

**PROPAGATION LINEAIRE DES
ONDES DANS UNE CHAINE
DE GUIDES D'ONDE
PTS DE TYPE
TRIMER.**

Présenté par :

NKUICHOU NDAWA

Florian Rommel

Matricule :08W0475

Sous la Direction de

KENFACK JIOTSA Aurelien, PhD

Maitre de conférences

Table des matières

LISTE DES FIGURES.....	v
LISTE DES ANNEXES	vii
LISTE DES ABREVIATIONS	viii
Dédicace.....	ix
REMERCIEMENTS.....	x
ABSTRACT	xii
INTRODUCTION GENERALE	1
Chapitre 1 : SYSTEMES PTS ET GENERALITES SUR LES GUIDES D'ONDES....	2
Introduction	2
1.1) Systèmes PTS -----	2
1.2) Type d'ondes -----	4
1 .2 .1) Ondes acoustiques -----	4
1 .2 .2) Ondes élastiques-----	4
1 .2 .3) Ondes de gravité -----	4
1 .2 .4) Ondes électromagnétiques -----	4
1.3) Généralités sur les guides d'ondes -----	4
1.3.1) Définition -----	4
1.3.2) Types de guides d'onde-----	5
1.3.3) Couplage des guides d'onde -----	6
1.3.3.1) Couplage Linéaire -----	6
1.3.3.2. Couplage en chaîne -----	7
1.3.4. Equation du couplage de trois guides d'ondes-----	7
CONCLUSION.....	15
Chapitre 2 : ETUDE DE LA TRANSMISSION ET REFLEXION D'UNE ONDE DANS UNE CHAINE LINEAIRE ET COUPLEE DETRIMER	16
Introduction	16
2.1. Chaîne linéaire de trimer : model 1 -----	17
2. 2.Etude théorique du modèle mathématique -----	17
2.2.1. Equation du modèle -----	17
2.2.2. Conditions pour que l'on ait un système PTS -----	18
2.2. 3.Calcul des coefficients de transmission et de réflexion -----	21
2.3. Représentation graphique des coefficients de transmission et de réflexion -----	23
2.3.1. Influence de ρ et θ sur la transmission et la réflexion de l'onde -----	23

2.3.1.1. Influence de ρ -----	23
2.3.1.2. Influence du couplage à l'extérieur de la discontinuité . -----	28
2.3.2. Relation entre l'onde dans discontinuité et l'onde transmise. -----	29
(a) -----	30
2.3.2.2. Cas de faibles couplages : $C_1 = 5.10^{-4}$, $\rho = -\rho_{\max}$ -----	30
2.4. Transmission et réflexion d'une onde dans le cas d'une chaine couplée -----	31
2.4.1. Couplage d'un trimer isolé avec une chaine conservative de guides d'onde:	
Modèle 2-----	31
2.4.1.1. Schéma du modèle-----	31
2.4.1. 2.Equation du modèle -----	31
2.4.1. 3. Calcul des Coefficients de transmission et réflexion -----	31
2.4.1. 4. Représentation graphique des coefficients de transmission et réflexion. ---	36
2.4.2. Couplage d'un trimer isolé avec une chaine conservative de guides d'onde :	
Modèle 3-----	37
2.4.2.1. Schéma du modèle-----	37
2.4.2.2. Equation du modèle -----	38
CONCLUSION.....	42
Chapitre 3 : PROPAGATION LINEAIRE D'UNE ONDE DE TYPE	
GAUSSIENNE DANS UNE CHAINE LINEAIRE ET COUPLEE DE	
TRIMER.....	43
Introduction.....	43
3.1. Chaîne linéaire de trimer-----	43
3.1.1. Définition -----	43
3.1.2. Modèle -----	43
3.1.3. Equation du modèle -----	43
3.1. 4. Conditions pour que le système soit PTS-----	44
3.2. Propagation Linéaire d'une impulsion gaussienne et insuffisances du modèle plan-50	
3.2.1. Structure gaussienne d'un faisceau-----	50
3.2.1.1 Insuffisances du modèle de l'onde plane. -----	50
3.2.1.2. Structure gaussienne d'une impulsion ; mode d'ordre supérieur. -----	50
3.2.1.3. Propagation d'une impulsion gaussienne dans le cas de deux chaines	
linéaires non couplées : $C_4=0$, $C_1=3$, $\theta = 0.5$ -----	51
3.2.1.4. Propagation d'une impulsion gaussienne dans le cas de deux chaines	
linéaires non couplées : $\rho = 0.25\rho_{\max}$, $C_1 = C_4=3$, $C_2=1$, $\theta = 0.5$ -----	52
3.2.1.5. Propagation d'une impulsion gaussienne dans le cas de deux chaines	
linéaires couplées : modèle 3-----	53

CONCLUSION.....	54
Chapitre 4 : IMPLICATIONS PEDAGOGIQUE SUR LE SYSTEME ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE.....	55
Introduction	55
4.1. Au Niveau des enseignements -----	55
4.1.1. Facteurs influençant les acquis des élèves -----	55
4.1.2. La qualité de l'enseignement est essentielle pour améliorer les acquis des élèves -----	56
4.2. Au niveau l'attitude de l'apprenant -----	57
CONCLUSION.....	58
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE	59
REFERENCES	60
ANNEXE	62

LISTE DES FIGURES

Figure(1 .1) : Quelques types de guides d'onde -----	6
Figure(2.1): Chaîne de guide d'onde conservative ayant en son sein une discontinuité trimer	17
Figure(2 .2): Représentation de la partie imaginaire des valeurs propres β_2 en (a) et β_3 en (b) -- -----	20
Figure (2.3) : Réprésentationn en 3D des coefficients de transmission en bleue-----	25
Figure (2.4) : Réprésentationn en 3D des coefficients de reflexion en rouge-----	27
Figure (2.5) : Réprésentationn en 3D des coefficients de transmission en (k) et refexion en(j)-- -----	29
Figure(2.6) : Réprésentation en 3D du coefficient de proportionalité en (a) et (b) -----	30
Figure(2.7) : Trimer isolé couplé avec une chaîne conservative :Modèle 2 -----	31
Figure (2.8) : Onde réfléchie et onde transmise au niveau de la discontinuité et de son couplage-----	32
Figure (2.9) : Représentation en 3D des coefficients de transmission en (a) et reflexion en (b) -----	36
Figure (2.10) : Représentation en 3D des coefficients de transmission en (c) et refexion en (d) -----	30
Figure(2.11) : Modèle 2 couplé avec une chaîne conservative :Modèle 3-----	31
Figure (2.12) : Onde réfléchie et onde transmise au niveau de la discontinuité et de son couplage-----	40
Figure (2.13) : Représentation en 3D des coefficients de transmission dans les trois lignes du modèle 3-----	40
Figure (2.14) : Représentation en 3D des coefficients de reflexion dans les trois lignes du modèle 3 -----	41
Figure (3.1) : Chaîne linéaire de Trimer-----	43
Figure (3.2) : Representation en 3D des parties imaginaires des valeurs propres β_1 en (a), β_2 40 (c)-----	49
Figure (3.3) : Propagation d'une impulsion de type gaussienne dans la deuxième chaîne du modèle 2 -----	51
Figure (3.4) : Propagation d'une impulsion de type gaussienne dans la première chaîne du modèle 2 -----	52
Figure (3.5) : impulsion gaussienne envoyée simultanément dans la première ,deuxième(b) et troisième chaîne(c) du modèle 3 -----	53

LISTE DES ANNEXES

Annexe 1 : Expression des Coefficients du modèle3-----	62
Annexe 2 : Expression des Coefficients du modèle 3 -----	64

LISTE DES ABREVIATIONS

PTS : parity time symmetry

RK4:Runge Kutta d'ordre 4

Dédicace

A Mbiakop Henriette ma maman,

REMERCIEMENTS

Que la grâce et Honneur soient rendus au Seigneur JESUS-CHRIST qui m'a accompagné dans cette tâche.

J'exprime ma profonde gratitude à :

- Mr le Directeur de l'ENS de Yaoundé I ainsi qu'à tout son personnel administratif et enseignant en général, et en particulier à ceux du département de physique pour la formation acquise tout au long de notre cursus académique dans cette institution.

-Mr KENFACK JIOTSA Aurélien, Maître de conférences pour sa disponibilité et sa bonne disposition à encadrer ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à :

- Mr NDAWA Zacharie, pour son soutien et ses encouragements tout au long de ma formation.

-Mr TIKENG Arnaud, pour sa disponibilité constante et son soutien tout au long de ce travail.

-Noumen Rodrigue qui à été comme un grand frère pour moi

-Aux familles NGUETGNA, YANGOUA ,CHOUMKUI et en particulier à TCHAPET Estelle pour ses prières qui m'ont accompagnée.

-La grande Communauté de l'aumônerie protestante universitaire et en particulier à la Commission Louange pour ses prières.

-Ma famille Paternelle et maternelle et en particulier à mon oncle Guy TCHATAT à mes tantes MBIAKOP Hermione épouse BATOMEN à SANGA marie, NAAH Severin , maman Suzy ,maman Léonie .

-Aux étudiants du professeur Kenfack pour leur soutien et leur conseils .

-Franck pour ton soutien et sous toutes ses formes.

-Odilon pour ton amitié et ta bienveillance.

-Caroline , Lea pour votre soutien de PHYSIQUE 2016 pour leurs encouragements.

. je remercie tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

RESUMÉ

Le présent travail porte sur l'étude de la propagation des ondes linéaires dans un système couplé de trois guides d'ondes. Nous avons établi au chapitre 1 les équations de couplage modélisant un tel système. Nous avons déterminé les conditions pour que notre système soit PTS et pour ces conditions, nous avons pu obtenir des valeurs propres réelles. Nous avons également étudié les coefficients de réflexion et de transmission pour une chaîne linéaire de trimer, et deux autres modèles couplés pris comme discontinuités. Les résultats obtenus montrent que, ces discontinuités amplifient les ondes réfléchies et transmises. Par la suite, la comparaison de ces derniers a montré l'influence du couplage sur l'effet de transmission et de réflexion des ondes. Nous avons enfin effectué une étude numérique, en propageant une gaussienne dans ces systèmes et nous avons vérifié que la transmission et la réflexion de l'onde était en accord avec la propagation.

ABSTRACT

The present work investigates on the propagation of linear waves in a waveguide array with a parity-time (PT) symmetry defect created by a trimer. We have successfully used the coupled mode theory to derive the equations for the system. We have calculated the scattering coefficients and simulations indicate that the reflected and transmitted waves can be substantially amplified after interaction with the PT-symmetry defects. Finally, we have done a numerical study to show how an linear radiation can be propagate in our systems and It was numerically demonstrated that our systems can amplify or reduce intensity of an incidence radiation.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La propagation d'ondes de toute nature est l'un des phénomènes physiques les plus usuels auquel nous soyons confrontés. Depuis la vie courante (sons, vibrations, vagues...) jusqu'à l'échelle de l'univers (ondes électromagnétiques, de gravité) et à celle de l'atome (émission spontanée ou stimulée, interférences entre particules), ce sont l'émission et la réception des ondes qui constituent notre moyen privilégié de connaissance du monde qui nous entoure. À l'échelle de l'atome, un système physique est décrit par son hamiltonien qui mesure son énergie mécanique. Or la mécanique quantique exige que tout observable physique soit hermitien. Cependant, une étude récente faite [1], a démontré que les hamiltoniens non-hermitiens sous la condition (PTS) pouvaient avoir un spectre entièrement réel. Cette observation mathématique entraîne de profondes conséquences physiques. Les domaines d'application des systèmes PTS sont variés on peut entre autre citer : la physique atomique, l'électronique les méta-matériaux magnétiques et l'optique. Le problème est de trouver des systèmes optiques satisfaisant la condition PTS, d'étudier la réflexion d'une onde dans un système PTS optique et voire dans quels cas il y'a amplification de l'onde transmise. Pour y parvenir, nous étudions le comportement d'une onde dans un système Trimer PTS. Dans ce travail, nous donnons dans le premier chapitre une généralité sur les systèmes PTS et les guides d'onde. Le chapitre deux sera consacré à l'étude des phénomènes de transmission et de réflexion d'une onde dans une chaîne de guide d'onde ayant en son sein une discontinuité trimer. Au chapitre trois, nous propageons une onde de type gaussienne dans une chaîne linéaire et couplée trimer. Le chapitre quatre portera sur les implications pédagogiques. Ce travail s'achèvera par une conclusion générale résumant les principaux résultats obtenus et les perspectives.

Chapitre 1 :

SYSTEMES PTS ET GENERALITES SUR LES GUIDES D'ONDES

Introduction

Les ondes électromagnétiques sont largement utilisées en télécommunication pour transmettre l'information par support optique (fibres optiques, optique intégrée). Ainsi donc, les réseaux de télécommunication optique sont de plus en plus présents dans les systèmes de télécommunication puisqu'ils permettent de grandes capacités de transmission de données. Pour les futurs réseaux et pour accompagner la demande accrue en termes de débit d'informations, il devient nécessaire d'insérer des fonctions optiques pour le traitement du signal réalisé traditionnellement par des dispositifs optoélectroniques.

Plus concrètement, il s'agit de trouver des matériaux tels que les supra conducteurs pour concevoir les guides d'onde et des méthodes d'insertion dans les réseaux pour utiliser des composants qui permettent le traitement du signal optique sans passer par des conversions optiques-électroniques et électroniques-optiques. Les débits envisagés pour répondre aux besoins à moyen terme sont de 40 Gb.S^{-1} et peuvent aller jusqu'à 160 Gb.S^{-1} . La technologie pour la conception de guides d'ondes optiques est très pointue et fait très largement appel à des matériaux nouveaux appelés guides d'ondes. C'est ainsi que le premier guide d'onde fut proposé [2]. Ils sont utilisés dans de nombreux domaines de la Recherche en physique, en électronique, en passant par les radars ou les pinces optiques utilisées pour déplacer des particules ou des objets biologiques tels que des cellules.

Après d'intenses travaux menés [3] et qui ont montré qu'un Hamiltonien non Hermitien pouvant présenter des valeurs propres réelles lorsqu'il est PTS, on montre [4] qu'un système PTS en optique est obtenu en couplant deux guides d'ondes dont l'un appelé « gain » amplificateur et l'autre appelé « loss » atténuateur. Dans ce chapitre, On construira un système PTS en optique paraxial à partir d'un système PTS en mécanique quantique et on démontrera l'équation qui régit la propagation d'une onde dans une chaîne couplée de trois guides d'onde.

1.1) Systèmes PTS

Les travaux [5] ont permis l'extension des lois et postulats de la mécanique quantique aux Hamiltoniens pseudo hermitiens. On démontre [6] que ces Hamiltoniens pseudo hermitiens [7] peuvent présenter un spectre réel, lorsqu'ils sont Parity and Time symmetry (PTS). Un

opérateur est dit PTS lorsqu'il reste invariant après les actions successives des opérateurs Parity (P) et Time (T) qui agissent de la façon suivante :

On a :

$$H = \left(\frac{P^2}{2} + V(x) \right) \quad (1.1)$$

$$\hat{T}H = \hat{P} \left(\frac{P^2}{2} + V(x) \right) = \frac{(P)^2}{2} + V^*(x) \quad (1.2)$$

En appliquant l'opérateur P sur (2), On obtient :

$$\hat{P}\hat{T}H = \hat{P} \left(\frac{P^2}{2} + V^*(x) \right) = \frac{(-p)^2}{2} + V^*(-x) = \frac{(p)^2}{2} + V^*(-x) \quad (1.3)$$

Or par définition d'un système PTS on a,

$$\hat{P}\hat{T}H = H \quad (1.4)$$

Des équations (1), (3) et (4) on déduit que :

$$\frac{(p)^2}{2} + V(x) = \frac{(p)^2}{2} + V^*(-x) \quad (1.5)$$

Il en résulte qu'un Hamiltonien pseudo hermitien est PTS lorsque son potentiel complexe

Vérifie la relation ci-dessous :

$$V(x) = V^*(-x) \quad (1.6)$$

Le concept de système PTS peut aussi s'étendre en optique pour le fait que l'équation d'optique paraxiale est mathématiquement isomorphe à celle de Schrödinger normalisée de la mécanique quantique. Un système sera dit PTS en optique si la distribution complexe de l'indice de refraction $n(x) = n_R(x) + in_I(x)$ [8] du système satisfait la condition :

$$\begin{cases} n_R(x) = n_R(-x) \\ n_I(x) = -n_I(-x) \end{cases} \quad (1.7)$$

1.2) Type d'ondes

1.2.1) Ondes acoustiques

Ces ondes se propagent en milieu fluide et sont le support de la propagation du son. Exemple les ondes musicales, les ondes sous-marines.

1.2.2) Ondes élastiques

Ces ondes se propagent dans les solides (la propagation des ondes dans le sous-sol : les séismes)

1.2.3) Ondes de gravité

Il s'agit des ondes liées à la propagation de la houle. Les applications concernent prioritairement l'industrie maritime notamment pour tout ce qui concerne les problèmes de stabilité des navires, de tenue à la mer, de résistance de vagues.

1.2.4) Ondes électromagnétiques

Ces ondes n'ont pas besoin de support matériel pour se propager. Les inconnues du problème sont essentiellement le champ électrique et le champ magnétique. On a généralement besoin des antennes pour la communication à longue distance par ondes électromagnétiques. Leur rôle est d'émettre, diriger, réfléchir les ondes.

1.2.5) Ondes solitaires

Une onde solitaire ou soliton est une onde auto-piégée et localisée ne subissant aucun étalement lors de leur propagation dans un environnement dispersif.

1.2.6) Ondes gravitationnelles

En physique, une onde gravitationnelle, ou onde de gravitation, est une oscillation de la courbure de l'espace-temps qui se propage à grande distance de son point de formation.

1.3) Généralités sur les guides d'ondes

1.3.1) Définition

Un guide d'onde est un dispositif fait soit à base des matériaux cristallins (si, Ge, GaAs, ...) soit à base des verres et permettant de guider une perturbation sur une distance plus ou moins grande. Un guide d'onde optique est un tube conducteur par lequel l'énergie est transmise sous forme d'ondes électromagnétiques. Le tube agit en tant que frontière qui confine les ondes en son intérieur. L'effet pelliculaire empêche tous les effets électromagnétiques d'émaner hors du guide. L'exemple le plus courant est la fibre optique qui est un guide d'onde particulier car elle offre un débit d'informations nettement supérieure à celui des

câbles coaxiaux .Dans le cadre de notre travail on utilisera une chaîne de guides d'ondes amplificateur et réducteur d'amplitudes (gain / loss) et on s'intéressera à leur effet sur une onde incidente .

1.3.2) Types de guides d'onde

La propagation des ondes guidées exige des supports tels que les guides d'onde .On distingue deux types de guides d'onde à savoir:

- **Les guides d'onde fermés :**

Qui correspondent au cas où le confinement de l'énergie transverse est simplement dû au fait que le milieu de propagation est borné dans les directions transverses .

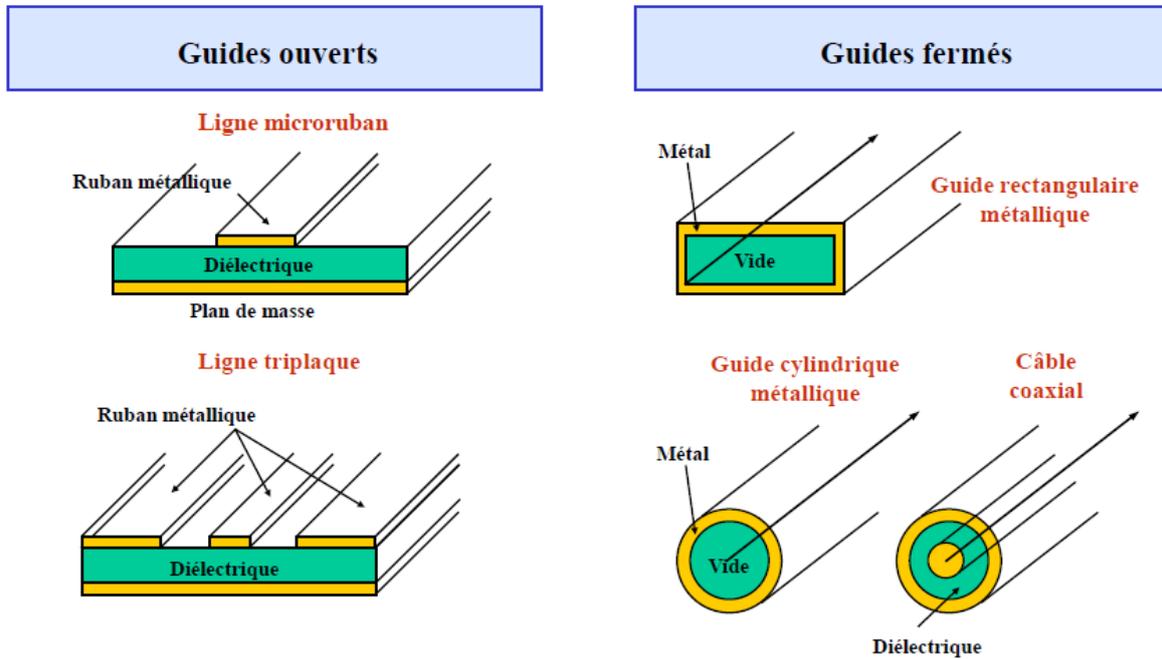
- **Les guides d'ondes ouverts :**

Qui correspondent au cas où, le milieu de propagation étant non borné dans les directions transverses, le confinement de l'énergie est dû à un mécanisme physique qui dépend des propriétés du modèle de propagation.

Ce sont bien entendu les guides ouverts qui posent les questions les plus intéressantes (mais aussi les plus difficiles) d'un point de vue scientifique, tant au plan physique que mathématique et numérique. L'analyse de ces phénomènes revêt une importance fondamentale soit parce qu'il y a dans la nature des ondes guidées auxquelles l'homme se trouve directement confronté (ondes de surface lors du tremblement de terre, ondes de gravité captées par la côte, ...) soit parce que l'homme va chercher à maîtriser et exploiter de telles ondes, notamment dans le domaine des télécommunications (fibres optiques, ...). Mathématiquement, l'étude des guides d'ondes nécessite une parfaite maîtrise de la théorie spectrale des opérateurs auto adjoints et numériquement elle fait appel à beaucoup d'ingrédients utilisés par ailleurs (conditions aux limites artificielles, équations intégrales, éléments finis, ...) mais aussi à des outils plus spécifiques (algorithmes de calcul de valeurs propres, résolution d'équations non linéaires, ...). Enfin, au delà de l'étude intrinsèque des guides d'ondes, il est fondamental, notamment pour les applications technologiques, d'être capable d'étudier leur interaction avec d'autres milieux de propagation (guides d'ondes débouchant sur des milieux ouverts, couplage de guides...), voire d'optimiser ces guides.

La figure ci-dessous nous présente quelques types de guides d'onde.

Guides : symétrie par translation selon z, axe de propagation



Figure(1 .1) : Quelques types de guides d'onde .

A chacun de ces guides d'onde correspond une équation de propagation qui lui est propre et découlant des équations de Maxwell. En fonction de la dimension du guide, on distingue :

- **Le guide d'onde plan**

Un guide d'onde plan présente généralement peu d'intérêt en optique intégrée car la lumière diverge transversalement lors de sa propagation. Il restreint le mode latéralement d'où la réalisation des guides à deux dimensions.

- **Le guide d'onde bidimensionnel**

Avec la technologie actuelle, il est aisé de réaliser un confinement latéral en utilisant un guide bidirectionnel. On appelle un guide bidimensionnel un guide d'onde de **section constante** invariante en z et dont la permittivité varie dans la section

1.3.3) Couplage des guides d'onde

1.3.3.1) Couplage Linéaire

Le couplage dit linéaire de guide d'onde peut être réalisé avec deux, trois, quatre guides d'onde et voire plus. Lorsqu'on réalise par exemple le couplage linéaire de deux, trois ou quatre guides d'onde optique, avec un gain (guide d'onde amplificateur) et loss (guide

d'onde atténuateur) égal de façon globale, on obtient respectivement ce qu'on appelle un « dimèr », « trimèr » ou « quadrimèr ». Ces différents couplages prennent la dénomination générale d'oligomère dans la littérature [10]. Les guides d'onde couplés de façon linéaire peuvent être également couplés entre eux de manière à avoir une chaîne.

1.3.3.2. Couplage en chaîne

Selon le modèle linéaire (dimer, trimèr, quadrimèr...) de base, le couplage de guides d'onde en chaîne permet de réaliser les chaînes de dimèr, trimèr ou quadrimèr... Les modèles en chaîne ainsi obtenues sont utilisés comme des milieux supports dans lesquels sont étudiés la dynamique des ondes notamment les gaussiennes ;Ceci parce qu'elles possèdent des propriétés particulières telles que pouvant être des systèmes PTS.

Dans cette dernière condition,yuri Kivshar (2002) a étudié la dynamique des ondes dans une chaîne couplée de dimer, un dimer étant constitué de deux guides d'onde dont l'un est un« gain » et l'autre un « Loss ».

1.3.4. Equation du couplage de trois guides d'ondes

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, on suppose une faible divergence du faisceau par rapport à son axe de propagation ; la propagation obéit donc à l'équation de Schrödinger complexe normalisée [11] :

$$i \frac{\partial \varphi(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi(x, z)}{\partial z^2} + n(x)\varphi(x, z) = 0 \quad (1.8)$$

Avec z , x , $n(x)$ désignant respectivement la distance de propagation (Scalaire) ;la coordonnée transversale sans dimension et la distribution complexe de l'indice normalisé : z joue le rôle temps en mécanique quantique .On démontre [11] que la formule du lagrangien associé a l'équation (1.8) s'écrit :

$$L = \frac{i}{2} [\varphi(x)\varphi_z^*(-x) - \varphi_x(x)\varphi^*(-x)] + \varphi_x(x)\varphi_x^*(-x) - n(x)[\varphi(x)\varphi^*(-x)] \quad (1.9)$$

Considérons 03 éléments identiques couplés de guide d'onde PTS, pour simplifier le travail, nous resterons dans la configuration 1D. La solution de ce système couplé peut être exprimée comme une superposition des solutions de chaque élément pris individuellement .On peut donc écrire cette solution sous la forme :

$$\varphi(x, z) = [a(z)\beta_1(x) + b(z)\beta_2(x) + c(z)\beta_3(x)]e^{i\gamma z} \quad (1.10)$$

Ou les β_k ; $k \in \{1,2,3\}$ sont les fonctions d'onde pris individuellement, γ étant la valeur propre réelle de la propagation. En introduisant l'équation (1.10) dans (1.9), on obtient :

$$\begin{aligned} L = \frac{i}{2} \{ & a\dot{a}^* \beta_1\beta_1^* + a\dot{b}^* \beta_1\beta_2^* + b\dot{a}^* \beta_2\beta_1^* + a\dot{c}^* \beta_1\beta_3^* + c\dot{a}^* \beta_3\beta_1^* + b\dot{b}^* \beta_2\beta_2^* + c\dot{c}^* \beta_3\beta_3^* \\ & - 2i\gamma (a\dot{a}^* \beta_1\beta_1^* + a\dot{b}^* \beta_1\beta_2^* + b\dot{a}^* \beta_2\beta_1^* + a\dot{c}^* \beta_1\beta_3^* + c\dot{a}^* \beta_3\beta_1^* + b\dot{b}^* \beta_2\beta_2^* + c\dot{c}^* \beta_3\beta_3^*) \\ & - a^* \dot{a}\beta_1^*\beta_1 - a^* \dot{b}\beta_1^*\beta_2 - b^* \dot{a}\beta_2^*\beta_1 - a^* \dot{c}\beta_1^*\beta_3 - c^* \dot{a}\beta_3^*\beta_1 - b^* \dot{b}\beta_2^*\beta_2 - c^* \dot{c}\beta_3^*\beta_3 \} \\ & + a\dot{a}^* \dot{\beta}_1\dot{\beta}_1^* + a\dot{b}^* \dot{\beta}_1\dot{\beta}_2^* + b\dot{a}^* \dot{\beta}_2\dot{\beta}_1^* + a\dot{c}^* \dot{\beta}_1\dot{\beta}_3^* + c\dot{a}^* \dot{\beta}_3\dot{\beta}_1^* + b\dot{b}^* \dot{\beta}_2\dot{\beta}_2^* + c\dot{c}^* \dot{\beta}_3\dot{\beta}_3^* \\ & - n(x) [a\dot{a}^* \beta_1\beta_1^* + a\dot{b}^* \beta_1\beta_2^* + b\dot{a}^* \beta_2\beta_1^* + a\dot{c}^* \beta_1\beta_3^* + c\dot{a}^* \beta_3\beta_1^* + b\dot{b}^* \beta_2\beta_2^* + c\dot{c}^* \beta_3\beta_3^*] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Les trois équations du mouvement sont obtenues en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta \langle L \rangle}{\delta a^*} = 0 \\ \frac{\delta \langle L \rangle}{\delta b^*} = 0 \\ \frac{\delta \langle L \rangle}{\delta c^*} = 0 \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Avec :

$$\langle L \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} L dx \quad (1.13)$$

$\langle L \rangle$ est une fonction des amplitudes $a(z)$; $a^*(z)$; $b(z)$; $b^*(z)$; $c(z)$; $c^*(z)$ et leurs dérivées

respectives. Calculons les $\frac{\delta L}{\delta u_k}$ ou les u_k ($k \in \{1, 2, 3\}$) désignent les amplitudes

complexes des modes des guides d'onde

on a :

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta a^*} &= \frac{i}{2} \left\{ -2i\gamma (a\beta_1\beta_1^* + b\beta_2\beta_1^* + c\beta_3\beta_1^*) - \dot{a}\beta_1^*\beta_1 - \dot{b}\beta_1^*\beta_2 - \dot{c}\beta_1^*\beta_3 \right\} \\ &+ a\dot{\beta}_1\dot{\beta}_1^* + b\dot{\beta}_2\dot{\beta}_1^* + c\dot{\beta}_3\dot{\beta}_1^* - n(x) \left[a\beta_1\beta_1^* + b\beta_2\beta_1^* + c\beta_3\beta_1^* \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta b^*} &= \frac{i}{2} \left\{ -2i\gamma (a\beta_1\beta_2^* + b\beta_2\beta_2^* + c\beta_3\beta_2^*) - \dot{a}\beta_2^*\beta_1 - \dot{b}\beta_2^*\beta_2 - \dot{c}\beta_2^*\beta_3 \right\} \\ &+ a\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2^* + b\dot{\beta}_2\dot{\beta}_2^* + c\dot{\beta}_3\dot{\beta}_2^* - n(x) \left[a\beta_1\beta_2^* + b\beta_2\beta_2^* + c\beta_3\beta_2^* \right] \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta c^*} &= \frac{i}{2} \left\{ -2i\gamma (a\beta_1\beta_3^* + b\beta_2\beta_3^* + c\beta_3\beta_3^*) - \dot{a}\beta_3^*\beta_1 - \dot{b}\beta_3^*\beta_2 - \dot{c}\beta_3^*\beta_3 \right\} \\ &+ a\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3^* + b\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3^* + c\dot{\beta}_3\dot{\beta}_3^* - n(x) \left[a\beta_1\beta_3^* + b\beta_2\beta_3^* + c\beta_3\beta_3^* \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Des équations (1.12)... (1.16) on tire les expressions ci - dessous:

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta a^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i}{2} \left\{ -2i\gamma (a\beta_1\beta_1^* + b\beta_2\beta_1^* + c\beta_3\beta_1^*) - \dot{a}\beta_1^*\beta_1 - \dot{b}\beta_1^*\beta_2 - \dot{c}\beta_1^*\beta_3 \right\} + a\dot{\beta}_1\dot{\beta}_1^* + b\dot{\beta}_2\dot{\beta}_1^* + c\dot{\beta}_3\dot{\beta}_1^* - n(x) \left[a\beta_1\beta_1^* + b\beta_2\beta_1^* + c\beta_3\beta_1^* \right] \right) dx \quad (1.17)$$

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta b^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i}{2} \left\{ -2i\gamma (a\beta_1\beta_2^* + b\beta_2\beta_2^* + c\beta_3\beta_2^*) - \dot{a}\beta_2^*\beta_1 - \dot{b}\beta_2^*\beta_2 - \dot{c}\beta_2^*\beta_3 \right\} + a\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2^* + b\dot{\beta}_2\dot{\beta}_2^* + c\dot{\beta}_3\dot{\beta}_2^* - n(x) \left[a\beta_1\beta_2^* + b\beta_2\beta_2^* + c\beta_3\beta_2^* \right] \right) dx \quad (1.18)$$

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta c^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i}{2} \left\{ -2i\gamma (a\beta_1\beta_3^* + b\beta_2\beta_3^* + c\beta_3\beta_3^*) - \dot{a}\beta_3^*\beta_1 - \dot{b}\beta_3^*\beta_2 - \dot{c}\beta_3^*\beta_3 \right\} + a\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3^* + b\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3^* + c\dot{\beta}_3\dot{\beta}_3^* - n(x) \left[a\beta_1\beta_3^* + b\beta_2\beta_3^* + c\beta_3\beta_3^* \right] \right) dx \quad (1.19)$$

Soit :

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta a^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \gamma (a\beta_1\beta_1^* + b\beta_2\beta_1^* + c\beta_3\beta_1^*) - \frac{i}{2} (\dot{a}\beta_1^*\beta_1 + \dot{b}\beta_1^*\beta_2 + \dot{c}\beta_1^*\beta_3) \right\} dx \quad (1.20)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a\dot{\beta}_1\dot{\beta}_1^* + b\dot{\beta}_2\dot{\beta}_1^* + c\dot{\beta}_3\dot{\beta}_1^* - n(x) [a\beta_1\beta_1^* + b\beta_2\beta_1^* + c\beta_3\beta_1^*] \right\} dx$$

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta b^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \gamma (a\beta_1\beta_2^* + b\beta_2\beta_2^* + c\beta_3\beta_2^*) - \frac{i}{2} (\dot{a}\beta_2^*\beta_1 + \dot{b}\beta_2^*\beta_2 + \dot{c}\beta_2^*\beta_3) \right\} dx \quad (1.21)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2^* + b\dot{\beta}_2\dot{\beta}_2^* + c\dot{\beta}_3\dot{\beta}_2^* - n(x) [a\beta_1\beta_2^* + b\beta_2\beta_2^* + c\beta_3\beta_2^*] \right\} dx$$

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta c^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \gamma (a\beta_1\beta_3^* + b\beta_2\beta_3^* + c\beta_3\beta_3^*) - \frac{i}{2} (\dot{a}\beta_3^*\beta_1 + \dot{b}\beta_3^*\beta_2 + \dot{c}\beta_3^*\beta_3) \right\} dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3^* + b\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3^* + c\dot{\beta}_3\dot{\beta}_3^* - n(x) [a\beta_1\beta_3^* + b\beta_2\beta_3^* + c\beta_3\beta_3^*] \right\} dx$$

En prenant $n(x) = n_1 + n_2 + n_3$, on peut écrire les expressions $\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta u_k}$ avec $k \in \{1, 2, 3\}$:

Et en tenant compte de la relation (1.12) on obtient :

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta u_k^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \gamma (a\beta_1\beta_k^* + b\beta_2\beta_k^* + c\beta_3\beta_k^*) - \frac{i}{2} (\dot{a}\beta_k^*\beta_1 + \dot{b}\beta_k^*\beta_2 + \dot{c}\beta_k^*\beta_3) \right\} dx = 0 \quad (1.22)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a\dot{\beta}_1\dot{\beta}_k^* + b\dot{\beta}_2\dot{\beta}_k^* + c\dot{\beta}_3\dot{\beta}_k^* - (n_1 + n_2 + n_3) [a\beta_1\beta_k^* + b\beta_2\beta_k^* + c\beta_3\beta_k^*] \right\} dx$$

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta u_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a [\gamma\beta_1\beta_k^* - n_1\beta_1\beta_k^* + \dot{\beta}_1\dot{\beta}_k^*] + b [\gamma\beta_2\beta_k^* - n_2\beta_2\beta_k^* + \dot{\beta}_2\dot{\beta}_k^*] \right. \quad (1.23)$$

$$+ c [\gamma\beta_3\beta_k^* - n_3\beta_3\beta_k^* + \dot{\beta}_3\dot{\beta}_k^*] - \frac{i}{2} [\dot{a}\beta_k^*\beta_1 + \dot{b}\beta_k^*\beta_2 + \dot{c}\beta_k^*\beta_3]$$

$$\left. - a [n_2 + n_3] \beta_1\beta_k^* - b [n_1 + n_3] \beta_2\beta_k^* - c [n_1 + n_2] \beta_3\beta_k^* \right\} dx = 0$$

En tenant compte du fait que $\beta_2^* = \beta_3$; $\beta_3^* = \beta_2$ et que $\beta_1^* = \beta_1$, on peut écrire :

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta a^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a [\gamma\beta_1\beta_1 - n_1\beta_1\beta_1 + \dot{\beta}_1\dot{\beta}_1^*] + b [\gamma\beta_2\beta_1 - n_2\beta_2\beta_1 + \dot{\beta}_2\dot{\beta}_1^*] \right. \quad (1.24)$$

$$+ c [\gamma\beta_3\beta_1 - n_3\beta_3\beta_1 + \dot{\beta}_3\dot{\beta}_1^*] - \frac{i}{2} [\dot{a}\beta_1^*\beta_1 + \dot{b}\beta_1^*\beta_2 + \dot{c}\beta_1^*\beta_3]$$

$$\left. - a [n_2 + n_3] \beta_1\beta_1^* - b [n_1 + n_3] \beta_2\beta_1^* - c [n_1 + n_2] \beta_3\beta_1^* \right\} dx = 0$$

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta b^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\begin{aligned} & a[\gamma\beta_1\beta_3 - n_1\beta_1\beta_3 + \dot{\beta}_1\dot{\beta}_3] + b[\gamma\beta_2\beta_3 - n_2\beta_2\beta_3 + \dot{\beta}_2\dot{\beta}_3] \\ & + c[\gamma\beta_3\beta_3 - n_3\beta_3\beta_3 + \dot{\beta}_3\dot{\beta}_3] - \frac{i}{2}[\dot{a}\beta_2^* \beta_1 + \dot{b}\beta_2^* \beta_2 + \dot{c}\beta_2^* \beta_3] \\ & - a[n_2 + n_3]\beta_1\beta_2^* - b[n_1 + n_3]\beta_2\beta_2^* - c[n_1 + n_2]\beta_3\beta_2^* \end{aligned} \right) dx = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta c^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\begin{aligned} & a[\gamma\beta_1\beta_2 - n_1\beta_1\beta_2 + \dot{\beta}_1\dot{\beta}_2] + b[\gamma\beta_2\beta_2 - n_2\beta_2\beta_2 + \dot{\beta}_2\dot{\beta}_2] \\ & + c[\gamma\beta_3\beta_2 - n_3\beta_3\beta_2 + \dot{\beta}_3\dot{\beta}_2] - \frac{i}{2}[\dot{a}\beta_3^* \beta_1 + \dot{b}\beta_3^* \beta_2 + \dot{c}\beta_3^* \beta_3] \\ & - a[n_2 + n_3]\beta_1\beta_3^* - b[n_1 + n_3]\beta_2\beta_3^* - c[n_1 + n_2]\beta_3\beta_3^* \end{aligned} \right) dx = 0 \quad (1.26)$$

Si on considère uniquement le potentiel n_k avec $k \in \{1, 2, 3\}$ alors les solutions de l'équation (1.1) se mettent sous la forme :

$$\varphi_k(x, z) = \beta_k(x)e^{i\gamma z} \quad (1.27)$$

En substituant (1.27) dans (1.8) on trouve :

$$\gamma\beta_k + \frac{\partial^2 \beta_k}{\partial x^2} + n_k\beta_k = 0 \quad (1.28)$$

Après multiplication de l'équation (1.28) par les coefficients β_{lm} et une série d'intégrations par parties et en considérant que les fonctions dérivées s'annulent à l'infini, On trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (n_k\beta_k\beta_l + n_l\beta_k\beta_m) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma\beta_k\beta_l + \dot{\beta}_k\dot{\beta}_l + \gamma\beta_k\beta_m + \dot{\beta}_k\dot{\beta}_m) dx \quad (1.29)$$

Et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (n_k\beta_k\beta_l) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma\beta_k\beta_k + \dot{\beta}_k\dot{\beta}_k) dx \quad \{l, m\} \neq k \quad (1.30)$$

On déduit donc les relations suivantes :

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta a^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{i}{2} [\dot{a}\beta_1^* \beta_1 + \dot{b}\beta_1^* \beta_2 + \dot{c}\beta_1^* \beta_3] - a[n_2 + n_3] \beta_1 \beta_1^* \right. \\ \left. - b[n_3 + n_1] \beta_2 \beta_1^* - c[n_2 + n_1] \beta_3 \beta_1^* \right) dx = 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta b^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{i}{2} [\dot{a}\beta_2^* \beta_1 + \dot{b}\beta_2^* \beta_2 + \dot{c}\beta_2^* \beta_3] - a[n_3 + n_2] \beta_1 \beta_2^* \right. \\ \left. - b[n_1 + n_3] \beta_2 \beta_2^* - c[n_1 + n_2] \beta_3 \beta_2^* \right) dx = 0 \quad (1.32)$$

$$\frac{\delta \langle L \rangle}{\delta c^*} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{i}{2} [\dot{a}\beta_3^* \beta_1 + \dot{b}\beta_3^* \beta_2 + \dot{c}\beta_3^* \beta_3] - a[n_2 + n_3] \beta_1 \beta_3^* \right. \\ \left. - b[n_1 + n_3] \beta_2 \beta_3^* - c[n_1 + n_2] \beta_3 \beta_3^* \right) dx = 0 \quad (1.33)$$

Les équations (1.31);(1.32);(1.33) sont les équations des modes couplés pour une chaîne linéaire de trimer ; on obtient ainsi le système ci-dessous :

$$\begin{cases} i\Gamma_{11}\dot{a} + i\Gamma_{12}\dot{b} + i\Gamma_{13}\dot{c} + a\theta_{231} + b\Omega_{321} + c\Omega_{213} = 0 \\ i\Gamma_{21}\dot{a} + i\Gamma_{22}\dot{b} + i\Gamma_{23}\dot{c} + a\Omega_{321} + b\theta_{132} + c\Omega_{123} = 0 \\ i\Gamma_{31}\dot{a} + i\Gamma_{32}\dot{b} + i\Gamma_{33}\dot{c} + a\Omega_{231} + b\Omega_{132} + c\theta_{123} = 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

Avec :

$$\begin{cases} \Gamma_{lm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_l \beta_m dx \\ \Omega_{lkm} = \int_{+\infty}^{-\infty} (n_l + n_m) \beta_k \beta_m^* dx \\ \theta_{klm} = \int_{+\infty}^{-\infty} (n_k + n_l) \beta_m \beta_m^* dx \end{cases} \quad (1.35)$$

En divisant respectivement les 1^{ère}, 2^{ème} et 3^{ième} équation du système (1.34) par : Γ_{11} , Γ_{22} , Γ_{33} et en tenant compte du fait que :

$$\begin{cases} \Gamma_{11} \gg \Gamma_{12}; \Gamma_{11} \gg \Gamma_{13} \\ \Gamma_{22} \gg \Gamma_{21}; \Gamma_{22} \gg \Gamma_{23} \\ \Gamma_{33} \gg \Gamma_{31}; \Gamma_{33} \gg \Gamma_{32} \end{cases} \quad (1.36)$$

Tenant compte de la relation (1.36), on obtient :

$$\begin{cases} i \frac{da}{dz} + \frac{\theta_{231}}{\Gamma_{11}} a + \frac{\Omega_{321}}{\Gamma_{11}} b + \frac{\Omega_{231}}{\Gamma_{11}} c = 0 \\ i \frac{db}{dz} + \frac{\theta_{132}}{\Gamma_{22}} b + \frac{\Omega_{321}}{\Gamma_{22}} a + \frac{\Omega_{123}}{\Gamma_{22}} c = 0 \\ i \frac{dc}{dz} + \frac{\theta_{123}}{\Gamma_{33}} c + \frac{\Omega_{231}}{\Gamma_{33}} a + \frac{\Omega_{132}}{\Gamma_{33}} b = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

Posons :

$$\begin{cases} \frac{\theta_{231}}{\Gamma_{11}} = \Delta_a; \frac{\theta_{132}}{\Gamma_{22}} = \Delta_b; \frac{\theta_{123}}{\Gamma_{33}} = \Delta_c \\ \frac{\Omega_{231}}{\Gamma_{11}} = \frac{\Omega_{321}}{\Gamma_{22}} = \alpha_1; \frac{\Omega_{132}}{\Gamma_{33}} = \frac{\Omega_{123}}{\Gamma_{22}} = \alpha_2 \\ \frac{\Omega_{231}}{\Gamma_{33}} = \frac{\Omega_{231}}{\Gamma_{11}} = \alpha_3 \end{cases} \quad (1.38)$$

(1.38) dans (1.37) Nous permet de déduire le système ci-dessous :

$$\begin{cases} i \frac{da}{dz} + \Delta_a a + \alpha_1 b + \alpha_3 c = 0 \\ i \frac{db}{dz} + \Delta_b b + \alpha_1 a + \alpha_2 c = 0 \\ i \frac{dc}{dz} + \Delta_c c + \alpha_3 a + \alpha_2 b = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

Les α_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) et les $\Delta_{a,b,c}$ désignent respectivement les coefficients de couplage le **schift** lors de la propagation de l'onde dans le système . Dans la suite on prendra $\Delta_{a,b,c}$ sous la forme complexe à savoir:

$$\begin{cases} \Delta_a = i\rho_a \\ \Delta_b = i\rho_b, & \rho_{a,b,c} \in \mathbb{R} \\ \Delta_c = i\rho_c \end{cases} \quad (1.40)$$

CONCLUSION

Parvenu au terme de ce chapitre où il était question de présenter des généralités sur les guides d'ondes, nous retenons qu'un trimer est un couplage de trois guides d'ondes. Nous également retenons qu'il existe des guides d'ondes amplificateurs ou réducteurs. De plus, on a vu qu'il existe des systèmes physiques qui sont tels que bien que leur hamiltonien soit non hermitien, ce dernier possède des valeurs propres réelles. De ce fait, on a pu construire des PTS en optique paraxiale qui sont tels que la partie réelle de leur indice de réfraction soit une fonction paire de la position tandis que la partie imaginaire est une fonction impaire de la position. Dans le domaine de l'optique les ondes n'ont pas besoin de milieux matériels pour se propager. La relation (1.39) obtenue traduit la propagation des ondes à travers trois guides d'ondes couplés constituant un système PTS ; le terme non linéaire étant nul dans ce cas. Ce système de guides d'ondes PTS est utilisé dans la suite du travail comme discontinuité dans une série de guides d'ondes conservatifs.

Chapitre 2 :

ETUDE DE LA TRANSMISSION ET REFLEXION D'UNE ONDE DANS UNE CHAINE LINEAIRE ET COUPLEE DETRIMER

Introduction

Les structures photoniques, composées de guides d'ondes couplés avec un gain/loss, tels que les trimer sont de plus en plus modélisées [10-12]. Ces structures sont considérées comme des analogies optiques des potentiels complexes PTS. Une étude des phénomènes de transmission et de réflexion des ondes s'avère donc cruciale pour expliquer et prévoir le comportement de cette dernière à la traversée d'une discontinuité de type Trimer. Ces ondes sont transmises dans les guides d'onde au moyen de réflexions contre ses murs intérieurs, qui sont considérés comme des **conducteurs parfaits**. Compte tenu des besoins sans cesse croissant des industries et d'un meilleur rendement, L'étude et la simulation numérique des phénomènes de propagation et par ricochet de la transmission et la réflexion des ondes constitue donc une activité très répandue dans les divers domaines de la physique notamment en optique intégrée. De façon générale, notre travail est orienté vers l'analyse, l'approximation numérique et mathématique pour la description des phénomènes de propagation d'ondes intervenant en physique. Au-delà de l'objectif général de progression de la connaissance scientifique nous seront également assignés à traiter des problèmes complexes.

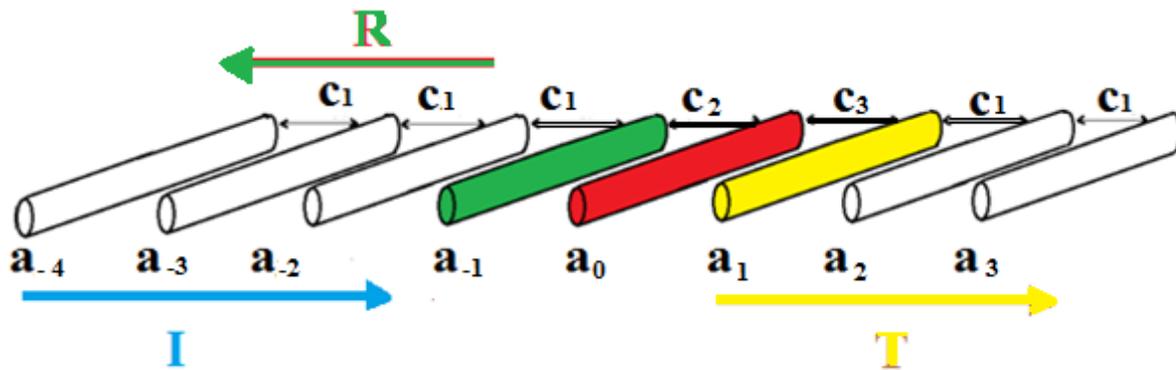
L'étude de tels problèmes conduit naturellement à des applications importantes sur le plan industriel. Pour s'attaquer à ces problèmes, notre démarche scientifique repose sur La modélisation du problème physique (transmission et réflexion d'une onde) propriétés qualitatives essentielles du modèle.

Nous utiliserons donc dans le cadre de nos simulations numériques les logiciels **MATLAB** qui est un logiciel scientifique de calcul numérique et **MAPLE** qui nous a permis d'effectuer des calculs mathématique et des tracés en 3D.

Dans le cadre de notre travail nous avons utilisés la méthode de RK4(Runge Kutta d'ordre 4) pour simuler la propagation l'onde dans le système PTS . Nous nous appuyons sur les travaux développés par Yuri Kivshar sur le dimer et ceux de [14] sur le trimer et nous concevrons un modèle général trimer pris comme discontinuité dans une chaîne conservative.

2.1. Chaîne linéaire de trimer : model 1

Le trimer ici désigne un ensemble de trois guides d'ondes (avec amplification ou atténuation) couplés entre eux, Le milieu de propagation de l'onde est un ensemble de guides d'ondes conservatifs couplés, dans lequel une discontinuité de type trimer a été insérée (Figure2.1).



Figure(2.1) :Chaîne de guides d'onde conservative ayant en son sein une discontinuité trimer

C_1 est le coefficient de couplage à l'extérieur du trimer, C_2 et C_3 sont les coefficient de couplage à l'intérieur du trimer. L'onde se propage à travers la série de guides d'ondes conservatifs avant son interaction avec le trimer. Les guides conservatifs sont ceux dans lesquels les ondes se propagent sans amplification, ni atténuation, le guide d'onde amplificateur sera désigné dans la suite par le terme 'gain' et le guide d'onde qui atténue l'onde sera désigné par 'loss'.

2. 2.Etude théorique du modèle mathématique

2.2.1. Equation du modèle

Les équations régissant la propagation d'une onde dans un tel système sont sous la forme :

$$i \frac{da_j}{dz} + C_1 a_{j-1} + C_1 a_{j+1} = 0; j \neq \{-1; 0; 1\} \quad (2.1)$$

$$i \frac{da_{-1}}{dz} + i\rho_{-1} a_{-1} + C_1 a_{-2} + C_2 a_0 = 0 \quad (2.2)$$

$$i \frac{da_0}{dz} + i\rho_0 a_0 + C_2 a_{-1} + C_3 a_{+1} = 0 \quad (2.3)$$

$$i \frac{da_1}{dz} + i\rho_1 a_1 + C_3 a_0 + C_1 a_{+2} = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \rho_{-1} = \rho \\ \rho_0 = -\theta\rho \\ \rho_1 = -(1-\theta)\rho \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Où j est le numéro du guide d'ondes, z est la distance de propagation, les a_j sont les amplitudes des modes, désigne le coefficient de gain/loss, C_1 et C_2 représentent

respectivement les coefficients de couplage à l'intérieur et à l'extérieur du trimer θ est un paramètre réel fixé.

2.2.2. Conditions pour que l'on ait un système PTS

La caractéristique principale des systèmes PTS étant que sous certaines conditions, le spectre des valeurs propres est réel, nous examinons au préalable les conditions dans lesquelles la discontinuité de type trimer que nous utilisons ici constitue un système PTS c'est-à-dire que nous déterminons les conditions dans lesquelles les constantes de propagations sont toutes réelles, pour cela, la discontinuité est extraite de la chaîne et nous obtenons les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} i \frac{da_{-1}}{dz} + i\rho_{-1} a_{-1} + C_2 a_0 = 0 \\ i \frac{da_0}{dz} + i\rho_0 a_0 + C_2 a_{-1} + C_3 a_{+1} = 0 \\ i \frac{da_1}{dz} + i\rho_1 a_1 + C_3 a_0 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour obtenir les expressions des constantes de propagation, nous prenons les solutions sous forme d'onde stationnaire de la forme :

$$a_j = A_j e^{i(-\beta z)} \Rightarrow \begin{cases} a_{-1} = A_{-1} e^{i(-\beta z)} \\ a_0 = A_0 e^{i(-\beta z)} \\ a_1 = A_1 e^{i(-\beta z)} \end{cases} \quad (2.6)$$

En remplaçant (2.6) dans (2.5), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} (\beta + i\rho_{-1}).A_{-1} + C_2.A_0 + 0.A_1 = 0 \\ C_2e.A_{-1} + (\beta + i\rho_0).A_0 + C_3.A_1 = 0 \\ 0.A_{-1} + C_3.A_0 + (\beta + i\rho_1).A_1 = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

La matrice de ce système s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} (\beta + i\rho_{-1}) & C_2 & 0 \\ C_2 & (\beta + i\rho_0) & C_3 \\ 0 & C_3 & (\beta + i\rho_1) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Ce système sans second membre admet des racines non triviale si le déterminant de la matrice est nul, ce qui implique que :

$$\beta^3 + (\rho^2 - C_2^2 - C_3^2 - \theta\rho^2 + \theta^2\rho^2)\beta + i(-\theta\rho^3 + \theta^2\rho^3 - \rho C_3^2 + C_2^2\rho - C_2^2\rho\theta) = 0 \quad (2.9)$$

Les solutions réelles de (2.9) correspondent à :

$$(-\theta\rho^2 + \theta^2\rho^3 + \theta\rho C_3^2 + C_2^2\rho + C_2^2\rho\theta) = 0 \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow C_3 = C_2 \sqrt{(1-\theta) \left(1 - \theta \left(\frac{\rho}{C_2} \right)^2 \right)} \Rightarrow \theta \in [0,1] \quad (2.11)$$

en posant la partie imaginaire de l'équation (2.9) nulle, elle devient :

$$\beta^3 + (\rho^2 - C_2^2 - C_3^2 - \theta\rho^2 + \theta^2\rho^2)\beta = 0 \quad (2.12)$$

Les solutions de (2.12) sont données par :

$$\begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = -\sqrt{-\rho^2 + C_2^2 + C_3^2 + \rho^2\theta} \\ \beta_3 = \sqrt{-\rho^2 + C_2^2 + C_3^2 + \rho^2\theta} \end{cases} \quad (2.13)$$

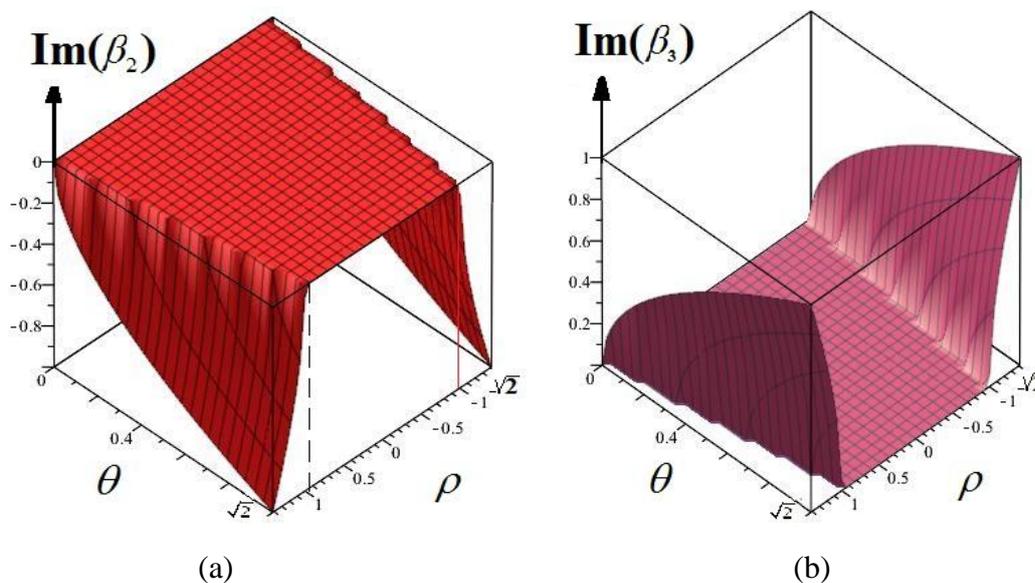
Ces solutions sont réelles si on a :

$$-\rho^2 + C_2^2 + C_3^2 + \rho^2\theta \geq 0 \quad (2.14)$$

$$\text{soit : } \rho^2 \leq (2 - \theta)C_2^2 \Leftrightarrow |\rho| \leq C_2\sqrt{(2 - \theta)} \text{ avec } \theta \in [0 ; 1] \quad (2.15)$$

Il vient donc que lorsque l'inéquation (2.15) est vérifiée, le spectre des valeurs propres est réel, et il devient imaginaire dans le cas contraire, ceci est la principale caractéristique des systèmes PTS. Dans toute la suite, on prendra $C_2 = 1$ pour simplifier les calculs.

Les figures ci-suivantes illustrent le tracé de la partie imaginaire des valeurs propres β_i pour des valeurs de ρ prises dans l'intervalle des valeurs permises de c'est-à-dire vérifiant l'inéquation (2.15). $\beta_i = \beta_i(\rho, C_3); i \in \{1, 2, 3\}$



Figure(2.2) : Représentation de la partie imaginaire des valeurs propres β_2 en (a) et β_3 en (b).

Les figures ci-dessus montrent bien que pour Θ variant de 0 à 1, lorsque ρ est pris dans un domaine respectant l'inéquation (2, 15), la partie imaginaire des valeurs propres est nulle.

- A $\Theta = 0$ par exemple, ρ varie entre $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$, toutes les parties imaginaires sont nulles c'est-à-dire que les valeurs propres sont réelles

-A $\Theta = 1$: les parties imaginaires sont nulles pour ρ appartenant à l'intervalle -1 et 1 alors qu'elles sont non nulles hors de ce domaine de ρ .

2.2. 3. Calcul des coefficients de transmission et de réflexion

Lorsque l'onde rencontre la discontinuité introduite dans la chaîne de guides conservatifs, il apparaît une onde réfléchie et une onde transmise. Nous nous proposons dans la suite d'étudier les intensités de ces ondes transmises et réfléchies. Pour cela, cherchons les solutions du système (2.1) (2.2) (2.3) (2.4) sous la forme :

$$\begin{cases} a_j(z) = e^{i(kj-\beta z)} + R(\rho)e^{i(-kj-\beta z)}; j \leq -1 \\ a_0(z) = S(\rho)e^{i(-\beta z)} \\ a_j(z) = T(\rho)e^{i(kj-\beta z)}; j \geq 1 \end{cases} \quad (2.16)$$

En tenant compte du système (2.8) et (2.9); on aura :

$$\begin{cases} (\beta e^{ik} + i\rho_{-1}e^{ik} + C_1e^{2ik})R + C_2S + 0.T + (\beta + i\rho_{-1})e^{-ik} + C_1e^{-2ik} = 0 \\ C_2e^{ik}R + (\beta + i\rho_0)S + C_3Te^{ik} + C_2e^{-ik} = 0 \\ 0.R + C_3S + (\beta e^{ik} + i\rho_1e^{ik} + C_1e^{2ik})T = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

la constante de propagation que nous utilisons dans la suite est celle d'une onde se propageant dans une chaîne sans discontinuité c'est-à-dire qu'on considère une onde de la forme :

$$a_j = Ae^{i(kj-\beta z)} \quad (2.18)$$

L'équation (2.1) peut s'écrire :

$$i(-i\beta)A + C_1e^{-ik} + C_1e^{ik} = 0$$

On trouve ainsi la valeur de β telle que :

$$\beta = -2C_1 \cos k \quad (2.19)$$

on peut écrire le système (2.17) sous la forme :

$$\begin{cases} (\beta e^{ik} + i\rho_{-1}e^{ik} + C_1e^{2ik})R + C_2S + 0.T = -(\beta + i\rho_{-1})e^{-ik} - C_1e^{-2ik} \\ C_2e^{ik}R + (\beta + i\rho_0)S + C_3Te^{ik} = -C_2e^{-ik} \\ 0.R + C_3S + (\beta e^{ik} + i\rho_1e^{ik} + C_1e^{2ik})T = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

En utilisant méthode par déterminant, on trouve les solutions:

$$R(\rho, \theta) = \frac{\Delta_R}{\Delta}; \quad S(\rho, \theta) = \frac{\Delta_S}{\Delta}; \quad T(\rho, \theta) = \frac{\Delta_T}{\Delta} \quad (2.21)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \Delta_R = & -\beta^3 e^{-ik} - i\rho_{-1}e^{-ik} \beta^2 - \beta^2 C_1 - iC_1^2 \rho_0 + \beta\rho_0\rho_1 e^{-ik} - iC_1\beta\rho_1 e^{-ik} \\ & + \beta e^{-ik} C_3^2 - i\rho_{-1}\beta C_1 + \rho_{-1}e^{-ik} \beta\rho_1 - iC_1e^{-ik} \beta\rho_0 + \beta\rho_0\rho_{-1}e^{-ik} - i\beta\rho_0 C_1 \\ & + \rho_0\rho_{-1}C_1 - i\beta^2 e^{-ik} \rho_0 - C_1\beta^2 e^{-ik} + i\rho_{-1}\rho_0\rho_1 e^{-ik} - C_1^2 \beta + iC_2^2 \rho_1 \\ & + C_1\rho_0\rho_1 e^{-ik} + i\rho_{-1}C_3^2 e^{-ik} + C_1C_3^2 e^{-ik} + C_2^2 \beta - i\beta^2 e^{-ik} \rho_1 + C_2^2 C_1 e^{ik} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\Delta_T = 2iC_1C_2C_3 \sin(k) \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta = & \beta^3 e^{2ik} + iC_1e^{3ik} \beta\rho_1 + 2\beta^2 C_1e^{3ik} + i\rho_{-1}C_1\beta e^{3ik} - \beta\rho_0\rho_1 e^{2ik} - iC_2^2 e^{2ik} \rho_1 \\ & - \beta e^{2ik} C_3^2 + i\rho_0 C_1^2 e^{4ik} - \rho_{-1}e^{2ik} \beta\rho_1 + 2i\beta\rho_0 C_1e^{3ik} - \beta\rho_0\rho_{-1}e^{2ik} + i\beta^2 \rho_0 e^{2ik} \\ & - \rho_{-1}\rho_0 C_1e^{3ik} - i\rho_{-1}\rho_0\rho_1 e^{2ik} + i\rho_{-1}\beta e^{2ik} \beta^2 + C_1^2 \beta e^{4ik} - C_1\rho_0\rho_1 e^{3ik} + i\beta^2 \rho_1 e^{2ik} \\ & - C_1C_3^2 e^{3ik} - C_2^2 \beta e^{2ik} - i\rho_{-1}e^{2ik} C_3^2 - C_2^2 C_1 e^{3ik} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\Delta_S = -C_1C_2 \left[-C_1e^{ik} + (\beta + i\rho_1)e^{2ik} - (\beta + i\rho_1) \right] \quad (2.25)$$

et

$$\begin{cases} \rho_{-1} = -\theta\rho \\ \rho_0 = \rho \\ \rho_1 = -(1-\theta)\rho \end{cases} \quad \theta \in [0; 1] \quad (2.26)$$

En considérant les expressions (2.16) et (2.26) Les expressions (2.22), (2.23), (2.24), (2.25) S'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \Delta = & -8C_1^3 \cos^3(k)e^{2ik} - 2C_1^3 \cos(k)e^{4ik} + 8C_1^3 \cos^2(k)e^{3ik} + 2C_3^2 C_1 \cos(k)e^{2ik} \\ & - i\rho^3 \theta e^{2ik} + 2C_2^2 C_1 \cos(k)e^{2ik} + i\rho C_2^2 e^{2ik} - C_1 C_3^2 e^{3ik} - C_1 C_2^2 e^{3ik} \\ & + 2iC_1^2 \rho \theta \cos(k)e^{3ik} - i\rho C_3^2 e^{2ik} + 2\rho^2 \theta C_1 \cos(k)e^{2ik} - 2\rho^2 C_1 \theta^2 e^{2ik} \cos(k) \\ & - 2\rho^2 C_1 \cos(k)e^{2ik} + i\rho^3 \theta^2 e^{2ik} - iC_1^2 \theta \rho e^{4ik} - iC_2^2 \theta \rho e^{2ik} + \rho^2 e^{3ik} \theta^2 C_1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \Delta_R = & i\theta \rho C_1^2 - 2C_3^2 C_1 \cos(k) - C_1 \theta \rho^2 e^{ik} - 2C_2^2 C_1 \cos(k) + i\rho C_3^2 - \rho^2 C_1 \theta^2 e^{-ik} \\ & - 2iC_1^2 \theta \rho \cos(k)e^{ik} + i\rho^3 \theta - 2C_1 \rho^2 \theta \cos(k) + iC_2^2 \rho \theta - i\rho C_2^2 \\ & + 2iC_1^2 \rho \cos(k)e^{ik} + 2\rho^2 \theta^2 C_1 \cos(k) + 2\rho^2 C_1 \cos(k) - 2iC_1^2 \rho \cos(k)e^{-ik} \\ & + C_1 \theta \rho^2 e^{-ik} - i\rho^3 \theta^2 + 8C_1^3 \cos^3(k) - 4C_1^3 \cos^2(k)e^{ik} - 4C_1^3 \cos^2(k)e^{-ik} \\ & + 2C_1^3 \cos(k) + C_3^2 C_1 e^{-ik} + C_2^2 C_1 e^{ik} \\ \Delta_T = & 2iC_1 C_2 C_3 \sin(k) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\Delta_S = -C_1 C_2 \left(-2C_1 \cos(k)e^{2ik} - i\rho e^{2ik} + i\rho \theta e^{2ik} + C_1 e^{3ik} + 2C_1 \cos(k) + i\rho - i\rho \theta - C_1 e^{ik} \right) \quad (2.29)$$

On constate par ces résultats que :

$$\begin{cases} T(\theta, -\rho) \neq T(\theta, \rho) \\ R(\theta, -\rho) \neq R(\theta, \rho) \end{cases}$$

Ce qui signifie que la transmission et la réflexion de l'onde dépendent de la nature du guide d'onde rencontré (gain ou loss).

2.3. Représentation graphique des coefficients de transmission et de réflexion

2.3.1. Influence de ρ et θ sur la transmission et la réflexion de l'onde

2.3.1.1. Influence de ρ

Considérons le système du paragraphe 2.2.3 avec respectivement pour guides d'onde

ρ_{-1} ; ρ_0 ; ρ_1 pris comme discontinuité dans la transmission de l'onde incidente tel que :

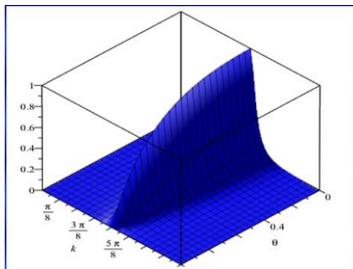
$$\rho_{-1} = \rho ; \rho_0 = -\theta \rho ; \rho_1 = -(1-\theta)\rho ; \text{ avec } \theta \in [0,1]$$

Pour certaines valeurs de ρ telles que : $\rho^2 \leq (2-\theta)$ étudions le comportement de la transmission et la réflexion de l'onde. Nous fixerons θ à 0.5 et C_2 à 1.

Les courbes suivantes représentent respectivement le module au carré des coefficients de transmission (**courbe bleue**) et de la réflexion (**courbe rouge**) de l'onde rencontrant la discontinuité trimer. Dans ce qui suit, nous distinguerons pour différentes valeurs de « rho » prises dans le domaine PTS différents cas à savoir :

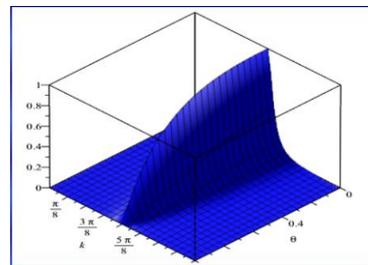
❖ *Cas de la transmission : C1=3 ; C2=1*

$\rho = -0.005\rho_{\max}$



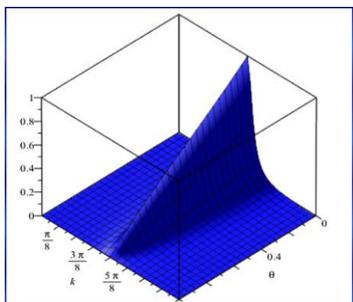
(c)

$\rho = 0.005\rho_{\max}$



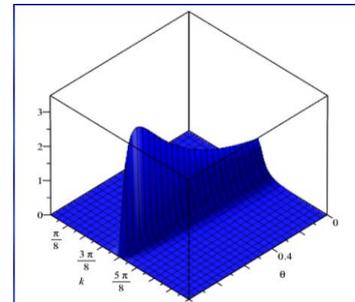
(d)

$\rho = -0.25\rho_{\max}$



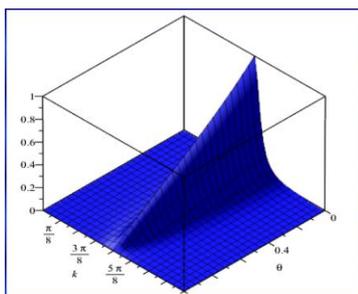
(e)

$\rho = 0.25\rho_{\max}$



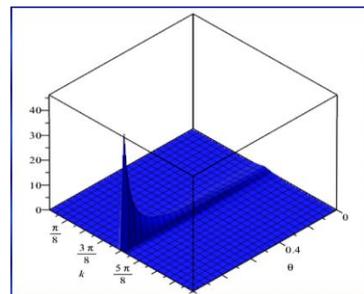
(f)

$\rho = -0.3\rho_{\max}$



(g)

$\rho = 0.3\rho_{\max}$



(h)

Figure (2.3) : Représentation en 3D des coefficients de transmission en bleue .

Les observations faites sur les figures ci-dessus montrent que :

- Lorsque ρ prend les valeurs fractionnaires négatives de ρ_{\max} tel que pour : $-5.10^{-3}\rho_{\max} \leq \rho < 0$, on observe le profil de la **figure (2.3)** Mais pour $-\rho_{\max} \leq \rho < -5.10^{-3}\rho_{\max}$, le profil spatial de variation de l'intensité de l'onde transmise en fonction de k et θ reste pratiquement le même . On distingue les cas suivants pour $-\rho_{\max} \leq \rho < -5.10^{-3}\rho_{\max}$:

-Lorsque :

$$\begin{cases} k \rightarrow 0 \\ k \rightarrow \pi \end{cases} \Leftrightarrow |T|^2 \rightarrow 0 \quad (2.30)$$

-Lorsque :

$$\begin{cases} k \rightarrow \frac{\pi}{2} \left(k < \frac{\pi}{2} \right) \\ k \rightarrow \frac{\pi}{2} \left(k > \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow |T|^2 \rightarrow 1 \quad \text{Pour } \theta \rightarrow 0 \quad (2.31)$$

$|T|^2 = 1$ au point de coordonnées :

$$\left(k = \frac{\pi}{2}; \theta = 0 \right) \quad (2.32)$$

Les expressions ci-dessus sont en accord avec les calculs et au regard de ces derniers, on peut tirer les conclusions suivantes :

- 1) L'expression (2.30) signifie que pour des valeurs quelconques de ρ , et lorsque nous nous trouvons proche des frontières, notre discontinuité Trimer se comporte comme une barrière empêchant toute onde d'y franchir.
- 2) L'expression (2.31) signifie que l'intensité de l'onde transmise reste atténuée par rapport à l'onde incidente lorsqu'on est autour du centre de zone de Brillouin $\left(k \rightarrow \frac{\pi}{2} \right)$ et pour θ se rapprochant de « zéro ».

3) L'expression (2.32) signifie qu'au centre de zone de Brillouin, et pour la plus petite valeur de θ , l'intensité de l'onde transmise correspond à celle incidente : il n'y a ni amplification ni atténuation de l'onde incidente .

En faisant varier k et θ , Lorsque ρ prend les valeurs fractionnaires positives de ρ_{\max} tel que pour :

- $0 < \rho_{\max} \leq \rho < 5.10^{-3}$, d'après la figure 2.4 ; on observe $|T|^2 < 1$.
- $\rho = 5.10^{-3} \rho_{\max}$, $|T|^2 = 1$ on a $k = \frac{\pi}{2}$ pour une valeur fixée de θ jusqu'à décroître et s'annuler lorsque θ diminue.
- $5.10^{-3} < \rho \leq 0.25\rho_{\max}$, on observe de légères amplifications de l'onde incidente

atteignant la valeur $|T|^2 = 2.5$ lorsque $\begin{cases} k \rightarrow \frac{\pi}{2} \left(k < \frac{\pi}{2} \right) \\ k \rightarrow \frac{\pi}{2} \left(k > \frac{\pi}{2} \right) \end{cases}$ puis diminue jusqu'à

s'annuler à la valeur $k = \frac{\pi}{2}$; θ étant fixé à une valeur proche de 1 .

- $0.25 < \rho \leq 0.30\rho_{\max}$, On observe de fortes amplifications de l'onde transmise atteignant la valeur $|T|^2 = 40$ pour la valeur de θ fixée puis décroît jusqu'à s'annuler au point $\left(k = \frac{\pi}{2}; \theta = 0 \right)$

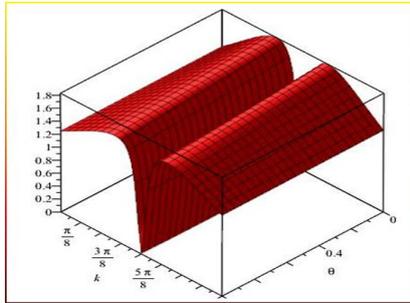
- $0.30 < \rho \leq \rho_{\max}$, On observe de très fortes amplifications atteignant des valeurs infinies pour θ fixée puis diminuant jusqu'à s'annuler à la valeur $k = \frac{\pi}{2}$

Au regard de ces observations, nous pouvons faire la déduction que le point correspondant à la valeur $k = \frac{\pi}{2}$ est le point d'instabilité pour le système pour des valeurs de ρ telles que : $0.30 < \rho \leq \rho_{\max}$ car les amplitudes de l'onde transmise sont trop grandes ! tandis qu'il existe des domaines où on a des amplifications de

l'onde et des domaines ou on a des réflexions totales de l'onde à la rencontre du guide d'onde.

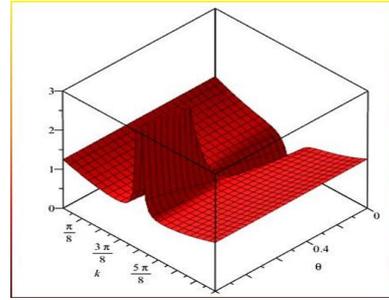
- *Cas de la réflexion : C1=3 ; C2=1*

$$\rho = -0.25\rho_{\max}$$



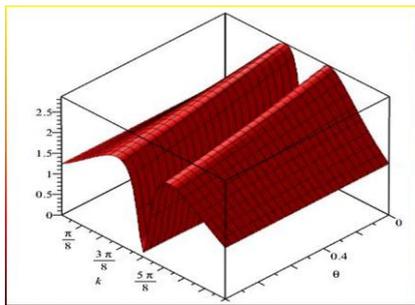
(i)

$$\rho = 0.25\rho_{\max}$$



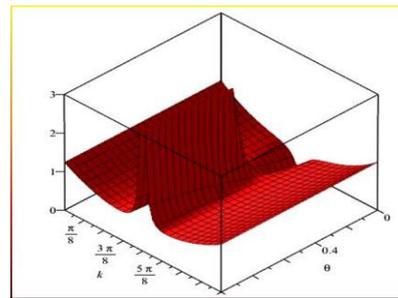
(ii)

$$\rho = -0.5\rho_{\max}$$



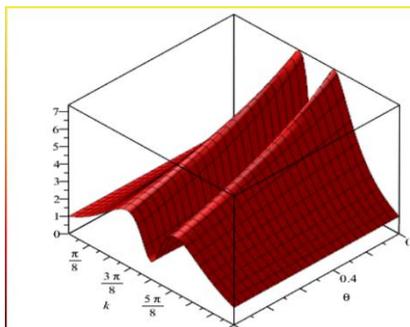
(iii)

$$\rho = 0.5\rho_{\max}$$



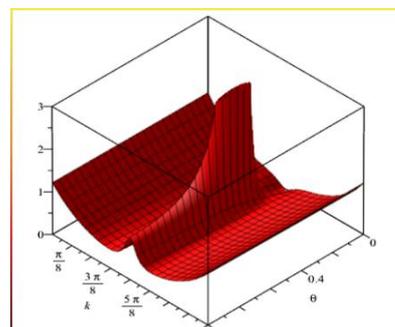
(iv)

$$\rho = -\rho_{\max}$$



(v)

$$\rho = -\rho_{\max}$$



(vi)

Figure (2.4) : Représentation en 3D des coefficients de réflexion en rouge .

Les observations faites sur les figures ci-dessus montrent que :

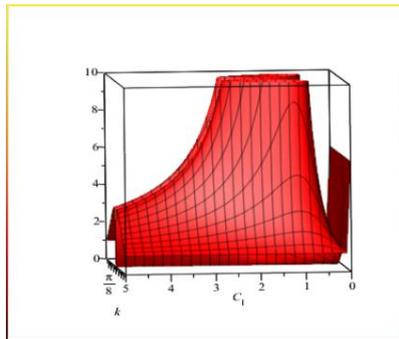
- Pour des valeurs négatives de ρ et lorsque k et θ varient, on observe pour deux valeurs $k_1; k_2$ telles que : $k_1 < \frac{\pi}{2} < k_2$ un maximum de réflexion ($|R|^2 > 1$) qui augmente lorsque θ diminue. Lorsque $k = \frac{\pi}{2}$ avec, on a un minimum de réflexion qui diminue jusqu'à s'annuler pour la valeur $\theta = 0$.
- Par contre, Pour des valeurs positives de ρ et lorsque k et θ varient, on observe pour deux valeurs $k_1; k_2$ telles que : $k_1 < \frac{\pi}{2} < k_2$ un minimum de réflexion ($|R|^2 < 1$) quand θ diminue jusqu'à une valeur qui se rapproche de zéro. On observe également un maximum de réflexion qui devient infinie ($|R|^2 \rightarrow +\infty$) pour une valeur précise de θ_1 et chute brusquement à partir d'une autre valeur θ_2 ($\theta_1 > \theta_2$). Au point $k = \frac{\pi}{2}$, Et à partir de cette valeur θ_2 de θ , on observe un minimum de réflexion en un seul point $\left(k = \frac{\pi}{2}; \theta = 0\right)$ qui fini par s'annuler.

De ces observations on peut dire que lorsqu'on fait varier k et θ et pour des valeurs positives ou négatives de ρ , on observe soit une amplification soit une atténuation de l'onde réfléchie. Le système devient instable pour les valeurs positives de ρ lorsque $k = \frac{\pi}{2}$ et pour une valeur précise de θ .

2.3.1.2. Influence du couplage à l'extérieur de la discontinuité.

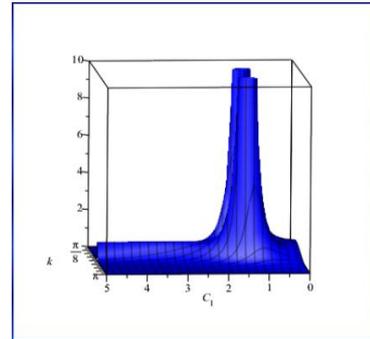
Les figures ci-dessous sont un aperçu en 3D du comportement de l'intensité de l'onde transmise (**en bleue**) et de l'onde réfléchie (**en rouge**) lorsque k et C_1 varient respectivement dans l'intervalle $[0, \pi]; [0, 5]$ et pour ρ et θ fixés.

$$\rho = -\rho_{\max}; \theta = 0.0005$$



(j)

$$\rho = -\rho_{\max}; \theta = 0.0005$$



(k)

Figure (2.5) :Représentation en 3D des coefficients de transmission en (k) de réflexion en (j)

- En faisant varier C_1 , Lorsqu'on se rapproche de 0 ,l'intensité de l'onde transmise augmente jusqu'à atteindre une valeur critique correspondant à une amplitude trop grande .au delà de cette valeur, on observe une décroissance prononcée de l'intensité de l'onde jusqu'à son annulation pour de grandes valeurs de C_1 .
- Dans le cas de la réflexion, on observe le même phénomène que précédemment sauf que dans ce cas la décroissance est moins rapide.

2.3.2. Relation entre l'onde dans discontinuité et l'onde transmise.

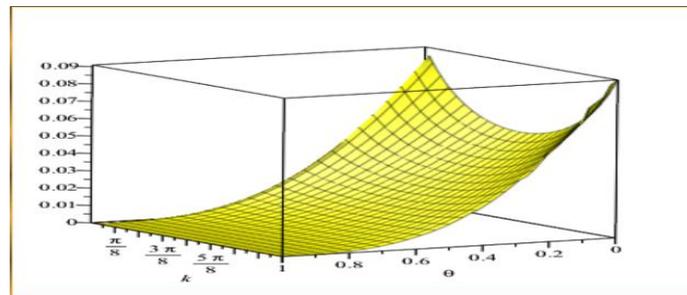
D'après les équations (2.22), (2.23) on peut écrire le coefficient α tel que:

$$\alpha = \frac{T(\theta, \rho)}{S(\theta, \rho)} \Rightarrow \alpha = \frac{2iC_2C_3C_1 \sin(k)}{-C_1C_2 \begin{bmatrix} 4C_1 \cos^2(k)e^{ik} + 2i\rho \cos(k)e^{ik} - 2i\rho\theta \cos(k)e^{ik} \\ -iC_1e^{ik} - 4C_1 \cos(k)e^{2ik} - i\rho e^{2ik} + i\rho\theta e^{2ik} \\ +C_1e^{3ik} + 2C_1 \cos(k) + i\rho - i\rho\theta \end{bmatrix}}$$

En prenant le module au carré on obtient : $|T(\theta, \rho)|^2 = |\alpha|^2 |S(\theta, \rho)|^2$.

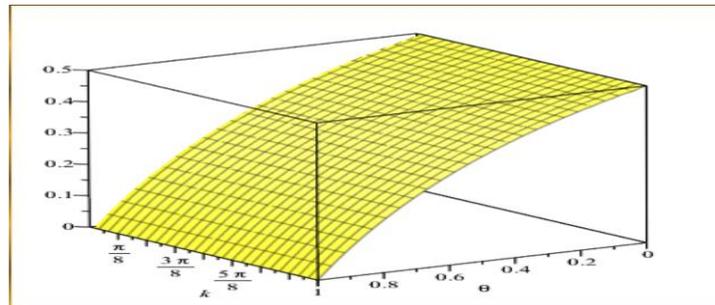
$|\alpha|^2$ Désigne le coefficient de proportionnalité entre l'intensité de l'onde traversant la discontinuité noté $|FF|^2$ à celle de l'onde transmise noté $|T|^2$ Nous représenterons en 3D la courbe de ce coefficient de proportionnalité et nous verrons dans quels cas l'intensité de l'onde au sein du guide d'onde d'indice « zéro » est plus importante que celle transmise et inversement.

2.3.2.1. Cas de couplage moyen : $C_1 = 3$ $\rho = \pm \rho_{\max}$; $C_2=1$



(a)

2.3.2.2. Cas de faibles couplages : $C_1 = 5.10^{-4}$, $\rho = -\rho_{\max}$



(b)

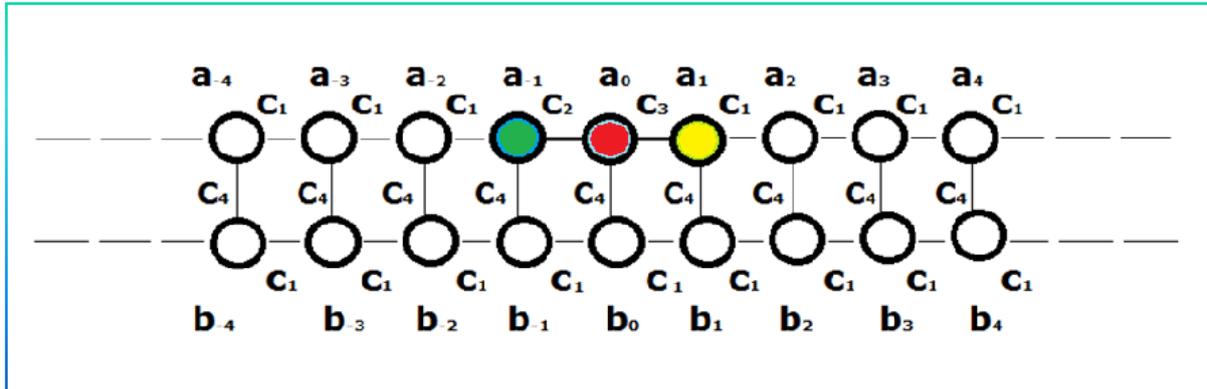
Figure (2.6) : Représentation en 3D du coefficient de proportionnalité en (a) et (b),.

- Dans le cas des couplages moyens, en faisant varier θ , et pour $k = \pi$, on s'aperçoit que pour une valeur de $\rho = \pm \rho_{\max}$ on a : $|\alpha|^2 < 1$. $|\alpha|^2$ croît rapidement jusqu'à atteindre la valeur $|\alpha|^2 = 0.09$ lorsque θ diminue jusqu'à s'annuler.
- Dans le cas des faibles couplages, en faisant varier θ , et pour $k = \pi$, on s'aperçoit que pour une valeur de $\rho = \pm \rho_{\max}$ on a : $|\alpha|^2 < 1$. $|\alpha|^2$ lentement jusqu'à atteindre la valeur $|\alpha|^2 = 0.5$ lorsque θ diminue jusqu'à s'annuler.

2.4. Transmission et réflexion d'une onde dans le cas d'une chaîne couplée

2.4.1. Couplage d'un trimer isolé avec une chaîne conservative de guides d'onde: Modèle 2

2.4.1.1. Schéma du modèle



Figure(2.7) : Trimer isolé Couplé avec une chaîne conservative : modèle 2

2.4.1. 2.Equation du modèle

$$\left\{ \begin{array}{l} i \frac{da_{-1}}{dz} + i\rho_{-1}a_{-1} + C_1a_{-2} + C_2a_0 + C_4b_{-1} = 0 \\ i \frac{da_0}{dz} + i\rho_0a_0 + C_2a_{-1} + C_3a_{+1} + C_4b_0 = 0 \\ i \frac{da_1}{dz} + i\rho_1a_1 + C_3a_0 + C_1a_{+2} + C_4b_1 = 0 \\ \frac{db_{-1}}{dz} + C_1b_{-2} + C_1b_0 + C_4a_{-1} = 0 \\ i \frac{db_0}{dz} + C_1b_{-1} + C_1b_{+1} + C_4a_0 = 0 \\ i \frac{db_1}{dz} + C_1b_0 + C_1b_{+2} + C_4a_1 = 0 \end{array} \right. \quad (2.33)$$

2.4.1. 3. Calcul des Coefficients de transmission et réflexion

Lorsque l'onde rencontre la discontinuité introduite dans la chaîne de guides conservatifs, il apparaît une onde réfléchie et une onde transmise (voir figure 2.19). Nous nous proposons dans la suite d'étudier les intensités de ces ondes transmises et réfléchies.

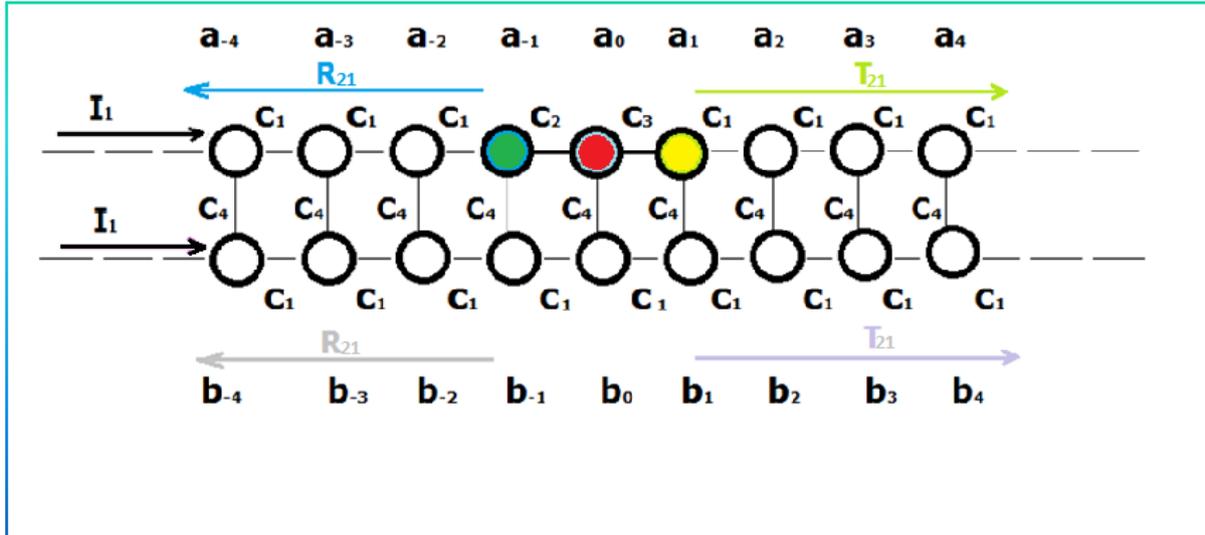


Figure (2.8) : Onde réfléchiée et onde transmise au niveau de la discontinuité et de son couplage

La figure ci-dessus nous montre que pour onde transmise d'amplitude I_1 arrivant sur la première chaîne de guides d'onde de mode a_j , on a une réflexion et une transmission d'amplitude respectives R_1 et T_1 . De même, pour la chaîne conservative les transmissions et réflexions s'observent au niveau des guides d'ondes couplés aux discontinuités pour une onde incidente d'amplitude I_2 . Dans ce cas, Les amplitudes de réflexions et de transmission sont respectivement : T_2 et R_2 . Cherchons les solutions du système (2.33) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_j(z) = e^{i(kj-\beta z)} + R_{21}(\rho)e^{i(-kj-\beta z)}; j \leq -1 \\ a_0(z) = S_{21}(\rho)e^{i(-\beta z)} \\ a_j(z) = T_{21}(\rho)e^{i(kj-\beta z)}; j \geq 1 \\ b_j(z) = e^{i(kj-\beta z)} + R_{22}(\rho)e^{i(-kj-\beta z)}; j \leq -1 \\ b_0(z) = S_{22}(\rho)e^{i(-\beta z)} \\ b_j(z) = T_{22}(\rho)e^{i(kj-\beta z)}; j \geq 1 \end{array} \right. \quad (2.34)$$

On déduit ainsi par remplacement les relations ci-dessus les relations:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (\beta e^{ik} + i\rho_{-1}e^{ik} + C_1e^{2ik})R_{21} + C_2S_{21} + C_4e^{ik}R_{22} = - \begin{pmatrix} (\beta + i\rho_{-1})e^{-ik} \\ +C_1e^{-2ik} + C_4e^{-ik} \end{pmatrix} \\
 C_2e^{ik}R_{21} + (\beta + i\rho_0)S_{21} + C_3e^{ik}T_{21} + C_4S_{22} = -C_2e^{-ik} \\
 C_3S_{21} + (\beta e^{ik} + i\rho_{-1}e^{ik} + C_1e^{2ik})T_{21} + C_4e^{ik}T_{22} = 0 \\
 C_4e^{ik}R_{21} + 0.S_{21} + 0.T_{21} + (\beta e^{ik} + C_1e^{2ik})R_{22} + C_1S_{22} = - \begin{pmatrix} \beta e^{-ik} + C_1e^{-2ik} \\ +C_4e^{ik} \end{pmatrix} \\
 C_4S_{21} + C_1e^{ik}R_{22} + \beta S_{22} + C_1e^{ik}T_{22} = -C_1e^{-ik} \\
 C_4e^{ik}T_{21} + C_1S_{22} + C_1S_{22} + (\beta e^{ik} + C_1e^{2ik})T_{22} = 0
 \end{array} \right. \quad (2.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (\beta e^{ik} + i\rho_{-1}e^{ik} + C_1e^{2ik})R_{21} + C_2S_{21} + C_4e^{ik}R_{22} = - \begin{pmatrix} (\beta + i\rho_{-1})e^{-ik} \\ +C_1e^{-2ik} + C_4e^{-ik} \end{pmatrix} \\
 C_2e^{ik}R_{21} + (\beta + i\rho_0)S_{21} + C_3e^{ik}T_{21} + C_4S_{22} = -C_2e^{-ik} \\
 C_3S_{21} + (\beta e^{ik} + i\rho_{-1}e^{ik} + C_1e^{2ik})T_{21} + C_4e^{ik}T_{22} = 0 \\
 C_4e^{ik}R_{21} + 0.T_{21} + (\beta e^{ik} + C_1e^{2ik})R_{22} + C_2S_{22} = - \begin{pmatrix} \beta e^{-ik} + C_1e^{-2ik} \\ +C_4e^{ik} \end{pmatrix} \\
 C_4S_{21} + C_1e^{ik}R_{22} + \beta S_{22} + C_1e^{ik}T_{22} = -C_1e^{-ik} \\
 C_4e^{ik}T_{21} + C_1S_{22} + C_1S_{22} + (\beta e^{ik} + C_1e^{2ik})T_{22} = 0
 \end{array} \right. \quad (2.36)$$

$$\det(M) = \begin{vmatrix}
 \left(\begin{array}{l} \beta e^{ik} + i\rho_{-1} e^{ik} \\ + C_1 e^{2ik} \end{array} \right) C_2 & 0 & C_4 e^{ik} & 0 & 0 \\
 C_2 e^{ik} & (\beta + i\rho_0) C_3 e^{ik} & 0 & C_4 & 0 \\
 0 & C_3 \left(\begin{array}{l} \beta e^{ik} + i\rho_{-1} \\ e^{ik} + C_1 e^{2ik} \end{array} \right) & 0 & 0 & C_4 e^{ik} \\
 C_4 e^{ik} & 0 & 0 & \beta e^{ik} + C_1 e^{2ik} & C_2 & 0 \\
 0 & C_4 & 0 & C_1 e^{ik} & \beta & C_1 e^{ik} \\
 0 & 0 & C_4 e^{ik} & 0 & C_1 & (\beta e^{ik} + C_1 e^{2ik})
 \end{vmatrix} \quad (2.37)$$

$$\det(R_{21}) = \begin{vmatrix}
 - \left(\begin{array}{l} (\beta + i\rho_{-1}) e^{-ik} \\ + C_1 e^{-2ik} + C_4 e^{-ik} \end{array} \right) C_2 & 0 & C_4 e^{ik} & 0 & 0 \\
 -C_2 e^{-ik} & (\beta + i\rho_0) C_3 e^{ik} & 0 & C_4 & 0 \\
 0 & C_3 \left(\begin{array}{l} \beta e^{ik} + i\rho_{-1} \\ e^{ik} + C_1 e^{2ik} \end{array} \right) & 0 & 0 & C_4 e^{ik} \\
 - \left(\begin{array}{l} \beta e^{-ik} + C_1 e^{-2ik} \\ + C_4 e^{ik} \end{array} \right) & 0 & 0 & \beta e^{ik} + C_1 e^{2ik} & C_2 & 0 \\
 -C_1 e^{-ik} & C_4 & 0 & C_1 e^{ik} & \beta & C_1 e^{ik} \\
 0 & 0 & C_4 e^{ik} & 0 & C_1 & (\beta e^{ik} + C_1 e^{2ik})
 \end{vmatrix} \quad (2.38)$$

$$\det(T_{21}) = \begin{vmatrix} \left(\beta e^{ik} + i\rho_{-1} e^{ik} \right) C_2 - \left((\beta + i\rho_{-1}) e^{-ik} \right) C_4 e^{ik} & 0 & 0 \\ C_2 e^{ik} & (\beta + i\rho_0) & -C_2 e^{-ik} & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 & C_4 e^{ik} \\ C_4 e^{ik} & 0 & - \left(\beta e^{-ik} + C_1 e^{-2ik} \right) \beta e^{ik} + C_1 e^{2ik} & C_2 & 0 \\ 0 & C_4 & -C_1 e^{-ik} & C_1 e^{ik} & \beta & C_1 e^{ik} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_1 & (\beta e^{ik} + C_1 e^{2ik}) \end{vmatrix} \quad (2.39)$$

$$\det(R_{22}) = \begin{vmatrix} \left(\beta e^{ik} + i\rho_{-1} e^{ik} \right) C_2 & 0 & - \left((\beta + i\rho_{-1}) e^{-ik} \right) & 0 & 0 \\ C_2 e^{ik} & (\beta + i\rho_0) & C_3 e^{ik} & -C_2 e^{-ik} & C_4 & 0 \\ 0 & C_3 & \left(\beta e^{ik} + i\rho_{-1} \right) e^{ik} + C_1 e^{2ik} & 0 & 0 & C_4 e^{ik} \\ C_4 e^{ik} & 0 & 0 & - \left(\beta e^{-ik} + C_1 e^{-2ik} \right) & C_2 & 0 \\ 0 & C_4 & 0 & -C_1 e^{-ik} & \beta & C_1 e^{ik} \\ 0 & 0 & C_4 e^{ik} & 0 & C_1 & (\beta e^{ik} + C_1 e^{2ik}) \end{vmatrix} \quad (2.40)$$

$$\det(T_{22}) = \begin{vmatrix} \left(\beta e^{ik} + i\rho_{-1} e^{ik} \right) C_2 & 0 & C_4 e^{ik} & 0 & - \left(\begin{matrix} (\beta + i\rho_{-1}) e^{-ik} \\ + C_1 e^{-2ik} + C_4 e^{-ik} \end{matrix} \right) \\ C_2 e^{ik} & (\beta + i\rho_0) C_3 e^{ik} & 0 & C_4 & -C_2 e^{-ik} \\ 0 & C_3 \left(\begin{matrix} \beta e^{ik} + i\rho_{-1} \\ e^{ik} + C_1 e^{2ik} \end{matrix} \right) & 0 & 0 & 0 \\ C_4 e^{ik} & 0 & 0 & \beta e^{ik} + C_1 e^{2ik} & C_2 - \left(\begin{matrix} \beta e^{-ik} + C_1 e^{-2ik} \\ + C_4 e^{ik} \end{matrix} \right) \\ 0 & C_4 & 0 & C_1 e^{ik} & \beta & -C_1 e^{-ik} \\ 0 & 0 & C_4 e^{ik} & 0 & C_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.41)$$

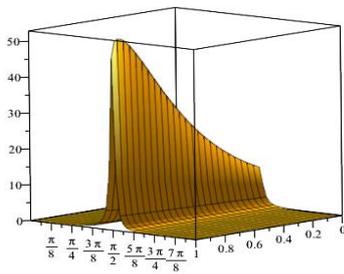
D'après les relations ci-dessus on définit donc les coefficients suivants :

$$R_{21} = \frac{\det(R_{21})}{\det(M)}; T_{21} = \frac{\det(T_{21})}{\det(M)}; R_{22} = \frac{\det(R_{22})}{\det(M)}; T_{22} = \frac{\det(T_{22})}{\det(M)}$$

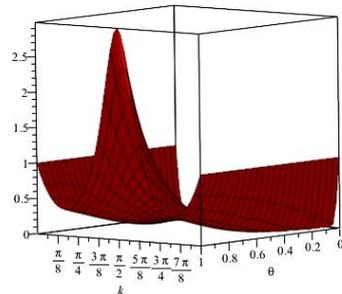
2.4.1. 4. Représentation graphique des coefficients de transmission et réflexion.

Désignons respectivement par : $(R_{21}; T_{21}); (R_{22}; T_{22})$ les couples réflexion transmission de la première et deuxième chaîne de dimer ; Les représentations graphiques des ces coefficients sont données par les figures ci-dessous pour

- cas de la première chaîne du model 2: $\rho = 0.25\rho_{\max}, C_1 = 3, C_4 = 0, C_2 = 1$



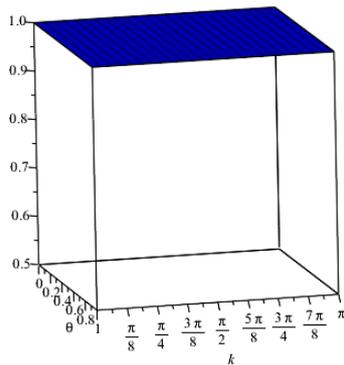
(a)



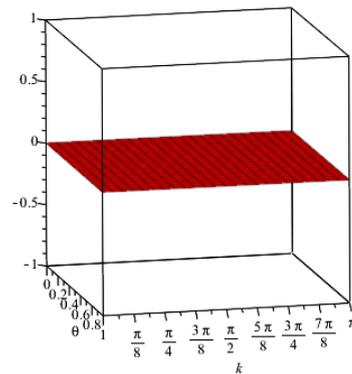
(b)

Figure (2.9) : Représentation en 3D des coefficients de transmission en (a) et réflexion en (b)

- cas de la première chaîne du model 2: $\rho = 0, C_1 = 3, C_4 = 0$



(c)



(d)

Figure (2.10) : Représentation en 3D des coefficients de transmission (c) et réflexion (d)
 Les figures ci-dessus nous montrent que l'onde transmise et l'onde réfléchiée sont amplifiées pour la première chaîne pour $k \in [0, \pi]$ tandis que dans le cas de la seconde chaîne, on a : $|R|^2 = 0$ et $|T|^2 = 1$. Dans le cas de la deuxième chaîne de trimer, l'onde incidente est totalement transmise pour $k \in [0, \pi]$.

2.4.2. Couplage d'un trimer isolé avec une chaîne conservatrice de guides d'onde : Modèle 3

2.4.2.1. Schéma du modèle

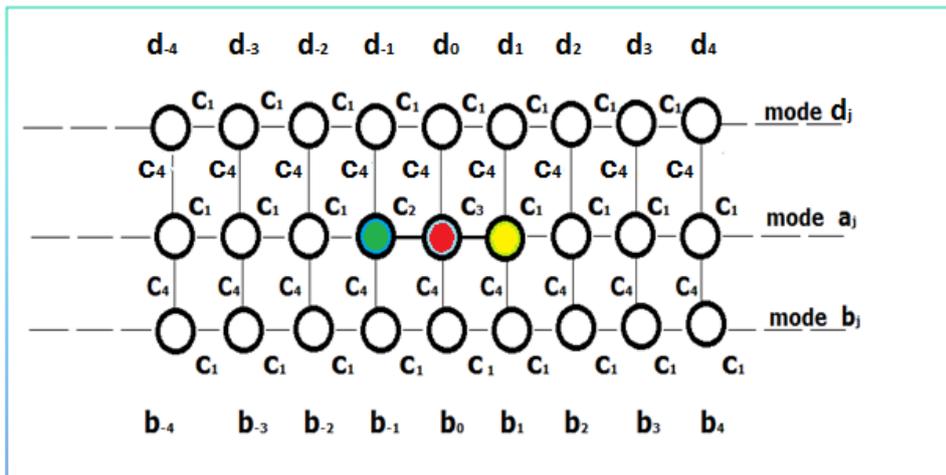


Figure (2.11) : modèle 2 Couplé avec une chaîne conservatrice : modèle 3

2.4.2.2. Equation du modèle

$$i \frac{da_{-1}}{dz} + i\rho_{-1}a_{-1} + C_1a_{-2} + C_2a_0 + C_4b_{-1} + C_4d_{-1} = 0 \quad (2.42)$$

$$i \frac{da_0}{dz} + i\rho_0a_0 + C_2a_{-1} + C_3a_{+1} + C_4b_0 + C_4d_0 = 0 \quad (2.43)$$

$$i \frac{da_1}{dz} + i\rho_1a_1 + C_3a_0 + C_1a_{+2} + C_4b_1 + C_4d_1 = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{db_{-1}}{dz} + C_1b_{-2} + C_1b_0 + C_4a_{-1} = 0 \quad (2.45)$$

$$i \frac{db_0}{dz} + C_1b_{-1} + C_1b_{+1} + C_4a_0 = 0 \quad (2.46)$$

$$i \frac{db_1}{dz} + C_1b_0 + C_1b_{+2} + C_4a_1 = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{dd_{-1}}{dz} + C_1d_{-2} + C_1d_0 + C_4a_{-1} = 0 \quad (2.48)$$

$$i \frac{dd_0}{dz} + C_1d_{-1} + C_1d_{+1} + C_4a_0 = 0 \quad (2.49)$$

$$i \frac{dd_1}{dz} + C_1d_0 + C_1d_{+2} + C_4a_1 = 0 \quad (2.50)$$

On cherche les solutions sous la forme :

$$\begin{cases} a_{-1}(z) = e^{i(kj-\beta z)} + R_1(\rho)e^{i(-kj-\beta z)} \\ a_0(z) = S_1(\rho)e^{i(-\beta z)} \\ a_1(z) = T_1(\rho)e^{i(kj-\beta z)} \end{cases} \begin{cases} d_{-1}(z) = e^{i(kj-\beta z)} + R_3(\rho)e^{i(-kj-\beta z)} \\ d_0(z) = S_3(\rho)e^{i(-\beta z)} \\ d_1(z) = T_3(\rho)e^{i(kj-\beta z)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{-1}(z) = e^{i(kj-\beta z)} + R_2(\rho)e^{i(-kj-\beta z)} \\ b_0(z) = S_2(\rho)e^{i(-\beta z)} \\ b_1(z) = T_2(\rho)e^{i(kj-\beta z)} \end{cases}$$

En remplaçant ces solutions dans le système précédent, on trouve l'expression ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\beta e^{ik} + i\rho_{-1}e^{ik} + C_1e^{2ik})R_1 + C_2S_1 + C_4e^{ik}R_2 + C_4e^{ik}R_3 = - \begin{pmatrix} (\beta + i\rho_{-1})e^{-ik} \\ +C_1e^{-2ik} + 2C_4e^{-ik} \end{pmatrix} \\ C_2e^{ik}R_1 + (\beta + i\rho_0)S_1 + C_3e^{ik}T_1 + C_4S_2 + C_4S_3 = -C_2e^{-ik} \\ C_3S_1 + (\beta e^{ik} + i\rho_{-1}e^{ik} + C_1e^{2ik})T_1 + C_4e^{ik}T_2 + C_4e^{ik}T_3 = 0 \\ C_4e^{ik}.R_1 + (\beta e^{ik} + C_1e^{2ik})R_2 + C_1S_2 = - \begin{pmatrix} \beta e^{-ik} + C_1e^{-2ik} \\ +C_4e^{ik} \end{pmatrix} \\ C_4S_1 + C_1e^{ik}R_2 + \beta S_2 + C_1e^{ik}T_2 = -C_1e^{-ik} \\ C_4e^{ik}T_1 + C_1S_2 + C_1S_2 + (\beta e^{ik} + C_1e^{2ik})T_2 = 0 \\ C_4e^{ik}.R_1 + (\beta e^{ik} + C_1e^{2ik})R_3 + C_1S_3 = - \begin{pmatrix} \beta e^{-ik} + C_1e^{-2ik} \\ +C_4e^{ik} \end{pmatrix} \\ C_4S_1 + C_1e^{ik}R_3 + \beta S_3 + C_1e^{ik}T_3 = -C_1e^{-ik} \\ C_4e^{ik}T_1 + C_1S_3 + C_1S_3 + (\beta e^{ik} + C_1e^{2ik})T_3 = 0 \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Les coefficients de réflexion de transmission seront donnés à l'annexe et dans le paragraphe suivant nous tracerons ces coefficients

2.4.2. 3. Représentation graphique des Coefficients de transmission et réflexion .

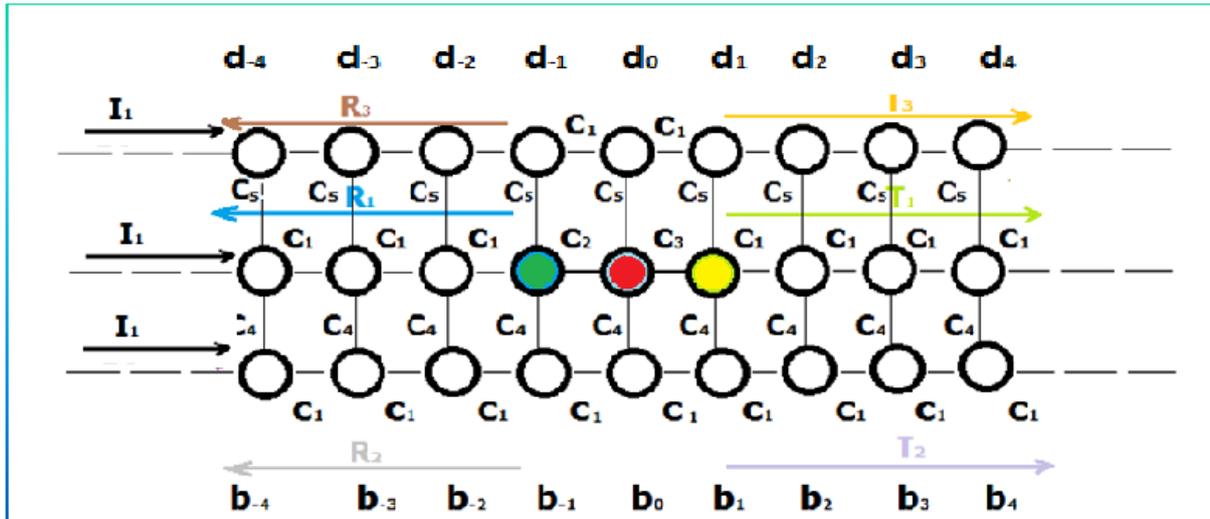


Figure (2.12) : Onde réfléchié et onde transmise au niveau de la discontinuité et de son couplage

Désignons respectivement par : $(R_{31};T_{31});(R_{32};T_{32});(R_{33};T_{33})$ les couples réflexion transmission de deuxième, troisième et première chaîne de trimer Les représentations graphiques des ces coefficients sont données par les figures ci-dessous pour $\rho = 0.25\rho_{\max}$, $C_1 = C_4 = 3, C_2 = 1$

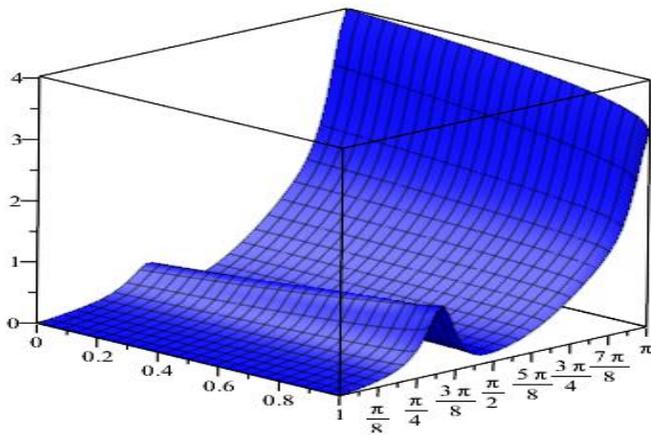


Figure (2.13) : Représentation en 3D des coefficients de transmission dans les trois lignes du modèle 3

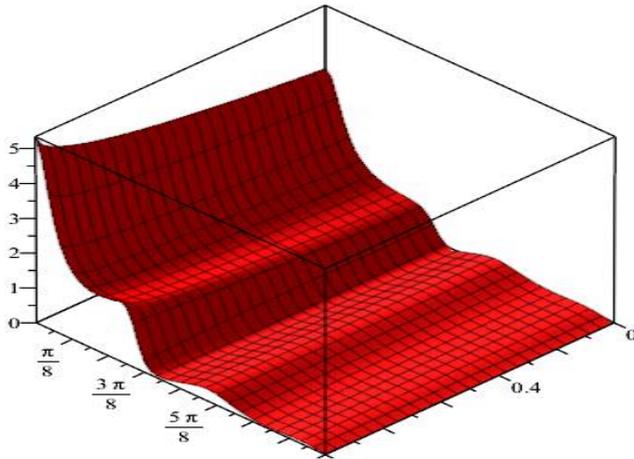


Figure (2.14): Représentation en 3D des coefficients de réflexion dans les trois lignes du modèle 3

Au regard de ces observations, on remarque d'abord une décroissance de l'amplitude de réflexion de l'onde jusqu'à leur annihilation. Ce sont donc des ondes évanescentes c'est-à-dire qui disparaissent jusqu'à s'annuler avec le temps. Par contre, l'amplitude de l'onde transmise change d'inflexion avec le temps : l'onde transmise dans les trois chaînes est donc modulée.

CONCLUSION

Parvenu au terme de notre chapitre où il était question de faire une étude de la transmission et de la réflexion d'une onde dans une chaîne de guides d'onde conservative ayant en son sein une discontinuité généralisée de type trimer ; nous avons pu ressortir les situations où le système était stable et instable pour un domaine précis de variation de ρ dans le cas de la chaîne linéaire. On a également pu ressortir l'influence du couplage et du paramètre Θ sur la transmission et la réflexion de l'onde incidente et transmise. On a noté des situations où notre système pouvait soit amplifier l'onde soit l'atténuer et des situations où l'intensité de l'onde incidente n'était pas modifiée à la traversée de la de notre système PTS pris comme discontinuité. Et aussi, pour le cas de trois chaînes de trimer couplées on a pu remarquer les modulations d'amplitude de l'onde transmise pour certaines valeurs des paramètres du système. Cette étude nous a donc permis de voir le comportement d'une onde dans un pareil système. Par la suite, nous étudierons la condition pour qu'une chaîne d'impuretés de trimer soit PTS ensuite nous propagerons une onde de type gaussienne dans les modèles étudiés précédemment.

Chapitre 3 :

PROPAGATION LINEAIRE D'UNE ONDE DE TYPE GAUSSIENNE DANS UNE CHAINE LINEAIRE ET COUPLEE DE TRIMER

Introduction

Au travers des systèmes PTS présentés au chapitre précédent, on a pu étudier l'effet que discontinuité de trois guides d'onde pouvait avoir sur la propagation d'une onde et il a été fort de constater que la nature du guide d'onde a une incidence sur la propagation de la dite onde. De plus, il est aussi à noter de fortes amplifications de l'onde pour certaines valeurs du coefficient du couplage et de ρ . Dans cette dernière partie nous allons étudier la propagation d'un onde de type gaussienne dans un système de guides d'onde trimer linéaire puis étudier le phénomène de transmission et de réflexion des ondes dans un système couplés de guide d'ondes. Nous commençons tout d'abord par présenter un tel modèle ensuite de donner les conditions PTS d'un tel système.

3.1. Chaîne linéaire de trimer

3.1.1. Définition

Une chaîne linéaire de trimer est un ajancement linéaire de trois guides d'ondes couplés entre eux.

Dans notre modèle, nous prendrons trois guides consécutifs de mode respectifs a_j, b_j, c_j ayant respectivement pour coefficients gain/loss ρ_a, ρ_b, ρ_c .

3.1.2. Modèle

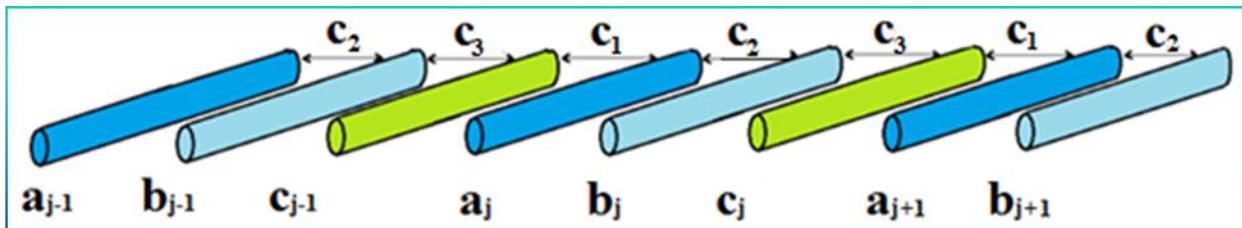


Figure (3.1) : Chaîne linéaire de guides d'onde

3.1.3. Equation du modèle

D'après l'équation (1.37) du chapitre 1'on déduit le système ci-dessous :

$$\begin{cases} i \frac{da_j}{dz} + i\rho_a a_j + C_1 c_{j-1} + C_2 b_j = 0 \\ i \frac{db_j}{dz} + i\rho_b b_j + C_2 a_j + C_3 c_j = 0 \\ i \frac{dc_j}{dz} + i\rho_c c_j + C_1 a_{j+1} + C_3 b_j = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

avec : $\rho_a = \rho$, $\rho_b = -\theta\rho$, $\rho_c = -(1-\theta)\rho$

3.1. 4. Conditions pour que le système soit PTS

Cherchons les solutions "du système (3.1) sont sous la forme :

$$\begin{cases} a_j = A_j e^{i(kj-\beta z)} \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} b_j = B_j e^{i(kj-\beta z)} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} c_j = C_j e^{i(kj-\beta z)} \end{cases} \quad (3.4)$$

En remplaçant les solutions (3.2) , (3.3), (3.4) dans le système (3.1) on obtient :

$$\begin{cases} -i\beta a_j + i\rho_a a_j + C_1 e^{-ik} c_j + C_2 b_j = 0 \\ -i\beta b_j + i\rho_b b_j + C_2 a_j + C_3 c_j = 0 \\ -i\beta c_j + i\rho_c c_j + C_1 e^{ik} a_j + C_3 b_j = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\beta + i\rho_a)A_j + C_2 B_j + C_1 e^{-ik} C_j = 0 \\ C_2 A_j + (\beta - i\theta\rho)B_j + C_3 C_j = 0 \\ C_1 e^{ik} A_j + C_3 B_j + (\beta - i(1-\theta))C_j = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

D'où la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} (\beta + i\rho) & C_2 & C_1 e^{-ik} \\ C_2 & (\beta - i\theta\rho) & C_3 \\ C_1 e^{ik} & C_3 & (\beta - i(1-\theta)) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Les solutions non triviales du système sont telles que :

$$\det(M) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (\beta + i\rho) & C_2 & C_1 e^{-ik} \\ C_2 & (\beta - i\theta\rho) & C_3 \\ C_1 e^{ik} & C_3 & (\beta - i(1-\theta)) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

Le déterminant du système vaut :

$$\begin{aligned} \det(M) = & \beta^3 + (-\rho^2\theta + \rho^2\theta^2 - C_1^2 + \rho^2 - C_3^2 - C_2^2)\beta \\ & + i(-\rho C_3^2 - C_2^2\rho\theta + C_1^2\theta\rho + C_2^2\rho - \rho^3\theta + \rho^3\theta^2) \\ & + 2C_2C_3C_1\cos(k) \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'expression (3.8) peut se mettre sous la forme :

$$\Leftrightarrow \beta^3 + A\beta + iF + E = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} A = -\rho^2\theta + \rho^2\theta^2 - C_1^2 + \rho^2 - C_3^2 - C_2^2 \\ F = -\rho C_3^2 - C_2^2\rho\theta + C_1^2\theta\rho + C_2^2\rho - \rho^3\theta + \rho^3\theta^2 \\ E = 2C_2C_3C_1\cos(k) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{\Delta^{\frac{1}{3}}}{6} - \frac{2A}{\Delta^{\frac{1}{3}}} \\ \beta_{2,3} = -\frac{\beta_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\Delta^{\frac{1}{3}}}{6} + \frac{2A}{\Delta^{\frac{1}{3}}} \right) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Avec :

$$\Delta = \left(-108E - 108iF + 12\sqrt{12A^3 + 81E^2 + 162iEF - 81iF^2} \right)$$

Cherchons les valeurs $\beta_{1,2,3}$ qui soient telles que notre système soit PTS .Ces valeurs correspondent à $F=0$.

$$F = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_3 = C_2 \sqrt{(1-\theta) \left(1 - \theta \left(\frac{\rho}{C_2} \right)^2 + \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^2 \right)} \\ \Delta = -108E + 12\sqrt{12A^3 + 81E^2} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Trouvons les conditions sur θ pour que C_3 soit positif ; on a :

$$C_3 \geq 0 \Rightarrow (1-\theta) \left(1 - \theta \left(\frac{\rho}{C_2} \right)^2 + \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^2 \right) \geq 0 \quad (3.13)$$

Ce qui nous donne les conditions ci –dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-\theta) \geq 0 \\ \left(1 - \theta \left(\frac{\rho}{C_2} \right)^2 + \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^2 \right) \geq 0 \end{array} \right. \quad (S.3.3) \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-\theta) \leq 0 \\ \left(1 - \theta \left(\frac{\rho}{C_2} \right)^2 + \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^2 \right) \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Dans la suite, nous nous intéresserons au cas particulier ou $\theta \in [0,1]$. Dans ce cas,

posons : $\bar{\rho} = \frac{\rho}{C_2}$; $\bar{C}_1 = \frac{C_1}{C_2}$ le système (S.3.3) Pourra donc s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 1 \\ (1 - \theta \cdot \bar{\rho}^2 + \bar{C}_1^2) \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 1 \\ (1 - \theta \cdot \bar{\rho}^2 + \bar{C}_1^2) \geq 0 \end{array} \right.$$

Conjuguons les solutions $\beta_{1,2,3}$ du système (S.3.4), on obtient les solutions suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{\Delta^{\frac{1}{3}}}{6} - \frac{2A \cdot \Delta^{\frac{1}{3}}}{\Delta^{\frac{1}{3}} \cdot \Delta^{\frac{1}{3}}} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{2,3} = -\frac{\beta_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\Delta^{\frac{1}{3}}}{6} + \frac{2A \cdot \Delta^{\frac{1}{3}}}{\Delta^{\frac{1}{3}} \cdot \Delta^{\frac{1}{3}}} \right) \end{array} \right. \quad (3.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Avec : } \Delta = \left[-108E + 12\sqrt{12A^3 + 81E^2} \right] \end{array} \right. \quad (3.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta' = \left[-108E - 12\sqrt{12A^3 + 81E^2} \right] \end{array} \right. \quad (3.18)$$

(3.17) et (3.18) nous permettent de trouver par calcul :

$$\Delta^{\frac{1}{3}} \Delta'^{\frac{1}{3}} = -12A \quad (3.19)$$

En tenant compte de (3.19), les expressions (3.15) et (3.16) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{\Delta^{\frac{1}{3}}}{6} + \frac{\Delta'^{\frac{1}{3}}}{6} \\ \beta_{2,3} = -\frac{\beta_1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\Delta^{\frac{1}{3}}}{6} - \frac{\Delta'^{\frac{1}{3}}}{6} \right) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{1}{6} \left(\Delta^{\frac{1}{3}} + \Delta'^{\frac{1}{3}} \right) \\ \beta_{2,3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left\{ \left(\Delta^{\frac{1}{3}} + \Delta'^{\frac{1}{3}} \right) + i\sqrt{3} \left(\Delta^{\frac{1}{3}} - \Delta'^{\frac{1}{3}} \right) \right\} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

des expressions (3.20) et (3.21), on remarque que si :

$$12A^3 + 81E^2 \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \left(\Delta^{\frac{1}{3}} + \Delta^{\frac{1}{3}} \right) \in \mathbb{R} \\ \left(\Delta^{\frac{1}{3}} - \Delta^{\frac{1}{3}} \right) \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (3.22)$$

car Δ' est le conjugué complexe de Δ .

Les expressions (3.22) et (3.23) conduisent au résultat selon lequel que les valeurs propres $\beta_{1,2,3}$ sont réelles si et seulement si : $12A^3 + 81E^2 \leq 0$ c'est-à-dire que Notre système sera PTS si et seulement si :

$$\begin{aligned} 12A^3 + 81E^2 &\leq 0 \\ \Rightarrow 12A^3 + 324(2C_2C_3C_1\cos(k))^2 &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Soit :

$$A^3 + 27(2C_2C_3C_1\cos(k))^2 \leq 0 \quad (3.25)$$

De la relation (3.25), on peut écrire :

$$27(2C_2C_3C_1\cos(k))^2 \leq -A^3 \quad (3.26)$$

c'est à dire:

$$0 \leq 27(2C_2C_3C_1\cos(k))^2 \leq -A^3 \Leftrightarrow -A^3 \geq 0 \quad (3.27)$$

soit :

$$A^3 \leq 0 \Rightarrow A \leq 0$$

La relation ci-dessus est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que le système soit PTS . Ainsi, ce système sera PTS si la condition ci-dessous est respectée à savoir :

$$\begin{cases} \left(-\rho^2\theta + \rho^2\theta^2 - C_1^2 + \rho^2 - C_3^2 - C_2^2 \right)^3 \leq -27(2C_2C_3C_1\cos(k))^2 \\ A \leq 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

De la relation (3.28) on déduit l'expression ci-dessous :

$$|\rho| \leq \sqrt{C_1^2\theta + C_2^2} \quad (3.29)$$

Il vient donc que lorsque l'inéquation (3.29) est vérifiée, le spectre des valeurs propres est

réel , et il devient imaginaire dans le cas contraire, ceci est la principale caractéristique des systèmes PTS .Dans toute la suite, on prendra $C_2 = 1$.

Les figures suivantes illustrent le tracé de la partie imaginaire des valeurs propres β_i pour des valeurs de ρ prises dans L'intervalle des valeurs permises de c'est-à-dire vérifiant la relation (3.28) et $\theta \in [0,1]$. Dans ce domaine la partie imaginaire des valeurs propre est nulle ce qui justifie que notre système est PTS dans ce domaine. $\beta_i = \beta_i(\rho, C_3); i \in \{1, 2, 3\}$

-Pour $C_1= 3 ; C_2= 1 ; k= \pi /4$

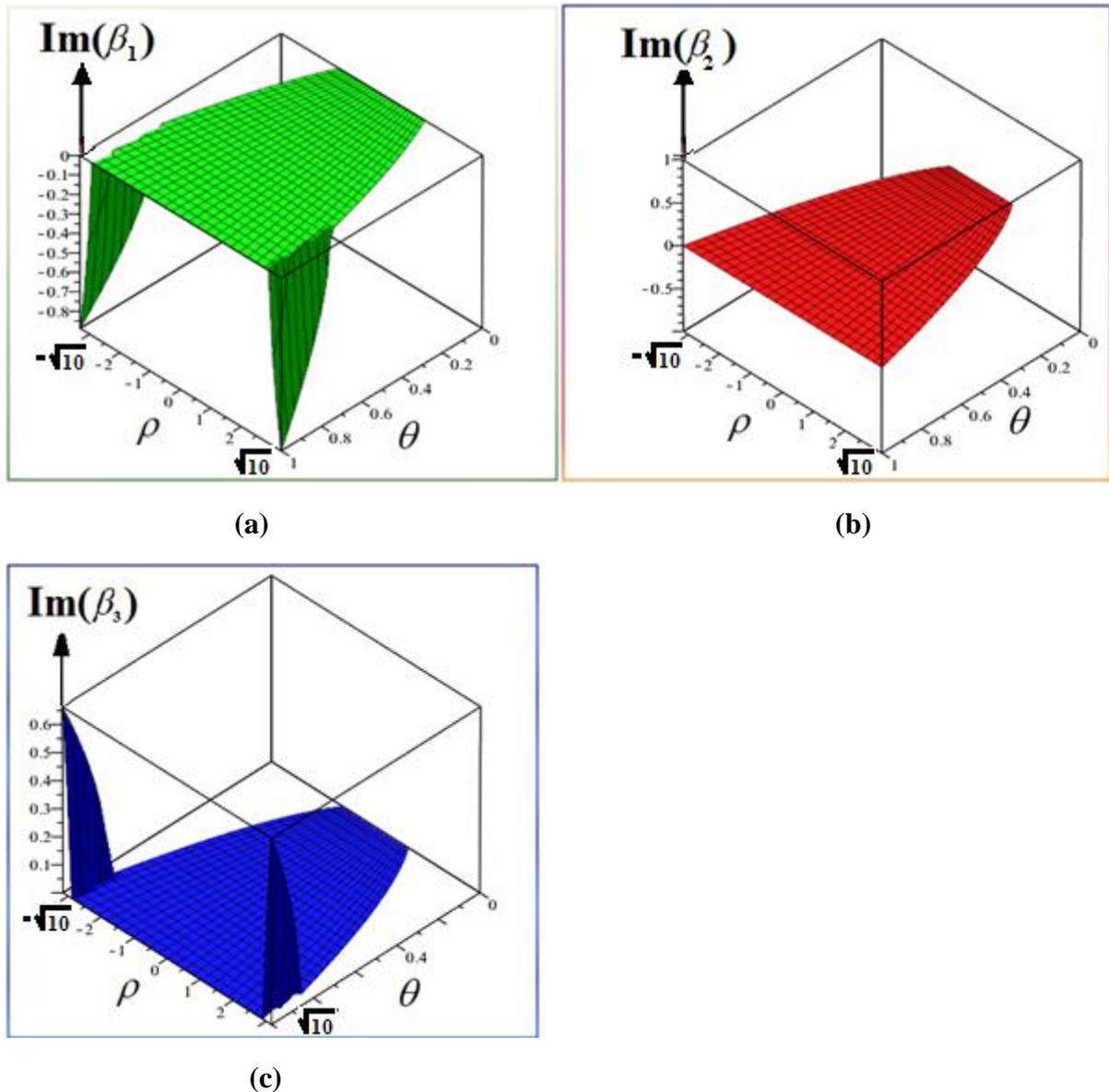


Figure (3.2) : Représentation en 3D des parties imaginaires des valeurs propres β_1 en (a), β_2 en (b) et β_3 en (c)

-A $\Theta = 0$: les parties imaginaires sont nulles pour ρ appartenant a l'intervalle -1 et 1 alors qu'elles sont non nulles hors de ce domaine de ρ .

- A $\Theta = 1$ par exemple, ρ varie entre $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$, toutes les parties imaginaires sont nulles c'est-à-dire que les valeurs propres sont réelles.

3.2. Propagation Linéaire d'une impulsion gaussienne et insuffisances du modèle plan

3.2.1. Structure gaussienne d'un faisceau

3.2.1.1 Insuffisances du modèle de l'onde plane.

On a déjà rencontré les ondes planes parmi les solutions les plus simples de l'équation des ondes : ces ondes sont non limitées transversalement et caractérisées par une amplitude constante, transportant de ce fait une puissance en théorie infinie (puisque non limitée spatialement). Ce modèle des ondes planes ne peut être qu'une approximation plus ou moins adaptée à la propagation des ondes. En particulier, il est très mal adapté à la propagation en milieu confiné, comme par exemple les lasers : c'est le cas dans une cavité ou dans un guide d'ondes.

3.2.1.2. Structure gaussienne d'une impulsion ; mode d'ordre supérieur.

La lumière appartient au domaine des ondes électromagnétiques, et peut être entièrement caractérisée par la connaissance de son vecteur champ électrique, lui même solution dans un milieu linéaire et transparent d'une équation des ondes à trois dimensions, dont la structure dépend des conditions aux limites.

De manière à tenir compte de la structure confinée caractéristique des impulsions dans les cavités(ou guide d'onde), on montre que l'équation d'onde vérifiée par les ondes électromagnétiques admet comme solution dans l'approximation de l'optique paraxiale, des ondes dont le profil d'intensité est de forme gaussienne (on dit aussi modes gaussiens). Nous nous limiterons à la recherche de la solution dite mode d'ordre supérieur de la forme :

$$a_j = \exp\left(ik(j - j_0) - \delta(j - j_0)^2\right) \quad (3.26)$$

Où j_0 est le numéro du guide sur lequel l'onde est centrée, δ est la largeur de l'onde. k désigne le module du vecteur d'onde. Dans le tracé de la propagation des ondes, on a pris pour largeur $\delta=0.004$. Dans la suite ,nous réalisons les courbes de propagation à l'aide du

logiciel Matlab en fonction de la distance de propagation Z (sur les ordonnées) et du numéro du guide d'onde j (axe des abscisses) .

3.2.1.3. Propagation d'une impulsion gaussienne dans le cas de deux chaines linéaires non couplées : $C_4=0$, $C_1=3$, $\theta = 0.5$

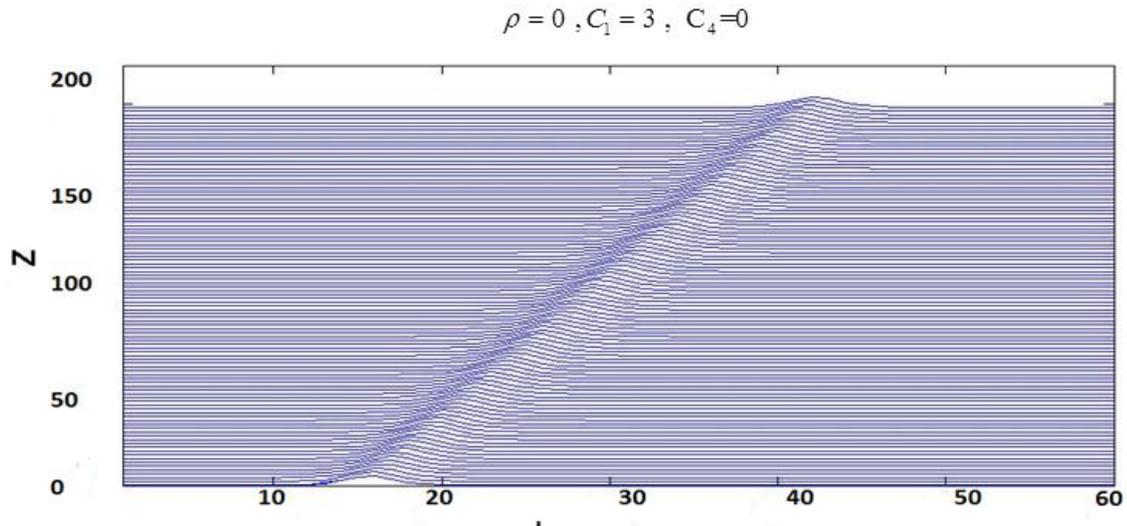


Figure (3. 3) : propagation d'une impulsion de type gaussienne dans la deuxième chaine du modèle 2

On constate au regard de la figure ci-dessus que l'onde incidente est entièrement transmise lorsque qu'on est à la valeur $k = \frac{\pi}{2}$ et pour θ fixé ce résultat confirme le tracé de la transmission et de la réflexion obtenu au chapitre précédent. Au centre de zone de Brillouin ($k = \frac{\pi}{2}$) il n'y a ni amplification ni atténuation de l'onde incidente.

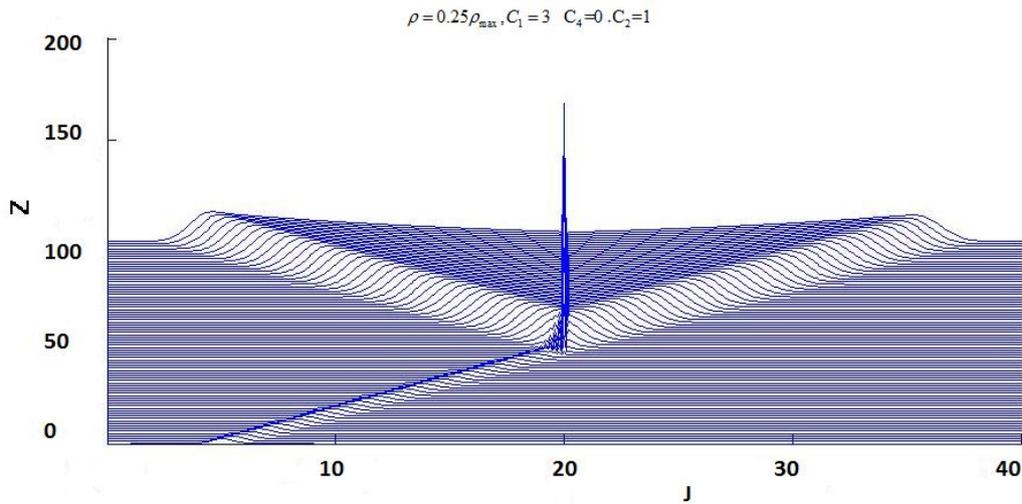


Figure (3.4) : Propagation d'une impulsion de type gaussienne dans la première chaîne du modèle 2

Par contre, au niveau de la première chaîne, lorsque l'onde incidente rencontre la discontinuité (trimer isolé) elle est à la fois transmise et réfléchiée avec des amplitudes qui lui sont nettement supérieures. Ce qui est accordé avec les résultats du chapitre précédent sur la transmission et réflexion. Dans la suite, nous représentons à partir du logiciel Maple les courbes de propagation d'une onde de type gaussienne en fonction de la distance de propagation Z (sur les ordonnées) et du numéro du guide d'onde j (sur les abscisses).

3.2.1.4. Propagation d'une impulsion gaussienne dans le cas de deux chaînes linéaires non couplées : $\rho = 0.25\rho_{\max}, C_1 = C_4 = 3, C_2 = 1, \theta = 0.5$

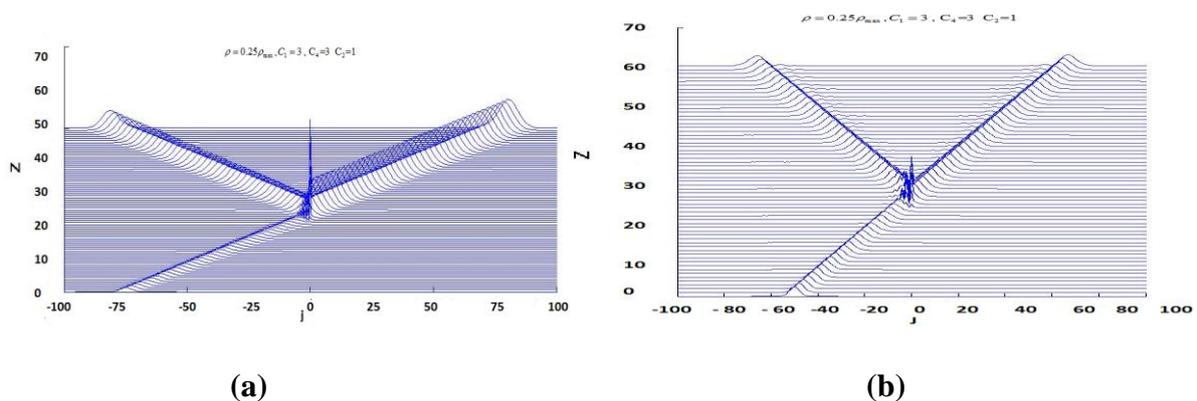


Figure (3.4) : impulsion gaussienne envoyée simultanément dans la première chaîne (a) et la seconde chaîne (b) du modèle 2.

Dans le cas (a) également, on observe pour la première chaine que les amplitudes des ondes transmises et réfléchies sont amplifiées tandis que dans le cas (b) les amplitudes des ondes incidentes , réfléchies et transmises sont égales .

3.2.1.5. Propagation d'une impulsion gaussienne dans le cas de deux chaines linéaires couplées : modèle 3

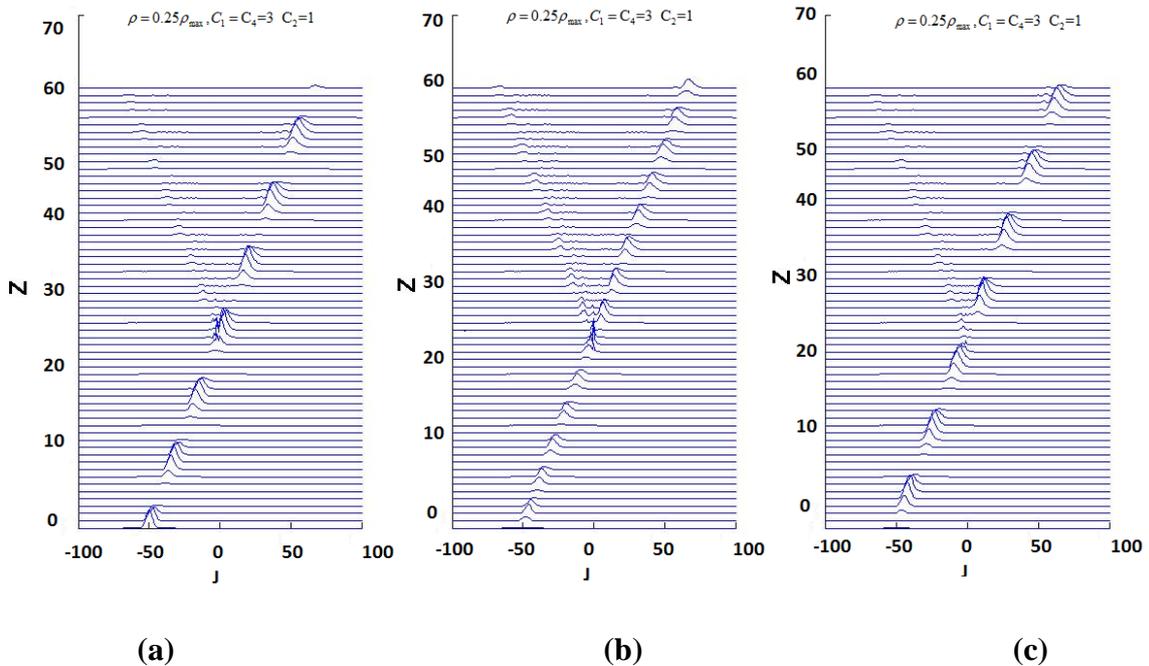


Figure (3.5) : Impulsion gaussienne envoyée simultanément dans la première (a) ,deuxième(b) et troisième chaine(c) du modèle 3

Les observations faites sur ces figures révèlent une atténuation de l'onde réfléchié jusqu'à sa disparition et une modulation d'amplitude pour la valeur $k = \frac{3\pi}{8}$: lorsqu'on fait subir sur chaque chaine du modèle 3 la même excitation, on observe pratiquement le même comportement ce qui est en conformité avec les résultats du chapitre précédent sur la transmission et la réflexion .

CONCLUSION

En guise de conclusion, nous rappelons qu'il était question dans ce chapitre d'étudier la propagation d'une onde gaussienne stimulant respectivement les chaînes de trimer constituées de deux et trois guides. On a pu au travers de cette propagation confirmer les résultats obtenus au chapitre précédent sur les transmissions et réflexion de l'onde.

Chapitre 4 :

IMPLICATIONS PEDAGOGIQUE SUR LE SYSTEME ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE

Introduction

La pédagogie est la branche de l'éducation qui se préoccupe des méthodes d'enseignement. Dans les chapitres précédents, on a étudié la transmission et la réflexion d'une onde ainsi que sa propagation. Les ondes étant une notion abordée à partir du second cycle des enseignements général, l'enseignant devra donc trouver des méthodes et moyens pour que la dite notion soit bien assimilée par les apprenants. La tâche qui lui incombe est considérée comme étant de plus en plus étendue et couvre notamment le développement individuel des enfants et des jeunes gens, la gestion des processus d'apprentissage en classe, la transformation de l'ensemble de l'établissement scolaire en une « communauté d'apprenants », ainsi que les liens avec les collectivités locales et le monde extérieur.

4.1. Au Niveau des enseignements

L'enseignement est de nos jours l'un des métiers les plus nobles car il participe à sa manière à une construction d'une société plus consciente et dynamique et ceci passe par la prise de conscience de l'environnement immédiat dans lequel nous nous trouvons. L'enseignant se trouvant dans ce maillage a donc certaines responsabilités et devoirs. Il n'est plus question pour ce dernier de construire des notions essentiellement focalisées sur la théorie comme jadis mais amener l'apprenant dans une approche non plus objective mais basées sur le savoir faire. Pour y parvenir l'enseignant doit centrer son cœur sur des activités rattachées à la vie pratique de tous les jours qu'il prendra lui-même le soin de bien élaborer.

4.1.1. Facteurs influençant les acquis des élèves

De multiples facteurs influent sur les acquis des élèves parmi lesquels : les compétences, les attentes, la motivation et le comportement des élèves eux-mêmes ; les ressources, les attitudes et le soutien des familles ; les compétences, les attitudes et le comportement du groupe de pairs ; l'organisation, les ressources et le climat dans l'établissement scolaire ; la structure et les contenus des programmes d'enseignement ; les qualifications, les connaissances, les attitudes et les pratiques des enseignants. Les établissements scolaires et les salles de classe

sont des environnements complexes et dynamiques, c'est pourquoi l'un des grands axes de la recherche en éducation a été, et demeure, de déterminer les effets de ces divers facteurs ainsi que de leurs interactions et interrelations – et ce pour différents types d'élèves et différents types de formations.

4.1.2. La qualité de l'enseignement est essentielle pour améliorer les acquis des élèves

On s'accorde en général à dire que la « qualité de l'enseignant » est l'unique principale variable scolaire qui influe sur les résultats des élèves. Les recherches pour la plupart ont consisté à examiner la relation entre les mesures des performances des élèves, c'est-à-dire le plus souvent les notes à des examens normalisés, et les caractéristiques des enseignants facilement mesurables telles que les diplômes, leur expérience pédagogique, ainsi que des indicateurs de leurs compétences théoriques ou de leurs connaissances dans une discipline donnée. Ces travaux révèlent en général une relation positive entre ces mesures des caractéristiques des enseignants et les performances des élèves, mais peut-être à un degré moindre que celui que l'on aurait pu attendre. Les diverses études s'accordent sur l'idée que la qualité des enseignants comprend de nombreux aspects importants dont ne rendent pas compte les indicateurs couramment utilisés tels que les diplômes, l'expérience et l'évaluation des compétences théoriques. Parmi les caractéristiques des enseignants qu'il est plus difficile de mesurer mais qui peuvent être cruciales pour les acquis des élèves figurent l'aptitude à transmettre des idées de façon claire et convaincante, à créer un environnement pédagogique efficace pour différents types d'élèves, à favoriser l'instauration de liens enrichissants entre l'enseignant et les élèves, à faire preuve d'enthousiasme et d'imagination et à travailler efficacement avec les collègues et les parents. Voici quelques exemples de domaines auxquels s'applique cette responsabilité élargie des enseignants :

- **Au niveau de l'élève individuel**

- Mettre en route et gérer les processus d'apprentissage
- Répondre efficacement aux besoins des apprenants individuels
- Intégrer l'évaluation formative et sommative

- **Au niveau de la classe**

- Enseigner à des classes pluriculturelles
- Élaborer de nouvelles aptitudes de manière transversale dans tout le programme de cours
- Intégrer les élèves présentant des besoins éducatifs spécifiques

- **Au niveau de l'établissement scolaire**

- Travailler et planifier en équipes
- Évaluation et programmes de développement organisationnel scolaire
- Utilisation des TIC dans l'enseignement et l'administration Nous allons proposer une ébauche de fiche d'activité qu'un enseignant devra mener pendant le déroulement de sa leçon.

4.2. Au niveau l'attitude de l'apprenant

La prise de conscience et l'amélioration des procédés d'enseignements influe sur la perception du jeune apprenant .Trois grandes conclusions se dégagent des recherches sur les acquis des élèves :

- La première conclusion, et la plus solidement établie, est que les variations dans les acquis des élèves sont essentiellement dues à leur bagage à leur entrée à l'école – leurs capacités et attitudes ainsi que leur milieu familial et social.
- La deuxième grande conclusion est que parmi les variables sur lesquelles les décideurs publics pourraient éventuellement agir, celles qui exercent la principale influence sur les acquis des élèves sont celles qui ont trait aux enseignants et à l'enseignement.
- La troisième grande conclusion des recherches, qui prête un peu plus à la controverse, concerne les indicateurs de la qualité des enseignants ou ses facteurs de corrélation. On peut les classer cette influence suivant les niveaux suivants :

-Au niveau de sa culture scientifique :en général dans notre contexte beaucoup n'ont pas cette culture scientifique et leur comportement en société n'est pas très différent d'un profane quand il s'agit de régler un problème concret qui fait parfois appel aux notions acquises en classe car ne sachant pas faire un parallélisme entre la théorie apprise et les problèmes concrets.

-Au niveau du choix de ses choix et de son orientation au supérieur : Un cours bien élaboré (sou tenu par une fiche pédagogique soigneusement conçue) par exemple sur les ondes peut influencer sur l'orientation du choix de l'apprenant dans la mesure où ce dernier devient conscient des réalités et enjeux de la dite notion et perçoit dès lors différemment les choses.

CONCLUSION

Parvenu au terme de nos travaux ou il était question de présenter les implications pédagogiques de notre thématique à savoir la propagation des ondes et de façon générale la maîtrise des ondes, il en ressort que l'enseignant a de lourdes responsabilités quant à la façon de dispenser ces notions assez délicates introduites au second cycle de l'enseignement général. Il en ressort également que le développement des méthodes d'enseignements plus concrètes pratiques et dynamiques influent sur le choix et l'orientation de ce dernier dans le monde universitaire et professionnel.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVE

L'objectif de ce travail était d'étudier la propagation linéaire d'une onde dans une chaîne de guides d'onde PTS de type TRIMER. On a brièvement introduit la notion de système PTS et il en ressort de cette étude qu'il existe des systèmes physiques dont le Hamiltonien possède des valeurs propres réelles bien que n'étant pas hermétien. Fort de ce constat, un système sera dit PTS en optique paraxiale si la partie réelle de son indice complexe de réfraction est une fonction paire de la position tandis que la partie imaginaire reste une fonction impaire de la position. Pour différents modèles trimer on a étudié la transmission et la réflexion d'une onde dans une chaîne linéaire pris comme discontinuité, une chaîne couplée avec une chaîne conservative puis une chaîne deux chaînes conservative couplées avec une chaîne linéaire possédant une impureté TRIMER. Il en ressort de cette étude une compatibilité entre les résultats de transmission et de propagation. On ne saurait terminer sans mentionner les énormes difficultés rencontrées lors de nos travaux ceci liées à la complexité des expressions mathématiques à calculer ; ne disposant pas d'une machine assez puissante, nous avons quand même pu effectuer nos études. Nous ne pouvons qu'encourager des prochaines initiatives qui feront avancer nos travaux.

En guise de perspective, nous envisageons dans les travaux à venir faire l'étude d'une chaîne de trimer couplées essentiellement de guide d'onde gain /loss, Etudier le propagation soliton et dans le meilleure des cas effectuer des collisions entre ces derniers.

REFERENCES

- [1] C. M. Bender and S. Boettcher(1998), Phys. Rev. Lett.80, 5243.
- [2] Khalida Messaad(2009), Contribution à la conception de guides optiques à fortes susceptibilités non-linéaires d'ordre 3. [physics]. Université Rennes 1.
- [3] C. M. Bender, D.C.Brody, and H.F.Jones(2002), phys. Rev. Lett. 89, 270401.
- [4] D. N. Christodoulides, and ziad H. Mussli- mani,(2007) Opt.Lett.32, 2632 .
- [5] C. M. Bender, S. Boettcher, and P.N. Meisinger, J.Math(1999). phys. 40, 2201.
- [6] C. M. Bender, D.C.Brody, and H.F.Jones(2002), phys. Rev. Lett. 89, 270401
- [7]Sergey V. Suchkov, Boris A. Malomed, V. Dmitriev,and Yuri S. Kivshar (2011), Phys. Rev. Lett. 90, 370401.
- [8] Sergey V. Suchkov, Boris A. Malomed, V. Dmitriev,and Yuri S. Kivshar(2007) Lett.78, 5263 .
- [9] R. El-Ganainy, K. G. radiocom(2015) microondes master2,université d'anger. Lett.59, 5283.
- [10]M.Duanmu,K.Li,R.L. Horne(2005)photonics materials.Royalsocietypublishing.
- [11] C.M.Bender , Boettcher S, Meisinger PN(1999). PT-symmetric quantum mechanics Opt.Lett.32, 2632 .
- [12] INRIA(2002),rapport d'activité,J.Math.Phys.40, 2201. (doi:10.1063/1.532860) .
- [13] A.Guo, G.J.Salamo, D.Duchesne, R.Morandotti,M.Volatier-Ravat, V.Aimez,G.A.Sivilo and D.N.Christodoulides(2009), Phys.Rev.Lett.103,

093902 .

[14] Sanga M.M(2015) ,propagation d'une onde dans une chaine de guide d'onde non conservatifs PTS ,mémoire ENS.

ANNEXE

Annexe 1 : Expression des Coefficients du modèle3

$$\begin{aligned}
 R_1 := & \left(C_1^2 C_2 C_3^4 e^{31k} + 2 C_1^4 \theta^2 \rho^2 e^{21k} + 2 C_1^3 C_3 C_4^2 e^{21k} + 2 C_1^2 C_3 C_4^3 e^{31k} + 6 C_1^2 C_4^4 \cos(k) e^{31k} - 8 C_1^6 e^{31k} \cos(k)^3 - 4 C_1^6 e^{31k} \cos(k) - 48 C_1^4 C_2^2 \cos(k)^3 e^{31k} - 16 C_1^4 C_3^2 \cos(k)^3 e^{31k} - 16 \right. \\
 & C_1^4 C_4 \cos(k)^4 e^{31k} + 8 C_1^3 C_4^3 \cos(k)^2 e^{31k} - 2 \rho^3 C_3^2 C_1^3 e^{31k} - 2 \rho^3 \theta C_1^3 e^{31k} + 2 \rho^3 \theta^2 C_1^3 e^{31k} - 2 C_1^4 \theta \rho^2 e^{21k} + 4 C_1^6 e^{41k} \cos(k)^2 + 32 C_1^6 e^{1k} \cos(k)^5 - 16 C_1^6 \cos(k)^4 e^{21k} - 16 \\
 & C_1^6 e^{1k} \cos(k)^3 - 64 C_1^6 \cos(k)^6 e^{21k} + C_4^6 e^{21k} + 8 C_1^5 e^{31k} C_4 \cos(k)^2 + 24 \rho e^{41k} C_1^5 \cos(k)^3 - 4 \rho e^{41k} C_1^5 \cos(k) + 2 C_1^4 e^{31k} C_3^2 \cos(k) - 4 C_1^4 e^{31k} C_4^2 \cos(k) + 16 C_4 e^{41k} C_1^5 \cos(k)^3 \\
 & - 2 C_4 e^{41k} C_1^5 \cos(k) - 4 C_4^3 e^{41k} C_1^3 \cos(k) + 2 C_2 e^{41k} C_1^2 C_4^2 + 48 C_1^4 \cos(k)^4 e^{21k} C_4^2 + 16 C_1^4 \cos(k)^4 e^{21k} C_3^2 - 12 C_1^2 \cos(k)^2 e^{21k} C_4^4 + 32 \rho e^{21k} C_1^5 \cos(k)^5 + 16 C_2^2 e^{21k} C_1^4 \cos(k)^4 + 8 \\
 & C_1^4 \cos(k)^2 e^{21k} C_4^2 - 16 \rho e^{21k} C_1^5 \cos(k)^3 - 4 \rho e^{51k} C_1^5 \cos(k)^2 - 16 C_1^4 e^{1k} C_4^2 \cos(k)^3 - 8 C_1^4 e^{1k} C_3^2 \cos(k)^3 + 2 C_1^2 e^{1k} C_4^4 \cos(k) + 2 C_1^4 e^{1k} \cos(k) C_4^2 + 4 C_1^4 e^{1k} C_3^2 \cos(k) - 4 C_4 e^{51k} \\
 & C_1^5 \cos(k)^2 - 8 C_2^2 e^{21k} C_1^4 \cos(k)^2 + 16 C_1^5 e^{1k} C_4 \cos(k)^4 - 8 C_1^3 e^{1k} C_4^3 \cos(k)^2 - 4 C_1^5 e^{1k} C_4 \cos(k)^2 - 2 C_2 e^{21k} C_4^2 C_1 - 2 C_1^2 e^{1k} C_3 C_4^2 - 2 C_4 e^{21k} C_3 C_1 + 16 C_1^5 e^{31k} \rho \cos(k)^2 - 48 \\
 & C_1^5 \cos(k)^4 \rho e^{31k} - 4 I C_1^5 e^{31k} \rho \cos(k)^2 + 96 C_1^6 \cos(k)^5 e^{31k} + 16 C_1^6 \cos(k)^2 e^{21k} - 2 C_1^4 C_3^2 e^{21k} - 2 C_2^2 e^{41k} C_1^4 - 4 I C_1^3 \cos(k) e^{21k} \theta \rho C_4^2 + I C_1^3 C_2 C_4 \rho \theta e^{21k} + 2 I C_2 C_1^2 C_4 \rho \theta e^{31k} \\
 & - 2 I \rho^2 \theta C_4^2 C_1^2 \cos(k) e^{31k} - 2 I C_1^3 \cos(k) C_2 C_4 \rho e^{31k} + 8 I C_2^2 \rho \theta C_1^3 \cos(k)^2 e^{31k} - 4 I C_1^4 C_4 \rho \theta \cos(k)^2 e^{21k} - 32 I C_1^5 \cos(k)^5 e^{21k} \rho + 16 I \rho^2 e^{21k} C_1^4 \cos(k)^4 - 2 I \\
 & C_1^3 e^{1k} C_2 C_4 \rho \theta \cos(k) - 4 I C_2 e^{21k} C_1^2 C_4^2 \rho \theta \cos(k) + 2 I C_1^4 e^{31k} \theta \rho C_4 \cos(k) + 4 I C_4 e^{41k} \rho \theta C_1^4 \cos(k)^2 - 2 I C_2^2 e^{41k} \rho \theta C_1^3 \cos(k) - I C_1^3 e^{41k} C_2 C_4 \rho \theta - 2 I C_2 C_1^2 C_4^2 \rho e^{31k} - 2 I C_2^2 \rho \\
 & C_1^3 e^{31k} - I C_1^3 C_2 C_4 \rho e^{21k} - I C_1^2 C_4^2 \rho \theta e^{21k} - I C_4^2 \rho \theta C_1 e^{31k} + I C_1^4 \theta \rho C_4 e^{21k} - 12 I C_1^3 \cos(k)^2 C_4^2 \rho e^{31k} + 4 I \rho^2 C_1^4 \cos(k) \theta e^{31k} + 4 I \rho^2 C_4^2 C_1^2 \cos(k) e^{31k} + 4 I C_1^5 \cos(k) \rho \theta e^{21k} \\
 & + 2 I C_4 C_1^4 \cos(k) \rho e^{31k} + 16 I C_1^5 \rho \cos(k) \theta e^{31k} - 8 I \rho^2 \theta C_1^4 \cos(k)^3 e^{31k} - 8 I C_4 \rho C_1^4 \cos(k)^3 e^{31k} + 2 I C_4^3 \rho C_1^2 \cos(k) e^{31k} - 8 I C_2^2 \rho C_1^3 \cos(k)^2 e^{31k} - 4 I \\
 & C_1^4 C_4 \rho \cos(k)^2 e^{21k} + 2 I C_1^3 e^{31k} C_4^2 \rho \theta + 2 I C_4^2 e^{21k} C_1^3 \cos(k) \rho - 2 C_1^4 e^{51k} \cos(k) C_4^2 - 2 C_2^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k) - 24 C_2^2 C_1^4 \cos(k)^3 e^{31k} + 8 C_2^2 C_1^4 \cos(k) e^{31k} - 16 C_1^5 C_4 \cos(k)^3 e^{21k} + 16 \\
 & C_1^4 \cos(k)^2 e^{41k} C_4^2 + 4 C_1^4 \cos(k)^2 e^{41k} C_3^2 + 2 C_1^5 C_4 \cos(k) e^{21k} + 12 C_2^2 e^{41k} C_1^4 \cos(k)^2 + 4 C_1^3 C_4^3 \cos(k) e^{21k} - 48 C_1^6 \cos(k)^4 e^{41k} + 8 C_1^6 \cos(k)^3 e^{51k} + 4 C_1^4 \cos(k)^2 e^{41k} \theta \rho^2 - 4 \\
 & C_1^4 \cos(k)^2 e^{41k} \theta^2 \rho^2 - I C_4 e^{41k} \theta \rho C_1^4 + I C_4^3 e^{41k} \rho \theta C_1^2 + I C_1^3 e^{41k} C_2 C_4 \rho + I \rho^2 e^{41k} C_4^2 \theta C_1^2 + 4 I C_4 e^{41k} \rho C_1^4 \cos(k)^2 - 2 I C_4 e^{51k} \theta \rho C_1^4 \cos(k) + 4 I C_2 e^{21k} C_1^2 C_4^2 \rho \cos(k) + 2 I \\
 & C_2^2 e^{41k} \rho C_1^3 \cos(k) + 4 I C_2^2 e^{21k} \rho \theta C_1^3 \cos(k) + 2 I C_1^3 e^{1k} C_2 C_4 \rho \cos(k) + 2 I C_1^3 \cos(k) e^{41k} C_4^2 \rho - 16 I C_1^5 \cos(k)^3 e^{41k} \rho \theta + 8 I \rho^2 e^{41k} \theta C_1^4 \cos(k)^2 - 8 I C_2^2 e^{21k} \rho \theta C_1^3 \cos(k)^3 - 8 I \\
 & C_1^5 e^{1k} \rho \cos(k)^2 - 8 I \rho^2 e^{21k} C_1^4 \cos(k)^2 + 16 I C_1^5 e^{1k} \rho \cos(k)^4 - C_4 e^{31k} \theta \rho^2 C_1^3 - C_1^3 e^{31k} C_2 C_3 C_4 + C_1^3 e^{1k} \theta \rho^2 C_4 - C_1^3 e^{1k} \theta^2 \rho^2 C_4 + C_1^3 e^{1k} C_2 C_3 C_4 + C_1^4 e^{31k} C_2 C_4 + C_4^2 e^{21k} \theta \rho^2 C_1^2 \\
 & - C_4^2 e^{21k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 + 4 C_4 \theta \rho^2 C_1^3 \cos(k)^2 e^{31k} - 4 C_4 \theta^2 \rho^2 C_1^3 \cos(k)^2 e^{31k} + 2 C_4 \theta \rho^2 C_1^3 \cos(k) e^{21k} - 2 C_4 \theta^2 \rho^2 C_1^3 \cos(k) e^{21k} - 2 C_4^2 \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k) e^{31k} + 2 \rho^2 \theta C_4^2 C_1^2 \cos(k) e^{31k} - 4 \\
 & C_1^3 e^{1k} \theta \rho^2 C_4 \cos(k)^2 + 4 C_4^2 e^{21k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k)^2 - 4 C_4^2 e^{21k} \theta \rho^2 C_1^2 \cos(k)^2 - 4 \rho e^{21k} C_3 C_2^2 C_1^2 \cos(k) + 2 I C_1^5 \cos(k) e^{41k} \theta \rho + C_2^2 e^{21k} C_4^2 C_1^2 - C_1^2 e^{1k} C_2 C_4^2 + C_1^3 e^{1k} C_3 C_4 - C_1^3 e^{31k} C_4^2 \\
 & + C_4^2 e^{21k} C_3^2 C_1^2 - C_4^4 e^{41k} C_1^2 - C_1^4 e^{51k} C_2 C_4 + 2 C_4 e^{41k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k) - 2 C_4 e^{41k} \theta \rho^2 C_1^2 \cos(k) + 4 C_1^3 e^{1k} \theta^2 \rho^2 C_4 \cos(k)^2 + \rho e^{51k} C_4^2 C_1^2 - \rho e^{31k} C_4^2 C_1 - C_4 e^{31k} C_2^2 C_1^2 + 16 \\
 & C_1^4 \cos(k)^3 \theta^2 \rho^2 e^{31k} + 16 \rho C_4^2 C_1^2 \cos(k)^2 e^{31k} + 8 \rho C_2^2 C_1^2 \cos(k)^2 e^{31k} + 8 \rho^3 \theta C_1^2 \cos(k)^2 e^{31k} - 8 \rho^3 \theta^2 C_1^2 \cos(k)^2 e^{31k} + 4 C_1^3 C_2^2 C_4 \cos(k)^2 e^{31k} - 8 C_2 C_1^2 C_4^2 \cos(k) e^{31k} + 2 C_2^2 C_4^2 \\
 & C_1^2 \cos(k) e^{31k} - 4 C_1^4 \cos(k)^2 C_2 C_4 e^{31k} + 2 \rho C_3 C_4^2 C_1^2 e^{31k} + C_4 \theta^2 \rho^2 C_1^2 e^{31k} + I C_1^3 C_4^2 \rho e^{21k} + I C_4^2 \rho C_1 e^{31k} + 2 C_1^3 C_2 C_4 \cos(k) e^{21k} - 4 C_1^4 C_2 C_4 \cos(k) e^{21k} + 2 C_4^2 C_3^2 C_1^2 \cos(k) e^{31k} \\
 & - 4 C_1^3 \cos(k) C_3 C_4^2 e^{31k} - 16 C_1^4 \cos(k)^3 \theta \rho^2 e^{31k} + 32 I C_1^5 \cos(k)^4 \rho e^{31k} - 16 I \rho^2 C_1^4 \cos(k)^3 e^{31k} + 4 I \rho^2 C_1^4 \cos(k) e^{31k} + 4 I C_1^5 \cos(k) \rho e^{21k} + 2 I C_2^2 \rho C_1^3 e^{31k} + 4 C_1^4 \cos(k) e^{41k} C_2 C_4 \\
 & - 2 \rho e^{41k} C_3^2 C_1^3 \cos(k) - 6 \rho e^{41k} C_4^2 C_1^3 \cos(k) + 2 \rho^3 e^{41k} \theta^2 C_1^3 \cos(k) - 2 \rho^3 e^{41k} \theta C_1^3 \cos(k) - 2 C_1^4 e^{31k} \theta^2 \rho^2 \cos(k) - C_1^2 e^{21k} C_4^4 - C_4^2 e^{31k} C_1 + 2 C_1^4 e^{31k} \theta \rho^2 \cos(k) - 2 C_4 e^{41k} C_3^2 \\
 & C_1^3 \cos(k) + 2 C_2 e^{21k} C_3 C_4^2 C_1^2 + C_1 e^{1k} C_4^2 + C_1^4 e^{41k} C_4^2 + C_4^3 e^{51k} C_1^3 - 16 C_1^4 \cos(k)^4 e^{21k} \theta^2 \rho^2 + 16 C_1^4 \cos(k)^4 e^{21k} \theta \rho^2 - 16 \rho e^{21k} C_4^2 C_1^3 \cos(k)^3 - 8 \rho e^{21k} C_3^2 C_1^3 \cos(k)^3 + 2 \rho e^{21k} \\
 & C_4^2 C_1 \cos(k) + 8 \rho^3 e^{21k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^3 - 8 \rho^3 e^{21k} \theta C_1^3 \cos(k)^3 + 8 C_1^3 \cos(k)^2 e^{21k} C_3 C_4^2 + 2 \rho e^{21k} C_1^3 \cos(k) C_4^2 + 4 \rho e^{21k} C_3^2 C_1^3 \cos(k) + 4 \rho^3 e^{21k} \theta C_1^3 \cos(k) - 4 \rho^3 e^{21k} \theta^2 C_1^3 \cos(k) \\
 & + 8 C_1^4 e^{1k} \theta^2 \rho^2 \cos(k)^3 - 8 C_1^4 e^{1k} \theta \rho^2 \cos(k)^3 + 4 C_1^4 e^{1k} \theta \rho^2 \cos(k) - 4 C_1^4 e^{1k} \theta^2 \rho^2 \cos(k) - 4 C_1^3 e^{1k} C_3 C_2^2 \cos(k) + 8 C_2 e^{21k} C_1^2 C_4^2 \cos(k)^2 - 4 C_2^2 e^{21k} C_4^2 C_1^2 \cos(k)^2 - 4 C_4^2 e^{21k} C_3^2 \\
 & C_1^2 \cos(k)^2 - 4 C_1^3 e^{1k} C_2^2 C_4 \cos(k)^2 + 4 C_1^4 e^{1k} C_2 C_4 \cos(k)^2 + 2 I C_1^3 \cos(k) C_2 C_4 \rho \theta e^{31k} + 16 I C_1^3 \cos(k)^3 e^{21k} C_4^2 \rho - 4 I \rho^2 e^{21k} C_4^2 C_1^2 \cos(k)^2 - 2 I C_4^4 e^{21k} \rho C_1 \cos(k) + 8 I C_2^2 e^{21k} \rho \\
 & C_1^3 \cos(k)^3 - 4 I C_1^3 e^{1k} C_2^2 \rho \cos(k)^2 + I \rho^2 e^{21k} \theta C_4^2 C_1^2 + I C_1^3 e^{1k} \theta \rho C_4^2 - I C_4^3 e^{41k} \rho C_1^2 - 2 I \rho^2 e^{41k} \theta C_1^4 - I \rho^2 e^{41k} C_4^2 C_1^2 - 2 I C_1^5 e^{31k} \theta \rho - I C_1^3 e^{31k} C_4^2 \rho - 8 I C_1^5 \cos(k)^3 e^{41k} \rho + 4 I \\
 & C_1^5 \cos(k)^2 e^{51k} \theta \rho + 4 I \rho^2 e^{41k} C_1^4 \cos(k)^2 - 2 I \rho^2 e^{51k} \theta C_1^4 \cos(k) - 4 I C_2^2 e^{21k} \rho C_1^3 \cos(k) + 8 I C_1^4 e^{1k} C_4 \rho \cos(k)^3 - 2 I C_1^2 e^{1k} C_4^2 \rho \cos(k) - 2 I C_1^4 e^{1k} \cos(k) C_4 \rho \Big/ \left(2 I C_1^3 \cos(k) e^{61k} \right. \\
 & C_2^2 \rho \theta - 8 I C_2^2 e^{51k} \rho \theta C_1^3 \cos(k)^2 + 2 I C_2^2 e^{61k} \rho \theta C_1^3 \cos(k) - 2 I C_2 e^{51k} C_1^2 C_4^2 \rho \theta + 4 I C_2 e^{41k} C_1^2 C_4^2 \rho \theta \cos(k) + 8 I C_1^5 \cos(k)^2 e^{51k} \rho \theta - 8 I \rho^3 e^{51k} \theta C_1^3 \cos(k)^2 + 2 I \rho^3 e^{61k} \theta C_1^3 \cos(k) \\
 & + 8 I \rho^3 e^{51k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^2 - 2 I C_2^2 e^{61k} \rho C_1^3 \cos(k) - 2 I \rho^3 e^{61k} \theta^2 C_1^3 \cos(k) - 8 I \rho e^{51k} C_3^2 C_1^3 \cos(k)^2 + 2 I \rho e^{61k} C_3^2 C_1^3 \cos(k) - 2 I \rho e^{51k} C_3 C_4^2 C_1^2 - 2 I C_1^3 e^{51k} \theta \rho C_4^2 - I C_1^3 e^{71k} C_4^2 \rho \theta \\
 & \left. + 2 I C_2 e^{51k} C_1^2 C_4^2 \rho + 2 I C_2^2 e^{51k} \rho \theta C_1^3 + I C_4^4 e^{51k} \rho \theta C_1 + 8 I C_2^2 e^{51k} \rho C_1^3 \cos(k)^2 - 12 I C_1^5 \cos(k)^2 e^{71k} \theta \rho - 8 I C_1^5 \cos(k) e^{61k} \theta \rho - 16 I C_1^5 \cos(k)^4 e^{51k} \rho \theta + 24 I C_1^5 \cos(k)^3 e^{61k} \rho \theta \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_1 := & \left(C_1^2 e^{ik} (C_2 C_4^3 + C_3 e^{31k} C_4^2 C_1 + C_3 e^{21k} C_1^2 C_4 - C_1^2 e^{41k} C_3 C_4 - 2 C_2^2 \cos(k) C_4^2 e^{21k} - 4 C_4 C_1^3 \cos(k)^2 e^{21k} + C_2^2 e^{21k} C_1 C_4 + 2 C_4 e^{31k} C_1^3 \cos(k) - 2 C_1^2 e^{31k} C_3 C_2 + C_2 e^{31k} C_1 C_4^2 \right. \\
 & - C_1 C_3 C_4^2 e^{1k} - C_2 C_1 C_4^2 e^{1k} - 2 C_4 C_1^3 \cos(k) e^{1k} + 2 C_1^2 C_3 C_2 e^{1k} + 2 C_1 \cos(k) C_3 C_4^2 - C_2 C_3 C_4 C_1 + 2 C_2 C_1 C_4^2 \cos(k) + 8 C_1^2 \cos(k)^3 C_3 C_2 - 4 C_1^2 \cos(k) C_3 C_2 + 4 C_1^2 \cos(k)^2 C_3 C_4 \\
 & + \rho \theta \rho C_1 C_4 + IC_1 \theta \rho C_4^2 + 2I\rho C_3 C_1 C_4 \cos(k) e^{21k} - C_2 C_4^3 e^{21k} + 2 C_1^2 \cos(k) C_4^2 + 4 C_4 C_1^3 \cos(k)^2 - C_2^2 C_1 C_4 - I\rho e^{31k} C_3 C_1 C_4 + 2IC_4 C_1^2 \cos(k) \rho e^{21k} - 2IC_1^2 \cos(k) \theta \rho C_4 e^{21k} \\
 & - 4 C_2 C_3 C_4 C_1 \cos(k)^2 e^{21k} + 2 C_2 e^{31k} C_3 C_4 C_1 \cos(k) + I\rho C_3 C_1 C_4 e^{1k} - 2 C_2 C_3 C_4 C_1 \cos(k) e^{1k} - 2I\rho C_3 C_1 C_4 \cos(k) + IC_1^2 e^{31k} \theta \rho C_4 - IC_1 \theta \rho C_4^2 e^{21k} - IC_1^2 \theta \rho C_4 e^{1k} - 2 \\
 & C_1^2 e^{41k} C_3 C_2 \cos(k) + C_1 e^{21k} C_2 C_3 C_4 - 2 C_2 C_1 C_4^2 \cos(k) e^{21k} - 8 C_1^2 \cos(k)^3 C_3 C_2 e^{21k} - 4 C_1^2 \cos(k)^2 C_3 C_4 e^{21k} + 6 C_2 e^{21k} C_3 C_1^2 \cos(k) - \rho \theta \rho C_1 C_4 e^{21k} - 2 C_1 \cos(k) C_3 C_4^2 e^{21k} \\
 & + 8 C_1^2 \cos(k)^2 e^{31k} C_3 C_2 + 4 C_1^2 \cos(k) e^{31k} C_3 C_4 - 8 C_1^2 C_3 C_2 \cos(k)^2 e^{1k} - 4 C_1^2 \cos(k) C_3 C_4 e^{1k} - 2IC_4 C_1^2 \cos(k) \rho + 2IC_1^2 \cos(k) \theta \rho C_4 + 4 C_2 C_3 C_4 C_1 \cos(k)^2 \left. \right) / \left(2I \right. \\
 & C_1^3 \cos(k) e^{61k} C_4^2 \rho \theta - 8IC_2^2 e^{51k} \rho \theta C_1^3 \cos(k)^2 + 2IC_2^2 e^{61k} \rho \theta C_1^3 \cos(k) - 2IC_2 e^{51k} C_1^2 C_4^2 \rho \theta + 4IC_2 e^{41k} C_1^2 C_4^2 \rho \theta \cos(k) + 8IC_1^5 \cos(k)^2 e^{51k} \rho \theta - 8I\rho^3 e^{51k} \theta C_1^3 \cos(k)^2 \\
 & + 2I\rho^3 e^{61k} \theta C_1^3 \cos(k) + 8I\rho^3 e^{51k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^2 - 2IC_2^2 e^{61k} \rho C_1^3 \cos(k) - 2I\rho^3 e^{61k} \theta^2 C_1^3 \cos(k) - 8I\rho e^{51k} C_2^3 C_1^3 \cos(k)^2 + 2I\rho e^{61k} C_2^3 C_1^3 \cos(k) - 2I\rho e^{51k} C_3 C_4^2 C_1^2 - 2I \\
 & C_1^2 e^{51k} \theta \rho C_4^2 - IC_1^2 e^{71k} C_4^2 \rho \theta + 2IC_2 e^{51k} C_1^2 C_4^2 \rho + 2IC_2^2 e^{51k} \rho \theta C_1^2 + IC_4^4 e^{51k} \rho \theta C_1 + 8IC_2^2 e^{51k} \rho C_1^2 \cos(k)^2 - 12IC_1^5 \cos(k)^2 e^{71k} \theta \rho - 8IC_1^5 \cos(k) e^{61k} \theta \rho - 16I \left[\right. \\
 & C_1^5 \cos(k)^4 e^{51k} \rho \theta + 24IC_1^5 \cos(k)^3 e^{61k} \rho \theta + 8C_1^4 \cos(k) e^{71k} C_4^2 - 8C_1^4 \cos(k) e^{51k} C_3^2 - 8C_1^2 \cos(k) e^{51k} C_4^4 + 64C_1^4 \cos(k)^3 e^{51k} C_4^2 + 24C_1^4 \cos(k)^3 e^{51k} C_3^2 - 12C_1^4 \cos(k)^2 e^{61k} C_3^2 \\
 & - 32C_1^4 \cos(k)^2 e^{61k} C_4^2 - 4C_1^4 e^{51k} \cos(k) C_4^2 + 2C_1^4 e^{71k} C_3^2 \cos(k) + 2C_2^2 e^{71k} C_1^4 \cos(k) + 24C_2^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k)^3 - 12C_2^2 e^{61k} C_1^4 \cos(k)^2 - 8C_2^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k) - 16\rho^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k)^3 \\
 & + 4\rho^2 e^{61k} C_1^4 \cos(k)^2 + 4\rho^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k) - C_2^2 e^{41k} C_4^2 C_1^2 + 2C_2 e^{41k} C_4^4 C_1 - C_4^2 e^{41k} C_3^2 C_1^2 + 2C_4^4 e^{41k} C_3 C_1 + 8C_1^4 \cos(k)^2 e^{41k} C_4^2 + 8C_1^4 \cos(k)^2 e^{41k} C_3^2 + 8C_2^2 e^{41k} C_1^4 \cos(k)^2 \\
 & - 8\rho^2 e^{41k} C_1^4 \cos(k)^2 + 16\rho^2 e^{41k} C_1^4 \cos(k)^4 - 48C_1^4 \cos(k)^4 e^{41k} C_4^2 - 16C_1^4 \cos(k)^4 e^{41k} C_3^2 + 12C_1^2 \cos(k)^2 e^{41k} C_4^4 - 16C_2^2 e^{41k} C_1^4 \cos(k)^4 - 2C_1^2 e^{61k} C_3 C_4^2 - 2C_1^2 e^{61k} \theta^2 \rho^2 \\
 & - 2C_2 e^{61k} C_1^3 C_4^2 - C_1^2 e^{81k} C_4^2 - 32C_1^6 \cos(k)^4 e^{41k} + 64C_1^6 \cos(k)^6 e^{41k} + 4C_1^6 e^{81k} \cos(k)^2 - 24C_1^6 \cos(k)^2 e^{61k} + 4C_1^6 e^{71k} \cos(k) - 32C_1^6 \cos(k)^3 e^{71k} - 128C_1^6 \cos(k)^5 e^{51k} + 96 \\
 & C_1^6 \cos(k)^4 e^{61k} + 48C_1^6 \cos(k)^3 e^{51k} + 2C_1^4 e^{61k} C_3^2 + 2C_1^2 e^{61k} C_4^4 + 2C_2^2 e^{61k} C_1^4 - 4I\rho e^{41k} C_2^3 C_1^3 \cos(k) - 4I\rho^3 e^{41k} \theta C_1^3 \cos(k) + 4I\rho^3 e^{41k} \theta^2 C_1^3 \cos(k) + 2IC_1^5 e^{81k} \theta \rho \cos(k) + 4I \\
 & C_2^2 e^{41k} \rho C_1^3 \cos(k) - 4\rho^2 e^{51k} \theta C_4^2 C_1^2 \cos(k) + 2C_2^2 e^{51k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k) - 8I\rho^3 e^{41k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^3 - 8IC_2^2 e^{41k} \rho C_1^3 \cos(k)^3 + 8I\rho e^{41k} C_2^2 C_1^3 \cos(k)^3 + 8I\rho^3 e^{41k} \theta C_1^3 \cos(k)^3 - \rho^2 e^{61k} \\
 & C_4^2 C_1^2 - 4C_4^2 e^{41k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k)^2 + 4C_4^2 e^{41k} \theta \rho^2 C_1^2 \cos(k)^2 + \rho^2 e^{61k} C_4^2 \theta C_1^2 + 2I\rho e^{51k} C_2^3 C_1^3 + 2I\rho^3 e^{51k} \theta C_1^3 - 2I\rho^3 e^{51k} \theta^2 C_1^3 + 2IC_1^5 e^{71k} \theta \rho - 2IC_2^2 e^{51k} \rho C_1^3 + 2I
 \end{aligned}$$

Annexe 2 : Expression des Coefficients du modèle 3

$$\begin{aligned}
 T_3 := & -\frac{1}{2} \left(-4 C_4^6 e^{71k} \cos(k) - 2 C_1^6 e^{101k} C_4^4 - 192 C_1^6 \cos(k)^5 e^{71k} - 16 \rho^2 e^{81k} \theta C_1^2 \cos(k)^3 C_4^2 + 8 \rho^2 e^{81k} \theta C_1^2 \cos(k) C_4^2 - 128 C_4^6 e^{81k} C_2^3 \cos(k)^4 + 48 C_2 e^{81k} C_1^3 \cos(k)^2 C_4^2 - 8 \right. \\
 & C_4^6 e^{81k} C_3 C_1 \cos(k) + 16 C_4^6 e^{81k} C_2 C_1 \cos(k)^2 + 4 C_1^4 \cos(k)^2 e^{81k} \theta^2 \rho^2 + 16 C_1^2 \cos(k)^2 e^{71k} C_4^4 - 8 \rho^2 e^{71k} C_1^4 \cos(k)^3 - 8 C_1^4 \cos(k)^2 e^{111k} C_4^2 - 8 C_1^4 \cos(k) e^{101k} C_4^2 + 12 C_1^2 \cos(k) e^{91k} \\
 & C_4^4 - 96 C_1^4 \cos(k)^4 e^{91k} C_4^2 + 48 C_1^4 \cos(k)^3 e^{101k} C_4^2 + 32 C_1^4 \cos(k)^2 e^{91k} C_4^2 + 32 C_1^2 \cos(k)^2 e^{91k} C_4^4 + 56 C_1^4 \cos(k)^3 e^{71k} C_4^2 + 24 C_1^4 \cos(k)^3 e^{71k} C_3^2 - 12 C_1^2 e^{101k} C_4^4 \cos(k) + 2 \\
 & C_1^4 e^{91k} \cos(k) C_4^2 + 24 C_2^2 e^{71k} C_1^4 \cos(k)^3 + 4 C_2 e^{101k} C_1^2 C_4^2 + 2 C_4^6 e^{81k} - 2 C_2 e^{81k} C_1^4 C_4 - 24 C_1^2 \cos(k)^2 e^{81k} C_4^4 - 4 C_2^2 e^{81k} C_1^4 \cos(k)^2 - 32 C_1^2 \cos(k)^3 e^{81k} C_4^4 - 16 C_1^4 \cos(k)^2 e^{81k} C_4^2 \\
 & - 4 C_1^4 \cos(k)^2 e^{81k} C_3^2 - 2 C_4^6 e^{81k} C_3 C_1 + 4 C_1^2 \cos(k) e^{81k} C_4^4 + 64 C_1^4 \cos(k)^5 e^{81k} C_4^2 - 32 C_1^4 \cos(k)^3 e^{81k} C_4^4 + 61 C_2 e^{61k} \theta \rho C_4^2 C_1^2 \cos(k) + 81 C_2 e^{61k} \theta \rho C_4^2 C_1^2 \cos(k)^2 + 41 C_2 e^{41k} \\
 & C_1^2 C_4^2 \rho \theta \cos(k) + 121 C_1^2 \cos(k)^2 e^{71k} C_4 \rho \theta C_2 + 161 C_1^3 \cos(k)^4 e^{51k} C_4 \rho \theta C_2 - 241 C_1^3 \cos(k)^3 e^{61k} C_4 \rho \theta C_2 - 81 C_1^3 \cos(k)^2 e^{51k} C_4 \rho \theta C_2 + 81 C_1^3 \cos(k) e^{61k} C_4 \rho \theta C_2 - 21 \\
 & C_1^3 e^{81k} C_4 \rho \theta \cos(k) C_2 - 81 C_2 e^{51k} \theta \rho C_4^2 C_1^2 \cos(k)^2 - 321 C_2 e^{51k} \theta \rho C_4^2 C_1^2 \cos(k)^3 + 8 C_2 e^{81k} C_3^2 C_1^2 \cos(k) + 64 C_1^6 \cos(k)^4 e^{81k} + 4 C_4^6 e^{81k} \cos(k) - 8 C_1^6 \cos(k)^3 e^{91k} + 81 \\
 & C_1^3 \cos(k) e^{91k} \rho \theta C_4^2 - 16 C_2^2 e^{81k} C_3^2 C_1^2 \cos(k)^3 - 2 C_4^6 e^{71k} \theta \rho^3 C_1^2 \cos(k) + 16 \rho^2 e^{91k} \theta C_1^2 \cos(k)^2 C_4^2 - 4 \rho^2 e^{91k} \theta C_1^2 C_4^2 + 4 C_2^2 e^{111k} C_2^3 \cos(k) - 4 C_4^6 e^{91k} C_2 C_1 \cos(k) \\
 & - 4 \rho^2 e^{101k} \theta C_1^2 \cos(k) C_4^2 - 21 C_4^6 e^{91k} C_1 \rho \theta + 8 C_2 e^{71k} C_4^2 C_1^2 \cos(k)^2 - 16 C_4^6 e^{71k} C_2 C_1 \cos(k)^3 - 24 C_1^4 \cos(k)^3 e^{71k} \theta^2 \rho^2 + 8 C_1^4 \cos(k)^3 e^{71k} \theta \rho^2 - 32 C_2 e^{71k} C_1^3 \cos(k)^3 C_4^2 \\
 & - 24 C_2 e^{91k} C_1^3 \cos(k) C_4^2 + 4 C_2 e^{71k} C_4^2 C_1 \cos(k) + 4 C_4^6 e^{71k} C_3 C_1 \cos(k) + 64 C_4^6 e^{71k} C_2 C_1^2 \cos(k)^5 + 96 C_4^6 e^{91k} C_2 C_1^2 \cos(k)^3 - 32 C_4^6 e^{101k} C_2 C_1^2 \cos(k)^2 - 48 C_2 e^{61k} C_1^3 \cos(k)^3 C_4^2 \\
 & + 12 C_1^4 \cos(k) e^{61k} C_3^2 - 8 C_1^4 \cos(k) e^{51k} C_3^2 - 10 C_1^2 \cos(k) e^{51k} C_4^4 - 2 C_1 \cos(k) e^{61k} C_4^5 + 2 C_1 \cos(k) e^{51k} C_4^5 - 32 C_1^5 \cos(k)^5 e^{61k} C_4 + 48 C_1^5 \cos(k)^4 e^{71k} C_4 + 16 C_1^5 \cos(k)^3 e^{61k} C_4 \\
 & + 208 C_1^4 \cos(k)^4 e^{51k} C_4^2 + 64 C_1^4 \cos(k)^5 e^{51k} C_4^2 - 48 C_1^4 \cos(k)^4 e^{41k} C_4^2 - 120 C_1^4 \cos(k)^3 e^{61k} C_4^2 - 96 C_1^4 \cos(k)^4 e^{61k} C_4^2 + 64 C_1^4 \cos(k)^3 e^{51k} C_4^2 + 16 C_1^3 \cos(k)^3 e^{61k} C_4^3 - 16 \\
 & C_1^5 \cos(k)^2 e^{71k} C_4 - 32 C_1^4 \cos(k)^2 e^{51k} C_4^2 + 8 C_1^4 \cos(k)^2 e^{41k} C_4^2 - 4 \rho^2 e^{61k} C_1^4 \cos(k)^2 - 48 \rho^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k)^4 - 32 \rho^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k)^5 + 16 \rho^2 e^{41k} C_1^4 \cos(k)^4 + 24 \rho^2 e^{61k} C_1^4 \cos(k)^3 \\
 & - 8 C_1^2 \cos(k)^3 e^{51k} C_4^4 + 8 C_1^2 \cos(k)^2 e^{61k} C_4^4 + 28 C_1^4 \cos(k)^2 e^{71k} C_4^2 - 36 C_1^4 \cos(k)^2 e^{61k} C_4^2 + 12 C_1^2 \cos(k)^2 e^{41k} C_4^4 + 6 C_1^3 \cos(k) e^{81k} C_4^3 + 10 C_1^4 \cos(k) e^{71k} C_4^2 - 6 C_4^4 e^{41k} C_1^2 \cos(k) \\
 & + 2 C_2^2 e^{61k} C_4^4 \cos(k) + 4 C_1^5 e^{81k} \cos(k) C_4 + 8 C_1^4 e^{61k} \cos(k) C_4^2 - 4 C_1^4 e^{51k} \cos(k) C_4^2 - 2 C_1^3 e^{61k} \cos(k) C_4^3 - 2 C_1^3 e^{61k} C_3 C_4^2 + 2 C_1^4 e^{71k} \theta^2 \rho^2 - 2 C_1^4 e^{61k} \theta^2 \rho^2 - 2 C_1^4 e^{81k} C_3^2 \cos(k) \\
 & - 2 C_1^4 e^{71k} C_3^2 \cos(k) - 2 C_1^2 e^{71k} C_4^4 \cos(k) - 2 C_1^4 e^{81k} C_3^2 \cos(k) - 8 C_2^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k) + 8 C_2^2 e^{41k} C_1^4 \cos(k)^2 + 4 C_2^2 e^{61k} C_1^4 \cos(k)^2 + 64 C_2^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k)^4 + 32 \\
 & + C_4^6 e^{91k} C_2 C_3 C_1^2 \cos(k) - \rho^2 e^{101k} \theta C_1^2 \cos(k) C_4^2 + 41 \rho e^{71k} C_4^4 C_1 \cos(k)^2 + 161 C_1^5 \cos(k)^2 e^{111k} \theta \rho + 121 C_1^5 \cos(k) e^{101k} \theta \rho - 81 C_1^3 \cos(k)^4 e^{71k} C_4^2 \rho - 21 C_1^3 \cos(k)^2 e^{91k} C_4^2 \rho \\
 & - 241 C_1^3 \cos(k)^2 e^{91k} \rho \theta + 641 C_1^5 \cos(k)^4 e^{91k} \rho \theta + 121 \rho^3 e^{91k} \theta C_1^3 \cos(k)^2 - 81 \rho^3 e^{71k} \theta C_1^3 \cos(k)^2 - 121 C_2^3 e^{91k} \rho C_1^3 \cos(k)^2 + 81 C_2^2 e^{71k} \rho C_1^3 \cos(k)^2 + 1 \rho e^{91k} C_4^4 C_1 \cos(k) + 1 \\
 & C_1^5 e^{111k} C_4^2 \rho \theta + 1 C_1^3 e^{101k} \rho \theta C_4^2 + 21 C_2^2 e^{101k} \rho C_1^2 \cos(k) - 161 C_2^2 e^{71k} \rho C_1^3 \cos(k)^4 + 121 \rho e^{71k} C_4^4 C_1 \cos(k)^3 - 41 \rho e^{71k} C_4^4 C_1 \cos(k) + 31 C_1^3 e^{91k} \theta \rho C_4^2 - 31 C_2 e^{91k} \rho C_1^2 C_4^2 - 21 \\
 & C_2^2 e^{91k} \rho \theta C_1^3 - 21 C_4^6 e^{91k} C_1 \rho \theta + 21 \rho e^{91k} C_3 C_4^2 C_1^2 + 41 \rho e^{71k} C_4^2 C_1^2 \cos(k)^2 + 161 \rho e^{71k} C_3^2 C_1^2 \cos(k)^4 + 121 \rho e^{91k} C_2^3 C_1^2 \cos(k)^2 - 81 \rho e^{71k} C_2^3 C_1^2 \cos(k)^2 - 21 \rho e^{101k} C_2^3 C_1^2 \cos(k)^4 \\
 & - 481 C_1^5 \cos(k)^3 e^{101k} \rho \theta - 21 \rho^3 e^{101k} \theta C_1^3 \cos(k) - 161 \rho^3 e^{71k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^4 - 121 \rho^3 e^{91k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^2 + 81 \rho^3 e^{71k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^2 + 21 \rho^3 e^{101k} \theta^2 C_1^3 \cos(k) + 161 \rho^3 e^{71k} \theta^3 C_1^3 \cos(k)^4 \\
 & - 81 C_2 e^{61k} \rho \theta C_1^2 \cos(k)^4 C_4^2 + 41 C_2 e^{61k} \rho \theta C_1^2 \cos(k)^2 C_4^2 - 21 C_4^6 e^{91k} \rho \theta C_1 \cos(k) + 81 C_4^6 e^{71k} \rho \theta C_1 \cos(k) + 61 C_4^6 e^{91k} C_2 \rho C_1^2 \cos(k)^2 - 31 C_1^3 \cos(k) e^{101k} C_4^2 \rho \theta - 81 \\
 & C_1^3 \cos(k) e^{91k} \rho \theta C_4^2 + 41 C_1^3 \cos(k)^2 e^{71k} \theta \rho C_4^2 + 1 \rho e^{91k} C_3 C_4^2 C_1^2 \cos(k) C_4^2 + 1 C_1^3 e^{111k} \rho \theta \cos(k) C_4^2 + 801 C_1^3 \cos(k)^5 e^{71k} \rho \theta C_4^2 + 401 C_1^3 \cos(k)^3 e^{91k} \rho \theta C_4^2 - 10 C_1^3 \cos(k)^2 e^{101k} \rho \theta C_4^2 \\
 & + 81 \rho e^{71k} C_3 C_4^2 C_1^2 \cos(k)^2 + 121 \rho e^{71k} C_3 C_4^2 \cos(k)^3 C_4^2 + 31 C_2 e^{91k} \rho \theta C_1^2 C_4^2 - 41 \rho e^{71k} C_3 C_4^2 \cos(k) C_4^2 - 1 C_2 e^{91k} C_4^2 C_2 \rho \cos(k) + 81 C_4^6 e^{71k} C_2 \rho C_1^2 \cos(k)^4 - 1 C_4^6 e^{101k} C_2 \rho \\
 & C_1^2 \cos(k) - 21 C_4^6 e^{71k} \theta \rho C_1 \cos(k)^2 + 41 C_2 e^{71k} \rho C_1^2 \cos(k) C_4^2 - 121 C_2 e^{71k} C_1^2 C_4^2 \rho \cos(k)^3 - 121 C_2 e^{71k} \rho C_1^2 \cos(k)^2 C_4^2 + 161 C_2^2 e^{71k} \rho \theta C_1^3 \cos(k)^4 + 121 C_2^2 e^{91k} \rho \theta C_1^3 \cos(k)^2 \\
 & - 81 C_2^2 e^{71k} \rho \theta C_1^3 \cos(k)^2 - 21 C_2^2 e^{101k} \rho \theta C_1^3 \cos(k) - 241 C_4^6 e^{71k} \rho \theta C_1 \cos(k)^3 - 321 C_2^2 \cos(k)^3 e^{71k} \rho \theta C_4^2 + C_4^6 e^{111k} C_4^2 - 32 C_2 e^{71k} C_4^2 C_1^2 \cos(k)^4 - 8 C_2 e^{91k} C_4^2 C_1^2 \cos(k)^2 \\
 & + 12 C_2 e^{71k} C_4^2 C_1^2 \cos(k)^2 + 4 C_2 e^{71k} C_4^4 C_1 \cos(k)^2 - C_2 e^{81k} C_4^4 C_1 \cos(k) + 12 C_4^6 e^{71k} C_2^3 C_1^2 \cos(k)^3 - 4 C_4^6 e^{71k} C_2 C_1 \cos(k)^3 - 16 C_1^3 \cos(k)^3 e^{71k} C_2 C_4^2 - 32 C_1^3 \cos(k)^4 e^{71k} C_3 C_4^2 \\
 & + 12 C_1^2 \cos(k)^2 e^{71k} C_3 C_4^2 - 8 C_1^3 \cos(k)^2 e^{91k} C_3 C_4^2 + 4 C_1^4 \cos(k)^2 e^{101k} \theta \rho^2 + 32 C_1^4 \cos(k)^5 e^{71k} \theta^2 \rho^2 + 48 C_1^4 \cos(k)^3 e^{91k} \theta^2 \rho^2 - 16 C_1^4 \cos(k)^3 e^{71k} \theta^2 \rho^2 - 16 C_1^4 \cos(k)^2 e^{101k} \theta^2 \rho^2 \\
 & - 32 C_1^4 \cos(k)^5 e^{71k} \theta \rho^2 - 24 C_1^4 \cos(k)^3 e^{91k} \theta \rho^2 + 16 C_1^4 \cos(k)^3 e^{71k} \theta \rho^2 - 12 C_1^4 \cos(k) e^{91k} \theta \rho^2 + 4 C_1^4 \cos(k) e^{91k} \theta \rho^2 - 12 C_1^3 \cos(k) e^{91k} C_3 C_4^2 - 6 \rho^2 e^{91k} C_1^2 C_4^2 \cos(k) \\
 & - 32 \rho^2 e^{71k} C_1^2 \cos(k)^4 C_4^2 - 8 \rho^2 e^{91k} C_1^2 \cos(k)^2 C_4^2 + 12 \rho^2 e^{71k} C_1^2 \cos(k)^2 C_4^2 - 8 \rho^2 e^{71k} C_1^2 C_4^2 \cos(k)^3 + 2 C_4^6 e^{111k} \theta^2 \rho^2 \cos(k) + 8 C_2^2 e^{71k} C_4^2 C_1^2 \cos(k)^3 + 2 C_2^2 e^{91k} C_4^2 C_1^2 \cos(k) - 2 \\
 & C_2^2 e^{71k} C_4^2 C_1^2 \cos(k) - 24 C_2 e^{71k} C_1^3 \cos(k)^3 C_4^2 - 18 C_2 e^{91k} C_1^3 \cos(k) C_4^2 + 6 C_2 e^{71k} C_4^4 C_1 \cos(k) + 16 \rho^2 e^{61k} C_1^2 \cos(k)^5 C_4^2 + 3 C_4^6 e^{91k} C_3^2 C_1^2 \cos(k) - 4 C_4^6 e^{71k} C_3^2 C_1^2 \cos(k) + 8 \\
 & C_4^6 e^{71k} C_3 C_1 \cos(k) + 8 C_4^6 e^{71k} C_3 C_1 \cos(k)^2 + 16 C_4^6 e^{71k} C_2 C_1^2 \cos(k)^3 + 24 C_4^6 e^{91k} C_2 C_1^2 \cos(k)^3 - 8 C_4^6 e^{101k} C_2 C_1^2 \cos(k)^2 + 16 C_2 e^{61k} C_1^3 \cos(k)^5 C_4^2 - 8 C_2 e^{61k} C_1^3 \cos(k)^3 C_4^2 \\
 & - 4 C_2 e^{61k} C_4^4 C_1 \cos(k)^3 + 2 C_2 e^{61k} C_4^4 C_1 \cos(k) - 8 C_4^6 e^{61k} C_3 C_1 \cos(k)^3 + 4 C_4^6 e^{61k} C_3 C_1 \cos(k) + 16 C_1^3 \cos(k)^5 e^{61k} C_3 C_4^2 - 8 C_1^3 \cos(k)^3 e^{61k} C_3 C_4^2 - 8 \rho^2 e^{61k} C_1^2 \cos(k)^3 C_4^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 C_1^4 e^{71k} C_3^2 \cos(k) - 2 C_1^2 e^{71k} C_4^4 \cos(k) - 2 C_1^4 e^{81k} C_4^2 \cos(k) - 8 C_2^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k) + 8 C_2^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k)^3 + 8 C_2^2 e^{41k} C_1^4 \cos(k)^2 + 4 C_2^2 e^{61k} C_1^4 \cos(k)^2 + 64 C_2^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k)^4 + 32 \\
 & C_2^2 e^{51k} C_1^4 \cos(k)^5 - 16 C_2^2 e^{41k} C_1^4 \cos(k)^4 - 48 C_2^2 e^{61k} C_1^4 \cos(k)^3 - 48 C_2^2 e^{61k} C_1^4 \cos(k)^4 - 8 C_4^2 e^{81k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k) + 16 C_4^2 e^{81k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k)^3 + 2 I C_2^2 e^{61k} \rho C_1^3 \cos(k) - 2 I \\
 & C_1^5 e^{81k} \theta \rho \cos(k) + 8 I C_1^5 \cos(k)^3 e^{61k} \rho \theta - 2 I \rho^3 e^{61k} \theta C_1^3 \cos(k) - 2 I \rho e^{61k} C_2^3 C_1^3 \cos(k) + 2 I \rho^3 e^{61k} \theta^2 C_1^3 \cos(k) + 4 I C_1^5 \cos(k)^2 e^{71k} \theta \rho + C_1 e^{71k} C_4^5 - C_1 e^{61k} C_4^5 + C_1^3 e^{81k} C_4^3 \\
 & + C_2 e^{31k} C_4^4 C_1 + C_4^4 e^{51k} C_1^2 + C_4^4 e^{31k} C_3 C_1 - 16 C_4^2 e^{41k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k)^3 - 4 C_4^2 e^{41k} \theta \rho^2 C_1^2 \cos(k) + 16 C_4^2 e^{41k} \theta \rho^2 C_1^2 \cos(k)^3 + 6 C_4^2 e^{41k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k) + 4 C_4^2 e^{101k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k) \\
 & - 16 C_4^2 e^{91k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k)^2 - 4 C_2 e^{41k} C_3 C_4^2 C_1^2 \cos(k) - 2 C_1^3 e^{81k} \theta^2 \rho^2 \cos(k) C_4 - 4 C_4^2 e^{61k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k) + 4 C_4^2 e^{41k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k)^2 - 8 C_4^2 e^{51k} \theta \rho^2 C_1^2 \cos(k) + 4 C_4^2 e^{51k} \theta^2 \rho^2 \\
 & C_1^2 \cos(k) - 16 C_4^2 e^{51k} \theta \rho^2 C_1^2 \cos(k)^2 + 4 C_4^2 e^{61k} \theta \rho^2 C_1^2 \cos(k) + 16 C_4^2 e^{51k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k)^2 - 4 C_4^2 e^{41k} \theta^2 \rho^2 C_1^2 \cos(k)^2 + 4 C_1^3 \cos(k) e^{61k} \theta^2 \rho^2 C_4 - 8 C_1^3 \cos(k)^3 e^{61k} \theta^2 \rho^2 C_4 + 8 \\
 & C_1^3 \cos(k)^2 e^{71k} \theta^2 \rho^2 C_4 + 2 \rho^2 e^{81k} \theta C_1^3 \cos(k) C_4 - 4 \rho^2 e^{61k} C_1^3 \cos(k) \theta C_4 + 8 \rho^2 e^{61k} \theta C_1^3 \cos(k)^3 C_4 - 8 \rho^2 e^{71k} \theta C_1^3 \cos(k)^2 C_4 + 4 \rho^2 e^{61k} \theta C_4^2 C_1^2 \cos(k)^2 + 4 C_2 e^{51k} C_3 C_4^2 C_1^2 \cos(k) \\
 & + 2 I \rho e^{91k} C_4^4 C_1 - 2 I C_3^4 e^{101k} \rho C_1 + C_1^3 e^{71k} C_3 C_4^2 + C_2^2 e^{51k} C_4^2 C_1^2 - C_2^2 e^{41k} C_4^2 C_1^2 + 32 I C_4^2 (e^{41k})^2 \rho C_1^3 \cos(k)^4 - 16 I C_4^2 (e^{41k})^2 \rho C_1^3 \cos(k)^2 - 8 I \rho (e^{41k})^2 C_4^4 C_1 \cos(k) \\
 & - 8 I \rho (e^{41k})^2 C_4^4 C_1 \cos(k)^2 + 2 I C_4^4 (e^{41k})^2 \rho \theta C_1 + 24 I C_1^5 \cos(k)^3 e^{81k} \theta \rho + 12 I C_1^5 \cos(k) e^{71k} \theta \rho - 8 I C_1^5 \cos(k) e^{61k} \theta \rho - 4 I C_1^2 \cos(k) e^{71k} \rho C_4^3 + 4 I C_1^2 \cos(k) e^{61k} \rho C_4^3 + 4 I \\
 & C_1^3 \cos(k)^2 e^{41k} \theta \rho C_4^3 + 4 I C_1^2 \cos(k)^2 e^{61k} \rho C_4^3 - 2 I C_2^2 e^{61k} \rho \theta C_1^3 + 2 I C_2^2 e^{51k} \rho \theta C_1^3 + 2 I C_2 e^{51k} C_1^2 C_4^2 \rho - 2 I \rho e^{51k} C_3 C_4^2 C_1^2 + 2 I C_1^4 e^{81k} \theta \rho C_4 + 4 I C_1^3 e^{61k} \theta \rho C_4^2 - 2 I C_1^3 e^{51k} \theta \rho \\
 & C_4^2 - I C_1^2 e^{61k} \theta \rho C_4^3 - I C_1^2 e^{81k} \rho \theta C_4^3 + 2 I \rho e^{71k} C_4 C_1^3 C_2 - 8 I \rho^3 e^{51k} \theta^2 C_1^3 \cos(k) - 4 I C_1^3 \cos(k)^2 e^{61k} C_4^2 \rho + 8 I C_1^3 \cos(k)^3 e^{61k} \rho C_4^2 - 16 I C_1^3 \cos(k)^4 e^{51k} \rho C_4^2 - 2 I C_4^2 e^{61k} \\
 & C_1^3 \cos(k) \rho - 4 I C_2 e^{31k} \rho C_1^2 \cos(k) C_4^2 + 24 I \rho^3 e^{51k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^3 - 8 I \rho^3 e^{41k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^3 + 4 I \rho^3 e^{71k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^2 - 16 I \rho^3 e^{61k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^3 + 16 I \rho^3 e^{51k} \theta^2 C_1^3 \cos(k)^4 + 16 I \\
 & C_1^5 \cos(k)^2 e^{81k} \theta \rho + 8 I C_1^5 \cos(k)^2 e^{51k} \rho \theta - 16 I C_1^3 \cos(k)^3 e^{91k} \rho \theta C_4^2 + 16 I C_1^3 \cos(k)^2 e^{101k} \rho \theta C_4^2 + 4 I C_2 e^{91k} \rho \theta C_1^2 C_4^2 + 32 I C_4^2 e^{71k} C_2 \rho C_1^2 \cos(k)^4 - 4 I C_4^2 e^{101k} C_2 \rho C_1^2 \cos(k) \\
 & - 8 I C_4^2 e^{71k} \theta \rho C_1 \cos(k)^2 - 4 I C_1^3 e^{111k} \rho \theta \cos(k) C_4^2 - 16 I C_2 e^{71k} \rho C_1^2 \cos(k)^2 C_4^2 - 4 I C_4^2 e^{91k} \rho \theta C_1 \cos(k) + 24 I C_4^2 e^{91k} C_2 \rho C_1^2 \cos(k)^2 + 2 I C_2 e^{41k} \rho C_1^2 C_4^2 - I C_4^2 e^{61k} \rho C_1^2 C_2 \\
 & + 16 I C_1^4 \cos(k)^3 e^{71k} \rho C_4 + 4 I C_2^2 e^{41k} \rho C_1^3 \cos(k) - 4 I \rho e^{81k} C_1^4 \cos(k)^2 C_4 + 2 I \rho e^{51k} C_4^4 C_1 \cos(k) - 4 I C_1^2 \cos(k)^2 e^{51k} \rho C_4^3 - 16 I C_1^4 \cos(k)^4 e^{61k} \rho C_4 + 32 I C_1^5 \cos(k)^5 e^{61k} \rho \theta \\
 & - 16 I C_1^5 \cos(k)^4 e^{51k} \rho \theta - 16 I \rho^3 e^{51k} \theta C_1^3 \cos(k)^4 + 8 I \rho^3 e^{41k} \theta C_1^3 \cos(k)^3 + 2 I \rho^3 e^{71k} \theta^2 C_1^3 \cos(k) - 4 I \rho^3 e^{71k} \theta C_1^3 \cos(k)^2 - 4 I \rho e^{71k} C_2^2 C_1^3 \cos(k)^2 - 16 I \rho e^{51k} C_2^2 C_1^3 \cos(k)^4
 \end{aligned}$$