

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

*Paix – Travail – Patrie*

\*\*\*\*\*

UNIVERSITE DE YAOUNDE I  
ECOLE NORMALE SUPERIEURE  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

\*\*\*\*\*



REPUBLIC OF CAMEROUN

*Peace – Work – Fatherland*

\*\*\*\*\*

UNIVERSITY OF YAOUNDE I  
HIGHER TEACHER TRAINING COLLEGE  
DEPARTMENT OF PHYSICS

\*\*\*\*\*

## **SOLUTIONS SOLITONS APPROCHEES DANS UN MILIEU A NON-LINEARITE NON LOCALE**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme des professeurs de  
l'enseignement secondaire deuxième grade (Di.P.E.S II)

Par :

**TIETCHOU MBIANDA Cyrille Jullyo**  
**Licencié en Physique**

Sous la direction  
**Dr. FEWO Serge Ibraïd**  
Chargé de cours



Année Académique  
2015-2016



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire de Yaoundé I. Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [biblio.centrale.uyi@gmail.com](mailto:biblio.centrale.uyi@gmail.com)

## WARNING

This document is the fruit of an intense hard work defended and accepted before a jury and made available to the entire University of Yaounde I community. All intellectual property rights are reserved to the author. This implies proper citation and referencing when using this document.

On the other hand, any unlawful act, plagiarism, unauthorized duplication will lead to Penal pursuits.

Contact: [biblio.centrale.uyi@gmail.com](mailto:biblio.centrale.uyi@gmail.com)

---

---

# Table des matières

---

Dédicaces	ii
Remerciements	iii
Resumé	iv
Abstract	v
INTRODUCTION	1
<b>1 GÉNÉRALITÉS SUR LA PROPAGATION DES SOLITONS DANS LES MILIEUX NON LINÉAIRES</b>	<b>3</b>
1.1 Définition . . . . .	3
1.2 Découverte de l'onde solitaire . . . . .	4
1.3 Généralités sur la propagation dans les milieux non-linéaires . . . . .	5
1.3.1 La diffraction . . . . .	6
1.3.2 La non-linéarité . . . . .	7
1.3.3 Le soliton spatial . . . . .	13
<b>2 SOLUTION SOLITON DANS UN MILIEU À NON LINÉARITÉ NON-LOCALE</b>	<b>14</b>
2.1 Équation de schrödinger non-linéaire . . . . .	14
2.1.1 Dérivation de l'équation de schrödinger non-linéaire . . . . .	14
2.1.2 Équation de Schrödinger non linéaire du modèle . . . . .	18

---

2.2	Approche variationnelle et application dans le modèle . . . . .	21
2.2.1	Présentation et description de l'approche variationnelle . . . . .	21
2.2.2	Application de l'approche variationnelle à notre modèle . . . . .	21
2.2.3	Déterminations des paramètres des Solutions approchées . . . . .	24
<b>3</b>	<b>SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET INTERPRÉTATIONS</b>	<b>28</b>
3.1	Solutions exactes et solutions approchée! . . . . .	28
3.1.1	Solutions exactes . . . . .	29
3.1.2	Solutions approchées . . . . .	29
3.2	Résolution numérique . . . . .	29
3.2.1	Méthode de Fourier à pas divisés . . . . .	29
3.2.2	Simulations numériques . . . . .	30
	<b>CONCLUSION</b>	<b>38</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>
	<b>CURRICULUM VITAE</b>	<b>42</b>

---

---

# Table des figures

---

1.1	Illustration du phénomène de diffraction . . . . .	6
1.2	Illustration de la non-linéarité . . . . .	9
1.3	Non-linéarité faiblement non-locale . . . . .	11
1.4	Non-linéarité fortement non-locale . . . . .	12
1.5	Propagation du soliton spatial . . . . .	13
3.1	Profils de la solution analytique approchée (trait fort) et la solution exacte (trait interrompu) du soliton fondamental (bleu) et de l'indice de réfraction non linéaire (rouge). Les paramètres correspondant sont $b = 0.25$ et $d = 2$ . . . . .	30
3.2	évolution de la solution analytique approchée . . . . .	31
3.3	évolution de la solution exacte . . . . .	32
3.4	Profils de l'évolution des amplitudes de la solution exacte (trait interrompu rouge) et de la solution approchée (bleu). . . . .	33
3.5	Rapport de l'amplitude maximale de l'onde à la valeur maximale de l'indice de réfraction non linéaire en fonction de la constante de propagation $b$ . . . . .	34
3.6	Énergie en fonction de la constante de propagation $b$ . . . . .	35
3.7	Énergie en fonction du paramètre $d$ . . . . .	35
3.8	Hamiltonien en fonction de l'Énergie . . . . .	36

---

---

## Dédicaces

---

Je dédie ce mémoire à :

- Dieu le maître de toute chose qui m'a donné le souffle et qui me comble de ses bienfaits, en m'entourant des personnes qui m'aiment et dont le souci est ma réussite.
- Mon père MBIANDA Roger et à ma mère NKWAHA Lysette qui m'ont toujours soutenu et encouragé.

---

---

## Remerciements

---

La confection de ce modeste travail n'aurait pas pu être achevée sans le soutien et l'encouragement de certaines personnes qui me sont chères. C'est l'occasion pour moi d'adresser mes remerciements :

- Au docteur **FEWO Serge**, enseignant au Département de Physique de l'Université de Yaoundé I, pour ses conseils prodigués lors de l'encadrement.
- D'une manière générale, à l'ensemble des enseignants du Département de Physique de l'école normale pour la qualité de leurs enseignements dispensés.
- Aux Doctorants TEMGOUA Roussel et ZANGA Dieudonné pour tous les conseils, la disponibilité et les interventions.
- A mes frères Yannick , Boris, Brice, Aurel et Casimir MBIANDA ; à monsieur et madame NJIKE, Pour leur soutien matériel et moral.
- A tous mes camarades de promotion pour les débats édifiants de tous les jours. Plus particulièrement à : SILATCHOM L. ,J. MBAMI, DEUMI J. , TCHANGOU H., SIEWE C., HEUTEU C. , KOLOKO S., YOUTCHOUM J.
- A mes amis R. TEMGOUA, C. FOTSO, F. MOUKAM, F. TA'ALLA, A. NGOYE, P. BAMA, N. NOUTSA, E. FOKOUA, J. TENE, Frank et Duplex MBIEDA,
- A tous ceux qui ont pu contribuer à l'aboutissement de ce travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

---

---

## RESUMÉ

---

Nous étudions la dynamique du soliton spatial dans un milieu dispersif et à non-linéarité non locale avec une réponse exponentielle. Pour ce faire nous commençons par établir l'équation régissant cette dynamique et nous constatons quelle est régie par l'équation non linéaire de Schrödinger. Cette équation admet des solutions exactes sous certaines conditions, au moyen de l'approche variationnelle, nous proposons les solutions approchées de cette équation puis numériquement, nous comparons la propagation et la stabilité des solutions exactes et des solutions approchées.



---

---

## ABTRACT

---

We study the dynamic of spatial soliton in dispersive and nlocal medium with exponential response nonlinearity. We first establish the equation that govern the evolution of the envelop and we found that this equation is a nonlinear Schrödinger type. Exact stationnary solutions are available under special condition, we present approximate analytic solutions by the mean of variational approach and we numerically compare the evolution and stability of these two type of solutions.

---

---

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

Depuis l'avènement du laser (light amplification by stimulated emission of radiatons) en 1960 comme une source de radiation cohérente extrêmement intense, caractérisée par un très haut degré de monochromaticité et une grande directionnalité, de nombreux effets physiques nouveaux, dépendant de l'intensité de la lumière, ont été mis en évidence dans le domaine de l'optique non linéaire[1].

L'optique non linéaire concerne les processus apparaissant lorsqu'un milieu matériel est soumis à un faisceau lumineux suffisamment intense pour modifier la réponse du milieu au champ électromagnétique. La plupart des phénomènes dans la nature sont non linéaires. La modélisation de ces derniers nous conduit à des équations non linéaires, par exemple la modélisation d'une onde en eau peu profonde a donné naissance à l'équation de KDV[2], la modélisation des condensats de Bose-Einstein a donné naissance à l'équation de Gross Pitaevskii[23], pour ne citer que celles-ci.

Le défi scientifique se trouve alors au niveau de la résolution des équations non linéaires en général et la recherche des solutions de type solitons en particulier et dont les applications aboutissent parfois à des avancées notables. On a par exemple, la propagation du soliton dans la fibre optique qui nous permet de transporter des informations sur de longues distances sans pertes considérables et

de communiquer à très hauts débits. Plusieurs types de solitons ont été étudiés à cet effet, on peut citer le soliton spatial, le soliton temporel et le soliton spatio-temporel. Dans le cadre de notre travail nous nous intéressons particulièrement au soliton spatial.

Les équations non linéaires n'admettant des solutions exactes que dans des conditions spéciales, dans ce mémoire nous étudions les solutions solitons approchées dans un milieu à non-linéarité non locale.

Pour mener à bien ce travail, ce document sera présenté comme suit :

Le premier chapitre sera consacré à des généralités sur la propagation des solitons dans les milieux à non-linéarités non locales.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les solutions exactes (obtenues sous certaines conditions) d'un modèle de propagation du soliton dans un milieu à non-linéarité non locale, puis nous faisons une présentation et une description de l'approche variationnelle qui nous conduira par la suite à une étude des solutions approchées du même modèle.

Le chapitre trois sera consacré à l'analyse des résultats obtenus du modèle de la propagation du soliton dans un milieu à non-linéarité non locale étudié et aux simulations numériques.

Nous terminerons ce travail par une conclusion générale résumant les principaux résultats tout en présentant quelques perspectives.

GÉNÉRALITÉS SUR LA PROPAGATION DES SOLITONS  
DANS LES MILIEUX NON LINÉAIRES

---

Dans ce chapitre nous donnons une définition du soliton tout en faisant un bref historique, ensuite nous présentons quelques généralités sur la propagation dans les milieux non linéaires.

## 1.1 Définition

Au sens strict du terme, le soliton est une onde solitaire, solution exacte d'une équation non-linéaire, qui se propage sans déformation et sans changement de vitesse au cours de collisions avec d'autres ondes solitaires [3].

Le physicien dans la modélisation des problèmes est rarement confronté aux problèmes exacts relevant du terme strict soliton mais plutôt à des problèmes où les perturbations (défauts, impuretés) modifient légèrement les propriétés du soliton. Il utilise alors le terme quasi-soliton pour parler de soliton et le définit alors comme étant une onde solitaire ou paquet d'énergie se propageant sans déformation ni modification de vitesse trop importante.

## 1.2 Découverte de l'onde solitaire

Historiquement, la première observation d'une onde solitaire fut faite en Août 1834 par un ingénieur écossais du nom de John Scott Russell. Alors qu'il observait le mouvement d'une péniche sur l'Union canal qui relie Edinburg à Glasgow, Scott Russell remarqua un nouveau type d'onde se propageant à la surface du canal puis il en fit une délicieuse description [3] qu'il proposa à la communauté scientifique. Cette observation n'était pas le fruit du hasard, mais constituait une partie d'une série d'expériences sur les profils des péniches que Scott Russell réalisait pour l'Union canal society of Edimburg. A partir d'une série de mesures réalisées en 1834 et 1835 dans des bassins, il en déduit pour les ondes hydrodynamiques solitaires, les propriétés suivantes :

1- Ces ondes sont des structures dynamiques localisées et indépendantes qui se propagent sans modification de forme ni de vitesse.

2- Une onde se propage sur l'eau de profondeur  $d$  avec une vitesse  $v$  qui croît avec la hauteur  $h$  tel qu'on ait  $v = \sqrt{g(d+h)}$  où  $g$  est l'accélération due à la gravitation.

3- Une masse initiale d'eau produit suivant son importance une, deux ou plusieurs ondes solitaires.

4- Les ondes solitaires de types dépressions ne sont pas observées.

5- Les ondes solitaires peuvent se croiser sans changement d'aucune sorte.

A l'époque de leurs publications les résultats de Scott Russell furent la cause d'une certaine controverse en ce sens qu'ils contredisaient apparemment la théorie d'Airy sur les ondes non-linéaires en eau peu profonde, Airy qui était l'une des grandes figures de la mécanique des fluides à cette époque prévoyait qu'une

onde d'amplitude finie ne peut se propager sans changer de forme mais doit se creuser et éventuellement se briser. Cette contradiction fut partiellement levée par Boussinesq (1871-1872) et indépendamment par Rayleigh (1876) qui ont apporté une contribution importante au sujet des ondes solitaires. En effet ils ont montré que les effets combinés de l'accélération verticale du fluide et de la non-linéarité conduit à une onde de forme permanente. On note aussi les discussions de Stokes relatives à l'onde solitaire. Il faut noter que toutes ces discussions scientifiques étaient concentrées sur l'exactitude des résultats de Scott Russel plutôt que leur signification physique.

Pendant longtemps, les résultats des observations de Scott Russel restaient donc d'une curiosité pour la communauté scientifique. Il fallut attendre 1895 (soit soixante un an après la découverte de l'onde solitaire) pour que les études menées par Korteweg et de Vries en Hollande leur permirent d'établir l'équation de propagation des ondes hydrodynamiques (vagues) à la surface d'un canal peu profond. L'équation qui est ensuite devenue célèbre et plus connue sous le nom d'équation de KdV, ces derniers obtinrent des solutions ondes solitaires et des trains d'ondes progressives se propageant dans une direction. Ils constatèrent pour les ondes solitaires [4] que l'amplitude augmente avec la vitesse alors que la largeur diminue avec la vitesse : C'est l'onde solitaire observée par Scott Russel.

### 1.3 Généralités sur la propagation dans les milieux non-linéaires

Le soliton spatial résulte de la compensation entre deux phénomènes à savoir la dispersion ou diffraction et la non-linéarité.

### 1.3.1 La diffraction

Une observation attentive de la propagation d'un faisceau lumineux optique nous permet de constater que lorsqu'il est collimaté ( orienté ou dirigé ), il s'élargit plus ou moins au fur et à mesure qu'il se propage. Prenons par exemple un pointeur laser utilisé quotidiennement de nos jours, la tache lumineuse à l'endroit pointé est plus grande que la taille du faisceau à la sortie même du pointeur. C'est une des illustrations d'un phénomène physique appelé diffraction et qui affecte la propagation de toute onde électromagnétique. Dans l'exemple du laser, elle élargit le profil spatial du faisceau qui se propage. La diffraction est un phénomène dispersif, qui concerne tout faisceau de taille finie dont l'indice de réfraction est constant  $n = n_0$ . La figure ci-dessous illustre le phénomène de diffraction naturelle.

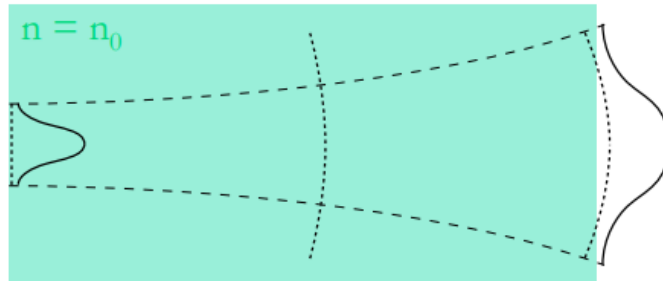


FIGURE 1.1 – Illustration du phénomène de diffraction

La figure 1.1 nous montre la diffraction naturelle du faisceau. Le front d'onde c'est-à-dire les points dont la phase est la même s'ouvre progressivement et le faisceau s'étale de plus en plus au cours de la propagation et finira par s'aplatir.

### 1.3.2 La non-linéarité

La théorie électromagnétique de Maxwell présente la lumière comme une onde électromagnétique ( composée de champ électrique et du champ magnétique ), par conséquent, elle peut se propager dans les milieux matériels [5]. Au cours de sa propagation, la lumière interagit avec le milieu matériel et cette interaction peut se manifester à travers les grandeurs physiques liées les unes aux autres à savoir : la vitesse de la lumière dans le milieu considéré, la permittivité électrique dudit milieu, son indice de réfraction ou sa constante diélectrique. Dans la dualité (onde-corpuscule), la lumière agit sur son milieu de propagation à travers un ensemble de phénomènes à l'échelle microscopique faits d'échanges d'énergie ; le milieu quant-à lui, par le principe des actions réciproques réagit à l'action de la lumière sous forme d'une fonction de l'intensité incidente relativement faible. Cela peut se traduire par une relation linéaire entre l'indice de réfraction du milieu et l'intensité de l'onde lumineuse. Toutefois, la réponse du diélectrique devient non-linéaire lorsque l'onde incidente est suffisamment intense [6]. Cela peut être compris au niveau fondamental, par un mouvement anharmonique des électrons de valence du matériau constituant le milieu de propagation sous l'influence du champ électromagnétique appliqué [13]. Comme résultat, la polarisation induite par les dipôles électriques est non linéaire suivant le champ :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \left( \chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots \right) \quad (1.1)$$

où,  $\chi^{(1)}$  est la susceptibilité électrique du premier ordre valable dans le domaine linéaire, il est responsable de la réfraction des ondes ;  $\chi^{(2)}$  est la susceptibilité d'ordre 2 valable pour les matériaux anisotrope et s'annule dans les milieux centrosymétriques, enfin  $\chi^{(3)}$  est le coefficient de susceptibilité diélectrique d'ordre 3, qui



est le plus responsable des effets non linéaires.

### • Réponse linéaire

La réponse linéaire d'un milieu matériel face à la lumière, implique une combinaison linéaire du vecteur polarisation  $\vec{P}$  et du champ électrique  $\vec{E}$ . Cette combinaison se traduit par :

$$\vec{P}(r, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(t, t') \vec{E}(r, t') dt' \quad (1.2)$$

où  $R$  est reconnue par convention comme la fonction réponse du milieu. Partant des hypothèses de linéarité, de localité, d'homogénéité, d'invariance transversale sans oublier le principe de causalité [7], nous écrivons :

$$P_i(r, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\tau) E_j(t - \tau) d\tau, \quad (1.3)$$

On remarque la présence du produit de convolution, qui nous fait passer dans le domaine spectral, par l'introduction de la grandeur  $\chi_{ij}(\omega)$ , qui représente la transformée de Fourier de  $R_{ij}$ .

$$R_{ij}(\tau) = \int \chi_{ij}(\omega) \exp(-i\omega\tau) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.4)$$

La polarisation se transforme de la manière suivante :

$$P_i(r, \omega) = \varepsilon_0 \chi_{ij}(\omega) E_j(r, \omega) \quad (1.5)$$

où  $\chi_{ij}$  est appelée susceptibilité linéaire du matériau (tenseur symétrique). Lorsque l'on introduit l'équation (1.5) dans l'équation (2.5), tout en considérant l'isotropie du milieu, on obtient l'indice de réfraction  $n$  et le coefficient d'absorption  $\alpha$

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} R_e \chi(\omega), \alpha(\omega) = \frac{\omega}{c} \text{Im} \chi(\omega) \quad (1.6)$$

qui représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la susceptibilité. La présence de  $\chi^{(1)}$  dans l'expression de la polarisation est la matérialisation de la réponse linéaire, qui relève du domaine de l'optique géométrique.

### • Réponse non linéaire

Les effets non linéaires dans les matériaux centro-symétriques proviennent de la susceptibilité d'ordre trois  $\chi^{(3)}$  lorsque la non-linéarité n'est pas élevée aux ordres supérieurs. Elle est responsable des phénomènes tels que : la réfraction non linéaire, la génération des harmoniques du troisième ordre etc...[8]. En nous référant au domaine des fibres optiques par exemple, la majorité des effets non linéaires est issue de la réfraction non-linéaire. L'indice de réfraction s'exprime comme suit :

$$\tilde{n}(\omega, |E|^2) = n(\omega) + n_2|E|^2 \quad (1.7)$$

où  $n(\omega)$  représente la partie linéaire et  $n_2$  est le coefficient de non-linéarité donné par :

$$n_2 = \frac{3}{8n} \text{Re}(\chi_{xxxx}^{(3)}) \quad (1.8)$$

Parmi les effets non linéaires, nous avons le phénomène d'auto-focalisation, encore appelé effet Kerr qui est observé lorsque le champ devient plus intense, agit sur le milieu ( matériau ) et son indice de réfraction est ainsi modifié. Ce phénomène est illustré par la figure suivante

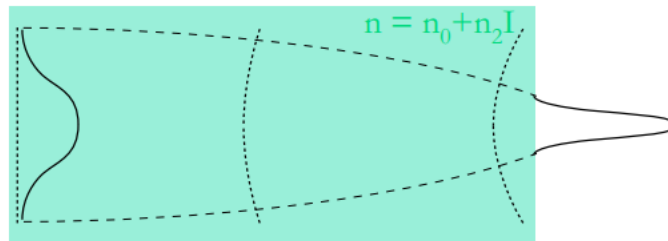


FIGURE 1.2 – Illustration de la non-linéarité

La figure 1.2 nous montre un faisceau en forme de cloche qui se propage dans un milieu de type Kerr, l'augmentation d'indice de réfraction induit un retard de phase plus important en son centre et le front d'onde se retrouve donc courbé dans l'autre sens et se renferme. Par conséquent le faisceau se rétrécit au cours de la propagation.

### Non-linéarité non-locale

De manière générale, la réponse non linéaire du milieu ne dépend pas uniquement du point considéré mais aussi des régions environnantes. De cette façon, le champ électrique en un certain point peut affecter le comportement d'autres champs électriques tout autour en induisant une réponse plus large dans l'espace. La variation de l'indice se présente sous la forme :

$$\Delta n(I) = S \int_{-\infty}^{+\infty} R(x' - x) I(x', z) dx' \quad (1.9)$$

où  $x$  est la coordonnée transversale et  $S = 1$  ou  $S = -1$  correspondent respectivement à la focalisation et la défocalisation du faisceau et  $x'$  est le point voisin [9].

### Cas faiblement non-locale

C'est le cas d'un milieu dont la réponse est étroite mais d'une largeur finie, il est illustré par la figure 1.3. Pour une faible non-localité définie par la largeur  $R(x)$  finie tout en étant petite devant celle de  $I(x, z)$ . On peut augmenter  $I(x, z)$  autour de  $x = x'$  dans l'équation (1.9) et obtenir le modèle simplifié avec :

$$\Delta n = S(I + \gamma \partial_x^2 I), \quad \gamma = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 R(x) dx \quad (1.10)$$

où  $\gamma$  est le paramètre de non-localité, positif de valeur petite. Le modèle de

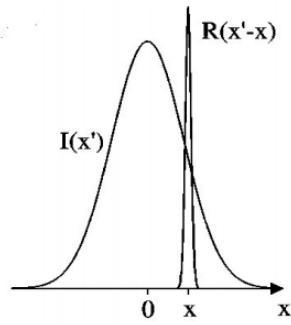


FIGURE 1.3 – Non-linéarité faiblement non-locale

la non-linéarité non-locale décrit la physique du plasma où  $\gamma$  peut prendre n'importe quel signe. Il est également appliqué aux condensats de Bose-Einstein, aux systèmes d'optique non linéaires etc...[9]. En optique, il est possible de montrer que pour autant que la fonction réponse soit symétrique et que sa transformée de Fourier soit définie positive, il est impossible d'observer l'auto-focalisation catastrophique dans un modèle bi-dimensionnel, car la non-localité, aussi petite soit-elle, stabilise la propagation du fait que la norme du champ est bornée

### Cas fortement non-locale

Dans ce cas,  $R(x)$  est beaucoup plus large que le profil de l'intensité comme présenté par la figure 1.4. On peut augmenter la fonction réponse autour de  $x = x'$  dans l'équation (1.9) et obtenir :

$$\Delta n = S(C_0 + C_1 x + C_2 x^2) \quad (1.11)$$

$C_{0-2}$  sont des constantes du système. La forte non-localité existe dans le cas où la non-linéarité provient d'un mécanisme dont la nature impose une diffusion spatiale comme par exemple une élévation de la température [10]. L'élévation de la température créée dans un milieu par un faisceau mince ne se cantonnera pas à la seule zone irradiée par le faisceau mais s'étendra sur une zone plus large en raison de la diffusion de la chaleur. Dans cette situation, la réponse non linéaire

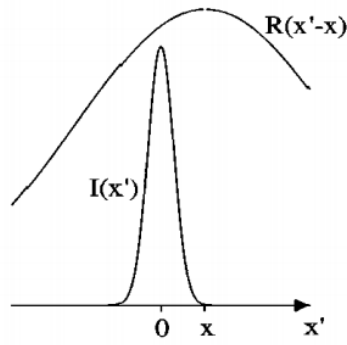


FIGURE 1.4 – Non-linéarité fortement non-locale

du milieu n'est plus simplement proportionnelle au champ optique mais plutôt le résultat du produit de convolution entre la réponse du milieu et l'intensité du faisceau. De cette manière, l'indice de réfraction en un point  $x$  dépend non seulement de l'intensité lumineuse en ce point mais aussi de celles tout autour, par l'intermédiaire de la fonction réponse  $R$ .

Des différents mécanismes engendrent différents types de réponses non-linéaires qui sont représentées par des fonctions mathématiques. Entre autres, on peut citer :

La fonction réponse Gaussienne :

$$R(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{x^2}{\sigma^2} \right];$$

La fonction réponse Exponentielle :

$$R(x) = \frac{1}{2\sigma} \exp \left[ -\frac{|x|}{\sigma} \right];$$

La fonction réponse Rectangulaire :

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma} \text{ pour } |x| \leq \sigma \\ 0 \text{ pour } |x| > \sigma \end{cases}$$

### 1.3.3 Le soliton spatial

En choisissant bien la largeur du faisceau ainsi que l'intensité, il est possible d'obtenir un équilibre entre la diffraction naturelle et cette auto-focalisation non linéaire. Le front de la phase forme alors des plans perpendiculaires à la direction de propagation et le faisceau se propage sans que son profil ne se déforme. C'est le soliton spatial. la propagation de ce type d'onde est schématisée sur la figure ci-dessous.

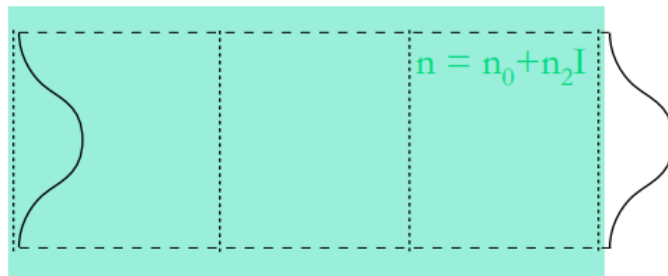


FIGURE 1.5 – Propagation du soliton spatial

La notion de soliton spatial peut également se comprendre en terme d'onde auto-guidée . Le faisceau induit un guide optique au sein du milieu par l'intermédiaire de la non-linéarité optique. Un soliton spatial peut alors être considéré comme un mode propre de ce guide, lequel compense alors exactement l'élargissement dû à la diffraction naturelle de ce faisceau.

**SOLUTION SOLITON DANS UN MILIEU À NON  
LINÉARITÉ NON-LOCALE**

---

Dans ce chapitre, nous établissons tout d'abord l'équation de Schrödinger non linéaire dans le cadre de la propagation dans un milieu à non-linéarité non locale régissant l'évolution de l'enveloppe de l'impulsion, puis nous présentons les solutions exactes obtenues sous certaines conditions enfin par application de l'approche variationnelle nous proposons des solutions approchées.

## **2.1 Équation de schrödinger non-linéaire**

### **2.1.1 Dérivation de l'équation de schrödinger non-linéaire**

La propagation d'une impulsion dans un milieu diélectrique présentant une non-linéarité de type Kerr s'accompagne de nombreux phénomènes qui sont difficiles à appréhender directement par l'analyse de la polarisation non-linéaire ( par exemple l'effet soliton ), mais qui peuvent être compris si l'on considère l'équation de schrödinger non-linéaire[12, 13]. L'équation de Schroödinger non linéaire, cette équation a été établie pour la première fois par Hasegawa et Tappert[11], à partir des équations de Maxwell de l'électromagnétisme pour un milieu sans charge, ni

courant et non magnétique ( $\rho_l = 0$ ,  $\vec{j} = 0$  et  $\vec{M} = 0$ ) qui suivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Où  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$ , et  $c$  représentent respectivement le vecteur champ électrique, l'induction magnétique, la polarisation électrique, la permittivité électrique du vide, la perméabilité magnétique du vide et la célérité de la lumière dans le vide. Dans le vide la relation  $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$  est vérifiée.

En prenant le rotationnel de l'équation (2.2), que nous combinons avec l'équation (2.4), on obtient :

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

On admet que le champ électrique constituant l'onde lumineuse est de coupe transversale, harmonique dans le temps et longitudinalement polarisée [11].

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = [E(r, t) \exp(i\omega t) + cc] \hat{x}, \quad (2.6)$$

où  $\hat{x}$  est un vecteur unitaire orienté suivant la polarisation du champ électrique. Dans le milieu non-linéaire, on développe en serie le vecteur polarisation. Pour introduire l'ordre cubique de la non-linéarité, on s'arrête à l'ordre 3 :

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(2)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t) + \dots \quad (2.7)$$



les différents termes de cette dernière équation sont donnés comme suit :

$$\vec{P}^{(1)}(r, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\chi}^{(1)}(r - r', t - t') : \vec{E}(r', t') d^3 r' dt' \quad (2.8)$$

$$\vec{P}^{(2)}(r, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\chi}^{(2)}(r - r', t - t', r - r'', t - t'') : \vec{E}(r', t') \vec{E}(r'', t'') d^3 r' d^3 r'' dt' dt'' \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \vec{P}^{(3)}(r, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\chi}^{(3)}(r - r', t - t', r - r'', t - t'', r - r''', t - t''') : \\ \vec{E}(r', t') \vec{E}(r'', t'') \vec{E}(r''', t''') d^3 r' d^3 r'' d^3 r''' dt' dt'' dt''' \end{aligned} \quad (2.10)$$

$\bar{\chi}^{(2)}$  est le tenseur de susceptibilité d'ordre 2. Les équations (2.9) et (2.10) peuvent se simplifier en raison de la non-linéarité de type Kerr (la réponse est locale et instantanée). Les relations précédentes s'écrivent :

$$\vec{P}^{(1)}(r, t) = \bar{\chi}^{(1)} \cdot \vec{E}(r, t) \quad (2.11)$$

$$\vec{P}^{(2)}(r, t) = \bar{\chi}^{(2)} : \vec{E}(r, t) \vec{E}(r, t) \quad (2.12)$$

$$\vec{P}^{(3)}(r, t) = \bar{\chi}^{(3)} : \vec{E}(r, t) \vec{E}(r, t) \vec{E}(r, t) \quad (2.13)$$

Notons que les milieux centro-symétriques de type Kerr présentant une symétrie centrale, le terme  $\bar{\chi}^{(2)}$  s'annule ainsi que tous les termes d'ordre paire de la susceptibilité. il vient :

$$\vec{P}(r, t) = \vec{P}^{(1)}(r, t) + \vec{P}^{(3)}(r, t) \quad (2.14)$$

Ou encore

$$\vec{P}(r, t) = \varepsilon_0 \left[ \bar{\chi}^{(1)} + \frac{3}{4} \bar{\chi}^{(3)} |E(r, t)|^2 \right] \vec{E}(r, t) \quad (2.15)$$

Le champ de déplacement  $\vec{D}$  s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}(r, t) \quad (2.16)$$

Or  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}(r, t) + \vec{P}(r, t)$ ; en remplaçant  $\vec{P}(r, t)$  par son expression donnée en (2.15), on obtient

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \left[ 1 + \bar{\chi}^{(1)} + \frac{3}{4} \bar{\chi}^{(3)} |E(r, t)|^2 \right] \vec{E}(r, t) \quad (2.17)$$

De plus, en posant  $\vec{D} = n^2 \vec{E}(r, t) = \varepsilon_r \vec{E}(r, t)$ ; où  $\varepsilon_r$  est la permittivité relative,  $n$  l'indice de réfraction. Des relations précédentes, il en découle que :

$$n = \sqrt{1 + \bar{\chi}^{(1)} + \frac{3}{4} \bar{\chi}^{(3)} |E(r, t)|^2} \quad (2.18)$$

La partie non-linéaire de la polarisation étant très petite devant partie linéaire, nous la traitons comme une perturbation, et l'indice de réfraction  $n$  peut se réécrire :

$$n = \left( 1 + \bar{\chi}^{(1)} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8(1 + \bar{\chi}^{(1)})} \bar{\chi}^{(3)} |E(r, t)|^2 \quad (2.19)$$

ou encore

$$n = n_0 + n_2 |E(r, t)|^2,$$

avec

$$n_0 = \sqrt{1 + \bar{\chi}^{(1)}}, n_2 = \frac{3}{8n_0} \bar{\chi}^{(3)}$$

Lorsque nous considérons l'équation de propagation du champ électrique (2.5), tout en supposant que le champ peut être décrit par les ondes planes se propageant suivant l'axe  $z$  :

$$E(r, t) = q(x, y, z) \exp(ikz) \quad (2.20)$$

Cette mise en forme permet de prendre en compte l'approximation paraxiale donnée par la relation

$$\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \ll k \frac{\partial q}{\partial z} \quad (2.21)$$

L'équation de propagation se réduit alors à :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial q}{\partial z} - k^2 q + \frac{\omega^2}{c^2} q + \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\chi}^{(1)} q + \frac{3\omega^2}{4c^2} \bar{\chi}^{(3)} |q|^2 q = 0 \quad (2.22)$$

En utilisant la relation de dispersion linéaire du nombre d'onde donnée par :  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} [1 + \bar{\chi}^{(1)}]$ , on obtient finalement :

$$2ik \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + 2k_0^2 n_0 n_2 |q|^2 q = 0 \quad (2.23)$$

Cette équation est appelée équation de schrödinger non-linéaire (ESNL) en (2+1) dimension, où le premier terme désigne l'évolution de l'enveloppe suivant la direction z, les deux termes suivants sont responsables de l'élargissement et nous rendent compte de la diffraction naturelle du faisceau. le dernier terme rend compte de la modulation de la phrase en raison de la non-linéarité du milieu[15].

### 2.1.2 Équation de Schrödinger non linéaire du modèle

En général, l'équation(2.23) de Schrödinger pour un milieu à non-linéarité non locale s'écrit :

$$i \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2} \nabla^2 q + nq = 0 \quad (2.24)$$

où  $q = q(\vec{r}, z)$ , avec  $\vec{r}$ ,  $z$  et  $n$  qui représentent respectivement les coordonnées transversales, l'axe de propagation et l'indice de réfraction du milieu considéré.

L'indice de refraction est donné de façon phénoménologique[16] par :

$$n(\vec{r}, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\vec{r}' - \vec{r}) I(\vec{r}', z) d\vec{r}' \quad (2.25)$$

avec

$$I(\vec{r}, z) = |q(\vec{r}, z)|^2$$

l'intensité de l'onde et  $R(\vec{r}')$  la fonction réponse non locale.

Le laplacien dans l'équation (2.24) définit la dimension transversale du problème.

En ce qui concerne notre étude, nous travaillons en (1+1) dimensions (c'est-à-dire une dimension transversale et une dimension pour la direction de propagation).

Les relations (2.24) et (2.25) deviennent alors

$$i \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + nq = 0 \quad (2.26)$$

$$n(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x' - x) I(x', z) dx' \quad (2.27)$$

En prenant la fonction réponse exponentielle donnée par

$$R(x) = \frac{1}{2\sqrt{d}} \exp\left(-\frac{|x|}{\sqrt{d}}\right) \quad (2.28)$$

où  $d$  est la largeur de la réponse qui caractérise le degré de non localité.

Dans certaines conditions, l'indice de réfraction  $n$  s'écrit [17] :

$$n = |q(x, z)|^2 + d \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (2.29)$$

En général, les équations (2.26) et (2.29) sont utilisées pour la description de la propagation dans un milieu à non-linéarité non locale. les équations (2.26) et (2.29) ont des solutions analytiques explicites suivantes [14] :

$$q(x, z) = \frac{3}{2\sqrt{2d}} \sec h^2\left(\frac{x}{2\sqrt{d}}\right) \exp\left(i \frac{1}{2d} z\right) \quad (2.30)$$

$$n(x) = \frac{3}{4d} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2\sqrt{d}}\right) \quad (2.31)$$

Notons que la solution (2.30) est la solution stationnaire obtenue lorsque la constante de propagation  $b = \frac{1}{2d}$ . En général, la solution stationnaire analytique n'est pas obtenue lorsque la constante de propagation  $b$  est indépendante de la réponse (paramètre de non-localité)  $d$ . La solution stationnaire (2.30) est sous la forme

$$q(x, z) = w(x) \exp(ibz), \quad (2.32)$$

où  $w(x)$  est une fonction réelle et  $b$  la constante de propagation réelle. En insérant la relation (2.32) dans les relations (2.26) et (2.29), nous obtenons :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + 2(n - b)w = 0 \quad (2.33)$$

$$n - d \frac{d^2 n}{dx^2} - w^2 = 0 \quad (2.34)$$

Ces deux dernières équations forment un système d'équations différentielles non linéaires couplées en  $w$  et  $n$ . En général, ces équations ne se résolvent pas analytiquement, mais par des méthodes numériques à l'instar de la standard relaxation method [19]. Les équations (2.33) et (2.34) ont des solutions analytiques exactes données par :

$$w(x) = \frac{3}{2\sqrt{2d}} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2\sqrt{d}}\right) \quad (2.35)$$

$$n(x) = \frac{3}{4d} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{2\sqrt{d}}\right) \quad (2.36)$$

Partant du fait que ces résultats et la solution exacte du soliton fondamental donnée en (2.30), sont tous obtenus sous des conditions spéciales, il serait important que nous cherchions les expressions des solutions analytiques approchées, ceci à l'aide de l'approche variationnelle.

## 2.2 Approche variationnelle et application dans le modèle

La résolution du système d'équations différentielles non linéaires couplées en  $w$  et  $n$  donné par (2.33) et (2.34) peut se faire par des méthodes semi-analytiques. Ici nous utiliserons l'approche variationnelle, que nous allons présenter ensuite appliquer à notre modèle afin d'obtenir des solutions analytiques approchées correspondantes.

### 2.2.1 Présentation et description de l'approche variationnelle

L'approche variationnelle est une méthode bien connue de la mécanique classique, utilisée dans divers contextes tout comme en optique non linéaire précisément dans la propagation d'une impulsion dans les fibres optiques [20]. Notons que l'hypothèse physique de base sur laquelle repose cette approche est qu'on admet que l'onde/l'impulsion en propagation conserve sa forme ou son profil initial tandis que seuls changent continuellement suivant la distance de propagation, ses caractéristiques telles que l'amplitude, la largeur, le chirp et la phase.

### 2.2.2 Application de l'approche variationnelle à notre modèle

Pour la résolution du système d'équations différentielles non linéaires formé par (2.33) et (2.34) par l'approche variationnelle, on montre que la densité lagrangienne correspondant à ce système s'écrit :

$$l(w, n, w_x, n_x) = \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{d}{2} \left( \frac{dn}{dx} \right)^2 - w^2 n + b w^2 + \frac{n^2}{2} \quad (2.37)$$

Nous retrouvons facilement notre système d'équations différentielles non-linéaires en remplaçant (2.37) dans les équations de Euler-lagrange suivantes :

$$\frac{\partial l}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial l}{\partial w_x} \right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial l}{\partial n} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial l}{\partial n_x} \right) = 0$$

nous choisissons les fonctions d'essais gaussiennes suivantes :

$$w = w_0 \exp \left( -\frac{x^2}{2\rho^2} \right) \quad (2.38)$$

$$n = n_0 \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) , \quad (2.39)$$

où les paramètres  $w_0$  et  $n_0$  représentent les amplitudes de  $w$  et  $n$ , et les paramètres  $\rho$  et  $\sigma$  représentent les largeurs spatiales de  $w$  et  $n$ . Notre choix est motivé par le fait que les gaussiennes produisent les bonnes approximations[20,21] et sont faciles à manipuler (intégration et dérivation).

Calculons les différentes dérivées intervenant dans l'expression de la densité lagrangienne

$$\left( \frac{dw}{dx} \right)^2 = \frac{w_0^2 x^2}{\rho^4} \exp \left( -\frac{x^2}{\rho^2} \right) \quad (2.40)$$

$$\left( \frac{dn}{dx} \right)^2 = \frac{n_0^2 x^2}{\sigma^4} \exp \left( -\frac{x^2}{\sigma^2} \right) \quad (2.41)$$

En introduisant (2.40),(2.41) et les autres termes dans (2.37), il vient :

$$l = \left( \frac{1}{2\rho^4} x^2 + b \right) w_0^2 e^{-\frac{x^2}{\rho^2}} + \left( \frac{d}{2\sigma^4} x^2 + \frac{1}{2} \right) n_0^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} - n_0 w_0^2 e^{-\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (2.42)$$

Le lagrangien associé s'obtient en intégrant sur tout le domaine comme suit :

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{+\infty} l(w, n, w_x, n_x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{1}{2\rho^4} x^2 + b \right) w_0^2 e^{-\frac{x^2}{\rho^2}} + \left( \frac{d}{2\sigma^4} x^2 + \frac{1}{2} \right) n_0^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} - n_0 w_0^2 e^{-\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2}} \right] dx \end{aligned}$$

Pour un souci de calcul, nous posons

$$L = P + Q - T \quad (2.43)$$

Où

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\rho^4} x^2 + b \right) w_0^2 e^{-\frac{x^2}{\rho^2}} dx$$

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d}{2\sigma^4} x^2 + \frac{1}{2} \right) n_0^2 e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} dx$$

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} n_0 w_0^2 e^{-\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

Le calcul des intégrales P,Q et T nous donne respectivement :

$$P = \left( \frac{1 + 4b\rho^2}{4\rho} \right) w_0^2 \sqrt{\pi} \quad (2.44)$$

$$Q = \left( \frac{d + 2\sigma^2}{4\sigma} \right) n_0^2 \sqrt{\pi} \quad (2.45)$$

$$T = \frac{n_0 w_0^2 \sigma \rho}{\sqrt{\sigma^2 + \rho^2/2}} \sqrt{\pi} \quad (2.46)$$

En insérant les résultats (2.44) à (2.46) dans (2.43) on obtient finalement le lagrangien :

$$L = \sqrt{\pi} \left[ \left( \frac{1 + 4b\rho^2}{4\rho} \right) w_0^2 + \left( \frac{d + 2\sigma^2}{4\sigma} \right) n_0^2 - \frac{\sigma \rho n_0 w_0^2}{\sqrt{\sigma^2 + \rho^2/2}} \right] \quad (2.47)$$

Nous écrivons maintenant les équations de Euler-lagrange pour les différents paramètres de l'impulsion

$$\frac{\partial L}{\partial U} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial U_x} \right) = 0$$

où  $U = \{w_0, n_0, \rho, \sigma\}$

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial w_{0x}} \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_0} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial n_{0x}} \right) = 0$$



$$\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \rho_x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \sigma_x} \right) = 0$$

Comme  $L$  ne dépend pas de  $w_{0x}$ ,  $n_{0x}$ ,  $\rho_x$  et de  $\sigma_x$ ; on obtient les résultats suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial w_0} = 0 ; \quad \frac{\partial L}{\partial n_0} = 0 ; \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0$$

Chacun de ces résultats nous permet d'obtenir respectivement les équations qui suivent :

$$-1 - 4\rho^2 b + 4\rho n_0 \mu = 0, \quad (2.48)$$

$$-n_0 d - 2\sigma^2 n_0 + 2\sigma w_0^2 \mu = 0, \quad (2.49)$$

$$1 - 4\rho^2 b + 8\rho \frac{\sigma^2 n_0 \mu}{(2\sigma^2 + \rho^2)} = 0, \quad (2.50)$$

$$n_0 d - 2\sigma^2 n_0 + 4\sigma \frac{\rho^2 w_0^2 \mu}{(2\sigma^2 + \rho^2)} = 0, \quad (2.51)$$

avec

$$\mu = \frac{\sigma \rho}{\sqrt{\sigma^2 + \rho^2/2}} \quad (2.52)$$

les équations (2.48) à (2.51) forment un système de quatre équations à quatre inconnues constituées par les paramètres de l'impulsion ( $\rho$ ,  $\sigma$ ,  $n_0$  et  $w_0$ ), et dont la résolution nous permettra de déterminer ces derniers, qui nous aideront à déterminer complètement les fonctions d'essai prises en compte.

### 2.2.3 Déterminations des paramètres des Solutions approchées

En utilisant l'approche variationnelle nous avons pu construire les équations non-linéaires que vérifient les paramètres caractéristiques de l'impulsion. Les solutions exactes données par (2.35) et (2.36) sont obtenues avec la condition spéciale

liant le paramètre de non-localité  $d$  et la constante de propagation  $b$  à savoir  $b = \frac{1}{2d}$ , nous résolvons les équations (2.48)-(2.51) et présentons les solutions avec  $b$  et  $d$  vérifiant cette condition.

Nous déterminons les paramètres de l'impulsion des solutions approchées, pour cela nous considérons les équations (2.48)-(2.51). De (2.48) nous tirons

$$\mu = \frac{1 + 4\rho^2 b}{4\rho n_0} \quad (2.53)$$

En remplaçant dans (2.49) puis en multipliant par  $8\rho^3 n_0$ , on obtient

$$4\sigma\rho^2 w_0^2 + 16\sigma\rho^4 w_0^2 b = 8\rho^3 n_0^2 d + 16\rho^3 \sigma^2 n_0^2 \quad (2.54)$$

en faisant de même pour les équations (2.50) et (2.51), il vient respectivement :

$$-4\rho^4 b + 4\sigma^2 + \rho^2 = 0 \quad (2.55)$$

$$8\rho\sigma^2 n_0^2 d - 16\rho\sigma^4 n_0^2 + 4\rho^3 n_0^2 d - 8\rho^3 \sigma^2 n_0^2 + 4\sigma\rho^2 w_0^2 + 16\sigma\rho^4 w_0^2 b = 0 \quad (2.56)$$

De (2.55), nous tirons  $4\sigma^2$  que nous remplaçons simultanément avec (2.54) dans (2.56), nous obtenons finalement :

$$(8b^2)\rho^6 - (8b)\rho^4 + (1 - 4bd)\rho^2 - 5d = 0 \quad (2.57)$$

C'est une équation cubique en  $\rho^2$  dont les coefficients dépendent de  $d$  et  $b$ . Les solutions physiques sont celles pour lesquelles le paramètre  $\rho^2$  est réel et positif.

En outre, il est possible d'exprimer les autres paramètres ( $\sigma$ ,  $n_0$  et  $w_0$ ) en fonction de  $\rho$ ,  $b$  et  $d$ . En effet de (2.55), il vient

$$\sigma = \frac{\rho}{2} \sqrt{4\rho^2 b - 1} \quad (2.58)$$

Nous identifions la relation (2.52) à la relation (2.53), tout en tenant compte de

la relation (2.58), nous obtenons

$$n_0 = \frac{(1 + 4\rho^2 b) \sqrt{4\rho^2 b + 1}}{4\rho^2 \sqrt{4\rho^2 b - 1}} \quad (2.59)$$

En remplaçant respectivement (2.58) et (2.59) dans (2.54), il vient :

$$w_0 = \frac{1 + 4\rho^2 b}{2\rho^2} \sqrt{\frac{(2d + 4\rho^4 b - \rho^2)}{2(4\rho^2 b - 1) \sqrt{4\rho^2 b - 1}}} \quad (2.60)$$

Pour les équations (2.58) à (2.60) , nous devons avoir  $\rho^2 b > \frac{1}{4}$ . Les paramètres  $\sigma$ ,  $n_0$  et  $w_0$  dépendent de  $b$ ,  $d$  et de  $\rho$ . La connaissance du paramètre de non-localité  $d$  et de la constante de propagation  $b$  nous permet de résoudre l'équation (2.57), puis de trouver  $\rho^2$  à l'aide de la méthode de cardan.

En effet nous considérons l'équation (2.57), puis nous posons

$$A = 8b^2, B = -8b, C = 1 - 4bd \text{ et } D = -5d,$$

en faisant ensuite les changements de variables  $\rho^2 = X$  et  $X = Z - \frac{B}{3A}$ , nous obtenons l'équation

$$Z^3 + pZ + q = 0 \quad (2.61)$$

$$\text{où } p = -\frac{B^2}{3A^2} + \frac{C}{A} \text{ et } q = \frac{B}{27A} \left( \frac{2B^2}{A^2} - \frac{9C}{A} \right) + \frac{D}{A}.$$

Le calcul du discriminant défini par  $\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3$  nous permet de calculer les valeurs  $U^3$  et  $V^3$  données par :

$$U^3 = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}$$

et

$$V^3 = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Le discriminant étant positif, on a une solution réelle et deux solution complexes. Nous nous intéressons à la solution réelle que nous notons  $Z_0$  tel que

$$Z_0 = U + V,$$

puis nous revenons aux changements des variables pour déterminer  $X$  et enfin  $\rho$ .

$\rho$  étant une largeur spatiale, elle est forcément positive. Les équations (2.58), (2.59) et (2.60) nous permettent de trouver les autres paramètres. Ainsi on a pu déterminer tous les paramètres des solutions approchées.

Tout au long de ce chapitre, nous avons présenté tout d'abord l'équation de Schrödinger non linéaire dans le cadre de la propagation dans un milieu à non-linéarité non locale, dont nous avons présenté les solutions exactes obtenues avec des conditions spéciales et les solutions approchées obtenues par l'approche variationnelle. Dans le chapitre qui suit nous allons commencer par présenter ces solutions pour les valeurs fixées du paramètre de non-localité  $d$  et de la constante de propagation  $b$  et partant celles des paramètres de l'impulsion des solutions approchées, puis faire des simulations numériques qui nous permettrons enfin de faire des interprétations.

## SIMULATIONS NUMÉRIQUES ET INTERPRÉTATIONS

---

Dans ce chapitre, nous nous proposons de présenter les solutions exactes pour les valeurs fixées du paramètre de non-localité  $d$  et de la constante de propagation  $b$  et les solutions approchées correspondantes à ces valeurs de  $b$  et  $d$ ; ensuite de faire des simulations numériques de certains paramètres ( profils, amplitudes, profils des amplitude... ) des solutions exactes et approchées; enfin d'interpréter les courbes issues de ces simulations numériques.

### 3.1 Solutions exactes et solutions approchée !

La résolution de l'équation (2.57) pour des valeurs fixées du paramètre de non-localité  $d$  et de la constante de propagation  $b$  ( $b = \frac{1}{4}$ ;  $d = 2$ ) par la méthode de cardan, nous présente six solutions dont quatre complexes et deux réelles ( positive et négative ).  $\rho$  étant une largeur (grandeur positive), nous nous intéressons à la solution positive qui, après calcul nous donne  $\rho = 2.2681$ . En remplaçant dans (2.58) à (2.60), on obtient les autres paramètres de l'impulsion :  $\sigma = 2.3086$ ,  $n_0 = 0.36358$  et  $w_0 = 0.73154$ .

Pour la suite de notre travail, il est important que nous présentons des solutions approchées et les solutions exactes obtenues avec les valeurs paramètres précisés ci-dessus

### 3.1.1 Solutions exactes

Nous rappelons que les solutions exactes données en (2.35) et (2.36) sont obtenues avec la condition spéciale  $b = \frac{1}{2d}$ , pour des valeurs fixées de  $b$  et  $d$  ( $b = \frac{1}{4}$  ;  $d = 2$ ), elles s'écrivent :

$$w(x) = \frac{3}{2\sqrt{4}} \sec h^2\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) \quad (3.1)$$

et

$$n(x) = \frac{3}{8} \sec h^2\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Solutions approchées

Pour des valeurs fixées de  $b$  et  $d$  ( $b = \frac{1}{4}$  ;  $d = 2$ ), nous avons pu obtenir celles des paramètres de l'impulsion à savoir  $\rho = 2.2681$ ,  $\sigma = 2.3086$ ,  $n_0 = 0.36358$  et  $w_0 = 0.73154$ . Les solutions exactes données en (2.38) et (2.39) sont obtenues avec les paramètres ci-dessus.

## 3.2 Résolution numérique

On se propose de résoudre numériquement l'équation (2.26). Il existe plusieurs méthodes pour le faire, on peut citer la méthode de Fourier à pas divisés et méthode des différences finies.

Dans notre travail nous avons utilisé la méthode de Fourier à pas divisés

### 3.2.1 Méthode de Fourier à pas divisés

Cette méthode consiste à écrire l'équation (2.26) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial z} q(x, z) = (\hat{N} + \hat{D})q(x, z) \quad (3.3)$$

où les opérateurs  $\widehat{N}$  et  $\widehat{D}$  sont les opérateurs non-linéarité et dispersion, puis on traite l'opérateur dispersion dans l'espace de Fourier où les dérivés deviennent des multiplications par  $(ik)^n$  et  $n$  est l'ordre de la dérivée. L'application du schéma itératif

$$q(x, jh) = TF^{-1} \left\{ \exp(h\widehat{D}(ik)) TF \left\{ \exp(h\widehat{N})q(x, (j-1)h) \right\} \right\} \quad (3.4)$$

et la donnée d'une condition initiale permet d'obtenir la solution sur une longueur désirée. .

### 3.2.2 Simulations numériques

Nous commençons les simulations numériques par les tracés des solutions exactes données par (2.35)-(2.36) et les solutions approchées données par les équations (2.38)-(2.39) à l'aide du logiciel MATLAB, représentée sur la figure ci-dessous.

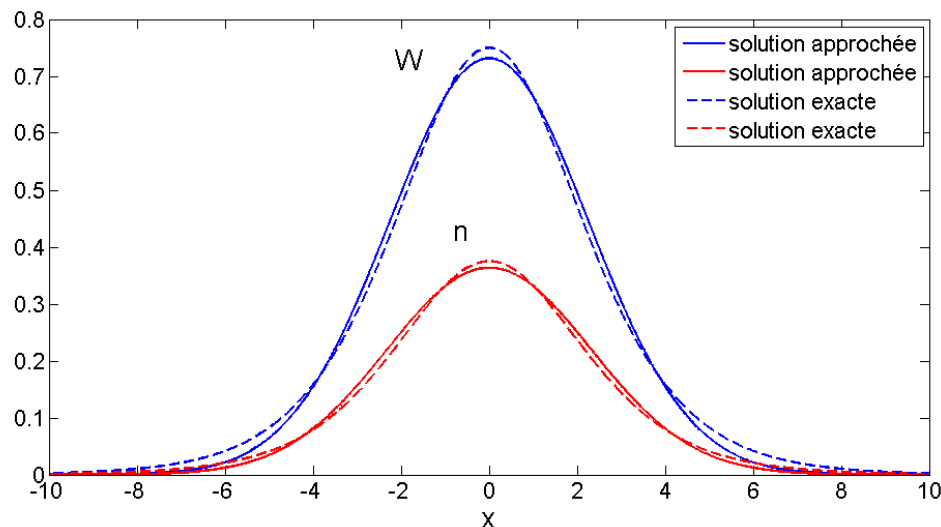


FIGURE 3.1 – Profils de la solution analytique approchée (trait fort) et la solution exacte ( trait interrompu ) du soliton fondamental (bleu) et de l'indice de réfraction non linéaire (rouge). Les paramètres correspondant sont  $b = 0.25$  et  $d = 2$

La figure 3.1 montre d'une part que les solutions exactes et approchées du soliton fondamental ont des profils presque superposables quand  $x$  varie. Notons que ce rapprochement est aussi observé au niveau des profils des indices de réfraction non linéaire représentées sur la même figure.

Nous poursuivons avec la résolution numérique de l'équation de Schrödinger de notre modèle donnée par l'équation (2.26) en utilisant la méthode de Fourier à pas divisés et en prenant comme conditions initiales la solution approchée (2.38) d'une part et la solution exacte (2.35) d'autre part. On obtient alors respectivement les figures 3.2 et 3.3, où nous avons tracé le carré du module de l'impulsion qui est une grandeur proportionnellement liée à l'intensité lumineuse, en fonction de la dimension transverse et de la distance de propagation.

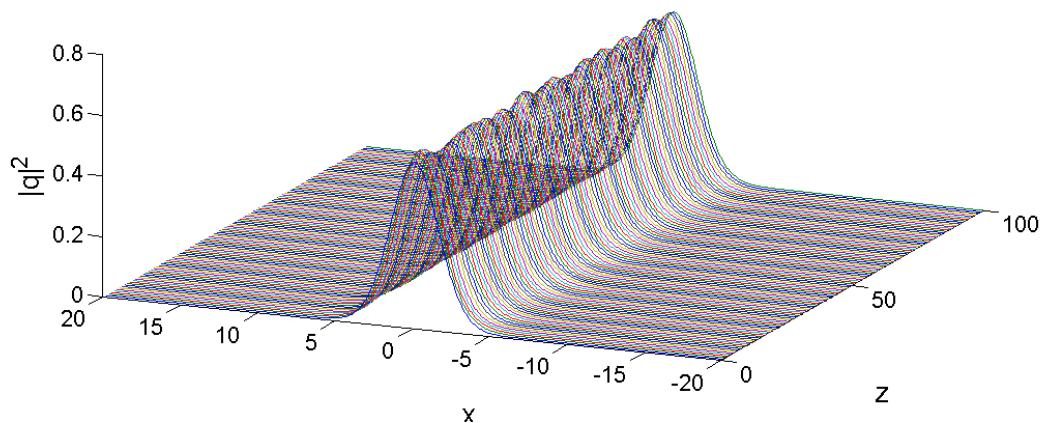


FIGURE 3.2 – évolution de la solution analytique approchée



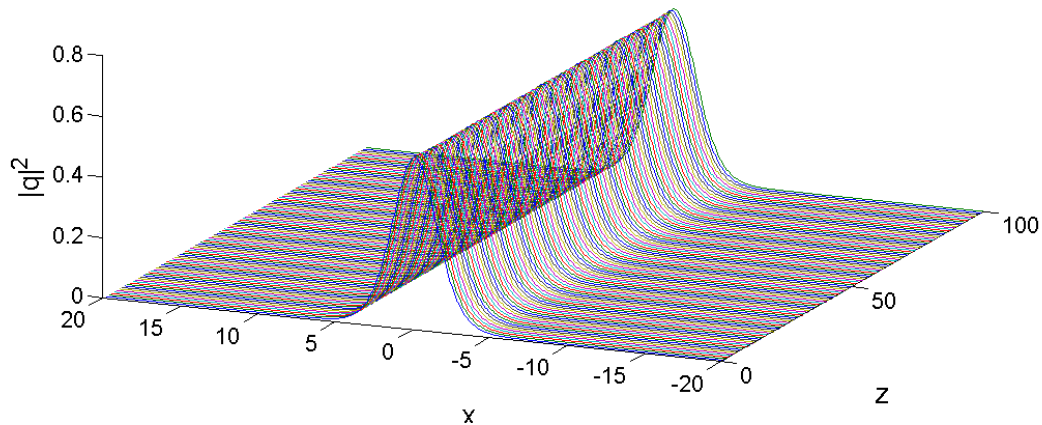


FIGURE 3.3 – évolution de la solution exacte

Les figures 3.2 et 3.3 nous montrent respectivement l'évolution de l'amplitude de la solution exacte et l'évolution de l'amplitude de la solution approchée. Dans les deux cas nous constatons l'impulsion garde sa forme au cours de sa propagation suivant l'axe de propagation  $z$ . Cependant on note des petites fluctuations d'amplitudes au niveau de la solution approchée. Une observation du profil de ces solutions montre que ces fluctuations d'amplitudes de la solution approchée ne s'éloigne pas trop de la solution exacte.

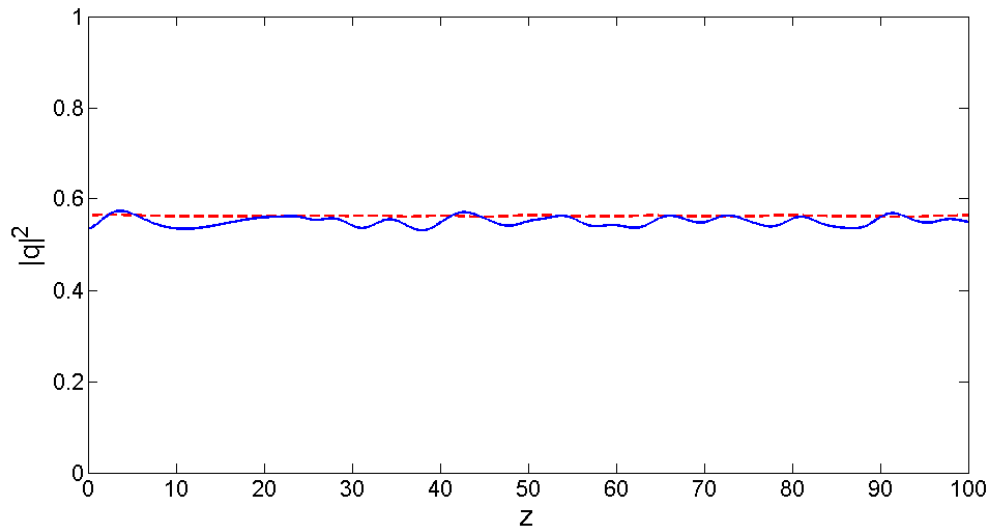


FIGURE 3.4 – Profils de l'évolution des amplitudes de la solution exacte (trait interrompu rouge) et de la solution approchée (bleu).

En effet à la figure 3.4 on observe les profils des amplitudes qui montrent que ces fluctuations n'excèdent pas  $\frac{3}{100}$  sur toute la distance de propagation.

Pour la suite de notre analyse numérique, nous nous intéressons aux rapports entre les amplitudes des enveloppes (2.35) et (2.38), et celles des indices de réfractations non linéaire (2.36) et (2.39) des solutions exacte et approchée respectivement.

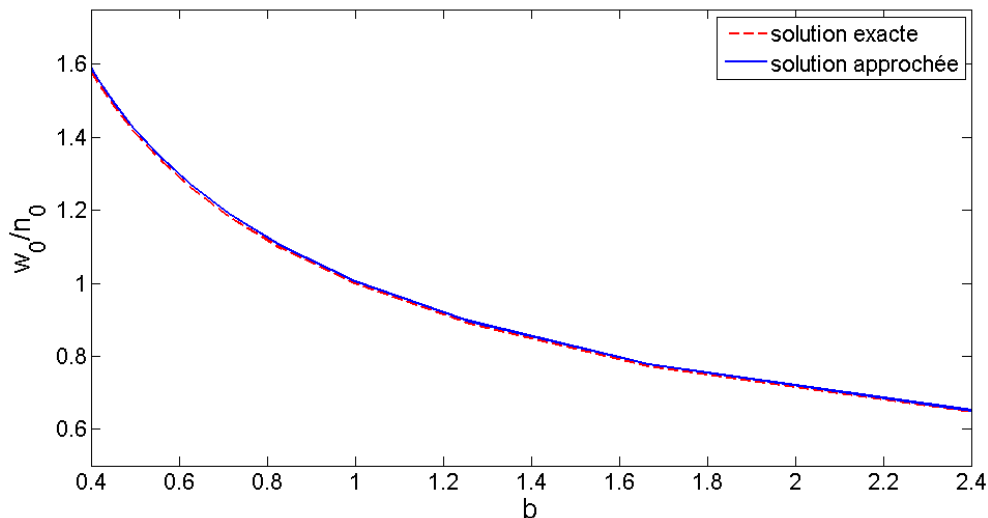


FIGURE 3.5 – Rapport de l’amplitude maximale de l’onde à la valeur maximale de l’indice de réfraction non linéaire en fonction de la constante de propagation  $b$

Les rapports  $\frac{w_0}{n_0}$  des solutions exactes et de solutions approchées en fonction de la constante de propagation  $b$  présentés sur cette figure sont presque confondus. ce qui traduit le fait que les deux rapports obtenus avec les solutions exactes et approchées aboutissent sensiblement au même résultat. Il est important que la solution étudiée se propageant dans notre milieu soit stable pour assurer la conservation de la forme de l’onde qui se propage. Pour étudier la stabilité de notre modèle, on part du fait que l’équation (2.26) admet plusieurs quantités conservées. Parmi lesquelles le Hamiltonien  $H$  et le moment (Energy flow)  $U$  définis par :

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right|^2 - n |q|^2 \right] dx \quad \text{et} \quad U = \int_{-\infty}^{+\infty} |q|^2 dx$$

À la figure 3.6 et à la figure 3.7, nous traçons les ‘Energy flow’ de la solution exacte et de la solution approchée en fonction de la constante de propagation  $b$  et du coefficient de non-localité respectivement. Une fois de plus le fait que ces deux courbes soient rapprochées nous montre que la solution approchée produit

des résultats qui sont proches de la solution exacte.

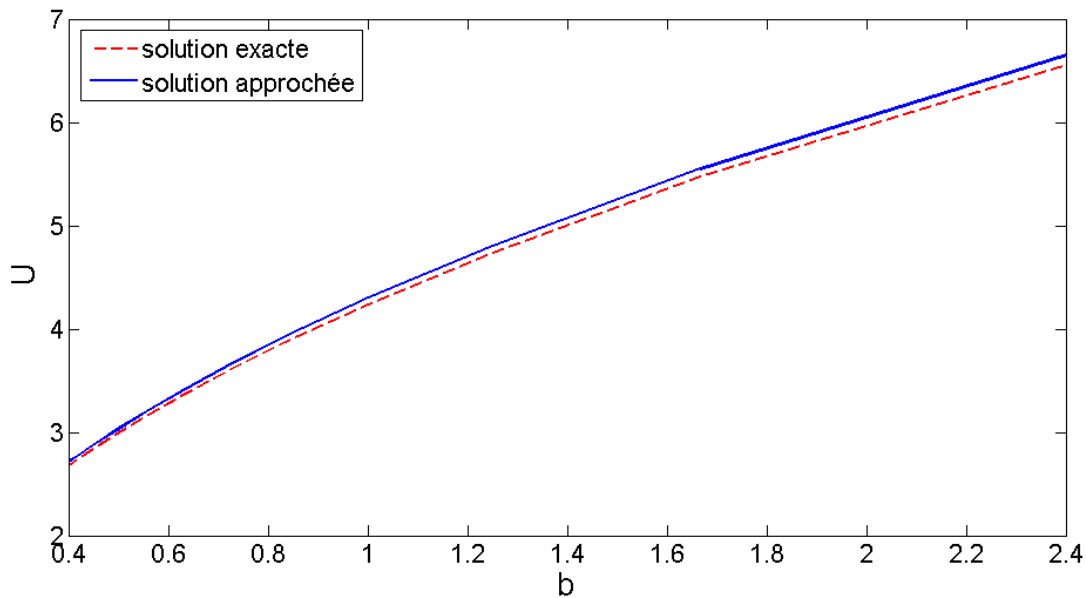


FIGURE 3.6 – Énergie en fonction de la constante de propagation  $b$

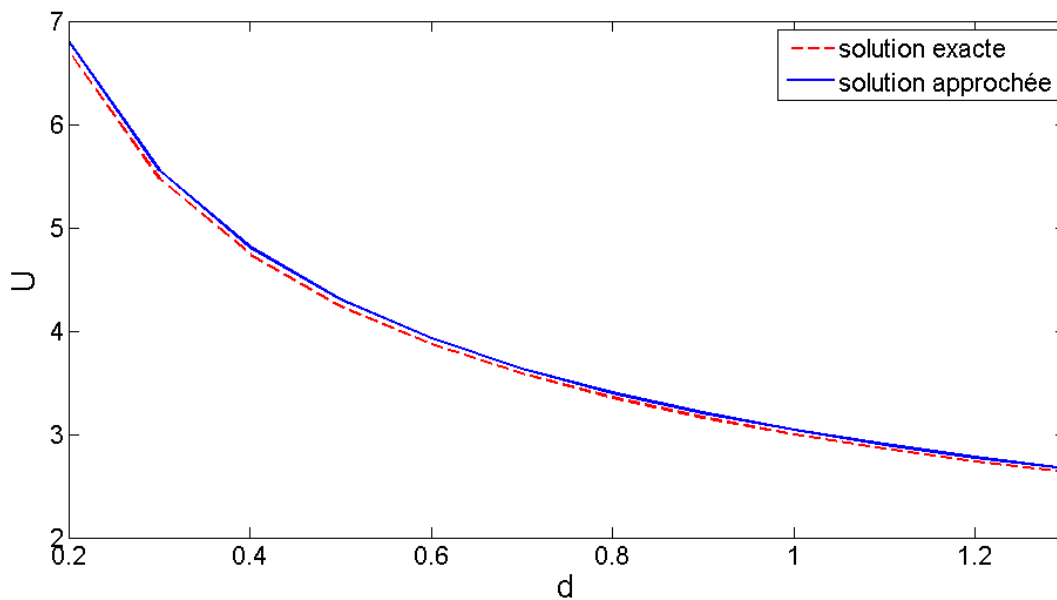


FIGURE 3.7 – Énergie en fonction du paramètre  $d$

L'étude de la stabilité se fait en analysant la fonction  $H = H(U)$  et en utilisant le raisonnement couramment employé dans la théorie de la stabilité de soliton. En effet dans le cas des solutions stationnaires, à chaque valeur de la constante de

propagation  $b$  dont du degré de non-localité  $d$ , correspond les valeurs de  $H(d)$  et  $U(d)$  qui génèrent une certaine courbe  $H(U)$ . Si à chaque valeur de  $U$  correspond une seule valeur de  $H$  la solution stationnaire est stable. Par contre si à chaque valeur de  $U$  correspond plusieurs valeurs de  $H$  alors La solution stationnaire stable est celle pour laquelle le Hamiltonien est minimal, pour une valeur fixée de l'énergie. Ainsi la branche inférieure est stable et la branche supérieure est instable[22]. Le tracé de cette courbe  $H(U)$  dans le cadre de notre travail nous donne la figure suivante

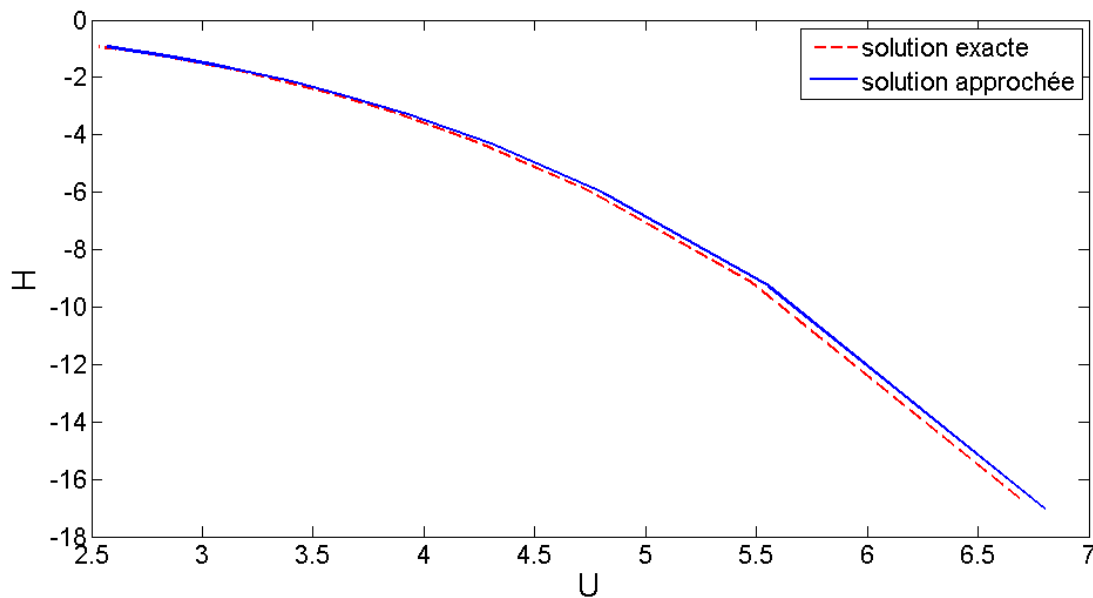


FIGURE 3.8 – Hamiltonien en fonction de l'Énergie

Cette figure nous montre que pour chaque valeur de l'énergie correspond une valeur du Hamiltonien pour le cas de la solution exacte tout comme le cas de la solution approchée pour les paramètres considérés. ceci nous montre que les solutions exactes et approchées sont stables.

Les figures 3.1 à 3.8 nous montrent que les solutions analytiques approchées obtenues à l'aide de l'approche variationnelle sont en accord avec les solutions

exactes. Ce qui nous permet de conclure que les solutions analytiques approchées proposées par l'approche variationnelle permettent une bonne description de la propagation du soliton fondamental dans un milieu à non-linéarité non locale.

---

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

Au cours de ce travail, nous avons mené une étude analytique et une étude numérique de la dynamique du soliton spatial dans un milieu à non-linéarité non locale et dispersif. Nous avons émis l'hypothèse selon laquelle l'enveloppe se propage suivant l'axe  $z$  et varie lentement suivant ce axe (approximation paraxiale). Nous avons montré que la dynamique était régie par l'équation non linéaire de Schrödinger, puis au moyen de l'approche variationnelle, nous avons proposé des solutions approchées en utilisant une fonction d'essai gaussienne dans le cas d'une seule dimension transverse et d'une réponse exponentielle.

Cette étude nous a permis de constater que les solutions analytiques approchées obtenues à l'aide de l'approche variationnelle produisent des résultats très proches de ceux obtenus avec les solutions exactes (obtenues sous certaines conditions). Ce rapprochement a été observé au niveau des profil de l'indice de réfraction du milieu et de l'enveloppe du soliton, de la valeur de l'amplitude de l'enveloppe au cours de la propagation suivant l'axe  $z$ , du rapport de l'enveloppe par l'indice de réfraction puis de la stabilité. Ces observations nous permettent dire que les solutions analytiques approchées permettent une bonne description de la propagation du soliton fondamental dans un milieu à non-linéarité non locale.

Le choix de la fonction d'essai étant crucial pour la réussite de l'approche

variationnelle, dans le cadre des travaux futurs, nous nous proposons d'utiliser une fonction d'essai dont les paramètres dépendent de la distance de propagation  $z$ , puis d'étendre nos calculs dans le cas de deux dimensions transverses et de voir comment les résultats seront modifiés.



---

# Bibliographie

---

- [1] A. Kamagate (2010) Propagation des solitons spatio-temporels dans des milieux dissipatifs. Thèse Ph.D, Université de Bourgogne, Ecole Doctorale Carnot.
- [2] F. Elie, France, (2009).
- [3] S. Zdravković, M. Satarić, Physic Letter A 373 (2009)4453.
- [4] A. N Rapose, A.J.P. Gomes, 74 (2012)244
- [5] E. Nana Introduction à la mecanique quantique (207-208).
- [6] M.Peyrard, TDauxois, EDP scinces/CNRS editions, 75005 Paris (2004).
- [7] T.C. Kofane Otique Non linéaire (cours universite (2013)).
- [8] J. Zhao, Q. Wang, M. Shen, Q. Kong and G.Juan. Chin. B 19, 054211(2010).
- [9] W. Krolkowwksi, O. bang, J. Rasmussen and Wyller J 2001 Phys. Rev.E64 016612.
- [10] X. Hutsebaut (2007). Étude expérimentale de l'optique non linéaire dans les cristaux liquide : solitons spatiaux et instabilité de modulation. Thèse, Université Libre de Bruxelles.
- [11] G. Agrawal, Nonlinear- fiber optics, (Academic press (2000)).
- [12] G. Agrawal, Nonlinear- fiber optics, (Academic press (2001))

- [13] G. Millot and P.Tchofo-Dinda. Elsevier Ltd 12(2004)467
- [14] H. Zhang, D. Xu and L. Li G. Opt. A 11(2009)1
- [15] X. Hutsebaut (2007). Étude expérimentale de l'optique non linéaire dans les cristaux liquide : solitons spatiaux et instabilité de modulation. Thèse, Université Libre de Bruxelles..
- [16] W. Krolkowksi, O. bang, J. Rasmussen and J.Wyller 2001 Phys. Rev.E 64 016612..
- [17] J. Wyller, W. Krolkowksi, O. bang and J. Rasmussen 2002 Phys. Rev.E66 066615..
- [18] K. Hayata and M. Koshiba Phys. Rev. Lett.71(1993) 3275.
- [19] Z. Xu, Y. Kartashov and L. Torner Opt.Lett.30(2005)3171
- [20] D. Anderson Phys, Rev, A 276(1983)..
- [21] B. Malomed, P. Drummond, H. He, Bernston, D. Anderson, M. Lisak, Phys. Rev B 56(1997)4725
- [22] Y. Kivshar, W. Krolikowski, Opt. Lett. 20(1995)1527
- [23] F. Dalfovo, S. Giorgino, L.P. Pitaevskii, S.Stringari, Rev. Mod. Phys. 71(1999)463

---

## CURRICULUM VITAE

---

**NOMS ET PRENOMS** : TIETCHOU MBIANDA Cyrille Jullyo

**DATE ET LIEU DE NAISSANCE** : 20 03 1987 à Maternité de Ndoundé

**SEXE** : MASCULIN

**NATIONALITE** : CAMEROUNAISE

**SITUATION MATRIMONIALE** : Célibataire

**ADRESSE** : B.P. 812 Yaoundé, Cameroun

**Tel** : (+237) 694 47 33 73 - 670 62 26 81

**E-mail** : cyrilletietchou@yahoo.fr.

### **SITUATION SCOLAIRE** :

> 2015-2016 : Niveau V Ecole Normale Supérieure de Yaoundé.

> 2014-2015 : Niveau IV Ecole Normale Supérieure de Yaoundé.

> 2013-2014 : MASTER I en Mécanique à l'Université de Yaoundé I.

> 2012-2013 : Troisième année de Licence en Physique à l'Université de Yaoundé

I.

> 2011-2012 : Troisième année de Licence en Physique à l'Université de Yaoundé

I.

> 2010-2011 : Deuxième année de Licence en Physique à l'Université de Yaoundé

I.

> 2009-2010 : Première année de Licence en Physique à l'Université de Yaoundé

I.

### **DOMAINES DE COMPETENCE ET LOGICIELS :**

> Logiciels

- Bonne maîtrise de Fortran 95.
- Bonne maîtrise de MATLAB et MAPLE.
- Bonne maîtrise du LATEX

### **LANGUES PARLEES ET ECRITES**

- Français

### **DIVERS**

- Lecture
- Sport
- Art
- Voyage et visite des sites touristiques