

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix-Travail-Patrie

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

ECOLE NORMALE SUPERIEURE
DE YAOUNDE I

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

E S



REPUBLIC OF CAMEROON

Peace-Work-Fatherland

UNIVERSITY OF YAOUNDE I

HIGHER TEACHER TRAINING
COLLEGE OF YAOUNDE I

DEPARTEMENT OF MATHEMATICS

ETUDE ANALYTIQUE ET GEOMETRIQUE DES QUADRIQUES AFFINES

Mémoire de D.I.P.E.S II de mathématiques

De

DZEDJOM MOUADJE Patrick Genner

Matricule : 00Y078

Licencié en Mathématiques

Sous la direction de :

Dr MBA Alphonse

Chargé de Cours

Ecole Normale Supérieure,

Université de Yaoundé I

Année académique : 2015-2016

**ÉTUDE ANALYTIQUE, GÉOMÉTRIQUE DE
QUADRIQUES AFFINES**

Mémoire de DIPES II de mathématiques

De

DZEDJOM MOUADJE Patrick Genner

Matricule : **00Y078**

Licencié en Mathématiques pures

Sous la direction de :

Dr. MBA ALPHONCE

Chargé de Cours

Ecole Normale Supérieure, Université de Yaoundé I

Année Académique 2015-2016

♠ Dédicace ♠

Je dédie ce travail à :
Mon Seigneur et Sauveur **Jésus Christ**

♠ Remerciements ♠

Je remercie les enseignants du département de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé et particulièrement le **Dr MBA Alphonse** nous ont donné une bonne formation et ont permis la réalisation de ce mémoire .

Je remercie également mon épouse **DZEDJOM Mireille** et mes enfants pour leur affection et leur soutien dans les moments difficiles.

Je remercie particulièrement la famille **TEGNIN**, pour leur soutien dans mes études supérieures , mes beaux parents pour les conseils et leur grande assistance, mes frères et sœurs, mes amis et tous ceux qui de près ou de loin m'ont soutenu et encouragé.

♠ Déclaration sur l'honneur ♠

Le présent document est une œuvre originale du candidat et n'a été soumis nulle part ailleurs en partie ou en totalité, pour une autre évaluation académique. Les contributions externes ont été dûment mentionnées et recensées en bibliographie.

Signature du candidat

DZEDJOM

♠ Table des matières ♠

Déclaration sur l'honneur	iii
Résumé	vii
Abstract	viii
LISTE DES FIGURES	ix
Introduction	1
1 Formes quadratiques	2
1.1 Généralités sur les formes quadratiques	2
1.1.1 Formes quadratiques et formes polaires associées	2
1.1.2 Expression analytique d'une forme quadratique réelle	3
1.1.3 Rang d'une forme quadratique	4
1.1.4 Signature d'une forme quadratique	4
1.2 Formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien	5
1.2.1 Formes quadratiques et endomorphisme adjoint	5
1.2.2 Bases orthonormées associées à une forme quadratique	5
1.2.3 Réduction des formes quadratiques	6
2 ÉTUDE DES COURBES	8
2.1 Courbes de \mathbb{R}^n	8
2.1.1 Généralités sur les courbes	8
2.1.2 Points réguliers - Tangentes	9
2.1.3 Longueur d'une courbe	9
2.1.4 Abscisse curviligne	10

2.2	Courbes planes	10
2.2.1	Repère de Serret-Frenet	11
2.2.2	Courbure	11
2.3	Courbes gauches	12
2.3.1	Plan osculateur en un point bi-régulier	12
2.3.2	Binormal et Repère de Serret-Frenet	13
2.3.3	La torsion d'une courbe	13
3	SURFACES DE L'ESPACE	15
3.1	Généralités sur les surfaces	15
3.1.1	Définitions	15
3.1.2	Plan tangent à une surface	15
3.1.3	Plan tangent en un point d'une surface définie par une équation cartésienne	17
3.2	Surfaces réglées ; surfaces développables	18
3.2.1	Surfaces réglées	18
3.2.2	Surfaces développables	18
3.2.3	Surfaces usuelles	20
3.3	Surfaces de révolution	22
3.3.1	Surface de révolution d'axe (Δ)	22
3.3.2	Sections planes de cônes et de cylindres de révolution	23
3.4	Quadriques affines	24
3.4.1	Généralité sur les quadriques affines	24
3.4.2	Centre d'une quadrique	24
3.4.3	Réduction des quadriques affines	25
3.4.4	Classification des quadriques	27
3.4.5	Principales quadriques	30
4	INTÉRÊT PÉDAGOGIQUE : ÉTUDE DES CONIQUES	37
4.1	Introduction	37
4.2	Apport pédagogiques	37
4.3	Objectifs pédagogiques	38
4.4	Étude générale des coniques	38
4.4.1	Étude analytique des coniques	38

4.5	Étude géométrique des coniques	40
4.5.1	Définition d'une conique par foyers et directrices	40
4.5.2	Intersection d'une conique avec son axe focale	42
4.5.3	Équation cartésienne d'une conique	42
4.6	Coniques particulières	43
4.6.1	Parabole	43
4.6.2	L'ellipse	47
4.6.3	L'hyperbole	50
4.7	Définition bifocale des coniques à centre	54
4.7.1	Définitions et propriétés	54
4.7.2	Construction d'un point de l'ellipse de définition bifocale	55
	Conclusion et perspectives	57

♠ Résumé ♠

Le but de ce travail est de faire une étude des quadriques affines en général et de donner quelques propriétés caractéristiques. Après avoir donné quelques résultats sur les formes quadratiques réelles, nous étudierons les courbes en générales, puis les surfaces de l'espace ; en particulier les quadriques affines. C'est grâce à cette analyse que nous allons aborder la notion de conique et y mener des réflexions didactique et pédagogique.

Mots clés : quadrique affine, forme quadratique ; courbe, surface, conique

♠ Abstract ♠

The aims of this work is to study affine quadrics in general and to give some characteristic properties. After giving some results on real quadratic forms, we will study the general curves and space areas ; in particular affine quadrics. It's through this analysis that we will talk about conical concept and conclude on their pedagogic and didactic contributions.

Keywords : affine quadric, quadratic form, curve, area, conical.

♠ LISTE DES FIGURES ♠

[1] Figure 1 : plan tangent à une surface en un point M	page 16
[2] Figure 2 : Surface réglée	page 18
[3] Figure 3 : Cylindre droit	page 20
[4] Figure 4 : Cône droit	page 21
[5] Figure 5 : Section plane d'un cône droit à deux nappes	page 23
[6] Figure 6 : Section plane d'un cylindre	page 23
[7] Figure 7 : Ellipsoïde	page 32
[8] Figure 8 : Hyperboloïde à une nappe	page 32
[9] Figure 9 : Hyperboloïde à deux nappes	page 34
[10] Figure 10 : Cône elliptique	page 34
[11] Figure 11 : parabolôïde hyperbolique	page 35
[12] Figure 12 : Parabolôïde elliptique	page 35
[13] Figure 13 : Cylindre elliptique	page 36
[14] Figure 14 : Cylindre hyperbolique	page 36
[15] Figure 15 : Cylindre parabolique	page 36
[16] Figure 16 : Exemple de conique définie par foyer et directrices	page 41
[17] Figure 17 : Parabole	page 44
[18] Figure 18 : construction d'une parabole par points et tangentes	page 46
[19] Figure 19 : Construction d'une ellipse à l'aide des affinités	page 49
[20] Figure 20 : Construction d'une ellipse par point et par tangente	page 50
[21] Figure 21 : Construction d'une hyperbole connaissant ses asymptotes	page 54
[22] Figure 22 : Construction d'une ellipse ou d'une hyperbole de définition bifocale	page 55
[23] Figure 23 : Construction par la méthode du Jardinier	page 55

♠ Liste des tableaux ♠

3.1	Tableau de classification des quadrique en dimension 3	28
4.1	classification des coniques	41
4.2	Tableau récapitulatif des paraboles usuelles	44
4.3	Tableau des éléments caractéristiques d'une ellipse	48
4.4	Tableau de éléments caractéristiques de l'hyperbole	51

♠ Introduction ♠

La découverte des coniques provient des Grecs depuis le *IV* siècle avant Jésus christ. C'est **MENECHME** qui a découvert les sections coniques, mais c'est **Appollonius de Perge** qui a réussi à démontrer grâce à l'intersection d'un cône et d'un plan ne passant pas par son sommet que les courbes obtenues d'apparences très différentes sont d'une même famille appelée **famille des coniques** .

Les coniques constituent une famille très utilisée des courbes planes ; elles ont de nombreuses propriétés mathématiques et sont fréquemment rencontrées en astronomie ; d'où leurs multiples applications dans le domaine des sciences et de la technologie.

La généralisation de la notion de conique à l'espace de dimension trois constitue une famille de surfaces appelées quadriques affines ou surfaces quadratiques affines . Certaines surfaces sont des figures classiques de l'espace tel que les **sphères**, les **cylindres** et les **cônes** et d'autres sont obtenues par rotation d'une courbe autour d'un axe appelé **surfaces de révolution**. Les courbes et les surfaces interviennent naturellement dans divers domaines tel que l'étude de la trajectoire d'un objet, le tracé d'une route.

Le problème fondamentale dans l'étude des quadriques affines réside dans la réduction de leur équation qui ne peut se faire qu'avec un changement convenable du système de coordonnées.

Notre travail s'articulera en quatre chapitres. Dans le premier, nous passerons en revue les résultats sur les formes quadratiques, notamment ceux utiles pour l'étude des quadriques affines.

Le deuxième chapitre portera sur l'étude des courbes, nous présenterons quelques notions générales et spécifiques aux courbes paramétrées en dimension deux et en dimension trois.

Le troisième chapitre traitera des surfaces de l'espace avec comme application des quadriques affines et quelques éléments géométriques.

Dans le quatrième chapitre, nous donnerons l'intérêt pédagogique de l'étude des quadriques affines dans l'étude des coniques.

Formes quadratiques

Dans toute la suite E désigne un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension fini $n > 0$.

1.1 Généralités sur les formes quadratiques

Définition 1.1. .

Une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée *forme quadratique* s'il existe une forme bilinéaire symétrique $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $q(x) = f(x, x)$

1.1.1 Formes quadratiques et formes polaires associées

Définition 1.2. .

Une forme quadratique q sur E est une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

- i) Pour tout $x \in E$; pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$; $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
- ii) L'application

$$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$$

est bilinéaire symétrique.

La forme bilinéaire f est appelée **forme polaire de q**

Proposition 1.1. .

Il existe un unique isomorphisme entre l'espace vectoriel des formes quadratiques et l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques.

Preuve 1.1.1. .

Notons

- $S_2(E, \mathbb{R})$ espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E
- $Q(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E

Soit σ l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} \sigma : S_2(E, \mathbb{R}) &\longrightarrow Q(E, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \sigma(f) \end{aligned} \quad \text{tel que } \sigma(f)(x) = f(x, x) \text{ pour tout } x \in E$$

– σ est *surjective*

soit $q \in Q(E, \mathbb{R})$.

L'application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ est une forme bilinéaire symétrique sur E . D'où $q = \sigma(f)$

Donc σ est surjective

– σ est *injective*

Soit $f \in \text{Ker}\sigma$

$$\begin{aligned} \sigma(f) = 0 &\iff f(x, y) = \frac{1}{2}[f(x+y, x+y) - f(x, x) - f(y, y)] = 0 \quad \forall x, y \in E \\ &\iff f(x, y) = 0 \quad \text{pour tout } x, y \in E \\ &\iff f = 0 \end{aligned}$$

D'où $\text{Ker}\sigma = \{0\}$; donc σ est injective

1.1.2 Expression analytique d'une forme quadratique réelle

Soit f une forme bilinéaire symétrique ; $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f dans la base \mathcal{B}

Définition 1.3. .

Soit q une forme quadratique de forme polaire f , on appelle matrice de q dans la base \mathcal{B} la matrice A de f dans la base \mathcal{B}

Proposition 1.2. .

i) Pour tout $x \in E$, $q(x) = {}^t X A X$, où X est la matrice colonne des coordonnées de x dans \mathcal{B} .

ii) Pour tout $x \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$

Preuve 1.1.2. .

i) Soit $x \in E$, on a

$$q(x) = f(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = {}^t X A X$$

ii) Soit $x \in E$; de coordonnées $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a $q(x) = f(x, x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$.

$$\text{Comme } A \text{ est symétrique, alors on a : } q(x) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{i \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

Exemple 1.1.1. .

La forme polaire de la forme quadratique

$$q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 3yz \text{ est } f((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1 x_2 + 2(x_1 y_2 + x_2 y_1) + \frac{3}{2}(y_1 z_2 + y_2 z_1)$$

1.1.3 Rang d'une forme quadratique

Définition 1.4. .

Soit q une forme quadratique, A la matrice de q dans la une base \mathcal{B} .

Le rang de q noté $rg(q)$ est le nombre maximal de vecteurs colonnes de la matrice A linéairement indépendantes. C'est le rang de la matrice A ; $rg(q) = rg(A)$

Remarque 1.1.1. .

– q est non dégénérée si son rang est égal à la dimension de E

Exemple 1.1.2. Dans \mathbb{R}^3 , $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ a pour matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{qui est de rang 3. Donc } q \text{ est de rang 3 et par conséquent non dégénéré.}$$

1.1.4 Signature d'une forme quadratique

Définition 1.5. Soit q une forme quadratique sur E .

Une base \mathcal{B} de E est une base q -orthogonale si la matrice de q dans cette base est diagonale.

Proposition 1.3. Soit q une forme quadratique sur E . Il existe unique couple (r, s) d'entiers naturels tel que pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ q -orthogonale,

où $r = \text{card}(\{i \in \{1, \dots, n\} / q(e_i) > 0\})$ et $s = \text{card}(\{i \in \{1, \dots, n\} / q(e_i) < 0\})$.

Définition 1.6. Le couple (r, s) s'appelle la signature de q de rang $r + s$.

Remarque 1.1.2. .

- Les entiers r et s ne dépendent pas de la base q -orthogonale choisie
- Soit q une forme quadratique sur E de signature (r, s) , A la matrice de q dans la base \mathcal{B} . r est le nombre de valeurs propres de A strictement positives et s le nombre de valeurs propres strictement négatives.

1.2 Formes quadratiques sur un espace vectoriel euclidien

1.2.1 Formes quadratiques et endomorphisme adjoint

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension fini n ($n \in \mathbb{N}^*$) dont le produit scalaire est noté « \cdot »

Définition 1.7. .

Soit u un endomorphisme de E .

On dit qu'un endomorphisme v de E est adjoint de u si pour tout $(x, y) \in E^2$; $u(x).y = x.v(y)$.

Proposition 1.4. .

Soit φ l'isomorphisme canonique de E sur E^* .

Tout endomorphisme u de E a un unique adjoint, noté u^* et on a $u^* = \varphi^{-1} \circ {}^t u \circ \varphi$

Définition 1.8. Un endomorphisme u de E qui vérifie $u = u^*$ est dit auto-adjoint

Remarque 1.2.1. L'adjoint de u est défini par : $\forall x, y \in E, u(x).y = x.u^*(y)$

Proposition 1.5. Un endomorphisme u de E est dit **auto-adjoint** si et seulement si pour tout $x, y \in E$, $u(x).y = x.u(y)$

1.2.2 Bases orthonormées associées à une forme quadratique

Théorème 1.1. Soit q une forme quadratique non nulle de E ; alors il existe sur E une base orthonormée associée à q .

Preuve 1.2.1. Soit f la forme polaire de q ; u un endomorphisme de E . Alors pour tout $x \in E$; l'application

$f_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$
 $y \longmapsto f(x, y)$
 est une forme linéaire sur E ; d'où il existe un unique élément $u(x)$ de E
 tel que $f_x(y) = f(x, y) = u(x).y$.

L'endomorphisme u de E vérifie $u(x).y = x.u(y)$ car f est symétrique.

On en déduit que $u^* = u$, u^* l'endomorphisme adjoint du u , alors il existe sur une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que la matrice de u dans cette base soit formée de ces vecteurs propre
 (**Claude TISSERON** [4] page 254)

$$u(e_i) = a_i e_i, 1 \leq i \leq n \quad f(e_i, e_j) = u(e_i).e_j = a_i e_i.e_j = 0$$

D'où la base \mathcal{B} est orthogonal pour f et donc pour q .

Remarque 1.2.2. La matrice de q dans la même base est diagonale.

Exemple 1.2.1. Déterminons le rang, la signature et une base orthogonale de la forme quadratique suivante.

$$E = \mathbb{R}^3, \quad q(x, y, z) = x^2 + xy + xz.$$

$$\begin{aligned} \text{On a } q(x, y, z) &= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x(y+z) = [x + \frac{1}{2}(y+z)]^2 - \frac{1}{4}(y+z)^2 \\ &= (x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z)^2 - \frac{1}{4}(y+z)^2 \end{aligned}$$

Les formes linéaires $l_1(x, y, z) \longmapsto x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ et $l_2(x, y, z) \longmapsto y + z$ sont linéairement indépendants; alors $rg(q) = 2$. Le couple $(1, 1)$ est la signature de q .

La forme quadratique q est dégénérée.

On choisit la forme linéaire $l_3(x, y, z) = z$ telle que l_1, l_2 et l_3 soient linéairement indépendantes.

$$\text{Posons } \begin{cases} X = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ Y = y + z \\ Z = z \end{cases} \quad \text{on a } \begin{cases} x = X - \frac{1}{2}Y \\ y = Y - Z \\ z = Z \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } q(X, Y, Z) = X^2 - \frac{1}{4}Y^2; \quad \text{on a } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où (u_1, u_2, u_3) est une base orthogonale par rapport à q où $u_1(1, 0, 0)$; $u_2\left(\frac{-1}{2}, 1, 0\right)$ et $u_3(0, -1, 1)$.

1.2.3 Réduction des formes quadratiques

Théorème 1.2. Soit q une forme quadratique non nulle sur E . Alors, il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres telles que pour tout $x \in E$; $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2$ où $r = rg(q)$ et

les λ_i sont les valeurs propres non nulles de la matrice de q dans cette base .

Preuve 1.2.2. Soit f la forme polaire de q , $f \neq 0$

Soit $r = \text{rg}(q) = \text{rg}(f)$; alors il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , orthonormée telle que $f(e_i, e_i) \neq 0$ pour $1 \leq i \leq r$ et nul ailleurs

$$\text{On a } q(x) = f(x, x) = \sum_{i=1}^r f(e_i, e_i)x_i^2 + \sum_{r+1}^n f(e_i, e_i)x_i^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} x_i x_j f(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^r f(e_i, e_i)x_i^2$$

posons $\lambda_i = f(e_i, e_i)$; $1 \leq i \leq r$; $\lambda_i \neq 0$ pour tout i ; $1 \leq i \leq r$ d'où $\prod_{i=1}^r \lambda_i \neq 0$ et on $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2$

Exemple 1.2.2. Réduire la forme quadratique suivante :

$E = \mathbb{R}^3$; muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère la forme quadratique $q(x, y, z) = x^2 - \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 + yz$.

La matrice A associée dans la base \mathcal{B} est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda)(-2 - \lambda)$.

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = -2$

Les sous espaces propres associé aux valeurs propres sont :

$$E_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I_3) = \langle \vec{e}_i \rangle; \quad \text{où } \vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k}) \text{ et } \vec{e}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{j} - \vec{k})$$

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée dans laquelle la forme quadratique q s'écrit

$$q(X, Y, Z) = X^2 - Y^2 - 2Z^2 \quad \text{où } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

ÉTUDE DES COURBES

2.1 Courbes de \mathbb{R}^n

Dans cette partie on se place dans un espace affine euclidien de dimension n ($n \in \{2, 3\}$) identifié à \mathbb{R}^n muni d'un repère orthonormé canonique, I désigne un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

2.1.1 Généralités sur les courbes

Définition 2.1. Soit $n \in \{2, 3\}$. Une courbe paramétrée de classe C^k ($k \in \mathbb{N}^*$) est une application de classe C^k de \mathbb{R}^n $\gamma : t \in I \mapsto \mathbb{R}^n$

Soit γ une courbe paramétrée ;

on appelle trajectoire ou courbe géométrique de γ la partie $\Gamma = \gamma(I) = \{\gamma(t), t \in I\}$

Remarque 2.1.1.

- Si $n = 2$, on dit que la **courbe est plane**.
- Si $n = 3$, on dit que la courbe est spatiale ou **courbe gauche**.
- Une courbe paramétrée donne non seulement la trajectoire, mais aussi une façon de la parcourir.
- Une courbe peut avoir plusieurs paramétrisations.

Exemple 2.1.1.

La trajectoire de la courbe paramétrée γ

$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto r(\cos(t), \sin(t), 0) \in \mathbb{R}^3$ est cercle de rayon r dans le plan horizontale d'équation $z = 0$

Définition 2.2. On appelle **paramétrisation admissible** de classe C^k de γ , tout application $\tilde{\gamma} : J \mapsto \mathbb{R}^n$ (où J est un intervalle ouvert de \mathbb{R}) telle que il existe un difféomorphisme de classe C^k $\varphi : J \mapsto I$ de γ avec $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

On dit aussi que φ est un changement de paramétrage.

Remarque 2.1.2. Les courbes paramétrées γ et $\tilde{\gamma}$ sont équivalentes.

2.1.2 Points réguliers - Tangentes

Définition 2.3. Soient γ une courbe paramétrée de classe C^1 ,

$\Gamma = \gamma(I)$ sa trajectoire, $M_0 = \gamma(t_0)$ un point de Γ .

On dit que M_0 est un point régulier si $\overrightarrow{\gamma'(t_0)} \neq \vec{0}$ (dans le cas contraire, le point est dit singulier)

La droite passant par M_0 et de vecteur directeur $\overrightarrow{\gamma'(t_0)}$ est la tangente à Γ en M_0 .

Remarque 2.1.3.

- On dit que γ est une courbe régulière si tous ses points le sont.
- Pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{\gamma'(t)}$ est appelé vecteur tangent en $M = \gamma(t)$ à Γ .
- Une courbe paramétrée régulière admet une tangente en tout point ; mais si une courbe admet une tangente en tout point, elle n'est pas toujours régulière

Contre-exemple (2.1.1). .

La courbe paramétrée γ définie par $\gamma(t) = (t^2, t^4), t \in \mathbb{R}$ admet pour trajectoire la parabole d'équation $y = x^2$ qui a un vecteur tangent horizontal au point $\gamma_0 = O$ et pourtant $\overrightarrow{\gamma'(0)}$ est nul.

Proposition 2.1. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée régulière.

Si $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ est un paramétrage admissible de Γ , alors $\tilde{\gamma}$ est aussi régulière.

Preuve. En effet, comme $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, où $\varphi : J \rightarrow I$ est un changement de paramétrage, on a

$$\forall s_0 \in J, \overrightarrow{\tilde{\gamma}'(s_0)} = \varphi'(s_0) \overrightarrow{\gamma'(\varphi(s_0))} = \varphi'(s_0) \overrightarrow{\gamma'(t_0)} \quad \text{où } t_0 = \varphi(s_0) .$$

puisque $\varphi'(s_0) \neq 0$ et $\overrightarrow{\gamma'(t_0)} \neq 0$, on en déduit que $\overrightarrow{\tilde{\gamma}'(s_0)} \neq \vec{0}$. □

Remarque 2.1.4. Les vecteurs $\overrightarrow{\tilde{\gamma}'(s_0)}$ et $\overrightarrow{\gamma'(t_0)}$ étant colinéaires alors $\tilde{\gamma}$ définit la même tangente que γ au point M_0

2.1.3 Longueur d'une courbe

Définition 2.4. Soit γ une courbe paramétrée de trajectoire Γ , soient $A = \gamma(t_0), B = \gamma(t_1)$, ($t_0, t_1 \in I, t_0 < t_1$)

On appelle longueur de l'arc \widehat{AB} le réel défini par $L(\widehat{AB}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| dt$

Définition 2.5. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^k .

On appelle longueur de γ : $L(\gamma) = \int_I \|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| dt$

Remarque 2.1.5. La longueur d'une courbe ne dépend pas de la paramétrisation.

Exemple 2.1.2. .

La longueur de l'hélice circulaire de paramétrage $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), ht)$, $h \neq 0$ avec $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est donnée par $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + h^2} dt = 2\pi\sqrt{r^2 + h^2}$

En particulier, si $h = 0$, on retrouve la longueur d'un cercle de rayon r : $2\pi r$

2.1.4 Abscisse curviligne

Définition 2.6. Une courbe paramétrée régulière $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite **normal** (ou rapporté à une abscisse curviligne) si pour tout $[t_1, t_2] \subseteq I$, la longueur de l'arc $\widehat{\gamma(t_1)\gamma(t_2)}$ est $L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = t_2 - t_1$

Définition 2.7. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

On appelle **abscisse curviligne** à partir du point de paramètre t_0 ($t_0 \in I$), l'application $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in I, s(t) = \int_{t_0}^t \|\overrightarrow{\gamma'(u)}\| du$

Remarque 2.1.6. .

Géométriquement $s(t)$ est la longueur de la trajectoire Γ , entre les points $\gamma(t_0)$, $\gamma(t)$

Proposition 2.2. soit γ une courbe paramétrée de classe C^k . Alors

La paramétrisation de γ est normale $\iff \forall t \in I, \|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| = 1$

Preuve. .

Soit γ une paramétrisation normale. Alors l'abscisse curviligne s à partir de t_0

vérifie $s(t) = \int_{t_0}^t \|\overrightarrow{\gamma'(u)}\| du = t - t_0$. En dérivant, on obtient $s'(t) = \|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| = 1$

inversement, si $\forall t \in I$ on a $\|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| = 1$, alors pour tout $[t_1, t_2] \subseteq I$;

$$L(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = \int_{t_1}^{t_2} \|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| dt = t_2 - t_1 \quad \square$$

Remarque 2.1.7. .

La paramétrisation $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$ est une paramétrisation par abscisse curviligne de γ .

Exemple 2.1.3. .

$\gamma : s \in \mathbb{R} \mapsto (r\cos(\frac{s}{r}), r\sin(\frac{s}{r}), 0)$ est une paramétrisation par abscisse curviligne du cercle de rayon r dans le plan (xOy)

2.2 Courbes planes

On s'intéressera à la allure locale des courbes planes régulières.

2.2.1 Repère de Serret-Frenet

C'est un repère orthonormé qui varie le long d'une courbe paramétrée régulière

Définition 2.8. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 de trajectoire Γ et $M = \gamma(t)$ un point de Γ .

. On appelle **vecteur tangent unitaire** de en M le vecteur noté $\overrightarrow{T}(t)$ défini par $\overrightarrow{T}(t) = \frac{\overrightarrow{\gamma'(t)}}{\|\overrightarrow{\gamma'(t)}\|}$.

Définition 2.9. soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^1 .

Le repère de **Serret-Frenet** au point M est le repère orthonormé $(M, \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ où $(\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ est une base orthonormée directe du plan affine.

Le vecteur $\overrightarrow{N}(t)$ est un vecteur qui est normal à la courbe en M

2.2.2 Courbure

Proposition 2.3. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2 et $M = \gamma(s)$ un point de la courbe. Alors $\overrightarrow{T}'(s)$ est colinéaire à $\overrightarrow{N}(s)$. En particulier, il existe une application continue $\bar{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall s \in I, \bar{\kappa}(s) = \overrightarrow{T}'(s) \cdot \overrightarrow{N}(s)$ avec $\overrightarrow{T}'(s) = \overrightarrow{\gamma''(s)}$

Preuve. Soit $s \in I$, on a $\overrightarrow{T}(s) \cdot \overrightarrow{T}(s) = \|\overrightarrow{T}(s)\|^2 = 1$ avec $\overrightarrow{T}(s) = \overrightarrow{\gamma'(s)}$.

En dérivant, on obtient $\overrightarrow{T}'(s) \cdot \overrightarrow{T}(s) = 0$ d'où $\overrightarrow{T}'(s)$ est orthogonal à $\overrightarrow{T}(s)$; C'est-à-dire colinéaire à $\overrightarrow{N}(s)$. Ainsi il existe une application continue $\bar{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{T}'(s) = \bar{\kappa}(s) \overrightarrow{N}(s)$ avec $\overrightarrow{T}'(s) = \overrightarrow{\gamma''(s)}$. D'où $\bar{\kappa}(s) = \overrightarrow{T}'(s) \cdot \overrightarrow{N}(s)$ □

Définition 2.10. Soit γ une courbe paramétrée normale régulière et un point $M = \gamma(s)$ du plan.

- $\bar{\kappa}(s)$ est la courbure algébrique.
- La courbure en un point M est le réel $\kappa(s) = |\bar{\kappa}(s)| = \|\overrightarrow{\gamma''(s)}\|$
- Le cercle de rayon $\frac{1}{\kappa(s)}$ et tangent à la courbe au point M est appelé **cercle osculateur**.

Remarque 2.2.1. La courbure algébrique des courbes planes est liée au sens de parcours de la courbe et à l'orientation du plan.

Exemple 2.2.1. .

Soit $\gamma : s \in \mathbb{R} \mapsto r \left(\cos \left(\frac{s}{r} \right), \sin \left(\frac{s}{r} \right) \right)$ est la paramétrisation (par la longueur de l'arc) d'un cercle de rayon r ; on a $\overrightarrow{T}(s) = -\sin \left(\frac{s}{r} \right) \vec{i} + \cos \left(\frac{s}{r} \right) \vec{j}$

Ainsi $\kappa(s) = \|\overrightarrow{T}'(s)\| = \left\| -\frac{1}{r} \cos \left(\frac{s}{r} \right) \vec{i} - \frac{1}{r} \sin \left(\frac{s}{r} \right) \vec{j} \right\| = \frac{1}{r}$

Définition 2.11. Soit $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière de classe C^2

- Le centre de courbure en un point $\gamma(t)$ de courbure non nulle est le point $C(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\bar{\kappa}(t)} \overrightarrow{N}(t)$
- Le cercle osculateur est le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $\frac{1}{\bar{\kappa}(t)}$.

Proposition 2.4. Soit γ une courbe paramétrée régulière du plan de classe C^2 . Alors pour tout $t \in I$, on a :

$$\bar{\kappa}(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} \text{ et } \kappa(t) = |\bar{\kappa}(t)|$$

Démonstration. Soit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s_{t_0}^{-1}$ la paramétrisation par abscisse curviligne (avec $t_0 \in I$), on pose $s = s_{t_0}(t)$, $t \in I$

$$\text{On a } (s_{t_0}^{-1})'(s) = \frac{1}{s'_{t_0}(s_{t_0}^{-1}(s))} = \frac{1}{\|\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))\|}.$$

$$\text{Donc } \tilde{\gamma}' = (\gamma \circ s_{t_0}^{-1})'(s) = \gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))(s_{t_0}^{-1})'(s) = \frac{\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))}{\|\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))\|}$$

En dérivant une deuxième fois, on obtient

$$\tilde{\gamma}'' = \frac{\gamma''(s_{t_0}^{-1}(s))}{\|\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))\|^2} + \lambda(s)\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))$$

$$\text{où } \lambda \text{ est la dérivée de la fonction } s \mapsto \frac{1}{\|\gamma'(s_{t_0}^{-1}(s))\|}$$

$$\text{On a donc } \det(\tilde{\gamma}'(s), \tilde{\gamma}''(s)) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

D'autre part, on a $\det(\tilde{\gamma}'(s), \gamma''(s)) = \det(\overrightarrow{T}(s), \kappa(s)\overrightarrow{N}(s)) = \bar{\kappa}(s)$ d'où le résultat.

□

2.3 Courbes gauches

2.3.1 Plan osculateur en un point bi-régulier

Définition 2.12. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière de classe C^2 , (Γ) sa trajectoire, M un point de (Γ) .

On dit que $M(t)$ est un point **bi-régulier** si la famille $(\overrightarrow{\gamma}'(t), \overrightarrow{\gamma}''(t))$ est libre.

Définition 2.13. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2 . Γ sa trajectoire, $M = \gamma(s)$ un point bi-régulier de Γ .

On appelle **plan osculateur** la plan passant par M et dirigé par la famille $(\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s))$

On appelle **vecteur normal principal** de Γ en un point bi-régulier $M = \gamma(s)$.

$$\text{Le vecteur } \overrightarrow{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \overrightarrow{T}'(s) = \frac{\overrightarrow{\gamma}''(s)}{\|\overrightarrow{\gamma}''(s)\|}$$

Remarque 2.3.1. Le vecteur $\overrightarrow{N(s)}$ est le vecteur unitaire de la normale principal dirigé vers la concavité de la courbe au point M , il est situé dans le plan osculateur.

2.3.2 Binormal et Repère de Serret-Frenet

Définition 2.14. On appelle vecteur unitaire **binormal** à Γ en $M = \gamma(s)$ et noté \vec{B} ; le vecteur définit par

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s)$$

Remarque 2.3.2. Le vecteur $\vec{B}(s)$ en un point M de la courbe est perpendiculaire en ce point au plan osculateur.

Définition 2.15. Le repère $(M, \vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s))$ est un repère orthonormé directe appelé repère de **Serret-Frenet** de la courbe Γ au point M

Remarque 2.3.3. Les vecteurs $\vec{N}(s)$ et $\vec{B}(s)$ engendrent le plan normal à la courbe au point M

2.3.3 La torsion d'une courbe

Proposition 2.5. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée normale de classe C^3 et $M = \gamma(s)$ un point birégulier de Γ . Le vecteur $\overrightarrow{B'(s)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{N(s)}$. En particulier, il existe une application continue $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall s \in I \quad \overrightarrow{B'(s)} = \tau(s)\overrightarrow{N(s)}$

Preuve. Soit $s \in I$. On a $\overrightarrow{B(s)} \cdot \overrightarrow{B(s)} = \|\overrightarrow{N(s)}\|^2$.

En dérivant, on obtient $\overrightarrow{B'(s)} \cdot \overrightarrow{B(s)} = 0$.

puisque $\overrightarrow{B(s)} \cdot \overrightarrow{T(s)} = 0$, on obtient en dérivant $\overrightarrow{B'(s)} \cdot \overrightarrow{T(s)} + \overrightarrow{B(s)} \cdot \overrightarrow{T'(s)} = \overrightarrow{B'(s)} \cdot \overrightarrow{T(s)} = 0$ car $\overrightarrow{T'(s)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{N(s)}$; donc orthogonal à $\overrightarrow{B(s)}$

Donc le vecteur $\overrightarrow{B'(s)}$ est orthogonal à $\overrightarrow{T(s)}$ et $\overrightarrow{B(s)}$; il est alors colinéaire à $\overrightarrow{N(s)}$. C'est-à-dire il existe une application $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{B'(s)} = \tau(s)\overrightarrow{N(s)}$ □

Définition 2.16. On appelle **torsion** de Γ en $M = \gamma(s)$ et on note τ le réel définit par

$$\tau(s) = \overrightarrow{B'(s)} \cdot \vec{N}(s)$$

Remarque 2.3.4. la torsion d'une courbe de l'espace mesure comment tourne le vecteur \vec{B}

Définition 2.17. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée normale régulière de classe C^2 .

La courbure de γ au point $M = \gamma(s)$ est $\kappa(s) = \|\gamma'(s)\|$

Proposition 2.6. Soit $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée normale , de courbure κ et de torsion τ , et M un point biregulier

alors on a les formules de Frenet :

$$\begin{cases} \vec{T}'(s) = \kappa(s)\vec{N}(s) & (1) \\ \vec{N}'(s) = -\kappa(s)\vec{T}(s) - \tau(s)\vec{B}(s) & (2) \\ \vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s) & (3) \end{cases}$$

Démonstration. Les formules (1) et (3) ont déjà été démontrées précédemment.

Pour montrer la formule (2) nous allons calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{N'(s)}$ dans la base de Serret-Frenet.

Soit $s \in I$, on a $\overrightarrow{N(s)} \cdot \overrightarrow{N(s)} = 1$, en dérivant , on obtient $\overrightarrow{N'(s)} \cdot \overrightarrow{N(s)} = 0$.

D'autre part, pour tout $s \in I$, $\overrightarrow{B(s)} \cdot \overrightarrow{N(s)} = 0$, en dérivant on obtient $\overrightarrow{N'(s)} \cdot \overrightarrow{B(s)} + \overrightarrow{N(s)} \cdot \overrightarrow{B'(s)} = 0$ d'où $\overrightarrow{N'(s)} \cdot \overrightarrow{B(s)} = -\overrightarrow{N(s)} \cdot \overrightarrow{B'(s)} = -\overrightarrow{N(s)} \cdot (\tau(s)\overrightarrow{N(s)}) = -\tau(s)$.

De même, pour tout $s \in I$, $\overrightarrow{N(s)} \cdot \overrightarrow{T(s)} = 0$, en dérivant on obtient $\overrightarrow{N'(s)} \cdot \overrightarrow{T(s)} = -\overrightarrow{N(s)} \cdot \overrightarrow{T'(s)} = -\overrightarrow{N(s)} \cdot (\kappa(s)\overrightarrow{N(s)}) = -\kappa(s)$ □

SURFACES DE L'ESPACE

U est un ouvert de \mathbb{R}^2 ; et k désigne un entier supérieur ou égale à 1 . \mathbb{R}^3 un espace affine réel euclidien, muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

3.1 Généralités sur les surfaces

3.1.1 Définitions

Définition 3.1. On appelle *nappe paramétrée régulière* (de classe C^k) toute application $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^k sur U

On dit que $\Phi(U)$ est une surface admettant Φ pour représentation paramétrique.

Définition 3.2. soit ϕ une nappe paramétrée de classe C^k de la forme

$$\begin{aligned} \phi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (f(u, v), g(u, v), h(u, v)) \end{aligned}$$

L'ensemble S des points (x, y, z) de \mathbb{R}^3 tel qu'il existe $(u, v) \in U$ vérifiant :

$$\begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases} \text{ est une } \mathbf{surface\ définie\ par\ paramétrage} ; u \text{ et } v \text{ sont les paramètres}$$

Définition 3.3. Soit F une application de classe C^k sur ouvert O de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} .

Soit l'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = 0\}$; S est la surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$

3.1.2 Plan tangent à une surface

1) Plan tangent en un point d'une surface définie par une représentation paramétrique

Définition 3.4. Soient

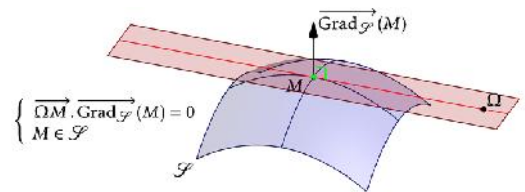
$\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(u, v) \mapsto M(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ une nappe paramétrée de classe C^1 , $\mathcal{S} = \Phi(U)$, $M(u, v)$ un point de \mathcal{S} .

On dit que $M(u, v)$ est **un point régulier** si et seulement si la famille $\left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \right)$ est libre ;

Remarque 3.1.1.

- On dit que $M(u, v)$ est **un point régulier** de \mathcal{S} si $\overrightarrow{grad} \dot{S}(M) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \neq \vec{0}$.
- On dit que Φ est une nappe paramétrée régulière ou que \mathcal{S} est une surface régulière si et seulement si pour tout $(u, v) \in U$, $M(u, v)$ est un point régulier de \mathcal{S} .

Définition 3.5. On appelle **plan tangent** en $M(u, v)$ à \mathcal{S} le plan passant par $M(u, v)$ et dirigé par $\left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \right)$;



Remarque 3.1.2.

- Le vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{grad} \dot{S}(M)$ est un vecteur normal à la surface en $M(u, v)$ et la droite de repère $(M(u, v), \vec{n})$ est la normale à la surface en $M(u, v)$.
- Un point $M(X, Y, Z)$ appartient au plan tangent en $\Omega(u, v)$ si et seulement si

$$\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{grad} \dot{S}(M) = 0$$

Exemple 3.1.1. Soit la surface \mathcal{S} de représentation paramétrique $\begin{cases} x = u + v^2 \\ y = u^2 + v \\ z = uv \end{cases}$

- a) Montrer que le point A de paramètre $(u = 1, v = 1)$ de la surface \mathcal{S} est un point régulier de \mathcal{S} .
- b) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent Π en A à \mathcal{S}

L'application

$\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de classe C^1
 $(u, v) \mapsto (u + v^2, u^2 + v, uv)$

et pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) = (1, 2u, v)$; $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) = (2v, 1, u)$.

Ainsi $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(1, 1) = (1, 2, 1)$; $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(1, 1) = (2, 1, 1)$

$\vec{n} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(1, 1) \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(1, 1) = (1, 1, -3) \neq \vec{0}$. D'où $\left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \right)$ est libre et donc $A(2, 2, 1)$ est un point régulier de \mathcal{S}

Une équation caractéristique du plan tangent (Π) est

$$M(X, Y, Z) \in (\Pi) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\text{grad } S}(M) = 0 \iff \begin{pmatrix} X - 2 \\ Y - 2 \\ Z - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (\Pi) : X + Y - 3Z - 1 = 0$$

3.1.3 Plan tangent en un point d'une surface définie par une équation cartésienne

Définition 3.6. Soit \mathcal{S} une surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$ où $F : O \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^k sur un ouvert O de \mathbb{R}^3 ;

On dit qu'un point $A(a, b, c)$ de \mathcal{S} est régulier si $\overrightarrow{\text{grad } F}(A) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(A), \frac{\partial F}{\partial y}(A), \frac{\partial F}{\partial z}(A) \right) \neq \vec{0}$

Proposition 3.1. Soit $A(a, b, c) \in \mathcal{S}$, \mathcal{S} une surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$.

Si $\overrightarrow{\text{grad } F}(A) \neq \vec{0}$ alors le plan tangent en A à \mathcal{S} est normal à $\overrightarrow{\text{grad } F}(A)$ et admet pour équation cartésienne

$$(X - a) \frac{\partial F}{\partial x}(A) + (Y - b) \frac{\partial F}{\partial y}(A) + (Z - c) \frac{\partial F}{\partial z}(A) = 0$$

Démonstration. cf [6] page 239-240

Exemple 3.1.2. Déterminons une équation du plan tangent en $A(1, 1, 1)$ à la surface \mathcal{S} d'équation cartésienne $x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1 = 0$

L'application

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \longmapsto x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1$$

$F(1, 1, 1) = 0$; alors $A \in \mathcal{S}$; et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2xy^3 + 3z^2x^2$;

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2z^2 + 2zx^3. \text{ D'où } \frac{\partial F}{\partial x}(A) = 5 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z}(A) = 1$$

Ainsi, \mathcal{S} admet en A un plan tangent Π d'équation cartésienne : $5(X - 1) + (Y - 1) + (Z - 1) = 0$

$$\Pi : \quad 5X + Y + Z - 5 = 0$$

3.2 Surfaces réglées ; surfaces développables

3.2.1 Surfaces réglées

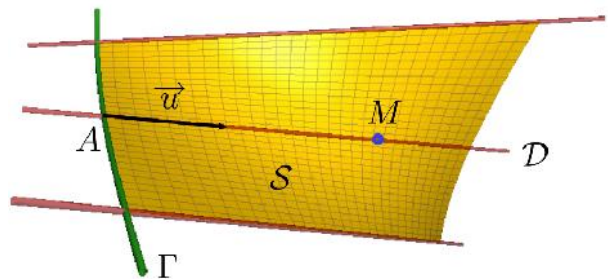
Définition 3.7. Une surface \mathcal{S} est réglée lorsqu'elle est engendrée par des droites.

Définition 3.8. Une surface \mathcal{S} est réglée lorsqu'elle admet un paramétrage de la forme

$$I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \lambda) \longmapsto A(t) + \lambda \vec{u}(t)$$

où A et \vec{u} sont des applications de classe C^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} avec $\vec{u}(t) \neq \vec{0} \forall t \in I$



Remarque :

La famille de droites $(D_t)_{t \in I} = A(t) + \langle \vec{u}(t) \rangle$ est une famille génératrice de (\mathcal{S})

Exemple 3.2.1. les cylindres et les cônes sont les surfaces réglées.

Proposition 3.2. .

Le plan tangent en un point régulier d'une surface réglée contient la(les) **génératrice(s)** passant par ce point.

Démonstration. Soit

$$\phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \lambda) \longrightarrow A(t) + \lambda \vec{u}(t)$$

une représentation paramétrique d'une surface réglée (\mathcal{S}) et M

un point régulier de \mathcal{S} . On a $(\frac{\partial \vec{M}}{\partial t}(t, \lambda), \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}(t, \lambda))$ libre. puisque $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}(t, \lambda) = \vec{u}(t)$, il vient que $\vec{u}(t)$ vecteur de la génératrice passant par M est le vecteur directeur du plan tangent à \mathcal{S} en M \square

3.2.2 Surfaces développables

Définition 3.9. On dit qu'une surface réglée (\mathcal{S}) est développable lorsque son plan tangent est constant le long de ses génératrices.

Théorème 3.1. .

Soit

$$\phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{une représentation paramétrique d'une surface réglée } \mathcal{S}. \text{ On}$$

$$(t, \lambda) \longrightarrow A(t) + \lambda \vec{u}(t)$$

suppose que $\forall t \in I$ $(\vec{A}'(t), \vec{u}(t))$ est libre .

Alors \mathcal{S} est développable si et seulement si $\forall t \in I, (\vec{A}'(t), \vec{u}(t), \vec{u}'(t))$ est lié.

Démonstration. réf : [6] □

Exemple 3.2.2. Les **cylindres** et les **cônes** sont des surfaces développables

Remarque 3.2.1. .

Toute surface développable est réglée mais la réciproque est fausse.

Par exemple, l'hélice circulaire de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \lambda \cos(t) \\ y = \lambda \sin(t) \\ z = \alpha t \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}^*$$

est une surface réglée, car elle admet une représentation paramétrique

$$\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{avec } A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{et } \vec{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \lambda) \longrightarrow A(t) + \lambda \vec{u}(t) \quad t \longmapsto (0, 0, \alpha t) \quad t \longmapsto (\cos(t), \sin(t), 0)$$

Et de plus, $\forall t \in \mathbb{R}, \vec{u}(t) \neq \vec{0}$

On a $\vec{A}'(t) = (0, 0, \alpha)$, $\vec{u}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$; ainsi $\vec{A}'(t) \wedge \vec{u}(t) = (-\alpha \cdot \sin(t), \alpha \cdot \cos(t), 0)$.

Donc $(\vec{A}'(t), \vec{u}(t))$ est libre. Puisque $\det(\vec{A}'(t), \vec{u}(t), \vec{u}'(t)) = \begin{vmatrix} 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \\ \alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha \neq 0$

On déduit que $(\vec{A}'(t), \vec{u}(t), \vec{u}'(t))$ n'est pas lié $\forall t \in \mathbb{R}$.

l'hélice circulaire n'est pas une surface développable .

3.2.3 Surfaces usuelles

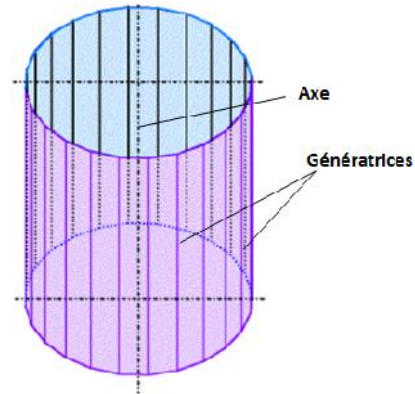
a) *Cylindres*

Définition 3.10. Soit \vec{u} une direction de droite et Γ une courbe.

on appelle **cylindre** une surface réglée développable engendrée par les droites parallèles à la direction \vec{u} , appelée direction du cylindre, de directrice Γ et dont

$$\phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 ; \text{ où } (t, \lambda) \longmapsto A(t) + \lambda \vec{u}$$

$A : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de Γ , de classe C^1 .



Pour tout point M du cylindre \mathcal{S} , on appelle *génératrice* de M sur \mathcal{S} la droite passant par M et de direction \vec{u}

Remarque 3.2.2.

- Un point d'un cylindre admet une unique génératrice.
- Le cylindre admet une infinité de directrices

Proposition 3.3. Une surface S est un cylindre si et seulement si son équation cartésienne dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est de la forme $f(P, Q) = 0$ où P et Q sont des plans sécants, f une application de classe C^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Les génératrices de \mathcal{S} sont parallèles à la droite $D = P \cap Q$ d'équation cartésienne $\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0 \end{cases}$

Preuve : réf : [6]

Exemple 3.2.3. La surface \mathcal{S} d'équation cartésienne : $e^{x^2+y^2+z^2} - (x+z)e^{-2xz} = 0$ est un cylindre.

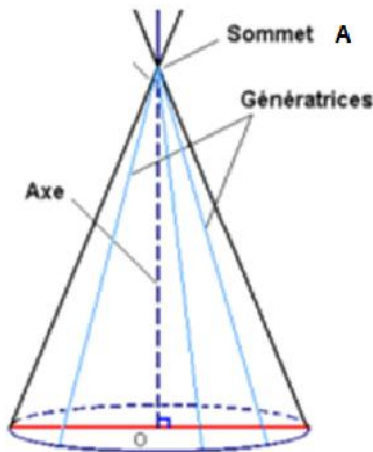
\mathcal{S} admet pour équation cartésienne $e^{P^2+Q^2} - P = 0$ qui est de la forme $f(P, Q) = 0$,

avec $P = x + z, Q = y$ et $f(t, \lambda) = e^{t^2+\lambda^2} - t^2$

Les génératrices de \mathcal{S} sont parallèles à la droite d'équation cartésienne $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Donc les génératrices sont parallèles à $\vec{u} = \vec{i} - \vec{k}$

b) Cônes



Définition 3.11. .

Soit A un point de l'espace, Γ une courbe.
On appelle **cône** \mathcal{S} de sommet A et de directrice Γ , la surface réglée développable engendrée par les droites passant par A et de représentation

paramétrique

$$\Phi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(t, \lambda) \longmapsto A + \lambda \overrightarrow{Au(t)}$$

où $u : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une représentation paramétrique de Γ . Le sommet A est obtenu pour $\lambda = 0$

Pour tout point M du cône \mathcal{S} , sauf A , on appelle **génératrice** de M sur \mathcal{S} la droite (AM)

Proposition 3.4. .

Une surface S est un cône si et seulement si son équation cartésienne dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de la forme $f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0$, où P, Q et R sont des plans (sécants en un seul point) et f une fonction homogène de classe C^1 sur un ouvert de \mathbb{R} . Le sommet $A = P \cap Q \cap R$ de \mathcal{S} est définie par : $P = 0, Q = 0, R = 0$.

Preuve. .

Soit S un cône de sommet A et de directrice Γ . On suppose que Γ est plane et que A n'est pas dans le plan de Γ . Alors il existe un repère orthonormé directe $\mathcal{R}' = (A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ tel que le plan \mathcal{P} admet pour équation cartésienne : $Z = h, h \in \mathbb{R}$

La directrice Γ admet une équation de la forme :

$$\begin{cases} f(X, Y) = 0 \\ Z = h \end{cases}$$

Soit $M(X, Y, Z)$ un point de l'espace tel que $Z \neq 0$

$$M \in S \iff \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{Au(t)} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$\iff \exists (X_1, Y_1, h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \quad / \quad X = \lambda X_1, Y = \lambda Y_1, Z = \lambda h \text{ et } f(X_1, Y_1) = 0$$

$$\iff f\left(\frac{hX}{Z}, \frac{hY}{Z}\right) = f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = 0 \quad \text{car } f \text{ est une fonction homogène}$$

En transformant X, Y et Z par des formules de changement de repère en des expressions du type P, Q et R affines on obtient $f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0$ □

Exemple 3.2.4. Considérons la surface \mathcal{S} d'équation cartésienne : $z^2 - xy - 2z + 1 = 0$.

Cette équation peut s'écrire : $-xy + (z - 1)^2 = 0$

Considérons la surface \mathcal{S}' obtenue en enlevant à \mathcal{S} les deux droites d'équation cartésiennes

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}; \text{ Ainsi, } \mathcal{S} \text{ admet pour équation cartésienne : } -\frac{x}{z-1} \frac{y}{z-1} + 1 = 0,$$

qui est de la forme $f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0$ avec $P = x$, $Q = y$, $R = z - 1$ et $f : (u, v) \mapsto -uv + 1$.

Donc \mathcal{S}' est un cône, de sommet $A(0, 0, 1)$

3.3 Surfaces de révolution

3.3.1 Surface de révolution d'axe (Δ)

Définition 3.12. .

On appelle surface de révolution la surface \mathcal{S} obtenue en faisant tourner une courbe Γ autour d'une droite (Δ) .

Si un point M appartient à une surface de révolution, autour de (Δ) alors le cercle d'axe (Δ) passant par M est inclus dans S . On dit que c'est une **parallèle** à S .

Exemple 3.3.1. La sphère est une surface de révolution.

Remarque 3.3.1. .

- L'intersection d'une surface de révolution avec un plan contenant l'axe (Δ) donne une courbe sur S appelée méridien de S .
- Les parallèles et les méridiens d'une surface de révolution sont orthogonaux.

Propriété 3.1. .

Une surface S est une surface de révolution si son équation cartésienne dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est de la forme $f(P, \Sigma) = 0$ où P est un plan, Σ une sphère et f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

L'axe de S est la droite passant par le centre de Σ et orthogonal à P .

Preuve. cf [6] page 277

□

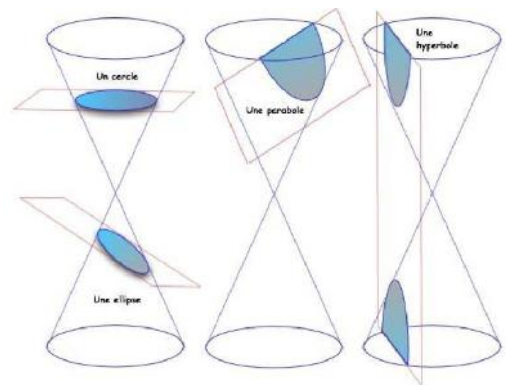
Exemple 3.3.2. La surface \mathcal{S} d'équation cartésienne $xy + yz + zx + x + y + z + 1 = 0$ est de révolution, puisque en notant $P = x + y + z$ et $\Sigma = x^2 + y^2 + z^2$, \mathcal{S} admet pour équation : $P^2 - \Sigma + 2P + 2 = 0$ L'axe de \mathcal{S} est la droite passant par O et dirigé par $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

3.3.2 Sections planes de cônes et de cylindres de révolution

a) Section plane de cône de révolution

l'intersection d'un cône de révolution (C) par un plan P ne passant pas par le sommet S de (C)

- un cercle** si P est perpendiculaire à l'axe de (C)
- une ellipse** Si le plan est incliné avec l'axe de la conique et ne coupe qu'une seule des deux nappes
- une parabole** si le plan (P) est parallèle au plan tangent au cône
- Une hyperbole** Si le plan est incliné ou parallèle à l'axe de la conique et coupe les deux nappes.



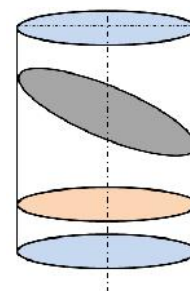
b) section plane de cylindre de révolution

L'intersection d'un cylindre de révolution avec un plan est :

Soit le vide, soit constitué d'une ou deux génératrices si l'axe du cylindre est parallèle au plan.

un cercle si le plan est perpendiculaire à l'axe du cylindre.

une ellipse si le plan n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à l'axe du cylindre



3.4 Quadriques affines

Étude analytique des quadriques affines

3.4.1 Généralité sur les quadriques affines

Définition 3.13. On appelle *quadrique affine euclidienne de l'espace*, toute ensemble (\mathcal{Q}) d'équation cartésienne de la forme $(\mathcal{Q}) : \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta xy + 2\xi xz + 2\zeta yz + mx + ny + pz + k = 0$ où $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \zeta) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$

Remarque 3.4.1. .

L'équation générale d'une quadrique affine est de la forme $q(x, y, z) + L(x, y, z) + K = 0$ où

- $q(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta xy + 2\xi xz + 2\zeta yz$ définit une forme quadratique dont la matrice symétrique dans la base canonique \mathcal{B} est $A = \begin{pmatrix} \alpha & \delta & \xi \\ \delta & \beta & \zeta \\ \xi & \zeta & \gamma \end{pmatrix}$
- $L(x, y, z) = mx + ny + pz$ définit une forme linéaire, dont la matrice dans la base \mathcal{B} est $L = \begin{pmatrix} m & n & p \end{pmatrix}$

Remarque 3.4.2. Les équations de degré 2 à trois variable peuvent définir plusieurs ensemble simples

- le vide : $x^2 + y^2 + z^2 = -1$
- un point : $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
- une droite : $x^2 + y^2 = 0$
- un plan : $x^2 = 0$
- La réunion de deux plans : $xy = 0$ ou $x^2 - y^2 = 0$

3.4.2 Centre d'une quadrique

Définition 3.14. On dit point Ω est centre d'une surface d'équation $F(x, y, z) = 0$ où F est un polynôme de degré en x, y, z si Ω est le centre de symétrie de cette surface. C'est-à-dire pour tout point M de l'espace ; $F(\Omega + \overrightarrow{\Omega M}) = F(\Omega - \overrightarrow{\Omega M})$.

Proposition 3.5. Soit \mathcal{Q} une quadrique d'équation cartésienne de la forme $F(x, y, z) = 0$ dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. soit Ω un point de l'espace

Ω est centre de la quadrique \mathcal{Q} si et seulement si $\frac{\partial F}{\partial x}(\Omega) = \frac{\partial F}{\partial y}(\Omega) = \frac{\partial F}{\partial z}(\Omega) = 0$

Démonstration. Soit $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace. Ω est centre de la quadrique ,
alors $F(\Omega + \overrightarrow{\Omega M}) = F(\Omega - \overrightarrow{\Omega M})$ où M de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} , (X, Y, Z) dans le repère
 $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

on a $F(x_0 + X, y_0 + Y, z_0 + Z) = F(x_0 - X, y_0 - Y, z_0 - Z)$

$$\text{On en déduit que } \begin{cases} 2\alpha x_0 + 2\delta y_0 + 2\varepsilon z_0 + m = 0 \\ 2\delta x_0 + 2\beta y_0 + 2\zeta z_0 + n = 0 \\ 2\varepsilon x_0 + 2\zeta y_0 + 2\gamma z_0 + p = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \frac{\partial F}{\partial x}(\Omega) = \frac{\partial F}{\partial y}(\Omega) = \frac{\partial F}{\partial z}(\Omega) = 0 \quad \square$$

Remarque 3.4.3. .

Soit A la matrice symétrique d'une forme quadratique associée à la base \mathcal{B} . Si A est inversible alors la quadrique (\mathcal{Q}) admet un centre de symétrie. On dit que (\mathcal{Q}) est une quadrique à centre.

Si A n'est pas inversible, la quadrique (\mathcal{Q}) n'admet pas de centre on bien admet une infinité de centre de symétrie.

3.4.3 Réduction des quadriques affines

I) Quadriques à centre

On suppose ici que A est inversible, rang de $\text{rang}(A) = 3$.

Alors A admet trois valeurs propres λ, μ, ν non nulles Soit Ω le centre de la quadrique (\mathcal{Q}) .

La matrice A étant symétrique, il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} et de coordonnées (X, Y, Z) dans le

$$\text{repère } \mathcal{R}'' = (\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ où } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} ;$$

$$P \text{ la matrice de passage de la base } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ à la base } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ telles que } D = {}^t P A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{Q}) &\iff {}^t X A X + J = 0 \\ &\iff {}^t \left(P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) A \left(P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) + J = 0 \\ &\iff (x \ y \ z) D \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + J = 0 \end{aligned}$$

Donc l'équation de (\mathcal{Q}) dans le repère \mathcal{R}'' est de la forme $\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 + J = 0$

On peut supposer, quitte à multiplier par -1 et à permuter les rôles de X, Y, Z que $\lambda, \mu > 0$
 Ainsi, l'équation cartésienne de la quadrique (\mathcal{Q}) est de la forme

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \varepsilon \frac{Z^2}{c^2} = \varepsilon' \quad \text{où } a, b, c > 0, \varepsilon \in \{-1, 1\}, \text{ et } \varepsilon' \in \{-1, 0, 1\}$$

appelé équation réduite de la quadrique (\mathcal{Q})

II) Quadriques non centrées

Dans ce cas, la matrice A n'est pas inversible. C'est-à-dire $\text{rang}(A) \leq 2$. Puisque $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$, alors $\text{rang}(A) \geq 1$ d'où A admet au plus deux valeurs propres non nulles λ et μ

La matrice A étant symétrique, il existe une base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ telle que si P est la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, alors $D = {}^t P A P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda \in \mathbb{R}^*, \mu \in \mathbb{R}$

Posons $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ où (x', y', z') sont les coordonnées d'un point M de l'espace

dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. L'équation de (\mathcal{Q}) devient :

$$\lambda x'^2 + \mu y'^2 + 2\alpha x' + 2\beta y' + 2\gamma z' + k = 0 \quad \text{où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$$

i) Cas où $\text{rang}(A) = 2$

Ici $\mu \neq 0$ et (\mathcal{Q}) a pour équation dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$\lambda \left(x' + \frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 + \mu \left(y' + \frac{\beta}{\mu}\right)^2 + 2\gamma z' - \frac{\alpha^2}{\lambda} - \frac{\beta^2}{\mu} + k = 0$$

En utilisant la formule de changement de repère $\begin{cases} X = x' + \frac{\alpha}{\lambda} \\ Y = y' + \frac{\beta}{\mu} \end{cases}$

On se ramène à l'équation $\lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\gamma z' + k' = 0$ où $k' = -\frac{\alpha^2}{\lambda} - \frac{\beta^2}{\mu} + k$

On distingue deux sous cas :

★ Si $\gamma \neq 0$

En posant $Z = -(z' + \frac{k'}{2\gamma})$ et en considérant le point $\Omega(\frac{-\alpha}{\lambda}, \frac{-\beta}{\mu}, \frac{-k'}{2\gamma})$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, une équation de la quadrique (\mathcal{Q}) dans le repère \mathcal{R}'' est $\lambda X^2 + \mu Y^2 = 2\gamma Z$

On peut supposer, quitte à multiplier par (-1) et en échangeant les rôles de X et Y que $\lambda > 0$

Ainsi, l'équation réduite de la quadrique est de la forme

$$\frac{X^2}{a^2} + \varepsilon \frac{Y^2}{b^2} = \varepsilon' \frac{2Z}{c} \text{ où } a, b, c > 0, \varepsilon \in \{-1, 1\}, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$$

★ Si $\gamma = 0$,

on considère le point $\Omega(\frac{-\alpha}{\lambda}, \frac{-\beta}{\mu}, 0)$ une équation de la quadrique (\mathcal{Q}) dans le repère

\mathcal{R}'' est de la forme, $\lambda X^2 + \mu Y^2 + k' = 0$ où $k' = -\frac{\alpha^2}{\lambda} - \frac{\beta^2}{\mu} + k$.

En multipliant éventuellement par (-1) et en changeant les rôles de X, Y on peut supposer que $\lambda > 0$

Ainsi l'équation de la quadrique (\mathcal{Q}) est de la forme :

$$\frac{X^2}{a^2} + \varepsilon \frac{Y^2}{b^2} = \varepsilon' \quad \text{où } a, b > 0, \varepsilon \in \{-1, 1\}, \varepsilon' \in \{-1, 0, 1\}.$$

ii) Cas où $\text{rang}(A) = 1$

Ici, $\mu = 0$ et (\mathcal{Q}) a pour équation dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$:

$$\lambda(x' + \frac{\alpha}{\lambda})^2 + 2\beta y' + 2\gamma z' - \frac{\alpha^2}{\lambda} + k = 0$$

On a de nouveau deux sous cas

- Si $\beta = \gamma = 0$

Alors (\mathcal{Q}) est l'ensemble vide, un plan double ou la réunion de deux plans parallèles .

- Si $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$, en posant $X = x' + \frac{\alpha}{\lambda}$ et en considérant le point $\Omega(-\frac{\alpha}{\lambda}, 0, 0)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$: l'équation de (\mathcal{Q}) dans le repère \mathcal{R}'' est de la forme

$$\lambda X^2 + 2\beta y' + 2\gamma z' - \frac{\alpha^2}{\lambda} + k = 0$$

En posant ensuite $Y = \frac{\beta y' + \gamma z' + \frac{k'}{2}}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$ et $Z' = \frac{-\gamma y' + \beta z'}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$ où $k' = -\frac{\alpha^2}{\lambda} + k$.

C'est-à-dire en faisant tourner le repère autour de l'axe (ΩX) on se ramène à une équation cartésienne dans le repère \mathcal{R}'' de la forme

$$\lambda X^2 + 2\beta' Y = 0 \quad \text{où } \beta' \in \mathbb{R}^*$$

D'où (\mathcal{Q}) admet une équation réduite de la forme $X^2 = 2pY$ $p \in \mathbb{R}^*$.

3.4.4 Classification des quadriques

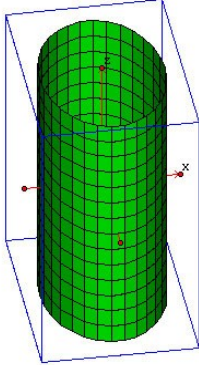
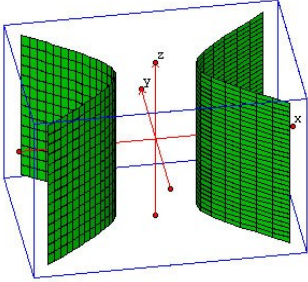
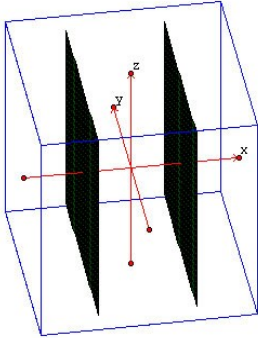
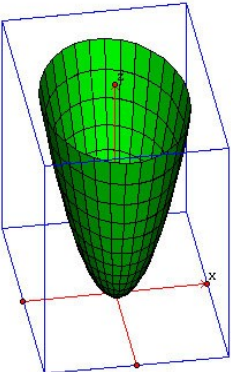
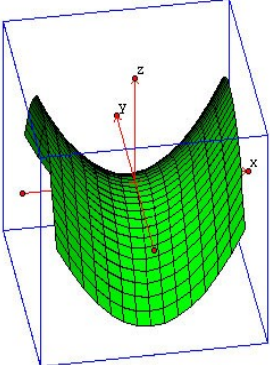
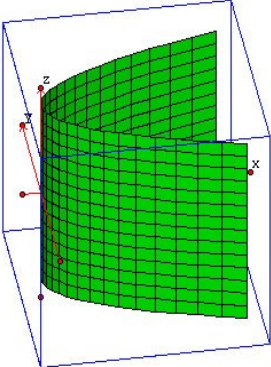
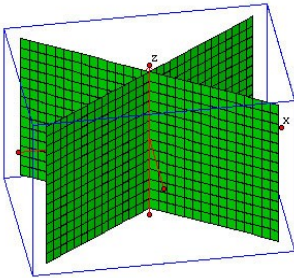
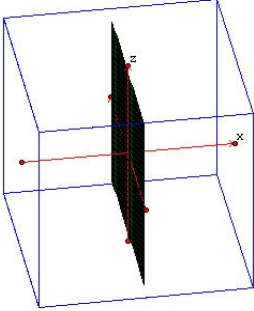
Tableau de classification

D'après la réduction des équations des quadriques , on obtient le tableau de classification suivant dans un repère orthonormé pour chacune des quadriques suivant le rang et la signature de la forme quadratique associée.

Classification des quadriques dans \mathbb{R}^3

Quadriques non dégénérées (ou à centre) : $\text{rg}(Q)=3$

Quadriques dégénérées : $rg(Q) \leq 2$

Signature (2;0)	Signature (1;1)	Signature (1;0)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: cylindre elliptique 	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: cylindre hyperbolique 	$\frac{x^2}{a^2} = 1$: deux plans parallèles 
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$: paraboloides elliptique 	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$: paraboloides hyperbolique 	$x^2 = 2py$: cylindre parabolique 
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$: une droite La droite (Oz)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$: deux plans sécants 	$\frac{x^2}{a^2} = 0$: un plan 
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$: vide	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$: cylindre hyperbolique	$\frac{x^2}{a^2} = -1$: vide

Exemple 3.4.1.

Déterminons la nature de la quadrique (\mathcal{Q}) d'équation $-2xy + 2z = 2$

La forme quadratique associée est $q(x, y, z) = -2xy$ dont la matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Le polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

Les sous espaces propres associés aux valeurs propres sont :

$E_{\lambda_1} = \langle \vec{u} \rangle$; $E_{\lambda_2} = \langle \vec{v} \rangle$; $E_{\lambda_3} = \langle \vec{w} \rangle$ où $\vec{u} = \vec{k}$; $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$; $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$
 $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée dans laquelle la matrice de q est diagonale .

$$\text{On a } D = {}^t P A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $M(x, y, z)$ dans le repère \mathcal{R} et de coordonnées (x', y', z') dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Ainsi l'équation de (\mathcal{Q}) dans le repère \mathcal{R}' est :

$$y'^2 + z'^2 + 2x' = 2 \iff z'^2 - y'^2 = 2(x' - 1)$$

En posant les formules de changement de repère $X = x' - 1$, $Y = y'$, $Z = z'$ on a l'équation réduite de (\mathcal{Q}) dans le repère \mathcal{R}'' où $\Omega(1, 0, 0)$ dans \mathcal{R}' de la forme

$$Z^2 - Y^2 = 2X$$

(\mathcal{Q}) est une **paraboloïde hyperbolique**

Étude géométrique des quadriques affines

3.4.5 Principales quadriques

1) L'ellipsoïde

Un ellipsoïde est une quadrique à centre de l'espace.

Toute section par un plan parallèle à l'un des plans de coordonnées est une ellipse, un point ou le vide.

Équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; $a, b, c > 0$. Le point O est centre de symétrie.

Si $a = b$ c'est une ellipsoïde de révolution d'axe (Oz) ; obtenu en faisant tourner une ellipse autour d'un de ses axes de symétrie (Ox) , (Oy) et (Oz) .

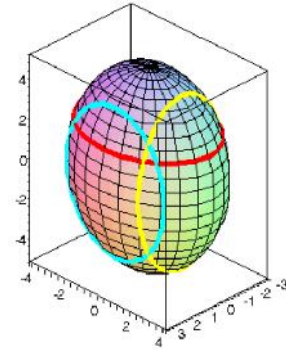
Il permet ainsi d'obtenir les miroirs elliptiques des projecteurs de cinéma et les ballons de rugby.

Si $a = b = c$ l'ellipsoïde est une sphère.

Une équation paramétrique de l'ellipsoïde est de la forme

$$\begin{cases} x = a \cos(\theta) \cos(\phi) \\ y = b \cos(\theta) \sin(\phi) \\ z = c \sin(\theta) \end{cases} \text{ où } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \phi \in [-\pi, \pi]$$

Le volume de l'ellipsoïde est égale $V = \frac{4}{3}\pi abc$ et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$ si $a \geq b \geq c$



2) Les hyperboloïdes

Un hyperboloïde est une quadrique à centre de l'espace .

On distingue deux types d'hyperboloïdes :

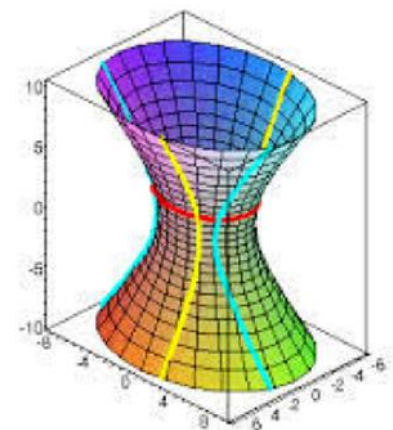
a) Hyperboloïde à une nappe

L'hyperboloïde à une nappe est une surface devant son nom au fait qu'il est d'un seul tenant (la surface n'est pas séparée en deux parties) et qu'on peut l'obtenir par rotation d'une branche d'hyperbole.

La section par tout plan parallèle au plan (xOy) est une ellipse. et la section par tout plan parallèle au plan (yOz) ou (xOz) est une hyperbole

Équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ avec

$a > 0, b > 0, c > 0$ Le point O est centre de symétrie.



Une équation paramétrique de l'hyperboloïde à une nappe est de la forme

$$\begin{cases} x = ach(\phi)\cos(\theta) \\ y = bch(\phi)\sin(\theta) \\ z = csh(\phi) \end{cases}$$

où $\phi \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, 2\pi]$

Si $a = b = c$ c'est une hyperboloïde à une nappe de révolution d'axe (Oz) obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe de symétrie non focale.

C'est une surface réglée car on peut l'obtenir aussi comme enveloppe de famille de droites dites génératrices. Cela permet dans la pratique de réaliser le coffrage de construction de certains châteaux d'eau et de tour de refroidissement des centrales nucléaires à partir d'éléments rectilignes.

Ce qui assure leur stabilité et leur solidité même à très grande hauteur.

Proposition 3.6. *En tout point de l'hyperboloïde à une nappe, passent deux droites sécantes qui sont entièrement incluses dans l'hyperboloïde.*

Démonstration.

Soit (\mathcal{H}) l'hyperboloïde à une nappe. Une équation réduite de (\mathcal{H}) est de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 &\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \quad a > 0, b > 0, c > 0 \\ &\iff \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{aligned}$$

C'est-à-dire $\begin{vmatrix} b(cx - az) & ac(b - y) \\ ac(b + y) & b(cx + az) \end{vmatrix} = 0$ ou $\begin{vmatrix} b(cx - az) & ac(b + y) \\ ac(b - y) & b(cx + az) \end{vmatrix} = 0$

Soit donc $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de \mathcal{H} . Supposons $y_0 \neq b$ et $y_0 \neq -b$

Le premier déterminant montre que la droite (D) d'équation $\begin{cases} cx - az = ac \frac{cx_0 - az_0}{b - y_0} (b - y) \\ cx + az = ac \frac{cx_0 + az_0}{b + y_0} (b + y) \end{cases}$

est entièrement incluse dans \mathcal{H} et passe par A

Le deuxième déterminant montre que la droite (D') d'équation $\begin{cases} cx - az = ac \frac{cx_0 - az_0}{b + y_0} (b + y) \\ cx + az = ac \frac{cx_0 + az_0}{b - y_0} (b - y) \end{cases}$

est entièrement incluse dans \mathcal{H} et passe par A

Si $y_0 = b$ ou $y_0 = -b$ on obtient tout simplement les deux droites d'équations

$$\begin{cases} cx - az = cx_0 - az_0 \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} cx + az = cx_0 + az_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

passant par A et entièrement incluses dans \mathcal{H} .

Remarque 3.4.4. Une hyperboloïde à une nappe est engendrée par les deux familles de droites (D) et (D') ci-dessus.

b) **Hyperboloïde à deux nappes**

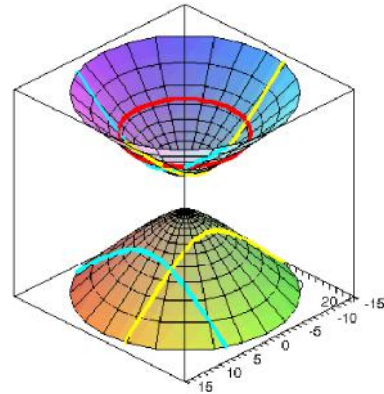
Le nom hyperboloïde à deux nappes provient du fait que la surface est séparée en deux parties. La section par tout plan parallèle au plan (xOy) est une ellipse, un singleton ou le vide et la section par un plan parallèle au plan (yOz) ou (xOz) est une hyperbole .

Équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Si $a = b$ c'est une hyperboloïde à deux nappes de révolutions; obtenue en faisant tourner une hyperbole autour de son axe focal

Une représentation paramétrique d'une seule des deux nappes est de la forme

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sh}(\phi) \cos(\theta) \\ y = b \operatorname{sh}(\phi) \sin(\theta) \\ z = c \operatorname{ch}(\phi) \end{cases} \text{ où } \phi \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in [0, 2\pi]$$



3) **Les cônes elliptiques**

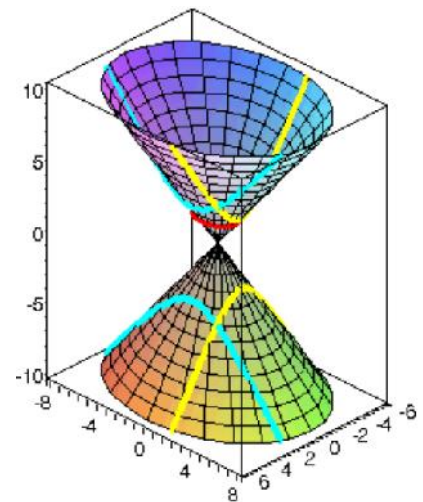
Un cône elliptique est une quadrique à centre non dégénérée de l'espace. Ce sont de surfaces réglées engendrées par le déplacement d'une droite (*génératrice*) passant par un point fixe (*sommet de la surface*) le long d'une courbe fermée (*directrice*)

Équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a > 0, b > 0, c > 0$

- Un cône elliptique est un cône de directrice une ellipse.
 - Les plans de coordonnée sont les plans de symétrie
 - La section d'un cône elliptique par un plan parallèle à (xOy) est une ellipse ou un singleton. Sa section par un plan contenant (Oz) est la réunion de deux droites sécantes en O et sa section par un plan parallèle au plan (yOz) ou (xOz) est une hyperbole.
- Si $a = b$, c'est un cône de révolution.

Une représentation paramétrique est de la forme

$$\begin{cases} x = a t \cos(\theta) \\ y = b t \sin(\theta) \\ z = c t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in [0, 2\pi]$$



4) Les paraboloides

Les paraboloides sont les quadriques de l'espace avec pour caractéristique de ne pas posséder de centre de symétrie. On distingue deux types de paraboloides :

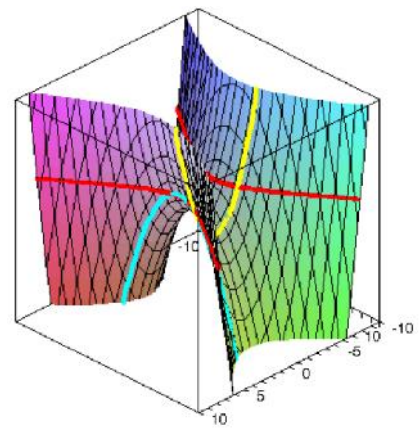
a) les paraboloides hyperboliques

Ce sont des surfaces réglées qui peuvent s'obtenir en faisant glisser une parabole sur une autre parabole tournant sa concavité dans le sens opposé. Le paraboloides a inspirer de nombreux architectes à savoir la réalisation des toits des grandes édifices dans le monde tel que le toit de la célèbre église du **Corbusier** en **France** ou du toit de la cathédrale de la **Sagrada familia** à Barcelone en Espagne

Équation

réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$, $a > 0, b > 0, c \neq 0$

Sa section par tout plan parallèle à (xOy) est une hyperbole $z \neq 0$ ou deux droites sécantes lorsque $z = 0$.
 En outre, sa section par un plan parallèle au plan (yOz) ou (xOz) est une parabole.



- La droite (Oz) est un axe de symétrie.
- Il n'est jamais de révolution.

Une équation paramétrique est de la forme

$$\begin{cases} x = at\operatorname{ch}(\theta) \\ y = bt\operatorname{sh}(\theta) \\ z = \frac{ct^2}{2} \end{cases} \text{ pour } \left| \frac{x}{a} \right| > \left| \frac{y}{b} \right| \text{ où } t \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

On inverse ch et sh , et le signe de z pour $\left| \frac{x}{a} \right| < \left| \frac{y}{b} \right|$

Proposition 3.7. *En tout point d'une paraboloides hyperbolique passent deux droites sécantes qui sont entièrement incluses dans cette paraboloides hyperbolique.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle de l'hyperboloides à une nappe.

b) Les paraboloides elliptiques

Ce sont des surfaces qui peuvent s'obtenir en faisant glisser une parabole sur une autre parabole tournant sa concavité dans la même direction.

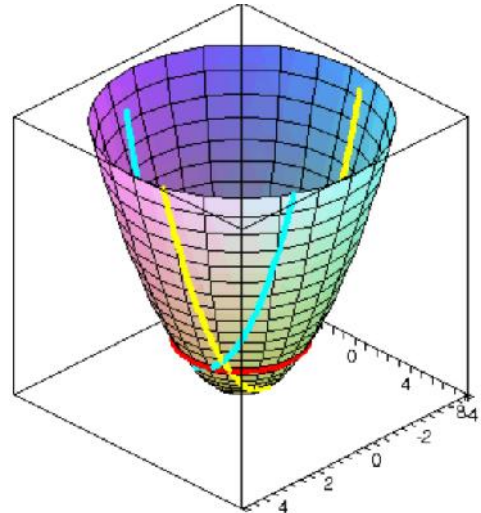
Équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$, $a > 0, b > 0, c \neq 0$

La droite (Oz) est un axe de symétrie.

Sa section par un plan parallèle à (xOy) est une ellipse, un singleton, ou \emptyset et sa section par un plan parallèle au plan (yOz) ou (xOz) est une parabole

Si $a = b$, c'est un parabolôïde elliptique de révolution d'axe (Oz) , obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe de symétrie

Cette surface possède des applications classiques ; elle donne sa forme autant à des projecteurs comme les phares des voitures, qu'à des capteurs comme les antennes paraboliques.



Une représentation paramétrique est de la forme

$$\begin{cases} x = at\cos(\theta) \\ y = bt\sin(\theta) \\ z = \frac{ct^2}{2} \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \theta \in [0, 2\pi]$$

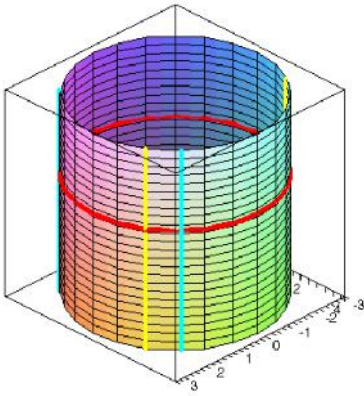
Le volume du **bol parabolôïde elliptique** de hauteur h est donné par la formule $V = \frac{1}{2}Sh$ où S désigne l'aire de l'ellipse qui le délimite .

5) Les surfaces cylindriques

Ce sont des surfaces engendrées par une droite (*génératrice*) se déplaçant parallèlement à une direction fixe le long d'une courbe (*directrice*). C'est la directrice qui précise le genre du cylindre.

a) Les cylindres elliptiques

Un cylindre elliptique est une quadrique dégénérée de l'espace, de directrice une ellipse



Équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

où a et b sont les demi-axes de l'ellipse obtenu par la section avec un plan d'équation $z = k$, $k \in \mathbb{R}$

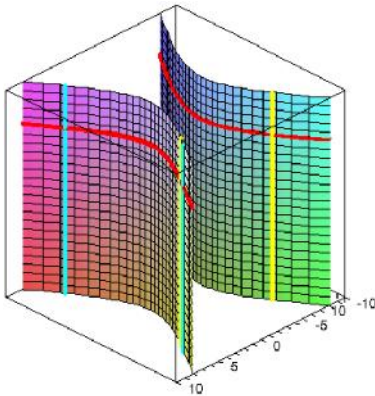
Sa section par un plan parallèle au plan (yOz) ou (xOz) donne deux droites parallèles.

Si $a = b$, c'est un cylindre de révolution.

Le cylindre elliptique a inspiré beaucoup d'architectes dans la réalisation de la coupole du dôme de Florence formé de huit portions de cylindres elliptiques

b) Cylindre hyperbolique

Un cylindre hyperbolique est une quadrique non dégénérée de l'espace de directrice une hyperbole.



Équation réduite : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

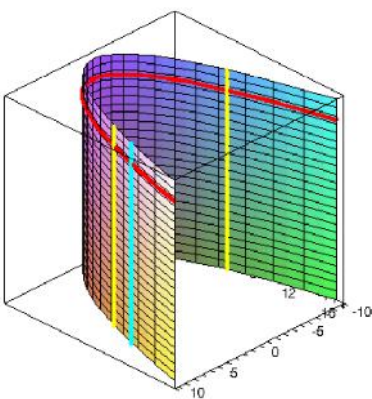
où a et b sont les paramètres de l'hyperbole obtenue par la section avec un plan d'équation $z = k$.

Sa section par un plan parallèle au plan (xOz) ou (yOz) donne deux droites parallèles

Si $a = b$, on obtient par section avec un plan d'équation $z = k$ une hyperbole équilatère.

c) Cylindre parabolique

Un cylindre parabolique est une quadrique dégénérée de directrice une parabole.



Équation réduite : $x^2 = 2py$; $p \in \mathbb{R}^*$ est le paramètre

de la parabole obtenue par la section avec un plan. Il a inspiré de nombreux ingénieurs dans la conception des centrales solaires cylindro-paraboliques.

INTÉRÊT PÉDAGOGIQUE : ÉTUDE DES CONIQUES

4.1 Introduction

Dans le programme officiel de mathématiques en vigueur au Cameroun, les coniques sont enseignées uniquement en classe de terminales de séries scientifiques C, E et techniques.

Les figures usuelles planes couramment rencontrées sont les triangles, les quadrilatères et les cercles. Quelques solides de l'espace dont les pyramides et les cônes y figurent et leur construction à la règle et au compas. Les formes géométriques planes rondes (coniques), à savoir les sections planes de cône circulaire droit autre que les cercles c'est-à-dire les paraboles, les ellipses et les hyperboles sont tardivement enseignées. C'est l'aspect analytique qui est beaucoup plus valorisés et ces coniques sont définies par leurs équations cartésiennes de la forme $y = ax^2 + bx + c$ pour les paraboles, de la forme $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ les hyperboles et $x^2 + y^2 = r^2$ pour les cercles.

4.2 Apport pédagogiques

L'étude des quadriques affines en dimension 2 encore appelées **Coniques** est une partie du programme de mathématique du second cycle de l'enseignement secondaire général et technique.

Ce mémoire permet à l'enseignant de :

- Préparer un cours détaillé sur les coniques en classe de terminale scientifique et technique.
- Développer des techniques de construction des coniques à partir des propriétés géométriques.

4.3 Objectifs pédagogiques

- L'élève doit être capable de réduire l'équation d'une conique et de déterminer les éléments caractéristiques et de les tracer.
- L'apprenant doit être capable d'identifier une conique connaissant un foyer, la directrice associée et son excentricité.
- L'apprenant doit pouvoir tracer une conique connaissant les éléments géométriques.
- L'élève doit être capable d'identifier le lieu géométrique d'un point variable du plan comme une conique et de donner son équation dans un repère choisi.
- L'élève de tracer une conique connaissant ses propriétés géométriques.
- L'apprenant doit être capable de caractériser une ellipse comme image d'un cercle par une affinité orthogonale.

4.4 Étude générale des coniques

4.4.1 Étude analytique des coniques

Le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Définition analytique d'une conique

On appelle conique d'un plan affine rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) une courbe (Γ) dont l'équation cartésienne est de la forme $\lambda x^2 + \mu y^2 + gx + hy + \delta = 0$ où λ, μ, g, h et δ sont des réels tels que $(\delta, \mu) \neq (0, 0)$

Réduction de l'équation d'une conique

Proposition 4.1. *Le plan affine euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et (C) la conique d'équation cartésienne $\lambda x^2 + \mu y^2 + gx + hy + \delta = 0$ où $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.*

- Si $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$; (C) est une parabole, la réunion de deux droites parallèles, une droite, ou le vide.
- $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$; (C) est une ellipse, une hyperbole, un point, la réunion de deux droites sécantes ou le vide.

Démonstration. .

($\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$) ou ($\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$)

Supposons par exemple que $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$.

Alors l'équation de la conique dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est

$$\mu\left(y + \frac{h}{2\mu}\right)^2 + gx = \frac{h^2}{4\mu} - \delta \iff \mu\left(y + \frac{h}{2\mu}\right)^2 = -gx + \mathcal{E} \quad \text{où } \mathcal{E} = \frac{h^2}{4\mu} - \delta$$

1^{er} cas Si $g \neq 0$, alors $\mu\left(y + \frac{h}{2\mu}\right)^2 = -g\left(x - \frac{\mathcal{E}}{g}\right)$.

Considérons le point $\Omega\left(\frac{\mathcal{E}}{g}, -\frac{h}{2\mu}\right)$, et le repère orthonormé $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$

Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} et (X, Y) dans \mathcal{R}' ; on a donc

$$M \in (C) \iff Y^2 = -\frac{g}{\mu}X. \text{ D'où } (C) \text{ est une parabole, de sommet } \Omega \text{ d'axe } \Omega\vec{i}.$$

Si $g = 0$, alors (C) est $\begin{cases} \text{une droite si } \mathcal{E} = 0 \\ \emptyset, \text{ si } \mathcal{E} < 0 \\ \text{et la réunion de deux droites parallèles distinctes, si } \mathcal{E} > 0 \end{cases}$

Dans le cas $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$; on raisonne de manière analogue en échangeant les rôles des coordonnées.

2^{ième} cas : $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$; alors l'équation de la conique dans le repère \mathcal{R} est sous la forme

$$\lambda\left(x + \frac{g}{2\lambda}\right)^2 + \mu\left(y + \frac{h}{2\mu}\right)^2 = \frac{g^2}{4\lambda} + \frac{h^2}{4\mu} - \delta$$

Considérons le point $\Omega\left(-\frac{g}{2\lambda}, -\frac{h}{2\mu}\right)$ et le repère orthonormé $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} et $(X, Y) \in \mathcal{R}'$; on a donc :

$$M \in (C) \iff \lambda X^2 + \mu Y^2 = \mathcal{E} \quad \text{où } \mathcal{E} = \frac{g^2}{4\lambda} + \frac{h^2}{4\mu} - \delta$$

Si $\mathcal{E} = 0$ alors (C) est $\begin{cases} \text{Le point } \Omega, \text{ si } \lambda \cdot \mu > 0 \\ \text{La réunion de deux droites sécantes en } \Omega, \text{ si } \lambda \cdot \mu < 0 \end{cases}$

Si $\mathcal{E} \neq 0$ on : $M \in (C) \iff \frac{\lambda}{\mathcal{E}}X^2 + \frac{\mu}{\mathcal{E}}Y^2 = 1$

- Si $\frac{\lambda}{\mathcal{E}} < 0$ et $\frac{\mu}{\mathcal{E}} < 0$, alors (C) est \emptyset

- Si $\frac{\lambda}{\mathcal{E}} > 0$ et $\frac{\mu}{\mathcal{E}} > 0$, alors (C) est une ellipse d'équation réduite $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ où

$$a = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\lambda}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mu}}$$

- Si $\lambda \cdot \mu < 0$ alors (C) est une hyperbole d'équation réduite

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \text{ ou } -\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \text{ où } a = \sqrt{\left|\frac{\mathcal{E}}{\lambda}\right|} \text{ et } b = \sqrt{\left|\frac{\mathcal{E}}{\mu}\right|}$$

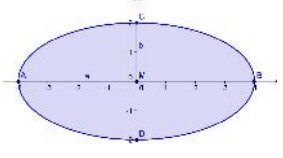
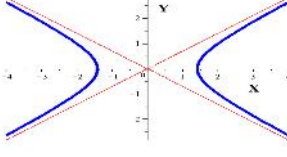
□

Remarque 4.4.1. Remarque Le plan étant muni d'un repère orthonormé, si (C) est l'ensemble des points du plan vérifiant l'équation cartésienne : $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ où a, b, c, d, e, f

sont des nombres réels donnés, on utilise un changement de repère qui sera indiqué pour déterminer la nature de (C).

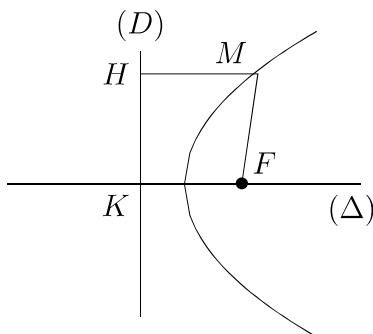
c) Classification des coniques

D’après la réduction des équations des coniques, on a le tableau de classification suivant dans un repère orthonormé pour chacune des coniques.

Équation réduite	Schéma représentatif	Équation réduite	Schéma représentatif
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	 Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	O(0,0) Point
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	\emptyset	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	 Hyperbole

4.5 Étude géométrique des coniques

4.5.1 Définition d’une conique par foyers et directrices



Définition 4.1. On se donne un point F , une droite (D) ne passant pas par F et un réel strictement positif e . La conique de **foyer** F , de **directrice** (D) et **d’excentricité** e est l’ensemble (Γ) des points du plan tel que $\frac{MF}{d(M, (D))} = e$. On appelle paramètre d’une conique le réel noté $p = ed$ où d est la distance du foyer F à la directrice (D)

Ainsi, en notant le point H le projeté orthogonal du point M sur la directrice (D) ,
 $\forall M \in \mathcal{P} \quad [(M \in (\Gamma)) \iff MF = eMH]$. La droite perpendiculaire à (D) et passant par F s’appelle

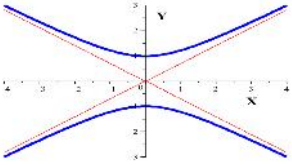
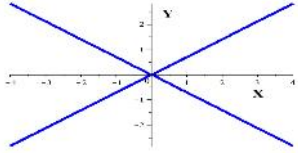
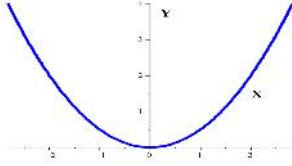
Équation réduite	Schéma représentatif	Équation réduite	Schéma représentatif
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$	 Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	 Deux droites sécantes
$X^2 - 2py = 0$ $p \neq 0$	 Parabole	$X^2 = -1$	\emptyset
		$X^2 = 1$	Deux droites parallèles
		$X^2 = 0$	Une droite

TABLE 4.1 – classification des coniques

l'axe focale de la conique (Γ) . On le notera (Δ) .

Remarque 4.5.1.

- si $MF < eMH$ M est à l'intérieur de (Γ)
- si $MF > eMH$ alors M est à l'extérieur de (Γ)

Proposition 4.2. *l'axe focal est un axe de symétrie de la conique (Γ) .*

Démonstration.

Soient K le projeté orthogonal de F sur (D) et $M \in \Gamma$

notons M' le symétrique de M par la symétrie orthogonal d'axe (Δ) et H' le projeté orthogonal de M' sur (D)

(Δ) est la médiatrice de $[MM']$ et $F \in (\Delta)$. Donc $MF = M'F$.

Soit I le milieu de $[MM']$; $I \in (\Delta)$. Ainsi MHKI et $M'H'KI$ sont des rectangles.

D'où $MH = KI$ et $M'H' = KI$. On en déduit que $MH = M'H'$ d'où $M'F = MF = eMH = eM'H'$. Par suite $M' \in (\Gamma)$. □

4.5.2 Intersection d'une conique avec son axe focale

Propositions

P₁) L'intersection d'une parabole (Γ) avec son axe focale est réduite à un point S qui est le milieu du segment $[FK]$. Ce point est appelé sommet de la parabole.

P₂) L'intersection d'une ellipse ou d'une hyperbole avec son axe focale est réduite aux points A et A' où A est le barycentre du système $\{(F, 1), (K, e)\}$ et A' le barycentre de $\{(F, 1), (K, -e)\}$

Démonstration. .

P₁) on suppose que (Γ) est une parabole, c'est-à-dire $e = 1$.

Soit $M \in (\Gamma)$.

$$\begin{aligned} M \in (\Delta) \cap (\Gamma) &\iff M \in (\Delta) \text{ et } MF = d(M, (D)) \\ &\iff M \in (\Delta) \text{ et } MF = MK \\ &\iff M \text{ appartient à l'intersection de la médiatrice de } [KF] \text{ et de } (\Delta) \\ &\iff M \text{ est le milieu de } [KF] \end{aligned}$$

P₂) On suppose que $e \neq 1$

Soit $M \in \Gamma$.

$$\begin{aligned} M \in (\Delta) \cap (\Gamma) &\iff M \in (\Delta) \text{ et } MF = ed(M, (D)) \\ &\iff M \in (\Delta) \text{ et } MF^2 = e^2 MK^2 \\ &\iff M \in \Delta \text{ et } (\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK}) \cdot (\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK}) = 0 \end{aligned}$$

Pour $M \in (\Delta)$, les points M , K et F sont alignés.

D'où $(\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK}) = \vec{0}$ ou $(\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK}) = \vec{0}$

Donc $A = M = \text{bar}\{(F, 1); (K, e)\}$ avec $1 + e \neq 0$ où $A' = M = \text{bar}\{(F, 1); (K, -e)\}$ avec $1 - e \neq 0$

□

4.5.3 Équation cartésienne d'une conique

Proposition 4.3. Soit (Γ) une conique, K le projeté orthogonal de F sur (D) et on note $d = FK$.

On munis ainsi le plan d'un repère orthonormé d'origine $\mathcal{R} = (K, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{1}{d}\overrightarrow{KF}$ et $\vec{j} = \text{Rot}_{\frac{\pi}{2}}\vec{j}$.

Dans ce repère, la conique (Γ) a pour équation cartésienne :

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = 0$$

- si $e = 1$, (Γ) est une parabole.
- Si $0 < e < 1$, Γ est une ellipse

- Si $e > 1$ (Γ) est une hyperbole

Preuve. Soit $M(x, y)$ un point du plan, on a $F(d, 0)$ et $d(M, (D)) = MH = |x|$

$$M \in (\Gamma) \iff MF = ed(M, (D)) \iff MF^2 = e^2 MH^2 \iff (x - d)^2 + y^2 = e^2 x^2$$

D'où (Γ) : $(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2dx + d^2 = 0$. La forme de (Γ) dépend du signe de $1 - e^2$.

- Si $e = 1$, (Γ) est une parabole d'équation $y^2 - 2dx + d^2 = 0 \iff y^2 = 2d(x - \frac{d}{2})$.
- Si $e \neq 1$, (Γ) admet une équation cartésienne de la forme $(1 - e^2)(x - \frac{d}{1 - e^2})^2 + y^2 = \frac{d^2 e^2}{1 - e^2}$.

Considérons le point $O(\frac{d}{1 - e^2}, 0)$ dans un repère orthonormé d'origine O , (Γ) admet une équation cartésienne de la forme $(1 - e^2)X^2 + Y^2 = \frac{d^2 e^2}{1 - e^2}$. Donc admet O pour centre de symétrie ; ainsi (Γ) est une ellipse si $0 < e < 1$; une hyperbole si $e > 1$. □

Remarque 4.5.2. .

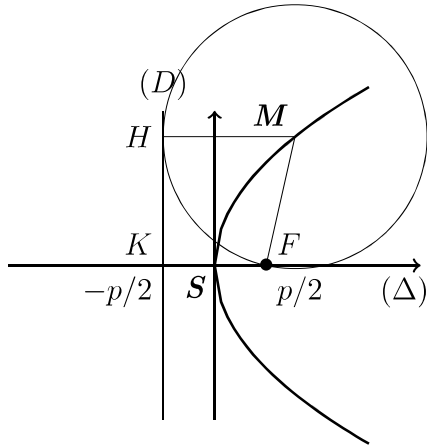
- L'ellipse et l'hyperbole sont des coniques à centre
- La droite verticale (D') d'équation $x = \frac{ep}{1 - e^2}$ dans le repère \mathcal{R} est un deuxième axe de symétrie appelé **petit axe** ou **axe non focal**.
- la distance entre le centre O et le foyer F de la conique est appelé **distance focale** et notée $C=OF$

4.6 Coniques particulières

4.6.1 Parabole

La parabole de directrice (D) et de foyer F est l'ensemble des points du plan équidistants de la droite du point F . On peut aussi la décrire comme le lieu des centre des cercles tangents à (D) et passant par F .

Équation réduite d'une parabole



Proposition 4.4. Soit Γ une parabole de somme S et de Foyer F

il existe un repère orthonormé du plan $\mathcal{R} = (S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{SF} \overrightarrow{SF}$ dans lequel Γ

a pour équation $y^2 = 2px$ appelé **équation réduite de la parabole**

où $p = ed$ avec $d = d(F, (D))$ appelé paramètre de Γ ;

Démonstration. Soit le repère (S, \vec{i}, \vec{j}) où S est le sommet de la parabole, d'axe des abscisses l'axe focal (Δ) , tel que le point F a pour coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$ et le point K a pour coordonnées $(-\frac{p}{2}, 0)$ Soit $M(x, y)$ un point du plan et $H(-p/2, y)$ son projeté orthogonale sur (D) :

$$M \in (P) \iff MF^2 = MH^2 \iff (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2 \iff y^2 = 2px). \quad \square$$

Remarque 4.6.1. .

- C'est le paramètre p qui donne à la parabole sa forme plus ou moins évasée.
- L'équation $y^2 = 2px$ équivaut à $y = \sqrt{2px}$ ou $y = -\sqrt{2px}$. Alors la parabole peut être considérée comme la réunion des graphes des fonctions $f_1 : x \mapsto \sqrt{2px}$ et $f_2 : x \mapsto -\sqrt{2px}$.
- En échangeant les axes de coordonnées on obtient une équation réduite de la forme $x^2 = 2py$

Le tableau ci-dessous résume les situations usuelles :

Equation	Sommet	axe focal	Foyer	Directrice
$y^2 = 2kx$	$S(0,0)$	droite (Ox)	$F(\frac{k}{2}, 0)$	(D) : $x = -\frac{k}{2}$
$x^2 = 2ky$	$S(0,0)$	droite (Oy)	$F(0, \frac{k}{2})$	(D) : $y = -\frac{k}{2}$
$(y - y_0)^2 = 2k(x - x_0)$	$S(x_0, y_0)$	$(\Delta) : y = y_0$	$F(x_0 + \frac{k}{2}, y_0)$	(D) : $x = x_0 - \frac{k}{2}$
$(x - x_0)^2 = 2k(y - y_0)$	$S(x_0, y_0)$	$(\Delta) : x = x_0$	$F(x_0, y_0 + \frac{k}{2})$	(D) : $y = y_0 - \frac{k}{2}$

TABLE 4.2 – Tableau récapitulatif des paraboles usuelles

Exemple 4.6.1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $y^2 + 6y + 4x - 3 = 0$

Solution

$$y^2 + 6y + 4x - 3 = 0 \iff (y + 3)^2 + 4x - 12 = 0 \iff (y + 3)^2 = -4(x - 3).$$

C'est une parabole de sommet $S(3, -3)$ et d'axe focal (Δ) : $y = -3$ de paramètre $p = -k = 2$, de foyer $F(x_0 + \frac{k}{2}, y_0) = F(2, -3)$ et de directrice (D) : $x = x_0 - k/2 = 4$

Paramétrisation de la parabole

Proposition 4.5. Une paramétrisation de la parabole d'équation $y^2 = 2px$

$$\text{est de la forme } \begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Démonstration. Soit (P) une parabole. Il existe un repère dans lequel (P) admet pour équation cartésienne $y^2 = 2px$. En posant $y = t$ la parabole est alors l'ensemble des points de coordonnées $(\frac{t^2}{2p}, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{D'où } \begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Remarque 4.6.2. il existe un autre repère dans lequel la parabole admet pour équation $x^2 = 2py$

$$\text{donc une paramétrisation est de la forme } \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p} \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Tangente en un point de la parabole

Proposition 4.6. Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2px$, $p \neq 0$

La tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de (P) a pour équation : $y_0y = p(x + x_0)$

Preuve. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de (P) d'équation réduite $y^2 = 2px$, $p \neq 0$. Si $y_0 > 0$, $M_0 \in (\mathcal{P}_1)$, courbe représentative de f_1 dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $x_0 \in]0, +\infty[$,

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}. \text{ D'où } (\mathcal{P}_1 \text{ admet une tangente}$$

$$\text{d'équation } y - \sqrt{2px_0} = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}(x - x_0) \iff y_0y - y_0^2 = p(x - x_0) \iff y_0y = p(x + x_0).$$

De même si $y_0 < 0$, $M_0 \in (\mathcal{P}_2)$, courbe représentative de la fonction f_2 dérivable sur $]0, +\infty[$. D'où une équation de la tangente en M_0 est $y_0y = p(x + x_0)$ □

Théorème 4.1. Soit (P) une parabole de foyer F et de directrice (D) . Soient M_0 un point de (P) et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur (D) . La tangente (T_0) en M_0 à (P) est la médiatrice du segment $[F, H_0]$, et donc aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{FM_0H_0}$.

Démonstration. .

Soit p le paramètre de (P) , choisissons un repère orthonormé dans lequel (P) admet pour équation $y^2 = 2px$. Alors (T_0) admet pour équation dans ce repère : $y_0y = p(x + x_0)$. Soient alors (d) la médiatrice du segment $[F, H_0]$ et I le milieu du segment $[F, H_0]$. On a $F(\frac{p}{2}, 0)$, $H_0(-\frac{p}{2}, y_0)$ et donc $I(0, \frac{y_0}{2})$

Ainsi ,

$$M(x, y) \in (d) \iff \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{H_0F} = 0 \iff p(x - 0) - y_0(y - \frac{y_0}{2}) = 0 \iff y_0y = px + \frac{y_0^2}{2} = p(x + x_0).$$

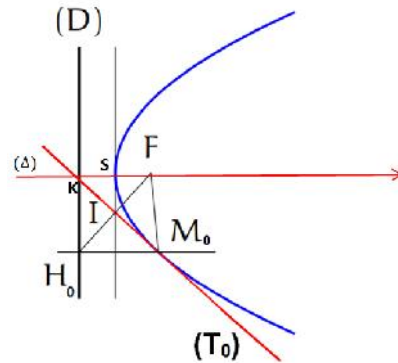
(d) et (T_0) sont donc effectivement une seule et même droite. Puisque $M_0F = M_0H_0$, le triangle FM_0H_0 est isocèle en M_0 et la médiatrice du segment $[F, H_0]$ est également la bissectrice de l'angle $\widehat{FM_0H_0}$ □

Construction d'une parabole par points et tangentes

Soit la directrice (D) et le foyer F d'une parabole (P) .

Pour construire un point M_0 de (P) il suffit de :

- Tracer l'axe focale (Δ) passant par F et perpendiculaire à (D) au point K ; puis placer le sommet S , milieu de $[FK]$



- Tracer la perpendiculaire à (D) passant H_0 projeté orthogonal de M_0 sur (D) ; puis tracer la médiatrice du segment $[FH_0]$.

Ces deux droites se coupent en M_0 de (P) . De plus la médiatrice de $[FH_0]$ est la tangente en M_0 à la parabole

4.6.2 L'ellipse

Equation réduite de l'ellipse

Proposition 4.7. La courbe plane (Γ) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$ dans un repère orthonormé est une ellipse de foyer $F(c, 0)$, de directrice associée $(D) : x = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Démonstration. Soit (Γ) une conique de foyer F , de directrice (D) et d'excentricité $0 < e < 1$. On désigne pas par A et A' les sommets de (Γ) situés sur l'axe focal (Δ) . On considère un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'origine O milieu de $[AA']$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{OA} \vec{OA}$. Le point F a alors pour coordonnées $(c, 0)$ et la directrice (D) a pour équation $x = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$.

$$\begin{aligned} M(x, y) \in (\Gamma) &\iff FM^2 = e^2(d(M, (D))) \\ &\iff (x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2 \\ &\iff x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2cx + a^2 \\ &\iff \frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \\ &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad , \text{ avec } c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

Ainsi (Γ) admet pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Réciproquement, soit Γ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé. En comparant cette équation avec l'équation cartésienne $(1 - e^2) \left(x - \frac{d}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{d^2 e^2}{1 - e^2}$, nous remarquons qu'en prenant $e = \frac{c}{a}$, $a = ed \frac{1}{1 - e^2}$, $b = a\sqrt{1 - e^2}$ et $d = \frac{1 - e^2}{e^2} c$; (Γ) est une ellipse de foyer $F(c, 0)$ et de directrice (D) d'équation $x = c + d$ avec $c + d = \frac{c}{e^2} = \frac{a^2}{c}$ \square

Remarque 4.6.3. .

- Lorsque $a = b$, l'ellipse est le cercle de centre O et de rayon a
- Soit $M(x, y)$ un point de l'ellipse. On a $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Ainsi, l'abscisse x de M vérifie $|x| \leq a$ c'est-à-dire $-a \leq x \leq a$. De même, l'ordonnée du point M vérifie $|y| \leq b$ c'est-à-dire $-b \leq y \leq b$. Les points $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$ sont les quatre sommets de l'ellipse. A et A' sont sur l'axe focal et B et B' sont sur l'axe non focal.
- l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ équivaut à $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ou $y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Alors l'ellipse est donc la réunion des graphes des fonctions $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ et $f_2 : x \mapsto -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$.

Éléments caractéristiques d'une ellipse

Les éléments caractéristiques sont résumés dans le tableau si-dessous

	a > b	b > a
équation	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
démi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
Sommets	A(a,0) A'(-a,0)	B(0,b) B'(0,-b)
Axes	grand axe (axe focal) : [AA'] petit axe : [BB']	grand axe (axe focal) : [BB'] petit axe : [AA']
Foyers	F(c,0) F'(-c,0)	F(0,c) F'(0,-c)
Directrices	(D) : $x = \frac{a^2}{c}$ et (D') : $x = -\frac{a^2}{c}$	(D) : $y = \frac{b^2}{c}$ et (D') : $y = -\frac{b^2}{c}$
Courbe		

TABLE 4.3 – Tableau des éléments caractéristiques d'une ellipse

Exemple 4.6.2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation : $(\Gamma) : 2x^2 + y^2 = 2$

$$2x^2 + y^2 = 2 \iff \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

(Γ) est une ellipse de centre O . $a = 1 < \sqrt{2} = b$.

Donc l'axe focal est la droite (Oy) et l'axe , non focal est la droite (Ox) .

Les sommet $A(1,0)$, $A'(-1,0)$, $B(0, \sqrt{2})$ et $B'(0, -\sqrt{2})$.

$c = \sqrt{b^2 - a^2} = 1$. Donc les foyers sont $F(0, 1)$ et $F'(0, -1)$

L'excentricité $e = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $y_K = \frac{b^2}{c} = 2$, donc les directrices sont $(D) : y = 2$ et $(D') : y = -2$

Paramétrisation d'une ellipse

Soit (\mathcal{E}) une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$(\mathcal{E}) \text{ a pour équation paramétrique : } \begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Démonstration. Soit (\mathcal{E}) une ellipse d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Un point M de coordonnées (x, y) est sur l'ellipse si et seulement si il existe un réel t tel que $\frac{x}{a} = \cos(t)$ et $\frac{y}{b} = \sin(t)$.

L'ellipse est donc l'ensemble des $(a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$ où t décrit \mathbb{R} . Une paramétrisation de l'ellipse de centre O est

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos(t) \\ y = b \cdot \sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

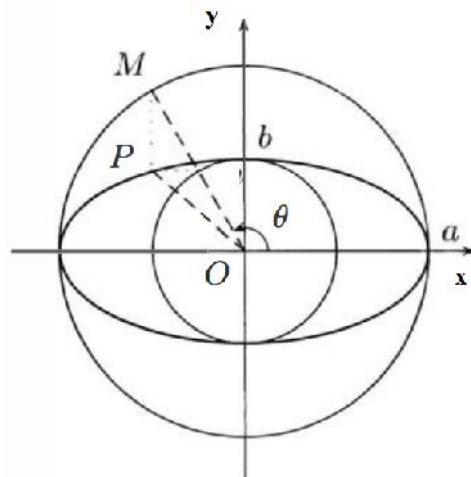
Remarque 4.6.4.

Plus généralement, une paramétrisation de l'ellipse de centre $\Omega(x_0, y_0)$ est

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \cos(t) \\ y = y_0 + b \cdot \sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

□

Propriété 4.1. L'ellipse (\mathcal{E}) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a \cos(\theta) \\ y = b \sin(\theta) \end{cases}$; $\theta \in]-\pi, \pi]$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) est l'image du cercle de centre O et rayon a par l'affinité orthogonale de base (Ox) et de rapport $\frac{b}{a}$. Ce cercle est appelé cercle principale de l'ellipse.



C'est-à-dire, en considérant l'affinité orthogonal définie par $(x, y) \rightarrow (x, \frac{b}{a}y)$, un point M du cercle principal d'angle polaire θ a pour image un point P de l'ellipse par cette affinité.

Remarque 4.6.5. L'ellipse (\mathcal{E}) est aussi l'image du cercle de centre O et de rayon b par l'affinité orthogonal de base (Oy) et de rapport $\frac{a}{b}$. Ce cercle est appelé cercle secondaire de l'ellipse.

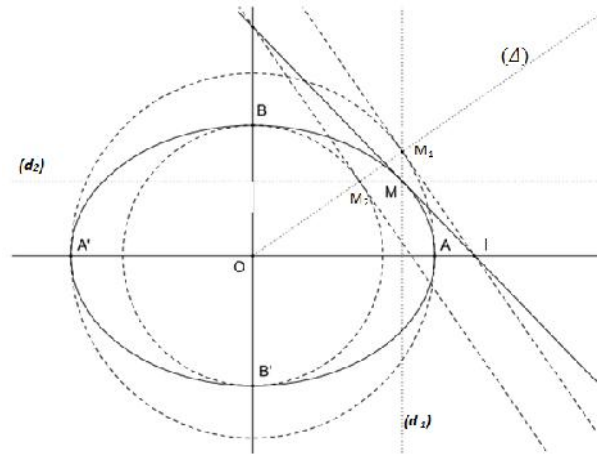
Tangente en un point d'une ellipse

La tangente à l'ellipse (\mathcal{E}) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en un point $M_0(x_0, y_0)$ admet pour équation cartésienne $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$

Démonstration. La preuve se fait de façon analogue à celle de la parabole □

Construction de l'ellipse par points et par tangentes

- Pour construire à la règle et au compas un point M de l'ellipse connaissant ses axe et ses cercles principal et secondaire, il suffit de : Tracer une demi-droite (Δ) d'origine O ; Soit M_1 le point d'intersection de (Δ) avec le cercle principal, M_2 le point d'intersection de (Δ) avec le cercle secondaire.



La parallèle (d_2) au grand axe menée par M_2 et la parallèle d_1 au petit axe menée par M_1 se coupent en un point M de l'ellipse.

- Pour construire la tangente en M de l'ellipse, il suffit de : tracer la tangente au cercle principal en M_1 , elle coupe le grand axe en I .

La droite (MI) est la tangente à l'ellipse.

(de même, on peut aussi construire le point J intersection de la tangente en M_2 au cercle secondaire avec le petit axe)

On constate que les trois points $M, I,$ et J sont alignés sur cette tangente.

4.6.3 L'hyperbole

Équation réduite d'une hyperbole

La courbe plane d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b > 0$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) est l'hyperbole de foyer $F(c, 0)$; de direction associée $(D) : x = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Démonstration. .

De même que dans le cas de l'ellipse.

Remarque 4.6.6. .

- Soit $M(x, y)$ un point de l'hyperbole, on a $\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} \geq 0$. Ainsi l'abscisse x de M vérifie $|x| \geq a$ c'est-à-dire ($x \leq -a$ ou $x \geq a$) donc les points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ sont les sommets de l'hyperbole.

La courbe a construire ne possède donc aucun point d'abscisse dans $] - a, a[$

A et A' sont sur l'axe focal.

- L'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ équivaut à $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ou $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

L'hyperbole est donc la réunion des fonctions $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ et $f_2 : x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

- Pour $x \in [a, +\infty[$, $f_1(x) - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x) = -\frac{ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}$ Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_1(x) - \frac{b}{a}(x)] = 0$; donc, la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ est asymptote a la courbe.

Par symétrie, il en est de même de la droite d'équation $y = -\frac{b}{a}x$.

- Un échange des axes de coordonnées permet d'obtenir une équation de la forme $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ qui correspond à faire passer l'hyperbole vers la verticale.

Les éléments caractéristiques de l'hyperbole

Equation	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$	$e = \frac{c}{b}$
sommets	$A(a,0)$ et $A'(-a,0)$	$B(0,b)$ et $B'(0,-b)$
Foyers	$F(c,0)$ et $F'(-c,0)$	$F(0,c)$ et $F'(0,-c)$
Axe focal	La droite (AA')	La droite (BB')
Directrice	$(D) : x = \frac{a^2}{c}$ et $(D') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(D) : y = \frac{b^2}{c}$ et $(D') : y = -\frac{b^2}{c}$
Les asymptotes	$(\Delta) : y = \frac{b}{a}x$ et $(\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$	
Courbe		

TABLE 4.4 – Tableau de éléments caractéristiques de l'hyperbole

Exemple 4.6.3. Nature et éléments caractéristiques de la courbes d'équation $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Solution

Hyperbole d centre O , d'axe focal (Ox) et d'axe non focal (Oy) .

$a = 4$ et $b = 3$. Sommets sont $A(4, 0)$ et $A'(-4, 0)$.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, donc foyers $F(5, 0)$. et $F'(-5, 0)$

Excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

$x_K = \frac{a^2}{c} = \frac{16}{5}$ ainsi les directrices sont les droites d'équation $(D) : x = \frac{16}{5}$ et $(D') : x = -\frac{16}{5}$

Asymptotes sont les droites d'équations $(\Delta) : y = \frac{3}{4}x$ et $(\Delta') : y = -\frac{3}{4}x$

Définition 4.2. Une hyperbole est **équilatère** si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires.

Propriété 4.2. une hyperbole est **équilatère** si et seulement si son excentricité est égale à $\sqrt{2}$

Démonstration. .

Les asymptotes d'une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé admet comme vecteur directeur $\vec{u}(a, -b)$ et $\vec{v}(a, b)$.

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $a^2 - b^2 = 0 \iff a^2 = b^2 \iff a = b$.

Puisque la demi-distance focale $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$, il suit que l'excentricité $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

Hyperbole rapportée à ses asymptotes

Proposition 4.8. Pour tout hyperbole \mathcal{H} , il existe un repère cartésien porté par les asymptotes de (\mathcal{H}) dan lequel l'équation de (\mathcal{H}) est $XY = 1$

Démonstration. L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$

admet comme asymptote la droite d'équation $(\Delta) : y = \frac{b}{a}x$ et $(\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$

L'équation de \mathcal{H} s'écrit encore $(\frac{x}{a} - \frac{y}{b})(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = 1$

En posant $X = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ et $Y = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$

On obtient $XY = 1$

$$\text{Mais } \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & a \\ -b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

où X et Y sont les coordonnées dans le repère (*non orthonormé*) $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \frac{1}{2}(a\vec{i} - b\vec{j})$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}(a\vec{i} + b\vec{j})$ du point $M(x, y)$ dans \mathcal{R}

Donc l'équation $XY = 1$ est celle de l'hyperbole dans le repère \mathcal{R}' porté par ses asymptotes.

Remarque 4.6.7. une hyperbole admet dans tout repère cartésien porté par ses asymptotes une équation de la forme $XY = k$; $k \neq 0$.

Un tel repère n'est en général pas orthogonal ; sauf dans le cas d'une hyperbole équilatère.

Tangente en un point d'une hyperbole

Théorème 4.2. La tangente à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en un point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation cartésienne $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$

Démonstration. .

La preuve se fait de façon analogue à celle de la parabole.

Construction de l'hyperbole points par points

Proposition 4.9. Si une droite (D) non parallèle aux asymptotes coupe l'hyperbole en deux points M et N (distinct ou confondues) et les asymptotes en deux points P et Q alors les segments $[MN]$ et $[PQ]$ ont même milieu.

Démonstration. .

On considère un repère par les asymptotes dans lequel l'équation de l'hyperbole est $xy = 1$.

Une droite (D) non parallèle aux asymptotes a une équation de la forme $ux + vy + w = 0$, avec $u, v \neq 0$

Soit $I(x, y) \in (\mathcal{H})$ et (D), on a $y = \frac{1}{x}$ et x vérifie l'équation $ux^2 + wx + v = 0$. La droite (D) coupe l'hyperbole en deux points distincts ou confondus $M(x_1, y_1)$ et $N(x_2, y_2)$ si et seulement si $\Delta = w^2 - 4uv \geq 0$

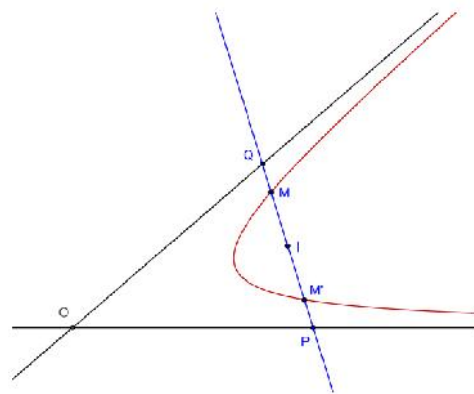
Le milieu du segment $[MN]$ a alors pour abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{w}{2u}$. Mais les points d'intersections de (D) avec les axes de coordonnées sont $P(-\frac{w}{u}, 0)$ et $Q(0, -\frac{w}{v})$; ainsi le milieu du segment $[PQ]$ a pour abscisse $-\frac{w}{2u}$; d'où les milieux des segments $[MN]$ et $[PQ]$ ont même abscisse et sont confondus puisqu'ils appartiennent tous à la droite (D) .

Pour construire une hyperbole points par points et connaissant les asymptotes et un point M donné ;

On mène par M une droite coupant les asymptotes en P et Q .

Le symétrique M' de M par rapport au milieu de I du segment $[PQ]$ appartient alors à l'hyperbole.

On peut ainsi construire à la règle et au compas autant de point de l'hyperbole que l'on souhaite



Application : Dans la vie, on rencontre l'hyperbole dans l'ombre créée par une source de lumière que projette une lampe muni d'un abat-jour.

4.7 Définition bifocale des coniques à centre

4.7.1 Définitions et propriétés

Définition 4.3.

- Soit (\mathcal{E}) une ellipse de foyer F et F' .

(\mathcal{E}) est l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF + MF' = 2a$ où a est le rayon du cercle principal et $FF' < 2a$.

On dit alors que l'équation $MF + MF' = 2a$ est la **définition bifocale** de l'ellipse (\mathcal{E})

- Soit (\mathcal{H}) une hyperbole de foyers F et F' .

(\mathcal{H}) est l'ensemble des points M vérifiant $|MF - MF'| = 2a$, avec $FF' > 2a$; on dit alors que l'équation $|MF - MF'| = 2a$, est la **définition bifocale** de l'hyperbole (\mathcal{H})

Remarque 4.7.1. Soit (\mathcal{C}) le cercle de centre F' et de rayon $2a$ et M un point du plan et (\mathcal{C}') le cercle de centre M et tangent à (\mathcal{C}) en un point H .

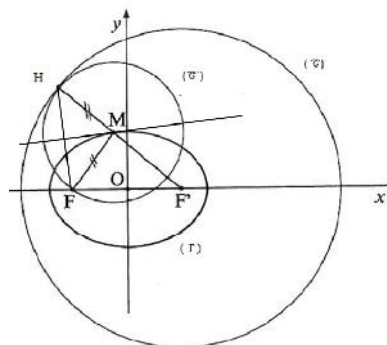
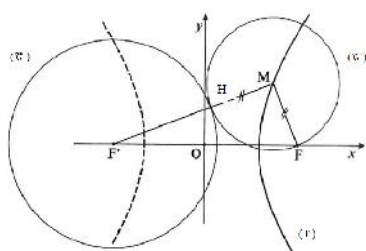
- Si F et F' sont confondus, l'ensemble des points M est un **cercle** de centre F et de rayon a

- Si F est à l'intérieur du cercle (\mathcal{C}) , l'ensemble des point M est une **ellipse** et dans ce cas, on a $MF + MF' = MH + MF' = 2a$ avec $2c = FF' < 2a$

- Si F est à l'extérieur du cercle, l'ensemble des points M est une **hyperbole**.

L'hyperbole a deux branches, dans l'une des branches, on a $MF' - MF = 2a$

alors $MF = MF' + 2a$. Or $MF < MF' + FF' = MF' + 2c$, ainsi $MF - MF' = 2c$; donc $a < c$ et dans l'autre branche on a $MF - MF' = 2a$. d'où $|MF - MF'| = 2a$



Proposition 4.10. Soient F et F' deux points du plan tel que $FF' = 2c$ avec $c > 0$.

Le lieu des points M du plan tel que $MF + MF' = 2a$ est :

- \emptyset si $a < c$ et $[FF']$ si $a = c$
- l'ellipse de demi grand axe a et de foyer FF' si $a > c$

Proposition 4.11. Soient F et F' deux points du plan tel que $FF' = 2c$; $c > 0$

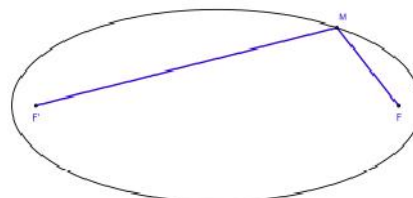
Les lieu des points M du plan tel $|MF - MF'| = 2a$ est :

- \emptyset si $a > c$ et la droite $(FF') \setminus]FF'[$ si $a = c$
- L'hyperbole de foyers F et F' si $a < c$

(Claude Dechamps [5] page 237)

Application : Construction de l'ellipse par le procédé dit du jardinier

Pour tracer une ellipse de foyer F et F' et de longueur $2a > FF'$, il suffit de fixé deux piquets en F et F' et d'y attacher les extrémités d'une ficelle non élastique de longueur $2a$. Le trajet que l'on parcourt en tournant autour de F et F' tout en maintenant la ficelle étendue est l'ellipse cherchée



4.7.2 Construction d'un point de l'ellipse de définition bifocale

Soient F, F' deux points du plan tel que $FF' = 2c$ et une longueur a tel $0 < c < a$. Pour construire un point de l'ellipse (\mathcal{E}) et sa tangente, on peut procéder comme suit :

- tracer le cercle (\mathcal{C}) de centre F' et de rayon $2a$.
- tracer un rayon de longueur $[F'H]$ de (\mathcal{C})

4.7. Définition bifocale des coniques à centre

- *tracer la médiatrice du segment $[FH]$; elle coupe la droite $(F'H)$ en un point M de l'ellipse et est tangent en M de l'ellipse.*

♠ Conclusion ♠

Dans ce document, il était question de faire une étude analytique et géométrique des quadriques affines ; il en ressort au terme de notre exposé que les quadriques affines ont une importance capitale dans divers domaines des sciences et de technologie. Dans un espace affine de dimension deux, les quadriques affines obtenus sont appelés coniques affines vu comme des courbes algébriques ou paramétrées pour une introduction à la géométrie différentielle. Dans un espace affine de dimension trois, nous avons des quadriques affines dont certaines s'obtiennent à partir des courbes du plan affine.

L'équation générale des quadriques affines est reliée à l'étude des formes quadratiques qui a fait object de notre travail en tout début de ce document , nous avons passé en revue certains résultats utiles à notre étude telles que : la notion de rang, signature, réduction d'une forme quadratique et base orthonormée pour faciliter la réduction des équations et la classification des quadriques affines. Enfin nous avons mené une étude analytique et géométrique des coniques comme portée pédagogique dans l'enseignement des quadriques affines dans le secondaire. Mais nous remarquons que dans nos manuel scolaire l'aspect analytique est plus valorise que l'aspect géométrique.

A l'avenir, il serait envisageable de promouvoir l'utilisation des logiciels tel que Géogébra pour dynamiser l'étude géométrique des courbes et surfaces dans l'enseignement secondaire.

♠ Bibliographie ♠

- [1] *Dieu R. (2006) Les surfaces [http : www.delfaud.fr/](http://www.delfaud.fr/). jac (26/04/2016)*
- [2] *Doss-Bachelet, Catherine Française, Jean-Pierre, Piquet, Claude : Géométrie différentiel avec 80 figures, Ellipses, Paris 2000. Mathématique pour le second cycle , cours et exercices corrigés*
- [3] *Chambadal L. (1985) Formulaire de Maths. Dunod*
- [4] *Claude TISSERON (1983) Géométries Affines, Euclidiennes et Projectives. Hermann.*
- [5] *Claude DECHAMPS, Andre WARUSFEL Mathématique tout en un 1^{ère} année : coniques (2003). 2^e édition Dunod, Paris.*
- [6] *Jean-Marie Monier Algèbre et Géométrie (2008), PC-PSI-PT, 5^e édition Dunod , Paris.*
- [7] *M.Berger et B. Gostiaux : Géométrie différentiel : variétés, courbes et surfaces. Second édition , presse universitaire de France, paris , 1992*
- [8] *Rouget J.(2007) coniques. maths-france.fr. (25/11/2015)*
- [9] *Saliou T. et al (1999) CIAM), Tle SM, Edicef*
- [10] *Arrêté No 53/D/43 /MINEDUC /SG /IGP /ESG portant définition des programmes de mathématiques en classe du second cycle de l'enseignement secondaire général, 12 AOÛT 1998*