critère ;

* Les préférences sur un critère sont dans bien des cas, difficilement modélisables par une fonction ;

* Lorsqu'il y a plusieurs objectifs, il est impossible de les atteindre tous à la fois (Maystre et al. 1994).

Ainsi, nous pouvons dire que le domaine de réussite de la recherche opérationnelle est constituée de tous les problèmes qu'il est possible d'isoler du processus de gestion du système comme le choix du mélange optimal pour des rations alimentaires destinées au bétail. Par complément, le domaine d'échec de la recherche opérationnelle comprend toutes les décisions de gestion qu'on ne peut isoler de leur contexte comme le tracé d'une autoroute. Dans tous ces derniers cas, la recherche opérationnelle a déçu car on lui avait fixé un objectif (trop) ambitieux : **désigner, en toutes circonstances, la meilleure décision, l'optimum même quand cette notion pouvait être vide de sens (Schârlig, 1985)**.

En effet, cette optimisation se base sur des hypothèses extrêmement lourdes. La première, dite de **globalité**, suppose que, par la recherche d'une décision optimale parmi toutes les actions potentielles, on pourra désigner une action unique comme la meilleure. Cela présume que toutes les actions potentielles comprennent tous les aspects de la question et sont mutuellement exclusives. Or elles sont souvent complémentaires, partielles et rarement globales.

La seconde hypothèse, dite de **stabilité** stipule que l'ensemble des actions potentielles n'est jamais remis en cause lors de l'étude. Or cette dernière fait souvent jaillir de nouvelles idées au cours de son déroulement.

La troisième et dernière hypothèse est celle **d'incomparabilité et d'intransitivité**. Elle souffre de trois grandes critiques :

* Elle ne tient pas compte de la situation d'incomparabilité ;

* Elle ignore le fait que l'indifférence est parfois intransitive ;

* Elle oublie que la préférence elle-même n'est pas nécessairement transitive.

La première critique intervient par exemple lorsqu'une personne se retrouve face à des alternatives sans qu'elle puisse dire laquelle elle préfère. C'est le cas de celui qui cherche à éclairer une décision mais qui est gêné par l'imperfection des informations dont il dispose. Ce sont des situations embarrassantes mathématiquement mais tellement humaines. Par ailleurs, l'intransitivité de l'indifférence repose aussi sur des considérations humaines. Être indifférent entre a et b puis entre b et c ne signifie pas forcément que l'on est indifférent entre a et c. Pour s'en convaincre, considérons un indice de diversité d'essences forestières, variant de 0 à 1 de façon continue, 1 représentant la diversité maximale. Il est évidemment possible de concevoir des aménagements forestiers donnant lieu à toute une gamme de valeurs de cet indice. De même, un classement de ces aménagements selon cet indice est aisément réalisable. Si on passe de l'aménagement à indice nul à l'aménagement dont l'indice est de 0,1, on peut estimer que cette différence de diversité est négligeable. Idem entre 0,1 et 0,2, et ainsi de suite. Mais il est évident que la préférence remplacera l'indifférence lorsque l'intervalle entre deux indices sera de 0,5 par exemple. On voit donc que l'indifférence n'est pas l'analogue de l'égalité mathématique. Elle recouvre une situation de préférence faible, c'est-à-dire d'une préférence qui n'est pas suffisante pour être humainement ressentie et exprimée.

Le phénomène d'intransitivité des préférences globales résultant de l'agrégation est très bien connu en théorie de vote sous le nom d'effet Condorcet. Outre le postulat de l'existence d'un optimum, on notera que la recherche opérationnelle repose encore sur deux autres postulats, tout aussi contestables, qui portent l'un sur la décision, l'autre sur le modèle. La conception classique de l'optimum sous-entend que l'étude conduit à une décision nette, indiscutée, prise une fois pour toutes, à un moment précis et par une personne responsable. En fait, une décision est souvent un processus chaotique, fruit de nombreuses confrontations entre les systèmes de préférences de plusieurs personnes, et fruit de toutes sortes d'interactions et de synergies.

Quant au modèle, il est censé représenter le problème sous une certaine forme mathématique, pour pouvoir ensuite lui appliquer des règles et des procédés mathématiques et en faire sortir ainsi la solution optimale. Encore faut-il être certain que le modèle retenu représente bien la réalité, ce qui n'est pas souvent le cas. Voila donc pourquoi, dans des problèmes où les hypothèses énoncées ci-avant n'étaient pas vérifiées, la recherche opérationnelle a échoué. Après avoir exposé la misère de l'optimisation, reste à démontrer que la solution réside dans le bonheur du multicritère.

1.1.2. AMCD comme prolongement de la recherche opérationnelle

Choisir d'optimiser, c'est implicitement se situer dans une approche à critère unique. Cela se démontre aisément par l'absurde : dès que l'on prend plusieurs points de vue pour juger des conséquences de plusieurs actions, on risque de désigner comme optimale une action différente pour chaque point de vue et qu'en fin de compte, aucun optimum ne se dégage des calculs. Or toute la réalité humaine est à points de vue multiples ou encore multicritère. Prenons un exemple : si, pour acheter un ordinateur, un individu ne considérait que l'aspect financier, alors personne n'utiliserait un ordinateur portable. C'est évidemment loin d'être le cas. Et cela ne concerne qu'un individu à la fois. Mais dans un service public ou dans la gestion d'un État, les intervenants sont multiples. Multiplicité des critères, multiplicité des intervenants : les deux

phénomènes ne se superposent pas uniquement, ils se multiplient. Cela devrait déjà suffir pour envisager de nouvelles méthodes par rapport à l'optimisation. On peut encore ajouter deux autres faits : le côté non commensurable de certains critères et le fait qu'ils puissent être contradictoires. Prenons l'exemple de l'achat d'un véhicule. Un futur propriétaire conducteur désire que sa voiture soit confortable, peut-être aussi sportive. Il faut donc utiliser des méthodes qui sachent tenir compte de plusieurs critères sans les réduire à un seul (en général pécuniaire).
Si on rassemble tous les critères énumérés dans le choix d'une voiture, à savoir le coût à l'achat, le confort, la sportivité, la sécurité et qu'on y ajoute en plus l'économie à l'usage, il n'est pas difficile de constater que toutes ces notions sont assez contradictoires. La transposition à la collectivité publique, lors du choix du meilleur emplacement pour la construction d'une station d'épuration, est immédiate : la minimisation des nuisances olfactives par éloignement vis-à-vis des habitations est en contradiction avec le coût de l'acheminement de l'eau par exemple. Cela montre la nécessité de rechercher des méthodes qui ne soient pas gênées par les conflits qui apparaîtront entre les différents critères pris en compte.
Un ultime constat est que certains problèmes semblent pouvoir être isolés de leur contexte et donc être traités par l'optimisation. Cette apparente appartenance au domaine de réussite de la recherche opérationnelle est parfois la cause de cuisants échecs. C'est là un argument de plus pour les méthodes multicritères. En conclusion, on peut affirmer, comme Mareschal lors d'une conférence donnée à Gembloux (11/3/98), que l'analyse multicritère est une sorte de prolongement de la recherche opérationnelle, mais certainement pas une rivale qui cherche à l'éliminer.

1.2. Démarche générale en décision multicritère

Généralement, face à un problème multicritère, compte tenu d'un certain ensemble de critères, la résolution peut se faire en **quatre étapes :**

- **Définir les alternatives possibles**. Une alternative est une action réelle ou fictive provisoirement jugée réaliste par un acteur au moins ou présumée par l'homme d'étude en vue de l'aide à la décision.
- **Dresser la liste des critères à prendre en considération.** Ces critères découlent des conséquences des actions, c'est-à-dire de tout effet ou attribut de l'action susceptible d'interférer avec les objectifs ou avec le système de valeurs d'un acteur du processus de décision, en tant qu'élément primaire à partir duquel il élabore, justifie ou transforme ses préférences (Roy 1985).

- ▼ **Établir le tableau des performances.** Ce tableau peut être constitué, en lignes, des critères, et en colonnes, des actions potentielles. Les valeurs qui remplissent ce tableau peuvent être ordinales ou cardinales, d'où l'appellation de performance.
- ▼ **La résolution proprement dite**. Il est question ici d'utiliser l'une des méthodes d'analyse multicritère.

Remarque **1.2.1.** Dans le cadre de ce travail, nous supposons le tableau de performance connu.

1.3. Différentes problématiques d'AMCD

Dans l'AMCD, les différentes problématiques sont :

- ♦ **la problématique du Choix** encore appelée **problématique** α : ici le but est de choisir une ou plusieurs meilleures alternatives parmi celles qui nous sont possibles.

  Exemple : l'achat d'un véhicule
- ♦ **la problématique du Classement** encore appelée **problématique** β : ici le but est de classer les alternatives de la meilleure à la moins bonne.

  Exemple : le classement des projets soumis à une assemblée. Ce classement permettra d'avoir un ordre de priorité sur l'exécution de ces projets en fonction du financement disponible.
- ♦ **la problématique du Tri** encore appelée **problématique** γ : ici le but est de répartir les alternatives dans des catégories pré-existantes (ordonnées ou non).

  Exemple : l'affectation des nouveaux enseignants dans les régions du pays.

1.4. Quelques exemples de problèmes d'AMCD

Les situations relevant des problèmes d'AMCD sont diverses et variées, entre autres, on peut avoir :

- La Planification des activités d'une année scolaire ; les critères pourraient être l'importance de l'activité, son coût et le temps de réalisation ;
- Evaluation de la qualité de fournisseurs pour avoir un matériel de bonne qualité, disponible et à moindre coût ;
- Comparaison d'offre en tenant compte du coût qui doit être minimisé, en souhaitant que le service soit rendu dans un délai satisfaisant et avec une garantie ;
- Engagement du personnel d'une entreprise ; BOLLORÉ pour ses opérations de transit au

port de Douala aimerait avoir un employé jeune, intelligent, compétent et ayant plusieurs années d'expérience dans ce domaine ;

- Choix d'un époux, LAURA voudrait choisir parmi ses prétendants un homme intègre, intelligent, et pas trop âgé ;

Nous présentons maintenant quelques exemples détaillés des problèmes d'AMCD.

Exemple 1.4.1. Admission directe des étudiants de classes scientifiques spéciales à l'École Normale Supérieure (ENS) de Yaoundé .

Cinq étudiants des classes scientifiques spéciales section mathématiques au nom de DONGO (E1), TAPIE (E2), NOA (E3), TANKEU (E4) et KITIO (E5) sont pré-sélectionnés pour une admission directe à l'ENS de Yaoundé. Toutefois, le nombre de places étant limité, une commission est désignée pour effectuer une comparaison de ces candidats deux-à-deux (comparaison qui pourrait être un pré-ordre ou un ordre total). Les critères retenus pour effectuer ces comparaisons sont :

– L'âge du candidat ;

– La note obtenue en mathématiques ;

– La note obtenue en physique .

Les données sont consignées dans le tableau ci-après :

TABLE 1.1 – Profils des étudiants

Alternatives / Critères	E1	E2	E3	E4	E5
Âge (années)	16	17	18	16	19
Note en mathématiques	12	13	13	11	14
Note en physique	15	13	14	14	13

Dans les mêmes conditions, la commission préfère un étudiant jeune et intelligent. Lesquels de ces étudiants doivent-ils être choisis ?

Exemple 1.4.2. Choix d'un lotissement de terrain

La soixantaine sonnée, monsieur KAMGA a besoin d'une parcelle de terrain pour se construire une maison de retraite ; il contacte alors un service immobilier qui lui fait plusieurs offres, il est donc appelé à faire une comparaison de ces offres deux à deux afin de trouver la meilleure. Les critères suivant lesquels il examine les différents offres sont les suivants :

– L'accessibilité ;

– Le coût du mètre carré ;

– La présence ou pas de l'électricité ;

– La présence ou pas de l'eau.

Le lot sera parfaitement accessible si la route est bitumée, moyennement accessible si elle est non bitumée mais entretenue et inaccessible si elle ne peut être jointe que par une piste ; l'électricité sera de très bonne qualité si elle est fournie sans interruption de qualité médiocre s'il y a délestage de temps en temps ; nulle si le secteur n'est pas électrifié ; et l'eau bonne qualité si on peut y avoir l'eau potable, mauvaise s'il y a juste des marigots, et nulle s'il n y a ni l'un ni l'autre.

Le tableau suivant rassemble les données sur les lots qui lui sont présenté.

TABLE 1.2 – Profils des lots

Alternatives / Critères	site A	site B	site C	site D	site E
Coût(en mètre carré)	5000	10000	10000	15000	20000
L'accès	inaccessible	parfait	inaccessible	moyen	parfait
Électricité	médiocre	nul	bonne	médiocre	médiocre
Eau	mauvaise	moyen	bonne	moyen	mauvaise

Dans les mêmes conditions, monsieur KAMGA préfère un lot parfaitement accessible, à moindre coût, une électricité et de l'eau de bonne Qualité.

Lequel de ces terrains doit-il acheter ?

Exemple 1.4.3. Choix d'un véhicule

Vue la distance de son domicile par rapport à son lieu de service, Madame HAWA voudrait acheter un véhicule pour s'y rendre à l'heure tout le temps. Alors, un vendeur de véhicules lui propose sept modèles qu'elle examine suivant les différents critères que sont :

– Le confort à l'interieur et à l'exterieur ;

– Le prix du véhicule ;

– La vitesse (si elle peut rouler à grande vitesse sans difficultés ou pas) ;

– Les lignes (si elles sont soignées ou pas).

Comme l'indique le tableau de performances ci-dessous :

TABLE 1.3 – Profils des véhicules

.

Alternatives / Critères	1	2	3	4	5	6	7
Prix	300	250	250	200	200	200	100
Confort	Excellent	Excellent	Moyen	Moyen	Moyen	Faible	Faible
Vitesse	Rapide	Moyen	Moyen	Rapide	Moyen	Rapide	Moyen
Ligne	Soigne	Soigne	Soigne	Ordinaire	Soigne	Soigne	Ordinaire

Dans les mêmes conditions la dame préfère avoir une voiture plus confortable à une moins confortable ; une voiture à moindre coût qu'à une plus chère ; une voiture à grande vitesse qu'a une avec une petite vitesse .

Lequel de ces véhicules doit-elle choisir ?

Exemple 1.4.4. Choix d'une maison d'habitation

A la sortir de l'École Normale Supérieure de Yaoundé, monsieur BIKAI est affecté au Lycée d'AKWA NORD dans la ville de Douala , il voudrait louer une maison d'habitation en fonction des critères que sont :

–L'accès (si on peut y accéder facilement sur une bonne route ou pas) ;

–Le confort (bien aménagé) ;

–Sécurité dans le quartier ;

–Distance par rapport à son lieu de service.

Ces données sont regroupées dans le tableau de préférence ci-dessous :

TABLE 1.4 – Profils des maisons

Alternatives / Critères	Maison 1	Maison 2	Maison 3
L'accès	faible	difficile	abordable
confort	moyen	moyen	élévé
sécurité	top	faible	moyenne
distance par rapport à son lieu de service	3km	2km	4km

Dans les mêmes conditions monsieur BIKAI préfère une maison très proche de son lieu de service qu'à une très éloignée ; une maison très confortable qu'à une non confortable ; moins coûteux à une très chère. Laquelle de ces maisons doit-il louer ?.

1.5. Formalisation

Précisons d'abord qu'un problème d'AMCD implique **deux acteurs principaux** :

- Le **décideur** : celui qui pose le problème et dont les préférences sont censées régir tout le processus décisionnel.
- L'**expert** : celui qui doit aider le décideur sur la base d'arguments scientifiques à prendre une décision. Il joue en effet le rôle de **facilitateur**.

Remarque 1.5.1. On parle volontairement **d'Aide** MultiCritère à la Décision pour illustrer que la décision finale appartient au décideur.

Pour résoudre un problème d'AMCD, les données suivantes sont indispensables pour l'expert.

* Un ensemble fini **A** de m **alternatives** possibles, avec $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 2$.

Dans l'**exemple 1.4.1** précédent, on a : $m = 5$ et $\mathbf{A} = \{DONGO; TAPIE; NOA; TANKEU; KITIO\}$

* Un ensemble fini **N** de n **critères** avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Dans l'**exemple 1.4.4** précédent, on a : $n = 4$ et $\mathbf{N} = \{$confort ; sécurité ; accès ; distance par rapport au lieu de service $\}$

* Une **performance** de chaque alternative sur chacun des critères, $a_i = g_i(a)\ \forall a \in A\ \forall i \in N$, avec $g_i : A \longrightarrow B\ \forall i \in N$, B étant un ensemble totalement ordonné. Ainsi, $g_i(a)$ est la valeur prise par l'alternative a sur le critère i.

Dans l'**exemple 1.4.1**, on a : $g_1(DONGO) = 16$, g_1 (TAPIE) $= 17$, g_1 (NOA) $= 18$, g_1 (TAN-

KEU) = 16 ; g_1 (KITIO) = 19

$g_2(DONGO)$ = 12, g_2 (TAPIE) = 13 , g_2 (NOA) = 13, g_2 (TANKEU) = 11, g_1 (KITIO) = 14.

Définition 1.5.1

1 - Un critère i est dit **quantitatif** lorsque $g_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire B est une partie de $\mathbb{R}$.

2 - Un critère i est dit **qualitatif** lorsqu'il n'est pas quantitatif, c'est-à-dire lorsque B n'est pas une partie de $\mathbb{R}$. Toutefois B doit être totalement ordonné.

Exemple 1.5.1. Le critère coût de l'**exemple 1.4.2** est **quantitatif**, pendant que le critère **accès** du *même* exemple est **qualitatif**.

Remarque 1.5.2. Dans un *mê*me problème d'AMCD, il est possible d'avoir simultanément des critères quantitatifs et des critères qualitatifs. Par ailleurs certains peuvent être à minimiser alors que d'autres sont à maximiser.

Remarque 1.5.3. Les critères quantitatifs évaluent pendant que les critères qualitatifs ordonnent.

Toutes les méthodes de résolution des problèmes d'AMCD à la décision sont classifiées en **deux catégories**, à savoir les méthodes dites **qualitatives** dont la solution est un ensemble d'éléments qualitatives et celles dites **quantitatives** dont la solution est une quantité. Dans ce travail, nous passerons en revue quelques méthodes qualitatives . Ici le but est de comparer les alternatives de façon binaire, puis d'agréger ces comparaisons.

Dans la suite tous nos tableaux de performance ont été établis après entretien avec le décideur.

Chapitre Deux

LES METHODES ELECTRE

ELECTRE (Elimitation Et Choix Traduisant la Réalité) est une famille de méthodes développées par **Bernard Roy** au début des années 1970. Il a ainsi initié toute une série de méthodes dites de surclassement basées sur des comparaisons d'action deux à deux. Celles-ci demandent peu d'informations pour pouvoir être implémentées ; de plus cette information est facilement accessible au décideur ; elles fournissent des résultats solides mais pauvres. Nous avons ELECTRE I, II, III, IV, V et ELECTRE Tri, mais dans le cadre de ce travail, nous allons uniquement nous intéresser à ELECTRE I et ELECTRE II qui sont les plus utilisées.

2.1. ELECTRE I

Comme pour toutes les méthodes multicritères, un premier travail consiste à poser correctement le problème ; cela se fait par la détermination d'un choix cohérent de critères ; cette étape permet au décideur d'appréhender le problème auquel il est confronté avec une structure plus solide. On attribue ensuite des poids aux différents critères qui ont étés considérés. La problématique ici est celle du **choix** , c'est-à-dire déterminer la meilleure ou les meilleures alternatives **(Rolland 2011)**.

2.1.1. Formalisme

- x et y sont deux alternatives de A à comparer ;
- La relation $\leq_j$,$j \in N = N^+ \cup N^-$ représente les relations de comparaison des alternatives suivant le critère j (c'est un pré-ordre total) ; N^+ étant l'ensemble des critères à maximiser et N^- l'ensemble des critères à minimiser, avec $N^+ \cap N^- = \emptyset$
- $\forall j \in N$, w_j est le poids normalisé du critère j avec $\sum_{j \in N} w_j = 1$;
- $C(x, y) = \sum_{j \in N^+ | x_j \geq_j y_j} w_j + \sum_{j \in N^- | x_j \leq_j y_j} w_j$ est l'indice de concordance de x sur y

$\sum_{j \in N^+ | x_j \geq_j y_j} w_j$ est la somme des poids sur les critères à maximiser et $\sum_{j \in N^- | x_j \leq_j y_j} w_j$ la somme des poids sur les critères à minimiser.

- $C(x, y) \in [0, 1]$
- On dispose d'un seuil de concordance μ et d'éventuelles relations de véto V_j sur chacun des critères.

Définition 2.1.1 (Relation de surclassement)

Soient x et y deux alternatives.

On dit que x **surclasse** y et on note (xSy) si $C(x, y) > C$ et $\forall j \in N$, $non(y_j V_j x_j)$

Définition 2.1.2 (Relation de préférence)

Soient x et y deux alternatives.

- x est **préférée** à y (xPy) si xSy et $non(ySx)$;
- x et y sont **indifférentes** noté (xIy) si xSy et ySx ;
- x et y sont **incomparables** noté (xRy) si $non(xSy)$ et $non(ySx)$.

Définition 2.1.3 (Ensemble Von Neumann stable)

Une partie $B \subseteq A$ est dite **Von Neumann stable** lorsque :

★ $\forall a \notin B, \exists b \in B, bPa$;

★ $\forall a \in B, \forall b \in B$ $non(aPb)$ et $non(bPa)$.

ELECTRE I résoud le problème de choix à partir de la relation de surclassement qui consiste à rechercher le plus petit sous ensemble **Von Neumann Stable**.

Remarque 2.1.1. On parle parfois du **noyau** du graphe de préférences. Il s'agit de la coalition des meilleures alternatives qui est l'ensemble **Von Neumann Stable** dans lequel le décideur devrait effectuer son choix.

NB : Les échelles sur les critères doivent être soigneusement choisies pour autoriser des comparaisons et doivent avoir des significations pour le décideur.

2.1.2. Exemples

Exemple 2.1.1. Considérons l'exemple 1.4.1 précédent

Supposons qu'à l'issue des échanges entre la commission (décideur) et l'expert, il s'en dégage :

* Un système de **poids** correspondant à chaque critère comme l'indique le tableau ci-dessous :

Table 2.1 – Profils des étudiants

Alternatives / Critères	E1	E2	E3	E4	E5	poids
Âge (années) (c1)	16	17	18	16	19	0.2
Note en mathématiques (c2)	12	13	13	11	14	0.5
Note en physique (c3)	15	13	14	14	13	0.3

*Une **relation de véto ou de discordance** sur chaque critère telle que ; pour toutes alternatives X ; Y et tous critères $j = \{c1 ; c2 ; c3\}$ on a :

– $Y_j V_j X_j$ si $X_j \geq Y_j + 3$ pour $j = c1$;

– $Y_j V_j X_j$ si $Y_j \geq X_j + 2$ pour $j = \{c2 ; c3\}$.

*Un **seuil de concordance C = 0,6**.

Table de concordances :

$C(.,.)$	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$
$E1$	1	0, 5	0, 5	1	0, 5
$E2$	0, 5	1	0, 7	0, 5	0, 5
$E3$	0, 5	0, 8	1	0, 8	0, 5
$E4$	0, 2	0, 5	0, 5	1	0, 5
$E5$	0, 5	0, 8	0, 5	0, 5	1

Table de surclassements :

S	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$
$E1$	S	–	–	S	–
$E2$	–	S	S	–	–
$E3$	–	S	S	S	–
$E4$	–	–	–	S	–
$E5$	–	S	–	–	S

.

Table de préférences :

P	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$
$E1$	I	$-$	$-$	P	$-$
$E2$	$-$	I	I	$-$	$-$
$E3$	$-$	I	I	P	$-$
$E4$	$-$	$-$	$-$	I	$-$
$E5$	$-$	P	$-$	$-$	I

.

On obtient le **graphe de préférences** $\{(E1; E4); (E3; E4); (E5; E2)\}$ dont une représentation graphique est donée par :

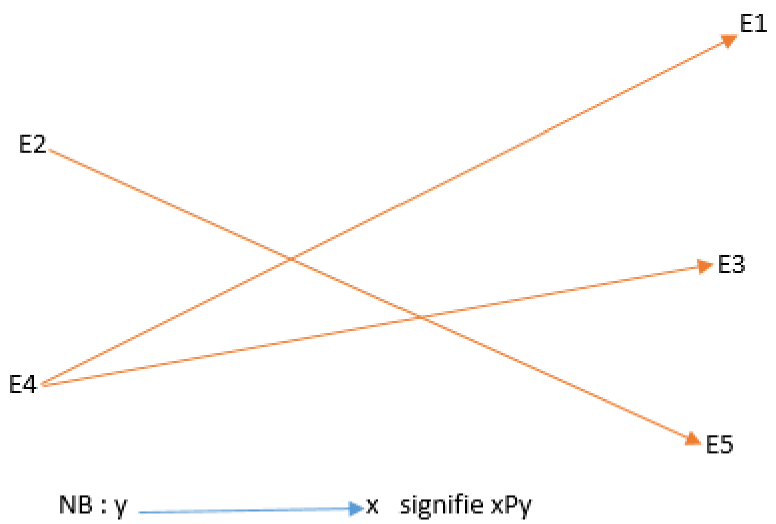

FIGURE 2.1 – Graphe de préférences de l'admission directe des étudiants suivant ELECTRE I

Le noyau de cette préférence est $M = \{E1, E3, E5\}$.

Car nous avons :

– $non(E1PE3)$, $non(E3PE1)$, $non(E1PE5)$, $non(E5PE1)$ $non(E3PE5)$, $non(E5PE3)$;

– $E5PE2$ et $E1PE4$.

La méthode d'ELECTRE I propose à la commission de choisir les étudiants suivants : $DONGO$, NOA et $KITIO$.

Exemple 2.1.2. Considérons l'exemple 1.4.2 précédent

Supposons qu'à l'issue des échanges entre monsieur KAMGA et un expert , il s'en dégage :

* Un système de **poids** correspondant à chaque critère comme l'indique le tableau ci-dessous :

TABLE 2.2 – Profils des terrains

Alternatives / Critères	site A	site B	site C	site D	site E	poids
Coût (en mètre carré) (c1)	5000	10000	10000	15000	20000	0,4
L'accès (c2)	inaccessible	moyen	inaccessible	parfait	parfait	0,3
Électricité (c3)	médiocre	nul	nul	mediocre	bonne	0,1
Eau (c4)	mauvaise	mauvaise	moyen	moyen	mauvaise	0,2

*On affecte à chacune des valeurs qualitatives une valeur quantitative comme suit :

–Parfait et bonne correspondent à 20 000 ;

–Médiocre et moyen à 10 000 ;

–Nul, mauvais et inaccessible à 5 000.

*Une **relation de véto ou de discordance** sur chaque critère tel que ; pour tout alternative X ; Y et tout critères $j = \{c1 ; c2 ; c3 ; c4\}$ on a :

– $Y_j V_j X_j$ si $X_j \geq Y_j + 15000$ pour $j = c1$;

– $Y_j V_j X_j$ si $X_j \leq Y_j + 15000$ pour $j = \{c2 ; c3 ; c4\}$.

*Un **seuil de concordance C = 0,7**.

Table de concordances :

$C(.,.)$	A	B	C	D	E
A	1	0,7	0,8	0,5	0,6
B	0,5	1	0,8	0,4	0,6
C	0,5	0,7	1	0,6	0,6
D	0,6	0,6	0,6	1	0,9
E	0,6	0,6	0,6	0,4	1

Table de surclassements :

S	A	B	C	D	E
A	S	$-$	S	$-$	$-$
B	$-$	S	S	$-$	$-$
C	$-$	$-$	S	$-$	$-$
D	$-$	$-$	$-$	S	S
E	$-$	$-$	$-$	$-$	S

Table de préférences :

P	A	B	C	D	E
A	I	$-$	P	$-$	$-$
B	$-$	I	P	$-$	$-$
C	$-$	$-$	I	$-$	$-$
D	$-$	$-$	$-$	I	P
E	$-$	$-$	$-$	$-$	I

On obtient le **graphe de préférences** $\{(A;C);(B;C);(D;E)\}$ dont une représentation graphique est donnée par :

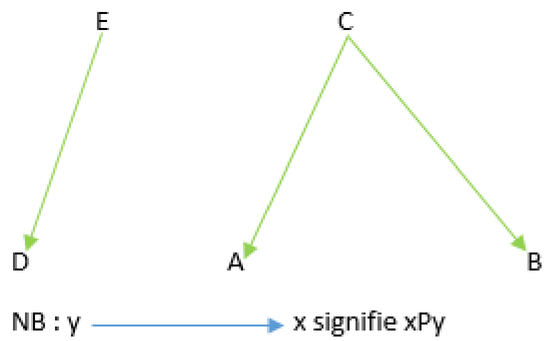

FIGURE 2.2 – Graphe de préférences de l'achat d'un terrain suivant ELECTRE I

Le noyau de cette préférence est $L = \{A, B, D\}$.

Car nous avons :

– $non(APB)$, $non(BPA)$; $non(DPB)$,$non(BPD)$; $non(APD)$, $non(DPA)$;

– APC et DPE .

La méthode ELECTRE I propose à monsieur KAMGA d'acheter un lot parmi les sites suivants : siteA ; siteB ; siteD.

2.2. ELECTRE II

Developpée en 1973, elle relève de la problématique du classement suivant un pré-ordre total. Il ne s'agit plus de trouver la meilleure action mais de classer toutes les actions de la meilleure ou des meilleures jusqu'à la moins bonne. L'approche utilisée reste toujours la même, elle est fondée sur la discordance et la concordance. Cependant, les moyens utilisés pour exprimer ces notions sont enrichis par rapport à ceux d'ELECTRE I, une autre grande nouveauté d'ELECTRE II est d'introduire deux types de surclassement, fort et faible ; la méthode essaye ainsi de mieux respecter les nuances du réel **(Lenka 2004)**.

2.2.1. Formalisme

- La concordance et la discordance(relation de véto) sont définies comme dans ELECTRE I ;
- On fixe deux seuils C_1, C_2 tels que $C_1 > C_2$;
- On construit une relation de surclassement fort S^F pour le seuil C_1 ;
- On construit une relation de surclassement faible S^f pour le seuil C_2.
- $C(a,b) = \sum\limits_{j \in N^+ | a_j \geq_j b_j} w_j + \sum\limits_{j \in N^- | a_j \leq_j b_j} w_j$ est l'indice de concordance de a sur b
  $\sum\limits_{j \in N^+ | a_j \geq_j b_j} w_j$ est la somme des poids sur les critères à maximiser et $\sum\limits_{j \in N^- | a_j \leq_j b_j} w_j$ la somme des poids sur les critères à minimiser

Définition 2.2.1 (Relation de surclassement fort)

$$aS^F b \Longleftrightarrow \begin{cases} C(a,b) \geq C_1 \\ \forall j \in N, \text{ non } (b_j V_j a_j) \end{cases}$$

Définition 2.2.2 (Relation de surclassement faible)

$$aS^f b \Longleftrightarrow \begin{cases} C(a,b) \geq C_2 \\ \forall j \in N, \text{ non } (b_j V_j a_j) \end{cases}$$

Remarque 2.2.1. Il est évident que si $aS^F b$ alors $aS^f b$ car $C_1 > C_2$. Ainsi, $S^F \subseteq S^f$.

2.2.2. Exploitation des relations de surclassement

Une fois les relations de surclassement connues, on détermine :

$\longrightarrow$ l'ensemble $\mathcal{B}^1$ des alternatives de A qui ne sont surclassées fortement par aucune autre alternative de A ;

$\longrightarrow$ puis l'ensemble C^1 des alternatives de $\mathcal{B}^1$ qui ne sont surclassées faiblement par aucune autre alternative de $\mathcal{B}^1$.

C^1 constitue la première classe du rangement et la procédure recommence dans l'ensemble des alternatives restantes s'il est non vide.

Exemple 2.2.1. Reprenons l'exemple 1.4.1 ;

Supposons qu'à l'issue des échanges entre la commission(décideur) et l'expert, il s'en dégage certaines informations de l'exemple 2.1.1 à savoir :

* Le même système de **poids** ;

*Les mêmes **relations de véto ou de discordances** sur les critères ;

*Le même tableau de **concordances**.

Cette fois, on aura **deux seuils de concordances** :

Un **seuil de surclassement fort** $C_1 = 0,8$;

Un **seuil de surclassement faible** $C_2 = 0,6$

On obtient alors les tables de surclassements fort et faible ci-dessous :

Table de surclassement fort ; seuil $C_1 = 0,8$:

S^F	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$
$E1$	–	–	–	S	–
$E2$	–		–	–	–
$E3$	–	S	–	S	–
$E4$		–	–		–
$E5$	–	S	–	–	

$S^F = \{(E1; E4); (E3; E2); (E3; E4); (E5; E2)\}$

Table de surclassement faible ; $C_2 = 0,6$:

S^f	$E1$	$E2$	$E3$	$E4$	$E5$
$E1$		–	–	S	–
$E2$	–		–	–	–
$E3$	–			S	–
$E4$	–	–	–		–
$E5$	–	S	–	–	

$S^f = \{(E1; E4); (E3; E4); (E5; E2)\}$

Les cases vides traduisent ici l'incomparabilité.

Nous obtenons le graphe de la relation de surclassement fort et celui de la relation de surclassement faible :

$S^F = \{(E1; E4); (E3; E2); (E3; E4); (E5; E2)\}$;

$S^f = \{(E1; E4); (E3; E4); (E5; E2)\}$.

L'ensemble des alternatives qui ne sont surclassées fortement par aucune autre est :

$\mathcal{B}^1 = \{E1; E3; E5\}$.

Des alternatives de $\mathcal{B}^1$, aucune n'est faiblement surclassée, donc $C^1 = \{E1; E3; E5\}$.

L'ensemble des alternatives restantes est $\mathcal{A}^1 = \{E2 ; E4 ; \}$, la restriction de S^F à $\mathcal{A}^1$ est l'ensemble vide et celle de S^f à $\mathcal{A}^1$ est également l'ensemble vide ; donc $C^2 = \{E2; E4\}$.

Nous obtenons ainsi le classement suivant :

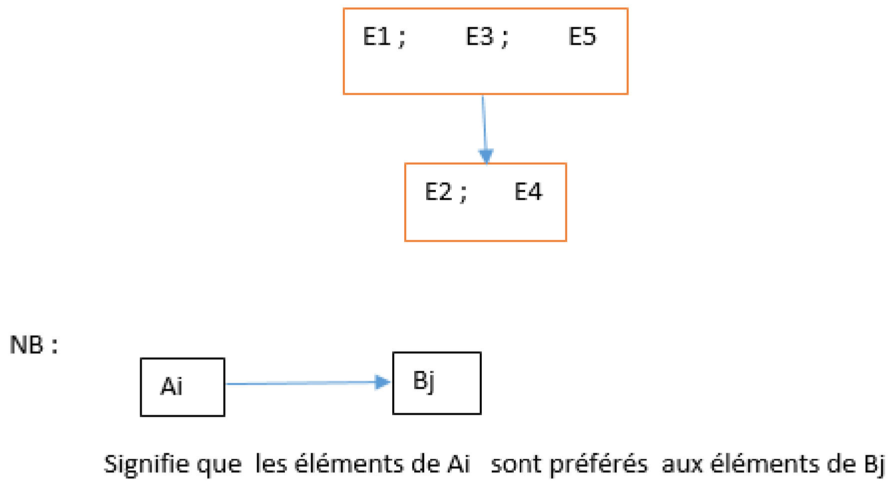

FIGURE 2.3 – Graphe de préférences de l'admission directe des étudiants suivant ELECTRE II

Ainsi, suivant la méthode d'ELECTRE II, l'ensemble des meilleures alternatives est $C^1 = \{E1; E3; E5\}$, puis vient $C^2 = \{E2; E4\}$.

La méthode ELECTRE II propose alors à la commission les meilleurs étudiants qui sont : DONGO ; NOA et KITIO.

Exemple 2.2.2. Reprenons l'exemple 1.4.2.

Supposons qu'à l'issue des échanges entre monsieur KAMGA et l'expert , il s'en dégage certaines informations identiques à celles de l'exemple 2.1.2 à savoir :

* Le même système de **poids** correspondant à chaque critère ;

*On affecte à chacune des valeurs qualitatives les mêmes valeurs quantitatives ;

*Les mêmes **relations de véto ou de discordances** sur chaque critère ;

*On obtient le même tableau de **concordances**.

Ici, On considère **deux seuils de concordances** :

Un **seuil de surclassement fort** $C_1 = 0,8$;

Un **seuil de surclassement faible** $C_2 = 0,7$.

Nous obtenons alors les tables de surclassements fort et faible ci-dessous :

Table de surclassement fort ; $C_1 = 0.8$:

S^F	A	B	C	D	E
A	$-$	$-$	S	$-$	$-$
B	$-$	$-$	S	$-$	$-$
C	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
D		$-$	$-$		S
E	$-$	$-$	$-$	$-$	

.

$S^F = \{(A;C);(B;C);(D;E))\}$

Table de surclassement faible ; $C_2 = 0.7$:

S^f	A	B	C	D	E
A		S	S	$-$	$-$
B	$-$		I	$-$	$-$
C	$-$	I		$-$	$-$
D	$-$	$-$	$-$		S
E	$-$	$-$	$-$	$-$	

.

$S^f = \{(A;C);(A;B);(D;E)\}$

Nous obtenons le graphe de la relation de surclassement fort et celui de la relation de surclassement faible :

$S^F = \{(A;C);(B;C);(D;E))\}$,

$S^f = \{(A;C);(A;B);(D;E)\}$;

L'ensemble des alternatives qui ne sont surclassées fortement par aucune autre est :

$\mathcal{B}^1 = \{A;B;D\}$.

Des alternatives de $\mathcal{B}^1$, B est faiblement surclassée, donc $C^1 = \{A;D\}$.

L'ensemble des alternatives restantes est $\mathcal{A}^1 = \{B;C;E\}$;

la restriction de S^F à $\mathcal{A}^1$ est $S^{F1} = \{(B;C)\}$; et celle de S^f à $\mathcal{A}^1$ est l'ensemble vide ;

L'ensemble des alternatives qui ne sont surclassées fortement par aucune autre est :

$\mathcal{B}^2 = \{B; E\}$ alors $C^2 = \{B; E\}$.

L'ensemble des alternatives restantes est $\mathcal{A}^2 = \{C\}$; donc $C^3 = \{C\}$.

Nous obtenons ainsi le classement suivant :

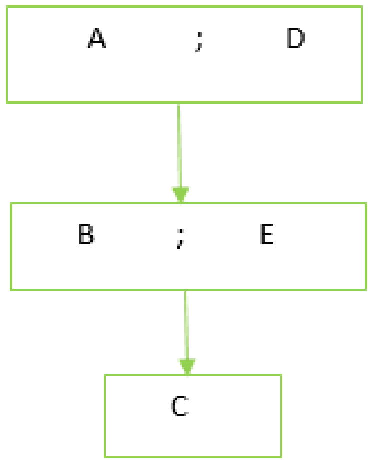

Figure 2.4 – Graphe de préférences de l'achat d'un terrain suivant ELECTRE II

Ainsi, suivant la méthode d'ELECTRE II, on obtient le classement de la figure ci-dessus qui va des meilleurs sites au moins bon ($C^1 = \{A; D\}$, puis vient $C^2 = \{B; E\}$ et enfin $C^3 = \{C\}$). La méthode ELECTRE II propose à Monsieur KAMGA d'acheter soit le site A ou le site D .

2.3. LIMITES DES METHODES ELECTRE I ET II

I - L'inconvénient majeur inhérent à cette méthode est que le noyau ne renferme pas nécessairement les meilleures actions ; mais celles qui sont les plus difficiles à comparer entre elles. Les résultats fournis dans les autres méthodes mathématiques d'analyse multicritère ne permettent pas d'accéder directement aux meilleures actions potentielles et des décisions erronées sont éventuellement possibles.

II - Le noyau qui est l'ensemble VON NEUMANN stable peut ne pas exister (ensemble vide).

Supposons par exemple que le graphe de préférence soit donner par la figure ci-dessous :

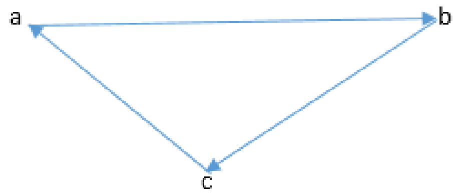

FIGURE 2.5 – Graphe de préférences sans noyau

Démontrons par absurde que ce graphe n'admet pas de noyau.

Supposons que ce graphe admette un noyau qui est un ensemble N ;

– Supposons que $c \in N$; alors $aPc \Longrightarrow a \notin N$ et puisque bPa alors $b \in N$ ce qui est absurde car $b \in N$ et cPb.

– Supposons maintenant que $c \notin N$; alors comme aPc on doit avoir $a \in N$; et puisque bPa on doit avoir $b \notin N$. Ce qui est absurde car le seul qui est préféré à b est c alors que $c \notin N$.

Conclusion, le noyau n'existe pas.

III - Les relations de surclassement sont non totales et pas forcément transitives.

Reprenons l'exemple 1.4.3 du choix d'un véhicule .

Après échange entre madame HAWA et l'expert, on obtient un système de poids regroupé dans le tableau ci-dessous :

TABLE 2.3 – Profils des véhicules

Alternatives / Critères	1	2	3	4	5	6	7	poids
Prix	300	250	250	200	200	200	100	$\frac{5}{15}$
Confort	E	E	M	M	M	F	F	$\frac{4}{15}$
Vitesse	R	M	M	R	M	R	M	$\frac{3}{15}$
Ligne	S	S	S	O	S	S	O	$\frac{3}{15}$

Où E=Excellent, M=Moyen, F=Faible, R=Rapide, S=Soignée, O=Ordinaire ; affectons les valeurs à E ; M ; F ; R ; S tel que E = 300 ; M = 200 ; F = 100 ; R = 250 ; S = 300 et O = 200.

le Seuil C = 11/15 .

En procédant comme dans ELECTRE I on obtient alors le tableau de surclassement suivant :

S	1	2	3	4	5	6	7
1	S						
2	S	S	S				
3			S				
4			S	S		S	
5		S	S		S	S	
6			S			S	
7							S

Dans ce tableau la relation de surclassement est :

- Non totale car on a : non(4S5) et non(5S4).
- Non transitive car ici on a : (5S2),(2S1) mais non (5S1).

IV - Le paramétrage est plus délicat à renseigner (moins naturel) car on a les difficultés sur le choix des seuils, une légère variation des seuils peut conduire à des résultats différents. Les critères sur lesquels il faut mettre le véto et le choix du véto ne sont pas toujours évident.

V - Les méthodes ELECTRE ne prennent pas en compte les interactions entre les critères.

Chapitre Trois

LES METHODES PROMETHEE

Basées sur les théories de Roy (développeur des méthodes ELECTRE), les méthodes PROMETHEE (**Preference Ranking Organisation Method for Enrichment Evaluation**) font parties des méthodes de surclassement. Elles ont été développées par **Jean Pierre Brans** et **Philippe Vincke** à partir du milieu des années 80. Nous ne présentons ici que PROMOTHEE I et PROMOTHEE II, qui sont les plus utilisées.

L'objectif des méthodes d'analyse multicritère PROMETHEE est de construire via un système de préférences floues (le meilleur est caché), un classement des actions des meilleures aux moins bonnes ; ce classement étant un pré-ordre quelconque pour PROMETHEE I, et un pré-ordre complet pour PROMETHEE II.

3.1. DESCRIPTION DE PROMETHEE I ET II

Démarche générale

- Comparaison des alternatives deux à deux avec mesure de l'intensité de la préférence $\forall i \in N,\ P_i(a,b) = P(d_i(a,b))$, où P est une fonction de préférence donnée et $d_i(a,b)$ mesure la différence entre les alternatives a et b sur le critère $i \in N$.
- Calcul de l'**indicateur de préférence** $\pi(a,b) = \sum_{i \in N} w_i P_i(a,b)\ \forall a\ ,\ b \in A$
  où $d_i(a,b) = a_i - b_i$ pour les critères à maximiser ;
  et $d_i(a,b) = b_i - a_i$ pour les critères à minimiser.
  $\forall j \in N$, w_j est le poids normalisé du critère j avec $\sum_{j \in N} w_j = 1$.
- Calcul des flux :
  - Le **flux entrant** d'une alternative a est donné par : $\Phi^+(a) = \sum_{x \in A} \pi(a,x)$.
    $\Phi^+(a)$ exprime la **puissance** de l'alternative a, par conséquent plus le flux entrant d'une alternative est élevé, meilleure est l'alternative ;

- Le **flux sortant** d'une alternative a est donné par : $\Phi^-(a) = \sum_{x\in A} \pi(x,a)$.

  $\Phi^-(a)$ exprime la **faiblesse** de l'alternative a, par conséquent plus le flux sortant d'une alternative est bas, meilleure est l'alternative ;

- Puis on agrège **(WAAUB.J. 2012)**.

PROMETHEE I

Définition 3.1.1 (Relation de préférence)

* $aPb \iff \Phi^+(a) \geq \Phi^+(b)$ et $\Phi^-(a) \leq \Phi^-(b)$ et au moins l'une de ces deux inégalités étant stricte.
* $aIb \iff \Phi^+(a) = \Phi^+(b)$ et $\Phi^-(a) = \Phi^-(b)$
* aRb sinon (l'incomparabilité).

On obtient ainsi une **relation partielle** sur l'ensemble des alternatives pour laquelle il faudra déterminer le noyau qui est l'ensemble des meilleures alternatives.

La problématique ici est celle de **choix** α.

PROMETHEE II

Le **flux net** d'une alternative a est donné par : $\Phi(a) = \Phi^+(a) - \Phi^-(a)$.
$\Phi(a)$ exprime le **score final** de l'alternative a, plus le flux net d'une alternative est élevé, meilleure est l'alternative.

Définition 3.1.2 (Relation de préférence)

* $aPb \iff \Phi(a) > \Phi(b)$.
* $aIb \iff \Phi(a) = \Phi(b)$.

On obtient ainsi une **relation totale** et **transitive** sur l'ensemble des alternatives, ce qui induit un classement complet de toutes les alternatives.

Ici la problématique est celle du **classement** β.

3.2. APPLICATION DE PROMETHEE I et II

Dans cette section nous présentons deux exemples permettant de mettre en application les méthodes PROMETHEE I et II.

Exemple 3.2.1. Toujours au sujet de l'exemple 1.4.1 ; Déterminons l'ensemble des meilleurs étudiants ; Après entretien avec la commission, l'expert obtient :

* Le même système de poids de l'exemple 2.1.1 regroupé dans le tableau suivant :

TABLE 3.1 – Profils des étudiants

Alternatives / Critères	E1	E2	E3	E4	E5	poids
Âge (années)	16	17	18	16	19	0.2
Note en mathématique	12	13	13	11	14	0.5
Note en physique	15	13	14	14	13	0.3

* **Une fonction de préférence** définie par : $P(d) = \begin{cases} 0 \text{ si } d < 1 \\ 0,5 \text{ si } 1 \leq d \leq 2 \\ 1 \text{ si } d > 2 \end{cases}$

Prenons comme **mesure de différence** sur le critère i des alternatives x et y

$d_i(x; y) = x_i - y_i$ pour les critères à maximiser et $d_i(x; y) = y_i - x_i$ pour le critère à minimiser.

Calculons les indicateurs de préférence $\pi(x, y)$ $\forall x$ **,** $y \in A$

On a : $\forall x$, $y \in A$ $\pi(x, y) = \sum_{i=1}^{4} w_i P_i(x, y)$, donc

$\pi(x; y) = w_1 P_1(x, y) + w_2 P_2(x, y) + w_3 P_3(x, y) + w_4 P_4(x, y).$

$\pi(x; y) = w_1 P(d_1(x, y)) + w_2 P(d_2(x, y)) + w_3 P(d_3(x, y)) + w_4 P(d_4(x, y))$

$\pi(E1; E2) = 0,2 \times P(1) + 0,5 \times P(-1) + 0,3 \times P(2)$

$\pi(E1; E2) = 0,2 \times 0.5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0,5 = 0,25$

$\pi(E2; E1) = 0,2 \times P(-1) + 0,5 \times P(1) + 0,3 \times P(-2)$

$\pi(E2; E1) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0,5 + 0,3 \times 0 = 0,25$

$\pi(E1; E3) = 0,2 \times P(2) + 0,5 \times P(-1) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E1; E3) = 0,2 \times 0,5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0,5 = 0,25$

$\pi(E3; E1) = 0,2 \times P(-2) + 0,5 \times P(1) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E3; E1) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0,5 + 0,3 \times 0 = 0,25$

$\pi(E1; E4) = 0,2 \times P(0) + 0,5 \times P(1) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E1; E4) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0,5 + 0,3 \times 0,5 = 0,40$

$\pi(E4; E1) = 0,2 \times P(0) + 0,5 \times P(-1) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E4; E1) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0 = 0$

$\pi(E1; E5) = 0,2 \times P(3) + 0,5 \times P(-2) + 0,3 \times P(2)$

$\pi(E1; E5) = 0,2 \times 1 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0,5 = 0,35$

$\pi(E5; E1) = 0,2 \times P(-3) + 0,5 \times P(2) + 0,3 \times P(-2)$

$\pi(E5; E1) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0,5 + 0,3 \times 0 = 0,25$

$\pi(E2; E3) = 0,2 \times P(1) + 0,5 \times P(0) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E2; E3) = 0,2 \times 0,5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0 = 0,10$

$\pi(E3; E2) = 0,2 \times P(-1) + 0,5 \times P(0) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E3; E2) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0,5 = 0,15$

$\pi(E2; E4) = 0,2 \times P(-1) + 0,5 \times P(2) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E2; E4) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0.5 + 0,3 \times 0 = 0,25$

$\pi(E4; E2) = 0,2 \times P(1) + 0,5 \times P(-2) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E4; E2) = 0,2 \times 0,5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0,5 = 0,25$

$\pi(E2; E5) = 0,2 \times P(2) + 0,5 \times P(-1) + 0,3 \times P(0)$

$\pi(E2; E5) = 0,2 \times 0,5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0 = 0,10$

$\pi(E5; E2) = 0,2 \times P(-2) + 0,5 \times P(1) + 0,3 \times P(0)$

$\pi(E5; E2) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0,5 + 0,3 \times 0 = 0,25$

$\pi(E3; E4) = 0,2 \times P(-2) + 0,5 \times P(2) + 0,3 \times P(0)$

$\pi(E3; E4) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0,5 + 0,3 \times 0 = 0,25$

$\pi(E4; E3) = 0,2 \times P(2) + 0,5 \times P(-2) + 0,3 \times P(0)$

$\pi(E4; E3) = 0,2 \times 0,5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0,5 = 0,10$

$\pi(E3; E5) = 0,2 \times P(1) + 0,5 \times P(-1) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E3; E5) = 0,2 \times 0,5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0,5 = 0,25$

$\pi(E5; E3) = 0,2 \times P(-1) + 0,5 \times P(1) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E5; E3) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0,5 + 0,3 \times 0 = 0,25$

$\pi(E4; E5) = 0,2 \times P(3) + 0,5 \times P(-3) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E4; E5) = 0,2 \times 1 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0,5 = 0,35$

$\pi(E5; E4) = 0,2 \times P(-3) + 0,5 \times P(3) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E5; E4) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 1 + 0,3 \times 0 = 0,50$

Calculons les flux entrants

$\forall x \in A$, on a : $\Phi^+(x) = \sum_{y \in A} \pi(x, y)$ donc :

$\Phi^+(E1) = \pi(E1; E2) + \pi(E1; E3) + \pi(E1; E4) + \pi(E1; E5) = 0,25 + 0,25 + 0,40 + 0,35 = 1.25$

$\Phi^+(E2) = \pi(E2; E1) + \pi(E2; E3) + \pi(E2; E4) + \pi(E2; E5) = 0,25 + 0,10 + 0,10 + 0,25 = 0.70$

$\Phi^+(E3) = \pi(E3; E1) + \pi(E3; E2) + \pi(E3; E4) + \pi(E3; E5) = 0.25 + 0.15 + 0,25 + 0.25 = 0,90$

$\Phi^+(E4) = \pi(E4; E1) + \pi(E4; E2) + \pi(E4; E3) + \pi(E4; E5) = 0 + 0,25 + 0,10 + 0,35 = 0,70$

$\Phi^+(E5) = \pi(E5; E1) + \pi(E5; E2) + \pi(E5; E3) + \pi(E5; E4) = 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,50 = 1,25.$

Calculons les flux sortants

$\forall x \in A$, on a : $\Phi^-(x) = \sum_{y \in A} \pi(y, x)$, donc :

$\Phi^-(E1) = \pi(E2; E1) + \pi(E3; E1) + \pi(E4; E1) + \pi(E5; E1) = 0,25 + 0,25 + 0 + 0,25 = 0.75$

$\Phi^-(E2) = \pi(E1; E2) + \pi(E3; E2) + \pi(E4; E2) + \pi(E5; E2) = 0,25 + 0.15 + 0,25 + 0,25 = 0,90$

$\Phi^-(E3) = \pi(E1; E3) + \pi(E2; E3) + \pi(E4; E3) + \pi(E5; E3) = 0,25 + 0,10 + 0,10 + 0,25 = 0,70$

$\Phi^-(E4) = \pi(E1; E4) + \pi(E2; E4) + \pi(E3; E4) + \pi(E5; E4) = 0,40 + 0,25 + 0,25 + 0,50 = 1,40$

$\Phi^{-}(E5) = \pi(E1; E5) + \pi(E2; E5) + \pi(E3; E5) + \pi(E4; E5) = 0,35 + 0,10 + 0,25 + 0,35 = 1,05.$

$\longrightarrow$ **PROMETHEE I**

On obtient les préférences suivantes :

* $E1PE2$ car $\Phi^{+}(E1) > \Phi^{+}(E2)$ et $\Phi^{-}(E1) < \Phi^{-}(E2)$

*$E1PE4$ car $\Phi^{+}(E1) > \Phi^{+}(E4)$ et $\Phi^{-}(E1) < \Phi^{-}(E4)$

*$E1PE5$ car $\Phi^{+}(E1) = \Phi^{+}(E5)$ et $\Phi^{-}(E1) < \Phi^{-}(E5)$

*$E5PE4$ car $\Phi^{+}(E5) > \Phi^{+}(E4)$ et $\Phi^{-}(E5) < \Phi^{-}(E4)$

*$E2PE4$ car $\Phi^{+}(E2) = \Phi^{+}(E4)$ et $\Phi^{-}(E2) < \Phi^{-}(E4)$

* $E3PE2$ car $\Phi^{+}(E3) > \Phi^{+}(E2)$ et $\Phi^{-}(E3) < \Phi^{-}(E2)$

* $E3PE4$ car $\Phi^{+}(E3) > \Phi^{+}(E4)$ et $\Phi^{-}(E3) < \Phi^{-}(E4)$

PROMETHEE I conduit au classement partiel avec pour graphe de préférences $\{(E1; E2); (E1; E4); (E1; E5); (E5; E4); (E2; E4); (E3; E2); (E3; E4)\}$, dont une représentation graphique est donnée par :

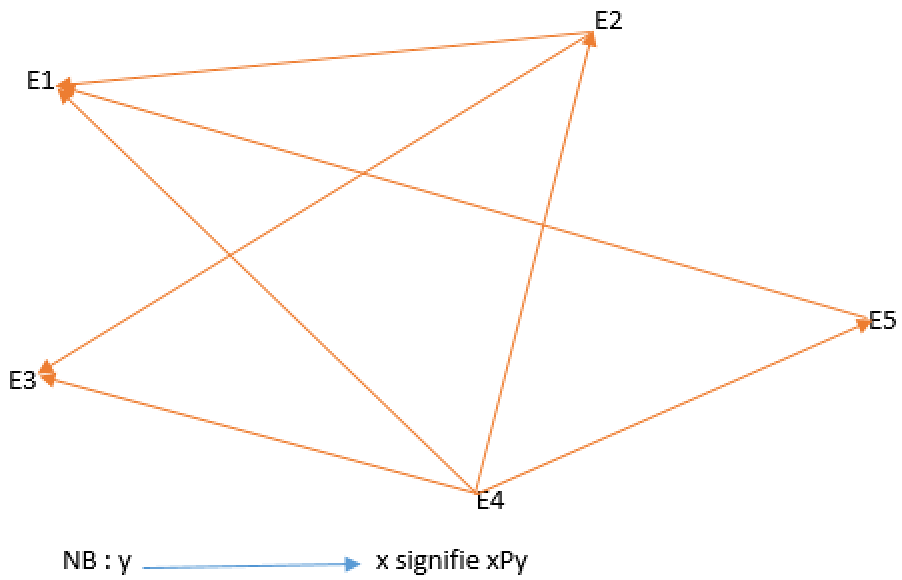

Figure 3.1 – Graphe de préférences de l'admission directe des étudiants suivant PROMETHEE I.

Le noyau de ce graphe est N = $\{E1 ; E3\}$ car :

– $E1; E3$ dans N on a non $(E1PE3)$ et non $(E3PE1)$;

– $E2$; $E5$ et $E4$ ne sont pas dans N, on a $(E1PE2)$; $(E1PE5)$; $E1PE4$ et $(E3PE4)$.

D'où la méthode **PROMETHEE I** propose à la commission les meilleurs étudiants sont : DONGO et NOA .

$\longrightarrow$ **PROMETHEE II**

Calculons les flux nets

$\forall x \in A$, $\Phi(x) = \Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x)$, donc :

$\Phi(E1) = \Phi^{+}(E1) - \Phi^{-}(E1) = 1,25 - 0.75 = 0,50$;

$\Phi(E2) = \Phi^{+}(E2) - \Phi^{-}(E2) = 0.70 - 0,90 = -0,20$;

$\Phi(E3) = \Phi^{+}(E3) - \Phi^{-}(E3) = 0,90 - 0,70 = 0,20$;

$\Phi(E4) = \Phi^{+}(E4) - \Phi^{-}(E4) = 0,70 - 1,40 = -0,70$;

$\Phi(E5) = \Phi^{+}(E5) - \Phi^{-}(E5) = 1,25 - 1,05 = 0.20$;

Ces flux nets induisent le rangement total suivant :

$\Phi(E1) > \Phi(E3) = \Phi(E5) > \Phi(E2) > \Phi(E4)$ duquel nous déduisons le classement total suivant : $E1 > E3; E5 > E2 > E4$.

Donc pour PROMETHEE II le meilleur étudiant est DONGO ; puis viennent NOA et KITIO ; ensuite TAPIE et enfin TANKEU.

Exemple 3.2.2. Considérons l'exemple 1.4.2 ; Déterminons l'ensemble des meilleures alternatives.

Supposons qu'à l'issue des échanges entre monsieur KAMGA et l'expert , il s'en dégage :

* Le même système de **poids** de l'exemple 2.1.2 correspondant à chaque critère comme l'indique le tableau ci-dessous :

TABLE 3.2 – Profils des terrains

Alternatives / Critères	site A	site B	site C	site D	site E	poids
Coût(en mètre carré) (c1)	5000	10000	10000	15000	20000	0,4
L'accès (c2)	inaccessible	moyen	inaccessible	parfait	parfait	0,3
Électricité (c3)	médiocre	nul	nul	médiocre	bonne	0,1
Eau (c4)	mauvaise	mauvaise	moyen	moyen	mauvaise	0,2

*On affecte à chacune des valeurs qualitatives les mêmes valeurs quantitatives de l'exemple 2.1.2 comme suit :

–Parfait et bonne correspondent à 20 000 ;

–Médiocre et moyen à 10 000 ;

–Nul, mauvais et inaccessible à 5 000.

* Une **fonction de préférence** définie par : $P(d) = \begin{cases} 0 \text{ si } d < 5000 \\ 0,5 \text{ si } 5000 \leq d \leq 10000 \\ 1 \text{ si } d > 10000 \end{cases}$

Prenons comme **mesure de différence** sur le critère i des alternatives x et y

$d_i(x; y) = x_i - y_i$ pour les critères à maximiser et $d_i(x; y) = y_i - x_i$ pour les critères à minimiser.

Calculons les indicateurs de préférence $\pi(x, y)\ \forall x$ **,** $y \in A$

On a : $\forall x , y \in A\ \pi(x, y) = \sum_{i=1}^{4} w_i P_i(x, y)$, donc

$\pi(x; y) = w_1 P(d_1(x, y)) + w_2 P(d_2(x, y)) + w_3 P(d_3(x, y)) + w_4 P(d_4(x, y))$

$\pi(A; B) = 0,4 \times P(5000) + 0,3 \times P(-5000) + 0,1 \times P(5000) + 0,2 \times P(0)$

$\pi(A; B) = 0,4 \times 0,5 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0,5 + 0,2 \times 0 = 0,25$

$\pi(B; A) = 0,4 \times P(-5000) + 0,3 \times P(5000) + 0,1 \times P(-5000) + 0,2 \times P(0)$

$\pi(B; A) = 0,4 \times 0 + 0,3 \times 0,5 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0 = 0,15$

$\pi(A; C) = 0,4 \times P(5000) + 0,3 \times P(0) + 0,1 \times P(5000) + 0,2 \times P(-5000)$

$\pi(A; C) = 0,4 \times 0,5 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0,5 + 0,2 \times 0 = 0,25$

$\pi(C; A) = 0,4 \times P(-5000) + 0,3 \times P(0) + 0,1 \times P(-5000) + 0,2 \times P(5000)$

$\pi(C; A) = 0,4 \times 0 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0,5 = 0.10$

$\pi(A; D) = 0,4 \times P(1000) + 0,3 \times P(-15000) + 0,1 \times P(0) + 0,2 \times P(-5000)$

$\pi(A; D) = 0,4 \times 0,5 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0 = 0,20$

$\pi(D; A) = 0,4 \times P(-10000) + 0,3 \times P(15000) + 0,1 \times P(0) + 0,2 \times P(5000)$

$\pi(D; A) = 0,4 \times 0 + 0,3 \times 1 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0,5 = 0.40$

$\pi(A; E) = 0,4 \times P(15000) + 0,3 \times P(-15000) + 0,1 \times P(-10000) + 0,2 \times P(0)$

$\pi(A; E) = 0,4 \times 1 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0 = 0.40$

$\pi(E;A) = 0,4 \times P(-15000) + 0,3 \times P(15000) + 0,1 \times P(10000) + 0,2 \times P(0)$

$\pi(E;A) = 0,4 \times 0 + 0,3 \times 1 + 0,1 \times 0,5 + 0,2 \times 0 = 0,35$

$\pi(B;C) = 0,4 \times P(0) + 0,3 \times P(5000) + 0,1 \times P(0) + 0,2 \times P(-5000)$

$\pi(B;C) = 0,4 \times 0 + 0,3 \times 0,5 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0 = 0,15$

$\pi(C;B) = 0,4 \times P(0) + 0,3 \times P(-5000) + 0,1 \times P(0) + 0,2 \times P(5000)$

$\pi(C;B) = 0,4 \times 0 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0,5 = 0.10$

$\pi(B;D) = 0,4 \times P(5000) + 0,3 \times P(-10000) + 0,1 \times P(-5000) + 0,2 \times P(-5000)$

$\pi(B;D) = 0,4 \times 0,5 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0 = 0,20$

$\pi(D;B) = 0,4 \times P(-5000) + 0,3 \times P(10000) + 0,1 \times P(5000) + 0,2 \times P(5000)$

$\pi(D;B) = 0,4 \times 0 + 0,3 \times 0,5 + 0,1 \times 0,5 + 0,2 \times 0,5 = 0,30$

$\pi(B;E) = 0,4 \times P(10000) + 0,3 \times P(-10000) + 0,1 \times P(-15000) + 0,2 \times P(0)$

$\pi(B;E) = 0,4 \times 0,5 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0 = 0,20$

$\pi(E;B) = 0,4 \times P(-10000) + 0,3 \times P(10000) + 0,1 \times P(15000) + 0,2 \times P(0)$

$\pi(E;B) = 0,4 \times 0 + 0,3 \times 0,5 + 0,1 \times 1 + 0,2 \times 0 = 0,25$

$\pi(C;E) = 0,4 \times P(10000) + 0,3 \times P(-15000) + 0,1 \times P(-15000) + 0,2 \times P(5000)$

$\pi(C;E) = 0,4 \times 0,5 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0,5 = 0,30$

$\pi(E;C) = 0,4 \times P(-10000) + 0,3 \times P(15000) + 0,1 \times P(15000) + 0,2 \times P(-5000)$

$\pi(E;C) = 0,4 \times 0 + 0,3 \times 1 + 0,1 \times 1 + 0,2 \times 0 = 0,40$

$\pi(C;D) = 0,4 \times P(5000) + 0,3 \times P(-15000) + 0,1 \times P(-5000) + 0,2 \times P(0)$

$\pi(C;D) = 0,4 \times 0,5 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0 = 0,20$

$\pi(D;C) = 0,4 \times P(-5000) + 0,3 \times P(15000) + 0,1 \times P(5000) + 0,2 \times P(0)$

$\pi(D;C) = 0,4 \times 0 + 0,3 \times 1 + 0,1 \times 0,5 + 0,2 \times 0 = 0,35$

$\pi(D;E) = 0,4 \times P(5000) + 0,3 \times P(0) + 0,1 \times P(-10000) + 0,2 \times P(5000)$

$\pi(D;E) = 0,4 \times 0,5 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0 + 0,2 \times 0,5 = 0,30$

$\pi(E;D) = 0,4 \times P(-5000) + 0,3 \times P(0) + 0,1 \times P(10000) + 0,2 \times P(-5000)$

$\pi(E;D) = 0,4 \times 0 + 0,3 \times 0 + 0,1 \times 0,5 + 0,2 \times 0 = 0,05$

Calculons les flux entrants

$\forall x \in A$, on a : $\Phi^+(x) = \sum_{y\in A} \pi(x,y)$ donc :

$\Phi^+(A) = \pi(A;B) + \pi(A;C) + \pi(A;D) + \pi(A;E) = 0,25 + 0,25 + 0,20 + 0,40 = 1.10$

$\Phi^+(B) = \pi(B;A) + \pi(B;C) + \pi(B;D) + \pi(B;E) = 0,15 + 0,15 + 0,20 + 0,20 = 0,70$

$\Phi^+(C) = \pi(C;A) + \pi(C;B) + \pi(C;D) + \pi(C;E) = 0.10 + 0.10 + 0,30 + 0.20 = 0,70$

$\Phi^+(D) = \pi(D;A) + \pi(D;B) + \pi(D;C) + \pi(D;E) = 0,40 + 0,30 + 0,35 + 0,30 = 1,35$

$\Phi^+(E) = \pi(E;A) + \pi(E;B) + \pi(E;C) + \pi(E;D) = 0,35 + 0,25 + 0,40 + 0,05 = 1,05$.

Calculons les flux sortants

$\forall x \in A$, on a : $\Phi^-(x) = \sum_{y\in A} \pi(y,x)$, donc :

$\Phi^-(A) = \pi(B;A) + \pi(C;A) + \pi(D;A) + \pi(E;A) = 0,15 + 0,10 + 0,35 + 0,40 = 1$

$\Phi^-(B) = \pi(A;B) + \pi(C;B) + \pi(D;B) + \pi(E;B) = 0,25 + 0.10 + 0,30 + 0,25 = 0,90$

$\Phi^-(C) = \pi(A;C) + \pi(B;C) + \pi(D;C) + \pi(E;C) = 0,25 + 0,15 + 0,40 + 0,35 = 1,15$

$\Phi^-(D) = \pi(A;D) + \pi(B;D) + \pi(C;D) + \pi(E;D) = 0,20 + 0,20 + 0,20 + 0,05 = 0,65$

$\Phi^-(E) = \pi(A;E) + \pi(B;E) + \pi(C;E) + \pi(D;E) = 0,40 + 0,20 + 0,30 + 0,30 = 1,20.$

$\longrightarrow$ **PROMETHEE I**

On obtient les préférences suivantes :

*APC car $\Phi^+(A) > \Phi^+(C)$ et $\Phi^-(A) < \Phi^-(C)$

*APE car $\Phi^+(A) > \Phi^+(E)$ et $\Phi^-(A) < \Phi^-(E)$

*BPC car $\Phi^+(B) = \Phi^+(C)$ et $\Phi^-(B) < \Phi^-(C)$

*DPA car $\Phi^+(D) > \Phi^+(A)$ et $\Phi^-(D) < \Phi^-(A)$

*DPB car $\Phi^+(D) > \Phi^+(B)$ et $\Phi^-(D) < \Phi^-(B)$

*DPC car $\Phi^+(D) > \Phi^+(C)$ et $\Phi^-(D) < \Phi^-(C)$

*DPE car $\Phi^+(D) > \Phi^+(E)$ et $\Phi^-(D) < \Phi^-(E)$

PROMETHEE I conduit au classement partiel avec pour graphe de préférences $\{(A;C);(A;E);(B;C);(D;A);(D;B);(D;C);(D;E)\}$, dont une représentation graphique est donnée par :

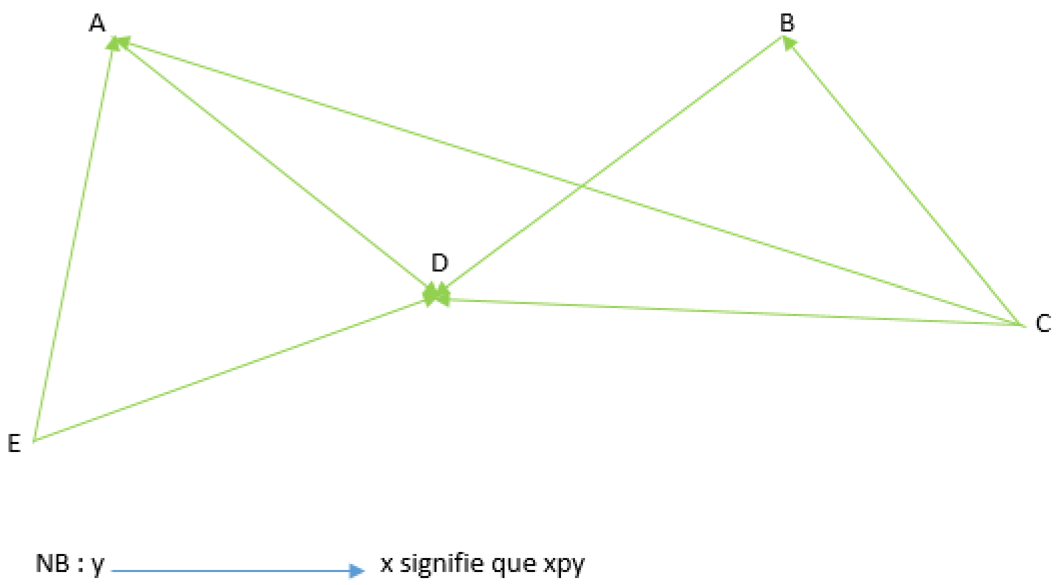

FIGURE 3.2 – Graphe de préférences de l'achat du terrain suivant PROMETHEE I

Le noyau de ce graphe est M = {D} car :

– $A; B; C; E$ ne sont pas dans M on a (DPA) ; (DPB) ;(DPC) ; (DPE) .

Alors la méthode **PROMETHEE I** propose à monsieur KAMGA le site D.

$\longrightarrow$ **PROMETHEE II**

Calculons les flux nets

Soit S l'ensemble des alternatives, $\forall x \in S$, $\Phi(x) = \Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x)$, donc :

$\Phi(A) = \Phi^{+}(A) - \Phi^{-}(A) = 1,10 - 1 = 0,10$;

$\Phi(B) = \Phi^{+}(B) - \Phi^{-}(B) = 0,70 - 0,90 = -0,20$;

$\Phi(C) = \Phi^{+}(C) - \Phi^{-}(C) = 0,70 - 1,15 = -0,45$;

$\Phi(D) = \Phi^{+}(D) - \Phi^{-}(D) = 1,35 - 0,65 = 0,70$;

$\Phi(E) = \Phi^{+}(E) - \Phi^{-}(E) = 1,05 - 1,20 = -0,15$;

Ces flux nets induisent le rangement suivant :

$\Phi(D) > \Phi(A) > \Phi(E) > \Phi(B) > \Phi(C)$ duquel nous déduisons le classement total suivant : $D \succ A \succ E \succ B \succ C$.

Alors pour PROMETHEE II le meilleur site est également le site D ; puis vient le site A ; ensuite le site E ; puis le site B et enfin le site C.

3.3. QUELQUES LIMITES DES METHODES PROMETHEE I ET II

Les méthodes PROMETHEE font partie de la famille des méthodes de surclassement ; les critiques y afférentes s'adressent aussi à cette famille. Néanmoins on peut indiquer quelques critiques qui la concernent directement.

I - En tant que méthode de surclassement de type rangement ; PROMETHEE permet de ranger les actions mais ne permet pas de rendre compte des différences quantitatives relatives à ces actions.

Dans l'exemple 3.3.2 par exemple on a $\Phi(D) > \Phi(A)$ avec

$\Phi(D) - \Phi(A) = 0.60$ et $\Phi(A) > \Phi(E)$ avec $\Phi(A) - \Phi(E) = 0.25$.

II - Le fait de prendre des seuils d'indifférence et de préférence constants (entre 0 et 1) peut être considéré comme une restriction. Car certains décideurs seront indifférents face à une marge de différence alors que d'autre ne le seront pas.

III- Deux fonctions de préférences du même exemple peuvent conduire à des résultats différents.

Par exemple au lieu de prendre la fonction de préférences de l'exemple 3.2.1 suivante :

* **Une fonction de préférence** définie par : $P(d) = \begin{cases} 0 \text{ si } d < 1 \\ 0,5 \text{ si } 1 \leq d \leq 2 \\ 1 \text{ si } d > 2 \end{cases}$

on pouvait également prendre celle-ci :

* **La fonction de préférence** définie par : $P(d) = \begin{cases} 0 \text{ si } d < 2 \\ 0,5 \text{ si } d = 2 \\ 1 \text{ si } d > 2 \end{cases}$

Ce qui peut nous conduire à un résultat différent alors que c'est une fonction du même exemple.

Calculons les indicateurs de préférence $\pi(x, y)$ $\forall x$ **,** $y \in A$

On a : $\forall x$, $y \in A$ $\pi(x, y) = \sum_{i=1}^{4} w_i P_i(x, y)$, donc

$\pi(x; y) = w_1 P_1(x, y) + w_2 P_2(x, y) + w_3 P_3(x, y) + w_4 P_4(x, y)$.

$\pi(x;y) = w_1P(d_1(x,y)) + w_2P(d_2(x,y)) + w_3P(d_3(x,y)) + w_4P(d_4(x,y))$

$\pi(E1;E2) = 0,2 \times P(1) + 0,5 \times P(-1) + 0,3 \times P(2)$

$\pi(E1;E2) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0,5 = 0.15$

$\pi(E2;E1) = 0,2 \times P(-1) + 0,5 \times P(1) + 0,3 \times P(-2)$

$\pi(E2;E1) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0 = 0$

$\pi(E1;E3) = 0,2 \times P(2) + 0,5 \times P(-1) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E1;E3) = 0,2 \times 0.5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0,5 = 0.10$

$\pi(E3;E1) = 0,2 \times P(-2) + 0,5 \times P(1) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E3;E1) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0.5 + 0,3 \times 0 = 0$

$\pi(E1;E4) = 0,2 \times P(0) + 0,5 \times P(1) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E1;E4) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0.5 + 0,3 \times 0,5 = 0$

$\pi(E4;E1) = 0,2 \times P(0) + 0,5 \times P(-1) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E4;E1) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0 = 0$

$\pi(E1;E5) = 0,2 \times P(3) + 0,5 \times P(-2) + 0,3 \times P(2)$

$\pi(E1;E5) = 0,2 \times 1 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0.5 = 0.35$

$\pi(E5;E1) = 0,2 \times P(-3) + 0,5 \times P(2) + 0,3 \times P(-2)$

$\pi(E5;E1) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0.5 + 0,3 \times 0 = 0.25$

$\pi(E2;E3) = 0,2 \times P(1) + 0,5 \times P(0) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E2;E3) = 0,2 \times 0.5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0 = 0$

$\pi(E3;E2) = 0,2 \times P(-1) + 0,5 \times P(0) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E3;E2) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0,5 = 0$

$\pi(E2;E4) = 0,2 \times P(-1) + 0,5 \times P(2) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E2; E4) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0.5 + 0,3 \times 0 = 0.25$

$\pi(E4; E2) = 0,2 \times P(1) + 0,5 \times P(-2) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E4; E2) = 0,2 \times 0.5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0.5 = 0$

$\pi(E2; E5) = 0,2 \times P(2) + 0,5 \times P(-1) + 0,3 \times P(0)$

$\pi(E2; E5) = 0,2 \times 0.5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0 = 0.10$

$\pi(E5; E2) = 0,2 \times P(-2) + 0,5 \times P(1) + 0,3 \times P(0)$

$\pi(E5; E2) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0.5 + 0,3 \times 0 = 0$

$\pi(E3; E4) = 0,2 \times P(-2) + 0,5 \times P(2) + 0,3 \times P(0)$

$\pi(E3; E4) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0.5 + 0,3 \times 0 = 0.25$

$\pi(E4; E3) = 0,2 \times P(2) + 0,5 \times P(-2) + 0,3 \times P(0)$

$\pi(E4; E3) = 0,2 \times 0.5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0.5 = 0.10$

$\pi(E3; E5) = 0,2 \times P(1) + 0,5 \times P(-1) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E3; E5) = 0,2 \times 0.5 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0.5 = 0$

$\pi(E5; E3) = 0,2 \times P(-1) + 0,5 \times P(1) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E5; E3) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 0.5 + 0,3 \times 0 = 0$

$\pi(E4; E5) = 0,2 \times P(3) + 0,5 \times P(-3) + 0,3 \times P(1)$

$\pi(E4; E5) = 0,2 \times 1 + 0,5 \times 0 + 0,3 \times 0.5 = 0.20$

$\pi(E5; E4) = 0,2 \times P(-3) + 0,5 \times P(3) + 0,3 \times P(-1)$

$\pi(E5; E4) = 0,2 \times 0 + 0,5 \times 1 + 0,3 \times 0 = 0.50$

Calculons les flux entrants

$\forall x \in A$, on a : $\Phi^{+}(x) = \sum_{y \in A} \pi(x, y)$ donc :

$\Phi^{+}(E1) = \pi(E1; E2) + \pi(E1; E3) + \pi(E1; E4) + \pi(E1; E5) = 0,60$

$\Phi^{+}(E2) = \pi(E2; E1) + \pi(E2; E3) + \pi(E2; E4) + \pi(E2; E5) = 0.35$

$\Phi^{+}(E3) = \pi(E3; E1) + \pi(E3; E2) + \pi(E3; E4) + \pi(E3; E5) = 0,25$

$\Phi^{+}(E4) = \pi(E4; E1) + \pi(E4; E2) + \pi(E4; E3) + \pi(E4; E5) = 0,30$

$\Phi^{+}(E5) = 0,75.$

Calculons les flux sortants

$\forall x \in A$, on a : $\Phi^{-}(x) = \sum_{y \in A} \pi(y, x)$, donc :

$\Phi^{-}(E1) = \pi(E2; E1) + \pi(E3; E1) + \pi(E4; E1) + \pi(E5; E1) = 0.25$

$\Phi^{-}(E2) = \pi(E1; E2) + \pi(E3; E2) + \pi(E4; E2) + \pi(E5; E2) = 0,15$

$\Phi^{-}(E3) = \pi(E1; E3) + \pi(E2; E3) + \pi(E4; E3) + \pi(E5; E3) = 0,20$

$\Phi^{-}(E4) = \pi(E1; E4) + \pi(E2; E4) + \pi(E3; E4) + \pi(E5; E4) = 1$

$\Phi^{-}(E5) = \pi(E1; E5) + \pi(E2; E5) + \pi(E3; E5) + \pi(E4; E5) = 0,65.$

PROMETHEE I

On obtient les préférences suivantes :

* $E2PE4$ car $\Phi^{+}(E2) > \Phi^{+}(E4)$ et $\Phi^{-}(E2) < \Phi^{-}(E4)$

*$E1PE4$ car $\Phi^{+}(E1) > \Phi^{+}(E4)$ et $\Phi^{-}(E1) < \Phi^{-}(E4)$

*$E2PE3$ car $\Phi^{+}(E2) > \Phi^{+}(E3)$ et $\Phi^{-}(E2) < \Phi^{-}(E3)$

*$E5PE4$ car $\Phi^{+}(E5) > \Phi^{+}(E4)$ et $\Phi^{-}(E5) < \Phi^{-}(E4)$

PROMETHEE I conduit au classement partiel avec pour graphe de préférences $\{(E2; E4); (E1; E4); (E5; E4); (E2; E3)\}$, dont une représentation graphique est donnée par :

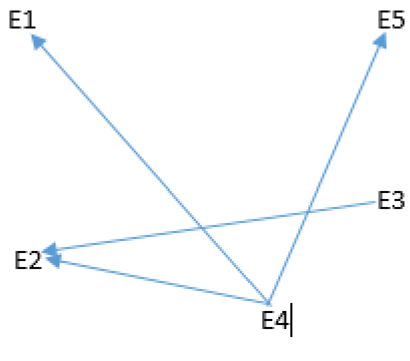

FIGURE 3.3 – Graphe de préférences de l'admission directe des étudiants pour PROMETHEE I.

Le noyau de ce graphe est H = $\{E1 ; E5 ; E2\}$ car :

– On a : $E1; E2; E5$ sont dans H et non $(E1PE5)$; non $(E5PE1)$; non $(E1PE2)$; non $(E2PE1)$; non $(E2PE5)$; non $(E5PE2)$;

– $E3$; $E4$ ne sont pas dans H, on a $(E2PE4)$; $(E2PE3)$.

D'où la méthode **PROMETHEE I** propose à la commission les meilleurs étudiants suivant : DONGO ; TAPIE et KITIO alors que l'exemple 3.2.1 nous proposait DONGO et NOA.

PROMETHEE II

Calculons les flux nets

$\forall x \in A$, $\Phi(x) = \Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x)$, donc :

$\Phi(E1) = \Phi^{+}(E1) - \Phi^{-}(E1) = 0,60 - 0,25 = 0,35$;

$\Phi(E2) = \Phi^{+}(E2) - \Phi^{-}(E2) = 0.35 - 0,15 = 0,20$;

$\Phi(E3) = \Phi^{+}(E3) - \Phi^{-}(E3) = 0,25 - 20 = 0,05$;

$\Phi(E4) = \Phi^{+}(E4) - \Phi^{-}(E4) = 0,30 - 1 = -0,70$;

$\Phi(E5) = \Phi^{+}(E5) - \Phi^{-}(E5) = 0,75 - 0,65 = 0.10$;

Ces flux nets induisent le rangement suivant :

$\Phi(E1) > \Phi(E2) > \Phi(E5) > \Phi(E3) > \Phi(E4)$ duquel nous déduisons le classement total suivant : $E1 \succ E2 \succ E5 \succ E3 \succ E4$.

Donc pour PROMETHEE II le meilleur étudiant est DONGO ; puis vient TAPIE qui précède KITIO ; ensuite NOA et enfin TANKEU ; qui n'est pas le même rangement de l'exemple 3.2.1.

✠ Implication pédagogique ✠

La rédaction de ce mémoire nous a offert l'opportunité de faire nos premiers pas d'autonomie en termes d'investigations scientifiques et de déploiements de nos aptitudes à comprendre, à construire un raisonnement logique sans oublier la maîtrise indispensable des outils des nouvelles technologies de l'information et de la communication incontournables pour tout enseignant actuel . Nous nous proposons dans cette partie de relever quelques repères de l'impact de cet exercice au plan pédagogique sur le système éducatif.

I- Aptitude à comprendre, mobiliser et construire des connaissances

Pour mener à terme ce travail, il a fallu que nous puisions dans nos compétences à pouvoir comprendre une situation-problème, en proposer un formalisme et d'étudier les propriétés des objets mathématiques obtenus. Par transposition, les documents de travail (mentionnés en bibliographie) sur lesquels sont basés nos recherches peuvent être perçus comme une ressource pédagogique dont le contenu doit être partagé avec les apprenants. C'est ainsi que nous avons décomposé cette ressource pour en donner une reconstitution en termes de chapitres ; par suite de définitions des concepts à étudier et des propriétés qui vérifient ces concepts. En mettant ainsi ces propriétés ensemble, on déduit donc des résultats. Cette démarche est fondamentale dans le quotidien d'un enseignant de mathématiques . Nous pensons notamment à l'élaboration de nos cours futurs à partir des diverses ressources éducatives.

II– Aptitude à produire un raisonnement logique et de prendre une décision face à une situation multicritère

Le raisonnement mathématique permet d'associer, de différencier, de catégoriser, de mesurer, d'évaluer, de tester des hypothèses, de démontrer un processus, de tirer des conclusions à partir d'informations données ou de lois générales, de retrouver des informations manquantes par logique, d'aller des causes aux conséquences et inversement, de mettre à jour les contradictions ou incohérences (affirmer une chose et son contraire par exemple), de justifier un résultat,...C'est donc un type de raisonnement essentiel pour comprendre et analyser le monde mais aussi pour beaucoup d'opérations de la vie quotidienne et professionnelle nous demandant d'analyser logiquement et efficacement des situations en fonction de plusieurs critères et de prendre des décisions. On pourra donc ainsi développer chez les élèves des capacités de chercheur et à contribuer à l'avancement des connaissances. Ceux-ci ont pour but d'initier l'élève à la pratique de la recherche en le rendant capable d'utiliser adéquatement les ressources documentaires et les méthodes d'investigation et d'analyse appropriées. L'élève sera donc ainsi à même de développer les capacités suivantes : - la valeur et la pertinence du nouveau savoir ;

- l'aptitude à intégrer les différentes connaissances ; - l'aptitude à construire une problématique ;

- l'aptitude à la rigueur méthodologique, logique de l'argumentation et la valeur de la démonstration ;

- la qualité de la présentation selon les normes d'un travail scientifique ;

- la qualité de la présentation au niveau du style et de la langue utilisée ;

Particulièrement pour notre thème, un enseignant ou un responsable d'établissement scolaire lors d'un concours d'entrer dans son école, pourra prendre une décision sur le choix ou le classement des élèves qu'il juge meilleurs en tenant compte d'un certains nombre de critères. L'aide à la décision multicritères peut également servir à l'orientation scolaire.

III– Initiation aux nouvelles technologies de l'information et de la communication

Les outils technologiques tels que le micro-ordinateur, l'utilisation des logiciels (Word, LaTeX) et internet ont été incontournable au cours de la rédaction de ce mémoire. Ces moyens de communication (en particulier internet) pourront être utiles d'une part à l'enseignant dans la mesure où il va devoir compléter le déficit ou l'insuffisance d'informations contenus dans les manuels scolaires. Ils peuvent de même l'assister dans la préparation, la saisie et la présentation d'une leçon ou d'un sujet d'épreuve. D'autre part, ils seront utiles à l'élève pour compléter les cours qui lui ont été transmis par l'enseignant.

✠ Conclusion et perspectives ✠

Au terme de notre travail consacré à une approche qualitative aux problèmes d'aide à la décision qui est un mode de concepts, d'approches et de méthodes qui visent à aider le gestionnaire (le décideur) à décrire, évaluer, ranger, choisir ou rejeter un ensemble d'actions pouvant être exercées sur les candidats, les produits ou les projets en se basant sur l'évalution à l'aide de notes (scores), de valeurs, d'intensité de préference. Il était question pour nous de présenter quelques approches de solutions rencontrées dans la littérature en méthodes qualitatives d'AMCD, puis de nous intéresser à l'étude de quelques propriétés de ces méthodes. Cette approche comprend les méthodes ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la Réalité) et les méthodes PROMETHEE (Preference Ranking Organisation Méthod for Enrichment Evaluation) qui sont des méthodes de surclassement. Ici il est question de comparer les alternatives de façon binaire puis d'agréger ces comparaisons, le plus souvent par le noyau du graphe de préférences. Nous nous sommes intéressés particulièrement aux méthodes ELECTRE I ; ELECTRE II ; PROMETHEE I ; PROMETHEE II qui sont les plus utilisées. Il en ressort que ELECTRE I conduit a un ensemble dans lequel on peut choisir les meilleures alternatives appelé noyau qui est un ensemble Von Neumann stable pour une relation bien définie ; ELECTRE II à un tri par bloc des meilleures alternatives ; PROMETHEE I à la description d'un noyau qui est l'ensemble des meilleures alternatives et PROMETHEE II à un rangement par ordre de préférence. Notre grande remarque est de constater que toutes ces méthodes conduisent toujours presque aux mêmes résultats pour un problème précis. Aucune de ces méthodes n'est meilleure que les autres car toutes ces méthodes ont des limites à savoir l'absence de noyau dans certains cas ; relation non totale et pas forcement transitive pour les méthodes ELECTRE ; et un système de préférences floues pour PROMETHEE. L'aide à la décision regorge de nombreuses méthodes dont certaines n'ont pas été présentées dans notre travail ; notamment les méthodes ELECTRE III, IV et TRI que nous comptons étudier pour renforcer nos aptitudes dans ce domaine.

✠ Bibliographie ✠

[1] Ben.Mena«Introduction aux méthodes multicritères d'aide à la décision» *Biotechnol. Agron. Soc. Environ.*4(2), 83-93. 2000 .

[2] Fargier Hélène. and Lemaitre M. *«Décision multicritère»*. Sup Aéro (SSP).2009-2010.

[3] Lenka Philippe. «Aide multicritère à la décision, méthodes de surclassement». *GET/ENST bretagne. 49 - 58 septembre* 2004.

[4] MAYSTRE LY, pictet J,. *Méthodes multicritères ELECTRE. Description,conseil pratiques et cas d'application à la gestion environnementale*. Lausanne, Suisse : Presses polytechniques et universitaires romandes, 323 p.(1994)

[5] Rolland A. *«Aide à la décision multicritère»*. Université de LYON II . 91 - 104.21 octobre 2011

[6] ROY Bernard, Skalka JM. *Electre, méthodologiques et guide d'utilisation*. Document 30, Lamsade Paris : Université de Paris Dauphine, 119p. (1985).

[7] Schârlig A. *Décider sur plusieurs critères,aide à la décision multicritères*. Lausanne, Suisse : Presses polytechniques et universitaires romandes, 304 p.(1985).

[8] Vanderpooten Daniel. *«Aide multicritère à la décision,concepts, méthodes et perspectives» LAMSADE*, Université paris dauphine ; 11 septembre 2011.

[9] Vincke P.*L'aide multicritère à la décision*. Bruxelles : édition de l'université de bruxelles, 179p. 1989.

[10] WAAUB Jean Philippe.*Aide multicritère à la décision comme outil de mise en oeuvre de l'ÉE*. École d'été SIFEE-IEPF, 21 juin 2012.